

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI



G.XUDOYBERGANOV, B.A.SHOIMQULOV

**KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI
FUNKSIYALAR NAZARIYASI**

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYA VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

G.XUDOYBERGANOV, B.A.SHOIMQULOV

**KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI
FUNKSIYALAR NAZARIYASI**

O'QUV QO'LLANMA

Toshkent
"Ma'rifat"
2024

3
0
0
.1
18
39
42
44
51
53
57
57

ORLIK
IKA
RM

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.2.1 | Kasr-chiziqli akslantirishning xossalari | 63 |
| 2.2.2 | Kasr-chiziqli izomorfizm va avtomorfizmlar | 69 |
| 2.3 | Jukovskiy funksiyasi va uning xossalari | 72 |
| 2.4 | Darajali funksiya va uning xossalari | 77 |
| 2.5 | Ko'rsatkichli funksiya | 79 |
| 2.6 | Trigonometrik va giperbolik funksiyalar | 82 |
| 3 | GOLOMORF FUNKSIYALARNING XOSSALARI | 89 |
| 3.1 | Kompleks argumentli funksiyalarning integrali | 89 |
| 3.2 | Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Koshi teoremasi | 97 |
| 3.2.1 | Koshi teoremasi | 97 |
| 3.2.2 | Koshi teoremasini umumlashtirish | 103 |
| 3.3 | Koshining integral formulasi | 110 |
| 3.4 | Taylor qatorlari | 114 |
| 3.5 | Abel teoremasi. Koshi-Adamar formulasi | 120 |
| 3.6 | Golomorf funksiyalarning xossalari | 126 |
| 3.7 | Morera teoremasi | 129 |
| 3.8 | Golomorf funksiyaning nollari | 131 |
| 3.9 | Yagonalik teoremasi | 132 |
| 3.10 | Veyershtrass teoremasi | 134 |
| 3.11 | Loran qatorlari | 136 |
| 3.11.1 | Loran qatorining yagonaligi | 141 |
| 3.11.2 | Loran va Furiye qatorlari orasidagi bog'lanish haqida | 144 |
| 3.12 | Yakkalangan maxsus nuqtalar va ularning turlari | 146 |
| 3.12.1 | Maxsus nuqtalar va Loran qatori orasidagi bog'lanishlar | 149 |
| 3.13 | Soxotskiy teoremasi | 153 |
| 3.14 | Cheksiz uzoqlashgan nuqta yakkalangan maxsus nuqta bo'lgan hol | 155 |
| 3.15 | Butun va meromorf funksiyalar | 156 |
| 4 | CHEGIRMALAR NAZARIYASI VA ULARNING TATBIQLARI | 159 |
| 4.1 | Chegirmalar va ularni hisoblash | 159 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.2 | Chegirmalarning tatbiqlari | 165 |
| 4.2.1 | $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash | 165 |
| 4.2.2 | $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ ko'rinishdagi xosmas integrallarni hisoblash | 167 |
| 4.2.3 | $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} R(x) dx$ ko'rinishidagi integrallarni hisoblash | 170 |
| 5 | ANALITIK DAVOM ETTIRISHLAR | 173 |
| 5.1 | Analitik davom ettirish tushunchasi | 173 |
| 5.2 | Elementlar va ularni analitik davom ettirish | 180 |
| 5.3 | Analitik funksiya | 184 |
| 5.4 | Elementar funksiyalar | 186 |
| 5.4.1 | $w = \sqrt{z}$ analitik funksiya | 186 |
| 5.4.2 | $w = \sqrt{z}$ analitik funksiyaning Riman sirti | 189 |
| 5.4.3 | $w = \operatorname{Ln} z$ analitik funksiya | 191 |
| 5.4.4 | $w = \operatorname{Ln} z$ analitik funksiyaning Riman sirti | 193 |
| 5.4.5 | Teskari trigonometrik funksiyalar | 194 |
| 5.4.6 | $w = z^a$ -umumiy darajali funksiya ($a \in \mathbb{C}$) | 195 |
| 6 | ASOSIY GEOMETRIK PRINSIPLAR | 197 |
| 6.1 | Argument prinsipi. Rushe teoremasi | 197 |
| 6.2 | Sohaning saqlanish prinsipi | 202 |
| 6.3 | Modulning maksimum prinsipi. Shvarts lemmasi | 203 |
| 6.4 | Kompaktlik prinsipi | 207 |
| 6.5 | Konform izomorfizm va avtomorfizmlar | 210 |
| 6.6 | Simmetriya prinsipi | 213 |

SO‘Z BOSHI

Mazkur qo‘llanma mualliflarning ko‘p yillar davomida kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanidan O‘zbekiston Milliy universiteti matematika fakulteti talabalariga o‘qigan ma‘ruzalari asosida yozildi. Bu qo‘llanma matematika, mexanika va matematik modellashtirish yo‘nalishlari bo‘yicha ta‘lim olayotgan talabalarga mo‘ljallangan. Mualliflar har bir mavzuni qisqa, matematik qat‘iy, o‘z navbatida talabalarga tushunarli bo‘lishiga harakat qildilar.

Ushbu qo‘llanma oltita bobdan iborat. Unda dastlab kompleks sonlar, kompleks argumentli funksiyalar limiti, uzluksizligi, differentsiallanuvchanligi, elementar funksiyalar va ular yordamida bajariladigan akslantirishlar, kompleks argumentli funksiyalarning integrallari, Koshi teoremasi, Koshining integral formulasi, Teylor va Loran qatorlari, golomorf funksiyaning maxsus nuqtalari, chegirmalar va ularning tadbirlari, analitik davom ettirish, analitik funksiyalar argument prinsipi, kompaktlik prinsipi, konform izomorfizm va avtomorfizmlar bayon etilgan. Har bir mavzudan keyin berilgan tushunchalarni mustahkamlash uchun mashqlar berilgan bo‘lib, ular asosan nazariy savollardan iborat.

Kitob qo‘lyozmasini sinchiklab o‘qib chiqib, uning ilmiy va metodik jihatdan yaxshilanishga o‘z hissalarini qo‘shgan hamkasblarimizga, jumladan I.A.Ikramov, T.T.Tuychiyev, J.K.Tishabayev, J.Sh.Abdullayev, M.R.Eshimbetovlarga o‘zimizning chuqur minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Qo‘llanmaning sifatini yaxshilashga qaratilgan o‘z fikr-mulohazalarini bildirgan hamkasblarga oldindan minnatdorchilik izhor etamiz.

Mualliflar

BOB 1

GOLOMORF FUNKSIYALAR

1.1 Kompleks sonlar, kompleks sonning ko'rinishlari, kompleks tekislik

1.1.1 Kompleks son tushunchasi

Tekislikda xOy Dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Absissalar o'qida joylashgan nuqtalar to'plamini \mathbb{R}_x , ordinatalar o'qida joylashgan nuqtalar to'plamini \mathbb{R}_y orqali belgilaylik. Ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}_x$, $y \in \mathbb{R}_y$ haqiqiy sonlardan (x, y) juftlikni hosil qilamiz. Bunda, agar $y = 0$ bo'lsa, $(x, 0) = x$ deb qaraymiz.

Bunday juftliklardan tashkil topgan

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}_x, y \in \mathbb{R}_y\}$$

to'plamda quyidagicha juftliklarning tengligi tushunchasi va arifmetik amallarni kiritamiz. Agar $(x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $(x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ juftliklar uchun $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ bo'lsa, bu juftliklar *o'zaro teng* deyiladi va $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ kabi belgilanadi. Ixtiyoriy ikkita $(x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ va $(x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ juftliklarning yig'indisini va ayirmasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2).$$

Ikkita juftlikning ko'paytmasini quyidagicha kiritamiz:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

ko'paytirish amali yordamida ikkita juftlikning nisbati

$$\frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), (x_2^2 + y_2^2 > 0)$$

bo'lishini hosil qilamiz.

Shunday qilib, \mathbb{C} to'plam elementlari ustida to'rt amal qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari kiritildi. Qo'shish va ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1°. *Kommutativlik*;

2°. *Assotsiativlik*;

3°. *Distributivlik*.

Yuqorida keltirilgan

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}_x, y \in \mathbb{R}_y\}$$

to'plam elementlari ustida arifmetik amallarning bajarilishi va ularning yuqoridagi 1-3 xossalarga ega ekanligi, tabiiy ravishda \mathbb{C} to'plam elementlarini son deb qarash imkonini yuzaga keltiradi va \mathbb{C} to'plam elementi (x, y) juftlik *kompleks son* deyiladi va u bitta harf $z = (x, y)$ bilan belgilanadi. Ma'lumki, $x \in \mathbb{R}_x$ uchun $(x, 0) = x$. Bu esa haqiqiy son kompleks sonning xususiy holi ekanini bildiradi.

1.1.2 Kompleks sonning ko'rinishlari

Dastlab $i = (0, 1)$ belgishlashni kiritamiz. Shuni ta'kidlaymizki, i uchun quyidagi

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

munosabat o'rinli. Demak i haqiqiy son emas, bundan keyin uni *mavhum birlik* deb ataymiz. Bu belgilash yordamida $z = (x, y)$ kompleks sonni quyidagicha

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x + iy$$

yozamiz, bu kompleks sonning *algebraik* ko'rinishi deyiladi. Bu yerda x songa z kompleks sonning haqiqiy qismi deyiladi va $x = \operatorname{Re} z$ kabi belgilanadi, hamda y songa z kompleks sonning mavhum qismi deyiladi va $y = \operatorname{Im} z$ kabi belgilanadi. $z = x + iy$ kompleks son berilgan bo'lsa, $x - iy$ kompleks son uning *qo'shimasi* deyiladi va $\bar{z} = x - iy$ orqali belgilanadi.

Quyidagi tengliklar o'rinlidir:

$$1) z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z.$$

1.1. KOMPLEKS SONLAR. KOMPLEKS SONNING KO'RINISHLARI. KOMPLEKS TEKISLIK

$$2) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$$

$$3) \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$$4) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0.$$

$$5) \overline{\bar{z}} = z.$$

Endi ixtiyoriy $z = x + iy$ kompleks sonni olaylik. Tekislikda, $O(0, 0)$ koordinatalar boshi va koordinatalari x hamda y bo'lgan $M(x, y)$ nuqtani qaraymiz. Ushbu \vec{OM} vektor M nuqtaning *radius-vektori* deyiladi (1-chizma). Bu radius-vektorning uzunligi r , uning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagi φ bo'lsin. 1-chizmada tasvirlangan OMB to'g'ri burchakli uchburchakdan topamiz:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Bundan esa $z = x + iy$ ko'rinishdagi kompleks son quyidagicha

$$z = x + iy = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

ifodalanadi. Kompleks sonning bu ifodasi uning trigonometrik ko'rinishi deyiladi, bunda r musbat son z kompleks sonning *moduli* deyilib, $|z|$ kabi belgilanadi. φ burchak esa z kompleks sonning *argumenti* deyilib, $\arg z$ kabi belgilanadi. Shuni ta'kidlashimiz kerakki, kompleks sonning moduli bir qiymatli, argumenti esa ko'p qiymatli bo'lib, argumentlar bir-biri bilan $2\pi k$ miqdorga farq qiladi. Ya'ni boshlang'ich argumentni φ desak, u holda qolgan barcha $\operatorname{Arg} z$ argumentlar uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

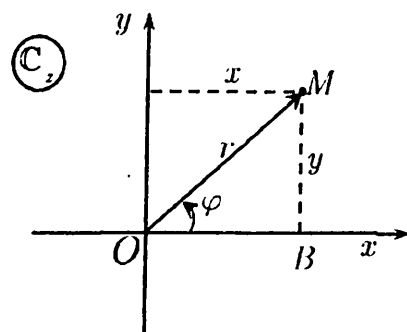
Yuqoridagi OMB uchburchakdan,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq r < +\infty).$$

hamda

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, y \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi, & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

bo'lishini topamiz.



1-chizma

Faraz qilaylik, $z \in \mathbb{C}$ sonning moduli r ($0 \leq r < +\infty$) argumenti esa φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) bo'lsin. Unda bu kompleks son

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

trigonometrik ko'rinishga ega bo'ladi. Kompleks analiz kursida muhim bo'lgan quyidagi

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Eyler formulasidan foydalansak, z kompleks sonning ushbu

$$z = r e^{i\varphi}$$

ifodasiga kelamiz. Bu kompleks sonning *ko'rsatkichli* ko'rinishi deyiladi. Aytaylik, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ bo'lsin, u holda

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

munosabatlar o'rinlidir. Bulardan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (z_2 \neq 0),$$

$$\arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2, \quad (z_2 \neq 0).$$

1.1.3 Kompleks sonni darajaga ko'tarish va undan ildiz chiqarish

Aytaylik, z_1, z_2, \dots, z_n kompleks sonlar berilgan bo'lsin. Ikki kompleks sonlar ko'paytmasi singari bu n ta kompleks sonlar ko'paytmasi uchun ushbu

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bunda

$$z_k = r_k \cdot e^{i\varphi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Xususan, agar $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ bo'lsa, u holda yuqoridagi tenglik ushbu

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu z kompleks sonning n -darajasi deyiladi. Ravshanki,

$$r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Demak,

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Bu formula *Muavr formulasi* deyiladi.

Aytaylik, $z \in \mathbb{C}$ kompleks son va tayinlangan $n \in \mathbb{N}$ sonlar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\xi^n = z$$

tenglikni qanoatlantiruvchi ξ kompleks son z kompleks son dan olingan n -darajali ildiz deyiladi va u $\sqrt[n]{z}$ kabi belgilanadi:

$$\xi = \sqrt[n]{z}.$$

Berilgan kompleks son quyidagi

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

trigonometrik ko'rinishda bo'lsin. ξ kompleks sonni ushbu

$$\xi = \rho (\cos \psi + i \sin \psi)$$

ko'rinishda izlaymiz, u holda yuqoridagi munosabatlarga ko'ra

$$[\rho(\cos \psi + i \sin \psi)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

bo'ladi. Endi

$$[\rho(\cos \psi + i \sin \psi)]^n = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi)$$

formulani e'tiborga olib, quyidagi

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

tenglikka kelamiz.

Bundan esa, izlanayotgan ξ kompleks sonning moduli va argumenti ushbu formulalar

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

yordamida topilishi kelib chiqadi. Demak, z kompleks sonning n - darajali arifmetik ildizlari uchun quyidagi

$$\xi = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

formula o'rinlidir.

1.1.4 Kompleks sonlar ketma-ketligi va uning limiti

Matematik analiz kursida haqiqiy sonlar ketma-ketligi va uning limiti tushunchalari kiritilib, ular batafsil o'rganilgan edi. Xuddi shunga o'xshash kompleks sonlar ketma-ketligi va uning limiti tushunchalari kiritiladi.

Faraz qilaylik, f har bir n ($n \in \mathbb{N}$) natural songa biror z_n kompleks sonni ($z_n \in \mathbb{C}$) mos qo'yuvchi akslantirish bo'lsin:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \text{ (yoki } f: n \rightarrow z_n \text{).}$$

Bu akslantirish tasvirlaridan tuzilgan

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

ifoda kompleks sonlar ketma-ketligi deyiladi va u $\{z_n\}$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\{z_n\} = \left\{ \frac{1}{n} + i \frac{1}{n} \right\} : 1 + i, \frac{1}{2} + i \frac{1}{2}, \frac{1}{3} + i \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} + i \frac{1}{n}, \dots$$

kompleks sonlar ketma-ketligidir.

Biror

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

1.1.1-ta'rif. Agar shunday musbat o'zgarmas M son mavjud bo'lsaki, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $|z_n| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{z_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Masalan, ushbu

$$\{z_n\} = \left\{ \frac{n}{1+n^2} + i \frac{n}{1+n^2} \right\}$$

kompleks sonlar ketma-ketligi chegaralangan, chunki $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun

$$|z_n| = \left| \frac{n}{1+n^2} + i \frac{n}{1+n^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{n}{1+n^2} \right)^2 + \left(\frac{n}{1+n^2} \right)^2} = \sqrt{2} \frac{n}{1+n^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bo'ladi.

$\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi hamda a kompleks son berilgan bo'lsin.

1.1.2-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ natural sonlar uchun $|z_n - a| < \varepsilon$ ($a \neq \infty$) tengsizlik bajarilsa, a kompleks son $\{z_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

yoki

$$n \rightarrow \infty \text{ da } z_n \rightarrow a$$

kabi belgilanadi.

Agar $\{z_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

1.1.3-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ natural sonlar uchun $|z_n| > \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{z_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

yoki

$$n \rightarrow \infty \text{ da } z_n \rightarrow \infty \text{ kabi belgilanadi.}$$

Misol. Ushbu $\{z_n\} = \{a^n\}$, ($a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$) kompleks sonlar ketma-ketligining limitini toping.

$\forall \varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko'ra n_0 natural son quyidagicha

$$n_0 = n_0(\varepsilon) = \lceil \log_{|a|} \varepsilon \rceil$$

aniqlansa, $(|a|^n < \varepsilon$ tengsizlikni yechib topiladi:

$$|a|^n < \varepsilon \Rightarrow \log_{|a|} |a|^n > \log_{|a|} \varepsilon \Rightarrow n > \log_{|a|} \varepsilon,$$

u holda barcha $n > n_0$ uchun $|z_n| < |a|^n < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa 2-ta'rifga binoan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

bo'lishini bildiradi.

Endi yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari keltiramiz.

1^o. Agar $\{z_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

Isbot. $\{z_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ($a \in \mathbb{C}$) bo'lsin. Unda ta'rifga binoan $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu tengsizlikdan foydalanib, topaniz:

$$|z_n| = |(z_n - a) + a| \leq |z_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|.$$

Demak, $\{z_n\}$ ketma-ketlikning $(n_0 + 1)$ -hadidan keyingi barcha hadlari uchun

$$|z_n| < \varepsilon + |a|$$

tengsizlik bajariladi.

Agar

$$\varepsilon + |a|, |z_1|, |z_2|, \dots, |z_{n_0}|$$

sonlarning eng kattasini M desak, u holda $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $|z_n| \leq M$ bo'ladi. Bu esa, $\{z_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi.

2^o. Agar $\{z_n\}$ va $\{z'_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = a' \quad (a \in \mathbb{C}, a' \in \mathbb{C})$$

bo'lsa, u holda

$$\{z_n \pm z'_n\}, \{z_n \cdot z'_n\}, \left\{ \frac{z_n}{z'_n} \right\} \quad (z'_n \neq 0)$$

ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'lib,

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm z'_n) = a \pm a'$$

2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot z'_n) = a \cdot a'$$

3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z_n}{z'_n} \right) = \frac{a}{a'} \quad (a' \neq 0)$$

bo'ladi.

Bu tengliklarni isbotlash qiyin emas. Biz ulardan birini, masalan, 1)-ning isbotini keltiramiz.

Aytaylik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = a'$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham $\frac{\varepsilon}{2}$ songa ko'ra shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.1)$$

bo'ladi.

Shuningdek, $\frac{\varepsilon}{2}$ songa ko'ra shunday $n'_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n'_0$ lar uchun

$$|z'_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.2)$$

bo'ladi.

Endi n_0 va n'_0 natural sonlardan kattasini \bar{n}_0 deb olsak, unda barcha $n > \bar{n}_0$ lar uchun bir vaqtda (1.1) va (1.2) tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Demak, $n > \bar{n}_0$ bo'lganda

$$|(z_n \pm z'_n) - (a \pm a')| = |(z_n - a) \pm (z'_n - a')| \leq$$

$$\leq |z_n - a| \pm |z'_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm z'_n) = a \pm a'$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi kompleks sonlar ketma-ketligi limitining mavjudligi haqidagi teoremani keltiramiz.

Faraz qilaylik, $\{z_n\}$, ($n = 1, 2, \dots$) kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, z_n , ($n = 1, 2, \dots$) ning haqiqiy qismi $Re z_n = x_n$, ($n = 1, 2, \dots$), mavhum qismi $Im z_n = y_n$, ($n = 1, 2, \dots$) bo'lsin:

$$z_n = x_n + iy_n, (n = 1, 2, \dots).$$

Natijada ikkita $\{x_n\}$ hamda $\{y_n\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklariga ega bo'lamiz.

1.1.1-teorema. $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi $a = \alpha + i\beta$ ($a \in \mathbb{C}$) limitga ega bo'lishi uchun $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklari limitga ega bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Aytaylik, $\{z_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = \alpha + i\beta.$$

Limit ta'rifiga binoan $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki,

$$\begin{aligned} |z_n - a| &= |(x_n + iy_n) - (\alpha + i\beta)| = \\ &= |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2}. \end{aligned}$$

Demak,

$$\sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} < \varepsilon.$$

Keyingi tengsizlikdan

$$(x_n - \alpha)^2 < \varepsilon^2, (y_n - \beta)^2 < \varepsilon^2,$$

ya'ni

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon, |y_n - \beta| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar limitga ega va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$$

bo'lishini bildiradi.

Yetarliligi. Ayatlyik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar limitga ega bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham $\frac{\varepsilon}{2}$ songa ko'ra shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.3)$$

bo'ladi.

Shuningdek, $\frac{\varepsilon}{2}$ songa ko'ra shunday $n'_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n'_0$ lar uchun

$$|y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.4)$$

bo'ladi.

Agar n_0 va n'_0 natural sonlardan kattasini \bar{n}_0 deb olsak, unda barcha $n > \bar{n}_0$ lar uchun bir vaqtda (1.3) va (1.4) tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Ravshanki

$$\begin{aligned} |z_n - a| &= |(x_n + iy_n) - (\alpha + i\beta)| = \\ &= |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|. \end{aligned}$$

Yuqoridagi (1.3) hamda (1.4) tengsizliklardan foydalanib, barcha $n > \bar{n}_0$ lar uchun

$$|z_n - a| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Bu esa $\{z_n\}$ ketma-ketlik limitga ega va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

ekanligini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

Eslatma. Bu teoremaning yetarligini yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning 2^0 - xossasidan foydalanib ham isbotlash mumkin.

Keltirilgan teorema kompleks sonlar ketma-ketligining limitini o'rganishni haqiqiy sonlar ketma-ketligining limitini o'rganishga keltirilishini ifodalaydi.

Misol. Ushbu

$$\{z_n\} = \left\{ \frac{3n+2}{4n+3} + i \frac{2n-5}{5n-1} \right\}, (n = 1, 2, \dots)$$

kompleks sonlar ketma-ketligining limitini toping.

Ravshanki,

$$z_n = \frac{3n+2}{4n+3} + i \frac{2n-5}{5n-1}, (n = 1, 2, \dots)$$

kompleks sonning haqiqiy qismi

$$x_n = \frac{3n+2}{4n+3}, (n = 1, 2, \dots)$$

mavhum qismi esa

$$y_n = \frac{2n-5}{5n-1}, (n = 1, 2, \dots)$$

bo'ladi.

Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n+3} = \frac{3}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{5n-1} = \frac{2}{5}$$

ekanini e'tiborga olsak, unda teoreмага ko'ra berilgan kompleks sonlar ketma-ketligining limiti $\frac{3}{4} + i\frac{2}{5}$ ga teng bo'lishini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{4n+3} + i \frac{2n-5}{5n-1} \right) = \frac{3}{4} + i \frac{2}{5}.$$

1.1.5 Sonli qatorlar

Biror

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan ushbu

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

ifoda qator (sonli qator) deyiladi va $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots \quad (1.5)$$

bunda $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$ kompleks sonlar qatorning hadlari deyiladi. (1.5) qator hadlaridan tashkil topgan quyidagi

$$S_1 = z_1,$$

$$S_2 = z_1 + z_2,$$

$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3,$$

.....

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n,$$

.....

yig'indilar (1.5) qatorning qisman yig'indilari deyiladi.

1.1.4-ta'rif. Agar (1.5) qatorning qisman yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

bo'lsa, u holda (1.5) qator yaqinlashuvchi qator deyiladi, S esa qator yig'indisi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

kabi yoziladi.

Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda (1.5) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Aytaylik,

$$z_n = x_n + iy_n, (x_n \in \mathbb{R}, y_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots)$$

bo'lsin. U holda

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^n x_k + i \sum_{k=1}^n y_k$$

bo'ladi.

1.1.2-teorema. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \dots$$

qatorlarning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli. Bunda

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

bo'ladi.

Bu teoremdan matematik analiz kursida o'rganilgan qatorlar va ularhaqidagi ma'lumotlar haqlari kompleks sonlardan iborat bo'lgan qatorlar uchun ham o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Jumladan quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'ladi:

1) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S bo'lsa, n holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a z_n = a z_1 + a z_2 + a z_3 + \dots + a z_n + \dots$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $a \cdot S$ ga teng bo'ladi. bunda a - o'zgarmas kompleks son.

2) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n + \dots$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S_1 va S_2 bo'lsa, n holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + \xi_n) = (z_1 + \xi_1) + (z_2 + \xi_2) + (z_3 + \xi_3) + \dots + (z_n + \xi_n) + \dots$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S_1 + S_2$ ga teng bo'ladi.

3) Aytaylik.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots \quad (1.6)$$

qator berilgan bo'lsin.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots + |z_n| + \dots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

U holda $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Shuningdek, quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

1.1.3-teorema (Koshi). Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilib, $\forall n > n_0$ va $m = 1, 2, 3, \dots$ bo'lganda

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+m}| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Xususan, (1.6) qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$|z_{n+1}| < \varepsilon$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = 0$$

bo'ladi. Bu (1.6) qator yaqinlashuvchiligining zaruriy shartini ifodalaydi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Bu qatorning umumiy hadi

$$z_n = \frac{e^{in}}{n} = \frac{\cos n + i \sin n}{n} = \frac{\cos n}{n} + i \frac{\sin n}{n}$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

qatorlar yaqinlashuvchi. 1.1.3-teoremadan foydalanib berilgan qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.

Misol va masalalar

1.1.1-misol. Ko'paytmani hisoblang, hosil bo'lgan kompleks sonning moduli va argumentini toping, uni kompleks tekislikda tasvirlang:

$$(1-i)^{15} \cdot (1+i\sqrt{3})^{24}$$

1.1.2-misol. Ushbu

$$\sqrt[3]{1-i}$$

ildizning barcha qiymatlarini toping.

1.1.3-misol. Agar

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})$$

bo'lsa, u holda z_1, z_2, z_3 nuqtalar teng tomonli uchburchakning uchlarida yotishi uchun quyidagi

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarliligini isbotlang.

1.1.4-misol. Ixtiyoriy $n \geq 2$ natural son uchun quyidagi ayniyat o'rinli ekanini isbotlang:

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

1.1.5-misol. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sonlar uchun quyidagi ayniyatlar o'rinli bo'lishini isbotlang:

$$S_1 = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}, & \alpha \neq 2\pi k (k \in \mathbb{Z}), \\ 0, & \alpha = 2\pi k (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

$$S_2 = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}, & \alpha \neq 2\pi k (k \in \mathbb{Z}), \\ n, & \alpha = 2\pi k (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

1.1.6-misol. Ketma-ketlikning limitini hisoblang:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} (1 - e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} - \dots + (-1)^n e^{ni\varphi}) \right\}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

1.1.7-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A \neq \infty$ bo'lsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = A$$

tenglikni isbotlang.

1.1.8-misol. Hisoblang:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} \right).$$

1.1.9-misol. Agar $|z_n| < M \cdot n^{-\alpha}$ ($n > n_0$), $\alpha > 1$, $M < \infty$ bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

1.1.10-misol. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(1 - \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \right) \right] = \alpha > 1$ bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

1.2 Stereografik proyeksiya, Riman sferasi, kengaytirilgan kompleks tekislik

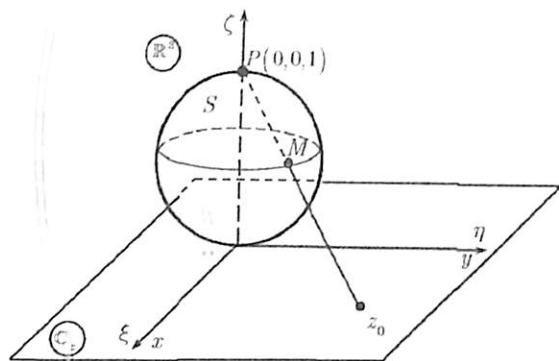
Kengaytirilgan kompleks sonlar tekisligi $\bar{\mathbb{C}}$ kompleks sonlar tekisligi \mathbb{C} ni cheksiz uzoqlashgan nuqta ∞ bilan to'ldirish natijasida hosil qilinadi. $\bar{\mathbb{C}}$ tekislikni stereografik proyeksiya yordamida hosil qilish mumkin.

Buning uchun \mathbb{R}^3 fazoda (ξ, η, ζ) Dekart koordinatalar sistemasini olaylik. Bu fazoda

$$S = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \quad (1.7)$$

sferani qaraymiz.

Faraz qilaylik, ξ va η o'qlar mos ravishda x va y o'qlari bilan ustma-ust tushsin (2-chizma).



2-chizma

Ravshanki, qaralayotgan S sfera Oxy tekisligiga koordinata boshida urinadi. \mathbb{C} kompleks tekislikda $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqta olib, bu nuqtani sferaning $P(0, 0, 1)$ nuqtasi bilan to'g'ri chiziq kesmasi yordamida birlashtiramiz (sferaning bu $P(0, 0, 1)$ nuqtasini uning qutbi deb ataymiz). Natijada, bu to'g'ri chiziq sferani $M(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ nuqtada kesadi. Bu M nuqtani $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtaning sferadagi tasviri sifatida qabul qilamiz. Demak, $\bar{\mathbb{C}}$ kompleks tekislikdagi har bir nuqta S sferadagi biror nuqta bilan ifodalanadi:

$$\mathbb{C} \rightarrow S \setminus \{P\}.$$

1.2. STEREOGRAFIK PROYEKSIYA, RIMAN SFERASI, KENGAYTIRILGAN KOMPLEKS TEKISLIK

Aksincha, agar sferaning M_1 nuqtasini sfera qutbi P bilan tutashiruvchi nurni tekislik bilan kesishguncha davom ettirsak, u holda tekislikda qandaydir z_1 nuqtani hosil qilamiz, uni sferaning M_1 nuqtasiga mos nuqta sifatida qabul qilamiz:

$$S \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Natijada kompleks sonlar tekisligining barcha nuqtalari va sferaning nuqtalari (qutbidan tashqari) orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Bunda cheksiz uzoqlashgan nuqtaning sferadagi tasviri sifatida P nuqtani olamiz. Shunday qilib, kengaytirilgan kompleks tekislikning barcha nuqtalari va sferaning barcha nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin ekan:

$$S \leftrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{C}}.$$

Odatda, bu moslik *stereografik proyeksiya* deyiladi. Nuqtalari barcha kompleks sonlar va cheksiz uzoqlashgan nuqtani ifodalovchi sfera *Riman sferasi* deyiladi.

Endi sferadagi nuqta koordinatalari bilan kompleks tekislikdagi mos nuqta koordinatalari orasidagi bog'lanishni topamiz. Aytaylik, kompleks tekislikdagi $z = x + iy$ nuqtaga S sferadagi $A = A(\xi, \eta, \zeta)$ nuqta mos kelsin. Ravshanki, $P = P(0, 0, 1) \in S$ hamda $z = x + iy \in \mathbb{C}$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (parametrik tenglamasi) quyidagicha

$$\begin{cases} \xi = tx \\ \eta = ty \\ \zeta = 1 - t \end{cases} \quad (1.8)$$

bo'ladi, bunda $t = 0$ bo'lganda P nuqta, $t = 1$ bo'lganda esa z nuqta hosil bo'ladi. Kompleks tekislikdagi z nuqtaning x va y koordinatalari ma'lum bo'lganda A nuqtaning ξ, η, ζ koordinatalari quyidagicha aniqlanadi.

Ma'lumki, $A = A(\xi, \eta, \zeta)$ nuqta ham (1.8) to'g'ri chiziqda ham S sferada yotadi. Shuni e'tiborga olib, $\xi = tx$, $\eta = ty$, $\zeta = 1 - t$ nuqtalarni (1.7) sfera tenglamasidagi ξ, η, ζ koordinatalarning o'rniga qo'yib topamiz:

$$t^2 x^2 + t^2 y^2 + \frac{1}{4} - t + t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t(x^2 + y^2 + 1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(|z|^2 + 1) = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Demak,

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \end{cases} \quad (1.9)$$

bo'ladi.

Sferadagi A nuqtaning ξ, η, ζ koordinatalari ma'lum bo'lganda tekislikdagi z nuqtaning koordinatalari x va y lar quyidagicha aniqlanadi: (1.8) to'g'ri chiziq tenglamasidan $t = 1 - \zeta$ bo'lishini topib, uni (1.8) sistemaning birinchi ikkita tenglamasidagi t ning o'rniga qo'yamiz:

$$\xi = (1 - \zeta)x,$$

$$\eta = (1 - \zeta)y.$$

Bu tengliklardan

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi \mathbb{C} kompleks tekislikda $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ nuqtalarni olaylik. Bu nuqtalarga mos keluvchi sferadagi nuqtalar, ya'ni ularning stereografik proyeksiyalari $A_1 = A_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $A_2 = A_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ bo'lsin. Ushbu

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

miqdor z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi masofa yoki *Euklid masofasi* deyiladi. $A_1 = A_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ va $A_2 = A_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ nuqtalar orasidagi masofa z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi *sferik masofa* yoki *Riman masofasi* (yoki *Riman metrikasi*) deb ataladi va $\rho(z_1, z_2)$ kabi belgilanadi. Ravshanki, $A_1 = A_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ va $A_2 = A_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}$$

bo'ladi. Yuqorida keltirilgan (1.9) formulaga ko'ra

$$\xi_1 = \frac{x_1}{1+|z_1|^2}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{1+|z_1|^2}, \quad \zeta_1 = \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}.$$

$$\xi_2 = \frac{x_2}{1+|z_2|^2}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{1+|z_2|^2}, \quad \zeta_2 = \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}$$

bo'lishini e'tiborga olib z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi sferik masofani topamiz:

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \cdot \sqrt{1+|z_2|^2}}. \quad (1.10)$$

Demak, yuqoridagi (1.10) formula z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi *Riman masofasi* ekan. Bu formula orqali kompleks tekislikdagi ixtiyoriy nuqta va $z = \infty$ nuqta orasidagi masofa quyidagicha

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad (1.11)$$

ko'rinishda bo'lishini topamiz.

Misol va masalalar

1.2.1-misol. \mathbb{C} kompleks tekislikdagi ushbu nuqtalarning S Riman sferasidagi obrazlarini toping:

- $z = 1 + i\sqrt{3}$,
- $z = -3 + 2i$.

1.2.2-misol. \mathbb{C} kompleks tekislikdagi quyidagi to'plamlarga Riman sferasida qanday to'plamlar mos kelishini aniqlang:

- $\{\operatorname{Re} z > 0\}$,
- $\{\operatorname{Re} z < 0\}$,
- $\{\operatorname{Im} z > 0\}$,
- $\{\operatorname{Im} z < 0\}$,
- $\{|z| > 1\}$,
- $\{|z| < 1\}$.

1.2.3-misol. Stereografik proyeksiyada \mathbb{C} kompleks tekislikning har bir aylanasi sferaning aylanasiga o'tishini va aksincha, Riman sferasining har bir aylanasi \mathbb{C} kompleks tekislikning aylanasiga o'tishini isbotlang.

1.2.4-misol. Kompleks sonlar tekisligi \mathbb{C} dagi ushbu tengsizliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini toping:

a) $\rho(z, \infty) < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ (∞ nuqtani ε atrofi).

b) $\rho(z, i) > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

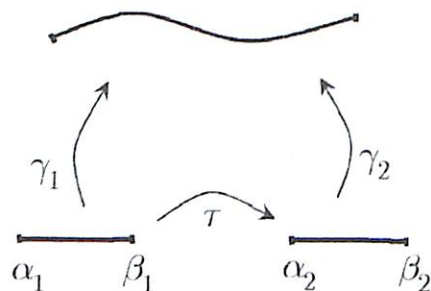
1.3 Kompleks tekislikda egri chiziqlar va sohalar

1.3.1 Kompleks tekislikda yo'l va chiziqlar

1.3.1-ta'rif. Haqiqiy sonlar o'qidan olingan $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$) kesmaning kompleks sonlar tekisligi \mathbb{C} ga uzluksiz akslantirish yordamidagi obrazi $\gamma = \gamma(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ yo'l deyiladi.

Demak, $\gamma = \gamma(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) uzluksiz funksiya $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ kesmani kompleks tekislik \mathbb{C} nuqtalariga akslantiradi va bu nuqtalar to'plami \mathbb{C} da yo'l ni ifodalaydi. Bunda $\gamma_0 = \gamma(\alpha)$ nuqta yo'lning boshlang'ich, $\gamma_1 = \gamma(\beta)$ esa bu yo'lning oxirgi nuqtasi deyiladi. Agar $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ bo'lsa, bu yo'l yopiq yo'l deyiladi.

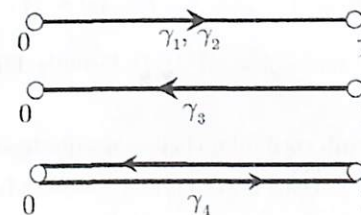
1.3.2-ta'rif. $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbb{C}$ va $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \rightarrow \mathbb{C}$ yo'llar berilgan bo'lib, shunday uzluksiz qat'iy o'suvchi $[\alpha_1, \beta_1]$ kesmani $[\alpha_2, \beta_2]$ kesmani ustiga akslantiruvchi va ixtiyoriy $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ uchun $\gamma_2(\tau(t)) = \gamma_1(t)$ shartni qanoatlantiruvchi τ funksiya mavjud bo'lsa, γ_1 va γ_2 yo'llar ekvivalent $\gamma_1 \sim \gamma_2$ deyiladi (3-chizma).



3-chizma

1.3.1-misol. Quyidagi yo'llarni-qaraymiz: $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$; $\gamma_2(t) = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $\gamma_3(t) = \cos t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $\gamma_4(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi]$. γ_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

funksiyalarning qiymatlar sohasi $[0, 1]$ kesmadan iborat. Bu yo'llarni faqat $\gamma_1 \sim \gamma_2$, γ_3 va γ_4 yo'llar bu yo'llarga ekvivalent emas, shu bilan birga ular o'zaro ham ekvivalent emas (4-chizma).



4-chizma

1.3.2-misol. Quyidagi yo'llarning qaysi biri o'zaro ekvivalent?

1) $\gamma_1 = e^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$,

2) $\gamma_1 = e^{4\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$,

3) $\gamma_1 = e^{-2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$,

4) $\gamma_1 = e^{2\pi i \sin t}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

1.3.3-ta'rif. Ekvivalent yo'llar sinfi egri chiziq deyiladi.

1.3.4-ta'rif. Agar $z = z(t)$ yo'lda t o'zgaruvchining ikkita turli t_1 va t_2 ($t_1 \neq t_2$) qiymatlariga mos keladigan $z(t_1)$ va $z(t_2)$ nuqtalar ham turlicha bo'lsa, u holda bu yo'l Jordan yo'li deyiladi.

1.3.5-ta'rif. Agar $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ segmentda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ yo'l silliq egri chiziq deyiladi. Agar $[\alpha, \beta]$ oraliqni chekli sondagi $[t_{j-1}, t_j]$ oraliqlarga bo'lganda, har bir $[t_{j-1}, t_j]$ oraliqda $\gamma(t)$ silliq bo'lsa, $z(t)$ chiziq bo'lakli silliq yo'l deyiladi.

1.3.2 Kompleks tekislikda ochiq va yopiq to'plamlar

Biror $z_0 \in \mathbb{C}$ nuqta va $\varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin.

1.3.6-ta'rif. Ushbu

$$\mathbb{U}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

to'plamga $z_0 \in \mathbb{C}$ nuqtaning ε -atrofi deyiladi.

Shunga o'xshash, agar $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ bo'lsa, bu nuqtaning ε -atrofi ushbu

$$\overline{U}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \rho(z, z_0) < \varepsilon\}.$$

to'plamdan iborat. Bu yerda $\rho(z, z_0)$ (1.4) formula bilan aniqlangan Riman metrikasi.

(1.5) formuladan ko'rinib turibdiki, cheksiz uzoqlashgan ∞ nuqtaning ε atrofi tekislikda $|z| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}$ tengsizlik yordamida aniqlanadi, ya'ni ∞ nuqtaning ε atrofiga tekislikda markazi koordinata boshida bo'lgan doiraning tashqarisi mos keladi.

Aytaylik, \mathbb{C} kompleks tekislikda biror D to'plam berilgan bo'lsin.

1.3.7-ta'rif. Agar $z_0 \in D$ nuqta o'zining biror atrofi bilan D to'plamga tegishli bo'lsa, z_0 nuqta D to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.

1.3.8-ta'rif. Barcha nuqtalari ichki nuqtalardan iborat to'plam ochiq to'plam deyiladi.

1.3.9-ta'rif. Agar $z_0 \in \mathbb{C}$ ($z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$) nuqtaning ixtiyoriy atrofida $D \subset \mathbb{C}$ ($D \subset \overline{\mathbb{C}}$) to'plamning z_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, z_0 nuqta D to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

1.3.10-ta'rif. Agar D to'plamning barcha limit nuqtalari shu to'plamga tegishli bo'lsa, u holda D to'plam yopiq to'plam deyiladi.

1.3.11-ta'rif. D to'plam hamda uning barcha limit nuqtalaridan iborat bo'lgan to'plam D to'plamning yopilmasi (yopiq'i) deyiladi va \overline{D} kabi belgilanadi.

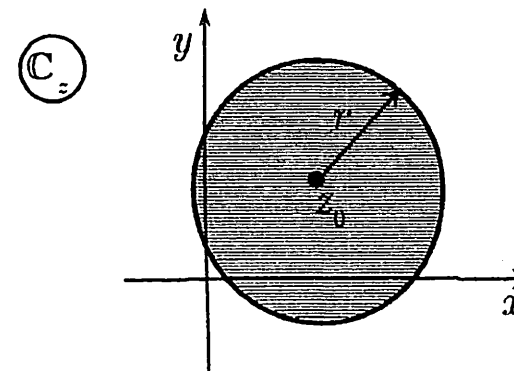
1.3.3-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ to'plamni kompleks tekislikda tasvirlang, bu yerda $z_0 = a + ib$ berilgan nuqta, r esa musbat son.

Ma'lumki $z = x + iy$ desak, u holda $z - z_0 = (x - a) + i(y - b)$ bo'lib, demak,

$$|z - z_0| = |(x - a) + i(y - b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r.$$

$$\Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$

bo'ladi bu esa, markazi (a, b) nuqtada bo'lgan r radiusli doira nuqtalaridan iboratdir (5-chizma). Shunday qilib, bu tengsizlikning geometrik ma'nosi markazi z_0 nuqtada bo'lgan r radiusli doiradan iborat ekan.



5-chizma

1.3.4-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z - z_0| < r_1\}$ to'plamni kompleks tekislikda tasvirlang, bu yerda $z_0 \in \mathbb{C}$ berilgan nuqta, r_0 va r_1 lar musbat sonlar ($r_0 < r_1$).

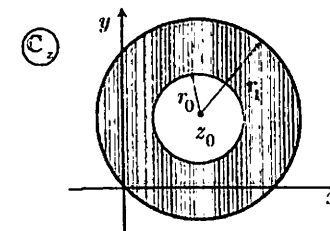
Bu to'plam ochiq to'plam bo'ladi. D to'plam markazi z_0 nuqtada, radiuslari r_0 va r_1 ($r_0 < r_1$) bo'lgan aylanalar bilan chegaralangan halqani ifodalaydi (6-chizma).

Haqiqatdan ham, $z = x + iy$, $z_0 = a + ib$ bo'lsa,

$$r_0 < |z - z_0| < r_1 \Rightarrow r_0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r_1$$

$$\Rightarrow r_0^2 < (x - a)^2 + (y - b)^2 < r_1^2$$

bo'ladi.



6-chizma

Endi kompleks tekislikda soha tushunchasini keltiramiz.

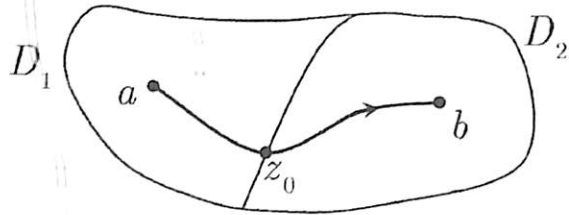
1.3.12-ta'rif. $D \subset \mathbb{C}$ ($D \subset \overline{\mathbb{C}}$) to'plam berilgan bo'lsin. Agar $D_1 \cup D_2 = D$, $\overline{D_1} \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cap \overline{D_2} = \emptyset$ shartlarni qanoatlantiruvchi, bo'sh bo'lmagan D_1 va D_2 to'plamlar mavjud bo'lmasa, D to'plam bog'lamli to'plam deyiladi.

1.3.13-ta'rif. Agar $D \subset \mathbb{C}$ ($D \subset \overline{\mathbb{C}}$) to'plamning ixtiyoriy ikkita z_1 va z_2 nuqtalarini D to'plamda to'liq yotuvchi yo'l bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, D to'plam chiziqli bog'lamli deyiladi.

1.3.14-ta'rif. Agar $D \subset \mathbb{C}$ to'plam ($D \subset \overline{\mathbb{C}}$) ham ochiq ham bog'lamli bo'lsa, u soha deb ataladi.

1.3.1-teorema. Ochiq to'plamlar uchun bog'lamlilik tushunchasi bilan chiziqli bog'lamlilik tushunchasi ustma-ust tushadi.

Isbot. Aytaylik, D to'plam ochiq va chiziqli bog'lamli bo'lsin. D to'plamning bog'lamli ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, bog'lamli bo'lmasin, ya'ni shunday $D_1 \subset D$ va $D_2 \subset D$ ochiq to'plamlar borki, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cup D_2 = D$ bo'ladi (7-chizma).



7-chizma

$a \in D_1, b \in D_2$ ixtiyoriy nuqtalar bo'lsin. D chiziqli bog'lamli bo'lganligi uchun $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$, $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ uzluksiz yo'l mavjud. Quyidagi to'plamni qaraymiz:

$$K = \{t \in [a, b] : \gamma(t) \in D_1\}, t_0 = \sup\{t : t \in K\}.$$

Ravshanki, D_1, D_2 to'plamlar ochiq bo'lganligi sababli $0 < t_0 < 1$ bo'ladi. Shu bilan birga $z_0 = \gamma(t_0)$ nuqta D_1 to'plamga ham D_2 to'plamga ham tegishli bo'lmaydi. Haqiqatdan ham, agar $z_0 \in D_1$ bo'lsa, barcha yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$

sonlar uchun $t_0 + \varepsilon \in K$ bo'ladi. Agar $z_0 \in D_2$ bo'lsa, barcha yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonlar uchun $t_0 - \varepsilon \in K$ bo'ladi. Demak, $\gamma(t_0) \notin D$. Bu γ yo'lining aniqlanishiga zid. Ziddiyat esa D bog'lamli ekanligini ko'rsatadi.

Endi D to'plam ochiq va bog'lamli bo'lsin. $z_0 \in D$ nuqtani tayinlab, D_1 orqali z_0 nuqtani $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ uzluksiz yo'l bilan birlashtirish mumkin bo'lgan $z \in D$ nuqtalar to'plamini belgilaymiz. D ochiq to'plam bo'lganligi uchun har qanday $z \in D$ nuqta markazi shu nuqtada bo'lgan biror doira bilan D ga tegishli bo'ladi. Doiraning har bir nuqtasini doira markazi bilan radius bo'yicha birlashtirish mumkin bo'lganligi sababli D_1 ochiq to'plam va $D_1 \neq \emptyset$ bo'ladi. $D_2 = D \setminus D_1$ bo'lsin. U holda D_2 ochiq to'plam bo'ladi. D bog'lamli bo'lganligi uchun $D_2 \equiv \emptyset$ bo'ladi. Demak, D chiziqli bog'lamli to'plam. \square

Bu teoremadan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

1.3.2-teorema. Aytaylik, $G \subset \mathbb{C}$ soha bo'lib, $F \subset G$ bo'sh bo'lmagan qism to'plam bo'lsin. Agar F bir paytning o'zida G sohada ochiq va yopiq bo'lsa, u holda $F = G$ bo'ladi.

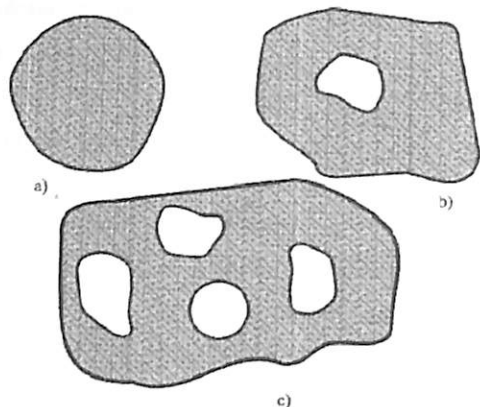
1.3.15-ta'rif. $D \subset \mathbb{C}$ ($D \subset \overline{\mathbb{C}}$) sohaning o'ziga tegishli bo'lmagan limit nuqtasi uning chegaraviy nuqtasi deyiladi.

1.3.16-ta'rif. D sohaning barcha chegaraviy nuqtalari to'plamiga uning chegarasi deyiladi va ∂D ko'rinishda belgilanadi.

1.3.17-ta'rif. Agar D sohaning chegarasi ∂D bog'lamli to'plam bo'lsa, D bir bog'lamli, aks holda esa ko'p bog'lamli soha deyiladi.

1.3.18-ta'rif. D soha chegarasi ∂D sohaning bog'lamli komponentlari soniga qarab D sohani bir bog'lamli, ikki bog'lamli va hakoza n bog'lamli soha deyiladi.

Bundan keyin soha chegarasining musbat yo'nalishi deb shunday yo'nalishni qabul qilamizki, kuzatuvchi bu yo'nalish bo'ylab harakat qilganda soha unga nisbatan har doim chapda joylashgan bo'ladi. Quyidagi rasnlarda bir bog'lamli va ko'p bog'lamli sohalar ko'rsatilgan (8-chizma).



8-chizma. a) bir bog'lamli; b) ikki bog'lamli; c) besh bog'lamli

Misol va masalalar

1.3.5-misol. Ushbu $z = 3 - 4it$, $-1 \leq t \leq 2$ funksiya aniqlagan egri chiziqni toping va kompleks tekislikda tasvirlang.

1.3.6-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini ko'rsating:

$$a) \operatorname{Im} \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$$

$$b) \operatorname{Re} \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0.$$

1.3.7-misol. Ushbu

$$|z|^2 + (4 - 3i)z + (4 + 3i)\bar{z} + 21 = 0$$

tenglama aylananing tenglamasi ekanligini isbotlang va bu aylana markazining koordinatlari hamda radiusini toping.

1.3.8-misol. Ushbu $z = a(t + i - ie^{-t})$, $-\infty < t < +\infty$, $a > 0$ funksiya aniqlagan egri chiziqni toping va kompleks tekislikda tasvirlang.

1.3.9-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini ko'rsating:

$$0 < \operatorname{Im}(iz) < 1.$$

1.3.10-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini ko'rsating:

$$0 < \arg \frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}.$$

1.3.11-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rnilarini toping ko'rsating:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{3\pi}{4}.$$

1.3.12-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rnilarini toping:

$$|z| + \operatorname{Re} z < 1.$$

1.4 Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar. Funksiya limiti va uzluksizligi

Aytaylik, \mathbb{C} kompleks tekislikda biror E to'plam berilgan bo'lsin.

