

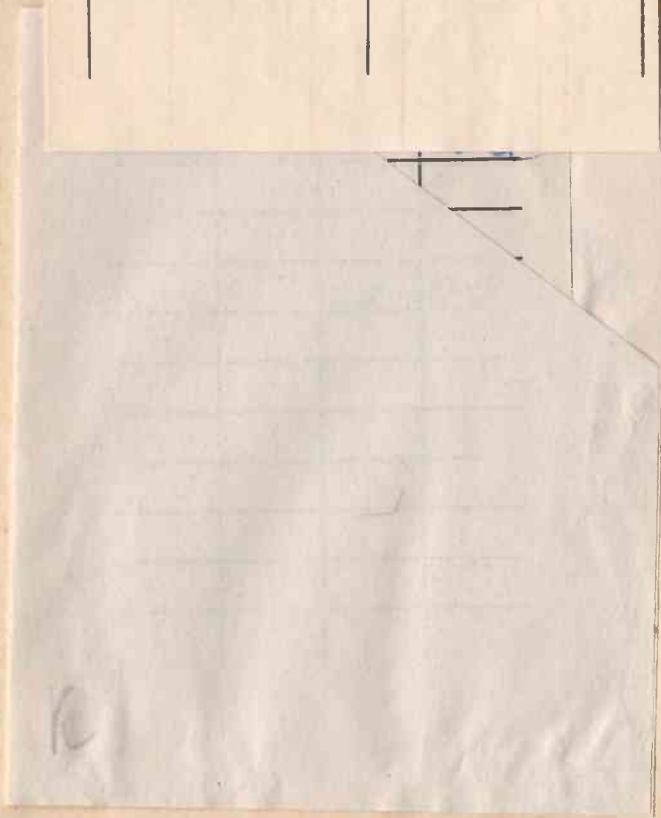


А. Н. ПОДГОРНЫЙ
Г. А. МАРЧЕНКО
В. И. ПУСТЫННИКОВ

ОСНОВЫ И МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Книга должна быть возвращена
не позже указанного здесь срока

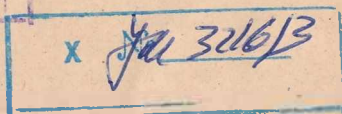
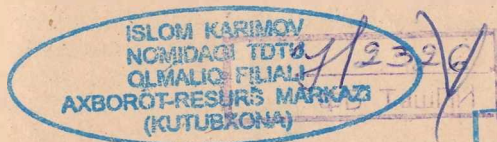
Количество предыдущих выдач _____



А. Н. ПОДГОРНЫЙ
Г. А. МАРЧЕНКО
В. И. ПУСТЫННИКОВ

ОСНОВЫ И МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования
в качестве учебного пособия для студентов
технических специальностей высших учебных заведений*



Киев
Головное издательство
издательского объединения
«Вища школа»
1981

Подгорный А. Н., Марченко Г. А., Пустынников В. И.
Основы и методы прикладной теории упругости: Учеб.
пособие для вузов.— Киев: Вища школа. Головное изд-во,
1981.— 328 с.— 20302. 1703040000.

Изложены основы теории упругости: после ознакомления с наиболее важными понятиями приводятся анализ напряженного и деформированного состояния, вывод основных уравнений, плоская и температурная задачи, элементы теории пластин и оболочек. Особое внимание уделено численным методам решения прикладных задач теории упругости: помимо достаточно распространенных вариационных и разностных методов подробно освещается сравнительно новый структурный метод, хорошо зарекомендовавший себя при исследовании объектов сложной формы. Для понимания затронутых вопросов достаточно знаний обычного курса математики технического вуза.

Для студентов технических специальностей высших учебных заведений.

Табл. 6. Ил. 149. Список лит.: 68 назв.

Рецензенты: кафедра упругости и вычислительной математики Донецкого государственного университета под руковод. чл.-кор. ~~А. С. Космодамьянского~~ проф. А. С. Космодамьянского; д-р техн. наук проф. И. И. Трапезин.

Редакция литературы по машиностроению и приборостроению

Зав. редакцией О. А. Добровольский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Повышенные требования к современным инженерным конструкциям, которые зачастую работают в экстремальных условиях, обуславливают все больший интерес к методам теории упругости. Такой интерес предопределен и тем, что применяемые методы имеют широкую область приложения и позволяют отказаться от упрощающих допущений при формулировке задач и соответствующих граничных условий. В предлагаемой книге органически объединены основы теории упругости и современные методы прикладной математики. Изложение проведено с единых позиций и в едином ключе.

Математический аппарат книги по сложности не выходит за пределы математических курсов, изучаемых по программам технических вузов. Там, где это нужно, даются необходимые дополнительные сведения.

Приведенный в конце пособия список литературы не претендует на полноту. В нем помимо работ, непосредственно использованных авторами, указаны и работы, освещающие некоторые вопросы теории, не нашедшие отражения в данной книге или использующие иной подход к решению аналогичных задач. Читателя, интересующегося историей науки о прочности, и в частности теории упругости, мы отсылаем к фундаментальным работам [5], [9], [57], где можно найти богатую и систематизированную информацию об основных направлениях теории упругости и ученых, внесших наиболее ощутимый вклад в ее развитие.

Авторы выражают свою искреннюю признательность академику [REDACTED] В. Л. Рвачеву за полезные советы и помощь при написании гл. 15.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность рецензентам — коллективу кафедры теории упругости и вычислительной математики Донецкого университета, возглавляемому членом-корреспондентом [REDACTED] А. С. Космодамианским, за обстоятельную критику, которая послужила полезным стимулом конструктивного совершенствования рукописи, а также профессору доктору технических наук И. И. Трапезину — заведующему кафедрой сопротивления материалов Московского авиационного института за полученные замечания и пожелания. Нельзя не выразить признательность коллективу кафедры «Динамика и прочность машин» Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина, возглавляемому профессором С. И. Богомоловым, за полезные замечания, высказанные при ознакомлении с содержанием рукописи. В заключение выражаем искреннюю благодарность О. М. Печерской и Е. К. Руденко за участие в подготовке рукописи.

Отзывы о книге просим направлять по адресу: 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа».

ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости — раздел механики твердого деформируемого тела. Ее задача — определить внутренние усилия и деформации, возникающие в упругом теле под действием приложенных к нему внешних сил, а также неравномерного температурного поля.

Теория упругости делится, хотя и весьма условно, на математическую и прикладную. Для первой из них характерны математическая строгость составления уравнений и стремление получить точное решение на основе общих предпосылок, касающихся свойств рассматриваемых тел. Однако строгое решение многих задач наталкивается на серьезные препятствия прежде всего математического характера, в силу чего методами математической теории упругости удается довести до решения сравнительно простые с точки зрения практики задачи.

В прикладной теории упругости вводятся дополнительные гипотезы и упрощающие положения, которые позволяют пренебречь второстепенными факторами по сравнению с основными. (Примером дополнительных упрощений, принятых в прикладной теории упругости, могут служить используемые при исследовании изгиба пластин гипотезы о плоских нормальных и о равенстве нулю нормальных напряжений, перпендикулярных к срединной плоскости). Несмотря на это, прикладная теория упругости позволяет получать достаточно достоверные результаты, что подтверждается экспериментально. Кроме того, следует учитывать, что полученные решения можно при необходимости уточнить и довести до высокой степени точности.

Известно, что сопротивление материалов ставит перед собой ту же цель, что и теория упругости. Однако между ними есть существенное различие, заключающееся прежде всего в исходных положениях и методах решения. Последние позволяют теории упругости охватывать значительно более широкий круг задач. Так, если предметом исследования сопротивления материалов является стержневая система и ее элементы, то теория упругости дает возможность получить характер распределения напряжений и деформаций для таких объектов, как пластина, оболочка, сфера, массив и т. п.

Обычно исследователь, приступая к решению той или иной задачи, стремится как можно более полно оценить и описать свойства модели. Естественно, полученные в этом случае выводы лучше согласуются с действительностью. Однако такой подход часто бывает трудно реализовать, и прежде всего из-за осложнений чисто математического характера.

Следует также учитывать, что практически используемые материалы обладают множеством свойств. Поэтому исследователь, выбирая свойства избранной модели, вынужден дифференцировать их, отличать главные от второстепенных. Это делается в соответствии со спецификой теории упругости. Например, при оценке проч-

ности изделия из металла проводимость не имеет практического значения и ее не учитывают.

Рассматриваемая в настоящем пособии теория упругости называется классической. Она предполагает идеализацию свойств реальных материалов, т. е. им приписываются те свойства, которые наиболее важны для решения поставленной задачи. Такой подход позволяет упростить математические выкладки и эквивалентен пренебрежению величинами, весьма малыми по сравнению с теми, которые имеют основное значение. Следует подчеркнуть, что такая идеализация реального тела применительно к конкретным условиям вполне допустима и пригодна для инженерной практики.

Остановимся на основных предпосылках классической теории упругости:

1. Прежде всего *упругость материала предполагается идеальной*, т. е. после снятия внешних нагрузок, приложенных к телу и вызвавших его деформацию, оно полностью восстанавливает первоначальную форму и размеры. Этим исключается наличие в теле остаточных деформаций и снимается вопрос о влиянии на деформацию тела нагрузок, действовавших на него в прошлом. Естественно, что идеально упругое тело при возвращении в первоначальное состояние совершает работу, равную той, которая была затрачена на его деформацию, т. е. выполняется первый закон термодинамики о сохранении энергии в изолированной системе.

2. Принимается *существование линейной зависимости между напряжением и деформациями*, известной как закон Гука.

3. *Идеально упругое тело предполагается сплошным*, иными словами, считается, что весь объем, занимаемый материалом тела, непрерывен и не имеет пустот как до деформации, так и после нее. Вводя эту гипотезу, сознательно не принимают во внимание дискретную атомистическую структуру вещества, что, безусловно, является серьезной натяжкой с целью сделать исследование возможным. Совершенно ясно, что если бы с помощью математических средств можно было интерпретировать структуру материала, то это привело бы к результатам, слишком сложным для практического использования. Достоинством же допущения о сплошности тела является возможность рассматривать деформации и перемещения как непрерывные функции координат.

4. Принимается, что *материал упругого тела совершенно однороден*, т. е. во всех точках тело имеет одинаковые упругие свойства, а следовательно, под воздействием одних и тех же усилий оно деформируется во всех точках одинаково.

5. Вводится *допущение об изотропности тела*. Это означает, что его упругие свойства одинаковы во всех направлениях и, следовательно, связь между напряжениями и деформациями не зависит от направления. В антиподе изотропного тела — анизотропном теле — упругие свойства различны в разных направлениях. В дальнейшем рассматриваются только изотропные тела.

6. Принимается, что *перемещения тела малы* по сравнению с его линейными размерами.

7. Очень близко к первой предпосылке примыкает допущение о *естественном ненапряженном состоянии тела*. Под этим подразумевается, что начальные напряжения, величина и характер которых зависят от истории возникновения тела и которые существуют в нем до приложения внешних сил, полагаются равными нулю. Фактически же напряжения, определенные при решении задач теории упругости, не являются истинными, а представляют собой дополнение к начальным напряжениям в тех же точках. Неучитывание начальных напряжений частично компенсируется тем, что, определяя основные механические характеристики материала с помощью образцов, в них также игнорируют наличие начальных напряжений.

Таким образом, теория упругости исходит из нескольких допущений. Их переводят на язык математической физики, а затем к полученным системам уравнений применяют математический аппарат. Если при решении задач дополнительные допущения, кроме отмеченных выше, не применяются, то задача считается решенной строго.

Часть I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Глава I

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

§ 1.1. Основные понятия

Внешние силы, воздействующие на рассматриваемое тело, в зависимости от того, где они приложены, делят на поверхностные и объемные.

Поверхностные силы — следствие контакта тела с внешней средой. К ним относятся давление газов или жидкостей, воздействие со стороны соприкасающихся тел и др. Силы эти могут распределяться по поверхности тела непрерывно — по некоторому закону — и дискретно — в виде сосредоточенных сил. Сосредоточенные силы — силы, приложенные в точке, — это результат некоторой идеализации реально действующих нагрузок, уместный тогда, когда площадки, на которых они действуют, малы по сравнению с поверхностью тела.

Объемные силы — итог воздействия на рассматриваемое тело пространственного векторного поля. В качестве примера можно привести гравитационное и инерционное поля, поле центробежных сил. Сила тяжести, инерционные и другие силы, порождаемые указанными полями, приложены к массе тела и непрерывно распределены по его объему.

Внешние силы можно разделить на зависящие от деформированного состояния тела и не зависящие от него. К последним относят гравитационные силы и поверхностную нагрузку, являющуюся следствием давления, т. е. нагрузку, не связанную с упругим контактом твердых тел, — давление жидкости, пара, сыпучей среды и т. д. К первым же следует отнести магнитное силовое поле, тепловое поле и все те нагрузки, которые возникают в результате контакта двух тел. Тепловое поле, деформируя тело, само изменяется под влиянием этих деформаций: при деформировании выделяется тепло, которое в свою очередь влияет на основное (деформирующее) тепловое поле. Справедливо это и по отношению к магнитному силовому полю.

При воздействии внешних сил между отдельными частицами тела возникают силы взаимодействия, которые называются *внутренними силами* или *усилиями*. Определяют эти силы при помощи метода сечений. Мысленно рассечем тело поверхностью (обычно плоскостью) на две части (рис. 1.1) и удалим одну из частей со всеми приложенными к

ней силами. Для сохранения в равновесии оставшейся части, например нижней, к ней следует приложить систему усилий, распределенную некоторым образом по поверхности сечения (рис. 1.2). Эти усилия есть результат воздействия отброшенной части тела на рассматриваемую. Согласно третьему закону Ньютона усилия, действующие на нижнюю часть рассеченного тела, равны по величине и противоположны по направлению усилиям, действующим на верхнюю часть.

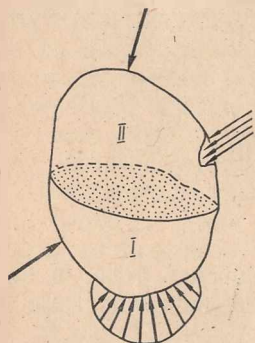


Рис. 1.1

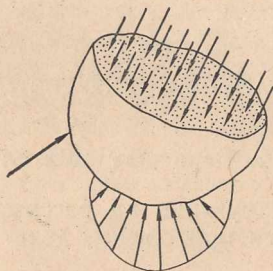


Рис. 1.2

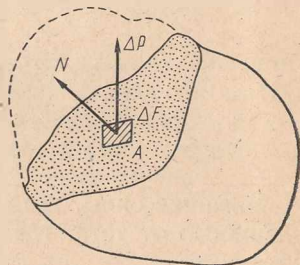


Рис. 1.3

Равнодействующую внутренних усилий определяют при помощи уравнений равновесия. Однако такой обобщенный подход не может дать представления о мере интенсивности внутренних усилий, называемой *напряжением*.

Для определения напряжения в точке A (рис. 1.3) проведем сечение, проходящее через эту точку. Если не зафиксировать положение плоскости сечения, а это обычно делают, указав направление внешней нормали N , то эта задача не будет решаться однозначно. Причина в том, что через точку A можно провести бесчисленное множество сечений, причем внутренние усилия, соответствующие им, естественно, отличаются друг от друга. Выделим около точки элементарную площадку ΔF и предположим, что равнодействующая внутренних сил, приходящихся на нее, будет ΔP . Тогда полное среднее напряжение в точке A по этой площадке

$$p_{Ncp} = \frac{\Delta P}{\Delta F}.$$

Чтобы исключить влияние конфигурации и величины площадки ΔF при неравномерном распределении усилий по сечению, определим полное напряжение p_N в точке A как предел p_{Ncp} при уменьшении ΔF до нуля:

$$p_N = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}.$$

В теории упругости вектор p_N обычно раскладывают двумя способами:

1. На составляющие, параллельные координатным осям: p_{Nx} , p_{Ny} и p_{Nz} (рис. 1.4). Первая буква в индексах обозначает нормаль к площадке, вторая — ось (направление), параллельно которой направ-

лена составляющая полного напряжения. Из рис. 1.4 следует, что

$$p_N = \sqrt{p_{Nx}^2 + p_{Ny}^2 + p_{Nz}^2}. \quad (1.1)$$

2. На составляющие σ_N и τ_N . Напряжение σ_N , называемое *нормальным напряжением*, параллельно нормали к площадке, τ_N —

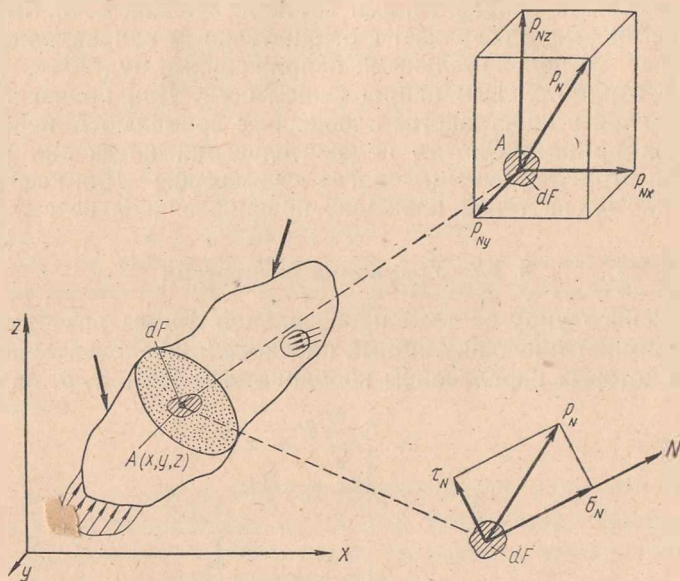


Рис. 1.4

касательное напряжение — лежит в плоскости площадки. Касательное напряжение τ_N также раскладывают по двум направлениям, обычно взаимно перпендикулярным. Таким образом, и в этом случае полное напряжение p_N раскладывается на 3 взаимно перпендикулярные составляющие σ_N , τ_{NT} и τ_{NL} . Здесь, как и прежде, σ_N — нормальная, а τ_{NT} и τ_{NL} — касательные составляющие. У касательных напряжений 2 индекса: 1-й означает направление нормали к площадке, 2-й — само направление касательного напряжения. В дальнейшем не будем упоминать, что σ и τ — составляющие полного напряжения, а просто станем говорить о нормальном и касательном напряжениях. Учитывая сказанное, можем записать (рис. 1.4)

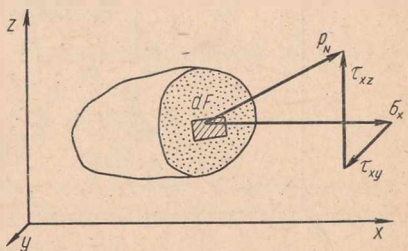


Рис. 1.5

$$p_N = \sqrt{\sigma_N^2 + \tau_N^2} = \sqrt{\sigma_N^2 + \tau_{NT}^2 + \tau_{NL}^2}. \quad (1.2)$$

В большинстве случаев тело рассекают сечениями, перпендикулярными к координатным осям. Если нормаль к площадке совпадает с

осью x , то проекции полного напряжения на координатные оси будут (рис. 1.5) $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$.

Введем правило знаков для напряжений. Если внешняя нормаль к площадке направлена в сторону положительной оси, то напряжения на этой площадке считаются положительными, когда они совпадают с положительными направлениями соответствующих осей. Если вектор внешней нормали совпадает с отрицательным направлением координатной оси, то положительными напряжениями будут те, которые совпадут с отрицательным направлением осей. Для произвольно ориентированной в пространстве площадки с нормалью N нормальные напряжения принято считать положительными, когда они растягивающие, и отрицательными, — когда сжимающие. Для касательных напряжений τ_{N_k} на такой площадке правила знаков не существует.

§ 1.2. Уравнения равновесия

Нагруженное упругое тело произвольной формы разобьем тремя парами взаимно перпендикулярных плоскостей на элементарные объемы, ребра которых параллельны координатным осям x, y, z и равны

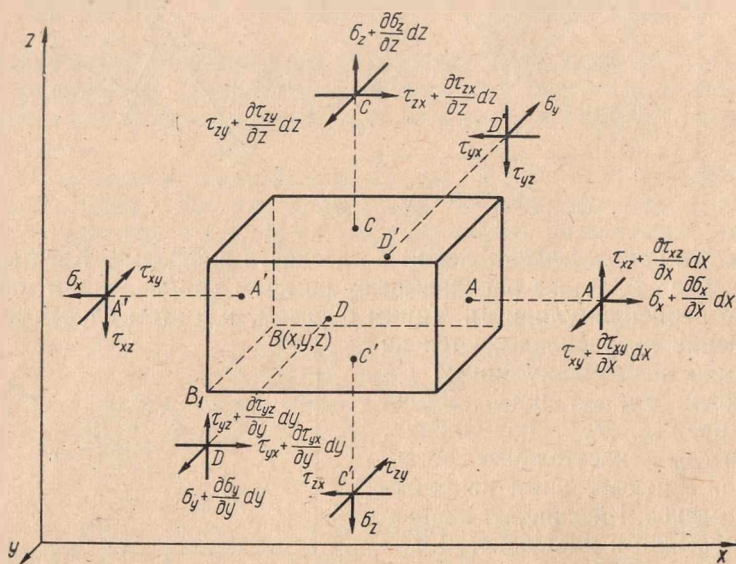


Рис. 1.6

соответственно dx, dy, dz . Рассмотрим выделенный элементарный параллелепипед, примыкающий к произвольной точке B с координатами x, y, z (рис. 1.6). По граням параллелепипеда должны быть приложены напряжения, которые статически эквивалентны действию отброшенных частей тела. В общем случае этих напряжений 9:

$$\begin{aligned} &\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \\ &\tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz} \\ &\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Будем уменьшать размеры параллелепипеда, сближая его параллельные грани. Когда расстояние между противоположными гранями станет равным нулю, они представят собой 2 стороны плоскости, проходящей через точку B . В этом случае напряжения (1.3) охарактеризуют напряженное состояние в данной точке упругого тела в наиболее общем виде.

Объем элементарного параллелепипеда очерчен шестью плоскостями, на каждой из которых действуют 3 составляющие полного напряжения (рис. 1.6). Общее число составляющих напряжений, действующих по всем граням, $6 \times 3 = 18$. В пределах каждой грани напряжения, вообще говоря, неодинаковы и отличаются от напряжений в точке B . Но это отличие ввиду малости размеров ребер настолько мало, что обычно рассматривают средние в пределах грани напряжения, прикладывая их в центре тяжести грани.

Напряжения, возникающие в теле в результате силового воздействия, изменяются от точки к точке (являются функциями всех трех координат). Поэтому на гранях, не смежных с точкой B , они отличаются от тех, которые действуют на примыкающих к ней гранях. Поясним это подробнее. Напряжение σ_x в точке A' также зависит от ее положения:

$$\sigma_x = F(x, y, z).$$

При переходе от точки A' к точке A координата x получит приращение dx , поэтому напряжение σ_x на этой грани примет значение $\sigma_x = F(x + dx, y, z)$. В случае, когда аргумент функции одной переменной $y = f(x)$ получает приращение dx ,

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) = f'(x) dx + \alpha,$$

где α — бесконечно малая высшего порядка, чем dx . Пренебрегая слагаемым α , получим

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x) dx.$$

Аналогично, когда функция $F(x, y, z)$ является функцией трех независимых переменных, можно записать

$$F(x + dx, y, z) = F(x, y, z) + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} dx. \quad (1.4)$$

Выражение (1.4), по сути, представляет собой первые 2 члена разложения функции $F(\cdot)$ в ряд Тейлора. Возвращаясь к выражению σ_x^* в точке A , выясняем, что на основании (1.4)

$$\sigma_x^* = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx.$$

Для напряжений на других гранях, не примыкающих к точке B , выражения получены аналогично и в пояснениях не нуждаются. Кроме усилий, приложенных по граням элемента, следует учесть еще объемные силы (на рис. 1.6 не показаны). Например, силы собственного веса, приходящиеся на единицу объема, которые приложены в центре параллелепипеда. Проекции объемных сил обозначим X, Y, Z .

Выполним условия равновесия для параллелепипеда:

$$\begin{aligned}\sum_{\text{пр}} x &= 0; & \sum_{\text{мом}} x &= 0; \\ \sum_{\text{пр}} y &= 0; & \sum_{\text{мом}} y &= 0; \\ \sum_{\text{пр}} z &= 0; & \sum_{\text{мом}} z &= 0.\end{aligned}$$

Подчеркнем, что в эти уравнения входят силы, а поэтому напряжения, показанные на рис. 1.6, следует умножить на площади соответствующих граней. Реализуем сначала условие $\sum_{\text{пр}} x = 0$:

$$\begin{aligned}-\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \tau_{zx} dx dy + \\ + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz + \\ + X dx dy dz = 0.\end{aligned}$$

После очевидных преобразований получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0.$$

Аналогично можно составить и 2 других уравнения, проецируя главный вектор на оси y и z . В результате будем иметь 3 дифференциальных уравнения в частных производных, которые называют *уравнениями равновесия Навье*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Переходим к использованию последних трех уравнений равновесия. Приравнявая к нулю сумму моментов всех сил (поверхностных и объемных) относительно ребер, проходящих через точку B , например BB_1 , из уравнения $\sum_{\text{мом}} y = 0$ получим

$$\begin{aligned}-\sigma_x dydz \frac{dz}{2} + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz \frac{dz}{2} - \\ - \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\right) dydz dx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) \times \\ \times dx dy dz + \sigma_z dx dy \frac{dx}{2} - \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) dx dy \frac{dx}{2} - \\ - \tau_{yx} dx dz \frac{dx}{2} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz \frac{dx}{2} - \\ - \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dx dz \frac{dx}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dx}{2} + X dx dy dz \frac{dz}{2} - \\ - Z dx dy dz \frac{dx}{2} = 0.\end{aligned}$$

Выполняя необходимые упрощения и отбрасывая члены высшего (четвертого) порядка малости, получим

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Аналогично, используя условия $\sum_{\text{мом}} x = 0$ и $\sum_{\text{мом}} z = 0$, можно записать еще 2 подобных соотношения. Группируя их вместе, получим

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \tau_{xy}; \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}; \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Равенства (1.6) представляют собой закон парности касательных напряжений: на взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения, направленные к линии пересечения этих площадок или от нее, равны между собой по величине и одинаковы по знаку.

Как уже отмечалось в (1.3), девять неизвестных компонентов напряжения — 3 нормальных и 6 касательных — описывают напряженное состояние тела. Вследствие парности касательных напряжений независимых составляющих напряжений будет только шесть — 3 нормальных и 3 касательных:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y, z); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z); \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z); \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z); \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y, z); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z).\end{aligned}$$

Для отыскания этих шести неизвестных функций имеем лишь 3 уравнения равновесия (1.5). Определить напряжения, возникающие в элементарном параллелепипеде, из уравнений статики нельзя. Чтобы раскрыть статическую неопределимость, используют геометрические и физические зависимости.

§ 1.3. Напряжения на наклонных площадках

Разбив объем упругого тела на элементарные параллелепипеды, можно получить некоторое число элементарных объемов, форма которых отлична от параллелепипеда. Это те части, которые примыкают к его поверхности (рис. 1.7). Естественно выразить напряжение на наклонной (косой) площадке через напряжения (1.3) по трем взаимно перпендикулярным площадкам. Эта задача интересна еще и потому, что, как уже указывалось, через точку внутри упругого тела можно провести бесчисленное множество сечений, в каждом из которых можно выделить площадку в окрестности этой точки. Каждой из этих косых площадок будет присуще напряжение своей величины и направления.

Совместим начало координат с рассматриваемой точкой (рис. 1.8). Восставим к интересующей нас площадке (на рис. 1.8 она заштрихована) нормаль N и отметим на ней точку L на бесконечно малом расстоянии $h = OL$. Проведем через точку L плоскость, параллельную нашей площадке. Напряжения на площадке $L_1L_2L_3$ отличаются от напряжений на площадке, связанной с точкой O , лишь на бесконечно малые величины. В пределе, когда $h \rightarrow 0$, обе площадки сольются.

В образованном таким образом тетраэдре $OL_1L_2L_3$ площадь OL_1L_3 обозначим через F_y , площадь OL_2L_3 — F_x , площадь OL_1L_2 — F_z , а площадь $L_1L_2L_3$ — F . Положение в пространстве нормали N опре-

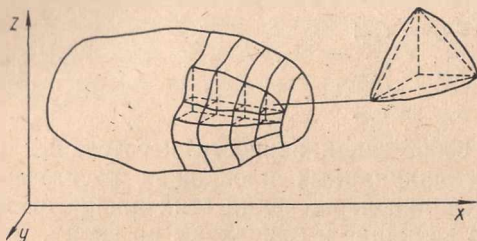


Рис. 1.7

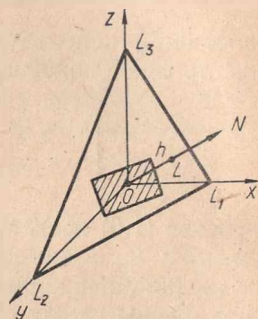


Рис. 1.8

делим направляющими косинусами: $\cos(N, x) = l$, $\cos(N, y) = m$ и $\cos(N, z) = n$.

