



Kitob quyidagi ko'rsatilgan  
muddatda topshirilishi shart

Oldingi foydalanishlar  
miqdori

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

as

kursi

Kitol  
mudd

Ol  
m

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
OLIV TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI  
DENOY TADBIRKORLIK VA PEDAGOGIKA INSTITUTI**



**ABIRAYEV IMOMALI MELIBOYEVICH  
MAMAJANOV RAXMATILLA YAKUBJANOVICH**

**BOSHLANG'ICH MATEMATIKA  
KURSI NAZARIYASI**

**O'quv qo'llanma**

**TOSHKENT – 2023**

**Abirayev I.M., Mamajanov R. Ya.**

Boshlang'ich matematika kursi nazariyasi [Matn] o'quv qo'llanma / Abirayev I.M., Mamajanov R. Ya. – T.: Poytaxt exculisive nashriyoti, 2023. – 160 b.

### Taqrizchilar

- Allakov I. – Termiz Davlat universitetining “Algebra va geometriya” kafedrası professori, fizika-matematika fanlari doktori
- Sobirova M.R. – DTPI “Matematika va fizika” kafedrası dotsenti, p.f.f.d., donsant

“Boshlang'ich matematika kursi nazariyasi” nomli o'quv qo'llanma 60110500-Boshlag'ich ta'lim, tarbiyaviy ishlar va sport yo'nalishi bakalavriatiga mo'ljallangan bo'lib, unda boshlang'ich matematika kursi nazariy asoslari berilgan, ularni o'zlashtirish uchun zarur umumiy tushunchalar bayon qilingan. Unda oliy matematika kursi 60110500-boshlang'ich ta'lim va tarbiyaviy ish yo'nalishi standartiga mos holda bayon qilingan. O'quv qo'llanma 4 bobdan iborat bo'lib, boblar paragraflarga bo'lingan, har bir paragraf oxirida nazorat savollari va topshiriqlar berilgan.

ISBN 978-9943-6683-9-3

© Abirayev I.M., Mamajanov R. Ya., 2023.  
© «Poytaxt exculisive» nashriyoti, 2023

## KIRISH

“Boshlang'ich matematika kursi nazariyasi” o'quv qo'llanma 60110500-Boshlag'ich ta'lim, tarbiyaviy ishlar va sport yo'nalishi bakalavriatiga mo'ljallangan bo'lib, shu yo'nalishning “Boshlang'ich matematika kursi nazariyasi” fani dasturiga mos keladi. O'quv qo'llanma 4 ta bob 33 paragrafdan iborat, u o'z oldiga talabalarni boshlang'ich matematika kursining nazariy asoslari bilan tanishtirish maqsadini qo'yadi.

Uning 1-bobi boshlang'ich matematika kursini nazariy asoslash uchun kerak bo'ladigan barcha umumiy tushunchalarni o'z ichiga oladi. Bu bobda to'plamlar va ular ustida amallar, moslik va uning turlari, munosabat va uning xossalari, kombinatorika “elementlari”. matematik tushunchalar, mulohazalar va ular ustida amallar haqida so'z yuritiladi.

O'quv qo'llanmaning 2-bobida boshlang'ich matematika kursini nazariysi fanining asosiy bo'limlaridan bo'lgan matematik mantiq elementlari, mulohozalar va ular ustida amallar bajarish. Predikatlar va ular ustida amallar bajarish, Kvantorlar, Teoremlarning tuzilishi va turlari, matematik isbotlash usullari haqida so'z yuritiladi

O'quv qo'llanmaning 3- bobida boshlang'ich matematika kursini nazariysi fanining asosiy bo'limlaridan yana biri bo'lgan algebraik sistemalar yoritilgan. Bunda algebraik operatsiyalar va ularning xossalari, algebraik sistemalar, yarim gruppalar, xalqa va maydon tushunchalari o'rganilgan.

O'quv qo'llanmaning 4-bobida boshlang'ich matematika kursini nazariysi fanining asosiy bo'limlaridan yana biri bo'lgan nomanfiy butun sonlar to'plami o'rganilgan, xususan, nomanfiy butun sonlar to'plami, yig'indining ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi, qo'shish qonunlari, ayirmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi, yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosi, ko'paytmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi, ko'paytirish qonunlari, ko'paytmaning yig'indi orqali ta'rifi, nomanfiy butun sonni natural songa bo'lishning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi, yig'indini va ko'paytmani songa bo'lish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosi, nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik asosda qurish: Nazariyani aksiomatik metod bilan qurish tushunchasi, reano aksiomalari, matematik induksiya metodi, nomanfiy butun sonlarni qo'shish amalining aksiomatik ta'rifi, qo'shish qonunlari, nomanfiy butun sonlarni ko'paytirish amalining aksiomatik ta'rifi.

Ko'paytirish qonunlari, ayirish va bo'lishning ta'rifi. nolga bo'lishning mumkin emasligi. Qoldiqli bo'lish. Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalari. Natural sonlar qatori kesmasi va chekli to'plam elementlari soni tushunchasi. Tartib va sanoq natural sonlari. Natural son miqdorlarni o'lchash natijasi sifatida. Natural son kesma o'lchami sifatida. Kesmalarning o'lchami sifatida qaralgan sonlar ustidagi arifmetik amallarning ta'rifi masalalari ko'rib chiqilgan.

## 1-BOB. DISKRET MATEMATIKA ASOSLARI

### 1.1-§. To'plamlar tushunchasi. to'plamlar va ular ustida amallar. Bo'sh to'plam. Chekli va cheksiz to'plamlarga misollar.

1. To'plam tushunchasi. To'plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u ta'riflanmaydi va misollar yordamida tasavvur hosil qilinadi. to'plam deganda predmetlar, ob'ektlarni biror xossasiga ko'ra birgalikda qarashga tushuniladi.

Masalan, hamma natural sonlarni birgalikda qarasa, natural sonlar to'plam hosil bo'ladi. Bir talabalar uyida yashovchi talablarni birgalikda qarash bilan shu talabalar uyidagi talabalar to'plamini hosil qilamiz. To'g'ri chiziqda yotuvchi hamma nuqtalarni bitta butun deb qarash shu to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plamini, maktabdagi o'quvchilarni birgalikda qarash o'quvchilar to'plamini beradi va h.k.

Hayotda to'plamlar alohida nomlanadi: auditoriyadagi talabalar to'plami - guruh, harflar to'plami - alfavit, qushlar to'plami - gala, qo'ylar to'plami - poda va h. k.

**1-ta'rif:** to'plamni tashkil etuvchi ob'ektlar - bu to'plamning elementlari deb ataladi. Masalan, yuqoridagi misollardagi o'quvchilar, talabalar, natural sonlar mos to'plamlarining elementlari hisoblanadi.

To'plamlar odatda, lotin alfavitining katta harflari bilan, ularning elementlari esa alfavitning kichik harflari bilan belgilanadi.  $A$  to'plam  $a, b, c, d, e, f$  elementlaridan tuzilganligi  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  ko'rinishda yoziladi.

To'plam bir qancha elementlardan iborat bo'lishi mumkin, quyidagi yozuv:

$$a \in A \quad (1)$$

$a$  elementni  $A$  to'plamga tegishligini bildiradi.

$$a \notin A \quad (2)$$

$a$  elementni  $A$  to'plamga tegishli emasligini bildiradi, yoki mantiq belgisidan foydalangan holda  $\neg a \in A$  ko'rinishda yozishimiz mumkin. Agar  $a \in A$  bo'lsa, u holda  $a$  element  $A$  to'plamga tegishli deyiladi.

To'plamning quvvati, yoki kardinal son tushunchasi to'plam elementlari sonini bildiradi. Har qanday  $n$  elementli  $A$  to'plam elementlari soni  $|A|=n$  kabi belgilanadi. Bizning misolimizda  $|A|=6$  bo'ladi.

**2-ta'rif.** Chekli to'planning elementlar soniga to'plam quvvati deyiladi va  $n(A)$  kabi belgilanadi.

Masalan,  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  to'plamning quvvati  $n(A) = 7$  ga,

$B = \{a\}$  to'plamning quvvati  $n(B) = 1$  ga,

to'plamning quvvati  $n(C) = 3$  ga,

$D = \{a, g\}$  to'plamning quvvati  $n(D) = 2$  ga,

bo'sh to'plamning quvvati  $n(\emptyset) = 0$  ga teng.

Cheksiz to'plamlarning quvvati transfinit sonlarda ifodalanadi.

**3-ta'rif.** Quvvatlari teng bo'lgan to'plamlar teng quvvatli to'plamlar deyiladi.

Masalan,  $A = \{a, b, c\}$  va  $C = \{b, d, f\}$  to'plamlar teng quvvatli.

$n(A) = n(C) = 3$ . to'plam elementi, ya'ni  $a$  element  $A$  To'plamning

elementi ekanligi  $a \in A$  o'rinishda yoziladi va « $a$  element to'plamga

tegishli» « $a$  element  $A$  to'plamning elementi», « $a$  element to'plamda

mavjud» yoki « $a$  element to'plamga kiradi» deb o'qiladi.

Agar  $a$  element to'plamga tegishli bo'lmasa,  $a \notin A$  yoki  $a \in \bar{A}$

ko'rinishda yoziladi. Masalan,  $A$  -juft natural sonlar to'plami

bo'lsin, u holda

$2 \in A$ ,  $5 \notin A$ ,  $628 \in A$  va  $729 \notin A$

bo'ladi.

**2. Bo'sh to'plam. Chekli va cheksiz to'plamlar.** To'plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Agar to'plamni tashkil etgan elementlar soni chekli bo'lsa, u holda bu to'plam chekli to'plam deyiladi. Agarda to'plamni tashkil etgan elementlar soni cheksiz bo'lsa, u holda bu to'plam cheksiz to'plam deyiladi.

Masalan:  $A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $C = \{a, b, s\}$  to'plamlar chekli bo'lib, ular mos ravishda bitta, ikkita va uchta elementlardan tuzilgan. Quyidagi  $A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$  to'plamlar cheksiz to'plam.

**4-ta'rif:** Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deb ataladi va  $\emptyset$  bilan belgilanadi.

Masalan,  $x^2 + 4 = 0$  tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami, oydagi daraxtlar to'plami, dengiz tubidagi quruq toshlar to'plami bo'sh to'plamlardir.

**Izoh.**  $A$  to'plamda faqat har bir  $a$  elementi o'z-o'ziga teng, lekin har qanday ikkita boshqa-boshqa  $a$  va  $b$  elementni tengmas deb hisoblaymiz, bundan  $A$  to'plamning har bir elementi bu to'plamda bir martagina

olinganligi (bir martagina uchraganligi) ma'lum bo'ladi.  $a$  elementning o'z-o'ziga tengligi  $a = a$  ko'rinishda,  $a$  va  $b$  elementlarining har xilligi  $a \neq b$  ko'rinishda belgilanadi.

Agar  $A$  to'plamning  $a$  elementi  $B$  to'plamning  $b$  elementiga teng, ya'ni  $a = b$  desak, bundan bitta element ikkala to'plamda har xil harflar bilan belgilanganligini tushunamiz.

**Nazorat uchun savollar**

1. To'plam deganda nimani tushunasiz?
2. Bo'sh, chekli, cheksiz to'plamlarga misollar keltiring.
3. To'plamlar necha xil usulda beriladi?
4. Teng to'plamlarga ta'rif bering.
5. To'plam osti tushunchasiga ta'rif bering va misollar keltiring.

## 1.2-§. To'plamlarning berilish usullari. Teng to'plamlar. To'plamosti. Universal to'plam. Eyler-Venn

**1. To'plamlarning berilish usullari. Teng to'plamlar.** Agar har bir elementning ma'lum bir to'plamga tegishli yoki tegishli emasligi bir qiymatli aniqlangan bo'lsa, to'plam berildi deyiladi.

To'plamlar, odatda, ikki xil usulda beriladi:

a) To'plam elementlari ro'yxati keltiriladi.

Masalan,

$A = \{a; o; i; u; o'; e\}$ ;  $B = \{qizil, sariq, yashil\}$ ;  $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ .

b) To'plamga kirgan elementlarning yagona xarakteristik xossasi ko'rsatiladi.

Masalan, yuqoridagi to'plamlarni xarakteristik xossa bilan bersak:

$A$  - o'zbek alifbosining unli harflari to'plami;

$B$  - svetofor ranglari to'plami;

$C$  - bir xonali natural sonlar to'plami bo'ladi.

Sonli to'plamlar uchun xarakteristik xossani formula bilan berish qulay.

Bu holda, katta qavslar ichiga to'plamlar elementi belgisi, vertikal chiziq va undan keyin to'plam elementiga tegishli xossa yoziladi. Masalan: « $M$  - 6 sonidan kichik bo'lgan natural sonlar» to'plami berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarning xarakteristik xossasi

orqali  $M = \{n | n \in \mathbb{N} \text{ va } n < 6\}$  ko'rinishda ifodalanadi. Shunga

o'xshash:  $C = \{c | c < 9, c \in \mathbb{N}\}$ . « $C - 9$  sonidan kichik natural sonlar» to'plami.

$X = \{x | x^2 - 4 = 0, x \in \mathbb{R}\}$  bo'lsa,  $X$  to'plam  $x^2 - 4 = 0$  tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami bo'ladi.

$Y = \{y | -2 \leq y \leq 6, y \in \mathbb{R}\}$  bo'lsa,  $Y - 2$  dan kichik bo'lmagan va 6 dan katta bo'lmagan butun sonlar to'plami.

Ba'zi bir Sonli to'plamlar uchun maxsus belgilar kiritilgan:  $N$ -natural sonlar to'plami,  $Z$  - butun sonlar to'plami,  $N_0$  - butun nomanfiy sonlar to'plami,  $Q$  - ratsional sonlar to'plami,  $R$  - haqiqiy sonlar to'plami va h.k.

To'plamlar orasida quyidagicha munosabatlar mavjud:

- $(\in)$  Tegishlilik munosabati
- To'plamlar orasidagi tegishlilik munosabati. ( $\subseteq, \supseteq, \subset, \supset$  (shunga o'xshash  $\notin$ ),  $\supset$  (shunga o'xshash  $\supsetneq$ ))
- To'plamdagi amallar natijasi to'plam bo'ladi: kesishish ( $\cap$ ), birlashuv ( $\cup$ ), ayirma ( $\setminus$ ) va simmetrik ayirma ( $\Delta$ ) ikki to'plam dekart ko'paytmasi ( $C \times T$ ):

- Akslantirish (ya'ni funksiyalar) to'plamlar orasida.
- To'plamlardagi munosabatlar va ekvivalent munosabatlar [6].

## 2. To'plamosti. Universal to'plamlar.

2-ta'rif:  $B$  to'plamning har bir elementi  $A$  to'plamda ham mavjud bo'lsa,  $B$  ni  $A$  to'plamning to'plamosti, (qismi, qism to'plami) deyiladi, buni quyidagicha belgilanadi:  $B \subset A$  yoki  $A \supset B$ .

Izoh: Bu ta'rifdan ko'rinadiki,  $B$  to'plamning hamma elementlari  $A$  da mavjud bo'lgan holda,  $A$  da  $B$  ga kirmagan boshqa elementlar bo'lmasa,  $A = B$ ,  $B = A$  tenglikka kelamiz.

Shuning bilan birga 4-ta'rifdan bo'sh to'plam va har bir to'plam o'zining to'plamosti (qism-to'plami) ekanligini ko'rish mumkin.

Masalan,  $A = \{a, b, s, d, e, f, g\}$  to'plam uchun  $B = \{a\}$ ,  $D = \{a, g\}$  to'plamlarning har qaysisi to'plamosti (qism to'plam) hisoblanadi.

3-Ta'rif. to'plamning barcha elementlari  $A$  to'plamda mavjud bo'lib, shu bilan birga  $A$  da ga tegishli bo'lmagan elementlar ham mavjud bo'lsa  $B$  to'plam  $A$  to'plamning xos qism to'plami deyiladi.

4-Ta'rif.  $A$  to'plamning o'zi va  $\emptyset$  to'plam shu  $A$  to'plamning xosmas qism to'plami deyiladi.

5-Ta'rif. Agar  $A_1, A_2, \dots, A_n$  to'plamlar  $A$  to'plamning qism to'plami bo'lsa,  $A$  to'plam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  to'plamlar uchun universal to'plam deyiladi.


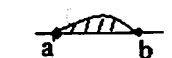


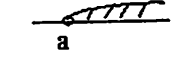
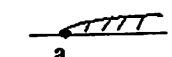
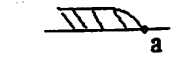
$Z$  to'plam  $R$  to'plamning xos qism to'plami ekan va  $u \in Z \subseteq R$ , ko'rinishda belgilanadi. Xuddi shunday munosabatni barcha kompleks sonlar to'plami  $C$  va ratsional sonlar to'plami  $Q$ , haqiqiy sonlar to'plami  $R$  uchun ham o'rnatish mumkin:

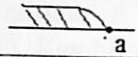
$$Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$$

Geometriyadan misol keltirsak. Masalan,  $R^3$  - uch o'lchovli fazo bo'lsa,  $P - R^3$  fazodagi tekislik,  $L - P$  tekislikdagi chiziq bo'lsa, quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:  $L \subset P \subset R^3$  yoki  $L \subseteq P \subseteq R^3$ . Bu yerda  $R^3$  ning boshqa ko'p qism to'plamlari ham mavjudligini hisobga olish kerak bo'ladi.

Universal to'plam, odatda,  $J$  yoki  $U$  harflari bilan belgilanadi. Universal to'plamning barcha qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qism to'plam mavjud bo'lib, ulardan biri  $U$  ning o'zi, ikkinchisi esa bo'sh to'plam, qolganlari esa xos qism to'plamlar bo'ladi. Masalan,  $N$ - barcha natural sonlar to'plami;  $Z$ -barcha butun sonlar to'plami;  $Q$ -barcha ratsional sonlar to'plami;  $R$ -barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'lib,  $N \subset Z \subset Q \subset R$  shartlar bajariladi va  $R$  qolgan Sonli to'plamlar uchun universal to'plam vazifasini bajaradi.

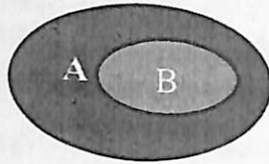
$R$  to'plamning to'plamostisini koordinatalar o'qida tasvirlash mumkin. Agar  $a, b \in R$  va  $a < b$  bo'lsa, quyidagi belgilashni kiritish mumkin.

| Sonli oraliq                 | Belgilanishi   | Tasvirlanishi   | Nomlanishi                      |
|------------------------------|----------------|---|---------------------------------|
| $x/x \in R, a < x < b$       | $(a, b)$       |    | Interval                        |
| $x/x \in R, a \leq x \leq b$ | $[a, b]$       |   | Kesma                           |
| $x/x \in R, a \leq x < b$    | $[a, b)$       |  | Yarim interval yoki yarim kesma |
| $x/x \in R, a < x \leq b$    | $(a, b]$       |  | Yarim interval yoki yarim kesma |
| $x/x \in R, x > a$           | $(a; +\infty)$ |  | Ochiq nur                       |
| $x/x \in R, x \geq a$        | $[a; +\infty)$ |  | Nur yoki yarim to'g'ri chiziq   |
| $x/x \in R, x < a$           | $(-\infty; a)$ |  | Ochiq nur                       |

|                       |                 |   |     |
|-----------------------|-----------------|---|-----|
| $x/x \in R, x \leq a$ | $(-\infty : a]$ |  | Nur |
|-----------------------|-----------------|---|-----|

### 3. Eyler - Venn diagrammalari

To'plamlari geometrik nuqtai nazardan yaqqol ko'z oldiga keltirish uchun, ular doiracha ko'rinishida belgilanadi. Masalan:  $B$  to'plam  $A$  to'plamning xususiy to'plamosti ekanligi quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi (1.1-rasm):



1.1-rasm.  $B$  to'plam  $A$  to'plamning xususiy to'plamosti.

Umumiy qismga ega bo'lgan to'plamlar *kesishadi* deyiladi va  $A \cap B = \emptyset$ , ya'ni  $A$  va  $B$  to'plamlar kesishmasi bo'sh emas deb yoziladi. Masalan, 2 ga karrali natural sonlar va 5 ga karrali natural sonlar to'plamlari umumiy elementga ega, ya'ni kesishadi yoki kesishmasi bo'sh emas. Bu to'plamlar kesishmasi barcha 10 ga karrali natural sonlardan iborat bo'ladi.

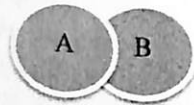
Ikki to'plamning o'zaro munosabatida to'rt hol bo'lishi mumkin (1.2-rasm):

- 1) To'plamlar kesishmaydi (1.2-rasm, I);
- 2) To'plamlar kesishadi (1.2-rasm, II);
- 3) To'plamning biri ikkinchisining qismi bo'ladi (1.2-rasm, III);
- 4) To'plamlar ustma-ust tushadi, ya'ni teng (1.2-rasm, IV).

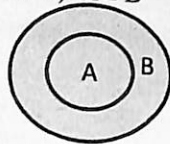
I.  $A \cap B = \emptyset$



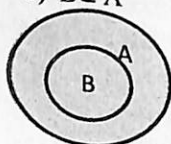
II.  $A \cap B \neq \emptyset$



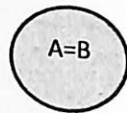
III. a)  $A \subset B$



b)  $B \subset A$



IV.  $A = B$



1.2-rasm. Ikki to'plamning o'zaro munosabati.

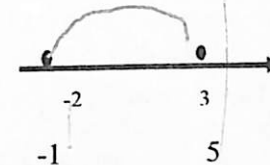
### Elementar munosabatlar

Kelgusida, to'plam bilan ishlaganda, "x ni  $A$  to'plamning elementi" deb hisoblaymiz va bu  $x \in A$  kabi ko'rinishda yoziladi.

Shunday qilib, agar  $Z$  butun sonlar to'plami bo'lsa biz quyidagi tasdiqlarni yozishimiz mumkin  $3 \in Z, -11 \in Z$ , va hokazo. Bundan tashqari  $\pi$  butun son emas, shuning uchun biz uni quyidagicha yozamiz  $\pi \notin Z$ .

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1.  $X$  to'plamni koordinata to'g'ri chizig'ida tasvirlang, agar:
  - a)  $X = \{x | x \in R \text{ va } 3 \leq x < 5\}$ ; b)  $X = \{x | x \in R \text{ va } x < 2\}$  bo'lsa;
2. Sonli to'plamning xarakteristik xossasini ifodalang:
  - a)  $[4; 9]$ ; b)  $[-\infty; 2]$ .
3. Son o'qidagi nuqtalar to'plamini 2 usul bilan bering:



4.  $X$  to'plamni koordinata to'g'ri chizig'ida tasvirlang, agar:

- a)  $X = \{x | x \in R \text{ va } -1 \leq x \leq 4\}$ ;
  - b)  $X = \{x | x \in R \text{ va } x \geq -3\}$  bo'lsa.
5. Sonli to'plamning xarakteristik xossasini ifodalang:
  - a)  $[-2; 0]$ ; b)  $[-8; +\infty[$
6. Son o'qidagi nuqtalar to'plamini 2 usul bilan bering:

### 1.3-§. To'plamlarning kesishmasi va birlashmasi

#### 1. To'plamlarning kesishmasi

**Ta'rif.**  $a, b, s, d, \dots$  elementlar  $A$  va  $B$  to'plamlarning har birida mavjud bo'lsa, ular bu to'plamlarning umumiy elementlari deyiladi. Masalan:  $A = \{a, b, s, d, e, f\}$ ,  $B = \{a, b, d\}$  to'plamlar uchun  $a, b, d$  - umumiy elementlardir.

**Ta'rif.** va to'plamlarning hamma umumiy elementlaridagina tuzilgan  $C$  to'plam  $A$  va  $B$  to'plamlarning kesishmasi (ko'paytmasi) deyiladi va quyidagicha belgilanadi  $C = A * B$  yoki  $C = A \cap B$  bu yerda  $\cap$  belgi to'plamlarning kesishmasini bildiradi. Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan to'plamlarning kesishmasi  $\emptyset$  bo'sh to'plamga teng. Masalan,

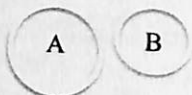
1.  $A = \{a, b, s, d, e\}$  va  $B = \{a, s, d, e, f\}$  to'plamlar uchun:  $A \cap B = \{a, s, d, e\}$  ga teng.

2.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{5, 6, 7, 8\}$  va  $C = \{5, 6, 9, 10, 11\}$  to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng:  $A \cap B \cap C = \{5, 6\}$ .

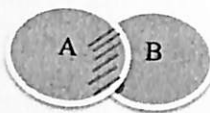
3.  $A = \{2, 3, 4\}$  va  $B = \{7, 8, 9\}$  to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng:  $A \cap B \neq \emptyset$ .

To'plamlarning kesishmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning kesishmasiga mos keladi. Quyida har bir hol uchun to'plamlar kesishmasi shtrixlab ko'rsatilgan (1.3-rasm):

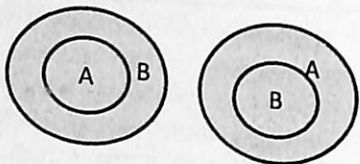
I.  $A \cap B = \emptyset$



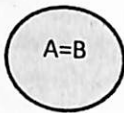
II.  $A \cap B \neq \emptyset$



III. a)  $A \cap B$  b)  $B \subset A$



IV.  $A = B$



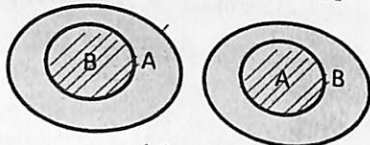
I.  $A \cap B = \emptyset$



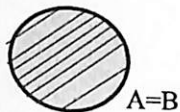
II.  $A \cap B \neq \emptyset$



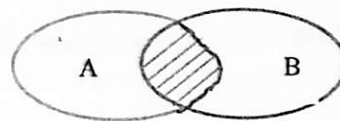
III. a)  $A \cap B = B$  b)  $A \cap B = A$



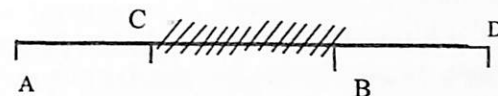
IV.  $A \cap B = A = B$



1.3-rasm. to'plamlar kesishmasi.



1.4-rasm. Shtrixlangan qism.  $A$  va  $B$  to'plamlar kesishmasi.



1.5-rasm. Kesmalar kesishmasi  $[AB] \cap [CD] = [CB]$ .



1.6-rasm.  $[AB]$  va  $[CD]$  kesmalar kesishmaydi  $[AB] \cap [CD] = \emptyset$ .

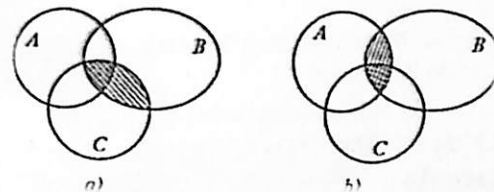
To'plamlar kesishmasi uchun quyidagilar o'rinli:

1°.  $B \subset A$  bo'lsa,  $A \cap B = B$  bo'ladi. Bu xossa to'plamlar kesishmasi ta'rifidan kelib chiqadi.

2°.  $A \cap B = B \cap A$  (kommutativlik xossasi).

3°.  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$  (assotsiativlik xossasi). Assotsiativlik xossasi  $A \cap B \cap C$  kesishmani qavslarsiz yozishga imkon beradi va istalgan sondagi to'plamlar kesishmasini topishda qulaylik tug'diradi. Bu xossani Eyer-Venn diagrammalarida quyidagicha tasvirlaymiz (1.7-rasm):

1.7- a) rasmda tenglikning chap qismi; 1.7-b) rasmda tenglikning o'ng qismi tasvirlangan, ikki marta shtrixlangan sohalar ikkala rasmda ham bir xil bo'lgani uchun  $(A \cap B) \cap C$  va  $A \cap (B \cap C)$  to'plamlar teng degan xulosaga kelishimiz mumkin.



1.7-rasm. Eyer-Venn diagrammalari.

4°.  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

5°.  $A \cap A = A$ .

Yuqoridagi xulosa to'plamlar soni ikkitadan ortiq bo'lgan hol uchun ham to'g'ri.

2. **To'plam birlashmasi (yig'indisi).** Berilgan  $A$  va  $B$  to'plamlarning birlashmasi (yig'indisi) deb shu  $A$  va  $B$  to'plamlarning har biridagi barcha elementlardan tuzilgan  $C$  to'plamga aytiladi. Birlashma  $C = A + B$  yoki  $C = A \cup B$  ko'rinishda belgilanadi.

To'plamlar birlashmasida har bir element bir martagina olinishi lozim bo'lgani uchun, to'plamlardan har ikkalasining umumiy elementlari  $C$  yig'indida bir martagina olinadi.

**Misollar:**

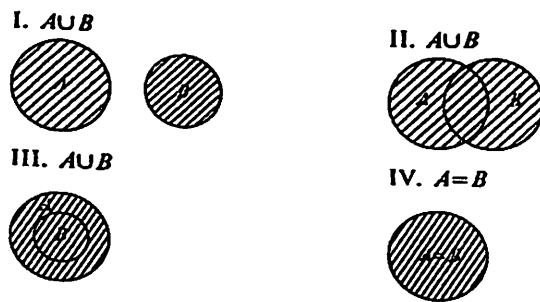
1.  $A = \{a, b, s, d\}$ ,  $B = \{a, b, s, d, e, f\}$  to'plamlarning birlashmasi:

$$A \cup B = \{a, b, s, d, e, f\} \text{ ga teng.}$$

2.  $A = \{3, 4, 5, 6\}$  va  $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$  to'plamlar uchun

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ ga teng.}$$

To'plamlarning birlashmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to'plamni bildiradi. Quyidagi chizmalarda shtrixlangan yuza  $A$  va  $B$  to'plamlarning birlashmasini bildiradi (1.8-rasm).



1.8-rasm. Yuza  $A$  va  $B$  to'plamlarning birlashmasi.

To'plamlar birlashmasining xossalari:

1°.  $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$ .

2°.  $A \cup B = B \cup A$  (kommutativlik xossasi).

3°.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (assotsiativlik xossasi).

4°.  $A \cup \emptyset = A$ .

5°.  $A \cup A = A$ .

6°.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasi).

**Teorema.** Agar  $A$ ,  $B$  va  $C$  universal  $U$  to'plamning qism to'plami bo'lsa, ular ikkita distributivlik qonuniga ega bo'ladi.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ va } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

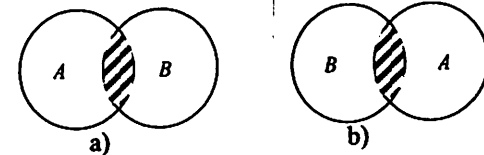
**Isbot:**

$x \in A \cap (B \cup C)$  bo'lsin, bundan  $x \in A$  va  $x \in B \cup C$  kelib chiqishini ko'rishimiz mumkin. Bundan  $x \in A$  va  $x \in B$  yoki  $x \in A$  va  $x \in C$ , bu esa  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$  ekanligini bildiradi va shunday ekanligini isbot qiladi:  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Aksincha, agar  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , u holda  $x \in A \cap B$  yoki  $x \in A \cap C$  bo'lsa, u holda  $x \in A$ , lekin xuddi shunday  $x \in B \cup C$ ,  $x \in A \cap (B \cup C)$  ekanligini bildiradi va  $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$  isbotlaydi. Bundan kelib chiqadiki  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  ko'rinishda bo'ladi. Distributivlikning ikkinchi qonunini ham talabalar xuddi shunday isbot qilishlari mumkin.

7°.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivlik xossasi).

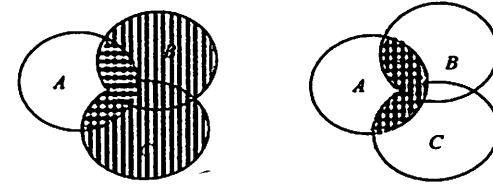
To'plamlar soni ikkitadan ortiq bo'lganda ham yig'indi uchun chiqarilgan xulosalar to'g'ri bo'ladi. Kommutativlik va kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossalari to'g'riligini ko'ramiz.

1)  $A \cap B = B \cap A$  (kommutativlik xossasi)



1.9-rasm a), b) chizmalardagi shtrixlangan sohalar bir xil bo'lgani uchun  $A \cap B = B \cap A$  kesishmalar teng.

2)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasi).



1.10-rasm.  $A \cap (B \cup C)$  gorizantal shtrixlangan.

1.11-rasm.  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  vertikal shtrixlangan.

1.10 va 1.11-rasmlardagi ikki marta shtrixlangan sohalar bir xil bo'lganligidan  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  tenglikning to'g'riligi ko'rinadi.

**Misollar yechish.**

1-misol.  $A = \{2, 3, 4\}$  va  $B = \{7, 8, 9\}$  to'plamlarning kesishmasini toping.

Yechilishi:  $A$  va  $B$  to'plamlarning umumiy elementlari yo'q, shuning uchun:  $A \cap B = \emptyset$ .

2-misol.  $A = \{2; 5; 7; 9\}$ ,  $B = \{2; 4; 7\}$  bo'lsin, u holda  $A \cap B = \{2; 7\}$ .

3-misol.  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, b, c, d, e, f\}$  to'plamlarning birlashmasi  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$  ga teng bo'ladi.

4-misol.  $A = \{3, 4, 5, 6\}$  va  $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$  to'plamlar uchun  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  ga teng.

**Mustaqil yechish uchun misollar.**

1-misol.  $M = \{36; 29; 15; 68; 27\}$ ,  $P = \{4; 15; 27; 47; 36; 90\}$ ,  $Q = \{90; 4; 47\}$  to'plamlar berilgan bo'lsin.

$M \cap P$ ,  $M \cap Q$ ,  $P \cap Q$ ,  $M \cap P \cap Q$  larni toping.

2-misol.

a)  $A$  - 18 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami,

b)  $B$  - 24 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami.

c)  $A \cap B$  to'plam elementlarini ko'rsating.

3-misol.  $P$  ikki xonali natural sonlar to'plami,  $C$  barcha toq natural sonlar to'plami bo'lsa,  $K = P \cap C$  to'plamga qaysi sonlar kiradi?

a)  $21 \in K$ ; b)  $32 \in K$ ; c)  $7 \in K$ ; d)  $17 \in K$  deyish tog'rimi?

4-misol. „Matematika“ va „grammatika“ so'zlaridagi harflar to'plamini tuzing. Bu to'plamlar kesishmasini toping?

5-misol.  $[1; 5]$  va  $[3; 7]$  kesmalarining kesishmasini toping.

6-misol.  $A = \{2; 5; 7; 9\}$ ,  $B = \{2; 4; 7\}$  bo'lsin, u holda  $A \cup B = ?$

a)  $A \cap B = \{2; 7\}$

b)  $A \cap B = \{\emptyset\}$

c)  $A \cap B = \{5; 9\}$

7-misol.  $A = \{2; 5; 7; 9\}$ ,  $B = \{2; 4; 7\}$  bo'lsin, u holda

a)  $A \cup B = \{2; 5; 7; 9\}$

b)  $A \cup B = \{2; 4; 5; 7; 9\}$

c)  $A \cup B = \{\emptyset\}$

8-misol.  $P = \{a, b, c, d, e, f\}$  va  $E = \{a, g, z, e, k\}$  to'plamlar birlashmasini toping?

$A = \{n/n \in \mathbb{N}, n < 5\}$  va  $B = \{n/n \in \mathbb{N}, n < 7\}$  to'plamlar birlashmasini toping?

a)  $4 \in A \cup B$ ;

b)  $-3 \in A \cup B$ ;

d)  $6 \in A \cup B$  deyish to'g'rimi?

9-misol. Agar a)  $A = \{x/x = 8k, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x/x = 8l-4, l \in \mathbb{Z}\}$ ;

b)  $A = \{x/x = 6k-1, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x/x = 6l+4, l \in \mathbb{Z}\}$

bo'lsa,  $A \cup B$  ni toping?

10-misol.  $A = \{2; 4; 6; 8; \dots; 40\}$ ,  $B = \{1; 3; 5; 7; \dots; 37\}$ ,  $C = \{\{a; b\}, \{c; d\}, \{e; f\}, g, h\}$  to'plamlarning har biridagi elementlar sonini aniqlang?  $A \cup B$  da nechta element mavjud?

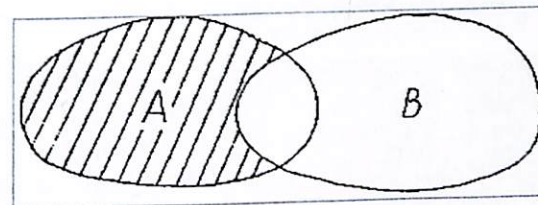
**Nazorat savollari**

1. To'plamlarning kesishmasi, birlashmasiga ta'rif bering?
2. To'plamlarning kesishmasi, birlashmasiga misollar keltiring?
3. Misollarni Eylar-Venn diagrammasida tasvirlang?

**1.4-§. Ikki to'planning ayirmasi, universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam.**

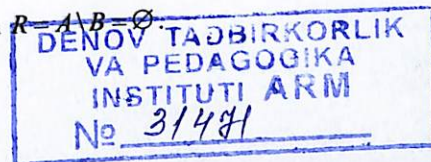
1. **To'plamlar ayirmasi.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning ayirmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u  $A$  ning  $B$  da mavjud bo'lmagan hamma elementlaridagina tuziladi va quyidagicha belgilanadi:

$$C = A - B \text{ yoki } C = A \setminus B$$

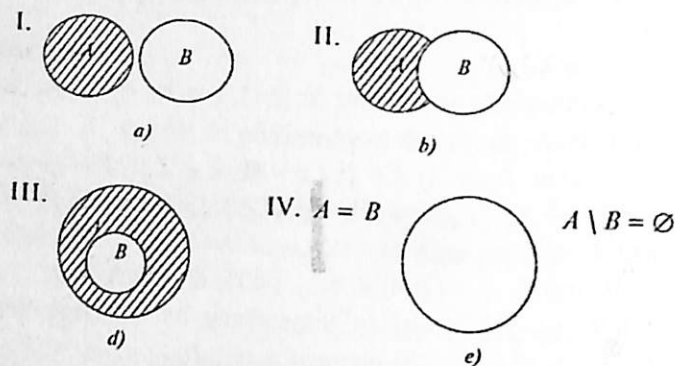


**Misollar:**

1.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  va  $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  uchun
2.  $R = A \setminus B = \{1, 2\}$   $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  va  $B = \{6, 7, 8\}$  uchun
3.  $A = \{1, 2, 3\}$  va  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  uchun  $R = A \setminus B = \emptyset$ .



To'plamlarning ayirmasi geometrik nuqtai nazardan yuqoridagi 7-chizmada ko'rsatilgan shtrixlangan yuzani bildiradi (1.12-rasm).



1.12 -rasm. to'plamlarning ayirmasi.

$A$  va  $B$  to'plamlarning ayirmasi deb,  $A$  to'plamning  $B$  to'plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va  $A \setminus B$  yoki  $A-B$  ko'rinishlarda belgilanadi.

$A$  va  $B$  to'plamlarning ayirmasini mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A-B = A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

$A$  va  $B$  to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan  $A \cup B$  to'plam  $A$  va  $B$  to'plamlarning birlashmasi yoki yig'indisi deyiladi. Buni matematik tilda quyidagicha yozamiz:

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Masalan:  $\{1, x, a\} \cup \{2, 7, x\} = \{1, x, a, 2, 7\}$

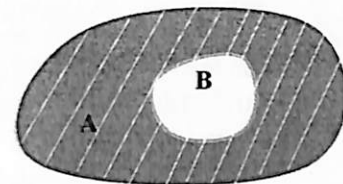
## 2. Universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam va uning xossalari.

$A$  to'plam va uning  $B$  qismaniy to'plami berilgan bo'lsin.  $A$  dagi  $B$  ga kirmay qolgan hamma elementlariga tuzilgan qism,  $B$  ning  $A$  gacha to'ldiruvchisi deb ataladi va  $\bar{B}_A$  ko'rinishda belgilanadi. Bunda  $\bar{B}_A$  qism to'plam  $B$  ni  $A$  gacha to'ldiradi, ya'ni  $B$  va  $\bar{B}_A$  ning birlashmasi  $A$  ga teng bo'ladi.

Masalan,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  va  $B = \{2, 5, 6, 9\}$  bo'lsa,  $\bar{B}_A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$  bo'ladi.

Agar  $A$  to'plam biror boshqa to'plamning qismi deb qaralmasa, u holda  $A$  to'plamning to'ldiruvchisi  $\emptyset$  bo'sh to'plam bo'lib,  $\emptyset$  ning to'ldiruvchisi esa  $A$  bo'ladi, ya'ni:  $\bar{\emptyset} = A$  va  $\bar{A} = \emptyset$ .

Agar  $A \supset B$  bo'lsa, u holda  $A \setminus B$  ayirma,  $B$  to'plamni  $A$  to'plamgacha to'ldiruvchisi deyiladi (1.13-rasm).



1.13 -rasm.  $B$  to'plamni  $A$  to'plamgacha to'ldiruvchisi deyiladi.

**1-Eslatma.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning aqalli bittasida ikkinchisiga kirmaydigan elementlar mavjud bo'lsa,  $A$  va  $B$  ni tengmas to'plamlar deymiz, uni quyidagicha belgilaymiz:  $A \neq B$

To'plamlar ayirmasining xossalari va tasviri (1.14-rasm):

1°.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A$  (1.14-a rasm).

2°.  $B \subset A \Rightarrow A \setminus B = \bar{B}_A$  (1.7-d rasm).

3°.  $A = B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$  (1.7-e rasm).

4°.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus B \cap C$

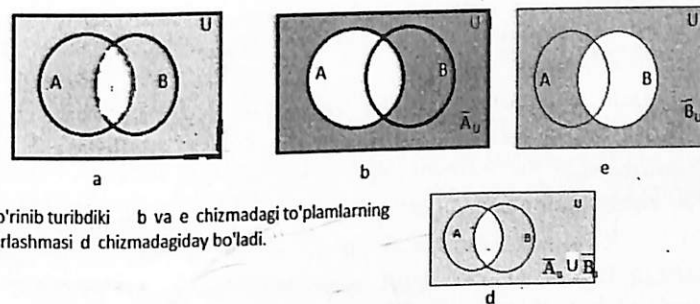
5°.  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

6°.  $\overline{(A \cup B)}_U = \bar{A}_U \cap \bar{B}_U$ .

7°.  $\overline{(A \cap B)}_U = \bar{A}_U \cup \bar{B}_U$ .

6- va 7-xossalalar De-Morgan qonunlari deyiladi.

4- va 5-xossalarning o'rinli ekanligiga Eyler-Venn diagrammalarida tasvirlash orqali ishonch hosil qilish mumkin.



ko'rinib turibdiki b va e chizmadagi to'plamlarning birlashmasi d chizmadagiday bo'ladi.

1.14 -rasm. To'plamlar ayirmasining xossalari.

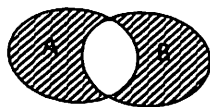
7-xossani isbotlaymiz: Ya'ni "A va B to'plamlar kesishmasining U universal to'plamgacha to'ldiruvchisi" "A va B to'plamlarning U universal to'plamgacha to'ldiruvchilarining birlashmasiga" teng ekanligini ko'rishimiz mumkin. Isbotni Eyer-Venn diagrammasidan foydalanib bajaramiz. 1.14 -rasmdagi (a) holda A va B to'plamlar kesishmasining U universal to'plamgacha to'ldiruvchisi" sariq rangda tasvirlangan. 1.14 -rasmdagi (d) holda A va B to'plamlarning U universal to'plamgacha to'ldiruvchilarining birlashmasiga sariq rangda tasvirlangan. Chizmadan ko'rinib turibdiki bu ikkala tasvir bir xil. Demak,

$$\overline{(A \cap B)}_U = \overline{A}_U \cup \overline{B}_U.$$

6-xossa ham xuddi shunday isbotlanadi.

Ta'rif. A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u  $A \setminus B$  yoki  $B \setminus A$  ayirmalarga tegishli bo'lgan hamma elementlaridagina tuziladi va quyidagicha belgilanadi:  $C = A \Delta B$ .

To'plamlarning simmetrik ayirmasi rasmda ko'rsatilgan shtrixlangan sohani bildiradi.



### Misollar yechish.

1-misol. Berilgan to'plamlar ayirmasini to'ping.

$$A = \{a | -8 \leq a < 3, a \in R\}, \quad B = \{b | 1 \leq b \leq 7, b \in R\}.$$

Yechilishi:

$$A \setminus B = \{a | -8 \leq a < 1, a \in R\}.$$

2-misol. Sonli to'plamlar berilgan bo'lsin.  $A \setminus B, B \setminus A$  larni toping.

$$A = \{a | -3 \leq a < 5, a \in R\}, \quad B = \{b | 3 \leq b \leq 6, b \in R\}$$

Yechilishi:

$$A \setminus B = \{a | -3 \leq a < 3, a \in A\}, \quad B \setminus A = \{b | 5 < b \leq 6, b \in B\}$$

3- misol. Agar  $A = [-10; 5]$  va  $B = [-4; \pi]$  bo'lsa, R universal to'plam bo'lsa, unda berilgan to'plamlar orasidagi  $B \setminus A$  amallarni bajaring.

Yechilishi:

Ko'rinib turibdiki  $B \in A$ , ya'ni B to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan bitta ham elementi yo'q.  $B \setminus A$  ayirma esa B to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan elementlar to'plam. Bunday to'plamning bitta ham elementi yo'q, yani bo'sh to'plam. Demak,

### Mustaqil yechish uchun misollar

1-misol.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  va  $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  uchun  $A \setminus B = ?$

2-misol.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  va  $B = \{6, 7, 8\}$  uchun  $A \setminus B = ?$

3-misol.  $A = \{1, 2, 3\}$  va  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  uchun  $A \setminus B = ?$

4-misol.  $A = \{2; 5; 7; 9\}$ ,  $B = \{2; 4; 7\}$  bo'lsin, u holda  $A \setminus B = ?$

5-misol. Berilgan to'plamlar ayirmasini to'ping.

a)  $A = \{a | -8 \leq a < 3, a \in R\}$ ,  $B = \{b | 1 \leq b \leq 7, b \in R\}$ .

b)  $A = \{a | -1 < a \leq 4, a \in R\}$ ,  $B = \{b | -2 \leq b < 5, b \in R\}$ .

c)  $A = \{a | -2 < a < 3, a \in R\}$ ,  $B = \{b | -3 < b < 1, b \in R\}$ .

6-misol. Sonli to'plamlar berilgan.  $A \setminus B, B \setminus A$  larni toping.

1.  $A = \{a | -3 \leq a < 5, a \in R\}$ ,  $B = \{b | 3 \leq b \leq 6, b \in R\}$

2.  $A = \{a | -2 < a \leq 3, a \in R\}$ ,  $B = \{b | 1 \leq b < 5, b \in R\}$

3.  $A = \{a | -5a < -2, a \in R\}$ ,  $B = \{b | -3b < -1, b \in R\}$

4.  $A = \{a | -3 \leq a \leq 1, a \in R\}$ ,  $B = \{b | -1 < b \leq 2, b \in R\}$

### Nazorat uchun savollar.

1. To'plamlar ayirmasining ta'rifini bering.
2. Xossalarini ayting va asoslang.
3. To'ldiruvchi to'plam ta'rifini bering.
4. To'ldiruvchi to'plam xossalarini ayting va asoslang.

### 1.5-§. To'plamlarning dekart ko'paytmasi. To'plamlar ustidagi amallarning xossalari.

To'plamlarning dekart (to'g'ri) ko'paytmasi. A va B to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u to'plam elementlari tartiblangan  $(x, y)$  juftliklardan iborat bo'lib, bu juftni birinchisi A to'plamdan, ikkinchisi esa B to'plamdan olinadi. To'g'ri ko'paytma  $A * B$  ko'rinishda belgilanadi.

Misol:  $A = \{4, 5, 7\}$  va  $B = \{-1, 2, 3, 4\}$  to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda A va B to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi quyidagicha bo'ladi:

$$A * B = \{(4; -1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (5; -1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (7; -1), (7; 2), (7; 3), (7; 4)\}$$

Agar biz to'g'ri ko'paytma elementi  $(x, y)$  dagi x ni biror nuqtani absitsasi, y ni esa ordinatasi desak, u holda bu to'g'ri ko'paytma tekislikdagi nuqtalar to'plamini ifodalaydi.

Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to'plami  $R$  ni  $R$  ga to'g'ri ko'paytmasi  $R \times R$  ni tasvirlaydi.

Ta'rif.  $A$  va  $B$  to'plamlarning dekart ko'paytmasi deb, 1-elementi  $A$  to'plamdan, 2-elementi  $B$  to'plamdan olingan  $(a; b)$  ko'rinishdagi barcha tartiblangan juftliklar to'plamiga aytiladi. Dekart ko'paytma  $A \times B$  ko'rinishda belgilanadi va

$$A \times B = \{(a_i; b_j) | a_i \in A \text{ va } b_j \in B, i=1,2,3,\dots,n; j=1,2,3,\dots,n\}.$$

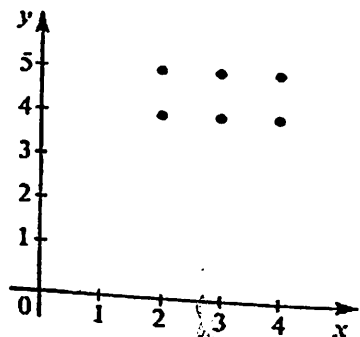
kabi aniqlanadi.