1.4.1-ta'rif. Agar E to'plamdagi har bir z kompleks songa biror f qoida yoki qonunga ko'ra bitta w kompleks son mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda funksiya berilgan deyiladi va $u f : z \rightarrow w$ yoki $w = f(z)$ kabi belgilanadi. Bunda E funksiyaning aniqlanish to'plami, z erkli o'zgaruvchi yoki funksiya argumenti, f esa z o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya biror E ($E \subset \mathbb{C}$) to'plamda berilgan bo'lsin, ya'ni f qoidaga ko'ra har bir $z = x + iy \in E$ songa bitta $w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) son mos qo'yilgan bo'lsin. Demak,

$$w = u + iv = f(x + iy)$$

bo'lar ekan. Oxirgi tenglikdan $u = u(x, y)$ va $v = v(x, y)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, E to'plamda $w = f(z)$ funksiyaning berilishi shu to'plamda x va y haqiqiy o'zgaruvchilarning $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ haqiqiy funksiyalarining berilishidek ekan. Odatda, $u = u(x, y)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi, $v = v(x, y)$ esa $f(z)$ funksiyaning mavhum qismi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Erkli z o'zgaruvchi E to'plamda o'zgarganda $w = f(z)$ funksiyaning mos qiymatlaridan iborat to'plam

$$F = \{f(z) = u + iv : z = x + iy \in E\}$$

bo'lsin. Odatda, F to'plam funksiya qiymatlari to'plami deyiladi. Demak, E to'plamda $w = f(z)$ funksiyaning berilishi \mathbb{C} kompleks tekislikdagi E to'plamni F to'plamga aks ettirishdan iborat ekan. Shu sababli $w = f(z)$ funksiyani E to'plamning F to'plamga akslantirishi deb ham yuritiladi.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya $E \subset \mathbb{C}$ to'plamda berilgan bo'lsin.

1.4.2-ta'rif. Agar z argumentning E to'plamdan olingan turli qiymatlarida $f(z)$ funksiyaning mos qiymatlari ham turlicha bo'lsa, ya'ni $f(z_1) = f(z_2)$ tenglikdan $z_1 = z_2$ tenglik ($z_1, z_2 \in E$) kelib chiqsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda bir yaproqli funksiya deyiladi.

1.4.1-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{z-1}$ funksiyaning $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ to'plamda bir yaproqli bo'lishini ko'rsating.

Bu misol yechimi uchun quyidagi hisoblashlarni olib boramiz, ya'ni $z_1, z_2 \in E$ uchun

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \frac{1}{z_1-1} = \frac{1}{z_2-1} \Rightarrow z_1-1 = z_2-1 \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Demak,

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

bu esa berilgan funksiyaning E sohada bir yaproqli ekanligini bildiradi.

1.4.1 Funksiya limiti

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya $E \subset \mathbb{C}$ to'plamda berilgan bo'lib, $z_0 \in \mathbb{C}$ nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1.4.3-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, z argumentning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $A \in \mathbb{C}$ kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ dagi limiti deb ataladi va

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

kabi belgilanadi.

Izoh. Agar $z_0 = \infty$ ($A = \infty$) bo'lsa, $|z - z_0|$ ($|f(z) - A|$) Evklid metrikasining o'rniga $\rho(z, \infty)$ ($\rho(f(z), \infty)$) Riman metrikasi qaraladi.

Aytaylik, $A = \alpha + i\beta$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ va $z_0 = x_0 + iy_0$ bo'lsin.

1.4.1-teorema. $w = f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ da A limitga,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

ega bo'lishi uchun

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Aytaylik,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, z argumentning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Ravshanki,

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

$$|f(z) - A| = \sqrt{(u(x, y) - \alpha)^2 + (v(x, y) - \beta)^2},$$

bo'lib, $|z - z_0| < \delta$ bo'lishidan $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ bo'lishi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan quyidagi

$$|u(x, y) - \alpha| = |\operatorname{Re}(f(z) - A)| \leq |f(z) - A| < \varepsilon,$$

$$|v(x, y) - \beta| = |\operatorname{Im}(f(z) - A)| \leq |f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi (chunki $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$). Demak,

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$$

bo'lganda

$$|u(x, y) - \alpha| < \varepsilon,$$

$$|v(x, y) - \beta| < \varepsilon$$

tengsiziiklar bajariladi. Bu esa

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

ekanligini bildiradi.

Yetarliligi. Aytaylik,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

bo'lsin. Funksiya limiti ta'rifiga asosan,

$$\varepsilon > 0, \exists \delta_0 > 0, |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x, y nuqtalarda

$$|u(x, y) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$|v(x, y) - \beta| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi. Bulardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} |f(z) - A| &= |u(x, y) + iv(x, y) - (\alpha + i\beta)| = \\ &|(u(x, y) - \alpha) + i(v(x, y) - \beta)| = \sqrt{(u(x, y) - \alpha)^2 + (v(x, y) - \beta)^2} < \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Demak, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$. □

Aytaylik, $f(z)$ hamda $g(z)$ funksiyalar $E \subset \mathbb{C}$ to'plamda berilgan bo'lib, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$$

bo'lsa, u holda quyidagi

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

1.4.2 Funksiya uzluksizligi

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya $E \subset \mathbb{C}$ to'plamda berilgan bo'lib, $z_0 \in E$ nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1.4.4-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, z argumentning $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi

1.4.5-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda uzluksiz deyiladi.

Aytaylik, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1.4.2-teorema. $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y).$$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teorema 1.4.1-teoremaga o'xshash isbotlanadi.

Kompleks argumentli uzluksiz funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar z_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$f(z) \pm g(z), f(z) \cdot g(z), \frac{f(z)}{g(z)} \quad (g(z) \neq 0)$$

funksiyalar ham z_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2) Agar $f(z)$ funksiya yopiq va chegaralangan D to'plamda uzluksiz bo'lsa, bu funksiya D da chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday o'zgarmas $M (M \neq \infty)$ son mavjudki, ixtiyoriy $z \in D$ uchun

$$|f(z)| \leq M$$

bo'ladi.

3) Agar $f(z)$ funksiya yopiq va chegaralangan D to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya moduli D da o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi, ya'ni shunday $z_1, z_2 \in D$ nuqtalar topiladiki, ixtiyoriy $z \in D$ uchun

$$|f(z)| \leq |f(z_1)|,$$

$$|f(z)| \geq |f(z_2)|$$

o'rinni bo'ladi.

4) Agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, $|f(z)|$ funksiya ham shu z_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu xossalari 1.4.2-teorema yordamida isbotlanadi. Bu xossalarni isbotlashni o'quvchiga havola qilamiz.

Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya $E \subset \mathbb{C}$ to'plamda berilgan bo'lsin.

1.4.6-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, E to'plamning $0 < |z' - z''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $z', z'' \in E$ nuqtalari uchun $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda tekis uzluksiz deyiladi.

Yopiq va chegaralangan to'plamda uzluksiz funksiya uchun quyidagi Kantor teoremasi o'rinni.

1.4.3-teorema. Agar $f(z)$ funksiya chegaralangan yopiq to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.

Bu teorema ham 1.4.2-teorema yordamida isbotlanadi.

Misol va masalalar

1.4.2-misol. $f(z) = z^2$ funksiyaning $E = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ sohada bir yoproqlilikka tekshiring.

1.4.3-misol. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ funksiyaning $E = \{|z| < 2\}$ sohada bir yoproqlilikka tekshiring.

1.4.4-misol. Quyidagi funksiyalar berilgan sohada bir yoproqli emasligini ko'rsating:

1. $w = z^4$, $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$; 2. $w = e^z$, $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

1.4.5-misol. Quyidagi limitlarni hisoblang:

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z}$;

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$;

c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|} \cdot \operatorname{Im} z$;

d) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|} \cdot \operatorname{Re} z$.

1.4.6-misol. Ushbu $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ funksiyani $E = \{0 < |z| \leq R\}$ to'plamda tekis uzluksizlikka tekshiring.

1.4.7-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ funksiyani $E = \{|z| < 1\}$ to'plamda tekis uzluksizlikka tekshiring.

1.5 Funksiyaning differensiallanuvchanligi

Aytaylik, $f = u + iv$ funksiya $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtaning biror $\mathbb{U}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ atrofida berilgan bo'lsin. z_0 nuqtaga shunday Δz orttirma beraylikki, $z_0 + \Delta z \in \mathbb{U}(z_0, \varepsilon)$ bo'lsin.

1.5.1-ta'rif. Agar haqiqiy o'zgaruvchili $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, $f = u + iv$ funksiya $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada haqiqiy analiz ma'nosida differensiallanuvchi (yoki qisqacha \mathbb{R} differensiallanuvchi) deyiladi.

Masalan, ushbu $f(z) = |z|^2 + i(\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z)^2$ funksiya haqiqiy analiz ma'nosida differensiallanuvchidir. Haqiqatdan ham, bu funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari quyidagi

$$u(x, y) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$v(x, y) = [\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z]^2 = (x \cdot y)^2$$

ko'rinishda bo'lib, bu funksiyalar ixtiyoriy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nuqtada differensiallanuvchi (ularning barcha xususiy hosilalari mavjud va uzluksiz).

Ushbu

$$f(z) = \sqrt[3]{\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z}, \quad (z = x + iy)$$

funksiya $z = 0$ nuqtada \mathbb{R}^2 ma'noda differensiallanuvchi emas, chunki

$$u(x, y) = \sqrt[3]{xy}, \quad v(x, y) = 0$$

bo'lib, $u(x, y)$ funksiya $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtada differensiallanuvchi emas.

1.5.2-ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, bu limit kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \quad (1.12)$$

$f(z)$ funksiya esa z_0 nuqtada kompleks analiz ma'nosida differensiallanuvchi (yoki qisqacha \mathbb{C} differensiallanuvchi) deyiladi.

1.5.3-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida \mathbb{C} differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ funksiya D sohada \mathbb{C} differensiallanuvchi deyiladi.

Agar $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ bo'lsa, u holda (1.12) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0). \quad (1.13)$$

Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, $0 < |\Delta z| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi Δz uchun

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. (1.13) tenglikdan $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z$ bo'lishini hosil qilamiz, bu yerda $\Delta z \rightarrow 0$ intilganda $\alpha(z_0, \Delta z)$ ham nolga intiladi.

Agar $f(z)$ funksiyaning $\Delta f(z)$ ortirmasi

$$\Delta f = A\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z \quad (1.14)$$

ko'rinishda ifodalansa, bu yerda A - o'zgarmas son, $\alpha(z_0, \Delta z)$ nolga intiladi agar $\Delta z \rightarrow 0$, u holda $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada \mathbb{C} differensiallanuvchi va $A = f'(z_0)$ bo'ladi.

Natijada quyidagi tasdiqqa kelamiz.

1.5.1-teorema. $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada \mathbb{C} -differensiallanuvchi bo'lishi uchun (1.14) tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

1.5.1-misol. Ushbu $f(z) = z^2$ funksiyaning $\forall z \in \mathbb{C}$ nuqtadagi hosilasini toping.

Yechish. z nuqtaga Δz ortirma berib, shu nuqtadagi funksiya orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = (z + \Delta z)^2 - z^2 = 2z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2.$$

Unda

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = 2z + \Delta z$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = 2z$$

bo'ladi. Demak, $f'(z) = 2z$ bo'ladi.

Biz yuqorida kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi kabi ekanligini ko'rdik. Demak, kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning hosilalarini hisoblashda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosilalarini hisoblashdagi ma'lum qoida va jadvallardan foydalanish mumkin.

Ba'zi qoidalarni keltiramiz:

- 1) Agar $f(z) = c - const$ bo'lsa, $f'(z) = 0$ bo'ladi.
- 2) $(k \cdot f(z))' = k \cdot f'(z)$, $k = const$.
- 3) $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$.
- 4) $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$.
- 5) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z) \neq 0$.
- 6) Agar $w = f(z)$ va $F = \varphi(w)$ bo'lib, $F' = \varphi'(f(z))$ bo'lsa, u holda

$$(\varphi(f(z)))' = \varphi'(w) \cdot f'(z)$$

bo'ladi.

7) Agar $w = f(z)$ va $z = f^{-1}(w)$ bo'lsa,

$$(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(z)}, \quad (f'(z) \neq 0)$$

bo'ladi.

Garchi kompleks hamda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar hosilalari tushunchalarining kiritilishi bir xil bo'lsa ham, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilaga ega bo'lishi deyilishi (binobarin differensiallanuvchi bo'lishi deyilishi) talabi ancha kuchli talab hisoblanadi. Bitta sodda misol qaraylik.

Ushbu

$$f(z) = x$$

funksiyani olaylik. Agar bu funksiyaning haqiqiy o'qda joylashgan E to'plamda ($E \subset \mathbb{R}$) qaralsa, ravshanki, u hosilaga ega bo'lib, $f'(z) = 1$ bo'ladi.

Endi $f(z) = x$ funksiyaning kompleks tekislik \mathbb{C} da qaraylik. Ravshanki, bu funksiya uchun

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

bo'ladi. Bu nisbat $z \rightarrow z_0$ da limitga ega emas, chunki, $x = x_0$, $y \neq y_0$ da nisbat 0 ga teng, $x \neq x_0$, $y = y_0$ da nisbat 1 ga teng. Demak, $f(z) = x$ funksiya differensiallanuvchi emas.

Oldingi paragrafda $f = u + iv$ kompleks o'zgaruvchili funksiyaning $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada uzluksizligi $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada uzluksizligiga teng kuchli ekanligi aytilgan edi xuddi shunday tasdiq differensiallanuvchilik uchun o'rinli emas.

1.5.2-teorema. Kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada \mathbb{C} differensiallanuvchi bo'lishi uchun

- 1) $f = u + iv$ funksiyaning $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada \mathbb{R} differensiallanuvchi bo'lishi,
- 2) (x_0, y_0) nuqtada ushbu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (1.15)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada \mathbb{C} differensiallanuvchi bo'lsin, u holda (1.14) tenglikka ko'ra

$$\Delta f = f'(z_0) \cdot \Delta z + \alpha(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z \quad (1.16)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda $\Delta z \rightarrow 0$ da $\alpha(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$. Agar quyidagicha $\Delta f = \Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y)$ $f'(z_0) = A + iB$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\alpha\Delta z = \alpha_1 + i\alpha_2$ belgilashlarni kiritsak, u holda (1.16) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$\Delta u + i\Delta v = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1 + i\alpha_2.$$

bu yerda $\alpha_1, \alpha_2 = |\Delta z|$ miqdorga nisbatan cheksiz kichik miqdorlar.

Bu oxirgi tenglikdan haqiqiy va mavhum qismlarni tenglab, quyidagi munosabatlarni topamiz:

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1, \quad \Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2 \quad (1.17)$$

Demak, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi. Ayni paytda $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada \mathbb{R} differensiallanuvchi bo'ladi. Yuqoridagi (1.17) tenglikdan topamiz:

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -B = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$B = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad A = \frac{\partial v}{\partial y}$$

bu tengliklardan (1.15) munosabatni hosil qilamiz.

Yetariligi. Aytaylik, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi va (1.15) tengliklar bajarilsin. U holda (1.17) tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarning ikkinchisini i soniga ko'paytirib birinchisi bilan qo'shib ushbu

$$\Delta u + i\Delta v = A\Delta x - B\Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y) + \alpha_1 + i\alpha_2.$$

munosabatni, ya'ni quyidagi $\Delta f = (A + iB)\Delta z + \alpha\Delta z$ tenglik o'rinli ekanligini hosil qilamiz. 1.5.1-teoremaga ko'ra $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi. \square

Bu 1.5.2-teoremada keltirilgan (1.15) shartlar Koshi-Riman shartlari deyiladi. Yuqorida keltirilgan teoremdan hosilani hisoblash formulasi kelib chiqadi:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

1.5.2-misol. Ushbu $f(z) = z^2 + z$ funksiyaning ixtiyoriy $z \in \mathbb{C}$ nuqtada \mathbb{C} differensiallanuvchi bo'lishini ko'rsating.

Buning uchun dastlab, berilgan funksiyaning quyidagicha yozib olamiz:

$$f(z) = (x + iy)^2 + x + iy = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y).$$

Bundan $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = 2xy + y$ bo'lishini topamiz. Ravshanki, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar ixtiyoriy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nuqtada differensiallanuvchi. Ikkinchi tomondan $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$ bo'ladi. Demak, $f(z) = z^2 + z$ funksiya ixtiyoriy $z \in \mathbb{C}$ nuqtada \mathbb{C} differensiallanuvchi bo'ladi.

Agar $f = u + iv$ funksiya $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada \mathbb{R} differensiallanuvchi bo'lsa, ushbu

$$df(z_0) = du(x_0, y_0) + idv(x_0, y_0)$$

ifoda $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi differensial deyiladi.

Ravshanki,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

Natijada

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (1.18)$$

ekanligini topamiz, bu yerda

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Endi dx va dy larni ushbu $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$ ko'rinishda ifodalasak (1.18) tenglikdan topamiz:

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}. \quad (1.19)$$

Agar

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ va } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

differensial operatorlarni kiritsak unda $f(z)$ funksiya differensial uchun

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

tenglikka kelamiz.

Agar $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar z_0 nuqtada (1.15) Koshi-Riman shartlarini bajarsa unda bu nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

bo'ladi. Aksincha $f(z)$ funksiya biror z_0 nuqtada $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ shartni qanoatlantirsa, unda (x_0, y_0) nuqtada Koshi-Riman shartlari bajariladi. Demak, Koshi-Riman shartlarini $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ko'rinishda yozish mumkin ekan. Koshi-Riman shartlarini qutb koordinatalar sistemasida yozamiz. Ravshanki, $z = \rho e^{i\varphi}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$. Bu tengliklarni \bar{z} bo'yicha differensiallab

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} e^{i\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} r i e^{i\varphi} = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} r i e^{-i\varphi} = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib topamiz:

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{ie^{i\varphi}}{2r}.$$

Unda murakkab funksiyaning hosilasini topish formulasiga ko'ra

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, Koshi-Riman shartlari qutb koordinatalar sistemasida

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

ko'rinishda bo'ladi.

1.5.4-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtaning biror atrofida \mathbb{C} differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada golomorf deb ataladi.

1.5.5-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya D sohada golomorf deyiladi.

Odatda D sohada golomorf bo'lgan funksiyalar sinfi $\mathcal{O}(D)$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqta atrofida berilgan bo'lsin.

1.5.6-ta'rif. Agar $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya $z = 0$ nuqtada golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya ∞ nuqtada golomorf deyiladi.

1.5.7-ta'rif. Aytaylik, $f(z)$ funksiya $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ nuqtada ∞ ga teng bo'lsin. Agar $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ funksiya z_0 nuqtada golomorf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada golomorf deyiladi.

1.5.3-misol. $f(z) = \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$ funksiya $z = 0$ nuqtada golomorf bo'ladimi?

Ravshanki, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2x$ bo'ladi. Koshi-Riman shartlari faqat $x = y = 0$ nuqtada bajariladi. Demak, $f(z) = \bar{z}^2$ funksiya $z = 0$ nuqtada \mathbb{C} differensiallanuvchi, lekin bu nuqtada golomorf emas.

1.5.1-izoh. Odatda, $f(z)$ funksiya E yopiq to'plamda golomorf deyilganda bu funksiyaning E to'planning biror atrofida golomorfligi tushuniladi.

1.5.1 Yo'nalish bo'yicha hosila

Aytaylik, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada \mathbb{R} -differensiallanuvchi bo'lsin. U holda ushbu

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \Delta \bar{z} + o(\Delta z)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Δz ortirmaning ko'rsatkichli shaklda

$$\Delta z = |\Delta z| e^{i\theta}$$

yo'zib $\Delta \bar{z}$ ortirmaning topamiz: $\Delta \bar{z} = |\Delta z| e^{-i\theta} = \Delta z \cdot e^{-2i\theta}$. Natijada

$$\Delta f(z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) e^{-2i\theta} \right) \Delta z + o(\Delta z)$$

bo'ladi. Bu tenglikni Δz ga bo'lib, $\Delta z \rightarrow 0$, $\arg \Delta z = \theta = const$ bo'lganda limitga o'tib $f(z)$ funksiyaning θ yo'nalish bo'yicha hosilasini topamiz:

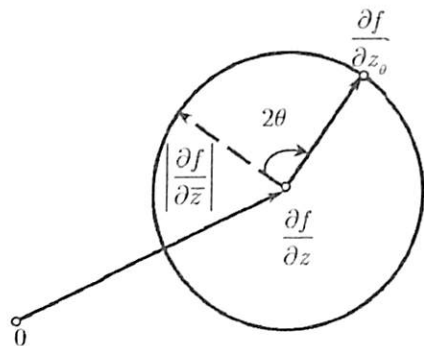
$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \arg z = \theta}} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) e^{-2i\theta} = f'_{\theta}(z_0).$$

Oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, agar $f(z_0)$ funksiya z_0 nuqtada \mathbb{R} differensiallanuvchi bo'lsa, bu nuqtada $f(z)$ funksiyaning θ yo'nalish bo'yicha hosilasi mavjud bo'ladi va θ argument 0 dan 2π gacha o'zgarsa $f'_{\theta}(z_0)$ markazi $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ da, radiusi $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right|$ bo'lgan aylanani ikki marta aylanib o'tadi. Demak, $f(z)$ funksiya z_0

nuqtada \mathbb{R} differensiallanuvchi bo'lsa, uning θ yo'nalish bo'yicha f'_θ hosilasi θ yo'nalishga bog'liq bo'ladi. Agar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ bo'lsa, ya'ni $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada \mathbb{C} differensiallanuvchi bo'lsa, hamma yo'nalishlar bo'yicha hosila z_0 nuqtada bir xil bo'lib,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'_\theta(z_0)$$

bo'ladi (9-chizma).



9-chizma

Misol va masalalar

1.5.4-misol. Ushbu $f(z) = |z|^2 [\operatorname{Re} z]^2$ funksiyaning \mathbb{C} differensiallanuvchanlikka tekshiring.

1.5.5-misol. $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$ funksiyaning \mathbb{C} differensiallanuvchanlikka tekshiring.

1.5.6-misol. Ushbu $f(z) = \sqrt{|xy|}$ funksiya uchun $z = 0$ nuqtada Koshi-Riman shartlarining bajarilishini, lekin shu nuqtada funksiyaning hosilasi mavjud emasligini isbotlang.

1.5.7-misol. Ushbu $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ funksiyaning golomorflikka tekshiring.

1.5.8-misol. Aytaylik $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ bo'lsin. Agar $\forall z \in D$ uchun $|f'(z)| \equiv \text{const}$ bo'lsa, u holda $\forall z \in D$ uchun $f(z) \equiv \text{const}$ bo'lishini isbotlang.

1.5.9-misol. Ushbu $f(z) = |x - y|^2 + 2i|xy|$ funksiya golomorf bo'lgan sohalarni toping.

1.6 Hosila moduli va argumentning geometrik ma'nosi. Konform akslantirishlar

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya biror $D \subset \mathbb{C}$ sohada berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning \mathbb{C}_z tekislikning nuqtalarini \mathbb{C}_w tekislik nuqtalariga akslantirish deb qaraymiz. Bu $w = f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada $f'(z_0)$ hosila ega va $f'(z_0) \neq 0$ bo'lsin. Hosila ta'rifidan foydalanib, topamiz:

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}$$

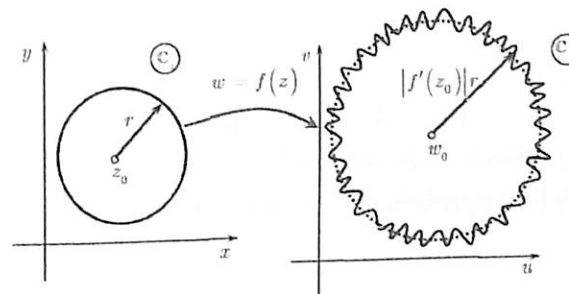
($w_0 = f(z_0)$).

Ravshanki, bu tenglikdan

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| |z - z_0| + o(|z - z_0|)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $|z - z_0|$ yetarlicha kichik bo'lganda $|z - z_0|$ hamda $|w - w_0|$ miqdorlar proporsional bo'lib, $|f'(z_0)|$ esa shu proporsionallik koeffitsiyentini ifodalaydi. Bu $w = f(z)$ akslantirish yordamida $|z - z_0| = r$ aylana, cheksiz kichik miqdor $o(|z - z_0|)$ aniqligida $|w - w_0| = |f'(z_0)| \cdot r$ aylanaga (aylanaga yaqin yopiq chiziqqa) akslanadi (10-chizma).



10-chizma

Agar $|f'(z_0)| < 1$ bo'lsa, unda $|z - z_0| = r$ aylana siqiladi $|f'(z_0)| > 1$ bo'lganda esa cho'ziladi. Demak, funksiya hosilasining moduli $w = f(z)$ akslantirishda cho'zilish koeffitsiyentini bildirar ekan (cho'zilishning saqlanishi). Odatda cho'zilish koeffitsiyenti k bilan belgilanadi: $k = |f'(z_0)|$.

Endi hosila argumentining geometrik ma'nosiga to'xtalamiz.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ akslantirish z_0 nuqtaning biror atrofida hosilaga ega bo'lib, $f'(z_0) \neq 0$ bo'lsin. Bu z_0 nuqtadan o'tuvchi silliq $\gamma = \{z(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$ egri chiziqni olib, uning yo'nalishi bo'yicha shu egri chiziqqa $z_0 = z(t_0)$ nuqtada urinma o'tkazamiz. Bu urinmaning haqiqiy o'qning musbat qismi bilan tashkil etgan burchagi α bo'lsin: $\alpha = \arg z'(t_0)$. $w = f(z)$ akslantirish esa γ egri chiziqni \mathbb{C}_w tekislikdagi Γ egri chiziqqa o'tkazsin.

Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasiga ko'ra $w'(t) = f'(z) \cdot z'(t)$ bo'lib, $t = t_0$ nuqtada

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \quad (1.20)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f'(z_0) \neq 0$ va $z'(t_0) \neq 0$ (γ chiziqning silliqligidan) bo'lgani uchun $w'(t_0) \neq 0$ bo'ladi. Binobarin, $w_0 = f(z_0)$ nuqtada Γ egri chiziqning urinmasi mavjud. Bu urinmaning burchak koeffitsiyentini β bilan belgilaymiz: $\beta = \arg w'(t_0)$. Yuqoridagi (1.20) tenglikdan

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

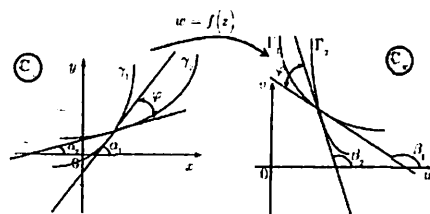
ya'ni

$$\beta = \arg f'(z_0) + \alpha \quad (1.21)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiya hosilasining argumenti $w = f(z)$ akslantirishda γ chiziqni qanday burchakka buralishini bildirar ekan (burchakning saqlanishi).

Agar z_0 nuqtadan o'tuvchi ikki γ_1 va γ_2 egri chiziqlar orasidagi burchak φ bo'lsa, $w = f(z)$ akslantirishda bu chiziqlarning akslari Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlar orasidagi burchak ham φ bo'ladi, bu quyidagi mulohazalardan kelib chiqadi (11-chizma).



11-chizma

$$\begin{cases} \beta_1 = \arg f'(z_0) + \alpha_1, & \varphi = \arg f'(z_0) \\ \beta_2 = \arg f'(z_0) + \alpha_2. & \alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1. \end{cases}$$

Odatda buralish burchagi $\alpha(\varphi)$ kabi belgilanadi: $\alpha(\varphi) = \arg f'(z_0)$

1.6.1-izoh. $f'(z) \neq 0$ shart $w = f(z)$ akslantirishning yakobiani z_0 nuqtada nolga teng emashigini bildiradi.

Haqiqatdan ham, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ akslantirish $u(x, y)$, $v(x, y)$ akslantirishga ekvivalent. Keying akslantirishning yakobiani

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

bo'ladi. $f(z)$ funksiya \mathbb{C} differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$J = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

tenglikdan

$$|f'(z_0)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $J(z_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$.

Endi kompleks analizda muhim ahamiyatga ega bo'lgan ta'rifni keltiramiz.

1.6.1-ta'rif. Agar $w = f(z)$ akslantirish nuqtada bir xil cho'zish va burchakni saqlash xossalriga ega bo'lsa, bunday akslantirishga nuqtada konform¹ akslantirish deyiladi.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtaning biror atrofida golomorf bo'lib, $f'(z_0) \neq 0$ bo'lsa, $w = f(z)$ akslantirish z_0 nuqtada konform bo'ladi.

Sohada konformlik ta'rifi quyidagicha kiritiladi.

¹Konform-lotinchadan conformis so'zidan olingan bo'lib, o'xshash degan ma'noni beradi.

1.6.2-ta'rif. Agar $w = f(z)$ akslantirish D sohada bir yaproqli bo'lib, sohaning har bir nuqtasida konform bo'lsa, u D sohada konform akslantirish deyiladi.

Endi ∞ nuqtada konformlik tushunchasini kiritamiz.

1.6.3-ta'rif. Agar $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya 0 nuqtada konform bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya ∞ nuqtada konform deyiladi.

1.6.2-izoh. Agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada \mathbb{C} differentsiallanuvchi bo'lib, $f'(z_0) = 0$ bo'lsa, $w = f(z)$ akslantirish z_0 nuqtada konform bo'lmaydi. $f(z) = z^2$ funksiyaning hosilasi $z = 0$ nuqtada nolga teng. $z = 0$ nuqtadan chiquvchi $\arg z = \alpha$ va $\arg z = \beta$ nurlarni $w = z^2$ akslantirish mos ravishda $\arg w = 2\alpha$ va $\arg w = 2\beta$ nurlarga akslantiradi. $\arg z = \alpha$ va $\arg z = \beta$ nurlar orasidagi burchak $(\beta - \alpha)$ bo'ladi. Bu nurlarning obrazlari orasidagi burchak esa $2(\beta - \alpha)$ ga teng, ya'ni $z = 0$ nuqtada burchak saqlanmaydi. Demak, $w = z^2$ akslantirish $z = 0$ nuqtada konform emas.

Konform akslantirishlar nazariyasida asosan quyidagi ikki masala o'rganiladi:

1. $D \subset \mathbb{C}_z$ sohada $w = f(z)$ akslantirish berilgan holda D ning aksi $D^* = f(D)$ ni topish;
2. Ikkita $D \subset \mathbb{C}_z$ va $G \subset \mathbb{C}_w$ sohalar berilgan holda, D sohani G sohaga konform akslantiradigan $w = f(z)$ funksiyaning topish.

Bu masalalar ikkinchi va oltinchi boblarda o'rganiladi.

Misol va masalalar

1.6.1-misol. Faraz qilaylik, γ chiziq z_0 nuqtadan chiquvchi $\arg(z - z_0) = \varphi$ nur bo'lsin. Ushbu misollardagi akslantirishlar uchun z_0 nuqtadagi cho'zilish koeffitsiyenti $R(\varphi)$ va burilish burchagi $\alpha(\varphi)$ ni toping.

- a) $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$.
- b) $w = \frac{1-i}{1+i}$, $z_0 = -i$.
- c) $w = \bar{z}^2$, $z_0 = i$.

1.6.2-misol. Ushbu $f(z) = 4z^2 - 8z$ funksiyaning konformlik sohasini toping.

1.6.3-misol. Ushbu $w = z^2 + 2z$ akslantirish natijasida tekislikning qaysi qismida siqiladi va qaysi qismida cho'ziladi?

BOB 2

ELEMENTAR FUNKSIYALAR

Ushbu bobda golomorf funksiylarning ba'zi sinflarini alohida o'rganib chiqamiz: kasr-chiziqli funksiya, Jukovskiy funksiyasi, darajali funksiya, ko'rsatkichli, trigonometrik funksiylar va boshqalar.

2.1 Chiziqli funksiya

Ushbu

$$w = az + b \quad (2.1)$$

ko'rinishdagi funksiya chiziqli funksiya (chiziqli akslantirish) deyiladi, bu yerda a, b o'zgarimas kompleks sonlar va $a \neq 0$. Bu funksiya $\bar{\mathbb{C}}_z$ to'plamda aniqlangan, unga teskari bo'lgan funksiya ham chiziqli funksiya bo'lib, u quyidagi

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a} \quad (2.2)$$

ko'rinishga ega. Yuqoridagi (2.1) va (2.2) akslantirishlardan $\bar{\mathbb{C}}_z$ va $\bar{\mathbb{C}}_w$ tekislik nuqtalari o'zaro bir qiymatli moslikda ekanligi kelib chiqadi. Bunda $z = \infty$ da $w = \infty$ bo'ladi va aksincha. Ravshanki,

$$w' = (az + b)' = a \neq 0.$$

Demak, $w = az + b$ akslantirish $\bar{\mathbb{C}}_z$ tekislikni $\bar{\mathbb{C}}_w$ tekislikka konform akslantiradi.

Ixtiyoriy $z \in \bar{\mathbb{C}}_z$ nuqtani olaylik. Bu z nuqta (2.1) akslantirish yordamida w nuqtaga ($w \in \bar{\mathbb{C}}_w$) o'tadi.

Chiziqli funksiya yordamida bajariladigan akslantirishni aniqlash uchun avvalo uning xususiy hollarni qaraymiz.

1°. Aytaylik,

$$w = z + b \quad (2.3)$$

bo'lsin. Agar kompleks son vektor orqali ifodalanishini e'tiborga olsak, unda (2.3) akslantirish z va b vektorlar yig'indisi orqali topilishini ko'ramiz. Demak, bu holda z ga ko'ra uning aksi w parallel ko'chirish orqali topilar ekan.

2°. Aytaylik,

$$w = e^{i\alpha} z \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

bo'lsin. Avvalo

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

ekanini e'tiborga olib, so'ng

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} w = e^{i\alpha} z &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= |z| \cdot (\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)). \end{aligned}$$

Demak,

$$|w| = |z|, \quad \arg w = \varphi + \alpha = \arg z + \alpha$$

bo'ladi. Bu holda z ga ko'ra uning aksi w , z vektorni α burchakka burish bilan topilar ekan.

3°. Aytaylik,

$$w = kz \quad (k > 0)$$

bo'lsin. U holda z ga ko'ra uning aksi w , z vektorni cho'zish ($k > 1$) yoki siqish ($k < 1$) orqali topiladi.

Yuqorida keltirilgan hollardan ko'rinadiki,

$$w = az + b$$

chiziqli funksiya yordamida akslantirish $\overline{\mathbb{C}}_z$ tekislikdagi sohani "parallel ko'chirish", "burchakka burish" hamda "cho'zilish yoki siqilish"ni amalga oshirar ekan.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya biror D sohada ($D \subset \overline{\mathbb{C}}$) berilgan bo'lsin. Agar $a \in D$ nuqtada

$$f(a) = a$$

tenglik bajarilsa, u holda $z = a$ nuqta $w = f(z)$ akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi. Yuqorida keltirilgan

$$w = az + b$$

chiziqli akslantirish $a = 1$ bo'lganda $z = \infty$ qo'zg'almas nuqtaga, $a \neq 1$ bo'lganda esa $z_1 = \infty$, $z_2 = \frac{b}{1-a}$ qo'zg'almas nuqtaga ega bo'ladi.

Misol va masalalar

2.1.1-misol. Berilgan $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i - 1| < \sqrt{2}\}$ sohaning $w = 2iz + 1 - i$ funksiya yordamidagi aksini toping.

2.1.2-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : -2 \leq \operatorname{Re} z \leq -1, 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3\}$ sohani $w = 2z + 5 + i$ chiziqli funksiya qanday sohaga akslantiradi?

2.1.3-misol. Uchlari $A = 3 + 2i$, $B = 7 + 2i$, $C = 5 + 4i$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning ushbu $w = iz + 1$ chiziqli funksiya yordamidagi aksini toping.

2.1.4-misol. \mathbb{C}_z tekislikdagi $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ doirani \mathbb{C}_w tekislikdagi $U = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ birlik doiraga akslantiruvchi chiziqli funktsiyani toping.

2.2 Kasr-chiziqli funksiya va uning xossalari

Ushbu

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.4)$$

ko'rinishdagi funksiya kasr-chiziqli funksiya deyiladi, bunda a, b, c, d koeffitsiyentlar o'zgarmas kompleks sonlar bo'lib, ular uchun $ad - bc \neq 0$ shart bajariladi. Bu shart bajarilmasligi w funktsiyani o'zgarmas bo'lishiga olib keladi.

Haqiqatdan ham, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ bo'lsa, u holda

$$w = \frac{bkz + b}{dkz + d} = \frac{b}{d} = \text{const}$$

bo'ladi. Agar $c = 0, d \neq 0$ bo'lsa, u holda (2.4) akslantirish yuqoridagi (2.1) ko'rinishdagi

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B$$

chiziqli funksiyaga aylanadi. Bu chiziqli funksiya xossalari yuqorida keltirib o'tdik. Agar $c \neq 0$ bo'lganda (2.4) kasr-chiziqli akslantirish \overline{C}_z kompleks tekislikning $z \neq -\frac{d}{c}$ va $z \neq \infty$ nuqtalarida aniqlangan bo'ladi. Biz (2.4) kasr-chiziqli akslantirishni \overline{C}_z kengaytirilgan kompleks tekislikda aniqlashimiz uchun quyidagilarni qabul qilamiz:

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty. (c \neq 0). \quad (2.5)$$

Bu (2.5) munosabatni hisobga olib quyidagi tasdiqning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz:

2.2.1-teorema. (2.4) kasr-chiziqli akslantirish \overline{C}_z ning nuqtalarini \overline{C}_w ning nuqtalariga gomeomorf (ya'ni, o'zaro bir qiymatli, uzluksiz va teskasi ham uzluksiz) akslantiradi.

Isbot. Yuqorida $c = 0$ bo'lganda teorema o'rinli bo'lishini ko'rsatgan edik. Shuning uchun, $c \neq 0$ bo'lganda ham teorema o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Kasr-chiziqli funksiya berilishidan va yuqoridagi (2.5) munosabatlardan ushbu

$$\begin{aligned} z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = w, \quad (z \neq -\frac{d}{c}, z \neq \infty) \\ -\frac{d}{c} \rightarrow \infty = w, \\ \infty \rightarrow \frac{a}{c} = w \end{aligned}$$

mosliklarga egamiz.

Endi (2.4) munosabatni z o'zgaruvchiga nisbatan yechish natijasida berilgan kasr-chiziqli funksiyaga nisbatan teskari bo'lgan

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (2.6)$$

funksiyaga kelimiz, bu yerda ham $c \neq 0$ bo'lganda, $z(\infty) = -\frac{d}{c}, z\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$ deb qaraymiz. Bundan esa quyidagi moslikka ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} w \rightarrow \frac{-dw+b}{cw-a} = z, \quad (w \neq \frac{a}{c}, w \neq \infty), \\ \infty \rightarrow -\frac{d}{c} = z, \\ \frac{a}{c} \rightarrow \infty = z. \end{aligned}$$

Demak, (2.4) kasr-chiziqli funksiya \overline{C}_z to'plamda, (2.6) funksiya esa \overline{C}_w to'plamda aniqlangan, bo'lib (2.4) kasr-chiziqli funksiya \overline{C}_z to'plam nuqtalarini \overline{C}_w to'plam nuqtalariga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Endi bu funksiyani kengaytirilgan kompleks tekislikda uzluksizligini ko'rsatamiz. Dastlab, $w = \frac{az+b}{cz+d}$ funksiya uchun qaraymiz. Bu funksiyaning $\overline{C}_z \setminus \{-\frac{d}{c}, \infty\}$ to'plamda uzluksizligi ravshan. Berilgan funksiyaning $z = -\frac{d}{c}$ va $z = \infty$ nuqtalarda uzluksizligini quyidagicha ko'rsatamiz:

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} w(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

Demak, $w = \frac{az+b}{cz+d} \in C(\overline{C}_z)$ ekan. Xuddi shunday bu funksiyaga teskari bo'lgan funksiyaning ham kengaytirilgan kompleks tekislikda uzluksizligi ko'rsatildi. \square

Endi kasr-chiziqli akslantirishning konform akslantirish bo'lishi haqidagi quyidagi teoremani keltiramiz.

2.2.2-teorema. (2.4) kasr-chiziqli akslantirish \overline{C}_z tekislik nuqtalarini \overline{C}_w tekislik nuqtalariga konform akslantiradi¹.

Isbot. Dastlab $c \neq 0$ bo'lgan holda $w = \frac{az+b}{cz+d}$ funksiyaning $z \in \overline{C} \setminus \{-\frac{d}{c}, \infty\}$ nuqtalarda konformlikka tekshiramiz:

$$w' = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{(cz+d)a - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0, (ad-bc \neq 0),$$

bo'lganligi uchun $w = \frac{az+b}{cz+d}$ akslantirish $\overline{C} \setminus \{-\frac{d}{c}, \infty\}$ to'plamda konform ekan.

Endi (2.4) akslantirishning $z = -\frac{d}{c}$ va $z = \infty$ nuqtalarda konform bo'lishini ko'rsatamiz. Bu (2.4) akslantirishni $z = -\frac{d}{c}$ nuqtada konform bo'lishini ko'rsatish uchun ushbu

$$w = \frac{1}{w_1}$$

funksiyani qaraymiz. Ravshanki,

$$w_1 = \frac{cz+d}{az+b}, w_1' = \frac{bc-ad}{(az+b)^2}$$

¹Cheksiz uzoqlashgan nuqtada konformlik deganda faqat burchak saqlanish xossasi tushuniladi.

bo'lib, quyidagi

$$w'_1 \left(-\frac{d}{c} \right) = \frac{c^2}{bc - ad} \neq 0$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Demak, qaralayotgan akslantirish $z = -\frac{d}{c}$ nuqtada konform bo'ladi. Endi (2.4) akslantirishni $z = \infty$ nuqtada konform bo'lishini ko'rsatish uchun esa $z_1 = \frac{1}{z}$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$w(z_1) = \frac{a + bz_1}{c + dz_1}$$

$$w'(z_1) = \frac{bc - ad}{(c - dz_1)^2}$$

bo'lib, $z_1 = 0$ bo'lganda $w'(0) = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0$ bo'ladi. Demak, (2.4) akslantirish $z = \infty$ nuqtada konform bo'ladi. Shunday qilib, $w = \frac{az+b}{cz+d}$ akslantirish $\overline{\mathbb{C}}_z$ tekislik nuqtalarini $\overline{\mathbb{C}}_w$ tekislik nuqtalariga konform akslantirar ekan. \square

Agar barcha (2.4) ko'rinishdagi kasr-chiziqli akslantirishlar sinfini biror Λ bilan belgilasak. U holda ikkita $L_1, L_2 \in \Lambda$.

$$L_1 : w_1 = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \quad a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0.$$

$$L_2 : w_2 = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}, \quad a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0.$$

kasr-chiziqli akslantirishlarning kompozitsiyasi bo'lgan akslantirish $L = L_1 \circ L_2(z)$ ham kasr-chiziqli bo'ladi:

$$L : w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) \neq 0.$$

Bundan tashqari yuqoridagi 2.2.1-teoremani isbotlash jarayonida ko'rdikki, kasr-chiziqli L akslantirishning teskarisi L^{-1} ham kasr-chiziqli bo'ladi. Shunday qilib, yuqorida tuzilgan Λ sinf uchun quyidagi xossalari o'rinli:

1° **Assosativlik.** Ixtiyoriy uchta $L_1, L_2, L_3 \in \Lambda$ kasr-chiziqli akslantirish uchun quyidagi

$$L_1 \circ (L_2 \circ L_3) = (L_1 \circ L_2) \circ L_3$$

xossa (assosativlik) o'rinli.

Yuqoridagi tenglikning ikkala tarafi ham ushbu $L_1 \{L_2 \{L_3(z)\}\}$ kasr-chiziqli funksiyani aniqlaydi.

2° **Birlik elementning mavjudligi (ayniy akslantirishning mavjudligi).**

Agar $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$ deyilsa, u holda

$$E : w(z) = z \in \Lambda$$

ayniy akslantirish ham Λ sinfga tegishli bo'ladi.

3° **Teskari elementning mavjudligi.** Ixtiyoriy $L \in \Lambda$ uchun shunday $L^{-1} \in \Lambda$ mavjudki, ular uchun quyidagi

$$L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = E$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi (2.4) ko'rinishdagi akslantirishga teskari akslantirish (2.6) ko'rinishda bo'ladi. Demak, barcha kasr-chiziqli akslantirishlar to'plami Λ kompozitsiya amaliga nisbatan gruppaga tashkil qiladi. Bu gruppaga kommutativ emas. Masalan, $L_1 : w_1(z) = z + 1, L_2 : w_2(z) = \frac{1}{z}$ desak u holda $L_1 \circ L_2 : w_1(w_2(z)) = \frac{1}{z} + 1$ va $L_2 \circ L_1 : w_2(w_1(z)) = \frac{1}{z+1}$ bo'lib,

$$L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$$

bo'ladi, bu esa Λ kommutativ gruppaga emasligini bildiradi.

2.2.1 Kasr-chiziqli akslantirishning xossalari

Endi kasr-chiziqli akslantirishning geometrik xossalari bo'lgan doiraviylik va simmetriyani saqlashi xossalari keltiramiz. Bu xossalari kasr-chiziqli funktsiya yordamida bajaraladigan akslantirishlarga doir masalalarda keng tadbiiq qilinadi.

Doiraviylik xossasi. Kasr-chiziqli akslantirishning xossalaridan biri doiraviylik xossasidir. Shuni ta'kidlab o'tishimiz kerakki, $\overline{\mathbb{C}}$ kengaytirilgan kompleks tekislikdagi aylana deganda, \mathbb{C} tekislikdagi aylana yoki to'g'ri chiziq tushuniladi. Demak, biz aylana haqida gapirganimizda to'g'ri chiziqlarni ham radiusi cheksiz bo'lgan aylana deb qaraymiz.

2.2.3-teorema. (Kasr-chiziqli akslantirishning doiraviylik xossasi). Ixtiyoriy kasr-chiziqli $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad - bc \neq 0$) akslantirish $\overline{\mathbb{C}}_z$ tekislikdagi har qanday aylananani $\overline{\mathbb{C}}_w$ tekislikdagi aylanaga akslantiradi.

bo'lib, quyidagi

$$w'_1 \left(-\frac{d}{c} \right) = \frac{c^2}{bc - ad} \neq 0$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Demak, qaralayotgan akslantirish $z = -\frac{d}{c}$ nuqtada konform bo'ladi. Endi (2.4) akslantirishni $z = \infty$ nuqtada konform bo'lishini ko'rsatish uchun esa $z_1 = \frac{1}{z}$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$w(z_1) = \frac{a + bz_1}{c + dz_1},$$

$$w'(z_1) = \frac{bc - ad}{(c - dz_1)^2}$$

bo'lib, $z_1 = 0$ bo'lganda $w'(0) = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0$ bo'ladi. Demak, (2.4) akslantirish $z = \infty$ nuqtada konform bo'ladi. Shunday qilib, $w = \frac{az+b}{cz+d}$ akslantirish $\overline{\mathbb{C}}_z$ tekislik nuqtalarini $\overline{\mathbb{C}}_w$ tekislik nuqtalariga konform akslantiradi ekan. \square

Agar barcha (2.4) ko'rinishdagi kasr-chiziqli akslantirishlar sinfini biror Λ bilan belgilasak. U holda ikkita $L_1, L_2 \in \Lambda$.

$$L_1 : w_1 = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \quad a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0,$$

$$L_2 : w_2 = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}, \quad a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0.$$

kasr-chiziqli akslantirishlarning kompozitsiyasi bo'lgan akslantirish $L = L_1 \circ L_2(z)$ ham kasr-chiziqli bo'ladi:

$$L : w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) \neq 0.$$

Bundan tashqari yuqoridagi 2.2.1-teoremani isbotlash jarayonida ko'rdikki, kasr-chiziqli L akslantirishning teskarisi L^{-1} ham kasr-chiziqli bo'ladi. Shunday qilib, yuqorida tuzilgan Λ sinf uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1° **Assosativlik.** Ixtiyoriy uchta $L_1, L_2, L_3 \in \Lambda$ kasr-chiziqli akslantirish uchun quyidagi

$$L_1 \circ (L_2 \circ L_3) = (L_1 \circ L_2) \circ L_3$$

xossa (assosativlik) o'rinli.

Yuqoridagi tenglikning ikkala tarafi ham ushbu $L_1 \{L_2 \{L_3(z)\}\}$ kasr-chiziqli funktsiyani aniqlaydi.

2° **Birlik elementning mavjudligi (ayniy akslantirishning mavjudligi).**

Agar $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$ deyilsa, u holda

$$E : w(z) = z \in \Lambda$$

ayniy akslantirish ham Λ sinfga tegishli bo'ladi.

3° **Teskari elementning mavjudligi.** Ixtiyoriy $L \in \Lambda$ uchun shunday $L^{-1} \in \Lambda$ mavjudki, ular uchun quyidagi

$$L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = E$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi (2.4) ko'rinishdagi akslantirishga teskari akslantirish (2.6) ko'rinishda bo'ladi. Demak, barcha kasr-chiziqli akslantirishlar to'plami Λ kompozitsiya amaliga nisbatan gruppaga tashkil qiladi. Bu gruppaga kommutativ emas. Masalan, $L_1 : w_1(z) = z + 1, L_2 : w_2(z) = \frac{1}{z}$ desak u holda $L_1 \circ L_2 : w_1(w_2(z)) = \frac{1}{z} + 1$ va $L_2 \circ L_1 : w_2(w_1(z)) = \frac{1}{z+1}$ bo'lib,

$$L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$$

bo'ladi, bu esa Λ kommutativ gruppaga emasligini bildiradi.

2.2.1 Kasr-chiziqli akslantirishning xossalari

Endi kasr-chiziqli akslantirishning geometrik xossalari bo'lgan doiraviylik va simmetriyani saqlashi xossalari keltiramiz. Bu xossalar kasr-chiziqli funktsiya yordamida bajaraladigan akslantirishlarga doir masalalarda keng tadbiiq qilinadi.

Doiraviylik xossasi. Kasr-chiziqli akslantirishning xossalaridan biri doiraviylik xossasidir. Shuni ta'kidlab o'tishimiz kerakki, $\overline{\mathbb{C}}$ kengaytirilgan kompleks tekislikdagi aylana deganda, \mathbb{C} tekislikdagi aylana yoki to'g'ri chiziq tushuniladi. Demak, biz aylana haqida gapirganimizda to'g'ri chiziqni ham radiusi cheksiz bo'lgan aylana deb qaraymiz.

2.2.3-teorema. (Kasr-chiziqli akslantirishning doiraviylik xossasi). Ixtiyoriy kasr-chiziqli $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad - bc \neq 0$) akslantirish $\overline{\mathbb{C}}_z$ tekislikdagi har qanday aylananing $\overline{\mathbb{C}}_w$ tekislikdagi aylanaga akslantiradi.

Isbot. Ravshanki, $c = 0$ bo'lganda teoremaning o'rinli bo'lishi, chiziqli funksiyaniq cho'zilish va burchak saqlash xossalariidan darhol kelib chiqadi. Shuning uchun, $c \neq 0$ bo'lgan holda teoremani isbotlaymiz. Kasr-chiziqli akslantirishni quyidagicha yozib olamiz:

$$L: w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad-bc}{c^2}}{z+\frac{d}{c}} = A + \frac{B}{z+C}.$$

Demak, kasr-chiziqli akslantirish quyidagi uchta akslantirishining kompozitsiyasidan iborat ekan:

$$L_1(z) = A + Bz, \quad L_2(z) = \frac{1}{z}, \quad L_3(z) = z + C, \quad L = L_1 \circ L_2 \circ L_3.$$

Bu akslantrishlardan, L_1, L_3 chiziqli akslantirish bo'lganligi sababli doiraviylik xossasiga ega, shuning uchun teoremani $L_2(z) = \frac{1}{z}$ akslantirish uchun isbotlaymiz. Analitik geometriya kursidan ma'lumki, $\bar{\mathbb{C}}$ tekislikda aylananing tenglamasi quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$$

(bunda $A = 0$ bo'lganda to'g'ri chiziqni, $A \neq 0$, $B^2 + C^2 - AD > 0$ bo'lganda aylana tenglamasini beradi).