Разложим полное напряжение, действующее на площадке $L_1L_2L_3$, на составляющие p_{Nx} , p_{Ny} и p_{Nz} (рис. 1.9). Напряжения σ_x , σ_y ,

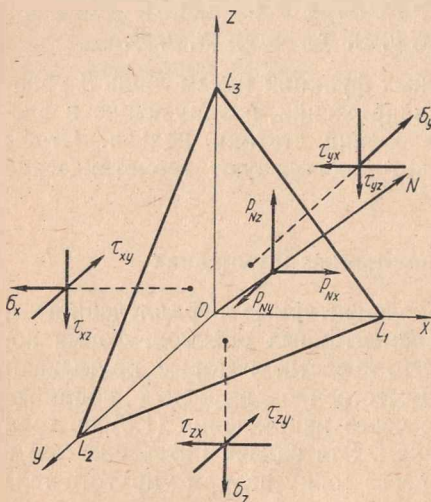


Рис. 1.9

σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} на гранях, лежащих в координатных плоскостях, на рис. 1.9 положительны. В дальнейшем будем полагать их заданными. Ввиду малости площадок F_x , F_y , F_z можно считать, что в их пределах напряжения распределены равномерно.

Реализуем условия равновесия, начав с $\sum p_{px} = 0$. Легко видеть, что $F_x = Fl$; $F_y = Fm$; $F_z = Fn$. В этом случае

$$p_{Nx}F - \sigma_x Fl - \tau_{yx} Fm - \tau_{zx} Fn - \\ - X \frac{Fh}{3} = 0.$$

Напомним, что X в этом уравнении — проекция объемной силы на ось x . Сократив на F и устремив $h \rightarrow 0$, получим

$$p_{Nx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n.$$

Повторив аналогичную процедуру по отношению к осям y и z , можно получить еще 2 подобных уравнения. В результате приходим к трем уравнениям равновесия элементарного тетраэдра:

$$\begin{aligned} p_{Nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; \\ p_{Ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ p_{Nz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Использование трех уравнений равновесия $\sum_{\text{мом}} i = 0$ привело бы к уже полученному закону парности касательных напряжений (1.6). Полное напряжение p_N на наклонной площадке легко определить по его трем проекциям (1.7) при помощи (1.1). Нормальное напряжение σ_N , действующее на наклонной площадке, есть, по сути, проекция на N полного напряжения p_N . В свою очередь p_N как равнодействующая равна сумме проекций составляющих. Поэтому

$$\sigma_N = p_{Nx}l + p_{Ny}m + p_{Nz}n.$$

Используя (1.7), получим

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{xz}ln + 2\tau_{yz}mn. \quad (1.8)$$

Касательное напряжение τ_N при помощи (1.4) можно выразить через p_N и σ_N следующим образом:

$$\tau_N = \sqrt{p_N^2 - \sigma_N^2}. \quad (1.9)$$

Если площадка $L_1L_2L_3$ тетраэдра примыкает к поверхности тела, то p_{Nx} , p_{Ny} , p_{Nz} — проекции внешних сил (они считаются известными), действующих на поверхности тела. Уравнения (1.7) будут условиями в напряжениях на поверхности тела, которые связывают внешнюю нагрузку p_{Nx} , p_{Ny} , p_{Nz} с напряжениями σ_i и τ_{ij} ($i, j = x, y, z$). Напряжения во всех точках упругого тела, являющиеся в общем случае функциями всех трех переменных x, y, z , должны удовлетворять уравнениям равновесия (1.5) и уравнениям на поверхности (1.7). При выполнении этих условий тело находится в равновесии.

§ 1.4. Преобразование компонентов напряжения к новым осям

Как уже отмечалось, напряженное состояние в точке определяется шестью компонентами напряжений: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} . Выбор той или иной системы координат в достаточной степени произволен, и поэтому естествен вопрос, что же произойдет, если триаду x, y, z заменить триадой x', y', z' (рис. 1.10). Очевидно, что напряженное состояние на той же площадке определится опять-таки с помощью шести компонентов напряжений: $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\sigma_{z'}$, $\tau_{x'y'}$, $\tau_{x'z'}$, $\tau_{y'z'}$, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, соотнесенных с новыми координатными осями. Установим зависимость между напряжениями в системе x, y, z и в системе x', y', z' , считая первые известными (значения направляющих косинусов углов наклона осей x', y', z' к осям x, y, z приведены в табл. 1).

Таблица 1

Оси	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Совместим ось x' с нормалью N (рис. 1.11). Тогда оси y' и z' будут лежать в плоскости $L_1L_2L_3$. Напряжение p_N (p_{Nx} , p_{Ny} , p_{Nz}) спроектируем на нормаль к площадке и получим полное нормальное напряжение σ_N . Вследствие того что ось x' совмещена с нормалью

N , $\sigma_N = \sigma_{x'}$. Напомним, что проекция вектора равна сумме проекции его составляющих, и поэтому

$$\sigma_N = \sigma_{x'} = p_{Nx} \cos(x', x) + p_{Ny} \cos(x', y) + p_{Nz} \cos(x', z),$$

или

$$\sigma_{x'} = p_{Nx} l_1 + p_{Ny} m_1 + p_{Nz} n_1. \quad (1.10)$$

Очевидно, что в формулах для p_{Ni} (1.7) направляющие косинусы l, m, n можно соответственно заменить на l_1, m_1, n_1 .

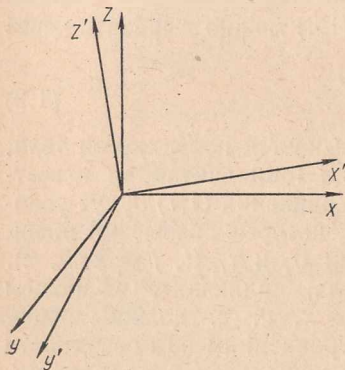


Рис. 1.10

Таким образом,

$$\begin{aligned} p_{Nx} &= \sigma_x l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1; \\ p_{Ny} &= \tau_{xy} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{zy} n_1; \\ p_{Nz} &= \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + \sigma_z n_1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подставив (1.11) в (1.10), получим выражение для $\sigma_{x'}$. Аналогично можно получить выражения для $\sigma_{y'}$ и $\sigma_{z'}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{xz} l_1 n_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1; \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 + 2\tau_{xz} l_2 n_2 + \\ &\quad + 2\tau_{yz} m_2 n_2; \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\sigma_{z'} = \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 + 2\tau_{xz} l_3 n_3 + 2\tau_{yz} m_3 n_3.$$

Спроектируем p_N на ось Oy' :

$$\tau_{x'y'} = \tau_{x'y'} = p_{Nx} \cos(x, y') + p_{Ny} \cos(y, y') + p_{Nz} \cos(z, y'),$$

или

$$\tau_{x'y'} = p_{Nx} l_2 + p_{Ny} m_2 + p_{Nz} n_2. \quad (1.13)$$

Подставим выражение (1.11) в (1.13). Повторив ту же операцию для $\tau_{Nx'}$ и $\tau_{Nz'}$, получим

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ &\quad + \tau_{xz} (l_1 n_2 + l_2 n_1) + \tau_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{x'z'} &= \tau_{z'x'} = \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xy} (l_1 m_3 + l_3 m_1) + \\ &+ \tau_{xz} (l_1 n_3 + l_3 n_1) + \tau_{yz} (m_1 n_3 + m_3 n_1); \\ \tau_{y'z'} &= \tau_{z'y'} = \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (m_2 l_3 + m_3 l_2) + \\ &+ \tau_{xz} (l_2 n_3 + l_3 n_2) + \tau_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2).\end{aligned}\quad (1.14)$$

Поскольку наше преобразование координат ортогональное, то справедливы известные зависимости аналитической геометрии:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 l_i^2 &= 1; \quad \sum_{i=1}^3 m_i^2 = 1; \quad \sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1; \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1 \quad (i = 1, 2, 3); \\ \sum_{i=1}^3 l_i m_i &= 0; \quad \sum_{i=1}^3 l_i n_i = 0; \quad \sum_{i=1}^3 m_i n_i = 0.\end{aligned}\quad (1.15)$$

С учетом этих зависимостей из (1.12) следует, что

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'},$$

т. е. сумма нормальных напряжений не зависит от ортогонального преобразования координат. В случае, когда некоторая величина остается неизменной при преобразовании координат, говорят, что она инвариантна относительно этого преобразования (подробнее об инвариантных величинах см. в § 1.5). Полученные уравнения (1.12) устанавливают зависимость между компонентами напряженного состояния при переходе от первоначально принятой системы координат к повернутой. Напряженное состояние в точке не зависит от выбранной системы координат.

Здесь уместно отметить, что существует специальный раздел математики — тензорный анализ, который занимается изучением абстрактных объектов, называемых *тензорами*. Свойства тензоров не зависят от координатных систем, связанных с описанием этих объектов.

Понятие «тензор» является обобщением понятия вектора и его частного случая — скаляра. Для описания скаляра требуется лишь одно число; для определения вектора необходимы в общем случае уже 3 числа — 3 компонента. *Компонентами* называют функции (числа), которые в принятой системе координат полностью определяют исследуемую величину. Для описания более сложных объектов, чем вектор, трех чисел уже недостаточно, приходится использовать 9 и более чисел. Так, напряженное состояние в точке полностью определяется, как уже отмечалось, девятью напряжениями (1.3). Записанные в виде матрицы

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

они называются *тензором напряжений*. В силу закона парности касательных напряжений (1.6) T_σ — симметричный тензор, так как в нем одинаковые касательные напряжения размещены симметрично относительно главной диагонали. Величины $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ называют *компонентами тензора напряжений*. Структура T_σ имеет

ярко выраженный механический смысл: 1) каждая строка образована из напряжений, действующих в направлении одной из координатных осей; 2) любой столбец содержит напряжения, действующие на площадке с нормалью, параллельной одной из координатных осей. Суммой двух тензоров называется тензор, компоненты которого равны сумме соответствующих компонентов слагаемых тензоров.

В механике сплошной среды принято разлагать тензор напряжений (1.16) на 2 составляющих тензора (рис. 1.12):

$$T_{\sigma} = T_{\sigma_0} + D_{\sigma},$$

где

$$T_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix};$$

$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ — среднее арифметическое нормальных напряжений;

$$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Тензор T_{σ_0} называется шаровым или сферическим. Тензор D_{σ} носит название *девиатора напряжений*. Таким образом, общий случай напряженного состояния разбивается на 2 напряженных состояния.

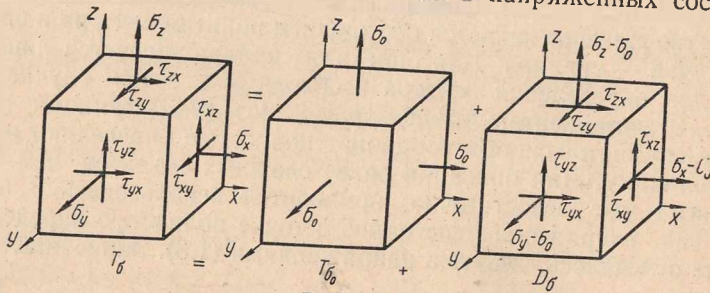


Рис. 1.12

Первое из них характерно одинаковыми нормальными напряжениями σ_0 в разных координатных плоскостях и представляет собой всестороннее (гидростатическое) напряженное состояние, характеризующееся только изменением объема. Второе характеризуется нормальными и касательными напряжениями.

Сумма нормальных напряжений в девиаторе напряжений равна нулю [в этом легко убедиться, сложив диагональные члены в (1.18)]. Поэтому девиатор напряжений можно рассматривать как тензор, ха-

актеризующий касательные напряжения. Физически интерпретировать девиатор напряжений можно как меру отклонения напряженного состояния от всестороннего растяжения или сжатия.

§ 1.5. Главные напряжения

Рассмотрим вопрос о возможности исследования напряженного состояния вне зависимости от выбранной системы координат. С этой целью среди множества площадок, проходящих через некоторую точку другого тела, будем искать те, на которых отсутствуют касательные напряжения. Эти площадки называются *главными*, а напряжения, действующие на них, — *главными напряжениями*. Если такие площадки существуют, то напряженное состояние в окрестности любой точки другого тела можно представить как растяжение в трех взаимно перпендикулярных направлениях, совпадающих с направлением нормалей к главным площадкам. Нормали к главным площадкам образуют прямоугольную систему координат [34], [64]. Эти нормали называются *главными осями*.

Найдем значения главных напряжений и направляющих косинусов, определяющих ориентацию площадки. На главной площадке действует лишь искомое нормальное напряжение σ . Спроецируем его на координатные оси:

$$\begin{aligned} p_{Nx} &= p_N \cos(N, x) = p_N l = \sigma l; \\ p_{Ny} &= p_N \cos(N, y) = p_N m = \sigma m; \\ p_{Nz} &= p_N \cos(N, z) = p_N n = \sigma n. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Сопоставляя (1.19) с (1.7), получим

$$\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ \sigma m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ \sigma n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0; \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n &= 0; \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В этих уравнениях определению подлежат 4 величины: σ, l, m, n . Очевидное тривиальное решение этой системы $l = 0, m = 0, n = 0$ не удовлетворяет условию (1.15) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, и поэтому его следует отбросить. Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, после очевидных преобразований получим

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma^2 + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 -$$

$$-\tau_{yz}^2) \sigma - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + \\ + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz}) = 0. \quad (1)$$

Решив уравнение (1.21), получим 3 корня: σ_1 , σ_2 и σ_3 , которые и главные напряжения. Можно доказать, что все они вещественные. Обычно главные напряжения располагаются следующим образом:

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$,
т. е. σ_1 — алгебраически (с учетом знака) наибольший корень,
 σ_3 — наименьший. Уравнение (1.21) может быть представлено в более компактном виде:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (1)$$

где

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}; \\ I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Главные напряжения σ на заданных площадках не зависят от выбора координатной системы, т. е. независимо от того, в какой системе координат был задан тензор напряжений T_σ , с неизбежностью должно быть получено однозначное решение (1.22). Это возможно тогда и только тогда, когда коэффициенты в (1.22) являются инвариантами, т. е. неизменными величинами, не зависящими от выбора системы координат:

$$I_1 = \text{const}; \quad I_2 = \text{const}; \quad I_3 = \text{const}.$$

Величины I_1 , I_2 и I_3 называются соответственно *первым, вторым, третьим инвариантами тензора напряжений*.

Тензор напряжений можно задать через главные напряжения (касательные напряжения в этом случае равны нулю):

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Такому заданию тензора напряжений присуща большая механическая ясность. Из (1.24) следует, что

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2(T_\sigma) = -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3; \\ I_3(T_\sigma) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Не стоит, однако, думать, что напряженное состояние в главных осях определяется только тремя величинами σ_1 , σ_2 и σ_3 . Для перехода к главным осям необходимо располагать и значениями направляющих косинусов l , m и n . Отсюда следует, что напряженное состояние в наиболее общем случае определяется шестью величинами: в произвольных осях компонентами T_σ , а в главных — главными напряжениями σ_1 , σ_2 и σ_3 и тремя направляющими косинусами главной площадки.

Направление главных напряжений (направляющие косинусы плоскостей, по которым они действуют) можно найти, внося последовательно значения σ_1 , σ_2 и σ_3 вместо σ в уравнения (1.20). Таким образом получим 3 системы уравнений, каждая из которых определяет 3 направляющих косинуса.

В инженерной практике приходится встречаться с различными видами напряженного состояния деталей машин и сооружений. Поэтому небезынтересно провести систематизацию различных видов напряженного состояния, положив в основу величины главных напряжений.

Одноосное (линейное) напряженное состояние существует тогда, когда только одно из главных напряжений (σ_1) отлично от нуля, остальные (σ_2 и σ_3) равны нулю. Линейное напряженное состояние может быть реализовано, если в (1.22) коэффициенты $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$. В этом случае (1.22) значительно упрощается:

$$\sigma^2(\sigma - I_1) = 0. \quad (1.25)$$

Видно, что в (1.25) два корня из трех обращаются в нуль. Подобная ситуация может возникнуть, когда в определителях, входящих в I_2 и I_3 , есть линейно-зависимые столбцы или строки. Такое напряженное состояние возникает при осевом растяжении (сжатии) или изгибе прямой балки.

Плоское напряженное состояние. Если одно из главных напряжений, например σ_3 , равно нулю, имеет место плоское, или двухосное, напряженное состояние. Выберем направление осей x , y , z так, чтобы ось z совпала с главной осью 3. В этом случае

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Вектор напряжений (1.16), его сферический (1.17) и девиаторный (1.18) компоненты тогда имеют вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y) & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) \end{pmatrix};$$

$$T_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) \end{pmatrix}.$$

Плоское напряженное состояние можно определить и по-другому: оно возникает в том случае, когда $I_1 \neq 0$; $I_2 \neq 0$, а $I_3 = 0$. Действительно, из (1.23) непосредственно можно установить, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y; \\ I_2 &= -\sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2; \\ I_3 &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае уравнение (1.22) принимает вид

$$\sigma(\sigma^2 - I_1 \sigma - I_2) = 0.$$

Отсюда

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Эти формулы встречались ранее в курсе сопротивления материалов.

Плоское напряженное состояние возникает в некоторых случаях деформирования пластин, поперечном изгибе прямого бруса и т. п.

Пространственным (объемным, трехмерным) напряженное состояние называется тогда, когда все 3 главных напряжения отличны от нуля. Необходимым условием этого является отличие от нуля третьего инварианта I_3 . Объемное напряженное состояние возникает в роторах турбомашин, в массивных фундаментах, в зоне контакта соприкасающихся тел и т. п., т. е. в массивных телах — телах, у которых все размеры примерно одного порядка.

§ 1.6. Наибольшие касательные напряжения

В предыдущем параграфе было показано, что на главных площадках, которые перпендикулярны к главным осям, касательных напряжений нет. При другой ориентации площадок относительно главных

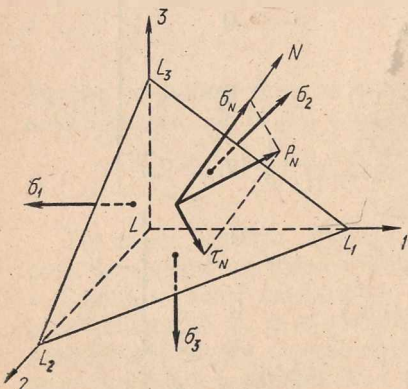


Рис. 1.13

осей касательные напряжения на них уже отличны от нуля. Естествен вопрос, при каком положении площадки касательные напряжения на ней достигнут экстремального значения и чему оно равно.

При решении этой задачи будем считать, что тензор главных напряжений уже известен. Решение выполним в главных осях, поместив их начало в рассматриваемую точку L (рис. 1.13). Направляющие косинусы произвольно наклоненной площадки $L_1 L_2 L_3$ в системе главных осей обозначим l ,

и n . В дальнейших построениях будем исходить из зависимости (1.9):

$$\tau_N^2 = p_N^2 - \sigma_N^2. \quad (1.26)$$

Выразим напряжения, стоящие в правой части (1.26), через главные напряжения. Из (1.1), (1.8) и (1.7) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} p_N^2 &= p_{N1}^2 + p_{N2}^2 + p_{N3}^2; \\ \sigma_N &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2; \\ p_{N1} &= \sigma_1 l; \\ p_{N2} &= \sigma_2 m; \\ p_{N3} &= \sigma_3 n \end{aligned} \quad (1.27)$$

и, как следствие,

$$p_N^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2. \quad (1.28)$$

Подставив (1.28) и (1.27) в (1.26), получим

$$\tau_N^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (1.29)$$

Из (1.29) видно, что τ_N зависит от трех направляющих косинусов:

$$\tau_N = f(l, m, n).$$

Поэтому экстремум τ_N надо искать в зависимости от этих величин. Следует сразу отметить, что направляющие косинусы l , m и n не являются независимыми. Они связаны между собой известным соотношением

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (1.30)$$

Использование этой зависимости позволяет представить τ_N как функцию только двух направляющих косинусов — l и m . Главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 по-прежнему считаем заданными.

Подставив (1.30) в (1.29), после преобразований получим

$$\begin{aligned} \tau_N &= (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 + \sigma_3^2 - \\ &- [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3]^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Следуя процедуре отыскания экстремума функции нескольких независимых переменных, приравняем к нулю первые производные τ_N по l и m , что по приведении даст

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_N}{\partial l} &= 2l(\sigma_1 - \sigma_3)[(1 - 2l^2)(\sigma_1 - \sigma_3) - 2m^2(\sigma_2 - \sigma_3)] = 0; \\ \frac{\partial \tau_N}{\partial m} &= 2m(\sigma_2 - \sigma_3)[(1 - 2m^2)(\sigma_2 - \sigma_3) - 2l^2(\sigma_1 - \sigma_3)] = 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Рассмотрим наиболее общий случай, когда все 3 главных напряжения различны. Как и прежде, полагаем, что

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (1.33)$$

Добавив к (1.32) уравнение (1.30), получим систему для определения расчетных величин. Аналогично получим еще 2 подобные системы. Для этого исключим из (1.29) сначала m , а затем l . Первый результат продифференцируем по n и l , а второй — по m и n и приравняем к нулю все производные. Решение двух последних систем проведем, предварительно подключив к ним условие (1.30).

Неповторяющиеся решения систем сведем в табл. 2, расположив их в столбцах с 1-го по 3-й. Решения, помещенные в 1—3-й строках таблицы, интереса не представляют, так как после подстановки в (1.29)

Таблица 2

Тип площадки	Направляющий косинус площадки			Напряжение, действующее на площадке	
	l^2	m^2	n^2	Касательное	Нормальное
С минимальными касательными напряжениями	1	0	0	0	σ_1
	0	1	0	0	σ_2
	0	0	1	0	σ_3
С максимальными касательными напряжениями	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$	$\sigma_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$	$\sigma_{13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$	$\sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

дают нулевое значение для τ_N . В полученном результате ничего неожиданного нет: направляющие косинусы, значения которых приведены в этих строках, определяют главные площадки, на которых касательные напряжения τ_N и должны быть равны нулю.

В 4-м и 5-м столбцах приведены результаты подстановки направляющих косинусов из 1—3-го столбцов в (1.29) и (1.27). Полученное решение показывает, что наибольшее касательное напряжение в каждом из трех случаев равно полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений и действует по площадке, равнонаклоненной к площадкам, на которых действуют эти главные напряжения. При выполнении условия (1.33) наибольшим среди касательных напряжений, очевидно, будет τ_2 .

§ 2.1. Понятие о перемещениях.

Зависимости между составляющими деформаций и перемещений

Под влиянием внешних сил, температурных и других полей в точках упругого тела возникают не только напряжения, но и смещения его частиц, в результате чего точки тела перемещаются, а само тело деформируется. Условимся, что упругое тело закреплено, т. е. оно не может перемещаться в пространстве как абсолютно твердое. Чтобы определить деформацию, следует сопоставить положения точек тела до и после деформирования.

При деформировании одни точки перемещаются относительно других и, как следствие, относительно координатных осей, в которых мы рассматриваем тело. *Перемещением* будем называть вектор, начало которого находится в исходном положении некоторой точки до деформации, а конец — в новом положении после деформации. Проекции указанного вектора на оси координат x , y , z называются *компонентами перемещения* или просто *перемещениями* и обозначаются соответственно u , v и w (рис. 2.1).

Компоненты перемещения u , v и w являются функциями координат точки x , y , z :

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \quad \text{и} \quad w = w(x, y, z).$$

Сосредоточим наше внимание только на таких перемещениях, которые не нарушают непрерывность упругого тела, т. е. не вызывают появления трещин. В этом случае можно считать, что функции u , v и w и их частные производные непрерывны.

Выделим около точки L тела бесконечно малый объем в виде параллелепипеда (рис. 2.2). В результате деформации длина ребер этого элемента изменится, а прямые углы между ребрами искажутся. Таким образом, при деформировании элементарного параллелепипеда получим 6 компонентов деформации — 3 линейных и 3 угловых. *Линейная деформация*, или *относительное удлинение*, определяется как предел отношения удлинения элементарного отрезка (ребра параллелепипеда) к его длине до приложения нагрузки, причем эта длина стремится к нулю. *Деформацией сдвига*, или *угловой деформацией*, называется изменение первоначально прямого угла между двумя отрезками прямых (ребер), проходящих через точку L . Если стянуть параллелепипед в точку L , то можно принять, что эти 6 деформаций присущи данной точке.

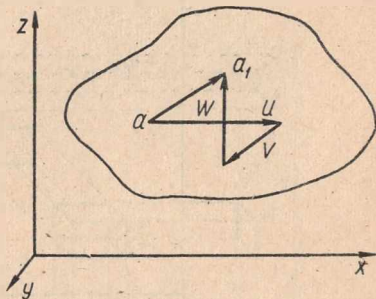


Рис. 2.1

Линейную деформацию обычно обозначают буквой ϵ с индексом, указывающим направление прямой, на которой лежат 2 рассматриваемые точки недеформированного отрезка. Деформацию сдвига — буквой γ с двумя индексами, указывающими направления прямых, на которых до деформации лежат 3 рассматриваемые точки недеформированного угла; измеряют угловые деформации в радианах.

Принято считать ϵ положительным при удлинении по соответствующему направлению и отрицательным — при укорочении. Поло-

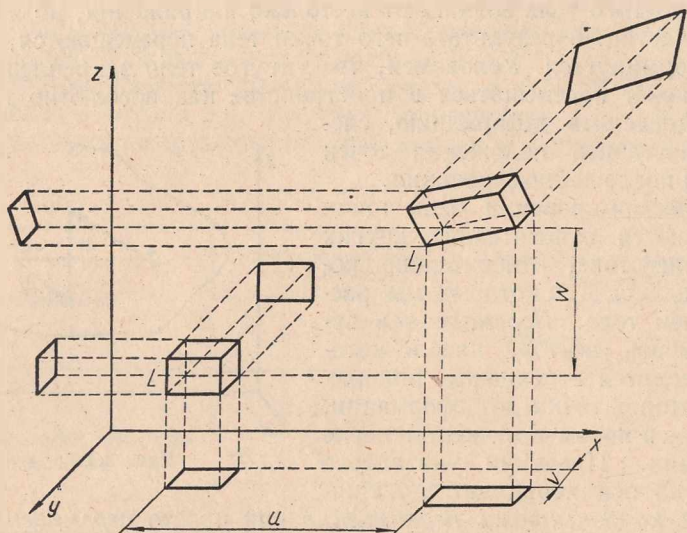


Рис. 2.2

жительной угловой деформации соответствует уменьшение прямого угла между положительными направлениями соответствующих координатных осей, а отрицательной — увеличение того же угла.

Итак, относительные деформации в направлении осей x , y и z обозначаются соответственно через ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z , а углы сдвига по координатным плоскостям — γ_{xy} , γ_{xz} и γ_{yz} .

Будем полагать, что перемещения u , v , w и их производные по x , y , z малы, так что их произведениями и квадратами по сравнению с самими перемещениями можно пренебречь.

Рассмотрим деформацию грани $abdc$ параллелепипеда, которая лежит в плоскости, параллельной плоскости xOz (рис. 2.3). После приложения нагрузки точки $a(x, z)$; $b(x + dx, z)$ и $c(x, z + dz)$ перейдут в новое положение a_1 , b_1 и c_1 .

