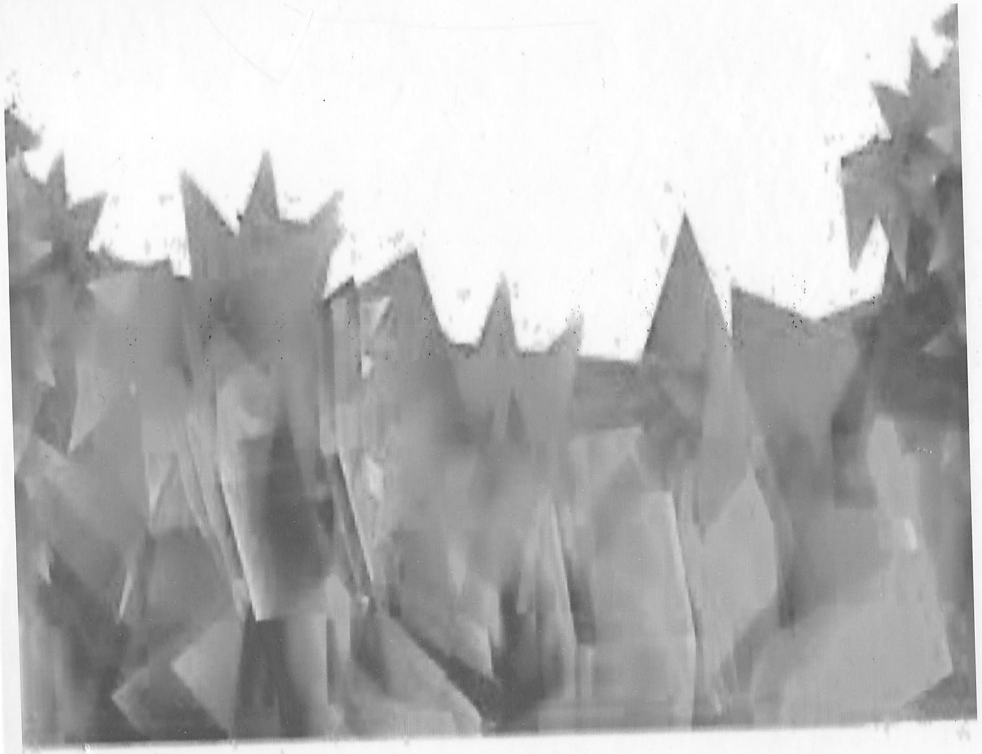
MIRZAYEV AKROMJON O'KTAMJONOVICH

ANALITIK GEOMETRIYADAN MASALALAR TO'PLAMI



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

MIRZAYEV AKRAMJON O‘KTAMJONOVICH

ANALITIK GEOMETRIYADAN MASALALAR TO’PLAMI

Universitet va pedagogika institutlari talabalari uchun o’quv qo’llanma

Toshkent
“Innovatsiya-Ziyo”
2021

UDK : 514.2
BBK: 22.161
A 54

A.O'.Mirzayev
Analitik geometriyadan masalalar to'plami. Universitet va pedagogika institutlari talabalari uchun o'quv qo'llanma. – **Toshkent: "Innovatsiya-Ziyo", 2021, 128 b.**

Ushbu o'quv qo'llanma universitet va pedagogika institutlari yo'nalishlariining bakalavrlar Davlat ta'lim standartlariga mos keladi.

O'quv qo'llanmada vektorlar va vektorlar ustida chiziqli amallar, to'g'ri chiziq va tekislik tenglamalari, tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlar va ikkinchi tartibli sirtlar bo'limlariga oid materiallarni o'z ichiga oladi. O'quv qo'llanmaning har bir mavzusi zamonaviy horijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari tahlili asosida yozilgan va mavzular yuzasidan tayanch iboralar, nazariy qism, xulosa, mustaqil ishlash uchun masalalar va nazorat savollarini o'z ichiga oladi.

O'quv qo'llanma oliy ta'lim muassassasalarining talabalari va o'qituvchilari uchun mo'ljallangan.

Taqrizchilar:
K.Mamadaliyev – *fizika-matematika fanlari nomzodi, AndDU dotsenti*
I.Soliyev – *pedagogika fanlari falsafa doktori (PhD), FarDu katta o'qituvchisi;*

Andijon davlat universiteti tomonidan nashrga tavsiya etilgan.

ISBN 978-9943-7324-9-0
© A.O'.Mirzayev, 2021.
© "Innovatsiya-Ziyo", 2021.

SO'Z BOSHI

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamonaviy talablarga javob bera oladigan pedagog kadrlar tayyorlashda ularga chuqur matematik bilimlar berish va bu bilimlarni masalalarni yechishga tatbiq eta olishga o'rgatish katta ahamiyatga ega. Shu sababli pedagogika yo'nalishlari bo'yicha ta'lim oluvchi bakalavrlarning "Analitik geometriya" fanini o'qitish ko'zda tutilgan. Hozirgi davrda bu fanni o'qitish alohida ahamiyatga ega bo'lgani uchun oxirgi yillarda chet ellarda bu fan bo'yicha juda ko'p o'quv-uslubiy adabiyotlar yaratilmoqda. Ulardan bir qismi o'quv qo'llanmani yoritilishida foydalanilgan va bu yordamida o'quv qo'llanmaning mazmun mohiyati ancha kengaytirilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlar va pedagogika institutlarining talabalari uchun rejalashtirilgan mavzularni o'z ichiga olgan. Bu mavzular bo'lg'usi mutaxassislar uchun zarur bo'lgan vektorlar va vektorlar ustida chiziqli amallar, to'g'ri chiziq va tekislik tenglamalari, tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlar va ikkinchi tartibli sirtlar kabi asosiy bo'limlarini tashkil etadi. Mavzular bo'yicha nazariy ma'lumotlar, ular asosida yechilgan misol va masalalar hamda talabalar mustaqil yechishlari uchun topshiriqlar keltirilgan.

Ushbu darslikdan 60110500 - Boshlang'ich ta'lim, 60111300 - Musiqiy ta'lim, 60111200 – Tasviriy san'at va muhandislik grafikasi, 60110200 - Maktabgacha ta'lim, 60112300 - Texnologik ta'lim,

DENOV TADBIRKORLIK VA PEDAGOGIKA INSTITUTI ARM
№ 29010

60112200 - Jismoniy madaniyat ta'lim yo'nalishlari talabalari ham foydalanishi mumkin.

Hozirgi davrda talabalarning mustaqil ishiga katta e'tibor berilmoqda va shu sababli ayrim tasdiqlarning isbotlari talabalarga havola etilgan. Bundan tashqari bir qator mavzular kengaytirilgan va nisbatan chuqurroq yoritilgan bo'lib, o'qituvchi ulardan talabalarning mustaqil ishini tashkil etish uchun foydalanishi mumkin. Talabalarning bo'sh vaqtlarini samarali tashkil etish, analitik geometriya fani yordamida ularning kreativ fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirish va kasbiy kompetensyalarini rivojlatirishda darslikning ahamiyati katta hisoblanadi.

O'quv qo'llanmani o'qib chiqib o'zining fikr va mulohazalarini bildirgan Andijon davlat universiteti dotsenti K.Mamadaliyevga va Farg'ona davlat universiteti katta o'qituvchisi I.Soliyevga muallif o'z minnatdorchiligini bildiradi.

Muallif ushbu o'quv qo'llanma kamchiliklardan holi degan fikrdan uzoqda bo'lganligi tufayli uni takomillashtirish bo'yicha kitobxonlarning taklif va mulohazalarini minnatdorchilik bilan qabul etadi.

Muallif

ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI

1-§. VEKTORLAR. VEKTORLAR USTIDA CHIZIQLI AMALLAR

Raja:

1. **Vektorlar va ular ustida amallar**
2. **Tekislik va fazoda Dekart koordinatalar sistemasi**
3. **Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa**
4. **Vektorlar sistemasi**

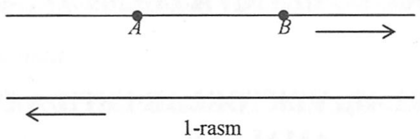
Tayanch iboralar: Vektor, vektorning uzunligi, komplanar vektor, vektorlarning yig'indisi, vektorlarning ayirmasi, vektorlarni songa ko'paytirish, dekart koordinatalar sistemasi, vektorning ortlari, ikki nuqta orasidagi masofa.

1. Vektorlar va ular ustida amallar

Elementar geometriyadan ma'lumki, kesma deb to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi bilan chegaralangan bo'lagiga aytiladi. Uning uzunligi deb, tanlangan masshtab birligiga nisbatan kesmaning chegaralari orasidagi masofani o'lchash natijasida olinadigan musbat son qiymatini tushunamiz.

Agar biror to'g'ri chiziqda ikki A va B nuqtalar olib, shu to'g'ri chiziq bo'ylab siljiydigan nuqtani qarasak, bu nuqta to'g'ri chiziqda ikki yo'nalish aniqlaydi: bittasi A nuqtadan B nuqta tomonga qarab, ikkinchisi teskari, ya'ni B nuqtadan A nuqta tomonga harakatlanganda. Bu yo'nalishlardan birini musbat yo'nalish deb atasak, unga teskari yo'nalishni manfiy yo'nalish deb atash mumkin.

Musbat yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq **o'q** deb ataladi.



1-rasm

Agar o‘qlar parallelgina bo‘lib qolmay, musbat yo‘nalishlari ham bir xil bo‘lsa, u holda bu o‘qlarni bir xil yo‘nalgan deymiz. Parallel bo‘lib, musbat yo‘nalishlari teskari bo‘lgan o‘qlarni qarama-qarshi **yo‘nalgan o‘qlar** deb ataladi. Agar o‘qlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa, musbat yo‘nalishlari qandayligidan qat’iy nazar ularni ortogonal o‘qlar deyiladi.

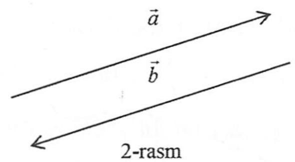
Agar to‘g‘ri chiziqning biror kesmasida musbat yo‘nalish berilgan bo‘lsa, bu kesmani **vektor** deb ataladi. Kesmaning chegara nuqtalaridan birini uning boshi, ikkinchisini oxiri desak, vektorning musbat yo‘nalishi uning boshidan oxiriga qarab bo‘ladi.

Boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo‘lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ ko‘rinishda belgilanadi. Vektorni bitta harf bilan belgilash ham qabul qilingan. Masalan, $\vec{a}$, $\vec{b}$ yoki $\vec{c}$ va hokazo.

Vektorning uzunligi deb, shu vektorni ifodalovchi kesmaning uzunligi tushuniladi. Demak, agar AB kesmaning uzunligini $|AB|$, $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini $|\overrightarrow{AB}|$ deb belgilasak, $|\overrightarrow{AB}|=|AB|$ bo‘ladi. Xuddi shunday $\vec{a}$ vektorning uzunligi uchun $|\vec{a}|$ belgi qabul qilingan.

Boshi va oxiri ustma-ust tushgan $\overrightarrow{AA}$ vektorni **nol vektor** deb ataladi va $\vec{0}$ ko‘rinishda belgilanadi. Ma’lumki, $|\overrightarrow{AA}|=|\vec{0}|=0$ bo‘ladi.

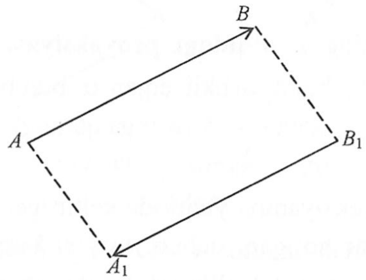
Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar parallel, uzunliklari va musbat yo‘nalishlari bir xil bo‘lsa, ular **teng** deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ deb yoziladi. Uzunliklari bir xil parallel vektorlar har doim ham teng bo‘lavermaydi, masalan, $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar 2-rasmdagidek bo‘lsa.



2-rasm

Uzunliklari bir xil, parallel, lekin qarama-qarshi yo‘nalgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar **qarama-qarshi vektorlar** deb ataladi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ deb belgilanadi. Masalan, 2-rasmdagi $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektor, shu sababli $\vec{b}=-\vec{a}$.

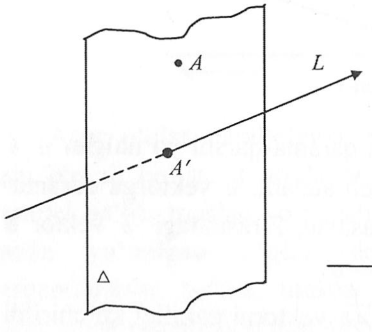
Agar $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{AB}$ vektorni parallel ko‘chirildi deb tushuniladi (3-rasmga qarang).



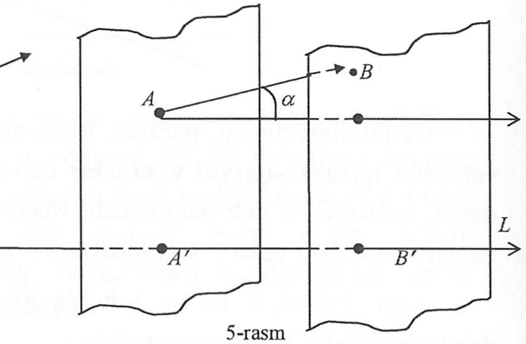
3-rasm

Bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda joylashgan vektorlar **kollinear vektorlar** deb ataladi.

A nuqtaning L to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyasi deb, L to‘g‘ri chiziqning unga perpendikulyar bo‘lgan A nuqtadan o‘tuvchi tekislik bilan A' kesishish nuqtasiga aytiladi (4-rasmga qarang).



4-rasm



5-rasm

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorning **L o'qidagi proyeksiyasi** deb, $\vec{a}$ vektorning uzunligini, uni L o'q bilan tashkil etgan α burchagining kosinusiga bo'lgan ko'paytmasiga aytamiz (5-rasmga qarang), ya'ni

$$np_L.\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha, \qquad (0\le\alpha\le\pi)$$

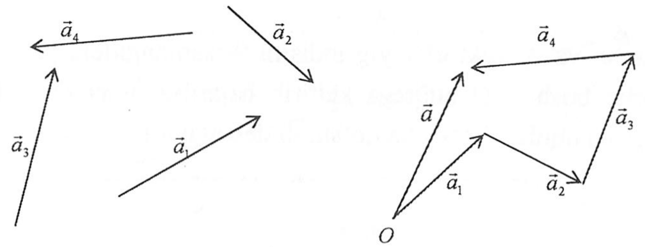
Eslatma. Proyeksiyaning yuqorida keltirilgan ta'rifi Δ tekislik L o'qqa perpendikulyar bo'lgani uchun, **to'g'ri burchakli proyeksiya** deb ham ataladi. Agar Δ tekislikni L to'g'ri chiziqqa og'ma o'tgan biror Δ′ tekislikka parallel o'tkazsak, bu proyeksiyani **og'ma burchakli proyeksiya** deyiladi. Bunday proyeksiya $np_L\vec{AB}$ (Δ′ga parallel) ko'rinishda belgilanadi. Agar qavs ichida hech qanday ma'lumot berilmagan bo'lsa, bu proyeksiyani to'g'ri burchakli **(ortogonal) proyeksiya** deb tushunamiz.

Teng vektorlarning bitta o'qdagi proyeksiyalari ham teng va bir vektorning o'zaro parallel L va L' o'q lardagi proyeksiyalari ham teng bo'ladi. Qarama-qarshi vektorlarning L o'qdagi proyeksiyalari ishorasiga farq qiladi, chunki agar $\vec{a}$ L o'qga α burchakka og'ib o'tgan bo'lsa, $-\vec{a}$ L o'q bilan $\alpha+\pi$ burchak tashkil etadi, $\cos\alpha$ va $\cos(\pi+\alpha)$lar qiymati ma'lumki, ishorasi bilan farq qiladi.

Agar $\vec{a}$ vektor Δ tekislikka parallel bo'lsa, uning L o'qdagi proyeksiyasi nol bo'ladi, chunki $\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad np_L\vec{a}=|\vec{a}|\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Agar $\vec{a}$ vektor L o'qga parallel bo'lsa, $np_L\vec{a}=|\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|$ bo'ladi.

IV. Bizga $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy O nuqta olib $\vec{a}_1$ ni boshini shu nuqtaga, $\vec{a}_2$ ni $\vec{a}_1$ ning oxiriga, $\vec{a}_3$ ni $\vec{a}_2$ ning oxiriga va hokazo. Tartibda barcha vektorlarni parallel ko'chiramiz. Hosil bo'lgan siniq chiziq berilgan vektorlar sistemasining **ko'p burchagi** deb ataladi (6-rasmga qarang).



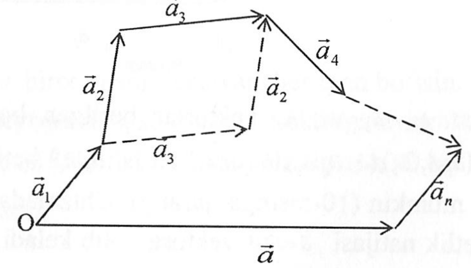
6-rasm

Bu ko'pburchakni yopuvchi $\vec{a}$ tomoni berilgan vektorlarning yig'indisi deb atalib, quyidagi

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n$$

ko'rinishda belgilanadi.

Vektorlarni qo'shishning bu ta'rifi yig'indi uchun kommutativlik (ya'ni qo'shiluvchilarning o'rnini almashtirish) xossasiga ega (7-



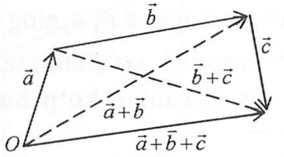
7-rasm

rasmga qarang).

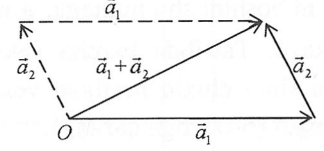
Bu qo‘shish amali uchun assotsiativlik xossasi, ya’ni $\vec a, \vec b, \vec c$ vektorlar uchun

$$(\vec a+\vec b)+\vec c=\vec a+(\vec b+\vec c)$$

munosabat ham o‘rinli (8-rasmga qarang).

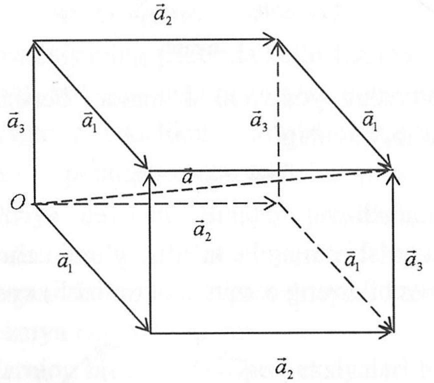


8-rasm



9-rasm

Agar $\vec a_1$ va $\vec a_2$ vektorlar yig‘indisini 9-rasmdagidek, ya’ni $\vec a_1$ va $\vec a_2$ vektorlar boshini O nuqtaga keltirib bajarilsa, u holda vektorlar parallelogram qoidasi bo‘yicha qo‘shildi deb ataymiz.



10-rasm

Agar $\vec a_1$, $\vec a_2$ va $\vec a_3$ vektorlar berilgan bo‘lsa, ularni olti xil: $(\vec a_1,\vec a_2,\vec a_3),(\vec a_1,\vec a_3,\vec a_2),(\vec a_2,\vec a_1,\vec a_3),(\vec a_2,\vec a_3,\vec a_1)$ va $(\vec a_3,\vec a_2,\vec a_1)$ ketma-ketliklar bo‘yicha qo‘shish mumkin (10-rasmga qarang). Chizmadan ko‘rinadiki, barcha ketma-ketlik natijasi $\vec a=\overline{OB}$ vektorga olib keladi, ya’ni boshlari bir O nuqtaga keltirilgan vektorlar yig‘indisi, shu vektorlardan qurilgan parallepipedning O uchidan chiqib unga qarama-qarshi uchiga

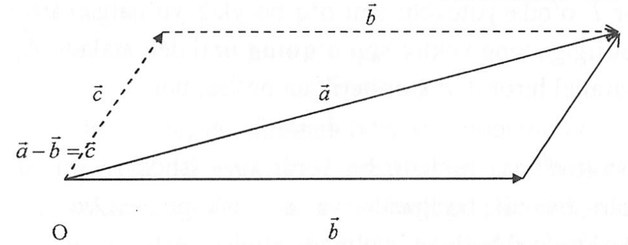
yo‘nalgan diagonaldan iborat bo‘lar ekan. Xuddi shu xulosaga, qo‘shishning parallelogram usuli yordamida ham kelsa bo‘ladi. Bu ishni bajarishni o‘quvchining o‘ziga havola qilamiz.

Ta’rif. $\vec a$ va $\vec b$ vektorlarning ayirmasi deb shunday $\vec c$ vektorga aytamizki, uning $\vec b$ vektor bilan yig‘indisi $\vec a$ vektor bo‘ladi, ya’ni $\vec a=\vec b+\vec c$.

Buni

$$\vec c=\vec a-\vec b$$

ko‘rinishda belgilash qabul qilingan.



11-rasm

Ta’rifdan va 11-rasmdan ko‘rinadiki, $\vec a$ va $\vec b$ vektorlarning ayirmasini qurish uchun, ularning boshini bir O nuqtaga keltirib, ayiruvchi vektor oxiridan kamayuvchi vektor oxiriga yo‘nalgan vektorni olish kerak ekan.

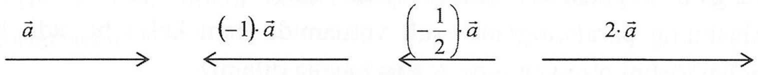
Eslatma. $\vec a-\vec b$ ayirmani $\vec a$ va $-\vec b$ larni qo‘shib bajarsa ham bo‘ladi, ya’ni

$$\vec c=\vec a-\vec b=\vec a+(-\vec b)$$

Bizga $\vec a$ vektor va biror m son (skalyar) berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. $m\vec a$ **ko‘paytma** deb, shunday $\vec b$ vektorga aytamizki,

1) $|\vec b|=|m||\vec a|$ va 2) agar $m>0$ bo‘lsa, $\vec a$ kabi yo‘nalgan $m<0$ bo‘lsa, $\vec a$ ga teskari yo‘nalgan bo‘ladi.



12-rasm

12-rasmda $m=-1,\ m=-\frac{1}{2},\ m=2$ bo‘lgan hollar ko‘rsatilgan. Chizmadan ko‘rinadiki, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Bu ko‘paytma quyidagi taqsimot xossalariga ega:

1^0. $m(\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n)=m\vec{a}_1+m\vec{a}_2+...+m\vec{a}_n$

2^0. $(m_1+m_2+...+m_n)\vec{a}=m_1\vec{a}+m_2\vec{a}+...+m_n\vec{a}$

Biror L o‘qda yotuvchi shu o‘q bo‘ylab yo‘nalgan uzunligi bir o‘lcham birligiga teng vektor shu **o‘qning orti** deb ataladi. Agar $\vec{e}$ ort va unga parallel biror $\vec{a}$ vektor berilgan bo‘lsa, uni

$$\vec{a}=\pm|\vec{a}|\vec{e}$$

ko‘rinishda ifodalasa bo‘ladi, bu yerda «+» ishora $\vec{a}$ va $\vec{e}$ larning yo‘nalishlari bir xil bo‘lganda va «-» ishora $\vec{a}$ va $\vec{e}$ larning yo‘nalishlari teskari bo‘lganda olinadi.

$\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlarning biror L o‘qdagi proyeksiyalari quyidagi xossalarga ega:

$$np_L\vec{a}+np_L\vec{b}=np_L(\vec{a}+\vec{b}) \qquad (1)$$

$$np_L(m\vec{a})=mnp_L\vec{a} \qquad (2)$$

Xuddi shunday $\vec{a}=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$np_L(\vec{a}-\vec{b})+np_L\vec{b}=np_L\vec{a}$$

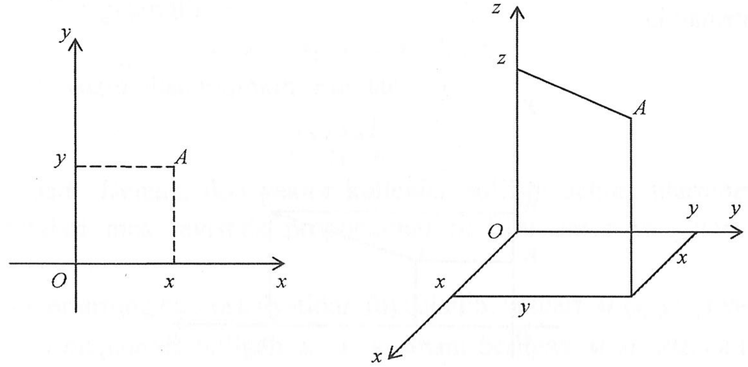
yoki

$$np_L\vec{a}-np_L\vec{b}=np_L(\vec{a}-\vec{b})$$

(3)

V. Tekislikda o‘zaro perpendikulyar, O nuqtada kesishuvchi x va y o‘qlar, fazoda esa o‘zaro perpendikulyar, O nuqtada kesishuvchi x, y, z o‘qlar berilgan bo‘lsin. O nuqtani koordinatalar boshi, x, y, z o‘qlarni koordinatalar o‘qlari deb ataymiz. Tekislikdagi va fazodagi har qanday nuqta o‘rni uning koordinatalar o‘qidagi proyeksiyalarini O nuqtagacha bo‘lgan masofalari orqali yagona ravishda aniqlanadi.

Bu masofalarni shu nuqtaning koordinatalari deb ataymiz (13-rasmga qarang).



13-rasm

Uch o‘lchovli fazoda olingan ixtiyoriy nuqtani O nuqta bilan birlashtirib turuvchi $\overline{OA}$ vektor A nuqtaning **radius-vektori** deb ataladi. $\overline{OA}$ vektorning x, y va z o‘qlardagi proyeksiyalarini mos ravishda x, y, z deb belgilasak, ular 13-rasmdan ko‘rinadiki, A nuqtaning koordinatalaridan iborat bo‘ladi. x ni A nuqtaning abssissasi, y ni ordinatasi va z ni aplikatasi deb ataymiz.

