Г.ҶАНГИБЕКОВ, Г.Х.ХУҶАНАЗАРОВА,

М.Ч.ЧОРШАНБИЕВА

АСОСҲОИ ТАҲЛИЛИ ФУНКСИОНАЛӢ

Бо қарори ҳайати мушовараи Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон ба сифати китоби дарсӣ барои донишҷӯёни ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва механикаи донишгоҳҳои олӣ тавсия карда шудааст

Душанбе – 2019

УДК 517.968

Китоб ба донишҷӯёни ихтисосҳои математикии донишгоҳҳо, магистрҳо, аспирантҳо, устодони донишгоҳҳо ва инчунин шахсоне, ки рағбати омӯхтани фанни таҳлили функсионалиро доранд равона карда шудааст.

Муҳаррир доктори илмҳои физикаю математика Р. Мустафоқулов

Муққаризон: доктори илмҳои физикаю математика Г.А. Юсупов,

доктори илмҳои физикаю математика Ҷ. Сафаров

Мундарича

Пешгуфтор

Таҳлили функсионалӣ ҳамчун фанни мустақили математикӣ дар аввалҳои асри XX дар натиҷаи умумӣ намудани якчанд мафҳумҳои таҳлили математикӣ, алгебра ва геометрия ба вуҷуд омадааст. Бунёдгузори ин фан олими машҳури полякӣ Стефан Банах ба ҳисоб меравад, ки ӯ бо нашри монографияи фундаменталии "Назарияи операторҳои хаттӣ" дар соли 1932 ба тавлиди ин фанн поягузорӣ намудааст.

Дар даҳсолаҳои оянда таҳлили функсионалӣ ба тамоми соҳаҳои дигари математика решаи амиқ давонд. Асоси татбиқи васеи таҳлили функсионалиро тағйири муносибат ба тадқиқи проблемаҳои гуногуни таҳлили математикӣ ташкил медиҳад. Омӯхтани функсияҳои ҷудогона ва алоқамандии онҳо ва муодилаҳо ба омӯзиши муштараки ин объектҳо, яъне фазоҳои функсионалӣ ва операторҳои функсионалӣ иваз гардиданд. Хусусияти муҳими дигари таҳлили функсионалӣ ин ба шакли умумии абстрактӣ омӯхтани проблемаҳои таҳлили математикӣ мебошад, ки он имконият медиҳад масъалаҳои гуногуни дар назари аввал аз ҳам дурро якҷоя намуда дар ҳамбастагӣ мавриди таҳқиқ қарор диҳем.

Дар қатори соҳаҳое, ки таҳлили функсионалӣ тадбиқ мешавад назарияи функсияҳо, назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ, методҳои ҳисобкунӣ, механикаи квантӣ, иқтисодиёти математикӣ ва дигар соҳаҳои математика, физика ва фанҳои табииро номбар намудан мумкин аст.

Китоби дарсии мазкур ба донишҷӯёни равияҳои математикии Донищгоҳҳо равона карда шудааст. Он дар натиҷаи солҳои гуногун аз тарафи муаллифон хондани курси таҳлили функсионалӣ дар факултети механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон навишта шудааст.

Муаллифон

1 Фазоҳои хаттӣ

1.1 Таърифи фазои хаттӣ

Мафҳуми фазо дар илм мазмунҳои гуногун дошта, дар таҳлили функсионалӣ ва умуман дар математикаи ҳозиразамон мафҳуми муҳимтарин ба шумор меравад. Дар фалсафа категорияи фазо - яке аз намудҳои мавҷудияти материяро ифода мекунад. Математика бошад муносибатҳои миқдории намудҳои фазоро меомӯзад. Масалан, дар геометрияи мактабӣ ва умуман дар геометрияи таҳлилӣ мафҳуми фазо дар ҳолати оддитарин омӯхта мешавад: дар онҳо фазо гуфта фазои сеченакаро меноманд, ки системаи аксиомаҳои эвклидиро қаноат мекунанд. Баъдтар, дар таҳлили геометрӣ, ин мафҳум аз нуқтаи назари ариметика омӯхта мешавад. Азбаски ҳар як нуқта дар фазо ба воситаи се координатҳояш муайян мегардад ва баръакс, ҳар як сегонаи ададҳо ягон нуқтаи фазоро ифода мекунанд, ки барои он ин ададҳо координатҳоянд, пас фазои сеченакаро бо сегонаи ададҳои ҳақиқии (x, y, z) шабоҳат додан мумкин аст. Дар ин маврид мафҳуми геометрии *масофаи байни ду нуқта* ба тарзи арифметикӣ аз рӯи формулаи маъмули таҳлили геометрӣ муайян карда мешавад. *Ҳамворӣ* бошад ба воситаи маҷмӯи сегонаи ададҳое, ки як муодилаи тартиби якро қаноат мекунанд, муайян карда мешавад.

Аз рӯи ин нуқтаи назар мафҳуми фазо дар математика ба ҳолати васеътар умумӣ карда мешавад. Аниқтараш дар математикаи ҳозиразамон мафҳуми фазо дар шакли васеъ истифода шуда маҷмӯи объектҳои гуногун (маҷмӯи ададҳо, функсияҳо, матрисаҳо ва ғайраҳо) - ро ифода мекунад, ки дар байни онҳо муносибатҳое, ки дар фазои сеченака мавҷуд буданд, муайян карда мешаванд.

Таъриф. Маҷмӯи E бо элементҳои $x, y, z, \dots$ **фазои хаттӣ** номида мешавад, агар дар он ду амал муайян шуда бошад:

I. Ба ҳар ду элементҳои $x, y \in E$ элементи муайяни $x+y \in E$ мувофиқат мекунад, ки *суммаи* ин элементҳо номида мешавад.

II. Ба ҳар элементи $x \in E$ ва ҳар як адади λ (скаляр) элементи муайяни $z = \lambda x \in E$ - ҳосили зарби элемент x ба скаляр λ мувофиқ гузошта мешавад ва барои элементҳои $x, y, z \in E$ ва скалярҳои λ, μ аксиомаҳои зерин иҷро мешаванд:

1). $x + y = y + x$ - хусусияти коммутативии сумма;

2). $x + (y + z) = (x + y) + z$ - хосияти ассотсиявии сумма;

3). $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ - хосияти дистрибутивии зарб нисбати ҷамъ;

4). $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ - хосияти дистрибутивии зарб нисбати ҷамъ;

5). $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ - хосияти ассотсиявии зарб;

6). $0 \cdot x = 0$ - ҳосили зарби элементи ихтиёрӣ ба нол ба элементи нулӣ баробар аст;

7). $1 \cdot x = x$ - ҳосили зарби элементи ихтиёрӣ ба 1 ба ҳамон элемент баробар аст.

Агар скалярҳои λ, μ ҳақиқӣ бошанд, фазои E - фазои хаттии **ҳақиқӣ** номида мешавад ва агар комплексӣ бошанд - фазои хаттии **комплексӣ** номида мешавад.

Дар ҳар гуна фазои хаттии E, барои элементи ихтиёрии $x \in E$ элементи муқобили $-x$ - ро муайян намудан мумкин аст ва бинобар ин амали тарҳи

$x-y$ - ро ҷорӣ намудан мумкин аст. Мувофиқи таъриф $-x=(-1)x$, онгоҳ мувофиқи аксиомаҳои болоӣ

$$x+(-x)=1\cdot x+(-1\cdot x)=(1-1)\cdot x=0\cdot x=0$$

мешавад ва амали фарқро бошад, чунин муайян намудан мумкин аст:

$$x-y=x+(-1)\cdot y.$$

Натиҷаи 1. Элементи нулии 0 - и фазои хаттии E ягона аст.

Исбот. Бигузор 0_1 ва 0_2 - элементҳои нулии фазои E бошанд. Онгоҳ мувофиқи аксиомаи 3)

$$0_1+0_2=0_1, \qquad 0_2+0_1=0_2.$$

Аз ин ҷо мувофиқи аксиомаи 1) $0_1=0_2$ аст.

Натиҷаи 2. Агар $\lambda x=\mu x$ ва $x\neq 0$ бошад, онгоҳ $\lambda=\mu$ аст.

Исбот. Ба ҳар ду тарафи баробарии $\lambda x=\mu x$ элементи $-\mu x$ - ро ҷамъ намуда ҳосил мекунем $(\lambda-\mu)x=0$. Агар $\lambda\neq\mu$ бошад, онгоҳ $x=0$ аст, ки ба зиддият дучор мешавем, пас $\lambda=\mu$ аст.

Натиҷаи 3. Агар $\lambda x=\lambda y$ ва $\lambda\neq 0$ бошад, онгоҳ $x=y$ аст.

Исбот. Ба ҳар ду тарафи баробарии $\lambda x=\lambda y$ элементи $-\lambda y$ - ро ҷамъ намуда ҳосил мекунем $\lambda(x-y)=0$. Агар $\lambda\neq 0$ бошад, пас $x-y=0$ аст, яъне $x=y$ аст.

1.2 Мисолҳои фазоҳои хаттӣ

Мисоли 1. Маҷмӯи векторҳои фазои сеченакаи R_3 фазои хаттиро ташкил медиҳад.

Суммаи векторҳои $a = (x_1, y_1, z_1)$ ва $b = (x_2, y_2, z_2)$ ба воситаи қоидаи параллелограмм муайян карда мешавад. Ҳосили зарби вектори a ба скаляр λ, - ин вектори λa мебошад, ки дарозии он ба ҳосили зарби λ ба дарозии a ва равиши он бошад, бо равиши a якхела аст, агар $\lambda > 0$ ва муқобили ин равиш аст, агар $\lambda < 0$ бошад.

Мисоли 2. Маҷмӯи векторҳои фазои n - ченакаи R^n - фазои хаттиро ташкил медиҳанд.

Элементҳои $x, y, z \in R^n$ - ро дида мебароем:

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),\ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n),\ z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n),$$

ки ададҳои $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - ададҳои ҳақиқӣ мебошанд ва координатаҳои вектори x номида мешаванд. Суммаи $x + y$ гуфта вектори $z \in R^n$ - ро меноманд, ки координатаҳои он аз суммаи координатаҳои мувофиқи векторҳои x ва y ҳосил гардидаанд: $(\xi_i + \eta_i)_{i=1}^n$. Ҳосили зарби скаляр λ ва вектори $x \in E$ гуфта вектори $z = \lambda x = (\lambda x_i)_{i=1}^n$ - ро меноманд. Ба сифати вектори нулӣ $0 = (0)_{i=1}^n$ қабул карда мешавад.

Азбаски амалҳо бо векторҳои $x, y \in R^n$ ба амалҳо бо ададҳои ҳакиқӣ (координатаҳо) оварда мешаванд ва бароиададҳои ҳақиқӣ аксиомаҳои фазои хаттӣ иҷро мешаванд, пас бевосита дидан мумкин аст, ки аксиомаҳои 1) - 7) иҷро мешаванд, яъне R^n фазои хаттӣ (евклидӣ) аст.

Пеш аз он, ки ба мисолҳои фазоҳои хаттие, ки элементҳояшон функсияҳои $x(t)$ мебошанд гузарем, қайд мекунем, ки дар ин ҳолат соҳаи муайянии функсияҳои $x(t)$ - ро қайдкардашуда (фиксирондашуда) гирифтан лозим аст ва класси функсияҳоро низ қайд кардан лозим аст. Онгоҳ суммаи $(x + y)(t)$ ҳамчун суммаи ду функсияҳои $x(t)$ ва $y(t)$ фаҳмида мешавад, яъне $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$. Ҳосили зарби $(\lambda x)(t)$ бошад, ҳамчун ҳосили зарби функсияи $x(t)$ ба адади λ, яъне $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$ фаҳмида мешавад.

Мисоли 3. Фазои ҳамаи бисёраъзогиҳои дараҷаи n доштаро дида мебароем. Яъне

$$x(t) \in E: \ x(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, \ t \in D = (-\infty, \infty),$$

ки дар ин ҷо $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - ададҳои ҳақиқӣ мебошанд. Азбаски ҳосили ҷамъи бисёраъзогиҳои дараҷаи n бисёраъзогии дараҷаи n ва ҳосили зарби $\lambda x(t)$ (λ скаляр) - низ бисёраъзогии дараҷаи n аст, пас E фазои хаттиро ташкил медиҳад. Агар D - ҳамвории комплексӣ бошад, онгоҳ фазои хаттии комплексии бисёраъзогиҳоро ҳосил мекунем.

Мисоли 4. Фазои $C[a,b]$ – функсияҳои дар порчаи $[a,b]$ бефосила. Бигузор $D = [a,b]$ бошад. Дар D функсияҳои бефосилаи $x(t)$ ва $y(t)$ - ро дида мебароем. Азбаски $x(t) + y(t)$ ҳамчун суммаи функсияҳои бефосила ва $\lambda x(t)$ функсияҳои бефосилаанд, пас $C[a,b]$ - фазои хаттӣ аст. Агар λ адади ҳақиқӣ бошад фазои хаттӣ ҳақиқӣ ва агар комплексӣ бошад фазои хаттии комплексӣ мешавад.

Мисоли 5. Фазои $C^k(a,b)$ – функсияҳои дар интервали (a,b) – k маротиба бефосила дифференсирондашаванда. Бигузор $x(t)$ ва $y(t)$ - функсияҳои дар интервали (a,b) - к маротиба бефосила диффересирондашаванда бошанд. Азбаски $x(t) + y(t) \in C^k(a,b)$ ва $\lambda x(t) \in C^k(a,b)$ мешаванд, пас $C^k(a,b)$ - фазои хаттӣ аст.

Мисоли 6. Маҷмӯи матрисаҳои A_{mn} - ҳамаи матрисаҳои росткунҷаи тартиби $m \times n$ фазои хаттиро ташкил медиҳанд. Дар ҳақиқат агар

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

бошанд, онгоҳ $A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}$, $\lambda A = \{\lambda a_{ij}\}$ мешавад. Пас A_{mn} - фазои хаттӣ аст, чунки амалҳо бо ададҳои ҳақиқӣ фазои хаттиро ташкил медиҳанд.

1.3 Хаттӣ вобастагӣ ва хаттӣ новобастагии элементҳо

Бигузор E фазои хаттӣ ва $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ элементҳои он бошанд. Суммаи $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, ки дар ин ҷо c_k – ададҳои доимӣ мебошанд, комбинатсияи хаттии элементҳои $x_1, x_2, \dots, x_n$ номида мешавад.

Таъриф. Элементҳои $x_1, x_2, \dots, x_n$ **хаттӣ вобаста** номида мешаванд, агар чунин доимиҳои $c_1, c_2, \cdots, c_k$ ёфт шаванд, ки комбинатсияи хаттии онҳо $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = 0$ бошад ва аққалан яке аз c_k нобаробари нол бошад.

Агар $\sum_{k=1}^{n} c_k = 0$ фақат ҳангоми $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ бошад, онгоҳ элементҳои $x_1, x_2, \dots, x_n$ **хаттӣ новобаста** номида мешаванд.

Таъриф. Агар дар фазои хаттии X m - то элементҳои хаттӣ новобаста мавҷуд бошанд ва $m + 1$ - элементҳои ихтиёрии он хаттӣ вобаста бошанд, онгоҳ адади m - **ченаки** фазои X номида мешавад.

Машқи 1. Чунин қимати α - ро ёбед, ки векторҳои $x = (1, 2, 3)$, $y = (1, 1, 0)$ ва $z = (\alpha, 1, 1)$ дар фазои хаттии сеченакаи R^3 хаттӣ вобаста бошанд.

Ҳал. Мувофиқи таъриф бояд

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0, \quad \text{ва} \quad \sum_{k=1}^{3} |c_k| > 0$$

бошад, яъне ҳалли ғайринулии системаи муодилаҳои алгебравии зерин ёфта шавад:

$$\begin{cases} 1c_1 + 1c_2 + \alpha c_3 = 0 \\ 2c_1 + 1c_2 + 1c_3 = 0 \\ 3c_1 + 0c_2 + 1c_3 = 0 \end{cases}$$

ва

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки $\alpha = 2/3$ ва $c_1 = c_2,\ c_3 = -3c_1$ аст. Бинобар ин $\sum_{k=1}^{3} |c_k| = 5|c_1| > 0$ мешавад, агар c_1 - адади ихтиёрии ғайринулӣ бошад. Ҳамин тавр, барои қимати $\alpha = 2/3$ векторҳои $x = (1,2,3),\ y = (1,1,0)$ ва $z = (\frac{2}{3}, 1, 1)$ хаттӣ вобаста мебошанд.

Машқи 2. Нишон диҳед, ки дар фазои $C[0, 2\pi]$ функсияҳои $x_1 = \sin^2\varphi, x_2 = \cos^2\varphi, x_3 = 1$ хаттӣ вобастаанд ва функсияҳои $x_1 = 1,\ x_2 = \cos\varphi,\ x_3 = \cos^2\varphi$ хаттӣ новобастаанд.

Ҳал. Дар ҳақиқат барои ҳамаи қиматҳои $\varphi \in [0, 2\pi]$ айнияти зерин

$$1 \cdot \sin^2\varphi + 1 \cdot \cos^2\varphi + (-1) \cdot 1 = 0$$

ҷой дорад, яъне $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1$ ва бинобар ин функсияҳои $x_1 = \sin^2\varphi, x_2 = \cos^2\varphi, x_3 = 1$ хаттӣ вобастаанд.

Функсияҳои $x_1 = 1,\ x_2 = \cos\varphi,\ x_3 = \cos^2\varphi$ хаттӣ новобастаанд, чунки агар бо $t = \cos\varphi$ ишора намоем, онгоҳ баробарии

$$c_1 + c_2 t + c_3 t^2 = 0$$

фақат ҳангоми $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ будан ҷой дошта метавонад.

Машқи 3. Мустақилона нишон диҳед, ки дар фазои $C(-\infty, +\infty)$ системаи функсияҳои зерин

$$1)\ y_1 = e^x,\ y_2 = 2e^x,$$

$$2)\ y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x},\ y_3 = \operatorname{ch} x$$

хаттӣ вобастаанд.

2 Фазоҳои метрикӣ

Яке аз мафҳумҳои асосии таҳлили математикӣ - мафҳуми масофаи байни ду нуқта (дар хати рост, дар ҳамворӣ ё дар фазои сеченака) мебошад. Дигар мафҳумҳо бошанд, масалан ҳудуд, ба воситаи масофа ифода меёбанд. Сипас ин мафҳумҳо барои пайдарпаиҳои ададҳои комплексӣ, барои векторҳои фазои n - ченакаи R_n, барои пайдарпаии функсияҳо умумӣ карда мешаванд.

Наздикшавии пайдарпаии x_n ба ҳудуди x дар ҳамаи ҳолатҳои дар боло овардашуда маънои онро дорад, ки аъзоҳои пайдарпаии x_n беохир ба x „наздик“ мешаванд, агар номери n - беҳад калон бошад. Ин наздикшавиро масофаи байни элементҳои пайдарпаии x_n муайян мекунад. Вобаста аз он, ки мо масофаи байни пайдарпаиҳои x_n ва y_n – ро чӣ тавр дохил мекунем, таърифи ҳудуди пайдарпаӣ гуногун мешавад. Бинобар ин зарурат ба миён меояд, ки барои баъзе маҷмӯҳо мафҳуми умумии масофаи байни элементҳои онро дохил намоем ва сипас мувофиқи он таърифи ҳудуди пайдарпаиҳоро дохил кунем, ки ҳамаи ҳолатҳои хусусии дар боло қайдшударо дар бар гирад.

2.1 Таърифи фазои метрикӣ

Таъриф. Маҷмӯи M **фазои метрикӣ** номида мешавад, агар ба ҳар як ҷуфти элементҳои x ва y аз ин маҷмӯъ- и он ададӣ ғайриманфии $\rho(x, y)$ мувофиқ гузошта шуда бошад, ки он шартҳои зеринро қаноат кунад:

1). $\rho(x, y) = 0$ фақат ва фақат ҳангоми $x = y$ будан - аксиомаи айниятӣ,

2). $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ - симмметрӣ,

3). $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ - аксиомаи секунҷа.

Адади $\rho(x, y)$ - масофаи байни элементҳои x ва y номида мешавад ва худи элементҳоро нуқтаҳо меноманд. Шартҳои 1)–3) ба хосиятҳои асосии масофа, ки дар амалия вомехӯранд, мувофиқат мекунад:

1). масофа ҳамеша ғайриманфӣ аст ва фақат ҳамон вақт баробари нол мешавад, ки нуқтаҳои x ва y ҳамҷоя бошанд,

2). ҳар ду нуқтаҳо, ки масофа байни онҳо муайян карда мешавад, баробарқуваанд,

3). роҳи рост аз нуқтаи x ба z аз роҳе, ки ба воситаи нуқтаи сейӯм y мегузарад дарозтар нест.

2.2 Ҳудуди пайдарпаӣ

Элементи x - и фазои метрикии X ҳудуди пайдарпаии $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in X$ номида мешавад, агар ҳангоми $n \to \infty$ $\rho(x_n, x) \to 0$ бошад ва чунин навишта мешавад

$$x_n \to x \quad \text{ё} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Аён аст, ки агар пайдарпаии нуқтаҳои x_n - и фазои метрики X ба нуқтаи x наздик шавад, онгоҳ ҳар гуна зерпайдарпаии он x_{n_k} низ ба x наздик мешавад.

Таъриф. Маҷмӯи нуқтаҳои x - и фазои метрикӣ X - **кураи радиусаш** r **бо марказ дар нуқтаи** x_0 номида мешавад, агар $\rho(x, x_0) < r$ бошад, яъне

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}.$$

Бо $\overline{S}_r(x_0)$ - кураи сарбаста, яне маҷмӯи

$$\overline{S}_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \le r\}.$$

ишора карда мешавад.

Таъриф. Кураи ихтиёрӣ бо марказ дар нуқтаи x_0 - **атрофи** нуқтаи x_0 номида мешавад. Масалан ε атрофи нуқтаи x_0 ин маҷмӯи

$$S_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

мебошад.

Теорема 2.1. *Ҳудуди нуқтаҳои x_n - и фазои метрикии X агар мавҷуд бошад, он ягона аст.*

Дар ҳақиқат, бигузор $x_n \to x,\ y_n \to y$ майл кунанд. Онгоҳ барои $\forall\varepsilon > 0$ ҳангоми $n \to \infty$

$$\rho(x, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) < \varepsilon$$

мешавад. Азбаски x, y нуқтаҳои қайдшуда ва ε - адади мусбати ихтиёрии хурд аст, пас $\rho(x, y) = 0$, яъне $x = y$ аст.

2.3 Мисолҳои фазоҳои метрикӣ

1. Тири ададӣ. Бигузор $X = R$ - маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ бошад. Агар $x, y \in R$ бошанд, онгоҳ масофаи байни онҳоро ба таври муқаррарӣ чунин муайян карда мешавад:

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Иҷрошавии ҳамаи аксиомаҳои метрикиро бевосита санҷидан мумкин аст. Наздикшавӣ дар ин фазо ҳамчун наздикшавии муқарарии пайдарпаиҳои ададӣ мебошад. Яъне $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ маънои онро дорад, ки барои $\forall\varepsilon > 0$ чунин $\exists N = N(\varepsilon)$, ки

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{барои} \quad \forall n > N.$$

Маҷмӯи $S_\varepsilon(x_0)$ дар тири ададӣ R интервали $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ мебошад.

2. Ҳамворӣ. Бигузор $X = R^2$ - маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои ҳамворӣ бошад. Агар $A = A(x_1, y_1), B = B(x_2, y_2) \in R^2$ бошанд, онгоҳ масофаи байни ин нуқтаҳоро ба воситаи формулаи

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

муайян карда мешавад. Аксиомаи секунҷа аз хосиятҳои тарафҳои секунҷа: дарозии ҳар як тарафи секунҷа аз ҳосили ҷамъи дарозиҳои ду тарафҳои дигари он калон нест, мебарояд.

2.4 Фазои эвклидии R^n

Бигузор X - фазои n - ченакаи арифметикии R^n, яъне маҷмӯи ҳамаи n ададҳои тартибнок бошад:

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \ z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in R^n.$$

Онгоҳ масофаи байни элементҳои x ва y - ро ба воситаи формулаи

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2} \tag{2.1}$$

ҷорӣ карда мешавад. Аён аст, ки дар ин ҷо аксиомаҳои айниятӣ ва симметрӣ иҷро мегарданд. Пеш аз он, ки иҷрошавии аксиомаи секунҷагиро нишон диҳем, мо аввал барои ададҳои ихтиёрии ҳақиқии a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ нобаробарии Коши

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big) \tag{2.2}$$

- ро исбот мекунем. Ғояи асосии ин исбот аз он иборат аст, ки қимати сеаъзогии квадратии $Ax^2 + 2Bx + C$ бо коэффисиентҳои ҳақиқӣ ҳамон вақт ғайриманфӣ аст, агар дискриминанти он $B^2 - AC \leq 0$ бошад. Инро ба назар гирифта функсияи ёрирасони

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)x^2 + 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

- ро месозем. Агар ишораҳои

$$A = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2, \ B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \ C = \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2$$

- ро ворид намоем, пас

$$\varphi(x) = Ax^2 + 2Bx + C \geq 0.$$

Аз ин ҷо мебарояд, ки $B^2 - AC \leq 0$, яъне нобаробарии Коши (2.2) исбот шуд.

Акнун нобаробарии секунҷагии $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ – ро барои элементҳои

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \ y = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n), \ z = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n),$$

ки намуди

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \quad (a_k = \xi_k - \zeta_k, \ b_k = \zeta_k - \eta_k) \quad (2.3)$$

дорад исбот мекунем. Барои ин аз ҳар ду тарафи нобаробарии (2.2) решаи квадратӣ гирифта ҳосил мекунем

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Акнун ҳар ду тарафи ин нобаробариро ба 2 зарб зада ба онҳо ифодаи $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ - ро ҷамъ намоем, ҳосил мегардад

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \right)^2.$$

Аз ҳар ду тарафи нобаробарии ҳосилшуда решаи квадратӣ гирифта дар он $a_k = \xi_k - \zeta_k, b_k = \zeta_k - \eta_k$ гузорем, нобаробарии (2.3) – ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тавр R^n фазои метрикӣ аст. Наздикшавии пайдарпаии элементҳо аз R^n чунин маъно дорад. Бигузор $x_k = \{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\}, k = 1, 2, 3, \ldots$ ва $\rho(x_k, x) \to 0$ бошад, яъне ҳангоми $k \to \infty$, $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i^{(k)} - \xi_i)^2} \to 0$ бошад. Ин ба он баробарқувва аст, ки ҳангоми майл намудани $k \to \infty$, $\xi_i^{(k)} \to \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Яъне наздикшавӣ дар фазои R^n, бо метрикаи (2.1) – наздикшавӣ аз рӯи координатаҳо мебошад.

Метрикаро дар фазои R^n ғайр аз намуди (2.1) боз бо тарзҳои дигар

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k| \tag{2.4}$$

ва ё ин ки

$$\rho(x, y) = \max_k |\xi_k - \eta_k| \tag{2.5}$$

дохил намудан мумкин аст. Барои ҳар як метрика ε – атрофи нуқтаи x_0 бо тарзҳои гуногун муайян карда мешавад. Масалан, дар фазои дученакаи R^2 барои метрикаи (2.1) кураи $S_\varepsilon(x_0)$ доираи

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 < \varepsilon$$

мебошад. Барои метрикаи (2.4) – ромб

$$|\xi - \xi_0| + |\eta - \eta_0| < \varepsilon$$

ва барои метрикаи (2.5) бошад, квадрати

$$\max\{|\xi - \xi_0|, |\eta - \eta_0|\} < \varepsilon$$

мебошанд.

2.5 Фазои функсияҳои бефосилаи $C[a,b]$

Бигузор X - маҷмӯи функсияҳои бефосилаи дар порчаи $[a,b]$ додашуда бошад. Метрикаро дар ин маҷмӯъ ба воситаи формулаи

$$\rho(x,y) = \max_t |x(t) - y(t)|, \ t \in [a,b] \tag{2.6}$$

дохил мекунем. Аксиомаҳои метрикии 1)-3) - ро месанҷем. Ду хосияти аввал, яъне $\rho(x,y) \geq 0$ ва $\rho(x,y) = 0$ фақат ва фақат дар ҳамон ҳолат, ки $x(t) \equiv y(t)$ бошад ва $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ айёнанд. Аксиомаи секунҷаро месанҷем.

Барои ихтиёрӣ $t \in [a,b]$

$$|x(t) - z(t)| = |(x(t) - y(t)) + (y(t) - z(t))| \leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \leq$$

$$\leq \max_t |x(t) - y(t)| + \max_t |y(t) - z(t)| = \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Бинобар ин $\rho(x,z) = \max_t |x(t) - z(t)| \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Маҷмӯи функсияҳои бефосилаи дар порчаи $[a,b]$ додашуда бо метрикаи (2.6) фазои метрикии функсияҳои бефосила номида мешавад ва бо $C[a,b]$ ишора карда мешавад.

Наздикшавиро дар фазои $C[a,b]$ дида мебароем. Бигузор пайдарпаии элементҳои $x_n(t)$ аз $C[a,b]$, ки ба $x(t)$ наздик мешавад, дода шуда бошад (яъне $\rho(x_n,x) \to 0$ ҳангоми $n \to \infty$). Ин маънои онро дорад, ки

$$\max_t |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \quad \text{барои} \quad n > N,$$

бинобар ин

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

барои $n > N$ ва ҳамаи қиматҳои $t \in [a, b]$. Ин бошад маънои онро лорад, ки пайдарпаии функсияҳои $x_n(t) \in C[a, b]$ ба функсияи $x(t)$ мунтазам наздик мешавад.

Ҳамин тавр наздикшавӣ дар фазои метрикии функсияҳои бефосилаи $C[a, b]$ **мунтазам наздикшавӣ** мебошад.

Кураи $S_\varepsilon(x_0)$ дар фазои метрикии $C[a, b]$ ҳамаи функсияҳои бефосилаи $x(t)$ мебошанд, ки дар тамоми порчаи $[a, b]$ нобаробарии $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ - ро қаноат мекунанд, яъне графики онҳо дар тасмаи $(x_0(t) - \varepsilon, x_0(t) + \varepsilon)$ ҷойгир мешаванд.

Фазои метрикии $C[a, b]$ - беохирченака аст, чунки ҳамаи функсияҳои хаттӣ новобастаи $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ элементҳои ин фазо мебошанд.

2.6 Фазои пайдарпаиҳои ададии маҳдуд m

Бигузор X маҷмӯи пайдарпаиҳои ададии маҳдуд

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$$

бошад, яъне барои ҳар як x чунин адади доимии M ёфт мешавад, ки нобаробарии $|\xi_k| < M$ барои ҳамаи номерҳои k иҷро мешавад.

Бигузор $x = \{\xi_k\}$ ва $y = \{\eta_k\}$ таалуқи X бошанд. Масофаи байни ин элементҳоро ба воситаи формулаи

$$\rho(x, y) = \sup_k |\xi_k - \eta_k|$$

муайян мекунем. Аксиомаи секунҷагиро месанҷем:

$$|\xi_k - \zeta_k| \le |\xi_k - \eta_k| + |\eta_k - \zeta_k| \le$$

$$\le \sup_k \xi_k - \eta_k| + \sup_k |\eta_k - \zeta_k| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Бинобар ин

$$\rho(x,z) = \sup_k |\xi_k - \zeta_k| \le \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Фазои метрикии ҳосилшуда, фазои пайдарпаиҳои ададии маҳдуди m номида мешавад.

Бигузор $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$ ва $x = \{\xi_k\}$ - элементҳои фазои m ва $\rho(x_n, x) \to 0$ ҳангоми $n \to \infty$ бошанд. Ин маънои онро дорад, ки барои $\forall \varepsilon > 0$ чунин номери N ёфт мешавад, ки

$$\rho(x_n, x) = \sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k| < \varepsilon \quad \text{ҳангоми} \quad n > N$$

мебошад. Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳангоми $n > N$ будан $|\xi_k^{(n)} - \xi_k| < \varepsilon$ мебошад, яъне наздикшавӣ дар фазои метрикии m наздикшавӣ аз рӯи координатаҳо буда, мунтазам нисбат ба номерҳои координата мебошад.

2.7 Фазои эвклидии беохирченакаи l_2

Ба мисли мисоли пештара пайдарпаиҳои ададии

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

- ро дида мебароем, ки онро элементҳои (векторҳои) фазои эвклидии беохирченакаи l_2 меномем ва ададҳои ҳақиқии x_k - ро бошад координатаҳои вектори x меномем. Амалҳои ҷамъи элементҳо ва ҳосили зарб бо ададро ба мисли фазои R^n дохил мекунем. Талаб мекунем, ки пайдарпаии ададҳои $\{x_k\}$ шарти

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

- ро қаноат мекунанд. Масофаи байни элементҳои $x, y \in l_2$ - ро ба воситаи формулаи

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2}$$

ворид мекунем. Ин формула маъно дорад, чунки қатори $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2$ наздикшаванда аст, агар $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ ва $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$ бошанд ин бошад аз нобаробарии ададии $(x_k \pm y_k)^2 \leq 2(x_k^2 + y_k^2)$ бармеояд. Ғайр аз ин аз гуфтаҳои боло мебарояд, ки агар $x, y \in l_2$ бошад, онгоҳ $x + y \in l_2$.

Аксиомаҳои 1) ва 2) - и фазои метрикӣ аёнанд. Аксиомаи секунҷа бошад намуди

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2}.$$

дорад. Дурустии ин нобаробарӣ бошад аз он мебарояд, ки аввалан ҳар се қатори ин нобаробарӣ наздикшавандаанд ва барои ҳар як қимати n нобаробарии

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2}.$$

ҷой дорад. Дар ин ҷо ҳангоми $n \to \infty$ ба ҳудуд гузашта, нобаробарии болоиро барои қаторҳо ҳосил мекунем.