С учетом гипотезы сплошности на основании (1.4) и соображений, сопутствующих ее выводу, можно записать

$$u_b = u(x + dx, z) = u(x, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Аналогично

$$w_b = w(x + dx, z) = w(x, z) + \frac{\partial w}{\partial x} dx;$$

$$u_c = u(x, z + dz) = u(x, z) + \frac{\partial u}{\partial z} dz;$$

$$w_c = w(x, z + dz) = w(x, z) + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Относительное удлинение в точке a по направлению оси x

$$\epsilon_x = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab}. \quad (2.1)$$

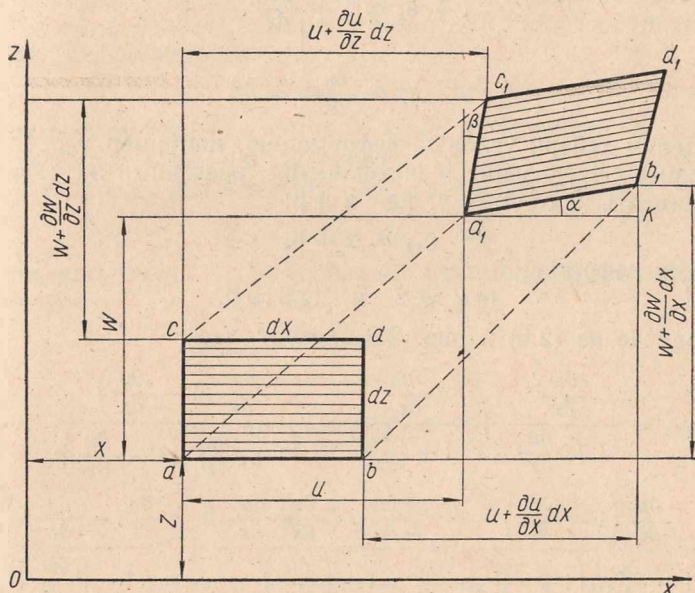


Рис. 2.3

Такое определение относительного удлинения справедливо в том случае, когда отношение, стоящее в правой части (2.1), можно рассматривать как предел при стремлении размера ab к нулю. Из рис. 2.3

$$(a_1 b_1)^2 = (a_1 k)^2 + (b_1 k)^2; \quad (2.2)$$

$$a_1 k = dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right);$$

$$b_1 k = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx - w = \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

С другой стороны, из (2.1) вытекает, что

$$a_1 b_1 = (1 + \epsilon_x) dx \quad (ab = dx).$$

Развертывая выражение (2.2), получим

$$(1 + \epsilon_x)^2 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2,$$

или

$$1 + \epsilon_x = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}. \quad (2.3)$$

Чтобы избавиться от радикала в правой части (2.3), разложим ее в биномиальный ряд. Напомним его вид для нашего случая:

$$\sqrt{1 + \Delta} = 1 + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{8} \Delta^2 + \text{члены высших степеней относительно } \Delta \quad (|\Delta| < 1). \quad (2.4)$$

Обычно в таком разложении оставляют только линейную часть — первые 2 члена. Таким образом,

$$1 + \varepsilon_x = 1 + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Определим теперь угловую деформацию, например γ_{xz} . Учитывая данное ранее определение и обозначения, введенные на рис. 2.3, ее можно записать как сумму углов α и β :

$$\gamma_{xz} = \alpha + \beta. \quad (2.6)$$

Для малых деформаций

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \beta \approx \beta.$$

В этом случае из (2.6) и рис. 2.3 следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1 + \frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)} + \\ &+ \frac{\frac{\partial u}{\partial z} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}}{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z}}{1 - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}. \end{aligned}$$

Пренебрегая в знаменателе и числителе квадратичными членами, получаем

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Очевидно, что если повторить такие рассмотрения для пространственной задачи, то можно прийти к зависимостям, подобным только что полученным. Таким образом,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Уравнения (2.7) впервые получены О. Коши и носят его имя. Подчеркнем здесь, что линейная мера (модель) деформации Коши (отношение нарощенной длины к длине первоначальной) не является единственной. В § 2.7 покажем, что можно сконструировать и другие модели деформации, которые также применяются.

§ 2.2. Исследование деформации в произвольном направлении.

Сдвиг между двумя произвольными направлениями.

Преобразование компонентов деформации при переходе к новым ортогональным осям

Рассмотрим деформацию отрезка AB длиной ds , произвольным образом расположенного внутри упругого тела.

Пусть точка A имеет координаты x, y, z , а B — координаты $x + dx, y + dy, z + dz$. Проекции отрезка AB на оси координат будут dx, dy, dz . До деформации

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.8)$$

После деформации (рис. 2.4) точка A перейдет в положение $A_1(x_1, y_1, z_1)$, а B — в положение $B_1(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1)$. Квадрат длины элемента A_1B_1 после деформации

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2. \quad (2.9)$$

Положение точки A_1 легко можно связать с ее первоначальным положением:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + u(x, y, z); \\ y_1 &= y + v(x, y, z); \\ z_1 &= z + w(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \\ dy_1 &= dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz; \\ dz_1 &= dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Направляющие косинусы углов, составляемых вектором s с осями координат,

$$\begin{aligned} \cos(s, x) &= l = \frac{\partial x}{\partial s}; \\ \cos(s, y) &= m = \frac{\partial y}{\partial s}; \\ \cos(s, z) &= n = \frac{\partial z}{\partial s}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставим соотношения (2.11) в формулу (2.9). После преобразований с учетом (2.8), (2.12) и (2.7) получим

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= (1 + 2\varepsilon_x) dx^2 + (1 + 2\varepsilon_y) dy^2 + (1 + 2\varepsilon_z) dz^2 + \\ &+ 2\gamma_{xy} dx dy + 2\gamma_{xz} dx dz + 2\gamma_{yz} dy dz, \end{aligned}$$

или

$$ds_1^2 = ds^2 [1 + 2(\varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xz} nl + \gamma_{yz} mn)]. \quad (2.13)$$

С другой стороны,

$$A_1B_1 = ds_1 = ds + \Delta(ds) = ds \left[1 + \frac{\Delta(ds)}{ds} \right] = ds(1 + \epsilon_s), \quad (2.14)$$

где ϵ_s — искомая относительная деформация отрезка AB .

Таким образом,

$$ds_1^2 = ds^2(1 + 2\epsilon_s + \epsilon_s^2). \quad (2.15)$$

Приравняв (2.13) и (2.15) и, как ранее, опустив в (2.15) квадрат ϵ_s , получим

$$1 + 2\epsilon_s = 1 + 2(\epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xz} nl + \gamma_{yz} mn),$$

откуда

$$\epsilon_s = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xz} nl + \gamma_{yz} mn. \quad (2.16)$$

Сравнивая выражения (2.16) и (1.8) для относительной деформации ϵ_s и нормального напряжения σ_N , направления которых определя-

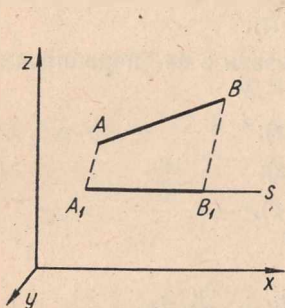


Рис. 2.4

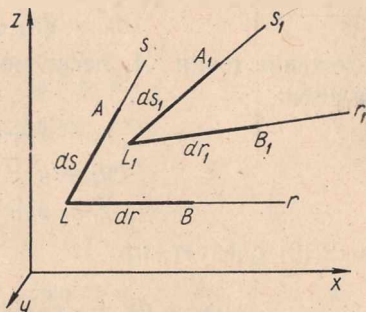


Рис. 2.5

ются одними и теми же косинусами, можно заметить, что они имеют одинаковую конструкцию. Если заменить в (1.8) σ_i и τ_{ij} ($i, j = x, y, z$) на ϵ_i и $\frac{1}{2} \gamma_{ij}$, то оно трансформируется в (2.16). При помощи такой замены можно получить и другие формулы теории деформации из соответствующих формул теории напряжения.

Определим теперь угол сдвига между двумя отрезками, произвольно расположенными в пространстве.

Рассмотрим прямой угол ALB (рис. 2.5), образованный пересечением прямых r и s , который переходит после деформации в угол $A_1L_1B_1$, а отрезки dr, ds — соответственно в dr_1 и ds_1 . Направляющие косинусы для прямых следующие:

$$r - l_1, \quad m_1, \quad n_1;$$

$$s - l_2, \quad m_2, \quad n_2;$$

$$r_1 - l'_1, \quad m'_1, \quad n'_1;$$

$$s_1 - l'_2, \quad m'_2, \quad n'_2.$$

Искомый угол сдвига γ_{rs} , очевидно,

$$\gamma_{rs} = \frac{\pi}{2} - (\widehat{r_1 s_1}).$$

Отсюда следует, что $\sin \gamma_{rs} = \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\widehat{r_1}, \widehat{s_1}) \right] = \cos (\widehat{r_1}, \widehat{s_1})$. Полагая малости угла $\sin \gamma_{rs} = \gamma_{rs}$, получим, что $\gamma_{rs} = \cos (\widehat{r_1}, \widehat{s_1})$. В свою очередь, $\cos (\widehat{r_1}, \widehat{s_1}) = \dot{l}_1 \dot{l}_2 + \dot{m}_1 \dot{m}_2 + \dot{n}_1 \dot{n}_2$. Таким образом,

$$\gamma_{rs} = \dot{l}_1 \dot{l}_2 + \dot{m}_1 \dot{m}_2 + \dot{n}_1 \dot{n}_2 \quad (2.17)$$

и задача сводится к тому, чтобы выразить направляющие косинусы деформированного угла $A_1 L_1 B_1$ через направляющие косинусы угла недеформированного.

По аналогии с (2.14) можно записать

$$dr_1 = dr (1 + \varepsilon_r). \quad (2.18)$$

Получим выражение для направляющего косинуса $\dot{l}_1' = \frac{dx_1}{dr_1}$, используя (2.18) и (2.11):

$$\begin{aligned} \dot{l}_1' &= \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz}{dr (1 + \varepsilon_r)} = \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon_r} \left(\frac{dx}{dr} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dr} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dr} \right). \end{aligned}$$

Но направляющие косинусы

$$l_1 = \frac{dx}{dr}; \quad m_1 = \frac{dy}{dr}; \quad n_1 = \frac{dz}{dr}.$$

Таким образом,

$$\dot{l}_1' = \frac{1}{1 + \varepsilon_r} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) l_1 + \frac{\partial u}{\partial y} m_1 + \frac{\partial u}{\partial z} n_1 \right].$$

Пренебрегая величиной ε_r по сравнению с единицей, запишем окончательное выражение для $\dot{l}_1'$, а также аналогично полученные значения $\dot{m}_1'$, $\dot{n}_1'$, $\dot{l}_2'$, $\dot{m}_2'$, $\dot{n}_2'$:

$$\begin{aligned} \dot{l}_1' &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) l_1 + \frac{\partial u}{\partial y} m_1 + \frac{\partial u}{\partial z} n_1; \\ \dot{m}_1' &= \frac{\partial v}{\partial x} l_1 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) m_1 + \frac{\partial v}{\partial z} n_1; \\ \dot{n}_1' &= \frac{\partial w}{\partial x} l_1 + \frac{\partial w}{\partial y} m_1 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_1; \\ \dot{l}_2' &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) l_2 + \frac{\partial u}{\partial y} m_2 + \frac{\partial u}{\partial z} n_2; \\ \dot{m}_2' &= \frac{\partial v}{\partial x} l_2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) m_2 + \frac{\partial v}{\partial z} n_2; \\ \dot{n}_2' &= \frac{\partial w}{\partial x} l_2 + \frac{\partial w}{\partial y} m_2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.17), можно получить выражение для γ_{rs} , в котором как малые высшего порядка опущены произведения производных:

$$\begin{aligned}\gamma_{rs} = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = & 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} l_1 l_2 + \frac{\partial v}{\partial y} m_1 m_2 + \frac{\partial w}{\partial z} n_1 n_2 \right) + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial y} m_2 + \frac{\partial u}{\partial z} n_2 \right) l_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} m_1 + \frac{\partial u}{\partial z} n_1 \right) l_2 + \\ & + \left(\frac{\partial v}{\partial x} l_2 + \frac{\partial v}{\partial z} n_2 \right) m_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} l_1 + \frac{\partial v}{\partial z} n_1 \right) m_2 + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} l_2 + \frac{\partial w}{\partial y} m_2 \right) n_1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} l_1 + \frac{\partial w}{\partial y} m_1 \right) n_2.\end{aligned}$$

С учетом (2.7) получим

$$\begin{aligned}\gamma_{rs} = & 2(l_1 l_2 e_x + m_1 m_2 e_y + n_1 n_2 e_z) + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \gamma_{xy} + \\ & + (n_1 l_2 + n_2 l_1) \gamma_{xz} + (m_1 n_2 + n_1 m_2) \gamma_{yz}.\end{aligned}\quad (2.20)$$

По формулам (2.16) и (2.20) можно определить удлинения и сдвиги для любых направлений, проходящих через данную точку, если известны компоненты деформаций.

Конструкция полученных результатов такова, что их легко применить к определению деформаций в новой, повернутой ортогональной системе координат.

Рассмотрим две системы прямоугольных осей координат $x y z$ и $x' y' z'$, начала которых совпадают. Направляющие косинусы углов между этими осями приведены в табл. 1. Определим компоненты деформации $\epsilon_{i'}$ и $\gamma_{i'j'}$ ($i', j' = x', y', z'$) в новой системе координат $x' y' z'$ через компоненты деформации в старой, считая последние известными.

Непосредственная подстановка данных табл. 1 в (2.16) и (2.20) приводит к следующим зависимостям:

$$\begin{aligned}\epsilon_{x'} &= \epsilon_x l_1^2 + \epsilon_y m_1^2 + \epsilon_z n_1^2 + \gamma_{xy} l_1 m_1 + \gamma_{xz} l_1 n_1 + \gamma_{yz} m_1 n_1; \\ \epsilon_{y'} &= \epsilon_x l_2^2 + \epsilon_y m_2^2 + \epsilon_z n_2^2 + \gamma_{xy} l_2 m_2 + \gamma_{xz} l_2 n_2 + \gamma_{yz} m_2 n_2; \\ \epsilon_{z'} &= \epsilon_x l_3^2 + \epsilon_y m_3^2 + \epsilon_z n_3^2 + \gamma_{xy} l_3 m_3 + \gamma_{xz} l_3 n_3 + \gamma_{yz} m_3 n_3; \\ \gamma_{x'y'} &= 2\epsilon_x l_1 l_2 + 2\epsilon_y m_1 m_2 + 2\epsilon_z n_1 n_2 + \gamma_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ &+ \gamma_{xz} (n_1 l_2 + n_2 l_1) + \gamma_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1); \\ \gamma_{y'z'} &= 2\epsilon_x l_2 l_3 + 2\epsilon_y m_2 m_3 + 2\epsilon_z n_2 n_3 + \gamma_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \\ &+ \gamma_{xz} (n_2 l_3 + n_3 l_2) + \gamma_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2); \\ \gamma_{x'z'} &= 2\epsilon_x l_1 l_3 + 2\epsilon_y m_1 m_3 + 2\epsilon_z n_1 n_3 + \gamma_{xy} (l_3 m_1 + l_1 m_3) + \\ &+ \gamma_{xz} (n_3 l_1 + n_1 l_3) + \gamma_{yz} (m_3 n_1 + m_1 n_3).\end{aligned}\quad (2.21)$$

§ 2.3. Объемная деформация

Рассмотрим элементарный прямоугольный параллелепипед, имевший до деформации размеры dx, dy, dz . Предполагается, что деформация сдвига отсутствует.

Объем недеформированного параллелепипеда $dV = dxdydz$. После деформации длины ребер параллелепипеда изменятся:

$$dx' = dx + \Delta(dx) = dx \left[1 + \frac{\Delta(dx)}{dx} \right] = dx(1 + \varepsilon_x);$$

$$dy' = dy + \Delta(dy) = dy \left[1 + \frac{\Delta(dy)}{dy} \right] = dy(1 + \varepsilon_y);$$

$$dz' = dz + \Delta(dz) = dz \left[1 + \frac{\Delta(dz)}{dz} \right] = dz(1 + \varepsilon_z).$$

Объем деформированного параллелепипеда тогда

$$dV' = dxdydz(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z).$$

Вычислим относительное изменение объема ϑ :

$$\vartheta = \frac{dV' - dV}{dV},$$

или

$$\vartheta = \frac{dxdydz[\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + 1 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z] - dxdydz}{dxdydz}.$$

Если считать относительные удлинения величинами малыми по сравнению с единицей, то, пренебрегая их произведениями, можно получить выражение для ϑ :

$$\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (2.22)$$

Таким образом, относительная объемная деформация в точке равна сумме относительных удлинений по трем ортогональным направлениям, проведенным через эту точку.

При выводе выражения для относительного изменения объема необязательно рассматривать деформацию элементарного параллелепипеда. К тем же результатам можно прийти, если в качестве элементарного объема принять другой объем, например сферический с радиусом $d\rho$.

Объем шарика до деформации

$$dV = \frac{4}{3} \pi d\rho^3.$$

После деформации шарик превратится в эллипсоид с полуосями

$$(1 + \varepsilon_x)d\rho; \quad (1 + \varepsilon_y)d\rho; \quad (1 + \varepsilon_z)d\rho.$$

Объем эллипсоида после деформации

$$dV' = \frac{4}{3} \pi (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)d\rho^3;$$

$$\vartheta = \frac{dV' - dV}{dV} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

что и было получено в (2.22).

Когда линейные относительные деформации равны нулю, что бывает при малых сдвигах, относительное изменение объема отсутствует. Это характерно, например, для чистого кручения.

§ 2.4. Главные деформации

Точно так же, как это было сделано в предыдущей главе, поставим вопрос о существовании главных осей и соответствующих им деформаций. Отмечавшаяся уже аналогия между уравнениями напряжений деформаций [(1.8) и (2.16)], а также между уравнениями преобразования компонентов напряжений и деформаций при переходе к новым осям [(1.12), (1.14) и (2.21)] позволяет сделать такое предположение. Из этой аналогии следует, что в каждой точке упругого тела, каковы бы ни были деформированное состояние, можно найти 3 взаимно перпендикулярных направления, проходящих через точку таким образом, что между ними все 3 компонента сдвига равны нулю, а линейные деформации имеют экстремальные значения. Направления, соответствующие этим осям, называются *главными направлениями*, а линейные деформации, адекватные им, — *главными деформациями*. Оси эти обычно обозначаются 1, 2, 3, а главные деформации — соответственно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ($\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3$).

Для определения главных деформаций воспользуемся методом нахождения относительного экстремума. Направляющие косинусы l, m и n не являются независимыми; они связаны между собой известным соотношением $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

В соответствии с процедурой Лагранжа умножим правую и левую части уравнения $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, которое будем считать уравнением связи, на неопределенный пока множитель λ и вычтем полученное выражение из (2.16):

$$\varepsilon_s - \lambda = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + lm\gamma_{xy} + nl\gamma_{xz} + mn\gamma_{yz} - \lambda(l^2 + m^2 + n^2)$$

Необходимым условием существования экстремума является равенство нулю частных производных от этого выражения по l, m и n :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (\varepsilon_s - \lambda)}{\partial l} &= 2l(\varepsilon_x - \lambda) + m\gamma_{xy} + n\gamma_{xz} = 0; \\ \frac{\partial (\varepsilon_s - \lambda)}{\partial m} &= l\gamma_{xy} + 2m(\varepsilon_y - \lambda) + n\gamma_{yz} = 0; \\ \frac{\partial (\varepsilon_s - \lambda)}{\partial n} &= l\gamma_{xz} + m\gamma_{yz} + 2n(\varepsilon_z - \lambda) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Система имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \lambda & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \lambda & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель по степеням λ , получим кубическое уравнение

относительно λ :

$$\lambda^3 - \lambda^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda\left(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} - \frac{\gamma_{xz}^2}{4} - \frac{\gamma_{yz}^2}{4}\right) -$$

$$- \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = 0. \quad (2.24)$$

Из шести компонентов деформации (2.7), определяющих деформацию тела в окрестности данной точки, можно составить матрицу, подобную (1.16). Эту матрицу называют *тензором деформаций* T_ε :

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}. \quad (2.25)$$

Из симметрии тензора деформаций следует, что корни (2.24) вещественны. Определив λ_1 , λ_2 и λ_3 из (2.24) и подставив их поочередно в (2.23), с учетом того что $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, можно найти направляющие косинусы для всех трех главнейших деформаций.

Покажем, что корни уравнения (2.24) λ_1 , λ_2 , λ_3 являются искомыми главными деформациями ε_1 , ε_2 , ε_3 .

Действительно, подставим в уравнения (2.23) λ_1 вместо λ и l_1 , m_1 , n_1 вместо l , m , n . Затем умножим 1-е из этих уравнений на l_1 , 2-е — на m_1 , 3-е — на n_1 . Сложим уравнения. После упрощений получим

$$\varepsilon_x l_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \varepsilon_z n_1^2 + \gamma_{xy} m_1 l_1 + \gamma_{xz} n_1 l_1 + \gamma_{yz} n_1 m_1 = \lambda_1 (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2).$$

Сопоставляя полученное выражение с (2.21), можно записать

$$\varepsilon_{x'} = \lambda_1 (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2),$$

или

$$\varepsilon_{x'} = \lambda_1.$$

Итак, относительная деформация λ_1 определяется направляющими косинусами l_1 , m_1 , n_1 . Но это направление, согласно (2.23), и есть направление одной из главных деформаций, а следовательно, λ_1 — одна из главных деформаций — ε_1 . Таким образом, мы доказали, что в любой точке упругого тела существуют 3 взаимно перпендикулярных направления — главные направления, для которых $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Очевидно, что величины главных деформаций не

могут зависеть от выбора координатных осей. Вследствие этого коэффициенты кубического уравнения (2.24) также останутся инвариантными при повороте осей координат.

Приведя координатную систему к совпадению с главными осями, найдем значения этих инвариантов. Они называются соответственно *первым, вторым и третьим инвариантами тензора деформаций* и определяются так:

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{const}; \\ I_2(T_\varepsilon) &= -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_x \varepsilon_z - \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) = \\ &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \text{const}; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{xz}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 - \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}) = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Деформированное состояние в точке в наиболее общем случае характеризуется тензором деформаций. Разложим его подобно тому, как это делалось в гл. 1, на 2 тензора. Первый из них называется *шаровым тензором деформаций* T_{ε_0} :

$$T_{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$, а 2-й — *девиатором деформаций* D_ε :

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$T_\varepsilon = T_{\varepsilon_0} + D_\varepsilon.$$

Выпишем теперь первые 3 инварианта T_{ε_0} и D_ε . Их выражения можно получить, если в (2.26) подставить последовательно компоненты шарового тензора:

$$\begin{aligned} I_1(T_{\varepsilon_0}) &= 3\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \vartheta; \\ I_2(T_{\varepsilon_0}) &= -3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 = -3\vartheta^2; \\ I_3(T_{\varepsilon_0}) &= \frac{1}{27}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^3 = \frac{1}{27}\vartheta^3 \end{aligned}$$

и девиатора деформаций:

$$I_1(D_\varepsilon) = (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + (\varepsilon_y - \varepsilon_0) + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_0 = 0;$$

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right];$$

$$I_3(D_\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{vmatrix}.$$

Шаровой тензор представляет собой объемную деформацию. В этом случае рассматриваемый параллелепипед переходит в геометрически подобную фигуру без изменения формы.

Обратимся теперь к девиатору деформаций. Равенство нулю его 1-го инварианта свидетельствует о том, что ему присущи деформации, при которых отсутствует изменение объема, а происходит изменение формы. При таких деформациях прямоугольный параллелепипед превратится в косоугольный с тем же объемом.

§ 2.5. Уравнения совместности деформаций

Компоненты деформации в упругом теле выражаются через компоненты вектора перемещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ при помощи уравнений Коши. Иными словами, если задано непрерывное поле перемещений, то компоненты тензора деформаций однозначно определяются по формулам (2.7) простым дифференцированием.

Зачастую встречается обратная задача: по заданному непрерывному распределению деформаций нужно определить поле перемещений. Такая задача

разрешима не всегда однозначно. Это объясняется тем, что уравнения (2.7) можно трактовать как 6 линейных дифференциальных уравнений в частных производных для определения трех неизвестных функций. Чтобы эти уравнения были интегрируемы, нужно связать компоненты тензора деформации, которые считаются заданными, некоторыми условиями, называемыми *уравнениями совместности или сплошности*.

Если же компоненты тензора деформаций не будут удовлетворять условиям сплошности, то поле перемещений, определяемое по (2.7), не будет непрерывным. Разрывность перемещений означает нарушение непрерывности (сплошности) среды — основного предположения, принятого при выводе предыдущих и последующих положений. Развивая эту мысль, можно отметить следующее. В наших выводах мы разбивали сплошное тело на элементарные параллелепипеды (рис. 2.6, а), которые в дальнейшем деформировались (рис. 2.6, б). Если все 6 деформаций произвольны, то из деформированных параллелепипедов

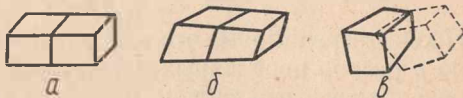


Рис. 2.6

невозможно сложить сплошное непрерывное тело (рис. 2.6, в). Между отдельными параллелепипедами могут быть пустоты или же габариты двух соседних параллелепипедов не совпадут. Если по заданному полю внешних сил, приложенных к упругому телу, сразу определены перемещения, то условия неразрывности выполняются автоматически.

Перейдем к непосредственному выводу уравнений совместности деформаций. Пусть произвольным образом заданы 3 деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. Зная их, можно из уравнений (2.7) однозначно определить перемещения

$$\begin{aligned} u &= \int \epsilon_x dx + F_1(y, z); \\ v &= \int \epsilon_y dy + F_2(x, z); \\ w &= \int \epsilon_z dz + F_3(x, y). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Остальные деформации $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, определяемые уравнениями Коши, не могут быть произвольными. Их значения следует находить из (2.7), подставляя туда перемещения u, v и w из (2.27). После исключения из этих уравнений функций F_i и перемещений получим связь между компонентами деформаций, которая и будет искомыми уравнениями сплошности.

Ход приведенных рассуждений проследим на уравнении

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Подставим сюда u и v из (2.27):

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \int \epsilon_y dy + \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, z) + \frac{\partial}{\partial y} \int \epsilon_x dx + \frac{\partial}{\partial y} F_1(y, z).$$

Продифференцируем это выражение дважды; сначала по x , а затем — по y (выбор переменных, по которым проводится дифференцирование, обусловлен стремлением избавиться в правой части от функций F_1 и F_2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \epsilon_y dy + \frac{\partial^2 F_2(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Подобным же путем можно получить еще 2 аналогичных уравнения (см. далее).

Поступим теперь в некотором смысле обратно тому, что только что делали: перемещения u, v и w определим из γ_{xy}, γ_{xz} и γ_{yz} и подставим их в ϵ_x, ϵ_y и ϵ_z .

Начнем с определения u . Его найдем из 1-го и 2-го уравнений 2-й группы (2.7). Результаты сложим:

$$\begin{aligned} u &= \int \gamma_{xy} dy - \int \frac{\partial v}{\partial x} dy + F_4(x, z) \\ + \\ u &= \int \gamma_{xz} dz - \int \frac{\partial w}{\partial x} dz + F_5(x, y) \\ \hline 2u &= \int \gamma_{xy} dy + \int \gamma_{xz} dz - \int \frac{\partial v}{\partial x} dy - \int \frac{\partial w}{\partial x} dz + F_4(x, z) + F_5(x, y). \end{aligned}$$

Как и ранее, продифференцируем это уравнение по y и z :

$$2 \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \int \gamma_{xz} dz - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial w}{\partial x} dz + \frac{\partial F_5(x, y)}{\partial y};$$

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Чтобы избавиться от перемещений, проведем еще одно дифференцирование — теперь по x :

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right],$$

или окончательно

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right).$$

Повторяя ту же совокупность операций, можно получить еще 2 аналогичных уравнения.

Сгруппируем вместе все 6 уравнений неразрывности деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Уравнения совместности деформаций были впервые получены А. Сен-Венаном и носят его имя.

§ 2.6. Нелинейные меры деформации

Ранее уравнениями (2.7) была введена линейная мера деформации Коши. Однако не следует думать, что она единственная. Любая мера в механике сплошного твердого тела, в том числе и мера деформации, как и в других областях науки, носит условный характер — она избирается. Преимущество отдается тому варианту меры, который удовлетворяет комплексу соображений. Основные требования к выбору варианта меры:

- 1) процесс деформирования описывается ею достаточно близко к действительности;
- 2) применяемый вариант меры позволяет создать теорию, надежно подтверждаемую экспериментом;
- 3) при принятом варианте меры получаются методы расчета, удобные для практического применения.

Было бы неосторожно считать, что классическая мера «абсолютна». Использование материалов, обладающих способностью претерпевать большие деформации без разрушения, привело к созданию иных (неклассических) мер деформации.

Выражение для продольной деформации

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.29)$$

где l_0 — начальная длина деформируемого отрезка; Δl — абсолютное удлинение этого отрезка, применимо тогда, когда ε мало. Однако такому подходу присущи некоторые недостатки. Если нагружение производится по ступеням, причем l_{n-1} и l_n — длины деформируемого отрезка в начале и в конце ступени, то приращение деформации (2.29)

$$\Delta \varepsilon_n = \frac{l_n - l_{n-1}}{l_{n-1}}.$$

Полную деформацию ε_n естественно подсчитать как сумму:

$$\varepsilon_n = \sum_n \Delta \varepsilon_n = \sum_n \frac{l_n - l_{n-1}}{l_{n-1}}. \quad (2.30)$$

Рассмотрение формулы (2.30) позволяет заключить, что она не совпадает с величиной

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

(l — конечная длина отрезка), определенной сразу для всего процесса деформирования. Иными словами, принятое в (2.29) определение деформации не позволяет пользоваться операцией суммирования.

Рассмотрим случай монотонного увеличения деформации, не вводя никаких предположений о сравнительной величине Δl и l_0 . Итак, $l_0 < x < l$; на бесконечно малом участке происходит бесконечно малое удлинение dx . Приращение относительной деформации будет $d\varepsilon' = \frac{dx}{x}$. Полное относительное удлинение естественно определить как интеграл от этой величины:

$$\varepsilon' = \int_{l_0}^l \frac{dx}{x} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right). \quad (2.31)$$

Результат (2.31) отличается от (2.29), и чтобы их сопоставить, разложим (2.31) в ряд:

$$\varepsilon' = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) = \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 + \dots \quad (2.32)$$

Из (2.32) видно, что выражения (2.29) и (2.32) тем ближе, чем меньше $\frac{\Delta l}{l_0}$. Вообще говоря, обе оценки совпадают с точностью до величин 2-го порядка малости.