1-misol.  $A = \{2; 3; 4; 5\}$ ,  $B = \{a; b; c\}$  bo'lsa,  $A \times B = \{(2; a), (2; b), (2; c), (3; a), (3; b), (3; c), (4; a), (4; b), (4; c), (5; a), (5; b), (5; c)\}$  bo'ladi.

Sonli to'plamlar dekart ko'paytmasini koordinata tekisligida tasvirlash qulay.

2-misol.  $A = \{2; 3; 4\}$ ,  $B = \{4; 5; 8; 9\}$  bo'lsin, u holda  $A \times B = \{(2; 4), (2; 5), (2; 8), (2; 9), (3; 4), (3; 5), (3; 8), (3; 9), (4; 4), (4; 5), (4; 8), (4; 9)\}$  bo'ladi.

Koordinata tekisligida shunday koordinatali nuqtalarni tasvirlaymizki, bunda  $A$  to'plam elementlari  $Ox$  o'qidan va  $B$  to'plam elementlari  $Oy$  o'qidan olinadi.



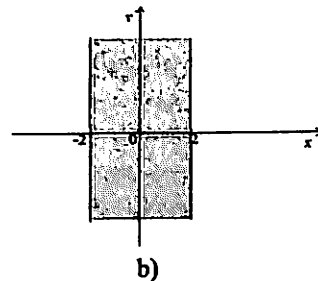
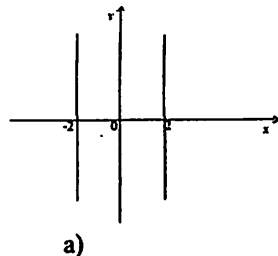
1.15-rasm.

3-misol. a)  $A = \{-2; 2\}$ ;  $B = R$  bo'lsa,  $A \times B$  ni toping.

Yechish:  $A$  va  $B$  to'plamlarning dekart ko'paytmasini hisoblash uchun  $A$  to'plamning birinchi elementini  $B$  to'plamlarning har bir elementi bilan bittadan juft qilib olish kerak (2-misolga o'xshash). Bizning misolda

$$A \times B = \{(-2; 0), (-2; 0,5), (-2; 0,8), (-2; 1); \dots; (2; 0), (2; 0,5), (2; 0,8), (2; 1), \dots\}$$

Buni koordinata tekisligiga joylashtirsak  $x=-2$  va  $x=2$  tenglamalar bilan aniqlangan va  $Oy$  o'qiga parallel bo'lgan ikkita to'g'ri chiziqni anglatadi (1.16-rasmning a) holiga qarang)



1.16-rasm.

b)  $A = [-2; 2]$ ;  $B = R$  bo'lsa,  $A \times B$  ni toping.

Yechish: Huddi 3-misol a) misolning yechilishiga o'xshash fikr yuritimiz va yechim  $x=-2$  va  $x=2$  tenglamalar bilan aniqlangan va  $Oy$  o'qiga parallel bo'lgan ikkita to'g'ri chiziq va ular orasidagi nuqtalar to'plami (soha, bo'yalgan joy) paydo bo'ladi (1.16-rasmning b) holiga qarang).

Dekart ko'paytmaning xossalari:

$$1^\circ. A \times B \neq B \times A.$$

$$2^\circ. A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

$$3^\circ. A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Ikkitadan ortiq to'plamlarning dekart ko'paytmasini ham ko'rishimiz mumkin. Umumiy holda  $A_1, A_2, \dots, A_n$  to'plamlar berilgan bo'lsin. Ularning dekart ko'paytmasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i) | a_1^i \in A_1, a_2^i \in A_2, \dots, a_n^i \in A_n\},$$

bu erda  $a_i^i \in A_i$  yozuvdagi  $i$  indeks  $a_i^i$  element  $A_i$  to'plamning  $i$ -elementi ekanligini bildiradi.

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  tartiblanganlik deyiladi. (Masalan, uchlik, to'rtlik va h.k.). bunday tartiblangan  $n$  lik  $n$  o'rinli kortej deb ham ataladi. Yana  $n$  o'rinli kortejlar faqat bitta to'plam elementlaridan tuzilgan bo'lishi ham mumkin, bu holda u to'plamni o'z-o'ziga  $n$  marta dekart ko'paytmasi elementidan iborat bo'ladi.

Yuqorida aytilganlardan xulosa qilsak, Dekart koordinata tekisligini haqiqiy sonlar to'plami  $R$  ni o'ziga-o'zining dekart ko'paytmasi  $R^2=R \times R$ , koordinata fazosini  $R^3=R \times R \times R$  deb qarash mumkinligi kelib chiqadi.

$A$  va  $B$  to'plamlarning to'g'ri (dekart) ko'paytmasi  $A \times B$  ko'rinishida belgilanib, u quyidagicha yoziladi:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Masalan,  $\{1, 3\} \times \{a, c\} = \{(1, a), (1, c), (3, a), (3, c)\}$ .

$A_1, A_2, \dots, A_n$  to'plamlarning to'g'ri (dekart) ko'paytmasi  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  esa quyidagicha aniqlanadi:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1^j, a_2^j, \dots, a_n^j) | a_j^j \in A_j, j=1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Agar Bu to'plamlar bir-biriga teng bo'lsa,  $A \times A \times \dots \times A$  ni  $A^n$  ko'rinishida yozishimiz mumkin, ya'ni  $A \times A \times \dots \times A = A^n$ , shuningdek  $n=1$  hol uchun

$A=A^1$  tenglikka ega bo'lamiz. Agar  $A \times B$  dagi binar munosabat  $f$  uchun  $afb$  va  $afs$  dan  $b=s$  kelib chiqsa, u holda  $A$  to'plamni  $B$  to'plamga o'tkazuvchi funktsiya (akslantirish) berilgan deyiladi. Odatda  $afb$  ni  $f(a)=b$  ko'rinishda belgilaymiz.

### Misollar yechish

**1-misol:**  $A = \{4, 5, 7\}$  va  $B = \{-1, 2, 3, 4\}$  to'plamlar berilgan bo'lsin.  $A$  va  $B$  to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasini toping?

**Yechish:**  $A$  va  $B$  to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi quyidagicha bo'ladi:

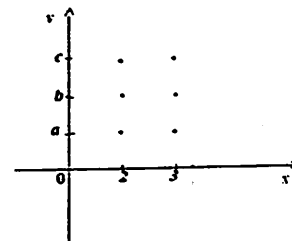
$$A \times B = \{(4; -1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (5; -1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (7; -1), (7; 2), (7; 3), (7; 4)\}$$

Agar biz to'g'ri ko'paytma elementi  $(x, y)$  dagi  $x$  ni biror nuqtani absissasi,  $y$  ni esa ordinatasi desak, u holda bu to'g'ri ko'paytma tekislikdagi nuqtalar to'plamini ifodalaydi. Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to'plami  $R$  ni  $R$  ga to'g'ri ko'paytmasi  $R \times R$  ni tasvirlaydi.

**2-misol.**  $A = \{2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$  sonli to'plamlar berilgan.  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  larni toping.  $A$  va  $B$  to'plamlar Dekart ko'paytmasini koordinata tekisligida tasvirlang.

**Yechish:**  $A \cup B = \{2, 3, a, b, c\}$ ;  $A \cap B = \emptyset$ ;  $A \setminus B = A$ ;  $B \setminus A = \{a, b, c\} = B$

$A \times B = \{(2; a), (2; b), (2; c), (3; a), (3; b), (3; c)\}$  Dekart ko'paytmaning koordinata tekisligidagi tasviri bo'ladi.

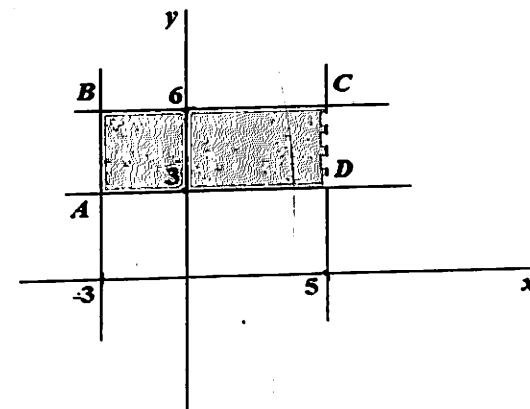


1.17-rasm.

**3-misol.** Sonli to'plamlar berilgan.  $A$  va  $B$  to'plamlar dekart ko'paytmasini toping va koordinata tekisligida tasvirlang?

$$A = \{a | -3 \leq a < 5, a \in R\}, \quad B = \{b | 3 \leq b \leq 6, b \in R\}$$

**Yechish:**  $A \times B = \{(a, b) | -3 \leq a < 5; 3 \leq b \leq 6, a, b \in R\}$



1.18-rasm.

$A \times B$  Dekart ko'paytma  $x=-3$ ;  $y=3$ ;  $y=6$ ;  $x=5$  to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sirtning nuqtalari to'plamidan iborat bo'lib,  $CD$  tomoni ochiq. Chizmadagi bo'yalgan yuz.

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1-misol. Agar

a)  $A = [-2; 3]$ ,  $B = \{2; 3; 4\}$ .

b)  $A = [-2; 3]$ ,  $B = \{2; 4\}$ .

c)  $A = R, B = [2;4]$  bo'lsa,  $A \times B$  ni to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida tasvirlang.

2-misol. Sonli to'plamlar berilgan.  $A$  va  $B$  to'plamlar Dekart ko'paytmasini toping va koordinata tekisligida tasvirlang.

1.  $A = \{a | -3 \leq a < 5, a \in R\}, B = \{b | 3 \leq b \leq 6, b \in R\}$

2.  $A = \{a | -2 < a \leq 3, a \in R\}, B = \{b | 1 \leq b < 5, b \in R\}$

3.  $A = \{a | -5a < -2, a \in R\}, B = \{b | -3b < -1, b \in R\}$

4.  $A = \{a | -3 \leq a \leq 1, a \in R\}, B = \{b | -1 < b \leq 2, b \in R\}$

5.  $A = \{a | 2 \leq a < 5, a \in R\}, B = \{b | -4 < b < 3, b \in R\}$

6.  $A = \{a | |a| < 3, a \in R\}, B = \{b | 0 \leq b < 4, b \in R\}$

7.  $A = \{a | 1 \leq a \leq 4, a \in R\}, B = \{b | |b| \leq 2, b \in R\}$

8.  $A = \{a | -5 < a < -3, a \in R\}, B = \{b | -4 < b < 1, b \in R\}$

9.  $A = \{a | 1 < a < 5, a \in R\}, B = \{b | 4 \leq b \leq 6, b \in R\}$

10.  $A = \{a | 3 \leq a \leq 7, a \in R\}, B = \{b | 1 \leq b \leq 5, b \in R\}$

1.6-§. To'plamlarni o'zaro kesishmaydigan to'plamostilariga (sinflarga) ajratish tushunchasi. To'plamlarni bitta, ikkita va uchta xossaga ko'ra sinflarga ajratish

1. To'plamlarni sinflarga ajratish.

Ta'rif:  $A$  to'plam quyidagi 2 shartni qanoatlantirsa u  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  sinflarga ajratilgan deyiladi.

1)  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  qism to'plamlar jufti-jufti bilan o'zaro kesishmasa, ya'ni  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , bu yerda  $i, j = 1, 2, \dots, n, \dots$  va  $i \neq j$ ;

2)  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  qism to'plamlarning birlashmasi  $A$  to'plam bilan mos tushsa ya'ni  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$

To'plamlarni sinflarga ajratish masalasi klassifikatsiya deyiladi. Klassifikatsiya - bu sinf ichida ob'ektlarning o'xshashligi va ularning boshqa sinflardagi ob'ektlardan farq qilishi asosida sinflar bo'yicha ob'ektlarni ajratish amalidir.

Agar yuqoridagi shartlardan aqalli bittasi bajarilmasa, klassifikatsiya noto'g'ri hisoblanadi.

Masalan: uchburchaklarning  $A$  to'plamini uchta sinfga ajratish mumkin: o'tkir burchakli, to'g'ri burchakli, o'tmas burchakli uchburchaklar. Haqiqatan ham, ajratilgan to'plamostilari jufti-jufti bilan kesishmaydi. Boshqacha aytganda, birinchidan, o'tkir burchakli

uchburchaklar ichida o'tmas va to'g'ri burchakli uchburchaklar yo'q, to'g'ri burchakli uchburchaklar ichida o'tkir va o'tmas burchakli uchburchaklar yo'q, shuningdek o'tmas burchakli uchburchaklar ichida o'tkir va to'g'ri burchakli uchburchaklar yo'q.

Ikkinchidan, o'tkir, to'g'ri va o'tmas burchakli uchburchaklar birlashmasi uchburchaklar to'plami  $A$  to'plam bilan mos tushadi.

To'plamlarni sinflarga ajratishda sinflar soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin.

Masalan: Natural sonlar to'plamini bir necha usul bilan sinflarga ajratish mumkin.

1. Toq va juft sonlar sinfi;

2. Tub va murakkab sonlar sinfi;

3. Bir xonali, ikki xonali, uch xonali, ..., xonali sonlar sinfi:

Bunda 1. va 2. holda sinflar soni chekli; 3.- holda sinflar soni cheksiz.

Shuning bilan birga berilgan to'plamning har qanday qism to'plamlari sistemasi ham to'plamni sinflarga ajratishni ifodalavermasligini qayd qilish kerak.

Masalan:  $A$  uchburchaklar to'plamidan, teng yonli, teng tomonli, turli tomonli uchburchaklar to'plamostilarini olsak, u holda u  $A$  to'plamni sinflarga ajrata olmaydi, chunki birinchi shart bajarilmaydi. Chunki teng yonli va teng tomonli uchburchaklar to'plami ostilari kesishadi, ya'ni hamma teng tomonli uchburchaklar teng yonli uchburchaklardir.

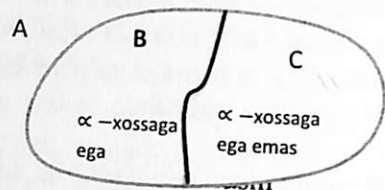
2. To'plamlarni bitta, ikkita va uchta xossaga ko'ra sinflarga ajratish. To'plamlarni qism to'plamlarga ajratish uchun, qism to'plam elementlarini xarakteristik xossalarni ko'rsatish kerak. To'plamlarni bitta, ikkita, uchta xossasiga ko'ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

Aytaylik,  $A$  to'plam va biror  $\alpha$  xossa berilgan bo'lsin.  $A$  to'plam elementlari  $\alpha$  xossaga ega bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu holda  $A$  to'plam o'zaro kesishmaydigan ikkita  $B$  va  $C$  to'plamostilarga ajraladi.

$B$  to'plam  $A$  to'plamning  $\alpha$  xossasiga ega bo'lgan elementlari to'plami,  $C$  to'plam  $A$  to'plamning  $\alpha$  xossasiga ega bo'lmagan elementlari to'plami  $B \cup C = A$  va  $B \cap C = \emptyset$

Agar  $A$  to'plamning hamma elementlari  $\alpha$  xossaga ega bo'lsa, u holda  $C = \emptyset$  bo'ladi, agar  $A$  to'plamning hamma elementlari  $\alpha$  xossaga ega bo'lmasa  $B = \emptyset$  bo'ladi.

Agar  $B$  va  $C$  to'plamlar bo'sh bo'lmasa, u holda  $A$  to'plamni Eyer Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlash mumkin. (1.19-rasm).

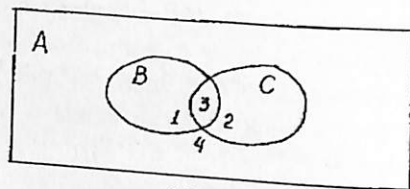


**Masalan:**  $A$  – auditoriyadagi talabalar to'plami,  $\alpha$  -sinovlarni topshirganlik xossasi bo'lsa,  $B$  -sinovlarni topshirgan,  $C$  esa sinovlarni topshirmagan talabalar to'plami bo'ladi. Endi to'plamni ikkita xossaga ko'ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

$A$  to'plamva  $\alpha, \beta$  xossalarga berilgan bo'lsin.  $A$  to'plam elementlari  $\alpha, \beta$  xossalarga ega bo'lishi, bo'lmasligi ham mumkin.

- a)  $\alpha$  xossaga ega bo'lgan va  $\beta$  xossaga ega bo'lmagan elementlar to'plami – 1 sinf;
- b)  $\alpha$  xossaga ega bo'lmagan va  $\beta$  xossaga ega bo'lgan elementlar to'plami – 2 sinf;
- v)  $\alpha$  va  $\beta$  xossalarga ega bo'lgan elementlar to'plami – 3 sinf;
- g)  $\alpha$  va  $\beta$  xossalarga ega bo'lmagan elementlar to'plami – 4 sinf.

Bu sinflardan ayrimlari bo'sh to'plam ham bo'lishi mumkin. Bu 4 ta sinf Eyer-Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlanadi. (1.20-rasm).

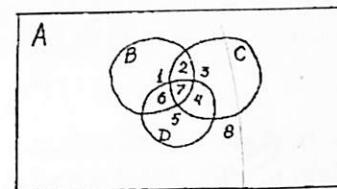


1.20-rasm

To'plamni 3 ta xossaga ko'ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

$A$  to'plam va  $\alpha, \beta, \gamma$  xossalarga berilgan bo'lsin.  $A$  to'plam  $\alpha, \beta, \gamma$  xossalarga ega bo'lishi ham bo'lmasligi ham mumkin. Bu uchta xossa  $A$  to'plamni sakkizta sinfga ajratishi mumkin.

- a)  $\alpha$  xossaga ega bo'lgan va  $\beta, \gamma$  xossalarga ega bo'lmagan to'plam – 1 sinf;
- b)  $\alpha$  va  $\beta$  xossalarga ega bo'lgan va  $\gamma$  xossaga ega bo'lmagan to'plam – 2 sinf;
- v)  $\beta$  xossaga ega bo'lgan va  $\alpha, \gamma$  xossalarga ega bo'lmagan to'plam – 3 sinf;
- g)  $\beta, \gamma$  xossalarga ega bo'lgan va  $\alpha$  xossaga ega bo'lmagan to'plam – 4 sinf;
- d)  $\gamma$  xossaga ega bo'lgan va  $\alpha, \beta$  xossalarga ega bo'lmagan to'plam – 5 sinf;
- e)  $\alpha, \gamma$  xossalarga ega bo'lgan va  $\beta$  xossaga ega bo'lmagan to'plam – 6 sinf;
- j)  $\alpha, \beta$  va  $\gamma$  xossalarga ega bo'lgan to'plam – 7 sinf;
- z)  $\alpha, \beta$  va  $\gamma$  xossalarga ega bo'lmagan to'plam – 8 sinf.



1.21-rasm

Bu sinflardan ayrimlari bo'sh to'plam ham bo'lishi mumkin. Bu 8 ta sinf 1.21-rasmida tasvirlangan.

### Mustaqil yechish uchun misollar.

- 1 - misol. O'zbek alifbosidagi harflar to'plamini sinflarga ajrating.
- 2 - misol. Universitet kutubxonasidagi kitoblar to'plamini sinflarga ajrating.
- 3 - misol. Natural sonlar to'plamini sinflarga ajrating. Misollar keltiring.
- 4 - misol. Dengizdagi baliqlar to'plamini sinflarga ajrating.
- 5 - misol. Universitet talabalarini o'zaro juft – jufti bilan kesishmaydigan sinflarga ajrating.

6 - misol. Universitet talabalarini bir, ikki va uch xossaga ko'ra sinflarga ajrating.

7 - misol. A-juft sonlar to'plami, B - 2 ga karrali sonlar to'plami. Bu to'plamlarni nechta sinfga ajratish mumkin?

8 - misol Eylar doiralari orqali elementlarining xarakteristik xossasi bilan berilgan to'plamlar ustida amallarni ko'ramiz.

I- sinfdagi o'quvchilar to'plami.

K- maktabdagi o'g'il bolalar to'plami.

S-sport bilan shug'ullanuvchi o'quvchilar to'plami.

P- sinfdagi a'lochilar to'plami va  $K \cap S \cap P \neq \emptyset$ . Bu to'plamlarni nechta sinfga ajratish mumkin?

### Nazorat savollari

1. To'plamlarni sinflarga ajratishni ta'riflang.
2. To'plamlarni sinflarga ajratishga misollar keltiring.
3. To'plamlarni bitta, ikkita, uchta xossaga ko'ra sinflarga ajrating.
4. Ajratishni misollar yordamida va Eylar -Venn diagrammasi orqali tushuntirib bering.

### 1.7-§. Moslik va munosabatlar: ikkita to'plam elementlari orasidagi moslik. Moslikning grafi va grafigi

#### 1. Ikki to'plam elementlari orasidagi moslik.

Ikki to'plam elementlari orasidagi moslikni ko'rishdan oldin, ikki to'plam dekart ko'paytmasi va uning qism to'plamlarini misollar yordamida eslaylik. Aytaylik bizga  $X = \{a, b, c\}$  va  $Y = \{m, n\}$  to'plamlari berilgan bo'lsin. U holda

$$X \times Y = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n), (c, m), (c, n)\}$$

ga ega bo'lamiz. Bu dekart ko'paytma 6 ta qism to'plamga ega.

1-ta'rif  $X \times Y$  dekart ko'paytmaning istalgan  $G$ , qism to'plami

va  $Y$  to'plamlar orasidagi binar moslik deyiladi. Binar so'zi lotincha bis so'zidan olingan bo'lib, ikki to'plam elementlari orasida so'z borishini bildiradi.

Moslik lotin alifbosining  $f, d, t, s$  kabi harflari bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi:  $f: A \rightarrow B$  yoki  $A \xrightarrow{f} B$ .

Bizga ma'lum bo'lgan funksiyalarning hammasi moslik tushunchasiga misol bo'la oladi.

X to'plam moslikning birinchi to'plami deyiladi. X to'plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to'plami moslikning aniqlanish sohasi deyiladi [1].

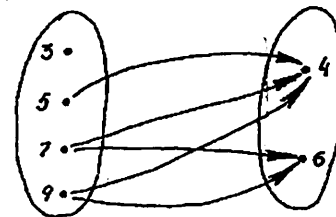
Y to'plam moslikning ikkinchi to'plami deyiladi. Y to'plamning moslikda qatnashgan elementlari to'plami moslikning qiymatlar to'plami deyiladi.

$G_f \subset X \times Y$  to'plam moslikning grafigi deyiladi.  $G_f$  grafik biror  $R$  moslikdagi  $(x, y)$  juftliklar to'plami ya'ni  $xRy$ , bu yerda  $x \in X, y \in Y$

Ikki to'plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo'nalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar moslikning grafi deyiladi.

Chekli to'plamlar orasidagi moslik graflar yordamida ko'rgazmali tasvirlanadi.

Misollar: 1.  $X = \{3, 5, 7, 9\}$  va  $Y = \{4, 6\}$  to'plamlar orasidagi «katta» mosligining grafigini yasaymiz. Buning uchun berilgan to'plamlar elementlarini nuqtalar bilan belgilaymiz va X to'plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalardan Y to'plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalarga strelkalar o'tkazamiz (1.22-rasm)

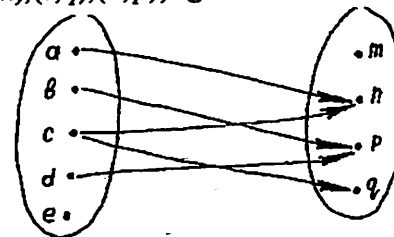


1.22-rasm

1. Natijada biz X va Y to'plamlar elementlari orasidagi «katta» mosligiga ega bo'lamiz.

2.  $X = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $Y = \{m, n, p, q\}$

$G_f = \{(a, n), (b, p), (c, n), (c, q), (d, p)\}$  grafini chizaylik (1.23-rasm)

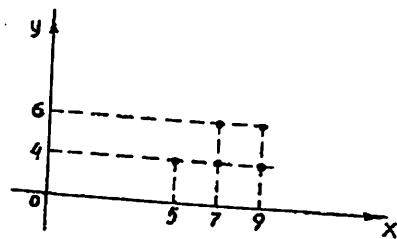


1.23-rasm

Bunda aniqlanish sohasi  $\{a, b, c, d\}$ , Qiymatlar to'plami  $\{n, p, q\}$ .

Sonli  $X$  va  $Y$  to'plamlar elementlari orasidagi moslik koordinata tekisligidagi grafik yordamida tasvirlanadi.

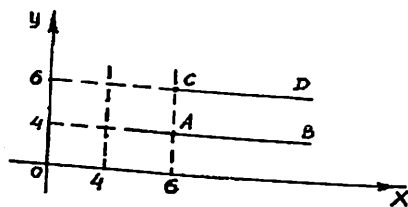
Buning uchun  $R$  moslikda bo'lgan barcha sonlar jufti koordinata tekisligida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Buning natijasida hosil bo'lgan figura  $R$  moslikning grafigi bo'ladi. Yuqoridagi misolni grafigini chizamiz. (1.24-rasm)



1.24-rasm

Moslikni bunday tasvirlash ularni berilgan moslikda cheksiz ko'p sonlar jufti bo'lganda ko'rgazmali tasvirlash imkonini beradi.

Masalan:  $X = R$  va  $Y = \{4, 6\}$  to'plamlar orasidagi «katta» mosligini qaraylik va grafigini yasaylik moslikni  $[AB)$  va  $[CD)$  nurlar ifodalaydi. (1.25-rasm)



1.25-rasm

**Ta'rif.** Agar ikkita  $x$  va  $y$  to'plamlar orasidagi mosliklarning  $G$ , grafigi  $X \times Y$  dekart ko'paytmasi bilan ustma-ust tushsa, bu moslik to'la moslik deyiladi. Agar moslik grafigi  $G$ , bo'sh bo'lsa ( $G = \emptyset$ ) moslik bo'sh moslik deyiladi.

Ixtiyoriy ikkita  $x$  va  $y$  to'plamlar orasida bo'sh va to'la mosliklar mavjud bo'lishi mumkin.

$X$  va  $Y$  dekart ko'paytma to'plamostilari ustida turli xil amallarni bajarish mumkin.

Masalan, va to'plamlar orasida berilgan  $xRy$  va  $xKy$  mosliklar mosliklar birlashmasi deb, ularning grafiglari birlashmasidan iborat  $xSy$  moslikka aytiladiki,  $xSy$  moslik faqat va faqat  $xRy$  yoki  $xKy$  mavjud bo'lsa bo'ladi.

Shuningdek moslikka teskari moslik ham mavjud.  $xRy$  moslikka teskari moslik  $yR^{-1}x$  ko'rinishda yoziladi va barcha  $(x, y)$  elementlar juftligi uchun  $(y, x)$  juftliklar mavjud bo'ladi.

**Misollar.**

- $f: R \rightarrow R$  da berilgan  $f(x) = x^2 - x + 1, x \in R$  moslik.
- $f: R \rightarrow C$  da berilgan  $F(x) = (x - 1) + ix^2, x \in R$  moslik.
- $h: R \times R \rightarrow R$  da berilgan  $f(x, y) = x - y, x, y \in R$  moslik.
- $\gamma: R \times R \rightarrow R$  da berilgan  $\gamma(x, y) = x^2 + iy^2$  moslik.
- $q: Z \rightarrow Z$  da berilgan  $q(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n), n \in Z$  moslik.
- $\mu: Z^+ \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  da berilgan:
- $h: R \times R \rightarrow C$  da berilgan  $h(x, y) = x + iy, x, y \in R$  moslik.
- $\sigma: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  moslik quyidagicha

ifodalangan

$$\sigma: \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{matrix}$$

**Mustaqil yechish uchun misollar**

1.  $X = \{453; 0; 524; 264; 135; 122\}$  va  $U = \{3; 4; 5; 9\}$  to'plamlar orasida  $R$  "x son y songa karrali" munosabati berilgan. Bunda  $x \in X$  va  $y \in U$ . Munosabat grafigini yasang. Bu grafda 135 dan 9 ga boruvchi strelka bormi?

2.  $A = \{3; 15\}$  va  $V = \{7; 18\}$  to'plamlar berilgan. Bu to'plamlar orasidagi Dekart ko'paytmani tuzing va barcha qism to'plamlarni aniqlang. Hosil bo'lgan qism to'plamlardan qaysilari

a) "kichik", v) "katta", s) "katta yoki teng" munosabatlariga to'g'ri keladi?

3.  $X = \{x \in N, x \leq 6\}$ ,  $Y = \{y \in N, 9 \leq y \leq 24\}$  to'plam elementlari orasida  $C$ : «x soni y sonining bo'luvchisi, bunda  $x \in X, y \in Y$  moslik berilgan bo'lsa, uning grafigini yasang.

4.  $A = \{1; 2; 3; 4; 6\}$ ,  $B = \{5; 7\}$  to'plamlar elementlari orasida «kichik» mosligi o'rnatilgan. Bu moslik grafigini yasang.
5.  $M = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$  va  $N$  — natural sonlar to'plami berilgan. Bu to'plamlar orasida  $R$  moslik: « $m$  sonning kvadrati  $n$  soniga teng», bunda  $m \in M$ ,  $n \in N$  berilgan.  $R$  moslik juftliklari to'plamini aniqlang.
6.  $X = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}$ ,  $Y = \{y \in \mathbb{N}, 15 \leq y \leq 19\}$  to'plam elementlari orasida  $C$ : « $x$  soni  $y$  sonining bo'luvchisi, bunda  $x \in X$ ,  $y \in Y$  moslik berilgan bo'lsa, uning grafigini yasang.

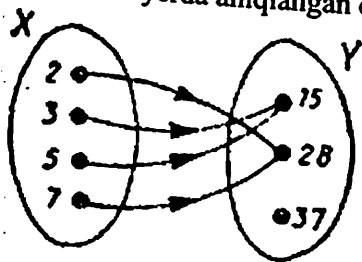
**Nazorat uchun savollar.**

1. Binar munosabat ta'rifini bering.
2. Binar munosabatning grafi va grafigi deb nimaga aytiladi?
3. Binar munosabat turlarini ko'rsating.

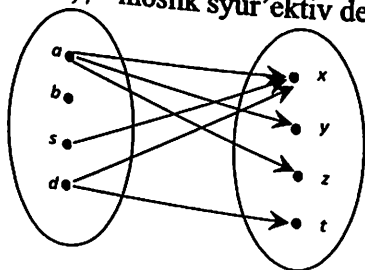
**1.8 -§. To'plamni to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantirish. Teng quvvatli to'plamlar.**

**1. Munosabat turlari.**

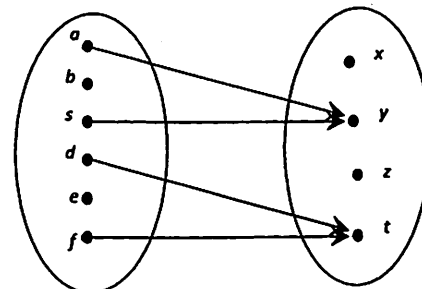
1-Ta'rif: Agar  $f$  moslikning aniqlanish sohasi birinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa,  $f$  moslik hamma yerda aniqlangan deyiladi.



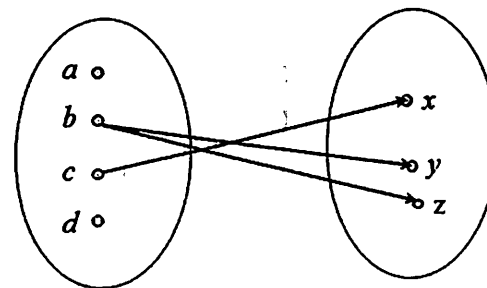
2-Ta'rif: Agar  $f$  -moslikning qiymatlar to'plami ikkinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa,  $f$  moslik sur'yektiv deyiladi.



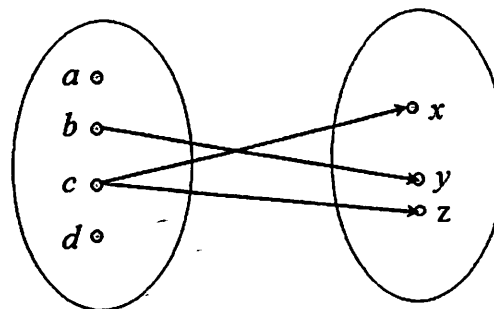
3-Ta'rif: Agar  $f$  moslikda birinchi to'plamning har bir elementiga ikkinchi to'plamning bittadan ortiq bo'lmagan elementi mos kelsa,  $f$  moslik funksional deyiladi.



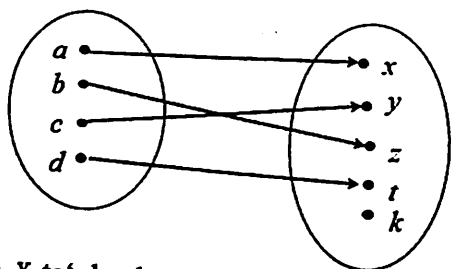
4-Ta'rif: Agar  $f$  moslikda ikkinchi to'plamning har bir elementiga birinchi to'plamning 1 tadan ortiq bo'lmagan elementi mos qo'yilgan bo'lsa,  $f$  moslik in'yektiv deyiladi.



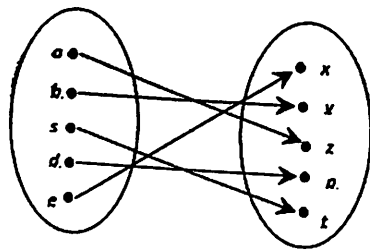
5-Ta'rif: Sur'yektiv va in'yektiv moslik bir so'z bilan biyektiv deyiladi.



**6-Ta'rif:** Hamma yerda aniqlangan funksional moslik akslantirish deyiladi.



**7-Ta'rif:**  $X$  va  $Y$  to'plamlar orasidagi  $f$  moslik biektiv akslantirish bo'lsa,  $X$  va  $Y$  to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan deyiladi.



Moslik turlariga misollar keltiramiz.

**Misol:** Aytaylik  $X$  - kiyim iladigan garderobdagi paltolar to'plami, esa shu garderobdagi ilgaklar to'plami bo'lsin. Agar har bir palto ilgakga ilinib turgan bo'lsa (polda yotmasdan) u holda  $X$  to'plam to'plamga akslantirish bo'ladi. Agar bu akslantirishda har bir ilgakga bittadan ortiq palto ilinmagan bo'lsa (bo'sh ilgaklar ham bo'lishi mumkin) bu akslantirish in'ektiv bo'ladi.

Agar hamma ilgaklar band bo'lsa (bunda ayrim ilgaklarda bittadan ortiq paltolar ilingan ham bo'lishi mumkin) bu akslantirish sur'ektiv bo'ladi.

Agar har bir ilgakda bittadan palto ilingan bo'lsa (o'zaro bir qiymatli) bu akslantirish biektiv bo'ladi.

**8-Ta'rif:**  $X$  va  $Y$  to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, bu to'plamlar teng quvvatli deyiladi va qisqacha  $X \sim Y$  ko'rinishda yoziladi.

**Masalan:** Agar  $X\{a,b,c,d,e\}$ ,  $Y\{x,y,z,t,p\}$  bo'lsa, u holda bo'ladi, chunki, va to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin.

**9-Ta'rif:** Barcha natural sonlar to'plami  $N$  ga teng quvvatli to'plamlar sanoqli to'plam deyiladi.

Masalan:

$$X = \{a; b; c; d\};$$

$$Y = \{x; y; z; t\}; G_f = \{(a; x), (b; y);$$

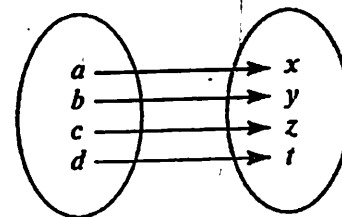
$$(c; z), (d; t)\}$$
 bo'lsa,  $f$  moslik  $X$  va  $Y$

To'plamlar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik bo'ladi.

Chekli va cheksiz to'plamlar elementlari soni to'plam quvvati deb yuritiladi va  $n(A)$ ,

$n(B)$ ,  $n(N)$  kabi yoziladi. Masalan,  $A = \{a; b; c; d\}$  bo'lsa,  $n(A) = 4$  bo'ladi. O'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish yordamida chekli va cheksiz to'plamlar elementlari sonini taqqoslash mumkin.

**10-ta'rif:**  $X$  va  $Y$  to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, bu to'plamlar tengquvvatli yoki ekvivalent deyiladi va  $X \sim Y$  ko'rinishda yoziladi. Bu holda  $n(X) = n(Y)$  bo'ladi.



1.26-rasm

**11-ta'rif:** Natural sonlar to'plami  $N$  ga teng quvvatli bo'lgan barcha to'plamlar sanoqli to'plam deyiladi.

Agar istalgan cheksiz to'plamning har bir elementiga biror qoida yordamida bittadan natural sonni mos keltira olsak, bu to'plam elementlari natural sonlar yordamida nomerlab chiqilgan bo'ladi va Bunday to'plam sanoqli to'plam hisoblanadi. Natural sonlar to'plamining istalgan cheksiz qism to'plami sanoqlidir.

Masalan, barcha juft sonlarni quyidagicha nomerlab chiqamiz:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots & \end{array}$$

Hatto barcha butun sonlar to'plami ham sanoqli ekanini ko'rsatish mumkin.

**Nazorat uchun savollar:**

1. Munosabat turlarini ayting.
2. To'plamni to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantirish.
3. Teng quvvatli to'plamlar.
4. Qanday to'plamlar teng quvvatli deyiladi?

### 1.9-§. To'plamdagi munosabat, uning xossalari.

**1. To'plam elementlari orasidagi munosabat.** Biz to'plamlarni o'rganganda ularni taqqoslab, ular kesishadi yoki teng, yoki biri ikkinchisini qismi deb to'plamlar orasidagi munosabatni qaradik. Natural sonlar to'plamini qaraganda sonlar orasidagi turli - tuman bog'lanishlarni ko'ramiz. Masalan, 7 soni 6 sonidan katta, 12 soni 9 sonidan 3ta ko'p, 3 soni 2 sonidan keyin keladi va hokazo.

Xuddi shunga o'xshash, geometriyada figuralarning tengligi va o'xshashligi, to'g'ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi kabi munosabatlar qaraladi.

Bulardan ko'rinadiki, matematikada asosan, ikki ob'ekt orasidagi munosabat qaraladi, bunga *binar munosabatlar* deyiladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan munosabatlar orasida umumiylik bormi, yo'qmi degan masalani qarashda, u yoki bu munosabatlarni qarashda biz berilgan to'plamlar sonlaridan tashkil topgan tartiblangan juftliklar bilan amallar bajarishni ko'ramiz.

Masalan:  $X = \{4;5;6\}$  to'plamda 1 ta ko'p munosabatini qarashda, «5 soni 4 sonidan 1 ta ko'p», «6 soni 5 sonidan 1 ta ko'p». Shu to'plamda katta munosabatni qarashda «5>4», «6>4», «6>5». Shunga o'xshash kichik munosabatini qarashda «4 soni 5 sonidan 1 ta kam», «5 soni 6 sonidan 1 ta kam».

Keltirilgan misoldagi «1 ta ko'p» munosabat uchun  $\{(5;4), (6;5)\}$  to'plam, «katta» munosabati uchun  $\{(5;4), (6;4), (6;5)\}$  to'plam, «kichik»

munosabati uchun  $\{(4;5), (5;6)\}$  to'plamlarga ega bo'lamiz. Bu to'plamlar esa elementlari  $X = \{4;5;6\}$  to'plam elementlaridan hosil qilingan sonlar juftliklari to'plami bilan aniqlanadi. Boshqacha aytganda, Bu to'plamlar  $X = \{4;5;6\}$  to'plam Dekart ko'paytmasining elementlaridan tashkil topgan qism to'plamlardir, ya'ni

$$X \times X = \{(4;4), (4;5), (4;6), (5;4), (5;5), (5;6), (6;4), (6;5), (6;6)\} :$$

Bundan ko'rinadiki, ko'rib o'tilgan munosabatlar  $X \times X$  Dekart ko'paytmaning qism to'plami bilan aniqlanar ekan.

**1-ta'rif.**  $X \times X$  to'plamning istalgan  $G$  qism to'plami binar munosabat deyiladi. Binar munosabatlar lotin alfavitining bosh harflari P, K, R, S... bilan belgilanadi.

Boshqacha aytganda,  $X$  to'plam elementlari orasidagi *munosabat* deb  $R = (X \times X, G_r)$  juftlikka aytiladi, bu yerda  $G_r \subset X \times X$ .

Agar  $X$  to'plamda berilgan  $R$  munosabatda  $a \in X$  elementga  $b \in X$  element mos kelsa, « $a$  element  $b$  element bilan  $R$  munosabatda» deyiladi va  $aRb$  deb yoziladi, bu yerda  $(a; b) \in G_r$ .

Xususiyl holda teng to'plamlar orasidagi moslik  $X$  to'plam elementlari orasidagi *binar munosabat* deyiladi.  $X$  odamlar to'plami bo'lsa, unda «do'st bo'lmoq», «bitta shaharda yashamoq», «qarindosh bo'lmoq» kabi munosabatlar bo'ladi. Sonlar orasida «teng», «katta», «kichik», «karrali», «katta emas», «bo'luvchisi» va h. k. munosabatlar, geometrik shakllar to'plamida «tengdoshlik», «parallellik», «perpendikularlik» va boshqa munosabatlar haqida gapirish mumkin.

Matematikada binar munosabatlar  $a = b, a < b, a > b, a \neq b, a \parallel b, a \perp b$  kabi belgilar orqali berilgan.

$Z$  butun sonlar to'plamida  $aRb \Leftrightarrow m \mid (a - b)$  munosabatni qaraylik. Ma'lumki,  $a$  va  $b$  butun sonlarini  $m$  natural soniga bo'lishda bir xil  $r$  ( $0 < r \leq m$ ) qoldiq hosil bo'lsa,  $a$  va  $b$  sonlari  $m$  modul bo'yicha taqqoslanadigan (teng qoldiqli) sonlar deyiladi va  $a \equiv b \pmod{m}$  ko'rinishda belgilanadi.  $a$  soni  $b$  soniga  $m$  modul bo'yicha taqqoslanishini ifodalovchi  $a \equiv b \pmod{m}$  bog'lanish taqqoslama deb o'qiladi.

Masalan:  $27 = 5 \times 5 + 2, 12 = 5 \times 2 + 2$  bo'lgani uchun  $27 \equiv 12 \pmod{5}$ .

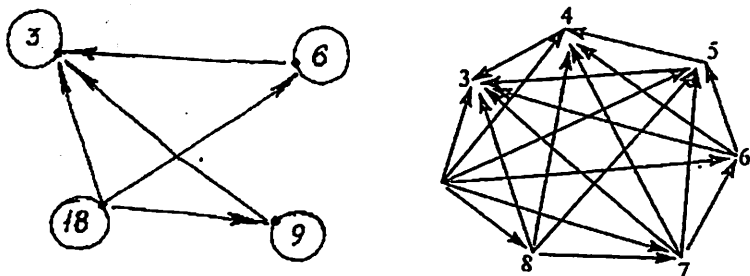
Yoki, agar  $m = 7$  bo'lsa,  $1 \equiv 15 \pmod{7}$  bo'ladi.

Shu narsa ma'lumki,  $a \equiv b \pmod{m}$  taqqoslama  $a - b$  ayirma  $m$  ga qoldiqsiz bo'lingandagina o'rinli bo'ladi.

E'tibor beringki,  $m = 7$  bo'lsa, 7 modul bo'yicha taqqoslanadigan butun sonlarining umumiy ko'rinishi  $-1 + 7k$  shaklda bo'ladi, bu yerda  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

## 2. To'plamdagi munosabatning grafi va grafigi.

Munosabatlarni graflar yordamida ko'rgazmali tasvirlash mumkin. Masalan:  $X = \{3; 6; 9; 18\}$  to'plam elementlari uchun «karrali» munosabatini qaraymiz va uning grafini chizamiz (1.27-rasm). 18 soni 3 ga karrali, 18 soni 6 ga karrali, 18 soni 9 ga karrali va hokazo.  $X$  to'plamdagi ixtiyoriy son o'z-o'ziga karrali bo'lgani uchun oxiri ustma-ust tushadigan strelkalar mavjud. Bunday strelkalar sirtmoqlar deyiladi.



1.27-rasm

Munosabat grafi chekli to'plamlar uchun quyidagicha chiziladi: to'plam elementlari nuqtalar bilan belgilanadi, mos elementlar strelkalar bilan tutashtiriladi. Masalan,  $X = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  to'plam elementlari orasida  $P: «x > y»$  munosabat berilgan.

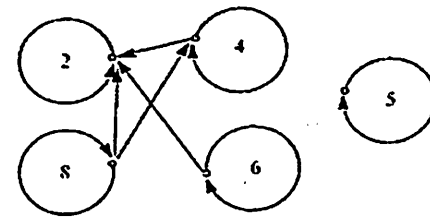
U quyidagi juftliklar to'plami orqali ifoda qilinadi:

$$G = \{(4; 3), (5; 3), (5; 4), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (7; 3), (7; 4), (7; 5), (7; 6), (8; 3), (8; 4), (8; 5), (8; 6), (8; 7), (9; 3), (9; 4), (9; 5), (9; 6), (9; 7)\}.$$

Uning grafi 1.27-rasmdagi ko'rinishda bo'ladi. Yoki  $Y = \{2; 4; 5; 6; 8\}$  to'plamda  $Q: «x soni y soniga karrali»$

(« $x:y$ ») munosabati berilgan bo'lsin. Munosabat grafida birinchisi ikkinchisiga karrali sonlar juftligidan iborat bo'ladi.

$G = \{(2; 2), (4; 2), (4; 4), (5; 5), (6; 2), (6; 6), (8; 2), (8; 4), (8; 8)\}$  munosabat grafida (2; 2) juftlikni ko'rsatuvchi strelkaning boshi ham, oxiri ham bitta nuqtada bo'ladi, bunday strelkani «halqa» deb ataymiz. Munosabat grafi 1.28-rasmdagi kabi chiziladi:



1.28-rasm

## 3. Munosabat xossalari.

**1-ta'rif.** Agar  $X$  to'plamning har bir elementi o'z-o'zi bilan  $R$  munosabatda bo'lsa (ya'ni,  $xRx$  bajarilsa), u holda  $R$  munosabat  $X$  to'plamda *refleksiv* deyiladi.

Masalan, « $x = y$ », « $a || b$ », « $x : y$ » munosabatlar refleksivdir.

Refleksiv munosabat grafida har bir element atrofida halqa bo'ladi.

**2-ta'rif.** Agar  $X$  to'plamning birorta ham elementi uchun  $xRx$  bajarilmasa, u holda  $R$  munosabat  $X$  to'plamda *antirefleksiv* deyiladi.

Masalan, « $a < b$ », « $a > b$ », « $a \perp b$ » munosabatlar antirefleksivdir. Antirefleksiv munosabat grafida birorta ham halqa bo'lmaydi.

**3-ta'rif.** Agar  $X$  to'plamda  $R$  munosabat berilgan bo'lib,  $xRy$  va  $yRx$  bir vaqtda bajarilsa,  $R$  *simmetrik munosabat* deyiladi.

Masalan, « $a || b$ », « $a \perp b$ », « $a = b$ » munosabatlari simmetrikdir. Simmetrik munosabat grafida har bir strelkaga parallel qaytuvchi strelka bo'ladi.

**4-ta'rif.** Agar  $X$  to'plamda berilgan  $R$  munosabatda  $xRy$  va  $yRx$  shartlardan faqat bittasi o'rinli bo'lsa,  $R$  munosabat *asimmetrik munosabat* deyiladi.

Masalan, « $a > b$ », « $a < b$ » munosabatlari asimmetrikdir.

Asimmetrik munosabat grafida birorta ham halqa va qaytuvchi strelkalar bo'lmaydi.

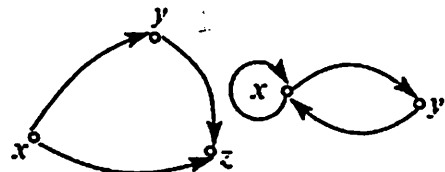
**5-ta'rif.** Agar  $X$  to'plamda  $R$  munosabat uchun  $xRy$  va  $yRx$  shartlar faqat  $x = y$  bo'lgan holda bajarilsa, u holda  $R$  *antisimmetrik munosabat* deyiladi.

Masalan, « $a > b$ », « $a \leq b$ », « $a : b$ », « $a$  soni  $b$  sonining bo'luvchisi» kabi munosabatlar antisimmetrik munosabat bo'ladi.

Antisimmetrik munosabat grafida halqalar bo'ladi, lekin qaytuvchi strelkalar bo'lmaydi.

6-ta'rif. Agar  $X$  to'plamda berilgan  $R$  munosabat uchun  $xRy$  va  $yRz$  ekanligidan  $xRz$  ekanligi kelib chiqsa, u holda  $R$  munosabat tranzitiv deyiladi.

