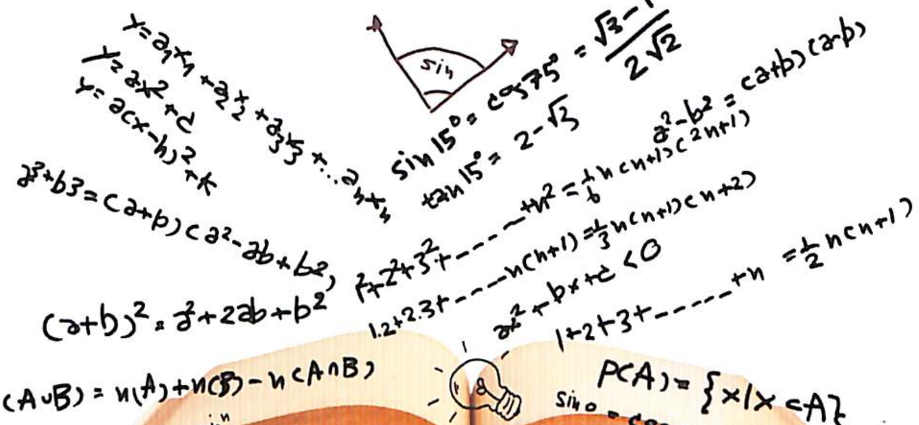
J.ALIYEVA, A.AXLIMIRZAYEV,
E.RAXIMBERDIYEV, E.QOCHQAROV

MAKTABDA STANDART VA NOSTANDART MASALALAR



O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O`RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

J.ALIYEVA, A.AXLIMIRZAYEV,
E.RAXIMBERDIYEV, E.QO`CHQAROV

MAKTABDA STANDART VA NOSTANDART MASALALAR

Toshkent
"Innovatsiya-Ziyo"
2021

UDK: 51
BBK: 22.1
M-20

J.Aliyeva, A.Axlimirzayev, E.Raximberdiyev, E.Qo`chqarov.
Maktabda standart va nostandart masalalar /Uslubiy qo`llanma/.Toshkent: "Innovatsiya-Ziyo", 2021 , 108 б.

Ushbu uslubiy qo`llanma maktab matematika kursida uchraydigan standart va nostandart masalalar va ularni o`rganish uslublariga bag`ishlangan. Qo`llanmada standart va nostandart masalalarning mazmun-mohiyati ochib berilgan hamda tenglamalar mavzusi bo`yicha yetarlicha standart va nostandart masalalar yechimlari bilan berilgan. Ushbu uslubiy qo`llanmadan maktab, akademik litsey o`quvchilari hamda oliy o`quv yurtlarining matematika yo'nalishi talabalari foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar:
N.M.Umrzaqov–ADU matematika kafedrasi mudiri, f.-m.f.n.
D.Xojiyev–ADU qoshidagi AL aniq fanlar kafedrasi bosh o`qituvchisi

Mas'ul muharrir:
R.Azimov–ADU matematika kafedrasi katta o`qituvchisi, f.-m.f.n.

Ushbu uslubiy qo`llanma ADU ilmiy kengashining 2020 -yil 15 -maydagi 10- sonli yig'ilishida muhokama qilinib, chop etishga tavsiya qilingan.

ISBN 978-9943-6216-1-9

SO'Z BOSHI

Ma'lumki, umumiy o'rta ta'lim maktablarining asosiy vazifalaridan biri o'quvchilarga jamiyat, fan va texnika taraqqiyotining talablariga to'la javob beradigan tayanch ma'lumot berish, fan asoslarini chuqur va mukammal o'rgatish, ularni o'z bilimlarini uzluksiz ravishda takomillashtirishga intiladigan va mustaqil ravishda to'ldira boradigan hamda amaliyotga qo'llay oladigan qilib tarbiyalashdan iboratdir. Aytilgan bu talablarga javob bera oladigan o'quvchilar kelgusida oliy o'quv yurtlarida o'qish jarayonida qiynalmaydilar va malakali mutaxassis bo'lib yetishadilar. Zero xalqaro meyorlarga, talablarga javob bera oladigan yangi texnologiyalarni yaratish muammolari, xalqaro iqtisodiy aloqalarning kundan-kunga rivojlanib borishi maktablarda o'qitiladigan matematika faniningmazmunini va o'qitish uslublarini rivojlangan mamlakatlar tajribalari hamda o'zbek xalqining qadriyatlarini e'tiborga olgan holda tubdan yangilashni taqozo etadi. Bu vazifaning dolzarbligi O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M.Mirziyoyevning 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387 sonli qarorida hamda Oliy majlisga murojaatnomasida ham o'z aksini topgan. Bu jarayonni amalga oshirish uchun o'quvchilarni quyi sinflardanoq mustaqil fikrlashga, ijodiy ishlarni amalga oshirishga o'rgatish darkor.

O'quvchilarni ijodiy fikrlashga o'rgatishda fan asoslari bo'yicha yozilgan turli uslubiy adabiyotlarning o'rni beqiyosdir. Mualliflar tomonidan yozilgan ushbu uslubiy qo'llanma o'quvchilarni mustaqil ijodiy fikrlashga o'rgatishda muhim omillardan biri bo'ladi deb o'ylaymiz.

Ushbu uslubiy qo'llanmaning qo'lyozmasini o'qib o'zining qimmatli maslahatlarini bergan Andijon davlat universiteti matematika kafedrasi mudiri, fizika-matematika fanlari nomzodi N.M.Umrzaqov va Andijon Davlat Universiteti qoshidagi akademik litseyning aniq fanlar kafedrasi bosh o'qituvchisi D.Xojiyevlarga minnatdorchilik bildiramiz.

Mualliflar

I BOB. MATEMATIKA KURSIDA STANDART MASALALAR

1.1. Masala, uning funksiyalari va turlari

Ma'lumki, umumiy o'rta ta'lim maktablarining quyi sinflardanoq matematikani o'qitish jarayonida masalalardan foydalaniladi. Masalalarni yechish esa ko'p hollarda shu masalani matematik modelidan iborat tenglamani tuzish va uni yechishga keltiriladi. Umumiy o'rta ta'lim maktabi, AL va KHK lari uchun yozilgan darsliklarni tahlil qilish natijasida ularda berilgan topshiriqlarning asosiy qismi masalalardan iborat ekanligini ko'ramiz. Masalani yechish jarayonida o'quvchi fikrlaydi, mushohada qiladi, mustaqil izlanadi hamda topilgan yechimlarni tahlil qiladi. Bunday hislatlar esa har qanday mutaxassis uchun zarurdir. Shuning uchun ham biz o'quvchilarni quyi sinflardan boshlab masala yechishga o'rgatishimiz kerak.

Matematikadagi ko'plab masalalar tenglama, tenglamalar sistemasi, tengsizlik va tengsizliklar sistemasini tuzish va ularni yechishga keltiriladi. Masalani yechish jarayonidagi asosiy maqsad, uning matematik modeli (tenglama, tengsizlik, funksiya va hokazo) ni tuzish va uni yechishdan iborat. Bu esa o'quvchilardan turli tenglama (chiziqli, kvadrat, bikvadrat irratsional, logarifmik, ko'rsatkichli, trigonometrik va hokazo) larni yechish malakalarini egallagan bo'lishlarini talab qiladi.

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining quyi sinflariga o'rganiladigan masalalarning aksariyati matnli (tekstli) masalalardir.

Matnli masalalarni turli uslubchi olimlar bir necha turlarga bo'lib o'rganishni tavsiya qildilar. Ular: harakatga doir, quvib yetishga doir, ishga doir, foizga doir, aralashmaga doir va hokazolardir.

Ba'zi bir matematiklar esa masalani matematik masala va amaliy masalarga bo'lib o'rganishni tavsiya qiladilar. XX–asrning ikkinchi yarmida tatbiqiy masala deb nomlangan masalalar adabiyotlarda tez-tez uchray boshladi. Tatbiqiy masalalarga turli uslubchi olimlar turlicha tarif beradilar. Masalan: Y.M.Kolyagin, G.G.Maslova va S.S.Vardanyanlar tomonidan tatbiqiy masalaga berilgan ta'riflar bir-biriga ancha yaqin bo'lsa N.A.Tereshin tomonidan tatbiqiy masalaga berilgan ta'rif ancha farqliroq. Uning fikricha "Tatbiqiy masalalar – bu matematikadan boshqa fanlar tomonidan qo'yilgan va matematika yordamida yechiladigan masalalardir".

Ma'lumki, umumiy o'rta ta'lim maktabi, AL, KHK va oliy o'quv yurtlarida o'qitiladigan matematika kursida har qadamda masala tushunchasiga duch kelinadi. Shuning uchun ham eng avvalo masalaning o'zi nima, u qanday funksiyalar (vazifalar) ni bajaradi va qanday turlarga bo'linadi degan savolga javob berishimiz kerak. Masala tushunchasiga ham turli uslubchi olimlar turlicha ta'rif beradilar. Masalan, S.Alixonov masalaga "Masala – bu kundalik hayotimizda uchraydigan vaziyatlarning tabiiy tildagi ifodasidir" deb ta'rif beradi. L.M.Fridman va E.N.Turetskiylar esa "Masala – bu berilgan va ko'rsatilgan shartlarni qanoatlantiruvchi miqdorni topishdan iboratdir" deb ta'rif beradi. Yu.M.Kolyagin matnli masalalar, tenglamalar va hisoblashni talab qiladigan misollarni masala deb shartlashamiz deb takidlaydi.

Matematika fanining o'ziga hos hususiyati (tushunchalarning abstraktligi, (mavhumligi) va fikrlarning mantiqiy tasdiqlanishi)ni, o'quv materiali mazmunini hisobga olgan holda umumiy o'rta ta'lim maktabi, AL va KHK larida o'rganiladigan matematika kursini ikki qismga: nazariy qism (nazariy materiallar), amaliy qism (matematik masalalar) ga ajratish mumkin. Metodologik nuqtai-nazardan (bilishning shakli nuqtai-nazaridan) nazariy material tushunchalari va ularning aniqlanishi sifatidagi fikrlar (teoremalar, xossalar, belgilar va boshqalar), algoritmlar (qoidalar, formulalar va boshqalar), fan mazmuni bo'yicha turli matematik modellar (to'g'ridan-to'g'ri va bevosita isbot qilish, koordinatalar metodi, vektorlar metodi, tenglama va tengsizliklar tuzish metodi, teskarisini faraz qilish va boshqalar) orqali beriladi.

Umuniy o'rta ta'lim maktab, AL va KHK lari matematika darsliklarida o'quv materiali mazmunini yuqoridagi tashkil etuvchilari o'zaro bog'lanishda berilgan bo'lib, nazariy material deduktiv nazariyaning tuzilish tamoyillari orqali yoki fanning aniq bir mavzusida talqin qilingan mazmunli g'oyalar bilan aniqlanadi.

Matematik masalalarni (mashqlarni) ham dars jarayonida qo'llanish usuliga qarab ikki guruhga ajratish mumkin.

Birinchi guruh masalalar (mashqlar) – tushunchalarni shakllantirishga, o'rganilgan nazariy bilimlarni bevosita amaliyotda qo'llashga, algoritmlarni mustahkamlshga, matematik usullarning

mazmunini tushuntirish va bevosita qo'llashga yo'naltirilgan bo'ladi. Bunday masalalarni yechish, tahlil qilish va umumlashtirishni talab etmaydi va nisbatan osonroq yechiladi. Bu turdagi masalalar (mashqlar) tushunchaning qandaydir bir hususiyatini yoritishda, algoritm yoki usulning qo'llanilishini alohida shartlarini ko'rsatishda muhim hisoblanadi.

Ikkinchi guruh masalalar (mashqlar) ga – umumiy o'rta ta'lim maktablari, AL va KHK lari darajasiga o'rganiladigan o'quv matematik faoliyatni tashkil qiluvchi masalalar kiradi. Bunda masalani qo'yilishi, yechishni tashkil qilish usullari va tushunilishi, masala yechimini izlash (masala shartini tahlil qilish; masala shartini ma'lum matematik dalillar va masalalar yechish usullari bilan taqqoslash; masalani yechish yo'llari va rejalarini tuzish; rejani amalga oshirish), yechish natijalarini olish va uni tahlil qilish muhim ahamiyat kasb etadi.

Masalani yechish o'quvchilarda avvalo matematik tushunchalarni shakllantiradi, yangi bilimlarni vujudga keltiradi va mavjud bilimlarni tatbiq qilinishi jarayonida yanada mustahkamlanib boradi. Masalalar bilimlarni shakllantirishda konkret material bo'lgani holda nazariyani amaliyot bilan, o'qitishni turmush bilan bog'lab borish imkoniyatini yaratadi.

Masalalar yechish jarayonining o'zi o'quvchilarning aqliy rivojlanishiga ijobiy tasir ko'rsatadi, chunki u aqliy operatsiyalar analiz va sintez, konkretlashtirish va abstraklashtirish, taqqoslash va umumlashtirishni talab etadi. Masalan, o'quvchi istalgan masalani yechayotganida analiz qiladi: savolni masala shartidan ajratadi, yo rejasini tuzayotganida sintez qiladi, bunda u konkretlashtirish (masala shartini, “xayolan” chizadi), so’ngra abstraklashdan foydalaniladi (konkret situatsiyadan kelib chqib, yechish yo’lini tanlab, biron bir turdagi masalalarni ko’p marta yechish natijasida o’quvchi bu turdagi masalalarda berilgan va izlanayotgan son orasidagi bog’lanishlar haqidagi bilimini umumlashtiradi).

Umumiy o’rta ta’lim maktablari, AL va KHK lari matematika kursida matematik masalalar bajaradigan funksiyasiga qarab uch tipga ajratiladi.

1. Didaktik funksiyani bajaradigan masalalar birinchi tipdagi masalalar bo’lib, bu masalalarni yechish uchun konkret darsda o’quvchilarda tarkib toptirilgan bilimlar yetarli bo’ladi. Bunday tipdagi masalalar nazariy materialni tushuntirishni osonlashtiradi va uni mustahkamlashda asosiy o’rin tutadi.

2. Bilish funksiyasini bajaradigan masalalar ikkinchi turdagi masalalar bo’lib, bu masalalarni yechish uchun konkret darsda o’quvchi tarkib toptirilgan bilimlar bilan bir qatorda, oldingi mavzularda tarkib toptirilgan bilim va ko’nikmalar ham talab qilinadi.

3. Rivojlantiruvchi funksiyani bajaradigan masalalar uchinchi tip masalalar bo’lib – bu masalalarni yechish uchun esa konkret darsda yoki oldingi mavzularda tarkib toptirilgan bilimlar bilan bir qatorda, oldingi boblarda, oldingi sinflarda tarkib toptirilgan bilim va ko’nikmalar talab etiladi.

1. $81;\ 1,3; -5,2; -1,5; 52; 0$ sonlarning har birini modulini toping.

Yechish. $|81| = 81; |1,3| = 1,3; |-5,2| = 5,2; |-1,5| = 1,5;$ $|52| = 52; |0| = 0$ bo’lib, bu misolni yechishda modul ta’rifidan foydalaniladi. Demak, bu misol didaktik funksiyani bajaradi.

2. A(3,7), B(−7,8), C(−200), D(315,6) va E(0) nuqtalarning har biridan sanoq boshlanadigan nuqtagacha bo’lgan masofa topilsin.

Yechish. Bu misolni tahlil qilib, uni yechish uchun sonning moduli ta’rifini bilish yetarli emasligini, balki sonlarning har birini sonlar o’qida belgilashni va ulardan sanoq boshlanadigan nuqtagacha masofa nimani anglatishini bilish kerak. Ya’ni, bunda o’quvchilar a haqiqiy sonning moduli geometrik nuqtai-nazardan nimani anglatishini bilishlari kerak.

3. Katetlari 3 va 4 ga teng bo’lgan to’g’ri burchakli uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalar uzunliklarining nisbati topilsin.

Yechish. Pifagor teoremasiga asosan $AB^2 = BC^2 + AC^2,\ AB^2 = 9 + 16,\ AB^2 = 25,\ AB = 5,\ P = AB + BC + AC = 3 + 4 + 5 = 12.$

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6;\ \ S = \frac{1}{2}P \cdot r$$

dan

$$r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 6}{12} = 1,\ \ R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2} = 2,5,\ \ C_1 = \pi R^2 = \pi \cdot (2,5)^2 = 6,25\pi;$$

$$C_2 = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi; \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{6{,}25\pi}{\pi} = 6{,}25.$$

Javob: 6,25.

Masalani yechish jarayonini tahlil qilib, uni yechish uchun o'quvchilar Pifagor teoremasini qo'llashni, uchburchakni perimetrini, yuzini, uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalarning radiuslarini va aylana uzunligini topishni bilishlari kerakligini ko'ramiz. Demak, bu masala rivojlantiruvchi funksiyani bajaradigan masala ekan.

Matematika kursida yechiladigan masalalarni uch turga bo'lamiz:

I. Obyekt (manba) harakteriga nisbatan: amaliy masalalar va matematik masalalar.

II. Nazariyaga nisbatan: standart masala va nostandart masalalar.

III. Talab qilinganlarga nisbatan: izlanayotganlarni topishga doir, almashtirishga doir, yasashga doir, isbot qilishga doir.

1.2. Matematika kursida standart masalalar.

Ma'lumki, har qanday masalani yechish muayyan qoidalar ketma-ketligidan iborat. Bu qadamlar masalaning sharti va uning natijasiga qarab biror umumiy qonuniyatlarni amalga oshirishdan iborat. Shuning uchun ham masalani yechish jarayonida qo'llaniladigan qadamlar ketma-ketligini aniqlash asosiy masalalardan biridir.

Matematika ko'plab masalalarni yechish uchun kerka bo'ladigan qonun-qoiddalarni aniqlash va ularni amalda qo'llash bilan bog'liq vazifalarni o'rganish bilan shug'ullanadi. Bir qancha turdagi masalalarni yechish uchun kerak bo'ladigan qonun-qoidalar aniqlangan. Bu qonun-qoidalardan namuna keltiramiz:

1. <u>So'z qoidasi.</u>Bu qoidaga misol sifatida ko'paytmani darajasini topish qoidasini keltirish mumkin.

<u>Qoida.</u> Ko'paytmaning darajasi ko'paytuvchilar darajalarining ko'paytmasiga teng.

Bu qoida ko'paytmaning darajasini topishga doir har qanday masalalarni yechishning quyidagi dasturini tuzish imkonini beradi:

1) Ko'paytmaning barcha ko'paytuvchilarini aniqlash;

2) Har bir ko'paytuvchini darajasini aniqlash;

3) Ikkinchi qadam natijalarini ko'paytirish.

Bu dasturni qo'llashga doir misol keltiramiz:

1-misol.$(3a^2b^3)^4$ topilsin.

Yechish. 1) Berilgan ko'paytma uchta 3, a^2 va b^3 ko'paytuvchilardan iborat;

2) Har bir ko'paytuvchining to'rtinchi darajasini topami

$3^4 = 81, \quad (a^2)^4 = a^8$ va $(b^3)^4 = b^{12}$;

3) Oldingi qadam natijalarini ko'paytiramiz: $81a^8b^{12}$.

Javob: $(3a^2b^3)^4 = 81a^8b^{12}$.

2-misol. $\left(3\frac{3}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\right)^8$ topilsin.

Yechish. 1) $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

2) $\left(\frac{15}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\right)^8 = \left(\frac{15}{4}\right)^8 \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^8 \cdot \left(b^{\frac{3}{4}}\right)^8 = \left(\frac{15}{4}\right)^8 a^4b^6$.

Javob: $\left(\frac{15}{4}\right)^8 a^4b^6$.

2. **Formula – qoida.** Bu qoidaga misol sifatida kvadrat tenglama ildizlarini topish formulasini keltirish mumkin. U quyidagicha:

$ax^2 + bx + c = 0$ tenglamada $a > 0$ va $D \geq 0$ $(D = b^2 - 4ac)$ bo'lsa, uning ildizlarini $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ formula bilan topish mumkin.

Bu qoidada kvadrat tenglamani yechishda amalga oshirish kerak bo'lgan qadamlar to'g'ridan-to'g'ri ko'rsatilmagan bo'lsada, uni osongina topish mumkin:

1) $a \neq 0$ shartni tekshiramiz;

2) $D = b^2 - 4ac$ ni topamiz;

3) $D \geq 0$ shartni tekshiramiz;

4) Agar bu shartlar bajarilsa, uning ildizlarini $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ formula bo'yicha topamiz.

Bu yerdagi ikkinchi va to'rtinchi qadamlarni bajarishda biz algebraik ifodadagi o'zgaruvchilarning qiymatlariga ko'ra uning qiymatini hisoblash qoidasini qo'llanganini ham ko'ryapmiz.

Bu yerda keltirilgan qadamlar ketma-ketligi har qanday kvadrat tenglamani yechish uchun dastur bo'lib hizmat qiladi.

1-misol. $2x^2 - 3x + 1 = 0$ kvadrat tenglamani yechishda bajariladigan qadamlar ketme-ketligini yozing va yeching.

1) $a = 2 \neq 0$;

2) $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1$;

3) $D = 1 > 0$;

4) $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm 1}{4}$; $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Javob: 1; $\frac{1}{2}$.

2-misol. $x^2 - 12x + 20 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglama ham standart masalaga misol bo'la oladi. U keltirilgan kvadrat tenglamadir. Uni yechish uchun $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

formuladan foydalanamiz. Bu yerda $p = -12, q = 20$. Demak,

$$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 20} = 6 \pm \sqrt{16} = 6 \pm 4; \quad x_1 = 10, \qquad x_2 = 2.$$

Javob: 10; 2.