Если принять (2.31) в качестве меры деформации, то при ступенчатом нагружении суммарная деформация по ступеням будет равна деформации, определенной для всего процесса нагружения.

Действительно, приращение деформации на n -й ступени

$$\Delta \varepsilon'_n = \ln \frac{l_n}{l_{n-1}},$$

полная деформация всего отрезка

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \sum \Delta \varepsilon'_n = \sum_{n=1}^m \ln \frac{l_n}{l_{n-1}} = \ln l_1 - \ln l_0 + \ln l_2 - \ln l_1 + \dots + \ln l - \ln l' = \\ &= \ln l - \ln l_0 = \ln \frac{l}{l_0}, \end{aligned}$$

где l' и l — длины отрезка в начале и конце последней ступени нагружения, а l_0 — начальная длина.

Мера деформации (2.7) или (2.29), как уже указывалось, была предложена О. Коши, а мера (2.31) — Г. Генки. Существуют и другие меры деформации.

Для удобства дальнейшего изложения введем отношение $\lambda = \frac{l}{l_0}$, которое будем называть «кратностью»; l_0 — начальная длина отрезка, l — конечная его длина, $l = l_0 + \Delta l$. Все меры деформации, линейные и нелинейные, можно выразить как функцию от λ . На эту функцию накладывают следующие ограничения:

1. Мера деформации равна нулю, когда $\lambda = 1$, иными словами, деформации нет, когда $l = l_0$.

2. Мера деформации должна совпадать с классической при $\lambda \rightarrow 1$, т. е. при малых деформациях.

Классическая мера деформации Коши зависит от λ наиболее просто:

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} = 1 + \varepsilon,$$

отсюда

$$\varepsilon = \lambda - 1.$$

Различные нелинейные меры деформации были предложены:

Е. Альманси —

$$\varepsilon^A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + \varepsilon)^2 - 1}{(1 + \varepsilon)^2}; \quad (2.33)$$

Г. Генки и независимо от него П. Людвигом и В. Рентгеном —

$$\varepsilon^H = \ln \lambda = \ln (1 + \varepsilon); \quad (2.34)$$

Х. Грином —

$$\varepsilon^G = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) = \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2; \quad (2.35)$$

В. Куном —

$$\varepsilon^K = \frac{1}{3} \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{3} \frac{(1 + \varepsilon)^3 - 1}{1 + \varepsilon}; \quad (2.36)$$

К. Свейнгером, Ф. Кербером —

$$\varepsilon^S = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}. \quad (2.37)$$

Все эти меры деформации, в том числе и классическую, можно получить из обобщающей зависимости, предложенной Б. Сетхом:

$$\lambda = (1 - n\varepsilon)^{-\frac{1}{n}}.$$

В частности, легко видеть, что при $n = -1$ получается классическая мера деформации Коши, при $n = 2$ — Альманси (2.33), при $n \rightarrow 0$ — Генки (2.34), при $n = -2$ — Грина (2.35), при $n = 1$ — Свейнгера — Кербера (2.37).

Меры деформации (2.33) — (2.37) становятся легко сопоставимыми, если их разложить в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \varepsilon^A &= \varepsilon - \frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{4}{2} \varepsilon^3 - \dots; \\ \varepsilon^H &= \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3; \\ \varepsilon^G &= \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2; \\ \varepsilon^K &= \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon^3 - \frac{1}{4} \varepsilon^4; \\ \varepsilon^S &= \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Из этих выражений легко усмотреть, что 1-м членом ряда для всех рассмотренных мер деформации является классическая мера деформации. Это результат выполнения

1-го ограничения, наложенного на λ . При малых ε выполняется и 2-е требование.

Среди приведенных мер деформации мера Свейнгера — Кербера имеет наиболее четко выраженный физический смысл:

$$\varepsilon^S = \frac{l - l_0}{l} = \frac{\Delta l}{l} \quad \left(\text{не } \frac{\Delta l}{l_0} \right)$$

и соответствует экспериментальным способам определения деформаций.

В качестве примера покажем различие между классической мерой деформации и мерой Свейнгера — Кербера:

$$\varepsilon - \varepsilon^S = \frac{l - l_0}{l_0} - \frac{l - l_0}{l} = (l - l_0) \frac{l - l_0}{ll_0} = \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right)^2 \frac{l_0}{l} \leq \varepsilon^2.$$

Если размеры деформированного тела нужно вычислять с точностью до 1%, то деформацию можно считать малой тогда, когда относительное приращение длины между любой парой точек на деформируемом стержне не превосходит 10%. Действительно,

$$\frac{l - l_0}{l} \leq 0,10 \quad \text{и} \quad \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right)^2 \leq 0,01.$$

Глава 3

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

§ 3.1. Основной закон теории упругости

До сих пор мы рассматривали независимо друг от друга напряженное (гл. 1) и деформированное (гл. 2) состояния упругого тела. Результаты, полученные в этих главах, справедливы для всех сплошных сред. Однако теория напряжений, освещающая статическую сторону задачи, и теория деформаций, рассматривающая ее геометрическую сторону, не могут каждая в отдельности решить вопрос о напряженном и деформированном состоянии упругого тела под действием внешних нагрузок. Это объясняется тем, что напряжения и деформации рассматривались изолированно и функциональная зависимость между ними не была определена.

В 1678 г. Р. Гук впервые определенно высказал экспериментально подтвержденный закон, устанавливающий связь между напряжениями и деформациями: «Каково удлинение, такова сила». Этим была установлена пропорциональность между силами и соответствующими им деформациями (свойством упругости). Впоследствии этот закон в обобщенной форме был сформулирован так: компоненты напряжений можно считать линейными функциями компонентов деформаций. Математическое описание этого утверждения в наиболее общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{xz} + a_{16}\gamma_{yz}; \\ \sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{xz} + a_{26}\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{xz} + a_{36}\gamma_{yz}; \\ \tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{xz} + a_{46}\gamma_{yz}; \\ \tau_{xz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{xz} + a_{56}\gamma_{yz}; \\ \tau_{yz} &= a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{xz} + a_{66}\gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Первые попытки теоретически обосновать закон Гука были приняты только в XIX ст. В 1821 г. Л. Навье вывел уравнения, которые связывают силы и деформации, исходя из гипотезы о молекулярных силах взаимодействия. Дж. Грин пришел к уравнениям теории упругости, приняв за основу потенциальную энергию упругого тела.

Линейным характером зависимостей (3.1) определяется ряд физических явлений, например аддитивность деформаций (принцип независимости действия сил), прямолинейные участки на диаграмме $\sigma - \epsilon$ для многих конструкционных материалов и др. [Линейность физического закона обусловлена малыми деформациями. Из нее как следствие вытекают линейная постановка многих задач теории упругости и однозначная взаимозависимость между напряжениями и деформациями.

Величины a_{ij} в (3.1) зависят от свойств материала и называются *упругими постоянными*. Если a_{ij} одинаковы во всех точках тела, то такое тело называется *однородным*. Следует подчеркнуть разницу между однородным и изотропным телами. Рассматриваемое тело соотнесем к определенным образом сориентированной системе координат. Если упругие свойства в любой точке одни и те же по всем направлениям, то такое тело называется изотропным.

Итак, изотропность — свойство, устанавливающее форму зависимости между напряжением и деформацией в данной точке, а однородность утверждает, что, каковы бы ни были эти зависимости, они будут одни и те же во всех точках тела. Если рассматривается изотропное тело, то структура (3.1) значительно упрощается: число упругих постоянных сокращается до трех (E , G , ν), причем независимыми из них будут лишь 2.

§ 3.2. Обобщенный закон Гука для изотропного тела

В предыдущем параграфе были изложены общие соображения о построении физического закона для деформируемого тела. Приступим теперь непосредственно к выводу искомых зависимостей между напряжениями и деформациями. При выводе обобщенного физического закона для упругого тела будем опираться на следующие положения, частично использованные нами и ранее:

1) перемещения, а равно и деформации, малы, поэтому справедливы результаты, полученные в гл. 2, а также принцип независимости действия сил;

2) направления главных напряжений и деформаций совпадают во всех точках рассматриваемого тела;

3) имеет место линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

Р. Гук экспериментально установил физический закон для призматического стержня (одномерная задача):

$$\sigma = E\epsilon.$$

Здесь E — модуль продольной упругости (модуль упругости 1-го рода, модуль Юнга) — константа, присущая каждому материалу и

определяемая из экспериментов на одноосное растяжение или сжатие. Попытки установить опытным путем аналогичные зависимости для плоской и пространственной задач натолкнулись на значительные трудности. Они состоят в том, что в случае двухосного, а тем более трехосного напряженного состояния: 1) трудно осуществить равномерное растяжение или сжатие по двум или трем направлениям; 2) имеется бесчисленное множество комбинаций растягивающих и сжимающих нагрузок, которые могут существовать в реальных конструкциях.

Для изотропного упругого тела, работающего в зоне малых деформаций, выход из такого положения заключается в использовании принципа независимости действия сил. Полная деформация вычисляется суммированием деформаций от приложения нагрузки по направлению каждой из осей.

Рассмотрим элементарный параллелепипед, вырезанный из упругого тела, с гранями, совпадающими с главными площадками. Чтобы исключить в 1-й части рассмотрения влияние на деформацию касательных напряжений (в противном случае пришлось бы делать дополнительные допущения о малости деформаций, вызываемых этими напряжениями), рассмотрим воздействие на параллелепипед только главных напряжений.

Итак, последовательно воздействуем на элементарный параллелепипед в направлениях 1, 2, 3 главными напряжениями σ_1 , σ_2 и σ_3 . Рассмотрим 1-е нагружение, которое для определенности будем считать растягивающим. В этом случае

$$\epsilon_1^{(1)} = \frac{\sigma_1}{E}.$$

Здесь верхний индекс указывает номер нагружения. Продольному относительному удлинению $\epsilon_{\text{пр}}$ обычно сопутствует относительное поперечное укорочение $\epsilon_{\text{п}}$, которое можно трактовать как отрицательное поперечное удлинение:

$$\epsilon_{\text{п}} = -\nu \epsilon_{\text{пр}}.$$

Здесь ν безразмерная постоянная, называемая *коэффициентом Пуассона*. Применительно к нашему случаю поперечные относительные деформации $\epsilon_2^{(1)}$ и $\epsilon_3^{(1)}$ можно записать так:

$$\epsilon_2^{(1)} = -\nu \epsilon_1^{(1)} = -\nu \frac{\sigma_1}{E}; \quad \epsilon_3^{(1)} = -\nu \epsilon_1^{(1)} = -\nu \frac{\sigma_1}{E}.$$

При 2-м нагружении

$$\epsilon_2^{(2)} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \epsilon_1^{(2)} = -\nu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \epsilon_3^{(2)} = -\nu \frac{\sigma_2}{E}.$$

При 3-м нагружении

$$\epsilon_3^{(3)} = \frac{\sigma_3}{E}; \quad \epsilon_1^{(3)} = -\nu \frac{\sigma_3}{E}; \quad \epsilon_2^{(3)} = -\nu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Очевидно, полная деформация в 1-м направлении на основании принципа суперпозиции будет равна сумме деформаций в этом направле-

нии, возникающих при всех трех нагружениях:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_1^{(3)} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогично можно получить ε_2 и ε_3 . Соберем результаты для всех ε_i :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\tag{3.2}$$

Эти зависимости называются *уравнениями обобщенного закона Гука*. Они связывают линейные относительные деформации с напряжениями в главных осях.

Разрешим теперь зависимости (3.2) относительно главных напряжений, для чего сначала приведем их к более компактной форме:

$$\varepsilon_k = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_k - \frac{\nu\theta}{1+\nu} \right).\tag{3.3}$$

Здесь $k = 1, 2, 3$, а $\theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Из (3.3) следует, что

$$\sigma_k = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_k + \frac{\theta\nu}{(1+\nu)}.\tag{3.4}$$

Для определения θ сложим между собой (3.2) и, положив $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, получим

$$\theta = \frac{E}{1-2\nu} \theta.\tag{3.5}$$

Подставив (3.5) в (3.4), найдем искомые напряжения:

$$\sigma_k = \lambda\theta + 2G\varepsilon_k,\tag{3.6}$$

$$\left. \begin{aligned}\text{где } \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned} \right\} \text{— коэффициенты Ламе.}$$

Направление главных осей заведомо не известно, поэтому целесообразно преобразовать полученные зависимости (3.2) и (3.6) к определенной ортогональной системе координат, например к декартовой. Для этого понадобятся формулы (1.12), (1.14), (2.21), с помощью которых осуществляется переход от старых осей x, y, z к новым x', y', z' . В нашем случае роль старых осей играют главные оси 1, 2, 3, а новые оси более естественно назвать не x', y', z' , как ранее, а просто x, y, z . С учетом этого выражения (1.12), (1.14), (2.21) можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2;\tag{3.7}$$

$$\tau_{yz} = \sigma_1 l_2 l_3 + \sigma_2 m_2 m_3 + \sigma_3 n_2 n_3;$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2;\tag{3.8}$$

$$\gamma_{yz} = 2(\varepsilon_1 l_2 l_3 + \varepsilon_2 m_2 m_3 + \varepsilon_3 n_2 n_3).$$

Подставим теперь в (3.7) значения главных напряжений из (3.6) (выкладки продемонстрируем лишь для 1-го уравнения, остальные преобразуются подобным же образом):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= l_1^2 \lambda \vartheta + l_1^2 2G \varepsilon_1 + m_1^2 \lambda \vartheta + m_1^2 2G \varepsilon_2 + n_1^2 \lambda \vartheta + n_1^2 2G \varepsilon_3 = \\ &= \lambda \vartheta (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) + 2G (\varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2).\end{aligned}$$

С учетом (3.8) и (1.15) это уравнение можно значительно упростить. Вся система уравнений обобщенного закона Гука, разрешенная относительно напряжений, имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \vartheta + 2G \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \vartheta + 2G \varepsilon_y; & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= \lambda \vartheta + 2G \varepsilon_z; & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Уравнения (3.9) называются *уравнениями обобщенного закона Гука в форме Ламе*. Уравнения (3.9), разрешенные относительно деформаций, приведем, опустив выкладки:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

В отличие от (3.2) здесь относительные деформации и напряжения взяты не в главных осях, а в произвольных x, y, z .

В некоторых случаях обобщенный закон Гука удобнее использовать, придав ему другую форму записи. Обозначим коэффициент при ϑ в (3.5) через k :

$$k = \frac{E}{1 - 2\nu}.$$

Тогда

$$\theta = k \vartheta; \quad \sigma_0 = k \varepsilon_0, \quad (3.11)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Из (3.11) следует, что в окрестности рассматриваемой точки упругого тела существует линейная связь (прямая пропорциональность) между суммой нормальных напряжений и объемной деформацией. Коэффициент пропорциональности k определяет меру сопротивляемости упругого тела объемной деформации и называется *модулем объемной деформации*. Выражение (3.11) называется *законом упругого изменения объема* или *уравнениями обобщенного закона Гука в форме Ламе*. Если принять (3.11) в качестве одного из уравнений обобщенного физического закона, то недостающие 5 нужно выбрать из следующего

набора уравнений:

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma_0) &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\(\sigma_y - \sigma_0) &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}; \\(\sigma_z - \sigma_0) &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Обычно в дополнение к (3.11) берут уравнения правой группы и любые 2 из левой.

§ 3.3. Потенциальная энергия деформаций упругого тела

Под воздействием внешних сил упругое тело деформируется. Это означает, что во всем объеме, занимаемом телом, возникают перемещения его точек. Такого рода перемещения, естественно, присущи и точкам приложения внешних сил. Поэтому силы совершают некоторую работу. Эта работа расходуется на накопление внутренней, потенциальной, энергии, полученной за счет работы внутренних напряжений. Кроме того, работа внешних сил переходит в тепловую энергию, выделяемую в виде свободной теплоты, и в электромагнитную энергию. В пределах упругости доля тепловой и электромагнитной энергий по сравнению с упругой пренебрежимо мала и ею повсеместно пренебрегают. Таким образом, в дальнейшем будем считать, что работа внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию.

Накопленная потенциальная энергия обладает свойством обратимости. Это означает, что по удалении внешней нагрузки потенциальная энергия превращается в работу, которую на этот раз совершают внутренние силы. Внутреннюю, потенциальную, энергию обычно называют *работой деформации*.

В дальнейшем будем считать, что нагрузка прилагается к ненапряженному телу медленно от нуля до своего наибольшего значения. При этом ускорения частиц тела невелики и их кинетической энергией можно пренебречь. В этом случае можно считать, что на любом этапе нагружения зависящая от времени внешняя нагрузка находится в равновесии с внутренними упругими силами.

Чтобы получить выражение потенциальной энергии деформации, выделим из тела элементарный параллелепипед $dx dy dz$, ребра которого ориентированы по главным осям. Напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ можно трактовать как силы, приложенные по граням этого параллелепипеда. Эти силы произведут работу на перемещениях, определяемых деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 . Поскольку мы предположим, что внешнее воздействие в течение периода нагружения T нарастает медленно, на каждом этапе нагружения напряжения, являющиеся функциями координат, будут зависеть еще и от времени t , прошедшего с начала нагружения.

Чтобы не вводить новую единицу, тем более что период нагружения T обычно неизвестен, переходят к относительным координатам — относительному времени. Для этого делят t на некоторую постоянную величину, которая равна номинальному (наибольшему) значению переменной $t: \xi = \frac{t}{T}$. При такой замене ξ будет меняться не от 0

до T , как изменялось t , а от 0 до 1, что значительно удобнее. Вообще говоря, ξ можно в дальнейшем трактовать как некий параметр, меньший единицы. Когда ξ достигает единицы, нагружение завершается. Таким образом, в произвольный момент времени напряжения и линейно с ними связанные деформации будут соответственно равны: $\sigma_1\xi$; $\sigma_2\xi$; $\sigma_3\xi$; $\epsilon_1\xi$; $\epsilon_2\xi$; $\epsilon_3\xi$. Подчеркнем, что здесь σ_i и ϵ_i — окончательные значения главных напряжений и деформаций в конце процесса приложения внешнего воздействия.

Вычислим работу сил, действующих по граням элемента. В произвольный момент времени ξ на поверхности элемента действуют силы $\sigma_1\xi dydz$, $\sigma_2\xi dxdz$ и $\sigma_3\xi dxdy$. Дадим приращение времени $d\xi$. Это вызовет изменение рассматриваемой системы сил. Теперь силы на гранях параллелепипеда будут $\sigma_1(\xi + d\xi)dydz$, $\sigma_2(\xi + d\xi)dxdz$ и $\sigma_3(\xi + d\xi)dxdy$. За время $d\xi$ перемещения получают приращения $\epsilon_1dxd\xi$, $\epsilon_2dyd\xi$, $\epsilon_3dzd\xi$, а силы произведут работу

$$dV = \sigma_1(\xi + d\xi) dydz \cdot \epsilon_1dxd\xi + \sigma_2(\xi + d\xi) dxdz \cdot \epsilon_2dyd\xi + + \sigma_3(\xi + d\xi) dxdy \cdot \epsilon_3dzd\xi.$$

Откроем скобки и опустим $(d\xi)^2$ как величину высшего порядка малости. В этом случае

$$dV = (\sigma_1\epsilon_1 + \sigma_2\epsilon_2 + \sigma_3\epsilon_3) dxdydz \cdot \xi d\xi.$$

Проинтегрируем это выражение по ξ в пределах от 0 до 1:

$$V = \frac{1}{2} (\sigma_1\epsilon_1 + \sigma_2\epsilon_2 + \sigma_3\epsilon_3) dxdydz.$$

Если отнесем потенциальную энергию V к единице объема, то получим *удельную потенциальную энергию*, или, короче, *удельную энергию*:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_1\epsilon_1 + \sigma_2\epsilon_2 + \sigma_3\epsilon_3).$$

Используя обобщенный закон Гука (3.2), получим

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)],$$

или

$$W = \frac{1}{2E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1 + \nu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)].$$

Выражения в круглых скобках есть не что иное, как 1-й и 2-й инварианты тензора напряжений. Таким образом,

$$W = \frac{1}{2E} [I_1^2 - (1 + \nu) I_2].$$

Перейдем от главных напряжений к осевым составляющим напряжений:

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)] + + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2). \quad (3.13)$$

Выражению для W (3.13) можно придать следующие эквивалентные формы:

$$W = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)] \quad (3.14)$$

и самую очевидную — билинейную:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}). \quad (3.15)$$

Удельная потенциальная энергия W может быть выражена и через деформации. Для этого в (3.15) следует подставить (3.9), что по приведении дает

$$W = \frac{1}{2} \lambda \vartheta^2 + G (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} G (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2). \quad (3.16)$$

Всегда положительные квадратичные формы (3.13) — (3.16) называют *потенциалом упругих сил единичного объема*. Введение такого термина правомочно, так как ранее мы предположили, что работа упругих сил целиком переходит в потенциальную энергию, аккумулируемую упругим телом при его деформировании и отдаваемую им при противоположном ходе процесса.

Продифференцируем выражение потенциала (3.16) по составляющим тензора деформаций. В результате

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\varepsilon, \gamma)}{\partial \varepsilon_x} &= \sigma_x; & \frac{\partial W(\cdot)}{\partial \gamma_{xy}} &= \tau_{xy}; \\ \frac{\partial W(\cdot)}{\partial \varepsilon_y} &= \sigma_y; & \frac{\partial W(\cdot)}{\partial \gamma_{xz}} &= \tau_{xz}; \\ \frac{\partial W(\cdot)}{\partial \varepsilon_z} &= \sigma_z; & \frac{\partial W(\cdot)}{\partial \gamma_{yz}} &= \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Формулы (3.17), впервые полученные Дж. Грином, связывают между собой напряжения и деформации. На этом основании им можно приписать смысл физического закона.

В заключение установим область определения упругой постоянной ν ; формула (3.14) дает такую возможность. Потенциальная энергия деформации — положительная величина. Это следует из того, что запасенная в процессе деформирования тела энергия возвращает его при разгрузке в недеформированное состояние. Очевидно, что ν из (3.14) положительно в том случае, когда

$$\frac{1}{6E} (1 - 2\nu) > 0; \quad \frac{1}{6E} (1 + \nu) > 0. \quad (3.18)$$

Рассматривая совокупность неравенств (3.18) при $E > 0$, легко видеть, что с одной стороны $\nu < \frac{1}{2}$, а с другой — $\nu > -1$. Таким образом,

$$-1 < \nu < 0,5.$$

Итак, теоретические пределы изменения коэффициента Пуассона захватывают и отрицательную область. Однако для всех известных материалов коэффициент Пуассона остается положительным и изменяется в пределах

$$0 < \nu < 0,5.$$

Глава 4

ОБЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 4.1. Основные направления решения задач теории упругости

Уравнения обобщенного физического закона, полученные в предыдущей главе, завершают формирование системы основных уравнений теории упругости. Чтобы решить эту систему, необходимо совместно использовать уравнения равновесия Навье (1.5), уравнения Коши (2.7) и вытекающие из них уравнения совместности деформаций Сен-Венана (2.28), а также уравнения обобщенного физического закона (3.9). Решение, удовлетворяющее системе этих уравнений, должно быть подчинено граничным условиям. Последние могут быть заданы как в напряжениях, так и в перемещениях или же в смешанной форме.

Чтобы рассматривать полученные ранее результаты, сгруппируем их.

1. Уравнения равновесия Навье (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (A)$$

Дифференциальные уравнения (A) связывают между собой касательные и нормальные напряжения, а также эти напряжения с объемными силами.

2. Уравнения Коши (2.7):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (B)$$

Уравнения Коши устанавливают связь между перемещениями и деформациями.

3. Уравнения обобщенного физического закона. Их записывают обычно в одной из следующих форм — (3.10) или (3.9):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \sigma_x &= \lambda\vartheta + 2G\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\vartheta + 2G\varepsilon_y; & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= \lambda\vartheta + 2G\varepsilon_z; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}.\end{aligned}\tag{C'}$$

Здесь $\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$. Уравнения обобщенного физического закона устанавливают линейную алгебраическую связь между напряжениями и деформациями.

Необходимо подчеркнуть, что уравнения (A) — (C) выведены при одном существенном допущении. Уравнения Навье были получены без учета того, что при приложении сил к упругому элементу он неизбежно претерпевает формоизменение и местоположения сил до и после деформации оказываются нетождественными. Строго говоря, точность уравнений равновесия (A) соблюдается только тогда, когда свойства рассматриваемого тела приближаются к свойствам абсолютно твердого тела (отсутствие в последнем деформаций) или в условиях пренебрежимо малых нагрузок. При малых деформациях высказанные опасения о неточности нашего вывода не имеют места. На том же основании нет нужды подчеркивать, что координаты, по которым производится дифференцирование, в уравнениях (A) взяты для состояния, последовавшего за деформацией, а в уравнениях (C) и (C') — для состояния, предвещающего деформацию.

Вернемся к системе (A) — (C) и подсчитаем количество неизвестных функций, входящих в эти уравнения. Легко видеть, что их 15:

6 составляющих тензора напряжений:

$$\sigma_x(x, y, z); \quad \sigma_y(\cdot); \quad \sigma_z(\cdot); \quad \tau_{xy}(\cdot); \quad \tau_{xz}(\cdot); \quad \tau_{yz}(\cdot);$$

3 составляющих вектора перемещений:

$$u(x, y, z); \quad v(\cdot); \quad w(\cdot);$$

6 составляющих тензора деформаций:

$$\varepsilon_x(x, y, z); \quad \varepsilon_y(\cdot); \quad \varepsilon_z(\cdot); \quad \gamma_{xy}(\cdot); \quad \gamma_{xz}(\cdot); \quad \gamma_{yz}(\cdot).$$

Объемные силы обычно считаются заданными. Система дифференциально-алгебраических уравнений (A) — (C) содержит также 15 уравнений. Если используются одновременно все 15 уравнений, не нужны уравнения совместности деформаций Сен-Венана, поскольку они непосредственно вытекают из уравнений (B). Решения всех задач теории упругости находят интегрированием системы линейных дифференциальных уравнений (A) — (C). Линейность этих уравнений определяет ту «простоту», которая присуща классической теории упругости.

Найденные в результате интегрирования 15 функций должны удовлетворять граничным условиям, заданным на контуре тела. Для случая, когда на контуре действуют поверхностные силы, граничные условия можно получить из (1.7). Для этого совместим косую площадку F тетраэдра с поверхностью тела. В этом случае вектор p_N есть не что иное, как вектор внешнего усилия, отнесенный к единичной площади, а его составляющие p_{Nx} , p_{Ny} и p_{Nz} — проекции заданной внешней силы на координатные оси:

$$\begin{aligned} p_{Nx} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{Ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{Nz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (D)$$

Часто встречаются такие задачи, в которых заданы не статические, а кинематические граничные условия, т. е. заданы смещения на контуре тела (u , v и w на поверхности). Такие граничные условия обычно бывают при решении контактных задач — задач о взаимодействии двух и более тел (более подробно о граничных условиях см. § 4.2 и 4.3).

Принято различать 2 основных типа задач теории упругости.

1. Прямая задача. Известны (заданы) все объемные и поверхностные силы X , Y , Z , p_{Nx} , p_{Ny} , p_{Nz} (или смещения на границе). Определяется все поле упругих перемещений, деформаций и напряжений как внутри объема, так и на контуре рассматриваемого тела.

Такая постановка задачи наиболее часто встречается в практике исследователя, работающего в области теории упругости. Из-за своей практической значимости превалирует именно эта задача. Прямая задача теории упругости самая трудная, а подчас и вовсе недоступная. Основная трудность здесь в том, что приходится интегрировать чрезвычайно сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных (A) — (C) и удовлетворять разнообразным, а порой весьма «неприятным» граничным условиям.

2. Обратная задача. Известной (заданной) считается одна из трех систем функций напряжений, перемещений, деформаций или их комбинация; система должна быть справедлива во всем объеме тела. Необходимо найти остальные неизвестные компоненты, в том числе и граничные условия.

Обратная задача возникает при проверке правильности приближенных и сконструированных решений. Эту задачу всегда можно решить, не приходится интегрировать сложную систему дифференциальных уравнений (A) — (C), все сводится к простым математическим операциям. В этом смысле обратная задача не является проблемной. Однако, как отмечал известный исследователь в области теории упругости А. Сен-Венан, «следуя подобным путем, мы, к сожалению, имели бы весьма мало шансов даже после долгих попыток прийти к решениям, представляющим какой-либо интерес».

На задаваемые системы функций накладываются следующие ограничения: 1) деформации (или линейно с ними связанные напряжения) должны удовлетворять условиям совместности деформаций Сен-Ве-

пина; 2) перемещения должны быть непрерывными однозначными функциями.