Masalan, « $a > b$ », « $a = b$ », « $a || b$ », « $a : b$ » kabi munosabatlar tranzitivdir. Tranzitiv munosabat grafida  $x$  dan  $y$  ga,  $y$  dan  $z$  ga boruvchi strelkalar bo'lsa, albatta  $x$  dan  $z$  ga boruvchi strelka ham bo'lishi kerak (1.29-rasm).



1.29-rasm

#### Mustaqil yechish uchun misollar.

1.  $\{0; 3; 5; 7\}$  to'plamda berilgan «kichik yoki teng» munosabati grafigini yasang.
2.  $X = \{1; 2; 4; 8; 12; 16\}$  to'plamda « $x$  soni  $y$  sonining bo'luvchisi» munosabati berilgan. Bu munosabat grafigini yasang va xossalari aniqlang.
3.  $C = \{7; 14; 28; 25\}$  to'plamda aniqlangan «karrali» munosabati refleksivlik xossasiga egami? Bu munosabat uchun simmetriklik xossasi o'rinlimi? Javobingizni asoslang.
4. Natural sonlar to'plamida « $x$  son bevosita  $y$  sonidan keyin keladi» munosabati o'rnatilgan bo'lsa, u tartib munosabati bo'ladimi? Javobingizni asoslang.

#### Nazorat uchun savollar.

1. Munosabat moslikning xususiy holi ekanini, ya'ni  $G \subset X \times X$  ekanini izohlang.
2. Munosabat xossalari graflarda tasvirlang.
3. Refleksiv, simmetrik, antisimmetriklik, tranzitiv munosabatlarni graflar yordamida tushuntiring.

### 1.10-§. Ekvivalentlik munosabati. Ikkivalentlik munosabatining to'plamlarni sinflarga ajratish bilan aloqasi. Tartib munosabati.

1-ta'rif. Har qanday  $R$  munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lsa, u holda  $R$  ekvivalentlik munosabati deyiladi.

Masalan, « $a || b$ », « $a = b$ » kabi munosabatlar ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

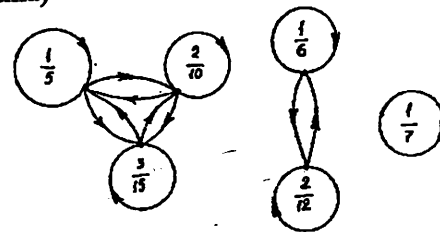
1-misol. Sinf o'quvchilari orasida «bir oyda tug'ilgan» munosabati berilgan bo'lsin. Bu munosabat refleksiv, chunki har bir  $A$  o'quvchi o'zi o'zi bilan bir oyda tug'ilgan. Munosabat simmetrik, chunki  $A$  o'quvchi  $B$  bilan bir oyda tug'ilgan bo'lsa,  $B$  ham  $A$  bilan bir oyda tug'ilgan bo'ladi. Munosabat tranzitiv, chunki  $A$  o'quvchi  $B$  bilan,  $B$  o'quvchi  $C$  bilan bir oyda tug'ilgan bo'lsa,  $A$  bilan  $C$  ning ham tug'ilgan oyi bir xil bo'ladi. Demak, bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'lar ekan. U sinf o'quvchilarini «bir oyda tug'ilgan o'quvchilar» sinflariga ajratadi. Bunday sinflar soni ko'pi bilan 12 ta bo'lishi mumkin.

2-misol. Tekislikdagi to'g'ri chiziqlar to'plamida parallellik munosabati ekvivalentlik munosabati bo'lishini ko'rsatamiz. Tekislikdagi to'g'ri chiziqlar kesishmasa yoki ustma-ust tushsa, parallel hisoblanishini eslatib o'tamiz.

Parallellik munosabati:

- a) refleksiv, chunki ixtiyoriy  $a$  to'g'ri chiziq uchun  $a || a$  bo'ladi;
- b) simmetrik, chunki  $a || b$  bo'lsa,  $b || a$  bo'ladi;
- c) tranzitiv, chunki  $a || b$  va  $b || c$  bo'lsa,  $a || c$  bo'ladi (parallel to'g'ri chiziqlar xossasiga ko'ra).

3-misol.  $\left\{ \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{2}{10}; \frac{2}{12}; \frac{3}{15} \right\}$  kasrlar to'plamida tenglik munosabati berilgan. (18- chizma)



1.30-rasm

Bu munosabat:

- 1) Refleksiv, chunki ixtiyoriy kasr o'z-o'ziga teng;
- 2) Simmetrik, chunki  $x$  kasrning  $y$  kasrga tengligidan  $y$  kasrni  $x$  kasrga tengligi ham kelib chiqadi;
- 3) Tranzitiv, chunki  $x$  kasrning  $y$  kasrga va  $y$  kasrning  $z$  kasrga tengligidan  $x$  kasrning  $z$  kasrga tengligi kelib chiqadi.
- 4) Agar to'plamda ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsa, u holda bu munosabat to'plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan qism to'plamlariga ajratadi. Yuqoridagi misolimizda qism to'plamlar

$$\left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15} \right\}, \left\{ \frac{1}{6}, \frac{2}{12} \right\}, \left\{ \frac{1}{7} \right\}.$$

Bu qism to'plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi va qism to'plamlarining birlashmasi birlamchi misolda berilgan to'plam bilan ustma-ust tushadi.

4-misol.  $Z$  butun sonlar to'plamida  $aRb \Leftrightarrow m | (a - b)$  munosabatni qaraylik. Bu munosabat  $Z$  to'plamni ekvivalent 7 ta sinfga ajratadi:

$$[0] = \{ \dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots \}$$

$$[1] = \{ \dots, -13, -6, 1, 8, 15, \dots \}$$

$$[2] = \{ \dots, -12, -5, 2, 9, 16, \dots \}$$

$$[3] = \{ \dots, -11, -4, 3, 10, 17, \dots \}$$

$$[4] = \{ \dots, -10, -3, 4, 11, 18, \dots \}$$

$$[5] = \{ \dots, -9, -2, 5, 12, 19, \dots \}$$

$$[6] = \{ \dots, -8, -1, 6, 13, 20, \dots \}$$

## 2. Tartib munosabati

Endi tartib munosabatini qaraymiz.

«Tartib» so'zi kundalik hayotimizda doimo uchraydi. Masalan, jismoniy tarbiya darslarida talabalarining bo'y-bo'yiga qarab joylashishi tartibi, o'zbek alfavitida harflarning kelish tartibi va hokazo.

Ta'rif. Agar to'plamdagi  $R$  munosabat tranzitiv va antisimmetrik bo'lsa, u holda bu munosabat tartib munosabati deyiladi.  $X$  to'plam esa tartib munosabati bilan tartiblangan deb ataladi.

Masalan,  $X = \{3, 6, 9, 18\}$  to'plamni «kichik» munosabati yordamida tartiblashtirish mumkin. Boshlang'ich ta'limning birinchi sinfida o'quvchilar «katta» va «kichik» munosabatlari bilan keyinchalik esa kesmalar uchun «uzun» va «qisqa» munosabatlari bilan tanishadilar. Bu munosabatlar yordamida sonlar va kesmalar to'plamida tartib o'rnatiladi.

Tartib munosabati qat'iy va noqat'iy tartib munosabatiga bo'linadi va bu bo'linish munosabatning asimmetrik yoki antisimmetrik bo'lishi bilan bog'liq. «Katta» va «kichik» munosabatlari qat'iy tartib munosabati bo'lsa, «katta emas» va «karrali» munosabatlari noqat'iy tartib munosabati hisoblanadi.

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1.  $\{1; 5; 7; 9\}$  to'plamda berilgan «kichik yoki teng» munosabati grafigini yasang.

2.  $X = \{5; 10; 15; 20; 30; 40\}$  to'plamda « $x$  soni  $y$  sonining bo'luvchisi» munosabati berilgan. Bu munosabat grafigini yasang va xossalarini aniqlang.

3.  $C = \{8; 64; 120; 80\}$  to'plamda aniqlangan «karrali» munosabati refleksiv xossasiga egami? Bu munosabat uchun simmetriklik xossasi o'rinalimi? Javobingizni asoslang.

4. Natural sonlar to'plamida « $x$  son bevosita  $y$  sonidan keyin keladi» munosabati o'rnatilgan bo'lsa, u tartib munosabati bo'ladimi? Javobingizni asoslang.

5. Natural sonlar to'plamida «5 ga bo'lganda bir xil qoldiq chiqadi» munosabati o'rnatilgan bo'lsa, u ekvivalentlik munosabati bo'ladimi? Javobingizni asoslang.

### Nazorat uchun savollar:

1. Ekvivalentlik va tartib munosabatlarini ta'riflang.
2. Ekvivalentlik va tartib munosabatlarini misollar yordamida tushuntiring

## 1.11-§. Kombinatorika elementlari. Kombinatorika masalalari. Yig'indi va ko'paytma qoidasi.

1. **Kombinatorika masalasi.** Elementlarning turli kombinatsiyalari va ularning sonini topish bilan bog'liq masalalar kombinatorika masalalari deyiladi. Bunday masalalar matematika fanining tarmog'i — kombinatorikada o'rganiladi. Kombinatorika asosan, XVII—XIX asrlarda mustaqil fan sifatida yuzaga kelgan bo'lib, uning rivojiga B.Paskal, P.Ferma, G.Leybnis, Y.Bernulli, L.Eyler kabi olimlar katta hissa qo'shganlar.

Kombinatorikada, asosan, chekli to'plamlar, ularning qism to'plamlari, chekli to'plam elementlaridan tuzilgan kortejlar va ularning sonini topish masalalari o'rganilgani uchun uni to'plamlar nazariyasining bir qismi sifatida qarash mumkin.

**2.Yig'indi qoidasi.** Kombinatorikada to'plamlar birlashmasi elementlari sonini hisoblash masalasi yig'indi qoidasi deb ataladi.

1) Agar  $A \cap B = \emptyset$  bo'lsa,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad (1)$$

bo'ladi.

Ya'ni kesishmaydigan  $A$  va  $B$  to'plamlar birlashmasi elementlari soni shu to'plamlar elementlari sonlarining yig'indisiga teng.

2) Agar  $A \cap B \neq \emptyset$  bo'lsa,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (2)$$

bo'ladi. Ya'ni umumiy elementga ega ikki to'plam birlashmasi elementlari soni to'plamlarning har biri elementlari sonlari yig'indisidan ularning umumiy elementlari sonining ayirilganiga teng. (2) formula (1) formulaning umumiy holi bo'lib, (1) formulada  $n(A \cap B) = \emptyset$ , ya'ni to'plamlarning umumiy elementi yo'q.

3) Yigindi qoidasi umumiy elementga ega bo'lgan uchta  $A$ ,  $B$ ,  $C$  to'plam uchun quyidagicha yoziladi: agar  $A \cap B \cap C = \emptyset$  bo'lsa,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad (3)$$

bo'ladi.

(1) formula bilan yechiladigan kombinatorika masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi: agar  $x$  elementni  $k$  usul,  $y$  elementni  $m$  usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, « $x$  yoki  $y$ » elementni  $k + m$  usul bilan tanlash mumkin.

**1-misol.** Savatda 8 ta olma va 10 ta nok bor bo'lsa, 1 ta mevani necha usulda tanlash mumkin, bo'ladi?

**Yechish.** Bu masalani (1) formula yordamida yechamiz.

Olmalar to'plamini  $A$  bilan, noklar to'plamini  $B$  bilan belgilaylik, u holda

$$n(A) = 8, \quad n(B) = 10, \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 8 + 10 = 18.$$

1 ta mevani 18 usul bilan tanlash mumkin.

**2-misol.** 40 talabadan 35 tasi matematika imtihonini, 37 tasi rus tili imtihonini topshira oldi. 2-talaba ikkala fandan «2» oldi. Necha qarzdor talaba bor?

**Yechish.** Bu masalani (2) formula yordamida yechamiz.  $A$  — matematika fanidan «2» olgan,  $B$  — rus tili fanidan «2» olgan talabalar to'plami bo'lsin. (2) formuladan

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(A) &= 40 - 35 = 5; \quad n(B) = 40 - 37 = 3; \quad n(A \cap B) = 2. \\ n(A \cup B) &= 5 + 3 - 2 = 6. \end{aligned}$$

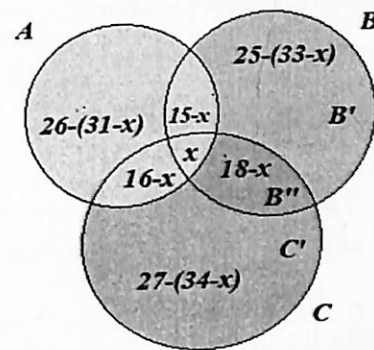
Javob: 6 ta qarzdor talaba bor.

(3) formula - yig'indi qoidasi bilan yechiladigan masalani ko'raylik.

**1-masala.** Sinfda 40 o'quvchi bor. Uning 26 tasi basketbol, 25 tasi — suzish, 27 tasi — gimnastika bilan shug'ullanadi, bir vaqtda suzish va gimnastika bilan — 15 ta, basketbol va gimnastika bilan — 16 ta, suzish va gimnastika bilan shug'ullanuvchilar — 18 ta. 1 o'quvchi darsdan ozod. Bir vaqtda uchala hamma sport turi bilan nechta o'quvchi shug'ullanadi? Nechta o'quvchi faqat 1 ta sport turi bilan shug'ullanadi?

**Yechish.** Maslada 3 ta to'plam qaralyapti:  $A$  — basketbol bilan shug'ullanuvchilar,  $B$  — suzish bilan shug'ullanuvchilar,  $C$  — gimnastika bilan shug'ullanuvchilar. Bu uch to'plam kesishadi.

Bu uchala to'plam kesishmasidagi elementlar sonini  $x$  bilan belgilasak, Eylar - Venn diagrammasidan quyidagini olamiz:



1.31-rasm

1.31-rasmdan ko'rinadiki sariq rangli to'plam( $A$ ), ko'k rangli to'plam( $B'$ ), pushti rangli to'plam ( $B''$ ) va yashil rangli

to'plam ( $C$ )larning birlashmasi sinfdagi o'quvchilar sonidan bitta kam bo'ladi, ya'ni

$$26 + 25 - (33 - x) + (18 - x) + 27 - (34 - x) + 1 = 40.$$

$$x + 30 = 40 \Rightarrow x = 10$$

Bu yerda  $x = 10$ . Demak,

- hamma sport turi bilan 10 ta o'quvchi.

- faqat 1 ta sport turi bilan

$$[26 - (31 - x)] + [25 - (33 - x)] + [27 - (34 - x)] = 10 \text{ ta.}$$

- basketbol bilan  $[26 - (31 - x)] = 5$  ta,

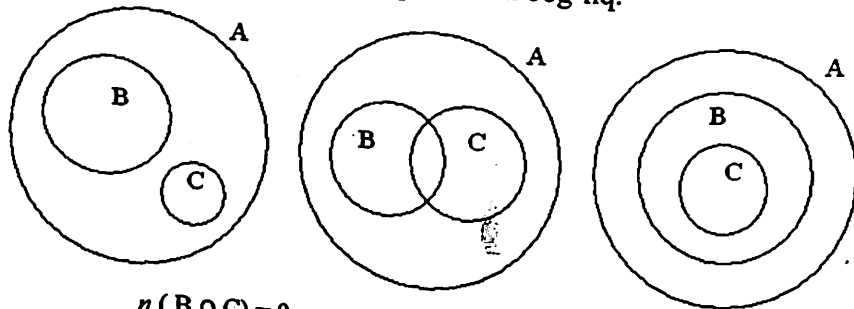
- suzish bilan  $[25 - (33 - x)] = 2$  ta,

- gimnastika bilan  $[27 - (34 - x)] = 3$  ta o'quvchi shug'ullanadi.

**2-masala.** 50 talabadan 20 tasi nemis tilini, 15 tasi ingliz tilini o'rganadi. Ikkala tilni biluvchi va faqat 1 ta tilni biluvchi talabalar soni nechta bo'lishi mumkin?

**Yechish.** Masalada 2 ta to'plam qaralyapti:  $A$  — barcha talabalar to'plami,  $B$  — nemis tilini o'rganadigan,  $C$  — ingliz tilini o'rganadigan talabalar to'plami. Masala sharti bo'yicha  $n(A) = 50$ ,  $n(B) = 20$ ,  $n(C) = 15$ .

$A$ ,  $B$  va  $C$  to'plamlar orasidagi munosabatlarni Eyler-Venn diagrammalarida quyidagicha tasvirlash mumkin. Ikki tilni biluvchi talabalar soni  $B$  va  $C$  to'plamlar kesishmasi elementlari sonini topish bilan bog'liq. Faqat 1 ta tilni biluvchi talabalar soni ikki to'plam birlashmasi elementlari sonini topish bilan bog'liq.



$$n(B \cap C) = 0$$

$$n(B \cup C) = 35$$

$$n(B \cap C) = 15$$

$$n(B \cup C) = 20$$

$x$  — Ikki tilni biluvchi talabalar soni bo'lsa,  $0 \leq x \leq 15$  ( $x \in N_0$ ).  $y$  — 1 ta tilni biluvchi talabalar soni bo'lsa,  $20 \leq y \leq 35$  ( $y \in N_0$ ).

**3. Ko'paytma qoidasi.** Chekli to'plamlarning dekart ko'paytmasi elementlari sonini topishga imkon beradigan qoida ko'paytma qoidasi deyiladi.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  va  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  to'plamlar elementlaridan nechta tartiblangan  $(a_i, b_j)$  juftlik tuzish mumkinligini ko'raylik. Barcha juftliklarni tartib bilan quyidagicha joylashtiramiz:

$$(a_1; b_1), (a_1; b_2), \dots, (a_1; b_m),$$

$$(a_2; b_1), (a_2; b_2), \dots, (a_2; b_m),$$

$$(a_n; b_1), (a_n; b_2), \dots, (a_n; b_m).$$

Bu jadvalda  $n$  ta qator va  $m$  ta ustun bo'lib, undagi barcha juftliklar soni  $n \cdot m$  ga teng. Bu yerda  $n = n(A)$  va  $m = n(B)$ .

Ko'paytma qoidasi  $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$  ko'rinishda yoziladi.

Ko'paytma qoidasiga oid kombinatorika masalasining umumiy ko'rinishi: «Agar  $x$  elementni  $m$  usul,  $y$  elementni  $n$  usul bilan tanlash mumkin bo'lsa,  $(x; y)$  tartiblangan juftlikni  $mn$  usul bilan tanlash mumkin».

Ikkitadan ortiq to'plamlar uchun bu formula quyidagicha yoziladi:

$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \dots \cdot n(A_n), (n > 2).$$

Masalan,  $A$  shahardan  $B$  shaharga 3 yo'l bilan,  $B$  shahardan  $C$  shaharga ikki yo'l bilan borish mumkin bo'lsa,  $A$  shahardan  $C$  shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

Yo'lning 1-qismini 3 xil, 2-qismini 2 xil yo'l bilan o'tish mumkin bo'lsa, umumiy yo'lning  $3 \cdot 2 = 6$  usul bilan o'tish mumkin.

**Umumlashgan ko'paytma qoidasi:** «Agar  $x$  elementni  $m$  usul bilan,  $y$  elementni,  $x$  ni tanlab bo'lgandan so'ng,  $n$  usul bilan tanlash mumkin bo'lsa,  $(x; y)$  juftlikni  $mn$  usul bilan tanlash mumkin».

**1-misol.** Nechta turli raqamlar bilan yozilgan ikki xonali sonlar bor?

**Yechish.** 1-raqamni 9 usul bilan (1, 2, ..., 9), 2-raqamni ham 9 usul bilan, va hakoza tanlash mumkin. Hammasi bo'lib  $9 \cdot 9 = 81$  ta shunday son bor ekan.

**2-misol.** Savatda 7 ta olma va 12 ta o'rik bor bo'lsa, 1 ta mevani necha usulda tanlash mumkin, bo'ladi?

**Yechish.** 1 ta mevani  $7 + 12 = 19$  usul bilan tanlash mumkin.

3-misol. 90 o'quvchidan 45 tasi matematika, 50 tasi fizika fanlaridan to'garakka boradi. Ikkala fandan to'garakka boradiganlar soni nechta?

**Yechish:**  $A \cap B \neq \emptyset$  bo'lsa,  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$  (2) formuladan foydalanamiz. Bunda  $n(A) = 45$ ,  $n(B) = 50$ ,  $n(A \cup B) = 90$ . Agar  $n(A \cap B) = x$  deb olsak, u holda

$$90 = 45 + 50 - x$$

$$x = 95 - 90$$

$$x = 5.$$

Ikkala fandan to'garakka boradiganlar soni 5 ta.

4-misol.  $n(X) = k$  va  $n(Y) = l$  bo'lsin.  $X$  to'plamni  $Y$  to'plamga akslantirishlar sonini topamiz.

**Yechish.**  $X$  to'plam elementlarini nomerlaymiz:  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$   $X$  to'plamni  $Y$  ga o'tkazuvchi har qaysi  $f$  akslantirishga o'sha elementlarning obrazlari (nusxalari) dan tuzilgan  $(f(x_1), \dots, f(x_k)) (u_1, \dots, u_k)$   $k$  talikning berilishi  $f$  akslantirishni bir qiymatli aniqlaydi:  $x_i$  element  $u_i$  ga o'tadi. Demak,  $X$  to'plamni  $U$  to'plamga akslantirishlar soni  $U$  to'plam elementlaridan tuzilgan  $k$  taliklar soniga teng.  $n(Y) = l$  bo'lganidan formula bo'yicha bu son  $l^k$  ga teng

#### Mustaqil yechish uchun misollar.

1.32 o'quvchining 12 tasi voleybol seksiyasiga, 15 tasi basketbol seksiyasiga, 8 kishi esa ikkala seksiyaga ham qatnashadi. Sinfdagi necha o'quvchi hech bir seksiyaga qatnashmaydi?

2. Sinfdagi bir necha o'quvchi marka yig'dilar. 15 o'quvchi O'zbekiston markalarini, 11 kishi chet el markalarini, 6 kishi ham O'zbekiston markalarini, ham chet el markalarini yig'di. Sinfda necha o'quvchi marka to'plagan?

3.30 o'quvchidan 18 nafari matematikaga, 17 nafari esa fizikaga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziqadigan o'quvchilar soni nechta bo'lishi mumkin? (Ko'rsatma. Ikkala fanga ham qiziqmaydigan o'quvchilar soni  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 12\}$ ).

4. 100 odamdan iborat sayyohlar guruhida 10 kishi nemis tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi, 75 nafari nemis tilini, 83 nafari esa fransuz tilini biladi. Ikkala tilni ham biladigan sayyohlar sonini toping.

5.26 o'quvchining 14 nafari shaxmatga, 16 nafari shashkaga qiziqadi. Ham shashkaga, ham shaxmatga qiziqadigan o'quvchilar qancha?

6.70 o'quvchidan 34 nafari matematikaga, 45 nafari esa fizikaga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziqadigan o'quvchilar soni qancha bo'lishi mumkin?

7.40 o'quvchining 24 nafari shaxmatga, 26 nafari shashkaga qiziqadi. Ham shashkaga, ham shaxmatga qiziqadigan o'quvchilar qancha?

8. Sinfda 35 o'quvchi o'qidi. Ulardan 17 nafari matematika to'garagiga, 21 pedagogika to'garagiga boradi. 10 o'quvchi ikkala to'garakga ham boradi. Qancha o'quvchi xech bir to'garakga bormaydi?

9. Sinfda 40 o'quvchi o'qiydi. Ulardan 32 nafari matematika to'garagiga, 14 pedagogika to'garagiga boradi. 15 o'quvchi ikkala to'garakga ham boradi. Qancha o'quvchi xech bir to'garakga bormaydi?

#### Nazorat uchun savollar.

1. Kombinatorika masalasi ta'rifini bering.
2. Kombinatorika fani rivojiga xissa qo'shgan olimlarni ayting.
3. Yig'indi qoidasining turli xollarini ko'rsating.
4. Ko'paytma qoidasini ayting va misollar keltiring.

#### 1.12-§. Takrorlanadigan va takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar va o'rin almashtirishlar.

##### 1. Takrorlanadigan o'rinlashtirishlar.

Masala.  $m$  elementli  $X$  to'plam elementlaridan tuzilgan  $k$  uzunlikdagi kortejlar sonini toping.

**Yechish.**  $k$  o'rinli kortej  $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{k \text{ marta}}$  dekart ko'paytmaning

elementi bo'lib, tartiblangan  $k$ -likni ( $k$ -lik deb o'qiladi) bildiradi. Masalani yechish uchun  $X \times X \times \dots \times X$  dekart ko'paytma elementlari sonini topish kerak. Bu son  $n(X) = m$  bo'lgani uchun

$$n(X \times X \times \dots \times X) = n(X) \cdot n(X) \cdot \dots \cdot n(X) = m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^k \text{ ga teng.}$$

Demak,  $m$  elementli  $X$  to'plam elementlaridan tuzilgan  $k$  o'rinli kortejlar soni  $m^k$  ga teng ekan. Kombinatorikada bunday kortejlarni  $m$  elementdan  $k$  tadan takrorlanadigan o'rinlashtirishlar deyiladi. Ularning soni  $A_m^k$  bilan belgilanadi. ( $A$  — fransuzcha arrangement so'zining bosh harfidan olingan bo'lib, «o'rinlashtirish, joylashtirish ma'nosini bildiradi.»  $A_m^k = m^k$ ).

Masala. 6 raqamli barcha telefon nomerlari sonini toping.

Yechish. Telefon nomerlari 0 dan 9 gacha bo'lgan 10 ta raqamdan tuzilgani uchun 10 elementdan tuzilgan barcha tartiblangan 6 o'rinli kortejlar sonini topamiz:

Javob:  $A_{10}^6 = 10^6 = 1000000$ . 6 raqamli telefon nomerlari soni  $10^6$  ga teng.

**2. Takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar.** Umumiyroq masalani ko'rib chiqaylik:  $m$  elementli  $X$  to'plamdan nechta tartiblangan  $k$  elementli to'plamlar tuzish mumkin?

Faraz qilaylik,  $m$  elementli  $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$  to'plamdan ketma-ket elementlar tanlanmoqda, tanlangan element to'plamga qaytarilmaslik sharti bilan. Bu holda  $k$  o'rinli  $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)$  kortej hosil bo'ladi va bu yerda har bir  $b_i$  biror  $a_j$  ga teng bo'ladi.

Bu masalaning oldingi masaladan farqi shundaki, tanlash  $k$ -elementda tugatiladi. Ularning umumiy soni

$$m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)$$

ko'paytmaga teng. U  $A_m^k$  bilan belgilanadi va  $m$  elementdan  $k$  tadan takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar soni deb ataladi:

$$A_m^k = m(m-1) \dots (m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Bu yerda  $m! = m \times (m-1) \times \dots \times 2 \times 1$ .

Masalan, sinfdagi 20 o'quvchidan tozalik va davomat uchun javob beruvchi 2 o'quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380 \text{ (usul bilan).}$$

**3. Takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar.**

1. Agar chekli  $X$  to'plam elementlari biror usul bilan nomerlab chiqilgan bo'lsa,  $X$  to'plam tartiblangan deyiladi.

Masalan,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Bitta to'plamni turli usullar bilan tartiblash mumkin.

Masalan, sinf o'quvchilarini yoshiga, bo'yiga, og'irligiga qarab yoki o'quvchilar familiyalari bosh harflarini alifbo bo'yicha tartiblash mumkin.

$m$  elementli  $X$  to'plamni necha xil usul bilan tartiblash mumkin degan savolga javob beraylik.

Tartiblash — bu elementlarni nomerlash demakdir. 1-nomerni  $m$  ta elementning istalgan biriga berish mumkin. Shuning uchun

1-elementni  $m$  usul bilan, 2-elementni 1-element tanlanib bo'lgandan so'ng  $m-1$  usul bilan tanlash mumkin va hokazo, oxirgi elementni tanlash uchun faqat bitta usul qoladi, xolos.

1-ta'rif. Tartiblashlarning umumiy soni

$$m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1 = m!$$

ga teng.

$m!$  — dastlabki  $m$  ta natural son ko'paytmasi ( $m$  faktorial deb o'qiladi). Masalan,  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ ,  $m! = P_m$  bilan belgilanadi va takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar soni deb ataladi.

O'rin almashtirishlarni o'rinlashtirishlarning xususiy xoli deb qarash mumkin  $m=n$  bo'lgan holi.

$P$  belgisi fransuz tilidagi "permutation", ya'ni "o'rin almashtirish" so'zining 1-harfidan olingan

1-misol. 8 ta ladyani shaxmat doskasida bir-birini urmaydigan qilib necha usul bilan joylashtirish mumkin?

Yechish. Ladyalar soni 8 ta.

$$P_8 = 8! = 4032$$

2-ta'rif. Takrorlanadigan o'rinlashtirishlar ( $A$  — fransuzcha arrangement — «o'rinlashtirish, joylashtirish» ma'nosini bildiradi.)  $A_m^k = m^k$  formula bilan ifodalanadi.

2-misol. 6 raqamli barcha telefon nomerlari sonini toping.

Yechish.  $A_{10}^6 = 10^6 = 1000000$ . 6 raqamli telefon nomerlari soni  $10^6$  ga teng.

3-ta'rif.  $m$ -elementli  $X$  To'plamni turli tartiblashtirishlar takrorsiz o'rinlashtirishlar deyiladi, ularning soni  $P_m$  deb belgilanadi va  $m!$  ga teng.  $P_m = m!$ .  $0! = 1$ ,  $1! = 1$  deb olinadi

$P_m$  — fransuzcha "ermutation" — so'zidan olingan bo'lib, "o'rinlashtirish" degan ma'noni bildiradi.

3-misol.  $a, b, c$  uchta harfdan  $3! = 6$  ta o'rinlashtirish qilish mumkin  $abc, acb, cab, cba, bac, bca$ .

4-misol. Sinfdagi 20 o'quvchidan tozalik va davomat uchun javob beruvchi 2 o'quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380 \text{ (usul bilan).}$$

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1.  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$  to'plam elementlaridan foydalanib 4 raqamli barcha transport chiptalarining nomerlari sonini toping.
2.  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$  to'plam elementlaridan foydalanib 5 raqamli barcha talabalar talabalik guvoxonmasi nomerlari sonini toping.
3. Ifoda qiymatini toping: a)  $\frac{14!}{12!}$ ; b)  $\frac{19!}{17!}$ ; c)  $\frac{16!}{18!}$ ; d)  $\frac{9!}{5!4!}$ ; e)  $\frac{10!}{6!4!}$ ; j)  $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$ ; k)  $\frac{17!-16!-16!-15!-15!}{14!}$ .
4. Soddashtiring: a)  $\frac{(k-2)!}{k!}$ ; b)  $\frac{(p+1)!}{(p-2)!}$ .
5. 1,2,3,4,5 raqamlardan foydalanib nechta besh xonali son yozish mumkin?
6. 4 bemor shifokor oldiga necha usul bilan kirish mumkin?
7. 6 o'rinli aylana shaklidagi stolga necha usul bilan odamlarni joylashtirish mumkin?
8. 1,2,3,4,5 raqamlardan foydalanib nechta besh xonali son yozish mumkin?
9. 4 bemor shifokor oldiga necha usul bilan kirish mumkin?

#### Nazorat uchun savollar:

1. Takrorlanadigan o'rinlashtirishlarga misol keltiring.
2. Takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlarga misol keltiring.
3. Takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlarga misol keltiring.

#### 1.13-§. Takrorlanmaydigan gruppalar. Chekli to'plamlarning to'plamostilari soni.

**1. Takrorlanmaydigan guruhlashlar.** « $m$  elementli  $X$  to'plamning nechta  $k$  elementli qism to'plamlari bor?» — degan masalani hal qilaylik.

Masalan, 4 elementli  $A = \{a; b; c; d\}$  to'plamning nechta 3 elementli qism to'plami borligini ko'raylik. Ular  $\{a; b; c\}$ ,  $\{a; b; d\}$ ,  $\{a; c; d\}$ ,  $\{b; c; d\}$ . Demak, 4 ta shunday qism to'plam bor ekan. Bunday qism to'plamlar *takrorlanmaydigan guruhlashlar* deb ataladi. Bu qism

to'plamlarni tartiblaganda 6 barobar ko'proq 3 o'rinli kortejlarga ega bo'lamiz.

Masalan,  $\{a; b; c\}$  ni tartiblasak:  $(a; b; c)$ ,  $(a; c; b)$ ,  $(b; a; c)$ ,  $(b; c; a)$ ,  $(c; a; b)$ ,  $(c; b; a)$  tartiblangan uchliklarga ega bo'lamiz, tartiblanishlar soni  $3! = 6$  marta ko'p. Bu bog'lanishdan foydalanib, guruhlashlar sonini topish formulasini keltirib chiqarish mumkin.

$m$  elementli to'plamning  $k$  elementli qism to'plamlari soni  $C_m^k$  bilan belgilanadi va  $m$  elementdan  $k$  tadan *takrorlanmaydigan guruhlashlar soni* deyiladi. ( $C$  — fransuzcha combinaison — «birikma» so'zidan olingan.) Takrorlanmaydigan guruhlashlar soni uchun

$$A_m^k = C_m^k \cdot P_m \Rightarrow C_m^k = \frac{A_m^k}{P_m} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Masala. Sinfdagi 20 o'quvchidan ko'rikda ishtirok etish uchun uch o'quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Yechish. Ko'rik ishtirokchilarining tartibi ahamiyatga ega bo'lmagani uchun 20 elementli to'plamning 3 elementli qism to'plamlari soni nechtaligini topamiz:

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 19 \cdot 20 = 1140.$$

Javob: 3 o'quvchini 1140 usul bilan tanlash mumkin ekan.

$N$  ta elementdan  $r$  tadan olingan ob'ektlar kombinatsiyasi soni shu vaqtda  $N$  ta elementdan  $r$  tadan elementni o'rini almashtirmasdan hosil qilingan to'plamostilari soniga teng. Biz buni ushbu ko'rinishda yozamiz  $\binom{n}{r}$ . Biz bu holatda tanlashlar tartibini qaramaymiz. Misol uchun

$\{1, 2, 3, 4\}$  sonlar to'plamini qaraymiz. Ikki elementli almashtirishlarsiz tanlashlar soni  $4!/2! = 12$  ga teng. Bu aniq 4  $\{1,2,3,4, 2,1,2,3,2,4 3,1,3,2,3,4, 4,1,4,2,4,3\}$  ta elementdan 2 tadan kombinatsiyasi  $\{1,2,1,3,1,4, 2,3,2,4 3,4\}$  va uning soni oltiga teng. E'tibor

bering  $6 = \binom{4}{2} = 4!/2!2!$ .  $N$  ta elementli  $A$  to'plam  $r$  o'lchamli  $n!/r!(n-r)!$  ta to'plamostiga ega.

Shunday qilib biz  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$  ga ega bo'lamiz.

2.  $C_m^k$  ko'rinishdagi sonlarning xossalari.

- 1°.  $C_m^k = C_m^{m-k}$ .
- 2°.  $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$ .
- 3°.  $C_m^0 = C_m^m = 1$ .

1-xossani isbot qilish uchun  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$  formuladan foydalanamiz:

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!(m-m+k)!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = C_m^k.$$

Xossaga ko'ra,  $C_{20}^3 = C_{20}^{17}$ ;  $C_5^2 = C_5^3$  va h. k.

2-xossaning isboti.

$$C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!}{(m-k)!(m-(m-k))!} + \frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} + \frac{(m-1)!}{k!(m-k-1)!} = \frac{(m-1)!}{k!(m-k)!} +$$

$$+ \frac{(m-1)!(m-k)}{k!(m-k-1)!(m-k)} = \frac{(m-1)!k}{k!(m-k)} + \frac{(m-1)!(m-k)}{k!(m-k)} =$$

$$= \frac{(m-1)!k + (m-1)!(m-k)}{k!(m-k)!} = \frac{(m-1)!(k+m-k)}{k!(m-k)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!m}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = C_m^k$$

2°- va 3°- xossalardan foydalanib,  $C_m^k$  ko'rinishdagi sonlarning qiymatini ketma-ket hisoblash mumkin.

3. Paskal uchburchagi va N'yuton binomi. 3°-xossaga ko'ra  $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = C_2^0 = C_2^2 = 1$ . Bundan 2° ga ko'ra  $C_m^k$  ko'rinishdagi sonlarni Paskal uchburchagi ko'rinishida joylashtirish mumkin. Har bir son o'zining tepasidagi ikkita son yig'indisidan iborat.

$$C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2.$$

|  |                                 |               |
|--|---------------------------------|---------------|
|  |                                 | 1             |
|  | $C_0^0$                         | 1 1           |
|  | $C_1^0 C_1^1$                   | 1 2 1         |
|  | $C_2^0 C_2^1 C_2^2$             | 1 3 3 1       |
|  | $C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3$       | 1 4 6 4 1     |
|  | $C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4$ | 1 5 10 10 5 1 |

Har bir qatordagi sonlar  $(a+b)^m$  ko'phadning yoyilmasidagi binomial koeffitsiyentlarga teng. Ularning yig'indisi  $m$  elementli  $X$  to'plamning barcha qism to'plamlari sonini beradi.

4. Chekli to'plam qism to'plamlari soni. 2 elementli to'plamning hammasi bo'lib nechta qism to'plami bor degan savolga javob beraylik. Ular 1 ta bo'sh, 2 ta 1 elementli va 1 ta 2 elementli, ya'ni  $X$  to'plamning o'zidan iborat bo'lgan qism to'plamlardir. Jami:  $1+2+1=4$ . Demak, 2 elementli to'plamning hammasi bo'lib 4 ta qism to'plami bor ekan.

Quvvati  $n$  ga teng bo'lgan  $A$  to'plamning to'plam ostilari soni 0 elementli, 1 elementli, 2 elementli, 3 elementli, ...,  $n$  elementli to'plam ostilari sonining yig'indisidan iborat bo'ladi.

Masalan  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  to'plam quvvati  $|A|=8$ . to'plam ostilari soni 0 elementli, 1 elementli, 2 elementli, 3 elementli, 4 elementli, 5 elementli, 6 elementli, 7 elementli, 8 elementli to'plam ostilari sonining yig'indisidan iborat.

$A$  to'plamning barcha qism to'plamlarini 0 va 1 lardan iborat ketma-ketlik bilan ifodalash mumkin. Agar element qism to'plamga tegishli bo'lsa, 1 bilan, tegishli bo'lmasa, 0 bilan almashtiramiz. Masalan  $\{3, 6, 7, 8\}$  qism to'plamini  $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$  kabi shifrlash mumkin. Shunday kortejlar soni  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$  ga teng.

$m$  elementli  $A$  to'plamning barcha qism to'plamlari soni  $2^m$  ga teng.

Umumiy holda chekli  $m$  elementli  $X$  to'plamning barcha qism to'plamlari sonini topish masalasini qo'yaylik. Uni hal qilish uchun istalgan tarzda  $X$  to'plamni tartiblaymiz. So'ng har bir qism to'plamini  $m$  o'rinli kortej sifatida shifrlaymiz: qism to'plamga kirgan element o'rniga 1, kirmagan element o'rniga 0 yozamiz. Shunda qism to'plamlar soni 2 ta  $\{0, 1\}$  elementdan tuzilgan barcha  $m$  o'rinli kortejlar soniga teng bo'ladi:  $A_2^m = 2^m$ . Bundan, 4 elementli to'plam to'plam ostilari soni  $2^4 = 16$  ga, 3 elementli to'plamning

to'plamostilari soni  $2^3 = 8$  ga tengligi kelib chiqadi. Shu bilan birga bu son Paskal uchburchagining 4-qatoridagi sonlar yig'indisiga ham teng, ya'ni  $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$ .

Umumiy holda:  $C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m$ .

### Misollar

**1-misol.** Bandning boshida qaralgan misolda talab qilingan barcha o'tiliklar soni:

$$P(3,1,2) = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = 60$$

**2-misol.** 30 ta detalni 5 ta har xil qutiga 6 tadan necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

**Yechish.** Masalaning shartiga ko'ra  $k=30$ ,  $k=k_1=k_2=\dots=k_5=6$ ,  $m=5$ . (9) formula bo'yicha usullar soni:

$$P(6,6,6,6,6) = \frac{30!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!} = 60$$

**3-misol.** Yuqoridagi misolda qutilar bir xil bo'lsa-chi?

**Yechish.** Qutilar har xil bo'lganda oldingi misol natijasiga ko'ra jami o'rin almashtirishlar soni  $P(6,6,6,6,6) = \frac{30!}{(6!)^5}$  ta edi. Qutilar bir xil bo'lsa, qutilarni almashtirish detallarni joylashtirish usullari soniga ta'sir qilmaydi. Bunga qaraganda joylashtirish usullari soni 5! marta kamayadi.

$$\text{Javob: } \frac{1}{5!} P(6,6,6,6,6) = \frac{30!}{5(6!)^5}$$

**4-misol.** 4 xil kitobdan necha usul bilan 7 kitobdan iborat to'plam yozish mumkin?

**Yechish.** Izlanayotgan son  $\bar{C}_4^7$  ga yoki  $\bar{C}_{7+4-1}^7$  ga teng. Jami .

$$C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

### Mustaqil yechish uchun misollar

1. To'rt xil bolt va uch xil gaykadan bittadan olib necha xil juftliklar tuzish mumkin?

2. «Daftar» so'zidan undosh va unli harflarni necha xil usul bilan tanlab olish mumkin? «Qalam» so'zidan - chi?

3. 2 kitob, 3 daftar va 4 qalam bor. Ulardan bittadan olinib komplektlar tuzilmoqchi. Bu ishni necha xil usul bilan qilish mumkin?

4. Savatda 10 dona olma va 8 dona nok bor. Vali undan yo olmani, yo nokni oladi, shundan so'ng Noila qolgan mevalardan ham olma, ham nokni oladi. Bunday tanlashlar soni qancha bo'lishi mumkin? Valining qaysi tanlashida Noilaning tanlash imkoni katta bo'ladi?

5. a, b, v, g, d harflaridan qancha uch harfli so'z tuzish mumkin? Har qaysi so'zda albatta b harfi bo'lishi talab qilinsa-chi?

6. Sexda 6 ishchi ishlaydi. Ulardan uch kishiga uch turli, ya'ni har bir kishiga bir xildan buyum tayyorlashni necha usul bilan topshirish mumkin?

7. 8 ta har xil kitobdan 3 tasi necha xil usul bilan tanlanishi mumkin?

8. Qo'mitaga 7 kishi saylangan. Ular orasidan rais, yordamchi, kotib necha usul bilan tanlanishi mumkin?

9. Agar har bir o'quvchiga bittadan ortiq kitob berilmasa, 6 ta kitobni 10 o'quvchiga necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

10. 6 raqamiga ega bo'lmagan besh xonali nomerlardan qancha bo'ladi? 0 va 6 raqamiga ega bo'lmaganlari-chi?

### Nazorat uchun savollar.

1. Takrorlanmaydigan gruppalashlar soni qanday topiladi?

2. Takrorlanmaydigan gruppalashlarning xossalari ayting va isbotlang.

## 2-BOB. MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

### 2.1-§. Matematik mantiq elementlari.

Matematik tushuncha. tushunchaning hajmi va mazmuni.

Tushunchani ta'riflash usullari va ularga misollar.

1. Real va abstrakt tushuncha. Atrofimizdagi olam turli obyektlardan iborat. Ular o'ziga xos xossalar va o'zaro munosabatlarga ega. Bu obyektlarni o'rganganimizda ularni o'xshashligi va umumiy xossalariga qarab *sinflarga* ajratamiz. Bu obyektlar va sinflar ma'lum bir nom bilan nomlanadi. Masalan, «daraxt», «chumchuq», «mushuk», «uy», «avtobus» yoki «o'simlik», «qush», «hayvon», «bino», «mashina» va hokazo. Obyektlar yoki obyektlar sinfining nomlanishi inson ongida ular haqida tushuncha paydo bo'lganini bildiradi. Chunki har bir nom atalishi bilan ongimizda u bilan bog'liq tasavvurlar paydo bo'ladi. Biz bu obyekt yoki obyektlar sinfining eng muhim xossalarini eslaymiz: rangi, shakli, o'lchami, hidi, tuzilishi va h. k.

Demak, *tushuncha* — bu narsalar va hodisalarni ba'zi bir muhim alomatlariga ko'ra farqlash yoki umumiyashtirish natijasi ekan. Alomatlar esa narsa yoki hodisalarning bir-biriga o'xshashligi yoki farqlanishini bildiruvchi xossalardir.

*Muhim xossa* deb, faqat shu obyektga tegishli va bu xossasiz obyekt mavjud bo'la olmaydigan xossalarga aytiladi. Obyektning mavjudligiga ta'sir qilmaydigan xossalar *muhim bo'lmagan xossalar* deb sanaladi.

Agar biror obyektning barcha muhim xossalari to'plangan bo'lsa, bu obyekt haqida tushuncha bor deyiladi.

Fan rivojlanishi natijasida *abstrakt tushunchalar* yuzaga kela boradi. Bunday tushunchalar insoniyat to'plagan katta tajribani umumlashtirish natijasida yuzaga keladi va moddiy dunyoning tub mohiyatini aks ettiradi, lekin real obyektlarning ko'pgina xossalaridan ko'z yumgan holda, ularni ideallashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Masalan, bir jismni geometrik shakl sifatida qarasaq, bizni uning shakli, o'lchamlari qiziqtiradi, lekin uning nimadan yasalgani, rangi, og'irligi qandayligi biz uchun ahamiyat kasb etmaydi. Ko'pincha abstrakt, ideal obyekt ega bo'lgan xossalar real obyektga tegishli

bo'la olmaydi. Masalan, geometriyada kesmani cheksiz bo'lish mumkin deb hisoblanadi, real hayotda biror jismni cheksiz ko'p bo'lakka bo'lish mumkin emas, chunki u chekli sondagi atomlardan iborat bo'ladi.

2. Tushunchaning hajmi va mazmuni. Har qanday tushuncha nom, mazmun va hajmga ega bo'ladi.

Obyektning barcha muhim xossalari to'plami *tushunchaning mazmunini* tashkil qiladi. Masalan, «son» tushunchasi mazmuniga sonlarni taqqoslash, yozuvda ifodalash, son o'qida tasvirlash, sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish kabi xossalar kiradi.

Bir xil muhim xossalarga ega obyektlar to'plami tushuncha hajmini tashkil etadi. Masalan, «son» tushunchasi hajmini natural, nomanfiy, butun, kasr, ratsional, irratsional, haqiqiy, mavhum va kompleks sonlar tashkil etadi.

Demak, tushuncha hajmi bitta tushuncha bilan nomlanishi mumkin bo'lgan obyektlar to'plami ham ekan. Tushuncha mazmuni uning hajmini aniqlaydi va aksincha.

Lekin tushuncha hajmi va mazmuni orasida teskari bog'lanish mavjud. tushunchaning hajmi qancha «katta» bo'lsa, mazmuni shuncha «kichik» va aksincha bo'ladi. Masalan, «to'g'ri to'rtburchak» tushunchasi mazmuniga «tomonlari teng bo'lgan» xossasi qo'shilsa, uning hajmi kamayadi va faqat kvadratlardan iborat bo'ladi, lekin «burchaklari to'g'ri bo'lishi» xossasi olib tashlansa, hajm kengayib, barcha parallelogramlardan iborat bo'lib qoladi.

Agar biror tushuncha hajmi ikkinchi tushuncha hajmiga kirsam, ikkinchi tushuncha birinchi tushunchaga nisbatan *umumiy*, birinchi tushuncha ikkinchisiga nisbatan *xususiy* deyiladi.

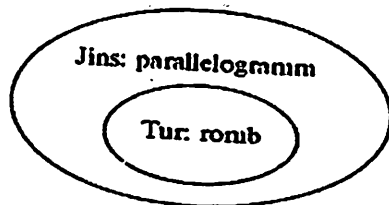
Masalan, «uchburchak» tushunchasi «tog'ri burchakli uchburchak» tushunchasi uchun umumiy, «tog'ri burchakli uchburchak» tushunchasi esa «uchburchak» tushunchasining xususiy holidir.

3. Tushunchani ta'riflash usullari. Tushunchalarni o'rganishda ularni umumiyroq bo'lgan tushuncha orqali tushuntirish yoki boshqacha aytganda, ta'riflashga harakat qilinadi. Shu umumiyroq tushuncha ham ilgariroq tushuntirilgan yoki ta'riflangan bo'lishi kerak. Lekin har bir uchraydigan tushunchani ilgari malum bo'lgan tushunchani topib ta'rif beraverish murakkab va mumkin bo'lmagan

jarayondir. Shuning uchun ba'zi tushunchalar ta'riflanmaydi va boshlang'ich tushuncha deb qabul qilinadi.

Masalan, siz tanishgan «To'plam» tushunchasi butun matematika kursining asosiy tushunchalaridan biridir.