(x, y, z) sonlar uchligi fazoning A nuqtasi bilan uning radius-vektori o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatadi. Shu sababli, (x, y, z) uchlikni ayrim hollarda A nuqta yoki $\overline{OA}$ vektor deb tushunamiz.

Har qanday vektorni o‘ziga parallel ravishda ko‘chirish mumkin bo‘lgani uchun, agar $\overline{OA}=(x, y, z)$ bo‘lib, uni o‘ziga parallel ko‘chirish natijasida hosil bo‘lgan vektor $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$ bo‘lsa, u holda $x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1$ bo‘ladi.

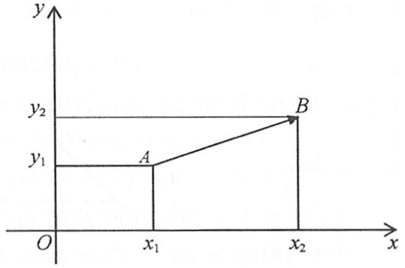
(1), (2) va (3) xossalarga ko‘ra

$$(x,y,z)\pm(x_1,y_1,z_1)=(x\pm x_1,\ y\pm y_1,\ z\pm z_1) \qquad (4)$$

$$\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z) \qquad (5)$$

deb yozish mumkin.

Tekislikda boshi $A(x_1,y_1)$va oxiri $B(x_2,y_2)$ nuqtalarda bo‘lgan $\vec{a}=\vec{AB}$ vektor berilgan bo‘lsin (14-rasmga qarang). Chizmadan ko‘rinadiki



14-rasm

$$np_x\, \overrightarrow{AB}=x_2-x_1,\ np_y\, \overrightarrow{AB}=y_2-y_1$$

Demak,

$$\vec{a}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$$

ekan. Xuddi shunday, fazoda berilgan $\overrightarrow{AB}$, bu yerda $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ vektor uchun

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-y_1)$$

x, y, z o‘qlarining ortlarini mos ravishda $\vec{i},\vec{j}$ va $\vec{k}$ bilan belgilaymiz. Ixtiyoriy (*x, y, z*) vektorni

$$(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Haqiqatan, agar

$$\vec{i}=(1,0,0),\quad \vec{j}=(0,1,0),\quad \vec{k}=(0,0,1)$$

ekanligini e’tiborga olsak,

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)=$$
$$=(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)=(x,y,z)$$

kelib chiqadi.

Bizga $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Bu vektorlar parallel bo‘lishi uchun ularning koordinatalari qanday shartlarni qanoatlantirishi kerakligini aniqlash talab etilgan bo‘lsin. Agar $\vec{a}=0$ bo‘lsa, u holda uning yo‘nalishi aniq emas, shu sababli uni

$\vec{b}$ ga ham parallel deb qarash mumkin. Endi faraz qilaylik, $\vec{a}\neq 0$ bo‘lsin. $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ ga parallel bo‘lishi uchun $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ bo‘lishi zarur va yetarlidir. Oxirgi tenglikni

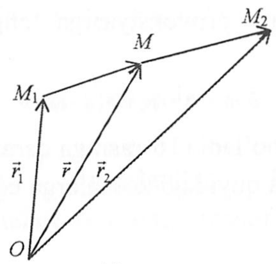
$$x_2=\lambda x_1,\ \ y_2=\lambda y_1,\ \ z_2=\lambda z_1$$

ko‘rinishda yozib olish mumkin. Bundan

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}$$

kelib chiqadi. Demak, ikki vektor kolleniar bo‘lishi uchun, ularning koordinatalari mos ravishda proporsional bo‘lishi zarur va yetarli ekan.

Vektorlarning bu xususiyatidan foydalanib, uchlari $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalarda bo‘lgan M_1M_2 kesmani berilgan $M_1M:MM_2=\lambda:1$ nisbatda bo‘luvchi *M* nuqtaning koordinatalarini topish masalasini hal qilamiz.



15-rasm

Agar $\vec{OM_1}=\vec{r}_1,\ \vec{OM_2}=\vec{r}_2,\ \vec{OM}=\vec{r}$ desak, u holda $\vec{M_1M}=\vec{r}-\vec{r}_1,\ \vec{MM_2}=\vec{r}_2-\vec{r}$ bo‘ladi. $\vec{M_1M}$ va $\vec{MM_2}$ vektorlar kolleniar bo‘lgani uchun, berilgan nisbatga ko‘ra

$$\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda(\vec{r}_2-\vec{r})$$

bo‘ladi. Bundan $\lambda\neq -1$ bo‘lgani uchun

$$\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$$

yoki

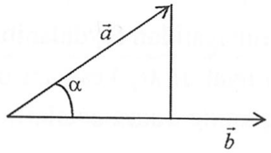
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

kelib chiqadi.

III. <u>Ta'rif.</u> $\vec{a}$ va $\vec{b}$ **vektorlarning skalyar ko'paytmasi** deb, ular uzunliklarining, ular orasidagi burchak kosinusiga bo'lgan ko'paytmasiga aytamiz, ya'ni

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\,\vec{b}$$



16-rasm

Vektorning proyeksiyasini ta'rifiga ko'ra, $|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$ (bu yerda $\alpha=(\vec{a},\vec{b})$) $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektordagi proyeksiyasiga teng bo'ladi, shu sababli skalyar ko'paytmani

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

ko'rinishda ham yozsa bo'ladi (16-rasmga qarang).

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\vec{a}\circ\vec{b}=\vec{b}\circ\vec{a}$,

2^0. $\vec{a}\circ(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{c}$

3^0. $(\lambda\vec{a})\circ(\mu\vec{b})=(\lambda\mu)\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})$ (λ,μ - ixtiyoriy sonlar)

4^0. $\vec{a}\circ\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$,

5^0. $\vec{a}\circ\vec{b}=0$ bo'lishi uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar o'zaro perpendikulyar bo'lishi zarur va yetarlidir.

1^0-xossaning isboti.

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=\vec{b}\circ\vec{a}$$

2^0, 3^0, 4^0-xossalarning isbotini bajarishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

5^0-xossaning isboti. Zarurligi. $\vec{a}\circ\vec{b}=0$ bo'lsin. U holda, $0=\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ dan $|\vec{a}|\neq 0$, $|\vec{b}|\neq 0$ bo'lgani uchun $\cos\alpha=0$, o'z navbatida bundan $\alpha=\frac{\pi}{2}$, ya'ni $\vec{a}\perp\vec{b}$ ekanligi kelib chiqadi.

Yetarligi. Agar $\alpha=(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\cos\alpha=0$, shu sababli $\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$ bo'ladi.

5^0-xossa vektorlarning **perpendikulyarlik sharti** deb ataladi.

4^0 va 5^0 - xossalarga asosan

$$\vec{i}\circ\vec{i}=\vec{j}\circ\vec{j}=\vec{k}\circ\vec{k}=1,\quad \vec{i}\circ\vec{j}=\vec{i}\circ\vec{k}=\vec{j}\circ\vec{k}=0$$

Endi agar $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ bo'lsa, u holda

$$\vec{a}\circ\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\circ(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2\vec{i}^2+x_1y_2\vec{i}\circ\vec{j}+$$
$$+x_1z_2\vec{i}\circ\vec{k}+y_1x_2\vec{j}\circ\vec{i}+y_1y_2\vec{j}^2+y_1z_2\vec{j}\circ\vec{k}+z_1x_2\vec{k}\circ\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\circ\vec{j}+$$
$$+z_1z_2\vec{k}^2=x_1x_2+y_{1y}y_2+z_1z_2$$

Xususan, agar $\vec{a}=\vec{b}$ bo'lsa,

$$\vec{a}\circ\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$$

yoki

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

bo'ladi.

Bu formuladan foydalanib, fazoning ixtiyoriy $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalari orasidagi masofa d_{AB} ni quyidagicha topsa bo'ladi:

$$d_{AB}=|\vec{a}|=|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

1-misol. (1, 1, 1) va (1,2,3) vektorlarning uzunligini toping.

Yechish.

$$|(1,1,1)|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3},\ |(1,2,3)|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$$

2-misol. $\vec{a}=(1,0,1)$ va $\vec{b}=(1,2,2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

DENOV TADBIRKORLIK VA PEDAGOGIKA INSTITUTI ARM № 29010

formulani keltirib chiqaramiz. Bundan

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}, \quad |\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=1\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 2=1+2=3$$

Demak,

$$\cos\alpha=\frac{3}{3\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Faraz qilaylik, berilgan $\vec{a}$ vektor x o‘qi bilan α burchak, y o‘qi bilan β burchak, z o‘qi bilan γ burchak tashkil etsin. U holda

$$X=np_z\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha,$$
$$Y=np_z\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\beta,$$
$$Z=np_z\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\gamma$$

ekanligidan

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \qquad (6)$$

kelib chiqadi.

(6) ni kvadratlarga ko‘tarib, o‘zaro qo‘shsak,

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}=1$ munosabatni hosil qilamiz. (6) dan topiladigan $\cos\alpha$, $\cos\beta$ va $\cos\gamma$ qiymatlar $\vec{a}$ vektorning **yo‘naltiruvchi kosinuslar** deb ataladi.

Agar $\vec{a}=\vec{e}=(l,m,n)$ ort bo‘lsa, u holda

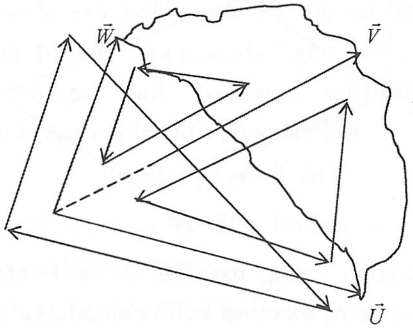
$$l=\cos\alpha,\ m=\cos\beta,\ n=\cos\gamma$$

bo‘ladi.

II. Avval R_3 fazoda yo‘nalish tushunchasini kiritib olamiz.

Bir tekislikda yotgan uchta vektorni komplanar vektorlar deb ataymiz. Bir tekislikda yotmagan har qanday vektorlar uchligini komplanar bo‘lmagan vektorlar deymiz. Bizga komplanar bo‘lmagan, boshlari bir nuqtaga keltirilgan $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorlar berilgan bo‘lsin.

__Ta’rif.__ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorlar uchligi chap sistemani tashkil etadi deymiz, agar $(\vec{u},\vec{v})$, $(\vec{v},\vec{w})$, $(\vec{w},\vec{v})$ vektorlar juftliklari aniqlaydigan aylanma yo‘nalishlar o‘zlari yotgan tekisliklarda musbat aylanma yo‘nalish bilan bir xil bo‘lsa. Loaqal bitta juftlik yo‘nalishi o‘zi yotgan tekislikning musbat aylanma yo‘nalishidan farq qilsa, bunday uchlikni o‘ng sistema deb ataymiz.



17-rasm

Misol. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ortlar uchligi chap sistemani tashkil etadi, chunki $(\vec{i},\vec{j})$, $(\vec{j},\vec{k})$ va $(\vec{k},\vec{i})$ juftliklar yo‘nalishi mos ravishda *Oxy, Oyz, Ozx* tekisliklarning musbat yo‘nalishi bilan bir xildir.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ uchlik esa o‘ng sistemadir, chunki $(\vec{i},\vec{k})$ juftlik aniqlagan aylanma yo‘nalish *Ozx* tekisligining musbat yo‘nalishiga teskari. Xuddi shunday, $(\vec{k},\vec{j})$ va $(\vec{j},\vec{i})$ juftliklar aniqlagan aylanma yo‘nalishlar mos ravishda *Oyz* va *Oxy* tekisliklarning musbat yo‘nalishiga teskaridir.

Endi geometriya va amaliy matematika masalalarida keng qo‘llaniladigan vektor ko‘paytma tushunchasini kiritamiz.

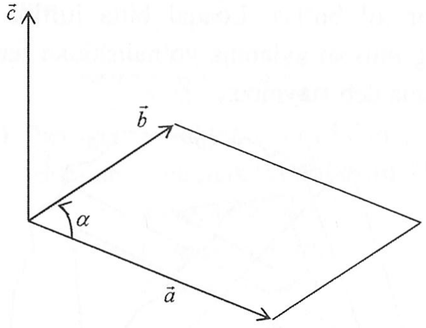
__Ta’rif.__ $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb, quyidagi uchta xususiyatga ega bo‘lgan $\vec{c}$ vektorga aytamiz:

1) $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklari va ular orasidagi φ burchak sinusi ko‘paytmasiga teng:

$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \qquad (7)$$

2) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar, jumladan $\vec{a}$ ga ham va $\vec{b}$ ga ham perpendikulyar;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar chap sistemasini tashkil etadi.



18-rasm

Birinchi xossadan $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga tortilgan parallelogram yuziga teng ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

yoki

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| \qquad (8)$$

Vektor ko'paytmani $\vec{a}\times\vec{b}$ ko'rinishda ifodalaymiz.

Yuqorida kiritilgan ikki ko'paytmalarga (ya'ni skalyar va vektor ko'paytmalar) berilgan nomlar, ularning natijalariga qarab tanlanganligini eslatib o'tamiz.

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. $\vec{a}\times\vec{b}=0$ bo'lishi uchun, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kolleniar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu xossa vektorlarning kolleniarlik sharti deb yuritiladi.

Isboti. (7) tenglikdan kelib chiqadi.

2-xossa. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$, ya'ni ko'paytuvchilar o'rni almashsa, natija faqat o'z ishorasini o'zgartiradi.

Haqiqatan, agar ko'paytmada $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'rnini almashtirsak, $\vec{b},\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik o'ng sistema bo'lib qoladi, $\vec{a}\times\vec{b}$ ning ishorasini teskarisiga almashtirsak, unda $\vec{b},\vec{a},-\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik chap sistemaga aylanadi.

3-xossa. Agar m, n – ixtiyoriy sonlar bo'lsa,

$$(m\vec{a})\times(n\vec{b})=mn(\vec{a}\times\vec{b})$$

Isboti. Agar $m=0$, $n\neq 0$ yoki $m\neq 0$, $n=0$ bo'lsa, tenglik bajarilishi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. $m\neq 0$, $n=1$ bo'lgan holni ko'rish yetarli, chunki $m=1$, $n\neq 0$ bo'lgan hol 2-xossani qo'llash hisobiga biz ko'rmoqchi bo'lgan holga keltiriladi. Avvalambor

$$|(m\vec{a})\times\vec{b}|=|m\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi$$

bu yerda agar $m>0$ bo'lsa, $\phi=\varphi$ va $m<0$ bo'lsa, $\phi=\pi-\varphi$, lekin ikkala holda ham $sin\phi=sin\varphi$ bo'lgani uchun

$$|(m\vec{a})\times\vec{b}|=|m||\vec{a}||\vec{b}|sin\varphi=|m||\vec{a}\times\vec{b}|$$

Ikkinchidan, $m\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorga kolleniar, shu sababli $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor $m\vec{a}$ ga perpendikulyar, $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ ga kolleniar bo'lgani uchun $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektor $m\vec{a}$ ga va $\vec{b}$ ga perpendikulyardir. Va nihoyat, agar $m>0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $m\vec{a}$ vektorlar, $\vec{a}\times\vec{b}$ va $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektorlar bir xil yo'nalgan bo'ladi, shu sababli $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik chap sistema bo'lgani uchun $m\vec{a},\vec{b}, m(\vec{a}\times\vec{b})$ uchlik ham chap sistema bo'ladi. $m<0$ bo'lgan hol ham xuddi shunday tekshiriladi. Xossa to'liq isbot bo'ldi.

4-xossa.

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

Isboti. Avval $\vec{a}=\vec{e}$ ort bo'lgan holni ko'raylik. $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni 3-rasmda ko'rsatilgandek qilib, $\vec{e}$ ga perpendikulyar bo'lgan π tekislikka proyeksiyalaymiz va bu proyeksiyalarni $\vec{e}$ ort atrofida soat milini harakati bo'ylab 90^0 ga bursak, $\vec{e}\times\vec{b}$ va $\vec{e}\times\vec{c}$ vektorlar hosil bo'ladi.

$np_\pi(\vec c+\vec b)=np_\pi\vec b+np_\pi\vec c$ bo'lgani uchun $\vec e\times\vec b$ va $\vec e\times\vec c$ larning yig'indisi bo'lgan va ularga tortilgan parallelogrammning diagonali $\vec e\times(\vec b+\vec c)$ga teng bo'ladi. Demak,

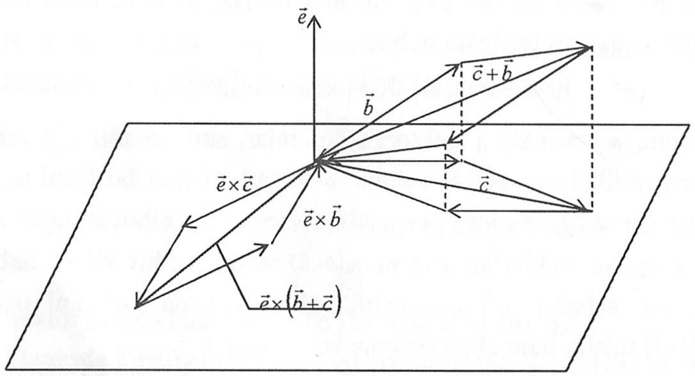
$$\vec e\times(\vec b+\vec c)=\vec e\times\vec b+\vec e\times\vec c$$

ekan.

Endi agar $\vec a$ ixtiyoriy noldan farqli vektor bo'lsa, $\vec a=|\vec a|\vec a_0$ deb (bu yerda $\vec a_0$ - $\vec a$ vektorning orti),

$$\vec a\times(\vec b+\vec c)=|\vec a|\vec a_0\times(\vec b+\vec c)=|\vec a|(\vec a_0\times(\vec b+\vec c))=|\vec a|(\vec a_0\times\vec b+\vec a_0\times\vec c)=$$
$$=|\vec a|(\vec a_0\times\vec b)+|\vec a|(\vec a_0\times\vec c)=|\vec a|\vec a_0\times\vec b+|\vec a|\vec a_0\times\vec c=\vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c$$

tenglikni hosil qilamiz. Xossa to'liq isbot bo'ldi.



19-rasm

Bu xossadan xususan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$(\vec a+\vec b)\times(\vec c+\vec d)=\vec a\times\vec c+\vec a\times\vec d+\vec b\times\vec c+\vec b\times\vec d$$

Vektor ko'paytmaning xossalaridan ortlar uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\vec i\times\vec i=\vec i^{\,2}=0,\qquad \vec j^{\,2}=0,\quad \vec k^{\,2}=0,$$
$$\vec i\times\vec j=\vec k,\qquad \vec j\times\vec k=\vec i,\quad \vec k\times\vec i=\vec j,$$
$$\vec j\times\vec i=-\vec k,\qquad \vec k\times\vec j=-\vec i,\quad \vec i\times\vec k=-\vec j$$

Shu sababli, agar vektorlar o'z proyeksiyalari bilan berilgan bo'lsa, ya'ni $\vec a=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec b=\{b_x,b_y,b_z\}$ bo'lsa, u holda

$$\vec a\times\vec b=(a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k)\times(b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k)=$$
$$=a_xb_x\vec i^{\,2}+a_xb_y(\vec i\times\vec j)+a_xb_z(\vec i\times\vec k)+a_yb_x(\vec j\times\vec i)+$$
$$+a_yb_y\vec j^{\,2}+a_yb_z(\vec j\times\vec k)+a_zb_x(\vec k\times\vec i)+a_zb_y(\vec k\times\vec j)+a_zb_z\vec k^{\,2}=$$
$$=a_xb_y\vec k-a_xb_z\vec j-a_yb_x\vec k+a_yb_z\vec i+a_zb_x\vec j-a_zb_y\vec i=$$
$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec k=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ \vec i & \vec j & \vec k\end{vmatrix}$$

Misol. $\vec a=\{4,2,-3\}$ va $\vec b=\{2,1,4\}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

Yechish. $\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}4 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 4\\ \vec i & \vec j & \vec k\end{vmatrix}=11\vec i-22\vec j-4\vec k$

Misol. $\vec a=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec b=\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarga torptilgan uchburchak yuzini toping.

Yechish. Ma'lumki (qarang, (8)),

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec a\times\vec b|$$

Shu sababli,

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}$$

Misol. $A(1,-1,2)$, $B(0,1,-1)$ va $C(-1,2,3)$ uchlari berilgan $ABCD$ parallelogrammning yuzini toping.

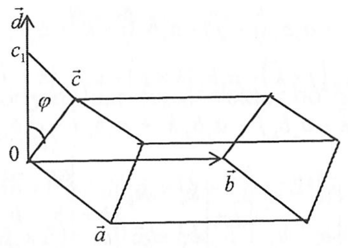
Yechish. $\vec a=\vec{AB}=\{-1,2,-3\}$, $\vec b=\vec{AC}=\{-2,3,1\}$ vektorlar tuzib olib, avvalgi misol natijasini qo'llasak:

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}^2}=\sqrt{11^2+7^2+1}=\sqrt{171}$$

III. $\vec a,\vec b$ va $\vec c$ vektorlarning **aralash ko'paytmasi** deb $\vec a$ vektorni $\vec b$ vektorga vektor ko'paytmasidan hosil bo'lgan natijaning $\vec c$ vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ yoki $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi: $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar vektorlar bo'lmasin, ya'ni ular bir tekislikda yotmasin.



20-rasm

U holda $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ va $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=d\,c\cos\varphi=d\,c_1$; Bu yerda $d-\vec{a},\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogram yuzi, c_1 esa $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelopipedning balandligi bo'lgani uchun $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ aralash ko'paytma o'sha parallelopipedning hajmiga teng bo'ladi.

Aralash ko'paytmaning xossalari:

1. Istalgan ikkita vektorning o'rni almashsa aralash ko'paytma ishorasini o'zgartiradi:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$$

2. Agarda uchta vektordan ikkitasi teng bo'lsa yoki parallel bo'lsa aralash ko'paytma nolga teng bo'ladi.

3. «$\circ$» va «$\times$» amallari belgisining o'rinlarini almashtirish mumkin, ya'ni $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

4. $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lishi uchun (bitta tekislikda yotishi uchun) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ bajarilishi zarur va yetarli.

IV. $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmi

$$V_{par}=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

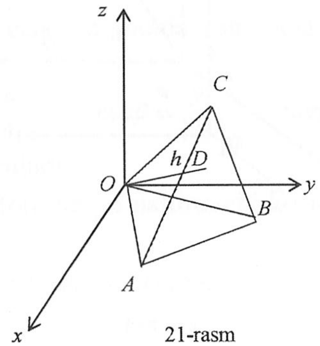
$\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan piramidaning hajmi

$$V_{pir}=\pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

Misol. Uchlari $O(0,0,0)$, $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$ va $C(1,2,4)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmi, ABC yoqning yuzasi va shu yoqqa tushirilgan perpendikulyar hisoblansin.

Yechilishi: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AO}$ vektorlarning proyeksiyalarini topaylik

$$\overrightarrow{AB}\{-1,3,0\},\ \overrightarrow{AC}\{-4,0,4\},\ \overrightarrow{AO}\{-5,-2,0\}$$



21-rasm

$$V_{pir}=1/6\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AO}$$

$$V_{pir}=1/6\begin{vmatrix}-3&3&0\\-4&0&4\\-5&-2&0\end{vmatrix}=-1/6(-60-24)=84/6=14\,kub.b$$

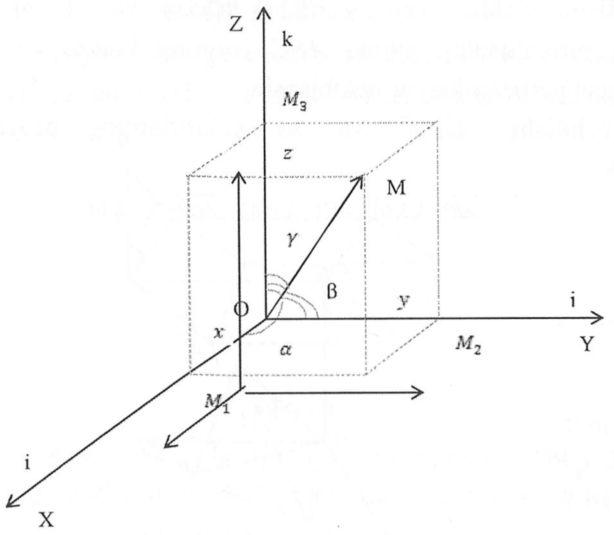
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|12\vec{i}+12\vec{k}+12\vec{j}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2+12^2}=6\sqrt{3}$$

$$h=\overrightarrow{OD}=\frac{3V_{pir}}{S_{\Delta ABC}};\ \text{Demak, } h=\frac{3\cdot 14}{6\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

2. Tekislik va fazoda Dekart koordinatalar sistemasi

O`zaro perpendikulyar kesishuvchi uchta o`qlar, ularning kesishish nuqtasi bo`lgan koordinata boshi va birlik masshtabga ega bo`lgan tartiblangan sistema, fazoda to`g`ri burchakli ***dekart koordinatalar sistemasi*** deyiladi.

OX ***–abtsissa,*** OY ***–ordinata*** va OZ ***–applikata o`qlari*** deyiladi.



22-rasm

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ radius-vektorning moduli yoki uzunligi:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (8)$$

formula bilan topiladi. Koordinata o'qlaridagi i, j, k birlik vektorlar ***ortlar*** deyiladi. Radius-vektorlar ortlar orqali quyidagicha ifodalanadi.

$$\vec{r} = xi + yj + zk \qquad (9)$$

U holda $\vec{a} = xi + yj + zk$ vektorni **λ songa ko'paytmasi** deb;

$$\lambda\vec{a} = \lambda xi + \lambda yj + \lambda zk \qquad (10)$$

ga aytiladi.

$\vec{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ va $\vec{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ vektorlarni yig'indisi (ayirmasi) deb,

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)k \qquad (11)$$

ga atiladi.

Masalan, ***a***=(4,–2,1) va ***b***=(5,9,0) vektorlar uchun ***a***+***b***=(4+5,–2+9,1+0)=(9,7,1) , ***a***–***b***=(4–5,–2–9,1–0)=(–1, –11,1).