Как уже отмечалось, при рассмотрении обратной задачи могут иметь место 3 случая задаваемых функций:

1. Заданы перемещения $u(x, y, z)$; $v(\cdot)$; $w(\cdot)$. Это наиболее простой случай. Простым дифференцированием по уравнениям Коши находят деформации, а затем при помощи обобщенного физического закона — напряжения. Уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана здесь всегда выполняются. Поверхностные силы находят при помощи уравнений (D) , а объемные — из уравнений равновесия Навье.

2. Заданы деформации $\epsilon_x(x, y, z)$; $\epsilon_y(\cdot)$; $\epsilon_z(\cdot)$; $\gamma_{xy}(\cdot)$; $\gamma_{xz}(\cdot)$; $\gamma_{yz}(\cdot)$; они должны удовлетворять уравнениям неразрывности деформаций. По уравнениям обобщенного физического закона находят напряжения, а перемещения определяют по уравнениям Коши. Поверхностные и объемные силы определяют так же, как и в 1-м случае.

3. Заданы напряжения $\sigma_x(x, y, z)$; $\sigma_y(\cdot)$; $\sigma_z(\cdot)$; $\tau_{xy}(\cdot)$; $\tau_{xz}(\cdot)$; $\tau_{yz}(\cdot)$. Деформации находят при помощи обобщенного физического закона, а перемещения — из уравнений Коши. Поверхностные и объемные силы определяют так же, как и в 1-м случае.

В практике решения некоторых конкретных задач иногда применяют так называемый *полуобратный метод* Сен-Венана. В нем часть искомых функций задают — предугадывают на основе результатов экспериментов, имеющих уже элементарных решений, решений близких задач, а также на основе качественного анализа исследуемой задачи. Принятые функции должны быть совместны с разрешающими уравнениями $(A) — (C)$, условиями (D) и именно той задачей, которая подлежит решению. Если эту предугаданную часть функций подставить в разрешающую систему, то задача упростится (при одновременном сужении ее общности) за счет уменьшения числа искомых функций. Решая такую упрощенную задачу, доопределяют неизвестную часть решения.

Известный своими основополагающими трудами по теории упругости профессор П. Ф. Папкович писал: «Метод этот (полуобратный метод. — *Авт.*), конечно, несовершенен. Он не дает никакой гарантии того, что мы сумеем, пользуясь им, решить поставленную задачу». Упоминая здесь о полуобратном методе, следует еще раз подчеркнуть, что он ни в коей мере не обладает необходимой общностью и поэтому не может претендовать на роль всеобъемлющего.

Возвратимся к прямой задаче, которая наиболее важна с точки зрения инженерной практики. Отсутствие общего метода решения прямой задачи можно объяснить тем, что современная математика не обладает аналитическим аппаратом, позволяющим получить решение системы уравнений $(A) — (C)$ для произвольно нагруженных упругих тел общего вида. Однако отсутствие общего решения не означает, что теория упругости в своем развитии не достигла существенных успехов. Наоборот, к настоящему времени разработано большое число различных методов решения конкретных, важных для инженерной практики прямых задач и получено еще большее число решений.

Такие частные задачи удается обычно решать за счет уменьшения общности получаемого решения. В некоторых случаях при этом за неизвестные компоненты удобно принимать напряжения, в других — компоненты перемещения. Ту или иную систему неизвестных функций выбирают в зависимости от вида граничных условий.

Систему дифференциальных уравнений (A) — (C) удобнее применять в преобразованной форме, упростив ее в самом общем виде, т. е. вне зависимости от конкретной формы тела и граничных условий, присущих решаемой задаче. Исторически сложились 2 основных пути упрощения. Первый путь (наиболее логичный, но не всегда самый простой) состоит в том, что из системы основных разрешающих уравнений (A) — (C) исключают компоненты напряжений и деформаций и за основные неизвестные принимают $u(x, y, z)$; $v(\cdot)$; $w(\cdot)$. Этот метод называется *решением в перемещениях*. Второй путь — за основные неизвестные принимают шесть составляющих напряжений: $\sigma_x(x, y, z)$; $\sigma_y(\cdot)$; $\sigma_z(\cdot)$; $\tau_{xy}(\cdot)$; $\tau_{xz}(\cdot)$; $\tau_{yz}(\cdot)$. Этот метод называется *решением в напряжениях*. Более подробно оба метода рассмотрены в последующих параграфах.

Можно было бы попытаться создать 3-й путь и исключить из уравнений (A) — (C) компоненты перемещений и напряжений. Тогда в системе фигурировали бы только компоненты оставшихся шести из 15 относительных деформаций: ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{xz} и γ_{yz} . Попытка наверняка увенчалась бы успехом, и такую систему без больших затруднений можно было бы получить. Однако этот подход к решению не имеет никаких преимуществ перед двумя уже приведенными. Поэтому решение в деформациях обсуждать не станем.

Очевидно, что теоретически возможен и случай, когда за основные неизвестные принимают некоторые составляющие как напряжения, так и перемещения. Легко представить себе то огромное количество комбинаций, которые можно получить, по-разному варьируя число основных неизвестных, взятых из компонентов перемещения и напряжения. Такой подход к задаче не нашел широкого применения и рассматриваться в нашем курсе не будет.

В зависимости от вида граничных условий прямые задачи теории упругости делят на следующие:

- 1) первая основная задача — на границе предполагаются известными усилия;
- 2) вторая основная задача — на границе предполагаются известными перемещения;
- 3) смешанная задача — на одной части границы предполагаются известными усилия, а на остальной части — перемещения.

Очевидно, что деление множества прямых задач теории упругости на 3 класса — довольно условная расчетная схема. Математизация реальной конструкции (создание ее математической модели) неизбежно влечет за собой некоторую идеализацию и отказ от многообразия реальных конструкций. Следует отметить, что граничные условия в напряжениях в чистом виде на практике встречаются довольно редко. И, когда говорят о приложенных к телу нагрузках, очень часто за такой формулировкой можно усмотреть замаскированную контактную

задачу — задачу о взаимодействии двух тел — упругого с упругим и упругого с абсолютно жестким (это опять-таки идеализация, справедливая тогда, когда жесткость одного тела значительно превышает жесткость другого). На этом основании можно сделать вывод, что в реальных условиях деформирования приходится использовать решения всех трех основных граничных задач.

В заключение отметим, что во всех рассматриваемых задачах отсутствуют начальные напряжения, т. е. напряжения, действующие в упругом теле и в том случае, когда внешних воздействий нет. В реальных же конструкциях они могут и существовать. Начальные напряжения зависят от предшествующей истории тела. Они могут быть следствием технологической обработки или сборки и, как правило, неизвестны. Поэтому обычно их не рассматривают, считая, что они отсутствуют (здесь опять сталкиваемся с определенной идеализацией при построении расчетной схемы — математической модели). Такое предположение есть не что иное, как принятие гипотезы о естественном ненапряженном состоянии тела (см. Введение), которая утверждает, что при отсутствии деформаций напряжений в теле нет.

§ 4.2. Решение прямой задачи теории упругости в перемещениях

В соответствии с планом, намеченным в предыдущем параграфе, обратимся к решению основной задачи теории упругости и будем решать ее в перемещениях. За неизвестные примем компоненты перемещения $u(x, y, z)$; $v(\cdot)$; $w(\cdot)$. Для определения этих функций нужно иметь 3 уравнения. Наиболее естественно получить их следующим образом.

Выпишем 1-е из уравнений Навье (А):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0. \quad (4.1)$$

Подставим в него уравнения обобщенного физического закона (С'), предварительно выразив относительные деформации через перемещения при помощи уравнений Коши (В):

$$\sigma_x = \lambda \vartheta + 2G\varepsilon_x = \lambda \vartheta + 2G \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

После подстановки получим

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0.$$

Перегруппируем члены этого уравнения:

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + X = 0.$$

Во вторых скобках стоит не что иное, как сумма линейных деформаций, ранее обозначенная через ϑ . Выражение в первых скобках называется *оператором Лапласа* или *лапласианом*. Для него принято следующее обозначение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \nabla^2 u.$$

Функции, удовлетворяющие оператору Лапласа, называются *гармоническими функциями* или *потенциалами Лапласа*.

Эти сокращения позволяют записать уравнение (4.1) так:

$$G\nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + X = 0.$$

Аналогично можно преобразовать и остальные два уравнения Навье (А). Таким образом, получаем систему трех дифференциальных уравнений эллиптического типа с тремя неизвестными функциями u , v и w , которые называются *уравнениями Ламе*:

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + X &= 0; \\ G\nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + Y &= 0; \\ G\nabla^2 w + (\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если объемных сил нет, уравнения Ламе упрощаются:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= 0; \\ \nabla^2 v + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= 0; \\ \nabla^2 w + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Уравнения (4.2) должны выполняться внутри всего объема, занимаемого телом, и в принципе решают прямую задачу теории упругости. После определения перемещений u , v и w легко найти напряжения и деформации. Основным достоинством этой формы решения является то, что в нем содержатся лишь 3 функции, подлежащие определению. Если проследить путь получения уравнений (4.2), то видно, что они аккумулируют в себе: 1) статическую сторону задачи, являясь не чем иным, как преобразованными уравнениями равновесия; 2) геометрические характеристики — перемещения u , v и w ; 3) физические параметры λ (ν , E) и G (ν , E), отражающие упругие свойства тела. Уравнения Ламе, объединяющие в себе все 3 перечисленных аспекта, часто называют *синтезирующими*. При выводе уравнений Ламе были использованы все 15 уравнений, и поэтому уравнения неразрывности деформаций удовлетворяются автоматически.

В том случае, когда объемные силы отсутствуют, точнее, когда ими можно пренебречь или они не зависят от текущих координат,

являясь постоянными, а это означает, что

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \dots = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \quad (4.4)$$

уравнениям Ламе можно придать более компактный вид.

Продифференцируем 1-е из уравнений Ламе по x , 2-е — по y , и 3-е — по z . Сложив результаты, получим

$$GV \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (\lambda + G) \nabla^2 \vartheta = 0,$$

или

$$GV^2 \vartheta + (\lambda + G) \nabla^2 \vartheta = 0,$$

отсюда

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 \vartheta = 0$$

и окончательно

$$\nabla^2 \vartheta = 0. \quad (4.5)$$

Это означает, что при выполнении условия (4.4) относительное объемное расширение является гармонической функцией координат.

Далее поступим так: продифференцируем дважды левую часть 1-го из уравнений Ламе сначала по x , а затем по y и по z и сложим полученные результаты. Иными словами, применим к этому уравнению оператор Лапласа

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \\ GV^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial x^3} &= 0; \\ GV^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial x \partial y^2} &= 0; \\ GV^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial x \partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

Сложив, получим

$$GV^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) = 0,$$

или

$$GV^2 \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \vartheta = 0. \quad (4.6)$$

Второе слагаемое, согласно (4.5), равно нулю, а тогда из (4.6) следует:

$$\nabla^2 \nabla^2 u = 0, \quad \text{или} \quad \nabla^4 u = 0.$$

Точно так же можно установить, что $\nabla^4 v = 0$ и $\nabla^4 w = 0$. Итак, уравнения Ламе в случае, когда выполняются условия (4.4), можно записать так:

$$\nabla^4 u = 0; \quad \nabla^4 v = 0; \quad \nabla^4 w = 0. \quad (4.7)$$

В математике уравнение $\nabla^4 F = 0$ называют *бигармоническим*, а функцию F , ему удовлетворяющую, — соответственно *бигармонической функцией*. Перемещения u, v, w , как это видно из (4.7), являются бигармоническими функциями координат при выполнении ограничений (4.4) на объемные силы.

Для читателя, знакомого с методами расчета статически неопределимых систем, видна параллель, которую можно провести между решением задачи теории упругости в перемещениях и методом перемещений, широко используемым в строительной механике стержневых систем.

Перемещения u, v и w , которые удовлетворяют уравнениям Ламе, должны также удовлетворять и граничным условиям. Наиболее прост случай, когда граничные условия заданы в перемещениях (такие граничные условия чаще всего встречаются при решении контактных задач). В этом случае граничные условия могут быть записаны так:

$$u(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}) = u_{\text{гр}}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}});$$

$$v(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}) = v_{\text{гр}}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}});$$

$$w(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}) = w_{\text{гр}}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}),$$

где u, v и w — решения уравнения Ламе;

$u_{\text{гр}}, v_{\text{гр}}$ и $w_{\text{гр}}$ — заданные перемещения на границе тела (граничные условия);

$x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}$ и $z_{\text{гр}}$ — координаты точек на границе тела.

Если граничные условия заданы в напряжениях, следует в уравнениях (D) напряжения выразить через перемещения:

$$p_{Nx} = \left(\lambda \vartheta + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \right) l + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n,$$

иначе:

$$\begin{aligned} p_{Nx} &= \lambda \vartheta l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + \\ &+ G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right); \\ p_{Ny} &= \lambda \vartheta m + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + \\ &+ G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right); \\ p_{Nz} &= \lambda \vartheta n + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + \\ &+ G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Последние 2 уравнения написаны по аналогии. Уравнения (4.8) можно записать короче, если учесть, что выражение, стоящее в первых скобках, есть не что иное, как производная перемещения по нормали.

Для функции u , например,

$$\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Используя такой вид выражения в скобках, уравнения (4.8) перепишем так:

$$p_{Nx} = \lambda \vartheta l + G \frac{\partial u}{\partial n} + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right);$$

$$p_{Ny} = \lambda \vartheta m + G \frac{\partial v}{\partial n} + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right);$$

$$p_{Nz} = \lambda \vartheta n + G \frac{\partial w}{\partial n} + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right).$$

Получив свои уравнения, Г. Ламе сократил число неизвестных в уравнениях до трех. Однако и в этом случае, как уже отмечалось ранее, общее решение до сих пор не найдено. Попытки получить общее решение, стимулируемые достаточно простым видом уравнений Ламе, предпринимались неоднократно. Но одни трудности сменялись другими, а прямая задача теории упругости не имеет точного решения и поныне. В настоящее время известны несколько общих решений. Их рассмотрение показывает, насколько громоздки и неэффективны общие методы, которые скорее доказывают существование решения, нежели решают прямую задачу теории упругости. Перечень общих решений, которые исчисляются единицами, полученных почти за 150 лет с того времени, как Ламе получил уравнения, приводит к мысли о необходимости применить эффективные приближенные методы (см. ч. II).

§ 4.3. Решение прямой задачи теории упругости в напряжениях

В схеме решения, рассматриваемой в этом параграфе, за основные неизвестные приняты не перемещения, а напряжения. Для получения разрешающих уравнений следует в исходных уравнениях исключить перемещения и деформации. Чтобы определить 6 составляющих напряжения, нужны по меньшей мере 6 уравнений. Три уравнения равновесия (А) содержат только напряжения и поэтому безоговорочно могут быть введены в искомую систему. Уравнения, дополнительные по отношению к группе (А), получим из уравнений совместности Сен-Венана (2.28), предварительно заменив в них деформации на напряжения при помощи обобщенного закона Гука.

В соответствии с намеченным планом, из

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \\ = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Чтобы искомые уравнения, которые мы будем получать из первой группы уравнений неразрывности, не содержали касательных напряжений, исключим τ_{xy} из правой части (4.9). Для достижения этого нам потребуются уравнения равновесия, первое из которых продифференцируем по x , второе — по y , а третье — по z :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial Y}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial Z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Сложим теперь первые 2 уравнения (4.10), а из суммы вычтем 3. В итоге получим

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \quad (4.11)$$

Подставим (4.11) в (4.9):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} &= \\ = (1 + \nu) \left(- \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} &= \\ = (1 + \nu) \left(- \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

Прибавим и вычтем из левой части $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} \right) - \\ - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) &= \\ = (1 + \nu) \left(- \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

Напомним, что

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

С учетом этого сокращения

$$\nabla^2 \sigma_x + \nabla^2 \sigma_y - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \nu \nabla^2 \sigma_z = (1 + \nu) \left(- \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right).$$

Прибавим и вычтем в левой части $\nabla^2 \sigma_z$. Тогда

$$(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \nabla^2 \theta = (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right).$$

Так же получим еще 2 уравнения. Первая группа уравнений совместности Сен-Венана (2.28) с учетом проделанных преобразований запишется так:

$$\begin{aligned}(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \nabla^2 \theta &= (1 + \nu) \left(-\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \nabla^2 \theta &= (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \nabla^2 \theta &= (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (4.12)$$

Упростим уравнения (4.12). Для этого сложим их:

$$(1 + \nu) \nabla^2 \theta + \nabla^2 \theta - 3 \nabla^2 \theta = (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right).$$

Отсюда

$$\nabla^2 \theta = -\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right). \quad (4.13)$$

Заменяя в (4.12) $\nabla^2 \theta$ его значением из (4.13), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_x + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \\= -(1 - \nu)^{-1} \left[(2 - \nu) \frac{\partial X}{\partial x} + \nu \frac{\partial Y}{\partial y} + \nu \frac{\partial Z}{\partial z} \right]; \\ \nabla^2 \sigma_y + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= \\= -(1 - \nu)^{-1} \left[\nu \frac{\partial X}{\partial x} + (2 - \nu) \frac{\partial Y}{\partial y} + \nu \frac{\partial Z}{\partial z} \right]; \\ \nabla^2 \sigma_z + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= \\= -(1 - \nu)^{-1} \left[\nu \frac{\partial X}{\partial x} + \nu \frac{\partial Y}{\partial y} + (2 - \nu) \frac{\partial Z}{\partial z} \right].\end{aligned}\quad (4.14)$$

Обратимся ко 2-й группе уравнений Сен-Венана. Путь наших рассуждений будет идентичен с только что проведенным. Возьмем одно из уравнений этой группы и заменим в нем относительные перемещения напряжениями, используя обобщенный физический закон:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \right) = (1 + \nu) \left(-\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} \right). \quad (4.15)$$

Второе из уравнений (4), разрешенное относительно $\frac{d\tau_{xy}}{dx}$, продифференцируем по z , а 3-е, разрешенное относительно $\frac{d\tau_{xz}}{dx}$, по y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} &= -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.\end{aligned}\quad (4.16)$$

Подставим (4.16) в правую часть (4.15). После преобразований получим

$$\begin{aligned}(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = \\ = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (4.17)$$

Применяя к (4.17) ранее принятые обозначения, легко увидеть, что оно может быть переписано так:

$$\nabla^2 \tau_{yz} + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right). \quad (4.18)$$

Если проделать аналогичные выкладки с остальными уравнениями из 2-й группы (2.28), то всю группу уравнений типа (4.18) можно записать так:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \tau_{xy} + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right); \\ \nabla^2 \tau_{xz} + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} &= - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \tau_{yz} + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} &= - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (4.19)$$

Таким образом, мы получили еще 3 дифференциальных уравнения, выведенных из 2-й группы уравнений совместности Сен-Венана. В том случае, если объемные силы постоянны или отсутствуют (или ими можно пренебречь ввиду их малости по сравнению с внешними силами), уравнения (4.14) и (4.19) значительно упрощаются:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_x + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0; \quad \nabla^2 \tau_{xy} + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = 0; \\ \nabla^2 \sigma_y + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= 0; \quad \nabla^2 \tau_{xz} + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} = 0; \\ \nabla^2 \sigma_z + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0; \quad \nabla^2 \tau_{yz} + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = 0.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Уравнения (4.20), в которых не учитываются объемные силы, впервые получил Е. Бельтрами; его вывод отличался от изложенного. Бельтрами получил эти уравнения из уравнений Ламе (4.3).

Митчелл учел объемные силы. Поэтому уравнения (4.20) носят имя обоих исследователей.

Уравнения (4.20) — основа для решения прямой задачи теории упругости в напряжениях. Принимая во внимание последовательность деформаций, видим, что они удовлетворяют уравнениям совместности деформаций Сен-Венана. Уравнения (4.20) и уравнения равновесия (4) образуют совместную систему дифференциальных уравнений и позволяют найти 6 функций напряжения: $\sigma_x(x, y, z)$; $\sigma_y(\cdot)$; $\sigma_z(\cdot)$; $\tau_{xy}(\cdot)$; $\tau_{xz}(\cdot)$; $\tau_{yz}(\cdot)$. Решению в напряжениях присуща некоторая математическая особенность — число дифференциальных уравнений больше числа неизвестных функций (6).

Очевидно, что полученное решение должно удовлетворять и граничным условиям. Если на границе тела заданы поверхностные силы, то в качестве граничных условий используют уравнения (D). Число граничных условий меньше числа искомых функций. Чтобы выдержать соответствие между ними, уравнения равновесия (A) можно рассматривать как граничные условия.

Легко показать, что компоненты напряжения, как и компоненты вектора перемещения, — бигармонические функции. Это утверждение справедливо лишь в том случае, когда объемные силы постоянны или их вообще нет. Применим к каждому из уравнений Бельтрами — Митчелла (4.20) оператор Лапласа. Проследим это на первом уравнении:

$$\nabla^2 \nabla^2 \sigma_x + (1 + \nu)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \theta = 0. \quad (4.21)$$

Формула (4.5) утверждает: $\nabla^2 \theta = 0$. Напомним, что ϑ и θ связаны линейной зависимостью $\vartheta = (1 - 2\nu) E^{-1} \theta$. Следовательно,

$$\nabla^2 \theta = 0, \quad (4.22)$$

и это значит, что $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ — гармоническая функция.

С учетом (4.22) уравнение (4.21) перейдет в $\nabla^4 \sigma_x = 0$. Проведя аналогичные операции с другими уравнениями Бельтрами — Митчелла, получим систему, решающую задачу теории упругости в напряжениях:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \sigma_x &= 0; & \nabla^4 \tau_{xy} &= 0; \\ \nabla^4 \sigma_y &= 0; & \nabla^4 \tau_{xz} &= 0; \\ \nabla^4 \sigma_z &= 0; & \nabla^4 \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Уравнения (4.23) и (4.7) показывают, что компоненты перемещения и напряжения — гармонические функции. Линейная комбинация этих функций — также функция гармоническая. На основании обобщенного физического закона можно утверждать, что и компоненты деформации — также гармонические функции.

После того как найдены напряжения, при помощи обобщенного физического закона определяют деформации, а затем — перемещения.

Общего метода решения уравнений Бельтрами — Митчелла не существует. Попытки решить эту задачу в общем виде, как и попытки решить уравнения Ламе, успехом не увенчались. Однако частные решения для конкретных тел и нагрузок имеются.

Для уравнений Бельтрами — Митчелла, как и для уравнений Ламе, можно провести параллель с методами строительной механики стержневых систем. В этом случае уравнения (4.20) уместно идентифицировать с методом сил.

§ 4.4. Единственность решения задач теории упругости

Решение задачи теории упругости (как в перемещениях, так и в напряжениях) представляет собой решение граничной задачи. Для его определения следует проинтегрировать разрешающую систему дифференциальных уравнений и удовлетворить граничным условиям. При этом может возникнуть вопрос, единственное ли оно, не соответствуют ли одному и тому же внешнему воздействию два или несколько напряженно-деформированных состояний. На этот вопрос отвечает теорема единственности, которая утверждает, что при заданных граничных условиях, т. е. при заданной системе внешних воздействий (будь то нагрузки, перемещения или те и другие), в упругом теле, находящемся в естественном состоянии, возникает одно и только одно определенное напряженно-деформированное состояние, и обратно: данному напряженно-деформированному состоянию отвечает только одна система внешних воздействий. Эта теорема применима лишь к линейным задачам теории упругости, для которых справедлив принцип суперпозиции (наложения) и предположения о малости упругих формоизменений. Теорема единственности впервые была установлена Г. Кирхгофом.

При дальнейшем изложении будем использовать принцип суперпозиции: результат суммарного внешнего воздействия нескольких групп силовых факторов равен алгебраической сумме соответствующих результатов, вызванных раздельным действием этих групп.

Доказательство теоремы единственности (ее еще называют свойством однозначности решения задач теории упругости) можно провести от противного. Предположим сначала, что под действием заданных поверхностных p_{Nx} , p_{Ny} , p_{Nz} и объемных X , Y , Z сил возможны две различные системы напряжений:

$$\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*, \tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*, \tau_{yz}^*$$

и

$$\sigma_x^{**}, \sigma_y^{**}, \sigma_z^{**}, \tau_{xy}^{**}, \tau_{xz}^{**}, \tau_{yz}^{**}.$$

Каждая из этих систем должна удовлетворять уравнениям равновесия (A) и граничным условиям (D).

В случае равновесия для 1-й системы справедливы следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} + Y &= 0; \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + Z &= 0; \\
p_{Nx} &= \sigma_x^* l + \tau_{xy}^* m + \tau_{xz}^* n; \\
p_{Ny} &= \tau_{xy}^* l + \sigma_y^* m + \tau_{yz}^* n; \\
p_{Nz} &= \tau_{xz}^* l + \tau_{yz}^* m + \sigma_z^* n,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

а для второй системы — зависимости

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{**}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{**}}{\partial z} + X &= 0; \\
\frac{\partial \tau_{xy}^{**}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{**}}{\partial z} + Y &= 0; \\
\frac{\partial \tau_{xz}^{**}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{**}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + Z &= 0; \\
p_{Nx} &= \sigma_x^{**} l + \tau_{xy}^{**} m + \tau_{xz}^{**} n; \\
p_{Ny} &= \tau_{xy}^{**} l + \sigma_y^{**} m + \tau_{yz}^{**} n; \\
p_{Nz} &= \tau_{xz}^{**} l + \tau_{yz}^{**} m + \sigma_z^{**} n.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Вычтем соответственно систему (4.26) из (4.24), а (4.27) из (4.25):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x^* - \sigma_x^{**}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}^* - \tau_{xy}^{**}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}^* - \tau_{xz}^{**}) &= 0; \\
\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}^* - \tau_{xy}^{**}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y^* - \sigma_y^{**}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz}^* - \tau_{yz}^{**}) &= 0; \\
\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz}^* - \tau_{xz}^{**}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yz}^* - \tau_{yz}^{**}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z^* - \sigma_z^{**}) &= 0; \\
(\sigma_x^* - \sigma_x^{**}) l + (\tau_{xy}^* - \tau_{xy}^{**}) m + (\tau_{xz}^* - \tau_{xz}^{**}) n &= 0; \\
(\tau_{xy}^* - \tau_{xy}^{**}) l + (\sigma_y^* - \sigma_y^{**}) m + (\tau_{yz}^* - \tau_{yz}^{**}) n &= 0; \\
(\tau_{xz}^* - \tau_{xz}^{**}) l + (\tau_{yz}^* - \tau_{yz}^{**}) m + (\sigma_z^* - \sigma_z^{**}) n &= 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Если обозначить

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= \sigma_x^* - \sigma_x^{**}; \quad \bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}^* - \tau_{xy}^{**}; \\
\bar{\sigma}_y &= \sigma_y^* - \sigma_y^{**}; \quad \bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz}^* - \tau_{xz}^{**}; \\
\bar{\sigma}_z &= \sigma_z^* - \sigma_z^{**}; \quad \bar{\tau}_{yz} = \tau_{yz}^* - \tau_{yz}^{**},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

то станет ясно, что «новые» напряжения (отмеченные сверху чертой) — не что иное, как новая система напряжений, полученных на основе принципа наложения. В этом случае, как видно из (4.29) и (4.30), новая система напряжений возникает в отсутствии поверхностных и объемных сил. Для тела, находящегося в естественном состоянии, уравнения (4.28) и (4.29) могут удовлетвориться лишь в том случае, когда $\bar{\sigma}_x = 0$; $\bar{\sigma}_y = 0$; $\bar{\sigma}_z = 0$; $\bar{\tau}_{xy} = 0$; $\bar{\tau}_{xz} = 0$; $\bar{\tau}_{yz} = 0$, а это

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \sigma_x^{**}; & \tau_{xy}^* &= \tau_{xy}^{**}; \\ \sigma_y^* &= \sigma_y^{**}; & \tau_{xz}^* &= \tau_{xz}^{**}; \\ \sigma_z^* &= \sigma_z^{**}; & \tau_{yz}^* &= \tau_{yz}^{**}.\end{aligned}$$

Таким образом, оба напряженных состояния (*) и (**) совпали, что опровергает ранее сделанное предположение об их различии. Теорема единственности не выполняется, когда нарушаются основные предпосылки, принятые при ее выводе: о естественном напряженном состоянии тела, о справедливости принципа суперпозиции, о малости деформаций.

В заключение следует сказать, что из-за громоздкости изложения на вопросе о самом существовании решения мы не останавливались. Отметим только, что доказательство существования решения дали А. Корн и Л. Лихтенштейн.

§ 4.5. Принцип Сен-Венана

Трудности, возникающие при решении задач теории упругости, достаточно известны. Это они обусловили тот факт, что и до настоящего времени не получены решения основных разрешающих уравнений при обобщенных граничных условиях. Поэтому для каждой частной задачи формулируются соответствующие ей конкретные граничные условия. Но выполнение даже таких условий часто ставило перед исследователями задачу, решение которой лежало вне пределов их возможностей. Затруднения, связанные с точным выполнением граничных условий, оказались настолько значительными, что с ними не смогли справиться и такие великие математики, как О. Коши и С. Пуассон.