Tushunchaga ta'rif berishning bir necha usuli bor. Shulardan biri oshkor ta'rif bo'lib, unda, ta'riflanayotgan tushunchaga nisbatan umumiyroq tushunchani ko'rsatib, shu umumiy tushuncha bilan nomlangan. obyektlardan ta'riflanayotgan tushuncha qanday xossalari bilan ajralib turishi ko'rsatiladi



2.1-rasm

Masalan, «barcha tomonlari teng parallelogramm — romb deyiladi», ta'rifida parallelogramm umumiy tushuncha bo'lib, romb qolgan parallelogrammlardan tomonlarining tengligi bilan ajralib turadi. Bunday ta'rif odatda jins va tur orqali ta'riflash deyiladi. Ta'riflanayotgan tushuncha hajmi unga nisbatan umumiyroq bo'lgan tushuncha hajmining qism to'plami bo'ladi va Eyler -Venn diagrammalarida 1.29-rasmda ko'rsatilgani kabi tasvirlanadi.

Oshkormas ta'rif bunga aksiomatik ta'riflash kiradi va bunday ta'rifda ta'rif berilayotgan tushuncha obyektini aniq ko'rsatilmaydi.

Tushuncha ta'rif quyidagi talablarni qanoatlantirishi kerak:

- ta'riflanayotgan tushunchani bir qiymatli aniqlashga imkon berishi;
- avval ma'lum bo'lgan tushunchalarga asoslanishi;
- tushunchaning o'zi yoki shu tushuncha bilan ta'riflangan tushuncha bilan ta'riflashga yo'l qo'yimasligi;
- ortiqcha xossalarni ko'rsatmaslik kerak.

Aksiomatik ta'riflar bilan siz «Nomanfiy butun sonlar to'plamining aksiomatik qurilishi» bobida tanishasiz.

Matematikada qarama-qarshilik orqali ta'rif berish usuli ham bor: « $X$  to'plamda  $R$  munosabat refleksiv bo'lmasa, u antirefleksiv munosabat deyiladi», « $A$  va  $B$  to'plamlar umumiy elementga ega bo'lmasa, ular kesishmaydi, deyiladi» va h. k.

Ko'pincha matnda biror obyektini nomlash, biror atama yoki belgini tushuntirish uchun nominal ta'riflardan foydalaniladi. Masalan, « $C_n^k$  — bu  $n$  elementdan  $k$  tadan takrorlashsiz guruhlashlar soni»; « $M$  — sinfdagi barcha o'quvchilar to'plami», « $5$  — besh soni yozuvi» va h.k.

#### 4. Tushunchalar orasida munosabat.

Tushunchalar va obyektlar xossalari orasidagi munosabatlarni qaraylik. Agar biror  $\alpha$  tushuncha hajmiga kiruvchi barcha ob'yektlar biror  $\alpha$  xossaga ega bo'lsa,  $\alpha$  xossa shu tushunchaning zaruriy belgisi, muhim xossasi bo'ladi. Masalan; kvadratning diagonallarini teng bo'lish xossasi, uning zaruriy belgisi, muhim xossasi hisoblanadi. Berilgan tushunchaning muhim xossalari ichida uning ajralib turuvchi xarakteristik xossasi ham mavjud.

Bu xossa obyektning ma'lum sinfiga xos bo'lib, boshqa obyektarga xos emas. Masalan, dioganallar uzunliklarini tenglik xossasi parallelogrammlar sinfidagi to'rtburchaklar uchun xarakteristik xossa sanaladi.

To'rtburchaklar sinfiga bu xossa xarakteristik xossa emas, chunki dioganallari teng bo'lgan to'rtburchaklar to'g'ri to'rtburchaklar emas.

Masalan, dioganallari teng bo'lgan to'rtburchak teng yonli trapetsiya ham bo'lishi mumkin.

Agar berilgan sinf obyektning ba'zilar  $\alpha$  xossaga ega bo'lib, bu sinfga kirmaydigan obyektning hech bittasi bu xossaga ega bo'lmasa, u holda  $\alpha$ -xossa tushuncha uchun yetarlik belgi hisoblanadi.

Masalan, to'rtburchak parallelogramm bo'lishi uchun uning dioganallari uzunliklarining teng bo'lishi yetarlik belgi hisoblanadi.

Tushuncha va xossalar orasida turli xil bog'lanishlar mavjud. Shuningdek xossalarning o'zlarining o'rtasida ham turli xil bog'lanishlar bor. Aytaylik, ikkita  $\alpha$  va  $\beta$  xossalar berilgan bo'lsin.

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

Obyektlar ikkita  $\alpha$  va  $\beta$  xossalarga ega bo'lishi, obyektlar faqat  $\alpha$  xossaga ega bo'lishi, obyektlar faqat  $\beta$  xossaga ega bo'lishi, obyektlar

ikkala  $\alpha$  va  $\beta$  xossalarga ega bo'lmashligi mumkin. Bu xossalarga bog'lanmagan xossalar deyiladi.

1) Masalan, natural sonlarni 3 ga bo'linishi xossasi 5 ga bo'linishi xossasiga bog'lanmagan, natural sonlar bor 3 ga ham, 5 ga ham bo'linadi, 3 ga bo'linadi, ammo 5 ga bo'linmaydi, 5 ga bo'linadi, ammo 3 ga bo'linmaydi, 3 ga ham 5 ga ham bo'linmaydi.

2) Ixtiyoriy obyekt  $\alpha$  xossaga ega bo'lsa,  $\beta$  xossaga ham ega bo'ladi. Bu holda  $\beta$  xossa  $\alpha$  xossaning natijasi deyiladi. Masalan, natural sonlarni 3 ga bo'linishi 9 ga bo'linishi xossasini natijasi desa bo'ladi. Shuningdek  $\alpha$  xossa  $\beta$  xossani natijasi sifatida ham bo'lishi mumkin.

3) Ixtiyoriy  $\alpha$  xossaga ega bo'lgan obyekt  $\beta$  xossaga ham ega,  $\beta$  xossaga ega bo'lgan obyekt  $\alpha$  xossaga ham ega bu holda  $\alpha$  va  $\beta$  xossalar teng kuchli deyiladi. Masalan, kvadratning tomonlari teng xossasi, uning diagonallari o'zaro perpendikulyar va teng degan xossasiga teng kuchli.

4)  $\alpha$  xossaga ega bo'lgan bitta obyekt ham xossaga ega emas, bu holda holda  $\alpha$  va  $\beta$  xossalari birgalikda emas deyiladi.

5) Ixtiyoriy obyekt  $\alpha$  va  $\beta$  xossalardan faqat bittasiga ega. Bu holda  $\alpha$  va  $\beta$  xossalar qarama-qarshi deyiladi. Masalan, natural sonlarni juftlik va toqlik xossalari qarama-qarshi xossalar. Haqiqatan ham istalgan natural son toq yoki juft bo'ladi.

Tushuncha ta'rifiga qo'yiladigan talablar. Tushuncha ta'rifiga qo'yiladigan talablar quyidagilardan iborat.

Tushuncha ta'rifi:

– ta'riflanayotgan tushunchani bir qiymatli aniqlashga imkon berishi;

– avval ma'lum bo'lgan tushunchalarga asoslanishi;

– yolg'on doiraga, ya'ni tushunchaning o'zi yoki shu tushuncha bilan ta'riflangan tushuncha orqali ta'riflashga yo'l qo'yilmayligi;

– ortiqcha xossalarni (qolganlardan keltirib chiqarish mumkin bo'lganlarni) ko'rsatmasligi kerak.

Demak, ta'rifda qisqa va ixcham shaklda ta'riflanayotgan tushuncha haqida aniq malumot berilishi kerak ekan.

**Nazorat uchun savollar.**

1. Kimyo, fizika, geografiya, tarix fanlariga oid tushunchalarni ayting, bu fanlar uchun umumiy bo'lgan tushunchalarni toping.

2. Biror tushunchani tanlab, uning muhim va muhim bo'lmagan xossalarini ayting.

3. Biror tushuncha misolida hajm va mazmun orasidagi teskari bog'lanishni ko'rsating.

4. Biri ikkinchisi uchun umumiy bo'ladigan tushunchalar ketma-ketligini tuzing.

5. Tushunchani ta'riflash usullariga oid misollar keltiring.

## 2.2-§. Mulohaza, mulohazaning inkori. Kon'yunktsiya va diz'yunktsiya. Implikatsiya va ekvivalentsiya

1. Mulohazalar haqida umumiy tushuncha. Ma'lumki, o'zbek tilidagi gaplar to'plami 3 ta sinfga ajratiladi.

$D$  — «Darak gaplar» to'plami.

$C$  — «So'roq gaplar» to'plami.

$X$  — «His-hayajon gaplar» to'plami.

Haqiqatan ham,  $DUCUX$  — gaplar to'plami va  $D \cap C \cap X = \emptyset$  bo'ladi.

O'z navbatida «darak gaplar» to'plamini ham 3 ta to'plamga ajratish mumkin:

1. Rost yoki yolg'onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lgan darak gaplar. Masalan:

a) Toshkent shahri O'zbekiston Respublikasining poytaxti — rost;

b) London shahri Germaniyaning poytaxti — yolg'on;

c) 2 — tub son — rost;

d) 5 > 6 — yolg'on;

e) «3 soni 15 sonining bo'luvchisi» — rost.

2. Tarkibida o'zgaruvchi ishtirok etgan darak gaplar. Masalan:

a)  $X$  shahar O'zbekiston Respublikasida joylashgan;

b)  $y$  — 6 dan kichik tub son;

c)  $x$  — 5 dan kichik natural son;

3. Rost yoki yolg'onligini aniqlash mumkin bo'lmagan darak gaplar.

Masalan:

a) Men bugun mehmonga bormoqchiman.

b) Bugun yomgir yog'sa kerak.

c) Men tadbirkor bo'lmoqchiman.

d) Matematika qiyin fan.

1-ta'rif. Rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gaplar mulohaza deyiladi.

So'roq yoki his-hayajon gaplar mulohaza bo'la olmaydi. Noma'lum qatnashgan gaplar ham mulohazaga kirmaydi.

Mulohazalar bu matematik mantiq fanini boshlang'ich tushunchasi hisoblanib, u quyidagicha quriladi:

- 1) obektlar to'plami beriladi;
- 2) obyektarning ba'zi bir xossalari va ular orasidagi munosabatlar bayon qilinadi.

Mulohazalar nazariyasining boshlang'ich obyektlari sodda mulohazalardan tashkil topadi va ular lotin alifbosining katta harflari  $A, B, C, \dots$  lar bilan belgilanadi. Har bir sodda mulohaza rost yoki yolg'on bo'lishi mumkin.

2. Sodda va murakkab mulohazalar haqida tushuncha. Mulohazalar sodda va murakkab bo'ladi.

Murakkab mulohazalarni sodda mulohazalarga ajratish mumkin. Masalan,

- a) «5 tub son va u 10 sonining bo'luvchisi».
- b) «2 eng kichik tub son va u juft son».
- d) «Agar sonning raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linsa, u holda shu sonning o'zi ham 3 ga bo'linadi».
- e) « $3^2 = 9$  yoki 9 soni 3 ga bo'linadi».
- f) «Agar sonning oxirgi yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugasa, u faqat va faqat shundagina 5 ga bo'linadi» — murakkab mulohazalardir.

Bir vaqtda rost yoki bir vaqtda yolg'on bo'lgan mulohazalar ekvivalent mulohazalar deyiladi. Ekvivalent mulohazalar  $A = B$  ko'rinishda yoziladi.

Matematik mantiq fanida mulohazani bayon qilish shakli qiziq emas, faqat rost yoki yolg'onligi qiziqdir. Bundan buyon rost mulohazani «R» yoki «1», yolg'on mulohazani «Y» yoki «0» bilan belgilaymiz.

Masalan,

A-“ $4 > 3$ ” - rost mulohaza

B-“ $7+5=12$ ” - rost mulohaza

C-“5-juft son” - yolg'on mulohaza

D-“7- toq son” - rost mulohaza.

Bu mulohazalarda  $A, B, D$  lar rost,  $C$  - yolg'on. Matematikada har bir teorema mulohaza hisoblanadi. Teoremani isbotlash uchun oldin rostligi isbotlangan teoremlar, aksiomalar va boshlang'ich tushunchalardan foydalaniladi. Bizga ma'lumki, sodda mulohazalardan bog'lovchi so'zlar yordamida murakkab mulohazalar hosil qilinadi. Bular «emas», «va», «yoki», «... kelib chiqadi», «agar bo'lsa, ... u holda», «zarur va yetarli» kabi bog'lovchi so'zlar bo'lib, ularni har bittasi bitta mantiqiy amalga mos keladi.

Nazorat uchun savollar.

1. “Darak gaplar”, “So'roq gaplar” va “His-hayajon gaplarning barchasi mulohaza bo'la oladi-mi?”
2. Murakkab mulohaza sodda mulohaza bilan nimasi bilan farq qiladi?
3. Mulohazalar ustida bajariladigan qanday mantiqiy amallarni bilasiz?
4. Mulohaza ta'rifini ayting.
5. Inkor amalining ta'rifini ayting.
6. Konyunksiya amalining ta'rifini va xossasini ayting.

### 2.3-§. Mantiqiy amallarning qonunlari.

1. Mulohazalar dizyunksiyasi.

1-ta'rif. Ikkita sodda  $A, B$  mulohazalardan tuzilgan «A yoki B» mulohazaga mulohazalar dizyunksiyasi deyiladi [8].

Mulohazalar dizyunksiyasi « $A \vee B$ » ko'rinishda yoziladi, «A yoki B» deb o'qiladi va uning tarkibiga kirgan mulohazalarning hech bo'lmaganda bittasi rost bo'lganda, rost bo'ladi.

Dizyunksiyaning rostlik jadvali quyidagicha:

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|-----|-----|------------|
| R   | R   | R          |
| R   | Y   | R          |
| Y   | R   | R          |
| Y   | Y   | Y          |

ko'rinishda bo'ladi, xorij adabiyotlarida quyidagicha bo'ladi

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|------------|
| T | T | T          |
| T | F | T          |
| F | T | T          |
| F | F | F          |

### Misollar:

a) A: «Varshava shahri Germaniyaning Poytaxti» — Y.  
 B: «Varshava shahri Polshaning Poytaxti» — R.  
 $A \vee B$ : «Varshava shahri Germaniyaning yoki Polshaning poytaxti» — R.

b) A: «10 — juft son» — R.

B: « $\pi$  — irratsional son» — R.

$A \vee B$ : «10 — juft son yoki  $\pi$  — irratsional son» — R.

d) A: «15 — juft son» — Y.

B: «Kvadrat to'g'ri to'rtburchak emas» — Y.

$A \vee B$ : «15 — juft son yoki kvadrat to'rtburchak emas» — Y.

### 2. Mulohazalarning konyunksiyasi.

**2-ta'rif.** Ikkita sodda A hamda B mulohazalardan tuzilgan «A va B» mulohazaga, berilgan A, B mulohazalarning konyunksiyasi deyiladi.

Mulohazalarning konyunksiyasining rostlik jadvali

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| R | R | R            |
| R | Y | Y            |
| Y | R | Y            |
| Y | Y | Y            |

ko'rinishda bo'ladi, xorij kitoblarida quyidagicha bo'ladi

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| T | T | T            |
| T | F | F            |
| F | T | F            |
| F | F | F            |

Mulohazalar konyunksiyasi uning tarkibiga kirgan mulohazalar rost bo'lganda, rost bo'ladi va « $A \wedge B$ » yoki « $A \& B$ » ko'rinishda yoziladi hamda «A va B» kabi o'qiladi.

Misollar:

a) A: «5 — tub son» — (R); B: «5 > 6» — (Y) bo'lsin, u holda  $A \wedge B$ : «5 — tub son va u 6 dan katta» — yolg'on mulohaza bo'ladi.

b) A: « $3 < 8$ » — (R), B: « $8 < 11$ » — (R),  $A \wedge B$ : « $3 < 8 \wedge 8 < 11$ » yoki « $3 < 8 < 11$ », ya'ni tengsizliklar konyunksiyasini qo'sh tengsizlik ko'rinishida yozish mumkin va aksincha; ta'rifga ko'ra « $3 < 8 < 11$ » — rost mulohaza.

### 3. Mulohaza inkori.

**3-ta'rif.** A mulohaza inkori deb, A rost bo'lganda yolg'on, yolg'on bo'lganda rost bo'luvchi mulohazaga aytiladi.

A mulohaza inkori  $\bar{A}$  ko'rinishda belgilanadi va «A emas», «A ekanligi yolg'on» deb o'qiladi. Masalan, A: « $3^2 = 6$ » bo'lsa,  $\bar{A}$ : « $3^2 \neq 6$ »;

A: «Hozir yoz fasli» bo'lsa, uning inkori  $\bar{A}$ : «hozir yoz fasli emas» yoki «hozir yoz fasli ekanligi yolg'on» kabi ifodalanadi.

Mulohaza inkorining rostlik jadvali quyidagi ko'rinishda bo'ladi: Mulohaza inkorining xossasi:  $A = \bar{\bar{A}}$  bo'ladi:

| A | $\bar{A}$ |
|---|-----------|
| R | Y         |
| Y | R         |

Masalan, A: «17 — tub son»;

$\bar{A}$  «17 — tub son emas»;

$\bar{\bar{A}}$ : «17 — tub son emasligi yolg'on» yoki «17 — tub son».

### 4. Mulohazalar implikasiyasi.

**3-ta'rif.** Sodda A va B mulohazalardan tuzilgan «Agar A bo'lsa, B bo'ladi» ko'rinishidagi mulohaza A va B mulohazalarning implikasiyasi deyiladi va « $A \Rightarrow B$ » ko'rinishda belgilanadi.

$A \Rightarrow B$  implikasiya faqat A rost B yolg'on bo'lgandagina yolg'on bo'ladi. A — implikasiya sharti, B — xulosasi deyiladi. A ni B uchun yetarli, B ni A uchun zaruriy shart deb ham ataladi. Implikasiyaning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| R | R | R                 |
| R | Y | Y                 |
| Y | R | R                 |
| Y | Y | R                 |

Masalan, a)  $A$ : «15 soni 3 ga bo'linadi» — R;  $B$ : «15 sonining raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadi» — R.  $A \Rightarrow B$ : «Agar 15 soni 3 ga bo'linsa, u holda 15 sonining raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadi» — R.

b)  $A$ : « $5 \cdot 5 = 25$ »,  $B$ : « $5 + 5 = 10$ » bo'lsin.  $A \Rightarrow B$ : «Agar  $5 \cdot 5 = 25$  bo'lsa, u holda  $5 + 5 = 10$  bo'ladi» — Y.

d)  $A$ : «25 sonining yozuvi 0 raqami bilan tugamaydi» — R.  $B$ : «25 soni 10 ga bo'linadi» — Y.  $A \Rightarrow B$ : «Agar 25 sonining yozuvi 0 raqami bilan tugamasa, u holda 25 soni 10 ga bo'linadi» — Y. Agar  $A \Rightarrow B$  bim'likatsiya berilgan bo'lsa,  $B \Rightarrow A$  unga teskari,  $A \Rightarrow B$  esa qarama-qarshi,  $B \Rightarrow A$  esa qarama-qarshiga teskari implikatsiyalar deyiladi.

### 5. Mulohazalar ekvivalensiyasi.

4-ta'rif. Sodda  $A$  va  $B$  mulohazalardan tuzilgan « $A$  faqat va faqat  $B$  bo'lgandagina bo'ladi» ko'rinishdagi mulohaza  $A$  va  $B$  ning ekvivalensiyasi deyiladi va « $A \Leftrightarrow B$ » ko'rinishda yoziladi.

$A \Leftrightarrow B$  ekvivalensiya  $A$  va  $B$  mulohazalarning qiymatlari bir xil bo'lganda rost bo'ladi. Ekvivalensiyaning rostlik jadvali:

| $A$ | $B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|-----------------------|
| R   | R   | R                     |
| R   | Y   | Y                     |
| Y   | R   | Y                     |
| Y   | Y   | R                     |

Masalan, «129 soni 3 ga faqat va faqat uning raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linsagina bo'linadi».

$129:3 \Leftrightarrow (1+2+9):3$ . — Rost

### 6. Tavtologiya:

Tarkibiga kirgan ixtiyoriy elementar mulohazalarning rost yoki yolg'onligidan qat'iy nazar rost bo'ladigan murakkab mulohaza tavitologiya deyiladi. Ularning rostligi rostlik jadvali yordamida isbot qilinadi.

#### Mantiqiy amallarning qonunlari.

➤ Mulohazalar dizyunksiyasining xossalari:

1°.  $A \vee B = B \vee C$  (kommutativlik).

2°.  $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$  (assotsiativlik).

3°.  $A \vee A = A$  (aynan rost mulohaza).

4°.  $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \vee (A \vee C)$  — dizyunksiyaning konyunksiyaga nisbatan distributivligi.

5°.  $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$  — konyunksiyaning dizyunksiyaga nisbatan distributivligi.

6°.  $\left. \begin{aligned} \overline{A \wedge B} &= \overline{A} \vee \overline{B} \\ \overline{A \vee B} &= \overline{A} \wedge \overline{B} \end{aligned} \right\}$  De-Morgan qonunlari (De-Morgan shotland matematigi (1806—1871)).

Tengliklarning to'g'riligini rostlik jadvalini tuzib isbot qilinish mumkin.

De-Morgan qonunlarining a) holi isbotini ko'raylik:

$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ , ya'ni mulohazalar konyunksiyasi inkori mulohazalar inkorlarining dizyunksiyasi bilan ekvivalent.

Rostlik jadvalini tuzamiz.

| $A$ | $B$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $A \wedge B$ | $\overline{A \wedge B}$ | $\overline{A} \vee \overline{B}$ |
|-----|-----|----------------|----------------|--------------|-------------------------|----------------------------------|
| R   | R   | Y              | Y              | R            | Y                       | Y                                |
| R   | Y   | Y              | R              | Y            | R                       | R                                |
| Y   | R   | R              | Y              | Y            | R                       | R                                |
| Y   | Y   | R              | R              | Y            | R                       | R                                |

Jadvalning oxirgi ikki ustuni  $A$  va  $B$  mulohazalar qiymatlarining turli kombinatsiyalarida bir xil. Demak,  $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$  ekanligi to'g'ri.

Misol keltiraylik.

$A$  — «Men shaxmat o'ynayman».

$B$  — «Men tennis o'ynayman».

$\overline{A \wedge B}$  — «Mening shaxmat va tennis o'ynashim yolg'on».

$\overline{A} \vee \overline{B}$  — «Men shaxmat o'ynamayman yoki men tennis o'ynamayman».

➤ Mulohazalar konyunksiyasining xossalari:

1°.  $A \wedge B = B \wedge A$  (kommutativlik);

2°.  $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C$  (assotsiativlik);

3°.  $A \wedge \overline{A} = Y$  ( $A \wedge \overline{A}$  — aynan yolg'on mulohaza).

Mulohazalar konyunksiyasi xossalari to'g'riligini rostlik jadvallari tuzish va mos kataklardagi murakkab mulohazalar qiymatlarini taqqoslab tekshirish mumkin.

➤ Mulohazalar implikatsiyasining xossalari:

1°.  $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$ .

2°.  $A \Rightarrow B = B \Rightarrow A$  (kontrapozitsiya qonuni).

➤ Tautologiyaning xossalari:

- «Modus Ponens»:  $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ ;
- «Modus Tollens»:  $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ ;
- $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ ;
- $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ ;
- $((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
- $((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
- $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (q \vee s)$ ;
- $p \wedge q \rightarrow p$
- $p \rightarrow p \vee q$
- $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$ ;
- de-Morgan 1 -teoremasi:  $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- de-Morgan 21 -teoremasi:  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- Inkorni-inkor qonuni:  $\neg\neg p \leftrightarrow p$ ;
- 1-distributivlik qonuni:  $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ;
- 1-distributivlik qonuni:  $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ;
- $p \vee \neg p$ .

Bu xossalar rostlik jadvali orqali isbotlanadi.

**Mustaqil yechish uchun misollar.**

Quyidagi gaplar ichidan mulohazalarni ajrating va ularning rost yoki yolg'on ekanligini aniqlang:

1. Sirdaryo Orol dengiziga quyiladi.
2. Siz qaysi oliygohda o'qiyasiz?
3. O'zbekiston Mustaqilligining 10 yilligi muborak bo'lsin!
4. Har qanday son musbat.
5. 0 har qanday haqiqiy songa bolinadi.
6. 2, 3, 5 sonlari tub sonlar.
7. Barcha insonlar yoshi 20 da.
8. Galaktikamizda shunday sayyora bor-ki, unda hayot mavjud.
9. 5 soni 25 va 70 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi.

10.  $3x^3 - 5y + 9$ .

11. Quyidagi juftliklarining qaysisida mulohazalar bir-birining inkori?

a. 1.  $2 \square 0, 2 \geq 0$ .       $8 \square 9, 9 > 8$ .       $7 \square 11, 11 \geq 0$ .

b. 2.  $6 \square 9, 6 \geq 9$ .       $2 \square 0, 2 > 0$ .       $5 \square 7, 5 \geq 0$ .

12. «ABC tog'riburchakli uchburchak»; «ABC o'tmas burchakli uchburchak».

13. « $f$  funksiya – toq», « $f$  funksiya – juft».

14. «Barcha tub sonlar toq», «Shunday tub son mavjud-ki, u juft».

15. «Irratsional sonlar mavjud», «Barcha sonlar ratsional».

16. Quyidagi mulohazalarning rostlik qiymatini aniqlang:

17. Agar 12 soni 6 ga bo'linsa, u holda 12 soni 3 ga bo'linadi.

**Nazorat uchun savollar**

- 1) Mulohazalar dizyunksiyasining *ta'rifi* va xossasini ayting.
- 2) Mulohazalar dizyunksiyasining rostlik jadvalini ko'rsating.
- 3) Mulohazalar imlikatsiyasining *ta'rifi* va xossasini ayting.
- 4) Mulohazalar imlikatsiyasining rostlik jadvalini ko'rsating.
- 5) Mulohazalar ekvivalensiyasining *ta'rifini* va xossasini ayting.
- 6) Mulohazalar ekvivalensiyasining rostlik jadvalini ko'rsating.

**2.4-§. Predikatlar. Predikatning inkori. Kon'yunktsiya va diz'yunktsiya.**

**Implikatsiya va ekvivalentsiyasi.**

**1. Predikatlar haqida umumiy tushuncha.**

Mulohazalar algebrasining asosiy masalalaridan biri sodda mulohazalarning rostlik qiymatlariga tayangan holda, ulardan tuzilgan murakkab mulohazalarning rostlik qiymatlarini topishdan iborat ekanligini biz ko'rib chiqdik. Lekin mulohazalar algebrasi fan va amaliyotning murakkab mantiqiy xulosalarini chiqarish uchun yetarli emas. Bunday murakkab mantiqiy xulosalarni chiqarishda mulohazalar algebrasini ham o'z ichiga oluvchi predikatlar algebrasi muhim o'rin tutadi.

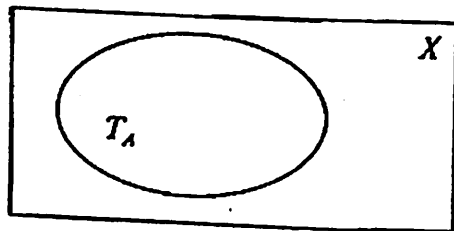
1-ta'rif. O'zgaruvchi qatnashgan va o'zgaruvchi o'niga qiymatlar qo'yilgandagina rost yoki yolg'on mulohazaga aylanadigan darak gap predikat deyiladi.

Predikatlar tarkibiga kirgan o'zgaruvchilarning soniga qarab bir o'rinli, ikki o'rinli va hokazo predikatlar diyiladi. Biz ko'proq bir o'rinli predikat haqida gapiramiz, uni  $A(x)$ ,  $B(y)$ , ... ko'rinishda belgilaymiz.

Predikat tarkibiga kirgan o'zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlar to'plami predikatning aniqlanish sohasi deyiladi. Aniqlanish sohasi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , ... kabi belgilanadi.

O'zgaruvchining shu o'zgaruvchi o'niga qo'yilganda predikatni rost mulohazaga aylantiruvchi qiymatlari to'plami predikatning rostlik to'plami deyiladi,  $A(x)$  predikatning aniqlanish sohasi  $X$  to'plam bo'lsa, rostlik to'plami  $T_A$  bilan belgilanadi va  $x \in X$ ,  $T_A \in X$  bo'ladi (1.18-rasm).

Ta'rifga ko'ra istalgan tenglama yoki tengsizlik predikat bo'ladi. Masalan:



2.2-rasm

- $A(x)$ : « $x$  shahar — O'zbekiston Respublikasining poytaxti». Bunda aniqlanish sohasi  $X = \{\text{Toshkent, Buxoro, Xiva, Moskva}\}$  bo'lib, rostlik to'plami  $T_A = \{\text{Toshkent}\}$  bo'ladi.
- $B(x)$ :  $(5 < x < 11) \wedge (x \in \mathbb{N})$ .  $X = \mathbb{N}$  bo'lib,  $T_B = \{6; 7; 8; 9; 10\}$  bo'ladi.
- $C(y)$ : « $y$  — 10 sonning bo'luvchisi» bo'lsa, aniqlanish sohasi  $Y = \mathbb{N}$  bo'lib, rostlik to'plami  $T_C = \{1; 2; 5; 10\}$  bo'ladi.
- $D(z)$ : « $z^2 + 2z - 1 = 0$ ». Aniqlanish sohasi  $Z = z \in \mathbb{R}$ , rostlik to'plami  $T_D = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ .

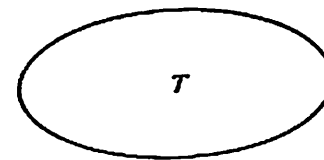
Predikatlarni  $P$ ,  $Q$  yoki  $P(x)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $R(x, y, z)$  ko'rinishida belgilashni kelishib olamiz.

Bir o'rinli predikatlar bilan to'liqroq tanishib chiqamiz. Predikatlar ustida ham mulohazalar ustida bajarilgan  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  amallarni kiritishimiz mumkin.

## 2. Predikatlar inkori.

$M \neq \emptyset$  to'plamda aniqlangan bir o'rinli  $P(x)$  - predikat berilgan bo'lsin. U holda  $P(x)$  - predikatning inkori deb har qanday  $x \in M$  element uchun  $P(x)$  - predikat rost bo'lganda yolg'on bo'ladigan;  $P(x)$  yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan  $\neg P(x)$  predikatga aytiladi. Ya'ni,  $M$  ning ixtiyoriy elementi uchun  $(\neg P)(x) = \neg(P(x))$  tenglik o'rinli bo'ladi.

$X$  to'plamda  $A(x)$  predikat berilgan bo'lsin.  $T_{\bar{A}}$   $A(x)$  rost bo'lganda yolg'on, yolg'on bo'lganda, rost bo'ladigan  $\bar{A}(x)$  predikat  $A(x)$  ning inkori deyiladi.  $A(x)$  ning rostlik to'plami  $T_A$  bo'lsa,  $\bar{A}(x)$  ning rostlik to'plami  $T_{\bar{A}}$  bo'ladi (2.3-rasm).



2.3-rasm

Masalan: a)  $A(x)$ : « $x$  son 5 raqami bilan tugaydi» bo'lsa,  $\bar{A}(x)$ : « $x$  son 5 raqami bilan tugamaydi» bo'ladi.

$X = \{x \in \mathbb{N}, x < 20\}$  to'plamda  $A(x)$ : « $x$  tub son» predikati berilgan bo'lsin. U holda  $T_A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$  bo'ladi.  $\bar{A}(x)$ : « $x$  tub son emas» va  $T_{\bar{A}} = \{1; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 18\}$  bo'ladi.

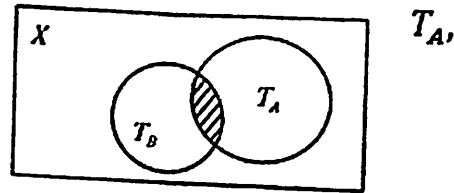
$X = \{\forall x \in \mathbb{N}, x \leq 15\}$  da  $A(x)$ : « $x$  soni 15 ning bo'luvchisi» predikat berilgan bo'lsin. U holda  $T_A = \{1; 3; 5; 15\}$  bo'ladi.  $A(x)$ : « $x$  son 15 ning bo'luvchisi emas» va  $T_{\bar{A}} = \{2; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$  bo'ladi.

$X$  — hafta kunlari to'plami bo'lsin. Bu to'plamda  $A(x)$ : « $x$  — haftaning juft kuni» predikati berilgan bo'lsa,  $\bar{A}(x)$ : « $x$  — haftaning toq kuni»,  $T_A = \{\text{seshanba, payshanba, shanba}\}$  va  $T_{\bar{A}} = \{\text{yakshanba, dushanba, chorshanba, juma}\}$  bo'ladi.

3. Predikatlar konyunksiyasi. Aytaylik,  $X$  to'plamda  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar berilgan bo'lsin.

2-ta'rif.  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlarning har ikkalasi rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan predikatga ularning konyunksiyasi deyiladi va  $A(x) \wedge B(x)$  ko'rinishda belgilanadi. Agar  $A(x)$  ning rostlik to'plami  $T_A$ ,  $B(x)$  ning rostlik to'plamini  $T_B$ ,

$A(x) \wedge B(x)$  ning rostlik to'plamini  $T$  desak,  $T = T_A \cap T_B$  bo'ladi. Uni Eyer-Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak (1.20-rasm), rasmdagi shtrixlangan soha  $T_A \cap T_B$  dan iborat bo'ladi.



2.4-rasm

**1-misol.**  $A(x)$ : « $x$  soni tub son» va  $B(x)$ : « $x$  soni toq son» degan predikatlar aniqlovchi sohasi

$X = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}$  bo'lsin, ular konyunksiyasining rostlik to'plamini toping.

**Yechish.**  $T_A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$ ,  $T_B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19\}$ , u holda  $T = T_A \cap T_B = \{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$  bo'ladi.

**2-misol.**  $X = \{x \in \mathbb{N}, x < 17\}$  to'plamda aniqlangan  $A(x)$ : « $x < 8$ » va  $B(x)$ : « $x$  soni 3 ga karrali» predikatlar berilgan bo'lsin, ular konyunksiyasining rostlik to'plamini toping.

**Yechish.**  $T_A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $T_B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$  va  $T = T_A \cap T_B = \{3; 6\}$  bo'ladi.

**4. Predikatlar dizyunksiyasi.** Aytaylik,  $X$  to'plamda  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar berilgan bo'lsin.

**3-ta'rif.**  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar har ikkalasi yolg'on bo'lganda yolg'on, qolgan barcha hollarda rost bo'ladigan predikatga  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar dizyunksiyasi deyiladi.

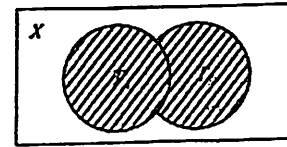
Predikatlar dizyunksiyasi  $A(x) \vee B(x)$  ko'rinishda belgilanib, « $A(x)$  yoki  $B(x)$ » deb o'qiladi.

$A(x)$  predikatning rostlik to'plami  $T_A$ ,  $B(x)$  ning rostlik to'plami  $T_B$ ,  $A(x) \vee B(x)$  ning rostlik to'plamini  $T$  desak,  $T = T_A \cup T_B$  bo'ladi.

Uni Eyer — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (1.21-rasm).

Masalan: a)  $X = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}$  da  $A(x)$ : « $8 \leq x \leq 15$ »,  $B(x)$ :

« $x$  soni 18 ning bo'luvchisi» predikatlar berilgan bo'lsa,  $A(x) \cup B(x)$  ning rostlik to'plamini toping.

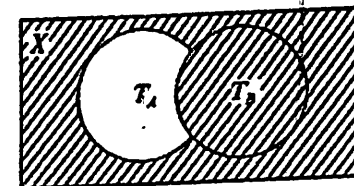


2.5-rasm

**Yechish.**  $T_A = \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$ ,  $T_B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$  bo'lgani uchun  $T = T_A \cup T_B = \{1; 2; 3; 6; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 18\}$  bo'ladi.

**5. Predikatlar imlikatsiyasi.**  $X$  to'plamda aniqlangan  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar berilgan bo'lsin.

**4-ta'rif.**  $A(x)$  predikat rost bo'lib,  $B(x)$  predikat yolg'on bo'lganda yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan mulohaza  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar implikatsiyasi deyiladi va  $A(x) \Rightarrow B(x)$  ko'rinishda belgilanadi. U  $A(x)$  predikatdan  $B(x)$  predikat kelib chiqadi deb o'qiladi. Bu holda  $B(x)$  predikat  $A(x)$  predikat uchun «zaruriy shart»,  $A(x)$  predikat  $B(x)$  predikat uchun «yetarli shart» deyiladi.



2.6-rasm

$A(x)$  predikatning rostlik to'plami  $T_A$ ,  $B(x)$  niki  $T_B$  va  $A(x) \Rightarrow B(x)$  ning rostlik to'plami  $T$  bo'lsa,

$$T = \bar{T}_A \cup T_B$$

bo'ladi. Uni Eyer — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (1.22-rasm).

**3-misol.**  $X = \{x \in \mathbb{N}, 12 \leq x \leq 21\}$  to'plamda  $A(x)$ : « $x$  — tub son»,  $B(x)$ : « $x$  toq son» predikatlar berilgan bo'lsa,  $A(x) \Rightarrow B(x)$  ning rostlik to'plamini topaylik.

**Yechish.**  $T_A = \{13; 17; 19\}$ ,  $T_B = \{13; 15; 17; 19; 21\}$ ,  $T_A' = \{12; 14; 15; 16; 18; 20; 21\}$  u holda  $T = \bar{T}_A \cup T_B = \{12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21\}$ .

4-misol.  $X = \{\forall x \in N, x \leq 13\}$  da  $A(x)$ : « $x$  soni 12 ning bo'luvchilari»,  $B(x)$ : « $x$  — juft son» predikatlar berilgan bo'lsa,  $A(x) \Rightarrow B(x)$  ning rostlik to'plamini topaylik.

Yechish.  $T_A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ ,  $T'_A = \{5; 7; 8; 9; 10; 11; 13\}$ ,  $T_B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$  bo'lsa,  $T = T'_A \cup T_B = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$  bo'ladi.

### 6. Predikatlar ekvivalensiyasi.

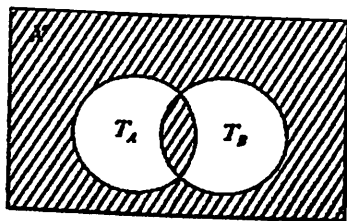
Aytaylik,  $X$  to'plamda  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar berilgan bo'lsin.

5-ta'rif.  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar har ikkalasi yo'lg'on bo'lganda hamda har ikkalasi rost bo'lganda rost bo'ladigan, qolgan hollarda yo'lg'on bo'ladigan mulohaza predikatlar ekvivalensiyasi deyiladi.

Predikatlar ekvivalensiyasi  $A(x) \Leftrightarrow B(x)$  ko'rinishda belgilanadi va « $A(x)$  bilan  $B(x)$  teng kuchli» deb o'qiladi. Agar ikkita predikat teng kuchli, ya'ni ekvivalent bo'lsa, ularning har biri ikkinchisi uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$  ning rostlik to'plamini  $T$  desak, u  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar har ikkalasi bir vaqtda rost va har ikkalasi bir vaqtda yolg'on bo'ladigan mulohazalarning rostlik qiymatlari to'plamidan iborat bo'ladi. Demak,  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar har ikkalasi rost bo'lgan holdagi rostlik to'plami  $T_A \cap T_B$  dan, har ikkalasi yolg'on bo'lgan holdagi rostlik to'plami  $T'_A \cap T'_B$  dan iborat bo'ladi. Demak,

$$T = (T_A \cap T_B) \cup (T'_A \cap T'_B).$$



2.7-rasm

Buni Eyler — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (I.23-rasm).

5-misol.  $X = \{\forall x \in N, x \leq 16\}$  to'plamda  $A(x)$ : « $x$  son 3 ga karrali son»,  $B(x)$ : « $x$  soni 12 ning bo'luvchisi» predikatlar berilgan bo'lsa,  $A(x) \Leftrightarrow B(x)$  ning rostlik to'plamini topaylik.

Yechish.  $T_A = \{3; 6; 9; 12; 15\}$ ,  $T_B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ .

$T = (T_A \cap T_B) \cup (T'_A \cap T'_B)$   
 $= \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 15\} \cap \{3; 6; 12\} \cup \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14\} \cap \{5; 7; 8; 9; 10; 11\} = \{3; 6; 12\} \cup \{5; 7; 8; 10; 11\} = \{3; 5; 6; 7; 8; 10; 11\}$ .  
 Fikr (mulohaza), predikat va ular ustidagi amallar tushunchalari ko'p tasdiqlarning mantiqiy tuzilishini aniqlashga yordam beradi.

### Nazorat uchun savollar.

1. Predikatlar bilan muloxozalar orasida qanday farq bor.
2. Predikatlar inkorining ta'rifi va uning rostlik to'plamini ko'rsating.
3. Predikatlar konyunksiyasi uning xossalari va rostlik to'plami ko'rsating.
4. Mulohazalar dizyunksiyasi uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.
5. Mulohazalar imlikatsiyasi uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.
6. Mulohazalar ekvivalensiyasi uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.

## 2.5-§. Kvantorlar

### 1. Kvantorlar va uning turlari.

Predikatni mulohazaga aylantirishning yana bir usuli kvantorlardan foydalanishdir.

Quyidagi misolni qaraylik.

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 sonlari haqida quyidagilarni aytish mumkin:

a) berilgan barcha sonlar ikki xonali sonlardir.

b) berilgan sonlardan ba'zilar toq sonlardir.

Bu jumalarga nisbatan ularning rost yoki yolg'onligi to'g'risida fikr yuritish mumkinligidan ular mulohaza bo'ladi.

Agar biz ulardan «barcha», «ba'zilar» so'zlarini olib tashlasak, jumalarni rostmi yoki yolg'onmi savoliga javob berib bo'lmaydi. Demak «barcha», «ba'zi» so'zlarni qo'shish bilan mulohaza hosil qilinadi.

«Ixtiyoriy», «har qanday», «har bir», «barcha (hamma)» so'zlari umumiylik kvantoridir.

**Ta'rif.** «Barcha» va «ba'zi» so'zlari kvantorlar deb aytiladi. «Kvantor» so'zi lotincha bo'lib, «qancha» ma'nosini anglatadi, ya'ni kvantor u yoki bu mulohazada qancha (barcha yoki ba'zi) ob'yekt haqida gap bora yotganini bildiradi. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari bir-biridan farq qilinadi.

Umumiylik kvantori « $\forall$ » belgisi bilan belgilanadi va «har bir», «hamma», «barcha» so'zlari bilan ifodalanadi.  $\forall$  inglizcha «All» so'zining bosh harfidan olingan va «hamma» ma'nosini bildiradi.

Mavjudlik kvantori « $\exists$ » belgisi bilan belgilanadi, inglizcha «Exist» — «mavjud» so'zining bosh harfidan olingan va «bor», «mavjud», «topiladi» so'zlarini bildiradi.

Masalan,  $A(x)$ : « $x$  son tub son» predikatini olaylik, uni kvantorlar yordamida mulohazaga aylantiramiz, bu yerda  $x \in \mathbb{N}$ . «Barcha  $x$  sonlar tub son» — yolg'on mulohaza, soni tub son bo'ladigan qiymatlar topiladi — rost mulohaza.

$P(x)$ : « $x$  son 5 ga karrali»,  $x \in \mathbb{N}$  bo'lsin. «Barcha  $x$  sonlar 5 ga karrali» — yolg'on mulohaza, «5 ga karrali  $x$  son mavjud» — rost mulohaza.

Kvantorlar qatnashgan mulohaza  $(\forall x \in X)P(x)$  yoki  $(\exists x \in X)P(x)$  ko'rinishda yoziladi va « $X$  to'plamning hamma elementlari uchun  $P(x)$  bajariladi» yoki « $X$  to'plamda  $P(x)$  bajariladigan elementlar to'pladi», deb o'qiladi.

Masalan,  $P(x)$ : « $x$  soni 3 ga karrali».  $x \in \mathbb{N}$  bo'lsin «Ixtiyoriy  $x$  soni 3 ga karrali» - yolg'on mulohaza «3 ga karrali  $x$  sonlar mavjud» - rost mulohaza

## 2. Predikatlarini kvantorlar yordamida mulohazalarga aylantirish.

Yuqorida ko'rdikki, istalgan tenglama va tengsizlik predikat bo'lar ekan, chunki ularni mulohazaga aylantirish mumkin. Buning uchun o'zgaruvchi o'rniga qiymat qo'yish yetarli.

Predikatni mulohazaga aylantirishning yana bir usuli kvantorlardan foydalanishdir. Ikki xil kvantor bor bo'lib, ularning biri «umumiylik», ikkinchisi «mavjudlik» kvantori deb ataladi.

### Misollar.

**1-misol.**  $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$  mulohazaning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

| A | B | C | $A \Rightarrow B$ | $\overline{A \Rightarrow B}$ | $C \vee A$ | $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$ |
|---|---|---|-------------------|------------------------------|------------|---|
| 1 | 1 | 1 | 0                 | 1                            | 1          | 0   |
| 1 | 1 | 1 | 0                 | 1                            | 1          | 0   |
| 1 | 0 | 0 | 1                 | 1                            | 1          | 1   |
| 1 | 0 | 0 | 1                 | 0                            | 0          | 0   |
| 0 | 1 | 1 | 0                 | 1                            | 1          | 0   |
| 0 | 1 | 1 | 0                 | 1                            | 1          | 0   |
| 0 | 0 | 1 | 0                 | 1                            | 1          | 0   |
| 0 | 0 | 1 | 0                 | 0                            | 0          | 1   |

**2-misol.**  $N$  natural sonlar to'plamida  $P(x)$  predikat berilgan bo'lsin: « $x$  - tub son». Kvantorlardan foydalanib ushbu predikatdan quyidagi mulohazalarni hosil qilish mumkin:  $\forall x P(x)$  - «Hamma natural sonlar tub sonlar bo'ladi»;  $\exists x P(x)$  - «Shunday natural son mavjudki, u tub son bo'ladi». Ravshanki, birinchi mulohaza yolg'on va ikkinchi mulohaza chindir.

**3-misol.** To'g'ri chiziqlar to'plamida aniqlangan  $P(x, y)$ : « $x \perp y$ » predikatni ko'raylik. Agar  $P(x, y)$  predikatga nisbatan kvantorli amallarni tadbqiq etsak, u holda quyidagi sakkizta mulohazaga ega bo'lamiz:

- $\forall x \forall y P(x, y)$  - «Har qanday  $x$  to'g'ri chiziq har qanday  $y$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
- $\exists y \forall x P(x, y)$  - «Shunday  $y$  to'g'ri chiziq mavjudki, u har qanday  $x$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
- $\forall y \exists x P(x, y)$  - «Har qanday  $y$  to'g'ri chiziq uchun shunday  $x$  to'g'ri chiziq mavjudki,  $x$  to'g'ri chiziq  $y$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
- $\exists y \exists x P(x, y)$  - «Shunday  $y$  to'g'ri chiziq va shunday  $x$  to'g'ri chiziq mavjudki,  $x$  to'g'ri chiziq  $y$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
- $\forall y \forall x P(x, y)$  - «Har qanday  $y$  to'g'ri chiziq har qanday  $x$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
- $\forall x \exists y P(x, y)$  - «Har qanday  $x$  to'g'ri chiziq uchun shunday  $y$  to'g'ri chiziq mavjudki,  $x$  to'g'ri chiziq  $y$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
- $\exists x \exists y P(x, y)$  - «Shunday  $x$  to'g'ri chiziq va shunday  $y$  to'g'ri chiziq mavjudki,  $x$  to'g'ri chiziq  $y$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
- $\exists x \forall y P(x, y)$  - «Shunday  $x$  to'g'ri chiziq mavjudki, u har qanday  $y$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».

**4-misol.**  $(\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow R(z)$  formulani deyarli normal shaklga keltiramiz.

$$\begin{aligned} (\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow R(z) &\equiv \overline{(\exists x P(x) \vee \forall y Q(y))} \rightarrow R(z) \equiv \\ &\equiv \overline{\exists x P(x) \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \overline{\exists x P(x)} \wedge \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \\ &\equiv \exists x \overline{P(x)} \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z). \end{aligned}$$

Demak,

$$(\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow R(z) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z).$$

**5-misol.**  $A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \exists x \forall y Q(x, y)$  formulani normal shaklga keltirish talab etilsin.  $A$  formulada teng kuchli almashtirishlarni o'tkazib, uni normal shaklga keltiramiz:

$$\begin{aligned} A &\equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x, y)} \equiv \forall x (\exists y P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv \\ &\equiv \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv \forall x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge \overline{Q(x, z)}). \end{aligned}$$

**Mustaqil yechish uchun misollar.**

### 1. Rostlik jadvalini tuzing

|   |  |
|---|--|
| $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$ | $(A \vee B) \Rightarrow (\overline{A \wedge C})$ |
| $(\overline{A \wedge C}) \Rightarrow B$                 | $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow C$        |
| $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$   | $(\overline{A \vee B}) \Rightarrow C$            |
| $C \wedge (A \Rightarrow \overline{B})$                 | $A \Leftrightarrow \overline{B \vee C}$          |
| $A \Leftrightarrow (\overline{B \vee C})$               | $A \Leftrightarrow C \Rightarrow B$              |
| $(\overline{A \Rightarrow B}) \wedge C$                 | $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee C)$              |
| $C \wedge (\overline{A \Rightarrow B})$                 | $A \Rightarrow (B \Rightarrow \overline{C})$     |
| $(\overline{A \vee B}) \Rightarrow C$                   | $\overline{A \vee B} \Rightarrow \overline{C}$   |
| $A \vee (\overline{B \wedge C})$                        | $(A \Rightarrow \overline{B}) \wedge C$          |
| $A \Rightarrow (\overline{B \wedge C})$                 | $(\overline{A \vee B}) \Leftrightarrow C$        |

1. Mulohazalarga misollar keltiring. Ularning rost yoki yolg'onligini aniqlang.

2. Quyidagi jumlar orasidan mulohazalarni ajrating va ularning rostlik qiymatini toping:

a) 9 — butun son; b) 48 ni 5 ga bo'lganda 4 qoldiq qoladi; d) so'roq gap mulohaza bo'ladi; e)  $x \leq 7$ ; f)  $17 \cdot 2 - 21 = 13$ ; g)  $x^2 + 4 = 13$ ; h) 24 — tub son.