3. **Ayniyat–qoida.** Bu qoidaga misol sifatida ikki had yig'indisining kvadrati haqidagi quyidagi ayniyatni keltirish mumkin.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Bu ayniyatga asosan ikki had yig'indisini kvadratini topishda bajariladigan qadamlar ketma-ketligini keltiramiz:

1) Ikki hadning birinchi hadini topish;

2) Ikki hadning ikkinchi hadini topish;

3) Ikki hadning birinchi hadini kvadratga ko'tarish;

4) Ikki hadning ikkinchi hadini kvadratga ko'taramiz;

5) Ikki hadning birinchi va ikkinchi hadlari ko'paytmasini topish;

6) Beshinchi qadam natijasini ikkilantirish;

7) Uchinchi, to'rtinchi va oltinchi qadamlar natijalarini qo'shish.

Bu qadamlar ketma-ketligi har qanday ikki had yig'indisini kvadratini topish uchun dastur bo'lib xizmat qiladi.

1-misol. $(2a^3 - 3b^2)^2$ topilsin.

Yechish. 1) Ikki hadning birinchi hadi $2a^3$;

2) Ikki hadning ikkinchi hadi $-3b^2$;

3) Birinchi handing kvadrati $(2a^3)^2$;

4) Ikkinchi hadning kvadrati $(-3b^2)^2$;

5) Birinchi va ikkinchi hadlar ko'paytmasi $(2a^3)\cdot(-3b^2)$;

6) Ko'paytmaning ikkilangani $2\cdot(2a^3)\cdot(-3b^2)$;

7) 3,4 va 6–qadamlar yig'indisi

$(2a^3)^2 + (-3b^2)^2 + 2\cdot(2a^3)\cdot(-3b^2)$.

Masalani to'la yechish uchun ba'zi bir qadamlarda yana ayrim qoidalar qo'llaniladi. Natijada

$$(2a^3 - 3b^2)^2 = 4a^6 - 12a^3b^2 + 9b^4$$

ga ega bo'lamiz.

2-misol. $\frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{1+sin2\alpha}$ ni soddalashtiring.

Yechish. $1 = sin^2\alpha + cos^2\alpha$ va $sin2\alpha = 2sin\alpha\cdot cos\alpha$ ayniyatlardan foydalanamiz.

$$\frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{1+sin2\alpha} = \frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{sin^2\alpha + 2sin\alpha\cdot cos\alpha + cos^2\alpha}$$
$$= \frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{(sin\alpha+cos\alpha)^2} = 1.$$

Javob: 1.

3-misol. $49^{\frac{1}{2}\log_7 64}$ ni hisoblang.

Yechish. $49 = 7^2, \frac{1}{2}\log_7 64 = \log_7\sqrt{64} = \log_7 8$ bo'lgani uchun $49^{\frac{1}{2}\log_7 64} = 7^{2\log_7 8} = \left(7^{\log_7 8}\right)^2 = 8^2 = 64.$

Javob: 64.

4. Teorema–qoida. Matematikadagi bir qator teoremalar berilgan matematik masalalarni yechishda qoida vazifasini bajaradi. Masalan, geometriya kursidagi "trapetsiyaning o'rta chizig'i uning asoslariga parallel va ular yig'indisining yarmiga teng" degan teorema trapetsiya asoslariga ko'ra o'rta chizig'ini top[ish qoidasini beradi. Bunda amalga oshiriladigan qadamlar ketma-ketligi juda sodda va quyidagicha:

1) Trapetsiya asoslari uzunliklarini aniqlaymiz;

2) Ular yig'indisini yarmini topamiz. U trapetsiyaning o'rta chizig'i bo'ladi.

Huddi shunday teorema – qoidaga misol sifatida to'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati, katetlari kvadratlarining yig'indisiga teng deb ataluvchi Pifagor teoremasini keltirish mumkin. Bunda masalani yechishda bajariladigan qadamlar ketma-ketligi quyidagicha:

1) Katetlar uzunliklari aniqlanadi;

2) Katetlar kvadratlari topiladi;

3) Katetlar kvadratlari yig'indisi topiladi;

4) Yig'indining kvadrat ildizi topiladi. bu gipotenuza uzunligini bildiradi.

1-masala. Katetlarining uzunliklari 6 va 8 bo'lgan uchburchak gipotenuzasining uzunligi topilsin.

Yechish. 1) $a = 6, b = 8$ larni belgilaymiz;

2) $a^2 = 6^2 = 36;\ \ b^2 = 8^2 = 64;$

3) $a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100;$

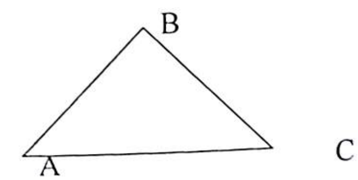
4) $c^2 = a^2 + b^2 = 100;$

5) $c = \sqrt{100} = 10.$

Javob: 10.

2-masala. ABC uchburchakda AB=6, AC=8 va $\angle A=30^0$ bo'lsa BC tomon uzunligi topilsin.

Yechish:



BC tomonni topish uchun kosinuslar teoremasidan foydalanamiz.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cosA$$

$$= 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot cos30^0 == 100 - 96 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 100 - 48\sqrt{3}.$$

BC=$\sqrt{100 - 48\sqrt{3}}$.

Javob: $\sqrt{100 - 48\sqrt{3}}$.

5. Ta'rif–qoida. Ba'zi hollarda ayrim masalalarni yechishda qandaydir tushunchalarning ta'riflari qoida vazifasini bajarishi mumkin. Bunga misol sifatida algebra kursidagi bir o'zgaruvchili tengsizliklar sistemasining yechimi haqidagi: "bir o'zgaruvchili tengsizliklar sistemasining yechimi deb, o'zgaruvchining sistemani har bir tengsizligini to'g'ri tengsizlikka aylantiradigan qiymatlari to'plamiga aytiladi" deb nomlanuvchi ta'rifni keltirish mumkin.

Bu ta'rifga asosan bir o'zgaruvchili tengsizliklar sistemasini yechishning quyidagi dasturini keltirish mumkin.

1) Siatemaning har bir tengsizligi yechilib, uning yechimidan iborat bo'lgan sonli oraliqlar topiladi;

2) Hosil qilingan sonli oraliqlarning umumiy qismi topiladi.

Sonli oraliqlarning umumiy qismi berilgan sistemaning yechimi bo'ladi.

1-misol. $\begin{cases} 7x+3 \geq 5x-19 \\ 4x+1 \leq 22-3x \\ 6 < x^2 - x(x-3) \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. 1) Sistemaning birinchi tengsizligini yechamiz:

$7x+3 \geq 5x-19,\ 7x-5x \geq -3-19, 2x \geq -22,\ x \geq -11,$ $[-11;\ +\infty)$;

2) Sistemaning ikkinchi tengsizligini yechamiz:

$4x+1 \leq 22-3x,\ 4x+3x \leq 22-1,\ 7x \leq 21,\ x \leq 3,\ (-\infty; 3]$;

3) Sistemaning uchinchi tengsizligini yechamiz:

$6 < x^2 - x(x-3),\ 6 < x^2 - x^2 + 3x,\ 6 < 3x,\ x > 2,\ (2; +\infty)$.

4) $[-11; +\infty),\ (-\infty; 3],\ (2; +\infty)$ sonli oraliqlarning umumiy qismini (kesishmasini) topamiz. U (2;3] dan iborat. Bu berilgan sistemaning yechimidir. \

Javob: (2;3].

2-misol. $log_{\sqrt[3]{4}}(x-1) = 6$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x-1 > 0$ dan, ya'ni $x > 1$ dan iborat. Logarifm ta'rifiga asosan $x-1 = (\sqrt[3]{4})^6,\ x-1 = 2,\ x = 3$.

Javob: 3.

Bu yerda dastlabki uchta qadamda bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizlikni yechish va o'xshash hadlarni ixchamlash qoidalaridan foydalandik. To'rtinchi qadamda esa sonli oraliqlarni kesishmasini topish qoidasidan foydalandik.

Shunday qilib biz, so'z – qoida, formula – qoida, ayniyat – qoida, teorema – qoida va ta'rif – qoidalardan foydalanib matematik masalalarni yechish uchun dastur (qadamlar ketma-ketligi) tuzish va yechish haqida fikr yuritdik. Bunday masalalar odatda standart masalalar deb ataladi. Standart masalalarni yechishda amalga oshiriladigan har bir qadamda ham biror qoidalardan foydalaniladi.

Standart masalalarni yechishning harakterli hususiyatlari nimadan iborat degan savol tug'ilishi tabiiy. Bunga javob topish uchun misol sifatida bir nechta misollarni qarab chiqamiz.

1. Arifmetik progressiyada $a_1 = 10,\ d = 4$ bo'lsa, uning dastlabki beshta hadi yozilsin.

Yechish. Masalaning o'zidan uning qanday masala ekanligi kelib chiqadi. Bu masala arifmetik progressiyaning istalgan hadini topishga doir masaladir. Arifmetik progressiya ta'rifini eslaymiz: ikkinchi hadidan boshlab har bir keyingi hadi o'zidan oldingi hadiga bir hil sonni qo'shishdan hosil bo'ladigan sonlar ketme-ketligi arifmetik progressiya deb ataladi. Shu ta'rif asosida masalani yechish dasturini tuzamiz:

1) Izlanayotgan had qaysi had asosida topiladi;

2) Izlanayotgan hadni topishga asos bo'ladigan hadni topamiz;

3) Progressiya ayirmasini topamiz;

4) Izlanayotgan hadni topishga asos bo'ladigan hadga ayirma qo'shiladi;

Hosil bo'lgan yig'indi izlanayotga had bo'ladi. bu dastur asosida berilgan masalani yechish quyidagicha bo'ladi:

Biz $a_1 = 10$ va $d = 4$ bo'lgan holda arifmetik progressiyaning dastlabki beshta hadini topishimiz, ya'ni a_2, a_3, a_4 va a_5 larni topishimiz kerak. Dastlab a_2 ni topishimiz kerak. Uni topishga asos

bo'ladigan had a_1 bo'lib, u berilgan. Bunda progressiya ayirmasi ham berilgan. Shuning uchun

$$a_2 = a_1 + d = 10 + 4 = 14.$$

Huddi shunday a_3, a_4, a_5 larni topamiz:

$$a_3 = a_2 + d = 14 + 4 = 18,$$

$$a_4 = a_3 + d = 18 + 4 = 22,$$

$$a_5 = a_4 + d = 22 + 4 = 26.$$

Javob: 10, 14, 18, 22, 26.

2. $4x^2 - 9x + 5$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.

Yechish. Berilgan masaladagi ko'phad kvadrat uchhaddan iborat. Demak, masala kvadrat uchhadni ko'paytuvchilarga ajratish masalasidan iborat.

Bizga ma'lum bo'lgan $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ayniyatga asosan (x_1 va x_2 lar ayniyatning chap tomonidagi kvadrat uchhad ildizlari) yuqorida berilgan masalani yechish uchun quyidagicha dastur tuzish mumkin:

1) $ax^2 + bx + c$ uchhadning x_1 va x_2 ildizlarini topish, ya'ni $ax^2 + bx + c = 0$ tenglamani yechish;

2) Kvadrat uchhadning x_1 va x_2 ildizlariga asosan $x - x_1$ va $x - x_2$ ikkihadlarni yozish;

3) Topilgan ikkihadlar bilan a koeffitsientni ko'paytmasini tuzish.

Bu yerdagi birinchi qadam uchun ham alohida dastur tuzish mumkinligini ko'rib o'tamiz:

Bu dastur bo'yicha berilgan masalani yechish quyidagicha bo'ladi:

$4x^2 - 9x + 5$ tenglamani yechamiz:

$$D = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 81 - 80 = 1 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{9 \pm 1}{8}; \quad x_1 = 1, \qquad x_2 = 1{,}25.$$

Demak, $4x^2 - 9x + 5 = 4(x-1)(x-1{,}25)$.

Ko'rib o'tilgan masalalardan standart masalalarni yechish jarayonini quyidagi hususiyatlarga ega ekanligi kelib chiqadi:

1. Masalani tahlil qilish natijasida berilgan masala qanday masalalar turkumiga tegishli ekanligi aniqlanadi.

2. Yechimni formulalar, ayniyat yoki ta'rif va teoremalardan foydalangan holda tuzilgan dasturlar asosida izlanadi.

Shunday qilib, standart masalalarni yechish uchun o'quvchilar matematikadagi formulalar, ayniyatlar, teorema va ularning natijalari hamda ta'riflarni yaxshi o'zlashtirishlari kerak bo'lar ekan.

Matematikani o'qitish jarayonidagi asosiy vazifalardan biri o'quvchilarni berilgan masala qanday masalalar turkumiga tegishli ekanligini ajrata olishga o'rgatishdan iboratdir. Bunda quyidagi ko'rinishdagi topshiriqlardan foydalanish mumkin:

Quyidagi masalalardan qaysilari standart masalalar?

1. $y = 2x$ funksiya grafigi yasalsin.
2. $y = 2x^2 + 2x^{-2}$ funksiyaning grafigi yasalsin.
3. $8a^3 + 27c^{18}$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.
4. $2x^3 + 3ax^2 - 11a^2x - 6a^3$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.

Bu yerda keltirilgan masalalardan 1,3,5 lari standart 2,4 lari nostandart

masalalardir. Chunki birinchi masala $y = kx$ ko'rinishidagi funksiya bo'lib, uni grafigi to'g'ri chiziqdan iborat va uni yasash qoidasi ma'lum. 3-masala ham standart masaladir. Chunki uni $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - 2ab + b^2)$ ayniyatga asosan ko'paytuvchilarga ajratish mumkin. 5-masala ham standart masaladir, cnunki S_6 ni $S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ formula yordamida topish mumkin.

Yuqorida keltirilgan masaladan ikkinchi va to'rtinchi masala nostandart masalalardir. Ularni yechish uchun aniq qonun-qoidalar yo'q. Ularni yechishda har biriga aloxida-aloxida yondashiladi.

Nostandart masalalar umumiy o'rta ta'lim makatbiva AL lar matematika kursidagi barcha mavzularni o'rganish jarayonida uchraydi. Berilgan masalani standart yoki nostandart deb atalishiga shu masala tegishli bo'lgan mavzuni o'qitish muddatiga ham bog'liq bo'ladi. Masalan, kvadrat tenglama tushunchasi o'tilmasdan turib

$ax^2 + bx + c = 0$ ko'rinishidagi masalani yechish talab qilingan bo'lsa, u holda bu masalani nostandart masala deb qarash mumkin.

Masalan, kvadrat tenglama mavzusi o'tilmasdan avval o'quvchilarga

$x^2 - 8x + 15 = 0$ tenglamani yechish topshirilgan bo'lsa, ular uchun bu tenglama nostandart masala hisoblanadi, chunki ular hali kvadrat tenglama ildizlarini toppish formulasini bilmaydilar. Lekin o'quvchilar berilgan tenglamani uning chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratish yordamida yozishga harakat qiladilar. U quyidagicha bajariladi:

$$x^2 - 8x + 15 = 0, \;\; x^2 - 3x - 5x + 15 = 0,$$

$$x(x-3) - 5(x-3) = 0, (x-3)(x-5) = 0$$

Bundan unga teng kuchli bo'lgan $x - 3 = 0$ yoki $x - 5 = 0$ standart tenglamalarni hosil qilamiz. Ulardan esa $x_1 = 3$ va $x_2 = 5$ lar kelib chiqadi. Bu yerda biz berilgan tenglamani yechishda ko'paytmani nolga teng bo'lish shartidan foydalandik.

Matematika kursidagi nostandart masalani yechish bilan qachon va qanday shug'ullanish mumkin degan savolning tug'ulishi tabiiy. O'quvchilarda o'tilgan har bir mavzu bo'yicha yetarlicha miqdorda standart masalani yechish malakalari hosil qilingandan so'nggina nostandart masalani yechishga o'tish mumkin. Dars jarayonida birdaniga nostandart masalalarni yechish bilan boshlash maqsadga muvofiq emas, chunki o'quvchilar u masalani birdaniga yechishga qiynaladilar va natijada matematikaga bo'lgan qiziqishlari so'nib

boradi. Bunday holat yuz bermasligi uchun o'quvchi har bir darsda yechiladigan standart va nostandart masalalarni oldindan tanlab qo'yishlari kerak. Misol sifatida biz quyida chiziqli, kvadrat, irratsional, ko'rsatkichli, logarifmik va trigonometrik tenglama mavzularini bayon qilish jarayonida tanlab olinish mumkin bo'lgan standart masalalarga namunalar keltiramiz.

1. Chiziqli tenglama

$ax = b(1)$ yoki $ax + b = cx + d$ (2) ko'rinishdagi tenglama chiziqli tenglama deyiladi. Ikkinchi tenglamani ayniy almashtirishlar yordamida birinchi tenglamaga osongina keltiriladi

Agar tenglama $ax = b$ ko'rinishida, yoki elementar almashtirishlar yordamida berilgan tenglamani $ax = b$ ko'rinishiga keltirish mumkin bo'lsa, u holda tenglamani standart shakldagi chiziqli tenglama deyiladi.

Masalan, $5x = 7$, $7(x-3) = 49$, $6(x+4) = 3 - 2x$, $3(x+3) + x = 9 + 4x$, $\frac{3x+(7-x)}{4} = 0$ ko'rinishidagi tenglamalar standart shakldagi chiziqli tenglamalardir.

2. Kvadrat tenglama

$$ax^2 + bx + c = 0 \left(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right),$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\left(x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right), ax^2+bx+c$$
$$=0\left(b=2k, x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}\right),$$

$$ax^2+bx=0\left(x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}\right), ax^2+c=0\ (x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, -\frac{c}{a}$$
$$>0)$$

ko'rinishidagi yoki ba'zi bir almashtirishlar yordamida ularga keltiriladigan tenglamalar standart shakldagi kvadrat tenglamalar deyiladi.

Masalan, $2x^2+3x-5=0$, $3x^2-5x+2=0$, $2x^2-3x+1=0, x^2-5x-36=0$ tenglamalar $ax^2+bx+c=0$ ko'rinishdagi tenglamalar bo'lib, ularning ildizlari haqiqiy va har xil (bu yerda $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ formuladan foydalaniladi).

$x^2-4x+4=0$ va $x^2-6x+9=0$ tenglamalar ham $ax^2+bx+c=0$ ko'rinishdagi tenglamalar bo'lib, ularning ildizlari haqiqiy va o'zaro teng.

$2x^2-3x+4=0$, $x^2+2x+7=0$ tenglamalar ham $ax^2+bx+c=0$ ko'rinishdagi tenglamalar bo'lib, ular haqiqiy ildizga ega emas. $x^2=3x$,

$4x^2-64=0, 5x^2=125$ tenglamalar chala kvadrat tenglamalardir.

$2x^2+4=0$, $3x^2+27=0$ tenglamalar ham chala kvadrat tenglamalar bo'lib, ular ildizlarga ega emas.

$5x^2-18x-72=0$, $3x^2+24x-144=0$, tenglamalar $ax^2+bx+c=0$ ko'rinishidagi tenglamalar bo'lib, ularning ikkinchi hadining koeffitsiyenti juft, shuning uchun ularni yechishda $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$ formuladan foydalaniladi.

$$x^2-8x+15=0, x^2+8x-65=0, x^2-12x+20=0$$

tenglamalar $x^2+px+q=0$ ko'rinishidagi tenglamalar bo'lib, ularni yechishda $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ formuladan foydalaniladi.

3. Irratsional tenglamalar

$$\sqrt[2k]{f(x)}=a, \sqrt[2k+1]{f(x)}=a, \sqrt[2k]{f(x)}=g(x), \sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x),$$

$\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)}$, $\sqrt[2k+1]{f(x)}=\sqrt[2k+1]{g(x)}$ ko'rinishdagi tenglamalar va ularga keltiriladigan tenglamalarni standart shakldagi irratsional tenglamalar deyiladi.

Masalan, $\sqrt{2x-4}=4$, tenglama $\sqrt[2k]{f(x)}=a$ ko'rinishidagi, $\sqrt[5]{3x-2}=2$ tenglama $\sqrt[2k+1]{f(x)}=a$ ko'rinishidagi, $\sqrt{x-1}=3-x$ tenglama $\sqrt[2k]{f(x)}=g(x)$ ko'rinishdagi, $\sqrt[3]{x^3-19}=x-1$ tenglama $\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x)$ ko'rinishdagi, $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$ tenglama $\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)}$ ko'rinishdagi va $\sqrt[3]{x^2+2}=\sqrt[3]{5x+2}$ tenglama $\sqrt[2k+1]{f(x)}=\sqrt[2k+1]{g(x)}$ ko'rinishdagi tenglamalardir.

Bularni yechish uchun 1,3,5 tenglamalarni har ikkala tomonini hadma-had kvadratga ko'tariladi. 2- tenglamani yechish uchun uning uning har ikkal tomonini 5-darajaga, 4va 6-tenglamalarni yechish uchun ularni har ikkal tomonini 3-darajaga ko'tariladi.

$\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[2k]{f(x)}-a=0$ ko'rinishdagi tenglama ham $\sqrt[2k]{f(x)}=y$ belgilash orqali standart shakldagi irratsional tenglamaga keltiriladi.