Откликаясь на запросы практики и видя невозможность точно удовлетворить граничным условиям, А. Сен-Венан встал на путь приближенного решения задачи. Для обоснования интегрального выполнения условий на границе А. Сен-Венан сформулировал принцип статической эквивалентности нагрузок, который носит теперь его имя. (В дальнейшем вместо «принцип Сен-Венана» будем писать сокращенно — п. С.-В.).

В настоящее время нет строгого всеобщего доказательства п. С.-В., хотя такие попытки предпринимали ряд авторов: Р. Саусвелл, О. Занабони, П. Локателли, Р. Мизес, В. Шуман и др. Но их доказательства не могут претендовать на исчерпывающую полноту. Такой повышенный интерес к п. С.-В. объясняется тем, что в настоящее время, по-видимому, ни одна реальная задача не решается без ссылок в том или ином виде на п. С.-В.

Современная формулировка п. С.-В. звучит так: если воздействие системы сил P_1 на локальную поверхность упругого тела заменить воздействием статически эквивалентной системы сил P_2 (статически эквивалентные системы — системы, имеющие одинаковые главный вектор и главный момент), то напряженное (σ_1) и деформированное (ϵ_1) состояние, обусловленное воздействием системы P_1 , тем меньше отличается от напряженного (σ_2) и деформированного состояния (ϵ_2) под действием системы P_2 , чем дальше отдалиться от места приложения нагрузок. Очень часто эту формулировку заменяют другой: если на малую площадку действует система сил, статически равнозначная нулю, то напряжения и деформации быстро убывают по мере удаления от этой площадки. Во многих случаях это убывание носит экспоненциальный характер. Под «малой площадкой» будем понимать такую площадку, размеры которой малы по сравнению с общей поверхностью тела, или, более строго: размеры малой площадки не должны превышать наибольшее расстояние между точками приложения системы внешних сил.

Второе определение п. С.-В. образуется из первого на основании принципа наложения, потому что уравновешенную силовую систему можно трактовать как разность двух систем с одинаковыми результирующими. Из второго определения сле-

дует, что равновесная система сил вызывает только местные напряжения, а поэтому к местным напряжениям п. С.-В. неприменим. Это в первую очередь присуще контактными задачам, задачам об определении напряжений в зоне жестких шайб, вставок и т. п.

В литературе встречается и другой подход к упругому телу, которое на небольшом участке поверхности нагружено самоуравновешенной системой сил. Считается, что тело является статически неопределимой системой, состоящей из двух элементов, которые вместе сопротивляются силовому воздействию: 1) части тела, расположенной в зоне нагрузки, — местной зоны; 2) остального объема тела (исключая местную зону), который находится на некотором удалении от участка нагружения.

Возвращаясь ко второй формулировке п. С.-В., заметим, что он дает непротиворечивый результат, если область, о которой шла речь, — односвязная и монолитная часть тела, очерченная выпуклой поверхностью. В противном случае п. С.-В. неприменим.

В практических инженерных расчетах граничные условия обычно задаются лишь

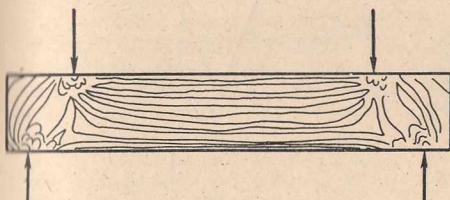


Рис. 4.1

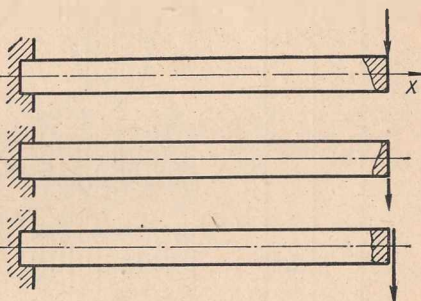


Рис. 4.2

интегрально, информации о распределении усилий, особенно в контактных задачах, нет. Совершенно очевидно, что без использования п. С.-В. такие задачи вообще не подлежали бы решению. На основании же этого принципа исследователю не нужно интересоваться детальным распределением растягивающих сил по торцам стержня при его растяжении или способом задания изгибающего момента при чистом изгибе.

Принцип С.-В., который позволяет при рассмотрении равновесия деформируемого тела заменять, переносить, раскладывать и объединять векторы, создает аналогию между методами, принятыми в статике абсолютно твердого тела, и методами, применяемыми в теории упругости. Одновременно с этим п. С.-В. дает возможность в ряде случаев значительно упростить математическую модель задачи и поэтому снижает сложность применяемого математического аппарата. Использование п. С.-В. придает большую общность частным задачам, так как позволяет переносить их решения на задачи, имеющие близкие граничные условия.

Для перемещений принцип, подобный п. С.-В., не сформулирован, хотя такой подход и применяется при формировании граничных условий некоторых частных задач. Например, при закреплении части поверхности упругого тела полагают, что все точки в зоне закрепления неподвижны.

Приведем несколько примеров, подтверждающих справедливость п. С.-В. в различных случаях. Наиболее наглядными являются картины распределения полос напряжений, полученные методом фотоупругости при чистом изгибе (рис. 4.1). Когда сила, приложенная в сечении $x = l$, меняет свою точку приложения по высоте балки (рис. 4.2), зона местных напряжений (заштрихована) не превышает показанной. При деформировании тел конечных размеров выполнение п. С.-В. зависит от конкретных соотношений этих размеров. В узкой прямоугольной полосе затухание напряжений от сжатия происходит так, как показано на рис. 4.3. В более коротких телах они выравниваются еще медленнее.

В последние годы ряд авторов поставили под сомнение вопрос о правомочности применения п. С.-В. для сильно идеализированных расчетных схем, что обычно бывает в приближенных теориях.

Применение упрощающих гипотез приводит к тому, что полная система уравнений теории упругости не удовлетворяется и закон Гука для некоторых напряжений нарушается. Касательные напряжения, например, определенные по элементарной теории из уравнений равновесия, не соответствуют принимаемому гипотезой плоских

сечений отсутствию сдвигов. Если степень идеализации, принятая на основе упрощающих гипотез, такова, что задачи переходят в класс статически определимых (высокая степень идеализации), то напряженное состояние определяется уравнениями равновесия. При этом нарушаются уравнения неразрывности и принцип минимума потенциальной энергии. Эти нарушения дают основания полагать, что п. С.-В. тоже не будет выполняться.

В действительности для статически определимых систем встречаются случаи как выполнения, так и невыполнения п. С.-В. Все зависит от граничных условий и схемы упругой структуры. Если идеализированная система статически неопределима, уда-

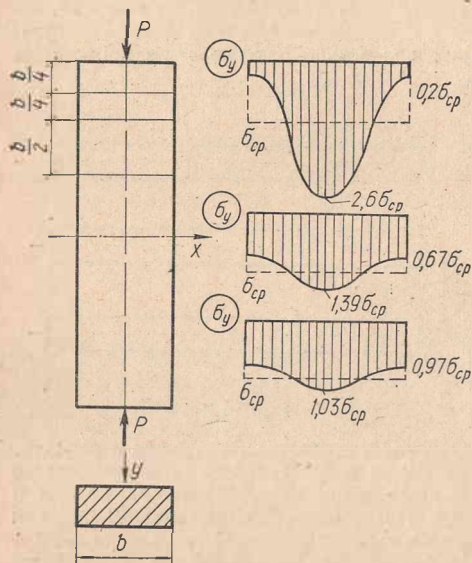


Рис. 4.3

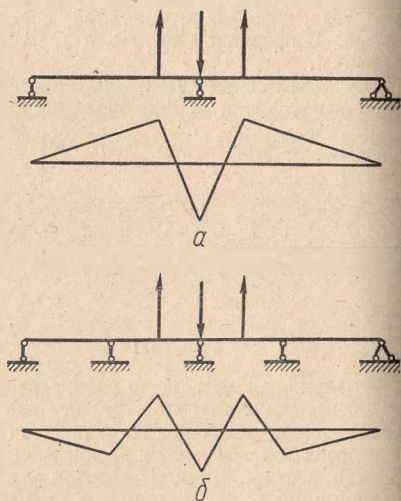


Рис. 4.4

ется выполнить не только уравнения равновесия, но и в какой-то мере уравнения совместности. Это в свою очередь влечет за собой выполнение энергетических теорем и, как следствие, выполнение п. С.-В. Скорость затухания напряжений зависит от того, в какой степени удовлетворяются условия совместности деформаций от действия системы сил, статически равной нулю. С ростом статической неопределимости (рис. 4.4, а, б) эпюры изгибающих моментов уменьшаются в объеме, т. е. по мере удаления от зоны приложения системы самоуравновешенных сил наблюдается затухание.

Если при решении поставленной задачи уйти от чрезмерной идеализации (к сожалению, это немедленно повлечет за собой рост математических трудностей), то п. С.-В. сразу же начнет выполняться.

Расчет тонкостенных конструкций представляет собой тот класс задач, для которых выполнение п. С.-В. нельзя считать безоговорочным. Сравним два растянутых стержня (рис. 4.5). Можно было бы ожидать, что действие неравномерно приложенных усилий затухнет вне зоны порядка размеров поперечного сечения. Такое утверждение справедливо для случая б, но не для а. В случае а зона неравномерности значительно обширнее. Этот эффект можно объяснить малой жесткостью стойки, соединяющей полки. С уменьшением толщины стойки ее жесткость уменьшается и в пределе может стать нулевой. При этом полки будут изгибаться независимо, изгибающий момент распространится на всю их длину и напряжения распределятся неравномерно. Эффект неравномерности прямо зависит от жесткости соединяющей полки.

Ни одним точным решением п. С.-В. не был опровергнут. Однако не следует рассматривать его как нечто само собой разумеющееся. Такие тенденции иногда проскальзывают в учебной литературе. Важность п. С.-В. для инженерной практики очевидна, но в классической формулировке он не дает количественных оценок, а уста-

определяет лишь качественный характер происходящих явлений. В этом виде доказательство п. С.-В. может относиться лишь к факту убывания напряжений и деформаций. Как уже говорилось, всеобъемлющего доказательства п. С.-В. до сих пор нет. В настоящее время есть несколько более или менее полных доказательств. С заключением и концепциями некоторых из них, наиболее емкими в отношении идей, мы познакомим читателя.

Энергетическое доказательство п. С.-В., предложенное Р. Саусвеллом и О. Запиро, утверждает лишь факт убывания напряжений и деформаций. Идея доказательства состоит в следующем: к телу A_1 , нагруженному по участку поверхности системой сил, статически эквивалентной нулю, присоединяется со стороны свободной поверхности первоначально свободное от нагрузки тело A_2 . Доказывается, что у тела $A_1 + A_2$ потенциальная энергия меньше, чем у тела A_1 до присоединения тела A_2 . Продолжая процесс присоединения, приходят к телу $A_1 + A_2 + \dots + A_n$, начальная малая поверхность которого находится под той же самоуравновешенной нагрузкой. Полученные оценки дают возможность установить, что в той части нового тела, которая образовалась в результате присоединения, при достаточно большом n (n — растущее число присоединяемых тел), несмотря на перераспределение энергии, содержится малая часть общей потенциальной энергии деформации тела. Из этого делают вывод, что в интегральном смысле происходит убывание напряжений и деформаций.

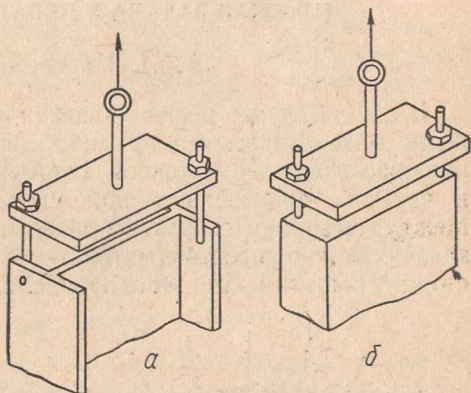


Рис. 4.5

В 1945 г. Р. Мизес вновь обратился к п. С.-В. и указал на необходимость его уточнить. В уточнении нуждались понятие малости напряжений и деформаций, а также те обстоятельства, что напряжения и деформации быстро затухают в неограниченном теле по мере удаления от области приложения и это затухание справедливо лишь для систем самоуравновешенных. Р. Мизес видоизменил формулировку п. С.-В. и свел его к следующим утверждениям:

1. Если система сосредоточенных нагрузок приложена в точках поверхности внутри сферы радиуса ϵ и имеет главный вектор, равный нулю, то она вызывает во внутренних точках тела напряжения и деформации порядка ϵ .

2. Если в предыдущем случае равен нулю и главный момент, то порядок напряжений и деформаций все еще будет, вообще говоря, ϵ .

3. При равенстве нулю в первом случае главного вектора и главного момента и еще трех дополнительных условий, обеспечивающих, по терминологии Р. Мизеса, «статическую» равновесия, порядок напряжений и деформаций будет ϵ^2 .

Обобщенное доказательство этих предложений дал в 1954 г. Е. Штеренберг. Он сформулировал п. С.-В. так, чтоб уже говорилось об относительном порядке величин, а не о размерах области, в которой система сил оказывает влияние на распределение напряжений в теле. Его формулировка п. С.-В. следующая: при приложении сил на отдельных участках границы упругого тела, каждый из которых расположен внутри радиуса ϵ , напряжения и деформации имеют больший порядок относительно ϵ (при $\epsilon \rightarrow 0$), когда система приложенных сил эквивалентна нулю с точностью до полимоментов первого порядка включительно, чем в противоположном случае. Качественно это означает, что напряжения от нагрузки, локально приложенной на границе тела, в случае, когда действующая нагрузка статически равнозначна нулю, незначительны, если габариты этой области малы. Инженеру, связанному с практическими расчетами, классическая формулировка п. С.-В., в которой говорится об убывании напряжений по мере удаления от места приложения силы, гораздо привычнее.

Заклячая изложение материала о п. С.-В., приведем еще одну (не исчерпывающую, но практически полезную) формулировку постулата А. Сен-Венана, предло-

женную Л. Доннелом : самоуравновешенная система сил, приложенная к небольшой области однородного упругого тела, обычно вызывает сопротивление, главным образом, в материале, который находится в непосредственной близости от этой области. Результирующие напряжения быстро уменьшаются по мере удалении от области приложения системы сил и становятся пренебрежимо малыми на расстояниях, больших сравнительно с размерами области. Эти условия наверняка выполняются, если тело не имеет такой формы, которая явно благоприятствует нагружению более отдаленного материала.

Глава 5

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

§ 5.1. Плоская деформация

В общем случае решение задачи теории упругости связано с серьезными математическими трудностями, так как сводится к интегрированию довольно сложной системы дифференциальных уравнений в частных производных при удовлетворении граничных условий. Между тем во многих практически важных задачах можно упростить математическую сторону решения. Для этого отбрасывают

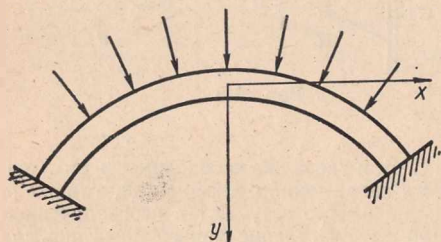


Рис. 5.1

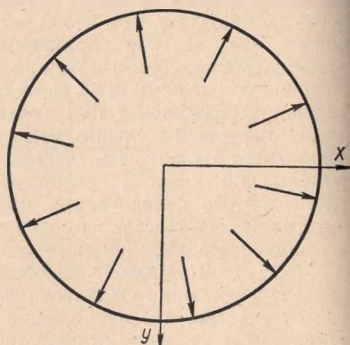


Рис. 5.2

одну из координатных осей, например ось z , и отыскивают функции, зависящие только от двух координат. В этом случае силы, перемещения и деформации не зависят от координаты z , а все явление происходит как бы в одной плоскости xy . Такая категория задач носит название *плоская задача теории упругости* и делится на плоскую деформацию и обобщенное плоское напряженное состояние. Эти 2 вида плоской задачи объединены общей математической формой решения.

Рассмотрим тело (рис. 5.1, 5.2), длина которого в направлении одной из осей, например оси z , велика по сравнению с размерами в направлении двух других (x, y). Пусть нагрузка, нормальная к оси z , и условия закрепления тела не меняются вдоль этой оси. В таких условиях точки тела, достаточно удаленные от его торцов, не перемещаются вдоль оси z из-за воздействия на них соседних элементов, т. е. $w = 0$, а два других перемещения (u и v) не зависят от z . Иными словами, деформация будет происходить только в плоскостях, параллельных плоскости xy . Таким образом, для рассматриваемого случая справедливы следующие условия:

$$u = f_1(x, y); \quad v = f_2(x, y); \quad w = 0. \quad (5.1)$$

Используя эти условия и соотношения Коши (2.7), получаем составляющие тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(x, y); & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_3(x, y); \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi_2(x, y); & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Деформация, определяемая формулами (5.1) и (5.2), называется *плоской деформацией*. В чистом виде случай плоской деформации осуществить трудно, но с некоторым приближением он встречается во многих инженерных задачах.

Рассмотрим теперь напряженное состояние для случая плоской деформации. Из обобщенного закона Гука при отсутствии деформации ε_z следует, что

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (5.3)$$

Отсутствие линейных деформаций вдоль оси z приводит к появлению нормальных напряжений σ_z , связанных с напряжениями, действующими вдоль остальных осей. Таким образом, в случае плоской деформации $\varepsilon_z = 0$, а $\sigma_z \neq 0$.

Подставляя (5.3) в первые 2 уравнения обобщенного закона Гука (3.10), находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_y \right); \\ \varepsilon_y &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x \right). \end{aligned}$$

Эти уравнения можно записать в более удобной форме, если ввести обозначения

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}. \quad (5.4)$$

Вторая группа уравнений закона Гука с учетом того, что $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, сводится к одному уравнению. Таким образом, в случае плоской деформации обобщенный закон Гука благодаря введению новых упругих постоянных E_1 и ν_1 записывается в форме, аналогичной (3.10), и сводится к трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu_1)}{E_1} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из (5.2) следует, что деформации ε_x , ε_y , γ_{xy} являются функциями только двух независимых переменных x и y . Учитывая это и принимая во внимание (5.3), разрешим уравнение (5.5) относительно напряжений

$$\sigma_x = \psi_1(x, y); \quad \sigma_y = \psi_2(x, y); \quad \sigma_z = \psi_3(x, y); \quad \tau_{xy} = \psi_4(x, y); \\ \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0.$$

Все компоненты напряжений, не равные нулю, не зависят от z , вследствие чего значительно упрощаются основные уравнения теории упругости. Из трех уравнений равновесия (1.5) остаются только первые 2, которые теперь записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \quad (5.6)$$

Вместо трех условий на поверхности (1.7) имеем

$$p_{Nx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m; \\ p_{Ny} = \tau_{xy} l + \sigma_y m. \quad (5.7)$$

Зависимости Коши (2.7) сводятся к трем:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.8)$$

Самое значительное упрощение получают уравнения неразрывности деформаций (2.28), из которых остается только 1-е:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.9)$$

Не касаясь здесь вопросов решения полученных уравнений, рассмотрим другой случай плоской задачи.

§ 5.2. Обобщенное плоское напряженное состояние

Рассмотрим тонкую пластинку (рис. 5.3) с основаниями, параллельными плоскости xy . Нагрузка приложена по боковой поверхности пластинки и симметрична относительно ее срединной плоскости. В частном случае нагрузка может быть равномерно распределена по толщине. Предполагается, что размер пластинки в направлении оси z весьма мал в сравнении с другими размерами. Так как основания пластинки свободны от нагрузки, то на них

$$\sigma_z = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0. \quad (5.10)$$

Поскольку толщина пластинки мала, можно принять эти напряжения равными нулю по всему объему пластинки. Справедливости ради

следует отметить, что если такое предположение верно в отношении напряжения σ_z , то для τ_{xz} и τ_{yz} оно выполняется только в случае равномерного распределения нагрузок по толщине и отсутствия изменения внутренних напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в направлениях x и y .

Остальные напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} ввиду малого расстояния между основаниями можно принять постоянными по толщине, не зависящими от координаты z :

$$\sigma_x = \psi_1(x, y); \quad \sigma_y = \psi_2(x, y);$$

$$\tau_{xy} = \psi_3(x, y),$$

т. е. имеем плоское распределение напряжений.

Используя обобщенный закон Гука и принимая во внимание (5.10), можно записать выражение для деформации в направлении оси z :

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y).$$

Тогда в отличие от плоской деформации

$$\varepsilon_z \neq 0; \quad \sigma_z = 0.$$

Следует отметить, что существование поперечной деформации вдоль оси z влечет за собой некоторое искривление плоских оснований пластинки. Благодаря ее малой толщине оно ничтожно.

Можно утверждать, что точки пластинки будут перемещаться в основном в плоскостях, параллельных плоскости xy . Поэтому примем, что

$$u = \psi_4(x, y); \quad v = \psi_5(x, y).$$

Третий компонент перемещений w весьма мал вследствие малой толщины пластинки и на этом основании, как и ε_z , не представляет практического интереса. Однако при необходимости они могут быть легко определены с помощью известных компонентов напряжений.

При сделанных предположениях основные уравнения теории упругости для обобщенного плоского напряженного состояния имеют такой же вид, как и для случая плоской деформации. Исключение составляет только закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

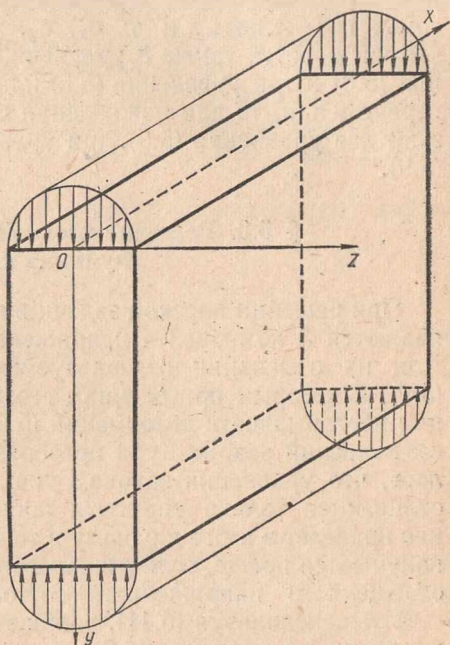


Рис. 5.3

Формулы (5.11) отличаются от (5.5) только значениями упругих постоянных.

Таким образом, при решении плоской задачи теории упругости имеем 8 неизвестных, являющихся функциями только двух независимых переменных x и y : σ_x , σ_y , τ_{xy} , ε_x , ε_y , γ_{xy} , u , v . Для решения задачи имеются также 8 уравнений: два уравнения (5.6), три уравнения (5.8) и три уравнения (5.5) или (5.11). Если не нужно определять перемещения, то для нахождения шести неизвестных величин используют два уравнения (5.6), три уравнения (5.5) или (5.11) и уравнение (5.9).

§ 5.3. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений

При решении плоской задачи в напряжениях искомыми функциями являются 3 компонента напряжения: $\sigma_x(x, y)$; $\sigma_y(x, y)$; $\tau_{xy}(x, y)$. Для их отыскания воспользуемся двумя уравнениями равновесия (5.6), к которым присоединим геометрическое условие в виде уравнения неразрывности деформаций (5.9). Последнее уравнение с помощью соотношений закона Гука преобразуем к напряжениям. Уже отмечалось, что уравнения закона Гука для обоих случаев плоской задачи отличаются только упругими постоянными, поэтому их использование приведет в итоге к одному и тому же результату. Однако выкладки получаются проще, если воспользоваться соотношениями (5.11) — для обобщенного напряженного состояния.

Итак, используя (5.11), запишем выражения вторых производных, входящих в уравнение (5.9):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Подставим их в (5.9) и после упрощений получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.12)$$

Полученное уравнение примет более простой вид, если выразить касательное напряжение τ_{xy} через нормальные напряжения. Для этого продифференцируем 1-е уравнение равновесия (5.6) по x , а 2-е — по y и сложим их почленно. Считая объемные силы постоянными по всему объему, найдем:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

Подставив это соотношение в (5.12), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5.13)$$

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа. Из (5.13) следует, что в плоской задаче сумма нормальных напряжений есть гармоническая функция. Уравнение (5.13) называется *условием Мориса Леви*. Оно является частным случаем уравнения Бельтрами — Митчелла и применяется, когда объемные силы постоянны или могут быть приняты равными нулю.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда объемной силой является вес тела, т. е. $X = 0$; $Y = p$. Здесь p — вес единицы объема тела.

Решение плоской задачи сводится к интегрированию трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= -p; \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

при выполнении граничных условий

$$\begin{aligned} p_{Nx} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m; \\ p_{Ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в уравнениях (5.14) нет упругих постоянных, т. е. искомое напряженное состояние не зависит от материала. Это положение справедливо лишь для тела, на границах которого заданы усилия.

Однако решение плоской задачи теории упругости можно получить другим, более удобным путем: три интересующих нас компонента напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} могут быть выражены через одну функцию, называемую *функцией напряжений* или *функцией Эри*. Функция напряжения подбирается таким образом, чтобы искомые напряжения получались ее дифференцированием.

Действительно, пусть имеется некоторая произвольная функция $\varphi(x, y)$, при помощи которой напряжения определяются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px. \quad (5.15)$$

Легко проверить, что при подстановке выражений (5.15) в первые 2 уравнения (5.14) они тождественно удовлетворяются, т. е. функция $\varphi(x, y)$ является решением уравнений равновесия. Для отыскания вида самой функции $\varphi(x, y)$ подставим выражения (5.15) в последнее уравнение системы (5.14):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) называется *бигармоническим уравнением плоской задачи*. Сокращенно его можно записать в виде

$$\nabla^4 \varphi = 0.$$

С помощью соотношений (5.15) выразим условия на контуре через функцию напряжений:

$$\begin{aligned} p_{Nx} &= l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - m \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px \right); \\ p_{Ny} &= m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - l \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Таким образом, решение плоской задачи свелось к отысканию бигармонической функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (5.16) и граничным условиям (5.17). После этого напряжения в любой точке тела найдутся по формулам (5.15).

§ 5.4. Изгиб консоли

Решение плоской задачи, связанное с интегрированием бигармонического уравнения (5.16) при граничных условиях (5.17), сопряжено со значительными трудностями. Из числа приемов решения такой задачи может быть выделен следующий. Наперед задаются функцией напряжений, удовлетво-

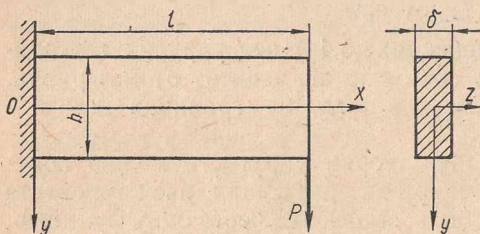


Рис. 5.4

ряющей уравнению (5.16), в структуру которой входит набор не определенных вначале параметров. Эти параметры подбирают так, чтобы функция напряжений соответствовала не только уравнению (5.16), но и граничным условиям решаемой задачи. Иногда при выборе функции на-

пряжений бывает полезно воспользоваться выражениями для напряжений, которые получаются в сопротивлении материалов при решении аналогичной задачи.

В качестве примера найдем решение для консольной балки прямоугольного сечения, защемленной одним концом и нагруженной на другом силой P (рис. 5.4). Толщина балки δ мала по сравнению с высотой h , и поэтому распределение напряжений в ней можно рассматривать как плоское напряженное состояние. Собственным весом балки пренебрегаем.

Примем выражение для напряжений в виде

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (C_1 + C_2 x) y. \quad (5.18)$$

Такой выбор σ_x обусловлен тем, что напряжение, получаемое в сопротивлении материалов, имеет ту же структуру, т. е.

$$\sigma_x = \left(-\frac{12Pl}{h^3} + \frac{12P}{h^3} x \right) y.$$

В (5.18) C_1 и C_2 — постоянные, подлежащие определению. Проинтегрировав дважды (5.18), получим

$$\varphi = \frac{C_1}{6} y^3 + \frac{C_2}{6} xy^3 + y f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — некоторые функции, зависящие только от x .

Подставим теперь выражение для функции напряжений в бигармоническое уравнение (5.16). После подстановки имеем

$$y \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f_2}{\partial x^4} = 0.$$

Полученное уравнение должно удовлетворяться при любых значениях x и y , а это возможно только в случае, если

$$\frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^4 f_2}{\partial x^4} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f_1 &= C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6; \\ f_2 &= C_7 x^3 + C_8 x^2 + C_9 x + C_{10}. \end{aligned}$$

С учетом последних зависимостей выражение для функции напряжений можно записать так:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{C_1}{6} y^3 + \frac{C_2}{6} xy^3 + y(C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6) + \\ &+ C_7 x^3 + C_8 x^2 + C_9 x + C_{10}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Используя (5.15) без учета объемной силы и (5.19), имеем

$$\sigma_y = 6x(C_3 y + C_7) + 2(C_4 y + C_8); \quad (5.20)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{C_2}{2} y^2 - 3C_3 x^2 - 2C_4 x - C_5.$$

Входящие в (5.20) постоянные интегрирования определим из граничных условий. Поскольку верхняя и нижняя грани балки свободны от нагрузки, то $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ при $y = \pm \frac{h}{2}$.