3. Quyidagi mulohazalar inkorini tuzing va ularning rostlik qiymatini toping:

a) 225 soni 9 ga bo'linadi; b) 21 soni 7 ga bo'linadi.

4. Quyidagi mulohazalar inkorini tuzing va ularning rostlik qiymatini toping:

v) 7,6 — natural son; g) Praga—Bolgariyaning poytaxti;

d)  $7 < 3$ ; e)  $27 : 3 + 2 \cdot 3 - 18$  ifodaning qiymati 0 ga teng.

5.  $A$ : « $4 < 7$ »,  $B$ : «Toshkent O'zbekistonning poytaxti» mulohazalari berilgan bo'lsa, ularning konyunksiyasini tuzing va rostlik qiymatini toping. Shuningdek,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \wedge \overline{B}$  mulohazalarini so'z orqali ifodalang.

6.  $A$ : « $26 : 2 + 11 = 28$ »,  $B$ : «3 - tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa,  $A \vee B$ ,  $B \vee A$ ,  $\overline{A \vee B}$ ,  $\overline{A \vee \overline{B}}$ ,  $A \vee \overline{B}$  larni so'z orqali ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.

7.  $C$ : «3 — toq son»,  $B$ : «7 soni 28 ning bo'luvchisi» mulohazalari berilgan bo'lsa, ularning implikasiyasini ifodalang va rostlik qiymatini toping.

8.  $A$ : «111201 sonining raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadi»  $B$ : «111201 soni 3 ga bo'linadi» mulohazalari berilgan. Ularning ekvivalensiyasini so'z yordamida ifodalang va rostlik qiymatini toping.

9.  $A$ : «9 — tub son»,  $B$ : «17 — toq son»,  $C$ : «18 soni 3 ga bo'linadi»,  $D$ : «24 tub son» sodda mulohazalar berilgan bo'lsa, quyidagi murakkab mulohazalarni so'z yordamida ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.

a)  $A \vee B$ ; b)  $A \wedge B$ ; d)  $A \vee A$ ; e)  $A \Rightarrow B$ ; f)  $C \Leftrightarrow D$ ;

g)  $A \wedge C \Rightarrow D$ ; h)  $A \wedge D \Rightarrow C$ ; i)  $A \vee D$ ; j)  $(A \wedge B \wedge C) \vee D$ .

10.  $A$ : «7 soni 56 ning bo'luvchisi»,  $B$ : «4 soni toq son»,  $C$ : «13 soni tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa, a)  $A \vee B \vee C$ ; b)  $A \wedge B \wedge C$ ; d)  $(A \vee B) \wedge C$ ; e)  $(A \wedge B) \vee C$ ; 0  $(\overline{A \vee B}) \wedge (\overline{A \vee \overline{C}})$  lar uchun rostlik jadvalini tuzing.

$A$ : « $7 < 12$ »,  $B$ : «Romb — to'rtburchak»,  $C$ : «2 — tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa,  $\overline{A \vee B} \neq \overline{A \wedge B}$ ,  $\overline{A \vee B} \neq \overline{A \wedge \overline{B}}$ ,  $\overline{A \vee C} = \overline{A \wedge C}$ ,  $\overline{A \wedge C} = \overline{A \wedge \overline{B}}$  larni isbotlang.

### Nazorat uchun savollar.

1. Kvantorning ta'rifini ayting.
2. Kvantorning qanday turlarini bilasiz.
3. Predikatlarni kvantorlar yordamida muloxazalarga aylantirig.

### 2.6-§. Teoremaning tuzilishi va turlari.

#### Matematik isbotlash usullari.

#### To'g'ri va noto'g'ri muhokamalar.

**1. Teoremaning tuzilishi haqida umumiy tushuncha.** O'rta maktab kursidan ma'lumki, matematikani o'rganishda teoremlar deb ataluvchi so'zlar bilan ishlashga to'g'ri keladi. Tushunchalarning asosiy bo'lmagan va ta'riflarga kiritilmagan xossalari, odatda isbotlanadi. Tushunchalarning isbot qilinadigan xossalari teoremlar deyiladi.

Ular har xil ko'rinishda ifodalanishidan qat'iy nazar, isbotlashni talab qiladigan fikrlardir. Shunday qilib, teorema -bu  $A$  xossadan  $B$  xossaning kelib chiqishi haqidagi fikr. Bu fikrning rostligi isbotlash yo'li bilan aniqlanadi.

Isbotlashni amalga oshirish uchun mulohaza, predikat va kvantorlarga asoslangan teoremlarni tuzilishini bilish lozim. Quyidagi teoremani qaraylik: "Agar nuqta kesmaning o'rta perpendikularida yotsa, u holda nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotadi."

Bunda "nuqta kesmaning o'rta perpenikularida yotadi" gapi teoremaning sharti, "nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotadi" gapi teoremaning xulosasi hisoblanadi.

Teoremaning sharti va xulosasi tekislikdagi barcha nuqtalarning  $R$  to'plamida aniqlangan predikatdan iborat. Bu predikatlarni mos ravishda  $A(x)$  va  $B(x)$  deb belgilaymiz. U holda teorema  $A(x) \Rightarrow B(x)$  implikasiya ko'rinishda belgilanib,

umumiylik kvantorini qo'llab quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$(\forall x \in P)(A(x) \Rightarrow B(x)).$$

Bundan ko'rinadiki, teorema tuzilishi uch qismdan iborat bo'ladi.

Teorema sharti:  $A(x)$  predikat tekislikdagi barcha nuqtalarning  $R$  to'plamida berilgan; teoremaning xulosasi:  $B(x)$  predikat tekislikdagi barcha nuqtalarning  $R$  to'plamida berilgan; tushuntirish qismida teoremda so'z yuritilayotgan ob'yektlar to'plami tasvirlanadi.

#### Bu qism simvolik tarzda $\forall x \in P$ ko'rinishda yoziladi.

Tushuntirish qismini teorema mazmunidan ham bilib olish mumkin. Ixtiyoriy teoremani so'zlar yordamida ifodalaganda "Agar ...bo'lsa, u holda ...bo'ladi" so'zlari ishlatiladi, formula quyidagi

$$(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x)) \quad (1)$$

ko'rinishda ifodalandi. Bu yerda  $X$  -  $A(x)$  va  $B(x)$  predikatlar berilgan to'plam. Agar teorema (1) ko'rinishda berilgan bo'lsa, uning sharti va xulosasi implikasiya tashkil etadi. Shu sababli teorema xulosasi  $B(x)$  predikat teoremaning  $A(x)$  sharti uchun yetarli sharti,  $A(x)$  shart esa teoremaning  $B(x)$  xulosasi uchun zaruriy shart deyiladi. Quyidagi teoremani qaraylik:

"Agar to'rtburchak romb bo'lsa, u holda uning diagonallari perpendikular bo'ladi".

Bu teoreмага (1) formulani tadbiiq etamiz.  $X$  - tekislikdagi barcha to'rtburchaklar to'plami,  $x$  tekislikdagi ixtiyoriy to'rtburchak,  $A(x)$ : " $x$  to'rtburchak romb",  $B(x)$ : " $x$  to'rtburchak diagonallari o'zaro perpendikular".

Zaruriy shart: "to'rtburchak romb bo'lishi uchun uning diagonallari perpendikular bo'lishi zarur."

Yetarli shart: "to'rtburchak diagonallari perpendikulyar bo'lishi uchun uning romb bo'lishi yetarli."

(1) teoreмага ko'ra bir nechta yangi teoremlarni hosil qilish mumkin. (1) teoremaning sharti va xulosasi o'rni almasha, berilgan teoreмага teskari teorema hosil bo'ladi.

$$(\forall x \in X)(B(x) \Rightarrow A(x)) \quad (2)$$

Masalan,

Teorema: "Agar natural son raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linsa, shu sonning o'zi ham 3 ga bo'linadi."

Teskari teorema: "Agar natural son 3 ga bo'linsa, uning raqamlarini yig'indisi ham 3 ga bo'linadi."

Teskari teorema ham to'g'ri bo'lgani uchun ikkita teoremani bittaga birlashtirish mumkin. "Natural son 3 ga bo'linishi uchun uning raqamlarini yig'indisi 3 ga bo'linishi zarur va yetarli." Bu holda teoremani  $(\forall x \in X)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$  ko'rinishda ifodalash mumkin.

Teskari teorema hamma vaqt ham to'g'ri bo'lmaydi.

Agar  $(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x))$  teoremaning sharti va xulosasi ularning inkorlari bilan almashtirilsa, berilgan teoreмага qarama-qarshi teorema hosil bo'ladi

$$(\forall x \in X)(\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}) \quad (3)$$

(1)- teoreмага qarama-qarshi teorema: "Agar nuqta kesmaning o'rti perpendikulyarida yotmasa, u holda nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotmaydi." va bu teorema rostdir.

$$(\forall x \in X)(\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}) \quad (4)$$

ko'rinishidagi teorema teskari teoreмага qarama-qarshi teorema deyiladi.

(2) teskari teoreмага qarama-qarshi teorema: "Agar natural son 3 ga bo'linmasa, uning raqamlari yig'indisi ham 3 ga bo'linmaydi." bu teorema rostdir. Endi teoremalarni isbotlash usullarini ko'rsatamiz.

**Matematik isbotlar. Deduktiv mulohazalar**

$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$  teoremani isbotlash- bu har doim  $A$  xossa bajarilganda,  $B$  xossa ham bajarilishini mantiqiy yo'l bilan ko'rsatishdir.

Matematikada isbotlash ko'rgazmali va tajribalarga biror-bir yo'naltirishsiz logika qoidalari bo'yicha o'tkaziladi.

Isbotlash asosida mulohaza-logik (mantiqiy) operatsiya yotadi. Bu operatsiya natijasida ma'nosiga ko'ra o'zaro bog'langan yoki bir necha jumladan yangi (berilgan bilimlarga nisbatan) bilimlarni o'z ichiga olgan jumla hosil bo'ladi. Masalan, boshlang'ich sinf o'quvchisining 6 va 7 sonlari orasidagi «kichik» munosabatini aniqlashdagi mulohazasini ko'raylik. O'quvchi bunday deydi: « $6 < 7$  chunki, 6 sanoqda 7 dan oldin keladi.»

Hosil qilingan bu mulohazada xulosa qanday faktlarga asoslanganini aniqlaylik. Asoslar ikkita: agar  $a$  soni sanoqda  $b$  sonidan oldin aytilsa, u holda  $a < b$  bo'ladi (ixtiyoriy  $a$  va  $b$  natural sonlar uchun).

6 sanoqda 7 dan oldin keladi.

Birinchi jumla umumiy xarakterga ega, chunki unda jumla ixtiyoriy  $a$  va  $b$  natural sonlar uchun o'rinli bo'lishini tasdiqlovchi umumiylik kvantori mavjud, shuning uchun umumiy asos deyiladi.

Ikkinchi jumla konkret 6 va 7 sonlariga tegishli, xususiy hollarni ifodalaydi, shunga ko'ra u xususiy asos deyiladi.

Ikki asosdan esa yangi mulohaza ( $6 < 7$ ) keltirib chiqariladi, u xulosa deyiladi.

Umuman har qanday mulohazada ham asos, ham xulosa bor. Asos va xulosa orasida ma'lum bog'lanish mavjud, bu bog'lanish yordamida ular mulohazani tashkil etadi.

Asos bilan xulosa orasidagi kelib chiqishlik munosabati o'rinli bo'ladigan mulohaza *deduktiv* mulohaza deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar mulohaza yordamida rost asosdan yolg'on xulosa chiqarish mumkin bo'lmasa, u holda bu mulohaza deduktiv bo'ladi. Aks holda deduktivmas hisoblanadi.

Mulohaza deduktiv bo'ladigan shartlarni aniqlaymiz. Buning uchun misollarga murojaat qilamiz.

**1-misol.** Ushbu mulohaza berilgan, unda: umumiy asos: «agar natural son 6 ga karrali bo'lsa u 3 ga karrali bo'ladi»; xulosa: «18 soni 3 ga karrali».

Bu mulohazada asos ham, xulosa ham rost. Uni deduktiv deb taxmin qilish mumkin.

**2-misol.** Ushbu mulohaza berilgan, unda:

*umumiy asos:* «Agar natural son 6 ga karrali bo'lsa, u holda u 3 ga karrali bo'ladi»;

*xususiy asos:* «39 soni 3 ga karrali»;

xulosa: «39 soni 6 ga karrali»;

berilgan mulohazada asoslar rost, xulosa esa yolg'on-39 soni 6 ga bo'linmaydi. Demak, bu mulohaza deduktiv emas, bundan kelib chiqadiki, asoslarning rostligi mulohazaning deduktivligini ta'minlovchi yagona shart emas ekan.

Endi keltirilgan mulohazalarni solishtiramiz. Buning uchun ularni simvolik shaklda tasvirlaymiz. Agar  $A$  orqali « $x$  natural son 6 ga karrali» jumlaning,  $B$  orqali esa «natural son 3 ga karrali» jumlaning belgilasak, u holda ikkala mulohaza uchun umumiy asos  $A \Rightarrow B$  ko'rinishga ega bo'ladi. 1-misolda ikkinchi asos xususiy asos, u  $A$  jumladan o'rniga 18 ni qo'yish bilan hosil qilinadi. Uni  $A(18)$  bilan belgilaymiz. U holda birinchi mulohazada xulosani  $B(18)$  bilan belgilash mumkin. Ikkinchi misol uchun: ikkinchi asos  $B(39)$  ko'rinishga, xulosa esa  $A(39)$  ko'rinishga ega bo'ladi.

Kiritilgan belgilashlarga ko'ra berilgan mulohazalarni bunday ko'rinishda tasvirlash mumkin:

|                           |                   |
|---------------------------|-------------------|
| 1-misol.                  | 2- misol.         |
| 1-asos: $A \Rightarrow B$ | $A \Rightarrow B$ |
| 2-asos: $A(18)$           | $B(39)$           |
| xulosa: $B(18)$           | $A(39)$           |

Birinchi misolda mulohaza  $(A \Rightarrow B)$  va  $(A(18) \Rightarrow B(18))$  sxema bo'yicha, ikkinchi misolda esa,  $(A \Rightarrow B)$  va  $(B(39) \Rightarrow A(39))$  sxema bo'yicha o'tkaziladi. Ko'rib turibmizki, mulohazalar sxemalari turlicha. Birinchi holda foydalanilgan sxema rost xulosaga, ikkinchi mulohaza sxemasi esa yolg'on xulosaga olib keladi. Mulohazalarni solishtirish ham asoslarning rostligi har doim ham xulosaning rost bo'lishiga kafolat bera olmasligini tasdiqlaydi. Endi deduktiv mulohazalarning eng sodda sxemalarini ko'rib chiqamiz.

Har bir deduktiv mulohazaning asosida xulosa chiqarishning ma'lum qoidasi yotadi. Biz shunday qoidalardan faqat uchtasini qaraymiz, ularni isbotsiz qabul qilamiz.

Xulosa qoidasi.  $((A \Rightarrow B \text{ va } A(a)) \Rightarrow B(a))$ , bu yerda  $A \Rightarrow B$  - umumiy asos,  $A(a)$ -xususiy asos,  $B(a)$ - xulosa.

Inkor qoidasi:  $(A \Rightarrow B \text{ va } \overline{B(a)}) \Rightarrow \overline{A(a)}$ .

Sillogizm qoidasi:  $(A \Rightarrow B \text{ va } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ .

Bu qoidalarni qo'llanishi mulohazaning deduktiv bo'lishiga kafolat beradi, ya'ni rost asoslardan rost xulosalar chiqarishga imkon beradi.

Mulohazalarning to'g'riligini tekshirish uchun berilgan qoidalardan qanday foydalanishni ko'rsatamiz.

Quyidagi mulohazalar deduktiv bo'ladimi yoki yo'qmi yuqoridagi sxemalarga asosan tekshiramiz.

3-misol. Agar natural son raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linsa, shu sonning o'zi ham 9 ga bo'linadi; son 9 ga bo'linmaydi, demak, son raqamlarining yig'indisi ham 9 ga bo'linmaydi.

4-misol. Agar natural son 8 ga karrali bo'lsa, u holda u 4 ga karrali bo'ladi, agar natural son 4 ga karrali bo'lsa, u holda u 2 ga karrali bo'ladi, demak son 8 ga karrali bo'lsa, u holda u 2 ga karrali bo'ladi.

5-misol. Agar sonning yozuvi nol bilan tugasa, u holda u 5 ga bo'linadi; son nol bilan tugamasa, demak u 5 ga bo'linmaydi.

Yechish: 1) Keltirilgan mulohazaning sxemasini aniqlaymiz.

Dastlab umumiy asosni «Agar natural son raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linsa, shu sonning o'zi ham 9 ga bo'linadi» shartli jumla ko'rinishida ifodalaymiz.  $A$  harfi bilan «Son raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linadi» jumlaning,  $B$  harfi bilan «Sonning o'zi ham 9 ga bo'linadi» jumlaning belgilaymiz. U holda umumiy asos  $A \Rightarrow B$  ko'rinishida xususiy asos  $\overline{B}$ , xulosa  $\overline{A}$  ko'rinishga ega bo'ladi, ya'ni  $(A \Rightarrow B \text{ va } \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}$  ko'rinishdagi sxemaga ega bo'lamiz. Bu qoida xulosaning rostligiga kafolat beruvchi inkor qoidasidir. Demak, mazkur mulohaza deduktivdir.

2) Agar «Natural son 8 ga karrali» jumlaning  $A$  orqali, «Natural son 4 ga karrali» jumlaning  $B$  orqali va «Natural son 2 ga karrali» jumlaning  $C$  orqali belgilasak, u holda mazkur mulohazaning sxemasi ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$(A \Rightarrow B \text{ va } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Bunday sxema sillogizm qoidasidir, u asos rost bo'lganda xulosaning ham rost bo'lishiga kafolat beradi.

3)  $A$  harfi bilan «Sonning yozuvi nol bilan tugaydi» jumlaning,  $B$  harfi bilan «Son 5 ga bo'linadi» jumlaning belgilaymiz. U holda berilgan mulohazaning sxemasi  $(A \Rightarrow B \text{ va } \overline{A}) \Rightarrow \overline{B}$  ko'rinishga ega bo'ladi. U yolg'on xulosaga olib keladi: masalan, 15 soni nol bilan tugamaydi, ammo u 5 ga bo'linadi. Mulohazaning bu sxemasi xulosaning rost bo'lishiga kafolat bera olmaydi, u rost xulosaga ham, yolg'on xulosaga ham olib kelishi mumkin.

Ba'zi hollarda rost xulosaga, ba'zi hollarda yolg'on xulosaga olib keluvchi sxema bo'yicha mulohaza deduktivmas mulohaza hisoblanadi. Demak, berilgan mulohaza deduktivmas mulohaza ekan.

Deduktivmas mulohazalarning ushbu ikkita sxemasini yodda saqlash masadga muvofiq:

$$1) (A \Rightarrow B \text{ va } B) \Rightarrow A; \quad 2) (A \Rightarrow B \text{ va } \overline{A}) \Rightarrow \overline{B};$$

Bu sxemalar, asoslar rost bo'lganda xulosalarning ham rost bo'lishiga kafolat bera olmaydi.

Teoremlarni isbotlashda to'liqsiz induksiya usulidan ham foydalaniladi.

To'liqsiz induksiya:

Biz 10 soni 5 ga bo'linadi, 20 soni 5 ga bo'linadi, 100 soni 5 ga bo'linadi, 1000 soni 5 ga bo'linadi degan mulohaza yordamida yozuvi 0 raqami bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo'linadi deb, shuningdek 15 soni 5 ga bo'linadi, 25 soni 5 ga bo'linadi, 35 soni 5 ga bo'linadi degan mulohaza yordamida yozuvi 5 raqami bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo'linadi deb xulosa chiqaramiz. Bu mulohazalarni umumlashtirib yozuvi 0 va 5 raqamlari bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo'linadi deb xulosa chiqaramiz.

Xuddi shuningdek,  $n^2 + n + 41$  ifodada  $n$  o'rniga 1,2,3,4 va hokazo sonlar qo'yilsa, u holda  $n=1$  da ifodaning qiymati tub son 43 ga teng,  $n=2$  da ifodaning qiymati tub son 47 ga teng,  $n=3$  da ifodaning qiymati tub son 53 ga teng ekanligini ko'rish mumkin.  $n$  ning  $n=3,4,\dots$  qiymatlarida ham

natija tub son bo'ladi. Bu natijalarga suyanan holda  $n$  ning ixtiyoriy *natural* qiymatlarida  $n^2 + n + 41$  ifodaning qiymati tub son bo'ladi deb xulosa chiqarish mumkin.

To'liqsiz induksiya bu shunday mulohazalarki, bunda ob'yektlar to'plamining ba'zi ob'yektlari ma'lum xossalarga ega bo'lishdan bu to'plamning barcha ob'yektlari ham shu xossalarga ega deb xulosa chiqarishga asoslanadi.

To'liqsiz induksiya natijasida olingan xulosalar rost ham, yolg'on ham bo'lishi mumkin. Masalan, yozuvi 5 raqami bilan tugaydigan sonning 5 ga bo'linishi haqidagi xulosa rost.  $n$  ning ixtiyoriy natural qiymatida  $n^2 + n + 41$  ifodaning qiymati tub son bo'ladi» degan xulosa esa yolg'on. Haqiqatan ham, agar  $n = 41$  bo'lsa, biz  $41^2 + 41 + 41 = 41^2 + 2 \cdot 41 = 41(41 + 2) = 41 \cdot 43$  ga ega bo'lamiz, bu esa  $n^2 + n + 41$  ifodaning qiymati murakkab son ekanligini ko'rsatadi.

Induktiv mulohazalar har doim to'g'ri xulosalarga olib kelavermasa ham, matematika va boshqa fanlarni o'rganishda ularning roli juda katta. Induktiv mulohazalar yuritish davomida konkret xususiy hollarda umumiylikni ko'ra bilish, o'z taxminlarini ayta olish malakalari shakllanadi.

Boshlang'ich sinflarda to'liqsiz induktiv xulosadan tashqari analogiya bo'yicha (taqqoslab) xulosa chiqarishdan keng foydalaniladi, bunda bilimlarni o'rganilgan ob'yektlarga nisbatan kam o'rganilgan ob'yektlarga ko'chirish amalga oshiriladi. Ko'chirish uchun bu ob'yektlarning o'xshashlik va farq qilish alomatlarini haqidagi bilimlar asos bo'lib xizmat qiladi. Analogiya bizni taxmin va farazlarga olib keladi, matematik induksiyaning rivojlantirish imkonini beradi.

Shuning bilan birga analogiya natijasida hosil qilingan xulosalar rost bo'lishi ham, yolg'on bo'lishi ham mumkin. Analogiya natijasida hosil qilingan xulosalar deduktiv metod bilan isbot qilinishi lozim.

Fikrlarning rostligini isbotlash usullari.

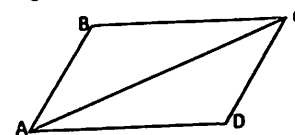
Deduktiv xulosa matematik isbotlashlarning asosiy usulidir. Bunda matematik isbot deduktiv mulohazalarning shunday zanjirini ifodalaydiki, ulardan har birining xulosasi, oxirgisidan tashqari, undan keyin keluvchi mulohazalardan biriga asos bo'ladi.

6 < 7 davoning rostligining isboti bitta qadamni o'z ichiga olgan bitta mulohazadan tashkil topgan.

Ikki va undan ortiq qadamdan tashkil topgan mulohazaning isbotiga doir misollar ko'rib chiqamiz.

Misol. Har bir diagonal parallelogramni ikkita teng uchburchakka ajratishini isbotlang.

Isboti: 1) ixtiyoriy parallelogramning qarama-qarshi tomonlari teng; ABCD - parallelogram (1-rasm), demak  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ . Mulohaza xulosa qoidasi asosida olib borildi, demak, olingan xulosa rost



2.8-rasm

Agar bir uchburchakning uchta tomoni mos ravishda ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga teng bo'lsa, u holda bunday uchburchaklar teng bo'ladi:  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ , tomon umumiy. Demak,  $ABC$  va uchburchaklar teng.

Bu holda ham mulohaza xulosa qonuni asosida olib borildi, demak xulosa rost. Teorema isbotlandi.

Teoremaning isboti hamma asoslarni ko'rsatish bilan to'la mantiqiy formada olib borilgan mulohazalarning ikki qadamdan tashkil topganini eslatib o'tamiz. Biroq bunday isbotlash uzundan-uzoq shuning uchun odatda ularni mulohazalar sxemasidagi alohida asoslarni tushirib qoldirish bilan ixchamlangan qisqartirilgan formada olib boriladi.

Masalan, biz o'tkazgan isbotning ixchamlangan shakli bunday bo'lishi mumkin:  $ABC$  va  $ACD$  uchburchaklarda  $AB$  va  $CD$ ,  $AD$  va  $BC$  tomonlar teng, chunki ular parallelogramning qarama-qarshi tomonlari,  $AC$  tomon ular uchun umumiy, demak,  $ABC$  va  $ACD$  uchburchaklar teng.

#### Nazorat savollari.

1. Teoremaning tuzilishi haqida umumiy tushuncha deganda nima tushunasiz?
2. Teoremaning qanday turlari bor?
3. Matematik isbotlarga misol keltiring.
4. To'liqsiz induksiya misol keltiring.
5. To'la matematik induksiya deganda nima tushunasiz?
6. Bevosita va bilvosita isbotlash usullarining farqi.

### 3-BOB. ALGEBRAIK SISTEMALAR

#### 3.1-§. Algebraik operatsiya tushunchasi va uning xossalari: kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik va qisqaruvchanlik.

1. Maktab matematika kursida sonlar ustida qo'shish, ko'paytirish, bo'lish, ayirish kabi amallar o'rganiladi. Bu amallar bir qator xossalarga ega. Masalan, musbat butun sonlar to'plamida sonlarni qo'shish va ko'paytirish amali bajariladi, chunki bu amallarni bajarishdan chiqqan natija son musbat butun son bo'ladi. Shuningdek qo'shish va ko'paytirishda sonlarni o'rni almashishi bilan natija o'zgarmaydi.

$$8+3=11, \quad 3+8=11, \quad 8+3=3+8$$

$$6 \times 7 = 42, \quad 7 \times 6 = 42, \quad 6 \times 7 = 7 \times 6$$

Musbat butun sonlar to'plamida ayirish va bo'lish amallari hamma vaqt bajarilmaydi, chunki sonlarni ayirish natijasida ba'zida manfiy, bo'lish natijasida kasr son hosil bo'ladi. Shuningdek ushbu to'plamda sonlarni ayirish va bo'lishda sonlarni o'rni almashtirish mumkin emas.

$$9-6=3; \quad 6-9=-3; \quad 3 \neq -3$$

$$8:2=4; \quad 2:8=0,25; \quad 4 \neq 0,25;$$

Demak musbat butun sonlar to'plamida sonlarni qo'shish va ko'paytirish o'rin almashtirish xossasiga bo'ysinadi, ayirish va bo'lish esa ushbu xossaga bo'ysunmaydi.

Amallar va ularning xossalari faqat sonlar to'plami uchunгина emas, balki boshqa matematik ob'yektlar uchun ham qarash mumkin. Masalan, to'plamlar, mulohazalar, almashtirishlar. to'plamlar ustida to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi amallari bajariladi va bu amallar o'rin almashtirish xossasiga bo'ysinadi.

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A$$

Sonlar, to'plamlar, mulohazalar va shu kabi matematik ob'yektlar ustida amallar bajarish jarayonida birorta to'plamning ixtiyoriy ikkita elementiga shu to'plamning uchinchi bir elementi mos qo'yiladi. Sonlar va matematik ob'yektlar ustida bajariladigan amallar algebraik amal deb yuritiladi.

1-ta'rif. Berilgan  $X$  to'plamning ixtiyoriy elementlaridan tuzilgan tartiblangan  $(x, y)$  juftlikka, shu to'plamning uchinchi bir  $z$  elementini mos qo'yuvchi akslantirish  $(x, y) \rightarrow z$  mavjud bo'lsa,  $X$  to'plamda algebraik operatsiya berilgan deyiladi.

$X$  To'plamida  $X \times X$  dekart ko'paytma berilgan bo'lsa,  $(x, y)$  juftlik  $X \times X$  dekart ko'paytmadan,  $z$  esa  $X$  To'plamidan olingan bo'lib, dekart ko'paytma  $X \times X \rightarrow X$  akslanadi.

$X$  Demak,  $X$  to'plamda berilgan  $X \times X \rightarrow X$  akslantirish algebraik operatsiya bo'lib,  $x \in X$  element operatsiyaning birinchi,  $y \in X$  element operatsiyaning ikkinchi komponenti,  $z$  esa uning natijasi deyiladi.

Biz yuqorida  $X \times X$  ko'rinishdagi dekart ko'paytmani  $X$  to'plamga akslantirishni ko'rdik, ya'ni  $X \times X$  dan olingan  $(x, y)$  elementlar juftligiga bitta  $z$  elementni mos qo'ydik. Bunday akslantirish vositasida berilgan algebraik operatsiyaga binar («bis» lotincha – «ikki» ma'nosini bildiradi) algebraik amal deyiladi. Matematikada ko'p hollarda

$$X \times X \times X \rightarrow X; \quad \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n \rightarrow X$$

ko'rinishdagi dekart ko'paytmani  $X$  to'plamiga akslantirish bilan berilgan algebraik operatsiyalar ham mavjud.

$$X \rightarrow X \quad \text{unar (lotincha «unus»-bir)}$$

$$X \times X \rightarrow X \quad \text{binar}$$

$$X \times X \times X \rightarrow X \quad \text{ternar}$$

.....

$$\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n \rightarrow X \quad n\text{-nar operatsiya deb yuritiladi.}$$

Algebraik operatsiyalarga misollar:

1-misol. Natural sonlar to'plamida qo'shish amali algebraik operatsiyadir, chunki  $x \in N, y \in N$  uchun  $x+y=z, z \in N$  hamma vaqt topiladi.

2-misol. Natural sonlar to'plamida ayirish amali algebraik amal bo'la olmaydi, chunki ixtiyoriy ikkita sonni ayirishdan chiqqan natija hamma vaqt natural son bo'lmaydi.

3-misol. Juft sonlar to'plamida qo'shish amali algebraik operatsiyadir, chunki ikki juft sonning yig'indisi yana juft son bo'ladi. Toq sonlar to'plamida qo'shish amali algebraik operatsiya bo'la olmaydi, chunki natija juft son chiqadi.

$$13+13=26; \quad 15+17=32. \quad (2n+1)+(2n+1)=4n+2=2(2n+1) - \text{juft son.}$$

4-misol. Butun sonlar to'plami  $Z$  da qo'shish, ayirish, ko'paytirish amali algebraik operatsiyadir. Bo'lish amali esa algebraik amal bo'la olmaydi, chunki ba'zi bir hollarda bo'lish natijasida kasr son chiqadi.

Natural sonlar to'plamida ayirish amali  $a, b \in N, a > b$  hollarda bajariladi  $a-b > 0$ ;  $a-b$  ayirma musbat butun son bo'ladi. Yuqoridagi...

shartlarga mos qo'yilgan sonlar to'plami natural sonlar to'plamining qism to'plami bo'ladi, ya'ni  $a > b$  shartga bo'ysinuvchi  $a$  va  $b$  sonlar jufti akslantirilgan  $a - b = c$  sonlardan iborat to'plam natural sonlar to'plamiga tegishli bo'ladi. Natural sonlar to'plamida bo'lish amaliga nisbatan ham ushbu mulohazalarni yuritish mumkin.

Shunga qaramasdan natural sonlar to'plamida ayirish va bo'lish amali algebraik amal bo'la olmaydi. Bunga o'xshagan hollar uchun algebraik amal tushunchasiga kengroq nuqtai nazardan yondashish mumkin.

Binar algebraik operatsiya ta'rifi:

Bo'sh bo'lmagan  $S$  to'plamdagi binar algebraik operatsiya  $*$  deb:  $S \times S \rightarrow S$  akslantirishga aytiladi va  $s * s'$  yoki  $*(s, s')$  ko'rinishda belgilanadi. Ko'p sonly misollar keltirish mumkin:

- $Z, Q, R, C$  to'plamlarda "+" va "x" operatsiyalari;
- $I$  - irratsional sonlar to'plamida "+" va "x" operatsiyalari binary algebraik operatsiya bola olmaydi;
- $R$  da ayirish va bo'lish amallari binar algebraik operatsiya bo'ladi;
- $A$  to'plamva uning barcha qism to'plamlari berilgan bo'lsin. Qism to'plamlarning kesishmasi " $\cap$ ", birlashmasi, ayirmasi " $\setminus$ " va simmetrik ayirmasi " $\Delta$ " amallari binar algebraik operatsiya bo'ladi;
- $S$  to'plamdagi barcha o'rin almashtirishlar ham binar algebraik operatsiya bo'ladi;

To'plamning algebraik operatsiyaga nisbatan yopiqligi haqida. Bo'sh bo'lmagan  $S$  to'plamda binar algebraik operatsiya  $*$  aniqlangan va  $\emptyset = T \subseteq S$  bo'lsin.  $T * algebraik operatsiyaga nisbatan yopiq deyiladi, agar  $t * t' \in T$  va  $t, t' \in T$  bo'lsa.$

Bu yerda qism to'plamning yopiqligi haqida so'z yuritilayotganiga e'tibor qarating.

Misollar:

- $R$  haqiqiy sonlar to'plami bo'lsa, uning qismlari  $Z$  va  $Q$  qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq bo'ladi.
- Manfiy haqiqiy sonlar to'plami ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq emas.
- $Z[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} | a, b \in Z\}$  to'plam berilgan bo'lsin. Uning qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq bo'lishini oson ko'rsatish mumkin. Masalan ko'paytirish uchun:  $a, b, c, d \in Z$ , bo'lsa,  $(a + b\sqrt{5}) \cdot (c + d\sqrt{5}) = (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}$  bo'ladi.

«Qisman algebraik operatsiya» tushunchasini kiritamiz.

2-ta'rif. Agar  $X \times X$  dekart ko'paytmaning  $A$  qism to'plamini  $X$  to'plamga akslantirishi berilgan bo'lsa, bu akslantirishga  $X$  to'plamda qisman algebraik amal deyiladi.

$$A \subset X \times X, A \rightarrow X, \text{ ya'ni } (x, y) \rightarrow z, (x, y) \in A, z \in X.$$

$z \in X$  elementga mos keluvchi  $(x, y)$  juftlar to'plami  $A$  qisman algebraik amalning aniqlanish sohasi deyiladi.

Demak, natural sonlar to'plamida ayirish va bo'lish, butun sonlar to'plamida darajaga ko'tarish qisman algebraik operatsiya hisoblanadi. Qisman algebraik operatsiya bo'sh ham bo'lishi mumkin, ya'ni  $(x, y)$  juftlikka bitta ham  $z$  element mos kelmasligi mumkin.

Biror  $X$  to'plamda algebraik amal berilgan bo'lsin va  $A$  to'plam  $X$  ning qism to'plami bo'lsin.  $A$  qism to'plamga tegishli elementlardan tuzilgan  $(x, y)$  juftlikni qaraylik  $(x, y), x, y \in A \subset X$ .  $(x, y)$  juftlikka  $X$  to'plamidan  $z$  element mos kelsin. Umuman olganda, bu element  $A$  to'plamga tegishli bo'lishi ham tegishli bo'lmasligi ham mumkin. Agar  $(x, y) \in A$  juftlikka mos keluvchi  $z$  element ham  $A$  ga tegishli bo'lsa,  $A$  qism to'plam berilgan algebraik amalga nisbatan yopiq deyiladi.

Natural sonlar to'plamining qismi bo'lgan juft sonlar to'plami qo'shish va ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq to'plamdir.

Agar  $A$  qism to'plam birorta algebraik amalga nisbatan yopiq bo'lsa, faqat shu qism to'plamdagina amalni ko'rish bilan,  $A$  to'plamda bu amal algebraik amal bo'ladi.

Yuqorida ko'rgan algebraik amallarning har biri alohida simvol bilan, masalan, qo'shish amali «+», ayirish amali «-», bo'lish amali «:», ko'paytirish amali «\*», to'plamlarning birlashmasi « $\cup$ », to'plam larning kesishmasi « $\cap$ » va shu kabi belgilanadi va ikkita komponenti orasiga qo'yiladi:  $a+b; c-d; A \cap B; A \cup B$  Bundan tashqari ikkita ob'yekt orasidagi munosabatlarni izohlovchi simvollar ham mavjud:  $a \parallel b$  - ikki  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarning parallelligini,  $a \perp b$  - ikki  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligini va hokazolarni ifoda qiladi.

Ikki ob'yekt orasidagi munosabatlarni izohlovchi simvollar bilan bog'lanish natijasida uchinchi element haqida so'z yuritilmaydi, algebraik amal bilan bog'langan ikkita elementdan amal natijasi sifatida uchinchi bir element hosil bo'ladi. Algebraik amallar umumiy xossalarini o'rganamiz.

Algebraik va qisman algebraik operatsiyalarni quyidagi shartli belgilar  $*, T, \circ$  bilan belgilaymiz. Boshqacha aytganda ikkita  $a$  va  $b$

komponentalarga uchinchi komponentani mos qo'yish, bir algebraik *operatsiya* uchun  $a * b = c$ , ikkinchi algebraik *operatsiya* uchun  $a \circ b = c$  ko'rinishda bo'ladi va hokazo.

## 2. Algebraik amallarning xossalari.

Algebraik amallar kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik, qisqaruvchanlik, teskaruvchanlik, neytral va yutuvchi elementlarning mavjudligi va simmetrik elementning mavjudlik xossalariga ega.

### a) Assotsiativlik xossasi.

Algebraik amallar xossalari ayniy shakl almashtirish, ayniy almashtirishlar bilan bevosita bog'liqdir. Ayniy almashtirishlarni bitta algebraik amalga nisbatan qarab chiqaylik va bu algebraik amalni (\*) ko'rinishida belgilaylik.

Ifodalar ustida ayniy shakl almashtirishni bajarish jarayonida algebraik amallarning assotsiativlik xossasidan foydalaniladi.  $A$  to'plamda \* algebraik amal berilgan bo'lsin.

1-ta'rif.  $A$  to'plamdan olingan ixtiyoriy  $a, b, c$  elementlar uchun  $a * (b * c) = (a * b) * c$  munosabat o'rinli bo'lsa \* algebraik amal to'plamda assotsiativlik xossasiga ega deyiladi.

Misolalar keltiramiz.

1) Natural sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari assotsiativlik xossasiga ega.

$$4 + (8 + 7) = (4 + 8) + 7$$

$$6 \cdot (5 \cdot 3) = (6 \cdot 5) \cdot 3$$

2) Qo'shish va ko'paytirish amallari ixtiyoriy sonlar to'plamida assotsiativlik xossasiga ega.

3) to'plamlarni kesishmasi va birlashmasi assotsiativlik xossasiga bo'ysinadi.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

4) Butun sonlar to'plamida ayirish amali assotsiativlik xossasiga bo'ysunmaydi.

$$7 - (8 - 5) \neq (7 - 8) - 5$$

5) Musbat butun sonlar to'plamida bo'lish amali assotsiativ emas.

$$12 : (6 : 3) \neq (12 : 6) : 2$$

$$c \neq 1 \quad a : (b : c) \neq (a : b) : c$$

Agar berilgan to'plamda \* algebraik amal uchun assotsiativlik xossasi o'rinli bo'lsa,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in A$  elementlardan va \* algebraik amal

vositasida qavslar qo'yish orqali tuzilgan turli ifodalar bir xil son qiymatiga ega bo'ladi. Shuning uchun bir qancha sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallarini bajarish jarayonida qavslar ishlatilmaydi.

### b) Kommutativlik xossasi.

Biz yuqorida assotsiativlik xossasi o'rinli bo'lgan \* algebraik amal vositasida hosil qilingan ifodalarda qavs ishlatmaslik mumkin ekanligini ko'rdik.

Ammo bunday ifodalarda komponentalarning o'rini almashtirish umuman olganda mumkin emas, shuning uchun  $a * b$  ifoda bilan  $b * a$  ifodalarni ayni bir xil ifodalar deb bo'lmaydi.

Bu ifodalar ayniy ifodalar bo'lishi uchun \* algebraik amal assotsiativlik va kommutativlik xossalariga bo'ysinishi lozim.

2-ta'rif. Berilgan  $A$  to'plamning ixtiyoriy ikkita  $a$  va  $b$  elementlari uchun \* algebraik amalda  $a * b = b * a$  tenglik bajarilsa, \* algebraik amal kommutativ deyiladi.

Kommutativlik xossasiga ega bo'lgan \* algebraik amal vositasida hosil bo'lgan  $a * b$  ifoda bilan  $b * a$  ifoda bir xil natijaga ega bo'ladi, bu yerda  $a, b \in A$ . Natural sonlar to'plamida qo'shish amali uchun kommutativlik amali o'rinli.

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a + b = b + a$$

Natural sonlar to'plamida ko'paytirish amali uchun kommutativlik xossasi o'rinli.

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Haqiqiy sonlar to'plami  $R$  da qo'shish va ko'paytirish amallari kommutativdir.

Butun sonlar to'plami  $Z$  da ayirish amali kommutativlik xossasiga bo'ysinmaydi.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \neq b; \quad a - b \neq b - a$$

Musbat ratsional sonlar to'plami  $Q_+$  da bo'lish amali uchun kommutativlik xossasi o'rinli emas.

$$\forall a, b \in Q_+ \quad a \neq b; \quad a : b \neq b : a$$

### c) Distributivlik xossasi.

Yuqorida bitta algebraik amalga nisbatan assotsiativlik va kommutativlik xossalari ko'rildi, ushbu xossalarni o'rinli bo'lgan algebraik amalni o'zida saqlovchi ifodalarda shakl almashtirishlar amalga oshirildi. Endi esa ikkita algebraik amal bilan bog'langan ifodalarni ko'ramiz.

Faraz qilaylik, bizga  $X$  to'plam va unda  $*, \circ$  -algebraik amallar berilgan bo'lsin.

**3-ta'rif.**  $X$  to'plamidan olingan ixtiyoriy  $a, b, c$  elementlar uchun

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$$

munosabat o'rinli bo'lsa,  $\circ$  algebraik amal  $*$  amalga nisbatan chap tomondan distributivlikka ega deyiladi.

**4-ta'rif.**  $X$  to'plamidan olingan ixtiyoriy  $a, b, c$  elementlar uchun

$$(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a)$$

munosabat o'rinli bo'lsa,  $\circ$  algebraik amal  $*$  amalga nisbatan o'ng tomondan distributivlikka ega deyiladi.

**5-ta'rif.**  $X$  to'plamidan olingan ixtiyoriy  $a, b, c$  elementlar uchun

$$\begin{cases} a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c) \\ (b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a) \end{cases}$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa  $\circ$  algebraik amal  $*$  amalga nisbatan distributivlik xossasiga bo'ysinadi deyiladi.

*Misollar.*

1) Natural sonlar to'plamida ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv, chunki

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a(b+c) = ab+ac \\ (b+c)a = ba+ca \end{cases}$$

2) Butun sonlar to'plamida ko'paytirish amali ayirish amaliga nisbatan distributivdir, chunki

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} a(b-c) = ab-ac \\ (b-c)a = ba-ca \end{cases}$$

3) Qo'shish amali ko'paytirish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga bo'ysinmaydi.

$$a + bc \neq (a+b) \cdot (a+c)$$

$$3 + 4 \cdot 7 \neq (3+4) \cdot (3+7)$$

4) to'plamlar kesishmasi  $\cap$  to'plamlar birlashmasiga nisbatan distributivlik xossasiga bo'ysinadi.

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) \end{cases}$$

5) to'plamlar birlashmasi  $\cup$  to'plamlar kesishmasiga nisbatan distributivlik xossasiga bo'ysinadi.

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A) \end{cases}$$

6) Ratsional sonlar to'plamida bo'lish amali qo'shish amaliga nisbatan faqat o'ng tomondan distributiv, chunki

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad (a+b):c = a:c + b:c.$$

**Natija.** Ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'lganidan

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$$

o'rinli bo'ladi. Yana bir marta ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivlik qonunidan foydalanish bilan

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

kelib chiqadi.

Agar berilgan  $*, \circ$  ikkita algebraik amallardan birinchisi, ya'ni  $*$  amali assotsiativlik xossasiga va  $\circ$  amali  $*$  amalga nisbatan distributivlik xossasiga bo'ysinsa, bu algebraik amallarga nisbatan quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (a \circ d) * (b \circ c) * (b \circ d)$$

**Mustaqil yechish uchun misollar.**

1. Natural sonlar to'plamida kommutativlik va assotsiativlik xossalari qaysi amallar bo'ysunadi

2. Quyidagi amallarning qaysi biri uchun butun sonlar to'plamida assotsiativlik xossasi o'rinli bo'ladi.

3. Butun sonlar to'plamida kommutativlik xossasi o'rinli bo'lgan amallarni ko'rsating.

4. Butun sonlar to'plamida ayirish amali qisqaruvchanlik xossasiga bo'ysunadimi?

5. Natural sonlar to'plamida neytral element mavjudmi?

6. Berilgan amalga nisbatan teskari amal deb qanday amalga aytiladi.

7. Ratsional sonlar to'plamida ko'paytirish amaliga teskari amal mavjudmi?

8. Qachon amal teskarilanuvchanlik xossasiga ega bo'ladi deyiladi.

a)  $\mathbb{N}$  sonlar to'plamida qaysi amallar algebrayik operatsiya bo'ladi?

b)  $\mathbb{Z}$  sonlar to'plamida qaysi amallar algebrayik operatsiya bo'ladi?

c)  $\mathbb{Q}$  sonlar to'plamida qaysi amallar algebrayik operatsiya bo'ladi?

d)  $\mathbb{R}$  sonlar to'plamida qaysi amallar algebrayik operatsiya bo'ladi?

e) Qaysi algebrayik amallarda kommutativ, assotsiativ qonunlar o'rinli bo'ladi?

f)  $\{-1,0,1\}$  to'plamda kommutativ, assotsiativ qonunlar o'rinli bo'ladi?

g)  $\{1,2,3,4,5,6,7\}$  To'plamda qo'shishning ko'paytirishga nisbatan va ko'paytirishning qo'shishga nisbatan qonunlarining qaysi biri o'rinli?

h)  $\{1,9,3,5,7\}$  to'plamda kommutativ, assotsiativ qonunlar o'rinli bo'ladi?

i)  $\{-1,-9,-3,-5,-7\}$  to'plamda kommutativ, assotsiativ qonunlar o'rinli bo'ladi?

j)  $Q$  to'plamda kommutativ, assotsiativ qonunlar o'rinli bo'ladi?

### Algebraik operatsiyaga savol va topshiriqlar

1. Quyidagi to'plamlarning qaysilari qo'shish ayirish, ko'paytirish va bo'lish operatsiyalariga nisbatan yopiq to'plam hisoblanadi: a) natural sonlar; b) toq sonlar; d) musbat ratsional sonlar; e)  $\{0\}$ ; f)  $\{0; 1\}$ ; g)  $\{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$ ?

2. Qaysi  $(*, X)$  juftliklar uchun  $X$  da algebraik operatsiya bo'ladi, degan mulohaza tog'riligini aniqlang:

a)  $*$  — qo'shish  $X = \mathbb{Z}_-$ ; b)  $*$  — bo'lish  $X = \mathbb{R}_+$ ;

d)  $*$  — bo'lish  $X = \mathbb{R}_-$ ; e)  $*$  — ko'paytirish  $X = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$ ;

j)  $*$  — EKUB,  $X = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ ; g)  $*$  — EKUK,  $X = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$ .

3. Barcha butun sonlar to'plami  $Z$  da assotsiativ yoki kommutativ bo'ladigan algebraik operatsiyalarni aniqlang:

a) qo'shish; b) ayirish; d) ko'paytirish; e)  $a * b = 3a - 2b$ .