Agar $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ belgilashlardan

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad z\bar{z} = x^2 + y^2$$

ekanini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi aylana tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow Az\bar{z} + B(z + \bar{z}) + iC(z - \bar{z}) + D = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow Az\bar{z} + (B - iC)z + (B + iC)\bar{z} + D = 0. \end{aligned}$$

Agar oxirgi tenglamada $M = B + iC$ desak, u holda $\bar{\mathbb{C}}$ kengaytirilgan kompleks tekislikda aylana tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$Az\bar{z} + \bar{M}z + M\bar{z} + D = 0.$$

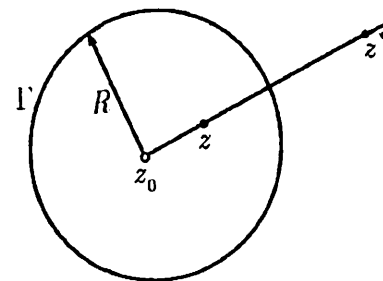
Endi bu aylananing $w = \frac{1}{z}$ yordamidagi obrazini topamiz:

$$Az\bar{z} + \bar{M}z + M\bar{z} + D = 0 \Rightarrow A\frac{1}{w\bar{w}} + \bar{M}\frac{1}{w} + M\frac{1}{\bar{w}} + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dw\bar{w} + Mw + \bar{M}\bar{w} + A = 0.$$

Bu esa $\bar{\mathbb{C}}$ tekislikdagi aylana tenglamasini beradi. \square

Simmetriyaning saqlanishi. Bu xossani keltirishdan avval, bir nechta tushunchalarni kiritamiz. Aytaylik, bizga $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ aylana berilgan bo'lsin (12-chizma).



12-chizma

2.2.1-ta'rif. Agar z va z^* nuqtalar Γ aylana markazidan chiqqan bitta nurda yotib, bu nuqtalardan aylana markazigacha masofalar ko'paytmasi aylana radiusining kvadratiga teng bo'lsa, u holda z va z^* nuqtalar Γ aylanaga nisbatan simmetrik nuqtalar deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki z va z^* nuqtalar Γ aylanaga nisbatan simmetrik nuqtalar bo'lsa, u holda quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0).$$

$$|z - z_0| |z^* - z_0| = R^2.$$

Bu ikkala tenglikni bitta qilib ushbu

$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{z - z_0}$$

ko'rinishda yozish mumkin (mustaqil isbotlang).

2.2.1-izoh. Agar z va z^* nuqtalar Γ aylanaga nisbatan simmetrik nuqtalar bo'lsa, u holda odatda $z \rightarrow z^*$ akslantirish (ya'ni, har bir $z \in \bar{\mathbb{C}}$ nuqtaga Γ aylanaga nisbatan simmetrik bo'lgan z^* nuqta mos qo'yilgan) inversiya deb ham yuritiladi.

Endi berilgan ikkita nuqta qachon biror aylanaga nisbatan simmetrik bo'lishi kriteriyasini keltiramiz.

2.2.1-lemma. Berilgan z va z^* nuqtalarning Γ aylanaga nisbatan simmetrik bo'lishi uchun shu nuqtalar orqali o'tuvchi har qanday γ aylananing Γ aylanaga nisbatan ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir.

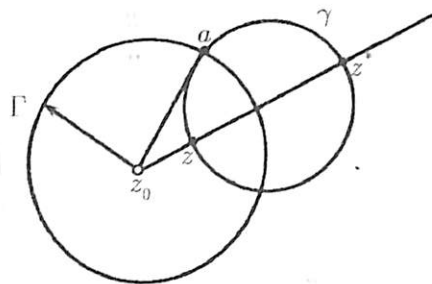
Isbot. Zaruriyigi. Aytaylik, z va z^* nuqtalarning Γ aylanaga nisbatan simmetrik nuqtalar bo'lsin:

$$\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0), \quad |z - z_0| |z^* - z_0| = R^2.$$

Shu z va z^* nuqtalar orqali o'tuvchi γ aylanani qaraymiz. z_0 nuqtadan γ aylanaga urinma o'tkazamiz (13-chizma). Urinish nuqtasi a bo'lsin, u holda elementar geometriyadan ma'lumki $|z_0 - a|^2 = |z_0 - z| \cdot |z_0 - z^*|$ bo'ladi. Yuqoridagi munosabatlardan esa $|z_0 - a|^2 = R^2$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak z_0 nuqtadan γ aylanaga o'tkazilgan urinmaning z_0a qismi Γ aylananing radiusi ekan:

$$|z_0 - a| = R.$$

Bu esa Γ va γ aylanalar ortogonal ekanini bildiradi.

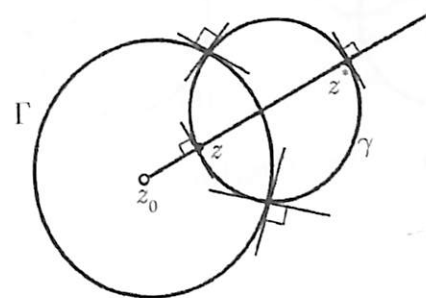


13-chizma

Yetarliligi. Faraz qilaylik, z va z^* nuqtalardan o'tuvchi γ va Γ aylanalar ortogonal bo'lsin (14-chizma). Xususan, bu aylana z va z^* nuqtalardan o'tuvchi zz^* to'g'ri chiziq ham bo'lishi mumkin. U holda zz^* to'g'ri chiziq Γ aylanaga ortogonal bo'lgani uchun u z_0 nuqtadan o'tadi, ya'ni

$$\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan, yana urinma va kesuvchi haqidagi teorema ko'ra $|z - z_0| |z^* - z_0| = R^2$ bo'ladi.



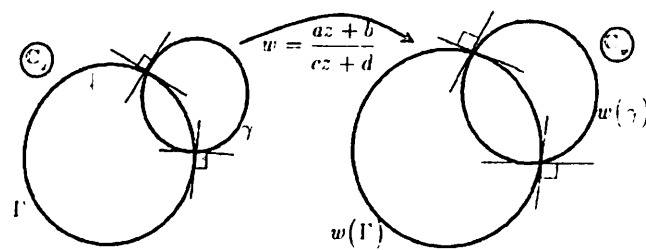
14-chizma

Demak, z va z^* nuqtalar Γ aylanaga nisbatan simmetrik nuqtalar bo'ladi. Lemma to'liq isbot bo'ldi. \square

Endi kasr-chiziqli akslantirishni simmetrik nuqtalarni saqlashi xossasini keltiramiz.

2.2.4-teorema. Irtiyoriy $w = \frac{az+b}{cz+d}$, ($ad - bc \neq 0$) kasr-chiziqli akslantirish, biror Γ ($\Gamma \subset \overline{\mathbb{C}}_z$) aylanaga nisbatan simmetrik z va z^* nuqtalarni, bu Γ aylananing obrazi bo'lgan $w(\Gamma)$ ($w(\Gamma) \subset \overline{\mathbb{C}}_w$) aylanaga nisbatan simmetrik bo'lgan w ($w = w(z)$) va w^* ($w^* = w(z^*)$) nuqtalarga akslantiradi.

Isbot. Dastlab, z va z^* nuqtalardan o'tuvchi barcha aylanalar oilasini $\{\gamma\}$ bilan belgilaylik. Ravshanki, yuqorida isbot qilingan 2.2.1-lemmaga ko'ra bu aylanalar Γ aylanaga ortogonal bo'ladi. Kasr-chiziqli akslantirishning doiraviylik xossasiga ko'ra γ aylananing aksi $w(\gamma)$ ham aylana bo'ladi va kasr-chiziqli w akslantirishning konformligidan bu $w(\gamma)$ aylanalarning $w(\Gamma)$ aylanaga ortogonal ekanligi kelib chiqadi (15-chizma). Bundan 2.2.1-lemmaga ko'ra w va w^* nuqtalar $w(\Gamma)$ aylanaga nisbatan simmetrik bo'lishi kelib chiqadi. \square



15-chizma

Ma'lumki,

$$L: w = \frac{az + b}{cz + d}, (ad - bc \neq 0)$$

ko'rinishdagi kasr-chiziqli funktsiyada 4 ta parametr a, b, c, d o'zgarimas kompleks sonlar bo'lsada, bu akslantirish aslida 3 ta parametrga bog'liq bo'ladi (chunki, a yoki c parametrlar bir vaqtda nol bo'lmagani uchun parametrlar sonini bittaga qisqartirish mumkin, buning uchun kasr-chiziqli akslantirishni surat va maxrajini o'sha noldan farqli parametrga bo'lish kifoya). Shu sababli kasr-chiziqli funktsiyani aniqlash uchun, uning 3 ta turli nuqtadagi qiymatlarini bilish yetarli bo'ladi.

2.2.5-teorema. Berilgan turli uchta $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ nuqtalarni turli uchta $w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ nuqtalarga akslantiruvchi L , ($L(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$) kasr-chiziqli akslantirish mavjud va u yagona bo'ladi.

Isbot. Dastlab, bu L , ($L(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$) kasr-chiziqli akslantirish mavjudligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\bar{\mathbb{C}}$ kompleks tekislikni qaraymiz.

Ushbu

$$L_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

akslantirish z_1, z_2, z_3 nuqtalarni mos ravishda $0, \infty, 1 \in \bar{\mathbb{C}}$ nuqtalarga o'tkazadi. Xuddi shunday

$$L_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

akslantirish $w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ nuqtalarni mos ravishda $0, \infty, 1 \in \bar{\mathbb{C}}$ nuqtalarga o'tkazadi. U holda $L = L_2^{-1} \circ L_1$, akslantirish uchun

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}, \quad (2.7)$$

munosabat o'rinli bo'lib, L akslantirish z_1, z_2, z_3 nuqtalarni mos ravishda w_1, w_2, w_3 nuqtalarga akslantiradi.

Endi bu akslantirishning yagona ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun boshqa bir λ , ($\lambda(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$) kasr-chiziqli funktsiya mavjud bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu akslantirish va yuqoridagi L_1 va L_2 akslantirishlar yordamida ushbu $\mu = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$ kasr-chiziqli akslantirish qaraylik. Natijada, $0, \infty$ va 1 nuqtalar bu μ akslantirish uchun qo'zg'almas nuqtalar bo'ladi: $\mu(\infty) = \infty, \mu(0) = 0, \mu(1) = 1$. U holda bu akslantirish uchun quyidagi xossalari kelib chiqadi

$$\mu(\infty) = \infty \Rightarrow \mu(\zeta) = \alpha\zeta + \beta;$$

$$\mu(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0;$$

$$\mu(1) = 1 \Rightarrow \alpha = 1;$$

Shunday qilib, $\mu \equiv \zeta$ ekan, ya'ni $L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1} = E$ - ayniy akslantirish ekan. Demak, bundan $\lambda = L_2^{-1} \circ L_1$ ekanligi, ya'ni $\lambda \equiv L$ bo'lishi kelib chiqadi. \square

2.2.2-izoh. Agar z_k yoki w_k nuqtalardan birortasi ∞ bo'lsa, u holda (2.7) munosabatda bu nuqtalar bir marta suratda va bir marta maxrajda qatnashganligi uchun ular qatnashgan kasrning surat va maxrajiga 1 qo'yish mumkin. Masalan, $z_1 = w_3 = \infty$ bo'lsa, (2.7) formula quyidagi

$$\frac{1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{1}{1}$$

ko'rinishga keladi. Demak, 2.2.5 teorema $\bar{\mathbb{C}}$ tekislik nuqtalari uchun ham o'rinli.

2.2.2-ta'rif. (2.7) tenglik angarmonik munosabat deyiladi.

2.2.2 Kasr-chiziqli izomorfizm va avtomorfizmlar

2.2.3-ta'rif. Kompleks tekislikdagi D sohani D^* sohaga akslantiruvchi kasr-chiziqli akslantirish kasr-chiziqli izomorfizm deyiladi, D va D^* sohalar esa kasr-chiziqli izomorf sohalar deyiladi.

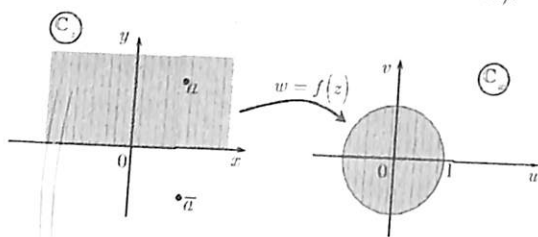
2.2.4-ta'rif. Kompleks tekislikdagi D sohani o'zini o'ziga akslantiruvchi kasr-chiziqli akslantirish kasr-chiziqli avtomorfizm deyiladi.

2.2.6-teorema. $\{z \in \mathbb{C}_z : \text{Im } z > 0\}$ yuqori yarim tekislikni \mathbb{C}_w tekislikdagi $\{w \in \mathbb{C}_w : |w| < 1\}$ birlik doiraga akslantiruvchi kasr-chiziqli funksiya ushbu

$$w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{z-\bar{a}} \quad (\varphi \in \mathbb{R}, \text{Im } a > 0)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Isbot. Yuqori yarim tekislikda yotuvchi a nuqtani ($a \in \{z \in \mathbb{C}_z : \text{Im } z > 0\}$) olaylik. Ravshanki, bu a nuqtaga OX o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqta \bar{a} bo'ladi. Izlanayotgan akslantirish $z = a$ nuqtani \mathbb{C}_w tekislikdagi birlik doira markazi $w = 0$ nuqtaga o'tkazadigan bo'lsa, kasr-chiziqli akslantirishning simmetriklik xossasiga ko'ra $z = \bar{a}$ nuqta $w = 0$ nuqtaga birlik aylanaga nisbatan simmetrik bo'lgan $w = \infty$ nuqtaga o'tishi lozim (16-chizma).



16-chizma

Demak, bunday akslantirishni bajaruvchi funksiya

$$w = \alpha \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

ko'rinishda bo'ladi. Ayni paytda bu akslantirish haqiqiy o'qda joylashgan $z = x$ nuqtani \mathbb{C}_w tekislikdagi $|w| = 1$ birlik aylana nuqtasiga o'tkazishi kerak. Demak,

$$1 = |w| = |\alpha| \left| \frac{x-a}{x-\bar{a}} \right| \quad (2.8)$$

bo'ladi. Haqiqiy x uchun $|x-a| = |x-\bar{a}|$ bo'lganligi sababli (2.8) munosabatdan $|\alpha| = 1$, ya'ni $\alpha = e^{i\varphi}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, yuqori yarim tekislikni birlik doiraga akslantiruvchi kasr-chiziqli funksiya

$$w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

ko'rinishda bo'lar ekan.

□

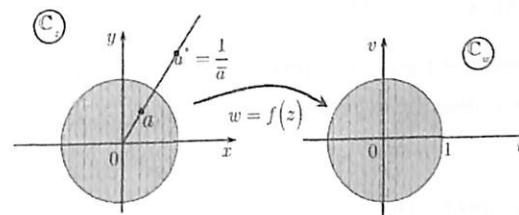
$\bar{\mathbb{C}}$ - kengaytirilgan kompleks tekislik avtomorfizmlari gruppasi barcha kasr-chiziqli akslantirishlar gruppasi Λ bilan ustma-ust tushadi. \mathbb{C} ochiq kompleks tekislik avtomorfizmlari gruppasi $\Lambda_0 \subset \Lambda$ -barcha chiziqli akslantirishlar gruppasi bilan ustma-ust tushadi. Endi birlik doira avtomorfizmlari gruppasini topamiz.

2.2.7-teorema. \mathbb{C}_z kompleks tekislikdagi $\{z \in \mathbb{C}_z : |z| < 1\}$ birlik doirani \mathbb{C}_w tekislikdagi $\{w \in \mathbb{C}_w : |w| < 1\}$ birlik doiraga akslantiruvchi kasr-chiziqli funksiya ushbu

$$w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (\varphi \in \mathbb{R}, |a| < 1)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Isbot. Biror $a \in \{z \in \mathbb{C}_z : |z| < 1\}$ nuqtani olib, uni $a = re^{i\varphi}$ ko'rinishda ifodalaymiz. Unda a nuqtaga birlik aylanaga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqta $a^* = \frac{1}{r}e^{i\varphi} = \frac{1}{re^{-i\varphi}} = \frac{1}{\bar{a}}$ bo'ladi. Izlanayotgan akslantirish $z = a$ nuqtani \mathbb{C}_w tekislikdagi birlik doira markazi $w = 0$ nuqtaga o'tkazadigan bo'lsa, kasr-chiziqli akslantirishning simmetriklik xossasiga ko'ra, $z = \frac{1}{\bar{a}}$ nuqtani $w = \infty$ nuqtaga o'tkazishi lozim (17-chizma).



17-chizma

Demak, bunday akslantirishni bajaruvchi funksiya

$$w = \alpha_1 \frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = \alpha \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (\alpha = -\bar{a}\alpha_1)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi $|z| = 1$ bo'lganda $|w| = 1$ bo'lishidan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$|w| = |\alpha| \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|, \\ 1 = |\alpha| \frac{|z-a|}{|z(\frac{1}{\bar{z}}-\bar{a})|} = |\alpha| \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|} \quad (2.9)$$

(chunki, $z = e^{i\varphi} \Rightarrow \frac{1}{z} = e^{-i\varphi} = \bar{z}$).

Ravshanki, $|z - a| = |\bar{z} - \bar{a}|$ bo'ladi. U holda (2.9) munosabatdan $|\alpha| = 1$, ya'ni $\alpha = e^{i\varphi}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) bo'lishini hosil qilamiz.

Shunday qilib, \mathbb{C}_z tekislikdagi birlik doirani \mathbb{C}_w tekislikdagi birlik doiraga akslantiruvchi kasr-chiziqli funksiya ushbu

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

ko'rinishda bo'ladi. □

Misol va masalalar

2.2.1-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ soha (halqa) $w = \frac{z+1}{z+2}$ kasr-chiziqli funksiya yordamida qanday sohaga akslanadi?

2.2.2-misol. Berilgan $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ sohaning $w = \frac{z-1}{z}$ akslantirish yordamidagi aksini toping.

2.2.3-misol. Ushbu $w(-1) = i$, $w(i) = \infty$, $w(1+i) = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi kasr-chiziqli $w(z)$ akslantirishni toping.

2.2.4-misol. Ushbu $z = 1 + i$ nuqtaning $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ aylanaga nisbatan simmetrik bo'lgan z^* nuqtani toping.

2.2.5-misol. $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ yuqori yarim tekislikni $\mathbb{U} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ birlik doiraga akslantiruvchi shunday kasr-chiziqli akslantirish quringki, bu akslantirish uchun $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$ bo'lsin.

2.3 Jukovskiy funksiyasi va uning xossalari

Ushbu

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (2.9)$$

funksiyaga Jukovskiy funksiyasi deyiladi. Ravshanki, bu funksiya $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da golo-morf funksiya bo'ladi va uning hosilasi

$$w'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$$

bo'lganligi uchun, Jukovskiy funksiyasi $z = 0, \pm 1$ nuqtalardan farqli barcha chekli nuqtalarda konform bo'ladi. Biroq bu funksiyaning $z = 0$ nuqtada konformligi ta'rifga ko'ra kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, $W = \frac{1}{w} = \frac{2z}{z^2+1}$ funksiyaning $z = 0$ nuqtada konformlikka tekshiramiz:

$$W'(z) = \frac{2(1-z^2)}{(z^2+1)^2} \Rightarrow W'(0) = 2 \neq 0.$$

Demak, Jukovskiy funksiyasi $z = 0$ nuqtada konform ekan. Shuningdek, Jukovskiy funksiyasi uchun $f(z) \equiv f\left(\frac{1}{z}\right)$ munosabat bajarilgani sababli bu funksiyaning $z = \infty$ nuqtada ham konformligi kelib chiqadi. Endi Jukovskiy funksiyasining $z = \pm 1$ kritik nuqtalarda konform emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun biz bu funksiyaning quyidagi

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2$$

ko'rinishda yozadigan bo'lsak, u holda u quyidagi uchta

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}, \quad \sigma = \zeta^2, \quad w = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$$

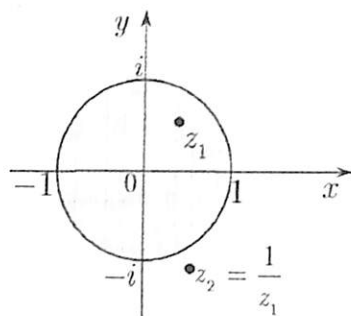
funksiyaning superpozitsiyasidan hosil bo'lishini ko'ramiz. Bu funksiyalardan ikkitasi (birinchi va uchunchisi) kasr-chiziqli akslantirish bo'lgani uchun ular butun $\bar{\mathbb{C}}$ tekislikda konform akslantirish bo'ladi. $\sigma = \zeta^2$ akslantirish esa ($\sigma'(0) = 0$ bo'lgani uchun) bu akslantirish $\zeta = 0$ nuqtada va shuningdek $\zeta = \infty$ da konform emasligi kelib chiqadi. Bundan esa bu nuqtalarga mos keluvchi $z = \pm 1$ nuqtalarda (2.9) Jukovskiy funksiyasi konform emasligi kelib chiqadi (bu nuqtalarda burchak saqlanish xossasi o'rinli bo'lmaydi).

Endi Jukovskiy funksiyasi bir yaproqli bo'ladigan sohalarini topamiz. Ta'rifga binoan biz quyidagi munosabatlarga egamiz:

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(z_2 - z_1)(1 - z_1 z_2)}{z_1 z_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2, \\ z_1 z_2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Demak, Jukovskiy funksiyasi biror D sohada bir yaproqli bo'lishi uchun sohaning $z_1 z_2 = 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi z_1, z_2 nuqtalarni o'zida saqlamasligi zarur

va yetarli bo'lishi kelib chiqadi. Masalan, birlik doirada (shuningdek birlik doiraning tashqarisidagi sohada) Jukovskiy funksiyasi bir yaproqli bo'ladi (18-chizma).



18-chizma

Aytaylik, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ bo'lsin. Bu sohada yotgan $\{|z| = r_0\}$ ($r_0 > 1$) aylananing Jukovskiy funksiyasi yordamida aksini topish uchun, dastlab, $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$ deb olamiz. U holda (2.9) munosabatdan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (2.10)$$

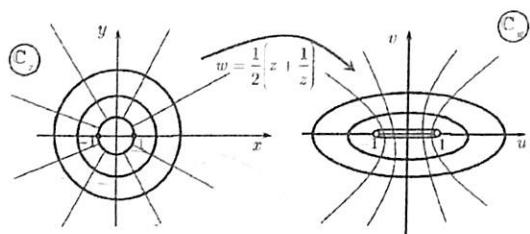
Demak, bu (2.10) munosabatdan ko'rinadiki Jukovskiy funksiyasi \mathbb{C}_z tekislikdagi $\{|z| = r_0\}$ ($r_0 > 1$) aylanani \mathbb{C}_w tekislikdagi yarim o'qlari

$$a_{r_0} = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right), \quad b_{r_0} = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right)$$

va fokuslari

$$(-1, 0), (1, 0). \quad (\text{chunki } a_{r_0}^2 - b_{r_0}^2 = 1)$$

nuqtalarda bo'lgan $\frac{u^2}{a_{r_0}^2} + \frac{v^2}{b_{r_0}^2} = 1$ ellipsga akslantiradi. Bu ellipslar oilasi quyidagi chizmada tasvirlangan (19-chizma):



19-chizma

Bundan ko'rinadiki, agar $r_0 \rightarrow 1$ da $b_{r_0} \rightarrow 0$ bo'lgani uchun yuqoridagi ellipslar oilasi $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ segmentga qadar siqila boradi. Agar r_0 yetarlicha katta bo'lsa u holda $a_{r_0} - b_{r_0} = \frac{1}{r_0}$ ayirma yetarlicha kichik bo'lgani uchun yuqoridagi ellipslar oilasi aylanaga deyarli yaqin bo'ladi. Endi yuqoridagi D sohada yotgan $\{\varphi = \varphi_0, 1 < r < \infty\}$ nurning Jukovskiy funksiya yordamida aksini topadigan bo'lsak, (2.10) munosabat yordamida darhol topish mumkinki, bu nur quyidagi

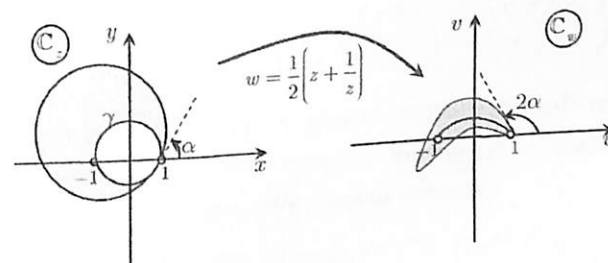
$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1$$

giperbolaga o'tishi kelib chiqadi (19-chizma).

Yuqorida biz ko'rdikki, Jukovskiy funksiyasini quyidagi

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}, \quad \sigma = \zeta^2, \quad w = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$$

uchta funksiyaning superpozitsiyasi sifatida qarash mumkin edi. Bu yoyilmani qo'llab Jukovskiy funksiyasi quyidagi chizmada tasvirlangan γ aylananing (bu aylana ± 1 nuqtalardan o'tadi va shu nuqtalarda haqiqiy oq bilan α burchak tashkil qiladi) tashqarisini aylana yoyining (uchlari ± 1 nuqtalarda bo'lgan $w = 1$ nuqtada haqiqiy oq bilan 2α burchak hosil qiluvchi) tashqarisiga konform akslantirishni amalga oshirishiga ishonch hosil qilamiz. Bundan tashqari, γ aylanaga ± 1 nuqtalardan birortasida tashqaridan urinuvchi aylana shu akslantirish natijasida samolyot qanoti ko'rinishini (profilini) eslatuvchi yopiq chiziqqa o'tishini ko'rish mumkin (20-chizma). Bu mulohazalar N.E. Jukovskiyga samolyot qanotlari aerodinamik hisobining birinchi usulini yaratish imkonini bergan.



20-chizma

Misol va masalalar

2.3.1-misol. Jukovskiy funksiyasi yordamida

$$l = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{3\pi}{4} \right\}$$

nurning aksini toping.

2.3.2-misol. Jukovskiy funksiyasi yordamida

$$l = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \right\}$$

yoyning aksini toping.

2.3.3-misol. Ushbu $w = \frac{z}{z^2+1}$ akslantirish yordamida $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sohaning aksini toping.

2.4 Darajali funksiya va uning xossalari

Ushbu

$$w = z^n \quad (2.11)$$

ko'rinishdagi funksiya darajali funksiya deyiladi, bu yerda $n \in \mathbb{N}$. Ravshanki, bu funksiya $w(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ bo'ladi. Bu funksiya hosilasi $z \neq 0$ nuqtalarda $w'(z) = nz^{n-1} \neq 0$, ($n > 1$) bo'lganligi uchun $w = z^n$, ($n > 1$) funksiya $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohadagi har bir z nuqtada konform ekanligi kelib chiqadi.

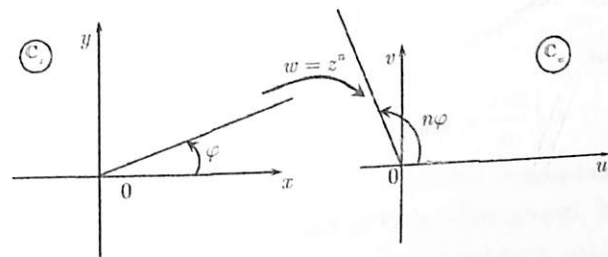
Endi (2.11) funksiyani qutb koordinatalar sistemasida yozamiz:

$$\begin{cases} z = re^{i\varphi}, r = |z|, \arg z = \varphi, \\ w = \rho e^{i\psi}, \rho = |w|, \arg w = \psi \end{cases} \Rightarrow \rho e^{i\psi} = r^n e^{in\varphi} \Rightarrow \rho = r^n, \psi = n\varphi.$$

Demak, bulardan

$$\rho = r^n, \psi = n\varphi \quad (2.12)$$

bo'lishi kelib chiqadi. (2.12) munosabatdan ko'rinadiki, (2.11) akslantirish \mathbb{C}_z tekislikdagi $z = 0$ nuqtadan chiquvchi $l = \{\arg z = \varphi\}$ nurni \mathbb{C}_w tekislikdagi $w = 0$ nuqtadan chiquvchi $L = \{\arg w = n\varphi\}$ nurga akslantirishi kelib chiqadi (21-chizma).



21-chizma

Shuning uchun ham $z = 0$ nuqtada $w = z^n$ akslantirish konform emas. Endi bu funksiyaning konformlik sohasini topamiz. Buning uchun, dastlab ta'rif yordamida bu funksiyaning bir yaproqlilik sohasini topamiz:

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Rightarrow z_1^n = z_2^n \Rightarrow (r_1 e^{i\varphi_1})^n = (r_2 e^{i\varphi_2})^n \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ e^{in\varphi_1} = e^{in\varphi_2} \cdot e^{2\pi i k} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k \frac{2\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

Misol va masalalar

2.3.1-misol. Jukovskiy funksiyasi yordamida

$$l = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{3\pi}{4} \right\}$$

nurning aksini toping.

2.3.2-misol. Jukovskiy funksiyasi yordamida

$$l = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \right\}$$

yoyning aksini toping.

2.3.3-misol. Ushbu $w = \frac{z}{z^2+1}$ akslantirish yordamida $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sohaning aksini toping.

2.4 Darajali funksiya va uning xossalari

Ushbu

$$w = z^n \quad (2.11)$$

ko'rinishdagi funksiya darajali funksiya deyiladi, bu yerda $n \in \mathbb{N}$. Ravshanki, bu funksiya $w(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ bo'ladi. Bu funksiya hosilasi $z \neq 0$ nuqtalarda $w'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ ($n > 1$) bo'lganligi uchun $w = z^n$ ($n > 1$) funksiya $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohadagi har bir z nuqtada konform ekanligi kelib chiqadi.

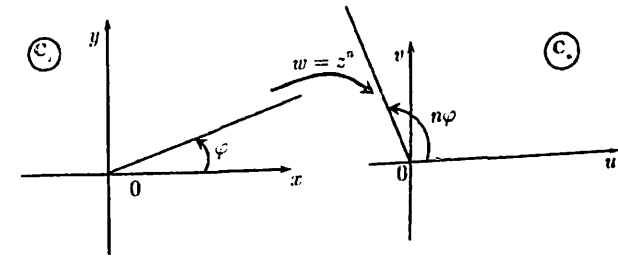
Endi (2.11) funksiyani qutb koordinatalar sistemasida yozamiz:

$$\begin{cases} z = re^{i\varphi}, r = |z|, \arg z = \varphi, \Rightarrow \rho e^{i\psi} = r^n e^{in\varphi} \Rightarrow \rho = r^n, \psi = n\varphi, \\ w = \rho e^{i\psi}, \rho = |w|, \arg w = \psi \end{cases}$$

Demak, bulardan

$$\rho = r^n, \psi = n\varphi \quad (2.12)$$

bo'lishi kelib chiqadi. (2.12) munosabatdan ko'rinadiki, (2.11) akslantirish \mathbb{C}_z tekislikdagi $z = 0$ nuqtadan chiquvchi $l = \{\arg z = \varphi\}$ nurni \mathbb{C}_w tekislikdagi $w = 0$ nuqtadan chiquvchi $L = \{\arg w = n\varphi\}$ nurga akslantirishi kelib chiqadi (21-chizma).



21-chizma

Shuning uchun ham $z = 0$ nuqtada $w = z^n$ akslantirish konform emas. Endi bu funksiyaning konformlik sohasini topamiz. Buning uchun, dastlab ta'rif yordamida bu funksiyaning bir yaproqlilik sohasini topamiz:

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Rightarrow z_1^n = z_2^n \Rightarrow (r_1 e^{i\varphi_1})^n = (r_2 e^{i\varphi_2})^n \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ e^{in\varphi_1} = e^{in\varphi_2} \cdot e^{2\pi i k} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k \frac{2\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|z_1| = |z_2|, \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2\pi k}{n}. \quad (2.13)$$

Demak, darajali funksiya biror $D \subset \mathbb{C}$ sohada bir yaproqli bo'lishi uchun bu sohaning ixtiyoriy z_1, z_2 nuqtalari (2.13) shartlarni qanoatlantirmasligi zarur va yetarlidir.

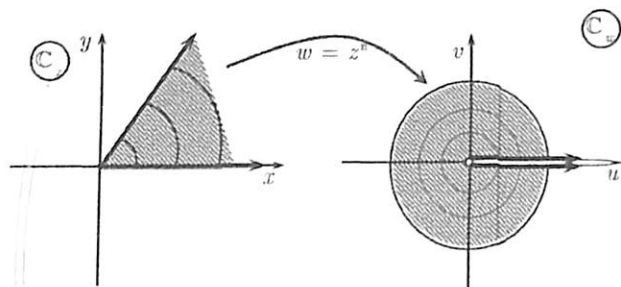
$w = z^n$ akslantirish ushbu

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\}$$

sektorni

$$D^* = \{0 < \arg w < 2\pi\}$$

sohaga (ya'ni $D^* = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ sohaga) gomeomorf akslantiradi (22-chizma).



22-chizma

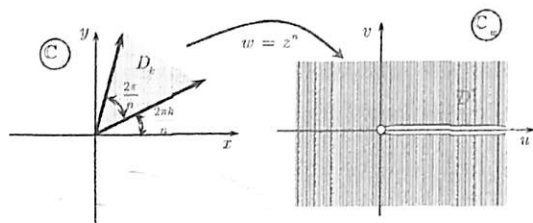
Shuningdek,

$$D = \left\{ \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n}, k = 0, 1, \dots, (n-1) \right\}$$

har bir sektorni yana

$$D^* = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$$

sohaga akslantiradi (23-chizma).



23-chizma

Misol va masalalar

2.4.1-misol. Ushbu

$$l = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = a\} \quad (a > 0),$$

to'g'ri chiziqning $w = z^2$ akslantirish yordamidagi aksini toping.

2.4.2-misol. Ushbu $w = z^3$ darajali funksiya yordamida \mathbb{C}_z tekislikdagi $E = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{\pi}{4}\}$ nurning \mathbb{C}_w tekislikdagi aksini toping.

2.4.3-misol. Ushbu $w = z^4$ darajali funksiya yordamida \mathbb{C}_z tekislikdagi $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ sohaning \mathbb{C}_w tekislikdagi aksini toping.

2.4.4-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2, \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$ to'plamning $w = z^6$ funksiya yordamidagi aksini toping.

2.4.5-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ yarim doirani $G = \{\operatorname{Im} w > 0\}$ yuqori yarim tekislikka shunday akslantiringki, natijada $w(-1) = 0$, $w(0) = 1$, $w(1) = \infty$ bo'lsin.

2.5 Ko'rsatkichli funksiya

Ushbu

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (2.14)$$

ko'rinishidagi funksiyaga ko'rsatkichli funksiya deyiladi, bunda $z \in \mathbb{C}$. Dastlab, $\forall z \in \mathbb{C}$ son uchun yuqoridagi limitning mavjudligini isbot qilamiz. Buning uchun $z = x + iy$ deb olib (2.14) munosabatning o'ng tomondagi limit ostidagi ifodaning moduli va argumentini topamiz:

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \left[1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right]^{\frac{n}{2}}$$

$$\arg \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = n \arg \left(1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n}\right) = n \operatorname{arctg} \frac{y}{1 + \frac{x}{n}}$$

Shuni ta'kidlab o'tamizki, n sonining yetarlicha katta qiymatlarida $1 + \frac{z}{n}$ ifodaning qiymatlari o'ng yarim tekislikda yotadi. Shuning uchun, $\arg \left(1 + \frac{z}{n}\right)$ ifodaning

$$|z_1| = |z_2|, \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2\pi k}{n}. \quad (2.13)$$

Demak, darajali funksiya biror $D \subset \mathbb{C}$ sohada bir yaproqli bo'lishi uchun bu sohaning ixtiyoriy z_1, z_2 nuqtalari (2.13) shartlarni qanoatlantirmasligi zarur va yetarlidir.

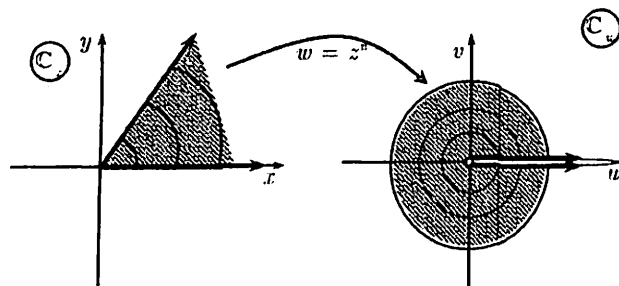
$w = z^n$ akslantirish ushbu

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\}$$

sektorni

$$D' = \{0 < \arg w < 2\pi\}$$

sohaga (ya'ni $D' = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ sohaga) gomcomorf akslantiradi (22-chizma).



22-chizma

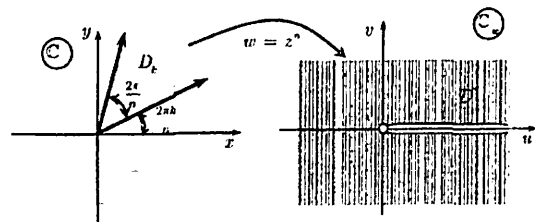
Shuningdek,

$$D = \left\{ \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n}, k = 0, 1, \dots, (n-1) \right\}$$

har bir sektorni yana

$$D' = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$$

sohaga akslantiradi (23-chizma).



23-chizma

Misol va masalalar

2.4.1-misol. Ushbu

$$l = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = a\} \quad (a > 0),$$

to'g'ri chiziqning $w = z^2$ akslantirish yordamidagi aksini toping.

2.4.2-misol. Ushbu $w = z^3$ darajali funksiya yordamida \mathbb{C}_z tekislikdagi $E = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{\pi}{4}\}$ nurning \mathbb{C}_w tekislikdagi aksini toping.

2.4.3-misol. Ushbu $w = z^4$ darajali funksiya yordamida \mathbb{C}_z tekislikdagi $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ sohaning \mathbb{C}_w tekislikdagi aksini toping.

2.4.4-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2, \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$ to'plamning $w = z^6$ funksiya yordamidagi aksini toping.

2.4.5-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ yarim doirani $G = \{\operatorname{Im} w > 0\}$ yuqori yarim tekislikka shunday akslantiringki, natijada $w(-1) = 0, w(0) = 1, w(1) = \infty$ bo'lsin.

2.5 Ko'rsatkichli funksiya

Ushbu

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (2.14)$$

ko'rinishidagi funksiyaga ko'rsatkichli funksiya deyiladi, bunda $z \in \mathbb{C}$. Dastlab, $\forall z \in \mathbb{C}$ son uchun yuqoridagi limitning mavjudligini isbot qilamiz. Buning uchun $z = x + iy$ deb olib (2.14) munosabatning o'ng tomondagi limit ostidagi ifodaning moduli va argumentini topamiz:

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \left[1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right]^{\frac{n}{2}}$$

$$\arg \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = n \arg \left(1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n}\right) = n \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}$$

Shuni ta'kidlab o'tamizki, n sonining yetarlicha katta qiymatlarida $1 + \frac{z}{n}$ ifodaning qiymatlari o'ng yarim tekislikda yotadi. Shuning uchun, $\arg \left(1 + \frac{z}{n}\right)$ ifodaning

qiymatlarini $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ oraliqda olamiz. Bu munosabatlardan ularning limitlarini osongina topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = e^x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arg \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y$$

shunday qilib, ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

limit mavjud ekan. Demak,

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y),$$

ya'ni

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (2.15)$$

formula o'rinli ekan. (2.15) tenglikda $x = 0$ bo'lsa, u holda quyidagi

$$e^{iy} = (\cos y + i \sin y)$$

Eyler formulasi hosil qilamiz.

Ko'rsatkichli funksiya quyidagi xossalarga ega.

1°. Ko'rsatkichli $w = e^z$ funksiya butun \mathbb{C} kompleks tekislikda golomorf bo'ladi. Haqiqatdan ham, $w = e^z = u(x, y) + iv(x, y)$ deb (2.15) munosabatdan foydalanib, $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ bo'lishini topamiz. Ravshanki, bu funksiyalar \mathbb{R}^2 ma'noda differensiallanuvchi bo'ladi. Ayni paytda, bu funksiyalar uchun butun kompleks tekislikda Koshi-Riman shartlari bajariladi, ya'ni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y.$$

Demak, 1.5.2-teoremaga ko'ra $w = e^z$ funksiya butun \mathbb{C} kompleks tekislikda golomorf bo'ladi.

2°. Ko'rsatkichli $w = e^z$ funksiya kompleks tekislikning har bir nuqtasida hosilaga ega va $(e^z)' = e^z$ bo'ladi.

I bobning 1.5-paragrafidan keltirilgan formuladan foydalanib topamiz:

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^z) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x (\cos y + i \sin y)) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

$|e^z| = e^x > 0$ bo'lganligi uchun $w = e^z$ funksiya yordamida bajariladigan akslantirish kompleks tekislikning har bir nuqtasida konform bo'ladi.

3°. Ixtiyoriy z_1, z_2 nuqtalar uchun

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

formula o'rinli. Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{x_1+x_2} (\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) = \\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

4°. e^z funksiya davriy funksiya bo'lib, uning asosiy davri $2\pi i$ ga teng. Haqiqatdan ham, $e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1$ bo'lganligi uchun 3° - xossaga ko'ra $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan agar $e^{z+T} = e^z$ bo'lsa, bu tenglikning ikkala tomonini e^{-z} ga ko'paytirsak $e^T = 1$. Agar $T = T_1 + iT_2$ bo'lsa, u holda $e^{T_1} (\cos T_2 + i \sin T_2) = 1$ tenglikdan $\cos T_2 = 1$, $\sin T_2 = 0$ kelib chiqadi. Bu tengliklardan $T_1 = 0$, $T_2 = 2k\pi$ bo'lishini hosil qilamiz. Shuning uchun $T = T_1 + iT_2 = 0 + i2k\pi = 2ki\pi$ bo'ladi. Demak, $2\pi i$ asosiy davr bo'ladi.

Agar D sohada $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) tenglikni qanoatlantiradigan z_1, z_2 nuqtalar yotmasa, $w = e^z$ akslantirish bu D sohada bir yaproqli (bir varaqli) bo'ladi.

Bunday sohaga misol sifatida $D = \{z : 0 < \text{Im } z < 2\pi\}$ yo'lakni olish mumkin. Agar $w = \rho e^{i\psi}$ va $z = x + iy$ almashtirishlar olsak, $\rho = e^x$ va $\psi = y$ ekanligini topamiz. Bundan esa $\{y = y_0, 0 < y_0 < 2\pi\}$ to'g'ri chiziq ko'rsatkichli funksiya yordamida $\{\psi = y_0\}$ nurga o'tishi, shuningdek $\{x = x_0, 0 < y < 2\pi\}$ interval esa

$$\{\rho = e^{x_0}, 0 < \psi < 2\pi\}$$

aylanaga o'tishi kelib chiqadi.

Demak,

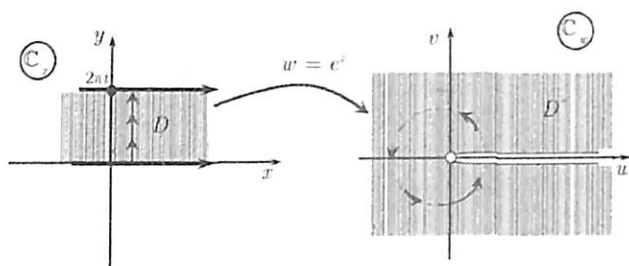
$$D = \{z : 0 < \text{Im } z < 2\pi\}$$

yo'lak musbat yarim o'q chiqarib tashlangan (w) tekislikka akslanar ekan (24-chizma).

Demak, yuqoridagi misoldan ko'rinadiki

$$\{z : 0 < \text{Im } z < \pi\}$$

yo'lak esa yuqori yarim tekislikka akslanadi.



24-chizma

Misol va masalalar

2.5.1-misol. Quyidagi

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}_z : 0 < \operatorname{Re} z < 1, \frac{3\pi}{2} < \operatorname{Im} z < 2\pi \right\}$$

sohaning $w = e^z$ akslantirish yordamidagi aksini toping.

2.5.2-misol. Ushbu $w = e^z$ akslantirish yordamida \mathbb{C}_z tekislikdagi

$$D = \{ z \in \mathbb{C}_z : \operatorname{Re} z > 0, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \}$$

sohaning \mathbb{C}_w tekislikdagi aksini toping.

2.5.3-misol. Ko'rsatkichli $w = e^z$ funksiya \mathbb{C}_z tekislikdagi

$$D = \{ z \in \mathbb{C}_z : 1 < \operatorname{Re} z < 2, 1 < \operatorname{Im} z < 2 \}$$

sohani, \mathbb{C}_w tekislikdagi qanday sohaga akslantiradi?

2.6 Trigonometrik va giperbolik funksiyalar

Trigonometrik hamda giperbolik funksiyalar ko'rsatkichli funksiya orqali kiritiladi.

2.6.1-ta'rif. Ushbu

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

ko'rinishdagi funksiyalar trigonometrik funksiyalar deyiladi.

$w = \sin z$ va $w = \cos z$ funksiyalar butun kompleks tekislik \mathbb{C} da aniqlangan.
 $w = \operatorname{tg} z$ funksiya

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} : z = k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

to'plamda, $w = \operatorname{ctg} z$ funksiya esa

$$\mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C} : z = k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$$

to'plamda aniqlangan.

2.6.2-ta'rif. Ushbu

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

ko'rinishda aniqlangan funksiyalar giperbolik funksiyalar deyiladi.

Trigonometrik hamda giperbolik funksiyalar o'zaro quyidagi

$$\cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz,$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz,$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

munosabatlar bilan bog'langan.

Biz ulardan birini, masalan $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$, bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun yuqoridagi 2.6.1 va 2.6.2-ta'riflardagi munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \sin iz &= \frac{1}{2i}(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2i}(e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}) = \\ &= \frac{1}{2i}(e^{-z} - e^z) = -\frac{1}{i} \frac{(e^z - e^{-z})}{2} = -\frac{1}{i} \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

Demak,

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz$$

bo'ladi.

Trigonometrik funksiyalar ko'rsatkichli funksiya orqali ta'riflanganidan, ularning ko'rsatkichli funksiyalar xossalari ega bo'lishi kelib chiqadi. Ayni paytda

trigonometrik funksiyalar orasida haqiqiy argumentli trigonometrik funksiyalar orasidagi munosabatlar kabi formulalar o'rinli bo'ladi.

Endi trigonometrik funksiyalarning ba'zi xossalarini keltirib o'tamiz.

1°. Ushbu

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z,$$

$$\sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \cos(z + \pi) = -\cos z$$

formulalar o'rinli.

Bu formulalarning o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

$w = \sin z$ va $w = \cos z$ funksiyalarning ta'riflaridan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Qolgan tengliklar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2°. $w = \sin z$ toq funksiya, $w = \cos z$ esa juft funksiya bo'ladi. Bu xossaning o'rinli bo'lishi $w = \sin z$, funksiyalarning ta'riflaridan kelib chiqadi.

3°. Trigonometrik funksiyalar davriy bo'lib, $w = \sin z$, $w = \cos z$ funksiyalarning davri 2π ga $w = \sin z$, $w = \cos z$ funksiyalarning davri esa π ga teng.

Haqiqatdan ham, $w = \sin z$ funksiya ta'rihi hamda

$$e^{2\pi i} = 1$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} w(z + 2\pi) &= \sin(z + 2\pi) = \frac{1}{2i}(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}) = \\ &= \frac{1}{2i}(e^{iz} \cdot e^{2\pi i} - e^{-iz} \cdot \frac{1}{e^{2\pi i}}) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z = w(z). \end{aligned}$$

Demak,

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

Bu esa $w = \sin z$ davriy funksiya va uning davri 2π ga teng bo'lishini bildiradi.

$w = \operatorname{tg} z$ funksiya ta'rifidan foydalanib, ushbu

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(z + \pi) &= -i \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}} = \frac{e^{i\pi}(e^{iz} - e^{-iz}) \cdot e^{-2\pi i}}{e^{i\pi}(e^{iz} + e^{-iz}) \cdot e^{-2\pi i}} = \\ &= -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \operatorname{tg} z \end{aligned}$$

tenglikka kelamiz. Demak, $\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg}(z)$.

Shunga o'xshash $w = \cos z$, $w = \operatorname{ctg} z$ funksiyalarning davriy funksiya ekanini ko'rsatadi.

4°. $w = \sin z$ va $w = \cos z$ funksiyalar ixtiyoriy $z \in \mathbb{C}$ nuqtalarda hosilaga ega bo'lib, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$ bo'ladi.

$w = \operatorname{tg} z$ funksiya $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ da hosilaga ega bo'lib,

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z} \quad (2.16)$$

bo'ladi.

$w = \operatorname{ctg} z$ funksiya $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ da hosilaga ega bo'lib,

$$(\operatorname{ctg} z)' = \frac{1}{\sin^2 z} \quad (2.17)$$

bo'ladi.

Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{1}{2i}(e^{iz} \cdot i + e^{-iz} \cdot (-i)) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \cos z, \\ (\cos z)' &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^{iz} \cdot i - e^{-iz} \cdot (-i)) = \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2} = \frac{-(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} = -\sin z. \end{aligned}$$

Xuddi shunga o'xshash (2.16) va (2.17) formulalarning to'g'riligi ko'rsatiladi. Shuni ta'kidlab o'tamizki, haqiqiy argumentli $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalarning qiymatlari $[-1, 1]$ kesmada bo'lishini bilamiz. Ammo, kompleks argumentli $\sin z$, $\cos z$ funksiyalarning qiymatlari modul jihatdan birdan katta ham bo'lishi mumkin:

$$|\cos i| = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} > 1.$$

Amaliy masalalarda, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ va $\operatorname{ctg} z$ yordamida bajaraladigan akslantirishlar chiziqli hamda, ko'rsatkichli va Jukovskiy funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlarning superpozitsiyasi sifatida qaraladi.

Masalan, $w = \sin z$ funksiya yordamida akslantirish bajarishimiz uchun quyidagi akslantirishlar ketma-ketligini bajaramiz:

$$w_1 = iz, w_2 = e^{w_1}, w_3 = \frac{w_2}{i}, w = \frac{1}{2} \left(w_3 + \frac{1}{w_3} \right).$$

tgz funksiya yordamida akslantirish bajarishimiz uchun, uni ushbu

$$tgz = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

ko'rinishidan foydalanib, quyidagi akslantirishlar ketma-ketligini bajaramiz:

$$w_1 = 2iz, w_2 = e^{w_1}, w = -i \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}.$$

Misol. Ushbu

$$w = \sin z$$

funksiya yordamida bajariladigan akslantirish \mathbb{C}_z tekisligidagi

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}_z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$$

sohani (yarim yo'lakni) \mathbb{C}_w tekisligidagi qanday sohaga akslantiradi?

Berilgan $w = \sin z$ funksiya yordamida bajariladigan akslantirish bizga ma'lum bo'lgan

$$w_1 = iz, w_2 = e^{w_1}, w_3 = \frac{w_2}{i}$$

akslantirishlar superpozitsiyasidan iborat bo'lib,

$$w = \sin z = \frac{1}{2} \left(w_3 + \frac{1}{w_3} \right)$$

bo'ladi. Binobarin, bu akslantirishlarni, ketma-ket bajarish natijasida $w = \sin z$ uchun $w(D)$ topiladi:

1) D soha $w_1 = iz$ akslantirish natijada

$$D_1 = \left\{ w_1 \in \mathbb{C}_{w_1} : \operatorname{Re} w_1 < 0, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2} \right\}$$

sohaga o'tadi.

2) D_1 soha $w_2 = e^{w_1}$ akslantirish natijasida

$$D_2 = \left\{ w_2 \in \mathbb{C}_{w_2} : |w_2| < 1, -\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2} \right\}$$

yarim doiraga o'tadi.

3) D_2 soha $w_3 = \frac{w_2}{i}$ akslantirish natijasida

$$D_3 = \{ w_3 \in \mathbb{C}_{w_3} : |w_3| < 1, \pi < \arg w_3 < 2\pi \}$$

sohaga o'tadi.

4) D_3 soha $w = \sin z = \frac{1}{2} \left(w_3 + \frac{1}{w_3} \right)$ akslantirish natijasida

$$w(D) = \{ w \in \mathbb{C}_w : \operatorname{Im} w > 0 \}$$

sohaga o'tadi.