Рассмотрим 1-е условие:

$$6x \left(C_3 \frac{h}{2} + C_7 \right) + 2 \left(C_4 \frac{h}{2} + C_8 \right) = 0;$$

$$6x \left(-C_3 \frac{h}{2} + C_7 \right) + 2 \left(-C_4 \frac{h}{2} + C_8 \right) = 0.$$

Так как уравнения должны удовлетворяться для всех значений x от 0 до l , то получаем

$$C_3 \frac{h}{2} + C_7 = 0; \quad C_4 \frac{h}{2} + C_8 = 0;$$

$$-C_3 \frac{h}{2} + C_7 = 0; \quad -C_4 \frac{h}{2} + C_8 = 0.$$

Решив эту систему, имеем

$$C_3 = C_4 = C_7 = C_8 = 0,$$

и следовательно,

$$\sigma_y = 0 \quad \text{и} \quad \tau_{xy} = -\frac{C_2}{2} y^2 - C_5.$$

Удовлетворим теперь 2-му условию:

$$-\frac{C_2}{8} h^2 - C_5 = 0, \quad \text{или} \quad C_5 = -\frac{C_2}{8} h^2.$$

Отсюда

$$\tau_{xy} = -\frac{C_2}{8} (4y^2 - h^2).$$

Таким образом, условия на верхней и нижней гранях балки выполняются.

При заданных условиях нагружения нормальных напряжений на торце нет, а касательные напряжения должны уравновесить приложенную силу P . Ввиду того что закон распределения силы P по торцу неизвестен, условие для напряжений τ_{xy} должно быть записано в интегральной форме:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \delta dy = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_2}{8} \delta (4y^2 - h^2) dy = P.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{12P}{\delta h^3} = \frac{P}{J}.$$

Теперь можно записать окончательное выражение для касательного напряжения:

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2J} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Чтобы определить последнюю постоянную C_1 , рассмотрим условие для напряжений σ_x (5.18):

$$\sigma_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \quad \text{т. е.}$$

$$C_1 y + C_2 y l = 0,$$

откуда

$$C_1 = -C_2 l = -\frac{P}{J} l.$$

Окончательно

$$\sigma_x = -\frac{P}{J} (l - x) y.$$

Таким образом, получим систему

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{J} (l - x) y; \\ \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{P}{2J} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right), \end{aligned} \tag{5.21}$$

которая полностью совпадает с элементарным решением, приводимым в курсах сопротивления материалов. Полученное решение будет точ-

ным только тогда, когда усилие, действующее на торце, изменяется по тому же закону, что и касательные напряжения. Для других законов распределения нагрузки, на основании принципа Сен-Венана, такое решение можно считать удовлетворительным для сечений, достаточно удаленных от концов.

После того как найдены напряжения, следует перейти к определению перемещений и сравнить полученный результат с решением, которое дает сопротивление материалов.

Используя уравнения Коши и уравнения обобщенного закона Гука для плоского напряженного состояния, а также (5.21), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{P}{EJ} (l-x) y; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = \frac{\nu P}{EJ} (l-x) y; \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu) \tau_{xy}}{E} = \frac{(1+\nu) P}{EJ} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).\end{aligned}\quad (5.22)$$

Проинтегрируем первые 2 уравнения (5.22):

$$\begin{aligned}u &= -\frac{P}{EJ} \left(lxy - \frac{x^2 y}{2} \right) + \psi_1(y); \\ v &= \frac{\nu P}{EJ} \left(\frac{ly^2}{2} - \frac{xy^2}{2} \right) + \psi_2(x).\end{aligned}\quad (5.23)$$

В результате интегрирования в уравнения (5.23) вошли 2 произвольные функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(x)$. Для их определения воспользуемся 3-м уравнением (5.22), в которое подставим производные от u и v :

$$-\frac{\nu P}{EJ} \frac{y^2}{2} + \psi_2'(x) - \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + \psi_1'(y) = \frac{(1+\nu) P}{EJ} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Представим это уравнение в более удобной форме:

$$\begin{aligned}\left[\psi_2'(x) - \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \left[\psi_1'(y) - \frac{\nu P}{EJ} \frac{y^2}{2} + \frac{(1+\nu) P}{EJ} y^2 \right] = \\ = \frac{(1+\nu) P}{EJ} \frac{h^2}{4}.\end{aligned}\quad (5.24)$$

Здесь правая часть — постоянная величина, а выражения в квадратных скобках зависят либо от x , либо от y . Ввиду того что x и y есть произвольные, не зависящие друг от друга переменные, равенство (5.24) имеет смысл только в том случае, если выражения в квадратных скобках равны постоянным величинам. Обозначим их D_1 и D_2 :

$$D_1 = \psi_2'(x) - \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right); \quad (5.25)$$

$$D_2 = \psi_1'(y) - \frac{\nu P}{EJ} \frac{y^2}{2} + \frac{(1+\nu) P}{EJ} y^2.$$

На основании (5.24) с учетом (5.25) имеем

$$D_1 + D_2 = \frac{(1+\nu) P}{EJ} \frac{h^2}{4}. \quad (5.26)$$

Интегрируя уравнения (5.25), получим

$$\psi_2(x) = \frac{P}{EJ} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + D_1x + d_1;$$

$$\psi_1(y) = -\frac{P}{EJ} \frac{(2+\nu)}{6} y^3 + D_2y + d_2.$$

Таким образом, определен вид функций $\psi_1(y)$ и $\psi_2(x)$. Внесем их в уравнение (5.23):

$$\begin{aligned} u &= \frac{P}{EJ} \left[-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2+\nu)}{6} y^3 \right] + D_2y + d_2; \\ v &= \frac{P}{EJ} \left(\frac{\nu ly^2}{2} - \frac{\nu xy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + D_1x + d_1. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Произвольные постоянные D_1, d_1, D_2, d_2 находим из условий закрепления консоли. Обеспечим сначала неподвижность начальной точки оси балки, т. е. положим, что при $x = y = 0$ перемещения $u = 0; v = 0$. Тогда из уравнений (5.27) сразу вытекает, что $d_1 = d_2 = 0$.

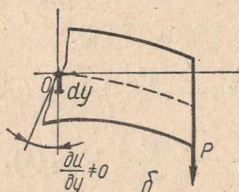
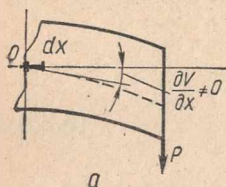


Рис. 5.5

Затем исключим возможность вращения консоли вокруг точки O . Это можно осуществить разными путями: либо поставить условие горизонтальности начальной касательной, т. е. предпо-

ложить, что элемент оси dx у закрепленного конца остается горизонтальным (рис. 5.5, а); либо закрепить элемент dy опорного сечения и потребовать, чтобы он оставался вертикальным (рис. 5.5, б). В обоих случаях вращения балки вокруг точки O не будет.

Рассмотрим 1-й случай закрепления. При $x = y = 0$ $\frac{dv}{dx} = 0$. Взяв соответствующую производную от выражения (5.27) и полагая $x = y = 0$, получим, что $D_1 = 0$. Тогда из (5.26) следует:

$$D_2 = \frac{(1+\nu)P}{EJ} \frac{h^2}{4}.$$

После определения значений постоянных формулы для перемещений принимают вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{P}{EJ} \left[-\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{(2+\nu)}{6} y^3 + \frac{(1+\nu)h^2}{4} y \right]; \\ v &= \frac{P}{EJ} \left[\frac{\nu(l-x)}{2} y^2 + \frac{l}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Положив во 2-м уравнении (5.28) $y = 0$, найдем уравнение изогнутой оси балки:

$$v = \frac{P}{EJ} \left(\frac{l}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right),$$

которое совпадает с уравнением, полученным в сопротивлении материалов.

Наибольшим будет прогиб на конце консоли:

$$v_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Исследуем теперь деформацию плоских сечений. Уравнение плоского сечения до деформации будет $x = x_0$, а после деформации $x = x_0 + u$, или с учетом (5.28):

$$x = x_0 + \frac{P}{EJ} \left[- \left(l - \frac{x}{2} \right) xy - \frac{(2+\nu)}{6} y^3 + \frac{(1+\nu)h^2}{4} y \right]. \quad (5.29)$$

Рассмотрение выражения (5.29) показывает, что после деформации сечение искривляется по параболе 3-го порядка. Этот вывод в полной мере относится и к крайнему левому сечению ($x_0 = 0$). Следовательно, формулы для напряжений (5.21), получаемых в сопротивлении материалов с использованием гипотезы плоских сечений, остаются верными и при искривлении сечений.

Рассмотрим теперь 2-й случай, когда закрепление элемента осуществлено по вертикали. Здесь $\frac{du}{dy} = 0$ при $x = 0$; $y = 0$. Тогда

$$D_2 = 0; \quad D_1 = \frac{(1+\nu)P}{EJ} \frac{h^2}{4}$$

и выражения для перемещений (5.28) приобретают вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{P}{EJ} \left[- \left(l - \frac{x}{2} \right) xy - \frac{(2+\nu)}{6} y^3 \right]; \\ v &= \frac{P}{EJ} \left[\frac{\nu(l-x)}{2} y^2 + \frac{l}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{(1+\nu)h^2}{4} x \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Уравнение изогнутой оси балки тогда

$$v = \frac{P}{EJ} \left[\frac{l}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{(1+\nu)h^2}{4} x \right],$$

а максимальный прогиб на конце консоли

$$v_{\max} = \frac{Pl}{EJ} \left[\frac{l^2}{3} + \frac{(1-\nu)h^2}{4} \right].$$

Таким образом, в зависимости от способа закрепления балки перемещения получаются различными. Во 2-м случае прогиб значительно зависит от высоты сечения h . Появляющийся во 2-м уравнении (5.30) дополнительный член учитывает наличие сдвигов и обусловлен влиянием на прогиб перерезывающей силы.

Естественно, что кроме рассмотренных здесь способов заделки можно представить себе множество других, причем каждому из них будут соответствовать свои перемещения. Однако на основании принципа Сен-Венана напряженное состояние существенно меняется только вблизи закрепленного сечения.

§ 5.5. Решение плоской задачи с помощью рядов Фурье

При решении некоторых задач теории упругости, в частности когда нагрузка не является непрерывной, удобно искать решение при помощи тригонометрических рядов. Такой подход впервые применили М. Рибьер и Л. Файлон для исследования характера напряженного состояния при изгибе балок.

Решая задачи с помощью рядов Фурье, следует функцию, которой выражается нагрузка, разложить в тригонометрический ряд, взять несколько первых членов ряда, для каждого из них найти решение и результаты сложить. Основной смысл такого подхода заключается в том, что появляется возможность заменить нагрузку произвольного вида рядом непрерывных нагрузок, изменяющихся по простому закону синуса и косинуса. Ограничиваясь конечным числом членов ряда, можно получить приближенное, достаточно близкое к истинному, решение задачи.

В случае изгиба прямоугольной балки, у которой длина значительно больше высоты, следует возможно точнее удовлетворить условиям на длинных сторонах, несущих изгибающую нагрузку. В то же время условиям на коротких сторонах можно удовлетворить интегрально, не заботясь о законе распределения напряжений по высоте конечных сечений, так как, согласно принципу Сен-Венана, торцы не оказывают существенного влияния на напряженное состояние всей балки, если отношение высоты балки к длине есть малая величина.

Бигармоническое уравнение для функции напряжений

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (5.31)$$

может быть удовлетворено, если, следуя Файлону, принять функцию φ в виде

$$\varphi = \sin \frac{m\pi x}{l} f(y). \quad (5.32)$$

Здесь m — нуль или целое положительное число; l — длина балки; $f(y)$ — некоторая функция, зависящая от ординаты y . Для удобства обозначим $\frac{m\pi}{l} = \lambda$.

Подставим функцию (5.32) в уравнение (5.31). После упрощений получим линейное дифференциальное уравнение для определения $f(y)$:

$$\lambda^4 f(y) - 2\lambda^2 f''(y) + f^{IV}(y) = 0. \quad (5.33)$$

Общее решение уравнения с постоянными коэффициентами (5.33) может быть записано в виде

$$f(y) = C_1 \operatorname{ch} \lambda y + C_2 \operatorname{sh} \lambda y + C_3 y \operatorname{ch} \lambda y + C_4 y \operatorname{sh} \lambda y,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Таким образом, функция напряжений φ , удовлетворяющая бигармоническому уравнению,

$$\varphi = \sin \lambda x (C_1 \operatorname{ch} \lambda y + C_2 \operatorname{sh} \lambda y + C_3 y \operatorname{ch} \lambda y + C_4 y \operatorname{sh} \lambda y). \quad (5.34)$$

В решение (5.34) входят произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 и параметр λ . Давая им различные значения, получим бесчисленное множество частных решений. Очевидно, что сумма таких решений также будет решением уравнения (5.31). При возрастании числа членов этой суммы до бесконечности она перейдет в ряд:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_m x (C_{1m} \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{2m} \operatorname{sh} \lambda_m y + C_{3m} y \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{4m} y \operatorname{sh} \lambda_m y). \quad (5.35)$$

Произвольные постоянные следует подбирать так, чтобы граничные условия на контуре балки удовлетворялись по возможности полнее.

Решение в форме (5.35) впервые предложил Файлон.

Покажем дальнейший ход решения для случая изгиба балки длиной l и шириной h нагрузкой $q(x)$ (рис. 5.6). Нижняя нагрузка в данном случае может быть, например, реакцией опор балки.

Зная функцию напряжений, можно записать выражения для соответствующих напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{l}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{l}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{l} f'_m(y) \cos \frac{m\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Рассмотрим граничные условия на длинных сторонах балки: при $y = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 f_m(0) \sin \frac{m\pi x}{l} = p(x); \\ \tau_{xy} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right) f'_m(0) \cos \frac{m\pi x}{l} = 0; \end{aligned}$$

при $y = h$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 f_m(h) \sin \frac{m\pi x}{l} = q(x); \\ \tau_{xy} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right) f'_m(h) \cos \frac{m\pi x}{l} = 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

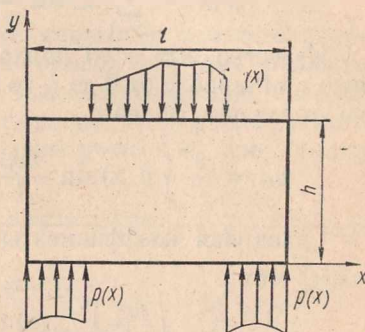


Рис. 5.6

Чтобы удовлетворить 1-е и 3-е условия, нужно функции $p(x)$ и $q(x)$ разложить в тригонометрические ряды по $\sin \frac{m\pi x}{l}$:

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{a}_m \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{a}_m \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (5.38)$$

Известно, что если приходится разлагать в ряд функцию, заданную в интервале от 0 до l , то коэффициенты разложения определяются по формулам Эйлера:

$$\dot{a}_m = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx; \quad \ddot{a}_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

Сравнивая коэффициенты при $\sin \frac{m\pi x}{l}$ в (5.37) и (5.38), получаем, что

$$\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \dot{f}_m(0) = \dot{a}_m; \quad \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \dot{f}_m(h) = \ddot{a}_m. \quad (5.39)$$

Нетрудно заметить, что для удовлетворения 2-го и 4-го условий (5.37) следует принять

$$\dot{f}_m(0) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{f}_m(h) = 0. \quad (5.40)$$

Подставим теперь в (5.39) и (5.40) выражение функции $\dot{f}_m(y)$ из уравнения (5.35). В результате получим 4 уравнения для определения четырех произвольных постоянных $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$.

Из формул (5.36) следует, что на торцах балки при $x = 0$ и $x = l$ нормальных напряжений нет, а касательные напряжения создают поперечные силы

$$\int_0^h \tau_{xy} dy = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{l} \int_0^h \dot{f}_m(y) dy = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{l} [\dot{f}_m(h) - \dot{f}_m(0)].$$

Таким образом, условия на длинных сторонах балки удовлетворяются точно, на торцах напряжения σ_x отсутствуют, а касательные напряжения имеют равнодействующие, уравнивающие нагрузку $q(x)$ в случае отсутствия нагрузки $p(x)$.

Нетрудно убедиться, что бигармоническое уравнение (5.31) также будет удовлетворено и если принять функцию напряжений в виде

$$\Phi = \cos \frac{m\pi x}{l} f(y).$$

Именно такой подход применил Рибьер, которому принадлежит приоритет в использовании тригонометрических рядов для решения задач об изгибе балок. Естественно, что в этом случае для функции $f(y)$ остается прежнее выражение и функция напряжений

$$\Phi = \cos \lambda x (C_5 \operatorname{ch} \lambda y + C_6 \operatorname{sh} \lambda y + C_7 y \operatorname{ch} \lambda y + C_8 y \operatorname{sh} \lambda y).$$

В заключение следует отметить, что, хотя с помощью изложенного метода было решено большое количество практически важных задач, тем не менее применение тригонометрических функций все же нельзя признать универсальным методом, так как не всегда удается удовлетворить граничным условиям на боковых гранях.

§ 6.1. Общие уравнения в полярных координатах

До сих пор при решении задач теории упругости использовались прямоугольные координаты. Однако во многих случаях решение можно существенно упростить, выбрав более подходящую систему координат. Так, рассматривая задачи для цилиндрических тел круглого сечения, целесообразно использовать цилиндрические координаты r, θ, z . В случае плоской деформации или плоского напряженного состояния можно формально отбросить ось z и тогда интересующие нас компоненты напряжения будут функциями только r и θ , т. е. цилиндрические координаты переходят в полярные.

Примеры задач, при решении которых целесообразно применять полярные координаты: расчет толстостенного кольца, нагруженного в общем случае по внутреннему и внешнему контурам; расчет плоского диска с круговым контуром, несущего нагрузку в плоскости диска; расчет растягиваемой бесконечной полосы, имеющей круговое отверстие; определение напряжений в кривых брусках узкого прямоугольного сечения с круговой осевой линией и т. п.

При использовании полярных координат положение любой точки тела на плоскости определяется расстоянием ее от начала координат r и углом θ между направлением r и некоторой осью x (рис. 6.1).

Между декартовыми и полярными координатами существует известная связь:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta; & y &= r \sin \theta; \\ r^2 &= x^2 + y^2; & \theta &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Получим теперь основные уравнения теории упругости для плоской задачи в полярных координатах. Выделим из тела элемент $abcd$ с центральным углом $d\theta$ и наименьшим радиусом r (рис. 6.1).

Стороны элемента

$$ad = rd\theta; \quad bc = (r + dr)d\theta; \quad ab = dc = dr.$$

Чтобы записать условия равновесия, нужно от напряжений перейти к усилиям. Для этого умножим приложенные к его граням напряжения на соответствующие площадки и спроектируем полученные

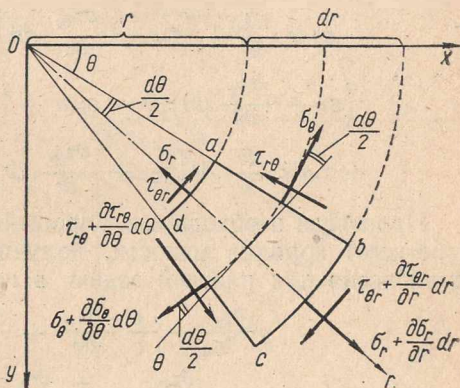


Рис. 6.1

таким образом силы на оси r и θ . Для простоты толщину элемента примем равной единице. Объемная сила, отнесенная к единице объема и действующая на элемент в радиальном направлении, будет равна $Rrdrd\theta$. Кроме того, вследствие малости угла $d\theta$ принимаем, что

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}; \quad \cos \frac{d\theta}{2} \approx 1.$$

Спроектируем силы, действующие на грани элемента, соответственно на оси r , θ и рассмотрим его равновесие:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} - \\ & - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \tau_{r\theta} dr + Rrdrd\theta = 0; \\ & \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_\theta dr + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + \\ & + \tau_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \tau_{\theta r} r d\theta = 0. \end{aligned}$$

Произведя необходимые упрощения и отбросив величины высшего (третьего) порядка малости, получим дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи в полярных координатах:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Остановимся на одной особенности уравнений (6.2), которая вытекает из анализа членов, содержащих в знаменателе r . Чем ближе к началу координат расположен элемент, тем быстрее возрастают эти члены уравнений, так как r неограниченно убывает. Таким образом, уравнения (6.2) нельзя применять для точек, лежащих в начале координат, поскольку члены, содержащие множитель $\frac{1}{r}$, обращаются в бесконечность.

Получим теперь зависимости между компонентами деформации и перемещений. Обозначим составляющую перемещения в радиальном направлении через u , а в окружном — через v . Деформации растяжения в радиальном и окружном направлениях обозначим соответственно ϵ_r и ϵ_θ . Деформацию сдвига, которая измеряется изменением прямого угла между радиусом-вектором и касательной к описанной им окружности, обозначим $\gamma_{r\theta}$. Из рис. 6.2 следует, что удлинение dr элемента ab получается вследствие разницы перемещений в радиальном направлении точек a и b , т. е.

$$aa_1 = u; \quad bb_1 = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr.$$

Таким образом,

$$\epsilon_r = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr \right) - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Деформацию ϵ_θ можно рассматривать состоящей из двух составляющих. Во-первых, имеет место удлинение вследствие радиального перемещения u элемента $ds = r d\theta$ при измененном угле $d\theta$, т. е. дуга ad переходит в положение $a_1 d_1$. Отсюда относительное удлинение

$$\epsilon_\theta' = \frac{(r + u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}.$$

Во-вторых, вследствие разницы в перемещениях точек a и d в направлении дуги s (рис. 6.3) получается относительное удлинение

$$\epsilon_\theta'' = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) - v}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

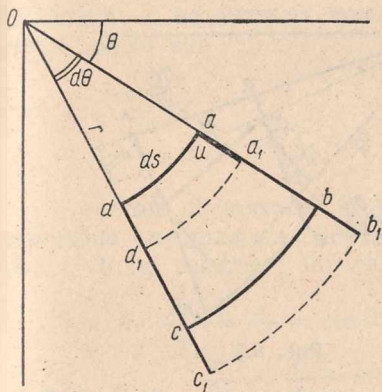


Рис. 6.2

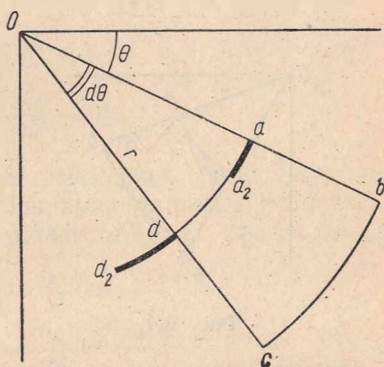


Рис. 6.3

Складывая обе составляющие, получаем

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}.$$

Рассмотрим теперь деформацию сдвига $\gamma_{r\theta}$. Если бы точка a осталась неподвижной, то изменение прямого угла bad (рис. 6.4) определялось бы поворотом сторон ab и ad соответственно на углы α и β , т. е.

$$\gamma_{r\theta}' = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Пусть теперь элемент $abcd$ поворачивается вокруг оси, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскости чертежа, и занимает новое положение $a'b'c'd'$ (рис. 6.5). При этом точка a перемещается по дуге s на величину v и благодаря этому наклон элемента ab изменяется на некоторую величину $\delta = \frac{v}{r}$. Таким образом, полное изменение прямого угла bad , представляющее деформацию сдвига,

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Итак, компоненты тензора деформаций для рассматриваемого случая имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Соотношения между напряжениями и деформациями для плоской задачи в полярных координатах записываются фактически теми же уравнениями, что и в декартовых координатах. Отличие состоит только

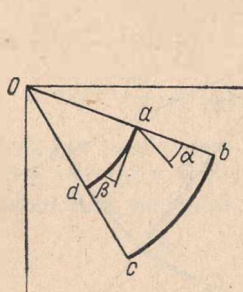


Рис. 6.4

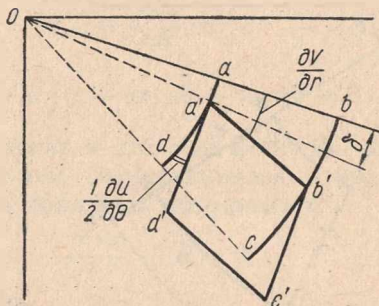


Рис. 6.5

в обозначениях: вместо индексов x и y пишутся r и θ . Для обобщенного плоского напряженного состояния имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r); \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}.\end{aligned}\quad (6.4)$$

В случае плоской деформации в уравнениях (6.4) следует заменить E на $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$ и ν на $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$.

В предыдущей главе было показано, что общим решением для дифференциальных уравнений равновесия (при отсутствии объемной силы) являются

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

выраженные через функцию напряжений $\Phi(x, y)$. Решая плоскую задачу в полярных координатах, с помощью функции напряжений $\Phi(r, \theta)$ можно получить аналогичное решение и для уравнений (6.2). Нетрудно убедиться, что уравнения равновесия будут тождест-

менно удовлетворены, если принять напряжения такими:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\quad (6.5)$$

При отсутствии объемной силы любая функция $\varphi(r, \theta)$, подставленная в (6.5), даст такие составляющие напряжения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия (6.2).

Чтобы получить характер распределения напряжений в упругом теле, необходимо удовлетворить также уравнению совместности деформаций. В декартовых координатах для плоской задачи это уравнение имело вид

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

С учетом принятого координатного исчисления представим это уравнение в полярных координатах. Принимая во внимание зависимости (6.1), запишем значения для соответствующих производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta; & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}; \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta; & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}.\end{aligned}$$

Пользуясь этими выражениями, найдем производные функции $\varphi(r, \theta)$ по x и y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin^2 \theta - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos^2 \theta + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \sin \theta \cos \theta - \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Сложим два последних выражения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}.$$

Используя последнее уравнение и тождество

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right),$$

найдем уравнение совместности деформаций в полярных координатах:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (6.6)$$

Отсюда видно, что лапласов оператор ∇^2 в полярной системе координат принимает вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Уравнение (6.6) представляет собой основное дифференциальное уравнение для функции напряжений $\varphi(r, \theta)$. Решая плоскую задачу, необходимо подбирать функцию $\varphi(r, \theta)$ таким образом, чтобы она удовлетворяла этому уравнению.

§ 6.2. Распределение напряжений, симметричное относительно оси

В практике часто имеют место случаи, когда напряжения не зависят от угла θ и распределяются симметрично относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости xy (см. рис. 6.1). Из условий симметрии следует, что касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ обращаются в нуль и остаются только σ_r и σ_θ . Из этих же соображений дифференциальные уравнения равновесия (6.2) сводятся к одному:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (6.7)$$

а уравнение для определения функции напряжений φ принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Естественно, что учет симметрии значительно упрощает решение задачи. Следует отметить, что, если есть объемная сила R , ее нужно прибавить к левой части уравнения (6.7).

Выполним дифференцирование в уравнении (6.8) и ввиду того, что функция напряжений зависит только от одной переменной r , перейдем от частных производных к обыкновенным:

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d \varphi}{dr} = 0. \quad (6.9)$$

Полученное уравнение с переменными коэффициентами (уравнение Эйлера) путем замены $r = e^t$ можно преобразовать в линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициен-

тами. Для этого выпишем соответствующие производные и учтем, что $\frac{dt}{dr} = e^{-t} = \frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dr} &= \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dt}; \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dt} \right); \\ \frac{d^3\varphi}{dr^3} &= \frac{1}{r^3} \left(\frac{d^3\varphi}{dt^3} - 3 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} \right); \\ \frac{d^4\varphi}{dr^4} &= \frac{1}{r^4} \left(\frac{d^4\varphi}{dt^4} - 6 \frac{d^3\varphi}{dt^3} + 11 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - 6 \frac{d\varphi}{dt} \right).\end{aligned}$$

Уравнение (6.9) после подстановки этих выражений принимает вид

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4} - 4 \frac{d^3\varphi}{dt^3} + 4 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \quad (6.10)$$

Решение последнего уравнения хорошо известно. Его характеристическое уравнение

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 = 0$$

имеет 2 кратных корня:

$$k_{1,2} = 0; \quad k_{3,4} = 2.$$

Им соответствуют 4 частных решения:

$$e^{0t} = 1; \quad te^{0t} = t; \quad e^{2t}; \quad te^{2t}.$$

Тогда решение уравнения (6.10) принимает вид

$$\varphi = A_0 t + B_0 t e^{2t} + C_0 e^{2t} + D_0.$$

Совершая теперь обратный переход от t к r ($t = \ln r$), находим общее решение уравнения (6.9):

$$\varphi(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \quad (6.11)$$

Используя (6.5), нетрудно показать, что полученное выражение для $\varphi(r)$ приводит к следующим выражениям составляющих напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 1) + 2C; \\ \sigma_\theta &= \frac{d^2\varphi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 3) + 2C; \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned} \quad (6.12)$$

Варьирование значений трех постоянных интегрирования, входящих в (6.11), позволяет изменять нагрузку, приложенную к поверхности тела. Заметим, что соответствующие им частные решения удовлетворяют условию $\tau_{r\theta} = 0$, что свидетельствует, таким образом, об отсутствии касательных напряжений на поверхности.