Masalan, $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$ tenglama $\sqrt[4]{x}=y$ $(y>0)$ almashtirish bilan $y^2+y-12=0$ tenglamaga keltiriladi. Uni yechib $y_1=3, y_2=-4$ larni topamiz. $y>0$ ni e'tiborga olsak, $\sqrt[4]{x}=3$ yoki $x=81$ ni topamiz.

4. Ko'rsatkichli tenglama

$a^x=b$ $(a>0, a\neq 1)$,

$$a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}, (a>0, a\neq 1), Aa^{2x}+Ba^x+C=0$$

ko'rinishidagi va ularga keltiriladigan tenglamalar standart shakldagi tenglamalardir. $a^x=b$ $(a>0, a\neq 1)$ tenglamadagi b ni a asosli daraja qilib yozish mumkin bo'lsa, u holda tenglama $a^x=a^k$ ko'rinishga keladi va uni ko'rsatkichli funksiyaning xossasiga asosan osongina yechiladi.

Agar $a^x=b$ da b ni a asosli daraja qilib yozib bo'lmasa, u holda uni har ikkala tomonini logarifmlash orqali yechiladi.

Masalan, $(0{,}5)^x=\frac{1}{64}$ tenglamani $(\frac{1}{2})^x=(\frac{1}{2})^6$ ko'rinishdaa yozish mumkin. $7^x=13$ tenglamada 13ni 7 asosli daraja qilib yozib bo'lmaydi. Uni yechish uchun har ikkal tomonini biror asosga ko'ra, masalan 7 asosga ko'ra logarifmlaymiz. Ya'ni, $7^x=13$, $\log_7 7^x=\log_7 13$, $x\log_7 7=\log_7 13$, $x=\log_7 13$.

$3^{6-x}=3^{3x-2}$ tenglama $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ ko'rinishidagi tenglamadir,

$\sqrt{8^{x-1}}=\sqrt[3]{4^{2-x}}$ tenglamada $8=2^3, 4=2^2$ ekanligini hamda ildizni xossasini e;tiborga olib, uni

$$2^{\frac{3(x-1)}{2}}=2^{\frac{2(2-x)}{3}}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Huddi shunday $2^x\cdot 5^x=0{,}1(10^{x-1})^5$,

$2{,}56^{\sqrt{x}-1}=(\frac{5}{8})^{4\sqrt{x}+1}$ va $\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}}=5^{\sqrt{x}-4}$ tenglama ham $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ ko'rinishga osongina keltiriladi.

$Aa^{2x}+Ba^x+C=0$ tenglama ham standart shakldagi tenglamadir. Chunki bu yerda $a^x=y$ belgilash qilinsa, natijada $Ay^2+By+C=0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi va uni yechib y topiladi. y ning topilgan qiymatini $a^x=y$ qo'yilsa, eng sodda ko'rsatkichli tenglama hosil bo'ladi. Masalan, $5^{2x}-6\cdot 5^x+5=0$ tenglamani qaraylik. Agar $5^x=y$ deb olinsa, $y^2-6y+5=0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Undan $y_1=1, y_2=5$ larni topamiz. Demak, biz$5^x=1$

va $5^x = 5$ lardan iborat $a^x = b$ ko'rinishidagi standart tenglamalarni xosil qilamiz. Ulardan $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ lar kelib chiqadi.

$3^{x-5} + 3^{x-7} + 3^{x-9} = 45{,}5 + 22{,}75 + 11{,}375 + \cdots$ tenglamani ham standart shaklidagi tenglamaga kiritish mumkin. Chunki uning o'ng tomonini

$45{,}5 + 22{,}75 + 11{,}375 + \cdots = \frac{91}{2} + \frac{91}{4} + \frac{91}{8} + \cdots$ ekanligini e'tiborga olsak, u birinchi hadi $b_1 = \frac{91}{2}$ va maxraji $q = \frac{1}{2}$ bo'lgan cheksiz kamayunchi geometrik progressiya ekanligini ko'ramiz. Uning yig'indisi $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{91}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{91}{1} = 91$ bo'lib berilgan tenglama $3^{x-5} + 3^{x-7} + 3^{x-9} = 91$ko'rinishga keladi. Uni yechamiz.

$3^{x-9}(3^4 + 3^2 + 1) = 91,\ 3^{x-9} \cdot 91 = 91, 3^{x-9} = 1, x - 9 = 0, x = 9$.

5. Logarifmik tenglamalar bo'yicha:

$\log_a x = b\ (a > 0, a \neq 1)$ va $\log_a f(x) = \log_a g(x)\ (a > 0, a \neq 1,$

$f(x) > 0, g(x) > 0)$ ko'rinishdagi tenglamalarni standart shakladagi tenglamalar sinfiga kiritish mumkin. Chunki ularni birinchisini logarifm ta'rifidan va ikkinchisini logarifmik funksiyaning $\log_a f(x) = \log_a g(x)\ (a > 0, a \neq 1$

$f(x) > 0, g(x) > 0)$ bo'lganda $f(x) = g(x)$ bo'ladi deyilgan xossadan foydalanib yechish mukin.

Masalan, $\log_{\sqrt[3]{4}}(x-1) = 6, \log_2(x^2 + 4x + 3)$ va $lg^2 x = 1$ tenglamalar $\log_a x = b$ ko'rinishidagi tenglamalardir. Ularni logarifm ta'rifidan foydalanib osongina yechish mumkin.$\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x),\ \log_7(4x - 5) = \log_7(2x + 5)$ va $\log_{20} x(x + 1) = \log_{20}(2x + 6)$ tenglamalar $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ko'rinishdagi tenglamalardir. Ularning logarifmik funksiyaning yuqorida keltirilgan xossasidan foydalanib yechiladi.

$Alog_a^2 f(x) + Blog_a f(x) + a = 0$ ko'rinishidagi tenglamalar ham $\log_a f(x) = y$ belgilash yordamida standart shakldagi tenglamalarga keltiriladi.

Masalan, $log_5^2 x - log_5 x - 2 = 0$ tenglama $\log_5 x = y$ almashtirish yordamida $y^2 - y - 2 = 0$ tenglamaga keltiriladi. Undan $y_1 = 2, y_2 = -1$ larni topamiz. Demak, berilgan tenglamadan $\log_5 x = 2$ va $\log_5 x = -1$ larni, ulardan esa $x_1 = 5^2 = 25, x_2 = 5^{-1} = \frac{1}{5}$ larni topamiz. Xuddi shunday

$\log_2(3x - 1) - \log_2(4 - x) = 4 - \log_2(x - 1)$ tenglama ham potensirlash yordamida osongina $\log_a f(x) = a$ ko'rinishga keltiriladi.

Ba'zi bir logarifmik tenglamalar logarifmning bir asosidan boshqasiga o'tish formulasini qo'llash yordamida standart shakldagi tenglamaga keltiriladi. Masalan, $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$ tenglamani yechish kerak bo'lsin. Bunda $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ formuladan foydalanamiz. Unga asosan,

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{1}{2}\log_3 x, \log_{27} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 27} = \frac{1}{3}\log_3 x,$$

$\log_{81} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 81} = \frac{1}{4}\log_3 x$. Bularni o'rniga qo'ysak,

$$\log_3 x \cdot \frac{1}{2}\log_3 x \cdot \frac{1}{3}\log_3 x \cdot \frac{1}{4}\log_3 x = \frac{2}{3}, \frac{1}{24} log_3^4 x = \frac{2}{3}, log_3^4 x = 16$$

$log_3^2 x = 4, log_3^2 x = -4, log_3^2 x = 4, \log_3 x = \pm 2, x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9};, log_3^2 x = -4$ bu yechimga ega emas.

6. Trigonometrik tenglamalar

$sinx = a\ (-1 \le a \le 1),\ cosx = a\ (-1 \le a \le 1), tgx = a$ va $ctgx = a$ ko'rinishidagi eng sodda trigonometrik tenglamalar yoki trigonometriyadagi bir qator formulalar hamda almashtirishlarni qo'llash yordamida yuqoridagi eng sodda trigonometrik tenglamalarga keltiriladigan tenglamalarni standart tenglamalar deyiladi.

Masalan, $sin4x = -1, \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, sinx(2sinx - \sqrt{2}) = 0$ $sin^2(x - 30°) = \frac{1}{2}, (sinx + sin10)\left(sin^2 x + \frac{3}{4}\right)\left(sin^2(x - 30°) + \frac{1}{2}\right) = 0$ tenglamalardir.

$cos2x = \frac{1}{\sqrt{2}}, cos3x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 2cos4x = 2, cos\frac{x}{2} + 0,(3) = 0,$ $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) = cos^2\left(1 - \frac{x}{2}\right),\ \left(cosx - \frac{1}{2}\right)\left(cos3x + \frac{1}{2}\right) cos2x\left(cos\frac{x}{2} - 1\right)\left(cos\frac{3x}{2} + 1\right)\left(cos^2 x - \frac{1}{2}\right) = 0$ tenglamalar ham standart shakldagi tenglamalardir.

$sinx \cdot cos2x + cosx \cdot sin2x = 1, sin3x \cdot cos3x = \frac{1}{2}, sin^2 3x + sinx + cos^2 3x = 0$ tenglamalar ham standart shakldagi tenglamalarga osongina keltiriladi. Bu yerda birinchi tenglamaning chap tomoni $\sin(2x + x) = sin3x$ bo'lib, tenglama $sin3x = 1$ dan iborat bo'ladi. Ikkinchi tenglamani har ikkala tomonini 2 ga ko'paytirilsa, $sin6x = 1$ tenglama, uchinchi tenglamada esa $sin^2 3x + cos^2 3x = 1$ ekanligi e'tiborga olinsa, natijada $sinx = -1$ tenglama hosil bo'ladi.

$tg3x\left(tg\frac{x}{2} - 1\right)(tgx - 1)(tg2x - \sqrt{3})\left(tg^2 x - \frac{1}{3}\right) = 0$ tenglamadan bir nechta standart shakldagi tenglamalar xosil bo'ladi.

II.BOB. MATEMATIKA KURSIDA NOSTANDART MASALALAR

2.1. Nostandart masala tushunchasi

Ma'lumki standart va nostandart masala tushunchasiga umumiy o'rta ta'lim maktabi, akademuk litsey va oliy o'quv yurtlari matematika kursida tez-tez duch kelamiz.Shuning uchun ham o'quvchi talabalar eng avvalo standart va nostandart masala tushunchasini mazmun-mohiyatini tushunib yetishlari kerak. Bu tushunchaning mazmun-mohiyatini yoritish bo'yicha koplab uslubchi olimlar turlicha fikrlar berganlar. Ularga L.M.Fridman, E.N.Turetskiy, S.Alixonov, A.U.Umirbekov, SH.SH.SHaabzalov, D.Poya va hokazolarni keltirish mumkin.

Ma'lumki qo'llanmaning birinchi bobida standart masala tushunchasi bilan tanishdik va uni ta'rifladik. Standart masalaning asosiy belgisi uni yechish uchun matematikada umumiy qonun va qoidalarning mavjudligi hamda ular asosida masalani yechish dasturini tuzish mumkinligidir.

Standart masalaning mazmun- mohiyati va ta'rifdan foydalangan holda nostandart masalaga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

Matematika kursidagi biror masalani yechishning aniq dasturini ko'rsatuvchi umumiy qonun-qoidalar mavjud bo'lmasa, u holda bunday masalani nostandart masala deb ataladi.

Nostandart masalani o'ziga xos xususiyatlarini yoritish maqsadida birnechta misollarni ko'rib o'tamiz.

1-masala. Sayyoh daryodan sayyohlar turar joyigacha masofani 6 soatda o'tishni mo'ljalladi. Ammo yo'lga chiqqandan 2 soat keyin o'z tezligini 0,5 km/soat ga kamaytirdi va sayyohlar turar joyiga 30 minut kechikib keldi. Sayyoh dastlab qanday tezlik bilan yurgan?

Yechish: berilgan masala matnli (harakatga doir) masaladir. Bunga o'xshash masalalarni yechish uchun aniq bir dastur(ketma-ketlik) mavjud emas. Lekin bu bunday masalalarni yechib bo'lmaydi degani emas. Amalda bunday masalalarni yechish uchun ham yo'l-yo'riqlarini ko'rsatish mumkin.

Sayyohning dastlabki tezligini x km/soat deymiz. Uholda u 6 soatda $6x$ km yurishi kerak. Ammo sayyoh dastlabki 2 soatda x km/soat tezlik bilan $2x$ km,keyin esa 4,5 soatda $(x-0{,}5)$km/soat tezlik bilan $4{,}5(x-0{,}5)$ km masofani o'tdi. Shunday qilib sayyoh jami $2x+4{,}5(x-0{,}5)$ km masofani o'tdi. Shunday qilib biz $2x+4{,}5(x-0{,}5)=6x$ tenglamaga ega bo'ldik. Bu tenglama chiziqli tenglama bo'lib, uning yechimi $x=4{,}5$ bo'ladi. Demak, sayyoh dastlabki 2 soatda 4,5 km/soat tezlik bilan yurgan.

Javob:4,5 km/soat

Masalani yechish jarayonini taxlil qilamiz:

1. Masala matnli (harakatga doir) masaladir, demak uni yechish uchun tenglama tuzish kerak.
2. Izlanayotgan kattalik x bilan belgilandi va qolgan noma'lumlarni u orqali ifodalanadi.
3. Hosil qilingan ifodalardan tenglama tuzildi.

Ko'rish mumkinki, bu yerda masalani yechish uchun aniq bir yo'l-yo'riq yoki dastur yo'q. Lekin masalani yechish uchun biz oldin egallagan bilimlarimiz va tajribalarimiz asosida standart masalaga keldik, ya'ni bu maxsus yo'l (tenglama tuzish)bilan berilgan masalaga ekvivalent bo'lgan standart masalaga keldik.

2-masala. O'zgaruvchining qanday qiymatlarida $\frac{y}{y-3}$ va $\frac{6}{y+3}$ kasrlar yig'indisi ularning ko'paytmasiga teng bo'ladi?

Yechish: Berilgan kasrlarning yig'indisini topamiz:

$$\frac{y}{y-3}+\frac{6}{y+3}=\frac{y^2+9y-18}{y^2-9}$$

Endi berilgan kasrlar ko'paytmasini topamiz:

$$\frac{y}{y-3}\cdot\frac{6}{y+3}=\frac{6y}{y^2-9}$$

Hosil bo'lgan kasrlarni taqqoslab, ularni maxrajlari bir xil ekanligini va u kasrlar teng bo'lishi uchun ularning suratlari teng bo'lishi kerakligini, hamda ularning umumiy maxraji nolga teng bo'lmasligini ta'kidlaymiz. Shunday qilib biz $y^2-9\neq 0$ shartda $y^2+9y-18=6y$ tenglamani yechishimiz kerak.

$y^2+9y-18=6y, y^2+3y-18=0;\ y_1=3, y_2=-6.$ Hosil bo'lgan ildizlardan $y^2-9\neq 0$ shartni faqat $y=-6$ qanoatlantiradi.

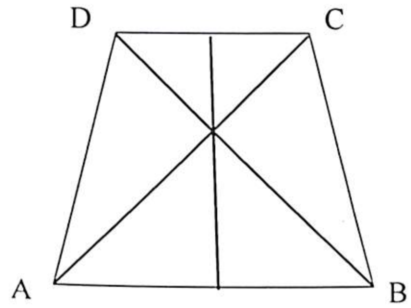
Javob:-6.

Masalani yechish jarayonini kuzatib u quyidagi sodda masalalardan iborat ekanligini ko'ramiz:

1) Ikkita kasrni yig'indisini topish(standart masala);
2) Ikkita kasrni ko'paytmasini topish(standart masala);
3) Kvadrat tenglamani yechish(standart masala);
4) $y^2-9\neq 0$ shartni tekshirish(standart masala);

Demak, bu holda berilgan standart masalani yechish to'rtta standart masalani yechishga keltirildi.

3-masala. Asoslari 12sm va 20 sm, dioganallar esa o'zaro perpendikulyar bo'lgan teng yonli trapetsiyaning yuzi topilsin.



Berilgan: 1) AB||CD; 2) AD=BC; 3) AC⊥BD; 4) AB=20sm;5) CD=12 sm.

Topish kerak: $S_{trapetsiya}$ ni.

Yechish: Trapetsiyaning yuzi $S_{tr}=\frac{a+b}{2}\cdot h$ formula bilan hisoblanadi. Bu yerda a va b trapetsiyaning asoslari, h uning balandligi. Trapetsiyaning asoslari berilgan. Demak, masala trapetsiyaning balandligini topishga keltiriladi.

Trapetsiyaning balandligini o'tkazamiz. Bu holda balandlikni dioganallar kesishgan O nuqta orqali o'tkazish maqsadga muvofiqdir. Demak, MN⊥ AB va MN trapetsiya balandligidir, ya'ni MN= h. Bu yerda M va N trapetsiya asoslarining o'rtalari bo'lgani uchun MA=10 sm, DN=6sm. Huddi shunday ∠AOM=∠DON=45°.

Δ AOM va ΔDON lar teng yonli va to'g'ri burchaklidir. U holda, OM=MA=10sm, ON=DN=6sm. Demak, h=OM+ON=10+6=16sm.

Endi trapetsiya yuzini topish formulasi bo'yicha uni yuzini hisoblaymiz:

$S_{tr} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{20+12}{2} \cdot 16 = 16 \cdot 16 = 256sm^2$.

Berilgan masalani yechish quyidagi ketma-ketlidan iborat:

1) Trapetsiyaning yuzini topish masalasi uning balandligini topishga keltiriladi;

2) Trapetsiyaning balandligini topish masalasi quyidagicha ikkita soda masalaga keltirildi:a) MN balandlikning MO qismini uzunligini topish ; b) MN balandlikning ON qismini uzunligini topish;

3) 2 a), b) masala o'z vaqtida yana ikkita masalaga keltirildi: a) berilgan trapetsiyaga nisbatan MN to'g'richiziq nimani anglatishini; b) AOM va DON uchburchaklarning MO va ON tomonlarini aniqlash;

4) 3 a) masalani yechish natijasida MN to'g'ri chiziq trapetsiyaning simmetriya o'qi ekanligi aniqlandi. Bu esa MA va DN larni hamda AOM va DON burchaklarni topish imkonini beradi;

5) 4) masalani yechish jarayonida olingan natija va trapetsiya dioganallarining o'zaro perpendikulyarlik sharti AOM va DON uchburchaklarni teng yonli to'g'ri burchakli ekanligini aniqlashga imkon yaratdi.

6) 3 b) masala to'g'ri burchakli teng yonli uchburchakning bir kateti ma'lum bo'lganda, ikinchi katetni topish imkonini berdi.

6-masalani yechib 2-masalaga, so'ngra berilgan masalaga qaytildi.

4-misol. Agar $sin37° = a$ bo'lsa, $sin16°$ ni a orqali ifodalang.

Yechish: $sin37° = a$ ni har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz. $sin^2 37° = a^2$. Buni har ikkala tomonini 2 ga ko'paytiramiz: $2\,sin^2 37° = 2a^2$.

$2sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$ formulani qo'llaymiz. Bizda $\alpha = 37°$ bo'lgani uchun $2sin^2 37° = 1 - cos^2 74°$ bo'ladi va $1 - cos^2 74° = 2a^2$ ga ega bo'lamiz. Bundan $cos^2 74° = 1 - 2a^2$ kelib chiqadi. Navbatda $cos74° = sin16°$ tenglamadan foydalanamiz. Natijada $sin16° = 1 - 2a^2$ kelib chiqadi.

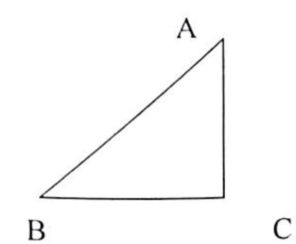
Javob:$1 - 2a^2$.

5-misol. $\log_a b = -\frac{1}{4}$ bo'lsa, $\log_a(a^{\frac{1}{2}}b^{-3})$ ni toping.

Yechish:$\log_a b = -\frac{1}{4}$ dan $b = a^{-\frac{1}{4}}$ ni topamiz va uni ikkinchi ifodaga qo'yamiz.

$$\log_a(a^{\frac{1}{2}}b^{-3}) = \log_a\left[a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{-\frac{1}{4}})^{-3}\right] = \log_a\left(a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}}\right) = \log_a a^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}.$$

6-misol. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 13m. Agar uning har bir kateti 3mga uzaytirilsa, uning gipotenuzasini uzunligi 4m ga ortadi. Uchburchak katetlarining uzunliklari topilsin.



Yechish: AB=c=13m, BC=a, AC=b deb olsak, masala shartiga asosan $a^2 + b^2 = 169$ va $(a+3)^2 + (b+3)^2 = 289$ bo'ladi. Xosil bo'lgan tengliklarni sistema qilib yechamiz.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 169 \\ (a+3)^2 + (b+3)^2 = 289 \end{cases}, \begin{cases} a^2 + b^2 = 169 \\ a^2 + b^2 + 6a + 6b + 18 = 289 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 169 \\ a^2 + b^2 + 6(a+b) = 271 \end{cases}, \begin{cases} a^2 + b^2 = 169 \\ 169 + 6(a+b) = 271 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 169 \\ 6(a+b) = 102 \end{cases}, \begin{cases} a^2 + b^2 = 169 \\ a+b = 17 \end{cases}, \begin{cases} a^2 + b^2 = 169 \\ a^2 + b^2 + 2ab = 289 \end{cases}$$

$$, \begin{cases} a+b = 17 \\ 2ab = 120 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a+b = 17 \\ ab = 60 \end{cases}, a_1 = 12, a_2 = 5, b_1 = 5, b_2 = 12.$$

Javob: (12;5) , (5;12).