$A(x_1,y_1,z_1)$ va $B(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari:

$$\begin{cases} a_x = pr_x\overrightarrow{AB} = X = x_2 - x_1 \\ a_y = pr_y\overrightarrow{AB} = Y = y_2 - y_1 \\ a_z = pr_z\overrightarrow{AB} = Z = z_2 - z_1 \end{cases} \qquad (12)$$

formula bilan topiladi.

Agar $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor koordinata o'qlari bilan α, β va γ burchaklar tashkil etsa, u holda bu vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \qquad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \qquad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} \qquad (13)$$

formula bilan topiladi.

Har qanday vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari kvadratlarining yig'indisi 1 ga teng:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (14)$$

3. Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa.

O'qdagi $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofa:

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} \qquad (1)$$

AB kesmaning (algebraik) kattaligi:

$$AB = x_2 - x_1 \qquad (2)$$

Tekislikdagi $A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3)$$

R^3 fazodagi $A(x_1;y_1;z_1)$ va $B(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (4)$$

Masalan, $M_1(2,1)$ va $M_2(-3,0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -(x-2) = -5(y-1) \Rightarrow x - 5y + 3 = 0.$$

Vektorlar sistemasi

1-ta'rif. $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ vektorlarning ***chiziqli kombinatsiyasi*** deb,

$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\dots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}$

yig`indiga aytiladi. Bu yerda $\lambda_1;\lambda_2;\dots\lambda_n$ haqiqiy sonlar bo'lib, bu ***chiziqli kombinatsiyaning koeffitsiyentlari*** deyiladi.

2-ta'rif. $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ chekli sondagi vektorlar uchun kamida bittasi noldan farqli shunday $\lambda_1;\lambda_2;\dots\lambda_n$ sonlar topilsaki, ular uchun

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\dots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=0 \qquad (1)$$

tenglik bajarilsa, u holda berilgan $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ sistema ***chiziqli bog`langan sistema*** deyiladi.

3-ta'rif. Agar (3) tenglik faqat $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$ bo`lgandagina bajarilsa, u holda $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ sistema, ***chiziqli erkli yoki chiziqli bog`lanmagan sistema*** deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\overrightarrow{\lambda_i}(i=1,n)$ sonlar uchun

$$\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\dots+\lambda_n\overrightarrow{a_n} \qquad (2)$$

tenglik bajarilsa, u holda $\vec{a}$ vektor $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi yoki $\vec{a}$ vektor $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ vektorlarning ***chiziqli kombinatsiyasidan iborat*** deyiladi.

Fazodagi chekli vektorlar sistemasining chiziqli bog`lanishi quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemasining:

a) kamida bitta vektori nol vektordan iborat bo`lsa;

b) qandaydir 2 ta vektori proportsional bo`lsa, bu sistema chiziqli bog`langan bo`ladi.

2^0. Agar $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ sistema chiziqli bog`langan bo`lsa, istalgan $\overrightarrow{b_1};\overrightarrow{b_2};\dots;\overrightarrow{b_k}$ sistema uchun

$$\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n};\overrightarrow{b_1};\overrightarrow{b_2};\dots;\overrightarrow{b_k} \qquad (3)$$

sistema ham chiziqli bog`langan bo`ladi.

3^0. Berilgan V fazoda $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ sistema chiziqli bog`lanmagan bo`lsa, uning har qanday qism sistemasi ham chiziqli bog`lanmagan bo`ladi.

4^0. $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemasining istalgan vektori bu sistema orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni

$$\overrightarrow{a_i}=0\cdot\overrightarrow{a_1}+0\cdot\overrightarrow{a_2}+\dots+1\cdot\overrightarrow{a_i}+0\cdot\overrightarrow{a_{i+1}}+\dots+0\cdot\overrightarrow{a_n}$$

5^0. $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog`langan bo`lish uchun, ulardan kamida bittasi qolganlari orqali chiziqli ifodalanishi zarur va yetarlidir.

5-ta'rif. Agar V vektorlar fazosining o`zaro chiziqli bog`lanmagan shunday

$\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$

vektorlar sistemasi mavjud bo`lsaki, bu vektorlar fazosining qolgan barcha vektorlari shu sistema orqali chiziqli ifodalansa, u holda $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemasi V ***vektor fazoning bazisi*** deyiladi.

6-ta'rif. Chekli vektorlar sistemasining ***rangi*** deb undagi chiziqli bog`lanmagan vektorlarning maksimal soniga aytiladi.

7-ta'rif. Agar V vektor fazoning biror

$$\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\dots;\overrightarrow{a_n} \qquad (4)$$

vektorlari sistemasining istalgan ikki vektorlari o`zaro ortogonal bo`lsa, u holda (4) sistema ***ortogonal vektorlar sistemasi*** deyiladi.

8-ta'rif. Agar ortogonal sistema qaralayotgan fazoning bazisi bo`lsa, bunday sistemaga ***ortogonal bazis*** deyiladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Ikki vektor berilgan $a=i+j+4k$ va $b=-7i-j+2k$. Toping:[1]

$a)\ -6a-2b \quad b)\ -5a+2b \quad c)\ 4a+3b \quad d)\ -2(a+3b)$

2. $\vec{a}(3;1;2)$ va $\vec{b}(0;-2;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisini toping.

$j{:}\ \vec{a}+\vec{b}=(3;-1;-1)$.

3. $\vec{a}(2;1)$ va $\vec{b}(4;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{a}-\vec{b}$ vektorlarni toping va geometrik tasvirlang.

$j{:}\ \vec{a}+\vec{b}=(6;-2), \vec{a}-\vec{b}=(-2;4)$.

1 Nigel Buckle, Ian Dunbar. Mathematics-Higher Level (core). Printed by Shannon books. Australia. 2007. 928 b.

4. $\vec{a}(1;-3)$ va $\vec{b}(-4;-1)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

$j: |\vec{a}+\vec{b}| = 5.$

5. $A(1;4)$ va $B(-3;0)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

$j: |\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{2}.$

6. $\vec{a}(-3;1;0)$ va $\vec{b}(2;5;-1)$ vektorlar berilgan. $|2\vec{a}-\vec{b}|$ ni topin.

$j: \sqrt{74}.$

7. $M(0;3;-4)$ nuqta yasalsin va uning radius-vektori uzunligi hamda yo'nalishini aniqlang.

$j: 5$

8. $r = 2i + 3j - 6k$ vektor yasalsin va uning radius-vektorining uzunligi, yo'nalishi va yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

$j: |r| = 7; cos\alpha = \frac{2}{7}; cos\beta = \frac{3}{7}; cos\gamma = -\frac{6}{7}$

9. $\vec{a}(-1;1;0)$ va $\vec{b}(1;-2;2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

J: $\alpha = 135^0$.

10. Uchlari $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ va $C(0;0;5)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning burchaklarini toping.

J: $< A = 90^0; < B =< C = 45^0$.

11. Tekislikda uchlari $O(0;0)$,$A(2;0)$ va $B(1;-1)$ nuqtalarida bo'lgan uchburchak berilgan. Shu uchburchakning OB tomoni bilan OM medianasi orasidagi burchakni toping.

$j: cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

12. $\vec{a}(2;1;0)$ va $\vec{b}(0;-2;1)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm dioganallari orasidagi burchakni toping.

J: $\alpha = 90^0$.

13. $\vec{a} = i + j + 2k$ va $\vec{b} = i - j + 4k$ vektorlar berilgan. $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ ni toping.

$j: pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$

14. $(2i - j)\cdot j + (j - 2k)\cdot k + (i - 2k)^2$ ifodani soddalashtiring.

J: 2.

15. $A(-2;3;-4)$,$B(3;2;5)$,$C(1;-1;2)$ va $D(3;2;-4)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ vektordagi proyeksiyani toping.

$j: pr_{\vec{c}}\vec{a} = -6\frac{5}{7}.$

16.Uchlari $A(-1;-2;4)$,$B(-4;-2;0)$ va $C(3;-2;1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. Uchburchakning B uchidagi tashqi burchagini toping.

$j: \frac{3\pi}{4}.$

17. Parallelogramning ketma-ket uchta $A(-3;-2;0)$,$B(3;-3;1)$ va $C(5;0;2)$ uchlari berilgan. Uning to'rtinchi uchi D hamda $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{BD}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

J: $D(-1;1;1)$, $\varphi = 120^0$.

18. m va n lar o'zaro 120^0 burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo'lsa, $\vec{a} = 2m + 4n$ va $\vec{b} = m - n$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

$j: \alpha = 120^0.$

19. $\vec{a} = 3i, \vec{b} = 2k$ bo'lsa, $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ ni toping va shaklini chizing.

J: $\vec{c} = -6j$.

20. Uchlari $A(7;3;4)$,$B(1;0;6)$ va $C(4;5;-2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak-ning yuzini toping

J:24,5.

21. $\vec{a}(2;0;1)$ va $\vec{b}(1;2;2)$ vektorlarga parallelogramm yasalgan. Parallelogrammning yuzi va balandligini toping.

J: $S = \sqrt{21}; h = \sqrt{4{,}2}$.

22. Ushbu $i\times(j+k) - j\times(i+k) + k\times(i+j+k)$ ifodani soddalashtiring.

J: $2(k - i)$.

23. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ .vektorlar o'zaro 45^0 burchak tashkil etadi. Agar $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ bo'lsa, $\vec{a} - 2\vec{b}$ va $3\vec{a} + 2\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzini toping.

J: $100\sqrt{2}$.

24. $\vec{a} = -j + k$ va $\vec{b} = i + j + k$ vektorlarga yasalgan uchburchakning yuzini toping.

J:$S = \sqrt{6}$.

25. m va n o'zaro 30^0 burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo'lsa, $\vec{a} = m + 2n$

va $\vec{b} = 2m + n$ vektorlarga yasalgan uchburchakning yuzini toping.

J: 0,75.

26. $\vec{a} = 2i + 3j$ va $\vec{b} = i - j + 2k$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ni toping.

J: $\vec{c} = 6i + 4j - 5k$.

27. $\vec{a} = 3i + 4j, \vec{b} = -3j + k$ va $\vec{c} = 2j + 5k$ vektorlarga yasalgan parallelepipedning hajmini toping.

J: $V = 51$.

28. Uchlari $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0)$ va $C(1;2;4)$ nuqtalarda bo'lgan piramida hajmini toping. ABC yog'ining yuzi va shu yoqqa tushirilgan balandligini hisoblang.

j: $V = 14\, kub\, birlik, H = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

29. $A(2;-1;-2), D(1;2;1), C(2;3;0)$ va $D(5;0;-6)$ nuqtalarning bir tekislikda yotishini ko'rsating.

30. $\vec{a}(-1;3;2)$, $\vec{b}(2;-3;-4)$ va $\vec{c}(-3;12;6)$ vektorlarning o'zaro komplanar ekanligini ko'rsating. $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

j: $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$

31. $\vec{a} = 2i - j, \vec{b} = j + 3k$ va $\vec{c} = 3i + k$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

32. Koordinatalar boshidan $A(-5;12)$ nuqtagacha bo'lgan masofani toping.

j: $d = 13$.

33. $A(3;1)$ va $B(5;4)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

j: $d = 4\sqrt{2}$.

34. Uchlari $A(1;0)$, $B(1;3)$ va $C(6;3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlari uzunliklarini toping va grafigini yasang.

j: $AB = 3, BC = 5, AC = \sqrt{34}$.

35. Koordonatalar boshidan va $A(6;0)$ nuqtadan 5 birlik masofada yotuvchi nuqtalar topilsin.

j: $A(3;4), B(3;-4)$.

36. Abstsissalar o'qida $A(0;3)$ nuqtadan 5 birlik masofada yotuvchi nuqtalar topilsin.

j: $A(-4;0), B(4;0)$.

37. $A(1;1)$ va $B(5;4)$ nuqtalar hamda OX o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan A_1, B_1 nuqtalar yasalsin. Bu nuqtalarni tutashtirish natijasida hosil bo'lgan ABA_1B_1 trapetsiyaning tomonlar uzunliklarini toping.

j: $AA_1 = 2, AB = 5, BB_1 = 8, A_1B_1 = 5$.

38. $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ vektorlar bazis hosil qilishini tekshiring. $\vec{d}$ vektorni shu bazis orqali yoyilmasini toping.

a) $\vec{a}(0;3;1)$, $\vec{b}(1;-2;0)$, $\vec{c}(1;0;1)$, $\vec{d}(2;7;5)$

b) $\vec{a}(4;0;1)$, $\vec{b}(3;1;-1)$, $\vec{c}(0;2;1)$, $\vec{d}(0;-8;9)$

c) $\vec{a}(-1;1;1)$, $\vec{b}(3;2;0)$, $\vec{c}(1;-1;2)$, $\vec{d}(11;-1;-4)$

d) $\vec{a}(2;0;-1)$, $\vec{b}(1;2;-1)$, $\vec{c}(0;1;3)$, $\vec{d}(5;-4;5)$

e) $\vec{a}(1;-1;1)$, $\vec{b}(2;3;0)$, $\vec{c}(-1;1;2)$, $\vec{d}(-1;-4;10)$

39. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar, m, n, p va k sonlar berilgan.

$\vec{c} = p\vec{a} + k\vec{b}$ va $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b}$

vektorlarni kollinearlikka tekshiring.

a) $\vec{a}(4;-3;1)$, $\vec{b}(-5;0;2), m = -2, n = 5, p = -5, k = 2$.

b) $\vec{a}(-3;0;5)$, $\vec{b}(-7;2;4), m = -2, n = 6, p = -3, k = 6$.

c) $\vec{a}(3;2;7)$, $\vec{b}(-1;0;5), m = 3, n = -6, p = -1, k = 2$.

d) $\vec{a}(5;3;-2)$, $\vec{b}(-1;0;5), m = -1, n = 3, p = 2, k = 1$.

e) $\vec{a}(-1;0;3)$, $\vec{b}(3;-2;1), m = 3, n = -1, p = 4, k = 2$.

XULOSA

Skalyar kattaliklar faqat son qiymati bilan, vektor esa ham sonli qiymati, ham yo'nalishi bilan aniqlanadi. Vektorlar ustida ularni songa ko'paytirish, o'zaro qo'shish va ayirish amallari kiritilib, vektorlar algebrasi hosil qilinadi. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar o'zlarining koordinatalari bilan ifodalanadi. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar ularning koordinatalari orqali oson amalga oshiriladi. Vektorlar algebrasi yordamida bir qator matematik masalalar oson hal etiladi. Skalyar ko'paytmani vektorlarning koordinatalari yordamida hisoblash juda qulay. Skalyar ko'paytma yordamida vektorlarning modulini topish, ular orasidagi burchakni aniqlash, ikki vektorning ortogonallik shartini ifodalash kabi masalalar oson yechiladi. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi natijasida son hosil bo'ladi. Ammo fizika, mexanikaning bir qator masalalarida ikkita vektorning shunday ko'paytmasini kiritishga to'g'ri keladiki, ko'paytmada vektor hosil bo'lishi kerak. Shu sababli vektorlarning vektorial ko'paytmasi tushunchasi kiritilgan. Bu ko'paytma uchun kommutattivlik qonuni bajarilmasada, distributivlik qonuni o'z kuchini saqlab qoladi. Vektorial ko'paytma koordinatalar orqali III tartibli determinant yordamida algebraik usulda ham topilishi mumkin. Vektorial ko'paytma orqali vektorlarning kollinearlik sharti oddiy ko'rinishda ifodalanadi. Uchta vektorning ko'paytmasi tushunchasini kiritish uchun ularning dastlabki ikkitasi vektorial ko'paytirilib, hosil bo'lgan natija bilan uchinchisi skalyar ko'paytiriladi. Natijada hosil bo'lgan son uch vektorning aralash ko'paytmasi deyiladi. Aralash ko'paytma qiymati uchala vektorlarning koordinatalaridan hosil qilingan III tartibli determinantni hisoblash orqali topilishi mumkin. Aralash ko'paytma yordamida vektorlarning komplanarlik shartini aniqlash, qirralari berilgan uchta vektordan iborat parallelepipedning hajmini hisoblash, to'rtta nuqtani bir tekislikda yotishini aniqlash kabi masalalar oson yechiladi.

Nazorat savollari.

Vektor deb nimaga aytiladi?
Vektorning uzunligi formulasini ifodalang?
Vektorlarning yig'indisi deb nimaga aytiladi?
Vektorning ayirmasi deb nimaga aytiladi?
Komplanar vektor deb nimaga aytiladi?
Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?

2-§. TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI

Reja:

1. Umumiy tushunchalar.
2. To'g'ri chiziq tenglamasi.
3. Aylana tenglamasi.
4. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
5. To'g'ri chiziqning boshqa tenglamasi.
6. To'g'ri chiziqqa doir turli masalalar.
7. To'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi.

Tayanch iboralar: to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi, burchak koeffitsiyentli tenglama, kesmalardagi tenglama , to'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik sharti.

I. Faraz qilaylik, bizga ikki x va y o'zgaruvchi miqdorlarni bog'lovchi

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglama o'z navbatida bir o'zgaruvchini, masalan y ni ikkinchisining, ya'ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydi. Agar (1) ni y ga nisbatan yechib olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y=f(x) \qquad (2)$$

bu yerda $f(x)$ bir qiymatli yoki ko'p qiymatli funksiya bo'lishi mumkin, bu funksiyaning qiymatlari x o'zgarganda uzluksiz o'zgaradi deb faraz qilaylik.

x va y miqdorlarni Oxy dekart koordinatalar tekisligining biror M nuqtasini koordinatalari sifatida qaraymiz. U holda (2) tenglik x o'zgaruvchining har bir qiymatiga y ning aniq bir qiymatini mos qo'yadi.

Shu sababli, x ning har bir qiymatiga tekislikning koordinatalari x va $y=f(x)$ bo'lgan aniq bir M nuqtasi mos keladi.

Endi, agar x uzluksiz qiymatlarni qabul qilsa, u holda M Oxy tekisligida uzluksiz o'zgarib, nuqtalarning geometrik o'rnini chizadi, bu geometrik o'rinni chiziq deb ataymiz.

Demak, chiziq koordinatalari (1) yoki (2) ko'rinishdagi tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni ekan. (1) yoki (2) tenglama o'z navbatida **chiziqning tenglamasi** deb ataladi.

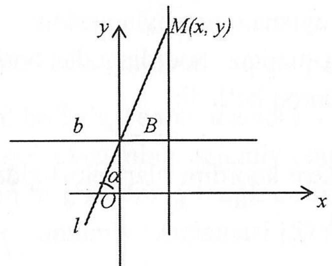
Endi, agar aytilgan gaplarni umumlashtirsak, **berilgan chiziqning tenglamasi** deb, (1) yoki (2) ko'rinishga ega bo'lgan shunday tenglamaga aytamizki, bu tenglama faqat berilgan to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtaning koordinatalarini x va y ning o'rniga qo'ygandagina qanoatlanadi.

Agar $F(x,y)=Ax+By+C$ bo'lsa, (1) ni 1-tartibli tenglama deymiz, u ifodalaydigan chiziqni to'g'ri chiziq deb ataymiz.

Agar $F(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+M$ bo'lsa, (1) ni 2-tartibli tenglama, unga mos keluvchi chiziqni esa **2-tartibli chiziq** deb ataymiz.

Misol tariqasida, to'g'ri chiziq va aylananing tenglamasini tuzamiz.

II. To'g'ri chiziq tenglamasi. Faraz qilaylik, y o'qini $A(0,b)$ nuqtada kesib o'tuvchi va x o'qiga α burchak ostida og'ib o'tgan to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.



1-rasm

$M(x,y)$ to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Chizmaga ko‘ra, $BM=AB\cdot tg\alpha$, bu yerda *BM* va *AB* lar $M(x,y)$ $\overline{BM}$ va $\overline{AB}$ vektorlarning kesma kattaligi. $BM=y-b$, $AB=x$ bo‘lgani uchun yuqoridagi formuladan

$$y-b=tg\alpha\cdot x$$

yoki

$$y=kx+b \tag{3}$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$k=tg\alpha \tag{4}$$

deb belgilandi. (3) tenglamani berilgan to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasini koordinatalari qanoatlantiradi, va aksincha koordinatalari (3) ni qanoatlantiradigan har qanday nuqta *l* to‘g‘ri chiziqda yotadi. *k* koeffitsiyent (4) ga ko‘ra, α burchakka bog‘liq bo‘lgani uchun **burchak koeffitsiyent** deb ataladi, *b* esa **boshlang‘ich ordinata** deyiladi.

III. Aylana tenglamasi. Radiusi *r* va markazi $C(a,b)$ nuqtada bo‘lgan aylanani ko‘raylik. Ta’rifga ko‘ra, aylana $C(a,b)$ nuqtagacha bo‘lgan masofalari o‘zgarmas *r* gat eng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rnidir.

Agar $M(x,y)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, u holda

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

yoki tenglikni kvadratga ko‘tarib, ildizni yo‘qotsak,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Bu tenglama berilgan aylananing tenglamasidir.

Agar aylananing markazi koordinatalar boshida bo‘lsa, u holda uning tenglamasi soddaroq bo‘ladi:

$$x^2+y^2=r^2$$

IV. Teorema. *Oxy* koordinatalar tekisligida har qanday to‘g‘ri chiziqning tenglamasi

$$Ax+By+C=0 \tag{5}$$

ko‘rinishda bo‘ladi, aksincha, (5) ko‘rinishdagi har qanday tenglama *Oxy* koordinatalar tekisligida to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Isboti. Yuqorida ko‘rilganidek, *x* o‘qiga og‘ish burchagi ma’lum bo‘lgan har qanday to‘g‘ri chiziqning tenglamasi $y=kx+b$, ko‘rinishda bo‘ladi. Buni o‘z navbatida $kx-y+b=0$ ko‘rinishga keltirib olsa bo‘ladi. Endi, agar to‘g‘ri chiziqning bir nuqtasi $M_0(x_0,y_0)$ va unga perpendikulyar bo‘lgan biror $\vec{s}=\{A,B\}$ vector berilgan bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziqda yotuvchi har qanday $M(x,y)$ nuqta uchun $\overline{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0\}$ vektor $\vec{s}$ vektorga perpendikulyar bo‘ladi. Vektorlarning perpendikulyarlik shartiga ko‘ra $\vec{s}\circ\overline{M_0M}=0$ yoki

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{6}$$

Qavslarni ochib va $C=-Ax_0-By_0$ deb belgilasak, (6) ni (5) ko‘rinishga keltirsa bo‘ladi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbot qilamiz. Agar (5) da $B\neq0$ bo‘lsa, u holda (5) tenglikni *B* ga bo‘lib yuborib, uni

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

ko‘rinishga keltirib olamiz. Agar $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ desak, oxirgi tenglikni $y=kx+b$ deb yozsa bo‘ladi. Ma’lumki, bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasidir.

Agar $B=0$ bo‘lsa, u holda $A\neq0$, shuning uchun (5) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$x=-\frac{C}{A}$$

bu yerda $a=-\frac{C}{A}$ desak, $x=a$, ya’ni *x* o‘qiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasi hosil bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

(5) tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi, (6) esa bir nuqtadan o‘tgan **to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deb ataladi.

To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi (5) to‘liq bo‘lmagan uch holni ko‘ramiz:

1) $C=0$, bunda tenglama $Ax+By=0$ ko'rinishni oladi, bu tenglama koordinatalar boshidan o'tgan chiziqni ifodalaydi. Haqiqatan, $x=0,\ y=0$ koordinatalar bu tenglamani qanoatlantiradi.

2) $A=0,\ B\neq 0$, bunda (5) $By+C=0$ ko'rinishga keladi, bu tenglama x o'qiga parallel o'tadigan to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Xususan, agar $C=0$ bo'lsa, $y=0$ hosil bo'ladi, bu x o'qining tenglamasidir.

3) $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$ bo'lsin. U holda (5) ning ozod hadi C ni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazsak va $-C$ ga bo'lib yuborsak:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

yoki

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

Quyidagi belgilashlarni kiritsak:

$$a=-\frac{C}{A},\quad b=-\frac{C}{B}$$

tenglama

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{7}$$

ko'rinishga keladi. (7) ni to'g'ri chiziqning **kesmalardagi tenglamasi** deb ataymiz, chunki bu to'g'ri chiziq x o'qini $M(a,0)$ nuqtada, y o'qini $N(0,b)$ nuqtada kesib o'tadi.

Misol. $3x-5y+15=0$ to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini tuzing.

Yechish. Ozod had 15 ni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazib -15 ga bo'lamiz:

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$$

Demak, berilgan to'g'ri chiziq x va y o'qlaridan mos ravishda $a=-5,\ b=3$ kesmalar ajratar ekan.

Umumiy tenglamaning A va B koeffitsiyentlari geometrik ma'noga ega. (6)dan ma'lumki, A va B koeffitsiyentlar to'g'ri

chiziqqa perpendikulyar vektorning koordinatalaridir. Agar $\vec{a}=\{-B,A\}$ vektor tuzib olsak, $\vec{s}$ va $\vec{a}$ vektorlar perpendikulyar ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli, $\vec{a}$ vektor berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi, uni shu xususiyatiga ko'ra, to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori, $\vec{s}$ ni normal vektor deb atashadi.

V. Agar $M_0(x_0,y_0)$ to'g'ri chiziqning berilgan nuqtasi va $\vec{a}=\{m,n\}$ uning yo'naltiruvchi vektori bo'lsa, uning tenglamasini quyidagicha tuzsa ham bo'ladi.

Faraz qilaylik, $M(x,y)$ nuqta to'g'ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo'lsin. U holda, $\vec{a}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlar o'zaro parallel bo'ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \tag{8}$$

Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataladi.

Agar (8) da kasrlarni t ga tenglasak,

$$x-x_0=mt,\quad y-y_0=nt$$

yoki

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt \end{cases}$$

Parametrik tenglamalar deb ataluvchi tenglamani hosil qilamiz.

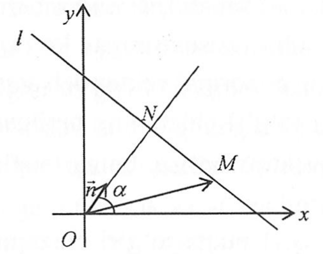
Agar to'g'ri chiziqning ikkita $M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2)$ nuqtalari ma'lum bo'lsa, u holda $\vec{a}=\overline{M_1M_2}$ vektorni yo'naltiruvchi vektor deb qarash mumkin, shuning uchun bu to'g'ri chiziqning tenglamasi (8) ga ko'ra

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{9}$$

bo'ladi. Bu tenglama ikki nuqtadan o'tgan **to'g'ri chiziqning tenglamasi** deb ataladi.