2.8 Фазои функсияҳои бефосилаи $C_2[a, b]$ бо метрикаи квадратӣ

Ба монанди мисоли 5 фазои функсияҳои дар порчаи $[a, b]$ бефосиларо дида мебароем, ки дар он метрика ба воситаи формулаи

$$\rho(x, y) = \Big(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt\Big)^{1/2}$$

дохил карда шудааст. Аксиомаҳои 1) ва 2) - метрикӣ аёнанд. Аксиомаи секунҷа бошад аз нобаробарии Коши-Буняковский

$$\Big(\int_a^b x(t)y(t)\Big)^2 \leq \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt \tag{2.7}$$

бармеояд. Дар ҳақикат, аввалан қайд мекунем, ки нобаробарии Коши-Буняковский (2.7) ба осонӣ аз нобаробарии

$$\Big(\int_a^b x(t)y(t)\Big)^2 = \int_a^b x^2(t)dt \cdot \int_a^b y^2(t)dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b [x(s)y(t) - y(s)x(t)]^2 ds dt$$

ҳосил мегардад. Акнун аз ҳар ду тарафи нобаробарии (2.7) решаи квадратӣ мегирем ва ҳар ду тарафро ба ду зарб зада ба онҳо

$$\int_a^b x^2(t)dt + \int_a^b y^2(t)dt$$

- ро ҷамъ мекунем. Дар натиҷа ҳосил мегардад

$$\int_a^b [x(t) + y(t)]^2 dt \leq \left(\sqrt{\int_a^b x^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}\right)^2.$$

Аз ҳар ду тарафи ин нобаробарӣ решаи квадратӣ гирифта, нобаробарии

$$\sqrt{\int_a^b [x(t)+y(t)]^2dt} \leq \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}$$

- ро ҳосил мекунем. Акнун, агар дар ин нобаробарӣ $x(t) = f(t) - q(t)$, $y(t) = q(t) - g(t)$ гузорем, мо барои элементҳои $f(t), g(t), q(t) \in C_2[a,b]$ нобаробарии секунҷагии

$$\sqrt{\int_a^b [f(t)-g(t)]^2dt} \leq \sqrt{\int_a^b (f(t)-q(t))^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b (q(t)-g(t))^2dt}$$

- ро ҳосил мекунем.

Наздикшавӣ дар фазои $C_2[a,b]$ ба таври **миёнаи квадратӣ** фаҳмида мешавад. Яъне агар $x_n(t) \to x(t) \in C_2(a,b)$, ин маънои онро дорад, ки ҳангоми $n \to \infty$

$$\int_a^b (x_n(t) - x(t))^2dt \to 0.$$

2.9 Баъзе мафҳумҳои фазоҳои метрикӣ ва машқҳо

Дар ин ҷо мо таърифи баъзе мафҳумҳоро меорем, ки онҳо ба фазоҳои метрикӣ таалуқ доранд. Ҳамаи ин мафҳумҳо дар фазоҳои эвклидӣ маълум буданд ва бинобар ин мо дар ин ҷо фақат таърифи онҳоро меорем.

Таъриф. Нуқтаи x_0 - и маҷмӯи G аз фазои метрикии X - **нуқтаи дохилӣ** номида мешавад, агар он бо ягон атрофи худ дар дохили G бошад, яъне барои элементи $x_0 \in G$ ва ягон $\varepsilon > 0$, $S_\varepsilon(x_0)) \subset G$ бошад.

Таъриф. Маҷмӯи $G \subset X$ - **маҷмӯи кушод** номида мешавад, агар ҳар як нуқтаи он нуқтаи **дохилӣ** бошад.

Тамоми фазои метрикии X маҷмӯи кушод аст. Маҷмӯи холӣ низ маҷмуи кушод аст. Дар тири ададӣ R интервали $a < x < b$ ва инчунин маҷмӯҳои $x > a, x < b$ - маҷмӯҳои кушод мебошанд.

Нишон медиҳем, ки дар фазои метрикии ихтиёрӣ X ҳар як кураи $S_r(a) = \{x : \rho(x,a) < r\}$ - маҷмӯи кушод аст. Дар ҳақиқат, бигузор $x \in S_r(a)$ бошад, яъне $\rho(x,a) < r$ аст. Бигузор $\varepsilon = r - \rho(x,a)$ бошад. Агар $y \in S_\varepsilon(x)$, яъне $\rho(y,x) < \varepsilon$ бошад, онгоҳ

$$\rho(y,a) \leq \rho(y,x) + \rho(x,a) < r$$

мешавад. Аз ин ҷо $y \in S_r(a)$ аст. Ҳамин тавр тамоми кураи $S_\varepsilon(x) \subset S_r(a)$, яъне нуқтаи x нуқтаи дохилии маҷмӯи $S_r(a)$ мебошад.

Таъриф. Маҷмӯи $F \subset X$ - **маҷмӯи сарбаста** номида мешавад, агар барои пайдарпаии ихтиёрии наздикшавандаи $x_n \in F$, ҳудуди он низ ба маҷмӯи F мансуб бошад.

Тамоми фазои метрикии X сарбаста аст. Маҷмӯи холӣ низ сарбаста мебошад, чунки аз он ягон пайдарпаии нуқтаҳоро чудо намудан мумкин нест. Дар тири ададӣ R порчаи $a \leq x \leq b$ ва маҷмӯҳои $x \geq a, x \leq b$ сарбаста мебошанд.

Таъриф. Нуктаи $x_0 \in M$ - фазои метрикӣ X - **нуқтаи сарҳадии маҷмӯи** M номида мешавад, агар дар ихтиёрӣ атрофи ин нуқта ҳам элементҳои маҷмӯи M ва ҳам элементҳои ба M таалуқ надошта мавҷуд бошанд.

Маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои сарҳадии маҷмӯи M - **сарҳади маҷмӯи** M номида мешавад.

Барои доираи сарбаста дар фазои метрикии R^2 - ҳамаи нуқтаҳои давра

- нуқтаҳои сарҳадии он мебошанд. Ҳамаи ин нуқтаҳо ба маҷмӯи M таалуқанд. Барои доираи кушод низ ин нуқтаҳои сарҳадӣ мебошанд, аммо онҳо ба маҷмӯи M таалуқ нестанд.

Барои маҷмӯи ихтиёрӣ дар ҳамворӣ ҳамаи нуқтаҳои ҷудогонаи он - нуқтаҳои сарҳадӣ мебошанд.

Таъриф Маҷмӯи $M \subset X$ - **маҷмӯи маҳдуд** номида мешавад, агар он дар дохили ягон кураи $S_r(x_0)$ - и фазои метрикии X ҷойгир бошад.

Таъриф. Нуқтаи $x \in X$ **нуқтаи ҳудудии маҷмӯи** $A \subset X$ номида мешавад, агар дар маҷмӯи A чунин пайдарпаии $x_n \in A$ ёфт шавад, ки $\lim x_n = x$ бошад.

Масалан дар фазои метрикии R тамоми нуқтаҳои интервали $a < x < b$ ва ду нуқтаҳои сарҳадии он $x = a$ ва $x = b$ нуқтаҳои ҳудудӣ мебошанд.

Маълум аст, ки маҷмӯи сарбаста тамоми нуқтаҳои ҳудудиашро дар бар мегирад.

Таъриф. Агар ба маҷмӯи A - и фазои метрикии X ҳамаи нуқтаҳои ҳудудии онро илова намоем маҷмӯи ҳосилшуда – **маҷмӯи сарбасташуда** номида мешавад ва бо A' ишора карда мешавад.

Дар фазои R маҷмӯи сарбасташудаи интервали (a, b) порчаи $[a, b]$ мебошад.

Машқи 1. 1). Дар фазои метрикии R^2 маҷмӯҳоеро номбар кунед, ки нуқтаҳои сарҳадӣ надошта бошанд;

2). дар фазои метрикии R^2 маҷмӯеро номбар кунед, ки нуқтаҳои сарҳадӣ дорад, вале ҳамаи онҳо ба маҷмӯ дохил намешаванд;

3). дар фазои метрикии R^2 маҷмӯеро номбар кунед, ки қисме аз нуқтаҳои сарҳадиашро дар бар мегирад;

4). дар фазои метрикии R маҷмӯеро номбар кунед, ки он фақат аз нуқтаҳои сарҳадӣ иборат бошад;

Ҳал. 1). Маҷмӯи холӣ нуқтаҳои сарҳадӣ надорад, чунки ин маҷмӯ тамоман элемент надорад. Тамоми ҳамворӣ низ нуқтаҳои сарҳадӣ надорад. Ҳамаи нуқтаҳои он - нуқтаҳои дохиланд.

2). Маҷмӯи ихтиёрии кушод (ғайр аз маҷмӯи холӣ) дар ҳамворӣ нуқтаҳои сарҳадиашро дар бар намегирад.

3). Маҷмӯи ҳамворӣ, ки на кушод бошаду на сарбаста, қисми нуқтаҳои сарҳадиашро дар бар мегирад. Масалан маҷмӯи нуқтаҳои (x, y) - и чоркунҷаи $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$.

4). Маҷмӯи ададҳои ирратсионалӣ дар тири ададӣ фақат аз элементҳое иборат аст, ки нуқтаҳои сарҳадӣ мебошанд.

Машқи 2. Нишон диҳед, ки маҷмӯи функсияҳои бефосилаи M, ки шарти $A < f(x) < B$ - ро қаноат мекунанд, дар фазои метрикии $C[0, 1]$ маҷмӯи кушод аст.

Ҳал. Барои ин кифоя аст нишон диҳем, ки ҳар як функсия аз M ба он бо атрофи худ M_1 дохил мешавад, ки он аз нуқтаи дохилӣ иборат мебошад.

Дар ҳақиқат, барои ихтиёрӣ функсияи $f(x) \in C[0, 1]$ нобаробарии $A < f(x) < B$ иҷро мешавад. Аз ин ҷо бармеояд, ки барои ихтиёрӣ адади $\varepsilon > 0$ нобаробарии

$$A + \varepsilon \leq f(x) \leq B - \varepsilon$$

иҷро мешавад. Яъне барои ихтиёрӣ адади δ аз порчаи $-\varepsilon/2 \leq \delta \leq \varepsilon/2$ функсияи $f(x) = \delta$ ба M дохил мешавад. Ин маънои онро дорад, ки кифоя аст маҷмӯи

$$M_1 = \{f(x) : A + \varepsilon/2 < f(x) < B - \varepsilon/2\}$$

- ро гирем, ки барои он $f(x)$ нуқтаи дохилии дар M ҷойгиршуда мешавад.

Машқи 3. Исбот кунед, ки маҷмӯи M - и фазои метрикии $C[0,1]$:

$$M = \{f(x) : A \leq f(x) \leq B\}$$

- мачмӯи сарбаста аст.

Ҳал. Пайдарпаии наздикшавандаи функсияҳои зеринро дида мебароем:

$$\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \subseteq M.$$

Маълум аст, ки барои ихтиёрӣ адади $x_0 \in [0,1]$ пайдарпаии ададии $\{f_n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ аз боло ва поён мувофиқан бо ададҳои A ва B маҳдуд аст. Пас мувофиқи теоремаи маъмул аз таҳлили математикӣ, агар $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$, агар мавҷуд бошад, он низ аз боло ва поён бо ададҳои A ва B маҳдуд аст. Ин барои ихтиёрӣ ададҳои $x \in [0,1]$ дуруст аст, бинобар ин нобаробарии

$$A \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq B, \ x \in [0,1]$$

ҷой дорад.

Ҳамин тавр $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in M$ ва $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ба функсияи бефосила наздик мешавад. Бинобар ин, мувофиқи таъриф, маҷмӯи M сарбаста аст.

Машқи 4. Нишон диҳед, ки маҷмӯи функсияҳои

$$M = \{x(t) \in C[a,b] : 3 \leq x(t) < 5\}$$

дар фазои метрикии $C[a,b]$ на маҷмӯи кушод ва на сарбаста аст.

Ҳал. Маҷмӯи M ҳамон вақт дар фазои $C[a, b]$ сарбаста намешавад, ки агар чунин элементи $x_0(t) \in C[a, b]$ мавҷуд бошад, ки он ба маҷмӯи сарбасташудаи M' таалуқ дорад: $x_0(t) \in M'$, аммо ба худи маҷмӯи M не: $x_0(t) \not\subseteq M$. Айён аст, ки функсияи $x_0(t) \equiv 5 \not\subseteq M$. Нишон медиҳем, ки $x_0(t) \in M'$. Барои ин кифоя аст нишон диҳем, ки $M \cap S_\varepsilon(x_0) \neq \varnothing$. Бигузор $\varepsilon > 0$ бошад. Функсияи зеринро дида мебароем

$$x(t) = x_0(t) - \min\{\varepsilon/2, 2\},\ t \in [a, b].$$

Маълум аст, ки $x(t) \in M$. Аз нобаробарии

$$|x(t) - x_0(t)| = \min\{\varepsilon/2, 2\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,\ t \in [a, b]$$

мебарояд, ки $x(t) \in S_\varepsilon(x_0)$ аст. Пас $M \cap S_\varepsilon(x_0) \neq \varnothing$ аст, яъне маҷмӯи M сарбаста нест.

Функсияҳои зеринро дида мебароем: $x_0(t) \equiv 3$ ва $x(t) \equiv 3 - \varepsilon/2, t \in [a, b]$. Айён аст, ки $x_0(t) \in M, x(t) \not\subseteq M$ ва $x(t) \in S_\varepsilon(x_0)$, яъне $S_\varepsilon(x_0) \not\subseteq M$. Пас M - маҷмӯи кушод низ нест.

Машқи 5. Бигузор N - маҷмӯи ададҳои натуралӣ бошад. Нишон диҳед, ки ин маҷмӯъ бо метрикаи

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 0, & \text{агар } n = m \text{ бошад },\\ 1 + \frac{1}{n+m}, & \text{агар } n \neq m \text{ бошад}, \end{cases}$$

фазои метрикиро ташкил медиҳад.

Ҳал. Аз таърифи масофа мебарояд, ки барои $\forall n, m \in N \quad \rho(n, m) < 2$ аст.

1. Аксиомаи якуми метрикӣ мувофиқи таъриф иҷро мешавад.

2. Агар $n = m$ бошад, онгоҳ $\rho(n, m) = \rho(m, n)$ аст. Агар $n \neq m$ бошад, онгоҳ $\rho(n, m) = 1 + \frac{1}{n+m} = 1 + \frac{1}{m+n} = \rho(m, n)$ мешавад.

3. Агар $n = m = k$ бошад, онгоҳ нобаробарии секунҷа ба баробарии $0 = 0$ табдил мегардад.

Бигузор $n = m \neq k$ бошад. Онгоҳ

$$0 = \rho(n, m) \leq \rho(n, k) + \rho(k, m) = 2\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$$

мешавад.

Бигузор $n \neq m = k$ бошад. Онгоҳ

$$0 < \rho(n, m) = 1 + \frac{1}{n+m} = \rho(n, k) + \rho(k, m) = \rho(n, k)$$

мешавад.

Бигузор акнун n, m, k ададҳои гуногуни натуралӣ бошанд. Онгоҳ

$$\rho(n, m) = 1 + \frac{1}{n+m} \leq \rho(n, k) + \rho(k, m) = 2 + \frac{1}{n+k} + \frac{1}{k+m}$$

мешавад, ки ин нобаробарӣ дуруст аст. Ҳамин тавр маҷмӯи N - фазои метрикӣ мебошад.

Машқи 6. Чунин фазои метрикии X - ро бо метрикаи ρ созед, ки дар он $S_{r_1}(x_1)$ ва $S_{r_2}(x_2)$ - кураҳои сарбаста, ки $S_{r_1}(x_1) \subset S_{r_2}(x_2)$ ва $r_1 = 6, r_2 = 5$ бошанд.

Хал. Бигузор X фазои метрикие бошад, ки аз нуқтаҳои (x, y) - и доираи сарбастаи $x^2 + y^2 \leq 25$ бо метрикаи эвклидии

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{2} (x_n - y_n)^2}$$

бошад. Ба сифати кураи дуйум $S_{r_2}(x_2) \equiv X$ ва кураи якум

$$S_{r_1}(x_1) = S_{r_2}(x_2) \cap \{(x, y) : (x-4)^2 + y^2 \leq 36\}$$

мегирем, ки дар ин ҷо $r_1 = 6, r_2 = 5$ ва $S_{r_1}(x_1) \subset S_{r_2}(x_2)$ мебошанд.

2.10 Фазоҳои метрикии пурра

Дар таҳлили математикӣ теоремаи Болтсано-Коши роли муҳим мебозад: *барои он, ки пайдарпаии ададҳои ҳақиқии $\{x_n\}$ ҳудуди охирнок дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои $\forall\varepsilon > 0$ чунин номери $\exists N$ шавад, ки нобаробарии*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

барои номерҳои $n > N, m > N$ иҷро гардад.

Аммо барои фазоҳои метрикии ихтиёрӣ ин теорема метавонад ҷой надошта бошад. Масалан, маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ бо метрикаи $\rho(x, y) = |x - y|$ фазои метрикӣ аст. Аммо ҳудуди пайдарпаиҳои ададҳои расионалӣ адади ирратсионалӣ шуданаш мумкин аст, яъне на ҳар як пайдарпаии ин фазои метрикӣ ҳудуд дорад. Бинобар ин мувофиқи мақсад аст, агар дар байни фазоҳои метрикӣ фазоҳоеро ҷудо намоем, ки барои онҳо теоремаи Болтсано-Коши ҷой дошта бошад.

Таъриф. Пайдарпаии $\{x_n\}$ - и нуқтаҳои фазои метрикии X **фундаменталӣ** номида мешавад, агар ҳангоми $m, n \to \infty$ $\rho(x_n, x_m) \to 0$, яъне барои ҳар гуна $\delta > 0$ адади N ёфт шавад, ки барои номерҳои $n, m > N$ нобаробарии $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ иҷро гардад.

Теорема 2.2. *Агар пайдарпаии $\{x_n\}$ - ҳудуди x дошта бошад, онгоҳ вай фундаменталӣ аст.*

Исбот. Бигузор $x_n \to x$. Онгоҳ

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0 \text{ ҳангоми } n, m \to \infty.$$

Теоремаи баръакс барои фазои метрикии ихтиёрӣ ҷой надорад, яъне чунин фазоҳои метрикӣ мавҷуданд, ки дар онҳо на ҳар як пайдарпаии фундаменталӣ ҳудуд дорад.

Мисоли 1 . Маҷмӯи X - ададҳои ратсионалиро дида мебароем. Ин маҷмӯ бо метрикаи $\rho(x,y) = |x-y|$ фазои метрикиро ташкил медиҳад. Аз таҳлили математикӣ маълум аст, ки

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

яъне $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ – пайдарпаии фундаменталӣ аст. Аммо адади e - ирратсионалӣ аст, яъне ба фазои X таалуқ нест.

Мисоли 2 . Маҷмӯи бисёраъзогиҳои алгебравии P - ро дар порчаи $[0,1]$ дида мебароем:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Дар P метрикаи

$$\rho(p,q) = \max_{-1\le x\le 1} |p(x) - q(x)|$$

- ро дохил мекунем. Бо ин метрика P - фазои метрикӣ аст. Пайдарпаии бисёраъзогиҳои

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},\ n = 0,1,\ldots$$

- ро дида мебароем. Ин пайдарпаӣ ҳудуди e^x дорад, ки он бисёраъзогӣ нест, яъне ба P дохил намешавад. Пас $p_n(x)$ фундаменталӣ буда, дар фазои метрикии P ҳудуд надорад.

Теорема 2.3. *Агар пайдарпаии $\{x_n\}$ - ҳудуди x дошта бошад, онгоҳ вай маҳдуд аст.*

Исбот. Мувофиқи таъриф маҷмӯи M аз фазои метрикӣ маҳдуд номида мешавад, агар он дар дохили ягон кура ҷой гирифта бошад.

Адади $\varepsilon > 0$ - ро мегирем ва чунин номери N - ро интихоб мекунем, ки ҳангоми $n, m \geq N$ будан нобаробарии $\rho(x_n, x_m) < 0)$ ҷой дошта бошад. Дар ҳолати хусусӣ, ҳангом $n \geq N$ будан $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$ аст. Бигзор

$$r = \max[\varepsilon, \rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N, \dots, \rho(x_{n-1}, x_N))]$$

бошад. Онгоҳ барои ҳамаи $n = 1, 2, \dots$ $\rho(x_n, x_N) \leq r$ мебошад, яъне $x_n \in S_r(x_N)$, $n = 1, 2, \cdots$.

Таъриф. Фазои метрикии X **фазои пурра** номида мешавад, агар ҳар як пайдарпаии фундаменталии он наздикшаванда бошад.

Қайд мекунем, ки маҷмӯи сарбастаи фазои метрикии пурра худ фазои метрикии пурра аст.

Пуррагии фазои метрикии R аз таҳлили математикӣ маълум аст (теоремаи Болтсано-Коши).

Пуррагии фазои метрикии R^n аз пуррагии фазои R мебарояд. Дар ҳақиқат, бигузор $\{x^{(p)}\}$ - пайдарпаии фундаменталӣ дар R^n бошад. Ин маънои онро дорад, ки барои $\forall\varepsilon > 0$ чунин $\exists N$, ки

$$\rho(x^{(p)}, x^{(q)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x^{(p)} - x^{(q)})^2} < \varepsilon,\ p, q > N,\ x^{(p)} = \{t_1^p, t_2^p, \dots, t_n^p\}.$$

Онгоҳ барои ҳамаи $k = 1, 2, \cdots$ ҳосил мекунем

$$|t_k^{(p)} - t_k^{(q)}| < \varepsilon,\ \text{ҳангоми } p, q > N \text{ будан},$$

яъне $\{t_k^{(p)}\}$ - пайдарпаии ададҳои ҳақиқӣ фундаменталӣ мебошад. Агар

$$t_k = \lim_{p\to\infty} t_k^{(p)}$$

бошад, онгоҳ

$$\lim_{p\to\infty} x^{(p)} = t,\ \ t = (t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Пуррагии фазои метрикии $C[0,1]$. Бигузор $\{x_n((t)\}$ - пайдарпаии функсияҳои бефосилаи фундаменталӣ дар фазои метрикии $C[0,1]$ бошад. Ин маънои онро дорад, ки барои $\forall\varepsilon > 0$, чунин номери $\exists N$ мешавад, ки ҳангоми $n, m > N$ будан

$$\rho(x_n, m) = \max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

аст. Ҳамин тавр барои ихтиёрӣ $t \in [0,1]$ нобаробарии

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

ҷой дорад. Яъне мувофиқи критерияи Коши пайдарпаии $\{x_n(t)\}$ ба ягон функсияи бефосилаи $x(t)$ ба таври мунтазам наздик мешавад. Дар нобаробарии охирин ба ҳудуд ҳангоми $m \to \infty$ гузашта, ҳосил мекунем, ки барои $\forall t \in [0,1]$ ва $n > N$ нобаробарии $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ аст.

Пуррагии фазои метрикии l_2. Бигузор $\{x^{(n)}\}$ - пайдарпаии фундаменталии фазои метрикии l_2 бошад. Ин маънои онро дорад, ки барои $\forall\varepsilon > 0$ чунин номери $\exists N$ бошад, ки ҳангоми $n, m \in N$ будан

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2} < \varepsilon \tag{2.8}$$

мешавад, ки дар ин ҷо $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$ ҷой дорад. Аз (2.8) бармеояд, ки

$$(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon$$

аст, яъне барои ҳар як қимати k пайдарпаии ададҳои ҳақиқии $\{x_k^n\}$ фундаменталӣ мебошад ва бинобар ин наздикшаванда аст.

Бигзор $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ ва $x = (x_1, x_1, \ldots)$ бошад. Нишон медиҳем, ки

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \text{ яъне } x \in l_2.$$

Дар ҳақиқат, аз нобаробарии (2.8) мебарояд, ки барои ихтиёрӣ адади қайдшудаи M нобаробарии

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon$$

ҷой дорад. Номери n - ро қайд намуда ба ҳудуд ҳангоми $m \to \infty$ мегузарем

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k)^2 < \varepsilon.$$

Ин нобаробарӣ барои ҳамаи ададҳои M дуруст аст. Ба ҳудуд ҳангоми $M \to \infty$ гузашта, ҳосил мекунем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 < \varepsilon.$$

Аз ин ҷо наздикшавии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ хулоса мебарояд. Азбаски дар ин нобаробарӣ ε адади ихтиёрӣ аст, пас

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2} = 0$$

аст, яъне $x^{(n)} \to x$ бо метрикаи l_2.

3 Фазоҳои нормирондашуда

Яке аз хусусиятҳои асосии ададҳои ҳақиқӣ ва векторҳо дар ҳамворӣ ё фазои сеченака он аст, ки барои онҳо мафҳуми модул мавҷуд аст, ки тавассути он масофаи байни нуқтаҳои тири ададӣ ё масофаи байни нуқтаҳо дар ҳамворӣ ё муайян карда мешавад. Ин мафҳум имконият медиҳад, ки яке аз мафҳумҳои муҳими дигар – наздикшавии пайдарпаиҳо дохил карда шавад. Ин мафҳумҳои номбаршударо васеъ намуда барои фазои хаттӣ мафҳуми норма дохил карда мешавад.

Таъриф. Фазои хаттии E **фазои нормирондашуда** номида мешавад, агар барои ҳар як элементи $x \in E$ адади ғайриманфии $||x||$ мувофиқ гузошта шуда бошад, ки он нормаи x номида мешавад, ки он дорои чунин хосиятҳо (аксиомаҳо) мебошад:

1). $||x|| \geq 0; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ - шарти ғайринулии норма;

2). $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ - шарти якҷинсагии норма;

3). $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ - нобаробарии секунҷа.

Ҳамин тавр, норма - ин функсияест, ки дар тамоми фазои E муайян шудааст, ғайриманфӣ мебошад ва хосиятҳои 1) - 3) - ро дорост. Қайд мекунем, ки барои векторҳо шарти 3) маънои онро дорад, ки дарозии тарафи секунҷа аз суммаи ду тарафҳои дигари он зиёд намешавад ва бинобар ин онро нобаробарии секунҷа меноманд.

Аз ин хосият бармеояд, ки дарозии тарафи ихтиёрии секунҷа аз фарқи дарозии ду тарафҳои дигари он калон ё баробар аст, яъне нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$||x - y|| \geq \Big| ||x|| - ||y|| \Big|. \tag{3.1}$$

Дар ҳақиқат, мувофиқи нобаробарии секунҷа

$$||x|| = ||(x-y)+y|| \leq ||x-y|| + ||y||.$$

Аз ин ҷо $||x-y|| \geq ||x|| - ||y||$ мешавад. Айнан ҳамин тавр $||x-y|| \geq ||y|| - ||x||$. Бо якҷоягӣ онҳо нобаробарии (2.8) ро медиҳанд.

Дар фазоҳои нормирондашуда масофаи байни ду элементи ихтиёрии x, y – и онро бо формулаи $\rho(x,y) = ||x-y||$ дохил намудан мумкин аст.

Дар фазои нормирондашудаи E маҷмӯи зеринро дида мебароем:

$$S_r(x_0) = \{x \in E : ||x - x_0|| < r\},$$

ки x_0 - нуқтаи қайдшуда ва $r > 0$ мебошанд. Маҷмӯи $S_r(x_0)$ - кураи кушод бо марказ дар нуқтаи x_0 ва радиуси r номида мешавад.

Дар фазои нормирондашудаи E пайдарпаии элементҳо $\{x_n\}$ - ро дида мебароем.

Таъриф. Элементи $x_0 \in E$ **ҳудуди** пайдарпаии x_n номида мешавад, агар ҳангоми $n \to \infty$, нобаробарии $||x_n - x_0|| \to 0$ иҷро шавад.

Агар x_0 ҳудуди пайдарпаии $\{x_n\}$ бошад, онгоҳ менависанд $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ ё $x_n \to x_0$ ҳангоми $n \to \infty$ ва мегӯянд, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ ба x_0 наздик мешавад.

Кураи ихтиёрии $S_r(x_0)$ атрофи нуқтаи x_0 номида мешавад. Ҳудуди пайдарпаӣ хосиятҳои зерин дорад:

1). дар ихтиёрӣ атрофи нуқтаи x_0 ҳамаи элементҳои пайдарпаии x_n ҷойгиранд, ба ҷуз миқдори охирноки онҳо;

2). ҳудуди x_0 ягона аст;

3). зерпайдарпаии ихтиёрии пайдарпаии x_n ба x_0 наздик мешавад;

4). агар ҳангоми $n \to \infty$, $x_n \to x_0$ ва $y_n \to y$, онгоҳ $x_n + y_n \to x + y$.

Дар ҳақиқат

$$||(x_n + y_n) - (x + y)|| = ||(x_n - x) + (y_n - y)|| < ||x_n - x|| + ||y_n - y||.$$

5). агар ҳангоми $n \to \infty$, $\lambda_n \to \lambda_0$, онгоҳ $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$ ҳангоми $n \to \infty$.

Дар ҳақиқат

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x|| = ||\lambda_n(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda_0)x|| \leq |\lambda_n|||x_n - x|| + |\lambda_n - \lambda_0|||x|| \to 0.$$

3.1 Фазои функсияҳои бефосилаи $C[a, b]$

Дар порчаи сарбастаи $[a, b]$ фазои хаттии функсияҳои бефосилаи $f(x)$ - ро дида мебароем. Нормаро дар ин фазо чунин дохил мекунем:

$$||f|| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Аксиомаҳои 1) ва 2) тамоман аёнанд. Аксиомаи сейюмро тафтиш мекунем. Мувофиқи хосиятҳои модул барои қиматҳои ихтиёрии $x \in [a, b]$ ҳосил мекунем:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \max_{[a,b]} |f(x)| + \max_{[a,b]} |g(x)|.$$

Бинобар ин $|f(x) + g(x)| \leq ||f|| + ||g||$. Агар аз тарафи чап $\max_{x \in [a,b]}$ гирем, онгоҳ нобаробарӣ боқӣ мемонад. Дар натиҷа нобаробарии секунҷаро барои норма дар фазои $C[a, b]$ ҳосил мекунем.

Акнун нишон медиҳем, ки наздикшавӣ аз рӯи норма дар фазои $C[a, b]$ - мунтазам наздикшавӣ аст.

Бигузор пайдарпаии функсияҳои $\{f_n(x)\} \in C[a,b]$ бошад ва бигузор он ба $f_0(x) \in C[a,b]$ наздик шавад. Ин маънои онро дорад, ки барои ихтиёрӣ $\varepsilon > 0$ чунин адади N ёфт мешавад, ки барои ихтиёрӣ номери $n > N$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$$

ва зиёда аз ин барои ҳамаи $x \in [a,b]$ нобаробарии $|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ иҷро мешавад. Ҳамин тавр наздикшавӣ аз рӯи норма дар фазои $C[a,b]$ мунтазам наздикшавӣ аст.

Акнун мебинем, ки дар холати фазои ҳақиқии нормирондашудаи $C[a,b]$ атрофи $S_\varepsilon(f_0) = \{f \in C[a,b] : ||f - f_0|| < \varepsilon\}$ чӣ маъно дорад. Барои ин графики функсияҳои $f = f_0(x)+\varepsilon$, $f = f_0(x)-\varepsilon$ - ро месозем. Графики ин ду функсияҳо ва порчаҳои хатҳои рости $x = a$ ва $x = b$ атрофи графики функсияи $f = f_0(x)$ - ро бо тасмачаи паҳноиаш ба 2ε баробар маҳдуд мекунанд. Ин тасмача $\varepsilon-$ атрофи элементи f_0 мебошад.

3.2 Фазои функсияҳои бефосилаи $\mathscr{L}_p[a,b]$

Дар ин ҷо низ фазои функсияҳои бефосилаи $f(x)$ - ро дар порчаи $[a,b]$ - ро дида мебароем. Аммо акнун мо нормаро ба воситаи формулаи

$$||f||_{\mathscr{L}_p[a,b]} = \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < +\infty$$

дохил мекунем, ки дар ин ҷо интеграл ба маънои Риман мебошад. Аксиомаҳои 1) ва 2) - и норма бевосита тафтиш мешаванд. Аксиомаи сеюм бошад нобаробарии Минковский ном дорад

$$\Big(\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_a^b |g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

ки онро дар курсҳои таҳлили функсионалӣ исбот мекунанд. Мо фақат қайд мекунем, ки наздикшавӣ дар ин фазо - наздикшавӣ ба таври миёна ном дорад ва аз мунтазам наздикшавии пайдарпаии функсияҳои бефосила дар порчаи $[a,b]$ наздикшавии ин пайдарпаӣ ба таври миёна дар $[a,b]$ хулоса мебарояд. Яъне нормаи $||.||_{\mathscr{L}_p[a,b]}$ тобеи нормаи $||.||_{C[a,b]}$ мебошад.

4 Фазоҳои банахӣ

Тасаввурот дар бораи тири ададӣ ҳамчун маҷмӯи пурра (ягон ҷои „холигӣ“ надорад, ҳамааш бо ададҳои ҳақиқӣ пур аст), дар таҳлили математикӣ ба воситаи теоремаи маъмули Коши, ки шарти зарурӣ ва кофии мавҷудияти худуди пайдарпаиҳои ададиро медиҳад, ифода меёбад. Ин ғоя ва ин усул дар бунёди мафҳуми фазоҳои нормирондашудаи *пурра* гузошта шудааст.

Бигузор X - фазои нормирондашуда бошад.