Ko'rib o'tilgan misollardan, har qanday nostandart masalani yechish jarayoni quyidagi ikkita asosiy qadamni qilishni taqazo etishini ko'ramiz:

1) Ma'lum bir shakl almashtirishlar yordamida unga teng kuchli bo'lgan standart masalaga keltiriladi;

2) Nostandart masalani bir nechta eng sodda standart masalalarga ajratiladi.

Nostandart masalani xususiyatiga qarab bu qadamlarning bir yoki har ikkalasini qo'llaniladi. Ancha murakkab masalani yechishda bu jarayon bir nechta marta takrorlanadi.

Yuqorida biz matematika kursining barcha mavzulari bo'yicha nostandart masalalarga duch kelishimiz mumkinligini ta'kidladi. Biz

quyida namuna sifatida tenglamalar mavzusi bo'yicha nostandart masalalarni yechish bilan shug'ullanamiz:

1. Chiziqli tenglamalar

1. $\frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3$ tenglama yechilsin.

Yechish: $x = -2$ va $x = -3$ lar berilgan tenglamaning ildizlari bo'la olmaydi,

Tenglamaning barcha hadlarini chapga o'tkazamiz va kasrlarni umumiy maxraiga keltiramiz.

$$\frac{5(x-2)(x+3) - 2(x-3)(x+2) - 3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)} = 0,$$

$$\frac{-4(2x+9)}{(x+2)(x+3)} = 0$$

Kasr nolga teng bo'lishi uchun uning surati nolga teng va maxraji nolga teng bo'lmasligi kerak,ya'ni $-4(2x+9) = 0$. Bu yerda $-4 \neq 0$ bo'lgani uchun $2x + 9 = 0$ bo'ladi. Bu standart masaladir. Uni yechib $x = -4{,}5$ ni topamiz.

Javob: -4,5.

2. $(a^2 - 1)x = 2a^2 + a - 3$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama x ga nisbatan chiziqli tenglamalardir. U a parametrning har qanday qiymatlarida ma'noga ega. Berilgan tenglamani $(a-1)(a+1)x = (2a+3)(a-1)$ ko'rinishda yozamiz. Agar $a = 1$ bo'lsa, tenglama $0 \cdot x = 0$ ko'rinishga keladi va uni yechish har qanday haqiqiy son bo'ladi.

Agar $a = -1$ bo'lsa, u holda tenglama $0 \cdot x = -2$ ko'rinishga keladi va u yechimga ega bo'lmaydi.

Agar $a \neq \pm 1$ bo'lsa, u holda berilgan tenglama $x = \frac{2a+3}{a+1}$ ga teng yagona yechimga ega bo'lmaydi.

Bu yerda yagona yechimga ega deyilganda biz a ning mumkin bo'lgan har bir qiymatiga x ning bitta qiymati mos kelishini tushunamiz.

Javob: Agar $a = 1$ bo'lsa, $x \in R$; $a = -1$ bo'lsa, $x \in \emptyset$; $a \neq \pm 1$ bo'lsa, $x = \frac{2a+3}{a-1}$.

3. $\frac{y+5}{y(y-5)} - \frac{y-5}{2y(y-5)} - \frac{y+25}{2(y-5)(y+5)} = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning aniqlanish sohasi $y \neq 0, y \neq 5, y \neq -5$ sonlardan iborat. Tenglamaning chap tomonini umumiy maxrajga keltiramiz.

$$\frac{2(y+5)^2-(y-5)(y+5)-y(y+25)}{2y(y-5)(y+5)} =$$

$$0, \begin{cases} 2(y+5)^2 - (y-5)(y+5) - y(y+25) = 0 \\ 2y(y-5)(y+5) \neq 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2y^2 + 20y + 50 - y^2 + 25 - y^2 - 25y = 0 \\ y \neq 0, y \neq 5, y \neq -5 \end{cases}$$

$$, \begin{cases} -5y = -75 \\ y \neq 0, y \neq 5, y \neq -5 \end{cases}, y = 15.$$

Javob: 15.

4. $\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)} + \frac{3a-11}{a-1} = \frac{2x+7}{x+3}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglama ma'noga ega bo'lishi uchun $(a-1)(x+3) \neq 0$ ya'ni $a \neq 1, x \neq -3$ bo'lishi kerak. Tenglamani har ikkala tomonini $(a-1)(x+3)$ ga ko'paytiramiz.

$3ax - 5 + (3a - 11)(x + 3) = (2x + 7)(a - 1)$, $x(4a - 9) = 31 - 2a$. Bundan $a \neq 2{,}25$ bo'lganda $x = \frac{31-2a}{4a-9}$ ga ega bo'lamiz.

Endi a ning qiymatlari ichida x ning qiymatini -3 ga teng qiladigan qiymatlari bor yoki yo'qligini tekshiramiz. Buning uchun $\frac{31-2a}{4a-9} = -3$ ni a ga nisbatan yechamiz va $a = -0{,}4$ ga ega bo'lamiz. Demak $a = -0{,}4$ bo'lganda $x = -3$ bo'lar ekan. Shunday qilib, $a \neq 1, a \neq 2{,}25$ va $a \neq -0{,}4$ bo'lganda berilgan tenglama $x = \frac{31-2a}{4a-9}$ ga teng yagona yechimga ega bo'lar ekan.

Javob: Agar $a \neq 1, a \neq 2{,}25, a \neq -0{,}4$ bo'lsa, $x = \frac{31-2a}{4a-9}$.

2.2. Kvadrat tenglamalar.

1-misol. $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} - \frac{18x+7}{x^3-1} = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{30}{(x-1)(x+1)} - \frac{13}{x^2+x+1} - \frac{18x+7}{(x^2+x+1)(x-1)} = 0.$$

Tenglamadagi qavslarni umumiy maxrajga keltiramiz

$$\frac{30(x^2+x+1)-13(x-1)(x+1)-(18x+7)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = 0, \quad \frac{x^2-5x-36}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = 0,$$

$\begin{cases} x^2 - 5x - 36 = 0 \\ x \neq 1, x \neq -1 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -4, \ x_2 = 9 \\ x \neq 1, x \neq -1 \end{cases}, x_1 = -4, \ x_2 = 9.$

Javob: -4 va 9.

2-misol. $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama bikavadrat tenglamadir. Uni yechish usuli hozircha bizga noma'lum. Demak, u nostandart masaladir. Uni yechish uchun $x^2 = y$ almashtirish qilamiz. Natijada $2y^2 - 9y + 4 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu y ga nisbatan kvadrat tenglamadir. Uni yechamiz:

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}; \quad y_1 = 4, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Demak, biz $x^2 = 4$ va $x^2 = \frac{1}{2}$ lardan iborat 2 ta standart tenglamaga ega bo'ldik. Ularni yechamiz:

1) $x^2 = 4; \quad x_{1,2} = \pm 2; \quad$ 2) $x^2 = \frac{1}{2}; \quad x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Javob: $-2; 2; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

3-misol. $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x + 1) = 55$ ko'rinishda yozamiz. $x^2 + 2x = y$ deb olsak, $x^2 + 2x + 1 = y + 1$ bo'ladi va berilgan tenglama $y^2 - (y + 1) = 55, \ y^2 - y - 1 = 55, y^2 - y - 56 = 0$ ko'rinishga keladi. Bu nostandart masaladir. Uni yechib $y_1 = -7$ va $y_2 = 8$ larni topamiz. Shunday qilib, biz $x^2 + 2x = -7$ yoki $x^2 + 2x + 7$ va $x^2 + 2x = 8$ yoki $x^2 + 2x - 8 = 0$ lardan iborat 2 ta tenglamalarga ega bo'lamiz. Ularni yechamiz:

1) $x^2 + 2x + 7 = 0$ tenglama yechimga ega emas, chunki $D = b^2 - 4ac = 4 - 28 = -24 < 0$;

2) $x^2 + 2x - 8 = 0; \quad x_1 = -4, \ x_2 = 2.$

Javob: -4 va 2.

4-misol. $\frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2$ tenglama yechilsin.

Yechish: Agar biz tenglamani umumiy maxrajga keltirib, so'ngra yechmoqchi bo'lsak, to'rtinchi darajali tenglama hosil bo'lib uni yechish yanada qiyinlashadi. Shuning uchun ham bu yerda berilgan usuldan foydalanamiz.

$x^2 + 2x - 3 = y$ deb olsak, $x^2 + 2x - 8 = y - 5$ bo'ladi va berilgan tenglama

$$\frac{24}{y-5} - \frac{15}{y} = 2, \quad \frac{24y - 15y + 75 - 2y^2 + 10y}{y(y-5)} = 0, \quad \frac{2y^2 - 19y - 75}{y(y-5)} = 0$$

ko'rinishga keladi. Uni yechamiz

$$\frac{2y^2 - 19y - 75}{y(y-5)} = 0, \quad \begin{cases} 2y^2 - 19y - 75 = 0 \\ y(y-5) \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = \frac{25}{2}, & y_2 = -3 \\ y \neq 0, & y \neq 5 \end{cases}.$$

Shunday qilib biz $x^2 + 2x - 3 = \frac{25}{2}$ yoki $2x^2 + 4x - 31 = 0$ va

$x^2+2x-3=-3$ yoki $x^2+2x=0$ tenglamalarga ega bo'ldik. Ularni yechamiz:

$$2x^2+4x-31=0,\ x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+62}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{66}}{2};$$

$$x^2+2x=0,\quad x(x+2)=0,\quad x_1=0,\quad x_2=-2.$$

Demak, berilgan tenglama 4 ta ildizga ega.

Javob: $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{66}}{2},\ x_3=0,\ x_4=-2.$

5-misol. $x(x+2)(x+3)(x+5)=72$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning chap tomonidagi ko'paytuvchilarni o'rinlarini almashtiramiz va quyidagicha yozamiz:

$$x(x+2)(x+3)(x+5)=72,\ (x^2+5x+6)(x^2+5x)=72.$$

Agar $x^2+5x=y$ olsak, $x^2+5x+6=y+6$ bo'lib, berilgan tenglama $(y+6)y=72$ yoki $y^2+6y-72=0$ ko'rinishga keladi. Uni yechib $y_1=6,\ y_2=-12$ larni tipamiz. Shunday qilib biz $x^2+5x=6$ yoki $x^2+5x-6=0$ va $x^2+5x=-12$ yoki $x^2+5x+12=0$ tenglamalarga ega bo'lamiz. Ularni yechamiz:

1) $x^2+5x-6=0,\ x_1=1,\ x_2=-6;$ 2) $x^2+5x+12=0,$ $x\in\emptyset.$

Javob: -6 va 1.

6-misol. $(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $x=3$ berilgan tenglamaning yechimi emasligi ravshan. Shuning uchun tenglamani har ikkala tomonini $(x-3)^2$ ga bo'lib unga teng kuchli bo'lgan

$x^2-16+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=0$ yoki $x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=16$ tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamaning chap tomonidan yig'indini kvadratini ajratamiz.

$$\left(x+\frac{3x}{x-3}\right)^2-2x\cdot\frac{3x}{x-3}=16 \text{ yoki } \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-\frac{6x^2}{x-3}=16.$$

$\frac{x^2}{x-3}=y$ deb olamiz, u holda $y^2-6y-16=0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Undan $y_1=8$ va $y_2=-2$ larni topamiz. Shunday qilib biz $\frac{x^2}{x-3}=8$ va $\frac{x^2}{x-3}=-2$ tenglamalarga ega bo'lamiz. Ularni yechamiz.

1) $\frac{x^2}{x-3}=8,\ x^2-8x+24=0,\ x\in\emptyset;$

2) $\frac{x^2}{x-3}=-2,\ x^2+2x-6=0,\ x_{1,2}=-1\pm\sqrt{7}.$

Javob: $-1+\sqrt{7}$ va $-1-\sqrt{7}$.

7-misol. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$ tenglama yechilsin.

Yechish: Agar biz bu tenglamani umumiy maxrajga keltirib, so'ngra soddalashtirib yechmoqchi bo'lsak, (standart usul) u holda $x^4-2{,}9x^3+3x^2-2{,}9x+1=0$ ($x\neq0$ shartda) ko'rinishdagi tenglama hosil bo'lib uni yechish ancha murakkablashadi.shuning uchun bu yerda bu usulni qo'llab bo'lmaydi. Berilgan tenglamaning chap tomoni o'zaro teskari ifodalardan iborat bo'lganligi uchun bu yerda belgilash usulidan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

$\frac{x^2+1}{x} = y$ deb olsak, $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{y}$ bo'ladi.

Demak, bu belgilashlarga asosan berilgan tenglamadan $y + \frac{1}{y} = 2{,}9$ yoki $y^2 - 2{,}9y + 1 = 0$ tenglama kelib chiqadi. Bu tenglama kvadrat tenglamadir. uni yechamiz:

$$y_{1,2} = \frac{2{,}9 \pm \sqrt{8{,}41-4}}{2} = \frac{2{,}9 \pm 2{,}1}{2}, \quad y_1 = 2{,}5, \quad y_2 = 0{,}4.$$

y ning bu qiymatlarni belgilash qilgan joyga qo'yamiz. U holda quyidagi ikkita tenglama hosil bo'ladi:

$$1)\frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2}; \quad 2)\ \frac{x^2+1}{x} = \frac{2}{5}.$$

Ularni yechamiz:

$$1)\ \frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2},\ 2x^2+2 = 5x,\ 2x^2-5x+2=0,\ x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} = \frac{5\pm3}{4},\ x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$2)\ \frac{x^2+1}{x} = \frac{2}{5},\ 5x^2+5 = 2x,\ 5x^2-2x+5=0,\ \emptyset.$$

Javob:$2;\ \frac{1}{2}$.

8-misol.$x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3-x^2} = 2$ tenglama yechilsin.

Yechish: Agar bu tenglamada ham an'anaviy usulni qo'llamoqchi bo'lsak, u holda oltinchi darajali ancha murakkab tenglama hosil bo'lib, uni yechish yanada qiyinlashadi. Shuning uchun ham bu yerda $x^3 - x^2 = y$ deb olish maqsadga muvofiqdir. U holda $y - \frac{8}{y} = 2$ yoki $y^2 - 2y - 8 = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Uni yechamiz:

$$y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3;\ \ y_1 = 4,\ \ y_2 = -2.$$

y ning bu qiymatlarini belgilash qilgan joyga qo'yamiz. U holda quyidagi ikkita tenglama hosil bo'ladi:

$$1)x^3 - x^2 = 4; \quad 2)x^3 - x^2 = -2.$$

Ularni yechamiz:

$$1)x^3 - x^2 = 4,\ x^3 - x^2 - 4,\ (x-2)(x^2+x+2) = 0.$$

Bundan $x-2=0$ va $x^2+x+2=0$ tenglamalar hosil bo'lib, ularning birinchisidan $x=2$ kelib chiqadi. Ikkinchi tenglama esa yechimga ega emas.

$2)x^3 - x^2 = -2,\ x^3 - x^2 + 2 = 0,\ (x+1)(x^2-2x+2) = 0.$ Bundan $x+1=0$ va $x^2-2x+2=0$ tenglamalar hosil bo'lib, ularning birinchisidan $x=-1$ kelib chiqadi. Ikkinchi tenglama esa yechimga ega emas.

Javob: $2;\ -1$.

9-misol. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu yerda qavslarni ochib soddalashtirishdan so'ng to'rtinchi darajali ancha murakkab tenglama hosil bo'lib, uni yechish yanada urakkablashadi. Shuning uchun bu yerda ham boshqacha yo'l tutamiz. Dastlab tenglamaning chap tomonidagi birinchi va to'rtinchi hadlarni, so'ngra ikkinchi va uchinchi hadlarni ko'paytirib qavslarni ochamiz. Natijada $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$ tenglama hosil bo'ladi. Agar biz $x^2+5x+4=y$ deb olsak, $x^2+5x+6=y+2$ bo'lib, u holda berilgan tenglamadan $y(y+2)=3$ yoki $y^2+2y-3=0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama kvadrat tenglama bo'lib, uning ildizlari $y_1=1$ va $y_2=-3$ bo'ladi. y ning bu qiymatlarini o'rniga qo'yamiz. Natijada $x^2+5x+4=1$ yoki $x^2+5x+3=0$ va$x^2+5x+4=-3$ yoki $x^2+5x+7=0$ tenglamalar hosil bo'ladi. ularni yechamiz:

1)$x^2+5x+3=0,\ x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2},\ x_1=\frac{-5+\sqrt{13}}{2},\ x_2=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}.$

2)$x^2+5x+7=0,\ x\in\emptyset.$

Javob:$\frac{-5+\sqrt{13}}{2},\ \frac{-5-\sqrt{13}}{2}.$

10-misol. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $x+\frac{1}{x}=y$ deylik. U holda $x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$ yoki $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ bo'lib, berilgan tenglama $2(y^2-2)-7y+9=0$ yoki $2y^2-7y+5=0$ ko'rinishga keladi. Bu kvadrat tenglama bo'lib, uning

ildizlari $y_1=1$ va $y_2=\frac{5}{2}$ bo'ladi. y ning bu qiymatlarini o'rniga qo'ysak quyidagi ikkita tenglama hosil bo'ladi:

1) $x+\frac{1}{x}=1;$ 2)$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}.$

Ularni yechamiz:

1) $x+\frac{1}{x}=1,\ x^2-x+1=0,\ x\in\emptyset;$

2)$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\ 2x^2-5x+2=0,\ x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}.$

Javob: $2;\frac{1}{2}.$

11-misol.$x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=27$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning chap tomonini kvadratlar yig'indisidan (x va $\frac{3x}{x+3}$ larning kvadratlari) iborat ekanligi uning har ikkala tomoniga shunday ifodani qo'shishga undaydiki, natijada tenglamaning chap tomonida yig'indining to'la kvadrati hosil bo'lsin. Bu ifoda $-2x\cdot\frac{3x}{x+3}$ dan iborat.

Demak, $x^2-2x\cdot\frac{3x}{x+3}+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=27-2x\cdot\frac{3x}{x+3}$ yoki $\left(x\cdot\frac{3x}{x+3}\right)^2=27-6\cdot\frac{x^2}{x+3},$

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2=27-6\cdot\frac{x^2}{x+3},\ \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}-27=0.$$

$y=\frac{x^2}{x+3}$ deylik, u holda $y^2+6y-27=0$ tenglama hosil bo'ladi. Uni yechib $y_1=-9, y_2=3$ larni topamiz. y ning qiymatlarini o'rniga qo'yib quyidagi ikkita standart tenglamaga ega bo'lamiz:

$$1)\frac{x^2}{x+3}=-9; \quad 2)\frac{x^2}{x+3}=3.$$

Bularni yechamiz:

1) $\frac{x^2}{x+3}=-9,\ x^2=-9-27,\ x^2+9x+27=0.$ Bu tenglama yechimga ega emas.

$$2)\frac{x^2}{x+3}=3,\ x^2=3x+9,$$

$$x^2-3x-9=0,\quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+36}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{45}}{2}$$

$$(x\neq-3).$$

Javob: $\frac{3-\sqrt{45}}{2}, \frac{3+\sqrt{45}}{2}$.

12-misol. $2x^2+5x-5=0$ tenglamaning ildizlari x_1 va x_2 bo'lsa, $x_1^3+x_2^3$ topilsin.

Yechish: Agar berilgan tenglamani uni ildizlarini topish formulasidan topmoqchi bo'lsak ular irratsional sonlardan iborat bo'ladi va $x_1^3+x_2^3$ ni topish qiyinlashadi. Shuning uchun bu yerda boshqacha ish tutamiz. Buning uchun dastlab berilgan tenglamani

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}=0$$

ko'rinishda yozamiz va Viyet teoremasidan foydalanamiz. Unga asosan $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ va $x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}$ bo'ladi. Birinchi tenglikni har ikkla tomonini kubga ko'taramiz.

$x_1+x_2=-\frac{5}{2},\ (x_1+x_2)^3=-\frac{125}{8},\ x_1^3+x_2^3+3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)=-\frac{125}{8},$

$x_1^3+x_2^3+3\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}=-\frac{125}{8},\ x_1^3+x_2^3=--\frac{125}{8}-\frac{75}{8}=-\frac{275}{8}.$

Javob: $-\frac{275}{8}$.

13-misol. Ildizlari x_1 va x_2 $(x_1\neq x_2)$bo'lgan $x^2+2(k-3)x+9=0$ tenglama berilgan. k ning qanday qiymatlarida $-6<x_1<1$ va $-6<x_2<1$ bo'ladi?

Yechish: Agar biz kvadrat tenglama ildizlarini topish formulasidan foydalanib x_1 va x_2 larni topib yuqoridagi shartlar bo'yicha k ni topmoqchi bo'lsak, ancha murakkzb bo'lgan irratsional tengsizliklar sistemasi hosil bo'ladi va uni yechish qiyinlashadi. Shuning uchun bu yerda quyidagi teoremadan foydalanish qulay bo'ladi:

Teorema. $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ funksiya p va q sonlari orasida yotuvchi x_1 va x_2 ildizlarga

$$\begin{cases} D=b^2-4ac\geq0, \\ f(p)>0, \\ f(q)>0, \\ p<-\frac{b}{2a}<q \end{cases}$$

shart bajarilganda va faqat shu xoldagina ega bo'ladi.