Endi, faraz qilaylik, bizga l to'g'ri chiziq va uning normal vektori $\vec{n}$ berilgan bo'lsin. Agar α $\vec{n}$ vektorning x o'qiga og'ish burchagi bo'lsa, u holda shu vektorning orti

$-\vec{n}_0=\{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}$ bo'ladi. $|\vec{n}_0|=1$



2-rasm.

$M(x,y)l$ to‘g‘ri chiziqning siljuvchi nuqtasi va $ON=p$ bo‘lsin. U holda
(2-rasmga qarang)

$$p=np_{\vec{n}}\overline{OM}=|\vec{n}|\cdot np_{\vec{n}}\overline{OM}=\vec{n}\circ\overrightarrow{OM}=x\cos\alpha+y\sin\alpha$$

Bundan

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

(10)

kelib chiqadi. (10) tenglama to‘g‘ri chiziqning **normal tenglamasi** deb ataladi.

Agar to‘g‘ri chiziq $Ax+By+C=0$ tenglama bilan berilgan bo‘lib, bu tenglama normal tenglamami yoki yo‘q ekanligini aniqlash uchun bu to‘g‘ri chiziqning normal vektorini uzunligi birga tengligini tekshirish kifoya. Bu tenglama $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}=1$ bo‘lsagina normal bo‘ladi. Agar $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}\neq 1$ bo‘lsa, berilgan tenglamani $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ ifodaga bo‘lish kerak:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

(11)

(10) formuladan ma’lumki, ozod hadning ishorasi manfiy bo‘lishi shart, shu sababli, oxirgi tenglikdagi ishoralardan birini ozod hadning

ishorasiga teskari qilib tanlash zarur. Shunda (11) normal tenglamaga aylanadi. $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ifoda **normallovchi ko‘paytuvchi** deb ataladi.

VI. 1. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Faraz qilaylik, bizga $l_1:y=k_1x+b_1$ va $l_2:y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, $k_1=tg\alpha_1$, $k_2=tg\alpha_2$ bu yerda α_1,α_2 lar mos ravishda l_1,l_2 to‘g‘ri chiziqlarning x o‘qiga og‘ish burchaklaridir. Bu burchaklarni *Oxy* tekisligidagi musbat yo‘nalish bo‘ylab hisoblangan deb tushunamiz. Agar $\alpha_2>\alpha_1$ bo‘lsa, l_1,l_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deb $\alpha=\alpha_2-\alpha_1$ burchakni tushunamiz. U holda

$$tg\alpha=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

(12)

(12) dan ko‘rinadiki, agar $k_1=k_2$ bo‘lsa, $\alpha=0$ yoki $\alpha=\pi$ bo‘ladi, ya’ni l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘ladi, va aksincha, agar l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $tg\alpha=0$, bundan esa $k_1=k_2$ kelib chiqadi. Shu sababli, $k_1=k_2$ tenglik to‘g‘ri chiziqlarning **parallellik sharti** deb ataladi. Agar l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar, ya’ni $\alpha=\frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda (12) dan $1+k_1\cdot k_2=0$ munosabat kelib chiqadi. Bu tenglikni to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti deb ataymiz.

2. Ikki to‘g‘ri chiziq tenglamasini birgalikda tekshirish. Faraz qilaylik, bizga ikki l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalaridan tuzilgan

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

(13)

sistema berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, bu sistema yagona yechimga ega bo‘lishi uchun

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu esa $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ tengsizlikka ekvivalent. Bu holda (13) ning yagona yechimi l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi nuqtaning koordinatalarini beradi, ya’ni l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini aniqlaydi.

Agar

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lsa, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ bo‘ladi, bunda ikki hol yuz beradi: 1) agar (13) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lsa, bu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ bo‘lganda bajariladi, u holda l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi; 2) (13) sistema umuman yechimga ega emas, bu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ bo‘lganda yuz beradi, bunda berilgan to‘g‘ri chiziqlar umuman kesishmaydi, ya’ni ular parallel bo‘ladi.

3. Nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan masofa. $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan Δ to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan d masofani topish talab etilgan bo‘lsin. l to‘g‘ri chiziqning $\vec{n}_0$ normalini qurib olaylik. Agar M_0 nuqta l ga nisbatan, $\vec{n}_0$ normalning musbat yo‘nlishi tomonida joylashgan bo‘lsa, u holda masofa $+d$, aks holda $-d$ bo‘ladi. Buni M_0 nuqta l to‘g‘ri chiziqdan δ chetlanishi deb ataymiz. Chizmadan ko‘rinadiki, $p+\delta = np_{\vec{n}_0}\overline{OM_0} = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha$, bundan

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \tag{14}$$

yoki

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \tag{15}$$

kelib chiqadi. Demak, nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan masofani topish uchun, nuqtaning koordinatalarini to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasini chap tomonidagi noma’lumlar o‘rniga qo‘yish kifoya ekan.

Agar to‘g‘ri chiziq tenglamasi normal bo‘lmasa, u holda normallovchi ko‘paytuvchi yordamida normal ko‘rinishga keltirib, so‘ngra (15) formula yordamida talab qilingan masofani hisoblaymiz.

VII. Tekislikning $S(x_0, y_0)$ nuqtasidan o‘tgan barcha to‘g‘ri chiziqlari to‘plami S markazli **to‘g‘ri chiziqlar dastasi** deb ataladi.

<u>Teorema</u>. Agar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ lar S nuqtada kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar, va α, β lar bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan ixtiyoriy sonlar bo‘lsa, u holda

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \tag{16}$$

S nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi.

Isboti. Avval (16) haqiqatdan tenglama ekanligini ko‘rsataylik, buning uchun uni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)=0 \tag{17}$$

Bu yerda $\alpha A_1+\beta A_2$ va $\alpha B_1+\beta B_2$ lar bir vaqtda nolga teng bo‘laolmaydi, chunki aks holda, $\alpha A_1+\beta A_2=0$ va $\alpha B_1+\beta B_2=0$ dan $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$ kelib chiqadi, buni esa bo‘lishi mumkin emas, chunki bu to‘g‘ri chiziqlar shartga ko‘ra kesishadi. Bu esa (17) tenglama ekanligini ko‘rsatadi. Demak, u tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Endi bu to‘g‘ri chiziq S nuqtadan o‘tishini ko‘rsatsak kifoya. Haqiqatan, (17) dagi noma’lumlar o‘rniga x_0, y_0 larni qo‘ysak, $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$ va $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$ ekanligidan,

$$\alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\beta(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Agar masalan, $\alpha\neq 0$ bo‘lsa, (17) ni quyidagi ko‘rinishda yozsa bo‘ladi:

$$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

bu yerda $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$ deb belgilandi.

Misol. S nuqtada kesishuvchi $2x+3y-5=0$, $7x+15y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. S nuqtadan $12x-5y-1=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Avval berilgan to‘g‘ri chiziqlar kesishishini tekshiramiz: $\frac{2}{7}\neq\frac{7}{15}$. Demak, ular kesishmaydi. Dasta tenglamasi

$$2x+3y-5+\lambda(7x+15y+1)=0$$

Buni quyidagicha yozib olamiz:

$$(2+7\lambda)x+(3+15\lambda)y+(-5+\lambda)=0 \qquad (18)$$

Bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini topaylik:

$$k=-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}$$

Berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k_1=\frac{12}{5}$ bo‘lgani uchun, ularning perpendikulyarlik shartiga ko‘ra

$$-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}=-\frac{5}{12}$$

Bundan $\lambda=-1$. Bu qiymatni (18) ga qo‘ysak:

$$5x+12y+6=0$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. OY o’qdan $b=5$ kesma ajratib, OX o’q bilan 1) 30^0;2) 45^0;3) 60^0 burchak tashkil qiluvchi to’g’ri chiziqlarning tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$j:\ y_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x+5;\ y_2=x+5;\ y_3=\sqrt{3}x+5$$

2. Koordinatalar boshidan o’tib, OX o’qi bilan; 1) 45^0; 2) 90^0; 3) 120^0 burchak tashkil qiluvchi to’g’ri chiziqlarning tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$j{:}\ 1)\ y=x;\ 2)\ x=0;\ 3)\ y=-\sqrt{3}x.$$

3. OX o’qidan 5 birlik va OY o’qidan 4 birlik ajratuvchi to’g’ri chiziqlar tenglamalarini tuzing va grafigini chizing.

$$j:\ \frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1;\ \frac{x}{5}+\frac{y}{4}=-1$$

4. 1) $2x+3y=6$; 2) $x-3y=4$ to’g’ri chiziq tenglamalarini o’qlardan ajratgan kesmalar bo’yicha yozing.

$$J:\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1;\ \frac{x}{4}+\frac{y}{(-\frac{4}{3})}=1$$

5. Koordinatalar boshidan va $A(3;-4)$ nuqtalardan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$J{:}\ 4x+3y=0$$

6. Uchlari $A(1;2)$, $B(4;4)$, $C(7;0)$ nuqtalarda bo’lgan uchburchak tomonlarining tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$j{:}\ AB{:}\ 2x-3y+4=0\ ;BC{:}\ 4x+3y-28=0\ ;AC{:}\ x+3y-7=0$$

7. $A(-3;1)$ nuqtadan o’tuvchi va OX o’qining musbat yo’nalishi bilan 1) 30^0;2) 45^0; 3) 60^0 tashkil etuvchi to’g’ri chiziq tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$j{:}\ 1).\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\sqrt{3+1};\ 2).\ y=x+4;\ 3).y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+1$$

8. Quyidagi to’g’ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:

1) $y=2x+3$ *va* $y=-\frac{1}{2}x+4$; 2) $5x-y=-7$ *va* $2x-3y=-1$;

3) $2x+y=0$ *va* $3x-y-4=0$; 4) $x+2y=0$ *va* $2x+4y=7$;

$$j;\ 1)\ 90^0,2)\ 45^0;\ 3)\ 45^0;4)\ 0$$

9.
1) $3x-2y-5=0$, 2). $6x-4y+1=0$, 3).$6x+4y-3=0$, 4).$2x+3y-6=0$
to’g’ri chiziqlardan parallel va perpendikulyar bo’lganlarini ko’rsating.

J: 1 va 2-to’g’ri chiziqlar parallel, 1 va 4-to’g’ri chiziqlar hamda 2 va 4-to’g’ri chiziqlar perpendikulyar.

10. Uchlari $A(1;2)$, $B(4;5)$ *va* $C(7;2)$ nuqtalarda bo’lgan uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing va uning ichki burchaklarini toping.

$$j{:}\ AB{:}\ x-y+1=0;\ BC{:}\ x+y-9=0;\ AC{:}\ y=2$$
$$\angle A=\angle C=45^0;\angle B=90^0$$

11. Uchlari $A(-1;1)$, $B(3;3)$ va $C(5;0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning medianalari tenglamalarini yozing.

j: $AN: x-10y+16=0$; $BM: 5x-2y-9=0$; $CK: x+2y-5=0$

12. Uchlari $A(-2;0)$, $B(2;4)$ va $C(3;-1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning balandliklari tenglamalarini tuzing.

j: $AN: y=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$; $BM: y=5x-6$; $CK: y=-x+2.$

13. $x+y-4=0$ va $2x-2y+5=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalarining tenglamasini tuzing.

j: $y=\frac{3}{4}$; $y=3\frac{1}{4}$

XULOSA

Tekislikdagi analitik geometriyada chiziqlarning xususiyatlari ularning tenglamalari orqali algebraik usulda o'rganiladi. Eng sodda va eng ko'p uchraydigan chiziq–to'g'ri chiziqdir. Tekislikdagi to'g'ri chiziqlarning umumiy, burchak koeffitsiyentli, kesmalardagi, normal, kanonik va parametrik tenglamalarini ko'rish mumkin. Bu tenglamalardan kelgusida to'g'ri chiziqqa doir turli masalalarni yechishda foydalaniladi.

Nazorat savollari.

1. Birinchi va ikkinchi tartibli to'g'ri chiziqlarning ta'rifi.
2. To'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.
3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
4. To'g'ri chiziqning boshqa turdagi tenglamalari.
5. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
6. Nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

3-§. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

Reja:

1. Aylananing tenglamasi.
2. Ellips.
3. Giperbola.
4. Parabola.

Tayanch iboralar: ikkinchi tartibli egri chiziq, aylana, ellips, Ellipsning ekssentrisiteti, parabola, parabolaning ekssentrisiteti, giperbola, giperbolaning direktrissasi.

O'zgaruvchilarning 2 darajasi qatnashgan tenglamalar ikkinchi tartibli egri chiziqni bildiradi. Umumiy holda uning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad (1)$$

bu yerda *A, B, C, D, E, F* o'zgarmas koeffitsiyentlar bo'lib bulardan *A, B, C* koeffitsiyentlarning kamida bittasi 0 ga teng bo'lmasligi kerak. (1) tenglama koeffitsiyentlarining olgan qiymatlariga qarab uning qanday egri chiziqni tasvirlashini ko'ramiz.

I. Oldingi paragraflarda $C(a,b)$ nuqtasidan o'tuvchi radiusi R ga teng bo'lgan aylananing tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (2)$$

ekanligini ko'rgan edik. Qavslarni ochib bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=R^2$, bu tenglamani (1) tenglama bilan solishtirib xy oldidagi koeffitsiyentni yo'qligi x^2 va y^2 oldidagi koeffitsiyentlar o'zaro teng ekanligini ko'ramiz. Shunday qilib, x, y ga nisbatan ikkinchi tartibli umumiy tenglama aylana tenglamasi bo'lishi uchun undagi x^2, y^2 qatnashgan hadlar oldidagi koeffitsiyentlar teng bo'lishi va *xy* ko'paytma oldidagi koeffitsiyentlar 0 ga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Demak, ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$, bu yerda x^2+2Dx va y^2+2Eyni to'la kvadratga keltiramiz, u holda

$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F \qquad (3)$$

u holda (3) da quyidagi uch hol bo'lishi mumkin:

1) $D^2+E^2-F>0$ bu holda $R=\sqrt{D^2+E^2-F}$ radiusli markazi (*-D, -E*) nuqtada bo'lgan aylana tenglamasi kelib chiqadi.

2) $D^2+E^2-F=0$ bu holda (3) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi: $(x+D)^2+(y+E)^2=0$ bu tenglamani faqat (*-D, -E*) nuqta koordinatalarigina qanoatlantiradi.

3) $D^2+E^2-F<0$ (3) tenglama hech qanday egri chiziqni ifodalaymaydi.

Misol. $x^2+y^2+6x-6y-22=0$ hech qanday egri chiziqni ifodalamasligini ko'rsating.

Yechish. (3) ga asosan

$$(x^2+6x+9)-9+(y^2-6x+9)-9+22=0$$

$$(x+3)^2+(y-3)^2=-4$$

demak, bu tenglama hech qanday egri chiziqni ifodalamaydi.

Misol 2. $x^2+y^2-4x+6y+3=0$ tenglama aylananing tenglamasi ekanligini ko'rsating.

Yechish. x^2 va y^2 oldidagi koeffitsiyentlar teng, *xy* ko'paytma qatnashgan had tenglamada yo'q. Bu yerda $A=1,\ B=1,\ D=-4,\ E=6,\ F=3$ (2) ga asosan

$$x^2\cdot 4x+4+y^2+6y+9-4-9+3=0$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=10$$

bu markazi (2; -3) nuqtada bo'lgan, radiusi $\sqrt{10}$ bo'lgan aylananing tenglamasidir.

II. <u>Ta'rif.</u> Ellips deb, fokuslar deb ataluvchi nuqtalargacha bo'lgan masofalarining yig'indisi $2a$ o'zgarmas bo'lgan tekislik

nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi. Fokuslarni F_1, F_2 deb belgilaymiz, ular orasidagi masofa $2c$ ellipsning ta'rifiga asosan

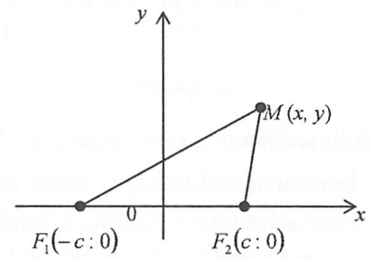
$$F_1M+F_2M=2a$$

bizga ma'lumki $2a>2c$. Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tanlab olgan koordinatalar sistemasida chap fokus $F_1(-c:0)$ va o'ng fokus $F_2(c:0)$, chizma 1 dan $M(x, y)$ ixtiyoriy nuqta, ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz.

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

(4) ga asosan

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (5)$$



1-rasm

Tenglamani soddalashtirish uchun yuqoridagi ifodani quyidagicha yozamiz.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

tenglamani ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

soddalashtirgandan so'ng

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

yana kvadratga ko'tarsak

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=a^2-2a^2cx+c^2x^2$$

va soddalashtirsak

$$(a^2-C^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

a^2-c^2 musbat son, shuning uchun $a^2-c^2=b^2$ deb olsak (5) tenglama quyidagicha ko'rinishga keladi

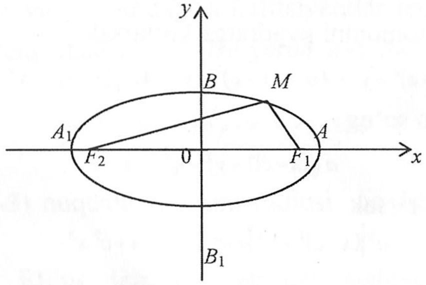
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

Ellipsni ixtiyoriy nuqtalari (6) tenglamani qanoatlantiradi. (6) ellipsning **kanonik tenglamasi** deyiladi. Endi ellipsning kanonik tenglamasidan foydalanib uning shaklini tekshiramiz. (6) tenglamaga ellipsning x va y ning kvadratlarigina kiradi, shu sababli (x, y) nuqta ellipsning nuqtasi bo'lsa, $(\pm x, \pm y)$ nuqta ham ellipsning nuqtasi bo'ladi. Shunday ko'rinishda ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan, shuning uchun ellips shaklini birinchi chorakda tekshirish kifoya. (6) tenglamani y ga nisbatan yechamiz.

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \tag{7}$$

u haqiqiy son bo'lishi uchun $a^2-x^2\geq 0$ yoki $x\leq a$ bo'lishi kerak $|x|$, 0 dan a gacha o'sib borishi mumkin. x=0 bo'lganda $y=b$ bo'lib, $x=a$ bo'lganda y=0 bo'ladi. Abssissa x 0 dan a gacha o'sib borganda y ordinata b dan 0 gacha kamayib boradi. BA yoy ellipsning birinchi chorakdagi yoyi bo'ladi.

Simmetriyaga asoslanib ellipsning 2, 3 va 4 choraklardagi yoylari BA_1, A_1B_1 va B_1A larini ko'rsatamiz, natijada



2-rasm

hosil bo'ladi.

Koordinata o'qlarini ellipsning **simmetriya o'qlari** deyiladi, fokuslar yetgan simmetriya o'q ellipsning **fokal o'qi** deyiladi. Simmetriya o'qlarining kesishgan nuqtasi ellipsning markazi deyiladi. Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishgan nuqtalari **uning uchlari** deyiladi. 2-chizmada $A(a,0)$, $A_1(-a,0)$, $B(b,0)$, $B_1(-b,0)$ nuqtalar ellipsning uchlari $AA_1=2a$ ellipsning katta o'qi $BB_1=2b$ ellipsning **kichik o'qlari** deyiladi. (6) tenglamada $a=b$ deb olinsa $x^2+y^2=a^2$ ko'rinishiga ega bo'ladi. Bu tenglama radiusi a ga teng bo'lgan aylananing tenglamasidir.

Ellipsning ekssentrisiteti. Ellipsning fokuslari orasidagi masofani uning katta o'qi uzunligiga nisbati **ellipsning ekssentrisiteti** deyiladi va $\varepsilon=\frac{c}{a}$ deb belgilanadi. c noldan a gacha bo'lgan qiymatlarni olish mumkin, shuning uchun $0\leq\varepsilon<1$.

Bizga ma'lumki, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ bu yerdan $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$.

Agarda $a=b$ bo'lsa ellips aylana bo'lib qoladi va $\varepsilon=0$ bo'ladi. Agarda b ning qiymati a dan 0 gacha kamaysa ε, 0 dan 1 gacha o'sib boradi. Shunday qilib, ellipsning ε ekssentrisiteti 0 ga qancha yaqin bo'lsa ellipsning shakli aylanaga shuncha yaqin va ekssentrisiteti 1 ga qancha yaqin bo'lsa u shuncha ingichkalasha boradi.

Ellipsning fokal radiuslari. Ellipsning ixtiyoriy nuqtalaridan fokuslargacha bo'lgan masofalari ellips nuqtasining **fokal radiuslari** deyiladi. F_1M va F_2M ellipsdagi M nuqtaning fokal radiuslaridir, bularni r_1 va r_2 deb belgilaymiz. Bizga ma'lumki,

$$r_1=F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad r_2=F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

fokal radiuslarni ifodalash uchun formula topish maqsadida bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, chiqqan natijalarni ikkinchisidan birinchisini hadlab ayiramiz:

$$r_2^2-r_1^2=4cx$$

$$r_1+r_2=2a \tag{8}$$

qo'ysak

$$r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x$$

(9)

tenglik hosil bo‘ladi, (8) va (9) tenglikni hadlab qo‘shsak

$$r_1 = a - \varepsilon x$$

$$r_2 = a + \varepsilon x$$

(10)

hosil bo‘ladi. (10) formulalar abssissasi x ga teng bo‘lgan ellips nuqtalarining fokal radiuslarini x orqali chiziqli ifodalaydi.

Misol. $2x^2+4y^2=8$ ellips fokuslarining koordinatalari, ekssentrisiteti va abssissasi 1 ga teng bo‘lgan nuqtalarning fokal radiuslari topilsin.

Yechish. Ellips tenglamasi 8 ga bo‘lamiz $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ bu tenglikdan $a^2=4,\ a=2,\ b^2=2,\ b=\sqrt{2}$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$$

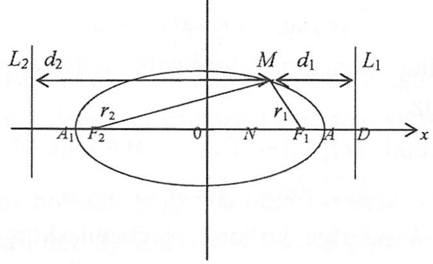
Demak, $F_1(\sqrt{2},\ 0)$ $F_2(-\sqrt{2},\ 0)$ nuqtalar ellipsning fokuslaridir. Ellipsning ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x=1$ bo‘lgani uchun

$$r_1=a-\varepsilon x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1=\frac{4-\sqrt{2}}{2} \qquad r_2=\frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

Ellipsning direktrissalari

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ellipsning direktrisalari deb, uning katta o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan va markazidan $\left|\pm\frac{a}{e}\right|$ masofa uzunligida o‘tadigan ikkita **to‘g‘ri chiziqqa** aytiladi. Ellips direktrisalarining tenglamalari $x=+\frac{a}{\varepsilon}$ $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ bo‘ladi.



3-chizma

Direktrisalari ellipsning A va A_1 uchlaridan tashqarida joylashgan bo‘ladi, chunki $\varepsilon<1$, $\frac{a}{\varepsilon}>a$, $-\frac{a}{\varepsilon}<-a$.

Direktrisalar quyidagi xossaga bo‘ysunadi.

Teorema. Ellipsning ixtiyoriy $M(x,\ y)$ nuqtalaridan fokuslarigacha bo‘lgan masofaning mos direktrisalarigacha bo‘lgan masofaga nisbati ε (o‘zgarmas songa) teng.

$d_1=ML_1$ $d_2=ML_2$ sonlar M nuqtadan direktrisalargacha bo‘lgan masofa, r_1 va r_2 fokal radiuslar, 3-chizmadan

$$d_1=ML_1=OD-ON=\frac{a}{\varepsilon}-x=\frac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}$$

demak, $\frac{r_1}{d_1}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}}=\varepsilon$, $\frac{r_2}{d_2}=\frac{a+\varepsilon x}{\frac{a+\varepsilon x}{\varepsilon}}=\varepsilon$

Misol. Katta yarim o‘qi 3 va kichik yarim o‘qi 2 bo‘lgan ellipsning tenglamasi va uning direktrisalari tenglamalari tuzilsin.

Yechish. $a=3$, $b=2$ bo‘lgani uchun ellipsning tenglamasi $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{9-4}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Direktrisalarining tenglamalari $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ $x=\pm\frac{3\cdot 3}{\sqrt{5}}=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$.

III. Giperbolaning kanonik tenglamasi. Giperbola deb har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha (fokuslargacha) masofalarning ayirmasi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga aytiladi.

Fokuslar orasidagi masofani $2c$ deb belgilaymiz. Giperbola ta'rifiga asosan $MF_2 - MF_1 = \pm 2a$

Giperbolaning berilgan koordinata sistemasida tenglamasini keltirib chiqaramiz.

Bizga ma'lumki, $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ $\quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, demak

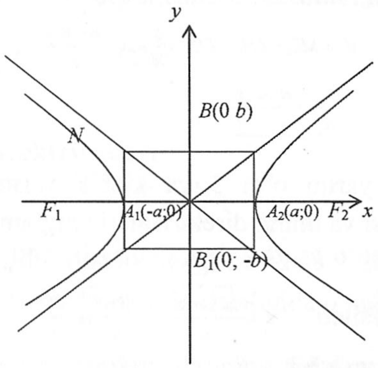
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, ixchamlashtirgandan so'ng va $c^2 - a^2 = b^2$ deb belgilasak, giperbolaning kanonik tenglamasini keltirib chiqaramiz.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(11)

(11) tenglama giperbola nuqtalarining koordinatalarini qanoatlantiradi. Quyida giperbola qanday egri chiziq bo'lishini ko'ramiz. Tenglamada noma'lum koordinatalarining juft darajasi qatnashadi. Shunga asosan giperbolaning ikki simmetriya o'qi mavjud. Bu x va y o'qlaridir, simmetriya o'qlari giperbolaning o'qlari deyiladi.