Таъриф. Пайдарпаии $\{x_n \in X\}$ **фундаменталӣ** номида мешавад, агар барои $\forall \varepsilon > 0$ чунин номери N мавҷуд бошад, ки барои $\forall$ адади натуралии p нобаробарии

$$||x_{n+p} - x_n|| < \varepsilon$$

иҷро шавад.

Лемма 4.1. *Агар пайдарпаӣ наздикшаванда бошад, онгоҳ он фундаменталӣ аст.*

Дар ҳақиқат, бигузор ҳангоми $n \to \infty$ пайдарпаии $x_n \to x_0$. Ин маънои онро дорад, ки барои $\forall\varepsilon > 0$ чунин адади N ёфт мешавад, ки барои ҳамаи номерҳои $n > N$ нобаробарии

$$||x_n - x_0|| < \varepsilon$$

иҷро мешавад. Азбаски $n + p > N$ аст, пас ҳангоми $n > N$ будан нобаробарии $||x_{n+p} - x_0|| < \varepsilon$ низ иҷро мешавад. Пас мувофиқи нобаробарии секунҷа ҳосил мекунем:

$$||x_{n+p} - x_n|| < ||x_{n+p} - x_0|| + ||x_0 - x_n|| < 2\varepsilon,$$

яъне $\{x_n\}$ - фундаменталӣ аст.

Лемма 4.2. *Ҳар як пайдарпаии фундаменталӣ маҳдуд аст.*

Дар ҳақиқат, бигузор пайдарпаии $\{x_n\}$ фундаменталӣ бошад. Яъне $\forall\varepsilon > 0$ чунин адади N мавҷуд аст, ки барои $\forall$ адади натуралии p нобаробарии

$$||x_{n+p} - x_n|| < \varepsilon$$

иҷро мешавад. Акнун ба сифати адади мусбати r

$$r = \max[\varepsilon, ||x_1 - x_{N+p}||, ||x_2 - x_{N+p}||, \dots, ||x_{N+p-1} - x_{N+p}||]$$

-ро мегирем. Онгоҳ барои $\forall n = 1, 2, \dots$ нобаробарии

$$||x_{N+p} - x_n|| < r$$

иҷро мешавад. Яъне ҳамаи элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$ дар дохили кураи $S(N + p, r)$ мехобанд.

Таъриф. Фазои нормирондашуда **фазои пурра** номида мешавад, агар дар он пайдарпаии ихтиёрии фундаменталӣ наздикшаванда бошад. Фазои нормирондашудаи пурра **фазои банахӣ** номида мешавад.

4.1 Мисолҳои фазоҳои банахӣ

Мисоли 1. Фазои нормирондашудаи E - маҷмӯи нуқтаҳои тири ададӣ - фазои банахӣ аст.

Дар ҳақиқат, дар тири ҳақиқӣ критерияи Коши ҷой дорад: *барои он, ки пайдарпаии ададҳои ҳақиқии $\{x_n\} \in E$ наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки он фундаменталӣ бошад.* Фазои E^n - низ банахӣ аст, чунки дар ин ҷо низ критерияи Коши ҷой дорад.

Мисоли 2. Фазои $C[a, b]$ - функсияҳои бефосила дар порчаи $[a, b]$ банахӣ аст.

Бигузор $\{f_n(x)\} \in C[a, b]$ бошад.Чунин критерияи Коши оиди мунтазам наздикшавии пайдарпаии функсияҳои бефосила ҷой дорад: *барои он, ки пайдарпаии $\{f_n(x)\}$ дар $C[a, b]$ наздикшаванда бошад, яъне дар $[a, b]$ мунтазам наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки он дар $C[a, b]$ фундаменталӣ бошад,* яъне барои $\forall \varepsilon > 0$ чунин номери $N = N(\varepsilon)$ ёфт мешавад, ки барои ҳамаи номерҳои $n > N$ ва $\forall$ адади натуралии p, инчунин барои ҳамаи $x \in [a, b]$ нобаробарии

$$||f_{n+p} - f_n|| < \varepsilon$$

ё ба таври дигар $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ иҷро шавад.

Пурра будани фазои $C[a, b]$ дар теоремаи зерин баръало аён мешавад: *агар пайдарпаии функсияҳои бефосилаи $\{f_n(x)\} \in C[a, b]$ ба функсияи $f(x)$ дар $[a, b]$ мунтазам наздик шавад, онгоҳ $f(x)$ дар $[a, b]$ бефосила аст.*

Мисоли 3. Фазои функсияҳои бефосилаи $\mathscr{L}_p[a, b]$ фазои пурра нест.

Инро дар мисоли фазои $\mathscr{L}_p[-1, 1]$ нишон медиҳем. Дар порчаи $[-1, 1]$ пайдарпаии функсияҳои бефосилаи $\{f_n(x)\}$ - ро дида мебароем, ки ба воситаи формулаи зерин дода шудааст:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{ҳангоми } x \in [-1, -1/n], \\ nx & \text{ҳангоми } x \in [-1/n, 1/n], \\ +1 & \text{ҳангоми } x \in [1/n, 1]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Аён аст, ки барои $\forall n$ $|f_n(x)| \leq 1$ аст ва бинобар ин $|f_{n+p} - f_n| \leq 2$ ва

$$||f_{n+p} - f_n||^2 = \int\limits_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|^2 dx =$$

$$= \int\limits_{-1/n}^{1/n} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|^2 dx \leq 4 \int\limits_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n} \to 0 \text{ ҳангоми } n \to \infty.$$

Ҳамин тавр пайдарпаии $\{f_n(x)\}$ ба маънои наздикшавии миёна фундаменталӣ аст.

Қайд мекунем, ки пайдарпаии $\{f_n(x)\}$ дар ҳар як нуқтаи $x \in [-1, 1]$ ҳангоми $n \to \infty$ ҳудуди зерин дорад:

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ҳангоми } x \in [-1, 0), \\ 0 & \text{ҳангоми } x = 0, \\ +1 & \text{ҳангоми } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Дар ин мавврид $\forall n$ $|f_n(x)| \leq 1$ аст в $|f_{n+p} - f_n| \leq 2$. Бинобар ин мисли дар боло нишон дода шуд:

$$||f_n(x) - f(x)||^2 \leq \frac{8}{n} \to 0, \ n \to \infty.$$

Ҳамин тавр ҳангоми $n \to \infty$ $f_n(x) \to f(x)$ ба таври миёна дар $[-1, 1]$, вале функсияи $f(x)$ дар ин порча канишнок аст, яъне ба фазои $\mathscr{L}_2[-1, 1]$ шомил нест. Пас фазои нормирондашудаи функсияҳои бефосилаи $\mathscr{L}_2[-1, 1]$ пурра нест.

5 Фазоҳои лебегии $L_p[a, b]$

5.1 Пуркунии фазоҳои нормирондашуда

Дар ин ҷо мо конструктсияи хело ҳам муҳими сарбаста намудани фазоҳои нормирондашударо меорем, ки дар натиҷаи он фазоҳои нормирондашуда ба фазои банахӣ табдил меёбанд. Ғояи асосии ин конструктсия аз Коши бармеояд, ки ӯ дар назарияи ададҳои ҳақиқӣ синфҳои эквиваленти пайдарпаиҳои фундаменталии ададҳои ратсионалиро дохил намуда буд.

Таъриф. Агар фазои нормирондашудаи E ҳамчун бисёршаклаи хаттӣ дар ягон фазои нормирондашудаи $\hat{E}$ зич бошад, онгоҳ мегуянд, ки $\hat{E}$ - фазои пуршудаи E мебошад.

Теорема 5.1. *Фазои ихтиёрии нормирондашудаи E - ро ҳамчун бисёршаклаи хаттии дар ягон фазои нормирондашудаи $\hat{E}$ зич тасвир намудан мумкин аст.*

Исбот. Пайдарпаиҳои имконпазири фундаменталии $\{x_n\} \in E$ - ро дида мебароем. Ду пайдарпаии $\{x_n\}$ ва $\{x'_n\}$ - ро эквивалент меномем, агар

$$||x_n - x'_n|| \to 0, \ n \to \infty$$

бошад. Пайдарпаиҳои байни ҳам эквивалентро чунин ишора мекунем:

$$\{x_n\} \sim \{x'_n\}.$$

Маҷмӯи ҳамаи пайдарпаиҳои фундаменталиро ба синфҳои буриданашаванда ҷудо мекунем: ду пайдарпаии $\{x_n\}$ ва $\{x'_n\}$ -ро фақат ва фақат дар ҳамон маврид ба як синф дохил мекунем, ки $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ бошанд. Маҷмӯи ҳамаи синфҳоро бо $\hat{E}$ ишора мекунем ва худи синфҳоро бошад бо $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$

ишора мекунем. Агар $\{x_n\} \in \hat{x}$ бошад, мегӯем, ки $\{x_n\}$ намояндаи синфи $\hat{x}$ мебошад.

Фазои $\hat{E}$ - ро ба фазои нормирондашаванда табдил медиҳем. Амали ҷамъи сифҳои $\hat{x}$ ва $\hat{y}$ - ро чунин ҷорӣ мекунем: агар $\{x_n\} \in \hat{x}$ ва $\{y_n\} \in \hat{y}$ бошанд, онгоҳ суммаи $\hat{x}+\hat{y}$ гуфта синферо меномем, ки пайдарпаии $\{x_n+y_n\}$ - ро дар бар гирифта бошад.

Чунин ҷорӣ намудани $\hat{x}+\hat{y}$ аз интихоби намояндаҳои синфҳои $\hat{x}$ ва $\hat{y}$ вобаста намебошад. Агар $\{x'_n\} \in \hat{x}'$ ва $\{y'_n\} \in \hat{y}'$ бошанд, онгоҳ $\{x'_n+y'_n\} \sim \{x_n+y_n\}$ ва бинобр ин, $\{x'_n+y'_n\} \in \{x_n+y_n\}$ аст.

Акнун дар фазои $\hat{E}$ норма дохил мекунем. Бигузор $\{x_n\} \in \hat{x}$ бошад. Онгоҳ

$$||\hat{x}||_{\hat{E}} = \lim_{n\to\infty} ||x_n||_E$$

қабул мекунем. Қайд мекунем, ки ин ҳудуд мавҷуд аст, чунки пайдарпаии ададии $\{||x_n||\}$ фундаменталӣ аст (барои он, ки $\Big|||x_n||-||x_m||\Big| \le ||x_n - x_m||$) ва бинобар ин, мувофиқи критерияи Коши, барои ададҳои ҳақиқӣ наздикшаванда аст.

Ғайр аз ин, ҳудуд аз интихоби намояндаи синфи $\hat{x}$ вобаста нест. Агар $\{x'_n\} \in \hat{x}$ бошад, онгоҳ

$$\Big|||x'_n|| - ||x_n||\Big| \le ||x'_n - x_n|| \to 0,\ n\to\infty.$$

Аз ин ҷо

$$\lim_{n\to\infty} ||x'_n|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n||.$$

Теорема 5.2. *Агар $\hat{E}$ фазои пуршудаи фазои нормирондашудаи E бошад. Онгоҳ* *а). E - ро бо ягон маҷмӯи хаттии фазои $\hat{E}$ айнан баробар кардан мумкин аст;*

б). E дар $\hat{E}$ зич аст;

в). $\hat{E}$ фазои банахӣ аст.

Исбот. а). Элементи $x \in E$ - ро бо синфе, ки пайдарпаии статсионарии $\{x\}$, яъне $x, x, \ldots$ - ро дарбар мегирад, айниятан баробар мекунем. Ин синфро бо x ишора мекунем. Аён аст, ки λx синфи $\{\lambda x\}$ - ро дарбар мегирад ва $x+y$ синфи $\{x+y\}$ - ро дарбар мегирад. Ҳамин тавр, маҷмӯи ҳамаи синфҳое, ки пайдарпаиҳои статсионариро дар бар мегиранд, маҷмӯи хаттиро дар $\hat{E}$ ташкил медиҳад ва ин маҷмӯро боз бо E ишора мекунем.

б). Бигузор синфи $x \in E$ бошад, онгоҳ $||x||_{\hat{E}} = ||x||$ (ҳамчун ҳудуди доимӣ).

Бигузор $\hat{x} \in \hat{E}$ бошад. Нишон медиҳем, ки чунин пайдарпаии $\{||x_n||\} \in E$ ёфт мешавад, ки $||\hat{x} - x_n||_{\hat{E}} \to 0$, ҳангоми $n \to \infty$. Бо ин зичии E дар $\hat{E}$ исбот мешавад.

Бигузор $\{||x_n||\} \in x$ бошад. Аз фундаменталӣ будани $\{||x_n||\}$ бармеояд: барои $\forall \varepsilon > 0$ чунин номери N ёфт мешавад, ки барои $\forall n, m > N$ нобаробарии

$$||x_n - x_m||_E < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.1}$$

иҷро мешавад. Номери $n > N$ - ро қайд мекунем ва ба назар мегирем, ки

$$\lim_{m\to\infty} ||x_n - x_m||_E = ||x_n - \hat{x}||_{\hat{E}}, \tag{5.2}$$

$\{x_n\}_{m=1}^{\infty} \in x_n$ - ҳамчун пайдарпаии статсионарӣ аст. Дар нобаробарии (5.1) ҳангоми $m \to \infty$ ба ҳудуд мегузарем ва баробарии (5.2) - ро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$||x_n - \hat{x}||_{\hat{E}} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ин маънои онро дорад, ки $x_n \to \hat{x},\ n \to \infty$.

в). Исбот мекунем, ки фазои $\hat{E}$ пурра аст. Бигузор $\hat{x}$ пайдарпаӣ дар $\hat{E}$ бошад. Мувофиқи хосияти б) чунин пайдарпаии $\{x_n\} \in E$ мевҷуд аст, ки

$$||\hat{x}_n - x_n||_{\hat{E}} < \frac{1}{n}$$

аст. Нишон медиҳем, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ худ фундаменталӣ аст. Ин аз нобаробарии зерин мбармеояд

$$||x_n - x_m||_{\hat{E}} \le ||x_n - \hat{x}_n||_{\hat{E}} + ||\hat{x}_n - \hat{x}_m||_{\hat{E}} + ||\hat{x}_m - x_m||_{\hat{E}} <$$
$$< \frac{1}{n} + ||\hat{x}_n - \hat{x}_m||_{\hat{E}} + \frac{1}{m} \text{ ҳангоми } m, n \to \infty.$$

Азбаски $\{x_n\}$ дар $\hat{E}$ фундаменталӣ аст, пас он дар E низ фундаменталӣ аст, чунки

$$||x_n - x_m||_E = ||x_n - x_m||_{\hat{E}}$$

аст. Онгоҳ синфи $\hat{x}$ мавҷуд аст, ки $\{x_n\}$ - ро дар бар мегирад. Исбот мекунем, ки $\hat{x}_n \to \hat{x}$, ҳангоми $n \to \infty$. Дар ҳақиқат

$$||\hat{x}_n - \hat{x}||_{\hat{E}} \le ||\hat{x}_n - x_n||_{\hat{E}} + ||\hat{x} - x_n|| < \frac{1}{n} + ||\hat{x} - x_n||_{\hat{E}}.$$

Онгоҳ ҳангоми $n \to \infty$ мувофиқи хосияти б) - и теорема $||\hat{x} - x_n||_{\hat{E}} \to 0$.

Теорема пурра исбот шуд.

5.2 Пуркунии фазоҳҳо бо зарби скалярӣ

Бигузор E - фазо бо зарби скалярии (x, y) бошад. Ин фазоро ҳамчун фазои нормирондашуда бо нормаи

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}$$

пурра мекунем ва ба фазои банахии $\hat{E}$ меоем, ки элементҳояш аз синфҳои $\hat{x}$ - пайдарпаиҳои фундаменталии эквивалентии $\{x_n\}$ иборат аст. Нишон медиҳем, ки $\hat{E}$ фазо бо зарби скалярӣ аст ва дар натиҷаи пурра буданаш, фазои гилбертӣ аст. Бигузор $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$ ва $\{\hat{x}_n\}$ ва $\{\hat{x}_n\}$ - намояндаи ин синфҳо бошанд. Дар $\hat{E}$ зарби скалярӣ дохил мекунем:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n).$$

Дар ин маврид

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} (x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} ||x_n||^2 = ||\hat{x}||^2$$

мешавад.

5.3 Фазои банахии $L[a,b]$

Фазои банахии $L[a,b]$ - ро ҳамчун фазои пуршудаи фазои нормирондашудаи функсияҳои бефосилаи $\mathscr{L}_1[a,b]$ муайян менамоем. Ба хотир меорем, ки элементҳои $\mathscr{L}_1[a,b]$ - ин функсияҳои дар порчаи $[a,b]$ бефосилаи $f(x)$ бо нормаи

$$||f(x)|| = \int_a^b |f(x)|dx$$

мебошад. Бигузор $\{f_n(x)\}$ ва $\{f_n^*(x)\}$ - ду пайдарпаиҳои функсияҳои дар порчаи $[a,b]$ бефосила бошанд. Агар пайдарпаии $\{f_n(x) - f_n^*(x)\}$ дар фазои $\mathscr{L}_1[a,b]$ ҳангоми $n \to \infty$ беохир хурд бошад, яъне

$$||f_n - f_n^*|| = \int_a^b |f_n(x) - f_n^*(x)|dx \to 0,$$

онгоҳ пайдарпаиҳои $\{f_n(x)\}$ ва $\{f_n^*(x)\}$ - ро бо ҳам дар фазои $\mathscr{L}_1[a,b]$ ба таври миёна эквивалент меноманд.

Пайдарпаии функсияҳои дар порчаи $[a,b]$ бефосилаи $\{f_n(x)\}$ дар $\mathscr{L}_1[a,b]$ **фундаменталӣ** ё ин, ки **ба таври миёна фундаменталӣ** номида мешавад, агар барои $\forall\varepsilon > 0$ чунин номери $\exists\ N$ аст, ки барои $\forall$ номерҳои $n > N$ ва ҳамаи ададҳои натуралии p нобаробарии

$$||f_{n+p} - f_n|| = \int\limits_a^b |f_{n+p}(x) - f_n(x)|dx < \varepsilon$$

иҷро шавад.

Мувофиқи теорема оиди пуркунӣ, фазои Лебегии $L[a,b]$ аз элементҳои $\hat{f}(x)$, ки синфи пайдарпаиҳои функсияҳои бефосилаи ба таври миёна эквивалент ва ба таври миёна фундаменталианд, таркиб ёфтааст. Ду пайдарпаиҳои ба таври миёна фундаменталии $\{f_n(x)\}$ ва $\{f_n^*(x)\}$ фақат ва фақат ҳамон вақт намояндаи як синфи $\hat{f}(x)$ мешаванд, ки онҳо ба таври миёна эквивалент бошанд. Агар $\{f_n(x)\} \in \hat{f}(x)$ бошад, пас мувофиқи таъриф

$$||\hat{f}||_{L[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b |f_n(x)|dx = \lim_{n\to\infty} ||f_n||_{L[a,b]} \tag{5.3}$$

аст.

Ба мисли оне, ки ададҳои ирратсионалиро ҳамчун як элементи идеалие тассавур мекунанд, ки онҳоро бо саҳеҳии дилхоҳ ба ададҳои ратсионалӣ наздик кардан мумкин аст, элементҳои фазои $L[a,b]$ - ро низ ҳамчун функсияҳои идеалӣ қариб ҳамеша ба воситаи функсияҳои бефосила наздик намудан мумкин аст.

Таъриф. Интеграли Лебег аз функсияи $|\hat{f}(x)| \in L[a,b]$ гуфта ифодаи

(5.3) – ро меноманд, яъне

$$\int_a^b |\hat{f}(x)|dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x)|dx. \tag{5.4}$$

Дар ин баробарӣ аз тарафи чап интеграли Лебег ва аз тарафи рост интеграли Риман ифода ёфтаанд.

Маълум мешавад, ки баъзе аз элементҳои фазои $L[a,b]$ - ро бо баъзе функсияҳои конкретӣ, умумун канишнок, эквивалент намудан мумкин аст.

Пеш аз ҳама қайд менамоем, ки мувофиқи теорема оиди пуркунии фазоҳои нормирондашуда, фазои $L[a,b]$ ҳамаи функсияҳои дар порчаи $[a,b]$ бефосиларо дар бар мегирад. Синферо, ки намояндаҳояшон пайдарпаиҳои статсионарӣ $\{f(x)\}$ - функсияҳои дар $[a,b]$ – бефосила мебошанд, дида мебароем. Ин синфро бо функсияи $f(x)$ эквивалент мекунем ва бо $f(x)$ ишора мекунем. Ғайр аз функсияи $f(x)$ ин синф боз функсияҳои гуногуни канишнокро низ дар бар мегирад, масалан функсияҳое, ки аз $f(x)$ дар миқдори охирнок нуқтаҳо фарқ мекунанд.

Ин ғояро чунин тақвият додан мумкин аст: баъзе функсияҳои канишнокро ҳамчун ҳудуди пайдарпаиҳои фундаменталии функсияҳои бефосила дар метрикаи $\mathscr{L}_1[a,b]$ маънидод намудан мумкин аст.

Мисоли 1. Бигузор функсияи $f(x)$ ба ғайр аз миқдори охирнок нуқтаҳои порчаи $[a,b]$, ки дар онҳо каниши навъи якум дорад, бефосила бошад. Нишон медиҳем, ки пайдарпаии ба таври миёна фундаменталии функсияҳои дар $[a,b]$ бефосилаи $\{f_n(x)\}$ мавҷуд аст, ки ба $f(x)$ ба таври миёна наздик мешавад.

Бигузор функсияи $f(x)$ дар нуқтаҳои $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_l < b$ каниши навъи якум дошта бошад ва зимнан $f(x_k) = \frac{f_+(x_k)+f_-(x_k)}{2}$ мегирем, ки $f_+(x_k)$ ва $f_-(x_k)$ - ҳудудҳои функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_k мувофиқан аз рост ва чап мебошанд.

Ҳар як нуқтаи каниши x_k - ро бо атрофи $(x_k-\delta, x_k+\delta)$ иҳота менамоем ва δ - ро чунон хурд мегирем, ки $a < x_l-\delta, x_l+\delta < b$ бошад ва ин атрофҳо бурриш надошта бошанд.

Пайдарпаии функсияҳои бефосиларо акнун чунин муайян мекунем:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) \quad \text{дар} \quad [a,b]/\bigcup_{k=1}^{l}\left(x_k-\frac{\delta}{n},\ x_k+\frac{\delta}{n}\right), \\ \frac{f\left(x_k+\frac{\delta}{n}\right)-f\left(x_k-\frac{\delta}{n}\right)}{2\delta/n}\left(x-x_k+\frac{\delta}{n}\right)+f\left(x_k-\frac{\delta}{n}\right) \\ \text{ҳангоми } x\in(x_k-\frac{\delta}{n}, x_k+\frac{\delta}{n}),\ k=1,\dots,l \end{cases}$$

Исбот мекунем, ки пайдарпаии $f_n(x)$ дар фазои $\mathscr{L}_1[a,b]$ фундаменталӣ аст. Бигузор $M = \sup_{[a,b]}|f(x)|$ бошад. Онгоҳ $\sup_{[a,b]}|f_n(x)| \le M$ ва

$$||f_{n+p}-f_n|| = \int\limits_a^b |f_{n+p}(x)-f_n(x)|dx = \sum_{k=1}^{l}\int\limits_{x_k-\delta/n}^{x_k+\delta/n}|f_{n+p}(x)-f_n(x)|dx \le$$

$$\le 2Ml\frac{2\delta}{n} = \frac{4Ml\delta}{n} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Ҳамин тавр, пайдарпаии $f_n(x)$ фундаменталӣ мебошад. Айнан ҳамин тавр нишон дода мешавад, ки бо ҳамон норма $f_n(x) \to f(x)$ ҳангоми $n\to\infty$. Бинобар ин синферо, ки намояндааш $\{f_n(x)\}$ бошад бо функсияи канишноки $f(x)$ эквивалент намудан мумкин аст.

Мисоли 2. Акнун функсияеро дида мебароем, ки каниши беохир дорад. Нишон медиҳем, ки $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in L[0,2]$ аст. Барои ин пайдарпаии функсияҳои зеринро дида мебароем:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{ҳангоми } x \in [1/n, 2] \text{ будан,} \\ \sqrt{n} & \text{ҳангоми } x \in [0, 1/n] \text{ будан.} \end{cases}$$

Ҳосил мекунем

$$||f_{n+p} - f_n|| = \int\limits_0^2 |f_{n+p}(x) - f_n(x)|dx =$$

$$= \int\limits_0^{1/(n+p)} (\sqrt{n+p} - \sqrt{n})dx + \int\limits_{1/(n+p)}^{1/n} (\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{n})dx \le$$

$$\le \frac{\sqrt{p+n} - \sqrt{n}}{n+p} + \int\limits_{1/(n+p)}^{1/n} (\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{n})dx =$$

$$= \frac{p}{(n+p)(\sqrt{n+p} + \sqrt{n})} + (2\sqrt{x} - x\sqrt{n})|_0^{1/n} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Ҳамин тавр $||f_{n+p} - f_n|| \le \frac{2}{\sqrt{n}}$ аст, яъне пайдарпаии $\{f_n(x)\}$ - фундаменталӣ аст ва ғайр аз ин

$$\int\limits_0^2 f_n(x)dx \to \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \ n \to \infty$$

аст, ки дар ин ҷо интеграл аз тарафи рост, хамчун интеграли ғайрихос фаҳмида мешавад.

Фикррониҳои мисоли 1 ва 2- ро ҷамъбаст намуда ба хулосаи зерин меоем

Теорема 5.3. *Бигузор* $f(x)$ *дар порчаи* $[a,b]$ *дода шуда, дар он миқдори* *охирноки каниш дошта бошад ва интеграли*

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

муайян бошад. Онгоҳ дар порчаи $[a, b]$ пайдарпаии ба таври миёна фундаменталии функсияҳои бефосилаи $f_n(x)$ мавҷуд аст, ки

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \to 0,\ n \to \infty$$

ва интегралҳо ба таври ғайрихос фаҳмида мешаванд. Бинобар ин $f(x) \in L[a, b]$.

6 Фазоҳои лебегии $L_p(G), p \geq 1$

Натиҷаҳои болоӣ барои фазоҳои $L_p(G), p \geq 1$ васеъ карда мешаванд. Бигузор G - соҳаи маҳдуди фазои E^m ва $\overline{G}$ - сарбастагии он бошад. Аз рӯи таъриф фазои Лебегии $L_p(G), p \geq 1$ пуркунандаи фазои функсияҳои бефосилаи $\mathscr{L}_p(\overline{G})$ мебошад.

Элементҳои $L_p(G)$, ба мисли ҳолати хусусии фазои $L(G)$, функсияҳое мебошанд, ки бо саҳеҳии дилхоҳ онҳоро ба таври миёна бо функсияҳои бефосилаи $\mathscr{L}_p(\overline{G})$, ки дар $L_p(G)$ зич аст, наздик намудан мумкин аст.

Пайдарпаии функсияҳои бефосилаи $\{f_n(x)\}, x \in \overline{G}$ дар фазои $\mathscr{L}_p[\overline{G}]$ фундаменталӣ ё ки, бо ибораи дигар, ба таври миёна бо нишондиҳандаи p фундаменталӣ номида мешавад, агар

$$||f_n - f_m||^p_{\mathscr{L}_p[\overline{G}]} = \int_{\overline{G}} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx \to 0, \quad n, m \to \infty$$

бошад. Ду пайдарпаиҳои функсияҳои бефосилаи $\{f_n(x)\}, \{f_n^*(x)\}, x \in \overline{G}$ дар метрикаи $\mathscr{L}_p(\overline{G})$ эквивалент номида мешаванд ё ки, бо ибораи дигар, ба таври миёнаи тартиби p эквивалент номида мешаванд, агар

$$||f_n - f_n^*||^p_{\mathscr{L}_p[\overline{G}]} = \int\limits_{\overline{G}} |f_n(x) - f_n^*(x)|^p dx \to 0, \ n, m \to \infty$$

бошад. Қайд мекунем, ки дар ҳар ду формулаҳо интегралҳои m карата ба таври Риман аз рӯи соҳаи $\overline{G}$ фаҳмида мешаванд.

Мувофиқи теорема оиди пуршавӣ, элементҳои $L_p(G)$ - ин синфи $\hat{f}(x)$ - пайдарпаиҳои ба таври миёна фундаменталӣ мебошанд. Ду ин гуна пайдарпаиҳо фақат ва фақат ҳамон вақт ба як синф дохил мешаванд, агар онҳо ба таври миёна эквивалент бошанд.

Қайд мекунем, ки ҳамаи фазоҳои $L_p(G)$ сапараболӣ мебошанд, яъне *дар онҳо маҷмӯҳои ҳисобӣ ё ки зермаҷмӯҳои охирноки дар ҳама ҷо зич мавҷуд аст.* Дар ҳақиқат, функсияи ихтиёрии $L_p(G)$ - ро тавассути маҷмӯи бисёраъзогиҳо бо коэффисиентҳои ратсионалӣ дар метрикаи $C(\overline{G})$ ва зиёда аз ин, дар метрикаи $\mathscr{L}_p(G)$ наздик кунондан мумкин аст. Азбаски фазои $\mathscr{L}_p(G)$ дар $L_p(G)$ зич аст, пас ин маҷмӯи бисъёраъзогиҳо дар $L_p(G)$ низ зич аст.

Дар ин ҷо мо фазои $L_2(G)$ - ро махсус қайд мекунем, ки он пуркунандаи фазои $\mathscr{L}_2(G)$ бо зарби скалярӣ мебошад. Фазои $L_2(G)$ фазои гилбертӣ аст. Зарби скалярӣ дар $L_2(G)$ ба воситаи ҳудуди

$$(f, g) = \lim_{n\to\infty} (f_n, g_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\overline{G}} f_n(x)\overline{g_n(x)}dx$$

дохил карда мешавад, ки $f(x)$ ва $g(x)$ - синфҳо ва $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ - намояндаи онҳо, яъне пайдарпаиҳои ба таври миёна фундаменталии функсияҳои бефосила мебошанд. Ҳамчун таъриф қабул мекунем, ки барои $f, g \in \mathscr{L}_2(G)$ зарби скалярии (f, g) - ин интеграли m каратаи Лебег аз ҳосили зарби $f\overline{g}$ аз рӯи соҳаи G мебошад, яъне

$$\int\limits_{G} f(x)\overline{g(x)}dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\overline{G}} f_n(x)\overline{g_n(x)}dx.$$

Дар ҳолати хусусӣ синфи $g(x) = 1$ - ро мегирем, ки намояндааш $\{1\}, x \in \overline{G}$ мебошад ва барои $f \in L_2(G)$ ҳосил мекунем:

$$\boxed{\int\limits_{G} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\overline{G}} f_n(x)dx \quad \textbf{интеграли Лебег барои } f \in L_2(G).}$$

Ҳамин тавр, мо барои ҳамаи синфҳои $f(x) \in L_2(G)$ интеграли Лебегро ҳамчун ҳудуди интегралҳои Риман аз намояндаҳои онҳо дохил намудем. Нишон додан душвор нест, ки интеграли Лебег бо ин тарз муайян намуда дорои ҳамаи хусусиятҳои интеграли Риманро дорад. Назарияи интеграли Лебегро аз рӯи соҳаи $\overline{G}$ ба мисли интеграл аз рӯи порча сохтан мумкин аст.

7 Интеграли Лебег

7.1 Интеграли Лебег ҳамчун ҳудуди интеграли Риман

Дар боло мо фазои банахии $L[a, b]$ - ро ҳамчун пуркунандаи фазои нормирондашудаи $\mathscr{L}[a, b]$ дохил намудем. Ҳамзамон функсияҳои бефосила ва баъзе функсияҳои канишдори $f(x)$ - ро дар $[a, b]$ бо синфҳои муайян аз $L[a, b]$ эквивалент намудан имконпазир гардид. Дар ин ҷо нишон дода мешавад, ки синфи ихтиёрии $\hat{f}(x) \in L[a, b]$ - ро бо синфи муқарарии дар умум канишдор дар порчаи $[a, b]$ эквивалент намудан мумкин аст ва айни замон мувофиқгузории синфҳо бо ҳам яккиматаанд.

Маҷмӯҳои ченакашон нол. Қариб дар ҳама ҷо наздикшавӣ ва наздикшавӣ ба таври миёна.

Таъриф. Маҷмӯи $M \subset [a, b]$ - **маҷмӯи ченакаш нол дошта** номида мешавад, агар барои $\forall \varepsilon > 0$ ҳамин хел силсилаи порчаҳои охирнок ё ҳисобии $\{\alpha_n, \beta_n\}$ ёфт шаванд, ки

1). маҷмӯи M бо ин силсилаи порчаҳо пушонда мешавад, яъне

$$M \subset \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n];$$

2). ҳосили ҷамъи дарозии порчаҳои $[\alpha_n, \beta_n]$ аз ε хурд аст, яъне

$$\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$$

аст.

Нишон додан мумкин аст, ки маҷмӯи M – и аз миқдори охирноки ададҳои $x_1, x_2, \ldots, x_k \in [a, b]$ иборат буда ченаки нол дорад.

Мисоли 1. Маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ ченаки нол дорад. Дар ҳақиқат, ба хотир меорем, ки ададҳои ратсионалӣ дар порчаи $[a, b]$ маҷмӯи ҳисобӣ аст, яъне онҳоро нумеронидан мумкин аст: $r_1, r_2, \ldots = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Онгоҳ барои адади додашудаи $\varepsilon > 0$ ва $\forall r_n$ порчаи зерин месозем

$$[r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}] = [\alpha_n, \beta_n].$$

1). Маълум аст, ки $r_n \in [\alpha_n, \beta_n]$ ва бинобар ин

$$\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n];$$

2).$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon$, яъне мувофиқи таъриф ин маҷмӯи ченакаш нол аст.