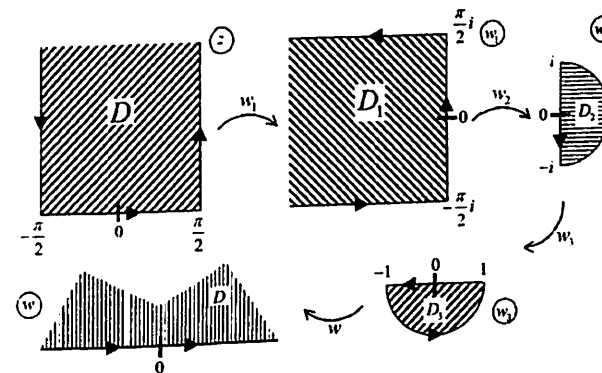
Demak, $w = \sin z$ akslantirish \mathbb{C}_z tekisligidagi

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}_z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$$

sohani \mathbb{C}_w tekisligidagi

$$w(D) = \{ w \in \mathbb{C}_w : \operatorname{Im} w > 0 \}$$

yuqori yarim tekislikka akslantirar ekan (25-chizma).



25-chizma

Misol va masalalar

2.6.1-misol. Ushbu $D = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi \}$ yo'lakni $w = \cos z$ funksiya yordamida aksini toping.

2.6.2-misol. Ushbu $D = \{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2 \}$ kvadratning $w = \sin z - i$ funksiya yordamidagi akslantirilgan sohani toping.

2.6.3-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\}$ sohaning $w = \operatorname{tg} z$ funksiya yordamida aksini toping.

2.6.4-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 4\}$ kvadratning $w = \cos z$ funksiya yordamidagi aksini toping.

BOB 3

GOLOMORF FUNKSIYALARNING XOSSALARI

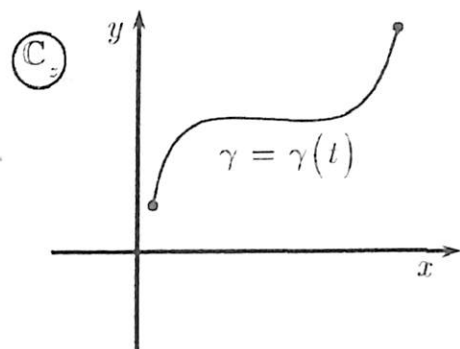
Bu bobda golomorf funksiyalarning xossalarini o'rganishning eng muhim usullarini ko'rib chiqamiz. Bu usullar asosan, golomorf funksiyalarni maxsus integrallar (Koshi integrallari) shaklida yoki ba'zi qatorlarning yig'indilari shaklida (Teylor va Loran qatorlari) aks ettirishga asoslangan. Dastlab kompleks o'zgaruvchining funksiyalari integrali tushunchasini ko'rib chiqamiz.

3.1 Kompleks argumentli funksiyalarning integrali

Integral tushunchasi. Aytaylik, $\gamma = \gamma(t)$ ($\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$) silliq (yoki bo'lakli silliq) yo'l berilgan bo'lsin. $\gamma(t)$ yo'lda kompleks qiymatli $f(z)$ funksiya berilgan bo'lib, $f \circ \gamma$ funksiya $[\alpha, \beta]$ segmentda uzluksiz bo'lsin (26-chizma). U holda $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ segmentda Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'ladi. Bu funksiyaning integrali $f(z)$ funksiyaning γ yo'l bo'yicha integrali deyiladi va

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt \quad (3.1)$$

kabi belgilanadi.



26-chizma

Agar integral ostidagi funktsiyaning haqiqiy va mavhum qismini ajratib $f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ yozadigan bo'lsak, u holda (3.1) integral quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} g_1(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} g_2(t) dt. \quad (3.2)$$

Demak, (3.2) formuladan ko'rinadiki, kompleks o'zgaruvchili f funktsiyadan γ silliq yo'l bo'yicha olingan integralni oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi aniq integral (Riman integrali) orqali hisoblash mumkin ekan. Agar $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ va $dz = dx + idy$ desak, u holda (3.1) integralni quyidagicha ham yozish mumkin bo'ladi:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy. \quad (3.3)$$

3.1.1-izoh. Kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funktsiyaning yuqoridagi (3.1) integralini γ yo'lni ushbu

$$z_0 = \gamma(\alpha), \quad z_1 = \gamma(t_1), \quad \dots, \quad z_n = \gamma(\beta), \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta)$$

bo'laklarga bo'lib, $\xi_k = \gamma(\tau_k)$, $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ deb quyidagicha ham aniqlashimiz mumkin:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k.$$

bu yerda $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $\delta = \max_k |\Delta z_k|$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Endi kompleks analizning nazariy va amaliy masalalarida ko'p ishlatiladigan ba'zi misollarni keltiramiz.

3.1.1-misol. Ushbu

$$J_n = \int_{\gamma} (z-a)^n dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3.4)$$

integralni hisoblang, bu yerda $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho, \rho > 0\}$ aylanadan iborat.

Yechish. Buning uchun dastlab γ aylananing tenglamasini quyidagicha yozib olamiz va shunga asosan bir qancha soddalashtirishlar bajaramiz:

$$z = z(t) = a + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \Rightarrow dz = d(a + \rho e^{it}) = i\rho e^{it} dt. \Rightarrow \\ \Rightarrow J_n = \int_{\gamma} (z-a)^n dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt.$$

Agar $n \neq -1$ bo'lsa,

$$J_n = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = i\rho^{n+1} \left. \frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0.$$

Agar $n = -1$ bo'lsa,

$$J_n = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Demak,

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \quad (3.5)$$

3.1.2-misol. Ushbu integralni hisoblang:

$$\int_{\gamma} z^n dz \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1),$$

bu yerda $\gamma = \gamma(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) - bo'lakli silliq yo'l (agar $n < 0$ bo'lsa, $z = 0$ nuqtadan o'tmaydigan bo'lakli silliq yo'l).

Yechish. Ravshanki,

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma^n(t) \cdot \gamma'(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [\gamma^{n+1}(t)] = \frac{1}{n+1} [\gamma^{n+1}(\beta) - \gamma^{n+1}(\alpha)].$$

3.1.1-natija. Agar γ yopiq yo'l bo'lsa, u holda

$$\int_{\gamma} z^n dz = 0, (n \neq -1)$$

bo'ladi.

Integralning xossalari. Yuqorida ko'rdikki, $f(z)$ kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning γ yo'l bo'yicha integrali aniq integralga kelar ekan. Shuning uchun $f(z)$ funktsiyaning γ yo'l bo'yicha integrali ham aniq integrallar xossalari kabi xossalarga ega bo'ladi.

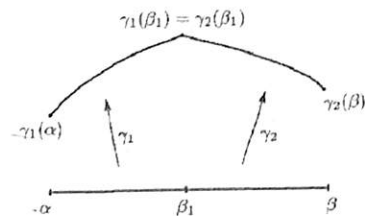
1^o Chiziqlilik xossasi. Agar f va g funktsiyalar γ silliq (yoki bo'lakli silliq) yo'lda uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a, b \in \mathbb{C}$ uchun ushbu

$$\int_{\gamma} (af(z) \pm bg(z)) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz \pm b \int_{\gamma} g(z) dz$$

tenglik o'rinli.

2^o Additivlik xossasi. Aytaylik, $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbb{C}$ va $\gamma_2 : [\beta_1, \beta_2] \rightarrow \mathbb{C}$ bo'lakli silliq yo'llar uchun, $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_1)$ bo'lib, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ bo'lsin, ya'ni

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{agar } t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \gamma_2(t), & \text{agar } t \in [\beta_1, \beta_2]. \end{cases}$$



27-chizma

Odatda γ yo'l γ_1 va γ_2 yo'llarning birlashmasi deyiladi. Bu γ yo'lda ixtiyoriy f uzluksiz funktsiya uchun quyidagi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (3.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

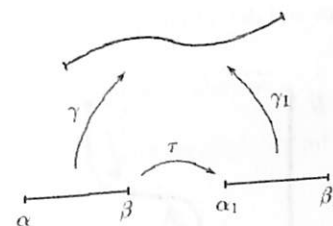
3.1.2-izoh. Bu (3.6) formula $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ bo'lsa ham, o'rinli bo'ladi (mustaqil isbotlang).

3^o Invariantlik xossasi.

3.1.1-teorema. Aytaylik, $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ bo'lakli silliq yo'l $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbb{C}$ bo'lakli silliq yo'ldan parametrni almashtirish yordamida hosil bo'lgan bo'lsin, ya'ni $\gamma = \gamma_1 \circ \tau$, bu yerda $\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha_1, \beta_1]$ qat'iy o'suvchi uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiya (28-chizma). Agar $f(z)$ funktsiya γ da uzluksiz bo'lsa, u funktsiya γ_1 da ham uzluksiz bo'ladi va

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz \quad (3.7)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.



28-chizma

Isbot. Integralning ta'rifiga ko'ra

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f \circ \gamma_1(\tau) \cdot \gamma_1'(\tau) d\tau$$

tenglik o'rinli bo'ladi. $\gamma_1 \circ \tau(t) = \gamma(t)$ va $\gamma_1'[\tau(t)]d\tau(t) = \gamma'(t)dt$ bo'lganligi sababli integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasiga ko'ra

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f \circ \gamma_1(\tau) \cdot \gamma_1'(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Demak, $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$.

□

3.1.3-izoh. Ma'lumki, bo'lakli silliq egri chiziqlar teoremda ko'rsatilgan τ parametrni almashtirishga nisbatan ekvivalent bo'lgan bo'lakli silliq yo'llar edi. Integralning 3-rossasi yo'l bo'yicha integralni egri chiziq bo'yicha integral deb qarashga imkon beradi.

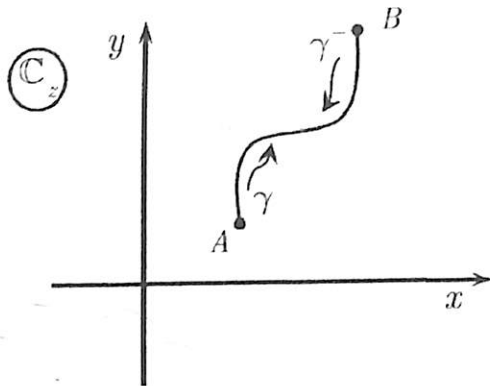
4^o Oriyentlanganlik. Dastlab, γ^- bilan $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ bo'lakli silliq yo'ldan $t \rightarrow \alpha + \beta - t$ almashtirishdan hosil bo'lgan yo'lni belgilaymiz, ya'ni

$$\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Agar f funksiya γ yo'lda uzluksiz bo'lsa, u holda quyidagi formula o'rinli bo'ladi

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Bundan keyin, γ^- yo'lni γ yo'lining oriyentatsiyasini (yo'nalishini) o'zgartirishdan hosil bo'lgan yo'l deb ataymiz (29-chizma).



29-chizma

4^o. Integralni baholash.

3.1.2-teorema. Bo'lakli silliq $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ yo'lda berilgan ixtiyoriy f uzluksiz funksiya uchun quyidagi baholash o'rinli:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz|,$$

bu yerda $\int |f(z)| \cdot |dz| = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt$ - $|f|$ funksiyadan γ yo'l bo'yicha olingan 1-tur egri chiziq integral.

Isbot. $J = \int_{\gamma} f(z) dz$ bo'lsin. Endi $J \in \mathbb{C}$ ni ko'rsatkichli shaklda yozib olamiz $J = |J|e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Shunga asosan quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$|J| = e^{-i\theta} J = \int_{\gamma} e^{-i\theta} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-i\theta} f[\gamma(t)] \gamma'(t) dt.$$

Bu oxirgi munosabatda chap tomonda haqiqiy son turgani uchun quyidagilarni topamiz:

$$|J| = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} \{ e^{-i\theta} f[\gamma(t)] \gamma'(t) \} dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f[\gamma(t)]| |\gamma'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |f| \cdot |dz|.$$

□

Bu teoremdan quyidagi natija kelib chiqadi.

3.1.2-natija. Agar yuqoridagi teoremaning barcha shartlari bajarilib, γ da $|f(z)| \leq M$ bo'lsa, u holda

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot |\gamma|$$

bo'ladi, bunda $|\gamma|$ - γ yo'l uzunligi.

3.1.1-lemma. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada uzluksiz bo'lib, $\gamma \subset D$ bo'lakli silliq yo'l bo'lsin. U holda $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham D sohaga tegishli,

hamda uchlari γ chiziqda bo'lgan shunday P siniq chiziq topiladiki, ushbu

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu lemma birinchi marta E. Gursa¹ tomonidan isbotlangan. Shuning uchun u Gursa lemmasi deb ataladi. Bu lemmaning isboti ushbu [10, 125-bet] ishda berilgan.

Misol va masalalar

3.1.3-misol. Ushbu $\int x dz$ integralni hisoblang, bu yerda γ ushbu $z = 2 + i$ nuqtaning radius vektorini.

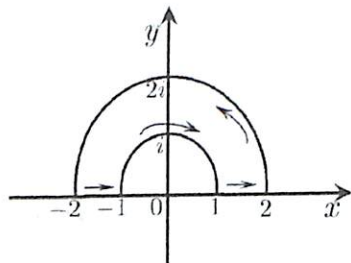
3.1.4-misol. Quyidagi $\int (x^2 + iy^2) dz$ integralni $z_0 = 1 + i$, $z_1 = 2 + 3i$ nuqtalarni tutashiruvchi γ to'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha hisoblang.

3.1.5-misol. Agar $\gamma = \{x = 3 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ellips bo'lsa, u holda quyidagi

$$\int_{\gamma} (4x + 3iy) dz$$

integralni hisblang.

3.1.6-misol. Ushbu $\int \bar{z} dz$ integralni hisoblang. Bu yerda γ quyidagi chizmada tasvirlangan yo'l (30-chizma).



30-chizma

¹Eduard Gursa (1858-1936) — mashhur fransuz matematik.

3.2 Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Koshi teoremasi

Boshlang'ich funksiya tushunchasi

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya D ($D \subset \mathbb{C}$) sohada aniqlangan bo'lsin.

3.2.1-ta'rif. Agar D sohada golomorf bo'lgan $F(z)$ funksiyaning hosilasi $f(z)$ ga teng bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $z \in D$ uchun

$$F'(z) = f(z)$$

bo'lsa, $F(z)$ funksiya D sohada $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Aytaylik, $F_1(z)$ va $F_2(z)$ funksiyalarning har biri D sohada $f(z)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsin. U holda $F_1(z) - F_2(z) = C$, (C -o'zgarmas son) bo'ladi. Haqiqatdan ham, D sohada $F_1'(z) = f(z)$, $F_2'(z) = f(z)$ tenglik o'rinli bo'lgani uchun $\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z)$ funksiyaning hosilasi $\Phi'(z) \equiv 0$ ($z \in D$) bo'ladi. Agar $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ deb olsak, unda D sohada

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$$

bo'ladi. Bundan $\Phi(z)$ funksiyaning D sohada o'zgarmas ekanligi kelib chiqadi. Demak, $F(z)$ funksiya D sohada $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, $F(z) + C$ (C ixtiyoriy o'zgarmas kompleks son) funksiyalar $f(z)$ funksiyaning D sohadagi boshlang'ich funksiyalar sinfini aniqlaydi.

Endi boshlang'ich funksiya qachon mavjud bo'lishligi haqidagi masalani o'rganishga o'tamiz. Buning uchun golomorf funksiyalar nazariyasining eng asosiy (fundamental) teorema bo'lgan Koshi teoremasining eng sodda shaklini keltirishdan boshlaymiz.

3.2.1 Koshi teoremasi

3.2.1-teorema. (Koshi). Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) golomorf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning D sohada yotuvchi har qanday silliq (bo'lakli silliq) γ yopiq yo'l bo'yicha integrali nolga teng bo'ladi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Isbot. Bu teoremani bir nechta bosqichda isbot qilamiz.

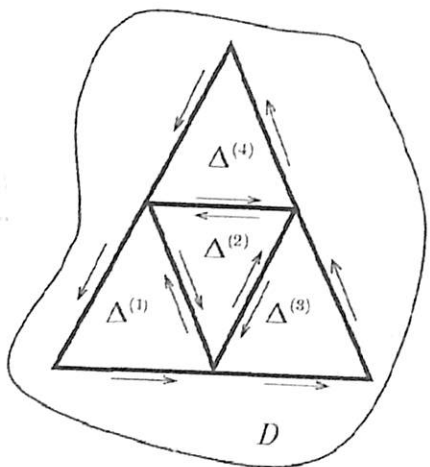
I-hol. Yopiq bo'lakli silliq yo'l $\gamma = \partial\Delta$ uchburchak chegarasi (konturi) bo'lib, bu uchburchakning perimetri l soniga teng bo'lsin. Teoremani isbotlash uchun, teskarisini faraz qilamiz, ya'ni teorema shartlari bajarilsinu, lekin

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = M > 0$$

bo'lsin. Endi Δ uchburchakni, uning tomonlari o'rtalarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmalari yordamida 4 ta

$$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$$

uchburchaklarga ajratamiz. Δ uchburchak va hosil bo'lgan $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$ uchburchaklar chegaralarida yo'nalishni soat strelkasiga qarama-qarshi olamiz (31-chizma).



31-chizma

Ravshanki, $\partial\Delta$ bo'yicha $f(z)$ funksiyadan olingan integral kichik uchburchaklar $\partial\Delta^{(1)}, \partial\Delta^{(2)}, \partial\Delta^{(3)}, \partial\Delta^{(4)}$ chegaralari bo'yicha olingan integralning yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta^{(3)}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta^{(4)}} f(z) dz.$$

U holda,

$$M = \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta^{(3)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta^{(4)}} f(z) dz \right|$$

tengsizlikning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilardan kamida bittasi $\frac{M}{4}$ dan kichik bo'lmaydi, shu uchburchakni Δ_1 deb belgilaymiz, ya'ni

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}$$

bo'lib, Δ_1 - uchburchakning perimetri $\frac{l}{2}$ ga teng bo'ladi. Endi Δ_1 uchburchakni yuqoridagi usul bilan yana 4 ta

$$\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(3)}, \Delta_1^{(4)}$$

uchburchaklarga ajratamiz. Yuqoridagi xossalarga ko'ra, bu uchburchaklar orasida shunday uchburchak mavjudki, uning chegarasi bo'yicha $f(z)$ funksiyadan olingan integralning moduli $\frac{M}{4^2}$ dan kichik bo'lmaydi. Bu uchburchakni Δ_2 deb belgilaymiz. Demak,

$$\left| \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}$$

bo'ladi. Δ_2 uchburchakning perimetri $\frac{l}{2^2}$ soniga tengdir.

Bu jarayonni davom ettirsak, natijada ichma-ich joylashgan $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n, \dots$ yopiq uchburchaklar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu uchburchaklar ketma-ketligi uchun quyidagi xossalari o'rinli:

- 1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$;
- 2) Δ_n uchburchakning perimetri $\frac{l}{2^n}$ soniga teng va $n \rightarrow \infty$ intilganda $\frac{l}{2^n} \rightarrow 0$

intiladi:

- 3) Har bir Δ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) uchburchak uchun

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n} \quad (3.8)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi 1) va 2) tasdiqlardan barcha $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n, \dots$ uchburchaklarga tegishli bo'lgan yagona $z_0 \in \Delta$ ($\Delta \subset D$)

nuqta mavjud bo'lishi kelib chiqadi. Shartga ko'ra $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada golomorf. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon)$ son topiladiki, $\mathbb{U} = \{|z - z_0| < \delta\}$ doirada yotuvchi barcha z nuqtalar uchun

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0) \quad (3.9)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda $z \in \mathbb{U}$ uchun $|\alpha(z)| < \varepsilon$. Endi tuzilishiga ko'ra yetarlicha katta n lar uchun $\Delta_n \subset \mathbb{U}$ bo'ladi. U holda (3.9) munosabatga asosan ushbu tenglik

$$\int_{\partial \Delta_n} f(z) dz = \int_{\partial \Delta_n} f(z_0) dz + \int_{\partial \Delta_n} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{\partial \Delta_n} \alpha(z)(z - z_0) dz$$

o'rinli bo'ladi. Endi bizga ma'lumki,

$$\int_{\partial \Delta_n} dz = 0, \quad \int_{\partial \Delta_n} z dz = 0.$$

Demak, ushbu

$$\int_{\partial \Delta_n} f(z) dz = \int_{\partial \Delta_n} \alpha(z)(z - z_0) dz$$

tenglik o'rinli, $z \in \partial \Delta_n$ uchun $|\alpha(z)| < \varepsilon$. Bundan tashqari ixtiyoriy $z \in \partial \Delta_n$ nuqtalarda $|z - z_0|$ miqdor Δ_n uchburchak perimetridan oshmaydi, shuning uchun integralni baholash haqidagi teorema ko'ra

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial \Delta_n} \alpha(z)(z - z_0) dz \right| < \varepsilon \frac{l}{2^n} \cdot \frac{l}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{l^2}{4^n} \quad (3.10)$$

bo'ladi. Yuqoridagi (3.8) va (3.10) munosabatlardan

$$\frac{M}{4^n} \leq \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| < \varepsilon \cdot \frac{l^2}{4^n}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $M < \varepsilon \cdot l^2$ bo'lib, bu tengsizlik $M > 0$ deb qilingan farazga zid (chunki ε ixtiyoriy kichik musbat son). Ziddiyatlik bo'lmasligi uchun $M = 0$ bo'lishi kerak. Shunday qilib $M = 0$, ya'ni

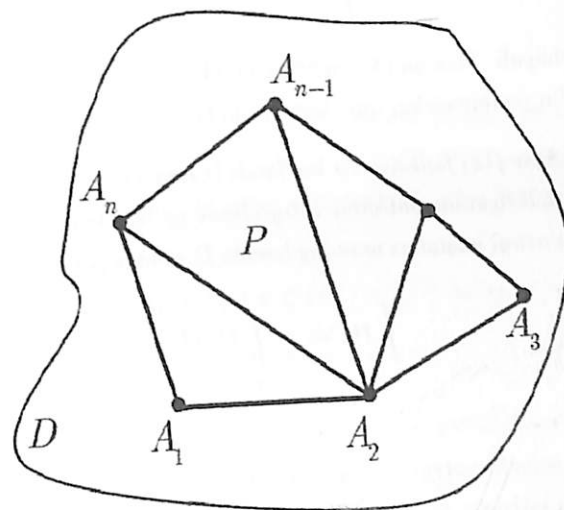
$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

bo'ladi.

2-hol. Endi γ egri chiziq P -ko'pburchak konturidan iborat bo'lsin. Ravshanki, ko'pburchak chekli sondagi uchburchaklarga ajraladi va

$$\int_P f(z) dz$$

integral esa bu uchburchaklar bo'yicha olingan integrallar yig'indisiga teng bo'ladi. Uchburchalari bo'yicha olingan integrallarning har biri 1-holga binoan nolga teng bo'ladi (32-chizma).



32-chizma

Binobarin,

$$\int_P f(z) dz = 0$$

bo'ladi.

3-hol. Endi γ ixtiyoriy silliq yoki bo'lakli silliq yopiq yo'l bo'lsin. Integralning xossasiga ko'ra D sohaga tegishli bo'lgan shunday P ko'pburchak topiladiki, 3.1.1-lemmaga ko'ra,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon$$

bo'ladi, bunda ε - ixtiyoriy musbat son. Yuqoridagi 2-holga binoan

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

bo'lgani uchun,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bundan esa

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Teorema to'liq isbot bo'ldi. \square

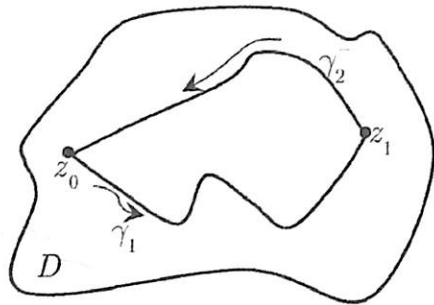
Koshining bu teoremasidan quyidagi natija kelib chiqadi.

3.2.1-natija. Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) golomorf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning integrali integrallash yo'lga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni boshlang'ich va oxirgi nuqtalari umumiy hamda D sohada yotuvchi γ_1 va γ_2 yo'llar uchun

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

bo'ladi.

Isbot. D sohada yotgan z_0 va z_1 nuqtalarni tutashtiruvchi va shu sohaga tegishli bo'lgan ixtiyoriy γ_1 va γ_2 silliq yo'llarni olaylik (33-chizma). Natijada γ_1 va γ_2 yo'llar D sohaga tegishli γ yopiq bo'lakli silliq yo'lni tashkil etadi.



33-chizma

Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

Demak, $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$ bo'ladi. \square

3.2.1-izoh. 3.2.1-teoremada sohaning bir bog'lamli bo'lish sharti muhim. Haqiqatdan ham, $f(z) = \frac{1}{z}$ funksiya $D = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ sohada golomorf, biroq

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

3.2.2 Koshi teoremasini umumlashtirish

Endi Koshi teoremasining umumlashishmasini ifodalovchi quyidagi teoremani isbotsiz keltirib o'tamiz. Aytaylik, D ($D \subset \mathbb{C}$) chegarlangan bir bog'lamli soha bo'lib, uning chegarasi ∂D silliq yoki bo'lakli silliq yopiq yo'ldan iborat bo'lsin.

3.2.2-teorema. (Koshi). Agar $f(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ bo'lsa, u holda

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

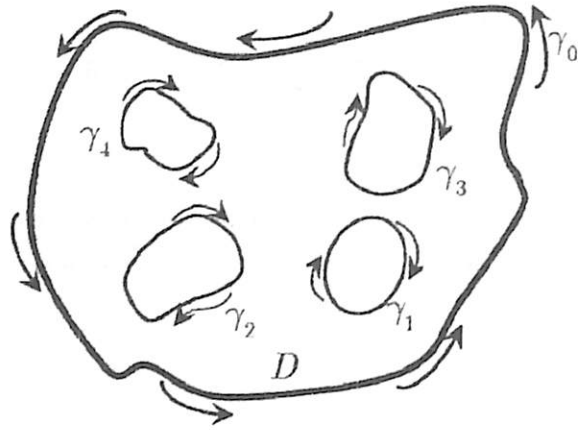
bo'ladi, bu yerda ∂D chegarada yo'nalish soat strelkasi yo'nalishiga qarshi olingan.

Eslatib o'tamiz, D soha chegarasi ∂D da oriyentirlangan yo'nalish deb shunday yo'nalishga aytiladiki, bu yo'nalish bo'yicha chegarada harakat qilinganda soha har doim chap tomonda qoladi.

Faraz qilaylik, D soha o'zaro kesishmaydigan $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ silliq (bo'lakli silliq) yopiq yo'llar bilan chegarlangan ko'p bog'lamli soha bo'lib, γ_0 tashqi chegara, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ yo'llar esa ichki chegara bo'lsin. Ravshanki, D sohaning chegarasi

$$\partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$$

bo'ladi. Bunda γ_0 yopiq yo'lda yo'nalish soat strelkasi yo'nalishiga qarshi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ yopiq yo'llarda esa yo'nalish soat strelkasi yo'nalishi bo'yicha olinadi. Odatda bunday yo'nalish oriyentirlangan yo'nalish yoki qisqacha musbat yo'nalish deyiladi (34-chizma).



34-chizma

3.2.3-teorema. (Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasi). Agar $f(z)$ funksiya ko'p bog'lamli D sohaning \bar{D} yopig'ida golomorf bo'lsa, u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

bo'ladi. Bu yerda integral ∂D ning oriyentirlangan yo'nalishi bo'yicha olingan.

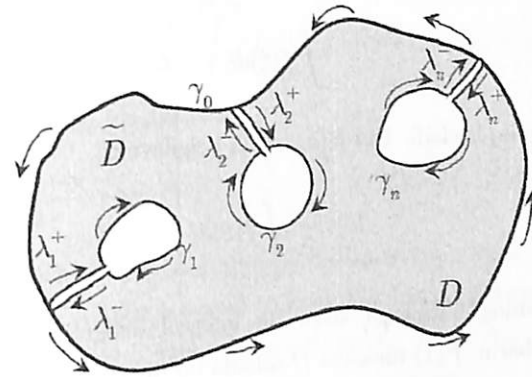
Isbot. γ_0 yo'lini $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ yo'llar yordamida $\lambda_1, \lambda_1^-, \lambda_2, \lambda_2^-, \dots, \lambda_n, \lambda_n^-$ silliq yo'llar bilan shunday tutashtiramizki, natijada \tilde{D} bir bog'lamli soha hosil bo'lsin. \tilde{D} sohaning chegarasi $\partial \tilde{D}$ va $\lambda_1, \lambda_1^-, \lambda_2, \lambda_2^-, \dots, \lambda_n, \lambda_n^-$ yo'llarning birlashmasidan iborat bo'ladi (35-chizma). U holda 3.2.2-teoremaga ko'ra

$$\int_{\partial \tilde{D}} f(z)dz = 0$$

bo'ladi. λ_k va λ_k^- yo'llarda ($k = 1, \dots, n$) yo'nalish qarama-qarshi bo'lganligi sababli

$$\int_{\lambda_k} f(z)dz = - \int_{\lambda_k^-} f(z)dz$$

tenglik o'rinli.



35-chizma

Natijada

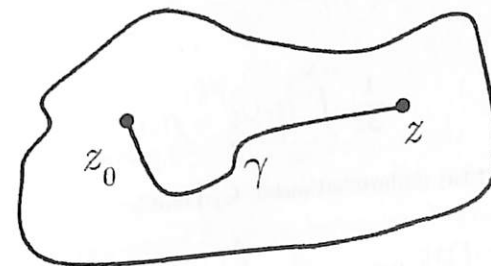
$$\int_{\partial \tilde{D}} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz + \sum_{k=1}^n \left(\int_{\lambda_k} f(z)dz + \int_{\lambda_k^-} f(z)dz \right) = \int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

munosabatni hosil qilamiz. □

Endi boshlang'ich funksiya mavjudligi haqidagi teoremani keltiramiz.

3.2.4-teorema. Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli $D \subset \mathbb{C}$ sohada golomorf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya shu sohada boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

Isbot. D sohada z_0 va ixtiyoriy z nuqtalarni olib, ularni shu sohada yotuvchi silliq (bo'lakli silliq) yo'l bilan birlashtiramiz (36-chizma).



36-chizma

U holda

$$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

integral z ga bog'liq bo'ladi. Uni $F(z)$ orqali belgilaymiz:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \quad (3.11)$$

Koshi teoremasining natijasiga ko'ra bu integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi. Binobarin, $F(z)$ funksiya D sohada bir qiymatda aniqlanadi.

Endi (3.11) funksiya D sohada berilgan $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lishini ko'rsatamiz. z nuqtaga shunday Δz orttirma beraylikki, $z + \Delta z$ nuqta z nuqtaning D sohaga tegishli yetarlicha kichik atrofida yotsin. U holda $F(z)$ funksiyaning orttirmasi uchun quyidagiga

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = \int_z^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi, \quad (\xi \in D)$$

ega bo'lamiz. Bu tenglikning har ikki tomonini Δz ga bo'lamiz:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi \quad (3.12)$$

Ravshanki,

$$\int_z^{z + \Delta z} f(z) d\xi = f(z) \cdot \Delta z,$$

ya'ni

$$\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) d\xi = f(z) \quad (3.13)$$

bo'ladi. (3.12) va (3.13) munosabatlardan foydalanib

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi - \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) d\xi -$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi$$

ifodani topamiz. Oxirgi tenglikdan

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z + \Delta z} |(f(\xi) - f(z))| |d\xi| \quad (3.14)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Koshi teoremasi natijasiga ko'ra, z va $z + \Delta z$ nuqtalarni birlashtiruvchi va D sohada yotuvchi yo'l sifatida shu nuqtalarni birlashtiruvchi kesmani olishimiz mumkin. Unda ξ o'zgaruvchining $[z, z + \Delta z]$ kesmaga tegishli bo'lishidan ushbu $|z - \xi| \leq |\Delta z|$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Teorema shartiga ko'ra $f(z)$ funksiya z nuqtada uzluksiz. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|\Delta z| < \delta$ bo'lganda

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib, (3.14) munosabatdan topamiz:

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z + \Delta z} |(f(\xi) - f(z))| |d\xi| <$$

$$< \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \int_z^{z + \Delta z} |d\xi| = \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon$$

Demak,

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Bundan esa

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

ya'ni

$$F'(z) = f(z)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi. \square

3.2.2-izoh. 3.2.4-teorema isbotidan ma'lumki, agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamlı D sohada uzluksiz va bu funksiyadan D sohada yotuvchi ixtiyoriy yopiq bo'lakli silliq yo'l bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohada boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

U holda

$$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

integral z ga bog'liq bo'ladi. Uni $F(z)$ orqali belgilaymiz:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \quad (3.11)$$

Koshi teoremasining natijasiga ko'ra bu integral integrallash yo'lga bog'liq bo'lmaydi. Binobarin, $F(z)$ funksiya D sohada bir qiymatda aniqlanadi.

Endi (3.11) funksiya D sohada berilgan $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lishini ko'rsatamiz. z nuqtaga shunday Δz orttirma beraylikki, $z + \Delta z$ nuqta z nuqtaning D sohaga tegishli yetarlicha kichik atrofida yotsin. U holda $F(z)$ funksiyaning orttirmasi uchun quyidagiga

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi, \quad (\xi \in D)$$

ega bo'lamiz. Bu tenglikning har ikki tomonini Δz ga bo'lamiz:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi \quad (3.12)$$

Ravshanki,

$$\int_z^{z+\Delta z} f(z) d\xi = f(z) \cdot \Delta z.$$

ya'ni

$$\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) d\xi = f(z) \quad (3.13)$$

bo'ladi. (3.12) va (3.13) munosabatlardan foydalanib

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi$$

ifodani topamiz. Oxirgi tenglikdan

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |(f(\xi) - f(z))| |d\xi| \quad (3.14)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Koshi teoremasi natijasiga ko'ra, z va $z + \Delta z$ nuqtalarni birlashtiruvchi va D sohada yotuvchi yo'l sifatida shu nuqtalarni birlashtiruvchi kesmani olishimiz mumkin. Unda ξ o'zgaruvchining $[z, z + \Delta z]$ kesmaga tegishli bo'lishidan ushbu $|z - \xi| \leq |\Delta z|$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Teorema shartiga ko'ra $f(z)$ funksiya z nuqtada uzluksiz. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|\Delta z| < \delta$ bo'lganda

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib, (3.14) munosabatdan topamiz:

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |(f(\xi) - f(z))| |d\xi| <$$

$$< \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \int_z^{z+\Delta z} |d\xi| = \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon$$

Demak,

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Bundan esa

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

ya'ni

$$F'(z) = f(z)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi. \square

3.2.2-izoh. 3.2.4-teorema isbotidan ma'lumki, agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada uzluksiz va bu funksiyadan D sohada yotuvchi ixtiyoriy yopiq bo'lakli silliq yo'l bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohada boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

Shunday qilib, $f(z)$ funksiyaning D sohadagi ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi $F(z)$ quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C \quad (C - \text{kompleks konstanta}). \quad (3.15)$$

Agar (3.15) formuladan, avval $z = z_0$ deb

$$F(z_0) = C$$

bo'lishini, so'ngra $z = z_1$ deb

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + C = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + F(z_0)$$

tenglikni topamiz. Oxirgi tenglikdan esa

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi = F(z_1) - F(z_0) \quad (3.16)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Odatda (3.16) formula Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalari D sohada golomorf bo'lsin. Ma'lumki, ushbu

$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

tenglik o'rinli. Bu tenglikni integrallab, topamiz:

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z) \cdot g(z)]' dz = \int_{z_0}^{z_1} f'(z) \cdot g(z) dz + \int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot g'(z) dz. \quad (3.17)$$

Agar

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z) \cdot g(z)]' dz = f(z_1) \cdot g(z_1) - f(z_0) \cdot g(z_0) = [f(\xi) \cdot g(\xi)] \Big|_{z_0}^{z_1}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda (3.17) tenglik ushbu

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot g'(z) dz = [f(\xi) \cdot g(\xi)] \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\xi) \cdot g(\xi) dz$$

tenglikka keladi. Bu bo'laklab integrallash formulasiidir.

Misol va masalalar

3.2.1-misol. Ushbu $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z+4)^3} dz$ integralni hisoblang.

3.2.2-misol. Agar $f(z)$ funksiya ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ sohada (halqada) golomorf bo'lsa, u holda ushbu

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

integralning qiymati ρ soniga bog'liq emasligini ko'rsating, bu yerda $r < \rho < R$.

3.2.3-misol. Ushbu integralni hisoblang: $\int_0^i z \cos z dz$

3.2.4-misol. Quyidagi funksiyalar berilgan sohalarda boshlang'ich funksiyalarga ega emasligini ko'rsating.

- 1) $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \{0 < |z| < \infty\}$,
- 2) $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$,
- 3) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$, $D = \{1 < |z| < \infty\}$,
- 4) $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$.

3.2.5-misol. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang.

A) Agar $f(z)$ funksiya $\mathbb{U} = \{|z - a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in \mathbb{U}$ uchun $|f(z)| \leq M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \leq M |z_2 - z_1|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

B) Agar $f(z)$ funksiya $\mathbb{U} = \{|z - a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in \mathbb{U}$ uchun $\operatorname{Re} f(z) \geq M > 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \geq M |z_2 - z_1|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

C) Yuqoridagi B) masaladagi tasdiq $\operatorname{Re} f(z) \geq M$, ($z \in \mathbb{U}$) shartni $\operatorname{Re} \{e^{i\varphi} f(z)\} \geq M$ shart bilan o'zgartirilganda ham o'z kuchini saqlaydi (bu shartdagi φ haqiqiy son z nuqtaning tanlanishiga bog'liq emas).

Shunday qilib, $f(z)$ funksiyaning D sohadagi ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi $F(z)$ quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C \quad (C - \text{kompleks konstanta}). \quad (3.15)$$

Agar (3.15) formuladan, avval $z = z_0$ deb

$$F(z_0) = C$$

bo'lishini, so'ngra $z = z_1$ deb

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + C = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + F(z_0)$$

tenglikni topamiz. Oxirgi tenglikdan esa

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi = F(z_1) - F(z_0) \quad (3.16)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Odatda (3.16) formula Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalari D sohada golomorf bo'lsin. Ma'lumki, ushbu

$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

tenglik o'rinli. Bu tenglikni integrallab, topamiz:

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z) \cdot g(z)]' dz = \int_{z_0}^{z_1} f'(z) \cdot g(z) dz + \int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot g'(z) dz. \quad (3.17)$$

Agar

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z) \cdot g(z)]' dz = f(z_1) \cdot g(z_1) - f(z_0) \cdot g(z_0) = [f(\xi) \cdot g(\xi)] \Big|_{z_0}^{z_1}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda (3.17) tenglik ushbu

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot g'(z) dz = [f(\xi) \cdot g(\xi)] \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\xi) \cdot g(\xi) dz$$

tenglikka keladi. Bu bo'laklab integrallash formulasidir.

Misol va masalalar

3.2.1-misol. Ushbu $\int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z+4)} dz$ integralni hisoblang.

3.2.2-misol. Agar $f(z)$ funksiya ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ sohada (halqada) golomorf bo'lsa, u holda ushbu

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

integralning qiymati ρ soniga bog'liq emasligini ko'rsating, bu yerda $r < \rho < R$.

3.2.3-misol. Ushbu integralni hisoblang: $\int_0^i z \cos z dz$

3.2.4-misol. Quyidagi funksiyalar berilgan sohalarda boshlang'ich funksiyalarga ega emasligini ko'rsating.

- 1) $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \{0 < |z| < \infty\}$,
- 2) $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$,
- 3) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$, $D = \{1 < |z| < \infty\}$,
- 4) $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$.

3.2.5-misol. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang.

A) Agar $f(z)$ funksiya $\mathbb{U} = \{|z - a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in \mathbb{U}$ uchun $|f(z)| \leq M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \leq M |z_2 - z_1|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

B) Agar $f(z)$ funksiya $\mathbb{U} = \{|z - a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in \mathbb{U}$ uchun $\operatorname{Re} f(z) \geq M > 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \geq M |z_2 - z_1|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

C) Yuqoridagi B) masaladagi tasdiq $\operatorname{Re} f(z) \geq M$, ($z \in \mathbb{U}$) shartni $\operatorname{Re}\{e^{i\varphi} f(z)\} \geq M$ shart bilan o'zgartirilganda ham o'z kuchini saqlaydi (bu shartdagi φ haqiqiy son z nuqtaning tanlanishiga bog'liq emas).

Shunday qilib, $f(z)$ funksiyaning D sohadagi ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi $F(z)$ quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C \quad (C - \text{kompleks konstanta}). \quad (3.15)$$

Agar (3.15) formuladan, avval $z = z_0$ deb

$$F(z_0) = C$$

bo'lishini, so'ngra $z = z_1$ deb

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + C = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + F(z_0)$$

tenglikni topamiz. Oxirgi tenglikdan esa

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi = F(z_1) - F(z_0) \quad (3.16)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Odatda (3.16) formula Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalari D sohada golomorf bo'lsin. Ma'lumki, ushbu

$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

tenglik o'rinli. Bu tenglikni integrallab, topamiz:

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z) \cdot g(z)]' dz = \int_{z_0}^{z_1} f'(z) \cdot g(z) dz + \int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot g'(z) dz. \quad (3.17)$$

Agar

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z) \cdot g(z)]' dz = f(z_1) \cdot g(z_1) - f(z_0) \cdot g(z_0) = [f(\xi) \cdot g(\xi)] \Big|_{z_0}^{z_1}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda (3.17) tenglik ushbu

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot g'(z) dz = [f(\xi) \cdot g(\xi)] \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\xi) \cdot g(\xi) dz$$

tenglikka keladi. Bu bo'laklab integrallash formulasi.

Misol va masalalar

3.2.1-misol. Ushbu $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z+4)^2} dz$ integralni hisoblang.

3.2.2-misol. Agar $f(z)$ funksiya ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ sohada (halqada) golomorf bo'lsa, u holda ushbu

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

integralning qiymati ρ soniga bog'liq emasligini ko'rsating, bu yerda $r < \rho < R$.

3.2.3-misol. Ushbu integralni hisoblang: $\int_0^1 z \cos z dz$

3.2.4-misol. Quyidagi funksiyalar berilgan sohalarda boshlang'ich funksiyalarga ega emasligini ko'rsating.

- 1) $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \{0 < |z| < \infty\}$.
- 2) $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$.
- 3) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$, $D = \{1 < |z| < \infty\}$.
- 4) $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$.

3.2.5-misol. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang.

A) Agar $f(z)$ funksiya $\mathbb{U} = \{|z - a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in \mathbb{U}$ uchun $|f(z)| \leq M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \leq M |z_2 - z_1|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

B) Agar $f(z)$ funksiya $\mathbb{U} = \{|z - a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in \mathbb{U}$ uchun $\operatorname{Re} f(z) \geq M > 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \geq M |z_2 - z_1|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

C) Yuqoridagi B) masaladagi tasdiq $\operatorname{Re} f(z) \geq M$, ($z \in \mathbb{U}$) shartni $\operatorname{Re} \{e^{i\varphi} f(z)\} \geq M$ shart bilan o'zgartirilganda ham o'z kuchini saqlaydi (bu shartdagi φ haqiqiy son z nuqtaning tanlanishiga bog'liq emas).

Shunday qilib, $f(z)$ funksiyaning D sohadagi ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi $F(z)$ quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C \quad (C - \text{kompleks konstanta}). \quad (3.15)$$

Agar (3.15) formuladan, avval $z = z_0$ deb

$$F(z_0) = C$$

bo'lishini, so'ngra $z = z_1$ deb

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + C = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + F(z_0)$$

tenglikni topamiz. Oxirgi tenglikdan esa

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi = F(z_1) - F(z_0) \quad (3.16)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Odatda (3.16) formula Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalari D sohada golomorf bo'lsin. Ma'lumki, ushbu

$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

tenglik o'rinli. Bu tenglikni integrallab, topamiz:

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z) \cdot g(z)]' dz = \int_{z_0}^{z_1} f'(z) \cdot g(z) dz + \int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot g'(z) dz. \quad (3.17)$$

Agar

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z) \cdot g(z)]' dz = f(z_1) \cdot g(z_1) - f(z_0) \cdot g(z_0) = [f(\xi) \cdot g(\xi)] \Big|_{z_0}^{z_1}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda (3.17) tenglik ushbu

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot g'(z) dz = [f(\xi) \cdot g(\xi)] \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\xi) \cdot g(\xi) dz$$

tenglikka keladi. Bu bo'laklab integrallash formulasidir.

Misol va masalalar

3.2.1-misol. Ushbu $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z+4)^3} dz$ integralni hisoblang.

3.2.2-misol. Agar $f(z)$ funksiya ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ sohada (halqada) golomorf bo'lsa, u holda ushbu

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

integralning qiymati ρ soniga bog'liq emasligini ko'rsating, bu yerda $r < \rho < R$.

3.2.3-misol. Ushbu integralni hisoblang: $\int_0^i z \cos z dz$

3.2.4-misol. Quyidagi funksiyalar berilgan sohalarda boshlang'ich funksiyalarga ega emasligini ko'rsating.

- 1) $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \{0 < |z| < \infty\}$,
- 2) $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$,
- 3) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$, $D = \{1 < |z| < \infty\}$,
- 4) $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$.

3.2.5-misol. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang.

A) Agar $f(z)$ funksiya $\mathbb{U} = \{|z - a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in \mathbb{U}$ uchun $|f(z)| \leq M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \leq M |z_2 - z_1|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

B) Agar $f(z)$ funksiya $\mathbb{U} = \{|z - a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in \mathbb{U}$ uchun $\operatorname{Re} f(z) \geq M > 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \geq M |z_2 - z_1|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

C) Yuqoridagi B) masaladagi tasdiq $\operatorname{Re} f(z) \geq M$, ($z \in \mathbb{U}$) shartni $\operatorname{Re} \{e^{i\varphi} f(z)\} \geq M$ shart bilan o'zgartirilganda ham o'z kuchini saqlaydi (bu shartdagi φ haqiqiy son z nuqtaning tanlanishiga bog'liq emas).

3.3 Koshining integral formulasi

Bu paragrafda Koshi teoremasidan foydalanib kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida muhim bo'lgan Koshining integral formulasini keltiramiz.

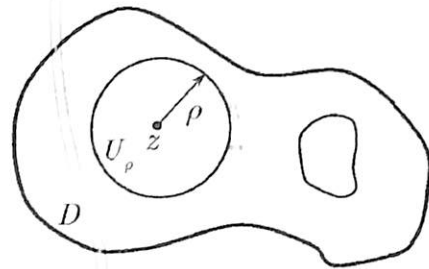
\mathbb{C} kompleks tekislikda chegaralangan D sohani qaraylik. Uning chegarasi silliq (yoki bo'lakli silliq) yo'ldan iborat bo'lsin.

3.3.1-teorema. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning yopig'i \bar{D} da golomorf bo'lsa, u holda ixtiyoriy $z \in D$ nuqta uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (3.18)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda integral D sohaning oriyentrlangan chegarasi bo'yicha olingan.

Isbot. Ixtiyoriy $z \in D$ nuqta olib, uning shunday $\mathbb{U}_\rho = \{\xi : |\xi - z| < \rho, \rho > 0\}$ atrofini qaraymizki, $\bar{\mathbb{U}}_\rho \subset D$ bo'lsin (37-chizma). Ushbu $D_\rho = D \setminus \bar{\mathbb{U}}_\rho$ sohani qaraymiz. Ravshanki, bu sohaning yopig'ida $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ funksiya golomorf bo'ladi.



37-chizma

Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\partial D_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

yoki

$$\int_{\partial D_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (3.19)$$

Endi $\rho \rightarrow 0$ intilganda (3.19) tenglikni o'ng tomoni $f(z)$ funksiya intilishini ko'rsatamiz.

Ma'lumki,

$$\int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i$$

bo'ladi. Bu tenglikni har ikki tomonini $f(z)$ ga ko'paytiramiz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (3.20)$$

Demak, (3.19) va (3.20) munosabatlarga ko'ra

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (3.21)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan, $f(z)$ funksiya z nuqtada golomorf. Binobarin, funksiya shu nuqtada uzluksiz. $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $\rho < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ρ radiusli \mathbb{U}_ρ aylananing ixtiyoriy ξ nuqtasi uchun $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu tasdiqlarga asosan, quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{|f(z) - f(\xi)|}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} |d\xi| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi\varepsilon}{\rho} \rho = \varepsilon, \end{aligned}$$

ya'ni $\rho \rightarrow 0$ intilganda (3.21) munosabatning chap tomoni nolga intilishi kelib chiqadi. Endi (3.19) tenglikning chap tomoni ρ soniga bog'liq emasligini hisobga olsak, yetarlicha kichik ρ lar uchun quyidagi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{U}_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

munosabatni hosil qilamiz. Demak,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

tenglik o'rinli. Teorema isbot bo'ldi. \square

3.3.1-teoremadagi (3.18) formulaning o'ng tomonidagi integral *Koshi integrali*. integral ostidagi ratsional ifoda $\frac{1}{\xi - z}$ *Koshi yadrosi* deyiladi. (3.18) formula esa Koshining integral formulasi deyiladi. Koshining integral formulasi $f(z)$ golormf funksiyaning D sohadagi qiymatlarini uning ∂D chegarasidagi qiymatlari orqali ifodalaydi.

3.3.1-izoh. Agar 3.3.1-teoremaning shartlari bajarilganda $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$ bo'lsa 3.2.3-Koshi teoremasiga ko'ra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

bo'ladi.

Endi Koshining integral formulasidan quyidagi o'rta qiymat haqidagi teoremaning o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

3.3.2-teorema. (O'rta qiymat haqida) Agar $f(z)$ funksiya D sohada golormf bo'lsa, a holda $f(z)$ funksiyaning ixtiyoriy $a \in D$ nuqtadagi qiymati uning $\bar{U}_\rho(a) = \{z \in D : |z - a| \leq \rho\} \subset D$ yopiq doira chegarasidagi qiymatlarining o'rta arifmetiqiga teng:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Isbot. $\bar{U}_\rho(a) = \{z \in D : |z - a| \leq \rho\} \subset D$ doira uchun Koshi integral formulasiga ko'ra

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{U}_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi$$

bo'ladi. Ravshanki, $\partial \bar{U}_\rho$ aylanada $\xi = a + \rho e^{i\varphi}$, ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) bo'lib, $d\xi = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ bo'ladi. U holda, quyidagi tengliklardan teorema o'rinli bo'lishi kelib chiqadi:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{U}_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{i\varphi}) i \rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

\square

Misol va masalalar

3.3.1-misol. Ushbu $\int_{|z-2|=2} \frac{dz}{z^2+9}$ integralni hisoblang.

3.3.2-misol. Quyidagi

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z+i} dz$$

integralni hisoblang. Bunda

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+i|=3\}$$

aylanadan iborat.

3.3.3-misol. Ushbu

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+3)} dz$$

integralni hisoblang, bunda γ chiziq \mathbb{C} kompleks tekislikdagi $z = -3$ nuqtani o'z ichiga oladigan ixtiyoriy yopiq kontur.

3.3.4-misol. Koshining integral formulasidan foydalanib quyidagi integrallarni hisoblang:

- $\int_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{(z^2+1)(z-2i)} dz,$
- $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)(z+2i)} dz.$

3.3.5-misol. Aytaylik, γ chiziq chegaralangan D sohaning chegarasi bo'lib, $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus D)$ bo'lsin. Agar $0 \in D$ bo'lsa, a holda ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{az - z^2} dz = \begin{cases} 0, & a \in D \\ \frac{f(a)}{a}, & a \notin D \end{cases}$$

formulaning o'rinli ekanligini isbotlang.

3.3.6-misol. Agar $D = \{|z| < 1\}$ bo'lib, va $f(z), g(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ bo'lsa, u holda ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{f(z)}{z-a} + \frac{ag(z)}{az-1} \right) dz = \begin{cases} f(a), & |a| < 1 \\ g(\frac{1}{a}), & |a| > 1 \end{cases}$$

formulaning o'rinli ekanligini isbotlang.