4. Barcha natural sonlar to'plami  $N$  da assotsiativ yoki kommutativ operatsiyalarni aniqlang:

a) qo'shish; b) ayirish; d) ko'paytirish; e) bo'lish; f)  $B(a; b)$   
g)  $K(a; b)$ ,  $a * b = a^b$ .

5.  $X$  to'plamda  $*$  operatsiya  $0$  operatsiyaga nisbatan distributiv, degan mulohaza qaysi  $(*, 0)$  juftliklar uchun to'g'ri ekanligini aniqlang:

a)  $R$  da  $*$  — bo'lish,  $0$  — qo'shish;

b)  $R$  da  $*$  — qo'shish,  $0$  — ko'paytirish;

d)  $*$  — to'plamlar birlashmasi,  $0$  — kesishmasi;

e)  $Z$  da  $*$  — yig'indi,  $0$  — ayirma;

f)  $0$  — mulohazalar dizyunksiyasi.  $0$  — konyunksiyasi.

6. To'plamlar kesishmasining yutuvchi elementi bormi, simmetrik yoki neytral elementlari-chi?

7. Butun sonlar to'plamida qo'shishga nisbatan  $8$  ning,  $-7$  ning simmetrik elementlarini ayting.

8. Ratsional sonlar to'plami qo'shishga nisbatan gruppaga tashkil qilishini ko'rsating.

9.  $X$  to'plamning barcha qism to'plamlari to'plami to'plamlar kesishmasiga nisbatan gruppaga tashkil qiladimi?

10. Quyidagi to'plamlar halqa bo'ladimi?

a)  $5$  ga karrali butun sonlar to'plami;

b) toq natural sonlar to'plami;

d) barcha haqiqiy sonlar to'plami;

e)  $a + b\sqrt{2}$  ko'rinishdagi sonlar to'plami; bu yerda  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bu to'plamlarning qaysilari maydon bo'la oladi?

### Nazorat uchun savollar.

1. Algebraik operatsiyaga ta'rif bering.

2. Qisman algebraik operatsiyani tushuntiring.

3. Algebraik operatsiyaning assotsiativlik xossasini ayting.

4. Algebraik operatsiyaning kommutativlik xossasini ayting.

5. Algebraik operatsiyaning distributivlik xossasini ayting.

### 3.2-§. Neytral, yutuvchi va simmetrik elementlar

3. Qisqaruvchanlik xossasi

a) Natural sonlar to'plami  $N$  da berilgan ixtiyoriy  $a, x, y$  elementlar uchun

$$\left. \begin{aligned} a+x &= a+y \rightarrow x=y \\ ax &= ay \rightarrow x=y \end{aligned} \right\}$$

bajariladi.

a) Butun sonlar to'plami  $Z$  da  $a=0$  bo'lgan holda  $0+x=0+y$  munosabatdan  $x=y$  kelib chiqadi. Ko'paytirishga nisbatan esa  $0x=0y$  munosabat  $x$  va  $y$  qat'iy son qiymatlarini aniqlash imkoniyatini bermaydi.

6-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan  $A$  to'plamining ixtiyoriy  $x, y$  va  $a$  elementlari uchun, shu to'plamda aniqlangan  $*$  algebraik amalga nisbatan

$$\begin{cases} a*x=a*y \\ x*a=y*a \end{cases}$$

munosabatlar o'rinligidan  $x=y$  kelib chiqsa,  $A$  to'plamida  $*$  algebraik amal qisqaruvchanlik xossasiga bo'ysinadi deyiladi.

Agar  $a*x=a*y$  dan  $x=y$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $A$  to'plam elementlari uchun  $*$  amalga nisbatan chapdan qisqaruvchanlik xossasi o'rinli bo'ladi.

Agar  $x*a=y*a$  dan  $x=y$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $A$  to'plam elementlari uchun  $*$  amalga nisbatan o'ngdan qisqaruvchanlik xossasi o'rinli bo'ladi.

Bir vaqtning o'zida chapdan va o'ngdan qisqaruvchanlik xossasi o'rinli bo'lsagina  $A$  to'plamda qisqaruvchanlik xossasi o'rinli deyiladi.

## 2. Teskaruvchanlik xossasi.

Ma'lumki, ko'paytirish amaliga bo'lish amali, qo'shish amaliga ayirish amallari teskari amallardir.

$$a+x=b \Rightarrow x=b-a$$

$$a \cdot x=b \Rightarrow x=b:a$$

kelib chiqadi.

Qo'shish va ko'paytirish amallari natural sonlar to'plamida algebraik amal bo'lsa ayirish va bo'lish amallari qisman algebraik amaldir, chunki ayirish faqat  $a>b$  bo'lgan hollarda, bo'lish esa  $a$  soni  $b$  soniga qoldiqsiz bo'lingan hollardagina bajariladi.

Endi esa qisqaruvchan va kommutativ bo'lgan har qanday  $*$  algebraik amalga teskari bo'lgan  $T$  qisman algebraik amalni aniqlaymiz hamda ularning umumiy xossalarni keltirib chiqaramiz. Ana shu umumiy xossalardan esa amallarning xususiy holda ayirish va bo'lish amalining xossalari kelib chiqadi.

Faraz qilaylik,  $A$  to'plami va unda qisqaruvchan va kommutativ bo'lgan  $*$  algebraik amal berilgan bo'lsin.  $A$  to'plamga tegishli va  $b*x=a$  shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $(a,b)$  juftliklarni  $Y$  bilan belgilaylik. Har bir  $(a,b)$  juftlikda  $x$  bir qiymatli aniqlangandir.

Faraz qilaylik,  $x$  bir qiymatli aniqlanmagan, ya'ni  $b*x=a$ ;  $b*y=a$  bo'lsin, u holda  $*$  algebraik amalning qisqaruvchanlik xossasidan  $x=y$  ekanligi kelib chiqadi.

Demak,  $Y$  dan olingan har bir  $(a,b)$  juftga  $A$  to'plamidan bitta  $x$  ni mos qo'yish orqali  $*$  algebraik amalga  $A$  to'plamida teskari bo'lgan  $T$  qisman algebraik amalni aniqlandi.

**7-ta'rif.** Agar  $x \in A$ ,  $(a,b) \in Y$ ,  $Y \subset A$  uchun  $x=aTb$  amal faqat va faqat  $b*x=a$  o'rinli bo'lganda bajarilsa,  $T$  amalga  $*$  amaliga teskari bo'lgan algebraik amal deyiladi.

**3. Neytral element.** Butun sonlar to'plami  $Z$  da berilgan ixtiyoriy songa  $0$  sonini qo'shish, ixtiyoriy sonni  $1$  soniga ko'paytirish bilan natija o'zgarmasligi bizga ma'lum.

Agar  $a+0=a$ ;  $a \cdot 1=a$  tenglik o'rinli bo'lsa qo'shish amaliga nisbatan  $0$  soni, ko'paytirish amaliga nisbatan  $1$  soni neytral element hisoblanadi.

**8-ta'rif.**  $A$  to'plamda o'rinli bo'lgan  $*$  algebraik amalga nisbatan  $a, e \in A$  elementlar uchun  $a*e=e*a=a$  tenglik o'rinli bo'lsa, shu to'plamning  $e$  elementi neytral element deyiladi.

**Teorema.** Berilgan  $A$  to'plamda faqat bitta neytral element mavjud bo'ladi. **Isbot.** Aytaylik  $A$  to'plamda  $e$  dan tashqari  $e_1$  ham neytral element bo'lsin, u holda  $a \in A$  uchun  $e_1*a=a*e_1=a$  bajarilishi kerak.  $a=e$  bo'lsa,  $e_1*e=e*e_1=e$ , shu bilan birga  $e*e_1=e_1*e=e$ . Bu munosabatlar bajarilishidan  $e=e_1$  ekanligi kelib chiqadi.

Har qanday to'plam ham neytral elementga ega bo'lavermaydi. Natural sonlar to'plamida qo'shishga nisbatan neytral element mavjud emas, chunki  $a+e=a$  tenglikni o'rinli qiladigan  $e$  soni  $N$  da mavjud emas.

Agar  $A$  to'plamda  $*$  amaliga nisbatan neytral  $e$  element mavjud bo'lsa,  $*$  algebraik amal bilan berilgan har qanday ifodada neytral  $e$  elementni  $*$  algebraik amal bilan birgalikda tashlab yuborish mumkin bo'ladi.

$$21*e*16*e*3=21+0+16+0+3=21+16+3$$

## 4. Yutuvchi elementning mavjudlik xossasi.

**9-ta'rif.** Agar  $A$  to'plamda  $\exists x \in A$  topilsaki,  $\forall a \in A$  uchun  $a*x=x*a=x$  tenglik bajarilsa, berilgan  $*$  algebraik amalga nisbatan  $x$  element yutuvchi element deyiladi.

Butun sonlar to'plami  $Z$  da har qanday sonni  $0$  ga ko'paytirish natijasida  $0$  soni hosil bo'ladi  $a \cdot 0=0$ .

Demak, ko'paytirish amaliga nisbatan  $0$  element yutuvchi element hisoblanar ekan. Shuningdek  $x$  element  $*$  algebraik amalga nisbatan

yutuvchi element bo'lsa,  $x$  element bilan shu amal birgalikda berilgan har qanday ifodani  $x$  element bilan almashtirish mumkin bo'ladi.

### 5. Simmetrik elementning mavjudlik xossasi.

Ratsional sonlar to'plamida quyidagi tengliklar o'rinli:

$$a - b = a + (-b)$$

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}; b \neq 0$$

Birinchi tenglikda ayirish amali qo'shish amali bilan,  $b$  soni esa, unga qarama-qarshi  $(-b)$  soniga, ikkinchi tenglikda bo'lish amali ko'paytirish amali bilan,  $b$  soni esa unga teskari bo'lgan  $\frac{1}{b}$  soni bilan almashtiriladi.

Qarama-qarshi, teskari sonlar simmetrik elementning xususiy hollaridir.

Aytaylik,  $A$  to'plam va  $*$  algebraik amal berilgan bo'lsin,  $e$  element  $A$  to'plamining neytral elementi bo'lsin.

**10-ta'rif.** Agar  $\forall a \in A$  uchun  $a * \tilde{a} = \tilde{a} * a = e$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $\tilde{a}$  element  $a$  element uchun simmetrik element deyiladi.

**Teorema.**  $A$  da berilgan  $*$  algebraik amal assotsiativ bo'lsa,  $*$  amaliga nisbatan  $A$  ning har bir elementiga faqat bitta simmetrik element mos keladi.

**Isbot.** Aytaylik,  $A$  to'plamda  $a$  elementga ikkita  $\tilde{a}_1$  va  $\tilde{a}_2$  elementlar simmetrik bo'lsin. U holda ta'rifga asosan

$$a * \tilde{a}_1 = \tilde{a}_1 * a = e$$

$$a * \tilde{a}_2 = \tilde{a}_2 * a = e \Rightarrow a * \tilde{a}_1 = a * \tilde{a}_2.$$

$*$  amal assotsiativ bo'lganidan

$$(\tilde{a}_1 * a) * \tilde{a}_2 = \tilde{a}_1 * (a * \tilde{a}_2) \Rightarrow e * \tilde{a}_2 = \tilde{a}_1 * e \Rightarrow \tilde{a}_2 = \tilde{a}_1.$$

Bundan ko'rinadiki,  $*$  amaliga nisbatan  $A$  to'plamning har bir elementi faqat bitta simmetrik elementga ega bo'ladi.

Shunday to'plamlar mavjudki, ularning har bir elementiga bitta ham simmetrik element mos kelmaydi.

Masalan, nomanfiy butun sonlar to'plamida qo'shish amaliga nisbatan  $a \in N_0$  ga simmetrik element  $(-a)$  mavjud emas,  $-a \notin N_0$ .

Ko'paytirish amaliga nisbatan simmetrik element teskari element, qo'shish amaliga nisbatan esa simmetrik element qarama-qarshi element deyiladi.

Ma'lumki, ratsional sonlar to'plamida  $a$  ga teskari  $\frac{1}{a}$  ( $a \neq 0$ );  $\frac{1}{a}$  ga teskari  $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$ ;  $a$  ga qarama-qarshi  $(-a)$ ;  $(-a)$  ga qarama-qarshi  $-(-a) = a$ ,

ya'ni  $\tilde{\tilde{a}} = a$  o'rinli bo'ladi.

**Teorema.** Agar to'plamda berilgan  $*$  algebraik amal assotsiativ hamda to'plamning ixtiyoriy  $b$  va  $c$  elementlari  $\tilde{b}$  va  $\tilde{c}$  simmetrik elementga ega bo'lsa,

$$(\tilde{b * c}) = \tilde{b} * \tilde{c}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Teoremaning isboti talabalarga havola qilinadi.

Teoremaga asosan,  $b=5$ ;  $c=7$  bo'lsa,  $(5+7)=12$ ;  $\tilde{12}=-12$ ;  $\tilde{(5+7)}=-12$ ;  $\tilde{5+7}=-5+(-7)=-12$ ;  $(\tilde{5} + \tilde{7}) = \tilde{5} + \tilde{7}$  tenglik bajariladi.

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1.  $A = \{-5, 8, 12, -7, -23\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

2.  $B = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{5}{7}, -\frac{7}{9}, -\frac{1}{2}, 5\frac{2}{3}, 3\frac{1}{5} \right\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

3.  $B = \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}, \sqrt{-\frac{32}{243}}, \sqrt{5\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \right\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

4.  $A = \{0, 1, -1\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

5.  $A = \{i, 1-i, -1+i, 3i+2, -2i+5, -3i-7\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

6.  $B = \left\{ \sqrt{\frac{1}{3i}}, \sqrt{\frac{5i}{7}}, \sqrt{-\frac{7}{9i}}, \sqrt{-\frac{1}{2}}, \sqrt{5\frac{2i}{3}}, \sqrt[3]{\frac{1i}{5}} \right\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

7.  $A = \{3, 8+5i, -1+7i, 3i+2, -6i+5, -9i-7\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

8.  $B = \left\{ \frac{1}{8}i, 3\frac{12}{17}, -2\frac{3}{7}i, -\frac{1}{5}, 5\frac{2}{3}i, 3\frac{1}{5} \right\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

9.  $B = \left\{ \frac{7}{9}i, 3\frac{11}{14}, -3i, -\frac{1}{i}, 5\frac{2}{3}i, 2\frac{1}{5} \right\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

10.  $A = \{7, -10, 12\}$  to'plamning elementlari uchun neytral va simmetrik elementlarni toping.

#### Nazorat uchun savollar.

1. Natural sonlar to'plamida kommutativlik va assotsiativlik xossalari qaysi amallar bo'ysunadi?

2. Amallarning qaysi biri uchun butun sonlar to'plami  $Z$  da assotsiativlik xossasi o'rinli bo'ladi?

3. Butun sonlar to'plami  $Z$  da kommutativlik xossasi o'rinli bo'lgan amallarni ko'rsating.

4. Butun sonlar to'plami  $Z$  da ayirish amali qisqaruvchanlik xossasiga bo'ysinadimi?

5. Berilgan amalga nisbatan teskari amal deb qanday amalga aytiladi?

6. Ratsional sonlar to'plami  $Q$  da ko'paytirish amaliga teskari amal mavjudmi?

7. Qachon amal teskarilanuvchanlik xossasiga ega bo'ladi deyiladi?

8. Natural sonlar to'plami  $N$  da neytral element mavjudmi?

#### 3.3-§. Algebraik sistemalar. Yarim grupp, grupp, halqa va maydon tushunchalari va ularga misollar

Algebraik amal berilgan va bo'sh bo'lmagan to'plam *algebra* deyiladi. Agar natural sonlar to'plami  $N$  da qo'shish amali berilgan bo'lsa, bu to'plamda berilgan algebra  $\langle N, + \rangle$  ko'rinishda belgilanadi.  $\langle N, - \rangle$  ko'rinishda berilgan algebra natural sonlar to'plamida ayirish amali bilan berilgan,  $\langle Z, : \rangle$  butun sonlar to'plamida bo'lish amali vositasida berilgan algebra bo'ladi. Demak, algebra berilishi uchun bo'sh bo'lmagan to'plam va unda algebraik amal berilishi lozim ekan.

Agar  $X$  to'plam berilib, unda  $\cdot, \circ$  algebraik amallar berilgan bo'lsa, ular vositasida berilgan algebra  $\langle X, \cdot, \circ \rangle$  ko'rinishda bo'ladi.  $\langle X, \tau, \circ \rangle$  algebra  $\langle X, \tau, \cdot \rangle$  algebradan  $\circ$  va  $\cdot$  algebraik amallari bilan farq qiladi.

$A$  to'plam va unda berilgan  $\cdot$  algebraik amal vositasida  $\langle A, \cdot \rangle$  algebra beriladi. Grupp, halqa, maydon ana shunday algebra qatoriga kiradi. Quyida grupp, halqa va maydon kabi algebraarning xossa va xususiyatlarini ko'rib chiqamiz.

Aytaylik bizga,  $A \neq \emptyset$  to'plam va binar  $\cdot$  algebraik amal berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** Bo'sh bo'lmagan  $A$  to'plamda  $\cdot$  algebraik amal assotsiativ bo'lsa,  $\langle A, \cdot \rangle$  algebra yarim grupp deyiladi.

**2-ta'rif.** Bo'sh bo'lmagan  $A$  to'plamda quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa,  $\langle A, \cdot \rangle$  algebra grupp deyiladi:

a)  $A$  to'plamning ixtiyoriy  $a, b, c$  elementlari uchun  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  munosabat o'rinli bo'lsa, ya'ni binar  $\cdot$  algebraik amal assotsiativ bo'lsa;

b)  $A$  to'plamning ixtiyoriy  $a$  elementi uchun shunday  $e \in A$  element mavjud bo'lib, u  $a \cdot e = e \cdot a = a$  shartni qanoatlantirsa, ya'ni  $A$  to'plamda neytral element mavjud bo'lsa;

d)  $A$  to'plamning ixtiyoriy  $a$  elementi uchun shunday  $\bar{a}$  element mavjud bo'lib, u quyidagi  $a \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot a = e$  shartni qanoatlantirsa, ya'ni  $A$  to'plamning har bir elementiga simmetrik element mavjud bo'lsa.

Ta'rifdan ko'rinadiki,  $\langle A, \cdot, e, \bar{a} \rangle$  algebra grupp bo'lishi uchun  $\cdot$  algebraik amal bo'lib, u assotsiativ bo'lishi hamda  $A$  to'plamda  $e$  neytral,  $\bar{a}$  simmetrik elementlar mavjud bo'lishi kerak ekan.

**3-ta'rif.** Agar  $A$  to'plamda berilgan  $\cdot$  algebraik amal kommutativ bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy  $a, b \in A$  uchun  $a \cdot b = b \cdot a$  o'rinli bo'lsa,  $\langle A, \cdot, e, \bar{a} \rangle$  grupp  $\cdot$  binar algebraik amalga nisbatan kommutativ grupp deyiladi. Kommutativ grupp ba'zi hollarda Abel gruppasi deb ham ataladi.

Binar  $\langle \cdot \rangle$  algebraik amalni  $\langle + \rangle$  qo'shish amali bilan almashtiraylik.  $A$  to'plamda  $+$  amali grupp hosil qilishi uchun u quyidagi xossalarga bo'ysinishi kerak:

a)  $\forall a, b, c \in A$  uchun  $(a+b)+c = a+(b+c)$  bajarilishi, ya'ni qo'shish amali assotsiativ bo'lishi;

b)  $\forall a \in A$  uchun shunday  $e=0$  element bo'lsinki,  $a+0=0+a=a$  bo'lsin, ya'ni neytral 0 element mavjud bo'lishi;

d)  $A$  to'plamning ixtiyoriy  $a$  elementi uchun  $a+(-a)=0$  shartni qanoatlantiruvchi simmetrik  $(-a)$  element mavjud bo'lishi kerak.

Ma'lumki, qo'shish amali kommutativdir, shuning uchun  $\langle A, +, 0, -a \rangle$  algebra kommutativ, ya'ni Abel gruppasidir.

Misol. Haqiqiy sonlar to'plami  $R$  qo'shish amaliga nisbatan kommutativ gruppaga tashkil qiladi.

Haqiqatan ham,  $\forall a, b, c \in R$  uchun

a)  $(a+b)+c=a+(b+c)$  assotsiativlik xossasi o'rinli;

b)  $\forall a \in R$  uchun  $0 \in R$  mavjudki,  $a+0=a$ ;

d)  $\forall a \in R$  uchun  $-a \in R$  topiladiki,  $a+(-a)=0$ .

Qo'shish amali haqiqiy sonlar to'plamida kommutativ, assotsiativ bo'lganidan va  $R$  da neytral va simmetrik element mavjudligidan  $\langle R, +, 0, -a \rangle$  kommutativ gruppaga bo'lishi kelib chiqadi.

Agar «\*» algebraik amal sifatida «+» qo'shish amali olinib,  $\langle A, + \rangle$  algebra qo'shish amaliga nisbatan gruppaga bo'lsa, bunday gruppalar *additiv gruppalar* deyiladi.

Agar «\*» algebraik amal sifatida «·» ko'paytirish amali olinib,  $\langle A, \cdot \rangle$  algebra ko'paytirish amaliga nisbatan gruppaga bo'lsa, bunday gruppalar *multiplikativ gruppalar* deyiladi.

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1.  $Z$  to'plamdan shunday  $*$ ,  $0$  algebraik amallarni topingki unda  $*$  amali kommutativ, assotsiativ bo'lgani holda  $0$  nisbatan distributiv bo'lmasin.

2.  $R$  tuplamga shunday algebrayik amal kiritingki o'ngdan ham, chapdan ham qisqartirish qonuni o'rinli bo'lsin.

3.  $N$  to'plam qaysi amalga nisbatan gruppaga bo'ladi?

4.  $Z$  to'plam qaysi amalga nisbatan gruppaga bo'ladi?

5.  $Q$  to'plam qaysi amalga nisbatan gruppaga bo'ladi?

6.  $R$  to'plam qaysi amalga nisbatan gruppaga bo'ladi?

7.  $N$  to'plam qaysi amalga nisbatan yarim gruppaga bo'ladi?

8.  $Z$  to'plam qaysi amalga nisbatan yarim gruppaga bo'ladi?

9.  $Q$  to'plam qaysi amalga nisbatan yarim gruppaga bo'ladi?

10.  $R$  to'plam qaysi amalga nisbatan yarim gruppaga bo'ladi?

11.  $Q$  to'plam qaysi amalga nisbatan yarim gruppaga bo'ladi?

12.  $Q$  to'plam qaysi amalga nisbatan yarim gruppaga bo'ladi?

13.  $Q$  to'plam qaysi amalga nisbatan yarim gruppaga bo'ladi?

14.  $Q$  to'plam qaysi amalga nisbatan yarim gruppaga bo'ladi?

### O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Berilgan to'plamda yarim gruppaga hosil qiluvchi amal qanday xossalarga bo'ysunadi?

2. Berilgan to'plamda gruppaga hosil qiluvchi amal qanday xossalarga bo'ysunadi?

3. Kommutativ gruppaga qanday xossalarga ega?

4. Gruppoidga ta'rif bering.

5. Abel gruppaga deb qanday gruppaga aytamiz?

### 3.4-§. Halqa va maydon tushunchalari va ularga misollar.

To'plamning ixtiyoriy elementiga shu to'plamning faqat bitta qarama-qarshi yoki teskari elementini mos qo'yuvchi, har bir elementga bitta neytral elementni mos qo'yuvchi amal unar algebraik amaldir.

Bo'sh bo'lmagan  $A$  to'plamda ikkita binar algebraik, bitta unar algebraik amal berilgan bo'lsin. Aniqlik uchun binar algebraik amallar uchun «qo'shish» va «ko'paytirish» amallarini, unar algebraik amal sifatida esa simmetrik (qarama-qarshi, teskari) elementning mavjudligini qabul qilaylik.

4-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan  $A$  to'plamda qo'shish va ko'paytirish binar algebraik amallari o'rinli bo'lib, ular quyidagi xossalarga bo'ysunsalar,  $A$  to'plam va  $+$ ,  $\cdot$  amallari bilan berilgan  $\langle A, +, \cdot \rangle$  algebra *yarim halqa* deyiladi:

a)  $\forall a, b, c \in A$  lar uchun  $(a+b)+c=a+(b+c)$ , ya'ni assotsiativlik xossasi;

b)  $\forall a, b \in A$  uchun  $a+b=b+a$ , ya'ni kommutativlik xossasi;

d)  $\forall a, b, x \in A$  uchun

$$a+x=b+x \Rightarrow a=b$$

$$x+a=x+b \Rightarrow a=b$$

ya'ni qisqaruvchanlik xossasi;

e)  $\forall a, b, c \in A$  uchun  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  ko'paytirish amali assotsiativlik xossasiga bo'ysunsa;

f)  $\forall a, b, c \in A$  uchun  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  yoki  $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$  ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga ega bo'lsa.

Agar  $\langle A, +, \cdot \rangle$  yarim halqa bo'lib, ko'paytirish amali kommutativ bo'lsa, bunday yarim halqa *yarim kommutativ halqa* deyiladi.

**5-ta'rif.** Agar  $\langle A, +, \cdot \rangle$  algebra qo'shish amaliga nisbatan Abel gruppasi va ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga bo'ysunsa,  $\langle A, +, \cdot \rangle$  algebra halqa deyiladi.

Demak,  $\langle A, *, \circ \rangle$  halqa bo'lishi uchun,  $A$  to'plamda  $*$  algebraik amal assosiativ va kommutativ bo'lishi,  $*$  algebraik amalga nisbatan neytral va simmetrik elementlari mavjud bo'lishi hamda  $\circ$  algebraik amal  $*$  algebraik amalga nisbatan distributiv bo'lishi kerak.

Agar  $\forall a \in A$  uchun  $a + 0 = a$  va  $0 + a = a$  munosabat o'rinli bo'lsa,  $0 \in A$  element  $A$  to'plamning nol elementi, agar  $\forall a \in A$  uchun  $e \in A$  mavjud bo'lib  $a \cdot e = e \cdot a = a$  munosabat bajarilsa  $e$  elementga  $A$  to'plamning birlik elementi deyiladi.

Misol.  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  natural sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari vositasida tashkil qilingan  $\langle N, +, \cdot \rangle$  algebra yarim halqadir. Haqiqatan ham,

$$1) 4, 6, 7 \in N \quad 4 + (6 + 7) = (4 + 6) + 7$$

$$2) 4 + 7 = 7 + 4$$

$$3) 5 + 12 = 5 + (5 + 7) \Rightarrow 12 = 5 + 7$$

$$4) 5 \cdot (6 \cdot 7) = (5 \cdot 6) \cdot 7$$

$$5 \cdot 42 = 30 \cdot 7$$

$$210 = 210$$

$$5) 6 \cdot (7 + 4) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 4$$

$$6 \cdot 11 = 66$$

$$6 \cdot 7 + 6 \cdot 4 = 42 + 24 = 66$$

Demak,  $\langle N, +, \cdot \rangle$  algebra yarim halqadir.

Agar  $A$  to'plamda berilgan ko'paytirish amali uchun kommutativlik xossasi o'rinli bo'lsa,  $\langle A, +, \cdot \rangle$  kommutativ halqa, agar ko'paytirish amali uchun assosiativlik xossasi o'rinli bo'lsa,  $\langle A, +, \cdot \rangle$  assosiativ halqa, agar ko'paytirish amaliga nisbatan  $a \cdot e = e \cdot a = a$  shartni bajaruvchi neytral element mavjud bo'lsa,  $\langle A, +, \cdot \rangle$  birlik elementli halqa (chunki  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ,  $e = 1$ ) deb yuritiladi.

Agar  $\langle A, *, \circ \rangle$  halqani tashkil qilayotgan  $A$  to'plam elementlari sonlardan iborat bo'lsa,  $\langle A, *, \circ \rangle$  halqa sonli halqa deb yuritiladi. Endi ko'rib chiqilgan halqa va uning xossalaridan foydalanib maydon tushunchasini kiritamiz.

## 2. Maydon

Faraz qilaylik, kommutativ va birlik elementli assosiativ halqa berilgan bo'lsin. **6-ta'rif.** Agar  $\langle A, +, \cdot \rangle$  algebra kommutativ, assosiativ va birlik elementli halqa bo'lib,  $a \in A$ ,  $a \neq 0$  uchun  $a$  elementga  $a \cdot a^{-1} = e$  shartni qanoatlantiruvchi  $a^{-1}$  teskari element mavjud bo'lsa,  $\langle A, +, \cdot \rangle$  algebra maydon deyiladi.

Maydon ta'rifidan ko'rinadiki:

a) har qanday maydonda uning nolga teng bo'lmagan istalgan elementiga teskari element mavjud va yagonadir;

$$b) \forall a \in A, a \neq 0 \text{ uchun } a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1;$$

d) har qanday maydonda birlik element mavjud va yagonadir;

e)  $\forall a, b \in A$  uchun  $a \cdot x = b$  tenglikni qanoatlantiruvchi  $x \in A$  yagonadir, bu  $a \cdot a^{-1} = e$  shartni qanoatlantiruvchi  $a^{-1}$  ning yagonaligidan kelib chiqadi:

$$a \cdot x = b \Rightarrow x = b \cdot a^{-1} \quad b \cdot (a \cdot b^{-1}) = (b \cdot b^{-1}) \cdot a = a;$$

f) maydon nolning bo'luvchilariga ega emas.

Agar  $\langle A, +, \cdot \rangle$  maydonda  $A$  to'plam elementlari sonlardan iborat bo'lsa  $\langle A, +, \cdot \rangle$  maydon sonli maydon deyiladi.

Ratsional sonlar to'plami  $Q$  da qo'shish va ko'paytirish amallari vositasida hosil qilingan  $\langle Q, +, \cdot \rangle$  algebra maydon tashkil etadi.

Butun sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari vositasida hosil qilingan  $\langle Z, +, \cdot \rangle$  algebra maydon hosil qilmaydi.

## Mustaqil yechish uchun misollar.

Halqa va maydon tushunchalari va ularga misollar.

1. Quyidagi to'plamlarning qaysilari qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish.

2. Operatsiyalariga nisbatan yopiq to'plam hisoblanadi: a) natural sonlar; b) toq sonlar; d) musbat ratsional sonlar; e)  $\{0\}$ ; f)  $\{0; 1\}$ ; g)  $\{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$ ?

2. Qaysi  $(*, X)$  juftliklar uchun  $X$  da algebraik operatsiya bo'ladi, degan mulohaza to'g'riligini aniqlang:

a)  $*$  — qo'shish  $X = \mathbb{Z}_-$ ;    b)  $*$  — bo'lish  $X = \mathbb{R}_+$ ;

d)  $*$  — bo'lish  $X = \mathbb{R}_-$ ;    e)  $*$  — ko'paytirish  $X = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$ ;

j)  $*$  - EKUB,  $X = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ ;    g)  $*$  - EKUK,  $X = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$ .

3. Barcha butun sonlar to'plami  $\mathbb{Z}$  da assotsiativ yoki kommutativ bo'ladigan algebraik operatsiyalarni aniqlang:

a) qo'shish; b) ayirish; d) ko'paytirish; e)  $a * b = 3a - 2b$ .

4. Barcha natural sonlar to'plami  $\mathbb{N}$  da assotsiativ yoki kommutativ operatsiyalarni aniqlang:

a) qo'shish; b) ayirish; d) ko'paytirish; e) bo'lish; f)  $B(a; b)$

g)  $K(a; b)$ ,  $a * b = a^b$ .

5.  $X$  to'plamda  $*$  operatsiya  $0$  operatsiyaga nisbatan distributiv, degan mulohaza qaysi  $(*, 0)$  juftliklar uchun to'g'ri ekanligini aniqlang:

a)  $\mathbb{R}$  da  $*$  — bo'lish,  $0$  — qo'shish;

b)  $\mathbb{R}$  da  $*$  — qo'shish,  $0$  — ko'paytirish;

d)  $*$  — to'plamlar birlashmasi,  $0$  — kesishmasi;

e)  $\mathbb{Z}$  da  $*$  — yig'indi,  $0$  — ayirma;

f)  $0 * —$  mulohazalar dizyunksiyasi.  $0 —$  konyunksiyasi.

6. To'plamlar kesishmasining yutuvchi elementi bormi, simmetrik yoki neytral elementlari-chi?

7. Butun sonlar to'plamida qo'shishga nisbatan  $8$  ning,  $-7$  ning simmetrik elementlarini ayting.

8. Ratsional sonlar to'plami qo'shishga nisbatan gruppaga tashkil qilishini ko'rsating.

9.  $X$  to'plamning barcha qism to'plamlari to'plami to'plamlar kesishmasiga nisbatan gruppaga tashkil qiladimi?

10. Quyidagi to'plamlar halqa bo'ladimi:

a)  $5$  ga karrali butun sonlar to'plami;

b) toq natural sonlar to'plami;

d) barcha haqiqiy sonlar to'plami;

e)  $a + b\sqrt{2}$  ko'rinishdagi sonlar to'plami; bu yerda  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bu to'plamlarning qaysilari maydon bo'la oladi?

### Nazorat uchun savollar.

1. Halqa tashkil qilish uchun qanday shartlar bajarilishi kerak?

2. Yarim kommutativ halqaga ta'rif bering.

3. Assotsiativ halqaga misollar keltiring.

4. Maydonga ta'rif bering. Misollar keltiring.

## 4-BOB. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO'PLAMI

### 4.1-§. Nomanfiy butun sonlar to'plami. Yig'indining ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Qo'shish qonunlari.

1. Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot. Natural sonlar nazariyasi ham bir necha yo'llar bilan aksiomatik qurilgan:

- 1) to'plam nazariyasi asosida (sanoq sonlar nazariyasi);
- 2) Peano aksiomalari asosida (tartib sonlar nazariyasi);
- 3) miqdor tushunchasi asosida (miqdor sonlar nazariyasi).

Natural son tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. U butun matematika fani singari kishilar amaliy faoliyatlaridagi ehtiyojlar natijasida vujudga kelgan. Turli-tuman chekli to'plamlarni bir-biri bilan taqqoslash zarurati ham natural sonlarning vujudga kelishiga sabab bo'ldi.

O'zining rivojlanish davrida natural sonlar tushunchasi bir nechta bosqichni o'tdi. Juda qadim zamonlarda chekli to'plamlarni taqqoslash uchun berilgan to'plamlar orasida yoki to'plamlardan biri bilan ikkinchi to'plamning qism to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishgan, ya'ni bu bosqichda kishilar buyumlar to'plamining sanog'ini ularni sanamasdan idrok qilganlar.

Vaqt o'tishi bilan odamlar faqat sonlarni atashni emas, balki ularni belgilashni, shuningdek, ular ustida amallar bajarishni o'rganib oldilar. Qadimgi Hindistonda sonlarni yozishning o'nli sistemasini va nol tushunchasi yaratildi. Asta-sekin natural sonlarning cheksizligi haqidagi tasavvurlar hosil bo'la boshladi.

Natural son tushunchasi shakllangandan so'ng sonlar mustaqil obyektlar bo'lib qoldi va ularni matematik obyektlar sifatida o'rganish imkoniyati vujudga keldi. Sonni va sonlar ustida amallarni o'rgana boshlagan fan «Arifmetika» nomini oldi.

Arifmetika qadimgi Sharq mamlakatlari: Vavilon, Xitoy, Hindiston, Misrda vujudga keldi. Bu mamlakatlarda to'plangan matematik bilimlar qadimgi Gretsiyada rivojlantirildi va davom ettirildi. Arifmetikaning rivojlanishiga o'rta asrlarda Hind, Arab dunyosi mamlakatlari va o'rta Osiyo matematiklari, XVIII asrdan boshlab esa Yevropalik olimlar katta hissa qo'shdilar. «Natural son» atamasini birinchi bo'lib rimlik olim A.A.Boetsiy qo'lladi.

2. Nomanfiy butun son tushunchasi. Nomanfiy butun sonlar to'plamini to'plamlar nazariyasi asosida qurish XIX asrda G. Kantor tomonidan to'plamlar nazariyasi yaratilgandan so'ng mumkin bo'ldi. Bu nazariya asosida chekli to'plam va o'zaro bir qiymatli moslik tushunchalari yotadi.

1-ta'rif. Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, Bu to'plamlar teng quvvatli deyiladi. A~B ko'rinishda yoziladi.

«Teng quvvatlilik» munosabati refleksiv va tranzitiv bo'lgani uchun u ekvivalentlik munosabati bo'ladi va barcha chekli to'plamlarni ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Har bir sinfdagi turli elementli to'plamlar yig'ilgan bo'lib, ularning umumiy xossasi teng quvvatli ekanligidir.

2-ta'rif. Natural son deb, bo'sh bo'lmagan chekli teng quvvatli to'plamlar sinfining umumiy xossasiga aytiladi.

Har bir ekvivalentlik sinfining umumiy xossasini uning biror to'plami to'la ifodalaydi. Har bir sinf xossasini ifodalovchi natural son alohida belgi bilan belgilanadi. A to'plam bilan aniqlanadigan a son shu to'plamning quvvati deyiladi va  $a = n(A)$  deb yoziladi. Masalan, 3 soni uch elementli to'plamlar sinfining umumiy xossasini bildiradi va u bu sinfning istalgan to'plami bilan aniqlanadi. 3 natural sonini ekvivalent to'plamlar sinfining  $A = \{a; b; 5\}$ ,  $B = \{\text{qizil, sariq, yashil}\}$ ,  $C = \{\square; \nabla; \circ\}$  kabi vakillarini ko'rsatish bilan aniqlash mumkin.

Har bir chekli to'plamga unga tegishli bo'lmagan biror elementni qo'shib, berilgan to'plamga ekvivalent bo'lmagan to'plamni hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib, o'zaro ekvivalent bo'lmagan to'plamlarning cheksiz ketma-ketligini va shu to'plamlar bilan aniqlanadigan 1, 2, 3, n, ... ko'rinishda belgilangan natural sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Barcha natural sonlar to'plamini  $N = \{1; 2; 3; \dots\}$  ko'rinishda yozishga kelishamiz.

3-ta'rif. Bo'sh to'plamlar sinfining umumiy xossasiga esa son 0 soni deyiladi,  $0 = n(\emptyset)$ .

0 soni va barcha natural sonlar birgalikda nomanfiy butun sonlar to'plamini tashkil qiladi. Bu to'plam  $N_0$  ko'rinishida belgilanadi.  $N_0 = \{0\} \vee N$ . Bu yerda, N — barcha natural sonlar to'plami.

3. Nomanfiy butun sonlarni taqqoslash. Sonlarni taqqoslash qanday nazariy asosda yuz berishini aniqlaylik. Ikkita nomanfiy butun  $a$  va  $b$  son berilgan bo'lsin hamda ular chekli  $A$  va  $B$  to'plamlar bilan aniqlansin.

4-ta'rif. Agar  $a$  va  $b$  sonlar teng quvvatli to'plamlar bilan aniqlansa, u holda ular teng deyiladi.

$$a = b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ bu yerda } n(A) = a; n(B) = b.$$

Agar  $A$  va  $B$  to'plamlar teng quvvatli bo'lmasa, u holda ular bilan aniqlanadigan sonlar turlicha bo'ladi.

5-ta'rif. Agar  $A$  to'plam  $B$  to'plamning o'z qism to'plamiga teng quvvatli va  $n(A) = a; n(B) = b$  bo'lsa,  $a$  son  $b$  sonda kichik deyiladi va  $a < b$  kabi yoziladi. Xuddi shu vaziyatda  $b$  son  $a$  sonda katta deyiladi va  $b > a$  kabi yoziladi.

$$a < b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ bu yerda } B_1 \subset B \text{ va } B_1 \neq B, B_1 \neq \emptyset.$$

4. Nomanfiy butun sonlar yig'indisi, uning mavjudligi va yagonaligi. to'plamlar ustida bajariladigan har bir amalga shu to'plamlar bilan aniqlanadigan sonlar ustidagi amallar mos keladi. Masalan, o'zaro kesishmaydigan  $A$  va  $B$  to'plamlar birlashmasidan iborat  $C$  to'plam  $A$  va  $B$  to'plamlar bilan aniqlanadigan  $a$  va  $b$  nomanfiy butun sonlarning yig'indisi deb ataluvchi  $c$  sonni aniqlaydi.

6-ta'rif. Butun nomanfiy  $a$  va  $b$  sonlarning yig'indisi deb  $n(A)=a; n(B)=b$  bo'lib, kesishmaydigan  $A$  va  $B$  to'plamlar birlashmasidagi elementlar soniga aytiladi.

$$a + b = n(A \cup B), \text{ bu yerda } n(A) = a; n(B) = b \text{ va } A \cap B = \emptyset.$$

Berilgan ta'rifdan foydalanib,  $5 + 2 = 7$  bo'lishini tushuntiramiz. 5 — bu biror  $A$  to'plamning elementlari soni, 2 — biror  $B$  to'plamning elementlari soni, bunda ularning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lishi kerak. Masalan,  $A = \{x; y; z; t; p\}, B = \{a; b\}$  To'plamlarni olamiz. Ularni birlashtiramiz:  $A \cup B = \{x; y; z; t; p; a; b\}$ . Sanash yo'li bilan  $n(A \cup B) = 7$  ekanligini aniqlaymiz. Demak,  $5 + 2 = 7$ .

Umuman,  $a + b$  yigindi  $n(A)=a, n(B)=b$  shartni qanoatlantiruvchi kesishmaydigan  $A$  va  $B$  to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emas. Bu umumiy da'voni biz isbotsiz qabul qilamiz.

Bundan tashqari, butun nomanfiy sonlar yig'indisi har doim mavjud va yagonadir. Boshqacha aytganda, biz qanday ikkita

nomanfiy  $a$  va  $b$  sonlar olmaylik, ularning yig'indisi — butun nomanfiy  $c$  sonni har doim topish mumkin. U berilgan  $a$  va  $b$  sonlar uchun yagona bo'ladi.

Yig'indining mavjudligi va yagonaligi ikki to'plam birlashmasining mavjudligi va yagonaligidan kelib chiqadi.

Yig'indi ta'rifidan foydalanib, «kichik» munosabatiga boshqacha ta'rif berish mumkin:

7-ta'rif.  $\forall a, b \in \mathbb{N}$  uchun  $a = b + c$  bo'ladigan  $c$  son topilsa,  $b < a$  (yoki  $a > b$ ) deyiladi.

$$(\forall a, b \in \mathbb{N})(\exists c \in \mathbb{N})(b < a \Leftrightarrow a = b + c).$$

1.6. Qo'shish amalining xossalari.

1°. Qo'shish amali kommutativdir:

$$(\forall a, b \in \mathbb{N}_0)(a + b = b + a),$$

ya'ni ixtiyoriy nomanfiy butun  $a$  va  $b$  sonlar uchun  $a + b = b + a$  tenglik o'rinli.

Isbot.  $a = n(A), b = n(B)$  va  $A \cap B = \emptyset$  bo'lsin,

$$a + b = n(A \cup B) = n(B \cup A) = b + a$$

(To'plamlar birlashmasining kommutativligiga asosan).

2°. Qo'shish amali assotsiativdir:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0) a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Isbot:  $a = n(A), b = n(B), c = n(C)$  va  $A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset,$

$A \cap C = \emptyset$  bo'lsin.

$$a + (b + c) = n(A \cup (B \cup C)),$$

$$(a + b) + c = n((A \cup B) \cup C)$$

To'plamlar birlashmasining assotsiativligiga ko'ra

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Demak,  $a + (b + c) = (a + b) + c.$

3°. 0 ni yutish qonuni:

$$(\forall a \in \mathbb{N}_0) a + 0 = a.$$

Isbot.

$$a = n(A), 0 = n(\emptyset), a + 0 = n(A \cup \emptyset) = n(A) + n(\emptyset), A \cup \emptyset = A \text{ bo'lgani uchun.}$$

4°. Qo'shish amali qisqaruvchandir:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0) a + c = b + c \Leftrightarrow a = b,$$

Isbot.  $a = n(A), b = n(B), c = n(Q)$  bo'lsin.  $A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C$  bo'ladi. Qo'shish amali ta'rifidan  $n(A) = n(B) \Rightarrow n(A \cup C) = n(B \cup C), a = b \Rightarrow a + c = b + c.$

$n(B \cup Q), a = b \Rightarrow a + c = b + c.$

5°. Qo'shish amali monotondir:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0) a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

Isbot.  $a = n(A)$ ,  $b = n(B)$  bo'lsin.

$a < b \Rightarrow A \sim B_1 \subset B$ , bu yerda  $B_1 \neq B$ ,  $B_1 \neq \emptyset$ , u holda

$$A \cup C \sim B_1 \cup C \subset B \cup C \Rightarrow a + c < b + c.$$

« $\Leftarrow$ » munosabati  $\mathbb{N}_0$  to'plamda qat'iy tartib munosabati bo'lishini isbot qilamiz. Buning uchun « $\Leftarrow$ » munosabatining tranzitiv va asimmetrik ekanligini ko'rsatamiz.

a) tranzitivligi:  $a < b \wedge b < c$  bo'lsin, 7-ta'rifga ko'ra, shunday  $k$  va  $h$  sonlar topiladiki,  $b = a + kv$   $\bar{a}c = b + h$  bo'ladi, bundan  $c = b + h = (a + k) + hv$  a qo'shishning assotsiativligiga ko'ra  $c = a + (k + h)$  ekanligini yozish mumkin, bu esa  $a < c$  degan xulosani beradi.

b) asimmetriklikni teskarisini faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz. Faraz qilaylik, bir vaqtda  $a < b$  va  $b < a$  o'rinli bo'lsin. Bundan tranzitivlik xossasiga ko'ra  $a < a$  ekanligi kelib chiqadi, demak, farazimiz noto'g'ri va bir vaqtda  $a < b$  va  $b < a$  bo'lishi mumkin emas, degan xulosaga kelamiz.

Nazorat uchun savollar:

1. Nazariyani aksiomatik qurish to'g'risida ma'lumot bering.
2. Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi tarixi haqida ma'lumot.
3. Nomanfiy butun sonlar to'plamini to'plamlar nazariyasi asosida qurish.
4. Nomanfiy butun sonlarni taqqoslash.

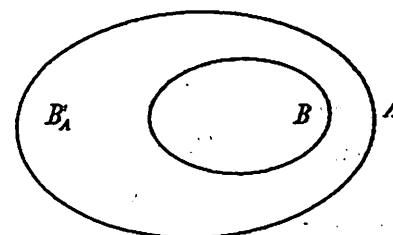
4.2-§. Ayirmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi.

Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosi.

1. Nomanfiy butun sonlar ayirmasi, uning mavjudligi va yagonaligi.

8-ta'rif. Butun nomanfiy  $a$  va  $b$  sonlarning *ayirmasi* deb,  $n(A) = a$ ,  $n(B) = b$  va  $B \subset A$  shartlar bajarilganda,  $B$  to'plamni  $A$  to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam *elementlari* soniga aytiladi (II.1-rasm).

$a - b = n(B'_A)$ , bu yerda  $a = n(A)$ ,  $b = n(B)$ ,  $B \subset A$ .



II.1-rasm.

Miso1. Berilgan ta'rifdan foydalanib,  $7 - 4 = 3$  bo'lishini tushuntiramiz. 7 — biror  $A$  to'plamning elementlari soni, 4 — shu  $A$  to'plamning qism to'plami bo'lgan  $B$  to'plamning elementlari soni bo'lsin. Masalan:  $A = \{x; y; z; t; p; r, s\}$ ,  $B = \{x; y; z; t\}$  to'plamlarni olaylik.  $B$  to'plamning  $A$  to'plamgacha to'ldiruvchisini topamiz:  $(B'_A) = \{p; r; s\}$ ,  $n(B'_A) = 3$ . Demak,  $7 - 4 = 3$  bo'lar ekan.  $a - b$  ayirma  $n(A) = a$ ,  $n(B) = b$  va  $B \subset A$  shartlarni qanoatlantiruvchi  $A$  va  $B$  to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emas.

$a = n(A)$ ,  $b = n(B)$  va  $B \subset A$  bo'ladigan butun nomanfiy  $a$  va  $b$  sonlar berilgan bo'lsin va bu sonlarning ayirmasi  $B$  to'plamning  $A$  to'plamgacha toldiruvchisidagi elementlar soni bo'lsin, ya'ni  $a - b = n(B'_A)$ .

Eyler doiralarida  $A$ ,  $B$ ,  $A \setminus B$  to'plamlar rasmda ko'rsatilganidek tasvirlanadi.  $A = B \cup B'_A$  ekani ma'lum, bundan  $n(A) = n(B \cup B'_A)$ .  $B \cap B'_A = \emptyset$  bo'lgani uchun biz  $a = n(A) = n(B \cup B'_A) = n(B) + n(B'_A) = b + (a - b)$  ga ega bo'lamiz. Bu esa ayirmaga boshqacha ta'rif berish imkonini beradi.

9-ta'rif. Butun nomanfiy  $a$  va  $b$  sonlarning *ayirmasi* deb shunday butun nomanfiy  $c$  songa aytiladiki, uning  $b$  son bilan yig'indisi  $a$  songa teng bo'ladi:  $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$ .