Нишон додан мумкин аст, ки суммаи миқдори охирнок ва ё ҳисобии маҷмӯҳои ченакашон нол - маҷмӯи ченакаш нол аст ва бурриши миқдори ихтиёрии маҷмӯҳои ченакашон нол - ченаки нол дорад.

Агар ягон тасдиқот барои ҳамаи нуқтаҳои $x \in [a, b]$, ба истиснои маҷмӯи нуқтаҳои ченакаш нол аз [a, b]ҷой дошта бошад, онгоҳ мегӯянд, ки ин тасдиқот **қариб дар ҳама ҷо** *дуруст аст.*

Таъриф. Агар функсияҳои $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ қариб дар ҳама ҷо баробар бошанд, онгоҳ онҳо **эквивалент** номида мешаванд ва навишта мешавад:

$$f_1(x) \sim f_2(x).$$

Мисоли 2. Дар порчаи $[0, 1]$ функсияи Дирихлеро дида мебароем

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ ратсионалӣ бошад,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ ирратсионалӣ бошад.} \end{cases}$$

Ин функсия ба функсияи айниятан баробари нол эквивалент мебошад, чунки дар нуқтаҳои ратсионалӣ $D(x) \neq 0$ аст ва чуноне, ки мо дидем, ин маҷмӯъ ченаки нол дорад.

Бигузор акнун пайдарпаии $\{f_n(x)\}$ қариб дар ҳама ҷо ҳудуди $f(x)$ дошта бошад. Онгоҳ ин фактро чунин менависем:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{қ.ҳ.}}{=} f(x)$$

ва мегӯем, ки $\{f_n(x)\}$ ба $f(x)$ қариб дар ҳама ҷо наздик мешавад.

Акнун якчанд теоремаҳоро оиди наздикшавиҳои қариб дар ҳама ҷо ва ба таври миёна бе исбот меорем:

Теорема 7.1. *Агар* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}[a,b]$ *ва* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{ба т.м.}}{=} 0$ *бошад, онгоҳ чунин зерпайдарпаии* $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *ёфт мешавад, ки*

1). $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \overset{\text{қ.ҳ.}}{=} 0$;

2). қатори $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x)|$*қариб дар ҳама ҷо дар* $[a,b]$ *наздикшаванда аст;*

3). барои ихтиёрӣ адади натуралии $m > m_0$ *чунин порчаи* $B_m \subset [a,b]$ *ёфт мешавад, ки дар он* $|f_{n_k}(x)| < \frac{1}{2^k}$ *барои ҳамаи* $k \geq m$ *мешавад ва дар айни замон* $|[a,b]/B_m| < \frac{1}{2^m}$ *ва* $B_m \subset B_{m+1}$ *аст.*

Теорема 7.2. *Агар* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}[a,b]$ *ва* $\{f_n(x)\} \in \hat{f}(x) \in L[a,b]$ *бошад, онгоҳ чунин зерпайдарпаии* $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *ёфт мешавад, ки*

1). $\{f_{n_k}(x)\}(x)$ *қариб дар ҳама ҷо ба ягон функсияи* $f(x)$*, ки дар порчаи* $[a,b]$ *муайян аст наздик мешавад;*

2). барои $\forall$ *адади натуралии* $m > m_0$ *чунин порчаи* $B_m \subset [a,b]$ *ёфт мешавад, ки дар он*

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}$$

барои ҳамаи $k \geq m$ *аст ва* $|[a,b]/B_m| < \frac{1}{2^m}$ *ва* $B_m \subset B_{m+1}$ *аст.*

Теорема 7.3. *Агар* $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *- пайдарпаии бисёраъзогиҳои ба таври миёна фундаменталӣ бошад ва* $\lim_{n\to\infty} P_n(x) \overset{\text{қ.ҳ.}}{=} 0$*, онгоҳ*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) \overset{\text{қ.х.}}{=} 0.$$

Теорема 7.4. *Бигзор* $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\} \subset \mathscr{L}[a,b]$ *ба таври миёна фундамнталӣ бошанд ва*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{қ.ҳ.}}{=} \lim_{n\to\infty} g_n(x) \overset{\text{қ.ҳ.}}{=} f(x)$$

бошад, онгоҳ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \sim \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *мешавад.*

Акнун мо метавонем таърифи пурраи интеграли Лебегро диҳем ва синфи функсияҳоеро, ки ба таври Лебег интегрондашавандаанд, муайян намоем.

Таъриф. Функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a, b]$ **ба таври Лебег** интегрондашаванда номида мешавад, агар чунин пайдарпаии ба таври миёна фундаменталии функсияҳои бефосилаи $f_n(x)$ ёфт шавад, ки

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{қ.х.}}{=} f(x)$$

бошад. Онгоҳ интеграли Лебег аз функсияи $f(x)$ дар $[a, b]$ гуфта $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx)$ - ро меноманд ва менависанд

$$(L)\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

Сараввал бояд қайд кунем, ки таърифи интеграли Лебег аз пайдарпаии $\{f_n(x)\}$ вобаста набуда, он фақат аз класси $\hat{f}(x)$, ки ин пайдарпаӣ ба он таалуқ дорад, вобастагӣ дорад.

Дуввум, аз таъриф бармеояд, ки агар $f(x)$ ба таври Лебег интегронидашаванда бошад, пас функсияи $g(x) \sim f(x)$ низ интегронидашаванда аст ва

$$(L)\int\limits_a^b f(x)dx = (L)\int\limits_a^b g(x)dx$$

мебошад.

Саввум, аз теоремаи 7.2 мебарояд, ки мувофиқгузории байни элементҳои $\hat{f}(x) \in L[a, b]$ ва синфҳои $f(x)$, ки ба таври Лебег интегронидашавандаанд, бо ҳам яккимата аст.

Ҳамин тавр, синфҳои функсияҳои эквивалентӣ ба таври Лебег интегронидашавандаи $f(x)$ - ро ҳамчун элементҳои фазои банахии $L[a,b]$ ҳисобидан мумкин аст ва баробарии зерин ҷой дорад:

$$\int_a^b \hat{f}(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx$$

ки дар ин ҷо $\hat{f}(x) \ni f(x)$ - функсияи ба таври Лебег интегрондашаванда аст.

Хосиятҳои интеграли Лебег.

1. Агар функсияи $f(x)$ дар $[a,b]$ бефосила бошад, онгоҳ $f(x) \in L[a,b]$ ва

$$\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx.$$

2. Агар $f_1(x), f_2(x) \in L[a,b]$, онгоҳ $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \in L[a,b]$ ва

$$(L)\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))dx = \alpha(L)\int_a^b f_1(x)dx + \beta(L)\int_a^b f_2(x)dx.$$

3. Агар $f(x) \in L[a,b]$, онгоҳ $|f(x)| \in L[a,b]$ ва

$$\left|(L)\int_a^b f(x)dx\right| \leq (L)\int_a^b |f(x)|dx.$$

4. Агар $f(x) \in L[a,b]$ ва $f(x) \geq 0$, онгоҳ $(L)\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

5. Агар $f_1(x), f_2(x) \in L[a,b]$ ва $f_1(x) \geq f_2(x)$, қариб дар ҳама ҷо бошад, онгоҳ

$$(L)\int_a^b f_1(x)dx \geq (L)\int_a^b f_2(x)dx.$$

6. Агар $f(x) \in L[a,b]$ ва қариб дар ҳама ҷо $m \leq f(x) \leq M$ бошад, ки m, M - ягон ададҳоянд, онгоҳ

$$m(b-a) \leq (L)\int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

7. Агар $f(x) \in L[a,b]$, $f(x) \geq 0$ ва $(L)\int_a^b f(x)dx = 0$ бошад, онгоҳ $f(x) \sim 0$.

8. Агар $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{қ.х.}}{=} f(x)$, онгоҳ зерпайдарпаии $\exists \; \{f_{n_k}\}$ аст, ки

$$\lim f_{n_k}(x) \overset{\text{қ.х.}}{=} f(x).$$

8 Операторҳои хаттӣ

8.1 Таърифи оператори хаттӣ. Бефосилагӣ ва маҳдудият

Бигузор X ва Y - ду фазои нормирондашуда бошанд ва $D \subset X$ - ягон маҷмӯъ бошад. Агар ба ҳар элементи $x \in D$ элементи муайяни $y \in Y$ мувофиқ гузошта шуда бошад

$$Ax = y$$

онгоҳ мегӯянд, ки оператори A дода шудааст. Дар ин мавридд D -**соҳаи муайянии оператори** A номида мешавад ва бо $D(A)$ ишора карда мешавад. Маҷмӯи

$$R = R(A) = \{y \in Y : y = Ax, x \in D\}$$

соҳаи тағйирёбии оператори A номида мешавад. Ба таври схемавӣ чунин ишора карда мешавад:

$$X \supseteq D(A) \stackrel{A}{\to} R(A) \subseteq Y$$

Дар ин мавридд y **образи** оператори A ва x бошад **прообрази** оператори A номида мешаванд ва мегӯянд, ки оператори A фазои X - ро ба фазои Y инъикос мекунад.

Таърифи 1. Оператори A дар нуқтаи $x_0 \in D$ **бефосила** номида мешавад, агар ҳангоми $x_n \to x_0$ $(x_n \in D)$ $Ax_n \to Ax_0$ шавад (наздикшавӣ аз рӯи норма).

Таърифи 2. 1) Оператори A - **аддитивӣ** номида мешаваад, агар барои $\forall x_1, x_2 \in D$

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$$

бошад.

2) Оператори A - **якҷинса** номида мешавад, агар барои $\forall x \in D$ ва адади ихтиёрӣ λ

$$A(\lambda x) = \lambda A x$$

бошад.

3) Оператори A - **оператори хаттӣ** номида мешавад, агар он аддитивӣ ва дар D бефосила бошад.

Баъзе натиҷаҳоро аз ин таъриф қайд мекунем.

а) Агар оператори A аддитивӣ бошад, онгоҳ

$$A0 = 0 \text{ ва } A(-x) = -Ax$$

мешавад. Дар ҳақиқат

$$A0 = A(0+0) = A0 + A0$$

аст ва аз ин ҷо $A0 = 0$ мешавад.

Баъдан

$$0 = A0 = A(x + (-x)) = Ax + A(-x).$$

Бинобар ин $A(-x) = -Ax$ мешавад.

б) Агар оператори A аддитивӣ ва дар ягон нуқтаи $x_0 \in D$ бефосила бошад, онгоҳ ин оператор дар тамоми нуқтаҳои маҷмӯи D бефосила мешавад.

Дар ҳақиқат, бигузор $x, x_n \in D$ ва $x_n \to x$ бошад. Онгоҳ, азбаски

$$x_n = [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0) \text{ ва } x_0 + (x_n - x) \to x_0$$

аст, пас

$$Ax_n = A(x_0 + (x_n - x)) + A(x - x_0) \to Ax_0 + A(x - x_0) = Ax$$

мешавад.

Таърифи 3. Оператори аддитивии A, ки фазои нормирондашудаи X - ро ба фазои нормирондашудаи Y инъикос мекунад - **оператори маҳдуд** номида мешавад, агар чунин ададиа доимии C ёфт шавад, ки барои $\forall x \in D$ нобаробарии

$$||Ax|| \leq C||x|| \tag{8.1}$$

иҷро шавад.

Теорема 8.1. *Барои он, ки оператори аддитивии A - оператори хаттӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки он маҳдуд бошад.*

Исбот. а) Шарти зарурӣ. Бигузор оператори A хаттӣ бошад вале маҳдуд набошад, яъне чунин ададиа доимие ёфт нашавад, ки барои $\forall x \in D$ нобаробарии (8.1) иҷро шавад.

Дар ҳақиқати ҳол барои ададиа натуралии ихтиёрии n чунин элементи x_n ёфт мешавад, ки барояш нобаробарии

$$||Ax_n|| > n||x_n \tag{8.2}$$

иҷро мешавад. Азбаски аз ин нобаробарӣ бармеояд, ки $Ax_n \neq 0$ аст, пас $x_n \neq 0$. Элементи $x'_n = \frac{x_n}{n||x_n||}$ - ро дида мебароем. Онгоҳ $||x'_n|| = \frac{1}{n} \to 0$, яъне $x'_n \to 0$ мебошад. Аз дигар тараф, азбаски оператори A якҷинса аст, пас

$$Ax'_n = \frac{1}{n||x_n||}Ax_n$$

ва аз баробарии (8.2) мебарояд, ки $||Ax'_n|| > 1$ аст ва барои ҳамин ба нол наздик намешавад. Ин бошад муқобили бефосилагии оператор мебошад. Пас оператори A маҳдуд аст.

б). **Шарти кифоягӣ.** Бигузор оператори аддитивии A маҳдуд аст, яъне нобаробарии (8.1) ҷой дорад. Агар $x_n \to 0$, яъне $||x_n|| \to 0$, онгоҳ аз (8.1) мебарояд, ки $||Ax_n|| \to 0$. Азбаски оператори A дар нуқтаи 0 бефосила аст, пас он хаттӣ аст.

Акнун нишон медиҳем, ки барои он, ки оператори аддитивии A дар тамоми фазои X шарти (8.1) - ро қаноат кунад, зарур ва кифоя аст, ки нобаробарии $||Ax|| \leq C$ (бо ҳамон адади C) барои ҳамаи элементҳои x бо нормаи $||x|| \leq 1$ иҷро шавад, яъне дар курраи радиусаш яки фазои X иҷро шавад.

Дар ҳақиқат аз нобаробарии (8.1) дарав мебарояд, ки $||Ax|| \leq C$ барои $||x|| \leq 1$ иҷро мешавад.

Бигузор баръакс ҳангоми $||x|| \leq 1$ будан $||Ax|| \leq C$ иҷро шавад. Барои $\forall x \in X$ чунин адади ратсионалии r_n - ро интихоб намудан мумкин аст, ки $r_n > ||x||$ бошад, ки $r_n \to ||x||$ шавад. Элементи $x'_n = \frac{x}{r_n}$ - ро мегирем. Онгоҳ $||x'_n|| < 1$ аст ва бинобар ин $||Ax'_n|| \leq C$ мешавад. Аммо аз якҷинсагии оператор мебарояд:

$$||Ax|| = ||A(r_n x'_n|| = r_n ||Ax'_n|| \leq Cr_n.$$

Дар ин нобаробарӣ ба ҳудуд гузашта нобаробарии (8.1) - ро ҳосил мекунем.

Таърифи 4. Барои оператори хаттии A, хурдтарин доимии C, ки барояш нобаробарии (8.1) барои ҳамаи қиматҳои $x \in X$ ҷро мешавад, **нормаи оператори** A номида мешавад ва бо $||A||$ ишора карда мешавад.

Ҳамин тавр

$$||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||$$

ва

$$||Ax|| \leq ||A|| ||x|| \quad \text{барои} \quad \forall x \in X.$$

Таърифи 5. Операторе, ки соҳаи тағйирёбии он $R(A)$ - маҷмӯи ададҳо аст, **функсионал** номида мешавад.

8.2 Мисолҳои функсионалҳои хаттӣ

Мисоли 1. Барои фарқ намудани функсионалҳо, мо дар ҳама ҷо барои онҳо ишораи $f(x)$ - ро истифода мебарем. Дар фазои функсияҳои бефосилаи $C[a,b]$ функсионали

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k) \tag{8.3}$$

- ро дида мебароем, ки $x(t) \in C[a,b]$ ва $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - ягон системаи нуқтаҳои порчаи $[a,b]$ мебошанд ва $c_1, c_2, \cdots, c_n$ доимиҳо мебошанд. Нишон медиҳем, ки функсионали f аз (8.3) хаттӣ аст ва

$$||f||_{C[a,b]} = \sum_{k=1}^{n} |c_k| \tag{8.4}$$

мебошад.

Аддитивӣ будани функсионал айён аст:

$$f(x_1+x_2) = \sum_{k=1}^{n} c_k[x_1(t_k)+x_2(t_k)] = \sum_{k=1}^{n} c_k x_1(t_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k x_2(t_k) = f(x_1)+f(x_2).$$

Баъдан, аз нобаробарии

$$|f(x)| = |\sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k||x(t_k)| \leq$$

$$\le \max_{a\le t\le b}|x(t)|\sum_{k=1}^{n}|c_k| = \sum_{k=1}^{n}|c_k|||x||$$

хаттӣ будани он ва инчунин

$$||f||_{C[a,b]} = \sup_{||x||<1}|f(x)| \le \sum_{k=1}^{n}|c_k|$$

ҳосил мегардад.

Барои хосил намудани нобаробарии муқобил, дар порчаи $[a, b]$ функсияи қисман хаттии $x^*(t)$ - ро месозем, ки дар нуқтаҳои $t_1, t_2, \ldots, t_n$ қиматҳои зеринро қабул мекунад:

$$x^*(t_k) = signc_k = \begin{cases} 1, & \text{агар } c_k > 0 \text{ бошад,} \\ 0, & \text{агар } c_k = 0 \text{ бошад,} \\ -1, & \text{агар } c_k < 0 \text{ бошад.} \end{cases}$$

Аён аст, ки $|x^*(t)| \le 1$, яъне $||x^*|| \le 1$ аст. Онгоҳ

$$||f||_{C[a,b]} = \sup_{||x||\le 1}|f(x^*)| \ge f(x^*) = \sum_{k=1}^{n}c_k x^*(t_k) = \sum_{k=1}^{n}c_k.signc_k = \sum_{k=1}^{n}|c_k|.$$

Ҳамин тавр нобаробарии $||f||_{C[a,b]} = \sum_{k=1}^{n}|c_k|$ ҳосил гардид.

Мисоли 2. Дар фазои нормирондашудаи $C[a, b]$ функсионали зеринро дида мебароем

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t)x(t)dt, \tag{8.5}$$

ки дар ин ҷо φ - функсияи суммирондашавандаи додашуда мебошад. Нишон медиҳем, ки ин функсионал хаттӣ ва

$$||f||_{C[a,b]} = \int_a^b |\varphi(t)|dt \tag{8.6}$$

аст.

Аён аст, ки ин функсионал барои $\forall x \in C[a,b]$ муайян ва аддитивӣ аст. Аз нобаробарии

$$|f(x)| \leq \int_a^b |\varphi(t)x(t)|dt \leq \max_{a\leq t\leq b}|x(t)| \int_a^b |\varphi(t)|dt = ||x|| \int_a^b |\varphi(t)|dt$$

хаттӣ будани f ва баҳо барои нормаи он аз боло

$$||f||_{C[a,b]} \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt$$

хулоса мебарояд.

Барои ҳосил намудани нобаробарии муқобил аввал онро барои функсияҳои бефосилаи $\varphi(t)$ исбот мекунанд ва баъд функсияи суммирондашавандаи $\varphi(t)$ - ро бо функсияҳои бефосила аппроксиматсия намуд, нобаробарии дврКориро ҳосил мекунем..

Мисоли 3. Функсионали (8.5) - ро дар фазои Лебегии $L^p[a,b]$ $(p > 1)$ низ дидан мумкин аст. Аниқтараш нишон медиҳем, ки функсионали

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t)x(t)dt, \tag{8.7}$$

ки $\varphi \in L^q[a,b]$ $(1/p + 1/q = 1)$ аст - функсионали хаттӣ дар фазои $L^p[a,b]$ буда, нормаи он бошад ба

$$||f||_{L^p[a,b]} = ||\varphi||_{L^q[a,b]} = \Big[\int_a^b |\varphi(t)|^q dt\Big]^{1/q} \tag{8.8}$$

баробар аст.

Интеграли (8.7) барои ҳамаи функсияҳои $x(t) \in L^p[a,b]$ муайян аст. Ин аз нобаробарии интегралии Гелдер мебарояд. Мувофиқи ин нобаробарӣ ҳосил мекунем:

$$|f(x)| = \Big|\int_a^b \varphi(t)x(t)dt\Big| \le \Big|\int_a^b |\varphi(t)|^q dt\Big|^{1/q}\Big|\int_a^b |x(t)|^p dt\Big|^{1/p} = ||\varphi||_{L^q[a,b]}||x||_{L^p[a,b]}.$$

Бинобар ин

$$||f||_{L^p[a,b]} \le ||\varphi||_{L^q[a,b]} \tag{8.9}$$

Барои он, ки нобаробарии муқобилро ҳосил кунем, функсияи зеринро дида мебароем:

$$x^*(t) = |\varphi(t)|^{q-1} sign\varphi(t) \ (a \le t \le b).$$

Азбаски

$$|x^*(t)|^p = |\varphi(t)|^{p(q-1)} = |\varphi(t)|^q$$

аст, пас $x^* \in L^p[a,b]$ аст ва

$$||x^*||_{L^p[a,b]} = \Big|\int_a^b |x^*(t)|^p dt\Big|^{1/p} = \Big|\int_a^b |\varphi(t)|^q dt\Big|^{\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{p}} = [||\varphi||^{q/p}_{L^q[a,b]},$$

аз ин ҷо

$$||f||_{L^p[a,b]} \ge f\Big(\frac{x^*}{||x^*||}\Big) = \frac{1}{||x^*||}\int_a^b \varphi(t)x^*(t)dt =$$

$$= \frac{1}{||x^*||}\int_a^b |\varphi(t)|^q dt = [||\varphi||_{L^q[a,b]}]^{q(1-1/p)} = ||\varphi||_{L^q[a,b]}].$$

Ин бо нобаробарии (8.9) баробарии (8.8) – ро исбот мекунад.

8.3 Мисолҳои операторҳои хаттӣ

__Мисоли 1.__ Фазои хаттии охирченакаи $R^n : x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ - ро дида мебароем ва нормаро дар ин фазо ба воситаи формулаи

$$||x|| = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \tag{8.10}$$

дохил мекунем. Аксиомаҳои нормаро месанҷем:

1) $||x|| \geq 0$ - ин аён аст. Бигузор $||x|| = 0$ бошад, яъне $\max_{1\leq k\leq n} |\xi_k| = 0$; онгоҳ $\xi_k = 0$ барои ҳамаи $k = 1, 2, \ldots, n$, бинобар ин $x = \{0\}_{k=0}^{n} = 0$ аст.

2) $|\lambda\xi_k| = |\lambda|.|\xi_k|$, аз ин ҷо якҷинсагии норма мебарояд.

3) $|\xi_k+\eta_k| \leq |\xi_k|+|\eta_k| \leq \max_k |\xi_k|+\max_k |\eta_k|$, яъне $|\xi_k+\eta_k| \leq ||x||+||y||$. Дар тарафи рости ин нобаробарӣ ба max нисбати k гузашта нобаробарии секунҷагӣ ҳосил мекунем.

Дар ин фазои нормирондашуда оператори

$$Ax = y \tag{8.11}$$

- ро дида мебароем, ки $A = (a_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, n$ - матрисаи квадратии тартиби n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ мебошанд. Дар координатаҳо баробарии (8.11) ин тавр навишта мешавад

$$\eta_k = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\xi_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.12}$$

Акнун оператори A - ро ҳамчун операторе, ки аз фазои R_n ба R_n (фазои R_n бо (8.2) нормирондашуда) амал мекунад, дида мебароем. Нишон медиҳем, ки он маҳдуд аст:

$$|\eta_k| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}||\xi_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \sup_j |\xi_j| \leq \gamma_n ||x||.$$

Бинобар ин

$$||y|| \leq \gamma_n ||x||, \text{ ки дар ин ҷо } \gamma_n = \sup_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

мешавад. Онгоҳ, $||Ax|| \leq \gamma_n ||x||$, яъне оператори A маҳдуд аст.

Мисоли 2. Дар фазои нормирондашудаи $C[a, b]$ оператори зеринро дида мебароем:

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy, \tag{8.13}$$

ки дар ин иҷо $f(y) \in C[a, b]$ - функсияи тағйирёбанда ва $K(x, y) \in C[a, b; a, b]$ - функсияи додашуда мебошанд. Нишон медиҳем, ки ин оператор аз фазои $C[a, b]$ ба $C[a, b]$ амал намуда, оператори хаттӣ бо нормаи

$$||A||_{C[a,b]} = \max_{a\leq y\leq b} \int_a^b |K(x, y)|dy = M \tag{8.14}$$

мебошад.

Бигузор $f(y) \in C[a, b]$ бошад. Нишон медиҳем, ки функсияи

$$z(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy$$

- низ аз фазои $C[a, b]$ аст.

Дар ҳақиқат, азбаски функсияи $K(x, y)$ дар соҳаи сарбастаи $[a, b; a, b]$ бефосила ва маҳдуд аст, пас мувофиқи теоремаи Кантор он дар ин соҳа мунтазам бефосила аст. Яъне функсияи $K(x,y)$ ҳангоми майл намудани $x \to x_0$ ба ҳудуди $K(x_0,y)$ нисбати тағйирёбандаи y мунтазам наздик мешавад: барои $\forall \varepsilon > 0$ чунин адади $\delta > 0$ $\exists$, ки хангоми иҷро шудани нобаробарии $|x - x_0| < \delta$, нобаробарии $|K(x,y) - K(x_0,y)| < \varepsilon$ барои ҳамаи қиматҳои $y \in [a,b]$ иҷро мешавад. Пас функсияи $z(x)$ ҳамчун интеграли аз параметри x вобаста бо функсияи таҳтиинтегралии бефосила - функсияи бефосила аст:

$$\lim_{x \to x_0} z(x) = \lim_{x \to x_0} \int\limits_a^b K(x,y)f(y)dy = \int\limits_a^b \lim_{x \to x_0} K(x,y)f(y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b K(x_0,y)f(y)dy = z(x_0), \text{ яъне } \lim_{x \to x_0} z(x) = z(x_0).$$

Аддитивӣ будани оператори A аён аст:

$$(A(f+g))(x) = \int\limits_a^b K(x,y)(f(y)+g(y))dy =$$

$$= \int\limits_a^b K(x,y)f(y)dy + \int\limits_a^b K(x,y)g(y)dy = (Af)(x) + (Ag)(x).$$

Аз нобаробарии

$$||(Af)(x)||_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} \Big| \int\limits_a^b K(x,y)f(y)dy \Big| \le$$

$$\le ||f||_{C[a,b]} \max_{a \le x \le b} \int\limits_a^b |K(x,y)dy = M||f||_{C[a,b]}$$

бошад хаттӣ будани оператор ва инчунин $||A||_{C[a,b]} \le M$ мебарояд.

Акнун нобаробарии муқобилро исбот мекунем. Азбаски интеграли

$$\int_a^b |K(x,y)|dy$$

нисбати x - функсияи бефосила аст, пас чунин нуқтаи $x_0 \in [a,b]$ мавҷуд аст, ки

$$M = \max_{a \le x \le b} \int_a^b |K(x,y)|dy = \int_a^b |K(x_0,y)|dy$$

мешавад. Функсионали

$$F(x) = \int_a^b K(x_0,y)f(y)dy, \quad f(y) \in C_[a,b]$$

- ро дида мебароем. Чунин элементи $f^* \in C_[a,b]$ ёфт мешавад, ки

$$F(f^*) \geq ||F|| - \varepsilon = \int_a^b |K(x_0,y)|dy - \varepsilon = M - \varepsilon$$

мешавад. Акнун $(Af^*) = z$ гирифта, ҳосил мекунем:

$$||A|| \geq Af^* = ||f^*|| \geq f^*(x_0) = \int_a^b K(x_0,y)f^*(y)dy = F(f^*) \geq M - \varepsilon.$$

Азбаски ε ихтиёрӣ аст, пас $||A||_{C[a,b]} \geq M$ мебошад ва ин бо нобаробарии муқобили дар боло нишондодашуда дар якҷоягӣ баробарии (8.14) - ро исбот мекунад.

Пеш аз он, ки мо ба мисоли дигар гузарем, дар ин чо фазои нормиронидашудаи L^2 - ро ба таври махсус дида мебароем, чунки барои бисёр масъалаҳои амалӣ аз байни фазоҳои L^p $(p > 1)$ ҳолати хусусии $p = 2$ аҳамияти махсус дорад. Ин пеш аз ҳама аз он сабаб аст, ки фазои Лебегии L^2 - ягона фазо дар байни фазоҳои L^p - гилбертӣ аст.

Ҳамин тавр, $L^2[a,b]$ маҷмӯи ҳамаи функсияҳои дар $[a,b]$ додашуда, ченшаванда ва бо квадрат суммирондашаванда мебошанд. Маънои бо квадрат суммирондашаванда, ин иҷрошавии шарти

$$\int\limits_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

мебошад. Дар ин фазо функсияҳои эквивалентӣ бо ҳам айниятан баробар ҳисобида мешаванд. Маълум аст, ки ба ин фазо ҳамаи функсияҳои ченшавандаи маҳдуди дар $[a,b]$ додашуда ва аз он ҷумла ҳамаи функсияҳои бефосила дохил мешаванд.

Пеш аз ҳама месанҷем, ки ба таври муқарарӣ дохил намудани амалҳои арифметикӣ дар L^2 онро ба маҷмӯи хаттӣ табдил медиҳад. Дар ҳақиқат даррав маълум аст, ки агар $f(x) \in L^2[a,b]$ бошад, онгоҳ $cf(x) \in L^2[a,b]$ мешавад, ки c адади доимии ихтиёрӣ мебошад.

Бигузор акнун $f(x) \in L^2[a,b]$ ва $g(x) \in L^2[a,b]$ бошанд. Нишон медиҳем, ки $f(x) + g(x) \in L^2[a,b]$ мешавад. Дар ҳақиқат ин сумма ченшаванда аст ва нобаробарии

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2$$

ҷой дорад. Тарафи рости ин нобаробарӣ ҳамчун суммаи функсияҳои суммирондашаванда функсияи суммирондашаванда аст. Онгоҳ ҳосили зарби $f(x)g(x)$ низ ченшаванда ва суммирондашаванда аст. Акнун аз нобаробарии

$$|f(x) + g(x)|^2 \leq |f(x)|^2 + 2|f(x)||g(x)| + |g(x)|^2$$

мебарояд, ки $f + g \in L^2[a,b]$.

Аз фикррониҳои болоӣ бармеояд, ки ҳосили зарби ду функсия аз фазои $L^2[a,b]$ суммирондашаванда аст. Дар ҳолати хусусӣ $g(x) \equiv 1$ гирифта, мебинем, ки функсияи ихтиёрӣ аз $L^2[a,b]$ суммирондашаванда аст, яъне $L^2 \subset L$ аст.

Қайд мекунем, ки гарчанд ҳосили зарби ду функсия аз $L^2[a,b]$ суммирондашаванда аст, аммо бо квадрат суммирондашаванда нашуданаш мумкин аст. Масалан функсияи $f(x) = x^{-1/4}$ - ро дар порчаи $[0,1]$ дида мебароем.

Азбаски

$$\int\limits_0^1 f^2(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}|_0^1 = 2$$

аст, пас $f(x) \in L^2[0,1]$). Аммо ҳосили зарби квадрати ин функсия бо худаш, яъне $f^2(x)$ квадратӣ суммирондашаванда нест, чунки

$$\int\limits_0^1 f^4(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$$

аст.

Мисоли 3. Акнун оператори (8.13) - ро дар фазои нормирондашудаи $L^2[a,b]$ дида мебароем, яъне амали оператори A :

$$(Af)(x) = \int\limits_a^b K(x,y)f(y)dy \tag{8.15}$$

- ро аз фазои Лебегии $L^2[a,b]$ ба $L^2[a,b]$ мебинем. Дар ин маврид талаботро нисбати ядрои ин оператор $K(x,y)$ сусттар мекунем. Яъне ба ҷои бефосилагии он, талаб мекунем, ки он дар квадрати $[a,b;a,b]$ бо квадрат суммирондашаванда бошад:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy = N^2 < \infty. \tag{8.16}$$

Пеш аз ҳама исбот мекунем, ки интеграли (8.15) қариб барои ҳама қиматҳои $x \in [a,b]$ мавҷуд аст. Равшан аст, ки барои ҳамаи қиматҳои $x, y \in [a,b]$ нобаробарии зерин ҷой дорад

$$|K(x,y)f(y)| \leq \frac{1}{2}(|K(x,y)|^2 + |f(y)|^2).$$

Дар ин нобаробарӣ ҷамъшавандаи якум аз тарафи рост нисбати тағйирёбандаи y қариб барои ҳамаи қиматҳои $x \in [a,b]$ суммирондашаванда аст, ҷамъшавандаи дуйум бошад нисбати $y \in [a,b]$ суммирондашаванда аст. Бинобар ин функсияи таҳтиинтегралӣ қариб барои ҳамаи қиматҳои $x \in [a,b]$ нисбати тағйирёбандаи y суммирондашаванда аст ва ин интеграл ҳамчун функсияи тағйирёбандаи x қариб дар тамоми $[a,b]$ мавҷуд аст.

Нишон медиҳем, ки формулаи (8.15) оператори A - ро муайян мекунад, ки фазои $L^2[a,b]$ - ро ба $L^2[a,b]$ инъикос мекунад ва

$$||A||_{L^2[a,b]} \leq N$$

мебошад. Дар ҳақиқат мувофиқи нобаробарии Коши-Буняковский ҳосил мекунем:

$$||(Af)(x)||^2_{L^2[a,b]} = \int_a^b \Big| \int_a^b K(x,y)f(y)dy \Big|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \Big[\int_a^b |K(x,y)|^2 dy \int_a^b |f(y)|^2 dy \Big] dx = N^2 ||f||^2.$$

9 Фазоҳои ҳамроҳшуда ва операторҳои ҳамроҳшуда

9.1 Таърифи фазоҳои ҳамроҳшуда ва операторҳои ҳамроҳшуда

Бигузор ду фазои нормирондашудаи X ва Y дода шуда бошанд. Маҷмӯи ҳамаи операторҳоро дида мебароем, ки фазои X - ро ба фазои Y инъикос мекунанд. Ин маҷмӯро бо $[X \to Y]$ ишора мекунем. Дар маҷмӯи $[X \to Y]$ амалҳои арифметикӣ ро ворид мекунем.