3.4 Teylor qatorlari

Ushbu paragrafda Koshining integral formulasidan foydalanib golomorf funksiyalarni darajali qatorning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkinligini isbotlaymiz. Buning uchun dastlab matematik analiz kursidan qatorlar nazariyasiga tegishli ayrim tushuncha va tasdiqlarni eslatib o'tamiz. Hadlari kompleks sonlardan iborat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (3.22)$$

qator berilgan bo'lib, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ uning qisman yig'indisi bo'lsin.

3.4.1-ta'rif. Agar (3.22) qatorning qisman yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ bo'lsa, u holda (3.22) qator yaqinlashuvchi qator deyiladi, S esa qator yig'indisi deyiladi va $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ kabi yoziladi.

Aytaylik, $f_k(z)$, ($k = 1, 2, \dots$) funksiyalar $E \subset \mathbb{C}$ to'plamda berilgan bo'lsin. Agar $z_0 \in E$ nuqtada $\{f_k(z_0)\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, $\{f_k(z)\}$ funksional ketma-ketlik z_0 nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.

Aytaylik, $M \subset \mathbb{C}$ to'plam $\{f_k(z)\}$ funksional ketma-ketlikning yaqinlashish to'plami bo'lsin. Ravshanki, bu holda, har bir $z \in M$ nuqtada $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z)$ limit mavjud bo'lib, u z o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi. U $\{f_k(z)\}$ funksional ketma-ketlikning limit funksiyasi deyiladi, ya'ni $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z) = f(z)$.

Hadlari $M \subset \mathbb{C}$ to'plamda berilgan $f_k(z)$ funksiyalardan iborat

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \quad (3.23)$$

funksional qator berilgan bo'lsin.

3.4.2-ta'rif. Agar (3.23) funksional qatorning qisman yig'indilari ketma-ketligi $\{S_n(z)\} = \left\{ \sum_{k=1}^n f_k(z) \right\}$ $M \subset \mathbb{C}$ to'plamda yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$ bo'lsa, u holda (3.23) funksional qator M to'plamda yaqinlashuvchi, $S(z)$ funksiya esa uning yig'indisi deyiladi.

3.4.3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilsaki, ixtiyoriy $n > n_0$ va barcha $z \in M$ uchun

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ funksional qator M to'plamda $S(z)$ ga tekis yaqinlashadi deyiladi.

3.4.1-teorema. (Veyershtrass) Agar $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ funksional qatorning har bir $f_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) hadi M to'plamda $|f_k(z)| \leq a_k$ tengsizlikni qanoatlantirib, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

3.4.2-teorema. Agar $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ funksional qatorning har bir $f_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) hadi M to'plamda uzluksiz bo'lib, bu qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator yig'indisi $S(z)$ ham M to'plamda uzluksiz bo'ladi.

3.4.3-teorema. Agar $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ funksional qatorning har bir $f_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) hadi M to'plamda uzluksiz bo'lib, bu qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qatorni M sohada yotuvchi har qanday silliq (bo'lakli silliq) γ yo'l bo'yicha hadma-had integrallash mumkin, ya'ni, ushbu

$$\int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Quyida bir o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida muhim teoremlardan birini keltiramiz.

3.4.4-teorema. (Teylor teoremasi) Agar $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada golomorf bo'lsa, u holda D sohadagi ixtiyoriy $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset$

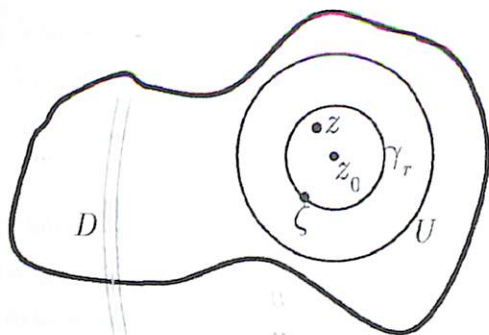
D markazi z_0 nuqtada bo'lgan doirada $f(z)$ funksiyani darajali qatorga yoyish mumkin:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (3.24)$$

Isbot. $z \in U$ nuqtani tayinlaymiz, so'ngra $|z - z_0| < r < R$ shartni qanoatlantiruvchi r sonni olib, $\gamma_r = \{\zeta \in D : |\zeta - z_0| = r\}$ aylanani qaraymiz (38-chizma). Koshining integral formulasiga ko'ra ushbu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

formula o'rinli bo'ladi.



38-chizma

$|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$ bo'lishini e'tiborga olib integral ostidagi $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ funksiyani geometrik progressiyaga yoyamiz:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (3.25)$$

Bu qatorning umumiy hadini quyidagicha baholash mumkin:

$$\left| \frac{(z - z_0)^n f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{M(r)}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n$$

bu yerda $M(r) = \max_{|\zeta - z_0|=r} |f(\zeta)|$. Ushbu

$$\frac{|z - z_0|}{r} = q < 1$$

munosabat o'rinli bo'lgani uchun Veyrshtross teoremasiga ko'ra (3.25) qator γ_r aylanada ζ bo'yicha tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. U holda (3.25) tenglikni γ_r bo'yicha hadlab integrallab, hosil bo'lgan tenglikning har ikkala tomonini $2\pi i$ ga bo'lib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

bu yerda

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.26)$$

bo'ladi. □

3.4.4-ta'rif. Koeffitsiyentlari (3.26) formula bilan aniqlanadigan (3.24) darajali qatorga $f(z)$ funksiyaning $z = z_0$ nuqta atrofidagi Teylor qatori deyiladi.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, Koshi teoremasiga ko'ra (3.26) formula bilan aniqlanadigan Teylor qatori koeffitsiyentlari γ_r aylana radiusiga bog'liq bo'lmaydi.

3.4.1-natija. (Koshi tengsizliklari) Agar $f(z)$ funksiya $\bar{U}_r = \{|z - z_0| \leq r\}$ doirada golomorf bo'lib, ∂U_r aylanada uning moduli M sonidan katta bo'lmasa, u holda $f(z)$ funksiyaning z_0 atrofidagi Teylor qatori koeffitsiyentlari uchun

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.27)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. Barcha $\zeta \in \partial U_r$ uchun $|f(\zeta)| \leq M$ bo'lganligi uchun (3.26) formuladan

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n}$$

bo'lishini hosil qilamiz. □

Koshi tengsizliklaridan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

3.4.5-teorema. (Liuvill) Agar $f(z)$ funksiya butun \mathbb{C} kompleks sonlar tekisligida golomorf va chegaralangan bo'lsa, u holda $f(z) = \text{const}$ bo'ladi.

Isbot. 3.4.4-teorema ko'ra $f(z)$ funksiya ixtiyoriy $\bar{U}_R = \{|z| \leq R\}$. ($R < \infty$) yopiq doirada Teylor qatoriga yoyiladi.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

bu qatorning koeffitsiyentlari R soniga bog'liq emas. Butun \mathbb{C} kompleks tekislikda $|f(z)| \leq M$ ekanligidan Koshi tengsizliklariga ko'ra

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

bo'lishini hosil qilamiz. Agar $R \rightarrow +\infty$ intilganda $n = 1, 2, \dots$ bo'lganda $c_n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. c_n koeffitsiyentlar R soniga bog'liq bo'lmaganligi uchun

$$f(z) \equiv c_0 \quad (c_0 = \text{const})$$

bo'ladi. □

Bu teoremani quyidagicha ham keltirish mumkin.

3.4.6-teorema. (Liuvill teoremasi). Agar $f(z) \in \mathcal{O}(\bar{\mathbb{C}})$ bo'lsa, u holda $f(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi.

Bu teoremaning o'rinli bo'lishi yuqoridagi Liuvill teoremasidan kelib chiqadi (mustaqil isbotlang).

Misol va masalalar

3.4.1-misol. Quyidagi funksional qatorlarning berilgan to'plamda tekis yaqinlashishini ko'rsating:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^{-2n}, \quad D = \{|z| \geq 1\}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-n}. \quad D = \{|z| \leq \rho < \frac{1}{2}\}.$$

3.4.2-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z^n - z^{n-1})$$

funksional qatorni $D = \{|z| < 1\}$ doirada tekis yaqinlashishga tekshiring.

3.4. TEYLOR QATORLARI

3.4.3-misol. Quyidagi berilgan misollarda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoyilmasida birinchi beshta hadini toping.

$$1. f(z) = e^{z \sin z}, \quad a = 0;$$

$$2. f(z) = (1+z)^z, \quad a = 0;$$

$$3. f(z) = e^z \ln(1+z), \quad a = 0;$$

$$4. f(z) = \sqrt{\cos z}, \quad a = 0, \quad \sqrt{1} = 1.$$

3.4.4-misol. Aytaylik, chegarasi chekli sondagi yopiq, bo'lakli-silli chiziqlardan iborat bo'lgan chegaralangan $D \subset \mathbb{C}$ soha berilgan bo'lib, $f(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lsin. $M = \max_{z \in D} |f(z)|$, z nuqtadan D sohaning chegarasigacha bo'lgan masofani ρ va D soha chegarasi to'liq uzunligini L bilan belgilaymiz. U holda D sohada ushbu

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{ML}{2\pi\rho^{n+1}}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishini isbotlang.

3.4.5-misol. Faraz qilaylik, $D = \{|z| < R\}$ bo'lib, $f(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lsin. Agar $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$ bo'lsa, u holda D sohada

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{MR}{(R-|z|)^{n+1}}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishini isbotlang.

3.5 Abel teoremasi. Koshi-Adamar formulasi

Oldingi paragraflarda golomorf funksiyalarni qatorga yoyish mumkinligini ko'rib chiqgandik. Endi bunga teskari masalani qaraylik: darajali qatorning yig'indisi golomorf funksiyani ifodalaydimi? Bu savolga javob berish uchun darajali qatorlarning matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan xossalari keltiramiz.

Ushbu

$$c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (3.28)$$

ko'rinishdagi darajali qator berilgan bo'lsin.

Dastlab quyidagi Abel teoremasini keltiramiz.

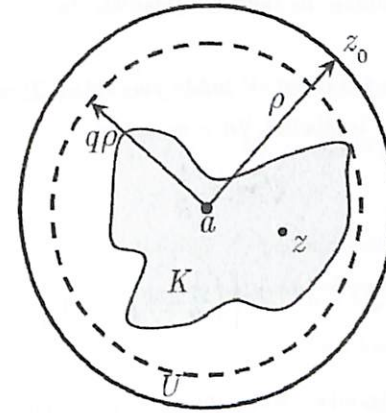
3.5.1-teorema. (Abel). Agar (3.28) darajali qator $z_0 \in \mathbb{C}$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (3.28) qator ushbu $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < |z_0-a|\}$ doirada absolyut yaqinlashuvchi va \mathbb{U} doirada kompakt yotuvchi ixtiyoriy $K \in \mathbb{U}$ to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra (3.28) qatorning z_0 nuqtada yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, qator yaqinlashuvchiligining zaruriy shartiga ko'ra bu nuqtada qatorning umumiy hadi chegaralangan bo'ladi, ya'ni $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ uchun $|c_n(z_0-a)^n| \leq M$ bo'ladi. Endi $z_0 \neq a$, ya'ni $|z_0-a| = \rho > 0$ deb olamiz, chunki aks holda \mathbb{U} doira bo'sh to'plam bo'ladi.

Aytaylik, $K \in \mathbb{U}$ bo'lsin, u holda $\forall z \in K$ uchun

$$\frac{|z-a|}{|z_0-a|} = \frac{|z-a|}{\rho} \leq q < 1$$

bo'ladi (39-chizma).



39-chizma

Natijada, $\forall z \in K$ va $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ uchun ushbu

$$|c_n(z-a)^n| \leq |c_n| \rho^n q^n \leq M q^n$$

munosabatga ega bo'lamiz. Demak, (3.28) qatorning har bir hadi yaqinlashuvchi $M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ qator hadlari bilan baholanyapti. U holda Veyershtross teoremasiga asosan (3.28) qator K to'plamda absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Teoremaning ikkinchi xulosasi isbotlandi. Endi ixtiyoriy $z \in \mathbb{U}$ nuqtani qaraymiz. Bu nuqta biror $\mathbb{U}' = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho', \rho' < \rho\}$ doirada yotadi. \mathbb{U}' doira \mathbb{U} doirada kompat yotganligi uchun teoremaning ikkinchi xulosasiga ko'ra (3.28) qator \mathbb{U}' da absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. \square

3.5.2-teorema. (Koshi-Adamar). Aytaylik, (3.28) darajali qator uchun

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} \quad (3.29)$$

bo'lsin (bu yerda $\frac{1}{0} = \infty$ va $\frac{1}{\infty} = 0$ deb hisoblaymiz). U holda (3.28) qator $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ doirada yaqinlashuvchi, $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{U}} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| > R\}$ to'plamda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Dastlab, ketma-ketlikning yuqori limiti ta'rifiga ko'ra, ya'ni $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ tenglikdan quyidagi ikkita xulosa kelib chiqishini eslatib o'tamiz:

1) Shunday $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma ketlik mavjudki $x_{n_k} \rightarrow A$ bo'ladi;

2) $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer topiladiki, $\forall n > n_0$ uchun $x_n < A + \varepsilon$ bo'ladi.

Aytaylik, $0 < R < +\infty$ bo'lsin. U holda yuqoridagi 2) xulosaga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer topiladiki, $\forall n > n_0$ uchun

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{R} + \varepsilon$$

bo'ladi va bundan

$$|c_n(z-a)^n| < \left\{ \left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right) |z-a| \right\}^n \quad (3.30)$$

bo'lishini topamiz.

Agar $|z-a| < R$ bo'lganda, ε sonni shunday yetarlicha kichik olish mumkinki,

$$\left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right) |z-a| \leq q < 1$$

bo'ladi. U holda (3.30) munosabatga ko'ra (3.28) darajali qatorning hadlari $n > n_0$ bo'lganda cheksiz kamayuvchi q^n geometrik progressiya hadlari bilan mojaran-talanadi. Bundan esa (3.28) darajali qator $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ doirada yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

Yuqori limitning 1) xossasiga ko'ra $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\left\{ \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \right\}$ qisman ketma-ketlik mavjudki, $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon$ bo'ladi. Bundan

$$|c_{n_k}(z-a)^{n_k}| > \left\{ \left(\frac{1}{R} - \varepsilon \right) |z-a| \right\}^{n_k} \quad (3.31)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Agar $|z-a| > R$ bo'lganda ε sonni shunday yetarlicha kichik olish mumkinki,

$$\left(\frac{1}{R} - \varepsilon \right) |z-a| > 1$$

bo'ladi. U holda (3.31) munosabatdan

$$|c_{n_k}(z-a)^{n_k}| > 1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, (3.28) qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, ya'ni

$$\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{U}} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| > R\}$$

to'plamda qator uzoqlashuvchi. Teoremani $R=0$ va $R=\infty$ hollarda ham o'rinli bo'lishini mustaqil isbotlang². \square

Odatda (3.29) formulaga *Koshi-Adamar* formulasi deyiladi.

3.5.1-izoh. (3.28) qator $\partial\mathbb{U} = \{|z-a|=R\}$ – aylana nuqtalarida yaqinlashishi ham, uzoqlashishi ham mumkin.

3.5.1-ta'rif. (3.28) darajali qatorning E yaqinlashish to'plamining $\overset{\circ}{E}$ ochiq yadrosiga³ (3.28) darajali qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

3.5.2-teoremadan quyidagi teorema o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

3.5.3-teorema. (3.28) darajali qatorning yaqinlashish sohasi $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ doiradan iborat bo'lib, bu doiraning radiusi (3.29) *Koshi-Adamar* formulasidan topiladi.

Demak, (3.28) darajali qatorning yaqinlashish sohasi doiradan iborat (agar bo'sh bo'lmasa) bo'lar ekan. Bu doira (3.28) qatorning yaqinlashish doirasi deyiladi va doiraning radiusi esa (3.28) qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi va yaqinlashish to'plamlariga doir bir qancha misollar keltiramiz.

3.5.1-misol. Quyidagi qatorlarning yaqinlashish sohaslarini toping:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n. \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} z^n. \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (nz)^n.$$

Yechish. *Koshi-Adamar* formulasiga ko'ra bu qatorlarning yaqinlashish radiuslari mos ravishda $\infty, 1$ va 0 ga teng. Shu sababli bu a) qatorning yaqinlashish sohasi \mathbb{C} kompleks tekislikdan iborat. b) qatorning yaqinlashish sohasi $\{|z| < 1\}$ – birlik doiradan iborat. c) qatorning yaqinlashish sohasi bo'sh to'plamdan iborat bo'ladi.

3.5.2-misol. Quyidagi qatorlarning yaqinlashish sohaslarini toping va sohaning chegarasida qatorlarni yaqinlashishga tekshiring.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} z^n. \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}. \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

²Bu hollarda *Koshi* alomatidan va yuqori limitning ta'rifidan foydalaning.

³Eslatma. To'plamning barcha ichki nuqtalaridan tuzilgan to'plamga, berilgan to'plamning ochiq yadrosi deyiladi.

Yechish. Koshi-Adamar formulasiga ko'ra bu qatorlarning yaqinlashish sohasi $\{|z| < 1\}$ – birlik doiradan iborat bo'ladi. Ammo yaqinlashish to'plami har xil bo'ladi. Haqiqatdan ham, $\{|z| = 1\}$ aylanada a) qatorning umumiy hadi nolga intilmaganligi uchun bu aylanada u uzoqlashuvchi. b) qator $\{|z| = 1\}$ aylananing ba'zi nuqtalarida yaqinlashuvchi (masalan $z = -1$ nuqtada), ba'zi nuqtalarida uzoqlashuvchi (masalan $z = 1$ nuqtada). c) qator hadlarining moduli $\{|z| = 1\}$ aylananing barcha nuqtalarida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qator hadlaridan oshmaganligi sababli (majoranta bo'lgani uchun) bu qator $\{|z| = 1\}$ aylanada yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi (3.28) darajali qatorning yig'indisining golomorfligi haqidagi teoremani keltiramiz.

3.5.4-teorema. Ushbu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (3.32)$$

darajali qatorning yig'indisi $f(z)$ bu qatorning yaqinlashish doirasida golomorf funksiya bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, (3.32) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $R > 0$ bo'lsin. (3.32) qatorning hosilasidan tuzilgan ushbu

$$c_1 + 2c_2(z-a) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} = \varphi(z) \quad (3.33)$$

qatorni qaraylik. Ushbu

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|c_n|}$$

tenglik o'rinli bo'lganligi uchun, (3.33) qator ham $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ doirada yaqinlashuvchi bo'ladi va bu doirada kompakt yotuvchi ixtiyoriy to'plamda tekis yaqinlashadi. Demak, $\varphi(z)$ funksiya \mathbb{U} doirada uzluksiz bo'ladi. (3.33) qator tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun bu doirada kompakt yotgan ixtiyoriy $\gamma \in \mathbb{U}$ yopiq silliq (yoki bo'lakli silliq) yo'l bo'yicha (3.33) qatorni hadlab integrallaymiz va 3.1.1-misolga ko'ra quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\int_{\gamma} \varphi(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{\gamma} (z-a)^{n-1} dz = 0.$$

Uzluksiz funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjudligi haqidagi 3.2.4-teoremaga berilgan 3.2.2 izohga ko'ra

$$\int_{[a,z]} \varphi(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{[a,z]} (\zeta-a)^{n-1} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

funksiya $z \in \mathbb{U}$ nuqtada hosilaga ega bo'ladi va bu hosila $\varphi(z)$ ga teng bo'ladi (bu yerda ham tekis yaqinlashishdan foydalanildi). U holda

$$f(z) = c_0 + \int_{[a,z]} \varphi(\zeta) d\zeta$$

funksiya ham ixtiyoriy $z \in \mathbb{U}$ nuqtalarda $f'(z) = \varphi(z)$ hosilaga ega bo'ladi. Demak, $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{U})$ bo'ladi. \square

Misol va masalalar

3.5.3-misol. Quyidagi darajali qatorlarning yig'indisini toping.

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}, \quad 3. \sum_{n=0}^{\infty} nz^n, \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}, \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n z^{2n}}{n!}.$$

3.5.4-misol. Ushbu

$$1 + z + 2^2 z^2 + 3^3 z^3 + \dots + n^n z^n + \dots$$

darajali qatorni yaqinlashishga tekshiring.

3.5.5-misol. Ushbu

$$1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{n^n} + \dots$$

darajali qatorni yaqinlashishga tekshiring.

3.5.6-misol.

$$z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^3} + \dots + \frac{z^n}{n^n} + \dots$$

qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

3.5.7-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n = z + \frac{2^2}{2!} z^2 + \frac{3^3}{3!} z^3 + \dots + \frac{n^n}{n!} z^n + \dots$$

qatorning yaqinlashish radiusini toping.

3.6 Golomorf funksiyalarning xossalari

Ushbu paragrafda darajali qator yig'indisining golomorfligi haqidagi teoremdan foydalanib, golomorf funksiyaning bir nechta xossalarini keltiramiz.

3.6.1-teorema. *Ixtiyoriy $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiyaning hosilasi ham D sohada golomorf bo'ladi.*

Isbot. Ixtiyoriy $z_0 \in D$ nuqta olib

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \in D$$

doirani qaraymiz. Golomorf funksiyani yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyish mumkinligi haqidagi 3.4.4-teoremaga ko'ra bu funksiyani U doirada yaqinlashuvchi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

darajali qatorga yoyiladi. Oldingi paragraflardan ma'lumki, bu funksiyaning hosilasi bo'lgan

$$f' = \varphi = c_1 + 2c_2(z - a) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$$

funksiya ham aynan shu U doirada yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyiladi. Darajali qator yig'indisi golomorfligi haqidagi 3.5.4-teoremaga ko'ra φ funksiya U doirada golomorf bo'ladi. Jumladan, $\varphi(z)$ funksiya z_0 nuqtada ham golomorf bo'ladi. z_0 nuqtaning ixtiyoriyligidan esa $\varphi \in \mathcal{O}(D)$ ekanligi kelib chiqadi. \square

Bu teoremdan bevosita, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lishi uchun zaruriy shart kelib chiqadi.

3.6.1-natija. *Agar D sohada uzluksiz bo'lgan f funksiya bu sohada F boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda $f \in \mathcal{O}(D)$ bo'ladi.*

Bundan tashqari yuqoridagi 3.6.1-teoremani takror qo'llash natijasida, quyidagi teorema kelib chiqadi.

3.6.2-teorema. *Ixtiyoriy $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiyaning istalgan tartibli hosilasi ham D sohada golomorf funksiya bo'ladi.*

Quyidagi teorema esa, biror f funksiyaning berilgan nuqta atrofidagi darajali qatorga yoyilmasi yagona ekanligini bildiradi.

3.6.3-teorema. *Agar f funksiya*

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

doirada

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (3.34)$$

darajali qatorga yoyilgan bo'lsa, u holda bu qaorning koeffitsiyentlari quyidagi

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

formula yordamida bir qiymatli aniqlanadi.

Isbot. Agar (3.34) yoyilmada dastlab $z = z_0$ desak, $c_0 = f(z_0)$ bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi qadamda (3.34) munosabatni hadlab differensiallaymiz:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \dots$$

va bu yerda ham $z = z_0$ desak, $c_1 = f'(z_0)$ ekanini topamiz. Bu jarayonni davom qildirib, ya'ni (3.34) munosabatni n marta differensiallasak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + c_{n+1}'(z - z_0) + \dots$$

va bu yerda ham $z = z_0$ desak,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

bo'lishini topamiz. \square

3.6.1-izoh. *3.6.3-teoremanni quyidagicha ham aytish mumkin: Har qanday yaqinlashuvchi darajali qator o'zining yig'indisining Teylor qatori bo'ladi.*

Bu (3.35) formuladan foydalanib, elementar funksiyalarni Teylor qatoriga yoyishimiz mumkin. Masalan,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Bu uchta yoyilma ham butun \mathbb{C} kompleks tekislikda o'rinli (ularning yaqinlashish radiusi $R = \infty$ ga teng).

Bu 3.6.3-teoremadagi (3.35) formula bilan, oldingi paragrafda yozilgan ushbu

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

formulalarni solishtirib, golomorf funksiyaning ixtiyoriy tartibli hosilasi uchun quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.36)$$

Endi golomorf funksiyaning istalgan tartibli hosilasi uchun ham Koshining quyidagi ko'rinishdagi integral formulasi o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{C}$ chegarasi silliq (yoki bo'lakli silliq) soha bo'lsin.

3.6.4-teorema. Agar $f(z) \in \mathcal{O}(\overline{D})$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $z \in D$ nuqta va $n = 1, 2, 3, \dots$ sonlar uchun ushbu

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (3.37)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda ∂D — D sohaning oriyentirlangan chegarasi.

Isbot. Ixtiyoriy $z \in D$ nuqta olamiz. $R > 0$ sonni shunday tanlaymizki, $\mathbb{U}_R = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| < R\} \Subset D$ bo'lsin. Ma'lumki, $f(z)$ funksiyaning \mathbb{U}_R doiradagi Teylor qatoridagi koeffitsiyentlari 3.4.4 va 3.6.3-teoremalarga asosan quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{U}_R} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \quad \text{va } c_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bu munosabatlardan

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{U}_R} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasiga ko'ra oxirgi tenglikda $\partial \mathbb{U}_R$ bo'yicha olingan integralni D sohaning ∂D oriyentirlangan chegarasi bo'yicha olingan integralga almashtirish mumkin. \square

Odatda (3.37) formula golomorf funksiya hosilasi uchun Koshi formulasi deyiladi.

Misol va masalalar

3.6.1-misol. Quyidagi $\int_{|z+3|=1} \frac{(z^2+3z^4+4z^2) dz}{(z+2)^2}$ integralni hisoblang.

3.6.2-misol. Ushbu

$$\int_{|z|=2} \frac{(z+1)}{z(z-1)^2(z-3)} dz$$

integralni hisoblang.

3.7 Morera teoremasi

Ushbu paragrafda kompleks analizda muhim teoremalardan biri bo'lgan Morera teoremasini keltiramiz.

3.7.1-teorema. (Morera teoremasi). Agar $f(z)$ funksiya D ($D \subset \mathbb{C}_z$) sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, bu sohada yotuvchi ixtiyoriy silliq (bo'lakli silliq) yopiq γ yo'l bo'yicha $f(z)$ funksiya olingan integral nolga teng bo'lsa

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

u holda $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $a \in D$ nuqtani olib, ushbu $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \subset D$ doirani qaraymiz. Boshlang'ich funksiya mavjudligi haqidagi 3.2.4-teoremadagi izohga ko'ra, $f(z)$ funksiya \mathbb{U} doirada ushbu

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta) d\zeta$$

ko'rinishdagi boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi. Boshlang'ich $F(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{U})$ bo'lishidan, golomorf funksiyaning hosilasi ham golomorf ekanligi haqidagi 3.6.1-teoremaga ko'ra $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{U})$ bo'ladi. Demak, $f(z)$ funksiya $a \in D$ nuqtada golomorf. $a \in D$ nuqtaning ixtiyoriyligidan $f(z)$ funksiyani D sohada golomorf ekanligi kelib chiqadi. \square

3.7.1-izoh. Yuqorida keltirilgan Morera teoremasi Koshi teoremasiga teskari teorema bo'lib, bu teoremadagi uzluksizlik sharti muhim, aks holda teoremaning xulosasi o'rinli bo'lmay qolishi mumkin. Haqiqatdan ham, agar $f(z)$ funksiyani quyidagicha

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{agar } z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}. \\ 1, & \text{agar } z = a \end{cases}$$

bo'lsa, u holda bu funksiyadan ixtiyoriy $\gamma \in \mathbb{C}$ yopiq silliq yo'l bo'yicha olingan integrali nolga teng, lekin bu funksiya golomorf emas.

Endi yuqoridagi isbotlangan tasdiqlardan foydalanib, golomorf funksiyaning quyidagi uchta ta'rifi teng kuchli (ekivalent) ekanligini keltiramiz. Aytaylik, $f(z)$ funksiya $a \in \mathbb{C}$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

3.7.2-teorema. Golomorf funksiya uchun quyidagi uchta ta'rif teng kuchlidir:

(R)-Riman ma'nosida: Agar $f(z)$ funksiya $a \in \mathbb{C}$ nuqtaning biror \mathbb{U} atrofida \mathbb{C} differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya a nuqtada golomorf deyiladi;

(C)-Koshi ma'nosida: Agar $f(z)$ funksiya $a \in \mathbb{C}$ nuqtaning biror \mathbb{U} atrofida uzluksiz bo'lib, bu funksiyadan shu atrofda yotuvchi ixtiyoriy yopiq silliq (yoki bo'lakli silliq) chiziq bo'yicha integral nolga teng bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya a nuqtada golomorf deyiladi;

(W)-Veyersstrass ma'nosida: Agar $f(z)$ funksiya $a \in \mathbb{C}$ nuqtaning biror \mathbb{U} atrofida yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyilsa, u holda $f(z)$ funksiya a nuqtada golomorf deyiladi.

Isbot. Teoremaning tasdig'ini isbotlash uchun quyidagi implikatsiyadan foydalanamiz: (R) \Rightarrow (C) o'rinli bo'lishi, Koshi teoremasidan, (C) \Rightarrow (W) o'rinli bo'lishi, golomorf funksiyani yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyish mumkinligi haqidagi 3.4.4-teoremadan, (W) \Rightarrow (R) o'rinli bo'lishi, darajali qator yig'indisining golomorfliqi haqidagi 3.5.4-teoremaga asosan kelib chiqadi. \square

3.8 Golomorf funksiyaning nollari

3.8.1-ta'rif. $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada berilgan bo'lib, $a \in D$ bo'lsin. Agar $f(a) = 0$ bo'lsa, $a \in D$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli deyiladi.

Golomorf funksiyaning nollari haqida quyidagi tasdiq o'rinli.

3.8.1-teorema. Agar $a \in \mathbb{C}$ nuqta, bu nuqtaning hech bir atrofida aynan nolga teng bo'lmagan va a nuqtada golomorf bo'lgan $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsa, u holda shunday $n \in \mathbb{N}$ natural son topiladiki, a nuqtaning biror atrofida ushbu

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. bu yerda $\varphi(z)$ — a nuqtaning biror atrofida golomorf va shu atrofda noldan farqli funksiya.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $f(z)$ funksiya a nuqtaning biror \mathbb{U} atrofida Teylor qatoriga yoyiladi. Bu qatorning ozod hadi $c_0 = f(a) = 0$, barcha hadi nolga teng emas, chunki \mathbb{U} atrofda $f(z) \not\equiv 0$. Shuning uchun eng kichik nomerli $c_n \neq 0$ koeffitsiyent topiladi. U holda, $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi Teylor qatori quyidagicha bo'ladi:

$$f(z) = c_n(z - a)^n + c_{n+1}(z - a)^{n+1} + \dots$$

agar biz quyidagicha

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z - a) + \dots$$

belgilash olsak, u holda bu munosabatdagi qator ham \mathbb{U} doirada yaqinlashadi. Demak, bu qatorning yig'indisi $\varphi(z)$ funksiya \mathbb{U} doirada golomorf bo'lib, $\varphi(a) = c_n \neq 0$ va \mathbb{U} doirada

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$$

bo'ladi. $\varphi(z)$ funksiya \mathbb{U} doirada uzluksiz bo'lganligi uchun \mathbb{U} doirani shunday tanlash mumkinki, $\varphi(z)$ funksiya \mathbb{U} doirada noldan farqli bo'ladi. \square

Bu teoremadan a nuqtaning \mathbb{U} atrofida $f(z)$ funksiyaning a dan boshqa noli yo'q ekanligi kelib chiqadi. Demak, aynan nolga teng bo'lmagan golomorf funksiyaning nollari yakkalangan (diskret) bo'lar ekan.

3.9.4-misol.

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

funksiya $O(0,0)$ nuqtaga intiluvchi cheksiz ko'p sondagi $z_k = \frac{1}{k\pi}$ $k = 1, 2, \dots$ nuqtalarda 0 ga aylanadi, lekin $f(z) \neq 0$. Bu fakt yagonalik teoremasiga zid emasmi?

3.9.5-misol. Aytaylik, davriy $f(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtani o'z ichida saqlovchi birorta D sohada golomorf bo'lsin. U holda $f(z) \equiv \text{const}$ ekanligini isbotlang.

3.9.6-misol. Quyidagi misollardagi a_n ($n = 1, 2, \dots$) ketma-ketliklar uchun $\{|z| < 1\}$ birlik doirada golomorf bo'lgan va $f\left(\frac{1}{n}\right) = |a_n|$ shartlarni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?

$$a) a_n = (-1)^n; \quad b) a_n = \frac{n+1}{n}.$$

3.9.7-misol. Ushbu $f(z) = f(2z)$ funksional tenglama $z = 0$ nuqtada golomorf va o'zgarmasdan farqli bo'lgan yechimga ega bo'lishi mumkin emasligini isbotlang.

3.10 Veyershtrass teoremasi

Aytaylik, bizga $D \subset \mathbb{C}$ sohada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

funksional qator berilgan bo'lsin.

3.10.1-teorema. (Veyershtrass). Agar

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad (3.38)$$

funksional qatorning har bir $f_n(z)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) hadi D sohada golomorf bo'lib, bu qator D sohada kompakt yotuvchi ixtiyoriy to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

1) bu funksional qator yig'indisi $f(z) \in O(D)$ bo'ladi;

2) bu funksional qatorni D sohaning ixtiyoriy nuqtasida istalgan marta hadlab differensiallash mumkin:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

Isbot. D sohada yotuvchi ixtiyoriy z_0 nuqtani olib, uning shunday $\mathbb{U}_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C}_z : |z - z_0| < \delta, \delta > 0\}$ atrofni qaraymizki, $\overline{\mathbb{U}_\delta(z_0)} \subset D$ bo'lsin. Teorema shartiga ko'ra (3.38) qator $\mathbb{U}_\delta(z_0)$ to'plamda tekis yaqinlashuvchi. Berilgan (3.38) qatorning har bir $f_n(z)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) hadi D sohada golomorf bo'lgani uchun u $\mathbb{U}_\delta(z_0)$ to'plamda ham golomorf bo'ladi. Binobarin $f_n(z)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) funksiyalar ketma-ketligining har bir hadi $\mathbb{U}_\delta(z_0)$ uzluksiz, u holda qator yig'indisi $f(z)$ funksiya ham $\mathbb{U}_\delta(z_0)$ doirada uzluksiz bo'ladi. Endi $\mathbb{U}_\delta(z_0)$ da yotuvchi yopiq silliq γ yo'lini olaylik ($\gamma \subset \mathbb{U}_\delta(z_0)$), (3.38) qatorni γ chiziq bo'yicha hadlab integrallab topamiz:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz. \quad (3.40)$$

Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.41)$$

bo'ladi. (3.40) va (3.41) munosabatlardan

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Morera teoremasidan foydalanib $f(z)$ funksiyaning $\mathbb{U}_\delta(z_0)$ da va demak, z_0 nuqtada golomorf bo'lishini topamiz. Qaralayotgan z_0 nuqta D sohaning itiyoriy nuqtasi bo'lganligidan $f(z)$ funksiyaning D sohada golomorf bo'lishi kelib chiqadi. Teoremaning 2) qismini isbotlash uchun, ixtiyoriy $z_0 \in D$ nuqtani olib, ushbu $\mathbb{U} = \{|z - z_0| < r\} \Subset D$ doirani qaraymiz va $\gamma_r = \partial\mathbb{U}$ deb belgilab olamiz. U holda hosilalar uchun Koshi integral formulasiga (3.6.4-teoremaga) ko'ra quyidagi

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.42)$$

tenglik o'rinni bo'ladi. Teorema shartiga ko'ra, ushbu

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \quad (3.43)$$

qator \cup doirada tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun (bu qator (3.38)-qatordan ixtiyoriy $z \in \gamma_r$ nuqtalarda moduli $\frac{1}{r^{n+1}}$ songa teng bo'lgan ko'paytuvchiga farq qiladi), (3.43) ifodani (3.40) formulaga qo'yib, hadma-had integrallashimiz mumkin. Endi (3.42) formulani $f_n(z)$ funksiyalarga qo'llab, quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_n(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0).$$

z_0 nuqta ixtiyoriyligidan (3.39) tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Teorema to'liq isbot bo'ldi. \square

3.11 Loran qatorlari

Biz golomorf funksiyani darajali qatorga (Teylor) yoyish mumkinligini ko'rgandik. Bu paragrafda golomorf funksiyalarni umumiy bo'lgan qatorga, ya'ni golomorf funksiyani darajali manfiy va musbat bo'lgan darajali qatorga yoyish masalasini ko'rib chiqamiz. Aytaylik, $f(z)$ funksiya $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ halqada aniqlangan bo'lsin.

3.11.1-teorema. (Loran) Agar $f(z) \in \mathcal{O}(V)$ bo'lsa u holda bu funksiyaning $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ halqada yaqinlashuvchi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (3.44)$$

qatorga yoyish mumkin, bu yerda c_n koeffitsiyentlar kompleks sonlar bo'lib,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad r < \rho < R. \quad (3.45)$$

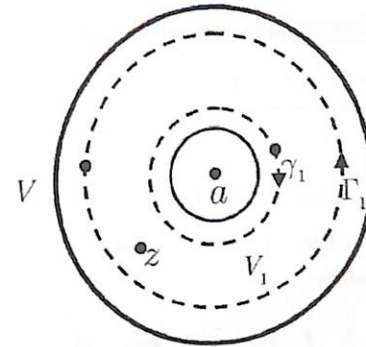
formula orqali ifodalangani.

Isbot. Ixtiyoriy $z \in V$ nuqtani olib, $V_1 = \{\xi \in \mathbb{C} : r_1 < |\xi - a| < R_1\}$ halqani qaraymiz, bunda $r < r_1 < R_1 < R$ bo'lib, $z \in V_1$. Ravshanki $V_1 \Subset V$ bo'ladi (40-chizma). Koshining integral formulasiga asosan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (3.46)$$

bo'ladi, bu yerda $\partial V_1 = \Gamma_1 \cup \gamma_1^-$ — chegara V_1 halqaning oriyentirlangan chegarasi, $\Gamma_1 = \{|\xi - a| = R_1\}$, $\gamma_1 = \{|\xi - a| = r_1\}$. U holda (3.46) integralni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{-\xi + z} d\xi \quad (3.47)$$



40-chizma

Endi (3.47) tenglikning o'ng tomonidagi har bir qo'shiluvchini darajali qatorga yoyamiz. Ravshanki, $\xi \in \Gamma_1$ nuqtalarda

$$\left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| = \frac{|z - a|}{R_1} \leq q < 1$$

bo'lgani uchun birinchi integralning yadrosini quyidagi qatorga yoyamiz.

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z - a}{\xi - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}. \quad (3.48)$$

(3.48) qator ξ o'zgaruvchi bo'yicha Γ_1 aylana absolyut va tekis yaqinlashadi. Bu qatorni $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ ifodaga ko'paytirib, Γ_1 bo'yicha hadlab integrallaymiz (chunki $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ funksiya modul jihatdan Γ_1 aylana chegaralangan bo'lib u tekis yaqinlashishga halaqit qilmaydi):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n. \quad (3.49)$$

bu yerda

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.50)$$

Xuddi shunga o'xshash, $\xi \in \gamma_1$ nuqtalarda

$$\left| \frac{\xi-a}{z-a} \right| = \frac{|\xi-a|}{r_1} \leq q_1 < 1$$

bo'lgani uchun ikkinchi integralning yadrosini quyidagicha qatorga yoyamiz:

$$\frac{1}{-\xi+z} = \frac{1}{(z-a) \left(1 - \frac{\xi-a}{z-a}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\xi-a)^{n-1}}{(z-a)^n}. \quad (3.51)$$

(3.51) qator γ_1 aylanada tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, bu qatorni yana $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ miqdorga ko'paytirib, γ_1 bo'yicha hadlab integrallaymiz va quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{-\xi+z} d\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}. \quad (3.52)$$

bu yerda

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi-a)^{n-1} d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.53)$$

Agar bir $c_n = d_{-n}$ almashtirish bajarsak, n holda (3.53) formulani quyidagicha yozamiz:

$$c_n = d_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi-a)^{-n-1} d\xi, \quad n = -1, -2, \dots \quad (3.54)$$

Demak, yuqoridagi (3.52) yoyilma ushbu ko'rinishda bo'ladi.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{-\xi+z} d\xi = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n. \quad (3.55)$$

Shunday qilib, (3.49) va (3.55) yoyilmalarga asosan biz ushbu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

yoyilmaga ega bo'ldik, bu yoyilmaning koeffitsiyentlari (3.50) va (3.54) formula yordamida hisoblanadi. Ammo, Koshi teoremasiga ko'ra⁴ bu koeffitsiyentlarni ushbu

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad r < \rho < R.$$

formula yordamida topish mumkin. \square

3.11.1-ta'rif. Koeffitsiyentlari (3.45) formula bilan ifodalanuvchi (3.44) qatorga $f(z)$ funksiyaning $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ -halqadagi Loran qatori deb aytiladi.

Ravshanki,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Loran qatori quyidagi ikkita

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (3.56)$$

va

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n \quad (3.57)$$

qatorlarning yig'indisidan iborat bo'ladi. Odatda (3.56) qator Loran qatorining to'g'ri qismi, (3.57) qator esa Loran qatorning bosh qismi deyiladi. Loran qatori

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

to'g'ri qismining yaqinlashish sohasi Abel teoremasiga ko'ra $\{|z-a| < R\}$ doiradan iborat bo'lib, yaqinlashish radiusi ushbu

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (3.58)$$

Koshi-Adamar formulasiga ko'ra topiladi. Shuningdek, (3.56) qator $\{|z-a| < R_1 \ (R_1 < R)\}$ doirada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

⁴Ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshining integral teoremasiga binoan (3.50) va (3.54) formulalarda integrallash chiziqlari sifatida $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho\}$ aylanani olish mumkin, chunki bunday integrallarning qiymati aylana radiusiga bog'liq emas

Loran qatorining bosh qismi bo'lgan ushbu

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$$

qatorida

$$\omega = \frac{1}{z-a}$$

almashtirish bajarilsa, u holda bu qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\omega^n$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu qator Abel teoremasiga ko'ra $\{|\omega| < \frac{1}{r}\}$ doirada yaqinlashuvchi bo'lib, yaqinlashish radiusi Koshi-Adamar formulasiga ko'ra

$$r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} \quad (3.59)$$

bo'ladi. Demak,

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$$

qator $\{|z-a| > r\}$ sohada yaqinlashuvchi bo'ladi. Yuqoridagi mulohazalarga asoslanib quyidagi xulosalarga kelimiz.

1-hol. Agar $r \geq R$ bo'lsa, Loran qatorining yaqinlashish sohasi bo'sh to'plandan iborat.

2-hol. $r < R$ bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Loran qatorining yaqinlashish sohasi $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ -halqadan iborat bo'ladi va bu yerdagi R, r -radiuslar mos ravishda (3.58) va (3.59) formulalar orqali hisoblanadi.

Agar $f(z)$ funksiyaning Loran qatori

$$V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

halqada yaqinlashuvchi bo'lsa, Abel teoremasiga ko'ra qator

$$V_1 = \{z \in \mathbb{C}_2 : r_1 \leq |z-a| \leq R_1\}, \quad (r < r_1 < R_1 < R)$$

yopiq to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Veyershtress teoremasiga ko'ra Loran qatorining yig'indisi $f(z)$ funksiya

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

halqada golomorf bo'ladi.

3.11.1 Loran qatorining yagonaligi

Biz

$$V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

halqada golomorf bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiyaning

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Loran qatoriga yoyilishini ko'rdik. Ravshanki, $f(z)$ funksiyaning Loran qatori (Teylor qatori singari) o'z koeffitsiyentlari

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

bilan to'liq aniqlanadi. Endi $f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasida c_n koeffitsiyentlar yagona holda aniqlanishini, ya'ni $f(z)$ funksiya turli usullar bilan Loran qatoriga yoyilganda ham koeffitsiyentlar har doim bir xil bo'lishini ko'rsatamiz.

3.11.2-teorema. Agar $f(z)$ funksiya $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ halqada (3.44) qator yig'indisi sifatida yoyilsa, u holda bu qatorning koeffitsiyentlari (3.45) formula bilan aniqlanadi.

Isbot. Ixtiyoriy $\gamma = \{|z-a| = \rho\}$ ($r < \rho < R$) aylanani qaraymiz. Ushbu

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

qator va bu tenglikning har ikki tomonini $(z-a)^{-n-1}$ ifodaga ko'paytirishdan hosil bo'lgan

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^{k-n-1}$$

qator γ aylanada tekis yaqinlashadi. Hosil bo'lgan qatorni γ aylana bo'yicha hadlab integrallab,

$$\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^k dz = \begin{cases} 0, k \neq -1 \\ 2\pi i, k = -1 \end{cases}$$

tenglikdan foydalanib, ushbu

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

tenglik o'rinli bo'lishini topamiz. Bu esa teoremani isbotlaydi.

□

3.11.1-izoh. *Funksiyalarni Loran qatorga yoyish masalasi uning c_n koeffitsiyentlarini aniqlash bilan hal qilinadi. Bu c_n koeffitsiyentlar integrallarni hisoblashlar orqali topiladi. Ko'pincha bunday integrallarni hisoblash qiyin bo'ladi. Yuqoridagi teorema funksiyalarni Loran qatoriga yoyishda boshqa usullardan foydalanish imkoniyatini yaratadi. Shuning uchun funksiyalarni Loran qatoriga yoyishda turli usullardan foydalanish mumkin bo'ladi.*

3.11.1-misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

funksiyani quyidagi $V_1 = \{0 < |z| < 1\}$, $V_2 = \{1 < |z| < 2\}$ va $V_3 = \{2 < |z| < \infty\}$ halqalarda Loran qatoriga yoying.

Yechimi. Dastlab funksiyani ushbu

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)} \quad (3.60)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Endi bu funksiyani V_1 halqada Loran qatoriga yoyish uchun yuqoridagi (3.60)-yig'indining birinchi qo'shiluvchisi quyidagicha

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (3.61)$$

qatorga yoyiladi. Bu (3.61) qator $\{|z| < 2\}$ doirada yaqinlashadi. (3.60)-yig'indining ikkinchi qo'shiluvchisi esa quyidagicha

$$-\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (3.62)$$

qatorga yoyilib bu qator $\{|z| < 1\}$ doirada yaqinlashuvchi. Bulardan berilgan $f(z)$ funksiyani V_1 halqadagi Loran qatori quyidagicha ko'rinishda bo'lishini hosil qilamiz:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n. \quad (3.63)$$

Demak, (3.63)-yoyilmada z o'zgaruvchining faqat musbat darajalari qatnashgani uchun $f(z)$ funksiyani V_1 halqadagi Loran qatoriga yoyilmasi Teylor qatoridan iborat bo'lar ekan.

Endi $f(z)$ funksiyani V_2 halqada qatorga yoyishimiz uchun (3.60) formuladagi birinchi yig'indini (3.61) ko'rinishda qatorga yoyib, ikkinchi qo'shiluvchini esa quyidagicha

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} \quad (3.64)$$

qatorga yoyamiz.

Bu qator $\{|z| > 1\}$ sohada yaqinlashuvchi. Bulardan $f(z)$ funksiyani V_2 halqadagi Loran qatori ushbu

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (3.65)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Nihoyat, $f(z)$ funksiyani V_3 halqada Loran qatoriga yoyishimiz uchun esa, (3.60) tenglikning birinchi qo'shiluvchisini quyidagicha

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad (3.66)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu (3.66) qator esa sa $\{|z| > 2\}$ sohada yaqinlashuvchi. Ikkinchi qo'shiluvchini esa (3.64) ko'rinishda qatorga yoyamiz. Bulardan $f(z)$ funksiyani V_3 halqadagi Loran qatori ushbu

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n. \quad (3.67)$$

ko'rinishda bo'ladi.

3.11.3-teorema. (Koshi tengsizliklari) Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ halqada golomorf bo'lib,

$$\max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| = M, \gamma_\rho = \{|z - a| = \rho\}, r < \rho < R$$

bo'lsin. U holda $f(z)$ funksiyaning V halqadagi Loran qatori

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

koeffitsiyentlari uchun ushbu

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (3.68)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, Loran qatori koeffitsiyentlari uchun

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - a| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

bo'lishini e'tiborga olib,

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - a| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - a| = \rho} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - a|^{n+1}} |d\xi| \leq \frac{M}{2\pi \rho^{n+1}} \cdot 2\pi \rho = \frac{M}{\rho^n}$$

bo'lishini topamiz. Demak, ushbu

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

tengsizliklar o'rinli. \square

Bu (3.68) tengsizliklar Koshi tengsizliklari deyiladi.

3.11.2 Loran va Furiye qatorlari orasidagi bog'lanish haqida

Har qanday yaqinlashuvchi Loran qatorini Furiye qatori sifatida qarash mumkin. Masalan, agar $f(z)$ funksiya $V = \{1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ halqada

golomorf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning Loran qatori n -koeffitsiyenti c_n ni quyidagicha yozish mumkin:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} f(\xi) \xi^{-(n+1)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt.$$

Ravshanki, c_n koeffitsiyent $\varphi(t) = f(e^{it})$ funksiyaning $[0, 2\pi]$ kesmadagi Furiye qatori n -koeffitsiyenti bilan ustma-ust tushadi. Loran qatorining xossasidan $f(e^{it})$ funksiyaning Furiye qatori bu funksiya $[0, 2\pi]$ kesmada tekis yaqinlashadi. Umuman olganda shunday Furiye qatori topiladiki, u biror funksiyaning Loran qatori bo'lmasligi mumkin. Haqiqatdan ham har qanday $\varphi \in L^1(0, 2\pi)$ funksiya uchun uning Furiye koeffitsiyentlarini quyidagi formula bilan aniqlash mumkin:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} dt.$$

Ma'lumki, agar $\varphi \in C^2(0, 2\pi)$ bo'lib, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ funksiyalar 0 va 2π nuqtalarda bir xil qiymat qabul qilsa, u holda bu funksiyaning quyidagi Furiye qatori

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

$[0, 2\pi]$ kesmada $\varphi(t)$ funksiya absolyut va tekis yaqinlashadi. Lekin ushbu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Loran qatorining biror $\{1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$ halqada yaqinlashishi uchun $\varphi(t)$ funksiyaning analitik bo'lishi zarur.

Misol va masalalar

3.11.2-misol. Quyidagi $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3iz - 2}$ funksiyaning $a = 2i$ nuqtaning atrofida Loran qatoriga yoying va qatorning yaqinlashish sohasini toping.

3.11.3-misol. Quyidagi $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ funksiyaning $V = \{0 < |z-2| < 1\}$ halqada Loran qatoriga yoying.

3.12 Yakkalangan maxsus nuqtalar va ularning turlari

Ushbu paragrafda golomorflilik sharti buziladigan nuqta (maxsus nuqta) atrofida funksiya xossalarini o'rganamiz.

3.12.1-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $a \in \overline{\mathbb{C}}$ nuqtaning biror o'yilgan atrofida golomorf bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ uchun yakkalangan maxsus nuqta deyiladi (bu yerda $a \in \mathbb{C}$ nuqtaning o'yilgan atrofi deganda $\{0 < |z - a| < r\}$ to'plam tushuniladi, $a = \infty$ nuqta uchun $R < |z| < \infty$ halqa tushuniladi).

3.12.1-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{z-i}$ funksiyaning qarag'lik. Ravshanki, bu funksiya $\{0 < |z - i| < r\}$ sohada golomorf, $a = i$ nuqta $\frac{1}{z-i}$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi.

3.12.2-misol. Ushbu $f(z) = e^z$ funksiya $\{z \in \mathbb{C} : R < |z| < \infty\}$ sohada golomorf. $z = \infty$ nuqta e^z funksiya uchun yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

Endi yakkalangan maxsus a nuqta atrofida $f(z)$ funksiyaning xususiyatlariga qarab, bu yakkalangan maxsus nuqtalarni turlarga ajratamiz.

3.12.2-ta'rif.