4-rasm

Giperbolaning fokuslari joylashgani o'q **frontal o'q** deyiladi.

Giperbolaning birinchi chorakdagi formulasini tekshiramiz.

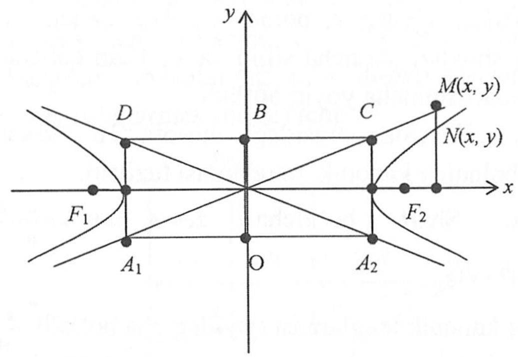
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

(12)

Bu yerda $x \geq a$ bo'lishi kerak x, 0 dan ∞ gacha o'zgarganda y ham 0 dan ∞ gacha o'sadi. Giperbola o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun AN yoy

4-chizmadagi kabi bo'ladi. y ga 0 berib $x = \pm a$ ni topamiz. Demak giperbolani ikki uchi bor $A_2(a, 0)$ va $A_1(-a, 0)$ giperbola y o'qi bilan kesishmaydi, chunki x=0 bersak $y = \pm\sqrt{-b^2}$. Shuning uchun faqat Ox o'qi haqiqiy o'q Oy o'qini mavhum deyiladi.

AN yoy $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqqa yaqinlasha boradi. Bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k = \frac{b}{a}$ bo'ladi.



5-rasm

Buni ko'rsatish uchun M va N (x, y) nuqtasini olamiz. 5-chizmada ko'rinib turibdiki, ikkala nuqtani ham abssissasi bir xil, ordinatalari orasidagi farqni yozamiz.

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Bu ifodani surati o'zgarmas son bo'lib maxraji x o'sishi bilan cheksiz suratda o'sib boradi. Shuning uchun Y-y ayirma 0 ga intiladi, ya'ni abssissa o'sishi bilan M nuqta N ga intiladi. Simmetriyadan ko'rinib turibdiki $y=-\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziq x cheksizlikga intilganda giperbola yoyi (shoxi) shu to‘g‘ri chiziqqa intiladi $y=\frac{b}{a}x$ va $y=-\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlari **giperbolaning asimptotalari** deyiladi. Giperbolani qurishdan oldin asimptotalarni qurish kerak. Buning uchun abssissa o‘qidan a uzunlik y o‘qidan b uzunlik olib asimptota (0, 0) $(a,\ b)$ nuqtalardan o‘tishi lozim. $\varepsilon=\frac{c}{a}$ **giperbolaning ekssentrisiteti** deyiladi. Bizga ma’lumki, $c>a$ bunda $\varepsilon>1$ ekssentrisiteti giperbolani formasini ifodalaydi $c^2=a^2+b^2$ dan $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2-1=\varepsilon^2-1$. Demak, ekssentrisiteti kichik bo‘lgan sari o‘qlarning munosabatlari b/a ham kam bo‘ladi. Agar a o‘zgarmay qolib b kattalashib borsa giperbolaning ekssentrisiteti 1 dan ancha katta qiymatlar qabul qiladi va bu holda giperbola shoxlari kengayib boradi ε, 1ga qancha yaqin bo‘lsa, giperbolaning shoxlari shuncha silliq va ε, 1dan qancha katta bo‘lsa giperbola shoxlari shuncha yoyiq bo‘ladi.

1-misol. Fokuslar orasidagi masofa 16 ekssentrisiteti 8/7 bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Shart bo‘yicha $2c=16,\ c=8,\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{8}{7}$, demak, $a=7,\ \ b=\sqrt{64-49}=\sqrt{15}$.

Giperbolaning kanonik tenglamasi quyidagicha bo‘ladi $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{15}=1$.

2-misol. $M_1\left(-3;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ va $M_2(4;\ -2)$ nuqtadan o‘tuvchi giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Giperbolaning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Uning tenglamasini M_1 va M_2 nuqta koordinatalari qanoatlantiradi. Shuning uchun

$$\frac{9}{a^2}-\frac{\frac{1}{2}}{b^2}=1 \qquad \frac{16}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$$

bu yerdan $a^2=8$ va $b^2=4$ ekanini topamiz. Giperbola tenglamasi quyidagicha bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$$

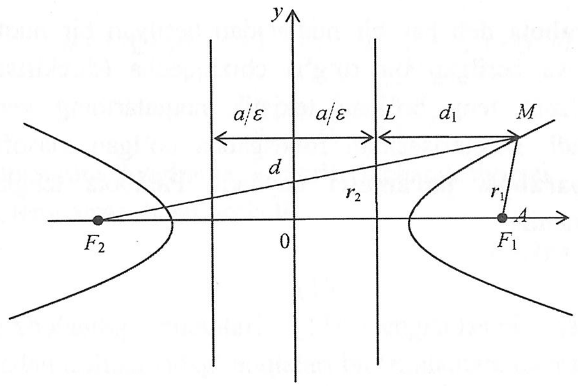
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **giperbolaning direktrisalari** deb uning markazidan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ masofada fokal o‘qiga perpendikulyar bo‘lib o‘tadigan ikkita to‘g‘ri chiziqqa aytiladi.

Ta’rifga asosan, direktrisa tenglamalari quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x=+\frac{a}{\varepsilon} \qquad x=-\frac{a}{\varepsilon}$$

Giperbolada $\varepsilon>1$ bo‘lgani sababli $\frac{a}{\varepsilon}<a$ bo‘ladi. Giperbolaning direktrisalari O markazi bilan AA_1 uchlari orasida joylashgan.

Giperbola quyidagi xossaga ega. Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha masofaning mos direktrisasigacha bo‘lgan masofa nisbati ε ga (o‘zgarmas songa) teng.



6-rasm

Chizmadan $d_1=x-\frac{a}{\varepsilon}$ agar M nuqta chap shoxida bo‘lsa, u holda $d_1=\frac{a}{\varepsilon}-x$ bo‘ladi. Endi $\frac{r_1}{d_1}$ nisbatan ko‘ramiz. M nuqta o‘ng shohida bo‘lgan holda $\frac{r_1}{d_1}=\frac{-a+\varepsilon x}{x-\frac{a}{\varepsilon}}=\frac{\varepsilon(-a+\varepsilon x)}{\varepsilon x-a}=\varepsilon$ M nuqta chap shohida bo‘lganda $\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon$

ikkala holda ham ε gat eng bo‘ladi.

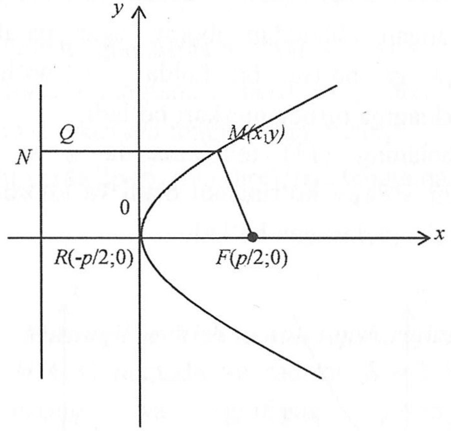
Misol. Giperbola direktrisalari orasidagi masofa uning fokuslari orasidagi masofadan uch marta kichik. Giperbolaning mavhum o‘qi 4 ga teng. Giperbolaning ekssentrisiteti va direktrisalari tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Giperbolaning fokuslari orasidagi masofa 2c direktrisalar orasidagi masofa $2\frac{a}{\varepsilon}$ ma’lum shuning uchun masalaning shartiga ko‘ra $3\cdot\left(2\frac{a}{\varepsilon}\right)=2c$

bu yerda $3a=c\varepsilon$ $\frac{c^2}{a^2}=3$ $\varepsilon=\sqrt{3}$

Direktrisalar tenglamasini tuzamiz. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ giperbola uchun $c^2=a^2+b^2$ bizda $2b=4$ $b=2$, demak, $2a^2=4$ $a=\sqrt{2}$. a va ε qiymatlarini direktrisa tenglamasiga qo‘ysak, $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, bu yerda $\sqrt{3}x\pm\sqrt{2}=0$.

IV. Parabola deb har bir nuqtasidan berilgan bir nuqtagacha (fokusgacha) va berilgan bir to‘g‘ri chiziqqacha (direktrisagacha) masofalari o‘zaro teng bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga aytiladi. Direktrisasidan fokusgacha bo‘lgan masofasini p deymiz. ***p* parabola parametri** deyiladi. Parabola tenglamasini keltirib chiqaramiz:



7-rasm

Tanlab olingan koordinatalar sistemasi fokus koordinatalari F $(p/2;\ 0)$ direktrisasining tenglamasi $x=-p/2$ va y o‘qiga parallel $M(x,\ y)$ parabolaning nuqtasi. Parabolaning ta’rifiga asosan $MN=MF$ (7-chizmada ko‘ramiz).

$$MN=NQ+QM=\frac{p}{2}+x \qquad MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$$

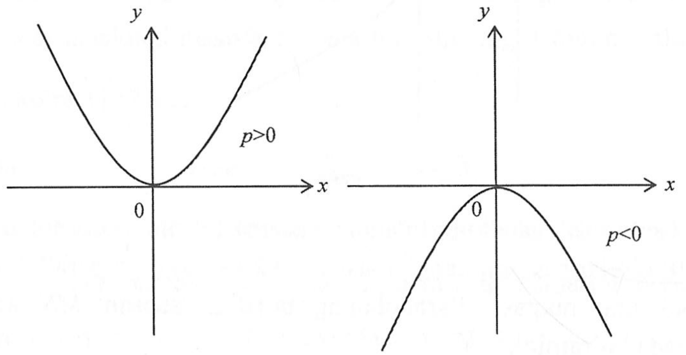
$$\frac{p}{2}+x=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

Ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib ixchamlashtirsak, parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$y^2=2px \tag{13}$$

Parabolaning nuqtalari (13) tenglamasini qanoatlantiradi. Paraboladan tashqarisidagi nuqtalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Parabolaning shaklini uning tenglamasiga asosan tekshiramiz $y=\pm\sqrt{2px}$ bo‘lgani uchun, agar $p>0$ bo‘lsa, $x\geq 0$ bo‘lishi kerak. Demak, x turli qiymatlar olsa bu qiymatlar 0 dan $+\infty$ gacha bo‘lgan oraliqda bo‘lishi kerak, x ning bunday qiymatlariga y ning 0 dan $\pm\infty$ gacha qiymatlari to‘g‘ri keladi, ya’ni birinchi kvadratda x ning qiymatlari 0 dan $+\infty$ gacha o'sib borganda y ham $+\infty$ gacha o'sib boradi. Parabola 7-chizmada tasvirlangan chiziqdan iborat, agar parabolaning (13) tenglamasida $p \le 0$ ga bo'lsa, bu holda $x \le 0$ bo'lishi kerak va parabolaning shakldagiga nisbatanteskari bo'ladi.

Agar parabolaning (13) tenglamasida x va y o'rinlarini almashtirsak, ya'ni $x^2 = 2py$ ko'rinishni oladi va koordinata o'qlariga nisbatan quyidagicha joylashgan bo'ladi.



8-rasm

Parabolaning ekssentrisiteti va direktrisasi. Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokusgacha bo'lgan masofani r_1 bilan direktrisasigacha bo'lgan masofani d bilan belgilab, parabola ta'rifidan $r = d$ bundan $\frac{r}{d} = 1$ shuning uchun parabola ekssentrisiteti

$$\varepsilon = 1$$

(13) tenglama uchun direktrisa tenglamasi

$$x = -\frac{p}{2}$$

1-misol. *Ox* o'q parabolaning simmetriya o'qi, uni uchi koordinatalar boshida yotadi, parabola fokusidan uchigacha bo'lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Masalaning shartiga asosan, parabolaning tenglamasi $y^2 = 2px$ bo'ladi.

$$OF = 4 \quad \frac{p}{2} = 4 \text{ yoki } p = 8$$

bu qiymatni parabola tenglamasiga qo'ysak $y^2 = 16x$.

2-misol. Parabola tenglamasi berilgan $y^2 = 6x$. Uning fokusini koordinatalarini va direktrisasi tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu yerda $2p=6$, $p=3$ direktrisa tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ $x = -\frac{3}{2}$

fokusi $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Markazi $M(4;3)$ nuqtada va radiusi $R = 5$ bo'lgan aylana tenglamasini tuzing va grafigini yasang. $A(3;-1)$, $B(4;-2)$ *va* $C(-1;-2)$ nuqtalar aylanada yotadimi?

   j: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$, *A nuqta aylana ichida yotadi, B nuqta aylanada yotadi, C nuqta aylanadan tashqarida yotadi.*

2. $A(3;4)$ nuqta berilgan. Diametri OA dan iborat aylana tenglamasini tuzing.

   j: $(x - \frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 = 6{,}25$

3. 1. $x^2 + y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$; 2. $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$;

   3. $x^2 + 4x + y^2 - 5 = 0$ aylanalarni markazi va radiusini toping hamda grafiklarini chizing.

4. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ aylana bilan $x - y - 5 = 0$ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalarini toping va grafigini yasang.

   J: $(4;-1)$ va $(7;2)$.

5. $A(1;2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlariga urinuvchi aylana tenglamasini tuzing va grafiklarini yasang.

   j: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

6. $A(4;4)$ nuqtadan va $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ aylana bilan $x + y = 0$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o'tuvchi aylana tenglamasini yozing.

   j: $x^2 + y^2 - 8y = 0$

7. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellipsni grafigini chizing, uning ekstsentrisiteti va fokuslarini toping.

$j: \varepsilon=\frac{3}{5};\ F_1(-3;0);\ F_2(3;0)$

8. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa 10 ga teng bo'lib, katta yarim o'q $a=13$ ga teng bo'lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

$j: \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

9. Ekstsentrisiteti $\varepsilon=0{,}5$, katta yarim o'qi $a=8$ ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

$j: \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

10. $9x^2+25y^2=225$ ellipsnng yarim o'qlari, fokuslari, ekstsentrisitetini toping. Direktritsalari tenglamasini tuzing. Grafigini yasang.

$j: a=5, b=3;\ F_1(-4;0),\ F_2(4;0);\ \varepsilon=0{,}8;\ x=\pm 6{,}25$

11. $A(5;4\sqrt{3})$ *va* $B(0;8)$ nuqtalardan o'tuvchi ellips koordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik. Uning tenglamasini tuzing. A nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar (fokal radius-vektorlar) ni toping.

$j: \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1;\ r_1=7;\ r_2=13$

12. $9x^2+25y^2=225$ ellipsda shunday $M(x;y)$ nuqta topingki, undan o'ng fokusgacha bo'lgan masofa chap fokusgacha bo'lgan masofadan 4 marta katta bo'lsin.

$j: (-\frac{15}{4};\ \pm\frac{\sqrt{63}}{4})$

13. $x^2+y^2=100$ aylanadagi barcha nuqtalarning ordinatalarini ikki barabar qisqartirishdan hosil bo'lgan yangi egri chiziq tenglamasini tuzing.

$j: \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

14. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellips fokuslaridan o'tuvchi va markazi ellipsning yuqori uchida bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

$j: x^2+(y-3)^2=25$

15. $x^2+y^2=4$ aylanadagi har bir nuqtaning abstsissasi uch baravar ortirishdan hosil bo'lgan egri chiziqni tenglamasini tuzing.

$j: \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

16. Ellips fokuslarining biridan katta o'qining uchlarigacha bo'lgan masofalar 5 va 1 ga teng. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

$j: \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1;\ r_1=11;\ r_2=5$

17. $x^2-4y^2=16$ giperbola va uning asimptotalari grafigini chizing. Giperbolaning fokuslari, ekstsentrisiteti va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

$j: \varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$

18. $x^2-4y^2=16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng M nuqta olingan. Undan fokuslarigacha bo'lgan masofalarni toping.

$j: r_1=1, r_2=9.$

19. 1) Fokuslar orasidagi masofa $2c=10$, uchlari orasidagi masofa $2a=8$;

2) haqiqiy yarim o'qi $a=2\sqrt{5}$, ekstsentrisiteti $\varepsilon=\sqrt{1{,}2}$ bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

1). $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1$

20. Uchlari $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo'lgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

$j: \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

21. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ giperbola berilgan. Uning yarim o'qlarini, fokuslari koordinatalarini, ekstsentrisitetini, direktrisasi va asimptotalari tenglamalarini tuzing. Grafigini chizing.

$j: a=3, b=4;\ F_1(5;0);\ F_2(-5;0);\ \varepsilon=\frac{5}{3};\ x=\pm 1\frac{4}{5};\ y=\pm 1\frac{1}{3}x$

22. Mavhum o'qi $2b=4$ ga teng, fokusi $F_1(\sqrt{5};0)$ nuqtada bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing.

$j: \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

23. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ giperbolaning fokusidan asimptotalarigacha bo'lgan masofa va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

$j: d=3, \alpha=arctg\frac{3}{4}$

24. Biror uchidan fokuslarigacha masofalari 9 va 1 ga teng bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

$j: \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\ yoki\ \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

25. Markazi $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ giperbolaning o'ng fokusida bo'lgan, koordinatalar boshidan o'tuvchi aylana bilan shu giperbola asimptotalarining kesishish nuqtalarini toping.

$j: (0;0),\ (6;\pm 2\sqrt{3}).$

26. Fokuslari orasidagi masofa 6 ga va ekstsentrisiteti $\frac{3}{2}$ ga teng bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing. Fokuslari abstsissalar o'qida yotadi.

$j: \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

27. $F(0;2)$ nuqtadan va $y=4$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

$j: y=3-\frac{x^2}{4}.$

28. Koordinatalar boshidan va $x=-4$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda bo'lgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

$j:\ y^2=8(x+2).$

29. 1). $y^2=4x$; 2). $y^2=-4x$; 3). $x^2=4y$; 4). $x^2=-4y$ tenglamalar bilan berilgan parabolalar hamda ularning fokuslari va direktrisalarini yasang. Direktrisa tenglamasini tuzing.

30. 1). $A(0;0)$ *va* $B(1;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi va OX o'qqa nisbatan simmetrik; 2). $O(0;0)$ *va* $C(2;-4)$ nuqtalardan o'tuvchi va OY nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

$j:$ 1). $y^2=9x$; 2). $y=-x^2$

31. $x^2+y^2+4y=0$ aylana va $x+y=0$ to'g'ri chziqning kesishgan nuqtalaridan o'tib, OY o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan parabolaning va uning direktrisasini tenglamalarini tuzing hamda grafigini yasang.

$j:\ y=-\frac{x^2}{2}$

32. $y^2=6x$ parabola berilgan. Uning fokusini toping va direktrisa tenglamasini tuzing. Grafigini yasang.

$j:\ F\left(\frac{3}{2};0\right); x=-\frac{3}{2}$

33. $y^2=-4x$ parabolaning fokusidan o'tuvchi va OX o'q bilan 120^0 burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing hamda hosil bo'lgan vatarning uzunligini toping.

$j: y=-\sqrt{3}(x+1); d=\frac{16}{3}$

34. $y^2=8x$ parabolaning $y=-x$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinma tenglamasini tuzing.

$j: y=-x-2.$

XULOSA

Tekislikda I tartibli tenglamalar faqat va faqat to'g'ri chiziqlarni ifodalashini ko'rib o'tgan edik. Ammo tekislikda II tartibli tenglamalarga turli chiziqlar mos keladi va ular II tartibli chiziqlar deyiladi. Ulardan biri ellips bo'lib hisoblanadi. Ellipsning grafigini qisilgan aylana kabi tasavvur etish mumkin. Ellipsning o'ziga xos xususiyati shundan iboratki, uning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas sondir.

Giperbola II tartibli chiziqlardan biri bo‘lib, fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalargacha masofalar ayirmasining moduli o‘zgarmas bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni kabi aniqlanadi. Giperbola grafigi, ellips grafigidan farqli ravishda, chegaralanmagan chiziq bo‘lib, ikkita tarmoqdan iboratdir. II tartibli chiziqlar ichida faqat giperbola uchun asimptota mavjud.

Parabola ham II tartibli chiziqdir. U direktrisa deb ataluvchi to‘g‘ri chiziq va fokus deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalardan tashkil topadi. Parabola grafigi ham chegaralanmagan egri chiziqdan iborat.

Nazorat savollari.

1. Ikkinchi tartibli egri chiziq deb nimaga aytiladi?
2. Aylana deb nimaga aytiladi?
3. Ellips deb nimaga aytiladi?
4. Ellipsning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?
5. Parabola deb nimaga aytiladi?
6. Giperbolaning direktrissasi deb nimaga aytiladi?

4-§. TEKISLIK TENGLAMALARI

Reja:

1. **Umumiy tushunchalar.**
2. **Fazodagi tekislik tenglamalari.**
3. **Tekislikning kesmalardagi tenglamasi.**
4. **Tekislikning normal tenglamasi.**
5. **Nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa.**
6. **Ikki tekislik orasidagi burchak.**
7. **Uch nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasi.**
8. **Fazodagi to‘g‘ri chiziq.**

Tayanch iboralar: fazodagi tekislik tenglamalari, tekislikning kesmalardagi tenglamasi, tekislikning normal tenglamasi, nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa, ikki tekislik orasidagi burchak, uch nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasi, fazodagi to‘g‘ri chiziq.

I. Faraz qilaylik, x, y, z – ixtiyoriy o‘zgaruvchi miqdorlar bo‘lsin. Agar

$$F(x, y, z)=0 \qquad (1)$$

tenglik x, y, z larning faqat ayrim qiymatlaridagina o‘rinli bo‘lsa, u holda (1) ni
x, y, z larga nisbatan tenglama deb ataymiz. Uchta son $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$ (1) tenglamani qanoatlantiradi deymiz, agar (1) dagi noma’lumlar o‘rniga shu sonlarni qo‘yganda tenglik ayniyatga aylansa. (1) tenglamani qanoatlantiradigan har bir x_0, y_0, z_0 sonlar uchligiga fazoning $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasini mos qo‘yamiz. Bunday nuqtalarning geometrik o‘rnini **sirt** deb ataymiz, **(1) ni esa shu sirtning tenglamasi** deymiz.

Agar sirt tenglamasi berilgan bo‘lib, biror nuqtaning shu sirtda yotish yoki yotmasligini tekshirish talab qilingan bo‘lsa, u holda berilgan nuqtaning koordinatalarini tenglamaning noma'lumlari o'rniga qo'yish kifoya. Analitik geometriyaning vazifasi qaralayotgan sirtni uning tenglamasi yordamida o'rganishdir.

Sirtning ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtasi uning **siljuvchi nuqtasi** deb ataladi. Misol sifatida sferaning tenglamasini tuzaylik. Sferaning ta'rifiga ko'ra, sferaning markazi deb ataluvchi $C(a,b,c)$ nuqtadan sferaning siljuvchi nuqtasi orasidagi masofa r o'zgarmasdir. Demak,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

yoki

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Agar sferaning markazi koordinatalar boshida bo'lsa, u holda

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

Fazodagi analitik geometriyada asosan algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirtlar o'rganiladi. Masalan, tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

ko'rinishda bo'lgan sirt **1-tartibli sirt** deb ataladi. Tenglamasi

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \tag{3}$$

bo'lgan sirtlarni **2-tartibli sirtlar** deb ataymiz. Yuqorida ko'rilgan misoldan sfera 2-tartibli sirt ekanligi kelib chiqadi.

II. <u>1-teorema.</u> Dekart koordinatalar sistemasida tekislik 1-tartibli sirtdir.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida berilgan α tekisligida uning biror nuqtasi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ va unga perpendikulyar o'tgan qandaydir $\vec{n}=\{A,B,C\}$ vektor berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $M(x,y,z)$ tekislikning siljuvchi nuqtasi bo'lsin. Bu nuqta α tekisligida yotishi uchun $\overline{M_0M}$

vektor $\vec{n}$ ga perpendikulyar bo'lishi shart, ya'ni $\vec{n}\perp\overline{M_0M}$.

Vektorlarning perpendikulyarlik shartidan $\overline{M_0M}\circ\vec{n}=0$ yoki

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{4}$$

kelib chiqadi. Agar $M(x,y,z)$ nuqta α tekisligida yotmasa, (4) o'rinli bo'lmaydi, shu sababli (4) tenglik $M(x,y,z)$ nuqtaning o'rnini to'la aniqlaydi. Agar (4) dagi qavslarni ochib va $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ deb belgilasak,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

hosil bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Tekislikka perpendikulyar bo'lgan nol bo'lmagan har qanday vektor tekislikning **normal vektori** deb ataladi. Shu sababli, (4) tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo'lgan va $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tgan **tekislik tenglamasi**ni ifodalaydi.

<u>2-teorema.</u> Dekart koordinatalar sistemasida har qanday 1-tartibli tenglama tekislikni aniqlaydi.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida (2) tenglama berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, x_0,y_0,z_0lar shu tenglamaning biror yechimi bo'lsin, ya'ni (2)ni qanoatlantiruvchi sonlar bo'lsin. U holda

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \tag{6}$$

bo'ladi. (2) dan (6) ni ayirsak

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

hosil bo'ladi. Ma'lumki, bu tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo'lib, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasidir. (4) tenglama (2) ga ekvivalent bo'lgani uchun (2) ham α tekislikning tenglamasi bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Tekislikning (2) tenglamasini uning umumiy tenglamasi deb ataymiz.

Misol. $\vec{n}=\{2,2,3\}$ vektorga perpendikulyar bo'lib, $M_0(1,1,1)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. (4) ga asosan

$$2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$$

yoki

$$2x+2y+3z-7=0$$

3-teorema. Agar ikki $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0$ va $A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0$ tenglamalar bir tekislikni ifodalasa, u holda bu tenglamalarning mos koeffitsiyentlari o'zaro proporsional bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan, agar teorema sharti o'rinli bo'lsa, u holda $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ vektorlar berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lishadi, demak, ular o'zaro kolleniar. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra, A_2, B_2, C_2 sonlar A_1, B_1, C_1 sonlarga proporsional bo'ladi. Agar proporsionallik koeffitsiyentini μ desak, $A_2 = A_1\mu,\ B_2 = B_1\mu,\ C_2 = C_1\mu$. Agar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, u holda uning koordinatalari har bir tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0$ va $A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0$ bo'ladi. Agar ularning birini μ ga ko'paytirib, ikkinchisidan ayirsak $D_2 - D_1\mu = 0$ hosil bo'ladi. Bundan esa,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \mu$$

kelib chiqadi.