Бигузор $A_1, A_2 \in [X \to Y]$ бошанд. Мувофиқи таъриф $A = A_1 + A_2$ ин оператор аз X ба Y аст, ки

$$Ax = A_1x + A_2x \quad x \in X$$

аст. Равшан аст, ки A аддитивӣ аст. Ғайр аз ин

$$||Ax|| \leq ||A_1x|| + ||A_2x|| \leq (||A_1|| + ||A_2||)||x||$$

аст. Бинобар ин $\in [X \to Y]$ ва

$$||A|| \leq ||A_1|| + ||A_2||.$$

Баъдан, барои оператри λA, ки λ - зарбшавандаи ададӣ аст, баробарии зерин ҷой дорад:

$$||\lambda A|| = |\lambda|||A||.$$

Ҳамин тавр, $[X \to Y]$ маҷмӯи хаттӣ аст ва ба сифати элементи нулии ин маҷмӯъ оператори $A_0x \equiv 0,\ x \in X$ гирифта мешавад. Аён аст, ки $||A_0|| = 0$ аст ва аз $||A|| = 0$ баробарии $A = 0$ хулоса мебарояд.

Ҳамаи ин нишон медиҳад, ки маҷмӯи $[X \to Y]$ - фазои нормирондашуда аст ва нормаи элементи A - и он баробар аст ба

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||.$$

Нишон медиҳем, ки агар фазои образҳо - Y пурра бошад, онгоҳ фазои $[X \to Y]$ - низ пурра мешавад.

Дар ҳақиқат, бигузор $\{A_n\}$ - пайдарпаии фундаменталии фазои $[X \to Y]$ бошад. Адади $\varepsilon > 0$ - ро гирифта ҳосил мекунем:

$$||A_m - A_n|| < \varepsilon \quad (m, n \geq N_\varepsilon),$$

яъне барои $\forall x \in X$

$$||A_m x - A_n x|| < \varepsilon ||x|| \tag{9.1}$$

иҷро мешавад ва аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки пайдарпаии элементҳои фазои Y фундаменталӣ аст ва аз пурра будани Y бармеояд, ки

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \quad (x \in X)$$

мавҷуд аст. Маълум аст, ки ин ворид намудани оператори A - аддитивӣ аст. Дар нобаробарии, (9.1) ҳангоми $m \to \infty$ ба ҳудуд гузашта ҳосил мекунем:

$$||Ax - Ax_n|| = \lim_{m\to\infty} ||A_m x - A_n x|| \leq \varepsilon ||x|| \quad (n \geq N_\varepsilon), \tag{9.2}$$

яъне оператори B:

$$Bx = Ax - A_n x \quad (x \in X)$$

элементи фазои $[X \to Y]$ мебошад. Онгоҳ $A = B + A_n \in [X \to Y]$ аст. Аз нобаробарии (9.2) ҳосил мегардад:

$$||A - A_n|| \leq \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon),$$

яъне $A_n \to A$ дар $[X \to Y]$.

Ҳамин тавр, мо ба натиҷаи зерин омадем:

Теорема 9.1. *Агар дар маҷмӯи* $[X \to Y]$ *- ҳамаи операторҳои нормирондашудаи аз фазои* X *ба фазои банахии* Y *амалкунанда, амалҳои арифметикӣ ва норма ворид карда шаванд, онгоҳ ин маҷмӯ фазои банахӣ табдил меёбад.*

Бигузор акнун X - фазои банахӣ бошад. Ба сифати Y - тири ададиро мегирем, агар X ҳақиқӣ бошад ва ҳамвории комплексро мегирем, агар X комплексӣ бошад.

Фазои банахии функсионалҳои хаттии маҳдуди $[X \to Y]$ - ро дида мебароем, ки дар X дода шудаанд ва он **фазои ҳамроҳшуда ба фазои** X номида шуда, бо X^* ишора карда мешавад. Қимати функсионали $f \in X^*$ бар элементи $x \in X$ - ро бо $f(x)$ ишора мекунем.

Дар ҳолати хусусӣ, бинобар сабаби хаттӣ будани фазоҳои X ва X^*, барои скалярҳои $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, элементҳои x_1, x_2, x ва функсионалҳои f, f_1, f_2, баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

$$(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2)(x) = \overline{\beta}_1 f_1(x) + \overline{\beta}_2 f_2(x),$$

ки дар ин ҷо $\overline{\beta}_k$ – адади комплексии ба β_k ҳамроҳшуда мебошад, ки дар ҳолати ҳақиқӣ будани фазои X ва скалярҳо $\overline{\beta}_k = \beta_k$ мебошад.

Акнун оператори хаттии A - ро дида мебароем, ки аз фазои нормирондашудаи X ба фазои нормирондашудаи Y амал мекунад. Бигузор g функсионали хаттӣ дар фазои Y бошад, яъне элементи фазои ҳамроҳшудаи Y^*. Барои $\forall x \in X$ функсионали f - ро ин тавр муайян мекунем:

$$f(x) = g(Ax) \tag{9.3}$$

Ҳамин тавр, функсионали f ҳамчун ҳосили зарби функсионали g ва оператори A муайян мегардад:

$$f = gA : \quad X \xrightarrow{A} Y, \quad Y \xrightarrow{g} R; \quad X \xrightarrow{f} R,$$

дар айни ҳол

$$||f|| \leq ||g||||A|| \tag{9.4}$$

мебошад. Формулаи (9.3) ба ҳар як функсионали $g \in Y^*$ ягона функсионали $f \in X^*$ – ро мувофиқ мегузорад. Операторе, ки ин мувофиқгузориро амалӣ мекунад, **оператори ҳамроҳшуда ба** A номида мешавад ва бо A^* ишора карда мешавад, яъне

$$f = A^* g : \quad Y^* \xrightarrow{A^*} X^*.$$

Теорема 9.2. *Оператори ҳамроҳшудаи A^* - оператори хаттии аз фазои Y^* ба X^* амалкунанда буда, нормаи он ба*

$$||A^*|| = ||A|| \tag{9.5}$$

баробар аст.

Исбот. Аддитивӣ будани оператори A^* - ро нишон медиҳем. Агар $g = \lambda g_1 + \mu g_2$ ва $f = A^* g$ бошанд, пас

$$f(x) = g(Ax) = \lambda g_1(Ax) + \mu g_2(Ax) = \lambda(A^* g_1)(x) + \mu(A^* g_2)(x)$$

аст. Аз ин ҷо

$$A^* g = \lambda A^* g_1 + \mu A^* g_2.$$

Маҳдудияти A^* аз нобаробарии (9.4) мебарояд, ки мувофиқи он

$$||A^*|| \leq ||A||$$

мешавад. Акнун $\forall x \in X$ - ро мегирем ва бигузор $y = Ax$ бошад. Чунин функсионали $g \in Y^*$ - ро месозем, ки

$$g(y) = ||y||; \quad ||g|| = 1$$

бошад. Онгоҳ

$$||Ax|| = ||y|| = g(y) = (gA)(x) = (A^*g)(x) \leq ||A^*g||||x|| \leq ||A^*||||x||.$$

мешавад, яъне

$$||A|| \leq ||A^*||.$$

Аз ин ҷо ва аз нобаробарии муқобил, баробарии (9.5) ҳосил мегардад. Қайд мекунем, ки агар A_1 ва A_2 ду операторҳои хаттии аз X ба Y амалкунанда бошанд ва

$$A = \lambda A_1 + \mu A_2$$

бошад, онгоҳ

$$A^* = \overline{\lambda} A_1^* + \overline{\mu} A_2^*$$

мешавад. Дар ҳақиқат, агар $g \in Y^*, x \in X$ бошанд

$$(A^*g)(x) = (gA)(x) = (g\lambda A_1)(x) + \mu A_2 x =$$

$$= \overline{\lambda}(gA_1)(x) + \overline{\mu}(gA_2)(x) = \overline{\lambda}(A_1^*g)(x) + \overline{\mu}(A_2^*g)(x)$$

Қайд. *Агар фазоҳои X ва Y ҳақиқӣ бошанд, онгоҳ дар ҳисобкуниҳои болоӣ қимати ҳамроҳшудаи комплексӣ гирифта намешавад.*

9.2 Мисолҳои операторҳои ҳамроҳшуда

Мисоли 1. Фазоҳои ҳақиқии охирченакаи X ва Y - ро дида мебароем, ки ченакҳояшон мувофиқан μ ва ν мебошад. Оператори A - ро дида мебароем, ки аз X ба Y амал мекунад: $y = Ax,\ x \in X,\ y \in Y$. Оператори A ба воситаи матрисаи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix},$$

ифода меёбад. Ин табдилотро ба воситаи формулаи

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\mu} a_{jk}\xi_k \quad (j = 1, 2, \dots, \nu), \tag{9.6}$$

ифода намудан мумкин аст, ки дар ин ҷо

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu) \in X, \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu) \in Y.$$

мебошанд. Бигузор $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\nu)$ - функсионал дар фазои Y

$$g(y) = \sum_{j=1}^{\nu} \psi_j \eta_j$$

бошад. Онгоҳ функсионали $f = A^* g$ намуди зерин мегирад

$$f(x) = (gA)(x) = \sum_{j=1}^{\nu} \psi_j \sum_{k=1}^{\mu} a_{jk}\xi_k = \sum_{k=1}^{\mu} \Big(\sum_{j=1}^{\nu} a_{jk}\psi_j \Big) \xi_k.$$

яъне $f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu)$ аст, ки

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{\nu} a_{jk}\psi_j = \sum_{j=1}^{\nu} a^*_{kj}\psi_j \quad (a^*_{kj} = a_{jk};\ j = 1, 2, \dots, \nu,\ k = 1, 2, \dots, \mu).$$

мебошанд. Ҳамин тавр матрисаи

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1\nu}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2\nu}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu1}^* & a_{\mu2}^* & \dots & a_{\mu\nu}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{\nu1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{\nu2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\mu} & a_{2\mu} & \dots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix},$$

яъне A^* – матрисаи ҳамроҳшуда ки аз матрисаи A тавассути иваз намудани сатр бо сутун таркиб ёфтааст.

Қайд. *Агар фазоҳои X ва Y комплексӣ бошанд, онгоҳ матрисаи ҳамроҳшуда чунин намуд мегирад*

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1\nu}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2\nu}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu1}^* & a_{\mu2}^* & \dots & a_{\mu\nu}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \dots & \overline{a}_{\nu1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \dots & \overline{a}_{\nu2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{a}_{1\mu} & \overline{a}_{2\mu} & \dots & \overline{a}_{\nu\mu} \end{pmatrix},$$

Барои он, ки ба ин баробарӣ боварӣ кунем, ба хотир овардан даркор аст, ки функсионалҳои $f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu) \in X^*$ ва $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\nu) \in Y^*$ ба воситаи формулаҳои

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\mu} \overline{\varphi}_k \xi_k \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu) \in X,$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \overline{\psi}_k \eta_k \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\mu) \in Y$$

муайян мешаванд.

Мисоли 2. Бигузор A - оператори интегралӣ бо ядрои бефосила

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy, \quad v(x) = (Af)(x)$$

дар фазои $L^p[a,b]$ $(p>1)$ бошад.

Функсионали $g \in (L^p[a,b])^*$ мегирем

$$g(v)=\int_a^b \overline{\psi(t)}v(t)dt \quad (v\in L^p[a,b], \psi \in L^q[a,b]; 1/p+1/q=1)$$

ва ҳосил мекунем

$$(Af,\psi)=g(Af)=\int_a^b \overline{\psi(x)}\Big(\int_a^b K(x,y)f(y)dy\Big)dx=$$
$$=\int_a^b\Big(\int_a^b K(x,y)\overline{\psi(x)}dx\Big)f(y)dy=$$
$$=\int_a^b \overline{\Big(\int_a^b \overline{K(x,y)}\psi(x)dx\Big)}f(y)dy=\int_a^b \overline{\varphi(y)}f(y)dy=(f,A^*\psi)$$

Ҳамин тавр, оператори ҳамроҳшуда A^* низ оператори интегралӣ буда, ядрояш ба $K^*(x,y)=\overline{K(y,x)}$ баробар аст, яъне

$$(A^*g)(x)=\int_a^b \overline{K(y,x)}g(y)dy.$$

10 Фазои абстрактии гилбертӣ

10.1 Таърифи фазои гилбертӣ

Таъриф. Фазои хаттӣ (ҳақиқӣ ё комплексӣ) - **фазои гилбертӣ** номида мешавад, агар барои ҳар як ҷуфти векторҳо x, y ҳосили зарби скалярӣ (x,y) мувофиқ гузошта шуда бошад, ки аксиомаҳои зеринро қаноат мекунад (барои $\forall x, y$ ва ададҳои комплексии α)):

1). (x,y) - адади ҳақиқӣ ё комплексӣ;

2). $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

3). $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4). $(x, x) \geq 0,$ айни замон $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

5). $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

Аз аксиомаҳои 2) ва 3) бармеояд, ки $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$, чунки

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha}\overline{(y, x)} = \overline{\alpha}(x, y)$$

аст. Аз аксиомаҳои 5) ва 2) мебарояд, ки $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ аст. Фазои гилбертиро бо H ишора мекунанд. Фазои гилбертӣ - фазои нормирондашуда мешавад, агар

$$||x|| = \sqrt{(x, x)} \tag{10.1}$$

қабул карда шавад.

6). Нисбати нормаи зикршуда фазои H пурра аст. Қайд мекунем, ки аз аксиомаи 4) мебарояд, ки

$$||(x)|| \geq 0, \text{ айни замон } ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Баъдан

$$||\alpha x||^2 = (\alpha x, \alpha x) = |\alpha|^2(x, x) = |\alpha|^2||x||^2$$

аст ва аз ин ҷо бармеояд, ки $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ аст.

Акнун нобаробарии Коши-Буняковский

$$|(x, y)| \leq ||x||||y||$$

- ро исбот мекунем. Ҳангоми $(x, y) = 0$ будан ин нобаробарӣ аён аст. Бинобар ин мо чунин меҳисобем, ки $(x, y) \neq 0$ аст ва $\mu = \frac{(x,y)}{|(x,y)|}$ мегирем. Аз ин ҷо ҳосил мешавад, ки $||\mu|| = 1$ аст. Акнун барои $\forall\lambda$ - адади ҳақиқӣ ҳосил мекунем:

$$0 \leq ||\overline{\mu}x + \lambda y||^2 = (\overline{\mu}x + \lambda y, \overline{\mu}x + \lambda y) = \lambda^2(y, y) + 2\lambda|(x, y)| + (x, x).$$

Азбаски сеаъзогии квадратӣ нисбати λ бо коэффисиентҳои ҳақиқӣ ғайриманфӣ аст, пас дискриминанти он ғайримусбат аст, яъне

$$|(x, y)|^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

Ё ин ки $|(x, y)| \leq ||x||||y||$.

Аз нобаробарии Коши-Буняковский нобаробарии секунҷа хулоса мебарояд. Дар ҳақиқат, азбаски $(x + y, x + y) = ||x||^2 + (x, y) + (y, x) + ||y||^2$ ва $(x, y) \leq ||x||||y||,\ (y, x) \leq ||x||||y||$ аст, пас

$$||x + y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2$$

мешавад ва аз ин ҷо

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Ҳамин тавр бо нормаи зикршуда фазои гилбертии H - фазои банахӣ аст.

Акнун нишон медиҳем, ки дар фазои гилбертии H зарби скалярӣ нисбати наздикшавӣ аз рӯи норма бефосила аст. Дар ҳақиқат агар $x_n \to x$ ва $y_n \to y$, онгоҳ чунин адади M ёфт мешавад, ки $||x_n|| \leq M$ ва $||y|| \leq M$ мебошад. Аз ин ҷо

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| =$$
$$= |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \leq ||x_n - x||||y_n|| + ||x|||||y_n - y|| \leq$$
$$\leq ||x_n - x||M + ||x||||y_n - y|| \to 0 \text{ ҳангоми } n \to \infty.$$

10.2 Мисолҳои фазоҳои гилбертӣ

Мисоли 1. Дар фазои хаттии пайдарпаиҳои ададҳои ҳақиқии $l^2 : x = \{\xi_k\}_1^\infty,\ y = \{\eta_k\}_1^\infty$, ки барои онҳо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2 < \infty$$

аст, зарби скаляриро аз рӯи формулаи

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k$$

дохил мекунем. Қатор наздикшаванда аст, чунки $|\xi_k \overline{\eta}_k| \le \frac{1}{2}(|\xi_k|^2 + |\eta_k|^2)$ мебошад ва ҳамаи шартҳои зарби скалярӣ иҷро мешаванд, инчунин норма

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}$$

бо нормаи аввалаи $l^2 : ||x|| = (\sum_{k=1}^{\infty})|\xi_k|^2)^{1/2}$ баробар буда, фазо пурра аст.

Мисоли 2. Фазои $L^2[a, b]$ - ро дида мебароем. Барои функсияҳои $f(x), g(x) \in L^2[a, b]$ зарби скаляриро ба воситаи формулаи

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx$$

дохил мекунем. Интеграл вуҷуд дорад, чунки $|f(x)\overline{g}(x)| \le \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$ мебошад. Ҳамаи аксиомаҳои зарби скалярӣ иҷро мешаванд ва аз рӯи нормаи

$$||f||_{L^2[a,b]} = \sqrt{(f, f)}$$

фазо пурра аст.

10.3 Аз рӯи системаҳои ортонормалӣ паҳн намудан дар фазои гилбертӣ

Таърифи 1. Системаи векторҳои $\{b_j\}$ дар фазои гилбертии H **ортогоналӣ** номида мешаванд, агар ду векторҳои ихтиёрӣ аз ин система байни ҳам ортогоналӣ бошанд, яъне $(b_i, b_j) = 0$, ҳангоми $i \neq j$ будан.

Таърифи 2. Системаи векторҳои $\{e_j\}_{j\in N}$ аз фазои гилбертии H **ортонормалӣ** номида мешаванд, агар

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{ҳангоми} \quad i \neq j \text{ будан,} \\ 1 & \text{ҳангоми} \quad i = j \text{ будан} \end{cases}$$

бошад.

Теорема 10.1. *Пифагор. Бигузор $x_1, x_2, \dots, x_n$ - системаи векторҳои ортогоналӣ дар фазои гилбертии H бошанд ва $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$ бошад. Онгоҳ*

$$||x||_H^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||_H^2$$

аст.

Дар ҳақиқат, бо ҳисобкунии бевосита ҳосил мекунем

$$||x||^2 = (x, x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k\Big) =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} (x_k, x_j) = \sum_{k=1}^{n} (x_k, x_k) = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2.$$

Бигузор акнун $\{e_k\}$ - системаи векторҳои ортонормалӣ дар фазои гилбертии H бошад $x \in H$ элементи ихтиёрии ин фазо бошад. Масъаларо дар бораи ба қатори

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \tag{10.2}$$

паҳн намудани элементи x – ро дида мебароем мумкин аст.

Бигузор баробарии (10.2) ҷой дошта бошад. Онгоҳ онро ба e_n зарб зада ҳосил мекунем:

$$(x, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e_k, e_n) = c_n.$$

Таъриф. Адади

$$c_n = (x, e_n)$$

- **коэффисиенти Фурйиеи** элементи $x \in H$ аз рӯи системаи ортонормалии $\{e_k\}$ номида мешавад ва қатори

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

бошад - **қатори Фуреи элементи** x номида мешавад.

Хамин тавр, агар элементи $x \in H$ - ро ба қатор паҳн намудан мумкин бошад, ин қатори Фуреи он мебошад. Дар ҳолати хусусӣ, агар $\sum c_k e_k = 0$ бошад, онгоҳ $c_k = 0$ мешавад, яъне векторҳои e_k хаттӣ новобастаанд.

Акнун маълум менамоем, ки кай ва дар кадом ҳолат қатори Фурйие наздикшавана аст, суммаи он ба чӣ баробар аст, дар кадом маврид суммаи қатори Фурйиеи элементи x ба худи x баробар мешавад.

Теорема 10.2. *Бигузор $\{e_k\}$ - системаи ортонормалӣ дар фазои гилбертии H ва x элементи ихтиёрии он бошад. Онгоҳ:*

1). қатори ададии $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ наздикшаванда аст ва айни замон нобаробарии Бессел

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq ||x||^2$$

ҷой дорад;

2). қатори Фурйие наздикшаванда аст;

3). суммаи қатори Фурйие ба проексияи элементи x ба зерфазои L, ки аз системаи e_k таркиб ёфтааст, баробар аст;

4). элементи $x \in X$ фақат ва фақат дар ҳамон маврид ба суммаи қатори Фуреи худ баробар мегардад, агар баробарии Парсевал

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = ||x||^2$$

ҷой дошта бошад.

Исбот. 1). Суммаи интегралии қатори Фурйие $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ - ро дида мебароем. Тафтиш мекунем, ки фарқи $x - S_n$ ба системаи $\{e_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ ортогонал аст. Дар ҳақиқат,

$$(x - S_n, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{n} c_k(e_k, e_j) = c_j - c_j = 0$$

аст. Пас дар паҳн намудани элементи x ба суммаи

$$x = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + (x - S_n)$$

ҳамаи ҷамъшавандаҳо байни ҳам ортогоналианд ва мувофиқи теоремаи Пифагор

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + ||x - S_n||^2. \tag{10.3}$$

Аз ин ҷо $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq ||x||^2$, яъне қатори $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ наздикшаванда аст ва дар айни ҳол *нобаробарии Бессел*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq ||x||^2$$

ҷой дорад.

2). Нишон медиҳем, ки пайдарпаии суммаҳои хусусии $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ - пайдарпаии Коши мебошад. Барои $n > m$ ҳосил мекунем

$$||S_n - S_m||^2 = ||\sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k||^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \to 0 \text{ ҳангоми } n, m \to \infty.$$

Азбаски фазои H пурра аст, пас қатори $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ ба элементи $S \in L$ наздик мешавад.

3). Бигузор $S = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ бошад. Онгоҳ

$$(x - S, e_j) = (x, e_j) - (S, e_j) = c_j - \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e_k, e_j) = c_j - c_j = 0$$

мешавад. Яъне вектори $x - S$ ба зерфазое, ки аз системаи $\{e_k\}$ таркиб ёфтааст ортогонал аст.

4). Дар баробарии (10.3) ба ҳудуд ҳангоми $n \to \infty$ гузашта, ҳосил мекунем:

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + ||x - S||^2.$$

Аз ин ҷо маълум аст, ки баробарии Парсевал

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

ба $||x - S|| = 0$ эквивалент аст, яъне $x = S$ аст.

11 Маҷмӯҳои компактӣ

11.1 Таърифи маҷмӯъ ва фазои компактӣ

Яке аз теоремаҳои асосии таҳлили математикӣ - теоремаи Болтсано-Вейерштрасс мебошад: *аз ҳар як пайдарпаии маҳдуди ададӣ* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

зерпайдарпаии наздикшавандаи $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...(n_1 < n_2 < ... < n_k < ...)$ *- ро ҷудо намудан мумкин аст, ки ҳудуди охирнок дошта бошад.* Агар M - маҷмӯи ихтиёрии маҳдуди ададӣ бошад, онгоҳ ин теорема барои ихтиёрӣ пайдарпаии аз ададҳои ин маҷмӯ таркибёфта ҷой дорад. Агар M номаҳдуд бошад, аз он пайдарпаии ба ∞ наздикшавандаро ҷудо намудан мумкин аст ва бинобар ин, аз ин пайдарпаӣ зерпайдарпаии ба ҳудуди охирнок майлкунандаро ҷудо намудан номумкин аст. Теоремаи Болтсано-Вейерштрасс барои фазои охирченакаи R_n низ ҷой дорад. Аммо ин теорема дар фазои ихтиёрии метрикӣ ҷой надорад, яъне шарти маҳдуд будани маҷмӯъ дар ин маврид нокифоя аст.

Мисол. Фазои метрикии l^2 - ро дида мебароем, ки элементҳои он аз ҳамаи пайдарпаиҳои беохири $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ иборат буда, барои онҳо нобаробарии $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$ ҷой дорад ва масофа дар он ба воситаи формулаи

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\})$$

муайян карда мешавад. Нишон медиҳем, ки дар фазои l^2 аз пайдарпаии маҳдуди $\{e^{(n)}\}$:

$$e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots), e^{(2)} = (0, 1, \ldots, 0, \ldots), \ldots e^{(n)} = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots),$$

зерпайдарпаии наздикшаванда ҷудо намудан мумкин нест. Дар ҳақиқат, ин маҷмӯ маҳдуд аст, чунки

$$\rho(e^{(k)}, 0) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (e_n^{(k)} - 0)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{барои дилхоҳ} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Аммо барои ихтиёрӣ $k \neq m$, баробарии зеринро ҳосил мекунем

$$\rho(e^{(k)}, e^{(m)}) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(e_n^{(k)} - e_n^{(m)})^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},$$

ки ин маънои онро дорад, ки аз пайдарпаии беохири $\{e^{(k)}\}$ зерпайдарпаии наздикшаванда ҷудо намудан мумкин нест.

Таърифи 1. Маҷмӯи K - и фазои метрикии X дар ин фазо **компактӣ** номида мешавад, агар аз пайдарпаии ихтиёрии элементҳои $\{x_n\} \in K$ зерпайдарпаии $\{x_{n_k}\}$ - и ба ягон элементи $x_0 \in X$ наздикшаванда ҷудо намудан мумкин бошад.

Таърифи 2. Фазои X **компактӣ** номида мешавад, агар он ҳамчун маҷмӯъ дар худи фазо компактӣ бошад.

Ҳар як маҷмӯи фазои компактӣ - компактӣ аст, аз он ҷумла зерфазои фазо низ.

Талаботи компактӣ будани фазо хело ҳам талаботи қавӣ буда, он класси нисбатан маҳдуди фазоҳоро дар бар мегирад, масалан фазоҳои пурра ва фазоҳои сепарабелӣ нисбати фазоҳои компактӣ васеъта мебошанд.

Теорема 11.1. *Маҷмӯи компактӣ тавассути масофа маҳдуд аст.*

Исбот. Бигузор маҷмӯи K компактӣ, аммо номаҳдуд бошад. Нуқтаи ихтиёрии $x_1 \in K$ ва адади $r_1 = 1$ - ро мегирем. Азбаски K номаҳдуд аст, он наметавонад, ки пурра дохили кураи $S(x_1, r_1) = \{x : \rho(x, x_1) < r_1\}$ хобад. Нуқтаи ихтиёрии $x_2 \in K$ - и берун аз $S(x_1, r_2)$ ҷойгирбударо мегирем: $\rho(x_1, x_2) \geq r_1$. Адади $r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$ - ро мегирем. Азбаски K дохили намехобад, пас чунин нуқтаи $x_3 \in K$ - ро ёфтан мумкин аст, ки $x_3 \notin S(x_1, r_2)$, яъне $\rho(x_1, x_3) \geq r_2$ бошад. Адади $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ - ро мегирем ва ин протсесро то беохирӣ давом медиҳем. Дар натиҷа пайдарпаии нуқтаҳои $x_n \in K$ ва пайдарпаии ададҳои r_n ҳосил мешаванд, ки барои ҳамаи $n = 2, 3, \ldots$ нобаробарии

$$\rho(x_1, x_n) - r_n - 1 \geq r_{n-1}$$

иҷро мегардад. Акнун барои ихтиёрӣ $n > m \geq 2$

$$\rho(x_1, x_n) - r_n - 1 \geq r_{n-1} \geq r_m; \quad \rho(x_1, x_m) = r_m - 1$$

мешавад. Бинобар ин аз нобаробарии секунҷа

$$\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_m) + \rho(x_m, x_n)$$

ҳосил мекунем, ки $r_m \leq (r_m - 1) + \rho(x_m, x_n)$ аст ва аз ин ҷо $\rho(x_m, x_n) \geq 1$ мебошад. Бинобар ин ягон зерпайдарпаии пайдарпаии $\{x_n\}$ наздикшаванда буда наметавонад. Яъне маҷмӯи K компактӣ нест. Зиддияти пайдошуда нишон медиҳад, ки маҷмӯи K маҳдуд аст.

Теорема 11.2. *Фазои компактӣ фазои пурра аст.*

Исбот. Бигузор пайдарпаии $\{x_n\} \in X$ пайдарпаии фундаменталӣ бошад. Фазои X компактӣ аст. Бинобар ин мувофиқи таъриф аз $\{x_n\}$ зерпайдарпаии $\{x_{n_k}\}$ - ро ҷудо намудан мумкин аст, ки ба ягон нуқтаи $x_0 \in X$ наздик мешавад: $x_{n_k} \to x_0$. Барои ихтиёрӣ k ҳосил мекунем

$$\rho(x_k, x_0) \leq \rho(x_k, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0).$$

Дар тарафи рости ин нобаробарӣ ҳар ду ҷамъшавандаҳо ба нол майл мекунанд. Якум дар асоси фундаменталӣ будани пайдарпаии $\{x_n\}$, дуйум бошад дар асоси наздикшавии зерпайдарпаии $\{x_{n_k}\}$. Бинобар ин $\rho(x_k, x_0) \to$

0, яъне x_0 ҳудуди тамоми пайдарпаии $\{x_k\}$ аст ва пурра будани фазои X исбот гардид.

Қайд мекунем, ки таърифи дар боло овардашудаи компакӣ ягон аломати мукаммали компактӣ маҷмӯро намедиҳад ва бинобар ин ёфтани аломати қулайтари компактӣ будани маҷмӯъ ба миён меояд.

Таърифи 3. Бигузор ε - адади додашудаи мусбат ва $M \in X, K \in X$ - маҷмӯҳои фазои нормирондашудаи X - бошанд. Маҷмӯи M ε **- тури маҷмӯи** K номида мешавад, агар барои ҳар як нуқтаи $x \in K$ дар маҷмӯи M чунин нуқтаи $z \in M$ ёфт шавад, ки $\rho(x, z) < \varepsilon$ бошад.

11.2 Теоремаи Хаусдорф

Теорема 11.3. *(Хаусдорф). Барои он, ки маҷмӯи K - и фазои метрикии X компактӣ бошад, зарур ва дар мавриди пурра будани фазои X, кифоя аст, ки барои ихтиёрӣ $\varepsilon > 0$ дар X ε - тури охирнок мавҷуд бошад.*

Исбот. Зарурияти шарт (аз баръакс). Бигузор шарти теорема иҷро нашавад, яъне маҷмӯи K компактӣ бошад, аммо барои ягон $\varepsilon > 0$ ε - тури охирнок мавҷуд набошад. Нуқтаи ихтиёрии $x_1 \in K$ - ро мегирем. Маҷмӯи аз як элементи $\{x_1\}$ иборат буда барои K ε - тур шуда наметавонад, бинобар ин чунин $x_2 \in K$ мавҷуд аст, ки $\rho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$ мебошад. Маҷмӯи $\{x_1, x_2\}$ низ барои K ε - тур шуда наметавонад, бинобар ин чунин $x_3 \in K$ мавҷуд аст, ки $\rho(x_i, x_3) \geq \varepsilon$ мебошад $(i = 1, 2)$. Чунин амалро давом дода мо пайдарпаии нуқтаҳои $\{x_n\}$ - ро аз K ҳосил мекунем, ки $\rho(x_m, x_n) \geq \varepsilon, m \neq n, n = 1, 2, \ldots$ мебошад. Айён аст, ки аз ин гуна пайдарпаӣ зерпайдарпаии наздикшаванда ҷудо намудан номумкин аст. Ин бошад мухолифи компактӣ будани маҷмӯи K мебошад.

Кифоягии шарт. Бигузор X фазои пурра ва барои ихтиёрӣ $\varepsilon > 0$ ε - тур мавҷуд бошад. Нишон медиҳем, ки маҷмӯи K компактӣ аст.

Пайдарпаии ихтиёрии элементҳои $\{x_n\}$ маҷмӯи K - ро мегирем ва нишон медиҳем, ки аз он зерпайдарпаии наздикшаванда ҷудо намудан мумкин аст. Барои ин пайдарпаии ададҳои мусбати $\varepsilon_n \to 0$ мегирем ва ε_1 - тури охирноки мувофиқро дида мебароем, ки мавҷудияти он аз шарти теорема бармеояд. Агар кураҳои марказашон дар нуқтаҳои ε_1 - тур бо радиуси ε_1 - ро созем, онгоҳ ҳар як нуқтаи маҷмӯи K аққалан дохили яке аз ин кураҳо мехобад. Азбаски миқдори ин кураҳо охирнок аст, пас дар яке аз ин кураҳо миқдори беохири элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$мехобанд. Ин кураро бо $S(z_1, \varepsilon_1)$ ишора мекунем.

Баъд аз ин ε_2 - турро мегирем ва кураҳои радиуси ε_2 бо марказашон дар нуқтахои ин турро дида мебароем. Ба мисли пештара дар яке аз ин кураҳо миқдори беохири элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$ аз дохили кураи $S(z_1, \varepsilon_1)$ мехобанд, ки онро бо $S(z_2, \varepsilon_2)$ ишора мекунем. Ин протсессро давом дода, пайдарпаиҳои кураҳои

$$S(z_1, \varepsilon_1),\ S(z_2, \varepsilon_2), \ldots,\ S(z_n, \varepsilon_n), \ldots$$

-ро ҳосил мекунем, ки дар бурриши миқдори ихтиёрии онҳо миқдори беохири элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$ мехобанд. Бинобар ин мо элементҳои зерпайдарпаии $\{x_{n_k}\}$ - ро чунин интихоб мекунем:

$$x_{n_1} \in S(z_1, \varepsilon_1),\ x_{n_2} \in S(z_1, \varepsilon_1) \cap S(z_2, \varepsilon_2),\ \ldots x_{n_k} \in \cap_{j=1}^{j=k} S(z_j, \varepsilon_j),$$

ки дар ин ҷо $n_k < n_{k-1} < \ldots < n_1$ мебошад. Зерпайдарпаии $\{x_{n_k}\}$ фундаменталӣ аст. Дар ҳақиқат, азбаски ҳар ду элементҳои x_{n_k} ва x_{n_m}

ба кураҳои $S(z_k, \varepsilon_k)$ $(k \leq m)$ шомиланд, пас

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_m}) \leq \rho(x_{n_k}, z_k) + \rho(x_{n_m}, z_k) \leq 2\varepsilon,$$

яъне $\{x_{n_k}\}$ фундаменталӣ аст. Азбаски X фазои пурра аст, пас ин зерпайдарпаӣ наздикшаванда ва бинобар ин K - маҷмӯи компактӣ аст.