(I) Agar ushbu limit $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ mavjud va chekli bo'lsa, a nuqtaga chetlatilishi mumkin (qutilib bo'ladigan yoki bartaraf etiladigan) bo'lgan maxsus nuqta deyiladi;

(II) Agar ushbu limit $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ bo'lsa, a nuqtaga qutb maxsus nuqta (yoki qutbi) deyiladi;

(III) Agar ushbu limit $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ mavjud bo'lmasa, u holda a nuqtaga muhim (yoki o'ta muhim) maxsus nuqta deyiladi.

Yakkalangan maxsus nuqtalarga bir qancha misollar keltiraylik.

3.12.3-misol. Ushbu $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ funksiya uchun $z = 0$ nuqta chetlatilishi mumkin bo'lgan maxsus nuqtadir. Chunki,

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

ekanligidan ushbu

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

munosabat o'rinni.

3.12.4-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{z-1}$ funksiya $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ to'plamda golomorf, $z = 1$ nuqta bu funksiya uchun yakkalangan maxsus nuqta bo'lib

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-1} = \infty$$

bo'lganligi sababli bu nuqta $f(z) = \frac{1}{z-1}$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi bo'ladi.

3.12.5-misol. Ushbu $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiya uchun $z = 0$ nuqta muhim maxsus nuqta, chunki $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ mavjud emas.

Haqiqatdan ham, quyidagi

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z=x, x>0}} e^{\frac{1}{z}} = +\infty, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z=x, x<0}} e^{\frac{1}{z}} = 0$$

mulohazalarga asosan, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ mavjud emas.

3.12.1-izoh. Funksiyaning yakkalanmagan maxsus nuqtalari ham mavjud bo'lishi mumkin.

Quyida yakkalanmagan maxsus nuqtalarga misollar keltiramiz:

3.12.6-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{z}{n}}$ funksiya uchun $z_n = \frac{1}{n}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) nuqtalar qutb maxsus nuqtalardir. Ammo $z = 0$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun yakkalanmagan maxsus nuqtadir, bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida funksiyaning qutb maxsus nuqtalari yotadi, ya'ni $z = 0$ nuqta qutb nuqtalar to'plamining limit nuqtasi bo'ladi.

3.12.7-misol. Ushbu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ funksiyaning (darajali qator yig'indisining) maxsus nuqtalarini toping.

Bu qatorga Koshi-Adamar formulasini qo'llasak, ixtiyoriy n uchun $c_n = 1$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$, $R = 1$ bo'ladi, ya'ni qator $\{|z| < 1\}$ doirada yaqinlashuvchi. Shuning uchun $f(z)$ funksiya birlik doirada golomorf. Tuzilishiga ko'ra $x \in \mathbb{R}$ bo'lsa,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} > \sum_{n=0}^N x^{2^n}$$

tengsizlik ixtiyoriy N natural son uchun o'rinlidir. Bu tengsizlikdan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

funksiya uchun $\lim_{z \rightarrow -1} f(z) = +\infty$ ekanligi, ya'ni $f(z)$ funksiya uchun $z = 1$ nuqta maxsus nuqta bo'ladi. Shuningdek, ushbu

$$f(z) = z^2 + f(z^2)$$

tenglikdan $\lim_{z \rightarrow -1} f(z) = \infty$ ekanligi, ya'ni $z = -1$ nuqta ham $f(z)$ funksiya uchun maxsus nuqta ekanligi kelib chiqadi. Endi yuqoridagi qonuniyatlarni takrorlab

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z^2) + z^2 = z^2 + f(z^2) = f(z^2) = 1 + z^4 + z^8 + \dots = f(z) - z^2 = \\ &= z^2 + z^4 + f(z^4) \end{aligned}$$

ushbu

$$f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$$

munosabat o'rinli ekanidan

$$\lim_{z \rightarrow \pm i} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow -i} f(z) = \infty$$

bo'lishini topamiz, ya'ni $z = \pm i$ nuqtalar ham $f(z)$ funksiya uchun maxsus nuqta ekanligi kelib chiqadi. Umuman olganda $f(z)$ funksiya uchun

$$f(z) = z^2 + \dots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$$

tenglik o'rinli bo'lishidan, ushbu

$$\lim_{z \rightarrow e^{\frac{2\pi i k}{2^n}}} f(z) = \infty, \quad (k = 0, 1, \dots, 2^n - 1)$$

bo'lishi va

$$z_n = e^{\frac{2\pi i k}{2^n}}, \quad (k = 0, 1, \dots, 2^n - 1)$$

nuqtalar ham maxsus nuqta bo'lishi kelib chiqadi. Bu z_n nuqtalar to'plami $|z| = 1$ aylananing hammasi joyda zich bo'lgan to'plamni tashkil etadi, ya'ni ular yakalanmagan. Shuning uchun $|z| = 1$ aylananing barcha nuqtalari $f(z)$ funksiya uchun maxsus nuqtalardir (bu birlik aylana funksiya uchun maxsus nuqta bo'ladi).

3.12.1 Maxsus nuqtalar va Loran qatori orasidagi bog'lanishlar

Yakkalangan maxsus nuqta turlari bilan maxsus nuqta atrofidagi Loran qatori uzviy bog'langan.

3.12.1-teorema. $a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun, bartaraf etiladigan (qutilib bo'ladigan) maxsus nuqta bo'lishi uchun $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi Loran qatorining bosh qismi mavjud bo'lmashligi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Aytaylik, a nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lsin. U holda $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ (A -chekli) bo'lib a nuqtaning shunday $\{0 < |z - a| < R\}$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f(z)$ funksiya chegaralangan bo'ladi, ya'ni $|f(z)| \leq M$ ($M > 0$) bo'ladi. $0 < \rho < R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ρ sonni olaylik, u holda Koshi tengsizliklariga ko'ra Loran qatori koeffitsiyentlari uchun

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Agar $n = -1, -2, \dots$ bo'lib, $\rho \rightarrow 0$ intilganda $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{M}{\rho^n} = 0$ bo'lishini inobatga olsak,

$$c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = \dots = c_{-n} = 0$$

bo'lishini topamiz, ya'ni Loran qatorining bosh qismi bo'lmashini topamiz.

Yetarliligi. Aytaylik, $f(z)$ funksiya a nuqta atrofidagi Loran qatoriga yoyilmasining bosh qismi mavjud bo'lmasin.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = c_0 + c_1 (z - a) + c_2 (z - a)^2 + \dots$$

Bu tenglikdan $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $z = a$ bartaraf etiladigan maxsus nuqta ekan. \square

Yuqoridagi teoremaning isbotiga asosanib bu teoremani quyidagicha ham keltirish mumkin.

3.12.2-teorema. $a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun, bartaraf etiladigan (qutilib bo'ladigan) maxsus nuqta bo'lishi uchun $f(z)$ funksiyaning shu a nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremaning isboti 3.12.1-teorema isboti kabidir.

3.12.2-izoh. Bu $a \in \mathbb{C}$ bartaraf etiladigan maxsus nuqtada $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$ deb olib, ya'ni funksiyani uzluksiz funksiyagacha davom qildirsak, u holda $f(z)$ funksiya a nuqtada golomorf bo'ladi, bunda funksiyaning a nuqtadagi maxsusligi bartaraf etiladi. Shuning uchun bu bartaraf etiladigan maxsus nuqtani $f(z)$ funksiyaning to'g'ri nuqtasi deb ham qarash mumkin (ya'ni bu nuqta funksiyaning maxsus nuqtasi emas deb qarash mumkin).

3.12.3-teorema. $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasi uning qutb maxsus nuqta bo'lishli uchun $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqta atrofida Loran qatori bosh qismida chekli sondagi noldan farqli hadlarining bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Aytaylik, a qutb maxsus nuqta bo'lsin: $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. U holda, a nuqtaning shunday o'yilgan atrofi topiladiki, bu atrofda $f(z)$ golomorf bo'ladi va noldan farqli bo'ladi. Bu yerda $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ golomorf va $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0$ bo'ladi. Demak, a nuqtani $\varphi(z)$ funksiya uchun bartaraf etiladigan maxsus nuqta yoki noli deb ham qarash mumkin. U holda, a nuqta atrofida $\varphi(z)$ funksiyaning qatoriga yoysak, $b_0 = 0$ bo'ladi. Birinchi uchragan noldan farqli koeffitsiyent b_N bo'lsin, ya'ni

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{N-1} = 0, \quad b_N \neq 0$$

bo'lsin, Demak, bu $\varphi(z)$ funksiya uchun ushbu

$$\varphi(z) = b_N(z-a)^N + b_{N+1}(z-a)^{N+1} + \dots$$

yoyilma o'rinli bo'ladi. Bundan esa, $f(z)$ funksiya uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{b_N(z-a)^N + b_{N+1}(z-a)^{N+1} + \dots} = \\ &= \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots} \end{aligned}$$

Bu yerdagi, ikkinchi ko'paytmaning maxrajidagi $b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots$ funksiya darajali qatorning yig'indisi bo'lgani uchun, u a nuqta atrofida golomorf (darajali qatorning yig'indisining golomorfligi haqidagi 3.5.4-teoremaga ko'ra) va bu

nuqtada noldan farqli. Demak, ikkinchi ko'paytuvchi

$$\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots}$$

a nuqtaning biror atrofida golomorf. U holda, uni a nuqtaning biror atrofida Teylor qatoriga yoyishimiz mumkin

$$\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots} = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \dots \quad \left(c_{-N} = \frac{1}{b_N} \neq 0 \right).$$

Natijada, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-a)^N} (c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \dots) = \\ &= \sum_{n=-1}^N c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \end{aligned}$$

Demak, $a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi bo'lsa, uning a nuqta atrofida Loran qatori bosh qismida chekli sondagi noldan farqli hadlari bo'lar ekan.

Yetariligi. Aytaylik, $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofida Loran qatori bosh qismi cheklita haddan iborat bo'lsin:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-N} c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

bu yerda $c_{-N} \neq 0$. U holda,

$$\varphi(z) = (z-a)^N f(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \dots$$

funksiya darajali qator yig'indisi ko'rinishida bo'lgani uchun a nuqtaning biror atrofida golomorf va $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = c_{-N} \neq 0$ bo'ladi. Bundan esa

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^N} = \infty$$

ekanligi, ya'ni a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi ekanligi kelib chiqadi. \square

Bu teoremaning isbotidan golomorf funksiyaning noli va qutb maxsus nuqtasi orasidagi bog'lanishni ifodalovchi quyidagicha teorema kelib chiqadi.

3.12.4-teorema. $a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun qutb maxsus nuqta bo'lishligi uchun, $\varphi = \frac{1}{f}$ ($\varphi \neq 0$) funksiya $z = a$ nuqtaning biror atrofida golomorf va $\varphi(a) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Bu qutb maxsus nuqta va nol orasidagi bog'lanishdan qutb maxsus nuqtaning tartibi tushunchasini keltiramiz. Aytaylik, a nuqta $\varphi(z)$ funksiyaning noli bo'lsin.

3.12.3-ta'rif. Ushbu $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ funksiyaning a nuqtadagi nolining tartibiga, $f(z)$ funksiyaning a qutb maxsus nuqtasining tartibi deyiladi.

3.12.8-misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{2 + z^2 - 2chz}$$

funksiyaning $a = 0$ qutbining tartibini aniqlang.

Yechimi. Yuqoridagi ta'rifga asosan $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = 2 + z^2 - 2chz$ funksiyaning $a = 0$ nuqtadagi nolini tartibini topamiz. Buning uchun quyidagi munosabatlarga egamiz:

$$\varphi'(z) = 2z - 2shz. \Rightarrow \varphi'(0) = 0.$$

$$\varphi''(z) = 2 - 2chz. \Rightarrow \varphi''(0) = 0.$$

$$\varphi'''(z) = -2shz. \Rightarrow \varphi'''(0) = 0.$$

$$\varphi^{(IV)}(z) = -2chz. \Rightarrow \varphi^{(IV)}(0) = -2 \neq 0.$$

Demak, $a = 0$ nuqta $\varphi(z)$ funksiyaning to'rtinchi tartibli noli ekan. Bundan esa $a = 0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning to'rtinchi qutbi ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi keltirilgan 3.12.1 va 3.12.3-teoremalarga asosan, muhim maxsus nuqta va Loran qatori orasidagi bog'lanishni ifodalovchi quyidagi teorema o'rinli bo'lishi bevosita kelib chiqadi.

3.12.5-teorema. $a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun muhim maxsus nuqta bo'lishligi uchun $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqta atrofida Loran qatori yoyilmasida manfiy darajalari hadlarining cheksiz ko'p sonda bo'lishi zarur va yetarli.

Misol va masalalar

3.12.9-misol. Quyidagi funksiylarning barcha maxsus nuqtalarini toping, ularning harakterini aniqlang va funksiylarni $z = \infty$ nuqtada tekshiring (qutblar uchun ularning tartibini ko'rsating).

$$1. f(z) = \frac{1}{z^2(2 - \cos z)}. \quad 2. f(z) = \frac{z+6}{(z^2+1)(z-3)^2}.$$

3.13 Soxotskiy teoremasi

Ushbu paragrafda a muhim maxsus nuqta atrofida $f(z)$ funksiyaning xususiyatlarini o'rganamiz.

3.13.1-teorema. (Soxotskiy⁵) Agar $a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun muhim maxsus nuqta bo'lsa, u holda har qanday $A \in \overline{\mathbb{C}}$ son olinganda ham, a ga intiluvchi shunday $\{z_n\}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$) ketma-ketlik topiladiki, ushbu tenglik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot. Dastlab teoremani $A = \infty$ bo'lgan holda isbotlaymiz. 3.12.2-teoremaga ko'ra a nuqtaning ixtiyoriy $\{0 < |z - a| < r\}$ atrofida $f(z)$ funksiya chegaralanmagan bo'ladi. Shuning uchun shunday $z_1 \in \{0 < |z - a| < r\}$ nuqta topiladiki, $|f(z_1)| > 1$ o'rinli bo'ladi. Xuddi shuningdek, $\{0 < |z - a| < \frac{|z_1 - a|}{2}\}$ atrofda shunday z_2 nuqta topiladiki, uning uchun $|f(z_2)| > 2$ bo'ladi va hakoza. Bu jarayonni davom qildirsak, n ta qadamdan keyin a nuqtaning ushbu $\{0 < |z - a| < \frac{|z_1 - a|}{2^{n-1}}\}$ atrofida shunday z_n nuqta topiladiki, uning uchun $|f(z_n)| > n$ o'rinli bo'ladi. Shunday qilib biz $z_n \rightarrow a$ ketma-ketlikka ega bo'ldik va $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$ bo'ladi. $A = \infty$ bo'lgan holda teorema isbot bo'ldi.

Endi $A \in \mathbb{C}$ (A -chekli kompleks son) bo'lsin. Agar a nuqtaning ixtiyoriy o'yilgan atrofida $f(z) = A$ tenglama yechimga ega bo'lsa, bu yechimlardan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

⁵Bu teoremani o'z vaqtida Veyershtross ham yozib qoldirgan, ammo rus matematigi Yuliy Vaselivich Soxotskiy (1812-1929) o'zining (magistrlik) dissertatsiyasida isbotlagan va Veyershtross asaridan sakkiz yil oldin nashr qilingan. Shuningdek Soxotskiy bilan bir qatorda italyan matematigi F.Kazorati ham bu teoremani isbotlagan (shuning uchun ba'zi adabiyotlarda Soxotskiy-Kazorati nomlari bilan ham yuritiladi).

bo'ladigan shunday $\{z_n\}$ ketma-ketlik tuzish mumkinki, uning uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ bo'ladi. Agar a nuqtaning biror $\{0 < |z - a| < r\}$ atrofida $f(z) = A$ tenglama yechimga ega bo'lmasa, ya'ni ixtiyoriy $z \in \{0 < |z - a| < r\}$ nuqtalar uchun $f(z) \neq A$ bo'lsin. U holda quyidagi yordamchi funksiyani tuzamiz

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}.$$

Bu $\varphi(z)$ funksiya uchun ham a nuqta muhim maxsus nuqta bo'ladi. Haqiqatdan ham, agar $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z)$ -chekli yoki cheksiz bo'lsa, $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$ funksiya uchun ham $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ chekli yoki cheksiz bo'lardi. Bu esa a nuqta $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqta ekaniga zid. Teoremaning birinchi qismida isbot qilinganga ko'ra shunday $z_n \rightarrow a$ ketma-ketlik topiladiki, bunda $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = \infty$ bo'ladi. Shuning uchun bu ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[A + \frac{1}{\varphi(z_n)} \right] = A$$

bo'ladi. □

Aytaylik, a nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin.

3.13.1-ta'rif. *a ga intiluvchi har xil $\{z_n\}$ ketma-ketliklar bo'yicha $f(z)$ funksiyaning limit qiymatlar to'plami bu funksiyaning a nuqtadagi aniqlanish to'plami deyiladi.*

Agar a nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan yoki qutb maxsus nuqtasi bo'lsa, u holda bu funksiyaning a nuqtadagi aniqlanish to'plami bitta nuqtadan (chekli yoki cheksiz) iborat bo'ladi. Agar a muhim maxsus nuqta bo'lsa, Soxotskiy teoremasiga ko'ra $f(z)$ funksiyaning bu nuqtadagi aniqlanish to'plami kengaytirilgan kompleks tekislik \bar{C} bilan ustma-ust tushadi.

Misol va masalalar

3.13.1-misol. Agar a nuqta $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi bo'lsa, $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ funksiya a nuqtada qanday maxsuslikka ega bo'ladi?

3.13.2-misol. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi bo'lgan $z = 0$ nuqta va ixtiyoriy $A \in \bar{C}$ soni uchun Soxotskiy teoremasining shartini qanoqlantiruvchi $\{z_n\}$ ketma-ketlikni toping.

3.13.3-misol. Aytaylik, $z = a$ nuqtaning biror atrofida $f(z)$ funksiya qutbdan boshqa maxsus nuqtaga ega bo'lmasdan, a nuqta qutb nuqtalarning limit nuqtasi bo'lsin. Bu holda ham Soxotskiy teoremasining o'rinli bo'lishini (ya'ni $\forall A \in \bar{C}$ soni uchun $\exists \{z_n\}: z_n \rightarrow a$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ bo'lishini) isbotlang.

3.14 Cheksiz uzoqlashgan nuqta yakkalangan maxsus nuqta bo'lgan hol

Faraz qilaylik, $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin, ya'ni $f(z)$ funksiya $\{|z| > R\}$ ($R > 0$) sohada golomorf bo'lsin. Bu holda ham maxsus nuqta tipini Loran qatori yordamida aniqlash mumkin. Agar $z = \infty$ nuqta $V = \{R < |z| < \infty\}$ halqada golomorf $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsa, $f(z)$ funksiya V halqada quyidagicha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (3.69)$$

Loran qatoriga yoyiladi. U holda

a) $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lishi uchun (3.69) munosabatda $n \geq 1$ bo'lganda $c_n = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

b) $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi bo'lishi uchun (3.69) munosabatda shunday $N \geq 1$ nomer topilib, $c_N \neq 0$ va $n \geq N + 1$ bo'lganda $c_n = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

c) $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi bo'lishi uchun (3.69) munosabatda $n \geq 1$ bo'lgan cheksiz natural sonlar to'plamida $c_n \neq 0$ bo'lishi zarur va yetarli. Bu natijalardan ko'rinadiki, $f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqta atrofida Loran qatorining bosh qismi quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

qatordan, to'g'ri qismi esa ushbu

$$\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n$$

qatordan iborat bo'ladi.

3.15 Butun va meromorf funksiyalar

Bu paragrafda golomorf funksiyalarning ba'zi sinflarini keltiramiz.

3.15.1-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya butun \mathbb{C} kompleks tekislikda golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya butun funksiya deyiladi.

Demak, $z = \infty$ nuqta butun funksiya uchun yakkaalangan maxsus nuqta bo'ladi.

3.15.1-tasdiq. Agar $z = \infty$ nuqta butun $f(z)$ funksiya uchun bartaraf etiladigan yoki qutb maxsus nuqta bo'lsa, u holda $f(z)$ polinom bo'ladi.

Isbot. $f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqta o'yilgan atrofidagi Loran qatorining bosh qismi quyidagi

$$p(z) = \sum_{n=1}^N c_n z^n$$

ko'rinishda bo'lsin. 3.15 paragrafda keltirilgan tasdiqqa ko'ra $p(z)$ ko'phad bo'ladi. U holda $g(z) = f(z) - p(z)$ funksiya butun funksiya bo'lib, $z = \infty$ nuqta bu funksiyaning bartaraf etiladigan nuqtasi bo'ladi. Liuvill teoremasiga ko'ra $g(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi. Demak, $f(z)$ ko'phad bo'ladi. \square

3.15.2-ta'rif. Butun kompleks tekislik \mathbb{C} da qutbdan boshqa maxsusliklarga ega bo'lmagan golomorf funksiya \mathbb{C} da meromorf funksiya deyiladi.

Butun funksiyalar sinfi meromorf funksiyalar sinfining qismi bo'ladi. Chunki butun funksiyalar kompleks tekislikda maxsuslikka ega emas. Qutb nuqtalar yakkaalangan bo'lgani uchun, ularning soni \mathbb{C} da ko'pi bilan sanoqli bo'lishi mumkin. Meromorf funksiyalarga

$$\frac{\cos z}{z-1}, \operatorname{tg} z$$

funksiyalar misol bo'ladi.

$\operatorname{ctg}(\frac{1}{z})$ funksiya \mathbb{C} da meromorf emas, chunki $z = 0$ nuqta $\operatorname{ctg}(\frac{1}{z})$ funksiya qutblarining limit nuqtasi bo'ladi.

3.15.2-tasdiq. Agar \mathbb{C} da meromorf $f(z)$ funksiya uchun $z = \infty$ nuqta bartaraf etiladigan yoki qutb maxsus nuqta bo'lsa (ya'ni $f(z)$ funksiya $\overline{\mathbb{C}}$ da meromorf bo'lsa), u holda $f(z)$ ratsional funksiya bo'ladi.

Isbot. $f(z)$ funksiyaning $\overline{\mathbb{C}}$ dagi qutblari yakkaalangan bo'lgani uchun ular chekli sondagi a_1, a_2, \dots, a_n nuqtalardan iborat bo'ladi. Bu qutblarning o'yilgan atrofidagi Loran qatorining bosh qismini

$$P_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} c_{jk} (z - a_j)^{-k}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$z = \infty$ nuqta atrofidagi Loran qatorining bosh qismini

$$P(z) = \sum_{k=1}^N c_k z^k$$

bilan belgilaymiz. U holda $g(z) = f - (P(z) + P_1(z) + \dots + P_n(z))$ funksiya \mathbb{C} da golomorf va $z = \infty$ da bartaraf etiladigan maxsuslikka ega funksiya bo'ladi. Liuvill teoremasiga ko'ra $g(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi. Demak,

$$f = (P(z) + P_1(z) + \dots + P_n(z)) + \text{const}$$

ratsional funksiya. \square

3.15.1-misol. Aytaylik, $f(z)$ funksiya butun funksiya bo'lib, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ bo'lsin. U holda kompleks tekislikda ushbu $f(z) = 2023$ tenglama yechimga ega bo'lishini isbotlang.

3.15.2-misol. Ixtiyoriy $f(z) \in \mathcal{O}(\{|z| > 1\})$ funksiya uchun

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - g(z)) = 0$$

bo'ladigan $g(z)$ butun funksiya mavjudmi?

BOB 4

CHEGIRMALAR NAZARIYASI VA ULARNING TATBIQLARI

4.1 Chegirmalar va ularni hisoblash

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $a \in \mathbb{C}$ nuqtaning o'yilgan $V = \{0 < |z - a| < r\}$ atrofida golomorf bo'lsin, ya'ni $a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkaqlangan maxsus nuqtasi bo'lsin.

4.1.1-ta'rif. Ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) dz, \quad 0 < \rho < r \quad (4.1)$$

miqdor $f(z)$ funksiyaning yakkaqlangan maxsus a nuqtadagi chegirmasi (qoldig'i) deyiladi va $\operatorname{res}_{z=a} f(z)$ kabi belgilanadi:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) dz \quad (4.2)$$

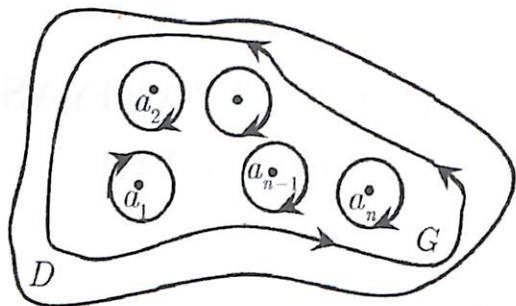
Bu yerda integral soat strelkasiga qarshi yo'nalish bo'yicha olingan. Koshi teoremasiga ko'ra (4.1) integral ρ ga bog'liq emas.

4.1.1-teorema. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ sohada yakkaqlangan maxsus nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarda golomorf bo'lsin. $G \Subset D$ esa chegarasi ∂G bo'lakli silliq va a_1, a_2, \dots, a_n maxsus nuqtalarni o'z ichiga olgan hamda chegarasida maxsus nuqtalar yo'tmagan soha bo'lsin. U holda

$$\int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=a_j} f \quad (4.3)$$

bo'ladi.

Isbot. Bu teoremani isbotlash uchun $\varepsilon > 0$ sonni shunday tanlaymizki, $B_j(a_j) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_j| < \varepsilon\}$, $j = 1, 2, \dots, n$ doiralari o'zaro kesishmasin va $\overline{B_j(a_j)} \in G$ bo'lsin (41-chizma).



41-chizma

Agar $G_r = G \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{B_j}$ deb belgilasak, ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshi teoremasiga ko'ra,

$$0 = \int_{\partial G_r} f(\zeta) d\zeta = \int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^n \int_{\partial B_j} f(\zeta) d\zeta = \int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta - 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{a_j} f.$$

Bu tenglik teoremani isbotlaydi. \square

4.1.2-teorema. $f(z)$ funksiyaning yakkaalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasidagi chegirmasi $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi Loran qatorining c_{-1} koeffitsiyentiga teng.

Isbot. Ma'lumki, a nuqtaning o'yilgan $V = \{0 < |z - a| < r\}$ atrofida $f(z)$ funksiya Loran qatoriga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Bu qator yetarlicha kichik $\rho < r$ uchun $\{|z - a| = \rho\}$ aylanada tekis yaqinlashadi. Shuning uchun

$$\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{|z-a|=\rho} (z - a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot c_{-1} = c_{-1}$$

bo'ladi. \square

4.1.1-natija. Agar $z = a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lsa, u holda bu funksiyaning a nuqtadagi chegirmasi nolga teng bo'ladi.

Endi $f(z)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasidagi chegirmasini hisoblash formulasini topamiz.

1-hol. a nuqta $f(z)$ funksiyaning birinchi tartibli qutbi bo'lsin. Ma'lumki, bu holda $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi Loran qatori ushbu

$$f(z) = c_{-1}(z - a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu munosabatdan

$$c_{-1} = (z - a)f(z) - (z - a) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglikdan $z \rightarrow a$ da limitga o'tib

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$$

bo'lishini topamiz. Demak, $f(z)$ funksiyaning a birinchi tartibli qutb maxsus nuqtadagi chegirmasi

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z - a)f(z)] \quad (4.4)$$

bo'ladi.

Agar $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ bo'lib, $\varphi(z)$ va $\psi(z)$ funksiyalar a nuqtaning biror atrofida golomorf, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning birinchi tartibli qutb nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z - a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

bo'ladi.

2-hol. Faraz qilaylik, a nuqta $f(z)$ funksiyaning m -tartibli qutb nuqtasi bo'lsin. Bu holda $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi Loran qatori ushbu

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - a} +$$

$$+c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Oxirgi tenglikning har ikki tomonini $(z-a)^m$ ga ko'paytirib quyidagi

$$f(z)(z-a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \\ + c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + c_2(z-a)^{m+2} + \dots + c_n(z-a)^{m+n} + \dots$$

tenglikka kelamiz. Bu oxirgi tenglikni $(m-1)$ marta differensiallash natijasida

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] = (m-1)!c_{-1} + \frac{m!}{1!}c_0(z-a) + \frac{(m+1)!}{2!}c_1(z-a)^2 + \dots$$

tenglikni hosil qilamiz. Keyingi tenglikda $z \rightarrow a$ da limitga o'tib

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$$

formulani topamiz. Demak, bu holda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadagi chegirmasi

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \quad (4.5)$$

bo'ladi. Xususan,

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$$

bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya a nuqtada golomorf va $\varphi(a) \neq 0$ bo'lsa, unda (4.5) munosabatdan

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \operatorname{res}_{z=a} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(a)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

4.1.1-izoh. Agar $z = a$ nuqta muhim maxsus nuqta bo'lsa, chegirmani hisoblashning umumiy formulasi yo'q. Bu holda chegirmani hisoblash uchun funksiyani a nuqta atrofida Loran qatoriga yoyib, c_{-1} koeffitsiyentni topish kerak.

Endi $f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi chegirmasi tushunchasini keltiramiz. Aytaylik, $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning yakka-langani maxsus nuqtasi bo'lsin, ya'ni $f(z)$ funksiya $\{|z| > R_0\}$ sohada golomorf bo'lsin.

4.1.2-ta'rif. Ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz$$

miqdor $f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi chegirmasi deyiladi va $\operatorname{res}_{\infty} f(z)$ kabi belgilanadi:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz,$$

bu yerda $R > R_0$, integral $\gamma_R = \{|z| = R\}$ aylana bo'yicha soat strelkasi yo'nalishida olingan.

$f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqta atrofidagi Loran qatorini yozamiz:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Bu qatorni γ_R bo'yicha hadlab integrallab

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}$$

bo'lishini topamiz. Bu holda ko'rinib turibdiki, $z = \infty$ nuqta barataraf etiladigan maxsus nuqta bo'lsa ham bu nuqtada chegirma nolga teng bo'lmasligi mumkin.

Endi barcha chekli va cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi chegirmalarni bog'laydigan teoremani keltiramiz.

4.1.3-teorema. (Chegirmalarning to'la yig'indisi haqida) $f(z)$ funksiya kompleks tekislik \mathbb{C} ning chekli sonidagi z_1, \dots, z_n nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda golomorf bo'lsin. U holda bu funksiyaning z_1, \dots, z_n nuqtalardagi va $z = \infty$ nuqtadagi chegirmalar yig'indisi nolga teng bo'ladi:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0$$

Isbot. Kompleks tekislikda R radiusli shunday $\gamma_R = \{|z| = R\}$ aylananani olamizki, z_1, \dots, z_n nuqtalar shu aylana ichida yotsin. U holda 4.1.1-teoremaga ko'ra

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = - \int_{\gamma_{\bar{n}}} f(z) dz = -2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\infty} f(z).$$

Demak,

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z) = -\operatorname{res}_{\infty} f(z).$$

Teorema isbotlandi. \square

Misol va masalalar

4.1.1-misol. Ushbu $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ funksiyaning $z = 1$ nuqtadagi chegirmasini toping.

4.1.2-misol. Ushbu

$$f(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$$

funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi chegirmasini toping.

4.1.3-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$ funksiyaning barcha marsus nuqtalaridagi chegirmalarini hisoblang.

4.1.4-misol. Agar $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan marsus nuqtasi bo'lsa, u holda

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z))$$

bo'lishini ko'rsating.

4.2 Chegirmalarning tatbiqlari

Chegirmalar bir qancha tatbiqlarga ega, biz ushbu paragrafda chegirmalarning ba'zi aniq va xosmas integrallarni hisoblashlarga tatbiqini keltiramiz

4.2.1 $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash

Aytaylik, ratsional $R(\cos \varphi, \sin \varphi)$ funksiyaning $[0, 2\pi]$ oraliq bo'yicha aniq integrali

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$$

berilgan bo'lsin va uni hisoblash talab qilinsin. Buning uchun $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ almashtirish bajarimiz. Bunda φ o'zgaruvchi 0 dan 2π gacha o'zgarib, z o'zgaruvchi musbat yo'nalishdagi birlik aylananani hosil qiladi. Ravshanki,

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

bo'lib, $dz = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi$ ya'ni $d\varphi = \frac{dz}{zi}$ bo'ladi. Natijada,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{zi} = \int_{|z|=1} R_1(z) dz$$

hosil bo'ladi. Oxirgi integral 4.1.1-teorema yordamida hisoblanadi

$$\int_{|z|=1} R_1(z) dz = \sum_{|z_k| < 1} \operatorname{res}_{z_k} R_1(z).$$

4.2.1-misol. Ushbu

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} \quad (a > 1)$$

integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralda $z = e^{i\varphi}$ almashtirish bajarib, yuqorida aytilgan munosabatlardan foydalanib

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{zi} dz}{a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$

bo'lishini topamiz. Integral ostidagi

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \quad (a > 1)$$

funksiyaning ikkita

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

maxsus nuqtalari bo'lib, ulardan faqat $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ nuqta $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birlik doirada yotadi.

Demak,

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1}$$

bo'ladi.

Endi (4.4) formuladan foydalanib chegirmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} &= \lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})}{z^2 + 2az + 1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})}{[z - (-a - \sqrt{a^2 - 1})][z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})]} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Bundan esa

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} = \frac{2}{i} 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (a > 1)$$

bo'lishini topamiz.

4.2.2-misol. Ushbu

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} d\varphi$$

integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralda $z = e^{i\varphi}$ almashtirish bajarib, yuqoridagi mulohazalardan foydalanib topamiz:

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} d\varphi = \int_{|z|=1} \frac{2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right) dz}{2 - \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right) zi} = - \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} dz.$$

Integral ostidagi

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)}$$

funksiyaning uchta $z_1 = 0$, $z_2 = 2i + i\sqrt{3}$, $z_3 = 2i - i\sqrt{3}$ maxsus nuqtalari bo'lib, ulardan $z_1 = 0$, $z_3 = i(2 - \sqrt{3})$ nuqtalar $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ doirada yotadi.

Demak,

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} dz = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=i(2-\sqrt{3})} f(z) \right].$$

Endi (4.4) formuladan foydalanib chegirmalarni hisoblaymiz:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} [f(z) \cdot z] = -1.$$

$$\operatorname{res}_{z=i(2-\sqrt{3})} f(z) = \lim_{z \rightarrow i(2-\sqrt{3})} [f(z) \cdot (z - (2 - \sqrt{3})i)] = 1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}.$$

Bulardan

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} d\varphi = -2\pi i \left[-1 + \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}\right) \right] = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

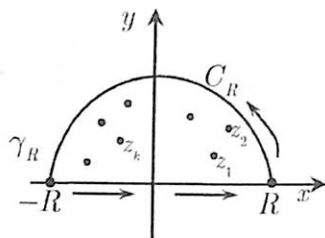
4.2.2 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ ko'rinishdagi xosmas integrallarni hisoblash

Aytaylik, x o'zgaruvchining ratsional funksiyasi

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

bo'lib, bunda $P(x)$ va $Q(x)$ funksiyalar mos ravishda n va m darajali ko'phadlar va $m - n \geq 2$ (ya'ni $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi) bo'lsin, ya'ni $R(x)$ funksiya haqiqiy o'qda qutb nuqtaga ega emas.

Markazi koodinatalar boshida radiusi R bo'lgan aylananing yuqori yarim tekislikdagi qismi C_R hamda haqiqiy o'qning $[-R, R]$ kesmasidan tashkil topgan γ_R yopiq egri chiziqni olamiz (42-chizma). Ravshanki, $\gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, so'ngra $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ratsional funksiyani qaraymiz. Endi R radiusni shunday katta qilib olamizki, $R(z)$ funksiyaning yuqori yarim tekislikdagi barcha maxsus nuqtalari shu γ_R yopiq egri chiziq ichida joylashsin.



42-chizma

Chegirmalar haqidagi Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\gamma_R} R(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{res}_{z=z_k} R(z) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} R(z) \quad (4.6)$$

bo'ladi. Bu yerda z_1, z_2, \dots, z_p nuqtalar $R(z)$ funksiyaning γ_R yopiq egri chiziq ichidagi maxsus nuqtalari (qutb nuqtalari). Ravshanki.

$$\int_{\gamma_R} R(z) dz = \int_{-R}^R R(x) dx + \int_{C_R} R(z) dz \quad (4.7)$$

bo'ladi. Demak, oxirgi ikkita (4.6) va (4.7) munosabatlardan

$$\int_{-R}^R R(x) dx + \int_{C_R} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} R(z) \quad (4.8)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu (4.8) tenglikdagi $\int_{C_R} R(z) dz$ integralni baholaymiz. $m - n \geq 2$ va $R(z)$ funksiya haqiqiy o'qda qutb maxsus nuqtaga ega bo'lmaganligi uchun $z \rightarrow \infty$ da $R(z) \sim \frac{A}{z^{m-n}}$ bo'ladi. Demak, yetarlicha katta $|z|$ lar uchun

$$|R(z)| < \frac{L}{|z|^2}, \quad (L = \text{const})$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda C_R yarim aylana

$$|R(z)| \leq \frac{L}{R^2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Natijada

$$\left| \int_{C_R} R(z) dz \right| < \frac{L}{R^2} \pi R = \frac{L\pi}{R}$$

bo'ladi. Keyingi munosabatdan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z) dz = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Yuqoridagi (4.8) tenglikda $R \rightarrow \infty$ intilganda limitga o'tib topamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{res}_{z=z_k} R(z). \quad (4.9)$$

Demak, $R(z)$ funksiya yuqorida aytilgan shartlarni qanoatlantirsa, u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$$

integral $R(z)$ funksiyaning yuqori yarim tekislikdagi barcha maxsus nuqtalaridagi chegirmalari yig'indisini $2\pi i$ miqdorga ko'paytirilganiga teng bo'lar ekan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} R(z).$$

4.2.3-misol. Ushbu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

integralni hisoblang.

Yechish. Ravshanki $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ funksiya uchun $z = i$ nuqta yuqori yarim tekislikda yotuvchi ikkinchi tartibli qutb maxsus nuqta bo'ladi. Demak,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2 + 1)^2}.$$

Endi funksiyaning chegirmasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-i)^2}{(z^2 + 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{1}{4}i. \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

bo'ladi.

4.2.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$ ko'rinishidagi integrallarni hisoblash

Bu yerda $R(x)$ ratsional funksiya, $\alpha > 0$. Bu ko'rinishdagi integralga $R(x)$ ratsional funksiyaning Furye almashtirishi deyiladi. Uni hisoblashda quyidagi Jordan lemmasi muhim rol o'ynaydi.

4.2.1-lemma. (Jordan) Aytaylik, $f(z)$ funksiya $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0, |z| \geq R_0\}$ to'plamda uzluksiz bo'lib, $M(R) = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|$ bo'lsin, bu yerda $R \geq R_0$, $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = R, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ yarim aylana. Agar

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$$

bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha > 0$ son uchun

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0$$

bo'ladi.

Isbot. Ravshanki,

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{-\alpha R \sin \theta + i\alpha R \cos \theta} i Re^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi M(R) R e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta.$$

Agar $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ bo'lsa, $\sin \theta$ funksiyaning grafigi qavariq bo'lganligi uchun, $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Oxirgi integralni baholash uchun $\tau = 2R\frac{\theta}{\pi}$ almashtirish bajaramiz. Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_0^\pi R e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-2\alpha R \frac{\theta}{\pi}} d\theta = \pi \int_0^R e^{-\alpha \tau} d\tau = \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}).$$

ya'ni

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq \frac{M(R) \cdot \pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R})$$

bo'lishi va bu tengsizlikda $R \rightarrow \infty$ limitga o'tsak lemmani tasdig'i kelib chiqadi. \square

Endi $R(x)$ funksiyaning Furye almashtirishini hisoblaymiz. Ravshanki, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$ integral, $R(z)$ funksiya haqiqiy o'qda qutbga ega bo'lmasa va $x \rightarrow \infty$ da

$$R(x) \sim \frac{L}{x^k} \quad (L \in \mathbb{R}, k \geq 1)$$

bo'lsa yaqinlashadi. Boshqacha aytganda $R(x)$ funksiya Jordan lemmasining shartini qanoatlantiradi. U holda Jordan lemmasiga ko'ra

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} R(z) dz = 0 \quad (\alpha > 0)$$

bo'ladi. (4.8) formula ko'ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{res} \\ \text{Im } z_k > 0}} [e^{i\alpha z} R(z)] \quad (4.10)$$

bo'lishini topamiz.

Agar $x \in \mathbb{R}$ bo'lganda $R(x) \in \mathbb{R}$ bo'lsa, u holda $\alpha > 0$ da (4.10) tenglikning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x dx = -2\pi \text{Im} \left[\sum_{\substack{\text{res} \\ \text{Im } z_k > 0}} [e^{i\alpha z} R(z)] \right], \quad (4.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x dx = 2\pi \text{Re} \left[\sum_{\substack{\text{res} \\ \text{Im } z_k > 0}} [e^{i\alpha z} R(z)] \right]. \quad (4.12)$$

4.2.4-misol. Ushbu

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \cos 5x}{x^2 - 2x + 5} dx$$

integralni hisoblang.

Yechish. $R(z) = \frac{z-1}{z^2-2z+5}$ funksiyaning yuqori yarim tekislikda $z = 1+2i$ birinchi tartibli qutbga ega bo'lgani uchun (4.11) formulaga ko'ra

$$J = -2\pi \text{Im} \left[\text{res}_{z=1+2i} \left(e^{i5z} \frac{z-1}{z^2-2z+5} \right) \right] \quad (4.13)$$

bo'ladi. Endi quyidagi chegirmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1+2i} \left(e^{i5z} \frac{z-1}{z^2-2z+5} \right) &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{(z-1-2i)e^{i5z}(z-1)}{(z^2-2z+5)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{e^{i5z}(z-1)}{(z^2-1+2i)} = \frac{e^{-10}}{2} (\cos 5 + \sin 5). \end{aligned}$$

Demak, (4.13) formulaga ko'ra,

$$J = -\pi e^{-10} \sin 5.$$

Misol va masalalar

4.2.5-misol. Ushbu

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)}$$

integralni hisoblang.

4.2.6-misol. Ushbu

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1} dz$$

integralni hisoblang.

4.2.7-misol. Ushbu $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz$ integralni hisoblang, bunda $\gamma: x^2 + y^2 = 2x$ aylanadan iborat.

4.2.8-misol. Ushbu

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a \cos \varphi + a^2}$$

integralni hisoblang, bu yerda $|a| \neq 1$.

4.2.9-misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 25}$$

integralni hisoblang.

4.2.10-misol. Quyidagi integrallarni hisoblang:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2+9} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9} dx.$$

BOB 5

ANALITIK DAVOM ETTIRISHLAR

5.1 Analitik davom ettirish tushunchasi

Bu paragrafda kompleks analizda muhim bo'lgan analitik davom ettirish tushunchasini qaraymiz.

Faraz qilaylik, $D_0 \subset \mathbb{C}$, $D_1 \subset \mathbb{C}$ sohalar berilgan bo'lib, ularning kesishmasi bo'sh bo'lmagan to'plam bo'lsin ($D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$).

5.1.1-ta'rif. Agar $f_0(z)$ va $f_1(z)$ funksiyalar mos ravishda D_0 va D_1 sohalarda golomorf bo'lib, $D_1 \cap D_0$ to'plamda ustma-ust tushsin, ya'ni $f_1(z) = f_0(z)$, $z \in D_1 \cap D_0$ bo'lsa, u holda $f_1(z)$ funksiya $f_0(z)$ funksiyaning D_0 sohadan D_1 sohaga bevosita analitik davomi deyiladi. $f_0(z)$ funksiya D_0 sohadan D_1 sohaga bevosita analitik davom etadi deyiladi.

Golomorf funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtaga davom ettirish analitik davom ettirishga misol bo'ladi. Masalan,

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

funksiya $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ to'plamda aniqlangan golomorf funksiya. $z = 0$ nuqta bartaraf etiladigan maxsus nuqta. $z = 0$ nuqtaga golomorf davom ettirish quyidagi qator yordamida beriladi:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Parametrga bog'liq integrallar yordamida berilgan funksiyaning golomorf davom ettirish uchun quyidagi tasdiqdan foydalaniladi.

5.1.1-lemma. Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}$ soha va $\varphi = \varphi(t, z) : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{C}$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lib, har bir tayinlangan $t \in [a, b]$ nuqtalarda $\varphi(t, z)$ funksiya $z \in D$ o'zgaruvchi bo'yicha holomorfl bo'lsin. U holda

$$f(z) = \int_a^b \varphi(t, z) dt$$

funksiya D sohada holomorfl bo'ladi.

Isbot. D sohada kompakt yotuvchi K to'plamni olaylik. Ravshanki, φ funksiya $[a, b] \times K$ to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi. U holda $f(z)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'ladi. Endi ixtiyoriy $\Delta \subset K$ uchburchak uchun

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan ham,

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \int_{\partial \Delta} \left(\int_a^b \varphi(t, z) dz \right) = \int_a^b \int_{\partial \Delta} \varphi(t, z) dz dt = \int_a^b 0 dt = 0$$

bo'ladi. Yuqoridagi ikkinchi tenglik uzluksiz funksiyalar uchun Fubini teoremasidan, oxirgi tenglik esa Koshi teoremasidan kelib chiqadi. Morera teoremasiga ko'ra esa $f(z)$ funksiya D sohada holomorfl bo'ladi. \square

Endi Γ -funksiyani (Gamma funksiya) davom qildirish masalasini qaraymiz. Agar $\operatorname{Re} z > 0$ bo'lsa, Γ -funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (5.1)$$

bu yerda

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}, t > 0.$$

Bu xosmas integralni yaqinlashishini ko'rsatish uchun integralni ikkita integralning yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz:

$$J_1(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \text{ va } J_2(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

$$\Gamma(z) = J_1(z) + J_2(z).$$

Ixtiyoriy $z \in \mathbb{C}$ nuqtada ushbu

$$\int_1^{\infty} |e^{-t} t^{z-1}| dz = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} dt,$$

integral yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $J_2(z)$ integral ixtiyoriy $z \in \mathbb{C}$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi. Agar $|z| \leq R$ bo'lsa, u holda

$$|e^{-t} t^{z-1}| \leq e^{-t} t^{R-1}$$

tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun.

$$f_n(z) = \int_1^n e^{-t} t^{z-1} dt$$

funksional ketma-ketlik ixtiyoriy $\{|z| \leq R\}$ yopiq doirada $J_2(z)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Haqiqatdan ham, $n \rightarrow \infty$ intilganda

$$|J_2(z) - f_n(z)| = \left| \int_n^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_n^{\infty} e^{-t} t^{R-1} dt \rightarrow 0.$$

bo'ladi. Yuqorida isbotlangan lemmaga ko'ra $f_n(z)$ butun funksiya bo'ladi. U holda Veyershtarss teoremasiga ko'ra $J_2(z)$ funksiya \mathbb{C} kompleks tekislikda holomorfl bo'ladi.

Xuddi shunday

$$J_1(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^1 e^{-t} t^{z-1} dt$$

bo'lishi ko'rsatiladi. Ushbu

$$\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

integral $\alpha > 0$ da yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $J_1(z)$ funksiya $\operatorname{Re} z > 0$ sohada holomorfl bo'ladi. Natijada $\Gamma(z) = J_1(z) + J_2(z)$ funksiya $\operatorname{Re} z > 0$ sohada holomorfl ekanligini hosil qilamiz.

Endi $\operatorname{Re} z > 0$ yarim tekislikda yuqorida aniqlangan (5.1) Gamma-funksiya butun kompleks tekislikka meromorf davom etishini ko'rsatamiz. Barcha $z \in \mathbb{C}$ va $t \in [0, 1]$ o'zgaruvchilar uchun $e^{-t} t^z$ funksiyani quyidagi qatorga yoyish mumkin:

$$e^{-t} t^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z-n-1}. \quad (5.2)$$

Agar $\operatorname{Re} z > 1$ bo'lsa, (5.2) qator quyidagi xossalarga ega bo'ladi:

a) (5.2) qatorning barcha hadlari $[0, 1]$ kesmada t bo'yicha uzluksiz va

$$\int_0^1 t^{z-n-1} dt = \frac{1}{z+n}$$

formula o'rinli:

b) (5.2) qator $[0, 1]$ kesmada t bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Demak, (5.2) qatorni hadma-had t bo'yicha integrallash mumkin:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}, \operatorname{Re} z > 1. \quad (5.3)$$

(5.3) tenglikning o'ng tomonidagi qator barcha $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ nuqtalarda yaqinlashadi. Bu qatorning dastlabki N hadini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan quyidagi

$$f_N(z) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

qator esa $D_N = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -N\}$ yarim tekislikda kompakt yotuvchi to'plamda tekis yaqinlashadi (bu tasdiq yuqoridagi $f_n(z)$ ketma-ketlik tekis yaqinlashuvchilik kabi isbotlanadi). Shuning uchun $f_N(z)$ funksiya D_N yarim tekislikda golomorf bo'ladi.

Demak, Gamma-funksiya $\operatorname{Re} z > 1$ yarim tekislikda quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + f_N(z) + J_2(z). \quad (5.4)$$

Yagonalik teoremasiga ko'ra (5.4) formula tenglikning har ikkala tomoni golomorf bo'lgan to'plamda ya'ni $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ yarim tekislikda o'rinli

bo'ladi. Ravshanki, (5.4) formulaning o'ng tomoni $D_N \setminus \{0, -1, \dots, -(N-1)\}$ to'plamda golomorf bo'lib, u $\Gamma(z)$ funksiyaning $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ yarim tekislikdan $D_N \setminus \{0, -1, \dots, -(N-1)\}$ to'plamga analitik davomi bo'ladi. Yagonalik teoremasiga ko'ra bu davom ettirish yagona bo'ladi. Shuning uchun ham (5.4) tenglikning o'ng qismini $\Gamma(z)$ funksiyaning $D_N \setminus \{0, -1, \dots, -(N-1)\}$ to'plamdagi ta'rifi deb qarash mumkin. N sonining ixtiyoriyligidan barcha $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, \dots\}$ nuqtalar uchun quyidagi formulani hosil qilamiz

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Demak, bu formula yordamida $\Gamma(z)$ funksiya $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ sohadan $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, \dots\}$ sohaga analitik davom etadi. Ravshanki, $z = -n, n = 0, 1, 2, \dots$ nuqtalar $\Gamma(z)$ funksiyaning analitik davomi uchun 1-tartibli qutb bo'ladi va bu nuqtadagi chegirma $\frac{(-1)^n}{n!}$ ga teng bo'ladi. Shunday qilib $\Gamma(z)$ funksiya $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ sohadan butun \mathbb{C} kompleks tekislikka meromorf davom ettiriladi.

5.1.1-izoh. Analitik davom ettirish masalasi har doim ham yechimga ega bo'lmaydi. Masalan,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

funksiya $\mathbb{U} = \{|z| < 1\}$ doirada golomorf, lekin $\{|z| = 1\}$ aylananing har bir nuqtasi bu funksiyaning marsus nuqtasi bo'ladi (3.8.7-misol). Shuning uchun ham $f(z)$ funksiyani $\mathbb{U} \subset D$ sohaga analitik davom ettirib bo'lmaydi.

Keyingi misolni qarashdan oldin kompleks sonning kvadratik ildizi haqida ayrim fikrlarni aytib o'tamiz.

Agar $z = re^{i\varphi} (z \neq 0)$ bo'lsa, u holda $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ bo'ladi. Bu yerda $\varphi = \arg z$ ni 2π ga butun karrali aniqlikda olish mumkin. Agar φ ning o'rniga $\varphi + 2\pi$ ni olsak, u holda

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i(\varphi+2\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$$

bo'lib, \sqrt{z} ning oldingi qiymatidan ishoraga farq qiladi. Shuning uchun $z \neq 0$ bo'lganda \sqrt{z} ikki qiymatli bo'ladi, ya'ni u "funksiya" bo'lmaydi. Biror D sohada \sqrt{z} qiymatlaridan funksiya hosil qilish uchun $\varphi = \arg z$ ni bir qiymatli tanlash

uchun qo'shimcha shart talab etiladi. Agar shunday funksiya D sohada uzluksiz bo'lsa, bu funksiya ildizining D sohadagi tarmog'i deyiladi.