Shunday qilib,  $a - b = c$  yozuvda  $a$  — kamayuvchi,  $b$  — ayiriluvchi,  $c$  — ayirma deb ataladi.

Ayirish amali qo'shishga teskari amaldir. Ayirmaning ikkinchi ta'rifidan kelib chiqib, quyidagi teoremlarni isbotlaymiz:

1-teorema. Butun nomanfiy  $a$  va  $b$  sonlarning ayirmasi  $b \leq a$  bo'lganda va faqat shunda mavjud bo'ladi.

Isbot. Agar  $a - b$  bo'lsa, u holda  $a - b = 0$  bo'ladi va, demak,  $a - b$  ayirma mavjud bo'ladi.

Agar  $b < a$  bo'lsa, u holda «kichik» munosabati ta'rifiga ko'ra shunday natural son mavjud bo'ladi, bunda  $a = b + c$  bo'ladi. U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra  $c = a - b$ , ya'ni  $a - b$  ayirma mavjud bo'ladi. Agar  $a - b$  ayirma mavjud bo'lsa, u holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra shunday butun nomanfiy  $c$  son topiladi,  $a = b + c$  bo'ladi. Agar  $c = 0$  bo'lsa, u holda  $a = b$  bo'ladi; agar  $c > 0$  bo'lsa, u holda «kichik» munosabatining ta'rifiga ko'ra  $b < a$  bo'ladi. Demak,  $b \leq a$ .

**2-teorema.** Agar butun nomanfiy  $a$  va  $b$  sonlarining ayirmasi mavjud bo'lsa, u holda u yagonadir.

**Isbot.**  $a - b$  ayirmaning ikkita qiymati mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik:  $a - b = c_1$  va  $a - b = c_2$ . U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra  $a = b + c_1$  va  $a = b + c_2$  ga ega bo'lamiz. Bundan  $b + c_1 = b + c_2$  va, demak  $c_1 = c_2$  ekani kelib chiqadi.

**2. Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosi.** Yig'indidan sonni ayirish qoidasi: yig'indidan sonni ayirish uchun yig'indidagi qo'shiluvchilarning biridan shu sonni ayirish va hosil bo'lgan natijaga ikkinchi qo'shiluvchini qo'shish yetarli. Bu qoidani simvollardan foydalanib yozamiz.

Agar,  $a, b, c$  — butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda:

a)  $a > c$  bo'lganda  $(a + b) - c = (a - c) + b$  bo'ladi;

b)  $b > c$  bo'lganda  $(a + b) - c = a + (b - c)$  bo'ladi;

c)  $a > c$  va  $b > c$  bo'lganda yuqoridagi formulalarning ixtiyoriy bittasidan foydalanish mumkin.

$a \geq c$  bo'lsin, u holda  $a - c$  ayirma mavjud bo'ladi. Uni  $p$  orqali belgilaymiz:  $a - c = p$ . Bundan  $a = p + c$  chiqadi.  $p + c$  yig'indini  $(a + b) - c$  ifodadagi  $a$  ning o'rniga qo'yamiz va uni shakl almashiramiz:

$$(a + b) - c = (p + c + b) - c = p + b + c - c = p + b.$$

Biroq  $p$  harfi orqali  $a - c$  ayirma belgilangan edi, demak, isbotlanishi talab etilgan  $(a + b) - c = (a - c) + b$  ifodaga ega bo'lamiz.

Sondan yig'indini ayirish qoidasi: sondan sonlar yig'indisini ayirish uchun bu sondan qo'shiluvchilarning birini, ketidan ikkinchisini ketma-ket ayirish yetarli, ya'ni agar  $a, c, b$  — butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda  $a > b + c$  bo'lganda  $a - (b + c) = (a - b) - c$  ga ega bo'lamiz.

Bu qoidaning asoslanishi va uning nazariy-to'plam tasviri yig'indidan sonni ayirish qoidasi uchun bajarilgani kabi bajariladi.

Keltirilgan qoidalar boshlangich maktabda aniq misollarda qaraladi, asoslash uchun ko'rgazmali chizmalar, tasvirlar namoyish etiladi.

Bu qoidalar hisoblashlarni ixcham bajarish imkonini beradi. Masalan, sondan yig'indini ayirish qoidasi sonni bo'laklab ayirish usuliga asos bo'ladi:  $5 - 2 = 5 - (1 + 1) = (5 - 1) - 1 = 4 - 1 = 3$ .

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1.  $2 + 5 = 7$  ni to'plam nazariyasi bo'yicha tushuntiring.
2. " $2 + 5 = 7$ " ning turli ma'nolarini ochib beradigan barcha masalalarni yozing.
3. Qo'shish qonunlaridan foydalanib, ifoda qiymatini hisoblang:  
 $273 + 154 + 1227 + 446$
4.  $9 - 5 = 4$  ni to'plam nazariyasi bo'yicha tushuntiring.
5. " $9 - 5 = 4$ " ning turli ma'nolarini ochib beradigan barcha masalalarni yozing.
6. Ayirish qoidalaridan foydalanib, ifoda qiymatini hisoblang:  
 $(3748 + 10392) - 8392$
7.  $3 + 5 = 8$  ni to'plam nazariyasi bo'yicha tushuntiring.
8. " $3 + 5 = 8$ " ning turli ma'nolarini ochib beradigan barcha masalalarni yozing.
9. Qo'shish qonunlaridan foydalanib, ifoda qiymatini hisoblang:  
 $372 + 4356 + 28 + 544$
10.  $8 - 5 = 3$  ni to'plam nazariyasi bo'yicha tushuntiring.
11. " $8 - 5 = 3$ " ning turli ma'nolarini ochib beradigan barcha masalalarni yozing.
12. Ayirish qoidalaridan foydalanib, ifoda qiymatini hisoblang:  
 $7273 - (396 + 1173)$

### Nazorat uchun savollar:

1. Nomanfiy butun sonlar ayirmasiga ta'rif bering.
2. Nomanfiy butun sonlar ayirmasining mavjudligi va yagonaligini asoslang.
3. Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosini tushuntiring.

**4.3-§. Ko'paytmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Ko'paytirish qonunlari. Ko'paytmaning yig'indi orqali ta'rifi**

**1. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi.**

$a = n(A)$  va  $b = n(B)$  bo'lgan  $a$  va  $b$  nomanfiy butun sonlar berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.**  $a$  va  $b$  nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi deb,  $A \times B$  dekart ko'paytma elementlari sonini ifodalovchi  $c$  nomanfiy butun songa aytiladi. Bu yerda  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$  ekanini eslatib o'tamiz.

Demak, ta'rifga ko'ra:

$$a \cdot b = n(A \times B) = c, \text{ bu yerda } a, b, c \in N_0,$$

$a \cdot b = c$  yozuvda  $a$  - 1-ko'paytuvchi,  $b$  - 2-ko'paytuvchi,  $c$  - ko'paytma deyiladi,  $c \in N_0$  sonni topish amali esa ko'paytirish deyiladi.

Masalan, ta'rifga ko'ra  $5 \cdot 2$  ko'paytmani topaylik. Buning uchun  $n(A) = 5$  va  $n(B) = 2$  bo'lgan  $A = \{a; b; c; d; e\}$ ,  $B = \{1; 2\}$  to'plamlarning dekart ko'paytmasini tuzamiz:

$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2), (c; 1), (c; 2), (d; 1), (d; 2), (e; 1), (e; 2)\}$ . Dekart ko'paytma elementlari soni 10 ta bo'lgani uchun  $5 \cdot 2 = 10$ .

**2. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasining mavjudligi va yagonaligi.**

**Teorema.** Ikkita nomanfiy butun son ko'paytmasi mavjud va yagonadir.

**Isbot.** Ko'paytmaning mavjudligi va yagonaligi berilgan sondagi elementlardan tashkil topgan to'plamlarning dekart ko'paytmasini tuzish har doim mumkinligi va dekart ko'paytma elementlari soni to'plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog'liq emasligi bilan isbotlanadi.

**3. Ko'paytirish amalining xossalari.**

**1°. Ko'paytirish amali kommutativdir:**

$$(\forall a, b \in N_0) ab = ba.$$

**Isbot.**  $a = n(A)$  va  $b = n(B)$ ,  $A \cap B = \emptyset$  bo'lsin.  $A \times B \neq B \times A$ , shunga qaramay,  $A \times B \sim B \times A$  (bunda istalgan  $(a, b) \in A \times B$  juftlikka  $(b, a) \in B \times A$  juftlik mos keltiriladi):

$$A \times B \sim B \times A \Rightarrow n(A \times B) = n(B \times A),$$

$$ab = n(A \times B) = n(B \times A) = ba \Rightarrow ab = ba.$$

**2°. Ko'paytirish amali assotsiativdir:**

$$(\forall a, b, c \in N_0) (ab)c = a(bc).$$

**Isbot.**  $(ab)c = n(A), b = n(B), c = n(C)$  va  $A, B, C$  Clar juft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin:

$$(ab)c = n((A \times B) \times C) \text{ va } a(bc) = n(A \times (B \times C)).$$

Yuqoridagi dekart ko'paytmalar doirasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish yo'li bilan  $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$  ekanini ko'rsatish mumkin (kombinatorika bo'limidagi ko'paytma qoidasini eslang). Demak:

$$(ab)c = n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C)) = a(bc).$$

**3°. Ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi:**

$$(\forall a, b, c \in N_0) (a + b)c = ac + bc.$$

**Isbot.**  $a = n(A), b = n(B), c = n(C)$  va  $A, B, C$  Clar juft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin. to'plamlar nazariyasidan malumki,  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$  va  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset$  chunki,  $A \times C$  va  $B \times C$  dekart ko'paytmalar elementlari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

$$(a + b) \cdot c = n((A \cup B) \times C) = n((A \times C) \cup (B \times C)) = n(A \times C) + n(B \times C) = ac + bc.$$

Demak,  $(a + b)c = ac + bc$ .

**4°. Yutuvchi elementning mavjudligi:**

$$(\forall a \in N_0) a \cdot 0 = 0.$$

**Isbot.**  $a = n(A), 0 = n(\emptyset)$  bo'lsin.  $A \times \emptyset = \emptyset$  ekanligidan  $a \cdot 0 = n(A \times \emptyset) = n(\emptyset) = 0$ .

**5°. Ko'paytirish amalining monotonligi:**

$$(\forall a, b, c \in N_0, c \neq 0) a > b \Rightarrow ac > bc;$$

$$(\forall a, b, c \in N_0) a \geq b \Rightarrow ac \geq bc;$$

$$(\forall a, b, c \in N_0, c \neq 0) a < b \Rightarrow ac < bc.$$

**Isbot.** Namuna uchun 1-jumlani isbotlaymiz.

$a > b \Rightarrow B \sim A, C \sim A$ , bu yerda  $n(A) = a, n(B) = b, A_1 \neq \emptyset,$

$A_1 \neq A$ .

U holda  $B \times C \sim (A_1 \times C) \subset (A \times C)$ .

Demak,  $n(B \times C) = n(A_1 \times C) < n(A \times C) \Rightarrow bc < ac$ .

**6°. Ko'paytmaning qisqaruvchanligi:**

$$(\forall a, b, c \in N_0, c \neq 0) ac = bc \Rightarrow a = b.$$

**Isbot.** Teskarisini faraz qilaylik:  $a \neq b$  bo'lsin. U holda yoki  $a < b$ , yoki  $a > b$  bo'lishi kerak.  $a < b$  bo'lsa,  $ac < bc$  bo'lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak,  $a = b$  ekan.

Ko'paytmaga yig'indi orqali ta'rif berish ham mumkin.

11-ta'rif.  $a, b \in \mathbb{N}_0$  bo'lsin.  $a$  sonning  $b$  soniga ko'paytmasi deb, har biri  $a$  ga teng bo'lgan  $b$  ta qo'shiluvchining yig'indisiga aytiladi.

$$ab = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ marta}}$$

Bundan  $a \cdot 1 = a$  va  $a \cdot 0 = 0$  ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta'rif  $a = n(A)$ ,  $b = n(B)$ ,  $A \cap B = \emptyset$  bo'lgan  $A \times B$  dekart ko'paytma elementlarini sanash malum bir qonuniyatga asoslanishiga bog'liq.

Misol.  $A = \{a; b; c\}$ ,  $B = \{x; y; z; t\}$ .

$A \times B$  dekart ko'paytmani quyidagi jadval ko'rinishida yozamiz:

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| $(a; x)$ | $(a; y)$ | $(a; z)$ | $(a; t)$ |
| $(b; x)$ | $(b; y)$ | $(b; z)$ | $(b; t)$ |
| $(c; x)$ | $(c; y)$ | $(c; z)$ | $(c; t)$ |

Dekart ko'paytma elementlarini ustunlar bo'yicha sanasak,  $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$  ga ega bo'lamiz.

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1.  $2 \cdot 5 = 10$  ni to'plam nazariyasi va yig'indiga asoslangan ta'riflari bo'yicha tushuntiring.
2. " $2 \cdot 5 = 10$ " ning turli ma'nolarini ochib beradigan barcha masalalarni yozing.
3. Ko'paytirish qonunlaridan foydalanib, ifoda qiymatini hisoblang:  
9·13+9·87  
4·17·25
4.  $3 \cdot 4 = 12$  ni to'plam nazariyasi va yig'indiga asoslangan ta'riflari bo'yicha tushuntiring.
5. " $3 + 5 = 8$ " ning turli ma'nolarini ochib beradigan barcha masalalarni yozing.
6. Ko'paytirish qonunlaridan foydalanib, ifoda qiymatini hisoblang:  
17·19-17·9  
8·379·125
7.  $4 \cdot 4 = 16$  ni to'plam nazariyasi bo'yicha va yig'indiga asoslangan ta'riflari bo'yicha tushuntiring.

8. " $4 \cdot 4 = 16$ " ning turli ma'nolarini ochib beradigan barcha masalalarni yozing.

9. Ko'paytirish qonunlaridan foydalanib, ifoda qiymatini hisoblang:  
126·24+126·6+126·10  
40·7·3·25

### Nazorat uchun savollar:

1. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi ta'rifini ayting.
2. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasining mavjudligi va yagonaligini asoslang.

3. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasining xossalarini ayting va asoslang.

4.4-§. Nomanfiy butun sonni natural songa bo'lishning ta'rifini, uning mavjudligi va yagonaligi. Yig'indini va ko'paytmani songa bo'lish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosi.

1. Nomanfiy butun sonlar bo'linmasi ta'rifini. Nomanfiy butun sonlar to'plamida bo'lish amalini ta'riflash uchun to'plamni sinflarga ajratish tushunchasidan foydalaniladi.

Quvvati  $a$  ga teng bo'lgan  $A$  to'plamni teng quvvatli sinflarga ajratish mumkin bo'lsin.

1-ta'rif. Agar  $b$  soni  $A$  to'plamni qismlarga ajratishdagi qism to'plamlar soni bo'lsa,  $a$  va  $b$  nomanfiy butun sonlar **bo'linmasi** deb, har bir qismdagi elementlar soni  $c$  ga aytiladi.

Agar  $b$  soni  $A$  to'plamni sinflarga ajratishdagi har bir qism elementlari soni bo'lsa,  $a$  va  $b$  sonlar **bo'linmasi** deb, qism to'plamlar soni  $c$  ga aytiladi.

Nomanfiy butun  $a$  va  $b$  sonlar bo'linmasini topish amali **bo'lish**,  $a$  — **bo'linuvchi**,  $b$  — **bo'luvchi**,  $a : b$  — **bo'linma** deyiladi. Bo'lish ta'rifiga ko'ra bo'lishga oid masalalar ikki turga ajraladi:

1) mazmuniga ko'ra bo'lish; 2) teng qismlarga ajratish.  
1-turga oid masala: 48 ta qalam 6 ta qutichaga baravardan solingan bo'lsa, har bir qutichaga nechtdan qalam joylangan?

2-turga oid masala: 48 ta qalam 6 tadan qilib qutichalarga solingan bo'lsa, nechta quticha kerak bo'ladi?

Bo'lishni ko'paytirishga teskari amal sifatida ham ta'riflash mumkin:

13-ta'rif.  $a$  va  $b$  nomanfiy butun sonlar bo'linmasi deb,  $a = bc$  tenglik bajariladigan  $c$  nomanfiy butun songa aytiladi.

2. Nomanfiy butun sonlar bo'linmasining mavjudligi va yagonaligi. Bo'lishning mavjudligi haqidagi masala  $n(A) = a$  bo'lgan  $A$  to'plamni teng quvvatli qism to'plamlarga ajratish mumkinligi masalasi bilan bog'liq. Agar  $A$  to'plamni berilgan  $b$  sondagi yoki quvvatdagi sinflarga ajratish mumkin bo'lsa,  $a$  ning  $b$  songa bo'linmasi mavjud bo'ladi.

4-teorema.  $a$  sonining  $b$  songa bo'linmasi mavjud bo'lsa,  $u$  yagonadir.

Isbot. Haqiqatan ham,  $a : b = c$  va  $a : b = d$  va  $d$  son  $c$  sondan farqli bo'lsin. Ta'rifga ko'ra  $a = bc$  va  $a = bd$ . Bundan  $bc = bd$  va ko'paytmaning qisqaruvchanligiga ko'ra  $c = d$  ekanligi kelib chiqadi.

5-teorema.  $a$  nomanfiy butun son  $b$  natural songa bo'linishi uchun  $a$  son  $b$  sondan kichik bo'lmasligi zarur.

Isboti.  $a$  va  $b$  natural sonlarning bo'linmasi mavjud bo'lsin, ya'ni  $a = bc$  shartni qanoatlantiruvchi  $c$  natural soni topilsin.

Istalgan  $c$  natural son uchun  $1 \leq c$  da'vo o'rinli. Ko'paytmaning monotonligiga ko'ra  $b \cdot 1 \leq bc$ ,  $bc = a$   $b \cdot 1 = b$  ekani hisobga olinsa,  $b \leq a$  ekani kelib chiqadi.

Lekin  $b \leq a$  shartning bajarilishi  $a : b$  bo'linma mavjud bo'lishi uchun yetarli emas.

Masalan,  $3 \leq 19$ , lekin 19 soni 3 ga bo'linmaydi. Bunday hollarda qoldiqli bo'lish haqida gapiriladi. Agar  $b \leq a$  va  $a$  soni  $b$  ga bo'linmasi, shunday  $q, r$  natural sonlar topiladiki,  $r < b$  bo'lib,  $a = bq + r$  va tenglik bajariladi.  $(a; b)$  juftlik uchun yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi  $(q; r)$  sonlarning topilishi  $a$  ni  $b$  ga qoldiqli bo'lish deyiladi. Bu yerda  $q$  — to'liqsiz bo'linmava  $r$  — qoldiq deyiladi,  $a : b = q$  ( $r$  qoldiq) shaklida yoziladi.

0 ni va 0 ga bo'lish masalasiga alohida to'xtab o'tamiz.  $a = 0$  va  $b \neq 0$  holda  $0 : b = 0$  tenglik bajariladi, chunki  $0 = b \cdot 0$ . Demak, 0 ning 0 dan farqli istalgan songa bo'linmasi 0 ga teng. Lekin 0 ga bo'lish amali aniqlanmagan. Faraz qilaylik, noldan farqli  $a$  sonning 0 ga bo'linmasi mavjud va  $u$   $c$  songa teng bo'lsin, ya'ni  $a \neq 0$   $ua : c$ . Bundan  $a = 0 \cdot c = 0$  qarama-qarshilik kelib chiqadi.  $0 : 0 = c$  bo'lsin, bu holda

$0 = 0 \cdot c$  tenglik istalgan  $c$  son uchun o'rinli bo'ladi, bu esa amal natijasi yagona bo'lish shartiga zid.

### 3. Nomanfiy butun sonlarni bo'lish qoidalari.

1) Yigindini songa bo'lish qoidasi. Yig'indini songa bo'lish uchun, agar bo'linsa, har bir qo'shiluvchini shu songa bo'lib, natijalarni qo'shish kerak:

$$(a+b) : c = a : c + b : c$$
$$48 : 3 = (30 + 18) : 3 = 30 : 3 + 18 : 3 = 10 + 6 = 16.$$

2) Ko'paytmani songa bo'lish qoidasi. Ko'paytmani songa bo'lish uchun, agar bo'linsa, ko'paytuvchilardan birini shu songa bo'lib, natijani ikkinchi songa ko'paytirish kerak:

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$$
$$75 : 5 = (3 \cdot 25) : 5 = 3 \cdot (25 : 5) = 3 \cdot 5 = 15.$$

3) Sonni ko'paytmaga bo'lish qoidasi. Sonni ko'paytmaga bo'lish uchun, agar bo'linsa, sonni avval ko'paytuvchilardan biriga, so'ng ikkinchisiga bo'lish yetarli.

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b.$$
$$105 : (5 \cdot 7) = (105 : 5) : 7 = 21 : 7 = 3.$$

#### Nazorat uchun savollar:

1. Nomanfiy butun sonlar bo'linmasi ta'rifini bering.
2. Nomanfiy butun sonlar bo'linmasining mavjudligi va yagonaligi haqida ma'lumot bering.
3. Nomanfiy butun sonlarni bo'lish qoidalarini ayting va asoslang.

### Mustaqil yechish uchun misollar test savollari.

Nomanfiy butun sonlar to'plamini to'plamlar nazariyasi asosida qurish: Natural son va nol tushunchasi. Nomanfiy butun sonlar to'plamida amallar bajarish.

| No | Test savollari   | A   | B   | C  | D  |
|----|--|---|---|--|--|
| 1  | Nomanfiy butun sonlar ustida amallarning nazariy asoslari  | miqdorlar   | to'plamlar nazariyasi, aksiomatik nazariya, miqdorlar | miqdorlar, matematik mantiq                          | aksiomatik nazariya                              |
| 2  | Natural sonni ta'riflash uchun foydalaniladigan tushunchalarni ko'rsating.                         | o'zaro bir qiymatli moslik  | natural sonlar kesmasi                                | tartib va sanoq natural sonlar                       | To'plamni sinflarga ajratish, teng quvvatliliigi |
| 3  | No da qo'shish amalining xossalari qaysi qatorda to'g'ri ko'rsatilgan?                             | Kommutativlik, assosiativlik, monotonlik, qisqaruvchanlik, 0 ni yutish qonuni | Kommutativlik, assosiativlik, distributivlik          | 0 ni yutish qonuni, simmetrik elementga ega bo'lish. | Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish.  |
| 4  | Yig'indining assosiativlik qonuni qaysi qatorda to'g'ri ifodalangan?                               | $a+b=b+a$   | $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$                               | $a(b+c)=ab+ac$                                       | $a+b>b$<br>$a+b>a$                               |
| 5  | $(7+2)+(8+3)=(7+3)+(2+8)=20$ misolning yechilishida qo'shishning qaysi qonunlaridan foydalanilgan? | Assosiativlik va kommutativlik  | Kommutativlik   | monotonlik   | qisqaruvchanlik                                  |
| 6  | Nomanfiy butun sonlar ayirmasi qaysi tushuncha orqali ta'riflanadi?                                | Qism to'plam elementlari  | To'plamlar ayirmasi elementlari soni.                 | To'ldiruvchi to'plam elementlari soni                | Universal to'plam                                |

|    |  |   |  |   |  |
|----|--|---|--|---|--|
| 7  | No da ayirma qanday qoidalarga bo'ysunadi?   | ayirmaning monotonligi                            | yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish | ayirmaning ko'paytmaga nisbatan distributivligi   | ayirmaning qisqaruvchanligi                    |
| 8  | Quyidagi ayirmani hisoblashda ayirmaning qaysi qoidasidan foydalaniladi $215-(83+37)$ ?          | sondan yig'indini ayirish                         | yig'indidan sonni ayirish                      | ayirmaning mavjudligi sharti                      | kopaytmaning ayirmaga nisbatan distributivligi |
| 9  | Kopaytirish va qo'shish uchun umumiy xossani belgilang   | yig'indidan sonni ayirish                         | o'rin almashtirish                             | o'rin almashtirish, guruhlash                     | taqsimot, guruhlash                            |
| 10 | Quyida qanday qonundan foydalanildi? $(12 \cdot 30) : 15 = 12 \cdot (30 : 15) = 12 \cdot 2 = 24$ | yig'indini va ko'paytmani songa bo'lish qoidalari | ko'paytmani songa bo'lish qoidasi              | sonni yig'indiga bo'lish qoidasi                  | sonni ko'paytmaga bo'lish qoidasi              |
| 11 | Quyida qanday qonundan foydalanildi? $(220+140) : 10 = 220 : 10 + 140 : 10 = 22 + 14 = 36$       | yig'indini songa bo'lish qoidasi                  | ko'paytmani songa bo'lish qoidasi              | yig'indini va ko'paytmani songa bo'lish qoidalari | sonni yig'indiga bo'lish qoidasi               |

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| B | D | A | B | A | C | B | A | C | B  | A  |    |    |    |    |

**4.5-§. Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik asosda qurish: Nazariyani aksiomatik metod bilan qurish tushunchasi. Peano aksiomalari. Matematik induksiya metodi.**

**1. Nazariyani aksiomatik qurish to'g'risida.** Har bir fanni bayon etishda tushunchalarga nisbatan turlicha mulohaza yuritiladi. Chunki bu tushunchalarning ayrimlari o'z-o'zidan tushuniladigan tushunchalar bo'lsa, ayrim tushunchalar esa ma'lum tushunchalarga asoslangan holda mantiqiy mulohazalar yuritish asosida ta'riflanadi.

Boshqacha aytganda, tushunchalar ta'riflanmaydigan va ta'riflanadigan tushunchalarga bo'linadi. *Tariflanmaydigan tushunchalar insonning ko'p asrlik amaliy-ijodiy faoliyatining natijasi bo'lib, ular boshlang'ich tushunchalar deb yuritiladi.*

Bularsiz, har qanday nazariyani, aksiomatik qurish uchun *boshlang'ich tushunchalar asosida nazariyaning aksiomalari tuziladi.* Aksiomalar isbotlanmaydigan mulohazalar bo'lib, biri ikkinchisining natijasi sifatida kelib chiqmasligi va biri ikkinchisini inkor etmasligi zarur. Shuningdek, berilgan nazariyani aksiomatik qurishda uning teoremlarini isbotlash uchun aksiomalar yetarli bo'lishi zarur.

Amaliyot shuni ko'rsatadiki, bitta nazariya bir necha yo'llar bilan aksiomatik qurilishi mumkin. Bu yo'llar bir-biridan tanlab olingan boshlang'ich tushuncha va munosabatlari, ularga oid aksiomalar sistemasi bilan farqlanadi.

Asosiy tushunchalar, munosabatlar va aksiomalar kiritilgandan keyin nazariyaning rivojlanishi faqat mantiqiy fikrlash asosida boradi. Aksiomatik nazariyani qurishda tushuncha, munosabat va aksiomalar ixtiyoriy bo'lmasdan, ular ba'zi bir haqiqiy obyektlar va ularning xossalari yaqqol ko'rsatishi lozim. Masalan, ixtiyoriy uchta  $A, B$  va  $M$  nuqtalar uchun,  $M$  nuqtadan  $A$  va  $B$  nuqtalargacha masofalarning yig'indisi bu nuqtalar orasidagi masofadan kichik degan aksioma aytilsa, u holda haqiqatan hayotga aloqasi bo'lmagan nazariya yuzaga kelar edi, haqiqatda esa  $|MA| + |MB| \geq |AB|$ . Shunday qilib, aksiomatik nazariya reallikning matematik modelini berishi kerak.

Agar munosabatlari bilan berilgan to'plamda aksiomalar sistemasini barcha aksiomalari bajarilsa, u holda munosabatlari bilan berilgan to'plam aksiomalar sistemasini modeli deyiladi. Biz quyidagi aksiomalar sistemasining modellarini qaraylik. Aksiomalar sistemasi modeli real

dunyo xossalari aniqroq ifodalashi uchun ular mantiqan bir qancha talablarni bajarishi lozim.

Birinchi navbatda aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz bo'lishi kerak. Boshqacha aytganda berilgan aksiomalar sistemasida bir paytda rost va yolg'on tasdiq kelib chiqmasligi kerak.

Ikkinchidan, aksiomalar sistemasi bir-biriga bog'liq bo'lmasligi, ya'ni bir aksioma aksiomalar sistemasining boshqa aksiomalaridan kelib chiqmasligi kerak.

Agar biz yuqoridagi sistemani 4- aksiomasini agar  $a \sim b$  va  $b \sim c$  bo'lsa, u holda  $a \sim c$  deb olsak, u aksioma ortiqcha bo'ladi, chunki uni boshqa aksiomalardan keltirib chiqarish mumkin.

Uchinchidan, aksiomalar sistemasi qat'iy bo'lishi kerak.

**2. Peano aksiomatikasi.**

Natural sonlarni qo'shish tushunchasi natural sonlar to'plami aksiomatikasini qurish uchun yagona asos emas. Shuning bilan birga bu tushuncha sodda emas. Ma'lumki,  $n$  natural soniga  $m$  natural sonini qo'shishni qadamma-qadam, ya'ni qadamga yana bitta birlikni qo'shish yordamida hosil qilamiz. Masalan,  $5+3=(((5+1)+1)+1)$ .

Shuning uchun, qo'shish operatsiyasini eng sodda ya'ni 1 sonini qo'shish operatsiyasiga keltirish mumkin.  $n+1$  soni bevosita  $n$  sonidan keyin kelganligi uchun keyingi songa o'tish to'g'risida gapirish mumkin. Shunga ko'ra, natural sonlar to'plamida asosiy tushuncha sifatida « $b$  soni  $a$  sonidan bevosita keyin keladi» tushunchasini tanlash mumkin.

Natural sonlar nazariyasini aksiomatik qurishda Peano ta'riflanmaydigan tushuncha sifatida "natural son" va ta'riflanmaydigan munosabat sifatida "...dan keyin keladi" degan munosabatni asos qilib olgan.

Peano aksiomalari:

• Hech qanday sondan keyin kelmaydigan 1 soni mavjud.

Bu aksiomadan ko'rinadiki, natural sonlar to'plamida birinchi element aniqlangan bo'lib, u 1 sonidan iboratdir.

• Har qanday  $a$  son uchun undan bevosita keyin keluvchi faqat va faqat bitta son  $a^*$  soni mavjud. Ya'ni  $a=b \Rightarrow a^*=b^*$ .

Bu aksioma natural sonlar to'plamining cheksiz ekanligini ifodalaydi.

• 1 dan boshqa ixtiyoriy natural son faqat va faqat bitta natural sondan keyin keladi  $a^*=b^* \Rightarrow a=b$ .

Bu aksiomadan ko'rinadiki, natural sonlar to'plami qat'iy tartiblangan to'plamdir.

• Agar biror  $F$  qoida 1 soni uchun o'rinli ekanligi isbotlangan bo'lsa va uning  $n$  natural soni uchun o'rinli ekanligidan navbatdagi natural son  $n+1$  uchun to'g'riligi kelib chiqsa, bu  $F$  qoida barcha natural sonlar uchun o'rinli bo'ladi.

Bu aksioma matematik induksiya aksiomasi deyiladi va unga matematik induksiya metodi asoslanadi.

### 3. Matematik induksiya metodi.

Matematik induksiya metodini bilish matematika fanini chuqur egallash, uning ichki sirlarini chuqur anglab yetishda muhim o'rin tutadi. Deduktiv va induktiv mulohaza yuritish umumiy xulosa chiqarishda har doim ham qo'l kelavermaydi. Chunki ko'p hollarda cheksiz ko'p xususiy hollarni ko'rib chiqqandan so'nggina, umumiy xulosa chiqarish mumkin bo'ladi. Umumiy xulosa chiqarishda matematik induksiya metodi eng qulay va oson metod hisoblanadi. U quyidagilardan iboratdir:

*I.  $n = 1$  uchun berilgan  $A(n)$  predikatning rostligi tekshiriladi.* (Agar  $n = 1$  uchun berilgan  $A(n)$  predikat rost bo'lsa, navbatdagi qadamga o'tiladi, aksincha bo'lsa, u holda berilgan predikat barcha  $n$  lar uchun yolg'on deb, umumiy xulosa chiqariladi.)

*II.  $n = k$  uchun  $A(n)$  predikat rost deb faraz qilinadi.*

*III.  $n = k+1$  uchun  $A(n)$  predikatning rostligi, ya'ni  $A(k) \Rightarrow A(k+1)$  isbotlanadi.* Shundan so'ng,  $A(n)$  predikat  $n$  ning barcha qiymatlarida rost deb umumiy xulosa chiqariladi.

**1-misol.** a)  $1+2+3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  predikat berilgan bo'lsin. Uni  $A(n)$  deb belgilaymiz va barcha natural sonlar uchun rostligini isbot qilamiz.

**Isbot.** I.  $n = 1$  uchun tekshiramiz, u holda

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \Rightarrow 1 = 1.$$

Demak,  $n = 1$  uchun  $A(n)$  predikat rost.

II.  $n = k$  uchun  $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$  ni, ya'ni  $A(k)$  predikatni rost deb faraz qilamiz.

III.  $n = k + 1$  uchun  $A(k + 1)$  predikatning rostligini, ya'ni

$$1+2+3+\dots+k+k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

to'g'riligini isbotlaymiz:

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Bu esa  $A(k + 1)$  mulohazaning o'zidan iboratdir. Demak,  $A(n)$  predikat  $n$  ning barcha qiymatlarida rost.

**2-misol.**  $(n^3+2n):3$  ekanligini matematik induksiya metodi yordamida isbotlang.

**Yechish.** I.  $n = 1$  da  $1^3+2 \cdot 1 = 1+2 = 3 \Rightarrow 3:3$ .

II.  $n = k$  da  $(k^3+2k):3$  deb faraz qilaylik.

III.  $n = k + 1$  da  $[(k+1)^3+2(k+1)]:3$  ekanligini isbotlaymiz.

**Isbot.**

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) = (k^3 + 2k) + 3 \cdot (k^2 + k + 1).$$

Bu yig'indi 3 ga karrali, chunki birinchi qo'shiluvchi  $(k^3 + 2k):3$  — farazga asosan, ikkinchi qo'shiluvchi 3 ga karrali ekanligi ko'rinib turibdi:  $3 \cdot (k^2 + k + 1):3$ . Demak,  $(n^3 + 2n):3$  bo'ladi.

**3-misol.**  $(n^3+11n):6$  bo'lsa, uni matematik induksiya metodi yordamida isbotlang.

**Yechish.**

I.  $n=1$  da  $1^3+11 \cdot 1 = 1+11 = 12 \Rightarrow 12:6$ .

II.  $n = k$  da  $(k^3 + 11k):6$  deb faraz qilaylik,

III.  $n = k + 1$  da  $[(k+1)^3+11(k+1)]:6$  ni isbotlaymiz.

**Isbot.**  $(k+1)^3+11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = (k^3 + 12k) + (3k^2 + 3k + 12) = (k^3 + 12k) + 3(k^2 + k + 4)$ .

Bunda  $(k+12):6$  — farazga asosan,  $3 \cdot [k^2 + k + 4]$  — bu ifodaning 3 ga karrali ekanligi ko'rinib turibdi,  $(k^2 + k + 4)$  ifoda esa 2 ga karrali. Demak,  $(n^3 + 11n):6$  bo'ladi.

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1-misol. Matematik induksiya metodidan foydalanib, ixtiyoriy natural son uchun quyidagi tenglik bajarilishini isbotlang:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n+1) = n \cdot (n+1)^2$$

2-misol. Matematik induksiya metodidan foydalanib, ixtiyoriy natural son uchun quyidagi tenglik bajarilishini isbotlang:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

3-misol. Matematik induksiya metodidan foydalanib, ixtiyoriy natural son uchun quyidagi tenglik bajarilishini isbotlang:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

4- misol. Matematik induksiya metodidan foydalanib, ixtiyoriy natural son uchun quyidagi tenglik bajarilishini isbotlang:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

5- misol. Matematik induksiya metodidan foydalanib, ixtiyoriy natural son uchun quyidagi tenglik bajarilishini isbotlang:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n^2+1)}{4}$$

#### Nazorat uchun savollar:

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik qurish haqida tushuncha bering.

2. Peano aksiomalarini ayting.

3. Matematik induksiya haqida tushuncha bering.

#### 4.6-§. Nomanfiy butun sonlarni qo'shish amalining aksiomatik ta'rifi.

##### Qo'shish qonunlari.

Natural sonlarni qo'shish va uning xossalari. Qo'shish amalining ta'rifi German Grossman (1809—1877) tomonidan berilgan qo'shish amalining induktivlik ta'rifiga asoslanadi. Bu ta'rif ikki qismdan iborat bo'lib, quyidagicha:

1) ixtiyoriy  $a$  natural songa  $1$  ni qo'shish, bevosita  $a$  dan keyin keladigan sonni beradi. Ya'ni ( $\forall a \in \mathbb{N}$ ) ( $a + 1 = a'$ ).

2)  $a + b'$  amali,  $a$  songa bevosita  $b$  sonda keyin keladigan  $b'$  sonni qo'shish natijasida  $a + b$  sonda bevosita keyin keladigan natural  $(a + b)'$  sonni beradi. Ya'ni ( $\forall a, b \in \mathbb{N}$ ) [ $(a + b)' = (a + b) + 1$ ].

Peanoning ikkinchi aksiomasidan ma'lumki,  $n$  — natural son bo'lsa,  $n + 1$  ham albatta natural son bo'ladi. Bunda  $a$  va  $a + b$  lar

natural son bo'lganda  $a + b' = (a + b)'$  ham natural son bo'lishi kelib chiqadi. Shuningdek,  $a + 1 = a'$  dan Peanoning aksiomasiga asosan  $a$  natural son bilan  $b$  natural sonning yig'indisi to'la aniqlangan va natural sonda iborat bo'ladi.

Demak, qo'shish amali natural sonlar to'plamida hamma vaqt bajariladigan bir qiymatli amal ekan.

Natural sonlarni qo'shish ta'rifidan ko'rinadiki, har qanday natural son o'zidan oldingi natural son bilan biring yig'indisiga teng bo'lar ekan. Ya'ni

$$\begin{aligned} 2 &= 1+1, & 6 &= 5+1, \\ 3 &= 2+1, & 7 &= 6+1, \\ 4 &= 3+1, & 8 &= 7+1, \\ 5 &= 4+1, & 9 &= 8+1 \end{aligned}$$

bo'ladi. Natijada biz  $1$  ni qo'shish jadvalini hosil qildik. Endi  $2$  ni qo'shish jadvalini tuzaylik:

$$2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=3+1=4.$$

Demak,  $2$  ni qo'shish jadvali:

$$\begin{aligned} 1+2 &= 1+(1+1)=(1+1)+1=2+1=3, \\ 2+2 &= 2+(1+1)=(2+1)+1=3+1=4, \\ 3+2 &= 3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5, \\ 4+2 &= 4+(1+1)=(4+1)+1=5+1=6. \end{aligned}$$

$3$  ni qo'shish jadvalini tuzsak:

$$\begin{aligned} 1+3 &= 1+(2+1)=(1+2)+1=3+1=4, \\ 2+3 &= 2+(2+1)=(2+2)+1=4+1=5, \\ 2+4 &= 2+(3+1)=(2+3)+1=5+1=6. \end{aligned}$$

Xuddi shu yo'l bilan bir xonali sonlarni qo'shish jadvalini tuzishimiz mumkin. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar natural sonlar qatorida  $a$  dan bevosita keyin keladigan  $b$  ta sonni sanasak, natijada oxiri sanalgan son  $a$  va  $b$  sonlarning yig'indisi bo'ladi va u  $a + b$  ko'rinishda belgilanadi. Bunda  $a$  — birinchi qo'shiluvchi,  $b$  — ikkinchi qo'shiluvchi,  $a + b$  esa yig'indi deb yuritiladi.

Qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Guruhlash (assotsiativlik) xossasi.

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [(a + b) + c = a + (b + c)].$$

Bu xossani matematik induksiya metodi yordamida isbotlaylik. Isbot. 1)  $c = 1$  bo'lsin. U holda  $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$  (ta'rifga asosan).

Demak,  $c = 1$  uchun guruhlash xossasi o'rinli.

2)  $c = n$  uchun  $(a + b) + n = a + (b + n)$  o'rinli deb faraz qilaylik.

3)  $c = n + 1$  uchun bu xossaning to'g'riligini isbotlaylik.

$$(a + b) + (n + 1) = [(a + b) + n] + 1 = (\text{ta'rifga asosan}).$$

$$= [a + (b + n)] + 1 = (\text{farazga asosan})$$

$$= a + [(b + n) + 1] = (\text{ta'rifga asosan})$$

$$a = [b + (n + 1)] (\text{ta'rifga asosan}).$$

$$\text{Demak, } (a + b) + (n + 1) = a + [b + (n + 1)].$$

Peanoning 4-aksiomasiga asosan,  $(a + b) + c = a + (b + c)$  ekanligi kelib chiqadi.

2°. O'rin almashtirish (kommutativlik) xossasi.

$$(\forall a, b \in \mathbb{N}) (a + b = b + a).$$

Bu xossani ham matematik induksiya metodidan foydalangan holda isbotlaymiz.

Isbot. 1)  $a = 1$  bo'lsa,  $1 + b = b + 1$  bo'lishini isbotlaylik.  $b = 1$  bo'lsa,  $1 + 1 = 1 + 1$  bo'ladi. Demak,  $b = 1$  uchun  $1 + b = b + 1$  tenglik to'g'ri.

$b = n$  uchun  $1 + n = n + 1$  to'g'ri deb faraz qilaylik.  $b = n + 1$  uchun  $1 + (n + 1) = (n + 1) + 1$  to'g'riligini isbotlaymiz.

$$1 + (n + 1) = (1 + n) + 1 = (\text{ta'rifga asosan})$$

$$= (n + 1) + 1 (\text{farazga asosan}).$$

$$\text{Demak, } 1 + (n + 1) = (n + 1) + 1 \text{ bo'ladi.}$$

Endi yuqoridagi xossa  $\forall a \in \mathbb{N}$  uchun o'rinli ekanligini isbotlaylik.

$a = 1$  uchun o'rinli ekanligini ko'rdik.  $a = m$  uchun  $m + b = b + m$  deb faraz qilaylik.

$a = m + 1$  uchun  $(m + 1) + b = b + (m + 1)$  ekanligini isbotlaylik. U holda

$$(m + 1) + b = m + (1 + b) = m + (b + 1) = (1^\circ\text{-xossaga asosan})$$

$$= (m + b) + 1 = (\text{ta'rifga asosan})$$

$$= (b + m) + 1 = b + (m + 1) (\text{farazga asosan}).$$

$$\text{Demak, } a + b = b + a (4\text{-aksiomaga asosan}).$$

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Aksiomatik yondoshuv asosida 4 va 5 ni taqqoslang.

2. Yig'indining aksiomatik ta'rifi asosida  $4+5$  ni son o'qida tushuntiring.

3. Yig'indining aksiomatik ta'rifi asosida 4 ga qo'shish jadvalini tuzing.

4. Aksiomatik yondoshuv asosida 6 va 5 ni taqqoslang.

5. Yig'indining aksiomatik ta'rifi asosida  $6+5$  ni son o'qida tushuntiring.

6. Yig'indining aksiomatik ta'rifi asosida 6 ga qo'shish jadvalini tuzing.

7. Aksiomatik yondoshuv asosida 4 va 7 ni taqqoslang.

8. Yig'indining aksiomatik ta'rifi asosida  $7+4$  ni son o'qida tushuntiring.

9. Yig'indining aksiomatik ta'rifi asosida 7 ga qo'shish jadvalini tuzing.

10. Aksiomatik yondoshuv asosida 8 va 5 ni taqqoslang.

11. Yig'indining aksiomatik ta'rifi asosida  $8+5$  ni son o'qida tushuntiring.

12. Yig'indining aksiomatik ta'rifi asosida 8 ga qo'shish jadvalini tuzing.

### Nazorat uchun savollar.

1. Natural sonlarni qo'shish ta'rifini ayting.

2. Natural sonlarni qo'shish xossalari ayting va asoslang.

3.  $32 + 46 = (30 + 2) + (40 + 6) = (30 + 40) + (2 + 6) = 70 + 8 = 78$  ning yechilishini tushuntiring...

### 4.7-§. Nomanfiy butun sonlarni ko'paytirish amalining aksiomatik ta'rifi. Ko'paytirish qonunlari.

Natural sonlarni ko'paytirish amali ta'rifi va xossalari. Harbiri  $a$  ga teng bo'lgan  $b$  ta natural son yig'indisi  $\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ ta}}$  itopish talab qilingan bo'lsin. Bunday

ko'rinishdagi yig'indini hisoblash ko'p hollarda amaliy jihatdan qiyinchilik tug'diradi. Shuning uchun bir xil qo'shiluvchilar yig'indisini topishni osonlashtirish maqsadida yangi amal kiritiladi. Bu amal ko'paytirish amali deb yuritiladi.

Ta'rif. Har biri  $a$  ga teng bo'lgan  $b$  ta qo'shiluvchining yig'indisini topishga ko'paytirish amali deyiladi.

U  $a \times b$  yoki  $a \cdot b$  ko'rinishda belgilanib,  $a$  sonining  $b$  soniga ko'paytmasi deb ataladi.

Demak,  $a \cdot b = \underbrace{a+a+a+\dots+a}_{b \text{ ta}}$ . Bunda  $a \cdot b$  — ko'paytma,  $a$ ,  $b$  —

ko'paytuvchilar deb yuritiladi.

Ko'paytirish amalining aksiomatik ta'rifi quyidagicha:

Ta'rif.  $a$  natural sonining  $b$  natural soniga ko'paytmasi deb, shunday algebraik operatsiyaga aytiladiki, unda

$$1) a \cdot 1 = a,$$

$$2) a \cdot (b+1) = a \cdot b + a \text{ bo'ladi.}$$

Bu ta'rif yordamida bir xonali sonlar uchun ko'paytirish jadvalini tuzishimiz mumkin.

Masalan, a) 2 ni ko'paytirish jadvalini tuzaylik:

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot (1+1) = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot (2+1) = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$2 \cdot 4 = 2 \cdot (3+1) = 2 \cdot 3 + 2 = 6 + 2 = 8$$

b) 3 ni ko'paytirish jadvalini tuzaylik:

$$3 \cdot 1 = 3$$

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot (1+1) = 3 \cdot 1 + 3 = 6$$

$$3 \cdot 3 = 3 \cdot (2+1) = 3 \cdot 2 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$3 \cdot 4 = 3 \cdot (3+1) = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12$$

Ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. *Distributivlik xossasi (chapdan)*.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ , ya'ni natural sonning boshqa ikki natural son yig'indisiga ko'paytmasi, shu sonning har bir qo'shiluvchi bilan ko'paytmasining yig'indisiga teng.

Isbot. Bu xossani isbotlashda matematik induksiya metodidan foydalanamiz.

$$c = 1 \text{ uchun } a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1 = a \cdot b + a \text{ to'g'ri bo'ladi.}$$

$$c = n \text{ uchun } a \cdot (b + n) = ab + an \text{ to'g'ri deb faraz qilamiz.}$$

$$c = n + 1 \text{ uchun bu xossaning to'g'riligini isbotlaymiz.}$$

$$a \cdot (b + n + 1) = a \cdot [(b + n) + 1] = a(b + n) + a \cdot 1 = [ta'rifga asosan] = ab + an + a = [farazga asosan] = ab + a(n + 1) = [ta'rifga asosan].$$

$$\text{Demak, } a \cdot (b + c) = ab + ac \text{ bo'ladi.}$$

2°. *Distributivlik xossasi (o'ngdan)*.  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  bo'ladi, ya'ni ikkita son yig'indisining uchinchi son bilan

ko'paytmasi, har bir sonning uchinchi son bilan ko'paytmasining yig'indisiga teng.

Isbot. Buni matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$$c = 1 \text{ uchun } (a + b) \cdot c = (a + b) \cdot 1 = a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1 \text{ to'g'ri}$$

bo'ladi.

$$c = n \text{ uchun } (a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n \text{ to'g'ri deb faraz qilamiz.}$$

$$c = n + 1 \text{ uchun } (a + b) \cdot (n + 1) \text{ ni to'g'ri bo'lishini}$$

isbotlaymiz.

$$(a + b)(n + 1) = (a + b) \cdot n + (a + b) = (\text{ta'rifga asosan})$$

$$= an + bn + a + b = (\text{farazga asosan}) = an + a + bn + b =$$

(yigindining o'rin almashtirish xossasiga asosan)  $= a(n + 1) + b(n + 1)$  (ko'paytirish ta'rifiga asosan).

Demak,  $(a + b)(n + 1)$  uchun yuqoridagi xossa to'g'ri ekan.

Bundan  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  bo'ladi.

3°. *Ko'paytirishning o'rin almashtirish xossasi*.  $a \cdot b = b \cdot a$ , ya'ni ko'paytuvchilarning o'rnini o'zgartirish bilan ko'paytma o'zgarmaydi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$$a + 1 \text{ uchun } 1 \cdot b = b = b \cdot 1 \text{ bo'lib, bu xossa o'rinli bo'ladi.}$$

$$a = n \text{ uchun } n \cdot b = b \cdot n \text{ deb faraz qilaylik.}$$

$$a = n + 1 \text{ uchun to'g'ri ekanligini isbotlaylik.}$$

$a - b = (n + 1) \cdot b = nb + 1 \cdot b = (\text{ko'paytirishning chapdan distributivlik xossasiga asosan}) = b \cdot n + b = (\text{farazga asosan}) = b \cdot (n + 1)$  (ko'paytirishning o'ngdan distributivlik xossasiga asosan).