Bu teoremaga asosan

$$\begin{cases} [2(k-3)]^2 - 4\cdot 9 > 0, \\ (-6)^2 + 2(k-3)(-6) + 9 > 0, \\ 1^2 + 2(k-3)\cdot 1 + > 0, \\ -6 < -(k-3) < 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4k^2 - 24k + 36 - 36 > 0, \\ 36 - 12k + 36 + 9 > 0, \\ 1 + 2k - 6 + 9, \\ -9 < -k < -2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} k(k-6) > 0 \\ 12k < 81, \\ 2k > -4, \\ 2 < k < 9 \end{cases}; \quad \begin{cases} k < 0, k > 6, \\ k < \dfrac{81}{12}, \\ k > -2, \\ 2 < k < 9 \end{cases}$$

Oxirgi sistemaning yechimi $6 < k < \frac{81}{12}$ dan iborat.

Javob: (6; 6,75).

14-misol. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $u = \frac{x-2}{x+1}$ va $v = \frac{x+2}{x-1}$ belgilash qilamiz. U holda $20u^2 - 5v^2 + 48uv = 0$ bir jinsli tenglamani hosil qilamiz. Uni yechish uchun har ikkala tomonini v^2 ga bo'lamiz. Natijada $20\frac{u^2}{v^2} + 48\cdot\frac{u}{v} - 5 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bunda $\frac{u}{v} = t$ deb olsak $20t^2 + 48t - 5 = 0$ kvadrat tenglamaga kelamiz. Uni ildizlari $t_1 = -\frac{5}{2}$ va $t_2 = \frac{1}{10}$ lardan iborat. Demak, biz $\frac{u}{v} = -\frac{5}{2}$ va $\frac{u}{v} = \frac{1}{10}$ larga, ulardan esa $\frac{x-2}{x+1} : \frac{x+2}{x-1} = -\frac{5}{2}$ va $\frac{x-2}{x+1} : \frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{10}$ tenglamalarni hosil qilamiz. Bu tenglamalarning birinchisi yechimga ega emas. Ikkinchi tenglamadan $3x^2 - 11x + 6 =$

0 tenglama kelib chiqadi va uning ildizlari $x_1 = 3, x_2 = \frac{2}{3}$ lardan iborat bo'ladi.

Javob:3; $\frac{2}{3}$.

15-misol. $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1)$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani yechish uchun $u = x - 1,\ v = x^2 + x + 1$ belgilash qilamiz. U holda $2v^2 - 7u^2 = 13uv$ bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Agar $u = v = 0$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. Oxirgi tenglamani har ikkala tomonini v^2 ga bo'lamiz va $t = \frac{u}{v}$ yangi o'zgaruvchi kiritamiz. Natijada olsak $7t^2 + 13t - 2 = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Uni yechib $t_1 = \frac{1}{7},\ t_2 = -2$ larni topamiz. Demak, biz $\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{7}$ va $\frac{x-1}{x^2+x+1} = -2$ lardan iborat ikkita tenglamaga ega bo'lamiz. Ularni yechamiz:

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{7}, \quad 7x - 7 = x^2 + x + 1, \quad x^2 - 6x + 8 = 0,$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4;$$

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = -2, \quad x - 1 = -2x^2 - 2x - 2,$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Javob:$x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = -1,\ x_4 = -\frac{1}{2}$.

16-misol. $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani chap tomonini standart shaklga keltirishga harakat qilish uni yechishni qiyinlashtiradi. Agar $15x^2$ ni o'rniga $16x^2$ bo'lganda tenglamani chap tomoni x^2+x+4 va $4x$ lar yig'indisining kvadratidan iborat bo'lar edi. Shuninh uchun $15x^2$ ni $16x^2-x^2$ ifoda bilan almashtiramiz. $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+16x^2-x^2=0$,

$$[(x^2+x+4)+4x]^2-x^2=0,$$

$[(x^2+x+4)+4x-x]\,[(x^2+x+4)+4x+x]$=0,

$(x^2+4x+4)(x^2+6x+4)=0$.

Bu tenglama $x^2+4x+4=0$ va $x^2+6x+4=0$ tenglamalarga teng kuchli.

Ularni yechamiz.

$x^2+4x+4=0,\ (x+2)^2=0,\ x+2=0,\ x_1=-2.$

$x^2+6x+4=0,\ x_{2,3}=-3\pm\sqrt{9-4}=-3\pm\sqrt{5}.$

2-usul. $x^2+x+4=y$ deymiz. U holda $y^2+8xy+15x^2=0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning chap tomonini $(y+5x)(y+3x)$ ko'rinishida yozish mumkin. U holda $(y+5x)(y+3x)$=0 bo'lib, bundan $y_1=-5x$ va $y_2=-3x$ larni topamiz. Uning bu ifodalarini belgilash qilgan joyga qo'yib birinchi usulda hosil bo'lgan tenglamalarga kelamiz.

Javob:$-2;\ -3\pm\sqrt{5}$.

2.3. Irratsional tenglamalar

Umumiy o'rta ta'lim maktablari matematika kursida o'rganiladigan muhim mavzulardan biri irratsional tenglama mavzusidir. Bunday tenglamalar ichida shunday tenglamalar uchraydiki, ularni an'anaviy usullar bilan yechib bo'lmaydi. Bunday tenglamalar nostandart tenglamalar deb atalib ularni yechish uchun ham har biriga alohida—alohida yondashiladi. Quyida ularga misollar keltiramiz:

1-misol. $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4)$ tenglama yechilsin.

Yechish: An'anaviy usullardan biri ildiz qatnashgan ifodani bir tomonga, ildiz qatnashmagan ifodalarni ikkinchi tomonga o'tkazib so'ngra, har ikkala tomonini darajaga ko'tarish usulidir. Agar bu usulni qo'llasak, berilgan tenglamag nisbatan murakkabroq tenglama hosil bo'ladi va yechish yanada qiyinlashadi. Shuning uchun bu yerda boshqacharoq ish tutamiz. Tenglamani har ikkala qismini 2 ga ko'paytiramiz va bir tomonga o'tkazamiz:

$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3(x+4),$

$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12,$

$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8=0,$ $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$ deb olamiz, u holda $2x^2-3x+2$=y^2 bo'lib, berilgan tenglama y^2-

$2y-8=0$ ko'rinishga keladi. Bu kvadrat tenglama bo'lib, uning ildizlari $y_1=4,\ \ y_2=-2$ bo'ladi. Agar y ni o'rniga ifodasini qo'ysak quyidagi 2 ta tenglama hosil bo'ladi:

1)$\sqrt{2x^2-3x+2}=4$; 2)$\sqrt{2x^2-3x+2}=-2$.

Birinchi tenglamani yechamiz:

$\sqrt{2x^2-3x+2}=4,\quad 2x^2-3x+2=16,\quad 2x^2-3x-14=0,$

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\frac{3\pm 11}{4},\quad x_1=-2,\quad x_2=\frac{7}{2}.$

Javob: $-2;\frac{7}{2}$.

2-misol. $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x+15}=2$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamani ham an'anaviy usul bilan, ya'ni uni har ikkala tomonini to'rtinchi darajaga ko'tarib yechib bo'lmaydi. Bu tenglamani yechish uchun $1-x=u^4$ va $x+15=v^4$ bo'ladi. Agar biz bu belgilashlarni e'tiborga olsak, quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} u+v=2,\\ u^4+v^4=16\end{cases}$$

Bu sistemadan $u_1=0,\ v_1=2$ va $u_2=2,\ v_2=0$ larni topamiz. Bularni e'tiborga olsak, quyidagi sistemalarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{1-x}=0\\ \sqrt[4]{15+x}=2\end{cases};\qquad \begin{cases}\sqrt[4]{1-x}=0\\ \sqrt[4]{15+x}=2\end{cases}.$$

Bulardan $x_1=1,\ x_1=-15$ larni topamiz. Bularning har ikkalasi berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

3-misol. $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=1$ tenglama yechilsin.

Yechish: Quyidagicha belgilash qilamiz:

$$\begin{cases}\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}=u\\ \sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=v\end{cases};\quad \begin{cases}(x-2)(x-32)=u^5\\ (x-1)(x-33)=v^4\end{cases};$$

$$\begin{cases}x^2-34x+64=u^5\\ x^2-34x+33=v^4\end{cases};\quad \begin{cases}u^5-v^4=34\\ u-v=1\end{cases};$$

Oxirgi sistemani o'rniga qo'yish usuli bilan yechamiz:

$$\begin{cases}v=u-1\\ u^5-v^4=31\end{cases};\quad \begin{cases}v=u-1\\ u^5-(u-1)^4=31\end{cases};\quad \begin{cases}v=u-1\\ u^5-u^4+4u^3-6u^2+4u-32=0\end{cases}$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasi ildizlaridan biri 2 ga teng.

$u^5-u^4+4u^3-6u^2+4u-32$ ko'phadni $u-2$ ga bo'lib, $u^4+u^3+u^2+6u+16$ ni topamiz.

Shunday qilib, oxirgi sistemadan

$$\begin{cases}v=u-1\\ u-2=0\end{cases}\ \text{va}\ \begin{cases}v=u-1\\ u^4+u^3+u^2+6u+16=0\end{cases}$$

sistemalarni hosil qilamiz. Bularning birinchisidan $u=2$ va $v=1$ ni topamiz.

Ikkinchi sistemaning birinchi tenglamasidan $u\geq 1$ ekanligi ravshan. Bundan $u^4+u^3+u^2+6u+16=0$ tenglamani yechimga emasligi kelib chiqadi. Shunday qilib (1) sistema $u=2,\ v=1$ dan iborat yagona yechimga ega. Bularni e'tiborga olsak,

$$\begin{cases}\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}=2\\ \sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=1\end{cases} \text{ yoki } \begin{cases}x^2-34x+64=32\\ x^2-34x+33=1\end{cases}$$

sistemaning tenglamalaridan birini, masalan birinchisini yechamiz:

$\sqrt[5]{x^2-34x+64}=2, \quad x^2-34x+64=32, \quad x^2-34x+32=0,$

$$x_{1,2}=17\pm\sqrt{289-32}=17\pm\sqrt{257}$$

har ikkala ildiz tenglamani qanoatlantiradi.

Javob: $17-\sqrt{257}; \quad 17+\sqrt{257}.$

4-misol. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani yechish uchun uning har ikkala tomonini chap tomonidagi ifodani qo'shmasiga ko'paytiramiz:

$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5})(\sqrt{2x^2+3x+5}-$
$\sqrt{2x^2-3x+5})= \qquad =3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-$
$\sqrt{2x^2-3x+5})2x^2+3x+5-2x^2+3x-5=$
$3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}),$

$6x=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}).$

Bu tenglamadan $x_1=0$ bo'lishi ravshan.

Demak, $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2.$ Hosil bo'lgan tenglamani berilgan tenglama bilan sistema qilib yechamiz:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x\\ \sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2\end{cases}.$$

Sistemani qo'shish usuli bilan yechsak,

$$2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$$

tenglama hosil bo'ladi. bu tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib yechamiz:

$$(2\sqrt{2x^2+3x+5})^2=(3x+2)^2, \quad 8x^2+12x+20$$
$$=9x^2+12x+4,$$

$$x^2=16, \quad x_1=4, \quad x_2=-4.$$

Shunday qilib biz $x_1=0, \ x_2=-4$ va$x_3=4$ larni hosil qildik. Tekshirib ko'rib, ulardan faqat $x=4$ berilgan tenglamani qanoatlantirishiga ishonch hosil qilamiz.

Javob: 4.

5-misol. $\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamani yuqorida ko'rib o'tilgan usullarning hech biri bilan yechib bo'lmaydi. Dastlab tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz. U $\begin{cases}x-1\geq 0\\ 3-x\geq 0\end{cases}$ sistemaning yechimidan, ya'ni $1\leq x\leq 3$ dan iborat. Demak, tenglamaning ildizini $[1;3]$ kesmadan qidirishimiz kerak. Tanlash usulidan foydalanib $x=2$ berilgan tenglamaning ildizi ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham

$\sqrt[4]{2-1}+2\sqrt[3]{8}=4+\sqrt{3-2}$, $\sqrt[4]{1}=2\cdot 2=4+\sqrt{1}$, 1+4=4+1, 5=5.

Endi biz berilgan tenglama x=2 dan boshqa ildizga ega emasligini ko'rsatishimiz kerak.

$[1;3]$ kesmada $f(x)=\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}$ funksiya o'suvchi va $g(x)=4+\sqrt{3-x}$ funksiya kamayuvchiligi ravshan. Bu holda $f(x)=g(x)$ tenglama ildizga ega bo'lsa, u yagona bo'ladi. Demak, x=2 berilgan tenglamaning ildizi ekan.

Javob: 2.

6-misol. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$ tenglama yechilsin.

Yechish: tenglamaning har ikkala qismini (u $5-\sqrt[3]{x}>0$ shartni qanoatlantiruvchi x lar to'plamida aniqlangan) uning chap tomonidagi ifodani qo'shmasiga ko'paytirib ifodani ixchamlaymiz.

$(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}) \quad =\sqrt[3]{x}(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})$,

$5+\sqrt[3]{x}-5+\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})$,

$$2\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})$$

bundan esa $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=2$ tenglamaga ega bo'lamiz. Uni yechamiz:

$\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=2$, $(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}})^2=(2+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})^2$,

$5+\sqrt[3]{x}=4+4\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}+5-\sqrt[3]{x}$, $2\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}-2$.

Bu tenglama quyidagi sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases}4\left(\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}\right)=\left(\sqrt[3]{x}-2\right)^2\\ \sqrt[3]{x}-2\geq 0\end{cases},\ \begin{cases}\sqrt[3]{x^2}=16\\ \sqrt[3]{x}\geq 2\end{cases},\ \begin{cases}(\sqrt[3]{x})_{1,2}=\pm 4\\ x\geq 8\end{cases}, x=64.$$

Javob: 64.

7-misol. $\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x-5)}=3$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani har ikkala qismini $\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{x-5}$ ning qo'shmasiga ko'paytiramz. Natijada,

$$\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-5}\right)\left(\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x-5)}\right)$$
$$=$$
$$=3\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-5}\right), x+4-\sqrt[3]{(x+4)^2(x-5)}$$
$$+\sqrt[3]{(x-5)^2(x+4)}-x+5+\sqrt[3]{(x+4)^2(x-5)}-$$
$$-\sqrt[3]{(x-5)^2(x+4)}=3\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-5}\right), \left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-5}\right)$$
$$=3$$

tenglama hosil bo'ladi. hosil bo'lgan tenglamani yechish uchun $\sqrt[3]{x+4}$ =a, $\sqrt[3]{x-5}$ =b belgilash kiritamiz. U holda a^3=x+4, b^3=x−5 bo'ladi. Bularni e'tiborga olsak,quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases}a^3-b^3=9\\ a-b=3\end{cases}.$$

Hosil bo'lgan sistemani o'rniga qo'yish usuli bilan yechib a=2, b=-1 va a=1, b=-2 larni topamiz.

Berilgan tenglama ildizlarini topish uchun a yoki b ning topilgan qiymatlaridan foydalanish mumkin:

Agar a=2 bo'lsa, x+4=2^3, x_1=4; agar a=1 bo'lsa, x+4=1, $x_2 = -3$;

Tekshirib ko'rib x ning har ikkala qiymati berilgan tenglamani qanoatlantirishini ko'rish mumkin:

Javob:$-3; 4$.

8-misol. $\sqrt[3]{2x^2+8x+72}+\sqrt[3]{3x^2+12x+12}=\sqrt{12-4x-x^2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Ildizlar orasidagi ifodalardan to'la kvadratlar ajratamiz: $\sqrt[3]{2x^2+8x+72}=\sqrt[3]{2(x^2+4x+36)}=\sqrt[3]{2((x+2)^2+32)}=\sqrt[3]{2(x+2)^2+64}\geq\sqrt[3]{64}=4$; $\sqrt[3]{3x^2+12x+12}=\sqrt[3]{3(x+2)^2}\geq 0$.Berilgan tenglamaning o'ng tomonini quyidagicha yozish mumkin:

$$\sqrt{12-4x-x^2}=\sqrt{-(-12+4x+x^2)}=\sqrt{-[(x+2)^2-16]}$$
$$=\sqrt{16-(x+2)^2}\leq\sqrt{16}=4.$$

Shunday qilib berilgan tenglamaning chap tomoni x ning har qanday qiymatlarida 4 dan katta emas, o'ng tomoni esa 4 dan kichik emas. Bundan esa tenglamaning har ikkala tomoni 4 ga tengligi kelib chiqadi. Bunga asosan, $\sqrt{12-4x-x^2}=4, 12-4x-x^2=16,$

$x^2+4x+4=0, (x+2)^2=0, x$=-2. Bu berilgan tenglamani ildizi bo'ladi.

Javob: -2.

9-misol. $x+\frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: $x>0$ ekanligi ravshan. $x=\sqrt{2}tgt$ almashtirish qilamiz. (bu yerda 0$< t<\frac{\pi}{2}$ deb qaraymiz). U holda

$$\sqrt{2}tgt+\frac{2\sqrt{2}tgt}{\sqrt{2+2tg^2t}}=\sqrt{2},\quad tgt+\frac{2tgt}{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{cost}}$$
$$=1,\quad \sqrt{2}\cdot\frac{sint}{cost}+2\sqrt{2}sint=\sqrt{2},$$

$$\sqrt{2}sint+2\sqrt{2}sint\cdot cost=\sqrt{2}cost,\qquad \sqrt{2}(cost-sint)=sin2t.$$

$t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ bo'lgani uchun bu oraliqda $sin2t>0$. Shuning uchun $cost-sint>0$, ya'ni $tgt<1$ bo'lishi kerak. Bu shartda oxirgi tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, natijada unga teng kuchli $2(1-sin2t)=sin^2 2t$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani yechib $(sin2t)_1=\sqrt{3}-1$ va $(sin2t)_2=-\sqrt{3}-1$ larni topamiz. $-\sqrt{3}-1<-1$ bo'lgani uchun $(sin2t)_2=-\sqrt{3}-1$ tenglama yechimga ega emas. Demak, $(sin2t)_1=\sqrt{3}-1$ tenglamani yechamiz. Agar $sin2t=\frac{2tgt}{1+tg^2t}$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda biz

$$\frac{2tgt}{1+tg^2t}=\sqrt{3}-1$$

Hosil bo'lgan sistemani o'rniga qo'yish usuli bilan yechib a=2, b=−1 va a=1, b=−2 larni topamiz.

Berilgan tenglama ildizlarini topish uchun a yoki b ning topilgan qiymatlaridan foydalanish mumkin:

Agar a=2 bo'lsa, x+4=2^3, x_1=4; agar a=1 bo'lsa, x+4=1, $x_2 = -3$;

Tekshirib ko'rib x ning har ikkala qiymati berilgan tenglamani qanoatlantirishini ko'rish mumkin:

Javob:$-3; 4$.

8-misol. $\sqrt[3]{2x^2+8x+72}+\sqrt[3]{3x^2+12x+12}=\sqrt{12-4x-x^2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Ildizlar orasidagi ifodalardan to'la kvadratlar ajratamiz: $\sqrt[3]{2x^2+8x+72}=\sqrt[3]{2(x^2+4x+36)}=\sqrt[3]{2((x+2)^2+32)}=\sqrt[3]{2(x+2)^2+64}\geq\sqrt[3]{64}=4$; $\sqrt[3]{3x^2+12x+12}=\sqrt[3]{3(x+2)^2}\geq 0$.Berilgan tenglamaning o'ng tomonini quyidagicha yozish mumkin:

$$\sqrt{12-4x-x^2}=\sqrt{-(-12+4x+x^2)}=\sqrt{-[(x+2)^2-16]}$$
$$=\sqrt{16-(x+2)^2}\leq\sqrt{16}=4.$$

Shunday qilib berilgan tenglamaning chap tomoni x ning har qanday qiymatlarida 4 dan katta emas, o'ng tomoni esa 4 dan kichik emas. Bundan esa tenglamaning har ikkala tomoni 4 ga tengligi kelib chiqadi. Bunga asosan, $\sqrt{12-4x-x^2}=4, 12-4x-x^2=16,$

$x^2+4x+4=0, (x+2)^2=0, x$=−2. Bu berilgan tenglamani ildizi bo'ladi.

Javob: -2.

9-misol. $x+\frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: $x>0$ ekanligi ravshan. $x=\sqrt{2}tgt$ almashtirish qilamiz. (bu yerda 0< $t<\frac{\pi}{2}$ deb qaraymiz). U holda

$$\sqrt{2}tgt+\frac{2\sqrt{2}tgt}{\sqrt{2+2tg^2t}}=\sqrt{2},\quad tgt+\frac{2tgt}{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{cost}}$$
$$=1,\quad \sqrt{2}\cdot\frac{sint}{cost}+2\sqrt{2}sint=\sqrt{2},$$

$$\sqrt{2}sint+2\sqrt{2}sint\cdot cost=\sqrt{2}cost,\qquad \sqrt{2}(cost-sint)=sin2t.$$

$t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ bo'lgani uchun bu oraliqda $sin2t>0$. Shuning uchun $cost-sint>0$, ya'ni $tgt<1$ bo'lishi kerak. Bu shartda oxirgi tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, natijada unga teng kuchli $2(1-sin2t)=sin^2 2t$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani yechib $(sin2t)_1=\sqrt{3}-1$ va $(sin2t)_2=-\sqrt{3}-1$ larni topamiz. $-\sqrt{3}-1<-1$ bo'lgani uchun $(sin2t)_2=-\sqrt{3}-1$ tenglama yechimga ega emas. Demak, $(sin2t)_1=\sqrt{3}-1$ tenglamani yechamiz. Agar $sin2t=\frac{2tgt}{1+tg^2t}$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda biz

$$\frac{2tgt}{1+tg^2t}=\sqrt{3}-1$$

yoki $(\sqrt{3}-1)tg^2t-2tgt+(\sqrt{3}-1)=0$ tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib tgt ga nisbatan

$(tgt)_1=\frac{1+\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$ va $(tgt)_2=\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bu yerda $(tgt)_1>1$ va $0<(tgt)_2<1$ bo'lganligi uchun berilgan tenglama

$$x=\sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$$

ga teng yagona ildizga ega bo'ladi.