12 Аломати компактнокӣ дар фазои $C[a,b]$

12.1 Теоремаи Артсела

Таърифи 4. Бигузор дар порчаи $[a,b]$ маҷмӯи ихтиёрии E - функсияҳои бефосилаи $x(t)$ дода шуда бошад. Ин функсияҳо **ботадриҷ бефосила** номида мешаванд, агар барои ихтиёрӣ адади $\varepsilon > 0$ чунин адади $\delta > 0$ ёфт шавад, ки ҳангоми иҷро шудани нобаробарии $|t_1 - t_2| < \delta$ барои ду нуқтаҳои ихтиёрии t_1 ва t_2 аз порчаи $[a,b]$, ҳамаи функсияҳои $x(t) \in E$ нобаробарии $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ - ро қаноат кунонанд.

Таърифи 5. Бигузор дар порчаи $[a,b]$ маҷмӯи ихтиёрии E - функсияҳои бефосилаи $x(t)$ дода шуда бошанд. Ин функсияҳо **мунтазам маҳдуд** номида мешаванд, агар чун адади M ёфт шавад, ки ҳамаи функсияҳои $x(t) \in$ нобаробарии $|x(t)| \leq M$ - ро қаноат кунонанд.

Теорема 12.1. *(Артсела)). Барои он ки маҷмӯи K - функсияҳои бефосила аз $C[a,b]$ – компактӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки функияҳои ин маҷмӯъ ботадриҷ бефосила ва мунтазам маҳдуд бошанд.*

Исбот. Зарурати шартҳо. Бигузор K - маҷмуӣ компактӣ аз фазои $C[a,b]$ бошад. Мувофиқи теоремаи Хаусдорф барои маҷмӯи K ε - тӯри охирнок мавҷуд аст. Бигузор $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ функсияҳои бефосила аз фазои $C[a,b]$ тӯри номбаршударо ташкил диҳанд. Азбаски ҳар як функсияи $x_k(t)$ - и ин тур маҳдуд ва барои ихтиёрӣ элементи $x \in K$ чунин x_k ёфт мешавад, ки $\rho(x,x_k) < \varepsilon$ аст, пас

$$|x(t)| \leq |x_k(t)| + |x(t) - x_k(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x_k(t)| + \varepsilon$$

мешавад ва агар ба сифати доимии M сарҳади функсияҳои $|x_k(t)|$ $(k = 1,2,\dots,n,\ a \leq t \leq b)$ - ро гирем, ки ба ε зиёд карда шудааст, пас ҳосил мекунем, ки функсияҳои маҷмӯи K мунтазам маҳдуд аст.

Барои ҳар як функсияи $x_k(t)$ чунин адади δ_k ёфт мешавад, ки ҳангоми иҷро шудани нобаробарии $|t' - t| < \delta_k$, нобаробарии

$$|x_k(t') - x_k((t)| < \varepsilon$$

иҷро мешавад. Функсияи ихтиёрии $x(t)$ - ро аз маҷмӯи M мегирем. Бигузор $x_k(t)$ он элементе бошад, ки барои он $\rho(x,x_k) < \varepsilon$ ҷой дорад. Онгоҳ

$$|x(t') - x(t)| \leq |x((t') - x_k(t')| + |x_k(t') - x_k(t)| + |x_k(t) - x(t)| \leq$$

$$\leq \rho(x,x_k) + |x_k(t') - x_k(t)| + +\rho(x,x_k) < 2\varepsilon + |x_k(t') - x_k(t)|$$

мешавад. Агар $|t - t'| < \delta$ бошад, ҷамъшавандаи дуйум аз ε хурд мешавад. Бинобар ин

$$|x(t') - x(t)| < 3\varepsilon$$

аст. Ҳамин тавр, функсияҳои маҷмӯи K ботадриҷ бефосилаанд.

Кифоягии шартҳо. Бигузор шартҳои теорема иҷро шуда бошанд, яъне маҷмӯи функсияҳои $K \in C[a,b]$ мунтазам маҳдуд ва ботадриҷ бефосила бошанд. Нишон медиҳем, ки K маҷмӯи компактӣ аст.

Адади ихтиёрии $\varepsilon > 0$ - ро мегирем ва мувофиқи шарти ботадриҷ бефосилагӣ адади $\delta > 0$ - ро ёфта, порчаи $[a,b]$ - ро бо нуқтаҳои $a = t_0 < t_1 < < t_2 < \ldots < t_n = b$ ба қисмҳо чунон тақсим мекунем, ки $t_{k+1} - t_k < \delta$ бошад.

Ба воситаи $\mathcal{K}$ маҷмӯи хатҳои шикастаи $\overline{x}(t)$ (қисман-хаттӣ) - ро ишора мекунем, ки қуллаҳояшон дар нуқтаҳои (t_k, ν_k) $(|\nu_k| \le M)$ ҷойгир бошанд. Маҷмӯи $\mathcal{K}$ - маҷмӯи компактӣ аст, чунки ҳар як элементи он - функсияи $\overline{x}(t)$ ба воситаи силсилаи ададҳои $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ муайян мегардад ва наздикшавии ин гуна функсияҳо маънои онро дорад, ки мувофиқан пайдарпаии мувофиқиададҳои $\{\nu_k\}$ наздикшаванда мебошанд.

Маҷмӯи $\mathcal{K}$ ε - тӯр-ро ташкил медиҳад. Дар ҳақиқат, барои ихтиёрӣ $x \in K$ элементи $\overline{x} \in \mathcal{K}$ -ро ҳамчун функсияи қисман-хаттӣ чунон месозем, ки графики он аз нуқтаҳои $(t_k, x(t_k))$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ гузарад. Месанҷем, ки $\rho(x, \overline{x}) < \varepsilon$ аст, яъне барои ҳамаи $t \in [a,b]$ нобаробарии $|x(t) - \overline{x}(t)| < \varepsilon$ иҷро мешавад. Бигузор $t \in [a,b]$ бошад. Ин нуқта ба яке аз порчаҳои $[t_k, t_{k+1}]$ дохил мешавад. Агар ба воситаи m_k ва M_k сарҳадҳои аниқи поёнӣ ва болоии функсияи $x(t)$ - ро дар порчаи $[t_k, t_{k+1}]$ ишора кунем, онгоҳ $M_k - m_k < \varepsilon$ мешавад, чунки $t_{k+1} - t_k < \delta$ аст. Аммо

$$m_k \le x(t) \le M_k \quad \text{ва} \quad m_k \le \overline{x}(t) \le M_k$$

мебошанд. Аз ин ҷо

$$|x(t) - \overline{x}(t)| \le M_k - m_k < \varepsilon$$

мешавад, яъне маҷмӯи K компактӣ аст.

Мисоли 1. Нишон медиҳем, ки маҷмӯи K - функсияҳои $y = ax^2$, ки a тамоми порчаи $[0,4]$ - ро пур мекунад, дар фазои $C[0,1]$ компактӣ аст.

Дар ҳақиқат, барои ҳамаи функсияҳои $y \in K$ нобаробарии

$$|y| = |ax^2| \leq a \leq 4$$

ҷой дорад, яъне онҳо мунтазам маҳдуданд.

Барои адади ихтиёрии $\varepsilon > 0$ ва x_1, $x_2 \in [0,1]$ ҳосил мекунем

$$|y(x_1) - y(x_2)| = |ax_1^2 - ax_2^2| = a|x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leq 8|x_1 - x_2| < \varepsilon.$$

Агар ба сифати δ адади $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ гирифта шавад, онгоҳ дар як маврид барои ҳамаи функсияҳои $y(x) \in K$ нобаробариҳои

$$|x_1 - x_2| < \delta, \quad |y(x_1) - y(x_2)| < \varepsilon$$

иҷро мегарданд, яъне маҷмӯи функсияҳои K ботадриҷ бефосилаанд ва мувофиқи теоремаи Артсела маҷмӯи K дар фазои $C[0,1]$ компактӣ аст.

Мисоли 2. Дар порчаи $[0,\pi]$ маҷмӯи функсияҳои $K = \{\sin nt\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ - ро дида мебароем. Шарти мунтазам маҳдудият барои ин функсияҳо иҷро мешавад, чунки барои адади ихтиёрии натуралии n ва $t \in [0,\pi]$, $|\sin nt| \leq 1$ аст. Аммо, азбаски барои қиматҳои $t = \frac{\pi}{2n}$, $\quad \sin n\frac{\pi}{2n} = 1$ аст, пас шарти ботадриҷ бефосилагӣ иҷро намешавад, яъне маҷмӯи K дар фазои $C[0,\pi]$ компактӣ нест.

13 Аломати компактнокӣ дар фазои Лебегии $L_p(0,1)$

13.1 Теоремаи Колмогоров

Пеш аз он, ки аломати компактнокии маҷмӯи фазои $L_p[0,1]$, $p > 1$ - ро муайян намоем, мо мафҳуми функсияи Стекловро дохил мекунем.

Бигузор $y(t) \in L_p(0,1)$ бошад. Қабул мекунем, ки $y(t) = 0$ агар $t \notin [0,1]$ бошад. Функсияи

$$y_h(t) = \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} y(x)dx,\ \ h > 0$$

функсияи Стеклов номида мешавад. Интеграл дар тарафи рости ин баробарӣ мавҷуд аст, чунки аз $y(t) \in L_p(0,1)$ аст, бармеояд, ки $y(t) \in L(0,1)$ аст ва бинобар ин $y(x) \in L(t-h, t+h)$.

Лемма 13.1. *Функсияи Стеклов $y_h(t) \in L_p(0,1)$ аст.*

Дар ҳақикат, мувофиқи нобаробарии Гёлдер ҳосил мекунем

$$|y_h(t)|^p = \Big(\frac{1}{2h}|\int\limits_{t-h}^{t+h} y(x)dx|\Big)^p \le \frac{1}{(2h)^p}\Big(\int\limits_{t-h}^{t+h} dx\Big)^{\frac{p}{q}}\int\limits_{t-h}^{t+h}|y(x)|^p dx =$$

$$= \frac{(2h)^{p(1-1/p)}}{(2h)^p}\int\limits_{t-h}^{t+h}|y(x)|^p dx = \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h}|y(x)|^p dx.$$

Аз ин ҷо

$$\int\limits_0^1 |y_h(t)|^p dt \le \frac{1}{2h}\int\limits_0^1\Big(\int\limits_{t-h}^{t+h}|y(x)|^p dx\Big)dt = \frac{1}{2h}\int\limits_0^1\Big(\int\limits_{-h}^{h}|y(t+\sigma)|^p d\sigma\Big)dt =$$

$$= \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Big(\int\limits_0^1 |y(t+\sigma)|^p dt\Big)d\sigma.$$

Дар ин ҷо мо x -ро бо $x = t+\sigma,\ dx = d\sigma$ иваз намудем, ки ҳангоми тағйир ёфтани x дар порчаи $[t-h, t+h]$, тағйирёбандаи σ дар порчаи $[-h, h]$ тағйир меёбад. Дар идома ҳосил мекунем

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Big(\int\limits_0^1 |y(t+\sigma)|^p dt\Big)d\sigma = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Big(\int\limits_{\sigma}^{\sigma+1}|y(\tau|^p d\tau\Big)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Big(\int\limits_{\sigma}^{1}|y(\tau|^p d\tau\Big)d\sigma \le \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Big(\int\limits_{0}^{1}|y(\tau|^p d\tau\Big)d\sigma = \int\limits_{0}^{1}|y(\tau)|^p d\tau.$$

Мо дар ин ҷо $t+\sigma=\tau$ гузоштем ва дар назар гирифтем, ки ҳангоми $t\in[0,1]$ будан $y(t)=0$ аст. Ҳамин тавр, ҳосил намудем

$$\int\limits_{0}^{1}|y_h(\tau)|^p d\tau \le \int\limits_{0}^{1}|y(\tau)|^p d\tau.$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки $y_h(t)\in L_p(0,1)$ аст.

Теорема 13.1. *(Колмогоров) Барои он, ки маҷмӯи функсияҳои $K\subset L_p(0,1)$ компактӣ бошад зарур ва кифоя аст, ки*

1) Маҷмӯи K мунтазам маҳдуд бошад, яъне чунин адади M ёфт шавад, ки нобаробарии $\left(\int_0^1|x(t)|^p dt\right)^{1/p}<M$ барои дилхоҳ функсияи $x(t)\in K$ иҷро шавад.

2) Функсияҳои Стеклов $x_h(t)$ ба функсияҳои тавлиднамудаашон $x(t)$ мунтазам надик шаванд, яъне барои адади ихтиёрии $\varepsilon>0$, чунин адади $\delta>0$ ёфт шавад, ки ҳангоми $h<\delta$ будан, нобаробарии $\rho(x,x_h)<\varepsilon$ барои ҳамаи функсияҳои $x(t)\in K$ иҷро шавад.

Исбот. Зарурати шартҳо. Бигузор K - маҷмуӣ компактӣ аз фазои $L_p[0,1]$ бошад. Нишон медиҳем, ки шартҳои 1) ва 2) и теорема иҷро мешаванд. Иҷро шудани шарти якум аз теоремаи 13.1 бармеояд. Иҷрошавии шарти дуйумро исбот мекунем.

Азбаски маҷмӯи K компактӣ аст, пас бари адади ихтиёрии $\varepsilon>0$, $\frac{\varepsilon}{3}$ - тӯри E - и маҷмӯи K мавҷуд аст. Дар асоси он, ки функсияи ихтиёрии $x(t)\in L_p(0,1)$ - ро бо аниқии дилхоҳ аз руи метрикаи ин фазо бо функсияҳои бефосила апроксиматсия намудан мумкин аст, мо ҳисоб мекунем, ки

E аз функсияҳои бефосилаи $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ иборат аст. Акнун, агар $y(t)$ функсияи бефосила бошад, онгоҳ функсияи

$$y_h(t) = \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} y(x)dx = y(t+\theta h)$$

ҳангоми $h \to 0$ нисбат ба t дар $[0,1]$ мунтазам ба функсияи $y(t)$ майл мекунад. Пас ҳангоми $h \to 0$ функсияҳои $y_h(t)$ бе чуну чаро ба таври миёна ба функсияи $y(t)$ майл мекунанд, яъне барои функсияи бефосилаи $y(t)$ ҳангоми $h \to 0$ масофаи $\rho(y, y_h) \to 0$.

Акнун функсияи $x_i(t) \in E$ - ро мегирем. Азбаски $x_i(t)$ бефосила аст, пас барои адади ихтиёрии $\varepsilon > 0$ чунин адади $\delta_i > 0$ ёфт мешавад, ки ҳангоми $h < \delta_i$ будан, нобаробарии $\rho((x_i)_h, x_i) < \varepsilon/3$ иҷро мешавад. Бигузор $\delta = \min_i \delta_i$ бошад. Онгоҳ ҳангоми $h < \delta$ будан, барои ҳамаи $i = 1, 2, \dots, n$ нобаробарии $\rho((x_i)_h, x_i) < \varepsilon/3$ иҷро мешавад. Бигузор акнун $x(t)$ функсияи ихтиёрӣ аз маҷмӯи K бошад. Функсияи $x_i(t)$ - ро аз E мегирем, ки $\rho(x, x_i) < \varepsilon/3$ бошад. Онгоҳ ҳангоми $h < \delta$ будан ҳосил мекунем

$$\rho(x_h, x) \le \rho(x_h, (x_i)_h) + \rho((x_i)_h, x_i) + \rho(x_i, x) \le$$

$$\le 2\rho(x_i, x) + \rho((x_i)_h, x_i) = 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

яъне шарти дуйуми теорема исбот шуд.

Кифоягии шартҳо. Исбот мекунем, ки ҳангоми иҷро шудани шартҳои теорема функсияҳои $x_h(t)$, ки ба функсияҳои $x(t) \in K$ мувофиқанд, барои ҳар як қимати қайдшудаи h ботадриҷ бефосила мешаванд. Ҳосил мекунем

$$|x_h(t_1) - x_h(t)| = \frac{1}{2h} \Big| \int\limits_{t_1-h}^{t_1+h} x(\tau)d\tau - \int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau \Big| =$$

$$= \frac{1}{2h}\Big|\int\limits_{t+h}^{t_1+h} x(\tau)d\tau - \int\limits_{t-h}^{t_1-h} x(\tau)d\tau\Big| \leq \frac{1}{2h}\Big|\int\limits_{t+h}^{t_1+h} x(\tau)d\tau\Big| - \Big|\int\limits_{t-h}^{t_1-h} x(\tau)d\tau\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2h}2|t_1-t|^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_0^1 |x(\tau)|^p d\tau\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{M}{h}|t_1-t|^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (13.1)$$

Аз ин ҷо бо тадриҷ бефосилагии функсияҳои $x_h(t)$ хулоса мебарояд.

Акнун мунтазам маҳдудияти маҷмӯи функсияҳои $\{x_h(t)\}$ - ро бо қиматҳои қайдшуаи h нишон медиҳем. Аз нобаробарии (13.1) ҳосил мешавад, ки ҳангоми $|t_1 - t| < h$ будан, нобаробарии

$$|x_h(t_1) - x_h(t)| \leq Mh^{-\frac{1}{p}}$$

ҷой дорад, яъне дар порчаи дарозиаш h лаппиши функсияи ихтиёрии $x_h(t)$ аз $Mh^{-1/p}$ зиёд намешавад. Агар n - хурдтарин адади бутуне бошад, ки $n \geq 1$ аст, пас лаппиши функсияи $x_h(t)$ дар порчаи $[0,1]$ аз $nMh^{-1/p}$ зиёд намешавад. Аз тарафи дигар

$$\int\limits_0^1 |x_h(t)|^p dt \leq \int\limits_0^1 |x(t)|^p dt \leq M^p$$

аст. Аз ин хулоса мебарояд, ки барои ҳар як функсияи $x_h(t)$ дар порчаи $[0,1]$ ақалан як нуқтаи t_0 ёфт мешавад, ки барои он

$$|x_h(t_0)| \leq M$$

аст. Азбаски мувофиқи нишондоди болоӣ лаппиши ҳар як функсияи $x_h(t)$ дар $[0,1]$ аз $nMh^{-1/p}$ зиёд намешавад, пас барои функсияи ихтиёрии $x_h(t)$ нобаробарии зерин иҷро мешавад:

$$|x_h(t)| \leq |x_h(t_0)| + nMh^{-1/p} \leq M + nMh^{-1/p} = M_1,$$

яъне мунтазам маҳдудияти функсияҳои $x_h(t)$ исбот шуд. Мувофиқи теоремаи Артсела маҷмӯи функсияҳои $\{x_h(t)\}$ барои ҳар як қимати қайдшудаи h ба маънои мунтазам наздикшавӣ компактӣ аст ва пас ба маънои наздикшавӣ ба таври миёна низ компактӣ аст. Адади ихтиёрии $\varepsilon > 0$ - ро мегирем. Мувофиқи шарти дуйуми теорема чунин ададӣ h ёфт мешавад, ки барои ҳамаи $x \in K$ нобаробарии

$$\rho(x, x_h) < \varepsilon$$

ҷой дорад. Ин маънои онро дорад, ки функсияҳои $x_h(t)$ барои маҷмӯи K ε - турро ташкил медиҳанд. Азбаски ε - тур дар $L_p(0,1)$ компактӣ аст, пас он дар K низ компактӣ мебошад.

Қайд. Бо пешниҳоди олими машҳури полякӣ М.Рисс, дар теоремаи исботкардашуда шарти дуйумро бо шарти зерин иваз намудан мумкин аст:

2') функсияҳои гечондашуда ба функсияҳои додашуда нисбат ба $x(t) \in K$ ба маънои миёна мунтазам наздикшаванда бошанд, яъне барои ададӣ ихтиёрии $\varepsilon > 0$ чунин ададӣ $\delta > 0$ ёфт шавад, ки ҳангоми иҷро шудани нобаробарии $|h| < \delta$, нобаробарии

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon^p$$

иҷро гардад.

14 Операторҳои пурра бефосила

Ҳар як оператори хаттӣ аз як фазои охирченака ба фазои охирченакаи дигар тавассути ягон матрисаи чоркунҷа амалӣ мегардад. Омӯхтани чунин операторҳо масъалаи нисбатан мушкил нест, чунки хосиятҳои матрисаҳои охирнок аз алгебра хуб маълуманд. Агар операторро дар фазои ихтиёрии нормирондашуда дида бароем, онгоҳ на ҳама вақт хосиятҳои операторҳои "охирченака‘"барои ин оператор ҷой дошта метавонад. Дар ин хусус наздиктарин операторҳои чунин хосият дошта, операторҳои пурра бефосила мебошанд.

Таърифи 1. Оператори хаттии T, ки маҷмӯи фазои хаттии E - ро ба маҷмӯи фазои хаттии E_1 инъикос мекунад, **оператори пурра бефосила** номида мешавад, агар он ҳар гуна маҷмӯи маҳдуди M - и фазои хаттии E - ро ба маҷмӯи компактии K - и фазои хаттии E_1 инъикос кунад.

Теорема 14.1. *Ҳар гуна оператори хаттии A маҷмӯи компактиро ба маҷмуи компактӣ инъикос менамояд.*

Дар ҳақиқат, бигузор K маҷмӯи компактии фазои E бошад ва K_1 - образи ин маҷмӯъ дар фазои E_1, бошад, ки дар натиҷаи инъикоси оператори A (яъне $K_1 = \{Ax\}, x \in K$) ҳосил шудааст. Пайдарпаии ихтиёрии $\{y_n \in K_1\}$ - ро мегирем. Бигузор x_n - яке аз прообразҳои y_n, бошад, ки дар K мехобад. Пайдарпаиҳои $\{x_n\} \in K$ - ро дида мебароем. Азбаски K компактӣ аст, пас аз $\{x_n\}$ зерпайдарпаии $\{x_{n_i}\}$ - ро ҷудо намудан мумкин аст, ки ба элементи $x_0 \in E$ наздик мешавад. Онгоҳ мувофиқи бефосилагии оператори A зерпайдарпаии $\{y_{n_i}\}$ ба элементи $y_0 = Ax_0 \in E_1$ майл мекунад. Ҳамин тавр аз пайдарпаии ихтиёрии $\{y_n\} \in K_1$ зерпайдарпаии наздикшаванда ҷудо намудан мумкин аст, яъне маҷмӯи K_1 компактӣ аст.

Хосияти пурра бефосилагии оператор умуман нисбат ба хосияти бефосилагии муқаррарии оператор, ки мансуби ҳамаи операторҳои хаттӣ мебошад, хосияти қавитар мебошад. Масалан, оператори воҳидӣ дар фазои беохирченака пурра бефосила нест.

Мисоли 1. Бигузор I - оператори воҳидӣ дар фазои банахии E бошад, яъне барои ихтиёрӣ $x \in E$ $Ix = x$ бошад. Нишон медиҳем, ки агар E беохирченака бошад, онгоҳ оператори I пурра бефосила нест. Барои ин кифоя аст нишон диҳем, ки кураи воҳидӣ $S(x) = \{x : x \in E, ||x|| = 1\}$ дар E (оператори I онро ба худаш инъикос мекунад) компактӣ нест. Ин бошад аз тасдиқоти леммаи зерин ҷорӣ мегардад.

Лемма 14.1. *. Бигузор $x_1, x_2, \ldots$ векторҳои хаттӣ новобастаи фазои нормирондашудаи E бошад ва бигузор E_n - зерфазое бошанд, ки тавассути векторҳои $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тавлид шуда бошад. Онгоҳ чунин пайдарпаии векторҳои $y_1, y_2, \ldots, y_n$ мавҷуд аст, ки шартҳои зеринро қаноат мекунонад:*

$$1)\ ||y_n|| = 1,\ 2)\ y_n \in E_n,\ 3)\ \rho(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2},$$

дар ин ҷо $\rho(y_n, E_{n-1})$ - масофаи вектори y_n то зерфазои E_{n-1} мебошад, яъне

$$\inf_{x \in E_{n-1}} ||y_n - x||.$$

Исбот. Дар ҳақиқат, азбаски векторҳои $x_1, x_2, \ldots$ хаттӣ новобастаанд, пас $x_n \notin E_{n-1}$ и $\rho(x_{n-1}, E_{n-1}) = \alpha > 0$. Бигузор x^* - чунин вектор аз E_{n-1}, бошад, ки

$$\rho(x_n - x^*, E_{n-1}) = \rho(x_n, E_{n-1}) - \rho(x^*, E_{n-1}) = \alpha - 0 = \alpha$$

ва вектори

$$y_n = \frac{x_n - x^*}{||x_n - x^*||}$$

ҳамаи шартҳои 1) – 3) – ро қаноат кунонад. Ба сифати y_1 дар ин мавриd $y_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$ гирифтан мумкин аст. Масалан иҷро шудани шарти 3)) - ро дида мебароем.

$$\rho(y_n, E_{n-1}) = \rho(\frac{x_n - x^*}{||x_n - x^*||}, E_{n-1}) > \frac{1}{2\alpha}\rho(x_n - x^*, E_{n-1}) = \frac{1}{2\alpha}.\alpha = \frac{1}{2}.$$

Бо истифода аз леммаи исботгардида дар кураи фазои ихтиёрии нормиронидашудаи бисёрченака чунин пайдарпаии элементҳои $\{y_n\}$ сохтан мумкин аст, ки барои он нобаробарии $\rho(y_{n-1}, y_n) > 1/2$ ҷой дорад. Айён аст, ки ин гуна пайдарпаӣ ягон зерпайдарпаии наздикшаванда надорад. Ин шаҳодати он аст, ки кура компактӣ нест.

14.1 Мисолҳои операторҳои пурра бефосила

Чуноне, ки дар боло қайд намудем, оператоҳои хаттӣ дар фазои охирченака пурра бефосилаанд, чунки онҳо ба воситаи матрисаҳои чоркунҷа ифода меёбанд. Мисоли оддии дигари оператори пурра бефосила ин функсионал дар фазои нормирондашудаи X мебошад, агар онро мо ҳамчун оператори аз фазои X ба фазои ададҳои ҳақиқии R амалкунанда дида бароем.

Мисоли 2. Оператори интегралии зеринро дида мебароем:

$$y(s) = (Kx)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt, \tag{14.1}$$

ки ядрои $K(s,t)$ дар квадрати $[a,b;a,b]$ бефосила мебошад. Ин операторро ҳамчун оператори аз фазои $C[a,b]$ ба $C[a,b]$ амалкунада дида мебароем. Нишон медиҳем, ки K пурра бефосила аст. Дар ҳақиқат, агар E - маҷмӯи маҳдуди фазои $C[a,b]$ бошад, яъне барои ҳамаи $x(t) \in E$, $||x|| < M$ бошад, онгоҳ Kx низ маҳдуд аст: $||y|| = ||Kx|| < M||K||$. Баъдан, агар $x \in E$ бошад, онгоҳ

$$|y(s') - y(s)| \leq \int_a^b |K(s',t) - K(s,t||x(t)|dt \leq M \int_a^b |K(s',t) - K(s,t|)dt$$

мешавад. Акнун, агар s ва s' кифоя наздик бошанд, онгоҳ тарафи рости ин нобаробарӣ новобаста аз функсияи $x(t)$ ба қадри дилхоҳ хурд мешавад. Ин нишонаи он аст, ки маҷмӯи функсияҳои $K(E)$ ботадриҷ бефосила мебошанд, яъне $K(E)$ дар $C[a,b]$ компактӣ мебошанд.

Акнун оператори (14.1) - ро дар фазои $L_2(a,b)$ дида мебароем. Сараввал нишон медиҳем, ки барои ихтиёрӣ $x(t) \in L_2(a,b)$ функсияи $y(s)$ аз (14.1) бефосила аст.

Дар ҳақиқат, аз бефосилагии ядрои $K(s,t)$ дар квадрати $a \leq s,t \leq b$ мебарояд, ки ядро дар ин квадрат мунтазам бефосила аст. Пас барои қимати ихтиёрии $\varepsilon > 0$, чунин адади $\delta > 0$ - ро ёфтан мумкин аст, ки ҳангоми иҷро шудани нобаробарии $|s_1 - s_2 < 2$, нобаробарии $|K(s_1,t) - K(s_2,t)| < \varepsilon$ барои ҳамаи $t \in [a,b]$ иҷро мегардад. Онгоҳ ҳосил мекунем

$$|y(s_1)-y(s_2)| \leq \Big|\int_a^b (K(s_1,t)-K(s_2,t)x(t)dt\Big| \leq \int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t||x(t)|dt \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_a^b |x(t)|dt = \varepsilon||x||_L \leq \varepsilon\sqrt{b-a}||x||_{L_2},$$

чунки аз нобаробарии Коши-Буняковский бармеояд, ки $||x||_L \leq \sqrt{b-a}||x||_{L_2}$ аст. Бо ҳамин бефосилагии функсияи $y(s)$ исбот гардид.

Акнун нишон медиҳем, ки оператори K пурра бефосила аст. Бигузор $E \subset L_2(a,b)$ маҳдуд бошад, яъне, барои ихтиёрӣ $x \in E$, $||x||_{L_2(a,b)} \leq N$ аст, онгоҳ бо $M = \max_{a \leq s,t \leq b} |K(s,t)|$ ишора намуда, мувофиқи нобаробарии Коши-Буняковский ҳосил мекунем

$$|y(s)| = \Big|\int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt\Big| \leq M\sqrt{b-a}||x||_{L_2} \leq MN\sqrt{b-a},$$

яъне $|y(s)| \leq const$, бинобар ин функсияҳои маҷмӯи $K(E)$ мунтазам маҳдуданд. Аз баҳодиҳии дар боло овардашуда ботадриҷ бефосилагии ин функсяҳо мебарояд. Бинобар ин мувофиқи теоремаи Артсела маҷмӯи $K(E)$ дар фазои $C[a,b]$ компактӣ аст ва оператори K дар $C[a,b]$ пурра бефосила аст.

Аз мунтазам наздикшавии функсияҳо наздикшавии онҳо аз рӯи нормаи фазои $L_2(a,b)$ хулоса мебарояд. Бинобар ин, агар ягон маҷмӯи функсияҳои бефосила дар фазои $C[a,b]$ компактӣ бошанд, онгоҳ онҳо дар фазои $L_2(a,b)$ низ компактӣ мешаванд. Хамин тавр оператори интегралии K аз (14.1) ҳамчун оператор аз фазои $L_2(a,b)$ ба худи ҳамин фазо амалкунанда пурра бефосила аст.

14.2 Хосиятҳои асосии операторҳои пурра бефосила

Теорема 14.2. *Агар пайдарпаии операторҳои пурра бефосилаи $\{A_n\}$ дар фазои банахии X аз рӯи норма ба ягон оператори A наздик шаванд, онгоҳ оператори A низ пурра бефосила аст.*

Барои нишон додани пурра бефосилагии оператори A кифоя аст нишон диҳем, ки барои ихтиёрӣ пайдарпаии маҳдуди $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ аз X $(||x_n|| \leq C)$, аз пайдарпаии $\{Ax_n\}$ зерпайдарпаии наздикшаванда ҷудо намудан мумкин аст.

Азбаски оператори A_1 пурра бефосила аст, пас аз пайдарпаии $\{A_1 x_n\}$ зерпайдарпаии наздикшаванда ҷудо намудан мумкин аст. Бигузор

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \dots, x_n^{(1)} \tag{14.2}$$

чунин зерпайдарпаи бошад, ки $\{A_1 x_n^{(1)}\}$ наздикшаванда аст. Акнун пайдарпаии $\{A_2 x_n^{(1)}\}$ - ро дида мебароем. Аз он боз зерпайдарпаии наздикшаванда ҷудо намудан мумкин аст. Бигузор

$$x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \dots, x_n^{(2)}$$

чунин зерпайдарпаии пайдарпаии (14.2) бошад, ки $\{A_2 x_n^{(2)}\}$ наздикшаванда бошад, дар ин маврид албатта $\{A_1 x_n^{(2)}\}$ низ наздикшаванда аст. Айнан ҳамин тавр фикрронӣ намуда аз пайдарпаии $\{x_n^{(2)}\}$ чунин зерпайдарпаии

$$x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ \dots, x_n^{(3)}, \dots$$

- ро ҷудо намудан мумкин аст, ки $\{A_3 x_n^{(3)}\}$ наздикшаванда бошад. Акнун пайдарпаии диогоналии

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(2)},\ \dots, x_n^{(n)}, \dots$$

- ро дида мебароем, ки ҳар яки аз операторҳои $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ин пайдарпаиро ба пайдарпаии наздикшаванда инъикос мекунад. Нишон медиҳем, ки пайдарпаии $\{Ax_n^{(n)}\}$ низ наздикшаванда аст ва дар ин сурат пурра бефосилагии оператори A исбот мегардад. Азбаски фазои X пурра аст, пас кифоя аст нишон диҳем, ки $\{Ax_n^{(n)}\}$ пайдарпаии фундаменталӣ аст. Ҳосил мекунем

$$||Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}|| \leq ||Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}|| + ||A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}|| + ||A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}|. \tag{14.3}$$

Сараввал k - ро чунин интихоб мекунем, ки $||A - A_k|| \leq \frac{\varepsilon}{3C}$ иҷро шавад ва баъдан N - ро чунин интихоб мекунем, ки барои ҳамаи қиматҳои $n > N$, $m > N$ нобаробарии

$$||A_k x_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}|| < \varepsilon$$

иҷро шавад. Ин имконпазир аст, чунки пайдарпаии $\{Ax_n^{(n)}\}$ наздикшаванда аст. Дар ин маврид аз нобаробарии (14.3) бармеояд, ки барои қиматҳои кифоя калони n ва m нобаробарии

$$||Ax_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

иҷро мешавад. Теорема исбот шуд.