III. Ma'lumki, A, B, C, D koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng bo'lmaydi. (2) tenglamada bu koeffitsiyentlarning ayrimlari nolga teng bo'lgan bir necha xususiy hollarni ko'rib chiqaylik.

1) $D=0$; tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani $x=0,\ y=0,\ z=0$ sonlar qanoatlantiradi, ya'ni tekislik koordinatalar boshidan o'tadi.

2) $C=0$; tenglama $Ax+By+D=0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu tekislikning normal vektori $\vec{n} = \{A, B, 0\}$, z o'qiga perpendikulyar, demak, tekislikni o'zi shu o'qga parallel o'tadi.

3) $B=0,\ C=0$; bunda $Ax+D=0$ ga ega bo'lamiz. Uning normal vektori $\vec{n} = \{A, 0, 0\}$ y va z o'qlariga perpendikulyar, u holda tekislik Oyz tekisligiga parallel o'tadi. Xususan, agar $D=0$ bo'lsa, $x=0$ hosil bo'lib, bu tekislik Oyz koordinatalar tekisligi bilan ustma-ust tushishiga ishonch hosil qilamiz.

Yuqoridagidek fikr yuritib, $Ax+Cz+D=0$ tenglama y o'qiga parallel tekislikni, $By+Cz+D=0$ tenglama x o'qiga parallel tekislikni aniqlashiga ishonch hosil qilamiz. Bularning xususiy holi sifatida, $y=0$ tenglama Oxz koordintalar tekisligining, $z=0$ esa Oxy tekisligining tenglamasi ekanligini ko'ramiz.

4) $A,\ B,\ C,\ D$ koeffitsiyentlarning birortasi ham nolga teng bo'lmasin. U holda ozod hadni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazib, tenglamani $-D$ ga bo'lib yuboramiz:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

yoki

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

Agar $a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}$ belgilashlar kiritsak,

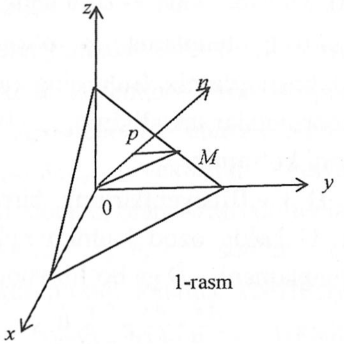
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{6}$$

hosil bo'ladi. (6) tenglamani tekislikning kesmalardagi tenglamasi deb atashadi.

IV. Faraz qilaylik, bizga π tekisligi, uning normali $\vec{n}$ va koordinatalar boshidan tekislikkacha bo'lgan masofa p berilgan bo'lsin. $\vec{n}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari α, β, γ bo'lsin. Agar $\vec{n}_0$, $\vec{n}$ vektorning orti bo'lsa, u holda

$$\vec{n}_0 = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$$

bo'ladi. Tekislikning siljuvchi nuqtasini $M(x,\ y,\ z)$ desak, uning radius-vektori $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$ bo'ladi. Chizmadan ko'rinadiki, $np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} = p$



1-rasm

Ma'lumki,

$$n\,p_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM}=|\,\vec{n}_0|\cdot n\,p_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM}=\vec{n}_0\circ\overrightarrow{OM}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

Bundan,

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

(7)

(7) tenglama **tekislikning normal tenglamasi** deyiladi.

Agar tekislikning tenglamasi (2) ko'rinishda berilgan bo'lsa, uni normal tenglamami yoki yo'qmi ekanligini

$$\mu=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

(8)

ifodaning qiymatiga qarab aniqlaymiz: agar $\mu=1$ bo'lsa, (3) normal tenglama bo'ladi, aks holda (3) ni $\pm\mu$ ga bo'lib

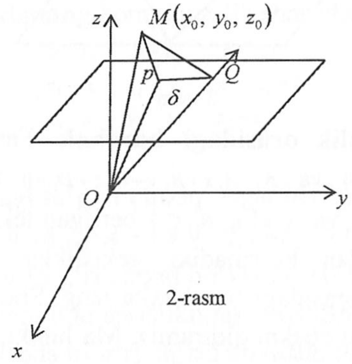
$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z\mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

(9)

hosil qilamiz. Bu tenglama normal bo'lishi uchun endi (9) dagi ishoralardan birini ozod had D ning ishorasiga teskari qilib olinsa kifoya. (2) tenglama μ ifoda yordamida normal ko'rinishga keltirilgani uchun $\frac{1}{\mu}$ ni normallovchi ko'paytuvchi deb ataladi.

V. Nuqtadan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofa. Faraz qilaylik, π tekislik va unda yotmagan biror $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan π tekislikkacha bo'lgan d masofani topish talab

qilingan bo'lsin. Berilgan tekislikning normali $\vec{n}_0$ni qurib olamiz. Agar M_0 nuqta va koordinatalar boshi π tekislikning har xil tomonlarida joylashgan bo'lsa, u holda M_0 nuqtaning π tekislikdan chetlanishi deb $+\,d$ ga, aks holda $-\,d$ ga aytamiz.



2-rasm

M_0 nuqtani normalga proyeksiyalaylik. U holda chizmadan ko'rinadiki,

$$\delta=PQ=OQ-OP$$

$$OP=p,\quad OQ=n\,p_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM}$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\delta=n\,p_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM}-p$$

$$n\,p_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM}=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma$$

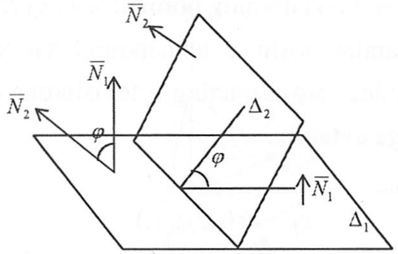
bo'lgani uchun

$$\delta=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p$$

(10)

formulaga ega bo'lamiz. U holda

$$d=|\,x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\,|$$



3-rasm

VI. Ikki tekislik orasidagi burchak. Faraz qilaylik, bizga $\Delta_1 : A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0$ va $\Delta_2 : A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0$ tekisliklar berilgan bo‘lsin. $\vec{N}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{N}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ berilgan tekisliklarning normal vektorlari. Chizmadan ko‘rinadiki, tekisliklar orasidagi burchak ularning normallari orasidagi burchakka teng. Shuning uchun normal vektorlar orasidagi burchakni qidiramiz. Ma’lumki,

$$cos\,\varphi=\frac{\vec{N}_1 \circ \vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}$$

yoki

$$cos\,\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

(11)

Agar $\Delta_1 \perp \Delta_2$ bo‘lsa, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bo‘ladi. U holda $cos\,\varphi=0$ va (11)ga asosan $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$. Bu tenglikni tekisliklarning perpendikulyarlik sharti deb atashadi. Agar Δ_1 tekislik Δ_2 tekislikka parallel bo‘lsa, u holda $\vec{N}_1$ vektor $\vec{N}_2$ vektorga kolleniar bo‘ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

bo‘ladi. Bu munosabat tekisliklarning parallellik sharti deb ataladi.

VII. Uch nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasi. Bizga Δ tekislikning uchta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. Agar $M(x, y, z)$ shu tekislikning siljuvchi nuqtasi

bo‘lsa, u holda $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ vektorlar Δ tekislikda yotadi, ya’ni ular komplanar bo‘ladi.

$$\overline{M_1M}=\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\},$$
$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\},$$
$$\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}$$

ekanligidan va vektorlarning komplanarlik shartidan

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

kelib chiqadi.

VIII. 1. Fazodagi to‘g‘ri chiziq. Agar berilgan $\Delta_1 : A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0$ va $\Delta_2 : A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0$ tekisliklar parallel bo‘lmasa, u holda ular to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi. Shu sababli, fazodagi to‘g‘ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig‘i sifatida qaraymiz. Demak, fazoda to‘g‘ri chiziq quyidagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0 \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{cases}$$

(12)

(12) to‘g‘ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi. Agar Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo‘lsa, (12) to‘g‘ri chiziqni ifodalamaydi. Demak, berilgan tenglamalar sistemasi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi ekanligini aniqlash uchun noma’lumlar oldidagi mos koeffitsiyentlarni proporsional emasligini tekshirish kerak ekan.

Bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab cheksiz ko‘p tekisliklar kesishadi. Bunday tekisliklarni tekisliklar dastasi deymiz. Agar shu dastaga tegishli ikkita tekislikning tenglamasi ma’lum bo‘lsa, shu dastaning boshqa tekisligini tenglamasi

$$\alpha\,(A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1)+\beta\,(A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0)=0$$

(13)

bo‘ladi.

Bunga ishonch hosil qilish uchun, avval (13) tenglama tekislik tenglamasi ekanligini tekshiraylik. Buning uchun, (13) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$(\alpha A_1 + A_2\beta)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)z+(\alpha D_1+\beta D_2)=0$$

Agar bir vaqtda $\alpha A_1+\beta A_2=0,\ \alpha B_1+\beta B_2=0,\ \alpha C_1+\beta C_2=0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{\beta}{\alpha}$$

bo'ladi. Bu esa dastlabki farazga zid, chunki bu holda Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo'ladi va ular to'g'ri chiziqni ifodalamaydi. Bu ziddiyat (13) tenglama ekanligini ko'rsatadi. Bu tenglama 1-darajali tenglama bo'lgani uchun y tekislikni ifodalaydi. Agar α, β larning biri, masalan $\alpha\neq 0$ bo'lsa, u holda (13)ni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

2. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi. Bizga fazoda to'g'ri chiziqning biror $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtasi va unga parallel bo'lgan $\vec{a}=\{l,m,n\}$ vektor berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $M\ (x,\ y,\ z)$ to'g'ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo'lsin. U holda $\vec{a}$ va $\overrightarrow{M_0M}$ vektorlar parallel bo'ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{14}$$

kelib chiqadi. $\vec{a}$ vektor M nuqtaning to'g'ri chiziqda bo'lishini ta'minlangani uchun uni to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb atashadi. (14) ni to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataymiz. Agar to'g'ri chiziq umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, uning bu tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirsa bo'ladi. Haqiqatan, bizga (13) berilgan bo'lsin. Bu sistemani aniqlaydigan tekisliklarni mos ravishda Δ_1 va Δ_1 deb belgilaylik. Ularning normal vektorlari $\vec{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$bo'ladi. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun: 1) uning biror $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtasini bilish

kerak; bu nuqtani topish uchun (13)dagi noma'lumlardan biriga qiymat berib, masalan $z=z_0$deb, (13) sistemani x va y larga nisbatan yechib, $x=x_0,\ \ y=y_0$larni topamiz; 2) to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi $\vec{a}=\{l,m,n\}$ vektorini topish kerak; qaralayotgan to'g'ri chiziq ikki tekislikning kesishish chizig'i bo'lgani uchun, u $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun, $\vec{a}$ vektor sifatida $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy vektorni, shu jumladan, ularning vektor ko'paytmasini olish mumkin, ya'ni $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.

Misol. Berilgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing:

$$\begin{cases}3x+2y+4z-11=0\\ 2x+y-3z-1=0\end{cases}$$

Yechish. Agar $x_0=1$ desak, sistemadan $y_0=2,\ \ z_0=1$ kelib chiqadi, demak, $M_0(1,2,1)$ ekan. Endi yo'naltiruvchi vektorni topamiz. Sistemadan $\vec{n}_1=\{3,2,4\},\ \vec{n}_2=\{2,1,-3\}$larni aniqlaymiz.

U holda $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-10,17,-1\}$ bo'ladi, bundan $l=-10,\ m=17,\ n=-1$ lar topiladi. Bularni (14)_ ga olib borib qo'ysak:

$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}$$

Agar (14) dagi nisbatlarni t ga tenglasak:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

bundan

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt\end{cases}$$

kelib chiqadi. (15) ni to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi deb atashadi, t bu yerda parametr rolini o'ynaydi. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi odatda to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini topish masalasida ishlatiladi.

Misol. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $2x+y+z-6=0$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. Avval to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini tuzib olamiz:

$$x=2+t,\ y=3+t,\ z=4+2t$$

Endi bularni tekislik tenglamasiga olib borib qo‘yamiz:

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0$$

Bundan t=-1 topiladi, bu qiymatni parametrik tenglamasiga qo‘yib $x=1,\ y=2,\ z=2$ larni topamiz.

3. To‘g‘ri chiziqga doir ayrim masalalar. Faraz qilaylik, to‘g‘ri chiziqning ikki $M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida $\vec{a}=\overline{M_1M_2}$ vektorni olish mumkin. Agar *M(x, y, z)* nuqta to‘g‘ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo‘lsa, u holda, $\overline{M_1M}$ va $\vec{a}$ vektorlar parallel bo‘ladi. Berilgan koordinatalarga ko‘ra,

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\}$$
$$\vec{a}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$$

Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{16}$$

Oxirgi tenglik **ikki nuqtadan o‘tgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deb ataladi.

a) Endi faraz qilaylik, bizga

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ va } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Ular orasidagi burchak ularning yo‘naltiruvchi vektorlari $\vec{a}_1=\{l_1,\ m_1,\ n_1\},\ \vec{a}_2=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$ orasidagi burchakga teng. Shu sababli,

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\circ\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \tag{17}$$

bo‘ladi.

b) Agar to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lsa, u holda $\varphi=\frac{\pi}{2},\ \cos\varphi=0$, shu sababli,

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \tag{18}$$

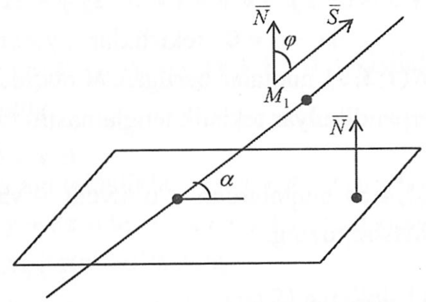
bo‘ladi. Bu tenglikni to‘g‘ri chiziqlarning **perpendikulyarlik sharti** deb ataymiz.

v) Agar to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$ larning kolleniarlik shartidan

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \tag{19}$$

kelib chiqadi. Bu tenglik to‘g‘ri chiziqlarning **parallellik sharti** deb ataladi.

4. To‘g‘ri chiziq va tekislik. Bizga $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ to‘g‘ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik berilgan bo‘lsin.



4-rasm.

Chizmadan ko‘rinadiki, to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak α va yo‘naltiruvchi vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi burchak φ lar yig‘indisi $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$, bundan $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$ yoki $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Shu sababli, φ ni topsak kifoya. Demak,

$$\cos\varphi=\cos\alpha=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

(20)

Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘lsa, u holda yo‘naltiruvchi vektor normalga perpendikulyar bo‘ladi, shuning uchun

$$Al+Bm+Cn=0$$

(21)

bo‘ladi. Bu tenglik to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning **parallellik sharti** deyiladi. Agar to‘g‘ri chiziq bilan tekislik perpendikulyar bo‘lsa, u holda yo‘naltiruvchi vektor bilan normal vektor parallel bo‘ladi. U holda to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik sharti

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$

(22)

bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. 1). $2x+3y-z+5=0$; 2). $x+y-z=0$; 3). $y-3z+4=0$; 4). $x+2z-5=0$; 5). $3x-6=0$ tekisliklarni yasang.

2. $M(0;-1;3)$ *va* $N(1;3;5)$ nuqtalar berilgan. M nuqtadan o’tuvchi va $\vec{n}=\overrightarrow{MN}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

j: $x+4y-2z=2$.

3. $M(0;1;3)$ *va* $N(2;4;5)$ nuqtalardan o’tuvchi va OX o’qiga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

j: $2y-3z+7=0$.

4. OZ o’qdan va $M(2;-4;3)$ nuqtadan o’tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

j: $2x+y=0$.

5. OX o’qqa parallel, OY *va* OZ o’qlaridan 5 va 4 birlik kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

j: $\frac{x}{5}+\frac{z}{4}=1$.

6. $M(-1;2;1)$, $N(2;3;-2)$ *va* $P(3;4;2)$ nuqtalardan o’tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

j: $7x-15y+2z-7=0$.

7. $M(1;2;3)$ nuqtadan o’tuvchi va koordinatalar o’qlaridan teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

j: $x+y+z-6=0$.

8. $x-2y+2z-8=0$ *va* $x+z-6=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

j: 45^0

9. $M(1;2;0)$ nuqtadan o’tuvchi va $x+2y-3z=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

j: $x+2y-3z=5$.

10. $M(-1;-1;2)$ nuqtadan o’tuvchi va $x-2y+z=4$ hamda $x+2y-2z=-4$ tekisliklarga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

j: $2x+3y+4z=3$.

11. $M(-1;2;0)$ *va* $N(1;1;2)$ nuqtalardan o’tuvchi hamda $x+2y+2z-4=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

j: $2x-2y+z=2$.

12. $3x-y+z=0$ *va* $x+3y+4=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

j: 90^0.

13. Quyidagi tekisliklar 1). $x+y-z=-4$; 2). $2x+2y-2z=0$; 3). $3x-y+2z=5$; 4). $2x+y+z=-3$ orasidan parallel va perpendikulyar-larini ko’rsating.

J: 1) va 2) parallel; 1) va 3) hamda 2) va 3) tekisliklarperpendikulyar.

14. $4x+3y-5z-8=0$ *va* $4x+3y-5z+12=0$ parallel tekisliklar orasidagi masofani toping.

j: $d=2\sqrt{2}$.

15. $2x-y+3z-9=0$; $3x+y-4z+6=0$ *va* $x+2y+2z-3=0$ tekisliklarning kesishish nuqtasini toping.

j: $(1;-1;2)$.

16. $M(4;3;0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}(-1;2;4)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

$$j: \frac{x-4}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{4}$$

17. $M(1;2;-3)$ va $N(4;1;-2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

$$j: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{1}$$

18. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{-5}$ va $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{2}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

J: 90^o.

19. $M(-1;2;1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

$$j: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{5}$$

20. $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak kosinusini toping.

$$j: cos\varphi=\frac{20}{21}.$$

21. $y=3x-1; 3x+2z=2$ to'g'ri chiziq bilan $2x+y+z=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

$$j: sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

22. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+2}{3}$ to'g'ri chiziq $2x+y-z=0$ tekislikka parallel ekanligini ko'rsating.

23. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziq va $3x-3y+2z+1=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

J: parallel.

24. $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$ to'g'ri chiziq va $x+2y-2z=0$ tekislikning holatini aniqlang.

J: to'g'ri chiziq tekislikda yotadi.

25. $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ to'g'ri chiziq va $3x-y+2z=5$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

j: $M(2;3;1)$.

26. $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $x+4y-3z=-7$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

j: $11x-17y-19z+10=0$.

27. $M(1;0;-2)$ nuqtadan $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{1}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

$$j: \sqrt{1\frac{3}{7}}.$$

XULOSA

Fazodagi analitik geometriya sirt va chiziqlarni ularning tenglamalari orqali algebraik usullarda o'rganadi. Bunda asosan ikkita masala qaraladi:

1) berilgan tenglama fazoda qanday obyektni ifodalashini aniqlash;
2) berilgan geometrik obyekt tenglamasini topish.

Fazodagi eng sodda sirt bo'lmish tekislik I tartibli tenglama bilan ifodalanadi va aksincha, har qanday I tartibli tenglama fazoda biror sirtni aniqlaydi. Tekisliklarning xususiyatlarini ularning umumiy, kesmalardagi va normal tenglamalari yordamida o'rganish mumkin. Kerak bo'lganda bu tenglamalarning biridan ikkinchisiga o'tib bo'ladi.

Nazorat savollari.

1. Tekislikning umumiy formulasini yozing.
2. Uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini ayting.
3. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa formulasini yozing.
4. Fazoda to'g'ri chiziqning umumiy formulasini yozing.

5-§. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

Reja:

1. **Ikkinchi tartibli sirt tushunchasi.**
2. **Sfera.**
3. **Silindrik sirtlar.**
4. **Konus sirt.**
5. **Aylanma sirtlar.**
6. **Ellipsoidlar.**
7. **Giperboloidlar.**
8. **Paraboloidlar.**

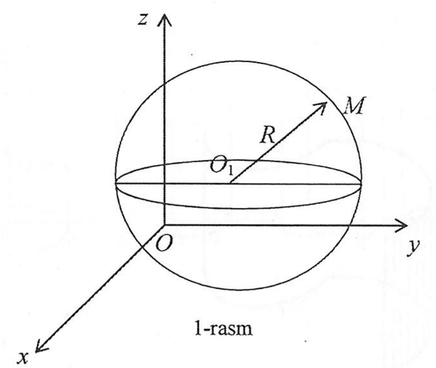
Tayanch iboralar: ikkinchi tartibli sirt tushunchasi, sfera, silindrik sirtlar, konus sirt, aylanma sirtlar, ellipsoidlar, giperboloidlar, paraboloidlar.

I. Fazodagi biror dekart koordinatalar sistemasida *x, y, z* larga nisbatan

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to‘plami **ikkinchi tartibli sirt** deyiladi. Bu tenglamadagi *A, B, C, D, E, F* koeffitsiyentlardan hech bo‘lmasa bittasi noldan farqli bo‘lganda sfera, ellipsoid, giperboloid, silindrik sirt, konus sirt yoki bir qancha aylanma sirtlarni ifodalash mumkin. Shuningdek bu tenglama yordamida ikki tengsizliklar oilasi, nuqta, to‘g‘ri chiziq va hatto bo‘sh to‘plamlarni ham aniqlash mumkin. Biz bu bobda eng sodda (aylanma sirtlar) sferalar, konuslar, silindrlar, ellipsoidlar, giperboloidlar, paraboloidlar va giperbolik paraboloidlar bilan tanishamiz.

II. Ta’rif. Fazoda berilgan nuqtadan teng masofada yotgan nuqtalarning geometrik o‘rnidan tashkil topgan sirt **sfera** deyiladi.



1-rasm

Sfera tenglamasini tuzish uchun fazoda $O_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta olaylik. Undan teng masofada yotgan umumiy holda $M(x,y,z)$ nuqta va masofa R bo‘lsin. U holda aytilganiga ko‘ra, shakldan:

$$|O_1M|=R \text{ yoki } \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=R$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2$$

Bu sferaning **(kanonik) tenglamasi** deyiladi.
Agar sfera markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsa uning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi ($x_1=y_1=z_1=0$)

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (3)$$

Misol. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ tenglama bilan berilgan sferaning markazi va radiusi R topilsin.

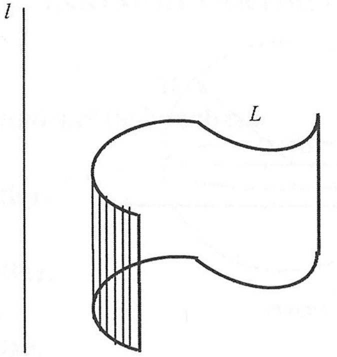
Yechish. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ dan to‘la kvadrat ajratamiz.

$$x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2=25$$

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2=25$$

Demak, $O_1(-1;-2;0)$ sfera markazi
R=5 sfera radiusi.

III. Ta’rif. Fazoda yo‘naltiruvchi deb atalgan *L*- chiziqni kesib o‘tuvchi va biror *l* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan barcha to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt **silindrik sirti** deyiladi.



2-rasm

$F(x, y) = 0$ tenglama fazodagi yasovchisi OZ - o'qqa parallel silindrik sirtni aniqlaydi. Shuningdek $F(x, z) = 0$ yasovchisi OY - o'qqa parallel, $F(y, z) = 0$ yasovchisi OX - o'qqa parallel bo'lgan sirtni aniqlaydi. Bu holda $F(x, y) = 0$,
$F(x, z) = 0$, $F(y, z) = 0$ tenglamalar tekislikda ko'rilsa, ular mos ravishda XOY, XOZ, YOZ tekislikdagi egri chiziqlarni ifodalaydi va ular silindrik **sirtlarning yo'naltiruvchilari** deyiladi.

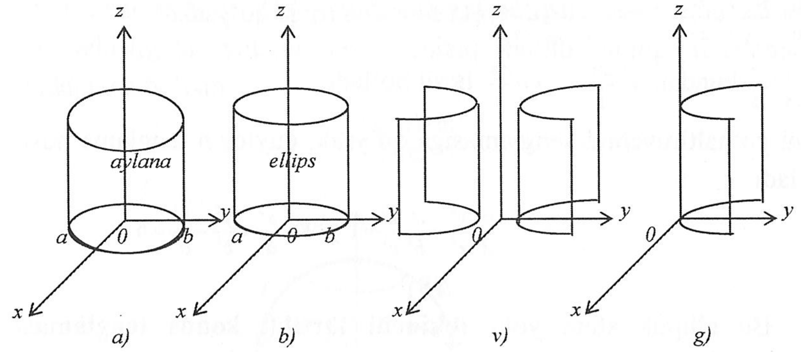
Quyidagi yasovchilari OZ o'qqa parallel bo'lgan eng muhim silindrik sirtni ko'ramiz. Ularning yo'naltiruvchilari mos ravishda aylana, ellips, giperbola, paraboladan iborat.

a) $x^2+y^2=a^2$ — to'g'ri doiraviy silindr (4)

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — elliptik silindr (5)

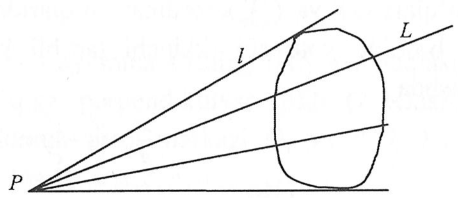
v) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — giperbolik silindr (6)

g) $y^2=2px$ — parabolik silindr (7)



3-rasm

IV. Ta'rif. Fazoda yo'naltiruvchi deb atalgan l – chiziqni kesib o'tuvchi va berilgan P – nuqtadan o'tuvchi barcha l to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan sirt **konus sirt** (yoki ikkinchi tartibli konus) deb ataladi.



4-rasm

P – nuqta konusning uchi va l – yasovchisi deb ataladi.