Javob: $x=\sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$.

10-misol. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ tenglamani yeching.

Yechish: $u=\sqrt[3]{x-2}$ va $v=\sqrt{x+1}$ deb belgilaymiz. U holda berilgan tenglama $u+v=3$ ko'rinishga keladi. Bu yerda u ham, v ham x ga bog'liq bo'lgani uchun $u^3-v^2=x-2-(x+1)=x-2-x-1=-3$ bo'ladi.

Shunday qilib biz

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^3-v^2=-3 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemani yechish uchun o'rniga qo'yish usulidan foydalanamiz. Sistemaning birinchi tenglamasidagi v ning $v=3-u$ ifodasini ikkinchi tenglamaga qo'yamiz:

$$u^3-(3-u)^2=-3, \qquad u^3-9+6u-u^2=-3,$$

$$u^3-v^2+6u-6=0,$$

$$(u-1)(u^2+6)=0, u-1=0, \ u=1.$$

$u=\sqrt[3]{x-2}$ bo'lgani uchun $\sqrt[3]{x-2}=1$, $x-2=1$, $x=3$. Bu usuldan yuqorida ko'rib o'tilgan misollarni yechishda ham foydalanish mumkin.

Javob: 3.

11-misol. $\sqrt[3]{x+5}=(x-1)^3-6$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani $\sqrt[3]{x+5}+1=(x-1)^3-5$ ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamaning chap va o'ng tomonlari o'zaro teskari funksiyalar ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik, $f(x)=(x-1)^3-5$ bo'lsin. U holda $(x-1)^3=f(x)+5, x-1=\sqrt[3]{f(x)+5}$ yoki $x=\sqrt[3]{f(x)+5}+1$, ya'ni $g(x)=\sqrt[3]{f(x)+5}+1$. Shunday qilib $f(x)=g(x)$ ga ega bo'ldik.

$f(x)$ monoton o'suvchi funksiya bo'lgani uchun $f(x)=x$ bo'ladi. Agar $f(x)$ o'suvchi funksiya bo'lsa, u holda $f(x)=g(x)$ va $f(x)=x$ tenglamalar teng kuchli bo'ladi. Shunday qilib, $(x-1)^3-5=x, x^3-3x^2+3x-1-5=x$ yoki $, x^3-3x^2+2x-6=0$ tenglama hosil bo'ladi. buni chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratamiz va $(x-3)(x^2+2)=0$ ga ega bo'lamiz. Bu yerda $x^2+2\neq 0$, demak, $x-3=0$ yoki $x=3$ bo'ladi.

Javob: 3.

12-misol. $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{12}{7(7x+2)} = \frac{53}{28}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Agar biz ildiz qatnashgan ifodani bir tomonga o'tkazib, so'ngra kvadratga ko'tarsak (standart usuldan foydalansak), u holda ancha murakkab tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun boshqacha ish tutamiz; ya'ni $\frac{x+2}{7x+2}$ kasrni o'zgartiramiz: $\frac{x+2}{7x+2} = \frac{(7x+2)\frac{1}{7}+\frac{12}{7}}{7x+2} = \frac{1}{7} + \frac{12}{7(7x+2)}$. Bundan $\frac{12}{7(7x+2)} = \frac{x+2}{7x+2} - \frac{1}{7}$.

Buni e'tiborga olsak, berilgan tenglama $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{x+2}{7x+2} + \frac{1}{7} = \frac{53}{28}$ yoki $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{x+2}{7x+2} = \frac{7}{4}$ ko'rinishga keladi. $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} = y,\ y > 0$ deylik. U holda

$y - \frac{1}{y^2} = \frac{7}{4}$ yoki $4y^3 - 7y^2 - 4 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Tanlash yo'li bilan $y = 2$ oxirgi tenglamaning ildizi ekanligini topamiz. Buni e'tiborga olib oxirgi tenglamani $4y^2(y-2) + (y-2)(y+2) = 0$ yoki $(y-2)(4y^2 + y + 2) = 0$ko'rinishda yozamiz. Bundan $y = 2$ ni topamiz. $4y^2 + y + 2 = 0$ tenglama yechimga ega emas.

Demak, $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} = 2,\ \frac{7x+2}{x+2} = 4, 7x + 2 = 4x + 8,\ 3x = 6, x = 2.$

$x = 2$ berilgan tenglamaning ildizi ekanligiga ishinch hosil qilish mumkin.

Javob: 2.

2.4. Ko'rsatkichli tenglamalar

Umumiy o'rta ta'lim maktablari matematika kursidagi ko'rsatkichli tenglamalar mavzusini o'qitish jarayonida ham nostandart masalalarga duch kelamiz. O'quvchilar bunday masalalarni yecha olishlari uchun eng avvalo ular ko'rsatkichli funksiya, uning xossalari va grafiklari bo'yicha bilimlarni mukammal egallagan bo'lishlari kerak. Bu bilimlar standart shakldagi ko'rsatkichli tenglamalarni yechishda muhim bo'lib, ular nostandart shakldagi ko'rsatkichli tenglamalarni yechishda asos bo'ladi. Quyida nostandart shakldagi ko'rsatkichli tenglamalarga misollar keltiramiz:

1-misol. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamani an'anaviy usullar (ko'rsatkichli tenglamani yechish usullari) bilan yechib bo'lmaydi. Tanlash usulidan foydalanib, bu tenglamaning biror yechimini topishga harakat qilamiz. Bu holda x_1=1 berilgan tenglamaning ildizi bo'lishi ravshan. Haqiqatan ham

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x,\quad \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \frac{7}{5} = 2^1,\quad \frac{3}{7} + \frac{7}{5} = 2,\quad \frac{10}{5} = 2,\quad 2 = 2.$$

Demak, x_1=1 berilgan tenglamaning ildizi ekan. Endi biz berilgan tenglamaning x_1=1dan boshqa ildizi mavjud emasligini ko'rsatishimiz kerak.

$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}$ funksiyaning $(-\infty; +\infty)$ da kamayuvchi ekanligi ma'lum $\left(\varphi(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x\right.$ kamayuvchi bo'lgani uchun). $g(x) = 2^x$

funksiya esa $(-\infty;+\infty)$ da o'suvchidir. Bu esa $f(x)=g(x)$ tenglamani bittadan ortiq ildizga ega emasligini bildiradi. Demak, berilgan tenglama $x_1=1$ ildizga ega.

Javob: 1.

2-misol. $(x^2+x-57)^{3x^2+3}=(x^2+x-57)^{10x}$tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama $[f(x)]^{g(x)}=[f(x)]^{h(x)}$ ko'rinishdagi tenglama bo'lib, uni ko'rsatkichli–darajali tenglama deyiladi. Bu tenglamani yechishda to'rtta hol bo'lishi mumkin:

1) $x^2+x-57=1$, ya'ni $x^2+x-58=0$ bo'lgan hol.

Bu holda berilgan tenglama $1^{3x^2+3}=1^{10x}$ yoki 1=1 ko'rinishga keladi. Bundan esa $x^2+x-58=0$ tenglamaning ildizi berilgan tenglamaning ham ildizi bo'lishi kelib chiqadi. Uni yechamiz:

$x^2+x-58=0$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+232}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{233}}{2}$, $x_1=\frac{-1-\sqrt{233}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{233}}{2}$.

2) $x^2+x-57=-1$, ya'ni $x^2+x-56=0$ bo'lgan hol. Bu holda berilgan tenglama $(-1)^{3x^2+3}=(-1)^{10x}$ko'rinishga keladi. Bu tenglamani $3x^2+3$ va $10x$ larning butun qiymatlari (har ikkalasi juft yoki har ikkalasi toq) gina qanoatlantiradi ((-1) ni faqat butun darajaga ko'tarish mumkin).

$x^2+x-56=0$ tenglamaning ildizlari $x_1=-8$ va$x_1=7$ bo'lib, ulardan berilgan tenglamani faqat $x=7$ qanoatlantiradi.

3) $x^2+x-57=0$ bo'lsin. Bu holda berilgan tenglama $0^{3x^2+3}=0^{10x}$ko'rinishga keladi.

Bu tenglamani x ning $3x^2+3>0$ va $10x>0$ tengsizliklar o'rinli bo'ladigan qiymatlari qanoatlantirdi. Bu yerda $3x^2+3>0$ bo'lishi ravshan. Bu holda berilgan tenglama 0=0 ko'rinishga keladi.

$x^2+x-57=0$,$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+228}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{229}}{2}$, $x_1=\frac{-1-\sqrt{229}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{229}}{2}$.

Bu ildizlardan $10x>0$ tengsizlikni faqat $x=\frac{-1+\sqrt{229}}{2}$ gina qanoatlantiradi.

4) agar $x^2+x-57>0$ va $x^2+x-57\neq 1$ bo'lsa, u holda berilgan tenglamadan $3x^2+3=10x$ tenglama kelib chiqadi. Undan esa $x_1=3$ va$x_1=\frac{1}{3}$ lar kelib chiqadi.

Tekshirib ko'rib bulardan faqat $x_1=3$ berilgan tenglamani qanoatlantirishini ko'rish mumkin.

Javob:$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{233}}{2}$, $x_3=7$, $x_4=\frac{-1+\sqrt{229}}{2}$, $x_5=3$.

3-misol. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$ tenglama yechilsin.

Yechish: $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=1$ bo'lgani uchun $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=y\ (y>0)$ belgilash qilamiz. U holda $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$

$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ bo'lgani uchun $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{y}$bo'lib, berilgan tenglamadan $y + \frac{1}{y} = 4$ yoki $y^2 - 4y + 1 = 0$ tenglama kelib chiqadi. Uni yechamiz:

$y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}, \quad y_1 = 2+\sqrt{3}, \quad y_2 = 2-\sqrt{3}.$

y ning qiymatlarini belgilash qilgan joyga qo'yamiz. Natijada

$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2+\sqrt{3}$ va $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2-\sqrt{3}$ tenglamalar hosil bo'ladi. Ularni yechamiz:

1) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}, \ x = 1;$

2) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2-\sqrt{3}; (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}, \ x = -2.$

Javob: $-2; 1.$

4-misol. $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani har ikkala tomonini hadma-had 81^x ga bo'lamiz

$$3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x, \quad 3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{36}{81}\right)^x = 2, \ , \quad 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{9}\right)^x - 2 = 0.$$

$\left(\frac{4}{9}\right)^x = y \ (y > 0)$ deb olamiz, u holda $3y^2 + y - 2 = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. uni yechib $t_1 = -1$ va $t_2 = \frac{2}{3}$larni topamiz. $t > 0$ bo'lishi kerakligidan $t = \frac{2}{3}$ ni olamiz. Demak, biz $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu standart masaladir.

$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}, \ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}, \ 2x = 1, \ x = \frac{1}{2}.$

Javob: $\frac{1}{2}$.

5-misol. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani aniqlanish sohasi $x^2 - 2 > 0$ tenglamaning yechimidan, ya'ni $x < -\sqrt{2}$ va $x > \sqrt{2}$ dan iborat.

$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6, 2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} \cdot 2^{-1} = 6, \ (2^{x+\sqrt{x^2-2}})^2 - \frac{5}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0.$ $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = y \ (y > 0)$ deylik. U holda $y^2 - \frac{5}{2}y - 6 = 0$ yoki $2y^2 - 5y - 12 = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. uni yechamiz:

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}; \quad y_1 = 4, \quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

$y > 0$ bo'lishi kerakligidan $y = -\frac{3}{2}$ ni olmaymiz. Demak biz $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4$ yoki $x + \sqrt{x^2-2} = 2$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu irratsional tenglamadir. Uni yechamiz.

$x + \sqrt{x^2-2} = 2, \ \sqrt{x^2-2} = 2 - x, \ x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2, \ 4x = 6, \ x = 1{,}5.$ Bu $x > \sqrt{2}$ ni qanoatlantiradi.

Javob: 1,5.

6-misol. $x^2 \cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}+1} + x^2 \cdot 2^{x-2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning aniqlanish sohasi $2x+1 \geq 0$ dan, ya'ni $x \geq -\frac{1}{2}$ dan iborat. $x^2 \cdot 2^{\sqrt{2x+1}} \cdot 2^{-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}} \cdot 2 + x^2 \cdot 2^{x-2}$, $\frac{x^2}{2} \cdot 2^{\sqrt{2x+1}} + 2^x = 2 \cdot 2^{\sqrt{2x+1}} + \frac{x^2 \cdot 2^x}{4}$, $2^{\sqrt{2x+1}} = y$ va $2^x = z$ deb olamiz. U holda, $\frac{x^2 y}{2} + z = 2y + \frac{x^2 z}{4}$ yoki $\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)(2y - z) = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Bundan $\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 0$ va $(2y - z) = 0$ tenglamalar hosil bo'ladi. bularning birinchisidan $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$ kelib chiqadi. Bulardan $x = -2$ chet ildizdir. Demak, $x = 2$. Buni e'tiborga olsak

$$2^{\sqrt{2x+1}+1} = 2^x, \sqrt{2x+1} = x - 1, \qquad 2x + 1 = x^2 - 2x + 1,$$

$$x = 0, \qquad x = 4.$$

Bu yerda ham $x = 0$ chet ildizdir. Demak, x=4.

Javob:2 va 4.

7-misol. $(x-1)^{\sqrt{x+1}} = (x-1)^{\frac{x+1}{2}}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani aniqlanish sohasi $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$ sistemaning yechimidan, ya'ni $x > 1$ dan iborat. Berilgan tenglamani 10 asosga ko'ra logarifmlaymiz.

$\lg(x-1)^{\sqrt{x+1}} = \lg(x-1)^{\frac{x+1}{2}}$, $\sqrt{x+1}\lg(x-1) = \frac{x+1}{2}\lg(x-1)$,

$(\sqrt{x+1} - \frac{x+1}{2})\lg(x-1)=0$. Bu quyidagi 2 ta tenglamaga teng kuchli:

$$1)\sqrt{x+1} - \frac{x+1}{2} = 0; \qquad 2)\lg(x-1)=0.$$

Ularni yechamiz:

$$1)\sqrt{x+1} - \frac{x+1}{2} = 0, \qquad 2\sqrt{x+1} = x + 1,$$

$$4(x+1) = x^2 + 2x + 1,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, x_1 = 3, \qquad x_2 = -1.$$

2)$\lg(x-1)$=0, $x - 1 = 1$, $x = 2$.

$x > 1$ ekanligini e'tibirga olsak, $x = -1$ berilgan tenglamani ildizi bo'la olmaydi. Demak, berilgan tenglama 2 ta $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ ildizlarga ega ekan.

Javob: 2 va 3.

8-misol. $4^{tg^2 x} + 2^{\frac{1}{cos^2 x}} - 80 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $\frac{1}{cos^2 x} = tg^2 x + 1$ bo'lgani uchun berilgan tenglamani

$2^{2tg^2 x} + 2^{tg^2 x + 1} - 80 = 0$ yoki $2^{2tg^2 x} + 2 \cdot 2^{tg^2 x} - 80 = 0$ ko'rinishda yozish mumkin. $2^{tg^2 x} = y$ $(y > 0)$ deb olsak, natijada $y^2 + 2y - 80 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Uni yechamiz:

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+80} = -1 \pm 9; \qquad y_1 = 8, \qquad y_2 = -10.$$

Demak, biz $2^{tg^2 x} = 8$ yoki $tg^2 x = 3$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bundan $tgx = \pm\sqrt{3}$ ga, undan esa $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$ ni topamiz.

Javob: $\pm\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in Z$.

9-misol. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{101}{10(2-\sqrt{3})}$ tenglama yechilsin.

Yechish: $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ bo'lganligi uchun $2+\sqrt{3}$ va $2-\sqrt{3}$ lar o'zaro teskari sonlardir. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=y$ belgilash qilamiz. U holda . $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}=(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}\cdot(2+\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})y$ va $(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{x^2-2x}\cdot(2+\sqrt{3})=\frac{1}{y}(2+\sqrt{3})$ bo'ladi va berilgan tenglama $(2+\sqrt{3})y+\frac{1}{y}(2+\sqrt{3})=\frac{101}{10}(2+\sqrt{3})$ yoki $y+\frac{1}{y}=\frac{101}{10}$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani yechib $y_1=10$, $y_2=\frac{1}{10}$ larni topamiz.

Uning topilgan qiymatlarini o'rniga qo'yib quyidagi 2 ta tenglamaga ega bo'lamiz:

1) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=10$; 2) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=\frac{1}{10}$.

Ularni yechamiz:

1) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=10$ tenglamani yechish uchun uni har ikkala tomonini $2+\sqrt{3}$ asosga ko'ra logarifmlaymiz.

$$x^2-2x=log_{2+\sqrt{3}}10,\qquad x^2-2x-log_{2+\sqrt{3}}10=0,$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+log_{2+\sqrt{3}}10}=1\pm\sqrt{1+\frac{1}{\lg(2+\sqrt{3})}}.$$

2) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=\frac{1}{10}$ tenglama yechimga ega emas.

Javob: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\frac{1}{\lg(2+\sqrt{3})}}$.

10-misol. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning har ikkala tomonini hadma-had 2^x ga bo'lamiz.

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1$$

$x=2$ bu tenglamani ildizi ekanligini ko'rish mumkin. Biz bu tenglamani $x=2$ dan boshqa ildizi yo'qligini ko'rsatishimiz kerak. Bu maqsadda tenglamaning chap tomonidagi birinchi qo'shiluvchining asosini a bilan, ikkinchi qo'shiluvchining asosini b bilan belgilaymiz. Har ikala asos 1 dan kichik va $b<a<1$.

Agar $x<2$ bo'lsa, u holda $a^x>a^2$, $b^x>b^2$ va $a^x+b^x>1$.

Agar $x>2$ bo'lsa, u holda $a^x<a^2$, $b^x<b^2$ va $a^x+b^x<1$.

Demak, $x=2$ berilgan tenglamaning yechimi ekan.

Javob: 2.

2.5. Logarifmik tenglamalar.

Umumiy o'rta ta'lim maktablarida matematikani o'qitish jarayonida shunday logarifmik tenglamalar uchraydiki ularni an'anaviy (standart) usullar bilan yechib bo'lmaydi. Bunday tenglamalarni biz nostandart tenglamalar deb ataymiz va ularni yechish uchun noan'anaviy usullarni qo'llaymiz. Bunda o'quvchilardan logarifmik funksiya, uning xossalari va grafiklari bo'yicha bilimlarni egallagan bo'lishlari talab qilinadi. Quyida bir nechta misollarni ko'rib chiqamiz.

1-misol. $log_5\left(5^{\frac{1}{2x}}+125\right)=log_5 6+1+\frac{1}{2x}$ tenglama yechilsin.

Yechish: $1+\frac{1}{2x}=log_5 5^{1+\frac{1}{2x}}$ bo'lganligi uchun berilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$log_5\left(5^{\frac{1}{2x}}+125\right)=log_5 6+log_5 5^{1+\frac{1}{2x}}$ yoki $log_5\left(5^{\frac{1}{2x}}+125\right)=log_5 6\cdot 5^{1+\frac{1}{2x}}$.

Bundan esa

$5^{\frac{1}{x}}+125=6\cdot 5^{1+\frac{1}{2x}},\ \ 5^{\frac{1}{x}}+125=6\cdot 5\cdot 5^{\frac{1}{2x}},\ \ 5^{\frac{1}{x}}+125=30\cdot 5^{\frac{1}{2x}},$

$5^{\frac{1}{x}}-30\cdot 5^{\frac{1}{2x}}+125=0.$

Hosil bo'lgan tenglama ko'rsatkichli tenglamadir. Uni yechish uchun $5^{\frac{1}{2x}}=y$ deymiz. U holda $5^{\frac{1}{x}}=y^2$ bo'lib, oxirgi tenglamadan $y^2-30y+125=0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Uni yechib $y_1=5$, $y_2=25$ larni topamiz. Agar belgilashni e'tiborga olsak, quyidagi ikkita tenglamaga ega bo'lamiz:

1) $5^{\frac{1}{2x}}=5$, 2) $5^{\frac{1}{2x}}=25$.

Ularni yechamiz

1) $5^{\frac{1}{2x}}=5,\ \ \frac{1}{2x}=1,\ \ 2x=1,\ \ x=\frac{1}{2}$; 2) $5^{\frac{1}{2x}}=25,\ \ 5^{\frac{1}{2x}}=5^2,\ \ \frac{1}{2x}=2,\ \ x=\frac{1}{4}.$

Demak, berilgan tenglama ikkita ildizga ega.

Javob: $\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}$.