Теорема 14.3. *Агар оператори A пурра бефосила ва оператори B маҳдуд бошанд, онгоҳ операторҳои AB ва BA пурра бефосилаанд.*

Исботи ин теорема хело ҳам содда аст. Агар маҷмӯи $M \subset X$ маҳдуд бошад, онгоҳ BM низ маҳдуд аст, бинобар ин ABM маҷмӯи компактӣ аст, яъне AB - оператори пурра бефосила аст. Баръакс, агар M маҳдуд бошад, онгоҳ AM - компактӣ аст, аммо азбаски оператори B маҳдуд аст, пас он бефосила аст ва BAM низ компактӣ мешавад, яъне BA - пурра бефосила аст.

Натиҷа. Дар фазои беохирченакаи X оператори пурра бефосила оператори баръакси маҳдуд доштан наметавонад. Дар ҳақиқат дар акси ҳол оператори воҳидии $I = A^{-1}A$ дар X пурра бефосила мебуд, ки ин номумкин аст.

Акнун ҳамчун татбиқи теоремаи 14.2 натиҷаи теоремаи 14.1 - ро оиди пурра бефосилагии оператори интегралӣ аз (14.1) умумитар мекунем. Бигузор ядрои $K(s,t)$ дар квадрати $a \leq x, s \leq b$ фақат бо квадрати суммирондашаванда бошад. Бе мушкили нишон додан мумкин аст, ки ин оператор хаттӣ буда, фазои $L_2(a,b)$ - ро ба худаш инъикос мекунад. Ҳар як функсияи бо квадрат суммирондашавандаро бо саҳеҳии ихтиёрӣ, ба маънои миёнаи тартиби 2 ба функсияҳои бефосила наздик кунонидан мумкин аст (чунки маҷмӯи функсияҳои бефосила дар фазои L_2 пурра зич мебошанд), яъне чунин пайдарпаиҳои функсияҳои бефосилаи $K_n(s,t)$ дар квадрати $a \leq x, s \leq b$ ёфт мешаванд, ки

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b \Big(K(s,t) - K_n(s,t)\Big)^2 dsdt \to 0 \quad \text{ҳангоми} \quad n \to \infty.$$

Акнун операторҳои интегралии K_n - ро дида мебароем, ки дар фазои $L_2(a,b)$ амал мекунанд ва ба воситаи формулаи

$$y(s) = \int\limits_a^b K_n(s,t)x(t)dt$$

муайян мешаванд. Мувофиқи мисоли 2 ин операторҳо пурра бефосилаанд. Аз баҳои дар он мисол овардашуда ҳосил мегардад, ки

$$||K - K_n|| \leq \Big(\int\limits_a^b \int\limits_a^b \Big(K(s,t) - K_n(s,t)\Big)^2 dsdt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

мебошад. Бинобар ин $||K - K_n|| \to 0$. Пас мувофиқи теоремаи 14.2 оператори K пурра бефосила аст.

Мисоли 3. Оператори $y = Ax$ - ро дида мебароем, ки фазои l_2 - ро ба худаш инъикос мекунад ва ба воситаи ситемаи беохири баробариҳои

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

муайян мегардад, ки дар ин ҷо $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < +\infty$ аст.

Аддитивӣ будани оператор айён аст. Маҳдуд будани оператори A - ро нишон медиҳем.

$$||A_i||^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\Big) =$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1} \infty a_{ik}^2\Big)||x||^2 = M^2||x||^2,$$

яъне

$$||A|| \leq \sqrt{\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}^2}. \tag{14.4}$$

Ҳамин тавр, оператори A маҳдуд аст. Исбот мекунем, ки он пурра бефосила аст. Дар фазои l_2 оператори хаттии A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ - ро дохил мекунем, ки тавассути матрисаҳои $(a_{in}^{(n)})$ муайян мегардад:

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

муайян мегардад, ки дар ин ҷо

$$a_{ik}^{(n)} = a_{ik} \text{ ҳангоми } i \leq n \text{ будан ва } a_{ik}^{(n)} = 0 \text{ ҳангоми } i > n$$

мебошад. Яъне матрисаи $(a_{ik}^{(n)})$ аз матрисаи (a_{ik}) ҳосил мешавад, агар дар он ҳамаи элементҳояшро аз элементи $(n+1)$ - ум сар карда, бо адади нол иваз намоем. Аз ин ҷо бармеояд, ки агар $y = A_n x$ бошад, онгоҳ чӣ гуна $x \in l_2$ набошад, барои $i > n$ $y_i = 0$ аст. Бинобар ин маҷмӯи қиматҳои ҳар яки аз операторҳои A_n охирченака аст ва аз ҳамин лиҳоз операторҳои A_n пурра бефосилаанд. Фарқи $A - A_n$ - ро ба воситаи матрисаҳо ифода намуда, ҳосил мекунем

$$||A - A_n|| \leq \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2} \to 0 \text{ ҳангоми } n \to \infty.$$

Пас оператори A, мувофиқи теоремаи 14.2, пурра бефосила аст.

15 Операторҳои фушурдашаванда

15.1 Теоремаи Банах

Оператори A - ро дида мебароем, ки фазои метрикии X - ро ба фазои метрикии Y инъикос мекунад. Агар ягон элементи $y \in Y$ - ро гирем, онгоҳ баробарии

$$Ax = y$$

– ро ҳамчун муодилаи якномаълума нибат ба x фаҳмидан мумкин аст, яъне муодилаи операторӣ, ки дар он ҳамаи нуқтаҳои x - ро ёфтан лозим аст, ки барои онҳо Ax қимати y - ро қабул менамояд.

Агар A - операторе бошад, ки фазои X - ро ба худи фазо ё ба ягон зермаҷмӯи ин фазо инъикос кунад, онгоҳ нуқтаҳои $x \in X$, ки барояшон баробарии $Ax = x$ иҷро мегардад, **нуқтаҳои беҳаракат** - и оператори A номида мешаванд. Мо акнун операторҳоеро дида мебароем, ки барои онҳо масофаи байни ду нуқтаҳои ихтиёрии образи онҳо, аз масофаи байни худи ин нуқтаҳо хурдтар аст. Ин гуна операторҳо, **операторҳои фушурдашаванда** меноманд, яъне

Таъриф. Оператори A - **оператори фушурдашаванда** номида мешавад, агар чунин адади мусбати $q < 1$ ёфт шавад, ки барои ихтиёрӣ элементҳои x_1, x_2 аз соҳаи муайянии оператори A, нобаробарии

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leq q\rho(x_1, x_2) \tag{15.1}$$

иҷро гардад.

Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки оператори фушурдашавандаи A ҳамеша бефосила аст. Дар ҳақиқат, агар элементҳои x_n ва x_0 аз соҳаи муайянии оператори A гирифта шуда бошанд ва $x_n \to x_0$, онгоҳ аз нобаробарии $\rho(Ax_n, Ax_0) \leq q\rho(x_n, x_0)$ бармеояд, ки $Ax_n \to Ax_0$.

Барои ёфтани нуқтаҳои беҳаракат одатан усули пайдарпай наздикшавиро истифода мебаранд. Схемаи умумии ин усул чунин аст. Бигузор оператори A дар ягон зермаҷмӯи сарбастаи D - и фазои X дода шуда бошад ва қиматҳои он низ таалуқи D бошанд. Нуқтаи ихтиёрии $x_0 \in D$ - ро мегирем ва бо x_1 ишора мекунем $x_1 = Ax_0$. Агар нуқтаи x_0 беҳаракат мебуд, онгоҳ мо ҳосил мекардем, ки $x_1 = x_0$ аст; бинобар ин $x_1 \neq x_0$ аст. Баъдан мегирем $x_2 = Ax_1,\ x_3 = Ax_2,\ \ldots$ ва умуман

$$x_{n+1} = Ax_n. \tag{15.2}$$

Дар айни ҳол аз рӯи шарт $x_n \in D$ аст, пас x_{n+1} низ таалуқи D аст ва бинобар ин нуқтаи ояндаи x_{n+2} аз рӯи (15.2) муайян аст. Ин протсесро то беохирӣ давом дода мо пайдарпаии нуқтаҳои $x_n \in D$ - ро ҳосил мекунем. Агар чунин элементи x^* ёфт шавад, ки $\lim x_n = x^*$ бошад, онгоҳ аз сарбастагии D мебарояд, ки $x^* \in D$ аст. Дар баробарии (15.2) ба ҳудуд гузашта аз бефосилагии оператори A ҳосил мекунем

$$x^* = Ax^*,$$

яъне нуқтаи x^* - нуқтаи беҳаракат аст.

Теорема 15.1. *(Банах.) Агар оператори фушурдашавандаи A фазои метрикии пурраи X - ро ба худаш инъикос намояд, онгоҳ ин оператор нуқтаи ягонаи беҳаракат дорад ва ин нуқтаро тавассути методи пайдарпай наздикшавӣ барои нуқтаи ибтидоии ихтиёрии $x_0 \in X$ ёфтан мумкин аст.*

Исбот. Нуқтаи ихтиёрии $x_0 \in X$ - ро дида мебароем. Аз формулаи (15.2) ва шарти фушурдашавии (15.1) барои адади ихтиёрии n ҳосил мекунем

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leq q\rho(x_n, x_{n-1}).$$

Дар навбати худ $\rho(x_n, x_{n-1}) \leq q\rho(x_{n-1}, x_{n-2})$ аст ва ҳоказо. Ин баҳдиҳиро n маротиба давом дода ҳосил мекунем

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq q\rho(x_n, x_{n-1}) \leq q^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \ldots \leq q^n\rho(x_1, x_0).$$

Акнун нишон медиҳем, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ - фундаменталӣ аст. Бигузор $m > n$ бошад; онгоҳ

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq$$
$$\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + q^n)\rho(x_1, x_0) \leq$$
$$\leq \Big(\sum_{l=n}^{\infty} q^l\Big)\rho(x_1, x_0) = \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0). \tag{15.3}$$

Аз ин ҷо маълум аст, ки ҳангоми $m, n \to \infty \quad \rho(x_m, x_n) \to 0$. Азбаски фазои X пурра аст, пас пайдарпаии $\{x_n\}$ ба ҳудуди x^* майл мекунад ва он нуқтаи беҳаракат аст.

Ягонагии нуқтаи беҳаракат аз шарти фушурдашавӣ мебарояд:
агар x', x'' - ду нуқтаҳои беҳаракат бошанд, онгоҳ

$$\rho(x', x'') = \rho(Ax', Ax'') \leq q\rho(x', x'')$$

мешавад, ки аз ин ҷо $\rho(x', x'') = 0$, яъне $x' = x''$ мебошад.

15.2 Тадбиқи операторҳои фушурдашаванда ба муодилаҳои операторӣ

Принсипи операторҳои фушурдашаванда барои тартиб додани протсесҳои итератсионии муодилаҳои операторӣ хело ҳам васеъ татбиқ мешавад. Якчанд чунин мисолҳоро дида мебароем.

Мисоли 1. Бигузор $f(z)$ - функсияи ҳақиқии дифференсирондашаванда дар порчаи $[a, b]$ бошад ва ҳамаи қиматҳои он низ дохили ин порча бошанд. Бигузор талаб карда шавад, ки ҳалли муодилаи

$$f(x) = x$$

- ро ёбем, яъне нуқтаи бурриши графики функсияи $f(x)$ ва хати рости $y = x$ ёфта шавад.

Функсияи $f(x)$ - ро ҳамчун операторе дида мебароем, ки порчаи $[a, b]$ (зермаҷмӯи фазои пурраи R_1) - ро ба худи ин порча инъикос менамояд. Агар $|f'(x)| \leq q < 1$ бошад, онгоҳ f - оператори фушурдашаванда аст. Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи Лаграж, барои қиматҳои ихтиёрии $x', x'' \in$

$[a, b]$ нобаробарии

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)(x' - x'')| \leq q|x' - x''|$$

ҷой дорад, ки ξ - нуқтаи байни қиматҳои x' ва x'' мебошад. Онгоҳ мувофиқи теоремаи 15.1 ҳалли ягонаи муодилаи $f(x) = x$ мавҷуд аст, ки онро ба воситаи усули пайдарпай наздикшавӣ ёфтан мумкин аст. Барои ин дар нуқтаи ихтиёрии $x_0 \in [a, b]$ қимати $f(x_0)$ - ро ҳисоб мекунем ва аз нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ хати рости $y = f(x_0)$ - ро то бурриш бо хати рости $y = x$ мегузаронем ва нуқтаи $x_1 = f(x_0)$ - ро ҳосил мекунем. Баъдан $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$ ва ҳоказо мегирем. Дар ҳудуд нуқтаи x^* - ро ҳосил мекунем, ки $f(x^*) = x^*$ аст.

Мисоли 2. Шарти кифоягии татбиқшаванда будани усули операторҳои фушурдашаванда барои ҳалли системаи n - муодилаҳои хаттии алгебравии

$$Ax = b \tag{15.4}$$

ёфта шавад, агар

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

бошанд.

Оператори зеринро дида мебароем

$$Vx = (I - A)x + b = Cx + b,$$

ки I - матрисаи воҳидӣ аст. Онгоҳ ҳалли системаи (15.4) нуқтаи беҳаракати оператори V мебошад, ки векторҳои n - ченакаро ба векторҳои n - ченака инъикос мекунад. Сараввал вектори n - ченакаи фазои R_n - ро бо масофаи

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-y_\nu)^2}$$

дида мебароем. Шартеро меёбем, ки оператори V фушурдашаванда бошад. Ба суммаи дохилӣ нобаробарии Коширо татбиқ намуда ҳосил мекунем

$$\rho(Vx',Vx'')=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}c_{k\nu}(x'_\nu-y''_\nu)\Big\}^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}c_{k\nu}^2\sum_{l=1}^{n}(x'_l-y''_l)^2\Big\}}=$$

$$=\rho(x',x'')\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}c_{k\nu}^2}.$$

Аз ин ҷо мебарояд, ки агар

$$q=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}c_{k\nu}^2<1 \tag{15.5}$$

гирем, ки

$$c_{k\nu}=\begin{cases}-a_{k\nu}, & \text{ҳангоми } k\neq\nu,\\ 1-a_{\nu\nu}, & \text{ҳангоми } k=\nu\end{cases}$$

аст, онгоҳ системаи (15.4) ҳалли ягона дорад, ки онро ба воситаи усули пайдарпай наздикшавӣ ёфтан мумкин аст.

Қайд мекунем, ки шарти (15.5) талаб мекунад, ки қимати коэффисиентҳои системаи (15.4) аз рӯи қимати мутлақашон на он қадар калон бошанд, аз он ҷумла ин ба коэффисиентҳои диогоналӣ низ дахл дорад, ки намудашон $1-a_{\nu\nu}$ аст, яъне коэффисинтҳои $a_{\nu\nu}$ ба як наздик бошанд.

Мисоли 3. Бигузор функсияи $K(t,s)$ дар квадрати $a\le t,s\le b$ дода шуда бошад ва шарти

$$M^2=\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^2dtds<\infty \tag{15.6}$$

- ро қаноат кунад ва бигузор $g(t) \in L_2(a,b)$ бошад. Онгоҳ муодилаи оператории зеринро дар фазои $L_2(a,b)$ дида мебароем

$$(Af)(t) = f(t), \tag{15.7}$$

ки оператори A намуди

$$(Af)(t) = g(t) + \lambda \int_a^b \int_a^b K(t,s) f(s) dt ds.$$

дорад. Нишон медиҳем, ки барои қиматҳои хурди параметри λ муодилаи оператории (интегралии) (15.7) дар фазои $L_2(a,b)$ ҳалли ягонаи $f(t) \in L_2(a,b)$ дорад.

Ҳосил мекунем

$$\rho(Af_1, Af_2) = \Big\{ \int_a^b \Big(\lambda \int_a^b K(t,s) f_1(s) ds - \lambda \int_a^b K(t,s) f_2(s) ds \Big)^2 dt \Big\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda| \Big\{ \int_a^b \Big(\int_a^b K(t,s)(f_1(s) - f_2(s)) ds \Big)^2 dt \Big\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq |\lambda| \Big\{ \int_a^b \int_a^b K^2(t,s) ds dt \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big(\int_a^b (f_1(s) - f_2(s)) ds \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda| \Big\{ \int_a^b \int_a^b K^2(t,s) ds dt \Big\}^{\frac{1}{2}} \rho(f_1, f_2).$$

Акнун, агар аз параметри λ талаб кунем, ки шарти $|\lambda| < \frac{1}{M}$ - ро қаноат кунад, ки дар ин ҷо адади M аз баробарии (15.6) муайян карда мешавад, онгоҳ мувофиқи теоремаи 15.1 муодилаи оператории (15.7) дар фазои $L_2(a,b)$ ҳалли ягонаи $f(t)$ дорад.

Мисоли 4. Нишон медиҳем, ки бо татбиқи теоремаи 15.1, оиди операторҳои фушурдашаванда, теорема дар бораи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи дифференсиалии тартиби якумро исбот намудан мумкин аст.

Муодилаи дифференсиалии тартиби якро

$$y' = f(x, y) \tag{15.8}$$

дида мебароем, ки шарти ибтидоии

$$y|_{x=x_0} = y_0 \tag{15.9}$$

- ро қаноат мекунонад.

Бигузор дар росткунҷаи $D = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ функсияи $f(x, y)$ - бефосила ва маҳдуд $|f(x, y)| < M$ бошад. Бигузор ғайр аз ин чунин адади $K > 0$ мавҷуд бошад, ки нобаробарии

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K|y_1 - y_2|$$

барои ҳамаи қиматҳои $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ ва ду қиматҳои ихтиёрии $y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_o + b]$ иҷро гардад, яъне функсияи $f(x, y)$ нисбати тағйирёбандаи y шарти Липшитсро қаноат кунад. Исбот мекунем, ки бо иҷро шудани ин шартҳо чунин адади мусбати кифоя хурди h ёфт мешавад, ки дар порчаи $[x_0 - h, x_0 + h]$ ҳалли муодилаи (15.8), ки шарти (15.9) - ро қаноат мекунад, мавҷуд ва ягона аст.

Барои исбот муодилаи дифференсиалии (15.8) - ро ба муодилаи интегралӣ меорем. Бо дар назардошти он, ки y функсияи аргументи x аст, аз ҳар ду тарафи баробарии (15.8) - аз x_0 то тағйирёбандаи x интеграл мегирем. Азбаски мувофиқи шарти ибтидоии (15.9) $\int_{x_0}^{x} y'(x)dx = y - y_0$ аст, мо муодилаи

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \tag{15.10}$$

– ро ҳосил мекунем. Муодилаи интегралии (15.10) ба муодилаи дифферансиалии (15.8) бо шарти ибтидоии (15.9) баробарқувва аст. Дар ҳақиқат, агар аз баробарии (15.10) нисбати x ҳосила гирем, мо муодилаи дифференсиалии (15.8) - ро ҳосил мекунем ва бевосита дидан мумкин аст, ки агар функсияи y муодилаи интегралии (15.10) - ро қаноат кунад, онгоҳ ҳангоми $x = x_0$ будан $y = y_0$ мешавад.

Фазои функсияҳои дар порчаи $\delta = [x_0 - h, x_0 + h]$ бефосилаи C - ро дида мебароем, ки h - адади ихтиёрии аз ададҳои додашудаи a, $\frac{1}{K}$, ва $\frac{b}{M}$ хурдтар аст. Дар фазои C курраи сарбастаи $S(y_0, b)$ (марказаш дар нуқтаи y_0 ва радиусаш ба b баробар)

$$y_0 - b \leq y(x) \leq y_0 + b$$

- ро дида мебароем. Дар кураи $S(y_0, b)$ муодилаи операторији

$$(Ay)(x) = z(x) \quad (x \in \delta) \tag{15.11}$$

- ро ворид мекунем, ки $Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$ аст.

Нишон медиҳем, ки ҳамаи қиматҳои оператори A дар дохили $S(y_0, b)$ мехобанд ва оператор фушурдашаванда аст.

Агар $y \in S(y_0, b)$ бошад, он гоҳ барои қимати ихтиёрии $x \in \delta$ нуқтаи $(x, y(x) \in D$ мебошад, бинобар ин тарафи рости (15.11) маъно дорад ва

$z \in C$. Ғайр аз ин $|f(x, y(x))| \le M$ аст ва бинобар ин барои ихтиёрӣ $x \in \delta$

$$|z(x) - y_0| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx\Big| \le M|x - x_0| \le M\frac{b}{M} = b$$

мешавад, пас $z \in S(y_0, b)$ аст.

Акнун бигузор $y_1, y_2 \in S(y_0, b)$ ва $z_1 = Ay_1, z_2 = Ay_2$ бошанд. Онгоҳ барои ихтиёрӣ $x \in \delta$ мувофиқи шарти Липшитс ҳосил мекунем

$$|z_1(x) - z_2(x)| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx - \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_2(x))dx\Big| \le$$

$$\le \int\limits_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))dx\Big| \le K\Big|\int\limits_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_2(x)|\Big| \le$$

$$\le K \max_{x,\delta} |y_1(x) - y_2(x)||x - x_0| \le K\rho(y_1, y_2)h = q\rho(y_1, y_2),$$

ки дар ин ҷо $q = Kh < 1$ мебошад. Аз ин ҷо $\rho(z_1, z_2) \le q\rho(y_1, y_2)$ мешавад, яъне мувофиқи теоремаи 15.1 оператори A фушурдашаванда аст.

16 Операторҳои баръакс

16.1 Таъриф ва хосиятҳои операторҳои баръакс

Системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ, муодилаҳои интегралӣ ва масъалаҳои мухталифи муодилаҳои дифференсиалии муқаррарӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар бисёр мавридҳо ба таври муодилаи хаттии операторӣ

$$Ax = y \tag{16.1}$$

навишта мешаванд. Бинобар ин мо аз ҳолатҳои хусусии масъалаҳо сарфи назар намуда, диққатамонро ба қонуниятҳои умумии ин операторҳо ҷалб менамоем. Агар ҳалли муодилаи (16.1) ягона бошад, онгоҳ барои ҳар як қимати y, ки барои он муодила ҳал дорад, ҳалли мувофиқи он x - ро мувофиқ гузошта, мо оператори A^{-1} - ро ҳосил мекунем, ки $x = A^{-1}y$ ҳалли муодилаи (16.1) буда, оператори A^{-1} бошад, оператори баръакси A номида мешавад. Аниқтар

Таърифи 1. Бигузор оператори A аз фазои X ба фазои Y амал кунад ва $D = AX$ маҷмӯи қиматҳои он бошад. Агар ба ҳар як қимати $y \in D$ танҳо як қимати $x \in X$ мувофиқ ояд, ки $Ax = y$ бошад, онгоҳ оператори ҳосилшуда баръакси оператори A номида мешавад ва бо A^{-1} ишора карда мешавад, яъне $A^{-1}A = I$, ки I - оператори воҳидӣ аст.

Акнун хело ҳам муҳим аст, шартҳоеро муайян намоем, ки бо иҷро шудани онҳо оператори баръакс вуҷуд дорад ва хосиятҳои заруриро доро мегардад. Бигузор акнун фазоҳои X ва Y фазоҳои нормирондашуда бошанд. Баъзе хосиятҳои операторҳои баръаксро қайд мекунем.

Хосияти 1. *Агар оператори A аддитивӣ бошад, онгоҳ $D = AX$ - маҷмӯи хаттӣ аст.*

Дар ҳақиқат, агар $y_1, y_2 \in D$ бошанд, пас $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2,\ x_1, x_2 \in X$. Онгоҳ $y_1 + y_2 = A(x_1 + x_2)$ низ ба D дохил мешаванд. Айнан, агар $y \in D$ бошад, яъне барои ягон $x \in X, y = Ax$ бошад, онгоҳ $\alpha y = A(\alpha x) \in D$ мешавад.

Хосияти 2. *Агар оператори A аддитивӣ ва якҷинса буда, оператори барғакси A^{-1} мавҷуд бошад, онгоҳ A^{-1} низ аддитивӣ ва якҷинса мешавад.*

Дар ҳақиқат, бигузор $y_1, y_2 \in D,\ x_1 = A^{-1}y_1,\ x_2 = A^{-1}y_2$, бошанд. Онгоҳ $Ax_1 = y_1,\ Ax_2 = y_2$ ва $A(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ мешаванд. Ин маънои онро дорад, ки $x_1 + x_2 = A^{-1}(y_1 + y_2)$, яъне оператори A^{-1} аддитивӣ аст. Айнан ҳамин тавр, агар $y \in D$ ва $x = A^{-1}y$ бошад, пас барои ихтиёрӣ α, $\alpha x = A^{-1}(\alpha y)$ аст.

Хосияти 3. *Барои он, ки оператори аддитивии A оператори баръакс дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки $Ax = 0$ фақат дар сурати $x = 0$ буданҷой дорад.*

Дар ҳақиқат, агар $Ax = 0$ фақат ҳангоми $x = 0$ будан бошад, онгоҳ ҳангоми $x_1 \neq x_2$ будан, $A(x_1 - x_2) \neq 0$ аст. Бинобар ин муодилаи $Ax = y$ барои ҳар як қимати $y \in D$ ҳалли ягона дорад. Баръакс, агар A^{-1} мавҷуд бошад, онгоҳ муодилаи $Ax = 0$ фақат ҳалли ягонаи $x = 0$ дорад.

Теорема 16.1. *Барои он, ки оператори баръакс A^{-1} мавҷуд ва хаттӣ бошад, зарур ва кифоя аст, чунин адади $m > 0$ мавҷуд бошад, ки барои ҳамаи $x \in X$ нобаробарии*

$$||Ax|| \geq m||x|| \tag{16.2}$$

иҷро шавад. Дар ин маврид $||A^{-1}|| \leq 1/m$ мешавад.

Исбот. Агар оператори $x = A^{-1}y$ хаттӣ бошад, онгоҳ

$$||x|| \leq ||A^{-1}||\ ||y||$$

мешавад, ки $y = Ax$ аст. Дар ин маврид $||A^{-1}|| \neq 0$ аст. Акнун агар $m = \frac{1}{||A^{-1}||}$ гирем, мо нобаробарии (16.2) - ро ҳосил мекунем.

Баръакс, агар нобаробарии (16.2) иҷро шуда бошад, онгоҳ аз баробарии $Ax = 0$ҳосил мекунем, ки $x = 0$ аст ва оператори A^{-1} мавҷуд аст. Акнун $y = Ax$ гирифта аз (16.2) ҳосил мекунем $||A^{-1}y|| \leq 1/m||y||$, бинобар ин A^{-1}хаттӣ ва $||A^{-1}|| < 1/m$ мешавад.

Дар ҳолате, ки фазоҳои X ва Y фазоҳои банахӣ мебошанд, чунин теоремаи Банах ҷой дорад

Теорема 16.2. *Агар A - оператори хаттии маҳдуд фазои банахии X - ро ба фазои банахии Y байни ҳам як ба як инъикос кунад, онгоҳ оператори барғакси он A^{-1} маҳдуд аст.*

Исботи ин теоремаро масалан аз китоби [4] ёфтан мумкин аст.

Теорема 16.3. *Агар A - оператори хаттии фазои банахии X - ро ба худи ин фазо инъикос кунад ва нормаи он $||A|| < 1$ бошад, онгоҳ оператори $I-A$ - оператори баргарданда аст ва*

$$||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-q}$$

мебошад.

Исбот. Бигузор $||A|| < 1$ бошад. Адади ихтиёрии q - ро мегирем. ки нобаробарии $||A|| \leq q < 1$ иҷрошавад. Онгоҳ барои ҳар як элементи $x \in X$ ҳосил мекунем

$$||(I-A)x|| = ||x - Ax|| \geq ||x|| - ||Ax|| \geq ||x|| - q||x|| = (1-q)||x||.$$

Бинобар ин мувофиқи теоремаи 1 оператори баръакси $(I-A)^{-1}$ мавҷуд ва хаттӣ аст, инчунин $||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-q}$ аст.

Акнун нишон додан лозим аст, ки маҷмӯи қиматҳои $I-A$ тамоми фазои X аст. Барои ин элементи ихтиёрии $y \in X$ - ро мегиреем ва оператори

$$Bx = Ax + y$$

- ро тартиб медиҳем (агар $y \neq 0$ бошад, онгоҳ оператори B ғайрихаттӣ аст). Онгоҳ барои ихтиёрӣ $x_1, x_2 \in X$

$$||Bx_1 - Bx_2|| = ||Ax_1 - Ax_2|| = ||A(x_1 - x_2)|| \leq q||x_1 - x_2||$$

мешавад, бинобар ин оператори B фушурдашаванда аст. Мувофиқи теоремаи Банах оператори B ягона нуқтаи беҳаракат дорад, яъне чунин элементи $x \in X$ мавҷуд аст, ки барои он $x = Ax + y$ мебошад, яъне $(I - A)x = y$ аст. Ҳамин тавр, ихтиёрӣ элементи $y \in X$ ба соҳаи қиматҳои $I - A$ дохил мешавад. Теорема исбот шуд.

16.2 Мисолҳои операторҳои баръакс

Мисоли 1. Муодила бо оператори интегралии Фредголм бо ядрои тағйирёбандаҳояш ҷудошудаи зеринро дар фазои $C[a, b]$ дида мебароем

$$(Kf)(x) \equiv f(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt = g(x), \ x \in [a, b], \tag{16.3}$$

ки дар ин ҷо $g(x)$ - функсияи додашудаи фазои $C[a, b]$, ядрои $K(x,t)$ бошад намуди

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)$$

дорад ва функсияҳои $a_k(x), b_k(t)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ функсияҳои додашудаи хаттӣ новобастаи фазои $C[a, b]$ мебошанд.

Муодилаи (16.3) - ро дар намуди зерин менависем

$$f(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t) f(t) dt \tag{16.4}$$

ва ишораи

$$\int_a^b b_k(t) f(t) dt = C_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

- ро дохил намуда, ҳосил мекунем

$$f(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x). \tag{16.5}$$

Ҳамин тавр ҳалли муодилаи интегралии (16.3)- ро ба ёфтани ададҳои доимии $C_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$ овардем. Қиматҳои (16.5) - ро ба (16.4) гузошта, ҳосил мекунем

$$\sum_{m=1}^{n}\Big\{C_m - \int\limits_a^b b_m(t)[g(t) + \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t)]dt\Big\}a_m(x) = 0.$$

Аз ин ҷо дар асоси хаттӣ новобаста будани функсияҳои $a_m(x)$ $(m = 1, 2, \cdots, n)$ ҷорӣ мегардад, ки

$$C_m - \int\limits_a^b b_m(t)[g(t) + \lambda\sum_{k=1} nC_k a_k(t)]dt = 0$$

аст, ё ин ки бо истифодаи ишораҳои

$$\alpha_{km} = \int\limits_a^b a_k(t)b_m(t)dt, \quad g_m = \int\limits_a^b b_m(t)g(t)dt$$

мо ба системаи муодилаҳои хаттии алгебравии

$$C_m - \lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_{km}C_k = g_m \tag{16.6}$$

меоем, ки ба муодилаи интегралии (16.3) баробарқувва аст.

Агар муайянкунандаи ин система

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \cdots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \cdots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \cdots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{16.7}$$

бошад, онгоҳ системаи (16.6) мувофиқи қоидаи Крамер ҳалли ягонаи

$$C_k = \frac{\Delta_k(\lambda, g)}{\Delta(\lambda)}, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

дорад, ки

$$\Delta_k(\lambda, g) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & \cdots & -\lambda\alpha_{1k-1} & g_1-\lambda\alpha_{1k+1} & \cdots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & \cdots & 1-\lambda\alpha_{2k-1} & g_2-\lambda\alpha_{1k+1} & \cdots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ -\lambda\alpha_{n1} & \cdots & -\lambda\alpha_{nk-1} & g_n-\lambda\alpha_{1k+1} & \cdots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix} \qquad (16.8)$$

мебошад. Ҳамин тавр, муодилаи интегралии (16.3) ҳангоми $\Delta(\lambda) \neq 0$ будан ҳалли ягонаи

$$f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k(\lambda, g)}{\Delta(\lambda)} a_k(x) \qquad (16.9)$$

дорад. Аз (16.9) бармеояд, ки

$$\max_{[a,b]|f(x)|} \leq m(x) \max_{[a,b]} |g(x)|,$$

яъне

$$||f(x)|| \leq m(\lambda)||g(x)||$$

мебошад. Ин нобаробарӣ маънои онро дорад, ки оператори интегралии K аз (16.3) дар фазои $C[a, b]$ оператори баръакси K^{-1} дорад ва

$$||K^{-1}|| \leq m(\lambda)$$

аст.

Мисоли 2. Муодилаи хаттии дифференсиалии тартиби n - умро

$$(Ax)(t) \equiv x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)x(t) = y(t) \qquad (16.10)$$

дида мебароем, ки дар ин ҷо $y(t)$ ва $a_k(t), k = 1, 2, \cdots, n$ - функсияҳои дар порчаи $[0, T]$ додашудаи бефосила мебошанд ва ҳалли ин муодиларо, ки шартҳои ибтидоии

$$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0 \qquad (16.11)$$

- ро қаноат мекунанд, меёбем. Аз нуқтаи назари операторӣ ин маънои онро дорад, ки соҳаи муайянии $D(A)$ аз функсияҳои n маротиба дар $[0,T]$ дифференсирондашаванда иборат буда, шартҳои (16.11) - ро қаноат мекунанд.