Misol. Uchi koordinatalar boshida yotgan va yo'naltiruvchisi ellipsoiddan iborat:

$L:\begin{cases} z=c \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ konus tenglamasi tuzilsin.

Yechish. $M(x, y, z)$ konusning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, u holda konusning yasovchi $O(0; 0; 0)$ va $M(x, y, z)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq bo'ladi. Uning fazodagi kanonik tenglamasini topamiz

$\frac{x-0}{x-0}=\frac{y-0}{y-0}=\frac{z-0}{z-0}$ yoki $\frac{x}{x}=\frac{y}{y}=\frac{z}{z}$ yoki $z=c$ ni o‘rniga qo‘ysak:

$\frac{x}{x}=\frac{y}{y}=\frac{z}{z}$ bundan $x=\frac{cx}{z}$; $y=\frac{cy}{z}$ hosil bo‘ladi.

Buni yo‘naltiruvchi L tenglamasiga qo‘ysak, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

(8)

Bu elliptik sfera yoki **ikkinchi tartibli konus tenglamasi** deyiladi. Agar bunda $a=b$ deb olsak yo‘naltiruvchisi

$\left.\begin{matrix} z=c \\ x^2+y^2=a^2 \end{matrix}\right\}$ a – radiusli aylana bo‘lgan to‘g‘ri aylanma konus hosil bo‘ladi, uning simmetriya o‘qi OZ dan iborat bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

(9)

Shuningdek, o‘qlari OY va OX koordinata o‘qlaridan iborat va uchi koordinatalar boshida yotuvchi ikkinchi tartibli konuslarning tenglamasi mos ravishda

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

(10)

va

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

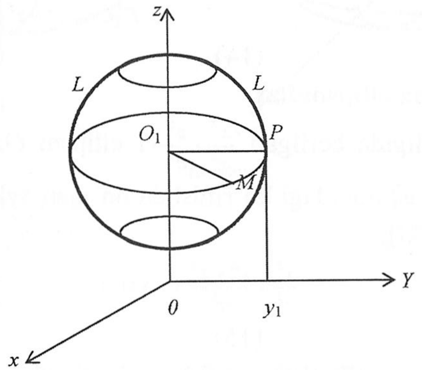
(11)

lardan iborat bo‘ladi.

V. **Ta’rif.** Fazoda biror L chiziqning l – o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan nuqtalar to‘plami **aylanma sirt** deyiladi. L – chiziq aylanma sirtning medianasi, l – (chiziq) o‘q esa uning **aylanma o‘qi** deyiladi. Biz aylanish o‘qlari OZ, OY, OX - o‘qlaridan iborat bo‘lgan hollar bilan chegaralanamiz.

1) Sirt aylanish o‘qi OZ o‘qidan iborat bo‘lgan, L – medianasi esa OYZ tekisligida yotgan tekis chiziq bo‘lib uning tenglamasi quyidagicha bo‘lsin

$$\left.\begin{matrix} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\}$$



5-rasm

$M(x, y, z)$ – aylanma sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin, M nuqta orqali OZ o‘qiga perpendikulyar qilib Q tekislik o‘tkazaylik, Q tekislikda aylanma sirtni markazi O_1 va $P(O, Y_1, Z)$, $O(O, O, Z)$ bo‘ladi. Bu holda $|O_1M|=|O_1P|=|y_1|$

$$|O_1M|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}; \quad y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$P(0,y_1,z)$ nuqta L – medianada yotgani uchun, $F(y_1, z)=0$ o‘rinli. Bundan ushbu tenglama hosil bo‘ladi.

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$$

(12)

Bu $F(y, z) = 0$, $x=0$ L – mediana OZ o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasidir.

2) Agar $F(y, z) = 0$, $x=0$ L – mediana OY o‘qi atrofida aylantirilsa, u aylanma jismning tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi.

$$F\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$$

(13)

3) Agar $F(x, y) = 0$, $z=0$ L – mediana OX o‘qi atrofida aylantirilsa va bundan hosil bo‘lgan aylanma jismning tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi

$$F\left(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$$

(14)

VI. 1. Aylanma ellipsoidlar.

a) Agar XOZ tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsni OZ o‘qi atrofida aylantirsak tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan aylanma ellipsoid hosil bo‘ladi (5-punkt).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(15)

b) Agar shu ellipsni OX o‘qi atrofida aylantirsak ushbu aylanma ellipsoid hosil bo‘ladi va h.k.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(16)

c) Agar (15) yoki (14) da $a=c$ deb olsak

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

(16′)

sfera hosil bo‘ladi.

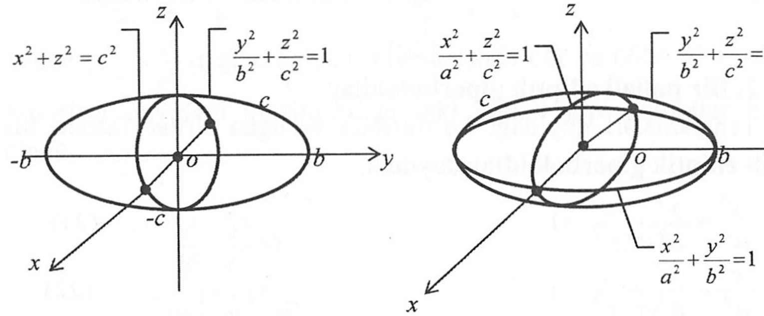
2. Elliptik ellipsoid.

Tenglamasi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(17)

ko‘rinishida berilgan sirt fazoda **elliptik ellipsoid** deyiladi.



6-rasm

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

VII. 1. Bir pallali aylanma giperboloidlar.

a) YOZ tekislikda berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OZ o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo‘ladi (5-punkt).

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(18)

b) Agar XOY tekislikda berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola OY – o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo‘ladi.

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

(19)

s) Agar XOZ tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OZ – o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo‘ladi.

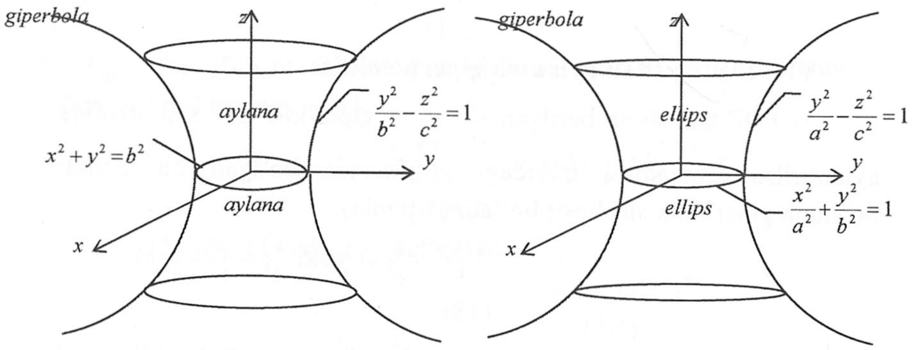
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
(20)

2. Bir pallali elliptik giperboloidlar.

Tenglamalari quyidagi ko‘rinishda berilgan sirtlar fazoda **bir pallali elliptik giperboloidlar** deyiladi.

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 & (21) \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (22) \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (23) \end{array}\right.$$

Bu sirtlar mos ravishda $z=h$, $y=k$, $x=t$ tekisliklar bilan kesilsa, kesimda ellipslar hosil bo‘ladi.



Aylana bir pallali giperboloid

Bir pallali elliptik giperboloid

7-rasm

3. Ikki pallali aylanma giperboloidlar.

a) Agar YOZ tekisligida berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OY o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan ikki pallali aylanma giperboloid hosil bo‘ladi:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
(24)

b) Shuningdek XOY tekisligida berilgan $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$; va XOZ tekisligida berilgan $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbolalar mos ravishda OX va OZ o‘qi atrofida aylantirilsa quyidagi ko‘rinishdagi ikki pallali giperboloidlar hosil bo‘ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (25)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (26)$$

4. Ikki pallali elliptik giperboloidlar.

Tenglamalari quyidagicha ko‘rinishda berilgan sirtlar fazoda **ikki pallali elliptik giperboloidlar** deyiladi.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$
(27)

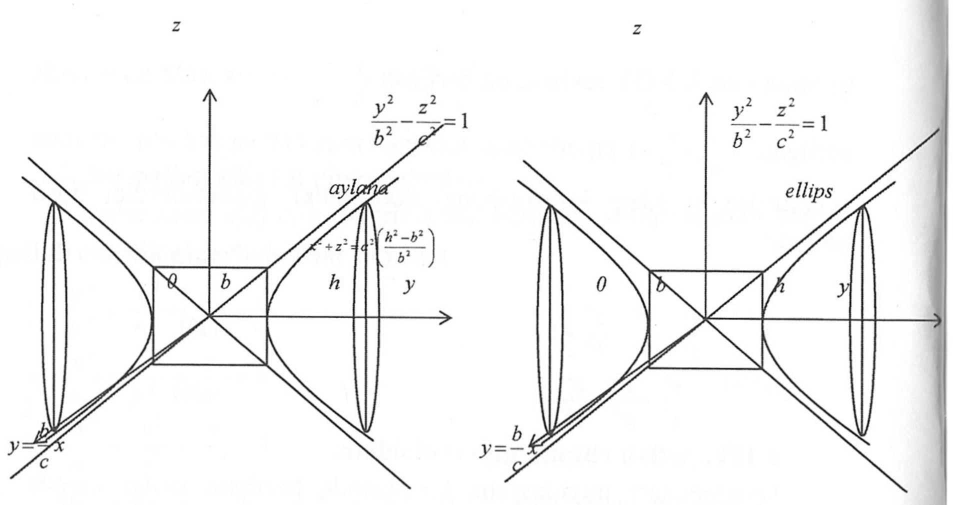
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$
(28)

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$
(29)

Quyida OY o‘qi atrofida aylantirilishdan hosil bo‘ladi.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ ikki pallali aylanma giperboloid va

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ ikki pallali elliptik giperboloidlar shaklini keltiramiz.



8-rasm

VIII. 1. Aylanma paraboloidlar.

a) Agar XOY tekisligida berilgan $y^2=2px$ parabola OX o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘lgan aylanma paraboloid (sirt) hosil bo‘ladi (5 punkt).

$$y^2+z^2=2px \tag{30}$$

Agar $x=h$ deb olinsa $y^2+z^2=2ph,\ z=h$ aylana hosil bo‘ladi.

b) Shuningdek XOZ tekisligida berilgan $x^2=2pz$ parabola va YOZ tekisligida berilgan $z^2=2py$ parabolani mos ravishda OZ va OY o‘qlari atrofida aylantirsak quyidagicha aylanma paraboloidlar tenglamasi hosil bo‘ladi.

$$x^2+y^2=2pz \tag{31}$$

va

$$x^2+z^2=2py \tag{32}$$

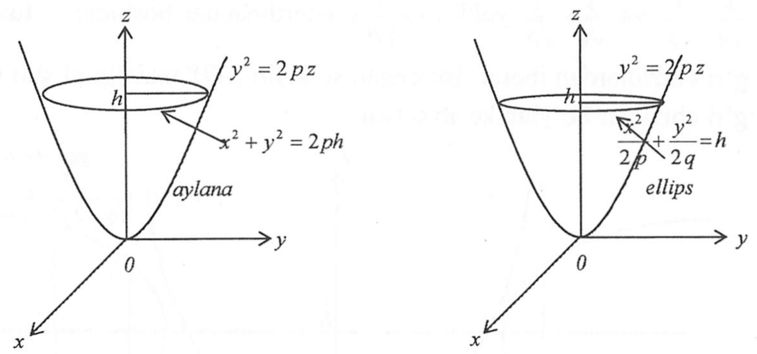
2. Elliptik paraboloidlar. Tenglamasi umumiy holda quyidagicha ko‘rinishda berilgan sirtlar **elliptik paraboloidlar** deyiladi.

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \tag{33}$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y \tag{34}$$

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x \tag{35}$$

Quyida OZ o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan $x^2+y^2=2pz$ va $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ elliptik paraboloidlarni shaklini keltiramiz:



9-rasm

3. Giperbolik paraboloidlar. Tenglamasi umumiy holda quyidagicha ko‘rinishda berilgan sirtlar **giperbolik paraboloid** deyiladi.

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad \frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2y \qquad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x \tag{36}$$

yoki bu tengliklar odatda quyidagicha ko‘rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z \qquad \frac{x^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=y \qquad \frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x$$

(37)

Quyida $\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}=z$ giperbolik paraboloid shaklini keltiramiz.

Bunda $z=h$ bo‘lsa $\frac{y^2}{2qh}-\frac{x^2}{2ph}=1$ giperbola;

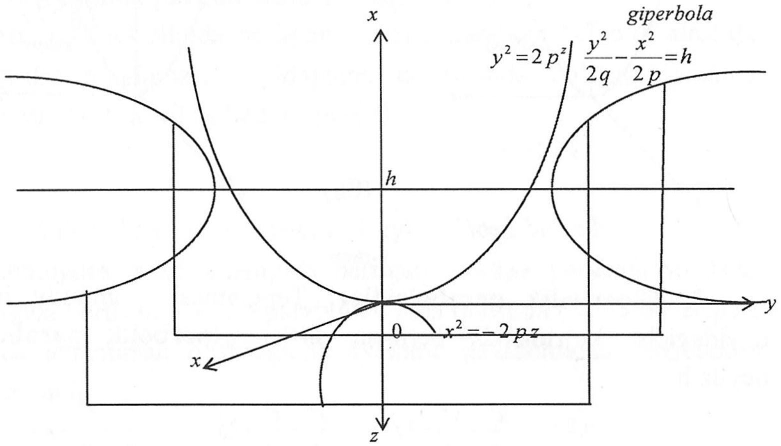
$x=0$ bo‘lsa $y^2=2qz$ parabola

$y=0$ bo‘lsa $x^2=2pz$ parabola

$z=0$ bo‘lsa $\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}=0$ yoki

$\frac{y^2}{q}-\frac{x^2}{p}=0$ yoki $\left(\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{x}{\sqrt{p}}\right)$ yoki XOY tekislikda yotuvchi ikkita quyidagi to‘g‘ri chiziqlardan iborat:

$\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}$ va $\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{x}{\sqrt{p}}$ yoki $y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$ koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlardan iborat. Bu degan so‘z sirt XOY tekisligini shu ikki to‘g‘ri chiziqlar bo‘ylab kesib o‘tadi.



10-rasm

Giperbolik paraboloidlarni umuman to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan sirt ekanligini isbotlash mumkin.

Nazorat savollari.

1. Ikkinchi tartibli sirt deb nimaga aytiladi?
2. Konus sirt deb nimaga aytiladi?
3. Aylanma sirt deb nimaga aytiladi?
4. Qanday ellipsoid va giperboloidlarni bilasiz?

MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

1. Boshi A(n, $2n+3$, $5-2n$), uchi esa B($2n+3$, $2n-1$, n) nuqtada joylashgan $\boldsymbol{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

2. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n-2, n+3, n-1)$ va $\boldsymbol{b}=(n, n-4, n+2)$ vektorlar bo'yicha $n\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ va $3\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ vektorlarni toping.

3. Boshi A($n-2$, $n+3$, n) va uchi B($n+1$, $n-3$, $n-1$) nuqtada joylashgan vektorning koordinatalarini toping.
Uchlari A($n-2$, $n+3$, n) va B($n+1$, $n-3$, $n-1$) nuqtalarda joylashgan AB kesmani $\lambda=(n-1)$: $(n+2)$ nisbatda bo'luvchi C(x,y,z) nuqta koordinatalarini aniqlang.

4. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n, n+1, n-2)$ va $\boldsymbol{b}=(n+2, n, n-1)$ vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusini toping.

5. λ parametrning qanday qiymatida $\boldsymbol{a}=(\lambda n, n-2, n+1)$ va $\boldsymbol{b}=(n-3, \lambda n, n-1)$ vektorlar orthogonal bo'lishini aniqlang.

6. Fazodagi A($n+2$, $n+4$, $n-3$) va B($2n+1$, $n+1$, $2n-1$) nuqtalar orasidagi masofani toping.

7. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n-3, n+1, 2n-1)$ va $\boldsymbol{b}=(n+2, n, n-1)$ vektorlardan tuzilgan parallelogramm yuzasini toping.

8. $\boldsymbol{a}=(\lambda n, n-2, n+1)$ va $\boldsymbol{b}=(n-3, \mu n, n-1)$ vektorlar λ va μ parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo'lishini aniqlang.

9. $\boldsymbol{a}=(n, 2n+1, 1-n)$, $\boldsymbol{b}=(n+1, n-1, 2n)$ va $\boldsymbol{c}=(n-1, 3n, 1)$ vektorlarning aralash ko'paytmasini hisoblang.

10. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n, 2n+1, 1-n)$, $\boldsymbol{b}=(n+1, n-1, \lambda)$ va $\boldsymbol{c}=(n-1, 3n, 1)$ vektorlar λ parametrning qanday qiymatida komplanar bo'ladi ?

11. $\boldsymbol{a}=(n+2, 2n, 1-2n)$, $\boldsymbol{b}=(n, 2n-1, 0)$ va $\boldsymbol{c}=(n-1, 3n, 1)$ vektorlar orqali hosil qilingan parallelepiped hajmini hisoblang.

12. $\boldsymbol{x}=(n, n+4, n-1)$ vektorni $\boldsymbol{e}_1=(1, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2=(1, 0, 1)$ va $\boldsymbol{e}_3=(0, 1, 1)$ bazisdagi yoyilmasini toping .

13. $x_1=(2n, n+3, n-1)$, $x_2=(n, 2n-13, 4n)$ va $x_3=(2n, 13-5n, -13n-3)$ vektorlar chiziqli bog'liq ekanligini ko'rsating va bu bog'lanishni toping.

14. $e_1=(n, n-1, 2n)$, $e_2=(n+1, 0, n+2)$ va $e_3=(1, n, n-3)$ vektorlar bazis tashkil etishini ko'rsating.

15. Tekislikdagi to'g'ri chiziq $(n+2)x+(n+3)y+(2n-1)=0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

a) to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini;
b) to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini;
c) to'g'ri chiziqning normal tenglamasini;
d) to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini;
e) to'g'ri chiziqni koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini;

16. Uchburchakning uchlari A(n, $n+1$), B($n-2$, $n+3$) va C($n+2$, $n-4$) nuqtalarda joylashgan. Quyidagilarni aniqlang:

a) uchburchak tomonlarining umumiy tenglamalarini;
b) A burchakning kosinusini;
c) B uchdan o'tkazilgan mediana uzunligini;
d) C uchdan tushirilgan balandlik uzunligini;
e) Balandliklarning kesishish nuqtasini;
f) Uchburchak yuzasini.

17. Ushbu II tartibli tenglama aylanani ifodalashini ko'rsating:

$$x^2+y^2+2(n+1)x+2(n-1)y-2n=0.$$

Bu aylananing normal tenglamasi, M(a,b) markazi va R radiusini toping.

18. Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{(n+2)^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ bo'lgan ellips uchun quyidagilarni aniqlang:

a) ellips uchlarining koordinatalarini *b*) fokuslar koordinatalarini;
c) fokuslar orasidagi masofani; *d*) direktrisa tenglamalarini;
e) ekssentrisitet qiymatini ; *f*) fokal radiuslar tenglamalarini.

Bu ma'lumotlar asosida ellips va uning direktrisalarining grafigini chizing.

19. Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{(n+3)^2}-\frac{y^2}{(n+1)^2}=1$ bo'lgan giperbola uchun quyidagilarni aniqlang:

a) giperbola uchlarining koordinatalarini *b*) fokuslar koordinatalarini;
c) fokuslar orasidagi masofani; *d*) direktrisa tenglamalarini;
e) ekssentrisitet qiymatini ; *f*) fokal radiuslar tenglamalarini;
g) asimptota tenglamalarini .

Bu ma'lumotlar asosida giperbola, uning asimptota va direktrisalarining grafigini chizing.

20. Kanonik tenglamasi $y^2=2(n+3)x$ bo'lgan parabola fokusining koordinatalari, direktrisa va fokal radius tenglamasi aniqlansin. Bu ma'lumotlar asosida parabolaning grafigini chizing.

21. Ushbu II tartibli tenglama fazoda sferani ifodalashini ko'rsating:

$$x^2+y^2+z-2(n+1)x+2(n-1)y-4nz+5n^2+2=0.$$

Bu sferaning markazi M(a,b,c) va radiusi R aniqlansin.

22. Tekislik $(n+1)x+(2n-1)y+(n+3)z-5=0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan.

Quyidagilarni aniqlang:

*a)*tekislikning normal vektorini; *b*) tekislikning kesmalardagi tenglamasini;
c) tekislikning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini ;
d) tekislikning normal tenglamasini .

23. ABCD tetraedrning uchlari

A(n, n+2, n–4), B(n+2, n–1, n+1), C(2n, n, 2n–1), D(2n+3, 2n, n)

nuqtalarda joylashgan. Bu tetraedr uchun quyidagilarni aniqlang:

a) ABC tomonining umumiy tenglamasini;
b) ABD tomonining normal tenglamasini;
c) ABC va ABD tomonlari orasidagi burchakni;
d) D uchidan tushirilgan balandligining uzunligini;
e) D uchidan o'tuvchi va ABC tomoniga parallel tekislik tenglamasini.

24. Fazodagi to'g'ri chiziq quyidagi kanonik tenglamasi bilan berilgan:

$$\frac{x-5}{n+2}=\frac{y+3}{n+4}=\frac{z}{n+1}.$$

Bu to'g'ri chiziq uchun quyidagilarni aniqlang:

a. yo'naltiruvchi vektorini ;
b. parametrik tenglamasini;
d) biror umumiy tenglamasini .

25. ABCD tetraedrning uchlari

A(n, n+2, n–4), B(n+2, n–1, n+1), C(2n, n, 2n–1), D(2n+3, 2n, n)

nuqtalarda joylashgan. Bu tetraedr uchun quyidagilarni aniqlang:

a) AB qirraning kanonik tenglamasi; *b*) AD qirraning parametrik tenglamasi;
c) AB va AD orasidagi burchak; *d*)AB va DC orasidagi masofa;
e)D uchidan o'tib, AB qirrasiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi.

26. ABCD tetraedrning uchlari

A(n, n+2, n–4), B(n+2, n–1, n+1), C(2n, n, 2n–1), D(2n+3, 2n, n)

nuqtalarda joylashgan. Bu tetraedr uchun quyidagilarni aniqlang:

a) ABC tomoni bilan BD qirrasi orasidagi burchakni;
b) D uchidan o'tkazilgan balandlik tenglamasini;
c) D uchidan o'tkazilgan balandlik asosining koordinatalarini.

TEST

1. Skalyar deb nimaga aytiladi?

A) Faqat yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.

B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.

C) Ham son qiymati, ham yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.

D) Yo'nalgan kesmaga skalyar deb aytiladi.

E) Har qanday kattalik skalyar deyiladi.

2. Vektor kattalik deb nimaga aytiladi?

A) Faqat yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.

B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.

C) Ham son qiymati, ham yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.

D) Har qanday kesmaga vektor deb aytiladi.

E) Har qanday kattalik vektor deyiladi.

3. Quyidagi kattaliiklardan qaysi biri vektor bo'ladi ?

A) sirt yuzasi; B) jism hajmi; C) kesma uzunligi;
D) kuch; E) Birorta ham kattalik vektor bo'lmaydi.

4. Qachon vektorlar kollinear deb aytiladi ?

A) Bir xil yo'nalgan vektorlar kollinear deb aytiladi.

B) Har qanday ***a*** va ***b*** vektorlar kollinear vektorlar deb aytiladi.

C) Bir xil yo'nalgan va uzunliklari teng bo'lgan vektorlar kollinear deb aytiladi.

D) Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi ***a*** va ***b*** vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

E) Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi ***a*** va ***b*** vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

5. Qachon vektorlar teng deb aytiladi ?

A) Bir xil yo'nalgan vektorlar teng deb aytiladi.

B) Bir xil uzunlikli ***a*** va ***b*** vektorlarga teng vektorlar deb aytiladi.

C) Bir xil yo'nalgan va uzunliklari teng bo'lgan vektorlar teng deb aytiladi.

D) ***a*** va ***b*** vektorlar kollinear, bir xil yo'nalgan va uzunliklari teng bo'lsa, ular teng vektorlar deb aytiladi.

E) Kollinear va bir xil yo'nalgan vektorlar teng deb aytiladi.

6. Ta'rifni to'ldiring: Uchta vektor komplanar deyiladi, agar ular ··· joylashgan bo'lsa.

A) bitta to'g'ri chiziqda ; B) bitta tekislik yoki parallel tekisliklarda ;

C) parallel to'g'ri chiziqlarda ; D) o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlarda ;

E) o'zaro perpendikulyar tekisliklarda.

7. Fazodagi ort vektorlar qanday aniqlanadi?

A) OX, OY, OZ koordinata o'qlarida joylashgan, musbat yo'nalishda ega va uzunliklari birga teng bo'lgan vektorlar;

B) Uzunliklari birga teng bo'lgan uchta vektor;

C) O'zaro perpendikulyar bo'lgan uchta vektor;

D) O'zaro kollinear bo'lgan uchta birlik vektor;

E) Uchta komplanar birlik vektorlar.

8. $\boldsymbol{a}=(2, -5)$ vektorning $\bar{\boldsymbol{i}}$ va $\bar{\boldsymbol{j}}$ ortlar bo'yicha yoyilmasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan ?

A) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$; B) $\boldsymbol{a}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$; C) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$; D) $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$; E) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$.

9. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan ?

A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$; B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$; C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$;
D) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{tg}\varphi$; E) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{ctg}\varphi$.

10. Qaysi holda $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ sartni qanoatlantiradi ?

A) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ bir xil uzunlikka ega bo‘lsa; B) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ ort vektorlar bo‘lsa;
C) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ orthogonal bo‘lsa; D) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear bo‘lsa;
E) hech qaysi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar uchun bu shart bajarilmaydi.

11. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasining xossasi qayerda noto‘g‘ri ifodalangan ?

A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$; B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$; C) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;
D) $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$; E) Barcha xossalar to‘g‘ri.

12. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ort vektorlarning skalyar ko‘paytmalari boyicha quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?

A) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$; B) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$; C) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0$;
D) $\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})=0$, $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})=0$, $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=0$;
E) $\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})=0$, $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i})=0$, $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=0$;

13. Agar $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?

A) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ (φ– $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchak);
B) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$; C) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$; D) $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar bir tekislikda yotadi;
E) Barcha tasdiqlar o‘rinli.

14. Qanday $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar va vektorial ko‘paytmalari o‘zaro teng bo‘ladi ?

A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;
C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;
E) Bunday vektorlar mavjud emas.

15. Qaysi shartda $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar uchun $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ tenglik o‘rinli ?

A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;
C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;
E) Bunday vektorlar mavjud emas.

16. Agar $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=5$ va $\varphi=30^0$ bo‘lsa, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=?$

A) 20 ; B) 10 ; C) $10\sqrt{3}$; D) 41 ; E) 0.

17. Qachon $|\,\boldsymbol{abc}\,|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi ?

A) Agar $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ va $\boldsymbol{c}$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa;
B) Agar $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$ shart bajarilsa; C) Agar $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ va $\boldsymbol{c}$ kollinear bo‘lsa;
D) Agar $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ va $\boldsymbol{c}$ vektorlar komplanar bo‘lsa; E) Agar $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ bo‘lsa.

18. X=($\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ $(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$ aralash ko‘paytma ifodasini soddalashtiring.

A) X=$\boldsymbol{abc}$; B) X=2$\boldsymbol{abc}$; C) X=3$\boldsymbol{abc}$; D) X=4$\boldsymbol{abc}$;
E) To‘g‘ri javob ko‘rsatilmagan.

19. Agar λ va μ ixtiyoriy sonlar bo‘lsa, X=$\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ aralash ko‘paytma ifodasini soddalashtiring.

A) X=$\boldsymbol{abc}$; B) X= $\lambda\boldsymbol{abc}$; C) X=$\mu\boldsymbol{abc}$; D) X= $(\lambda+\mu)\boldsymbol{abc}$;
E) To‘g‘ri javob ko‘rsatilmagan.

20. Koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}$=(2,–3,1), $\boldsymbol{b}$=(1,0,4) va c=(5,–2,0) vektorlarning aralash ko'paytmasi $\boldsymbol{abc}$ hisoblansin.

A) 0 ; B) 23 ; C) –46 ; D) –23 ; E) 1 .

21. m parametrning qanday qiymatlarida $\boldsymbol{a}$=(2,0,1), $\boldsymbol{b}$=(1, –1, m) va c=(–1,3m,1) vektorlar komplanar bo'ladi ?

A) 1 va –0,5 ; B) 1 va –1 ; C) 0,5 va 1 ; D) 0,5 va –1 ; E) –0,5 va 0,5 .

22. Vektor fazoda vektorlar ustida qaysi amal aniqlangan ?

A) ko'paytirish ; B) darajaga oshirish ; C) qo'shish ;

A) bo'lish ; E) teskarisini topish ;

23. Vektor fazoda vektorlar ustida qaysi amalni bajarib bo'lmaydi ?

A) qo'shish ; B) songa ko'paytirish ; C) ayirish ;

A) ko'paytirish ; E) songa bo'lish .

24. Vektor fazoda qo'shish amali qaysi xossaga ega emas ?

A) $x+y=y+x$; B) $x+(y+z)=(x+y)+z$; C) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

D) $x+0=0+x=x$; E) barcha xossalarga ega.

25. Vektor fazoda songa ko'paytirish amali qaysi xossaga ega emas ?

A) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$; B) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$; C) $0\cdot x=\mathbf{0}$;

D) $1\cdot x=x$; E) $(\lambda:\mu)x=\lambda x:\mu x$.

26. Agar y=(3,–2,1,4) va $3x+y$ =(6,4,1,13) bo'lsa, x vektorni toping .

A) x=(1, –3, 1, 0) ; B) x=(1, 2, 0, 3) ; C) x=(1, 0, –3, 1) ;

D) x=(2, 1, 1, 0) ; E) x=(1, 1, –2, 3) .

27. Analitik geometriyada chiziq nima asosida o'rganiladi?

A) tenglama; B) chizma; C) proyeksiya; D) ta'rif ;

E) To'g'ri javob yo'q.

28. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning umumiy $Ax+By+C=0$ tenglamasidagi A va B koeffitsiyentlar qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?

A) $A\cdot B>0$; B) $A+B=0$; C) $A-B<0$; D) $A^2+B^2\neq0$; E) $A^2-B^2\neq0$.

29. Tasdiqni yakunlang: Tekislikdagi to'g'ri chiziqning umumiy $Ax+By+C=0$ tenglamasi bo'yicha tuzilgan $\boldsymbol{n}$=(A,B) vektor bu to'g'ri chiziqqa ··· .

A) parallel bo'ladi; B) tegishli bo'ladi ; C) perpendikular bo'ladi ;

D) perpendikular bo'lmaydi; E) og'ma bo'ladi .

30. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning umumiy $3x+5y+2=0$ tenglamasi bo'yicha uning $\boldsymbol{n}$ =(A,B) normal vektorini toping.

A) $\boldsymbol{n}$ =(5,2); B) $\boldsymbol{n}$ =(3,5); C) $\boldsymbol{n}$ =(3,2); D) $\boldsymbol{n}$ =(2,5); E) $\boldsymbol{n}$ =(5,3).

31. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini ko'rsating.

A) $y=kx+b$; B) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; C) $Ax+By+C=0$;

D) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$; E) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.

32. Qaysi tenglama $M(x_0,y_0)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasini ifodalamaydi ?

A) $y-y_0=k(x-x_0)$; B) $\frac{y-y_0}{x-x_0}=k$; C) $\frac{x-x_0}{y-y_0}=k$;

D) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$; E) $y+y_0=k(x+x_0)$.

33. Qaysi tenglama M(–3;1) va N(0;7) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni ifodalaydi?

A) $y+1=2(x-3)$; B) $y-1=2(x+3)$; C) $2x-y+7=0$;

D) $y = 2x + 7$; E) $4x - 2y + 14 = 0$.

34. Ikki $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi α burchak tangensi formulasini ko‘rsating.

A) $tg\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$; B) $tg\alpha = \dfrac{k_1 + k_2}{1 - k_1k_2}$;

C) $tg\alpha = \dfrac{k_1 \cdot k_2}{1 + k_1k_2}$; D) $tg\alpha = \dfrac{k_1 - k_2}{1 - k_1k_2}$; E) $tg\alpha = \dfrac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1}$.

35. $y=2x-3$ va $y = -3x + 5$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

A) 90^0; B) 60^0; C) 45^0; D) 30^0; E) 120^0.

36. $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlarning parallellik shartini ko‘rsating.

A) $k_1 \cdot k_2 = -1$; B) $k_1+k_2=0$; C) $k_1 \cdot k_2=1$;
D) $k_1-k_2=0$; E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

37. $3x+\alpha y+5=0$ va $\alpha x+12y-1=0$ to‘g‘ri chiziqlar α parametrning qanday qiymatlarida parallel bo‘ladi ?

A) ±3; B) ±4; C) ±5; D) ±6; E) ±7.

38. $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik shartini ko‘rsating.

A) $A_1B_1+A_2B_2=0$; B) $A_1A_2+B_1B_2=0$; C) $A_1B_1-A_2B_2=0$;
D) $A_1A_2-B_1b_2=0$; E) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

39. OY o‘qidan 3 birlik kesma ajratuvchi va OX o‘qi bilan 60^0 burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

A) $y = kx + b$; B) $y = \dfrac{1}{2}x + 3$; C) $y = x - 3$;

D) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 3$; E) $y = \sqrt{3}x + 3$.

40. Markazi $M(a,b)$ nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylana tenglamasini ko‘rsating.

A) $(x+a)^2+(y+b)^2=R^2$; B) $(x+b)^2+(y+a)^2=R^2$; C) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;
D) $(x-b)^2+(y-a)^2=R^2$; E) $(x-a)^3+(y-b)^3=R^3$.

41. Umumiy ko‘rinishdagi II tartibli

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

tenglama aylanani ifodalashi uchun B koeffitsient qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?

A) $B>0$; B) $B<0$; C) $B\neq0$; D) $B=0$; E) $B\geq0$.

42. Aylananing umumiy tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?

A) $Ax^2+ Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$; B) $Ax^2+ Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$; C) $Ax^2+ Cy^2+2Dx+2Ey=0$; D) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$;
E) $Ax^2+ Ay^2+F=0$.

43. Umumiy tenglamasi $x^2+ y^2-4x+2y+1=0$ bo‘lgan aylananing radiusini toping.

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

44. Ta’rifni to‘ldiring: Berilgan ikkita nuqtalargacha masofalari ... o‘zgarmas son bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni giperbola deyiladi.

A) ayirmasining moduli; B) ko‘paytmasi; C) yig‘indisi;
D) bo‘linmasi; E) kvadratlarining yig‘indisi.

45. Yarim o'qlari a va b bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan ?

A) $a^2x^2+b^2y^2=1$; B) $a^2x^2-b^2y^2=1$; C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

D) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; E) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

46. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning asimptotalari tenglamasini ko'rsating.

A) $y=\pm abx$; B) $y=\pm\frac{a}{b}x$; C) $y=\pm\frac{b}{a}x$;

D) $y=(a\pm b)x$; E) To'g'ri javob keltirilmagan.

47. Agar $x^2-4y^2=4$ giperbolaga tegishli nuqtaning ordinatasi 0 ga teng bo'lsa, uning abssissasini toping.

A) $y=1$; B) $x=1$; C) $x=2$; D) $x=\pm2$; E) $x=\pm1$.

48. Quyidagi II tartibli tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

$$16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$$

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to'g'ri chiziq.

49. Quyidagi II tartibli tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

$$16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$$

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to'g'ri chiziq.

50. Parabolaning ekssentrisiteti ε qanday shartni qanoatlantiradi ?

A) $\varepsilon>1$; B) $\varepsilon<1$; C) $\varepsilon\neq1$; D) $\varepsilon=1$; E) $0<\varepsilon<1$.

51. Agar parabola $y^2=8x$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning direktrisasi tenglamasini toping.

A) $x=-8$; B) $x=8$; C) $x=4$; D) $x=2$; E) $x=-2$.

52. II tartibli $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$ tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to'g'ri chiziq.

53. II tartibli $2y^2-x-12y+14=0$ tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to'g'ri chiziq.

54. Umumiy tenglamasi $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ bo'lgan aylananing $M_0(x_0,y_0)$ markazini toping.

A) $M_0(-2,-3)$; B) $M_0(2,3)$; C) $M_0(-3,-2)$; D) $M_0(3,2)$; E) $M_0(-3,2)$.

55. II tartibli $x^2+y^2-4x+2y+F=0$ tenglama aylanani ifodalashi uchun ozod had F qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?

A) $F=5$; B) $F<5$; C) $F>5$; D) $F\neq5$; E) $|F|=5$.

56. Ta'rifni to'ldiring: Berilgan ikkita nuqtalargacha masofalar ... o'zgarmas son bo'lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rni ellips deyiladi.

A) ayirmasi; B) ko'paytmasi; C) yig'indisi;
D) bo'linmasi; E) kvadratlarining yig'indisi.

57. Yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan ?

A) $a^2x^2+b^2y^2=1$; B) $a^2x^2-b^2y^2=1$; C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

D) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; E) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

58. Yarim o'qlari a=5 va b=4 bo'lgan ellipsning fokuslari F(±C, 0) nuqtalarda joylashgan bo'lsa , C qiymatini toping.
A) 5; B) 4; C) 3; D) 2; E) 1.

59. Ellipsning ekssentrisiteti ε qanday shartni qanoatlantiradi ?
A) ε>0; B) ε<0 ; C) ε≠0 ; D) ε=0; E) 0<ε<1.

60. Ekssentrisitetning qanday qiymatida ellips aylanaga o'tadi ?
A) ε>0; B) ε<0; C) ε≠0; D) ε=0; E) ε=1.

61. Tekislikning umumiy tenglamasini ko'rsating.
A) Ax+By+Cz+D=0; B) x/A+y/B+z/C+D=0;
C) Ax+By–Cz=0; D) A/x+B/y+C/z+D=0; E) Ax+By +Cz=0.

62. 3x+4y+7z–81=0 tenglama bilan berilgan tekislik normalini aniqlang.
A) $\boldsymbol{n}$ =(3;4;–81); B) $\boldsymbol{n}$ =(3;–4;–81); C) $\boldsymbol{n}$ =(4;7;–81);
D) $\boldsymbol{n}$ =(–3;–4;81); E) $\boldsymbol{n}$ =(3;4;7).

63. Tasdiqni yakunlang: Tekislikning umumiy Ax+By+Cz+D=0 (D≠0) tenglamasidan kesmalardagi tenglamasiga o'tish uchun umumiy tenglama ··· bo'linadi .
A) –A koeffitsiyentga ; B) –B koeffitsiyentga ; C) –C koeffitsiyentga ;
D) –D ozod hadga ; E) ABC ko'paytmaga .

64. Berilgan M$_0$(x_0,y_0,z_0) nuqtadan o'tuvchi va $\boldsymbol{n}$=(A,B,C) vektorga perpendikular tekislik tenglamasini ko'rsating.
A) $\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{y-y_0}+\frac{C}{z-z_0}=0$; B) $Ax_0+By_0+Cz_0=0$;

C) $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$; D) $x_0^2+y_0^2+z_0^2=A^2+B^2+C^2$;
E) A(x–x_0)+B(y–y_0)+C(z–z_0)=0.

65. 3x+4y–2$\sqrt{6}z$+14=0 tekislikdan koordinata boshigacha bo'lgan masofani toping.
A) 14; B) 7; C) 2; D) 1; E) 0.

66. Ushbu 4x+3y–5z–8=0 va 4x+3y–5z–12=0 parallel tekisliklar orasidagi masofani toping.
A) 4 ; B) 20 ; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$; E) $2\sqrt{2}$.

67. x+y–z–1=0 va 2x–2y–2z+1=0 tekisliklar orasidagi burchak kosinusini toping.
A) 0; B) 1; C) 1/2; D) 1/3; E) 1/4.

68. x+y–18=0 va y+z–72=0 tenglamalar bilan berilgan tekisliklar orasidagi burchak topilsin.
A) 30^0 ; B) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$; C) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{5}$; D) $arctg\frac{\sqrt{3}}{4}$; E) 60^0 .

69. A$_1x$+B$_1y$+C$_1z$+D$_1$=0 va A$_2x$+B$_2y$+C$_2z$+D$_2$=0 tekisliklarning parallellik sharti qayerda to'g'ri ko'rsatilgan ?
A) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{D_1}{D_2}$; B) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$; C) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$;
D) $\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$; E) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

70. kx–2y+5z+10=0 va 6x– (1+k)y+10z–2=0 tekisliklar k parametrning qanday qiymatida parallel bo'ladi ?

A) 3; B) – 3; C) 2; D) –2; E) 0.

71. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\boldsymbol{a}=(m,n,p)$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini ko‘rsating.

A) $\frac{x-m}{x_0}=\frac{y-n}{y_0}=\frac{z-p}{z_0}$; B) $m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$;

C) $m(x-x_0)=n(y-y_0)=p(z-z_0)$; D) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$;

E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

72. Kanonik tenglamasi $\frac{x}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ ko‘rinishda bo‘lgan L to‘g‘ri chiziq qanday xususiyatga ega ?

A) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligiga parallel joylashgan;

B) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligiga perpendikular joylashgan;

C) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligini kesib o‘tadi;

D) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligini kesib o‘tmaydi;

E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

73. Fazodagi L to‘g‘ri chiziqning $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ kanonik tenglamasida $m=0$ bo‘lsa, L qanday xususiyatga ega bo‘ladi ?

A) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qiga parallel joylashgan;

B) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qiga perpendikular joylashgan;

C) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qini kesib o‘tadi;

D) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qini kesib o‘tmaydi;

E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

74. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalarini toping.

A) (–3, 1, 0); B) (3, –1, 0); C) (2,5, –3) ; D) (–2, –5, 3) ;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

75. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori modulini toping.

A) $\sqrt{10}$; B) $2\sqrt{5}$; C) 4; D) 2; E) $\sqrt{38}$.

76. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasining koordinatalarini toping.

A) (–3, 1, 0); B) (3, –1, 0); C) (2,5, –3) ; D) (–2, –5, 3) ; E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

77. Umumiy tenglamasi

$$\begin{cases} 2x+3y+5z-7=0 \\ x-y+2z+5=0 \end{cases}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini toping.

A) $x=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}t,\quad y=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}t,\quad z=t$ B) $x=-\frac{8}{5}-\frac{11}{5}t,\quad y=\frac{17}{5}-\frac{1}{5}t,\quad z=t$

C) $x=\frac{17}{3}+\frac{2}{3}t,\quad y=-\frac{8}{3}+\frac{7}{3}t,\quad z=t$ D) $x=\frac{6}{5}-\frac{4}{5}t,\quad y=\frac{7}{3}-\frac{41}{3}t,\quad z=t$

E) $x=5+2t,\quad y=4-7t,\quad z=t$

78. $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

A) $\frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}=\frac{z-z_2}{z_2-z_1}$; B) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$;

C) $\frac{x-x_2}{y-y_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{y-y_1}$; D) Ax+By+Cz+D=0; E) Ax=By=Cz=D.

79. Ushbu $M_1(3,-1,4)$ va $M_2(1,1,2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

A) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{4}$; B) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-0}{4}$; C) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-4}{2}$; D) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{4}$; E) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-2}$.

80. Kanonik tenglamalari $\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+4}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y+13}{\alpha}=\frac{z-6}{\sqrt{2}}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar α parametrning qanday qiymatida o‘zaro perpendikular bo‘ladi ?

A) ±1; B) 1; C) −1; D) 2; E) −2 .

81. Kanonik tenglamalari $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

A) 0^0; B) 30^0; C) 45^0; D) 60^0; E) 90^0.

82. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{\sqrt{2}}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi $x+y+z\sqrt{2}-4=0$ bo‘lgan tekislik orasidagi φ burchakni toping.

A) 0^0 ; B) 30^0 ; C) 45^0 ; D) 60^0 ; E) 90^0 .

83. Kanonik tenglamasi $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi $3x-2y$+Cz+1=0 bo‘lgan tekislik m va C parametrlarning qanday qiymatida o‘zaro perpendikular bo‘ladi ?

A) m=3, C=−1; B) m=−3, C=1 ; C) m=3, C=1 ; D) m=−6, C=1,5 ; E) m=2,5, C=4.

84. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi Ax+By+3z−5=0 bo‘lgan tekislik A va B parametrlarning qanday qiymatida o‘zaro perpendikular bo‘ladi ?

A) A=3, B=−1; B) A=−3, B=4,5 ; C) A=2,5, B=1,5 ; D) A=−6, B=1,5 ; E) A=2,5, B=4.

85. Kanonik tenglamasi $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi Ax+By+Cz+D=0 bo‘lgan tekislikning parallellik shartini ko‘rsating.

A) $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$; B) $A^2+B^2+C^2=m^2+n^2+p^2$; C) Am+Bn+Cp=0 ; D) A=m, B=n, C=p ; E) Am+Bn+Cp≠0.

86. Kanonik tenglamasi $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{-2}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi $x-3y+6z+2=0$ bo‘lgan tekislik n parametrning qanday qiymatida o‘zaro parallel bo‘ladi ?

A) 0; B) 1 ; C) ±1 ; D) −3 ; E) 2.

GLOSSARIY

Arifmetik vektor — n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ sonlarning har qanday tartiblangan to'plami;

Vektorlar sistemasining chiziqli bog'liqligi — bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_S$ sonlar uchun $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_S x_S = 0$ tenglikning bajarilishi;

Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar — vektorlarning grafikda tasvirlanishi.

Aylanma yo'nalish — o'zaro parallel bo'lmagan vektorlar orasidagi π dan kichik bo'lgan ehg qisqa burilish burchagi;

Ortlar — tekislik va fazodagi birlik vektorlar;

Skalyar ko'paytma — ikkita vektorlar modullarini ular orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasi;

Yo'naltiruvchi kosinuslar — biror vektorni o'qlar bilan hosil qilgan burchaklarining kosinuslari.

Chiziqli fazoning operatori — berilgan fazoni o'ziga akslantiruvchi va $A(\lambda x) = \lambda A x$, $A(x+y) = Ax + Ay$ xossalarga ega bo'lgan har qanday akslantirish;

Birlik operator — $EX=X$ munosabatni qanoatlantiruvchi E operator;

Komplanar vektorlar — bir tekislikda yotgan uchta vektor;

Chap sistema — $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ortlarning aylanma yo'nalishlari *OXY, OYZ, OZX* tekisliklarning musbat yo'nalishi bilan bir xil;

O'ng sistema — $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ortlar uchun aylanma yo'nalish *OZX* tekisligining musbat yo'nalishiga teskari.

Vektor ko'paytma — 1) $\bar{c}$ vektorning uzunligi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar uzunliklari va ular orasidagi burchak sinusi ko'paytmasiga teng; 2) $\bar{c}$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektor yotgan tekislikka perpendikulyar va $\bar{a}$ ga ham $\bar{b}$ ga ham perpendikulyar; 3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlar chap sistemani tashkil qiladi.

Aralash ko'paytma — $\bar{a}$ vektorni $\bar{b}$ vektorga vektor ko'paytmasidan hosil bo'lgan natijani $\bar{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga teng.

To'g'ri chiziq — tenglamalari noma'lumlarning birinchi darajasi orqali ifodalanadigan chiziq;

Aylana — markaz deb ataluvchi nuqtagacha masofalari o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni;

To'g'ri chiziqlar dastasi — bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq to'plami.

Ellips — fokuslar deb ataluvchi ikki nuqtalargacha bo'lgan masofalarining yig'indisi o'zgarmas bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rni;

Ekssentrisitet — fokuslari orasidagi masofani uning katta o'qi uzunligiga nisbati;

Fokal radiuslar — ixtiyoriy nuqtalaridan fokuslarigacha bo'lgan masofa;

Direktrisa — katta o'qqa perpendikulyar bo'lgan va markazdan $\left|\pm\frac{a}{e}\right|$ masofa uzunligida o'tadigan ikkita to'g'ri chiziq;

Giperbola — har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas songa teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni;

Parabola — har bir nuqtasidan berilgan bir nuqtagacha va berilgan bir to'g'ri chiziqqacha masofalari o'zaro teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rni.

Sirt — $F(x,y,z)=0$ tenglama bilan ifodalangan nuqtalarning geometrik o'rni;

Normal vektor — berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan vektor;

Kanonik tenglama — eng sodda tenglama.

Sfera — fazoda berilgan nuqtadan teng uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o'rnidan tashkil topgan sirt;

Silindrik sirt — fazoda yo'naltiruvchi chiziqni kesib o'tuvchi va biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan barcha chiziqlardan hosil bo'lgan sirt;

Konus sirt — fazoda yo'naltiruvchi chiziqni kesib o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan sirt;

Aylanma sirt — fazoda biror chiziqning o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Ш.М.Мирзиёев. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш – юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Тошкент: “Ўзбекистон” НМИУ, 2017. -48 б.

2. “Oliy matematika” (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Rasulov , I.I. Safarov I.I., R.T. Muxitdinov . TOSHKENT, 2012. - 554 bet

3. Писменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

4. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Й. Кожевникова, « Олий математикадан мисол ва масалалар»1-2 қисмлар, Тошкент. 2007 йил.

5. Н.Ш.Кремер, “Высшая математика для экономических специальностей”, Москва – 2005 йил.

7. В.П. Минорский “Олий математикадан масалалар тўплами”,Тошкент 1988 йил.

8. Г. И. Запорожец, “Руководство к решению задач по математическому анализу”, Москва – 1966 йил.

9. Ш.Мақсудов, М. Салохиддинов, С. Сирожиддинов. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси. Тошкент 1976-йил.

10. .Д. Письменный, “Конспект лекции по высшей математике” Москва, 2009 г.

11. Jo’rayev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari 1-2 –qism T. “O’zbekiston”. 1995, 1999 y

12. Tojiyev SH, I. Oliy matematika asoslaridan masalalar yechish. T: “O’zbekiston” , 2002 y.

13. Mirzayev A.O’. Matematika. T:”Innovatsiya-ziyo”. 2019 y.

14. Nigel Buckle, Ian Dunbar. Mathematics-Higher Level (core). Printed by Shannon books. Australia. 2007

15. Xamedova N.A., Sadikova A.V., Laktaeva I.Sh. Matematika. Gumanitar yo'nalishlar talabalari T.: Jaxon-print, 2007.
16. Azlarov T.A., Mansurov X. "Matematik analiz" 1-qism.T: 'O'qituvchi",1994 y
17. Baxavalov S. B. va boshq. "Analitik geometriyadan mashqlar to'plami" T: Universitet, 2006 y.
18. Jane S Paterson Heriot-Watt (University Dorothy) A Watson Balerno (Hing School). SQA Advanced Higher Mathematics. Unit I. This edition published in 2009 by Heriot-Watt Universite SCHOLAR. Copyright 2009 Heriot –Watt University.
19. College geometry, Csaba Vincze and Laszlo Kozma, 2014 Oxford University.
20. Introduction to Calculus, Volume I, II by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University, Copyright 2012, All righs reserved Paper or elektronik copies for noncommercial use may be made freely without explicit.

Mundarija

Оглавление

MIRZAYEV AKRAMJON O'KTAMJONOVICH

ANALITIK GEOMETRIYADAN MASALALAR TO'PLAMI

Toshkent - "Innovatsiya-Ziyo" - 2021

Muharrir: Xolsaidov F. B.

Nashriyot litsenziyasi AI №023, 27.10.2018.
Bosishga 14.11.2021. da ruxsat etildi. Bichimi 60x84.
"Times New Roman" garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.

Shartli bosma tabog'i 8. Nashr bosma tabog'i 8.
Adadi 50 nusxa.

"Innovatsiya-Ziyo" MCHJ matbaa bo'limida chop etildi.
Manzil: Toshkent shahri, Farhod ko'chasi, 6-a uy.

+99893 552-11-21

Muallif va nashriyot roziligisiz chop etish ta'qiqlanadi.

ISBN 978-9943-7324-9-0
9 789943 732490