Demak,  $(n + 1)b = b(n + 1)$ . Bundan  $a \cdot b = b \cdot a$  ekanligi kelib chiqadi.

4°. *Ko'paytirishning guruhlash xossasi*.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  bo'ladi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida isbotlaymiz.

$$(a \cdot b) \cdot 1 = ab = a \cdot (b \cdot 1) \text{ to'g'ri bo'ladi.}$$

$$c = n \text{ uchun } (a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n) \text{ deb faraz qilamiz. } c = n + 1$$

uchun to'g'riligini isbotlaymiz.

$$(a \cdot b) \cdot (n + 1) = (a \cdot b) \cdot n + ab = (\text{ko'paytirish ta'rifiga asosan})$$

$$= a \cdot (b \cdot n) + a \cdot b = (\text{farazga asosan}) = a(b \cdot n + b) = a(b \cdot (n + 1))$$

+ 1)) (ko'paytmaning distributivlik xossasiga asosan). Demak,  $(a \cdot b)(n + 1) = a(b(n + 1))$ . Bundan  $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ .

Natija. Har qanday natural sonning 0 soni bilan ko'paytmasi nolga teng.

$$\text{Haqiqatan ham, } 0 \cdot a = \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{a \text{ ta}} = 0.$$

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 4·5 ni tushuntiring.
2. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 4 ga ko'paytirish jadvalini tuzing.
3. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 6·5 ni tushuntiring.
4. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 6 ga ko'paytirish jadvalini tuzing.
5. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 4·7 ni tushuntiring.
6. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 7 ga ko'paytirish jadvalini tuzing.
7. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 8·5 ni tushuntiring.
8. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 8 ga ko'paytirish jadvalini tuzing.
9. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 7·5 ni tushuntiring.
10. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 5 ga ko'paytirish jadvalini tuzing.
11. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 9·5 ni tushuntiring.
12. Ko'paytmaning aksiomatik ta'rifi asosida 9 ga ko'paytirish jadvalini tuzing.

### Nazorat uchun savollar:

1. Natural sonlarni qo'shish ta'rifi ayting.
2. Natural sonlarni qo'shish xossalarini ayting va asoslang.
3. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi ta'rifi ayting, uning mavjudligi va yagonaligi haqidagi fikrni asoslang.
4. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasining xossalarini ayting va asoslang.

### 4.8-§. Ayirish va bo'lishning ta'rifi. nolga bo'lishning mumkin emasligi. Qoldiqli bo'lish

**Ayirish amalining ta'rifi va xossalari.** Aytaylik, bizga ikkita qo'shiluvchining yig'indisi  $a$  va qo'shiluvchilardan biri  $b$  berilgan holda ikkinchi qo'shiluvchini topish talab qilinsin. Demak, shunday  $x$  sonini topish kerakki, bunda  $a = b + x$  bo'lsin.

1-ta'rif. Berilgan  $a$  sonidan  $b$  sonni ayirish deb,  $b$  ga qo'shganda  $a$  hosil bo'ladigan  $x$  sonni topishga aytiladi.

Bunda:  $a$  — kamayuvchi,  $b$  — ayiriluvchi;  $x$  — ayirma deb yuritiladi va  $x = a - b$  ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchi bilan ayirmaning yig'indisidan iborat bo'ladi. Demak,  $a - b = x \Rightarrow a = b + x$ . Bundan ko'rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchidan katta bo'ladi, ya'ni  $a > b$ . Nomanfiy butun sonlar to'plamida kamayuvchi ayiriluvchidan katta yoki unga teng bo'lgan holdagina ayirish amali aniqlangan bo'ladi. Ya'ni  $a \geq b$  bo'lgan holda  $a - b$  ayirma mavjud bo'ladi.

#### Ayirish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar ikki sonning ayirmasiga ayiriluvchi qo'shilsa, kamayuvchi hosil bo'ladi, ya'ni  $a - b = c$  bo'lsa,  $a = b + c$  bo'ladi.

Isbot. Ta'rifga asosan  $a = b + c$  yoki  $c + b = a$ . Lekin  $c = a - b \Rightarrow c + b = (a - b) + b = a$ .

2°. Agar ikki son yig'indisidan qo'shiluvchilardan biri ayirilsa, ikkinchi qo'shiluvchi hosil bo'ladi, ya'ni

$$(\forall a, b \in \mathbb{N}) [(a + b) - b = a].$$

3°. Berilgan songa ikki sonning ayirmasini qo'shish uchun kamayuvchini qo'shib, ayiriluvchini ayirish kifoya, ya'ni

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a + (b - c) = (a + b) - c].$$

4°. Berilgan sonidan yig'indini ayirish uchun bu sonidan qo'shiluvchilarni birin-ketin ayirish kifoya, ya'ni

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [(a - (b + c)) = a - b - c].$$

5°. Berilgan sonidan ayirmani ayirish uchun kamayuvchini ayirib, ayiriluvchini qo'shish kifoya, ya'ni

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a - (b - c) = (a - b) + c].$$

Natural sonlarni bo'lish ta'rifi va xossalari.

2-ta'rif. Ikki ko'paytuvchining ko'paytmasi va bir ko'paytuvchi berilgan holda ikkinchi ko'paytuvchini topish amali bo'lish deyiladi.

Bunda berilgan ko'paytmani ifodalovchi son — *bo'linuvchi*, berilgan ko'paytuvchi — *bo'luvchi*, izlanayotgan ko'paytuvchi — *bo'linma* deyiladi.

Agar  $a$  — ko'paytma,  $b$  — berilgan ko'paytuvchi,  $c$  — izlanayotgan ko'paytuvchi bo'lsa, u bo'lish amali yordamida  $\frac{a}{b} = c$  yoki  $a : b = c$  ko'rinishda belgilanadi. Ta'rifdan ko'rinadiki, bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal ekan.

Bo'lishamali bir qiymatlidir. Masalan, a)  $9:3=3$ ; b)  $21:7=3$ ; d)  $111:3=37$ .

**Bo'lish amali quyidagi xossalarga ega.**

1°. *Ko'paytmani noldan farqli biror songa bo'lish uchun ko'paytuvchilardan birini shu songa bo'lish kifoya, ya'ni  $(a \cdot b):c=(a:c)b$ , bunda  $a:c$  bo'ladi, ya'ni  $a$  soniga butun marta bo'linadi.*

**Isbot.**  $(a \cdot b) : c = x$  desak,  $a \cdot b = c \cdot x$ . Lekin,  $(a : b) \cdot c = x$  bo'ladi.

U holda  $(a : c) \cdot cb = cx \Rightarrow (a : c) \cdot b = x \Rightarrow (a : c) \cdot b = (ab) : c$  bo'ladi.

2°. *Biror sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish uchun shu sonni bo'linuvchiga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmani bo'luvchiga bo'lish kifoya, ya'ni  $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a(b : c) = (ab) : c]$ .*

**Isbot.**  $a \cdot (b : c) = x$  bo'lsin.

Tenglikning ikkala tomonini  $c$  ga ko'paytirsak,  $a \cdot (b : c) \cdot c = xc$  bo'ladi.

Lekin  $(b : c) \cdot c = b$  bo'ladi. Bundan  $ab = xc$ . U holda ta'rifga asosan  $(ab) : c = x$  bo'ladi. Demak,  $(ab) : c = a \cdot (b : c)$ .

3°.  $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b]$ .

**Isbot.**  $a(b : c) = x$  desak,  $a = bc \cdot x$  bo'ladi. Tenglikning ikkala tomonini  $b$  ga bo'lsak  $a : b = c \cdot x$  bo'ladi. U holda bo'lish ta'rifga asosan  $(a : b) : c = x$  bo'ladi.

Demak,  $(a : b) : c = (a : c) : b$  bo'ladi.

4°.  $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a : (b : c) = ac : b]$ .

**Isbot.**  $a(b : c) = x$  desak,  $a = (b : c) \cdot x$  bo'ladi. U holda tenglikning ikkala tomonini  $c$  ga ko'paytirsak,  $a \cdot c = [(b : c) \cdot c] \cdot x$  bo'ladi. Bunda  $(b : c) \cdot c = b$  ekanligidan  $a \cdot c = b \cdot x$  bo'ladi. Bundan  $(a \cdot c) : b = x$  bo'ladi. Demak,  $a(b : c) = (ac) : b$ .

5°.  $(\forall a, b \in \mathbb{N}_0, c \in \mathbb{N}) (a : c \wedge b : c) \Rightarrow [(a + b) : c = a : c + b : c]$ .

**Isbot.**  $(a + b) : c = x$  bo'lsin. U holda  $a = (a : c) \cdot c$  va  $b = (b : c) \cdot c$ . Bundan  $(a : c) \cdot c + (b : c) \cdot c = cx$  yoki  $[(a : c) + (b : c)] : c = cx$  yoki  $a : c + b : c = x$ . Bundan  $a : c + b : c = (a + b) : c$  bo'ladi.

6°.  $(\forall a, b \in \mathbb{N}_0, \forall c \in \mathbb{N}) (a : c \wedge a : b : c) \Rightarrow (a - b) : c = a : c - b : c$ .

**Isbot.**  $(a - b) : c = x$  desak,  $a - b = cx$  bo'ladi.  $a = (a : c) \cdot c$  va  $b = (b : c) \cdot c$  desak,  $(a : c) \cdot c - (b : c) \cdot c = cx$ , bundan  $[(a : c) - (b : c)] : c = cx$ . U holda tenglikning ikkala tomonini  $c$  ga bo'lsak,  $a : c - b : c = x$ . Demak,  $a : c - b : c = (a - b) : c$ .

**Mustaqil yechish uchun misollar.**

1. Bo'linmaning ta'rifi asosida 24:4 ni tushuntiring.
2. 24:4 ifoda bilan yechiladigan 2 xil masalani tuzing.
3. Bo'linmaning ta'rifi asosida 16:4 ni tushuntiring.
4. 16:4 ifoda bilan yechiladigan 2 xil masalani tuzing.
5. Bo'linmaning ta'rifi asosida 36:6 ni tushuntiring.
6. 36:6 ifoda bilan yechiladigan 2 xil masalani tuzing.
7. Bo'linmaning ta'rifi asosida 12:4 ni tushuntiring.
8. 12:4 ifoda bilan yechiladigan 2 xil masalani tuzing.
9. Bo'linmaning ta'rifi asosida 25:5 ni tushuntiring.
10. 25:5 ifoda bilan yechiladigan 2 xil masalani tuzing.
11. Bo'linmaning ta'rifi asosida 24:3 ni tushuntiring.
12. 24:3 ifoda bilan yechiladigan 2 xil masalani tuzing.

**Nazorat savollari.**

1. Ayirish va bo'lishning ta'riflarini ayting.
2. Sonni nolga bo'lib bo'lmasligini tushuntiring.
3. Qachon qoldiqli bo'lish bajariladi?

**4.9-§. Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalari. Natural sonlar qatori kesmasi va chekli to'plam elementlari soni tushunchasi.**  
Tartib va sanoq natural sonlari.

**1. Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalari.** Yuqorida aytilgan fikrlarni umumlashtirib, nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalarini sanab o'tish mumkin:

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamida eng kichik element mavjud va u 0 ga teng. Bu esa to'plamning quyidan chegaralanganligini bildiradi.

2. Nomanfiy butun sonlar to'plami cheksiz va yuqoridan chegaralanmagan.

3. Nomanfiy butun sonlar to'plami diskret.

Diskretlik nomanfiy butun sonlar to'plamida har bir natural sondan keyin va oldin keladigan sonlarni ko'rsatish mumkinligi bilan izohlanadi. Faqat 0 hech qanday sondan keyin kelmaydi. Boshqacha aytganda, ikkita ixtiyoriy nomanfiy butun son orasida chekli sondagi nomanfiy sonlar joylashgan.

1. Nomanfiy butun sonlar to'plami «<» munosabati orqali tartiblangan. (Bu xossalar izohi tegishli bo'limlarda qaralgan edi.)

N natural sonlar to'plamiga tartib munosabatini kiritamiz. Bunda biz birinchi va to'rtinchi aksiomalarga va elementlar yig'indisi tushunchalariga asoslanamiz.

«a natural son b natural sondan kichik» ta'rifini keltirib chiqarishda chekli to'plamlarga bog'liqlikdan foydalanamiz.

Bizga ma'lumki, chekli A to'plam bilan bo'sh bo'lmagan chekli B to'plam birlashmasi  $C=A \cup B$  ( $A \cap B=\emptyset$ ) A to'plamdagidan ko'p elementlarga ega bo'ladi. Bu esa quyidagi ta'rifga olib keladi:

**Ta'rif.** Agar a va b natural sonlari uchun shunday bir c natural soni mavjud bo'lib,  $a+c=b$  munosabat o'rinli bo'lsa, a natural soni b natural sonidan kichik deyiladi va  $a < b$  ko'inishda yoziladi.

Masalan,  $5 < 7$  bu holda shunday natural son 2 mavjudki,  $2+5=7$  bo'ladi.

$a < b$  munosabatdan foydalanib, 4- aksiomani quyidagicha ifodalash mumkin:

**1-aksioma.** N natural sonlarning bo'sh bo'lmagan A to'plam ostida eng kichik son bor, ya'ni shunday sonni a desak, A to'plamdagi a dan farqli barcha x sonlari uchun  $a < x$ .

Endi < munosabatini N to'plamda qattiq tartib munosabati ekanini ko'rsatamiz, ya'ni bu munosabat tranzitiv va antisimmetrik. Aytaylik,  $a < b$  va  $b < c$  bo'lsin. Ta'rifga asosan shunday k va l sonlari topiladiki  $b=a+k$ ,  $c=b+l$  bo'ladi. U holda  $c=(a+k)+l$ .

Aksiomaga asosan  $c=a+(k+l)$ ,  $k+l$  natural son bo'lgani uchun tenglikdan  $a < c$ . Demak,  $a < b$  va  $b < c$  dan  $a < c$  kelib chiqadi. Bu esa < munosabati tranzitiv ekanligini ko'rsatadi.

< munosabati asimmetrik ekanligi 4- aksiomadan ko'rinadi. Bu aksiomaga asosan natural sonlar to'plamining bo'sh bo'lmagan A to'plamida eng kamida bitta eng kichik element a bor. A da bu element bir qiymatli aniqlangan va bundan boshqa eng kichik element yo'q ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik a dan boshqa eng kichik b element bor bo'lsin, u holda  $a < b$  va  $b < a$  bajariladi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas. Shunday qilib < munosabati N to'plamda qattiq tartib munosabati ekan. Bu tartibning chiziqli ekanini ko'rsatamiz, ya'ni ixtiyoriy ikkita turli xil a va b natural sonlar uchun  $a < b$  va  $b < a$  munosabatlardan biri bajariladi. Haqiqatan ham ikkita elementdan tashkil topgan  $A=\{a; b\}$  to'plamni olaylik.

1- aksiomaga asosan bu to'plamda eng kichik element bo'lishi kerak. Agar bu element a bo'lsa,  $a < b$ , agar bu element b bo'lsa,  $b < a$  munosabat o'rinli.

Endi natural sonlarni qo'shish monotonlik xossasiga ega ekanligini ko'rsatamiz.

Agar  $a < b$  bo'lsa, u holda ixtiyoriy c N uchun  $a+c < b+c$  ga ega bo'lamiz

(tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil soni qo'shsak, tengsizlik belgisi o'zgarmaydi). Aslida ta'rifga ko'ra  $a < b$  deganda shunday bir k sonni mavjud bo'lib  $b=a+k$  ekanini bildiradi. Lekin  $b+c=(a+k)+c$ . birinchi va ikkinchi aksiomalarga ko'ra  $b+c=(a+k)+c=a+(k+c)=a+(c+k)=(a+c)+k$ .

Demak,  $b+c=(a+c)+k$ . Bu esa  $a+c < b+c$  ekanini bildiradi. Endi natural sonlarni qo'shish qisqaruvchanligini ko'rsatamiz, ya'ni  $a+c=b+c$  bo'lsa, u holda  $a=b$  ga teng. Aslida quyidagi uch hol bo'lishi mumkin:  $a < b$ ,  $b < a$ ,  $a=b$ ; Ammo  $a < b$  bo'lsa, u holda  $a+c < b+c$  bo'ladi, biz esa  $a+c=b+c$  deb oldik. Demak  $a < b$  hol mumkin emas. Shu sababli  $b < a$  hol ham mumkin emas, faqat  $a=b$  bo'lgan hol qoladi.

### Natural sonlar to'plamining cheklanmaganligi va diskretligi.

1 - aksiomaga ko'ra  $N$  natural sonlar to'plamida eng kichik son mavjud. Bu son 1 bilan belgilanadi va birlik deb ataladi.  $N$  natural sonlar to'plamida eng kichik son bo'lgani uchun, ixtiyoriy  $a \in N$ , son uchun  $a \neq 1$  va  $1 < a$  bajariladi. Bu deganimiz  $a=1+b$ , bu yerda  $b \in N$  natural sonlar to'plamida eng katta son mavjud emas, haqiqatan ham ixtiyoriy  $a \in N$  uchun  $a < a+1$ , demak  $a \in N$  to'plam uchun eng katta son bo'la olmaydi. Shunga ko'ra  $N$  natural sonlar to'plami quyidan 1 soni bilan chegaralanib, yuqoridan esa chegaralanmagan deb aytiladi.

Barcha sonlar o'rtasida  $a$  sonidan keyin keluvchi eng kichik  $a+1$  son bor. Haqiqatan ham  $a$  sonidan keyin  $b$  soni kelsin desak, u holda shunday  $c$  natural soni topiladiki  $b=a+c$ .

Ammo  $1 < c$  bo'lganidan  $a+1 \leq a+c$  ga ega bo'lamiz, bundan esa  $a+1 \leq b$ . Bu esa  $a+1$  soni  $a$  sonidan keyin keluvchi eng kichik son ekanligini ko'rsatadi.

Bundan keyin  $a$  sonidan keyin keluvchi eng kichik songa,  $a$  sonidan bevosita keyin keluvchi son deyiladi. Shunday qilib,  $N$  natural sonlar to'plamidagi har bir elementdan bevosita keyin keluvchi element mavjud.

Bu xossa natural sonlar to'plamining diskretligi deyiladi. « $b$  soni  $a$  sonidan bevosita keyin keladi» munosabatiga « $a$  soni  $b$  sonidan bevosita oldin keladi» munosabati teskari hisoblanadi. Boshqacha aytganda,  $a$  soni  $b$  sonidan bevosita oldin keladi» munosabati faqat va faqat  $b=a+1$  bo'lganda o'rinli. 1 sonidan oldin keluvchi son yo'q, chunki birinchi va uchinchi aksiomalarga ko'ra  $1=a+1$  bajarilmaydi. 1 dan boshqa barcha natural sonlar uchun uning oldidan keluvchi faqat bitta va bitta natural son mavjudligini ham ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham  $b=1$  bo'lsa, u holda  $1 < b$  (1-eng kichik natural son), bundan esa shunday  $a \in N$  natural soni mavjud bo'lib,  $b=1+a=a+1$  ekani ko'rinadi. Demak,  $b$  natural soni  $a$  dan keyin kelar ekan, ya'ni  $b$  natural soni  $a$  dan bevosita keyin keladi. Endi  $b$  dan boshqa  $a$  dan bevosita keyin keluvchi natural son yo'qligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik,  $c$   $a$ ,  $c$   $b$  dan bevosita keyin keluvchi son bo'lsin. U holda  $b=a+1$ ;  $b=c+1$  bo'ladi, bundan  $a+1=c+1$ ;

Qo'shishning qisqaruvchanlik xossasiga asosan  $a=c$ , bu esa farazimizga qarama-qarshi. Demak,  $b$  son  $a$  sonidan bevosita keyin keluvchi yagona son ekan.

**2. Tartib va sanoq natural sonlar.** Shuni xulosa qilib aytish kerakki, natural sonlar nafaqat miqdorlarni o'ichash va to'plam elementlarini sanash uchun ishlatiladi, balki to'plam elementlarini

tartiblash ham natural sonlar yordamida amalga oshiriladi. Bunda chekli to'plam uchun natural sonlar qatori kesmasi tushunchasi ishlatiladi.

**Ta'rif.** Natural sonlar qatorining  $N_a$  kesmasi deb,  $a$  natural sondan katta bo'lmagan barcha natural sonlar to'plamiga aytiladi.

Masalan,  $N_5 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ .

**Ta'rif.**  $A$  to'plam elementlarini sanash deb,  $A$  to'plam bilan natural sonlar qatorining  $N_a$  kesmasi orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilishiga aytiladi.

$a$  soni  $A$  to'plam elementlari sonini bildiradi va  $n(A) = a$  deb yoziladi. to'plam elementlarini sanash faqat ularning miqdorini aniqlab qolmay, balki to'plam elementlarini tartiblaydi ham. Bunda har bir elementning sanoqda «nechanchi» ekanligini ham aytish mumkin bo'ladi. Elementning nechanchi bo'lishi sanashning olib borilishiga bog'liq. Kombinatorikada ko'rilganidek,  $a$  ta elementli to'plam tartiblanishlari umumiy soni  $a!$  ga teng bo'lgani uchun bu turli usullar bilan sanalganda element tartib nomeri  $a!$  marta o'zgarishi mumkin degani. Lekin qanday usul bilan sanalmasin, to'plam elementlari soni o'zgarmasdir. Demak, «nechta» savoliga javob beruvchi natural sonlar miqdoriy «nechanchi» savoliga javob beruvchi natural sonlar tartib natural sonlar deyiladi. to'plam oxirgi elementining tartib nomeri bir vaqtda to'plam elementlari sonini bildiradi. Demak, sanoq 19- elementida tugasa, to'plamda 19 ta element bor degan xulosa chiqariladi.

### Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Qulay usul bilan hisoblang

$$213+287+386+564$$

$$(3748+10392)-8392$$

$$(40 \cdot 7 \cdot 3) \cdot 25$$

$$37 \cdot 42 + 36 \cdot 37 \cdot 78 \cdot 27$$

$$(675+225) \cdot 25$$

2. \* o'rniga tegishli " $<$ ", " $>$ ", " $=$ " belgilarini qo'yinki, natijada to'g'ri mulohaza xosil bo'lsin.

$$560:(7 \cdot 4) * 560:7:4$$

$$400:8+16:8 * 416:8$$

3. Masalani turli usulda yeching

Ikki bolaga 3 yashil va 4 ta qizil shar tarqatildi. Har bir bolaga jami nechta shar tarqatildi.

4. a va b sonlarining har qaysisini 5 ga bo'lganda 3 qoldiq qoladi.  $a+b$ ,  $a-b$  va  $a \cdot b$  ifodani 5 ga bo'lganda qancha qoldiq qoladi.

5. Ifodaga ko'ra masala tuzing:

$$3 \cdot (350 - 105)$$

**Nazorat uchun savollar.**

$$1. 569 \cdot 371 + 170 \cdot 569 + 569 \cdot 459 = 569 \cdot 371 + 569 \cdot 170 + 569 \cdot 459 = 569 \cdot (371 + 170 + 459) = 569 \cdot [(371 + 459) + 170] = 569 \cdot (830 + 170) = 569 \cdot 1000 = 569000$$

ni hisoblashda qo'shish va ko'paytirishning qanday qonunlaridan foydalanilganini ko'rsating.

$$2. 32 + 46 = (30 + 2) + (40 + 6) = (30 + 40) + (2 + 6) = 70 + 8 = 78$$

ning yechilishini tushuntiring.

$$3. 23 \cdot 4 = (20 + 3) \cdot 4 = 20 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 80 + 12 = 92$$

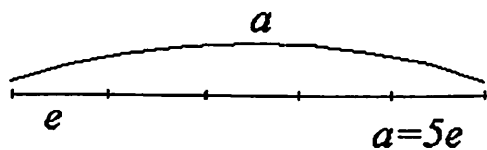
ning yechilishini tushuntiring.

**4.10-§. Natural son miqdorlarni o'lchash natijasi sifatida. Natural son kesma o'lchami sifatida. Kesmalarning o'lchami sifatida qaralgan sonlar ustidagi arifmetik amallarning ta'rifi.**

Kesmalar uzunligini o'lchashni eslaymiz. Kesmalar to'plamida birorta e kesma tanlanib, u birlik kesma yoki uzunlik birligi deyiladi. Keyinchalik esa boshqa kesmalar shu birlik e kesma bilan taqqoslanadi. Biror a kesma e birlik kesmaga teng n ta kesma yig'indisidan iborat bo'lsa, u tubandagicha yoziladi:

$$\underbrace{e + e + \dots + e}_{n \text{ ta}} = ne \text{ va } n$$

natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi son qiymati deyiladi (30-chizma)



a = 5e  
30-chizma

Agar uzunlik birligi sifatida boshqa kesma olinsa, u holda a kesma uzunligining son qiymati o'zgaradi.

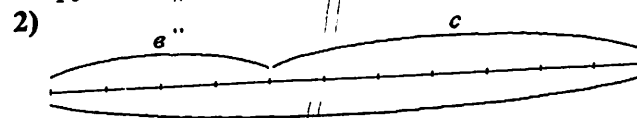
Shunday qilib, a kesma uzunligining son qiymati sifatidagi natural son a kesma tanlab olingan e birlik kesmalarining nechtasidan iboratligini ko'rsatadi. Tanlab olingan e uzunlik birligida bu son yagonadir. Bu sonlar uchun «teng» va «kichik» munosabatlarini qaraylik. Aytaylik m natural son a kesma uzunligining, n natural son b kesma uzunligining e uzunlik birligidagi son qiymatlari bo'lsin. Agar a va b kesmalar teng bo'lsa, ular uzunliklarining son qiymatlari ham teng bo'ladi, ya'ni  $m=n$ ;

Agar a kesma b kesmadan kichik bo'lsa, u holda  $m < n$  bo'ladi va teskari tasdiq ham to'g'ri bo'ladi. Kesmalar va ular uzunliklarining son qiymatlari orasida o'rnatilgan bog'lanish kesmalar uzunliklarini taqqoslashni ularni tegishli son qiymatlarini taqqoslashga keltiradi.

Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan sonlarni qo'shish va ayirishning ma'nosi

Agar natural sonlar kesmalar uzunliklarini o'lchash natijasida hosil bo'lgan bo'lsa, bu sonlarni qo'shish va ayirish qanday ma'noga ega bo'lishini aniqlaymiz.

1) Qo'shish. Masalan, 4 va 7 sonlari b va c kesmalarni e birlik yordamida o'lchash natijalari bo'lsin,  $b=4e$ ,  $c=7e$ .  $4+7=11$  ekani ma'lum. Bunda 11 soni  $a=b+c$  kesma uzunligining qiymati bo'ladi.



31-chizma

Umumiy holda a kesma b va c kesmalar yig'indisi hamda  $b=me$ ;  $c=ne$  bo'lsin. Bunda m va n - natural sonlar. Bu deganimiz, b kesma m ta, c kesma n ta shunday bo'lakka bo'linadi, bu bo'laklarning har biri birlik kesma e ga teng. Shunday qilib, m va n natural sonlar yig'indisini uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalangan b va c kesmalardan tuzilgan a kesma uzunligining qiymati sifatida qarash mumkin.

2) Ayirish. Agar a kesma, b va c kesmalardan iborat bo'lib, a va b kesmalar uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalansa (bir xil

uzunlik birligida),  $c$  kesma uzunligining son qiymati  $a$  va  $b$  kesmalar uzunliklari son qiymatlari ayirmasiga teng.  $c=(m-n)e$

Bundan ko'rinadiki, natural sonlarning  $m-n$  ayirmasining uzunliklari mos ravishda  $m$  va  $n$  natural sonlar bilan ifodalangan  $a$  va  $b$  kesmalar ayirmasi bo'lgan  $c$  kesma uzunligining qiymatini ifodalaydi.

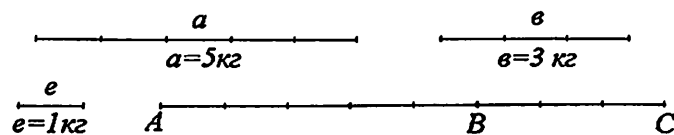
Agar  $a=7e$  kesma  $b$  va  $c$  kesmalardan iborat bo'lib  $b=3e$  bo'lsa,  $u$  holda  $c=(7-3)e=4e$  bo'ladi.

Natural sonlarni qo'shish va ayirishga bunday yondashish nafaqat kesmalar uzunliklarini o'lchash, balki boshqa kattaliklarni o'lchash bilan ham bog'liq. Boshlang'ich sinflar uchun matematika darsliklarida turli xil kattaliklar va ular ustida amallarga doir masalalar ko'p. Bu masalalarni yechish esa kattaliklarning qiymatlari bo'lgan natural sonlarni qo'shish va ayirishning ma'nosini aniqlash bunday masalalarni yechishda amallarni tanlashga imkon beradi.

Masalan, Karim 5 kg olma, Olim 3 kg nok terdi. Karim va Olim hammasi bo'lib necha kilogramm meva tergan?

Masala qo'shish amali bilan yechiladi. Masalani yechishda terilgan olmalar massasini  $a$  kesma, noklar massasini  $b$  kesma ko'rinishida tasvirlaymiz (32-chizma).

U holda terilgan hamma mevalar massasini  $a$  ga teng  $[AB]$  va  $b$  ga teng  $[BC]$  kesmadan tuzilgan  $[AC]$  kesma yordamida tasvirlash mumkin.  $[AC]$  kesma uzunligining son qiymati  $[AB]$  va  $[BC]$  kesmalar son qiymatlarining yig'indisiga teng bo'lgani uchun terilgan mevalar massasini qo'shish amali bilan topamiz.

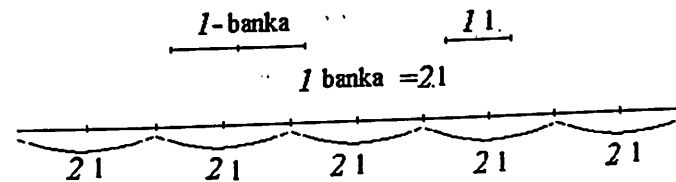


32-chizma.

Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan sonlarni ko'paytirish va bo'lishning ma'nosi

Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan sonlarni ko'paytirish va bo'lishning ma'nosini ko'rsatish uchun dastlab masalalarga murojaat qilamiz.

Masala. Omborxonada har birida 2 l sharbat bo'lgan 5 ta banka bor. Bu bankalarda hammasi bo'lib qancha litr sharbat bor. Bu masalani kesmalar yordamida ifodalaylik (33-chizma).



33-chizma.

Bu masala ko'paytirish amali bilan yechiladi:  $2 \times 5 = 10(l)$ . Nima uchun?

Bu savolga yuqoridagi chizma yordamida javob beramiz.

5 ta bankada hammasi bo'lib qancha litr sharbat borligini bilish uchun  $2l+2l+2l+2l+2l$  yig'indini topish yetarli. 2 l deganimiz 2·1 ko'paytma bo'lgani uchun yig'indini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.  $(2+2+2+2+2) \cdot 1$ . 5 ta bir xil qo'shiluvchining yig'indisini  $2 \cdot 5$  ko'paytma bilan almashtirib,  $(2+2+2+2+2) \cdot 1 = (2 \cdot 5) \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10l$  ni hosil qilamiz. Bu masalada sharbat egallagan hajmning ikki o'lchov birligi banka va litr haqida so'z yuritilmoqda. Shu sababli bu masalani boshqa usulda ham yechish mumkin. Dastlab birlik sifatida bankani olsak, keyin litrga o'tsak, boshqacha aytganda yangi birlik sifatida litrni olsak 1 banka-2 litr.

U holda  $5 \cdot 1 = 5 \cdot (2l) = 5(2 \cdot 1) = (5 \cdot 2) \cdot 1 = 10l$

Bundan ko'rinadiki, natural sonlarni ko'paytirish kattalikning yangi, yanada maydaroq birligini tasvirlaydi. Bu xulosamizni sonlarga kesmalar uzunliklarining qiymatlariga qo'llab umumiy ko'rinishda isbotlaymiz.

$a$  kesma  $e$  ga teng  $m$  ta kesmadan,  $e$  kesmaning o'zi  $e_1$  ga teng  $n$  ta kesmadan iborat bo'lsa,  $a$  kesma uzunligining son qiymati uzunlikning  $e_1$  birligida  $m \cdot n$  ga teng bo'ladi. Haqiqatan ham,  $a$  kesmaning  $e_1$  kesmaga

teng bo'laklar soni  $\underbrace{n+n+\dots+n}_{m \text{ ta}}$  ga teng, Shuning uchun  $a$   $m \cdot n$  ga teng. Demak,  $a = (m \cdot n)e_1$ .

Shunday qilib, natural sonlarni ko'paytirish uzunlikning yangi birligiga o'tishni ifodalaydi. Bu deganimiz, agar  $m$  natural son  $a$  kesma uzunligining  $e$  uzunlik birligidagi qiymati,  $n$  natural son  $e$  kesma uzunligining  $e_1$  uzunlik birligidagi qiymati bo'lsa,  $m \cdot n$  ko'paytma  $a$

kesma uzunligining  $e_1$  uzunlik birligidagi qiymati demakdir. Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan natural sonlarni bo'lishning ma'nosini aniqlaymiz.

Masala. Bir bankaning sig'imi 2 l bo'lsa, 10 l meva sharbatini qo'yish uchun necha banka kerak bo'ladi?

Masalani yechish uchun 10 l ni kesma bilan tasvirlaymiz va unda 2 l ni tasvirlovchi kesma necha marta joylashishini aniqlaymiz:

$$10 l : 2 l = 5(b)$$

Bu masalaning yechilishini boshqacha asoslash mumkin. Masalada sharbat egallagan hajmning ikki birligi - litr va banka qaralmoqda, o'lchash natijasini bankalar bilan, ya'ni yangi birlikda ifodalash talab etilmoqda. Yangi birlikda (bankada) 2 ta eski birlik (2 l) bor.

$$\text{Shuning uchun } 1 l = 1 b : 2 ; 10 l = 10 (1b : 2) = (10 : 2) \cdot 1b = 5 \cdot 1b = 5b;$$

Ko'rinib turibdiki, natural sonlarni bo'lish kattalikning yangi birligiga o'tish bilan bog'liq ekan. Buni umumiy holda ko'rsatamiz. a kesma e ga teng m ta kesmadan,  $e_1$  kesma e ga teng n ta kesmadan iborat bo'lsin.  $e_1$  uzunlik birligida a kesma uzunligini ifodalaydigan sonni qanday topish mumkinligini aniqlaymiz.

$$e_1 = n e \text{ bo'lgani uchun } e = e_1 : n . \text{ U holda } a = m e = m (e_1 : n) = (m : n) e_1;$$

Shunday qilib, kesmalar uzunliklarining qiymati bo'lgan natural sonlarni bo'lish uzunlikning yangi (yanada yirikroq) birligiga o'tishni tasvirlaydi: agar m natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi qiymati, n natural son e kesma uzunligining  $e_1$  uzunlik birligidagi qiymati bo'lsa,  $m:n$  bo'linma a kesma uzunligining  $e_1$  uzunlik birligidagi qiymatidir.

Masalan, agar  $a=16e$  va  $e_1=4e$  bo'lsa, a kesma uzunligining  $e_1$  uzunlik birligidagi qiymati  $4e_1$  ga teng bo'ladi:

$$a=16e=16 \cdot (e_1:4) = (16:4) e_1 = 4 e_1;$$

Boshlang'ich sinf matematika darslarida turli kattaliklar qatnashadigan ko'paytirish va bo'lish bilan yechiladigan sodda masalalar ko'p. Bularni yechishda ko'paytirish bir xil qo'shiluvchilarni qo'shish amali sifatida, bo'lish esa ko'paytirishga teskari amal sifatida qaraladi.

#### II.1.6. Tartibiy va miqdoriy natural sonlar

Bizga ma'lumki, natural sonlar deb buyumlarni sanashda qo'llaniladigan sonlarga aytiladi. Sanash jarayoni nimani ifodalaydi?

Masalan, biz  $A=\{a, b, c, d, e\}$  to'plam elementlarini sanashni qanday olib borishimiz kerak? Bu to'plamning har bir elementini ko'rsatib, biz

«birinchi», «ikkinchi», «uchinchi», «to'rtinchi», «beshinchi» deymiz. Shu bilan sanash jarayonini tugatamiz, chunki A to'plamning barcha elementlaridan foydalandik. Sanab borishda biz quyidagi qoidalarga amal qildik.

A to'plamning ixtiyoriy elementi sanashda birinchi ko'rsatilishi, birorta element ham tushib qolmasligi, bitta element ikki marta sanalmasligi kerak.

A to'plamni sanab biz A to'plamda 5 ta element bor deymiz, ya'ni bu to'plamning miqdoriy xarakteristikasiga ega bo'lamiz. Buni hosil qilish uchun esa tartibiy natural sonlar: «birinchi», ... «beshinchi» dan foydalandik. Boshqacha aytganda biz natural qator kesmasi deb ataluvchi  $\{1,2,3,4,5\}$  to'plamdan foydalandik.

1-Ta'rif. Natural qatorning  $N_a$  kesmasi deb a natural sondan katta bo'lmagan natural sonlar to'plamiga aytiladi.

Masalan,  $N_5$  kesma 1,2,3,4,5 natural qatorning  $N_a$  kesmasi  $x \leq a$  bo'lgan barcha x sonlardan tashkil topadi.

Natural qator kesmasining ta'rifi to'plam elementlari sanog'i tushunchasiga olib keladi. Bunda A to'plam elementlari bilan  $N_a$  kesma o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

2-ta'rif. A to'plam elementlarini sanash deb, A to'plam bilan natural qatorning  $N_a$  kesmasi orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishga aytiladi. a soni deb A to'plamdagi elementlar soniga aytiladi va  $n(A)=a$  kabi yoziladi.

Bu a soni yagona va u miqdoriy natural sonidir. Shunday qilib sanashda chekli A to'plam elementlari nafaqat ma'lum tartibda joylashtiriladi (bunda «birinchi», «ikkinchi» va hokazo sonlar bilan ifodalanuvchi tartibiy natural sonlardan foydalaniladi), shuningdek A to'plam nechta elementni o'z ichiga olishi aniqlanadi (miqdoriy natural sonlardan foydalaniladi). Sanash uchun avvaldan yetarlicha sonlar zapasiga ega bo'lish zarur va bu sonlar ma'lum tartibda joylashishi, birinchi son mavjud bo'lishi lozim. Sanash chekli to'plam elementlarini tartiblashtirish uchun, ham ularning miqdorini aniqlash uchun xizmat qiladi.

Demak tartibiy son miqdoriy songa olib keladi. Miqdoriy natural sonlar chekli teng quvvatli to'plamlar sinfining umumiy xossasini ifodalaydi. Shunday qilib, miqdoriy va tartibiy natural sonlar boshlang'ich ta'limda o'zaro uzviy bog'langan, birgalikda qatnashadi.

## Mustaqil yechish uchun misollar.

Guruhlarda ishlash uchun topshiriqlar

Quyidagi masalar nima uchun qo'shish bilan yechilishini tushuntiring:

1) Qutidan 4 kg olma olingandan keyin unda 6 kg olma qoldi. Qutida necha kg olma bo'lgan?

2) Qizlar ko'ylagi uchun 2 m, ayollar ko'ylagi uchun undan 3 m ortiq mato sarflandi. Ayollar ko'ylagi uchun qancha mato sarflandi?

Quyidagi masalar nima uchun ayirish bilan yechilishini tushuntiring:

3) 5m li arqondan 3m qirqib olindi. Necha metr arqon qoldi?

4) Bir maydondan 10 qop, 2-sidan undan 3 qop kam kartoshka terib olindi. 2- maydondan necha qop kartoshka terib olingan?

Quyidagi masalar nima uchun ko'paytirish bilan yechilishini tushuntiring:

5) Bir savatchada 5 kg olma bor. Shunday 3 ta savatda necha kg olma bo'ladi?

6) Vali bir kunda kitobning 6 betini o'qiydi. U kitobni 5 kunda o'qib bo'lgan bo'lsa, kitob necha betli?

Quyidagi masalar nima uchun qo'shish bilan yechilishini tushuntiring:

7) 8 litr olcha murabosi 2 litrdan bankalarga joylandi. Necha banka kerak bo'ladi?

8) Gulzorga 15 tup gulni har bir qatorga 5 tupdan ekildi. Gullar necha qatorga ekildi?

## Nazorat uchun savollar

1.kesmalarni taqqoslashni tushuntirib bering.

2.kesmalar ustida bajariladigan amallarni tushuntiring.

3.kesmalar ustida amallar qanday xossalarga ega?

4.kattaliklarni qiymatlari bo'lgan sonlar ustida bajariladigan amallarning ma'nosi.

5.tartibiy miqdoriy natural sonlar deganda qanday sonlarni tushunasiz?

## ADABIYOTLAR

1. N.A.Xamedova, Z.Ibragimova, T.Tasetov Matematika. Darslik. T.: Turon-iqbol, 2007., 363b.

2. H.A.Xamedova, A.B.Sadykova, I.Sh.Laktaeva. Matematika. Учебное пособие. Т.: Жaxon-принт, 2007.

3. B.S.Abdullayeva, A.V.Sadikova, M.N.Muxitdinova, M.I.Toshpo'latova Matematika. TDPU. (Boshlang'ich ta'lim va sport-tarbiyaviy ish bakalavriyat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik). Toshkent-2014, 390 bet.

4. P.Иброхимов «Математикадан масалалар тўплами». Т.Ўқитувчи, 1995.

5. Л.П.Стойлова Теоретические основы начального курса математики. Учебное пособие. Москва. «Академия». 2014., 272 с.

6. David Surovski. Advanced High-School Mathematics. 2011. 425s.

7. S.Susanna Epp.Discrete Mathematics with Applications,Fourth Edition. Printed in Canada 2011y. 626p.

8. Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, p.

9. Ikki to'plam orasidagi moslik. Internet. Hozir.org.

10.[http://arm.tdpushf/kitoblar/fayl\\_1056\\_20210522.pdf](http://arm.tdpushf/kitoblar/fayl_1056_20210522.pdf)

11. Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalari. kesmasi va chekli to'plam elementlar soni tushunchasi. Tartib va sanoq natural sonlar. Maruza mashg'ulotining rejasi.

12. <http://hozir.org/nomanfiy-butun-sonlar-to'plamining-xossalari-natural-sonlar-qat.html>

13. Takrorlanadigan va takrorlanmaydigan o'rinashtirishlar va o'rin almashtirishlar. Reja.

14. <http://hozir.org/takrorlanadigan-va-takrorlanmaydigan-o'rinashtirishlar-va-o'rin.html>

15. To'plam tushunchasi.To'plamning elementlari. Bo'sh to'plam. Chekli va cheksiz to'plamlar. to'plamning berilish usullari. Teng to'plam. to'plam osti. Universal to'plam. Eylar-Venn diagrammalari.

16. <http://fayllar.org/to'plam-tushunchasi-To'plamning-elementlari-bo'sh-To'plam-chekli-va-c.html>

## MUNDARIJA

|  |           |
|--|-----------|
| Kirish .....   | 3         |
| <b>1-BOB. DISKRET MATEMATIKA ASOSLARI .....</b>  | <b>5</b>  |
| 1.1-§. To'plam tushunchasi. to'plamlar va ular ustida amallar.<br>Bo'sh to'plam. Chekli va cheksiz to'plamlarga misollar .....   | 5         |
| 1.2-§. To'plamlarning berilish usullari. teng to'plamlar. to'plam osti.<br>Universal to'plam. Eylar-Venn diagrammalari .....   | 7         |
| 1.3-§. To'plamlarning kesishmasi va birlashmasi .....  | 11        |
| 1.4-§. Ikki to'plamning ayirmasi, universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam. ....  | 17        |
| 1.5-§. To'plamlarning dekart ko'paytmasi. To'plamlar ustidagi amallarning xossalari .....  | 21        |
| 1.6-§. To'plamlarni o'zaro kesishmaydigan to'plamostilariga (sinflarga) ajratish tushunchasi. to'plamlarni bitta, ikkita va uchta xossaga ko'ra sinflarga ajratish ..... | 26        |
| 1.7-§. Moslik va munosabatlar: ikkita to'plamelementlari orasidagi moslik. Moslikning grafi va grafigi .....   | 30        |
| 1.8-§. To'plamni to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantirish. Teng quvvatli to'plamlar .....  | 34        |
| 1.9-§. To'plamdagi munosabat, uning xossalari .....  | 38        |
| 1.10-§. Ekvivalentlik munosabati. Ikkivalentlik munosabatining to'plamlarni sinflarga ajratish bilan aloqasi. Tartib munosabati .....                                    | 43        |
| 1.11-§. Kombinatorika elementlari. Kombinatorika masalalari. Yig'indi va ko'paytma qoidasi .....   | 45        |
| 1.12-§. Takrorlanadigan va takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar va o'rin almashtirishlar .....   | 51        |
| 1.13-§. Takrorlanmaydigan gruppalashlar. Chekli to'plamlarning to'plam ostilari soni ..  | 54        |
| <b>2-BOB. MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI .....</b>   | <b>60</b> |
| 2.1-§. Matematik mantiq elementlari. Matematik tushuncha. Tushunchaning hajmi va mazmuni. Tushunchani ta'riflash usullari va ularga misollar .....                       | 60        |
| 2.2-§. Mulohaza. Mulohazaning inkori. Kon'yunktsiya va diz'yunktsiya. Implikatsiya va ekvivalentsiya .....   | 65        |
| 2.3-§. Mantiqiy amallarning qonunlari ..   | 67        |
| 2.4-§. Predikatlar. Predikatning inkori. Kon'yunktsiya va diz'yunktsiya. Implikatsiya va ekvivalentsiyasi ..   | 73        |
| 2.5-§. Kvantorlar ..   | 79        |
| 2.6-§. Teoremaning tuzilishi va turlari. Matematik isbotlash usullari. To'g'ri va noto'g'ri muhokamalar ..   | 84        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>3-BOB. ALGEBRAIK SISTEMALAR .....</b>   | <b>92</b>  |
| 3.1-§. Algebraik operatsiya tushunchasi va uning xossalari: kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik va qisqaruvchanlik .....   | 92         |
| 3.2-§. Neytral, yutuvchi va simmetrik elementlar ..  | 101        |
| 3.3-§. Algebraik sistemalar. yarim grupp, grupp, halqa va maydon tushunchalari va ularga misollar ..   | 106        |
| 3.4-§. Xalqa va maydon tushunchalari va ularga misollar. ....  | 109        |
| <b>4-BOB. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO'PLAMI .....</b>   | <b>114</b> |
| 4.1-§. Nomanfiy butun sonlar to'plami. Yig'indining ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Qo'shish qonunlari ..   | 114        |
| 4.2-§. Ayirmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosi.....                            | 118        |
| 4.3-§. Ko'paytmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Ko'paytirish qonunlari. Ko'paytmaning yig'indi orqali ta'rifi ..   | 122        |
| 4.4-§. Nomanfiy butun sonni natural songa bo'lishning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Yig'indini va ko'paytmani songa bo'lish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosi .. | 125        |
| 4.5-§. Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik asosda qurish: Nazariyani aksiomatik metod bilan qurish tushunchasi. Peano aksiomalari. Matematik induksiya metodi ..                       | 130        |
| 4.6-§. Nomanfiy butun sonlarni qo'shish amalining aksiomatik ta'rifi. Qo'shish qonunlari ..  | 134        |
| 4.7-§. Nomanfiy butun sonlarni ko'paytirish amalining aksiomatik ta'rifi. Ko'paytirish qonunlari ..  | 137        |
| 4.8-§. Ayirish va bo'lishning ta'rifi. nolga bo'lishning mumkin emasligi. Qoldiqli bo'lish ..  | 141        |
| 4.9-§. Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalari. Natural sonlar qatori kesmasi va chekli to'plam elementlari soni tushunchasi. Tartib va sanoq natural sonlari ..                          | 144        |
| 4.10-§. Natural son miqdorlarni o'lchash natijasi sifatida. Natural son kesma o'lchami sifatida. Kesmalarning o'lchami sifatida qaralgan sonlar ustidagi arifmetik amallarning ta'rifi ..      | 148        |
| Adabiyotlar .....  | 155        |

QAYDLAR UCHUN

ABIRAYEV IMOMALI MELIBOYEVICH  
MAMAJANOV RAXMATILLA YAKUBJANOVICH

BOSHLANG'ICH MATEMATIKA  
KURSI NAZARIYASI

.. O'quv qo'llanma

Litsenziya raqami AA № 0048. 18.03.2020.  
Bosishga 2024-yil 16-fevralda ruxsat etildi.  
Bichimi 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Ofset qog'oz.  
Ofset bosma usulida bosildi.  
Times New Roman garniturasida. Shartli bosma taboq 10.  
Adadi 50 nusxa.

«AVTO-NASHR» bosmaxonasida chop etildi.  
Toshkent shahar. Navoiy ko'chasi, 30.

ISBN 978-9943-6683-9-3



9 789943 668393