Бигузор $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ - системаи n функсияҳои хаттӣ новобастаи ҳалҳои муодилаи якҷинсаи мувофиқи (16.10) $(y(x) \equiv 0)$бошанд. Муайянкунандаи Вронский $W(t)$:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

- ро дида мебароем. Маълум аст, ки $W(t) \neq 0,\ t \in [0,T]$. Мувофиқи усули вариатсияи доимиҳои ихтиёрии Лагранж ҳалли масъалаи (16.10)-(16.11) ба намуди зерин ҷустуҷӯ мешавад

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t)$$

ва барои функсияҳои ихтиёрии номаълуми $c_k(t)$ чунин системаи муодилаҳо ҳосил мешавад

$$c_1'(t)x_1(t) + \cdots + c_n'(t)x_n(t) = 0,$$

$$c_1'(t)x_1'(t) + \cdots + c_n'(t)x_n'(t) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = y(t).$$

Ин системаро аз рӯи қоидаи Крамер ҳал намуда, ҳосил мекунем

$$c_k'(t) = \frac{w_k(t)}{w(t)}y(t),\ k = 1, 2, \cdots, n,$$

ки дар ин ҷо $w_k(t)$ - пуркунандаи алгебравии элементи k - уми сатри n - уми муайянкунандаи $W(t)$ мебошад. Бо назардошти шарти (16.11), ҳалли масъалаи (16.10),(16.11) - ро ба намуди ошкор меёбем

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) \int_0^t \frac{w_k(s)}{w(s)} y(s) ds \tag{16.12}$$

Ин ҳал ягона буда, аз он баргардандагии бефосилаи оператори A ҷорӣ мегардад. Дар ҳақиқат,

$$||x||_{C[0,T]} \leq M||y||_{C[0,T]},$$

ки

$$M = \max_{[0,T]} \sum_{k=1}^{n} |x_k(t)| \int_0^t \left|\frac{w_k(s)}{w(s)}\right| ds$$

мебошад.

16.3 Усулҳои параметри хурд

Пеш аз он, ки усулҳои параметри хурдро дида бароем, мо аввал ду теоремаи муҳими дигарро оиди операторҳои баръакс исбот мекунем.

Бигузор X - фазои банахӣ бошад. Фазои банахии $L(X)$ - ро дида мебароем, ки он аз операторҳои маҳдуд иборат аст. Бигузор I - оператори воҳидӣ аз $L(X)$ бошад. Айён аст, ки I бефосила баргарданда аст. Нишон медиҳем, ки ҳамаи операторҳои $A \in S_1(I)$ - кураи воҳидӣ аз $L(X)$ баргардандаанд, яъне ҳамаи операторҳои A, ки барои онҳо нобаробарии $||A - I|| < 1$ иҷро мегардад. Бо C оператори $I - A$ - ро ишора мекунем.

Теорема 16.4. *Бигузор $C \in L(X)$ ва $||C|| < 1$ бошад; онгоҳ оператори $I - C$ бефосила баргарданда аст ва баҳодиҳии зерин ҷой дорад*

$$||(I-C)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||C||}, \tag{16.13}$$

$$||I-(I-C)^{-1}|| \leq \frac{||C||}{1-||C||}. \tag{16.14}$$

Исбот. Дар $L(X)$ қатори зеринро дида мебароем

$$I + C + C^2 + C^3 + \cdots \tag{16.15}$$

Азбаски $||C^k|| \leq ||C||^k$ аст, пас барои қатори (16.15) прогрессияи геометрӣ

$$1 + ||C|| + ||C||^2 + ||C||^3 + \cdots$$

қатори мажорантӣ мебошад. Мувофиқи аломати Вейерштрасс қатори (16.15) мунтазам наздик мешавад, яъне

$$S_n = I + C + \cdots + C^n \to S,\ n \to \infty,$$

ки S - суммаи қатори (16.15) мебошад. Баъдан бевосита санҷидан мумкин аст, ки

$$(I-C)S_n = I - C^{n+1}, \quad S_n(I-C) = I - C^{n+1}$$

аст. Аммо ҳангоми $n \to \infty$ $C^{n+1} \to 0$ (чунки $||C^{n+1}|| \leq ||C||^{n+1}$ ва $||C|| < 1$ аст) ва $S_n \to S$. Бинобар ин баробариҳои зеринро ҳосил мекунем $(I-C)S = I$ ва $S(I-C) = I$. Аз ин ҷо бармеояд, ки $I - C$ бефосила баргарданда ва $S = (I-C)^{-1}$ мебошад. Пас, ҳосил мекунем

$$||S_n|| \leq 1 + ||C|| + \cdots + ||C||^n = \frac{1-||C||^{n+1}}{1-||C||},$$

$$||I - S_n|| \leq ||C|| + \dots + ||C||^n = \frac{||C|| - ||C||^{n+1}}{1 - ||C||}.$$

Дар ин нобаробариҳо ҳангоми $n \to \infty$ ба ҳудуд гузашта баҳоҳои (16.13) ва (16.14) - ро ҳосил мекунем.

Теорема 16.5. *Бигузор A - оператори хаттии бефосилаи аз фазои банахии X ба фазои банахии Y амалкунанда ва бефосила баргарданда бошад. Бигузор оператори $B \in L(X, Y)$ ва $||B|| \leq ||A^{-1}||^{-1}$ бошад. Онгоҳ оператори $A + B$ бефосила баргарданда, яъне $A + B \in L(X, Y)$ ва*

$$||(A + B)^{-1}|| \leq (||A^{-1}||^{-1} - ||B||)^{-1} \tag{16.16}$$

мебошад.

Исбот. Муодилаи

$$(A + B)x = y \tag{16.17}$$

- ро аз тарафи чап ба оператори A^{-1} зарб зада ҳосил мекунем

$$x - Cx = A^{-1}y,\ C = -A^{-1}B. \tag{16.18}$$

Азбаски $||C|| \leq ||A^{-1}||\,||B|| < 1$ аст, пас ба муодилаи (16.18) принсипи операторҳои фушурдашавандаро тадбиқ намудан мумкин аст ва мо ҳосил мекунем, ки муодилаи (16.17) ҳалли ягона дорад, ин маънои онро дорад, ки барои $A + B$ оператори баръакс вуҷуд дорад ва соҳаи тағйрёбии он тамоми фазои Y мебошад.

Акнун нобаробарии (16.16) - ро исбот мекунем. Аз баробарии $x = A^{-1}Ax$ бармеояд, ки

$$||x|| \leq ||A^{-1}||\,||Ax||$$

ва бинобар ин

$$||Ax|| \geq ||A^{-1}||^{-1}||x||$$

аст. Барои қимати ихтиёрии $y \in Y$ аз (16.17) ҳосил мекунем

$$||y|| = ||(A+B)x|| \geq ||Ax|| - ||Bx|| \geq$$

$$\geq ||A^{-1}||^{-1}||x|| - ||B||\,||x|| = (||A^{-1}||^{-1} - ||B||)^{-1}$$

ки аз ин ҷо нобаробарии (16.16) ҳосил мешавад.

16.4 Усули параметри хурд дар ҳолати оддитарин

Акнун ба омӯхтани усули параметри хурд мегузарем. Аввал муодилаи операторонии зеринро дида мебароем:

$$Ax - \lambda Cx = y. \tag{16.19}$$

Дар ин ҷо $A, C \in L(X, Y)$ ва $y \in Y$ буда, λ - параметри скалярӣ мебошад, ки $|\lambda| < \rho$ аст. Номаълум x аз фазои банахии X ҷустӯҷӯ мешавад. Агар $||\lambda CA^{-1}|| < 1$ бошад, яъне

$$|\lambda| < ||\lambda CA^{-1}||^{-1}, \tag{16.20}$$

онгоҳ, мувофиқи теоремаи 16.5 оператори $A - \lambda C$ бефосила баргарданда мебошад ва ҳалли муодилаи (16.19) мавҷуд, ягона ва ба воситаи формулаи

$$x(\lambda) = (A - \lambda C)^{-1}y \tag{16.21}$$

ифода меёбад. Аз ин ҷо мебарояд, ки дар доираи (16.20) ҳалли муодила функсияи аналитикӣ аз параметрӣ λ мебошад ва бинобар ин ба намуди зерин ёфта мешавад

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k. \tag{16.22}$$

Қатори (16.22) - ро ба муодилаи (16.19) гузошта, мувофиқи теоремаи ягонагии паҳншавӣ ба қатори дараҷагӣ, коэффисентҳои назди дараҷаҳои якхелаи λ - и тарафҳои рост ва чапи айнияти зеринро

$$\sum_{k=0}^{\infty} A x_k \lambda^k = y + \sum_{k=0}^{\infty} C x_k \lambda^{k+1}$$

баробар намуда, барои муайян намудани $x_0, x_1, \ldots$ системаи муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$Ax_0 = y, \ Ax_1 = Cx_0, \ \ldots, \ Ax_k = Cx_k, \ldots$$

Азбаски оператори A бефосила баргарданда аст, пас аз ин ҷо меёбем

$$x_0 = A^{-1}y, \ x_1 = A^{-1}(CA^{-1})y, \ \ldots, \ x_k = A^{-1}(CA^{-1})^k y, \ldots$$

мебошад. Бинобар ин

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{-1}(CA^{-1})^k y \lambda^k \tag{16.23}$$

аст. Агар аз қатори (16.23) суммаи хусусии он

$$x_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} A^{-1}(CA^{-1})^k y \lambda^k \tag{16.24}$$

- ро тарҳ намоем ва ин фарқро аз рӯи норма баҳо диҳем, хосил мекунем

$$||x(\lambda) - x_n(\lambda)|| = \Big|\Big| \sum_{k=n+1}^{n} A^{-1}(CA^{-1})^k y \lambda^k \Big|\Big| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{n} ||A^{-1}|| \, ||CA^{-1}||^k ||y|| \, |\lambda|^k = \frac{||A^{-1}||(||CA^{-1}|| \, |\lambda|)^{n+1}}{1 - |\lambda| \, ||CA^{-1}||} ||y||.$$

16.5 Усули параметри хурд дар ҳолати умумӣ

Бигузор муодилаи оператории зерин дода шуда бошад

$$A(\lambda)x = y(\lambda), \tag{16.25}$$

ки дар ин ҷо барои ҳар як қимати парамтри $\lambda : |\lambda| < \rho$ оператори $A(\lambda) \in L(X, Y)$, яъне $A(\lambda)$ - оператор – функсия мебошад. Бигузор $A(\lambda)$ дар нуқтаи $\lambda = 0$ аналитикӣ ва $A(0)$ - оператори бефосила баргарданда бошад. Функсияи $y(\lambda)$ – аналитикӣ ва $y(0) \in Y$ бошад Номаълуми x дар фазои X ҷустуҷӯ мешавад.

Аналитикӣ будани $A(\lambda)$ ва $y(\lambda)$ дар нуқтаи 0 маънои онро дорад, ки онҳо ба қаторҳои дараҷагии радусҳояшон ғайринулии мувофиқан ба ρ', ρ баробар буда, паҳн мешаванд:

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k, \quad y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \lambda^k. \tag{16.26}$$

Аз аналитикинокӣ будани $A(\lambda)$, бефосилагии он дар нуқтаи $\lambda = 0$ бармеояд. Бинобар ин, чунин адади $r > 0$ ёфт мешавад, ки дар доираи $|\lambda| < r$

$$||(A(\lambda) - A(0))A^{-1}(0)|| < 1$$

мешавад. Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки дар доираи $|\lambda| < r$ оператор - функсияи $A(\lambda)$ бефосила баргарданда аст ва бинобар ин муодилаи (16.25) ҳалли ягонаи

$$x(\lambda) = A^{-1}(\lambda)y(\lambda)$$

дорад. Барои ба намуди ошкор ёфтани $x(\lambda)$ аз усули параметри хурд, ки дар пункти гузашта оварда шуда буд, истифода мекунем. Яъне ҳалли муодилаи операторӣи (16.25) – $x(\lambda)$ - ро дар намуди

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \tag{16.27}$$

ҷустуҷӯ мекунем. Қатори (16.27) - ро ба муодилаи (16.25) гузошта, баробарии (16.26) - ро истифода бурда барои номаълумҳо $x_0, x_1, x_3, \ldots$ системаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
&A_0 x_0 = y_0,\\
&A_0 x_1 + A_1 x_0 = y_1,\\
&A_0 x_2 + A_1 x_1 + A_2 x_0 = y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{k=0}^{\infty} A_k x_{n-k} = y_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{16.28}$$

Ин системаро паи ҳам ҳал намуда, ҳосил мекунем

$$x_0 = A_0^{-1} y_0, \quad x_1 = A_0^{-1} y_1 - A_0^{-1} A_1 A_0^{-1} y_0, \ldots. \tag{16.29}$$

Мисол. Ба сифати мисоли татбиқи усули параметри хурд, муодилаи интегралии зеринро бо параметри хурди ҳақиқии λ дида мебароем:

$$x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t - s + \lambda t s) x(s) ds = y(t). \tag{16.30}$$

Ин муодиларо мо ҳамчун муодилаи хаттии операторӣи намуди (16.25) дар фазои $C[-\pi, \pi]$ дида мебароем.

Аввал қайд мекунем, ки

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} \cos(t - s + \lambda t s) = (ts)^k \cos(t - s + \lambda t s + k\frac{\pi}{2})$$

аст. Бинобар ин

$$\cos(t-s+\lambda ts)=\sum_{k=0}^{\infty}(ts)^k\cos(t-s+\lambda ts+k\frac{\pi}{2})\lambda^k$$

мешавад.

Ҳамин тавр, коэффисиентҳои операторӣи A_k аз (16.26) намуди зерин доранд:

$$\begin{aligned} &A_0x\equiv x(t)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)x(s)ds,\\ &A_kx\equiv -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ts)^k\cos(t-s+k\frac{\pi}{2})x(s)ds,\quad k=1,2,\dots \end{aligned}\tag{16.31}$$

Муодилаи $A_0x_0=y$ системаи (16.28) - ро дида мебароем, ки дар ҳолати мисоли мо акнун $y_0=y, y_k=0, k\geq 1$ аст. Ин муодилаи интегралии Фредголм бо ядрои тағйирёбандааш ҷудошудаи

$$x_0(t)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)x_0(s)ds=y(t)\tag{16.32}$$

мебошад. Дар ҳақиқат, $\cos(t-s)=\cos t\cos s+\sin t\sin s$ аст ва бинобар ин

$$x_0(t)=y(t)+\mathcal{A}\cos t+\mathcal{B}\sin t\tag{16.33}$$

аст, ки

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x_0(s)\cos sds,\quad \mathcal{B}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x_0(s)\sin sds\tag{16.34}$$

мебошанд.

Баробарии (16.33) - ро ба $\cos t$ зарб намуда, нисбат ба t аз $-\pi$ то π интегронида, бо истифода аз (16.34), ҳосил мекунем

$$\mathcal{A}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(s)\cos sds.$$

Айнан ҳамин тавр

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(s)\sin s ds.$$

Бинобар ин (16.33) намуди зеринро мегирад:

$$x_0(t) = y(t) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)y(s)ds. \tag{16.35}$$

Фикрронии болоӣ нишон медиҳад, ки муодилаи $A_0x_0 = y$ дар фазои $C[-\pi,\pi]$ ҳалли ягона дорад ва ин ҳал ба воситаи формулаи (16.35) ифода меёбад. Бинобар ин оператори A_0^{-1} дар тамоми $C[-\pi,\pi]$ мавҷуд аст ва

$$||x_0|| = ||A_0^{-1}y \le ||y|| + \frac{1}{\pi}\max_{t\in[-\pi,\pi]}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(t-s)|ds||y|| \le (1+\frac{4}{\pi})||y||.$$

Бинобар ин $||A_0^{-1}|| \le 1 + 4/\pi$ аст.

Муодилаи дуйӯми системаи (16.28) намуди $A_0x_1 = -A_1x_0$ дорад, ё ин ки

$$x_1(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)x_1(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ts\sin(t-s)x_0(s)ds$$

мебошад, ки дар ин ҷо функсияи $x_0(s)$ аллакай аз формулаи (16.35) муайян шудааст. Ин боз муодилаи намуди (16.32) аст, ки ҳалли онро ба таври ошкор ёфтан мумкин аст. Ҳамин тавр, ҳамаи коэффисиентҳои қатори (16.27) муайян мешаванд.

16.6 Усули давомдиҳӣ аз рӯи параметр

Бигзор операторҳои $A, B \in L(X,Y)$ ва оператори A бефосила баргардан-да бошад. Агар $||B - A|| < ||A||^{-1}$ бошад, онгоҳ мувофиқи теоремаи 16.5

оператори B низ бефосила баргарданда аст. Бар замми ин, бо иҷро шудани баъзе шартҳо исбот намудан мумкин аст, ки ҳарчад оператори B аз оператори A дур бошад, ҳам лекин он бефосила баргарданда мешавад.

Дар порчаи $[0,1]$ оператор - функсияи бефосилаи $A(\lambda)$ - ро дида мебароем, ки $A(0)=A,\ A(1)=B$ бошанд. Ба тарзи дигар дар $L(X,Y)$ чунин хати каҷи бефосиларо, ки нуқтаҳои A ва B - ро пайваст мекунад, дида мебароем. Талаб карда мешавад, ки оператор - функсияи $A(\lambda)$ шарти зеринро қаноат кунонад:

Чунин адади $K>0$ ёфт мешавад, ки барои ҳамаи $\lambda\in[0,1]$ ва ҳамаи $x\in X$ нобаробарии

$$||A(\lambda)x||\geq K||x|| \tag{16.36}$$

иҷро мешавад.

Теорема 16.6. *Бигузор барои ҳар як $\lambda\in[0,1]$ оператор - функсияи $A(\lambda)$ дар $[0,1]$ бефосила, $A(\lambda)\in L(X,Y)$ ва оператори $A(0)$ бефосила баргарданда бошад. Агар барои $A(\lambda)$ шарти (16.36) иҷро гардад, онгоҳ оператори $A(1)$ бефосила баргарданда аст ва*

$$||A^{-1}(1)||\leq\frac{1}{K}$$

мебошад.

Исбот. Исботи ин теоремаро мо дар ҳолати хусусии $A(\lambda)=(1-\lambda)A+\lambda B$ мегузаронем, яъне $A(\lambda)$ - порчаи хати рост аст, ки нуқтаҳои A ва B - ро пайваст мекунад.

Пеш аз ҳама қайд мекунем, ки агар шарти (16.36) ҳангоми $\lambda=\lambda_0\in[0,1]$ будан иҷро гардад ва оператори $A(\lambda_0)$ бефосила баргарданда бошад, онгоҳ нобаробарии

$$||A^{-1}(\lambda_0)|| \leq \frac{1}{K} \tag{16.37}$$

ҷой дорад. Дар ҳақиқат, бигузор $x \in X$, $y = A(\lambda_0)x$, яъне $x = A^{-1}y$ бошад. Онгоҳ аз шарти (16.36) ҳосил мегардад, ки $||y|| \geq K||A^{-1}(\lambda_0)y||$, ё ин ки $||A^{-1}(\lambda_0)y|| \leq \frac{1}{K}$ мешавад. Ин бошад, маънои онро дорад, ки нобаробарии (16.37) ҷой дорад.

Акнун бевосита ба исботи теорема мегузарем. Мувофиқи шарти теорема $A^{-1} \in L(Y, X)$ аст. Мутобиқи қайди боло овардашуда $||A^{-1}|| \leq \frac{1}{K}$ аст. Бинобa ин чунин баҳодиҳӣ дуруст аст:

$$||(A(\lambda) - A(0))A^{-1}(0)|| = ||\lambda(B - A)A^{-1}|| \leq \frac{\lambda}{K}||B - A||.$$

Бигузор $\lambda \in [0, \delta]$ бошад, ки $\delta = \frac{K}{2||B-A||}$ аст. Дар порчаи $[0, \delta]$ ҷой дорад $||(A(\lambda)-A(0))A^{-1}(0)|| \leq 1/2$ ва бинобар ин, мувофиқи теоремаи 16.5, барои ҳар як қимати $\lambda \in [0, \delta]$ оператори $A(\lambda)$ бефосила баргарданда аст. Теорема дар ҳолати $\delta \geq 1$ будан исбот гардид.

Бигузор акнун $\delta < 1$ бошад. Оператори $A(\delta)$ - ро мегирем. Мувофиқи қайди боло овардашуда $||A^{-1}(\delta)|| \leq K$ аст. Андешаронии болоро барои $\lambda > \delta$ такрор намуда, ҳангоми $\lambda \in [2, 2\delta]$ будан, ҳосил мекунем

$$||(A(\lambda) - A(\delta))A^{-1}(\delta)|| \leq \frac{1}{K}||A(\lambda) - A(\delta)|| = \frac{1}{K}(\lambda - \delta)||B - A|| \leq \frac{1}{2}.$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки ҳангоми $\lambda \in [2, 2\delta]$ будан, оператори $A(\lambda)$ баргарданда аст. Ҳамин тавр, барои $2\delta \geq 1$, теорема исбот гардид.

Агар $2\delta < 1$ бошад, онгоҳ $||A^{-1}(2\delta)|| \leq 1/K$ аст ва мисли пештара, баъди такрор намудани ин протсесс, ҳосил мекунем, ки $\lambda = 1$ аст ва бинобар ин, оператори $A(1)$ бефосила баргарданда аст.

16.7 Тадбиқи усули давомдиҳӣ аз рӯи параметр

Чунин масъалаи канориро барои муодилаи дифференсиалии муқаррарии тартиби ду дида мебароем:

$$-x'' + b(t)x' + c(t)x = y(t), \quad 0 < t < 1, \tag{16.38}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{16.39}$$

Дар ин ҷо $c(t)$ - функсияи бефосила дар почаи $[0,1]$ ва $b(t)$ - функсияи бефосила дифференсирондашаванда дар ин порча мебошанд. Инчунин талаб карда мешавад, ки дар порчаи $[0,1]$ нобаробарии

$$c(t) - 1/2b'(t) \geq \alpha > -8/\pi$$

ҷой дошта бошад.

Дар поён бо усули давомдиҳӣ нисбати параметр нишон дода мешавад, ки бо иҷро шудани шартҳои дар боло овардашуда, барои ҳар як функсияи тарафи рост $y \in Y = C[0,1]$, ҳалли ягонаи масъала $x \in X = C^2[0,1]$, - фазои функсияҳои $x(t)$ ки шартҳои сарҳадии (16.39) - ро қаноат мекунонанд вуҷуд дорад, ки

$$||x|| = ||x||_k + ||x'||_k + ||x''||_k$$

мебошад. Дар ин ҷо $||x||_k = \max_{[0,1]} |x(t)|$ аст.

Масъалаи (16.38), (16.39) - ро ба намуди операторӣ

$$Bx = y$$

менависем. Дар ин ҷо $B = -\frac{d^2}{dt^2} + b(t)\frac{d}{dt} + c(t)$ дар тамоми X бо қиматҳояш дар Y мавҷуд аст. Ба сифати оператори A : $A = -\frac{d^2}{dt^2} \in L(X,Y)$ мегирем.

Пеш аз ҳама бевосита нишон додан мумкин аст, ки барои ҳар як элементи $y \in Y$ масъалаи канории

$$-x'' = y, \quad x(0) = x(1) = 0 \tag{16.40}$$

ҳалли ягонаи

$$x(t) = t\int_0^1 (1-s)y(s)ds + \int_0^t (s-t)y(s)ds \tag{16.41}$$

дорад ва бинобар ин, оператори $A = -\frac{d^2}{dt^2}$ бефосила баргарданда аст. Оператори баръакси онро мувофиқи тарафи рости (16.41) ин тавр навиштан мумкин аст:

$$A^{-1}y = \int_0^1 G(t,s)y(s)ds, \tag{16.42}$$

ки дар ин ҷо $G(t,s)$ функсияи Грин буда, намуди зерин дорад:

$$G(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & \text{ҳангоми} \quad 0 \le s \le t \le 1 \quad \text{будан}, \\ t(1-s), & \text{ҳангоми} \quad 0 \le t \le s \le 1 \quad \text{будан}. \end{cases} \tag{16.43}$$

Дар айни ҳол қайд намудан зарур аст, ки оператори дифференсиалии $A = -\frac{d^2}{dt^2}$ маҳдуд нест. Дар ҳақиқат, барои функсияҳои хоси он $x_n(t) = \sin nt$, ҳосил мекунем $Ax_n = n^2 \sin nt$. Бинобар ин $||Ax_n|| = n^2||\sin nt|| \to \infty$, яъне чунин адади мусбати M ёфт намешавад, ки барои ҳамаи $x(t) \in C^2[01]$ нобаробарии $||Ax|| \le M||x||$ иҷро гардад.

Операторҳои A ва B - ро ба воситаи порчаи

$$A(\lambda) = -\frac{d^2}{dt^2} + \lambda b(t)\frac{d}{dt} + \lambda c(t), \quad \lambda \in [0,1]$$

пайваст мекунем. Мақсади мо барои ҳалли масъалаи канории

$$-x'' + \lambda b(t)x' + \lambda c(t)x = y(t), \quad 0 < t < 1, \tag{16.44}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{16.45}$$

баҳои априории (16.36) - ро исбот намудан аст. Баъди ба даст даровардани баҳои априорӣ, мувофиқи теоремаи 16.6, мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи канории (16.44), (16.45) бевосита хулоса мебарояд.

Ба муодилаи (16.44) функсияи $x(t)$ - ро зарб зада, баробарии ҳосилшударо нисбати t аз 0 то 1 интеграл мегирем. Бо назардошти қиматҳои канории (16.45) ҳосил мекунем

$$-\int_0^1 x''(t)x(t)dt = \int_0^1 x'^2(t)dt$$

ва

$$\int_0^1 b(t)x(t)x'(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 b'(t)x^2(t)dt.$$

Аз ин ҷо

$$\int_0^1 x'^2(t)dt + \lambda \int_0^1 \Big(c(t) - \frac{1}{2}b'(t)\Big)x^2(t)dt = \int_0^1 y(t)x(t)dt. \tag{16.46}$$

Ҳамаи аъзоҳои ин баробариро баҳо медиҳем. Исбот мекунем, ки

$$\int_0^1 x'^2(t)dt \geq \frac{8}{\pi}\int_0^1 x^2(t)dt \tag{16.47}$$

аст. Барои ин қайд мекунем, ки

$$x(s) = \int_0^s x'(t)dt$$

аст, бинобар ин мутобиқи нобаробарии Коши-Буняковский ҳасил мекунем

$$|x(s)| \leq \Big|\int\limits_0^s x'(t)dt\Big| \leq \Big(\int\limits_0^s dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^s x'^2(t)dt\Big)^{1/2} \leq \sqrt{s}\Big(\int\limits_0^s x'^2(t)dt\Big)^{1/2}.$$

Айнан ҳамин тавр ҳосил мекунем

$$|x(s)| \leq \Big|\int\limits_0^1 x'(t)dt\Big| \leq \sqrt{1-s}\Big(\int\limits_0^s x'^2(t)dt\Big)^{1/2}.$$

Ин нобаробариҳоро аъзо ба аъзо зарб зада ҳосил мекунем

$$x^2(s) \leq \sqrt{s(1-s)}\int\limits_0^1 x'^2(t)dt. \tag{16.48}$$

Аз ин ҷо агар ба назар гирем, ки $\int_0^1 \sqrt{s(1-s)}ds = \pi/8$ аст, пас

$$\int\limits_0^1 x^2(s)ds \leq \frac{\pi}{8}\int\limits_0^1 x'^2(t)dt,$$

яъне нобаробарии (16.47) исбот шуд.

Барои аъзои дуйуми баробарии (16.46) нобаробарии

$$\int\limits_0^1 (c(t) - \frac{1}{2}b'(t))x^2(t)dt \geq \alpha\int\limits_0^1 x^2(t)dt \tag{16.49}$$

ҷой дорад, ки он аз талаботи $c - \frac{b'}{2} \geq \alpha$ бармеояд.

Барои аъзои тарафи рости баробарии (16.46) ε - „нобаробарии“ зерин ҷой дорад:

$$\int\limits_0^1 y(t)x(t)dt \leq \varepsilon\int\limits_0^1 x^2(t)dt + \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_0^1 y^2(t)dt, \tag{16.50}$$

ки дар ин ҷо ε - адади ихтиёрии мусбат мебошад. Ин нобаробарӣ бо истифодаи квадрати ҳосили зарби скалярӣ

$$(\sqrt{\varepsilon}x - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}y}, \sqrt{\varepsilon}x - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}y) \geq 0, \quad \text{ки} \quad (u,v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt$$

исбот мешавад. Дар ҳақиқат барои ихтиёрӣ $\varepsilon > 0$

$$\int_0^1 \Big(\varepsilon x^2 - \frac{\sqrt{\varepsilon}xy}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{y^2}{4\varepsilon}\Big)dt = \int_0^1 \Big(\varepsilon x^2 - xy + \frac{y^2}{4\varepsilon}\Big) \geq 0$$

аст, ки аз он (16.49) мебарояд.

Нобаробариҳои (16.47),(16.49),(16.50) ва баробарии (16.46) - ро истифода намуда, ҳосил мекунем

$$\Big(\frac{8}{\pi} + \alpha - \varepsilon\Big) \int_0^1 x^2(t)dt \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 y^2(t)dt.$$

Агар адади $\varepsilon > 0$ - ро кифоя хурд гирем, онгоҳ ҳосил мекунем

$$\int_0^1 x^2(t)dt \leq \frac{1}{4(8/\pi + \alpha - \varepsilon)\varepsilon} \int_0^1 y^2(t)dt.$$

Адади $\varepsilon = \varepsilon_0 = 4/\pi + \alpha/2$ гузошта ҳосил мекунем

$$\int_0^1 x^2(t)dt \leq c_1 \int_0^1 y^2(t)dt, \quad \text{ки} \quad c_1 = \frac{1}{(\frac{8}{\pi} + \alpha)^2}.$$

Акнун ба баробарии (16.46) гузашта, аз он баҳои зеринро ҳосил мекунем

$$\int_0^1 x'^2(t)dt \leq (c_1c_2 + c_3) \int_0^1 y^2(t)dt,$$

ки $c_2 = ||c(t) - \frac{1}{2}b'(t) - \varepsilon_0||, \ c_3 = 1/4\varepsilon_0$ мебошанд.

Аз баҳодиҳии (16.48) бармеояд, ки $|x(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\int_0^1 x'^2(t)dt\Big))^{1/2}$ аст ва агар ба назар гирем, ки $\Big(\int_0^1 y^2(t)dt\Big))^{1/2} \leq ||y||_k$ аст, онгоҳ ҳосил мегардад:

$$||x||_k \leq \sqrt{\frac{c_1c_2 + c_3}{2}}||y||_k. \tag{16.51}$$

Акнун ба осонӣ $||x''||$ ва $||x'||$ – ро баҳо додан мумкин аст. Аз муодилаи (16.38) ҳосил мекунем

$$||x''||_k \leq ||b||_k||x'||_k + ||c||_k||x||_k + ||y||_k. \tag{16.52}$$

Дар ин ҷо $||x'||_k$ низ ба воситаи $||x''||_k$ баҳо дода мешавад. Дар ҳақиқат, азбаски $x(0) = x(1) = 0$ аст, пас мувофиқи теоремаи Ролля дар порчаи $(0, 1)$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки дар он $x'(\xi) = 0$ аст. Онгоҳ муодилаи (16.38) - ро ба намуди

$$\Big\{x'(t)\exp\Big(-\lambda\int\limits_0^1 b(s)ds\Big)\Big\} = [\lambda c(t)x(t) - y(t)]\Big(-\lambda\int\limits_0^t b(s)ds\Big)$$

навишта, онро аз ξ то s интеграл гирифта ҳосил мекунем

$$x'(t) = \int\limits_\xi^t \exp\Big(-\lambda\int\limits_s^\theta b(s)ds\Big)[\lambda c(\theta)x(\theta) - y(\theta)]dt.$$

Аз ин ҷо баҳои зеринро ҳосил мекунем

$$||x'||_k \leq m(||c||_k||x||_k + ||y||_k), \tag{16.53}$$

ки

$$m = \max_{\lambda,s,\theta\in[0,1]} \exp\Big(-\lambda\int\limits_s^\theta b(s)ds\Big)$$

мебошад.

Акнун аз нобаробариҳои (16.51), (16.52), (16.53) ҳосил мекунем

$$||x||_k + ||x'||_k + ||x''||_k \leq c_4||y||_k,$$

яъне баҳои априории лозимӣ дастрас шуд.

АДАБИЁТ

1. Люстерник Л.А.,Соболев В.И. – Элементы функционального анализа М: Наука.1965 г.
2. Колмогоров А.Н.,Фомин С.В – Элементы теории функции и функциональный анализ М: Наука. 1989 г.
3. Кантарович А.В.,Акилов Г.П. – Функциональный анализ в нормированных пространствах. М: Физматгиз. 1959 г.
4. Треногин В.А. – Функциональный анализ. М: Наука. 1980 г.
5. Вулих Б.З. – Введение в функциональный анализ. М: Наука. 1969 г.
6. Вайнберг М.М. – Функциональный анализ М: Наука. 1979 г.
7. Треногин В.А. – Задачи и упражнения по функциональному анализу М.Наука. 1984 г.
8. Ефимов А.В. и др. – Математический анализ (спец. разделы) т.2, М: Наука. 1980 г.