2-misol. $\sqrt{2-log_x 4}\cdot log_2 x=-2\sqrt{3}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz.

$$\begin{cases}2-log_x 4\ge 0,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases};\quad \begin{cases}log_x 4\ge 2,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases};\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\ge 4,\\ x>1.\end{cases}\\ \begin{cases}x^2\le 4,\\ 0<x<1.\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x\ge 2,\\ \begin{cases}-2\le x\le 2;\\ 0<x<1\end{cases}\end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l}x\ge 2,\\ 0<x<1\end{array}\right.$, $(0;1)\cup[2;+\infty)$.

$log_x 4=\frac{log_2 4}{log_2 x}=\frac{2}{log_2 x}$ bo'lganligi uchun berilgan tenglamani

$\sqrt{2-\frac{2}{log_2 x}}\cdot log_2 x=-2\sqrt{3}$ yoki $\sqrt{2-\frac{2}{log_2 x}}=\frac{-2\sqrt{3}}{log_2 x}$. Bu tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz va soddalashtiramiz

$2-\frac{2}{log_2 x}=\frac{12}{log_2^2 x},\quad 2log_2^2 x-2log_2 x-12=0,\quad log_2^2 x-log_2 x-6=0.$ Bu $log_2 x$ ga nisbatan kvadrat tenglamadir. Uni yechib $log_2 x=3$ va $log_2 x=-2$ larni, ulardan esa $x_1=2^3=8$ va $x_2=2^{-2}=\frac{1}{4}$ larni topamiz. Bularni har ikkalasi TAS ga tegishli. Lekin tekshirib ko'rib bulardan $x=\frac{1}{4}$ tenglamani qanoatlantirishini ko'ramiz.

Javob: $\frac{1}{4}$.

3-misol. $\sqrt{2 - log_x 4} \cdot log_2 x = -2\sqrt{3}$ tenglama ildizlari yig'indisini toping.

Yechish: Tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz.

$$\begin{cases} 2 - log_x 4 \geq 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} log_x 4 \geq 2, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 \geq 4, \\ x > 1. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 \leq 4, \\ 0 < x < 1. \end{cases} \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ \begin{cases} -2 \leq x \leq 2; \\ 0 < x < 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ 0 < x < 1 \end{array} \right. .$$

Demak, tenglamaning aniqlanish sohasi $(0;1) \cup [2; +\infty)$.

$log_x 4 = \frac{log_2 4}{log_2 x} = \frac{2}{log_2 x}$ bo'lganligi uchun berilgan tenglamani

$\sqrt{2 - \frac{2}{log_2 x}} \cdot log_2 x = -2\sqrt{3}$ yoki $\sqrt{2 - \frac{2}{log_2 x}} = \frac{-2\sqrt{3}}{log_2 x}$. Bu tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz va soddalashtiramiz

$2 - \frac{2}{log_2 x} = \frac{12}{log_2^2 x}$, $\quad 2log_2^2 x - 2log_2 x - 12 = 0$, $\quad log_2^2 x - log_2 x - 6 = 0$. $log_2 x = y$ deb olamiz. U holda $y^2 - y - 6 = 0$ tenglama hosil bo'lib , uning ildizlari $y_1 = -2$ va $y_2 = 3$ lardan iborat.

$log_2 x = -2$, $\quad x_1 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$; $\quad log_2 x = 3$, $\quad x_1 = 2^3 = 8$.

$x_1 + x_2 = \frac{1}{4} + 8 = 8\frac{1}{4}$.

Javob: $8\frac{1}{4}$.

4-misol. $log_2^2 x + log_2 x + 1 = \frac{7}{log_2 0{,}5x}$ tenglama yechilsin.

Yechish: $log_2 0{,}5x = log_2 0{,}5 + log_2 x = -1 + log_2 x = log_2 x - 1$ bo'lganligi uchun berilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$log_2^2 x + log_2 x + 1 = \frac{7}{log_2 x - 1}$.

$log_2 x = y$ deb olamiz. U holda

$y^2 + y + 1 = \frac{7}{y-1}$, $\quad (y-1)(y^2 + y + 1) = 7$, $y^3 - 1 = 7$, $y^3 = 8$,

$y = 2$.

Agar belgilashni e'tiborga olsak, $log_2 x = 2$, $x = 4$.

Javob: 4.

5-misol. $log_x(3x^{log_5 x} + 4) = 2log_5 x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Logarifm ta'rifidan foydalanib berilgan tenglamani

$3x^{log_5 x} + 4 = x^{2log_5 x}$ ko'rinishda yozamiz. $u = x^{log_5 x}$ deb olamiz. U holda $u^2 - 3u - 4 = 0$ tenglama hosil bo'lib, undan $u_1 = -1$, $u_2 = 4$ lar kelib chiqadi. Agar belgilashni e'tiborga olsak quyidagi ikkita tenglamaga ega bo'lamiz:

$$1) x^{log_5 x} = -1; \quad 2) x^{log_5 x} = 4.$$

Bu tenglamalardan birinchisi yechimga ega emas. Ikkinchi tenglamani yechamiz.

$$x^{log_5 x} = 4, log_5 x \cdot log_5 x = log_5 4,$$

$$log_5^2 x = log_5 4, \quad log_5 x = \pm\sqrt{log_5 4},$$

$x_{1,2} = 5^{\pm\sqrt{log_5 4}}$. Bularni har ikkalasi tenglamani qanoatlantiradi.

Javob: $5^{\pm\sqrt{log_5 4}}$.

6-misol. $log_5(2x-3)^4 + log_5|2x-3| = 10$ tenglama yechilsin.

Yechish: $log_5(2x-3)^4 = 4log_5|2x-3|$ bo'lganligi uchun berilgan tenglama $4log_5|2x-3| + log_5|2x-3| = 10$, $5log_5|2x-3| = 10$ yoki $log_5|2x-3|=2$ ko'rinishga keladi. Uni yechamiz.

$log_5|2x-3|=2$, $|2x-3| = 25$. Bundan $2x-3 = -25$ va $2x-3 = 25$ tenglamalarni, ulardan esa $x_1 = -11$, $x_2 = 14$ larni topamiz. Bularni har ikkalasi berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob: $-11; 14$.

7-misol. $log_3^2 x - (2a+3)log_3 x + a^2 + 3a = 0$ tenglama $x = 42$ nuqtadan bir xil uzoqlikda bo'lgan 2 ta har xil ildizga ega bo'lishi uchun a parameter qanday qiymat qabul qilishi kerak?

Yechish: $log_3 x = t$ deylik. U holda $t^2 - (2a+3)t + a^2 + 3a = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu t ga nisbatan kvadrat tenglamadir. Uni yechamiz:

$$t_{1,2} = \frac{(2a+3) \pm \sqrt{4a^2 + 12a + 9 - 4a^2 - 12a}}{2} = \frac{(2a+3) \pm 3}{2}$$

$$t_1 = \frac{2a+3+3}{2} = a+3; \qquad t_1 = \frac{2a+3-3}{2} = a.$$

Demak, $log_3 x = a+3$ va $log_3 x = a$ bo'lib, ulardan $x_1 = 3^{a+3}$ va $x_2 = 3^a$ lar kelib chiqadi. $x = 42$ nuqta x_1 va x_2 nuqtalar o'rtasida yotishi kerakligidan

$$\frac{3^{a+3} + 3^a}{2} = 42, \quad \frac{3^a \cdot 3^3 + 3^a}{2} = 42, \quad 3^a \cdot 27 + 3^a = 84,$$

$$28 \cdot 3^a = 84, \qquad 3^a = 3, \quad a = 1.$$

Javob: 1.

8-misol. $10^{1+lg^2 x} = x^{\frac{7lgx + lg^3 x}{4}}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning aniqlanish sohasi $x > 0$. Tenglamani har ikkala tomonini 10 asosga ko'ra logarifmlaymiz.

$$(1 + lg^2 x)lg10 = \frac{7lgx + lg^3 x}{4} lgx.$$

$lgx = t$ belgilash qilamiz. U holda,

$$4(1 + t^2) = (7t + t^3)t, \quad t^4 + 3t^2 - 4 = 0.$$

Bu tenglama bikvadrat tenglamadir. z=t^2 deb olsak, $z^2 + 3z - 4 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Uni yechib $z_1 = 1$ va $z_2 = -4$ larni topamiz. $z \geq 0$ bo'lishini e'tiborga olsak, $t^2 = 1$ ga undan esa $lg^2 x = 1$ yoki $lgx = \pm 1$ ga ega bo'lamiz. Bundan $x_1 = 10$ va $x_2 = 10^{-1}$ lar kelib chiqadi.

Javob: 10 va $\frac{1}{10}$.

9-misol. $x^{3lgx - \frac{1}{lgx}} = \sqrt[3]{10}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Noma'lum miqdor daraja asosida va daraja ko'rsatkichida qatnashgan tenglamalarni ularni har ikkala tomonini logarifmlash orqali yechiladi. Bu holda 10 asosga ko'ra logarifmlaymiz

$lgx^{3lgx-\frac{1}{lgx}} = lg\sqrt[3]{10},$

$$\left(3lgx - \frac{1}{lgx}\right) lgx = \frac{1}{3}lg10, \left(3lgx - \frac{1}{lgx}\right) lgx = \frac{1}{3}.$$

$lgx = t$ belgilash qilamiz.

$\left(3t - \frac{1}{t}\right) t = \frac{1}{3}, \ 3t^2 - 1 = \frac{1}{3}, 3t^2 = \frac{4}{3}, \ t^2 = \frac{4}{9}; \quad t_1 = \frac{2}{3}, \quad t_2 = -\frac{2}{3}.$

Agar belgilashni e'tiborga olsak, $lgx = \frac{2}{3}$ va $lgx = -\frac{2}{3}$ eng sodda tenglamalarni, ulardan esa $x_1 = 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{100}$ va $x_2 = 10^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$ larni topamiz.

Javob: $\sqrt[3]{100}\,;\ \frac{1}{\sqrt[3]{100}}.$

10-misol. $log_3(x+7) = 2 - \frac{1}{4}log_3(x-1)^4$ tenglama yechilsin.

Yechish: $log_3(x+7) + \frac{1}{4}log_3(x-1)^4 = 2, \ log_3(x+7) + log_3|x-1| = 2, \ log_3(x+7)|x-1| = 2, \ (x+7)|x-1| = 9.$

Hosil bo'lgan tenglama modulli tenglamadir. bu tenglama quyidagi 2 ta tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

1) $\begin{cases}(x+7)(1-x) = 9, \\ -7 < x < 1\end{cases};$ 2) $\begin{cases}(x+7)(x-1) = 9, \\ x > 1\end{cases}.$

Ularni yechamiz:

1) $\begin{cases}(x+7)(1-x) = 9, \\ -7 < x < 1\end{cases}; \begin{cases}x^2 + 6x + 2 = 0 \\ -7 < x < 1\end{cases}; \ x = -3 \pm \sqrt{7}.$

2) $\begin{cases}(x+7)(x-1) = 9, \\ x > 1\end{cases}; \begin{cases}x^2 + 6x - 16 = 0 \\ x > 1\end{cases}; \ x = 2.$

Javob: $2; -3 \pm \sqrt{7}.$

11-misol. a parametrning qanday qiymatlarida $log_3(9^x + 9a^3) = x$ tenglama ikkita ildizga ega bo'ladi.

Yechish: Logarifm ta'rifiga asosan $9^x + 9a^3 = 3^x$ ni yozish mumkin. $y = 3^x, \ b = 9a^3$ deb olamiz. U holda $y^2 - y + b = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama ikkita ildizga ega bo'lishi uchun $D = 1 - 4b > 0, \ b > 0$ bo'lishi kerak.

$$1 - 4b > 0, \ 4b < 1, \ b < \frac{1}{4}, \ 0 < 9a^3 < \frac{1}{4}, \ 0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}.$$

Javob: $0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}.$

12-misol. $\left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot log_2 3 - log_2(3^x - 13) = 2$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning aniqlanish sohasi $3^x - 13 > 0, \ 3^x > 13,$

$$x > log_3 13.$$

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot log_2 3 - log_2(3^x - 13) = 2, \ log_2 3^{1+\frac{x}{2}} - log_2(3^x - 13) = 2,$$

$$log_2\frac{3^{1+\frac{x}{2}}}{3^x-13}=2,\quad \frac{3^{1+\frac{x}{2}}}{3^x-13}=4,\quad 3^{1+\frac{x}{2}}=4\cdot 3^x-52,\quad 3\cdot 3^{\frac{x}{2}}=4\cdot 3^x-52,$$

$4\cdot 3^x-3\cdot 3^{\frac{x}{2}}-52=0$. $3^{\frac{x}{2}}=y$ $(y>0)$ deb olamiz. u holda $3^x=y^2$ bo'lib, oxirgi tenglamadan $4y^2-3y-52=0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Uni yechamiz.

$$y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+832}}{8}=\frac{3\pm29}{9};\ y_1=4,\ y_2=-\frac{13}{4}.$$

$y>0$ ekanligini e'tiborga olsak,$3^{\frac{x}{2}}=4$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu eng sodda ko'rsatkichli (standart) tenglamadir. Uni yechamiz

$$3^{\frac{x}{2}}=4,\ log_3 3^{\frac{x}{2}}=log_3 4,\ \frac{x}{2}=log_3 4,\qquad x=2log_3 4=log_3 16.$$

Javob:$log_3 16$.

2.6. Trigonometrik tenglamalar.

Ma'lumki trigonometrik funksiyalar umumiy o'rta ta'lim maktablari matematika kursida o'tiladigan funksiyalar ichida eng muhimi hisoblanadi. Trigonometrik funksiyalarga ko'plab amaliy masalalarni yechishda murojaat qilamiz. Shuning uchun o'quvchilar bu mavzuni puxta o'zlashtirishlari kerak.

1-misol.$\sqrt{-3-cos^2x+3sin5x}=1-sinx$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani har ikkala qismini kvadratga ko'taramiz.

$$-3-cos^2x+3sin5x=1-2sinx+sin^2x,$$

$$-3-(cos^2x-sin^2x)+3sin5x+2sinx-1=0,$$

$$-3-1+3sin5x+2sinx-1=0,\ 2sinx+3sin5x=5.$$

$sinx\le 1,\ sin5x\le 1$ bo'lganligi uchun oxirgi tenglamani yechimi x ning $\begin{cases} sinx=1,\\ sin5x=1\end{cases}$

sistemani qanoatlantiradigan qiymatlari to'plamidan iborat bo'ladi. Uni yechamiz. Birinchi tenglamadan $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ kelib chiqadi. Buni sistemaning ikkinchi tengklamasiga qo'yamiz.

$$sin5\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=sin\left(\frac{5\pi}{2}+10k\pi\right)=sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Demak, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ yuqoridagi sistemaning yechimi va shu bilan birga berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

Javob:$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

2-misol. $cos\left[\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right]=1$ tenglamaning butun ildizlarini toping.

Yechish: Berilgan tenglamadan $\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)=2k\pi$ ni yozish mumkin. Bundan $3x-\sqrt{9x^2+160x+800}=16k$, $\sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16k$ yoki $160x+800=256k^2-96kx$ ni hosil qilamiz. Bu tenglamadan esa

$x=\frac{256k^2-800}{160+96k}=\frac{8k^2-25}{3k+5}=\frac{8}{3}k-\frac{40}{9}-\frac{25}{9(3k+5)}$ ga ega bo'lamiz. Shunday qilib $9x=24k-40-\frac{25}{3k+5}$ bo'ladi.

x butun ekanligidan $\frac{25}{3k+5}$ butun bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Bundan esa 25 soni $3k+5$ ga bo'linishi talab qilinadi. Bu esa $3k+5$ ifoda $\pm1,\pm5,\pm25$ bo'lganda ro'y beradi. $k\in Z$ ekanligini e'tiborga olsak $3k+5$ ifoda $k=-2$, $k=0$ va $k=-10$ qiymatlarga butun son bo'ladi.

Agar $k=-2$ bo'lsa $x=-7, k=0$ bo'lsa $x=-5, k=-10$ bo'lsa $x=-31$ bo'lib bulardan $x=-5$ tenglamani qanoatlantirmaydi.

Javob:$-7;\ -31.$

3-misol.$sinx+cosx+4sinx\cdot cosx-1=0$ tenglama yechilsin.

Yechish:$sinx+cosx=u$ deylik. U holda

$$u^2=sin^2x+cos^2x+2sinx\cdot cosx,\quad u^2=1+2sinx\cdot cosx,$$

$u^2-1=2sinx\cdot cosx$ yoki $4sinx\cdot cosx=2u^2-2$ bo'ladi. Bularni e'tiborga olsak berilgan tenglama $2u^2+u-3=0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning $sinx+cosx=-\frac{3}{2}$ lardan iborat ikkita tenglamaga ega bo'ldik. Ularni yechamiz.

$$sinx+cosx=1,\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}sinx+\frac{\sqrt{2}}{2}cosx=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \ x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \ k\in Z.$ $sinx+cosx=-\frac{3}{2}$ tenglama yechimga ega emas.

Javob: $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \ k\in Z.$

4-misol. $\sqrt{10}cosx-\sqrt{4cosx-cos2x}=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $cos2x=2cos^2x-1$ bo'lgani uchun berilgan tenglama $\sqrt{10}cosx-\sqrt{4cosx-2cos^2x+1}=0$ ko'rinishga keladi. $y=cosx$ deb olsak, $\sqrt{10}y-\sqrt{4y-2y^2+1}=0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamadan $10y^2=4y-2y^2+1\ (y\geq0)$ ni yoki $12y^2-4y-1=0$ ni hosil qilamiz. Bu tenglamaning ildizlari $y_1=\frac{1}{2}$ va $y_2=-\frac{1}{6}$ bo'lib, ulardan $y\geq0$ shartni $y=\frac{1}{2}$ qanoatlantiradi.

Demak, $cosx=\frac{1}{2}$ bo'lib, undan $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in Z)$ ni topamiz.

Javob:$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in Z).$

5-misol.$sin2x+5sinx+5cosx+1=0$ tenglama yechilsin.

Yechish:$sin2x+5sinx+5cosx+1=0,$

$1+sin2x+5(sinx+cosx)=0,\ \ sinx+cosx=u$ deylik, u holda bo'ladi. $u^2=sin^2x+cos^2x+2sinx\cdot cosx,\ \ u^2=1+sin2x$

Demak, berilgan tenglama $u^2+5u=0$ ko'rinishga keladi. Uni yechib $u_1=0$ va $u_2=-5$ larni topamiz. Shunday qilib biz $sinx+cosx=0$

va $sinx + cosx = -5$ lardan iborat ikkita tenglamaga ega bo'ldik. Ularni yechamiz.

$$1) sinx + cosx = 0, \quad sinx = -cosx, \qquad tgx = -1,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in Z).$$

2) $sinx + cosx = -5$, tenglama yechimga ega emas. Chunki $sinx = -1$, $cosx \geq -1$ bo'lgani uchun $sinx + cosx \geq -2$ bo'lishi kerak. Ammo $-5 < -2$. Shunday qilib berilgan tenglamaning yechimi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ dan iborat.

Javob: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

6-misol. $8sin^3x + 4\sqrt{2}cos^2x - 2sinx - 3\sqrt{2} = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $cos^2x = 1 - sin^2x$ bo'lishini e'tiborga olsak, berilgan tenglama $8sin^3x + 4\sqrt{2}(1 - sin^2x) - 2sinx - 3\sqrt{2} = 0$ yoki

$8sin^3x - 4\sqrt{2}sin^2x - 2sinx + \sqrt{2} = 0$ ko'rinishga keladi. $t = sinx$ belgilash qilamiz. U holda $8t^3 - 4\sqrt{2}t^2 - 2t + \sqrt{2} = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Uni yechamiz.

$$4\sqrt{2}(\sqrt{2}t - 1)t^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2}t - 1) = 0,$$
$$(\sqrt{2}t - 1)(4\sqrt{2} - 1) = 0.$$

1) $\sqrt{2}t - 1 = 0, \ \sqrt{2}t = 1, \ t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};$

2) $4\sqrt{2} - 1 = 0, t^2 = \frac{1}{4}, \ t_{2,3} = \pm\frac{1}{2}.$

Demak, biz $sinx = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $sinx = \frac{1}{2}$ va $sinx = -\frac{1}{2}$ lardan iborat uchta eng sodda trigonometrik tenglamalarga ega bo'ldik. Ularni yechamiz.

1) $sinx = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in Z.$

2) $sinx = \frac{1}{2}, \ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in Z.$

3) $sinx = -\frac{1}{2}, \ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in Z.$

Oxirgi ikkita yechimni umumlashtirib $x = \pm(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in Z$ ni yozish mumkin.

Javob: $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi, \ x = \pm(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in Z.$

7-misol. $\sqrt{1 + sin2x} = \sqrt{2}cos2x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani har ikkala qismini kvadratga ko'taramiz.

$1 + sin2x = 2cos^2 2x, \ \ 1 + sin2x = 2(1 - sin^2 2x), 1 + sin2x = 2 - 2sin^2 2x, 2sin^2 2x + sin2x - 1 = 0. sin2x = y$ belgilash qilsak, oxirgi tenglamadan $2y^2 + y - 1 = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. uni yechib $y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{2}$ larni topamiz. Demak, biz $sin2x = -1$ va $sin2x = \frac{1}{2}$ lardan iborat ikkita eng sodda trigonometrik tenglamalarga ega bo'ldik. Ularni yechamiz:

1) $sin2x = -1, \ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in Z;$

2) $sin2x = \frac{1}{2}$, $2x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

Javob:$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

8-misol.$\sqrt{1 - cosx} = sinx$ tenglama yechilsin.