Endi misol qaraymiz. $U_0 = \{|z - 1| < 1\}$ doirada ildizning

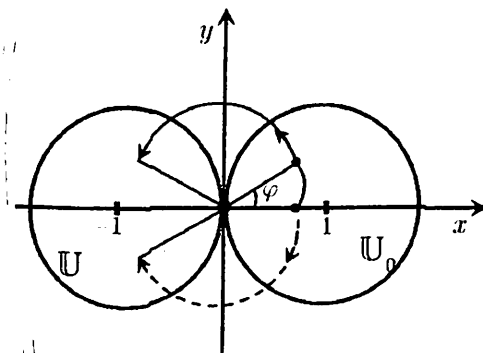
$$w = f_0(z) = \sqrt{z}e^{i\varphi/2}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

tarmog'ini olamiz. $z = w^2$ funksiya bir qiymatli bo'lgani uchun $f_0(z)$ funksiya U_0 doirada o'zaro bir qiymatli bo'ladi va uning hosilasi mavjud bo'lib, bu hosila quyidagicha

$$f_0'(z) = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2f_0(z)}$$

bo'ladi. Demak U_0 doirada $f_0 \neq 0$ bo'lgani uchun $f_0(z)$ funksiya U_0 doirada golomorf bo'ladi.

Endi $f_0(z)$ funksiyani $U = \{|z + 1| < 1\}$ doiraga analitik davom ettiramiz (13-chizma).



13-chizma

Dastlab, φ ni oshib borishi bo'yicha olsak, U doirada aniqlangan

$$f(z) = \sqrt{rc}e^{i\varphi/2}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

funksiyani olamiz.

Agar φ ni kamayib borishi bo'yicha olsak, u holda U doirada

$$g(z) \equiv \sqrt{rc}e^{i\varphi/2}, \quad -\frac{3\pi}{2} < \varphi < -\frac{\pi}{2}$$

funksiyani hosil qilamiz. $z \in U$ nuqta $\varphi = \arg z$ argumentining ikkinchi qiymati birinchi qiymatidan 2π ga farq qiladi. Masalan, $z = -1$ nuqtada birinchi usulda

davom qildirganimizda $\varphi = \pi$, ikkinchi usulda davom qildirganimizda $\varphi = -\pi$ bo'ladi. Demak, $f(z)$ va $g(z)$ ishoraga farq qiladi. Shunday qilib $f_0(z)$ funksiyani har xil usullar bilan U doiraga analitik davom ettirganimizda U doirada turli $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalarni hosil qildik. Boshqacha aytganda $f_0(z)$ funksiyaning analitik davomi umum qabul qilingan funksiya tushunchasiga ko'ra "funksiya" bo'lmaydi.

Yuqorida keltirilgan misoldan ko'rinib turibdiki, bevosita analitik davom ettirish tushunchasini aniqlashtirishga zarurat paydo bo'ladi. Bu muammoni hal qilishning yo'llaridan birini K.Veyershtross taklif etgan. Unga ko'ra analitik davom etgan "funksiya" ni (f, U) juftlik to'plami sifatida va sohalar zanjiri bo'yicha analitik davom ettirish tushunchasini kiritish kerak bo'ldi.

5.1.2-ta'rif. Faraz qilaylik, $D = D_0, D_1, \dots, D_n = G$ sohalar berilgan bo'lib, $D_k \cap D_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) bo'sh bo'lmagan bog'lamli to'plam bo'lsin va $f = f_0, f_1, \dots, f_n = g$ funksiyalar mos ravishda D_0, D_1, \dots, D_n sohalarda golomorf bo'lib f_{k+1} funksiya f_k funksiyaning D_k sohadan D_{k+1} ($k = 0, 1, \dots, n-1$) sohaga bevosita analitik davomi bo'lsa, u holda g funksiya $f(z)$ funksiyaning D sohadan G sohaga sohalar zanjiri bo'yicha analitik davomi deyiladi.

Misol va masalalar

5.1.1-misol. Ushbu $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sohada berilgan quyidagi

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

funksiyani $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < \sqrt{2}\}$ sohaga analitik davomi topilsin.

5.1.2-misol. Ushbu $e^z, \cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ funksiyalar dastlab haqiqiy qiymatli funksiyalar uchun aniqlangan bo'lib, bu funksiyalarni Teylor qatoriga yoyib butun kompleks tekislikka analitik davom qildirish mumkinligini isbotlang.

5.1.3-misol. $f(z)$ funksiya $[0, 1]$ kesmani o'z ichiga oluvchi biror sohada golomorf va $f(z+1) = f(z)$ shartni qanoatlantiradi. $f(z)$ funksiyani $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta, \delta > 0$ yo'lakka analitik davom qildirish mumkinligini isbotlang.

5.1.4-misol. Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan D sohagacha analitik davom ettirish mumkin ekanligini isbotlang:

$$1. f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z\zeta}}{1+\zeta^2} d\zeta, \quad D = \{z : |\arg z| < \pi\}.$$

$$2. f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z\zeta}}{1+a\zeta} d\zeta, \quad a > 0, \quad D = \{z : |\arg(z+a)| < \pi\}.$$

5.1.5-misol. Quyidagi $f(z)$ funksiyaning analitik davomi $F(z)$ funksiya ekanligini isbotlang:

$$1. f(z) = \int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{t^2+1} dt, \quad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-2n}.$$

$$2. f(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-atx}}{e^{-t}+1} dt, \quad (a > 0), \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+az}.$$

$$3. f(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{-z}}{1-e^{-t}} dt, \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}.$$

5.1.6-misol. Ushbu

$$f(z) = \int_{|\zeta|=1} e^{a(\zeta+\frac{1}{\zeta})} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

funksiyani $\{|z| < 1\}$ doiradan butun \mathbb{C} tekislikka analitik davom ettirish mumkinligini isbotlang.

5.2 Elementlar va ularni analitik davom ettirish

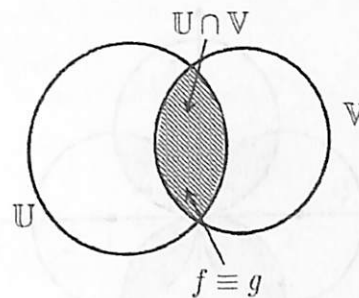
5.2.1-ta'rif. $\mathbb{U} = \{|z-a| < R\}$ doira va bu sohada holomorff $f(z)$ funksiyadan tashkil topgan $F = (\mathbb{U}, f)$ juftlikka element deyiladi. a nuqta bu elementning markazi R esa radiusi deyiladi.

5.2.2-ta'rif. Agar \mathbb{U} doira $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi Teylor qatori yaqinlashish doirasi bilan ustma-ust tushsa, F element kanonik element deyiladi.

5.2.1-misol. $\mathbb{U} = \{|z-1| < 1\}$ doira va $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$ funksiya juftligi kanonik element bo'ladi.

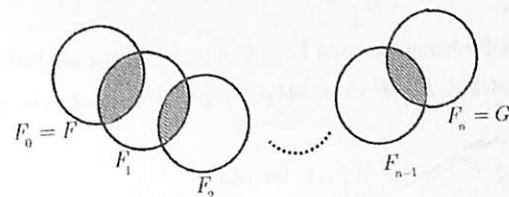
5.2.3-ta'rif. Agar $F = (\mathbb{U}, f)$ va $G = (\mathbb{V}, g)$ kanonik elementlar uchun $\mathbb{U} = \mathbb{V}$ bo'lib, bu doirada $f \equiv g$ bo'lsa, F va G elementlar teng deyiladi.

5.2.4-ta'rif. Agar $F = (\mathbb{U}, f)$ va $G = (\mathbb{V}, g)$ elementlar berilgan bo'lib, $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \neq \emptyset$ va $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ to'plamda $f = g$ bo'lsa, bu elementlar bir-birining bevosita analitik davomi deyiladi (44-chizma).



44-chizma

5.2.5-ta'rif. $F = F_0 = (\mathbb{U}_0, f_0), \dots, F_n = (\mathbb{U}_n, f_n) = G$ elementlar berilgan bo'lib, F_{k+1} element F_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) elementning bevosita analitik davomi bo'lsa, G element F elementning F_0, F_1, \dots, F_n elementlar zanjiri bo'yicha analitik davomi deyiladi (45-chizma).



45-chizma

5.2.2-misol. $F = (\mathbb{U}, f)$ va $F_0 = (\mathbb{U}_0, f_0)$ elementlar berilgan bo'lsin. Bu yerda

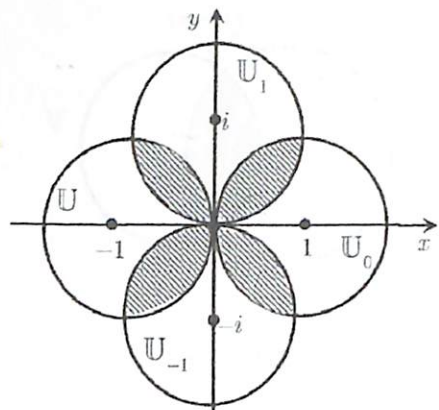
$$\mathbb{U}_0 = \{|z-1| < 1\}, \quad f_0 = \sqrt{r} e^{i\varphi/2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{z} \text{ ildizning tarmog'i,}$$

$$\mathbb{U} = \{|z+1| < 1\}, \quad f(z) = \sqrt{r} e^{i\varphi/2}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Bu elementlar kanonik element bo'ladi, chunki $z=0$ nuqta \mathbb{U}_0 va \mathbb{U} doiralarning chegaralarida yotadi va bu nuqtada f va f_0 analitik davom etmaydi chunki,

$$f'_0 = \frac{1}{2f_0(z)}.$$

\mathbb{U}_0 va \mathbb{U} doiralar kesishmaganligi uchun bu elementlar bir-birining analitik davomi bo'lmaydi (46-chizma).



46-chizma

$F_1 = \{U_1, f_1\}$, bu yerda

$$U_1 = \{|z - i| < 1\}, f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad 0 < \varphi < \pi$$

element esa F_0 va F elementlarning har birining bevosita analitik davomi bo'ladi. Demak, F element F_0, F_1, F elementlar zanjir bo'yicha F_0 elementning analitik davomi bo'ladi.

Xuddi shunday $F_{-1} = \{U_{-1}, f_{-1}\}$, bu yerda

$$U_{-1} = \{|z + i| < 1\}, f_{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad -\pi < \varphi < 0$$

element F_0 va $G = (U, g)$, bu yerda

$$U = \{|z + 1| < 1\}, g(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad -\frac{3\pi}{2} < \varphi < -\frac{\pi}{2}$$

elementlarning har birining bevosita analitik davomi bo'ladi (46-chizma). Demak, F va G elementlar F, F_1, F_0, F_{-1}, G elementlar zanjiri bo'yicha bir-birining analitik davomi bo'ladi. Bu ikki element doiralari ustma-ust tushadi, funksiyalari esa ishoraga farq qiladi.

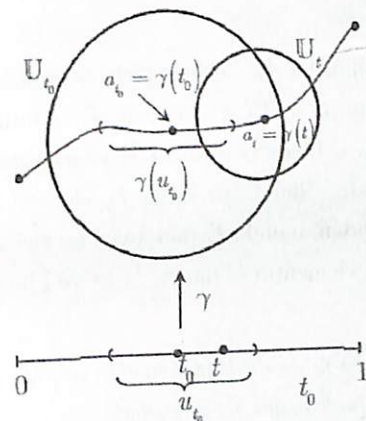
Bizga yo'l bo'yicha analitik davom ettirish tushunchasi kerak bo'ladi.

5.2.6-ta'rif. $F_t = (U_t, f_t), t \in I = [0, 1]$ kanonik elementlar oilasi va $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ yo'l berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsa,

1) Barcha $t \in I$ uchun F_t elementning a_t markazi $\gamma(t)$ bilan ustma-ust tushib, uning radiusi $R(t) > 0$ bo'lsin;

2) Har qanday $t_0 \in I$ uchun uning shunday $U_{t_0} \subset I$ bog'lamli atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy $t \in U_{t_0}$ uchun $\gamma(t) \in U_{t_0}$ va F_t element F_{t_0} elementning bevosita analitik davomi bo'lsin.

U holda F_t kanonik elementlar oilasi F_0 elementning γ yo'l bo'yicha analitik davomi deyiladi (47-chizma).



47-chizma

Yo'l bo'yicha analitik davom ettirish va elementlar zanjiri bo'yicha analitik davom ettirish tushunchalari ustma-ust tushadi [1]. Quyidagi tasdiq o'rinni.

5.2.1-teorema. (Monodromiya haqida teorema) Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}$ bir bog'lamli soha va $F(U, f)$ - markazi $a \in D$ nuqtada bo'lgan kanonik element bo'lib, boshi a nuqtada bo'lgan ixtiyoriy $\gamma \subset D$ yo'l bo'yicha analitik davom etsin. U holda F ning boshi a nuqtada bo'lgan ixtiyoriy $\gamma \subset D$ yo'l bo'yicha analitik davomi yo'lga bog'liq bo'lmay ularning oxiri bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Shunday qilib, yuqoridagi teoremaga ko'ra, bir bog'lamli D sohada F elementning barcha yo'llar bo'yicha analitik davomi D sohada holomorf funksiyani aniqlaydi. 5.2.1-teoremaning isboti [1] kitobda keltirilgan.

5.3 Analitik funksiya

Oldingi paragraflarda bayon etilgan analitik davom ettirish tushunchasi yordamida ko'p qiymatli funksiya ta'riflanadi.

5.3.1-ta'rif. Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}$ soha berilgan bo'lib, $F_0 = (U_0, f_0)$ markazi $a \in D$. $U_0 \subset D$, bo'lgan kanonik element bo'lsin. F_0 elementni davom ettirish mumkin bo'lgan, boshi a nuqtadagi, barcha $\gamma \subset D$ yo'l bo'yicha davom ettirishdan hosil bo'lgan kanonik elementlar to'plami \mathcal{F} ga D sohada F_0 elementdan hosil bo'lgan analitik funksiya deyiladi.

Ravshanki, bu tushuncha F_0 boshlang'ich elementning tanlanishiga bog'liq emas. Haqiqatdan ham, $G = (V, g)$ element \mathcal{F} analitik funksiyaga tegishli ixtiyoriy element bo'lsin. U holda G element F_0 elementdan γ yo'l bo'yicha davom ettirishdan hosil bo'ladi. Shu bilan birga F_0 element G elementdan γ^{-1} yo'l bo'yicha davom ettirishdan, hamda F_0 dan λ yo'l bo'yicha davom ettirishdan hosil bo'ladigan ixtiyoriy H elementni G dan $\gamma^{-1} \cup \lambda$ yo'l bo'yicha davom ettirishdan hosil qilish mumkin.

5.3.2-ta'rif. Agar \mathcal{F} va Φ analitik funksiyalar kamida bitta umumiy elementga ega bo'lsa, bu analitik funksiyalar teng deyiladi.

\mathcal{F} analitik funksiya kanonik elementlari doirasining birlashmasi $D = \bigcup_{\alpha > 0} U_\alpha$ soha bo'ladi. Agar D bir bog'lamli soha bo'lib, $F_0 = (U_0, f_0)$ element D sohadagi barcha yo'llar bo'yicha analitik davom etsa, u holda F_0 elementni D sohadagi yo'llar bo'yicha davom ettirishdan hosil bo'lgan \mathcal{F} analitik funksiya monodromiya haqidagi teorema ko'ra D sohada golomorf bo'ladi, ya'ni har bir $z \in D$ nuqtada doirasi bu nuqtani o'z ichiga olgan $F \in \mathcal{F}$ elementlarning qiymati bir xil bo'ladi. Agar monodromiya haqidagi teorema shartlari bajarilmasa, bu tasdiq o'rinli emas, ya'ni \mathcal{F} ga tegishli har xil elementning bitta nuqtadagi qiymati har xil bo'lishi mumkin (unga \sqrt{z} misol bo'ladi). Bu holda \mathcal{F} ko'p qiymatli analitik funksiya deyiladi.

5.3.3-ta'rif. Aytaylik, \mathcal{F} analitik funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada berilgan bo'lib, $D_1 \subset D$ qism soha bo'lsin. Agar shunday $F_1 = (U_1, f_1) \in \mathcal{F}$ element topilsa, bu elementning barcha $\gamma \subset D_1$ yo'llar bo'yicha davom ettirishdan hosil bo'lgan elementlar

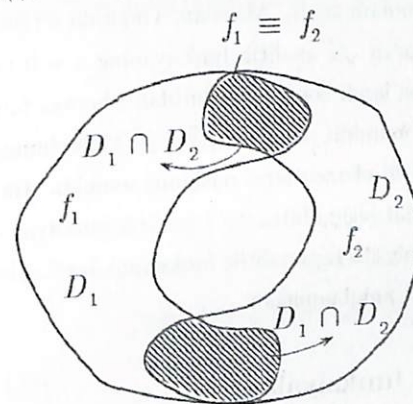
to'plami bir qiymatli, ya'ni golomorf $g \in \mathcal{O}(D_1)$ funksiyani aniqlasa, u holda (D_1, g) juftlikka \mathcal{F} analitik funksiyaning D_1 sohadagi tarmog'i deyiladi.

Agar $D_1 \subset D$ bir bog'lamli qism soha bo'lib, ixtiyoriy $\gamma \subset D_1$ yo'l bo'yicha davom etadigan $F_1 \in \mathcal{F}$ element mavjud bo'lsa, monodromiya haqidagi teorema ko'ra \mathcal{F} analitik funksiyaning D_1 sohadagi tarmog'ini ajratish mumkin.

Analitik funksiyani o'rganishda yuqoridagi keltirilgan element tushunchasini quyidagicha umumlashtirish maqsadga muvofiq bo'ladi:

\mathcal{F} analitik funksiyaning elementi deb ixtiyoriy $F = (D, f)$ juftlikni tushunish mumkin, bu yerda $D \subset \mathbb{C}$ ixtiyoriy soha, $f - \mathcal{F}$ analitik funksiyaning D sohadagi golomorf tarmog'i (bu tarmoq mavjud deb olinadi). (D, f) juftlikda $f \in \mathcal{O}(D)$ bo'lsa, u analitik element deyiladi.

5.3.4-ta'rif. Agar (D_1, f_1) va (D_2, f_2) analitik elementlar berilgan bo'lib, $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ va $D_1 \cap D_2$ to'planning kamida bitta bog'lamli komponentasida $f_1 \equiv f_2$ bo'lsa, (D_1, f_1) va (D_2, f_2) analitik elementlar bir birining bevosita analitik davomi deyiladi (48-chizma).



48-chizma

Analitik elementlarning elementlar zanjiri bo'yicha analitik davom ettirish tushunchasi kanonik elementlarning analitik davom ettirilishi kabi kiritiladi.

5.3.5-ta'rif. Agar (D_1, f_1) va (D_2, f_2) analitik elementlar berilgan bo'lib, $a \in D_1 \cap D_2$ nuqtaning biror atrofida $f_1 \equiv f_2$ bo'lsa, u holda bu elementlar a nuqtada

ekivalent deyiladi. $a \in D$ nuqtada (D, f) analitik elementga ekivalent elementlar to'plamiga analitik funktsiyaning a nuqtadagi rostoki (o'simta) deyiladi va f_a kabi belgilanadi.

Analitik funktsiyani unga tegishli rostoklarining to'plami sifatida qarash mumkin (bu tasdiqning isbotini o'quvchiga qoldiramiz).

Analitik funktsiyalarning $a \in \mathbb{C}$ nuqtadagi rostoklari ustida arifmetik amallarni bajarish mumkin. Masalan, f_z va g_z rostoklarning yig'indisi $f_z + g_z$ quyidagicha aniqlanadi:

Agar (D, f) va (G, g) mos ravishda f_z, g_z rastoglarning vakillari (elementlari) bo'lib, $D \cap G$ kesishma z nuqtaning \mathbb{U} atrofini o'z ichiga olsa $\mathbb{U} \subset D \cap G$, u holda $f_z + g_z$ yig'indi $(\mathbb{U}, f + g)$ elementga ekivalent elementlar to'plami sifatida aniqlanadi.

$f_z \cdot g_z$ ham xuddi shunday aniqlanadi. Shunday qilib, analitik funktsiyaning fikslangan $z \in \mathbb{C}$ nuqtadagi rostoklari to'plami halqa tashkil qiladi.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, analitik funktsiyalar ustida arifmetik amallar har doim ham korrekt aniqlanmaydi. Masalan, yuqorida o'rganilgan monodromiya haqidagi teorema ko'ra \sqrt{z} analitik funktsiyaning $z = 0$ nuqtani o'z ichiga olmagan $D \subset \mathbb{C}$ bir bog'lamli sohada bir biridan ishoraga farq qiladigan f_1 va f_2 tarmoqlarini ajratish mumkin. U holda $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ yig'indining elementlari sifatida $(D, 2f_1), (D, 2f_2), (D, 0)$ elementlarni olishimiz mumkin. Birinchi ikkita element analitik davom etish natijasida bitta $2\sqrt{z}$ analitik funktsiyani hosil qilsa, uchinchi element esa aynan nolga teng analitik funktsiyani hosil qiladi. Shuning uchun $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ amal korrekt aniqlanmagan.

5.4 Elementar funktsiyalar

5.4.1 $w = \sqrt{z}$ analitik funktsiya

Endi ko'p qiymatli analitik funktsiyalarga misollar keltiramiz. Dastlab, $w = \sqrt{z}$ analitik funktsiya va uning xossalari keltiramiz.

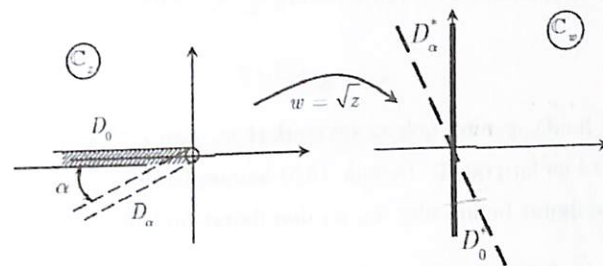
Bu funktsiyaning boshlang'ich analitik elementini

$$f_0(z) = \sqrt{|z|} e^{i \arg z / 2}, \quad -\pi < \arg z < \pi$$

formula orqali aniqlaymiz. Bu formula yordamida aniqlangan $f_0(z)$ funktsiya $D_0 = \{\mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]\}$ sohani

$$D_0^* = \{w \in \rho e^{i\psi}, \quad \frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}\}$$

sohaga o'zaro bir qiymatli akslantiradi (49-chizma).



49-chizma

$$w^2 = (f_0(z))^2 = z$$

bo'lganligi sababli, teskari funktsiyani differensiallash qoidasiga ko'ra ixtiyoriy $z \in D_0$ da

$$f_0'(z) = \frac{1}{2f_0(z)}$$

bo'ladi, ya'ni $f_0(z)$ funktsiya D_0 sohada golomorf. Shuning uchun, $F_0 = (D_0, f_0)$ bo'ladi, ya'ni $f_0(z)$ funktsiya D_0 sohada golomorf. Shuning uchun, $F_0 = (D_0, f_0)$ elementni analitik davom ettirishdan hosil bo'lgan analitik element bo'ladi. Bu elementni analitik davom ettirishdan hosil bo'lgan analitik funktsiya z ning kvadratik ildizi deyiladi va \sqrt{z} kabi belgilanadi. F_0 elementning analitik davomini quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$$

sohada golomorf bo'lgan

$$f_\alpha(z) = \sqrt{|z|} e^{i\varphi/2}, \quad -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$$

funktsiyani qaraymiz. Ravshanki, $F_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$ element barcha $\alpha \in \mathbb{R}$ larda $F_0 = (D_0, f_0)$ elementning (agar $|\alpha| < \pi$ bo'lsa) bevosita analitik davomi bo'ladi.

F_α elementlarning sohalarini birlashtirish $D = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} D_\alpha$ butun kengaytirilgan kompleks tekislik \mathbb{C} dan $z = 0, z = \infty$ nuqtalarni chiqarib tashlagan soha bo'ladi. Bu ikki nuqta D_α larning chegarasiga tegishli bo'ladi.

ekvivalent deyiladi. $a \in D$ nuqtada (D, f) analitik elementga ekvivalent elementlar to'plamiga analitik funksiyaning a nuqtadagi rostoki (o'simta) deyiladi va f_a kabi belgilanadi.

Analitik funksiyani unga tegishli rostoklarining to'plami sifatida qarash mumkin (bu tasdiqning isbotini o'quvchiga qoldiramiz).

Analitik funksiyalarning $a \in \mathbb{C}$ nuqtadagi rostoklari ustida arifmetik amallarni bajarish mumkin. Masalan, f_z va g_z rostoklarning yig'indisi $f_z + g_z$ quyidagicha aniqlanadi:

Agar (D, f) va (G, g) mos ravishda f_z, g_z rastoglarning vakillari (elementlari) bo'lib, $D \cap G$ kesishma z nuqtaning \mathbb{U} atrofini o'z ichiga olsa $\mathbb{U} \subset D \cap G$, u holda $f_z + g_z$ yig'indi ($\mathbb{U}, f + g$) elementga ekvivalent elementlar to'plami sifatida aniqlanadi.

$f_z \cdot g_z$ ham xuddi shunday aniqlanadi. Shunday qilib, analitik funksiyaning fikslangan $z \in \mathbb{C}$ nuqtadagi rostoklari to'plami halqa tashkil qiladi.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, analitik funksiyalar ustida arifmetik amallar har doim ham korrekt aniqlanmaydi. Masalan, yuqorida o'rganilgan monodromiya haqidagi teoremlarga ko'ra \sqrt{z} analitik funksiyaning $z = 0$ nuqtani o'z ichiga olmagan $D \subset \mathbb{C}$ bir bog'lamli sohada bir biridan ishoraga farq qiladigan f_1 va f_2 tarmoqlarini ajratish mumkin. U holda $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ yig'indining elementlari sifatida ($D, 2f_1$), ($D, 2f_2$), ($D, 0$) elementlarni olishimiz mumkin. Birinchi ikkita element analitik davom etish natijasida bitta $2\sqrt{z}$ analitik funksiyani hosil qilsa, uchinchi element esa aynan nolga teng analitik funksiyani hosil qiladi. Shuning uchun $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ amal korrekt aniqlanmagan.

5.4 Elementar funksiyalar

5.4.1 $w = \sqrt{z}$ analitik funksiya

Endi ko'p qiymatli analitik funksiyalarga misollar keltiramiz. Dastlab, $w = \sqrt{z}$ analitik funksiya va-uning xossalarini keltiramiz.

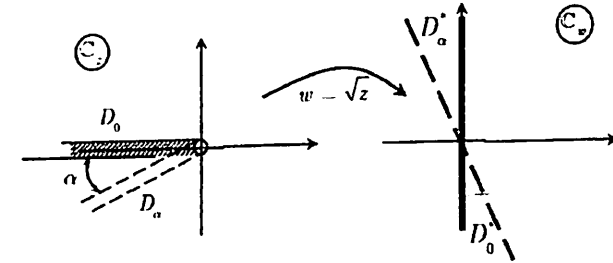
Bu funksiyaning boshlang'ich analitik elementini

$$f_0(z) = \sqrt{|z|} e^{i \arg z / 2}, \quad -\pi < \arg z < \pi$$

formula orqali aniqlaymiz. Bu formula yordamida aniqlangan $f_0(z)$ funksiya $D_0 = \{\mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]\}$ sohani

$$D_0^* = \{w \in \rho^{\mathbb{C}}, \quad \frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}\}$$

sohaga o'zaro bir qiymatli akslantiradi (49-chizma).



49-chizma

$$w^2 = (f_0(z))^2 = z$$

bo'lganligi sababli, teskari funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra ixtiyoriy $z \in D_0$ da

$$f_0'(z) = \frac{1}{2f_0(z)}$$

bo'ladi, ya'ni $f_0(z)$ funksiya D_0 sohada holomorf. Shuning uchun, $F_0 = (D_0, f_0)$ analitik element bo'ladi. Bu elementni analitik davom ettirishdan hosil bo'lgan analitik funksiya z ning kvadratik ildizi deyiladi va \sqrt{z} kabi belgilanadi. F_0 elementning analitik davomini quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$$

sohada holomorf bo'lgan

$$f_\alpha(z) = \sqrt{|z|} e^{i \arg z / 2}, \quad -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$$

funksiyani qaraymiz. Ravshanki, $F_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$ element barcha $\alpha \in \mathbb{R}$ larda $F_0 = (D_0, f_0)$ elementning (agar $|\alpha| < \pi$ bo'lsa) bevosita analitik davomi bo'ladi.

F_α elementlarning sohalari birlashmasi $D = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} D_\alpha$ butun kengaytirilgan kompleks tekislik \mathbb{C} dan $z = 0$, $z = \infty$ nuqtalarni chiqarib tashlagan soha bo'ladi. Bu ikki nuqta D_α larning chegarasiga tegishli bo'ladi.

$w = \sqrt{z}$ analitik funksiya har bir $z_0 \in D$ nuqtaga ikkita har xil qiymatlarni mos qo'yadi. Haqiqatdan ham, F_0 elementga tegishli barcha golomorf funksiyalarning z_0 nuqtadagi qiymati

$$w = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{2}} \quad (5.5)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $\varphi_0 = \arg z_0$, k - ixtiyoriy butun son.

Agar

$$w_0 = \sqrt{|z_0|} e^{i \frac{\varphi_0}{2}}$$

deb olsak, u holda w ning qolgan qiymatlari w_0 dan $e^{i \frac{\pi}{2} k}$ ko'paytuvchiga farq qiladi, ya'ni ± 1 ga farq qiladi. Demak, (5.5) munosabatning qiymatlari ikkita har xil qiymatdan iborat bo'lib, ular w_0 , w_1 dan iborat bo'ladi.

5.4.1-izoh. \sqrt{z} funksiyani kanonik element yordamida ham aniqlash mumkin. Buning uchun boshlang'ich kanonik element $G_0 = (\mathbb{U}_0, g_0)$ sifatida $\mathbb{U}_0 = \{|z-1| < 1\}$ doirani va bu doirada golomorf bo'lgan

$$g_0(z) = [1 + (z-1)]^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (z-1)^k$$

funksiyani olamiz (bu qatorni quyidagicha hosil qildik: agar $z = x$ bo'lsa,

$$g_0(x) = \sqrt{x}$$

bo'ladi. Bu haqiqiy funksiyaning binomial yoyilmasini olib, bu yoyilmani (0.2) intervaldan \mathbb{U}_0 doiraga analitik davom ettirdik). Ravshanki, G_0 element yuqorida olingan F_0 elementga ekvivalent. Chunki $z = x \in (0, 2)$ bo'lsa, $r = x$, $\varphi = 0$ bo'lib, $f_0(x) = g_0(x) = \sqrt{x}$ bo'ladi. $f_0(z)$ va $g_0(z)$ funksiyalar \mathbb{U} doirada golomorf bo'lgani uchun 3.9.1-yagonalik teoremasiga ko'ra $f_0(z) \equiv g_0(z)$ bo'ladi. 5.3.2-ta'rifga ko'ra F_0 va G_0 elementlar aniqlagan analitik funksiyalar ustma-ust tushadi.

5.4.2 $w = \sqrt{z}$ analitik funksiyaning Riman sirti

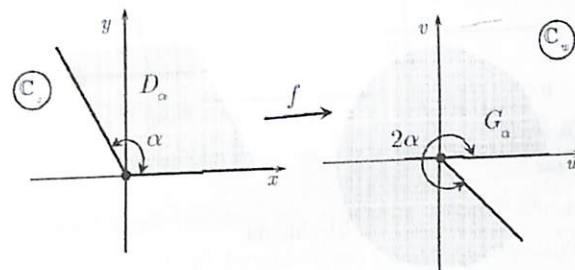
$w = \sqrt{z}$ akslantirishga teskari bo'lgan $z = f(w) = w^2$ akslantirishni qaraymiz. Bu akslantirish

$$D_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg w < \alpha\}, 0 < \alpha \leq \pi$$

sohani

$$G_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\alpha\}$$

sohaga konform va o'zaro bir qiymatli akslantiradi (50-chizma).

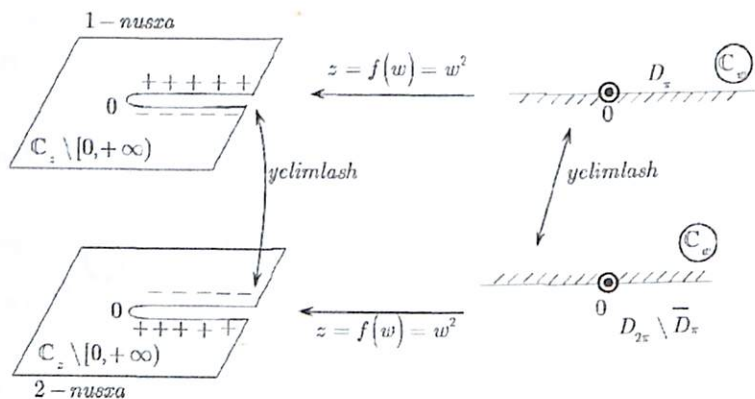


50-chizma

Agar $\pi < \alpha < 2\pi$ bo'lsa bu akslantirish bir qiymatli bo'lmaydi, ayniqrog'i $z = w^2$ akslantirish D_α sohaning har bir nuqtasida konform bo'ladi, lekin D_α sohani $f(D_\alpha) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ to'plamga o'zaro bir qiymatli akslanmaydi. Chunki agar $z \in D_\alpha$ uchun $0 < \arg z < 2\alpha - \pi$ bo'lsa bu nuqtalar ikkita aksga (proobrazga) ega bo'ladi. $\alpha = 2\pi$ bo'lganda $D_{2\pi} = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ sohaga $(0, +\infty)$ ochiq nurni qo'shib $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohaning har bir nuqtasida konform lekin $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohaga tegishli har bir z ikkita aslga ega bo'ladigan $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohani $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohaga akslantiradigan akslantirish hosil qilamiz. Boshqacha aytganda $z = f(w) = w^2$ formula $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$ sohani " $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ soha ustidagi ikki varaqli X sirt"ga akslantiruvchi konform akslantirishni aniqlaydi. Demak, $w = \sqrt{z}$ teskari akslantirish esa X sirtni $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohaga konform akslantiradi shu bilan birga bu akslantirish X da bir qiymatli funksiya bo'ladi.

Ko'rsatilgan ikki varaqli X sirtni quyidagicha tasvirlash mumkin: $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$ haqiqiy o'qning musbat qismi bilan kesilgan tekislikdan ikki nusxa olamiz va bu

tekisliklarni ustma ust qo'yamiz. Birinchi nusxaning pastki qirg'og'ini (chekkasini) ikkinchi nusxaning yuqori qirg'og'iga yelimlaymiz. Shuningdek, ikkinchi nusxaning pastki qirg'og'ini birinchi nusxaning yuqori qirg'og'iga yelimlaymiz (51-chizma).



51-chizma

Shu usulda yasalgan ikki varaqli sirt \sqrt{z} analitik funksiyaning Riman sirti deyiladi.

Aytaylik,

$$D_\pi = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg w < \pi\}$$

yuqori yarim tekislik va

$$D_{2\pi} \setminus \overline{D_\pi} = \{w \in \mathbb{C} : \pi < \arg w < 2\pi\}$$

pastki yarim tekislikning $z = f(w) = w^2$ akslantirish yordamidagi aksini mos ravishda birinchi va ikkinchi nusxa bo'lsin. Ravshanki, $z = f(w) = w^2$ akslantirish butun \mathbb{C}_w tekislikda uzluksiz va yuqoridagi qirg'oqlarni yelimlash esa bu akslantirish yordamida yuqori va quyi yarim tekisliklarni haqiqiy o'q bo'yicha yelimlashga mos keladi. Shuning uchun $z = f(w) = w^2$ akslantirish $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$ tekislikni yuqorida ko'rsatilgan yelimlash yordamida hosil bo'lgan $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ tekislik ustidagi ikki varaqli sirtga konform akslantiradi.

Misol va masalalar

5.4.1-misol. Ikki qiymatli $w = \sqrt{z}$ funksiyaning $\sqrt{z}|_{z=i} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ shartni qanoatlantiruvchi bir qiymatli tarmog'i $D = \{\text{Im } z > 0\}$ yuqori yarim tekislikni qanday sohaga akslantiradi?

5.4.2-misol. Ushbu $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, z \notin [0, i]\}$ sohani yuqori yarim tekislikka akslantiruvchi $w = f(z)$ konform akslantirishni toping.

5.4.3 $w = \text{Ln } z$ analitik funksiya

Bu funksiyani ushbu

$$D_0 = \{0 < \varphi < 2\pi\}$$

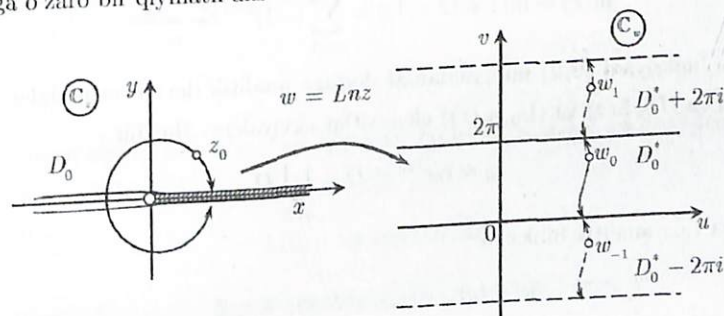
sohada va D_0 sohada berilgan

$$w = \ln z = \ln r + i\varphi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad z = re^{i\varphi} \quad (5.6)$$

funksiyadan tashkil topgan boshlang'ich elementni analitik davom ettirish yordamida aniqlash mumkin. (5.6) formula bilan aniqlangan funksiya logarifimning bosh tarmog'i deyiladi. Ravshanki, $w = \ln z$ funksiya D_0 sohani

$$D_0^* = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } w < 2\pi\}$$

sohaga o'zaro bir qiymatli akslantiradi (52-chizma).



52-chizma

Ko'rsatkichli funksiyaning xossasiga ko'ra

$$e^w = e^{\ln r + i\varphi} = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} = re^{i\varphi} = z$$

bo'lganligi uchun (5.6) formula bilan aniqlangan funksiya ko'rsatkichli funksiyaga teskari funksiya bo'ladi. Shuning uchun ixtiyoriy $z \in D_0$ nuqtalarda

$$\frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{e^w}$$

bo'ladi. Demak, $F_0 = (D_0, \ln z)$ - analitik element bo'ladi.

F_0 elementning analitik davomini yuqorida ko'rilgan misolga o'xshab $F_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) elementlar yordamida aniqlash mumkin, bu yerda

$$D_\alpha = \{\alpha < \varphi < 2\pi + \alpha\}.$$

$$f_\alpha(z) = \ln r + i\varphi, \quad \alpha < \varphi < 2\pi + \alpha.$$

Ravshanki, $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} D_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$.

$\ln z$ funksiyani kanonik elementlar yordamida ham aniqlash mumkin. Boshlang'ich kanonik element $G_0 = (U_0, g_0)$ sifatida

$$U_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$$

doirani va bu doirada golomorf bo'lgan

$$g_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

funksiyani olamiz. Ravshanki, $g_0(z)$ funksiya quyidagi

$$\ln(x) = \ln(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

haqiqiy funksiyani $(0, 2)$ intervaldan U doiraga analitik davom ettirishdan hosil bo'lgan va $(D_0, \ln z)$ va $(U_0, g_0(z))$ elementlar ekvivalent. Har bir

$$z_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \in D = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} D_\alpha$$

nuqtaga $\ln z$ analitik funksiya

$$w = \ln r_0 + i(\varphi_0 + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{5.7}$$

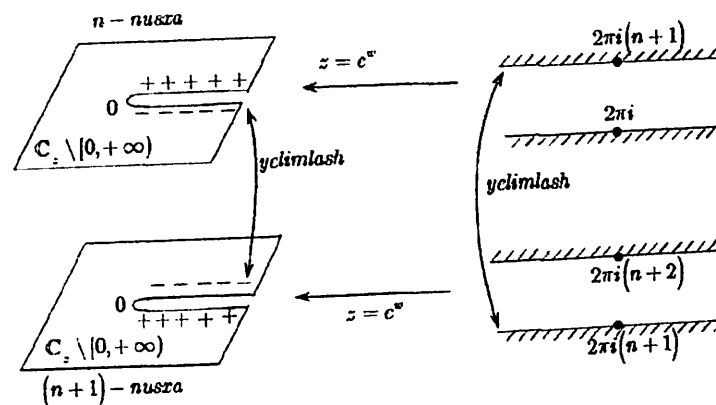
formula bilan aniqlanadigan sanoqli sondagi qiymatlar to'planini mos qo'yadi. Bu qiymatlar har xil bo'lib $\operatorname{Re} w = \ln r_0$ to'g'ri chiziqda yotadi (52-chizma) va ular z_0 sonining logarifmi deb hisoblanadi. Demak, har bir $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$ kompleks sonda $\ln z$ analitik funksiya cheksiz ko'p qiymatga ega bo'ladi.

5.4.4 $w = \operatorname{Ln} z$ analitik funksiyaning Riman sirti

$w = \operatorname{Ln} z$ akslantirishga teskari bo'lgan $z = e^w$ akslantirish har bir

$$D_n = \{w \in \mathbb{C} : 2\pi n < \operatorname{Im} z < 2\pi(n+1)\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

yo'lakni $\mathbb{C}_z \setminus [0, +\infty)$ haqiqiy o'qning musbat qismi bilan kesilgan tekislikka konform akslantiradi. Xuddi oldingi paragrafda keltirilgan misoldagi kabi $z = e^w$ akslantirish \mathbb{C}_w tekislikni $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ tekislik ustidagi cheksiz varaqli sirtga konform akslantirish ko'rsatiladi. Bu yerda cheksiz varaqli sirt kesilgan $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ tekislikdan sanoqli sondagi nusxa olib ularni ustma ust qo'yib n - nusxaning pastki qirg'og'ini $(n+1)$ - nusxaning yuqori qirg'og'i bilan yelimlashdan yasaladi (53-chizma).



53-chizma

Bu yasalgan sirtida $w = \operatorname{Ln} z$ bir qiymatli bo'ladi, ya'ni bu sirtni \mathbb{C} tekislikka konform akslantiradi.

Misol va masalalar

5.4.3-misol. Quyidagi logarifmlarning barcha qiymatlarini toping:

1. $\operatorname{Ln} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.
2. $\operatorname{Ln} (2 - 3i)$.
3. $\operatorname{Ln} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, bu yerda $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.4.4-misol. $z_0 = i$ nuqtani $w_0 = \frac{5\pi i}{2}$ nuqtaga o'tkazadigan $w = \operatorname{Ln} z$ logarifmning bir qiymatli tarmog'i yordamida $D = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-\infty; 0]\}$ sohaning aksini toping.

5.4.5-misol. Ushbu fikrlash ketma-ketligidagi 1. Bernulli paradoksiga olib keladigan xatoni toping:

- 1) $(-z)^2 = z^2$.
- 2) $\text{Ln}[(-z)^2] = \text{Ln}(z^2)$.
- 3) $\text{Ln}(-z) + \text{Ln}(-z) = \text{Ln}z + \text{Ln}z$.
- 4) $2\text{Ln}(-z) = 2\text{Ln}z$.

Demak, ixtiyoriy $z \neq 0$ uchun

$$\text{Ln}(-z) = \text{Ln}(z).$$

5.4.5 Teskari trigonometrik funksiyalar

Bu funksiyalar kvadrat ildiz va logarifm orqali ifodalanadi. Hozir arkkosinus funksiyaning shunday ifodasini topamiz. Buning uchun

$$\cos w = z$$

yoki

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

tenglamani yechib,

$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1} \quad (5.8)$$

munosabatni hosil qilamiz. (Kvadrat ildiz ikki qiymatli bo'lgani uchun $\sqrt{z^2 - 1}$ ifoda oldiga \pm ishlarni yozmadik). Ushbu

$$\frac{1}{z - \sqrt{z^2 - 1}} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

munosabatni hisobga olib (5.8) tenglikdan

$$w = \text{Arccos } z = \frac{1}{i} \text{Ln}(z - \sqrt{z^2 - 1}) = i \text{Ln}z(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

tenglikni hosil qilamiz. Xuddi shunga o'xshash formulalar qolgan teskari trigonometrik funksiyalar uchun ham topiladi. Masalan,

$$\begin{aligned} \text{Arcsin } z &= -i \text{Ln}z(iz + \sqrt{1 - z^2}), \\ \text{Arctgz} &= -\frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} \end{aligned}$$

formulalar o'rinli.

Misol va masalalar

5.4.6-misol. $\sin z + \cos z = 2$ tenglamaning barcha ildizlarini toping.

5.4.7-misol. Ushbu $\text{Arccos } \frac{1}{2}$ ifodaning barcha qiymatlarini toping.

5.4.8-misol. Quyidagi tengliklarni isbotlang:

1. $\text{Arctg } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{z-i}{z+i}$.
2. $\text{Arsh } z = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$.
3. $\text{Arcch } z = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$.
4. $\text{Arcthz} = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z}$.
5. $\text{Arccthz} = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{z-1}$.

5.4.9-misol. Ushbu $D = \{\text{Im } z > 0\}$ sohaning $w = \text{arcsin } z$, $w(0) = 0$ akslantirish yordamida aksini toping.

5.4.6 $w = z^a$ -umumiy darajali funksiya ($a \in \mathbb{C}$)

Bu funksiya

$$w = z^a = e^{a \text{Ln}z} \quad (5.9)$$

munosabat yordamida aniqlanadi. Agar $a \in \mathbb{R}$ bo'lsa, quyidagi uchta holni alohida qarab chiqamiz:

1-hol. a -butun bo'lsin. Bu holda (5.9) ko'rinishdagi funksiya ko'rsatkichli funksiya davriy bo'lganligi sababli bir qiymatli bo'ladi. Agar $a > 0$ bo'lsa, u funksiya \mathbb{C} da, $a < 0$ bo'lsa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da golomorf bo'ladi.

2-hol. $a = \frac{p}{q}$ -ratsional son bo'lsin. Bu holda (5.9) funksiya

$$w = \sqrt[q]{z^p}$$

analitik funksiya bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $z \neq 0$, $z \neq \infty$ nuqtalarda q qiymatli funksiya bo'ladi.

3-hol. a -irratsional son bo'lsin. Bu holda $a \text{Ln}z$ ning bir biridan $2a\pi ik$ ($k \in \mathbb{Z}$) ga farq qiladigan har xil qiymatlariga $e^{a \text{Ln}z}$ analitik funksiyaning har xil qiymatlari mos keladi. Demak, (5.9) ko'rinishdagi funksiya har bir $z \neq 0$, $z \neq \infty$ songa cheksiz ko'p sondagi qiymatlarni mos qo'yadi.

Endi $a = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) kompleks son bo'lsin. Agar $z = re^{i\varphi}$ bo'lsa,

$$z^a = e^{(\alpha + i\beta)[\ln r + i(\varphi + 2\pi k)]} = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2\pi k)} \cdot e^{i\alpha(\varphi + 2\pi k) + i\beta \ln r}$$

bu yerda k -butun son. Ravshanki, (5.9) funksiya bu holda har bir $z \neq 0$, $z \neq \infty$ songa cheksiz ko'p qiymatlar to'plamini mos qo'yadi. Masalan,

$$i^k = e^{i \ln i} = e^{i(\frac{\pi}{2} + i2\pi k)} = e^{-\frac{\pi}{2} + i2\pi k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

bo'ladi.

5.4.10-misol. Quyidagi darajalarning barcha qiymatlarini toping:

$$1. 1^{\sqrt{2}}. \quad 2. \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^i. \quad 3. (-\sqrt{3})^{\sqrt{2}}. \quad 4. (3-4i)^{1+i}$$

5.4.11-misol. z^{2n} , $(z^2)^n$ va $(z^n)^2$ sonlarning qiymatlar to'plami ustma-ust tushadimi?

5.4.12-misol. α kompleks sonining qanday qiymatlarida z^{3n} va $(z^3)^n$ sonlarning qiymatlar to'plami ustma-ust tushadi.

BOB 6

ASOSIY GEOMETRIK PRINSIPLAR

6.1 Argument prinsipi. Rushe teoremasi

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $a \in \mathbb{C}$ nuqtaning o'yilgan $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$ atrofida golomorf va bu atrofda nolga aylanmasin.

6.1.1-ta'rif. Quyidagi $\frac{f'(z)}{f(z)}$ nisbatga $f(z)$ funksiyaning logarifmik hosilasi deyiladi, bu nisbatning a nuqtadagi chegirmasiga esa logarifmik chegirmasi deyiladi:

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f'(z)dz}{f(z)}, \quad 0 < \rho < r.$$

Endi meromorf funksiyaning noli va qutblarida logarifmik chegirmasini hisoblaymiz. Aytaylik, $a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiyaning n - tartibli noli bo'lsin. U holda a nuqtaning biror U atrofida

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\varphi(z)$ funksiya $z = a$ nuqtaning U atrofida nolga teng bo'lmagan golomorf funksiya. Demak, bu U atrofda

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{[(z-a)^n \varphi(z)]'}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1} \varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)}{(z-a)^n \varphi(z)} = \\ &= \frac{1}{z-a} \cdot \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \psi(z), \end{aligned}$$

bu yerda, $\psi(z)$ funksiya U atrofda golomorf va $\psi(a) = n \neq 0$ bo'ladi. U holda

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = n$$

bo'ladi.

Endi, $a \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ golomorf funksiyaning p - tartibli qutb maxsus nuqtasi bo'lsin. U holda $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ funksiya a nuqtada p - tartibli nolga ega bo'ladi. Ravshanki.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{g'(z)}{g(z)}$$

bo'ladi. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = -\operatorname{res}_{z=a} \frac{g'(z)}{g(z)} = -p$$

tenglikni hosil qilamiz.

6.1.1-teorema. Faraz qilaylik. $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada meromorf bo'lib, $G \in D$ chegarasi bo'lakli silliq va ∂G chegarada $f(z)$ funksiyaning nollari va qutblari yotmagan soha bo'lsin. Agar $N(f, G)$ va $P(f, G)$ sonlar mos ravishda $f(z)$ funksiyaning G sohadagi nollari va qutblarining umumiy soni bo'lsa, u holda

$$N(f, G) - P(f, G) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda har bir nol va qutb tartibi necha bo'lsa, ularning soni shuncha deb olinadi.

Isbot. $G \in D$ bo'lganligidan $f(z)$ funksiya G da chekli sondagi a_1, a_2, \dots, a_l nollarga va b_1, b_2, \dots, b_m chekli sondagi qutblarga ega bo'ladi. ∂G chegarada $f(z)$ funksiyaning nollari va qutblari bo'lmaganligi uchun $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ funksiya ∂G chegaraning biror atrofida golomorf bo'ladi. Bu funksiyaga Koshining chegirmalar haqidagi 4.1.1-teoremasini qo'llab

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\nu=1}^l \operatorname{res}_{z=a_\nu} g(z) + \sum_{\nu=1}^m \operatorname{res}_{z=b_\nu} g(z)$$

tenglikni hosil qilamiz. Yuqorida keltirilgan hisoblashlarga ko'ra tenglikning o'ng tomoni $N(f, G) - P(f, G)$ ayirmaga teng. Teorema isbot bo'ldi. \square

6.1.1-teoremaga geometrik talqin ham berish mumkin. G sohaning chegarasi ∂G ni $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ egri chiziq deb qaraymiz. $\frac{f'(z(t))}{f(z(t))}$ funksiyaning bu egri

chiziq bo'yicha boshlang'ich funksiyasi $\Phi(t)$ bo'lsin. U holda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_{\partial G} \frac{f'}{f} dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \quad (6.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ravshanki, $\Phi(t) = \ln f(z(t))$, bu yerda \ln orqali logarifmik funksiyaning ∂G egri chiziqqa uzluksiz o'zgaradigan tarmog'i belgilangan. Ma'lumki, $\operatorname{Ln} f = \ln |f| + i \arg f$ bo'lib, $\ln |f(z)|$ funksiya bir qiymatli bo'lgani uchun yuqorida ko'rsatilgan tarmoqni ajratish uchun $\arg f$ ning ∂G yo'lida uzluksiz o'zgaruvchi tarmog'ini olish yetarli. $\ln |f(z)|$ funksiyaning yopiq ∂G yo'l bo'yicha orttirmasi nolga teng bo'lganligi uchun

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = i \{ \arg f(z(\beta)) - \arg f(z(\alpha)) \}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar $\Delta_{\partial G} \arg f = \arg f(z(\beta)) - \arg f(z(\alpha))$ deb belgilasak, (6.1) tenglikni quyidagicha yozamiz:

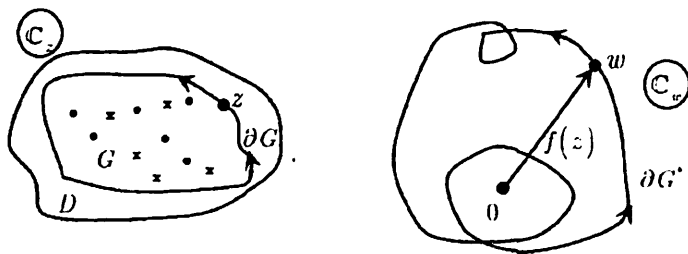
$$\int_{\partial G} \frac{f'}{f} dz = i \Delta_{\partial G} \arg f.$$

Demak, 6.1.1-teoremani quyidagicha yozish mumkin.