Yechish:$\sqrt{f(x)} = g(x)$ ko'rinishdagi irratsional tenglamani yechish qoidasiga asosan berilgan tenglamadan

$$\begin{cases} 1 - cosx = sin^2x \\ sinx \geq 0 \end{cases}$$

sistemani yechamiz dastlab bu sistemaning birinchi tenglamasini yechamiz.

$1 - cosx = sin^2x$, $1 - cosx = 1 - cos^2x$, $cos^2x - cosx = 0$,

$cosx(cosx - 1) = 0$. Bundan $cosx = 0$ va $cosx = 1$ tenglamalarni hosil qilamiz.

1)$cosx = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$;

2)$cosx = 1$, $x = 2k\pi$, $k \in Z$.

Hosil bo'lgan yechimlarning har ikkalasi $sinx \geq 0$ shartni qanoatlantiradi.

Javob:$\frac{\pi}{2} + k\pi$, $2k\pi$, $k \in Z$.

9-misol. $sin\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama

$\sqrt{x} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$ (1)

tenglamaga teng kuchli. Biz k ning shunday qiymatlarini topishimiz kerakki, oxirgi tenglamaning o'ng tomoni musbat bo'lishi, ya'ni

$(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \geq 0$, $k \in Z$. (2)

$(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \geq 0$, $k\pi \geq (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}$, $k \geq \frac{(-1)^{k+1}}{6}$. k ning har qanday qiymatida

$$-1 < \frac{(-1)^{k+1}}{6} < 1$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi ravshan. Bundan esa $k \geq 1$ qiymatlar (1) tenglamaning yechimi, $k \leq -1$ qiymatlar esa (2) tenglamaning yechimi bo'lmasligi kelib chiqadi.

$k = 0$ yechim bo'lish bo'lmasligi tekshiramiz.

$$(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi = (-1)^0 \frac{\pi}{6} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{6} \geq 0$$

Demak, (2) tengsizlik barcha $k \geq 0$ qiymatlarda yechimga ega. k ning bu qiymatlarida (1) tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarish mumkin. Unda berilgan tenglamaning yechimi hosil bo'ladi.

$$x = \left[(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\right]^2, \quad k \in Z, \quad k \geq 0.$$

Javob:$x = \left[(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\right]^2$, $k \in Z$, $k \geq 0$.

10-misol.$cos(\pi\sqrt{x}) \cdot cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1$ tenglama yechilsin.

Yechish: Kosinusning chegaralanganligidan berilgan tenglamaning yechimlari

$$\begin{cases} cos(\pi\sqrt{x}) = 1 \\ cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} cos(\pi\sqrt{x}) = -1 \\ cos(\pi\sqrt{x-4}) = -1 \end{cases}$$

sistemalarning yechimlaridan iborat bo'ladi. Birinchi sistemani yechib

$$\begin{cases} \pi\sqrt{x} = 2k\pi, & k \in Z, & k \geq 0 \\ \pi\sqrt{x-4} = 2n\pi, & k \in Z, & k \geq 0 \end{cases}$$

ni va undan

$$\begin{cases} x = 4k^2, & k \in Z, & k \geq 0 \\ x = 4n^2 + 4, & k \in Z, & k \geq 0 \end{cases}$$

ni topamiz. Bu sistemadan

$$4k^2 = 4n^2 + 4$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Buni yechamiz

$$4k^2 = 4n^2 + 4, \qquad k^2 - n^2 = 4, \qquad (k-n)(k+n) = 4.$$

Musbat butun sonlar ko'paytmasi 1 ga teng bo'lishi uchun $k = 1, n = 0$ bo'lishi kerak. Bundan esa $x = 4$ kelib chiqadi.

Javob: 4.

11-misol.$sinx + sin9x = 2$ tenglama yechilsin.

Yechish: Ma'lumki, α ning har qanday qiymatlarida $sinx \leq 1$ o'rinlidir. Shuning uchun berilgan tenglama

$$\begin{cases} sinx = 1 \\ sin9x = 1 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli bo'ladi. Bundan

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9}, & k \in Z. \end{cases}$$

Sistemaning yechimi x ning sistemani har bir tenglamasini qanoatlantiradigan qiymatlaridan iborat. U $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z$ dan iborat.

Javob:$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z.$

12-misol.$\left(cos\frac{x}{4} - 2sinx\right) \cdot sinx + \left(1 + sin\frac{x}{4} - 2cosx\right) \cdot cosx = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Dastlab qavslarni ochamiz.

$$cos\frac{x}{4} \cdot sinx - 2sin^2x + cosx + sin\frac{x}{4} \cdot cosx - 2cos^2x = 0,$$

$$cos\frac{x}{4} \cdot sinx + sin\frac{x}{4} \cdot cosx - 2(sin^2x + cos^2x) = cosx = 0,$$

$$sin\left(\frac{x}{4} + x\right) - 2 + cosx = 0, \qquad sin\frac{5x}{4} + cosx = 2.$$

$sinx$ va $cosx$ larning eng katta qiymati 1 ga teng bo'lishini e'tiborga olsak, $sin\frac{5x}{4} + cosx = 2$ tenglik har bir qo'shiluvchi 1 ga teng bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Demak, berilgan tenglama

$$\begin{cases} sin\frac{5x}{4} = 1 \\ cosx = 1 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli bo'ladi. Ularni har birini yechamiz.

$$sin\frac{5x}{4} = 1, \qquad \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad 5x = 2\pi + 8k\pi,$$

$$x = \frac{2\pi}{5} + \frac{8k\pi}{5}, \quad k \in Z;$$

$$cosx = 1, \quad x = 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Har ikkala yechimni umumlashtirib $x = 2\pi + 8k\pi, \ k \in Z$ ga ega bo'lamiz.

Javob:$x = 2\pi + 8k\pi, \ k \in Z.$

Ba'zi bir irratsional tenglamalarni yechishda trigonometrik almashtirishdan foydalanish natijasida trigonometrik tenglamalar hosil bo'ladi. quyida bunday tenglamaga misol keltiramiz.

13-misol. $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu yerda $\sqrt{x^2+1}$ifoda qatnashayotganligi uchun $x = tgt$ almashtirish qilamiz $\left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$. U holda

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{tg^2t+1} = \sqrt{\frac{1}{cos^2t}} = \frac{1}{cost}$$

bo'lib, berilgan tenglama

$$\frac{1}{cost} - tgt = \frac{5}{2}cost$$

ko'rinishga keladi. t ning qaralayotgan qiymatlarida $cost \neq 0$ ekanligidan oxirgi tenglamadan

$$2 - 2sint = 5(1 - sin^2t)$$

ni, undan esa

$sint = 1$ va $sint = -\frac{3}{5}$

larni hosil qilamiz. Bu tenglamalarning yechimlaridan $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqqa tegishli bo'lgani

$$t = arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$$

dan iborat. Shuning uchun x ning qiymati

$$x = tg\left(arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = -\frac{3}{4}$$

bo'ladi.

Javob:$-\frac{3}{4}$.

14-misol.$sin(x+5) + cos(x-2) = cos(x+7)$ tenglama yechilsin.

Yechish:$sin(\alpha+\beta)$, $cos(\alpha-\beta)$ va $cos(\alpha+\beta)$ formulalardan foydalanamiz.

$sinx \cdot cos5 + cosx \cdot sin5 + cosx \cdot cos2 + sinx \cdot sin2 = cosx \cdot cos7 - sinxsin7,$

$sinx \cdot cos5 + sinx \cdot sin2 + sinx \cdot sin7 + cosx \cdot sin5 + cosx \cdot cos2 - cosx \cdot cos7 = 0$,

$(cos5 + sin2 + sin7)sinx + (sin5 + cos2 - cos7)cosx = 0.$

Demak, berilgan tenglama $sinx$ va $cosx$ ga nisbatan bir jinslidir. Bu yerda $cos5 > 0,\ sin2 > 0,\ sin7 > 0$ bo'lgani uchun $cos5 + sin2 + sin7 > 0$ bo'ladi va oxirgi tenglama quyidagio tenglamaga teng kuchli bo'ladi:

$tgx = \frac{cos7 - sin5 - cos2}{sin2 + cos5 + sin7}.$

Bundan $x = arctg\frac{cos7 - sin5 - cos2}{sin2 + cos5 + sin7} + k\pi, k \in Z.$

Javob:$x = arctg\frac{cos7 - sin5 - cos2}{sin2 + cos5 + sin7} + k\pi, k \in Z.$

15-misol.$(2sin^2x + 5sinx + 1)ctgx = 4secx(1 + sinx)$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani aniqlanish sohasi $sinx \neq 0$ va $cosx \neq 0$ lardan aniqlanadi. Buni va $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$, $secx = \frac{1}{cosx}$ ekanligini e'tiborga olsak, berilgan tenglamadan

$$(2sin^2x + 5sinx + 1)cos^2x = 4sinx(1 + sinx)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bunda cos^2x ni $1 - sin^2x$ bilan almashtiramiz. Natijada,

$(2sin^2x + 5sinx + 1)(1 - sin^2x) = 4sinx(1 + sinx)$ yoki

$$(1 + sinx)(2sin^3x + 3sin^2x - 1) = 0$$

tenglamaga ega bo'lamiz. $cosx \neq 0$ bo'lishi kerakligidan $1 + sinx \neq 0$ bo'lib, oxirgi tenglama

$$2sin^3x + 3sin^2x - 1 = 0$$

tenglamaga teng kuchli bo'ladi. Bu tenglamani chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratamiz.

$(1 + sinx)(2sin^2x + sinx - 1) = 0.$

Bundan $2sin^2x + sinx - 1 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama $sinx$ ga nisbatan kvadrat tenglama bo'lib undan $sinx = \frac{1}{2}$ va $sinx = -1$ lardan iborat ikkita eng sodda trigonometrik tenglamalarni hosil qilamiz. Ularni yechamiz:

$sinx = \frac{1}{2},\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$ Ikkinchi tenglama $1 + sinx \neq 0$ shartga ziddir.

Javob:$(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$

16-misol.$sinx + sinxcosx + cosx = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $sinx + cosx = y$ deylik. U holda $(sinx + cosx)^2 = y^2$, $sin^2x + 2sinxcosx + cos^2x = y^2$, $1 + 2sinx \cdot cosx = y^2$, $sinx \cdot cosx = \frac{y^2-1}{2}$. $sinx + cosx$ va $sinx \cdot cosx$ lar o'rniga ularni y orqali ifodalarini qo'yamiz. Demak,

$sinx + sinxcosx + cosx = 0,\ y + \frac{y^2-1}{2} = 0,\ 2y + y^2 - 1 = 0,\ y^2 + 2y - 1 = 0$. Bu kvadrat tenglama bo'lib, uning ildizlari $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ bo'ladi.

$sinx + cosx = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}sinx + \frac{\sqrt{2}}{2}cosx\right) = \sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ bo'lgani uchun

$\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 - \sqrt{2}$ yoki $cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$ bo'lib, bu tenglama yechimga ega emas.

$\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1$ yoki $cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ bo'lib, undan

$x = 2k\pi + arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}$ kelib chiqadi.

Javob: $x = 2k\pi + arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}$.

17-misol. $sin^9x + cos^9x = 1$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamaning chap tomoni 1 ga teng bo'lishi uchun bir vaqtda quyidagilar o'rinli bo'lishi kerak:

$a)\begin{cases} sinx = 0, \\ cosx = 1. \end{cases}$ yoki $b)\begin{cases} sinx = 1, \\ cosx = 0. \end{cases}$

$sin^9x \le sin^2x$ va $cos^9x \le cos^2x$ tengsizliklarni hadma-had qo'shsak, $sin^9x + cos^9x \le 1$ ga ega bo'lamiz. Bu tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun quyidagilar bir vaqtda o'rinli bo'lishi kerak

$\begin{cases} sinx = 0 \\ cosx = 1 \end{cases}$ va $\begin{cases} sinx = 1 \\ cosx = 0 \end{cases}$.

$a)$ sistemani yechib $x = 2n\pi$ ga, $b)$sistemani yechib $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ga ega bo'lamiz. Berilgan tenglamaning barcha yechimlari $x_1 = 2n\pi$ va $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ yechimlar ichida bo'ladi.

18-misol. $sinx + sin2x + sin3x + \dots + sinnx = n$ tenglama yechilsin.

Yechish: k ning har qanday qiymatlarida $|sinnx| \le 1$ bo'lishi ravshan. Ammo n ta qo'shiluvchilar yig'indisi n ga teng. Bu holat har bir qo'shiluvchi 1 ga teng bo'lgandagina, ya'ni $sinx = 1,\ sin2x = 1,\ sin3x = 1, \dots ,sinnx = 1$ bo'lganda ro'y beradi. Birinchi tenglamadan $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ga ega bo'lamiz. Ammo x ning bu qiymatida qo'shiluvchi nolga teng, ya'ni

$$sin2\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right] = sin(2\pi + 2k\pi) = sin2k\pi = 0$$

bo'ladi.

Demak, berilgan tenglama yechimga ega emas.

19-misol. $sin\frac{x}{2}(sinx + sin2x + \dots + sin100x) = \frac{1}{2}sin\frac{101x}{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Dastlab qavsni ochamiz.

$$sin\frac{x}{2} \cdot sinx + sin\frac{x}{2} \cdot sin2x + \dots + sin\frac{x}{2} \cdot sin100x = \frac{1}{2}sin\frac{101x}{2}.$$

$sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)]$ formuladan foydalanamiz.

$\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \cdots + \left(\cos\frac{199x}{2} - \cos\frac{201x}{2}\right) =$
$\sin\frac{101x}{2}$,

$\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cdots + \cos\frac{199x}{2} - \cos\frac{201x}{2} =$
$\sin\frac{101x}{2}$,

$\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{201x}{2} = \sin\frac{101x}{2}$ yoki $2\sin\frac{101x}{2} \cdot \sin 50x - \sin\frac{101x}{2} = 0$,

$\sin\frac{101x}{2}(2\sin 50x - 1) = 0$. Bundan $\sin\frac{101x}{2} = 0$ va $\sin 50x = \frac{1}{2}$ tenglamalarga ega bo'lamiz. Ularni yechamiz.

$\sin\frac{101x}{2} = 0$, $\frac{101x}{2} = k\pi$, $101x = 2k\pi$, $x_1 = \frac{2k\pi}{101}$, $k \in Z$.

$\sin 50x = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{n\pi}{50} + (-1)^n \frac{\pi}{300}$.

Javob: $\frac{n\pi}{50} + (-1)^n \frac{\pi}{300}$; $\frac{2k\pi}{101}$, $k, n \in Z$.

20-misol. $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$ tenglama yechilsin.

Yechish: tenglamaning har ikkala tomonini sinusinini olamiz.

$\sin(\arccos x - \arcsin x) = \sin\frac{\pi}{6}$,

$\sin(\arccos x) \cdot \cos(\arcsin x) - -\cos(\arccos x) \cdot \sin(\arcsin x) = \frac{1}{2}$,

$\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot x = \frac{1}{2}$, $1 - x^2 - x^2 = \frac{1}{2}$, $2x^2 = \frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{1}{4}$,
$x = \pm\frac{1}{2}$.

Tekshirish. $\arccos x_1 - \arcsin x_1 = \arccos\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{2} =$
$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Demak, $x_1 = \frac{1}{2}$ ildiz ekan.

$\arccos x_2 - \arcsin x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} -$
$\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \neq \frac{\pi}{6}$.

Demak, $x_2 = -\frac{1}{2}$ chet ildiz ekan.

Javob: $\frac{1}{2}$.

21-misol. $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning har ikkala tomonini kosinusini olamiz.

$\cos(\arcsin 2x + \arcsin x) = \cos\frac{\pi}{3}$,

$\cos(\arcsin 2x) \cdot \cos(\arcsin x) - \sin(\arcsin 2x) \cdot \sin(\arcsin x) = \frac{1}{2}$,

$\sqrt{1-4x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} - 2x \cdot x = \frac{1}{2}$, $2\sqrt{1-4x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} - 4x^2 = 1$,

$2\sqrt{1-4x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = 4x^2 + 1$, $4(1 - 5x^2 + 4x^4) = 16x^4 +$
$8x^2 + 1$,

$4 - 20x^2 + 16x^4 = 16x^4 + 8x^2 + 1$, $28x^2 = 3$, $7x^2 = \frac{3}{4}$,

$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Bularni tekshirib qo'yib $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ ildiz ekanligini aniqlaymiz.

$x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ chet ildiz.

Javob: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

22-misol. $2arctg\frac{1}{2} - arctgx = \frac{\pi}{4}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamaning har ikkala tomonini tangensini olamiz.

$tg\left(2arctg\frac{1}{2} - arctgx\right) = tg\frac{\pi}{4}$, $\frac{tg\left(2arctg\frac{1}{2}\right) - tg(arctgx)}{1 + tg\left(2arctg\frac{1}{2}\right)\cdot tg(arctgx)} = 1$.

$tg\left(2arctg\frac{1}{2}\right) = \frac{2tg\left(arctg\frac{1}{2}\right)}{1 - tg^2\left(arctg\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$ ekanligini e'tiborga olsak, oxirgi tenglamadan

$\frac{\frac{4}{3} - x}{1 + \frac{4}{3}\cdot x} = 1$ yoki $\frac{4-3x}{3+4x} = 1$

ni hosil qilamiz. Undan esa $x = \frac{1}{7}$ ni topamiz.

Javob: $\frac{1}{7}$.

23-misol. $arcsinx = \frac{\pi}{3} + arcsin\frac{x}{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani aniqlanish sohasi $-1 \leq x \leq 1$ dan iborat. Tenglamani har ikkla tomonini sinusini olamiz.

$sin(arcsinx) = sin\left(\frac{\pi}{3} + arcsin\frac{x}{2}\right)$,

$x = sin\frac{\pi}{3}\cdot cos\left(arcsin\frac{x}{2}\right) + cos\frac{\pi}{3}\cdot sin\left(arcsin\frac{x}{2}\right)$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}$,

$x = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4 - x^2} + \frac{x}{4}$, $\frac{3x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4 - x^2}$, $3x = \sqrt{3}\sqrt{4 - x^2}$, $\sqrt{3}x = \sqrt{4 - x^2}$,

$3x^2 = 4 - x^2$, $4x^2 = 4$, $x^2 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Har ikkla ildiz tenglamani aniqlanish sohasiga tegishli. Lekin, $x_1 = -1$ tenglamani qanoatlantirmaydi.

Javob: 1.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1.O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. T.: O'zbekiston, 1998. 45 b.

2."O'zbekiston Respublikasida yoshlarga oid davlat siyosatini amalga oshirishga qaratilgan qo'shimcha chora-tadbirlar to'g'risida"gi Qarori. Toshkent, "Xalq so'zi" gazetasi 2014-yil 6-fevral.

3.O'zbekiston Respublikasining "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni, Kadrlar tayyorlash milliy dasturi. T.:Sharq. 1997.

4.O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018-yil 25-yanvardagi "Umumiy o'rta, o'rta maxsus va kasb-hunar ta'limi tizimini tubdan takomillashtirsh chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarori.

5.O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi PF-4947 sonli farmoni.

6. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz.-Toshkent: "O'zbekiston" NMIY, 2017. 488b.

7.Alixonov S. "Matematika o'qitish metodikasi".-T.: "TAFAKKUR BO'STONI", 2011.385b.

8. Tojiyev M, Barakayev M, Xurramov A. Matematika o'qitish metodikasi. Toshkent. "Fan va texnologiya" 2017. 296 b.

9.А.Я.Блох, В.А.Гусев, Г.В.Дорофеев. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика. М.: Просвещение. 1987. 416с.

10. AbduxamidovA.U, NasimovN.A, NosirovI.M, XusanovJ.X. Algebra va matematik analiz asoslari. I, II qism. T.: O'qituvchi. 2010.

11.UmirbekovA.U, ShaablazovSh.Sh. Matematikani takrorlang. "O'qituvchi", T., 1989.

12.В.С.Крамор. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. М.: Просвещение. 1990. 416с.

13. П.Т.Дыбов, Б.А.Осколков. Задачи по математике. М.: ОНИКС Мир и образование, 2006.464с.

14. To'laganov T,Normatov A. Matematikadan Praktikum. T.: O'qituvchi, 1989. 300b.

15. С.И.Туманов. Элементарная алгебра. М. Просвешение. 1970. 864с.

16.M.A.Mirzaahmedov, Sh.N.Ismoilov, A.Q.Amanov. Algebra va analiz asoslari 10-sinflar. Toshkent 2017.

17.M.A.Mirzaahmedov, Sh.N.Ismoilov, A.Q.Amanov. Algebra va analiz asoslari 11-sinflar. Toshkent 2018.

18.Л.М.Фридман, Э.Н.Турецкий. Как научитьсярешать задачи. Москва. Просвешение. 1989г.

MUNDARIJA

J.ALIYEVA, A.AXLIMIRZAYEV,
E.RAXIMBERDIYEV, E.QO'CHQAROV

MAKTABDA STANDART VA NOSTANDART MASALALAR

Uslubiy qo`llanma

Toshkent - "INNOVATSIYA-ZIYO" - 2021

Muharrir Xolsaidov F.B.

Nashriyot litsenziyasi AI №023, 27.10.2018.
Bosishga 30.05.2021. da ruxsat etildi. Bichimi 60x84.
"Times New Roman" garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog`i 7. Nashr bosma tabog`i 6,75.
Adadi 200 nusxa.

ISBN 978-9943-6216-1-9