6.1.2-teorema. (Argument prinsipi) Agar 6.1.1-teoremaning shartlari bajarilsa, $N - P$ ayirma $f(z)$ funksiya argumentining ∂G chegarani aylanib o'tgandagi orttirmasini 2π ga bo'lganga teng:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f. \quad (6.2)$$

Endi $\Delta_{\partial G} \arg f$ ifodaning geometrik talqini o'rganamiz. Aytaylik, $w = f(z)$ akslantirish ∂G egri chiziqni ∂G^* egri chiziqqa akslantirsin. Agar z nuqta ∂G yopiq egri chiziqni to'liq aylanib chiqqanda unga mos nuqta C_w tekislikdagi yopiq ∂G^* egri chiziqni ifodalaydi. ∂G yopiq egri chiziqda $f(z)$ funksiya argumentining o'zgarishi w nuqta ∂G^* bo'yicha harakatlanadigan $w = f(z)$ vektorning $w = 0$ nuqta atrofini aylanishlar soni bilan aniqlanadi (54-chizma). Agar $w = f(z)$ vektor $w = 0$ nuqta atrofini biror marta ham to'la aylanib o'tmasa, u holda $\Delta_{\partial G} \arg f = 0$ bo'ladi.



54-chizma

Argument prinsipidan foydalanib holomorff funksiyaning sohadagi nollari sonini hisoblashga imkon beradigan quyidagi tasdiqni isbotlaymiz.

6.1.3-teorema. (Rushe) Aytaylik, $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar chegarasi bo'lakli silliq D sohaning yopiq'ida holomorff bo'lib. ∂D da

$$|f(z)| > |g(z)|$$

bo'lsin. U holda f va $f + g$ funksiyalarning D sohadagi nollari soni teng bo'ladi.

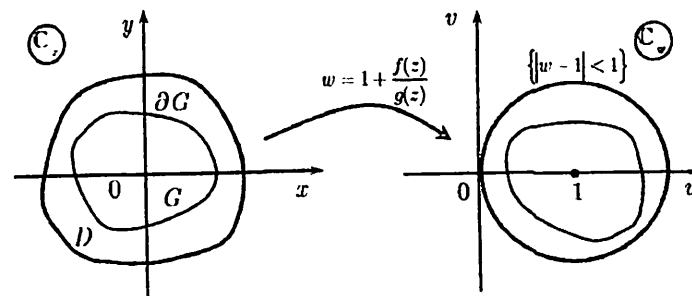
Isbot. Barcha $z \in \partial G$ nuqtalarda $|f(z)| > |g(z)|$ bo'lganligidan $f(z)$ va $f(z) + g(z)$ funksiyalar ∂G chegarada nolga teng bo'lmaydi. Shuning uchun ∂G da

$$f + g = f \left(1 + \frac{g}{f} \right)$$

bo'lib.

$$\Delta_{\partial G}(\arg(f + g)) = \Delta_{\partial G} \arg f + \Delta_{\partial G} \arg \left(1 + \frac{g}{f} \right) \quad (6.3)$$

bo'ladi. ∂G chegarada $\left| \frac{g}{f} \right| < 1$ bo'lgani uchun $w(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ akslantirish yordamida ∂G ning obrazi $\{|w - 1| < 1\}$ doirada to'liq yotadi. Shuning uchun z nuqta ∂G ni to'liq aylanganda $w(z)$ nuqta $w = 0$ koordinata boshini to'liq aylana olmaydi, ya'ni $\Delta_{\partial G} \left(1 + \frac{g}{f} \right) = 0$ bo'ladi (55-chizma).



55-chizma

U holda (6.3) formuladan

$$\arg_{\partial G}(f + g) = \Delta_{\partial G} \arg f$$

tenglik kelib chiqadi. Argument prinsipiga ko'ra teoremaning tasdig'i o'rinli bo'ladi. □

Rushe teoremasidan algebraning asosiy teoremasi osongina kelib chiqadi.

6.1.4-teorema. Har qanday n darajali P_n ko'phad \mathbb{C} kompleks tekislikda n ta ildizga ega bo'ladi.

Isbot. P_n ko'phad cheksiz uzoqlashgan nuqtada qutbga ega bo'lgani uchun uning barcha ildizlari biror $\{|z| < R\}$ doirada yotadi. $P_n(z)$ ko'phadni quyidagicha yozamiz.

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = f(z) + g(z).$$

Bu yerda $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$. R ni shunday olishimiz mumkinki, $|z| = R$ aylanada $|f(z)| > |g(z)|$ bo'lsin. Rushe teoremasiga ko'ra $P_n(z)$ ko'phadning $\{|z| < R\}$ doiradagi nollari soni $f(z) = a_0 z^n$ ko'phadning nollari soni bilan ustma-ust tushadi. Demak, $P_n(z)$ ko'phad $\{|z| < R\}$ doirada n ta ildizga ega bo'ladi. □

Misol va masalalar

6.1.1-misol. Ushbu $z^4 + 10z + 1$ ko'phadning $V = \{1 < |z| < 2\}$ halqada ildizlari sonini toping.

6.1.2-misol. Ushbu

$$z^7 - 5z^5 + 2z^3 - 1 = 0$$

tenglamaning $\{|z| < 1\}$ doirada nechta ildizi borligi (Rushe teoremasidan foydalanib) aniqlansin.

6.1.3-misol. Ushbu

$$z + \lambda - e^z = 0 \quad (\lambda > 1)$$

tenglamaning $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ yarim tekislikda yagona ildizga (haqiqiy ildizga) ega bo'lishi isbotlansin.

6.1.4-misol. Agar $\varphi(z)$ funksiya $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ yopiq doirada golomorf bo'lib, ixtiyoriy $z \in \bar{U}$ uchun $|\varphi(z)| < 1$ bo'lsa, u holda ushbu

$$z^n = \varphi(z)$$

tenglama $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birlik doirada nechta ildizga ega?

6.1.5-misol. Ushbu $e^z - 4z^n + 1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) tenglama $\{|z| < 1\}$ doirada nechta ildizga ega bo'ladi?

6.1.6-misol. Ushbu $z \sin z = 1$ tenglama faqat haqiqiy ildizlarga ega bo'lishini isbotlang.

6.2 Sohaning saqlanish prinsipi

6.2.1-teorema. Agar $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada golomorf bo'lib, $f \neq \text{const}$ bo'lsa, u holda $D^* = f(D)$ ham soha bo'ladi.

Isbot. D^* to'planning bog'lamli va ochiq ekanligini ko'rsatamiz. D^* to'planga tegishli ixtiyoriy w_1 va w_2 nuqtalarni olamiz. $z_1 \in D$ nuqta w_1 nuqtaning asllaridan (proobrazlaridan) biri, $z_2 \in D$ esa w_2 nuqtaning asllaridan biri bo'lsin. D bog'lamli to'plam bo'lgani uchun boshi z_1 nuqtada oxiri z_2 nuqtada bo'lgan $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ yo'l mavjud. $f(z)$ funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun $\gamma^* = f \circ \gamma$ yo'l D^* da yotuvchi w_1 va w_2 nuqtalarni birlashtiruvchi yo'l bo'ladi. Demak, D^* bog'lamli to'plam.

Endi D^* ga tegishli ixtiyoriy w_0 nuqtani olamiz. $z_0 \in D$ nuqta w_0 nuqtaning asllaridan biri bo'lsin. U holda D ochiq to'plam bo'lganligi uchun shunday $U = \{|z - z_0| < r\} \in D$ doira mavjudki, $\bar{U} = \{|z - z_0| \leq r\}$ yopiq doira w_0 nuqtaning z_0 nuqtadan farqli boshqa asllarini o'z ichiga olmaydi. (Bu tasdiq $f \neq \text{const}$ bo'lganda $f(z) - w_0$ funksiyaning nollari yakkalanligidan kelib chiqadi).

Aytaylik, $r^* = \min_{z \in \partial U} |f(z) - w_0|$ bo'lsin. ∂U da $f(z) \neq w_0$ bo'lganligi uchun $r^* > 0$ bo'ladi. Endi $U^* = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < r^*\} \subset D^*$ bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun U^* doiraga tegishli ixtiyoriy w_1 nuqta olamiz, ya'ni $|w_1 - w_0| < r^*$. Endi $f(z) - w_1$ funksiyaning $f(z) - w_1 = (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1)$ ko'rinishda yozib olamiz. Ravshanki, agar $z \in \partial U$ bo'lsa,

$$|f(z) - w_0| \geq r^* > |w_0 - w_1|$$

munosabat o'rinni bo'ladi. Demak, U doirada $f(z) - w_0$ va $w_0 - w_1$ funksiya Rushe teoremasini qo'llash mumkin. Rushe teoremasiga ko'ra $f(z) - w_1$ funksiyaning U doiradagi nollari soni $f(z) - w_0$ funksiyaning nollari soni bilan bir xil bo'ladi, ya'ni $f(z) - w_1$ funksiya U doirada hech bo'lmaganda bitta nolga ega bo'ladi, chunki $z_0 \in U$ nuqta $f(z) - w_0$ funksiyaning noli. Demak, $w_1 \in f(U)$. w_1 nuqtaning ixtiyoriyligidan $U^* \subset f(U) \subset D^*$ bo'ladi. Bundan D^* to'planning ochiq to'plam ekanligi kelib chiqadi. \square

6.2.1-izoh. Bu teoremda $f(z)$ funksiyaning golomorflik sharti muhim. Masalan, $f(z) = x^2 + iy$, $D = \{|z| < 1\}$ bo'lsin. Ravshanki, $f(z)$ funksiya D doirada uzluksiz bo'lib, uning vertikal diametrini (D ning ichki nuqtalarini) $f(D)$ ning chegaraviy nuqtalariga o'tkazadi. Demak, $f(D)$ - ochiq to'plam emas.

6.3 Modulning maksimum prinsipi. Shvarts lemmasi

6.3.1-teorema. Agar $f(z)$ funksiya $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ sohada golomorf bo'lib, $z_0 \in D$ nuqtada $|f(z)|$ lokal maksimumiga erishsa, u holda $f(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $f \neq \text{const}$ bo'lsin. $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$ doirani qaraymiz. Bu doirada $|f(z)|$ funksiya z_0 nuqtada maksimumga erishsin, ya'ni barcha $z \in U$ uchun $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ bo'lsin. U holda sohaning

saqlanish prinsipiga ko'ra $f(U)$ to'plam markazi $w_0 = f(z_0)$ nuqtada bo'lgan $U^* = \{|w - w_0| < \rho\}$ doirani o'z ichiga oladi. U^* doirada shunday w_1 nuqta topiladiki, uning uchun $|w_1| > |w_0|$ bo'ladi. U holda w_1 nuqtaning asli $z_1 \in U$ nuqtada $|f(z_1)| \geq |f(z_0)|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa $|f(z)|$ funksiyaning z_0 nuqtada lokal maksimumga erishishiga zid. Demak, $f \equiv \text{const}$ bo'ladi \square

6.3.2-teorema. Agar $f(z)$ funksiya chegaralangan D sohada golomorf va uning yopiq'i \bar{D} da uzluksiz bo'lsa, u holda $|f(z)|$ maksimumga ∂D chegarada erishadi.

Isbot. Ravshanki, agar $f \equiv \text{const}$ bo'lsa, teorema tasdiqi o'rinli. Agar $f(z) \neq \text{const}$ bo'lsa, u holda $|f(z)|$ funksiya \bar{D} uzluksiz bo'lganligi uchun bu funksiya \bar{D} da maksimum qiymatiga erishadi. Shu bilan birga 6.3.1-teoremaga ko'ra $|f(z)|$ funksiya D da maksimumga erisha olmaydi. Demak, $|f(z)|$ funksiya maksimumga ∂D da erishadi. \square

6.3.1-izoh. Bu teoremada D sohaning chegaralanganligi muhim. Masalan, $D = \{\text{Im } z > 0\}$, $f(z) = \sin z$ bo'lsin, u holda har qanday $z \in \partial D = \mathbb{R}$ uchun $|f(z)| \leq 1$ bo'ladi. Lekin agar $y \rightarrow \infty$ intilsa u holda $|f(iy)| \rightarrow \infty$ bo'ladi, bu esa $f(z)$ funksiyani chegaralanmaganligini bildiradi.

6.3.2-izoh. 6.3.1-teorema tasdiqi umuman olganda modulning minimumi uchun o'rinli emas. Haqiqatdan ham, agar $f(z) = z$ funksiyani $\{|z| < 1\}$ doirada qarasaq, $|f|$ minimumga $z = 0$ nuqtada erishadi.

Shunga qaramay quyidagi tasdiq o'rinli.

6.3.3-teorema. Agar $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada golomorf bo'lib, D sohada $f(z) \neq 0$ va $z_0 \in D$ nuqtada $|f(z)|$ lokal minimumga erisha, u holda $f(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi

6.3.3-teoremani isbotlash uchun 6.3.1-teoremani $\frac{1}{f(z)}$ funksiyaga qo'llash yetarli.

6.3.1-lemma. (Shvarts lemmasi.) Agar $f(z)$ funksiya $U = \{|z| < 1\}$ birlik doirada golomorf bo'lib, $f(0) = 0$ va har bir $z \in U$ da $|f(z)| \leq 1$ bo'lsa, u holda barcha $z \in U$ da

$$|f(z)| \leq |z| \quad (6.4)$$

bo'ladi. Shu bilan birga biror z_0 nuqtada (6.4) munosabatda tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(z) = e^{i\theta} z$ bo'ladi ($\theta \in \mathbb{R}$ - o'zgarmas son).

Isbot. Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{agar } z \in U \setminus \{0\} \text{ bo'lsa,} \\ f'(0), & \text{agar } z = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

$g(z)$ funksiya U doirada golomorf bo'ladi. Ravshanki, $g(z)$ funksiya $U \setminus \{0\}$ da golomorf. Endi $z = 0$ nuqtada uning golomorfligini ko'rsatamiz. $f(0) = 0$ bo'lganligi uchun $f(z)$ funksiyaning koordinata boshi atrofidagi Teylor qatori

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

ko'rinishda bo'ladi. U holda bu atrofda

$$g(z) = c_1 + c_2 z + \dots$$

bo'ladi. Bundan esa yuqoridagi ikkita qatorning yaqinlashish radiuslari teng bo'lganligi uchun $g(z)$ funksiya $z = 0$ nuqtada golomorf ekanligi kelib chiqadi. Ixtiyoriy $U_r = \{|z| < r\}$, ($r < 1$) doirani qaraymiz. 6.3.2-teoremaga ko'ra $|g(z)|$ funksiya maksimumga $\gamma_r = \{|z| = r\}$ chegarada erishadi. $|f(z)| \leq 1$ bo'lganligi uchun U_r da

$$|g(z)| \leq \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r} \quad (6.5)$$

bo'ladi. $z \in U_r$ ni fiksirlab (6.5) tengsizlik barcha $r \in (0, 1)$ da bajarilganligi uchun bu tengsizlikda $r \rightarrow 1 - 0$ limitga o'tish mumkin. Natijada $|g(z)| \leq 1$ yoki $|f(z)| \leq |z|$ tengsizlikni hosil qilamiz. Demak, U_r doirada

$$|f(z)| \leq |z|$$

bo'ladi. U_r doiraning ixtiyoriyligidan bu tengsizlikning U doirada o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Agar biror $z \in U \setminus \{0\}$ da $|f(z_0)| = |z_0|$ bo'lsa, u holda $|g(z)|$ funksiya z_0 ichki nuqtada lokal maksimumga erishadi. 6.3.1-teoremaga ko'ra $g(z)$ funksiya moduli 1 ga teng bo'lgan o'zgarmas funksiya bo'ladi, ya'ni $g(z) \equiv e^{i\theta}$ yoki $f(z) \equiv e^{i\theta} z$ \square

Quyidagi tasdiqni mustaqil isbotlang.

6.3.2-lemma. (*Shvarts lemmasining umumlashmasi*). Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $\mathbb{U}_r = \{|z| < r\}$ doirada holomorfl bo'lib, biror $z_0 \in \mathbb{U}_r$ nuqtada $f(z_0) = 0$ bo'lsin. Agar $\forall z \in \mathbb{U}_r$ da $|f(z)| \leq M$ bo'lsa, u holda $\forall z \in \mathbb{U}_r$ da ushbu

$$|f(z)| \leq M r \frac{|z - z_0|}{|r^2 - z_0 z|}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

***Eslatma.** Agar bu 6.3.2-lemmada $r = M = 1$ va $z_0 = 0$ bo'lsa, 6.3.1-Shvarts lemmasi kelib chiqadi.

Misol va masalalar

Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

6.3.1-tasdiq. Agar $f(z)$ funksiya $\bar{\mathbb{U}} = \{|z| \leq 1\}$ yopiq doirada holomorfl bo'lib, $|f(z)| \leq \delta$ bo'lsa, u holda $|f'(0)| \leq \delta$ bo'ladi.

6.3.2-tasdiq. Aytaylik, $f(z)$ funksiya $\mathbb{U} = \{|z| < 1\}$ doirada holomorfl bo'lib, \mathbb{U} doirada $|f(z)| \leq 1$ bo'lsin va $f(z) = z$ tenglama \mathbb{U} doirada ikkita turli $z_1 \neq z_2$ yechimga ega bo'lsin. U holda $f(z) \equiv z$ bo'ladi.

6.3.1-misol. Aytaylik, bizga $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ yuqori yarim tekislikda holomorfl va chegaralangan, hamda \bar{D} da uzluksiz bo'lgan $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $z \in \partial D = \mathbb{R}$ nuqta uchun $|f(z)| \leq 1$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $z \in \bar{D}$ nuqta uchun $|f(z)| \leq 1$ bolishini isbotlang.

6.3.2-misol. Aytaylik, f_1, f_2, \dots, f_n funksiyalar chegaralangan D sohada holomorfl va uning \bar{D} yopig'ida uzluksiz bo'lsin. \bar{D} da aniqlangan $|f_1(z)| + |f_2(z)| + \dots + |f_n(z)|$ funksiya o'zining maksimumiga ∂D da erishishini isbotlang.

6.3.3-misol. Agar $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{O}(D)$ bo'lib,

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| + \dots + |f_n(z)| \equiv \text{const}$$

bo'lsa u holda f_1, f_2, \dots, f_n funksiyalar o'zgarmasdan iborat ekanini isbotlang.

6.3.4-misol. Kompleks tekislikda $z = 0$ nuqta atrofida holomorfl va ushbu

$$|f(z)|^2 = 1 + |z|^2$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud emasligini isbotlang.

6.4 Kompaktlik prinsipi

6.4.1-ta'rif. Aytaylik, D sohada $\mathcal{F} = \{f\}$ funksiyalar sinfi berilgan bo'lsin. Agar har qanday $K \in D$ to'plam uchun shunday $M(K)$ o'zgarmas topilsaki, barcha $z \in K$ va barcha $f \in \mathcal{F}$ uchun $|f(z)| \leq M$ bo'lsa, u holda $\mathcal{F} = \{f\}$ funksiyalar sinfi lokal tekis chegaralangan deyiladi.

6.4.2-ta'rif. Agar har qanday $K \in D$ va har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ son topilsaki, $|z' - z''| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $z', z'' \in K$ va ixtiyoriy $f \in \mathcal{F}$ uchun

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

bo'lsa, $\mathcal{F} = \{f\}$ funksiyalar sinfi lokal tekis darajada uzluksiz deyiladi.

6.4.1-teorema. Agar D sohada holomorfl funksiyalar sinfi lokal tekis chegaralangan bo'lsa, u holda bu sinf lokal tekis darajada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $K \in D$ bo'lib, K va ∂D to'plamlar orasidagi masofa 2ρ bo'lsin, ya'ni

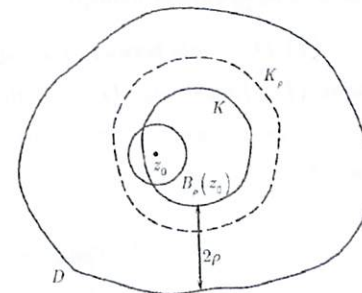
$$\rho = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \partial D) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{z \in K \\ \zeta \in \partial D}} |z - \zeta|.$$

Agar $D = \mathbb{C}$ yoki $D = \bar{\mathbb{C}}$ bo'lsa ρ sifatida ixtiyoriy musbat sonni olish mumkin.

Quyidagi to'plamni qaraymiz,

$$K_\rho = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq \rho\}.$$

Ravshanki, $K_\rho \in D$ (56-chizma).



56-chizma

Teorema shartiga ko'ra shunday $M(K_\rho)$ o'zgarimas topiladiki, barcha $z \in K_\rho$ va barcha $f \in \mathcal{F}$ uchun $|f(z)| \leq M$ bo'ladi. Ixtiyoriy $z_0 \in K$ nuqtani qaraymiz. U holda $B_\rho(z_0) = \{|z - z_0| < \rho\} \in K_\rho$ bo'lib, barcha $z \in K_\rho$ va barcha $f \in \mathcal{F}$ uchun

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z)| + |f(z_0)| \leq 2M$$

bo'ladi. Endi $B_\rho(z_0)$ doirani $\mathbb{U} = \{|\zeta| < 1\}$ birlik doiraga akslantiruvchi $\zeta = \frac{1}{\rho}(z - z_0)$ akslantirishni va ushbu

$$g(\zeta) = \frac{f(z_0 + \rho\zeta) - f(z_0)}{2M}$$

funksiyani qaraymiz. $g(\zeta)$ funksiya \mathbb{U} doirada golomorf va quyidagi $g(0) = 0$, $|g(\zeta)| \leq 1$ Shvarts lemmasi shartlarini qanoatlantiradi. Bu lemmaga ko'ra barcha $\zeta \in \mathbb{U}$ uchun $|g(\zeta)| \leq |\zeta|$ yoki barcha $z \in B_\rho(z_0)$ nuqtalar uchun

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2M}{\rho} |z - z_0| \quad (6.6)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Va nihoyat berilgan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ va $K \in D$ uchun

$$\delta = \delta(\varepsilon, K) = \min \left\{ \frac{\varepsilon \rho}{2M}, \rho \right\}$$

deb belgilaymiz. U holda $z_0 \in K$ nuqtaning ixtiyoriyligidan (6.6) tengsizlikdan barcha $f \in \mathcal{F}$ uchun va $|z' - z''| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $z', z'' \in K$ uchun

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, \mathcal{F} sinf lokal tekis darajada uzluksiz. \square

6.4.3-ta'rif. Aytaylik, $\mathcal{F} = \{f\}$ D sohada berilgan funksiyalar sinfi bo'lsin. Agar \mathcal{F} sinfga tegishli har qanday $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligidan ixtiyoriy $K \in D$ da tekis yaqinlashuvchi $\{f_n\}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, \mathcal{F} sinf D sohada kompakt deyiladi.

6.4.2-teorema. (Montel) Agar D sohada berilgan golomorf funksiyalar sinfi $\mathcal{F} = \{f\}$ lokal tekis chegaralangan bo'lsa, u holda bu sinf D sohada kompakt bo'ladi.

Isbot. 1-qadam. Dastlab, $\{f_n\} \in \mathcal{F}$ ketma-ketlik D sohada hamma joyda zich $E \subset D$ to'planning har bir nuqtasida yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlikning ixtiyoriy $K \in D$ to'plamda tekis yaqinlashishini ko'rsatamiz. Aytaylik, $\varepsilon > 0$ va $K \in D$ berilgan bo'lsin. $\rho = \frac{1}{2} \text{dist}(K, \partial D)$, $K_\rho = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, K) \leq \rho\}$ bo'lsin. (6.4.1)-teoreмага ko'ra $\{f_n\}$ ketma-ketlik lokal tekis darajada uzluksiz bo'lganligi uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|z' - z''| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $z', z'' \in K_\rho$ va ixtiyoriy natural n son uchun

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

bo'ladi. K kompaktning radiusi $r = \min(\frac{\delta}{2}, \rho)$ markazi K nuqtalarida bo'lgan doiralardan iborat qoplamasini qaraymiz va bu qoplamadan chekli $\{\mathbb{U}_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ qism qoplamaning ajratamiz. Ravshanki, $\mathbb{U}_j \subset K_\rho, j = 1, 2, \dots, m$ bo'lib, har qanday j , barcha $z', z'' \in \mathbb{U}_j$ va ixtiyoriy n natural son uchun

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (6.7)$$

bo'ladi. $E \subset D$ to'plam hamma joyda zich bo'lganligi uchun har bir \mathbb{U}_j ($j = 1, 2, \dots, m$) ga tegishli $z_j \in E$ nuqta mavjud. $\{f_n\}$ ketma-ketlik E to'planning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli shunday N natural son topiladiki, barcha $n > N, k > N$ va barcha $j = 1, 2, \dots, m$ uchun

$$|f_n(z_j) - f_k(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (6.8)$$

bo'ladi. Endi ixtiyoriy $z \in K$ nuqtani olamiz. U holda bu nuqtani o'z ichiga oluvchi \mathbb{U}_j doira topiladi. Shuning uchun (6.7) va (6.8) tengsizliklarga ko'ra barcha $n, k \geq N$ uchun

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(z_j)| + |f_n(z_j) - f_m(z_j)| + |f_m(z_j) - f_m(z)| < \varepsilon$$

bo'ladi. Koshi kriteriyasiga ko'ra $\{f_n\}$ ketma-ketlik K da tekis yaqinlashadi.

2-qadam. Har qanday lokal tekis chegaralangan $\{f_n\} \in \mathcal{F}$ funksiyalar ketma-ketligidan D sohada hamma joyda zich sanoqli biror $E \subset D$ to'planning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin ekanligini ko'rsatamiz.

E sifatida quyidagi to'plamni olamiz:

$$E = \{z = x + iy, x, y - \text{ratsional son}\}.$$

Ravshanki, E to'plam D sohada hamma joyda zich sanoqli to'plam bo'ladi uning elementlarini nomerlash mumkin, ya'ni

$$E = \{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}.$$

$\{f_n(z_1)\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan bo'lganligi uchun undan z_1 nuqtada yaqinlashadigan $f_{k1} = f_{n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$) qisman ketma-ketlik ajratamiz. $\{f_{n1}(z_2)\}$ ketma-ketlik ham chegaralanganligi sababli undan z_2 nuqtada yaqinlashuvchi $f_{k2} = f_{n_{k1}}$ ($k = 1, 2, \dots$) qisman ketma-ketlik ajratamiz. Bu qisman ketma-ketlik qurilishiga ko'ra z_1 nuqtada ham yaqinlashadi. Xuddi shunday qilib f_{kl} ($l = 1, 2, \dots$) funksiyalarni qurish jarayonini davom ettiramiz va diagonal qisman ketma-ketlikni olamiz:

$$f_{11}, f_{22}, \dots, f_{kk}.$$

Bu ketma-ketlik har qanday tayinlangan $k \in \mathbb{N}$ uchun z_k nuqtada yaqinlashadi. Chunki uning k -hadidan boshlab keyingi hadlari qurilishiga ko'ra z_1, z_2, \dots, z_k nuqtalarda yaqinlashuvchi $\{f_{nk}\}$ ketma-ketliklar olingan. Teoremaning isboti ikkinchi va birinchi qadamda olingan natijalardan kelib chiqadi. \square

Montel teoremasi odatda kompaktlik prinsipi deb ataladi.

6.5 Konform izomorfizm va avtomorfizmlar

6.5.1-ta'rif. Agar f akslantirish D_1 sohani D_2 sohaga konform va o'zaro bir qiymatli akslantirsa, u izomorfizm (bigolomorfizm) deyiladi. D_1 va D_2 sohalar esa o'zaro izomorf (bigolomorf) deyiladi.

6.5.2-ta'rif. D sohani o'zini o'ziga akslantiruvchi izomorfizm avtomorfizm deyiladi.

D sohaning avtomorfizmlari to'plami $Aut D$ kabi belgilanadi.

D sohaning avtomorfizmlari to'plami $Aut D$ ushbu $\varphi_1 \circ \varphi_2$ kompozitsiya amaliga nisbatan gruppaga tashkil qiladi. Birluk element sifatida ayniy akslantirishni,

φ avtomorfizmga teskari element sifatida φ^{-1} akslantirishni olamiz. Biror D sohaning avtomorfizmlar gruppasi ko'lamining kengligi boshqa sohalarni bu sohaga akslantiruvchi konform akslantirishlarning ko'lami to'g'risida fikr yuritishga imkon beradi.

6.5.1-teorema. Agar $f_0 : D_1 \rightarrow D_2$ biror izomorfizm bo'lsa, u holda D_1 sohani D_2 sohaga akslantiruvchi izomorfizmlar to'plami

$$f = \varphi \circ f_0$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $\varphi \in Aut D_2 - D_2$ sohaning ixtiyoriy avtomorfizmi.

Isbot. Agar $\varphi \in Aut D_2$ bo'lsa, u holda $\varphi \circ f_0$ akslantirish D_1 sohani D_2 sohaga konform akslantiradi. Shu bilan birga, agar $f : D_1 \rightarrow D_2$ ixtiyoriy izomorfizm bo'lsa, u holda $\varphi = f \circ f_0^{-1}$ akslantirish D_2 sohaning avtomorfizmi bo'ladi. Oxirgi formuladan $f = \varphi \circ f_0$ bo'lishini hosil qilamiz. \square

Endi asosiy (kanonik) sohalarning avtomorfizmlar gruppasini o'rganamiz. Odatda, $\overline{\mathbb{C}}$ - kengaytirilgan kompleks tekislik, \mathbb{C} - ochiq kompleks tekislik, $\mathbb{U} = \{|z| < 1\}$ birlik doira asosiy (kanonik) sohalar deyiladi.

Biz 2.2-paragrafda bu sohalarning kasr-chiziqli avtomorfizmlarini hisoblagan edik.

6.5.2-teorema. Asosiy (kanonik) sohaning har qanday avtomorfizmlari kasr-chiziqli bo'ladi.

Isbot. Teoremani 3 holda isbotlaymiz.

1-hol. Kengaytirilgan kompleks tekislik. Aytaylik, $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ avtomorfizm biror $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ nuqtani $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ nuqtaga akslantirsin. U holda φ funksiya $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$ sohada golomorf bo'lib, z_0 nuqtada qutbga ega bo'ladi.

Agar qutbning tartibi $n \geq 2$ bo'lsa, u holda qutbning atrofida funksiya bir varaqli bo'lmaydi. Shuning uchun z_0 nuqta φ funksiyaning 1-tartibli qutbi bo'ladi. 3.15.2-teoremaga ko'ra $\varphi(z)$ funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{a}{z-z_0} + b, & z_0 \neq \infty \text{ bo'lsa.} \\ az + b, & z_0 = \infty \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

bu yerda a, b — o'zgarimas sonlar.

2-hol. Ochiq kompleks tekislik. Bu holni birinchi holga keltirish uchun har qanday $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ avtomorfizmni $\bar{\varphi}(\infty) = \infty$ deb olib, $\bar{\varphi} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ avtomorfizmga davom ettirish mumkinligini ko'rsatamiz. Dastlab, bunday davom ettirishning $z = \infty$ nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz, ya'ni har qanday $z_n \rightarrow \infty$ ketma-ketlik uchun $\varphi(z_n) \rightarrow \infty$ bo'lishini tekshiramiz.

Haqiqatdan ham, agar $\{\varphi(z_n)\}$ ketma-ketlik ∞ ga intilmasa, bu ketma-ketlik chegaralangan qisman ketma-ketlikka ega bo'ladi. Bu qisman ketma-ketlikdan esa biror $w_0 \in \mathbb{C}$ nuqtaga yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu holda teskari akslantirish $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ w_0 nuqtada uzilishga ega bo'ladi. Demak, $\bar{\varphi}$ akslantirish $z = \infty$ nuqtada uzluksiz. Bundan esa, $\frac{1}{\bar{\varphi}(z)}$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtaning o'yilgan atrofida golomorf ekanligi va $z = \infty$ nuqtada bartaraf etiladigan maxsuslikka ega ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\bar{\varphi}$ funksiya $z = \infty$ nuqtada golomorf. Yuqoridagi mulohazalarni $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ -teskari akslantirishga qo'llab, $\bar{\varphi} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $\bar{\varphi}(\infty) = \infty$ shartni qanoatlantiruvchi avtomorfizm ekanligini hosil qilamiz. 1-holga ko'ra bunday avtomorfizm chiziqli bo'ladi, ya'ni

$$\bar{\varphi}(z) = az + b (a, b \in \mathbb{C}).$$

3-hol. \mathbb{U} birlik doira. Aytaylik, $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ avtomorfizm $0 \in \mathbb{U}$ nuqtani biror $w_0 \in \mathbb{U}$ nuqtaga o'tkazsin. w_0 nuqtani 0 nuqtaga akslantiruvchi \mathbb{U} doiraning kasr-chiziqli avtomorfizmlarini qaraymiz:

$$\xi = \lambda(w) = \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w}$$

u holda ushbu $f : \lambda_0 \varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ avtomorfizm nolni nolga o'tkazadi. Barcha $z \in \mathbb{U}$ nuqtada $|f(z)| < 1$ bo'lgani uchun Shvarts lemmasiga ko'ra, \mathbb{U} doirada $|f(z)| < |z|$ bo'ladi.

Endi Shvarts lemmasini $z = f^{-1}(\xi)$ avtomorfizmga qo'llab, barcha $\xi \in \mathbb{U}$ uchun $|f^{-1}(\xi)| < |\xi|$ bo'lishini hosil qilamiz. Agar oxirgi tengsizlikda $\xi = f(z)$ desak, u holda \mathbb{U} doirada $|z| < |f(z)|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Natijada, \mathbb{U} doirada $|f(z)| = |z|$ bo'lishiga ega bo'lamiz. Yana bir marta Shvarts lemmasini qo'llasak, $f(z) = e^{i\theta} z$ ($\theta \in \mathbb{R}$) bo'lishini olamiz. U holda, $\varphi(z) = \lambda^{-1} \circ f(z) = \lambda^{-1}(e^{i\theta} z)$ bo'ladi, ya'ni φ — kasr-chiziqli akslantirish. \square

2.2-paragrafda olingan natijalarni inobatga olib, asosiy (kanonik) sohalar avtomorfizmlarining quyidagi tavsifini olamiz:

$$\text{Aut } \bar{\mathbb{C}} = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$$\text{Aut } \mathbb{C} = \{z \mapsto az + b, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}.$$

$$\text{Aut } \mathbb{U} = \left\{ z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, a \in \mathbb{C}, \varphi \in \mathbb{R}, |a| < 1 \right\}.$$

6.5.3-teorema. Har xil asosiy sohalar bir-biriga izomorf emas.

Isbot. Yopiq kengaytirilgan kompleks tekislik $\bar{\mathbb{C}}$ ochiq \mathbb{C} kompleks tekislik va \mathbb{U} to'plamlarga gomeomorf emas. Shuning uchun $\bar{\mathbb{C}}$ tekislikni \mathbb{C} va \mathbb{U} doiraga konform akslantirib bo'lmaydi. Ochiq kompleks tekislik \mathbb{C} ni \mathbb{U} birlik doiraga akslantiruvchi izomorfizm mavjud emas. Agar bu izomorfizm mavjud bo'lganda edi u chegaralangan butun funksiya yordamida berilgan bo'lar edi. Liuvill teoremasiga ko'ra bu butun funksiyalar o'zgarimas bo'ladi. \square

Asosiy(kanonik) sohalar bir bog'lamli soha bo'lib, $\bar{\mathbb{C}}$ -yopiq kompleks tekislikning chegarasi bo'sh to'plam, \mathbb{C} ochiq kompleks tekislikning chegarasi bitta nuqtadan, \mathbb{U} birlik doiraning chegarasi cheksiz ko'p nuqtadan iborat bo'ladi.

Bu paragrafda, har qanday bir bog'lamli sohaning asosiy(kanonik) sohalarning biriga izomorf ekanligi haqidagi konform akslantirishlar nazariyasining asosiy teoremasini isbotsiz keltiramiz.

6.5.4-teorema. (Riman). Chegarasi bitta nuqtadan ko'p nuqtani o'z ichiga olgan har qanday bir bog'lamli D soha \mathbb{U} birlik doiraga izomorf.

Riman teoremasining isboti [1, 232-bet] kitobda keltirilgan.

6.5.1-natija. Chegaralari bittadan ko'p nuqtani o'z ichiga olgan har qanday ikkita bir bog'lamli sohalar o'zaro izomorf.

6.6 Simmetriya prinsipi

Bu paragrafda simmetriya yordamida analitik davom ettirish usuli o'rganiladi. Bu usul Riman-Shvartsning simmetriya prinsipi deb ataladi, u to'g'ri

chiziqqa nisbatan simmetrik sohalarni birini ikkinchisiga akslantiruvchi konform akslantirishlarni topishda ko'p qo'llaniladi.

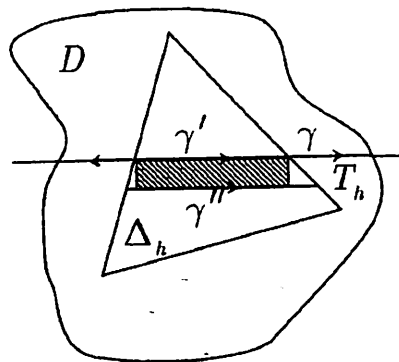
Dastlab, kesma orqali golororf davom ettirish haqidagi lemmani isbotlaymiz.

6.6.1-lemma. *Aytaylik, l to'g'ri chiziq $D \subset \mathbb{C}$ sohani kesib o'tsin. Agar $f(z)$ funksiya D sohada uzluksiz va $D \setminus l$ da golororf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohada golororf bo'ladi.*

Isbot. $f(z)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lganligi sababli uning D sohada golororf ekanligini ko'rsatish uchun Morera teoremasiga ko'ra ixtiyoriy $\Delta \in D$ uchburchak uchun $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ ekanligini ko'rsatish yetarli. Agar $l \cap \overline{\Delta} = \emptyset$ bo'lsa, Koshi teoremasiga ko'ra $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ bo'ladi. Demak, $l \cap \overline{\Delta} \neq \emptyset$ bo'lgan holni qarashimiz kerak. $l \cap \overline{\Delta} \neq \emptyset$ bo'lib, l to'g'ri chiziq Δ uchburchakni Δ_1 va Δ_2 bo'laklarga ajratsin. U holda integralning additivlik xossasiga ko'ra

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integralning har biri nolga teng ekanligini ko'rsatamiz. Δ_1 va Δ_2 bo'laklardan bittasini olib uni yana Δ bilan belgilaymiz. l to'g'ri chiziq va l to'g'ri chiziqdan h masofada bo'lgan hamda unga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning Δ bo'lakdan ajratgan trapetsiyani T_h bilan belgilaymiz. $\Delta_h = \Delta \setminus T_h$ bo'lsin (57-chizma).



57-chizma

Umumiylikka zid bo'lmagan holda l to'g'ri chiziqni haqiqiy o'qqa parallel deb olamiz. Koshi teoremasiga ko'ra $\int_{\partial\Delta_h} f(z)dz = 0$ bo'ladi. Shu sababli

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial T_h} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_h} f(z)dz = \int_{\partial T_h} f(z)dz \quad (6.9)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. T_h trapetsiyaning asoslari γ' va γ'' bo'lib, $|\gamma'| < |\gamma''|$ bo'lsin. Ravshanki, $h \rightarrow 0$ intilganda T_h trapetsiyaning yon tomonlari uzunliklari va γ' va γ'' asos uzunliklarining ayirmasi nolga intiladi. $f(z)$ funksiya $\overline{\Delta}$ da chegaralangan bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned} \int_{\partial T_h} f(z)dz &= \int_{\gamma'} f(z)dz + \int_{\gamma''} f(z - ih)dz + O(h) = \\ &= \int_{\gamma'} \{f(z) - f(z - ih)\} dz + O(h) \end{aligned} \quad (6.10)$$

tenglikni hosil qilamiz. $f(z)$ funksiya $\overline{\Delta}$ da tekis uzluksiz bo'lganligi uchun (6.10) tenglikda integral ostidagi funksiya nolga intiladi. Shuning uchun $f(z)$ funksiya ∂T_h bo'yicha olingan integral $h \rightarrow 0$ da nolga intiladi. (6.9) tenglikdan bu integral h ga bog'liq emas. Demak, $f(z)$ dan ∂T_h bo'yicha olingan integral nolga teng. U holda (6.9) tenglikdan $f(z)$ funksiya $\partial\Delta$ bo'yicha olingan integral nolga tengligi kelib chiqadi.

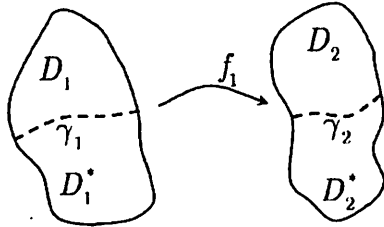
Agar $\overline{\Delta}$ uchburchak l to'g'ri chiziq bilan faqat tomonlari yoki uchi bilan kesishsa $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ bo'lishini isbotlash soddalashadi. □

6.6.1-izoh. *Haqiqiy o'zgaruvchili differensiallanuvchi funksiyalar uchun yuqoridagi lemma o'rinli emas. Masalan, $f(x) = |x|$ funksiya $(-1, 0)$ va $(0, 1)$ intervallarda differensiallanuvchi, lekin $(-1, 1)$ intervalda differensiallanuvchi emas.*

Endi simmetriya prinsipini keltiramiz.

6.6.1-teorema. (Riman-Shvarts). *Aytaylik, $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ va $D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ sohalari berilgan bo'lib, ∂D_1 chegaraning bir qismi γ_1 to'g'ri chiziq kesmasi yoki aylana yoyidan*

∂D_2 chegaraning bir qismi esa γ_2 to'g'ri chiziq kesmasi yoki aylana yoyidan iborat bo'lsin. D_1^* soha γ_1 ga nisbatan D_1 sohaga, D_2^* soha γ_2 ga nisbatan D_2 sohaga simmetrik hamda $D_1 \cap D_1^* = \emptyset = D_2 \cap D_2^*$ bo'lsin. U holda agar $f_1(z)$ funksiya D_1 sohani D_2 sohaga konform akslantirsa va $f_1(\gamma_1) = \gamma_2$ bo'lsa, bu funksiya γ_1 orqali D_1^* sohaga analitik davom etadi va davom etgan funksiya $D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$ sohani $D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$ sohaga konform akslantiradi (58-chizma).



58-chizma

Isbot. 1-hol. Dastlab, γ_1 va γ_2 haqiqiy o'qda yotuvchi kesmalar bo'lgan holni qaraymiz. Quyidagi funksiyaning qaraymiz:

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \gamma_1, \\ \overline{f_1(\bar{z})}, & z \in D_1^*. \end{cases}$$

$f_1(\gamma_1) = \gamma_2$ bo'lganligi uchun ixtiyoriy $a \in \gamma_1$ nuqtada $\lim_{z \in D_1, z \rightarrow a} F(z) = \lim_{z \in D_1^*, z \rightarrow a} F(z)$ bo'ladi. Bundan esa $F(z)$ funksiyaning $D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$ sohada uzluksizligi kelib chiqadi. Bundan tashqari $F(z)$ funksiya $D_1 \cup D_1^*$ da golomorf bo'ladi. Buning uchun $F(z)$ funksiya ixtiyoriy $a \in D_1^*$ nuqtada golomorfligini ko'rsatish kerak. $f_1(z)$ funksiyaning $\bar{a} \in D_1$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyib $F(z)$ funksiya uchun $a \in D_1^*$ nuqta atrofida Teylor qatorini hosil qilamiz:

$$F(z) = \overline{f_1(\bar{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n(\bar{z} - \bar{a})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n(z - a)^n.$$

Demak, $F(z)$ funksiya 6.6.1-lemmaning shartlarini qanoatlantiradi. 6.6.1-lemnaga ko'ra $F(z)$ funksiya $D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$ sohada golomorf yasalishiga ko'ra bu funksiya $D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$ sohani $D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$ sohaga konform akslantiradi.

2-hol. Umumiy hol kasr-chiziqli akslantirish yordamida 1-holga keltiriladi [1]. \square

6.6.1-misol. Simmetriya prinsipidan foydalanib

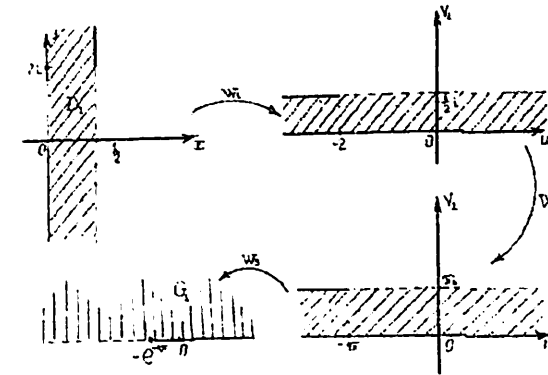
$$D = \{0 < \operatorname{Re} z < 1, z \notin \{\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}, 2 \leq \operatorname{Im} z < \infty\}\}$$

sohani $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ yuqori yarim tekislikka konform akslantiruvchi funksiyaning toping.

Yechish. Quyidagi $D_1 = \{0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\}$ sohani qaraymiz. Bu soha

$$w_1 = iz, \quad w_2 = 2\pi w_1, \quad w_3 = e^{w_2} \quad (6.11)$$

akslantirishlarni birin-ketin bajarish natijasida $G_1 = \{\operatorname{Im} w_3 > 0\}$ yuqori yarim tekislikka konform akslanadi. (6.11) akslantirishlarning bajarilishi jarayoni 59-chizmada tasvirlangan.



59-chizma

Simmetriya prinsipidan foydalanib, berilgan soha $w_3 = e^{w_2} = e^{2\pi w_1} = e^{2\pi iz}$ funksiya yordamida

$$G = \{w_3 \notin [-e^{-4\pi}, +\infty)\}$$

sohaga konform akslanishini topamiz. Bu G soha

$$w_4 = w_3 + e^{-4\pi} \quad w = \sqrt{w_4}, \quad \sqrt{-1} = i$$

akslantirishlar yordamida $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ yuqori yarim tekislikka akslanadi. Demak, berilgan sohani yuqori yarim tekislikka konform akslantiruvchi funksiya ushbu

$$w = \sqrt{w_4} = \sqrt{e^{2\pi iz} + e^{-4\pi}}, \quad \sqrt{-1} = i,$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol va masalalar

6.6.2-misol. *Simmetriya prinsipidan foydalanib, quyida berilgan sohalarni $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ yuqori yarim tekislikka konform akslantiruvchi funksiyani toping.*

1. $D = \mathbb{C} \setminus (\{[-1, 2]\} \cup \{-i; i\})$.

2. $D = \mathbb{C} \setminus (\{[-1, 1]\} \cup \{-i, 2i\})$.

3. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, z \notin [-2; -1], z \notin [-2i; -i], z \notin [i; 2i]\}$.

4. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, z \notin \{[-1; 2] \cup [-i; i]\}\}$.

Index

- Abel teoremasi, 120
analitik funksiya, 184
angarmonik munosabat, 69
argument prinsipi, 199
aylanaga nisbatan simmetrik nuqtalar, 65
bo'lakli silliq yo'l, 31
boshlang'ich funksiya, 97
butun funksiya, 156
chiziqli funksiya, 57
Darajali funksiya, 77
Evklid masofasi, 28
Gamma funksiya, 174
golomorf funksiya, 50
golomorf funksiyalarning xossalari, 126
Jordan lemmasi, 170
Jordan yo'li, 31
Jukovski funksiya, 72
Kantor teoremasi, 43
kasr-chiziqli avtomorfizm, 69
kasr-chiziqli funksiya, 59
kasr-chiziqli izomorfizm, 69
ko'rsatkichli funksiya, 79
kompaktlik prinsipi, 208
kompleks son, 10
konform, 55
Koshi tengsizliklari, 117, 144
Koshi teoremasi, 97, 104
Koshi-Adamar formulasi, 121, 123
Koshi-Riman shartlari, 48, 50
Koshining integral formulasi, 110, 128
limit nuqta, 32
Liuvill teoremasi, 117, 118
Loran qatorlari, 136, 139
meromorf funksiya, 156
modulning maksimum prinsipi, 203
Monodromi haqida teorema, 183
Montel teoremasi, 208
Morera teoremasi, 129
Muavr formulasi, 13
o'rta qiymat haqidagi teorema, 112
Riman masofasi, 29
Riman sferasi, 27
Riman sirti, 189, 193
Riman teoremasi, 213
Riman-Shvarts teoremasi, 215
Rushe teoremasi, 200
Shvarts lemmasi, 204
silliq yo'l, 31

simmetriya prinsipi, 215
 sohaning saqlanish prinsipi, 202
 Soxotskiy teoremasi, 153
 Teylor teoremasi, 115
 trigonometrik funksiyalar, 82
 Veyershtrass teoremasi, 115, 134
 yagonalik teoremasi, 132

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ : учебник для ун-тов. Ч.1: Функции одного переменного. 3-е изд., перераб. и доп. Москва : Наука, 1985.
2. Худойберганов Г., Ворисов А.К., Мансуров Х.Т. Комплекс анализ. Т. Университет, 1998.
3. Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу : в 2-х частях, Ч.1. М.: МИАН 2004.
4. Туйчиев Т.Т., Тинчабаев Ж.К., Джумабаев Д.Х., Китманов А.М. Комплекс ўзгарувчи функциялар назарияси фанидан мустақил ишлар, Т. Мумтоз сўз, 2018.
5. Садуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х. Т., Ворисов А. К., Туйчиев Т. Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами (комплекс анализ) 3- китм. Т. Ўзбекистон, 2000.
6. Ahlfors L. Complex analysis. McGraw-Hill Education, 1979.
7. Волковский Л. И., Луиц Г. А., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
8. М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров. Теория функций комплексного переменного .М.: Лаборатория знаний, 2016.
9. М.И. Шабунин, Е.С. Половинкин, М.И. Карлов. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.
10. Сирожиддинов С.Х., Салохитдинов М.С., Максудов Ш. Комплекс ўзгарувчи функциялар назарияси. Т. Ўқитувчи. 1979.
11. Привалов И.И. Введение в теории функций комплексного переменного. М. Наука. 1977.

G.XUDOYBERGANOV, B.A.SHOIMQULOV

**KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI
FUNKSIYALAR NAZARIYASI**

O'QUV QO'LLANMA

Muharrir Z.N.Buranov

Bosishga ruxsat etildi 12.08.2024y. Bichimi 60X84 ¹/₁₆.
Bosma tabog'i 14,0. Shartli bosma tabog'i 14,0. Adadi 18 nusxa.
Buyurtma № 125. Bahosi kelishilgan narxda.
"Ma'rifat" nashriyoti. Toshkent, Salorbo'yi kochasi, 35A.
O'zbekiston Milliy universiteti bosmaxonasida bosildi.
Toshkent, Talabalar shaharchasi, O'zMU.

ISBN 978-9910-665-16-5



9 789910 665165