Если рассматриваемое тело не имеет отверстия в начале координат, то постоянные A и B должны быть приняты равными нулю, иначе напряжения σ_r и σ_θ обращаются в бесконечность при $r = 0$. Отсюда следует, что $\sigma_r = \sigma_\theta = \text{const}$ и тело, таким образом, находится в состоянии равномерного растяжения или сжатия.

Следует еще отметить, что в случае осесимметричной задачи перемещение имеет место только в радиальном направлении.

§ 6.3. О равномерном давлении в толстостенной трубе

Задача о распределении напряжений в средней части длинной толстостенной трубы, находящейся под воздействием равномерных внутреннего и внешнего давлений, известна как задача Ламе.

Пусть имеется толстостенная труба с внутренним радиусом a и наружным b (рис. 6.6). Подвергнем трубу одновременному действию давлений p_a и p_b , равномерно распределенных соответственно по внутренней и по наружной поверхностям. Трубу считаем достаточно длинной и принимаем, что под воздействием давлений перемещения вдоль оси отсутствуют. В этих условиях в части трубы, достаточно удаленной от торцов, имеет место плоская деформация, симметричная относительно оси.

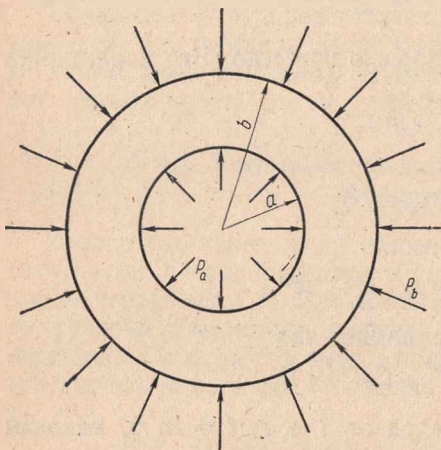


Рис. 6.6

Так как рассматриваемая задача является осесимметричной, то для определения напряжений применимы формулы (6.12). Граничные условия для определения постоянных, входящих в эти формулы, такие:

$$\begin{aligned} \text{при } r = b \quad \sigma_r &= -p_b; \\ \text{при } r = a \quad \sigma_r &= -p_a. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Количество постоянных интегрирования (три) не соответствует количеству граничных условий (два). В ряде работ, например в [11], показано, что для получения действительного распределения напряжений нужно отбросить решение, соответствующее постоянной B в (6.12). Однако решать эту задачу можно и при других допущениях. Таким образом, здесь возможна многозначность решения.

Особенность поставленной задачи заключается в том, что в ней имеется двусвязный контур. Именно это и приводит к описанным осложнениям. Если бы определялось напряженное состояние не замкнутого контура, а, например, определенной части разрезанного кольца, то решение, соответствующее постоянной B в формулах (6.12), следовало бы удерживать.

Итак, положив $B = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C; \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2C.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Подставляя поочередно значения σ_r из (6.13) в 1-е уравнение (6.14), получим 2 уравнения для определения постоянных A и C :

$$\begin{aligned}-p_a &= \frac{A}{a^2} + 2C; \\ -p_b &= \frac{A}{b^2} + 2C,\end{aligned}$$

откуда

$$A = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_b - p_a); \quad 2C = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}.$$

Используя полученные значения, запишем окончательные выражения напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_b - p_a}{r^2} + \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_b - p_a}{r^2} + \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}.\end{aligned}\quad (6.15)$$

В приведенных формулах напряжения различаются лишь знаками у первых членов, и, следовательно, сумма напряжений для всех точек трубы — постоянная величина: $\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const}$. Убедиться в этом можно непосредственным сложением.

Можно указать и другие способы решения этой задачи, позволяющие избежать осложнений, вызываемых наличием двусвязных или многосвязных контуров. Соотношения Коши (6.3) для случая осесимметричного распределения напряжений будут

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= 0.\end{aligned}\quad (6.16)$$

Выразим из 2-го уравнения (6.16) $u = r\varepsilon_\theta$, продифференцируем его по r и подставим в 1-е уравнение. В результате получим уравнение совместности:

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = 0.$$

Воспользовавшись зависимостями между компонентами деформаций и напряжений (6.4) и учитывая (6.5), приведем последнее уравнение к виду

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \\ - r \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) = 0.\end{aligned}$$

После преобразований имеем

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (6.17)$$

Общее решение полученного уравнения 3-го порядка будет

$$\varphi(r) = C_1 \ln r + C_2 r^2 + C_3.$$

Теперь можно записать выражения для компонентов напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_2; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_2. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Таким образом, мы получили такие же формулы для напряжений, как и (6.14).

Остановимся еще на методе решения задачи о равномерном давлении в толстостенной трубе в перемещениях. Соотношения между напряжениями и деформациями (6.4) в случае плоской деформации решим относительно составляющих напряжений:

$$\sigma_r = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} (\epsilon_r + \nu_1 \epsilon_\theta);$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} (\epsilon_\theta + \nu_1 \epsilon_r).$$

Подставим сюда зависимости Коши (6.16):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu_1 \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \left(\frac{u}{r} + \nu_1 \frac{du}{dr} \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

и полученные выражения напряжений, записанные уже в перемещениях, внесем в уравнение равновесия (6.7). Эта подстановка дает линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0,$$

удовлетворяющее условиям равновесия и совместности деформаций. Общее решение этого уравнения содержит две произвольные постоянные, которые определяются из условий на контуре. Окончательно из уравнений (6.19) получим формулы, совпадающие с (6.15).

§ 6.4. Чистый изгиб кривых брусьев

Рассмотрим кривой брус постоянного поперечного сечения в виде прямоугольника, ось которого очерчена по окружности (рис. 6.7). Брус изгибается в плоскости своей кривизны моментами M , приложенными по концам. Верхняя и нижняя поверхности свободны от нагрузок. Так как изгибающий момент постоянен по длине бруса,

то распределение напряжений не зависит от полярного угла θ . Поэтому здесь применимо решение, полученное в § 6.2.

Итак,

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 1) + 2C; \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 3) + 2C; \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}\quad (6.20)$$

Постоянные, входящие в уравнения (6.20), определим из граничных условий. Поскольку выпуклая и вогнутая поверхности бруса свободны от нормальных усилий, имеем

$$\text{при } r=b \text{ и } r=a \quad \sigma_r = 0. \quad (6.21)$$

Кроме того, на всем контуре бруса, включая и торцовые сечения, отсутствуют касательные усилия, поэтому на контуре должно выполняться условие

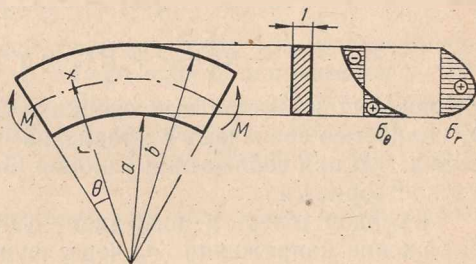


Рис. 6.7

$$\tau_{r\theta} = 0. \quad (6.22)$$

На торцах равнодействующая нормальных напряжений σ_θ должна равняться нулю:

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = 0, \quad (6.23)$$

а момент, создаваемый этими напряжениями, приводится к паре с моментом M :

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = -M. \quad (6.24)$$

Условия (6.22) для касательных напряжений удовлетворяются тождественно, так как функция напряжений φ (6.11) зависит только от r .

Условия для радиального напряжения (6.21) при использовании первого уравнения (6.20) приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{A}{b^2} + B(2 \ln b + 1) + 2C &= 0; \\ \frac{A}{a^2} + B(2 \ln a + 1) + 2C &= 0.\end{aligned}\quad (6.25)$$

Раскроем теперь условие (6.23). Подставим в него выражение для напряжения σ_θ , записанное через функцию напряжений:

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = \int_a^b \frac{d^2 \varphi}{dr^2} dr = \left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_a^b = 0.$$

Используя (6.11), имеем

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r} + B(2r \ln r + r) + 2Cr.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} \Big|_a^b &= \left[\frac{A}{b} + B(2b \ln b + b) + 2Cb \right] - \\ &- \left[\frac{A}{a} + B(2a \ln a + a) + 2Ca \right] = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} \Big|_a^b &= b \left[\frac{A}{b^2} + B(2 \ln b + 1) + 2C \right] - \\ &- a \left[\frac{A}{a^2} + B(2 \ln a + 1) + 2C \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Выражения в квадратных скобках, умноженные на постоянные a и b , полностью совпадают с уравнениями (6.25). Отсюда можно сделать вывод, что при соблюдении условий (6.25) условие (6.23) тождественно удовлетворяется.

Перейдем теперь к последнему условию (6.24). Подставим в него выражение напряжения σ_θ через функцию φ и выполним интегрирование:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sigma_\theta r dr &= \int_a^b \frac{d^2\varphi}{dr^2} r dr = \int_a^b r d\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) = r \frac{d\varphi}{dr} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d\varphi}{dr} dr = \\ &= r \frac{d\varphi}{dr} \Big|_a^b - \varphi \Big|_a^b = -M. \end{aligned}$$

Учитывая (6.26), получаем

$$r \frac{d\varphi}{dr} \Big|_a^b = 0$$

и, следовательно,

$$\varphi \Big|_a^b = M.$$

Воспользовавшись уравнением (6.11) для функции напряжений, получаем

$$(A \ln b + Bb^2 \ln b + Cb^2 + D) - (A \ln a + Ba^2 \ln a + Ca^2 + D) = M,$$

или

$$A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + C(b^2 - a^2) = M. \quad (6.27)$$

Из трех уравнений (6.25) и (6.27) определяются произвольные постоянные A , B , C :

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a};$$

$$B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2);$$

$$C = \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)].$$

Здесь для упрощения принято обозначение

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

После определения постоянных с помощью уравнений (6.20) получаем выражения для напряжений, удовлетворяющие всем граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right); \quad (6.28) \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Если усилия, образующие изгибающую пару M , распределены на торцах бруса как-то иначе, то распределение напряжений у концов отличается от решения (6.28). Однако на основании принципа Сен-Венана можно полагать, что это отклонение небольшое и им можно пренебречь на расстояниях от концов, больших, чем высота сечения бруса.

Точное решение задачи о чистом изгибе получил русский ученый Х. С. Головин в 1881 г.

§ 6.5. Напряжения во вращающихся дисках

Решение задачи о распределении напряжений во вращающихся дисках и цилиндрах имеет важное практическое значение. Рассмотрим сначала вращающийся диск постоянной толщины, находящийся под действием центробежных сил. В общем случае на наружной и внутренней поверхностях могут быть приложены равномерно распределенные радиальные нагрузки. Естественно, что деформированное состояние такого диска осесимметричное и радиальное перемещение u любой точки диска зависит от r , а $v = 0$. Изменением радиальных и касательных напряжений по толщине диска можно пренебречь, если его толщина мала по сравнению с его радиусом. Таким образом, в данном случае имеет место плоское напряженное состояние.

В рассматриваемой задаче объемная сила представлена центробежной силой R :

$$R = \rho \omega^2 r,$$

где ρ — масса единицы объема материала диска; ω — угловая скорость.

Дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad (6.29)$$

включает две неизвестные функции: $\sigma_r(r)$ и $\sigma_\theta(r)$. Выразим их через радиальное перемещение $u(r)$.

Соотношения Коши для осесимметричной задачи в полярных координатах имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \gamma_{r\theta} = 0. \quad (6.30)$$

Следуя закону Гука (6.4) и используя соотношения (6.30), имеем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right); \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}\quad (6.31)$$

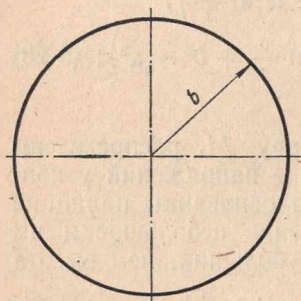


Рис. 6.8

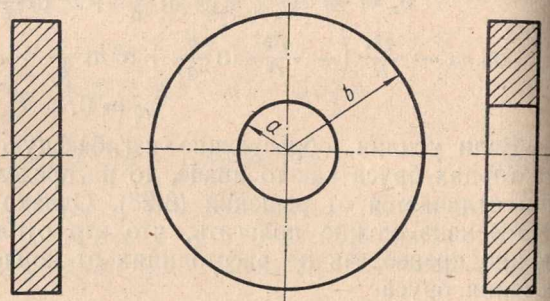


Рис. 6.9

Теперь с учетом (6.31) придем к следующему выражению для уравнения равновесия (6.29):

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r,$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = - \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r,$$

где γ — удельный вес материала; g — ускорение силы тяжести. Интегрируя последнее выражение, получаем

$$u = - \frac{(1-\nu^2) \gamma \omega^2 r^3}{8gE} + C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Используя (6.31), можно установить значения искомых напряжений σ_r и σ_θ в зависимости от радиуса r :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{EC_1}{1-\nu} - \frac{EC_2}{(1+\nu)r^2} - \frac{(3+\nu)\gamma\omega^2}{8g} r^2; \\ \sigma_\theta &= \frac{EC_1}{1-\nu} + \frac{EC_2}{(1+\nu)r^2} - \frac{(1+3\nu)\gamma\omega^2}{8g} r^2.\end{aligned}\quad (6.32)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий задачи.

В качестве первого примера рассмотрим вращающийся сплошной диск постоянной толщины (рис. 6.8). В данном случае следует принять $C_2 = 0$, так как иначе напряжения (6.32) будут в центре диска бесконечно большими. Произвольная постоянная C_1 определится из условия $\sigma_r = 0$ при $r = b$. Отсюда

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E} \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu) b^2.$$

Теперь формулы для составляющих напряжения получают вид

$$\sigma_r = -\frac{\gamma\omega^2}{8g} [(3 + \nu)(b^2 - r^2)];$$

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma\omega^2}{8g} [(3 + \nu)b^2 - (1 + 3\nu)r^2].$$

Нетрудно заметить, что наибольшие напряжения будут в центре диска ($r = 0$):

$$\sigma_{r \max} = \sigma_{\theta \max} = \frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} b^2.$$

Пусть теперь диск имеет центральное отверстие (рис. 6.9) со свободными от нагрузки контурами. Тогда граничные условия имеют вид $\sigma_r = 0$ при $r = a$, $r = b$. Используя эти условия, определим произвольные постоянные:

$$C_1 = \frac{1 - \nu}{E} \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3 + \nu)(a^2 + b^2);$$

$$C_2 = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3 + \nu)a^2b^2.$$

Тогда

$$\sigma_r = -\frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} \left[b^2 + a^2 - r^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} \right];$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} \left[b^2 + a^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} \right].$$

Радиальное напряжение σ_r достигает максимального значения при $r = \sqrt{ab}$:

$$\sigma_{r \max} = -\frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} (b^2 - a^2).$$

Наибольшее напряжение σ_θ имеет место на внутреннем контуре ($r = a$):

$$\sigma_{\theta \max} = \frac{3 + \nu}{4} \frac{\gamma\omega^2}{g} b^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \right).$$

Примерные эпюры напряжений для данного случая показаны на рис. 6.10. Как отсюда видно, наибольшие напряжения имеют место в центральной части диска. Именно поэтому диски турбин делают, как правило, переменной толщины, т. е. более толстыми в центральной части и менее толстыми у периферии.

Если отверстие $r = a$ очень мало, то в последнем выражении можно пренебречь отношением $(a/b)^2$ по сравнению с единицей. Тогда $\sigma_{\theta \max}$ для случая с центральным отверстием будет в два раза больше, чем для сплошного диска. Таким образом, при наличии в диске отверстия малого диаметра наибольшие напряжения удваиваются.

Используя изложенный метод, можно получить решение задачи для вращающегося диска переменной толщины. Пусть h — толщина диска, являющаяся функцией расстояния r от оси вращения. Вырежем из

диска элемент (рис. 6.11), нагруженный поверхностными и объемными силами. Спроектируем все силы, приложенные к элементу, на направление среднего радиуса и приравняем к нулю их сумму:

$$\sigma_r r h d\theta + d(\sigma_r r h d\theta) - \sigma_r r h d\theta - 2\sigma_\theta h dr \sin \frac{d\theta}{2} + q r h dr d\theta = 0.$$

Здесь $q = \frac{\gamma \omega^2 r}{g}$ — интенсивность объемной нагрузки на радиусе r . Учтем также, что

$$2 \sin \frac{d\theta}{2} \approx d\theta.$$

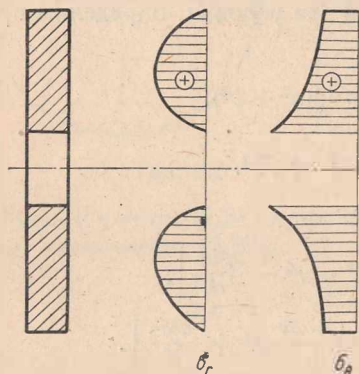


Рис. 6.10

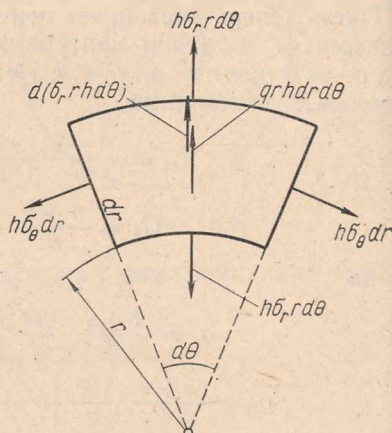


Рис. 6.11

После преобразований дифференциальное уравнение равновесия для средних по толщине напряжений имеет вид

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r h r) - \sigma_\theta h + q h r = 0,$$

или

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \sigma_r + \frac{\gamma \omega^2 r}{g} = 0. \quad (6.33)$$

Как и ранее, используя уравнения (6.31), получаем дифференциальное уравнение для радиальных перемещений u :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \right) \frac{du}{dr} - \left(\frac{1}{r} - \frac{\nu}{h} \frac{dh}{dr} \right) \frac{u}{r} = - \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\gamma \omega^2}{g} r. \quad (6.34)$$

Это уравнение может быть без затруднений проинтегрировано для частного случая, когда толщина и радиус диска связаны зависимостью $h = C r^{-m}$, где C и m — некоторые постоянные. Тогда вместо (6.34) имеем

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1 - m}{r} \frac{du}{dr} - \frac{(1 + \nu m)}{r^2} u = - \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\gamma \omega^2}{g} r.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$u = - \frac{1 - \nu^2}{[8 - (3 + \nu)m]E} \frac{\gamma \omega^2}{g} r^3 + C_1 r^{n_1} + C_2 r^{n_2}.$$

Здесь n_1 и n_2 — корни характеристического уравнения

$$n^2 - mn - (1 + \nu m) = 0,$$

и C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Последующая процедура вычислений такая же, как и для диска постоянной толщины.

Большое практическое значение имеют так называемые диски равного сопротивления или равной прочности. Профиль этих дисков должен быть таков, чтобы в любой точке имело место равенство

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma.$$

При этом условии из закона Гука (6.4) следует, что $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta$. Тогда уравнение совместности для случая осевой симметрии

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0$$

сводится к виду $\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0$ и, следовательно, $\varepsilon_\theta = \text{const}$. В результате этого напряжения σ_r и σ_θ не только равны, но и постоянны в любой точке диска. Тогда уравнение равновесия (6.33) упрощается и приводится к виду

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \sigma + \frac{\gamma \omega^2 r}{g} = 0.$$

Отсюда

$$h = h_0 e^{-\frac{\gamma \omega^2 r^2}{2g\sigma}}.$$

Здесь h_0 — постоянная, равная толщине диска на оси вращения.

§ 6.6. Напряжения во вращающихся длинных цилиндрах

Большой практический интерес представляет исследование напряженного состояния во вращающихся цилиндрах (валах).

Дифференциальное уравнение равновесия элемента цилиндра полностью совпадает с уравнением для диска (6.29). Однако в цилиндре в сечениях, перпендикулярных к оси вращения, могут иметь место осевые нормальные напряжения σ_z . При решении задачи удобно воспользоваться предположением, что сечения цилиндра, находящиеся на достаточном удалении от торцов, являются плоскими и осевая линейная деформация ε_z постоянна по длине цилиндра.

Для рассматриваемой осесимметричной задачи зависимости между деформациями и напряжениями с учетом объемности напряженного состояния будут такими:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Умножим 2-е уравнение (6.35) на rE и продифференцируем по r :

$$E \frac{du}{dr} = \sigma_\theta + r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu(\sigma_z + \sigma_r) - \nu r \left(\frac{d\sigma_z}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} \right).$$

Из сопоставления полученного уравнения с 1-м уравнением (6.35) имеем

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)(1 + \nu) + r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \left(\frac{d\sigma_z}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} \right) = 0.$$

Продифференцируем 3-е уравнение (6.35) по r и подставим значение производной $\frac{d\sigma_z}{dr}$ в последнее уравнение:

$$\sigma_\theta - \sigma_r + (1 - \nu)r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (6.36)$$

Сложим теперь уравнения (6.36) и (6.29):

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r + \sigma_\theta) = -\frac{\gamma \omega^2 r}{g(1 - \nu)}.$$

Отсюда

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -\frac{\gamma \omega^2 r^2}{2g(1 - \nu)} + C_1. \quad (6.37)$$

В результате совместного решения уравнений (6.37) и (6.29) находим интересующее нас напряжение σ_r :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r^2 \sigma_r) &= -\frac{3 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^3 + C_1 r; \\ \sigma_r &= -\frac{3 - 2\nu}{8(1 - \nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Напряжение σ_θ теперь находим из (6.37):

$$\sigma_\theta = -\frac{1 + 2\nu}{8(1 - \nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}. \quad (6.39)$$

Произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий на поверхности цилиндра — аналогично тому, как это делалось в случае диска. Для пустотелого цилиндра, внутренних и внешних радиусы которого соответственно равны a и b , а боковые поверхности свободны, имеем

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{3 - 2\nu}{4(1 - \nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (b^2 + a^2); \\ C_2 &= -\frac{3 - 2\nu}{8(1 - \nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 a^2 b^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3 - 2\nu}{8(1 - \nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left[b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{3 - 2\nu}{8(1 - \nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left[b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 2\nu}{3 - 2\nu} r^2 \right]. \end{aligned}$$

Для сплошного вала радиуса b получим

$$\sigma_r = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (b^2 - r^2);$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8(1-\nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 [(3-2\nu)b^2 - (1+2\nu)r^2].$$

Наибольшие напряжения для полого цилиндра имеют место на внутренней поверхности:

$$\sigma_{\theta \max} = \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 \left(1 + \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Для сплошного цилиндра максимальные напряжения будут в центре:

$$\sigma_{r \max} = \sigma_{\theta \max} = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2.$$

Если концы цилиндра в силу условий закрепления не могут перемещаться, т. е. $\varepsilon_z = 0$, то осевую составляющую напряжений легко определить из уравнения

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta).$$

Если же торцы свободны и цилиндр может деформироваться в осевом направлении ($\varepsilon_z \neq 0$), то осевые деформация и напряжение могут быть определены из условия, что результирующая сила, действующая по торцам в направлении z , равна нулю:

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b \sigma_z r d\theta dr = 0.$$

Для сплошного цилиндра нижний предел во 2-м интеграле равен нулю. Так как в рассматриваемом случае напряжения не зависят от угла θ , то последнее условие запишется

$$\int_a^b z r dr = 0,$$

или

$$\nu \int_a^b (\sigma_r + \sigma_\theta) r dr + E \varepsilon_z \int_a^b r dr = 0.$$

Отсюда

$$\varepsilon_z = - \frac{\nu}{2E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (b^2 + a^2)$$

и

$$\sigma_z = \frac{\nu}{4(1-\nu)} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (b^2 + a^2 - 2r^2).$$

Аналогично определяется σ_z для сплошного цилиндра.

Теперь не составляет труда определить из второго уравнения (6.35) значение радиального перемещения:

$$u = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)].$$

§ 6.7. Влияние отверстия малого диаметра на напряженное состояние растягиваемой пластинки

В отличие от предыдущих, рассматриваемая задача не относится к числу осесимметричных.

Пусть имеется пластинка, подвергающаяся действию растягивающих усилий S (рис. 6.12). В средней части пластинки есть небольшое круглое отверстие радиуса a . Толщину пластинки принимаем равной единице.

Если бы в пластинке не было отверстия, то ее напряженное состояние характеризовалось бы единственным отличным от нуля компонентом напряжения σ_x . Наличие же отверстия существенно сказывается

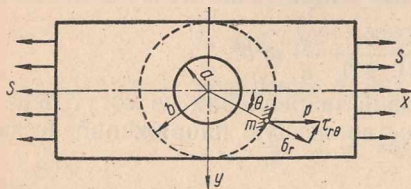


Рис. 6.12

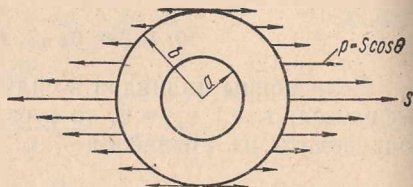


Рис. 6.13

на распределении напряжений в точках, расположенных вблизи отверстия, и, на основании принципа Сен-Венана, почти не влияет на напряжения в точках, достаточно удаленных от него. Используем это обстоятельство при решении поставленной задачи.

Концентрической окружностью радиуса b вырежем из пластинки такую часть, чтобы напряжения на этой окружности по существу не отличались от напряжений в пластинке без отверстия. Таким образом выделяем кольцевую пластинку и сводим задачу к расчету толстостенного кольца (рис. 6.13), у которого напряжения на косых площадках при растяжении $p = S \cos \theta$. Для произвольной точки m , лежащей на наружной окружности (рис. 6.12), воздействие растягивающих усилий может быть разложено на компоненты:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=b} &= p \cos \theta = S \cos^2 \theta = \frac{1}{2} S (1 + \cos 2\theta); \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} &= -p \sin \theta = -S \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2} S \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Из уравнений (6.40) можно заключить, что на кольцо действуют усилия двух видов: постоянное растягивающее радиальное усилие интенсивностью $\frac{S}{2}$, нормальное $\frac{S}{2} \cos 2\theta$ и касательное $-\frac{S}{2} \sin 2\theta$ усилия, зависящие от угла θ . Внутренняя поверхность кольца свободна от нагрузок.

Напряжения, вызываемые постоянными усилиями, легко определяются по формулам (6.15):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_b - p_a}{r^2} + \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{-a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_b - p_a}{r^2} + \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

В нашем случае $p_a = 0$, $p_b = -\frac{1}{2} S$. Знак «минус» говорит о том, что усилия, приложенные к наружной поверхности толсто-стенной трубы в рассматриваемой задаче, направлены в противоположные стороны. Учтем также, что наружный радиус $b \gg a$. Тогда последние выражения упростятся и примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_r' &= \frac{1}{2} S \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \\ \sigma_\theta' &= \frac{1}{2} S \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right).\end{aligned}\quad (6.41)$$

Для определения напряжений, изменяющихся в зависимости от угла θ , воспользуемся функцией напряжения следующего вида:

$$\varphi = f(r) \cos 2\theta.$$

Подставим ее в уравнение совместности деформаций (6.6) и, выполнив преобразования, получим обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right) = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D.$$

Тогда

$$\varphi = \left(Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D\right) \cos 2\theta.$$

Теперь, используя известные нам уравнения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2};\end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right),$$

находим выражения для напряжений, зависящих от угла θ :

$$\sigma_r = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_\theta = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta;$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta.$$

Входящие в выражения для напряжений произвольные постоянные интегрирования определим из граничных условий на внутреннем и наружном контурах кольца:

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = a;$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2} S \cos 2\theta; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{1}{2} S \sin 2\theta \quad \text{при } r = b.$$

Из этих условий, учитывая, что отношение $\frac{a}{b} = 0$, находим интересные нас константы:

$$A = -\frac{S}{4}; \quad B = 0; \quad D = \frac{a^2 S}{2}; \quad C = -\frac{a^4 S}{4},$$

а затем и напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$.

Складывая полученные напряжения с напряжениями (6.41), окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Нетрудно заметить, что с увеличением r слагаемые в скобках быстро убывают и напряженное состояние будет характеризоваться двумя компонентами σ_r и $\tau_{r\theta}$, определяемыми формулами (6.40). С уменьшением r напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ убывают и в предельном случае (при $r = a$) обращаются в нуль. Окружное напряжение σ_θ на внутреннем контуре принимает значение

$$\sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta$$

и достигает максимума $(\sigma_\theta)_{\max} = 3S$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$, т. е. на концах

диаметра, перпендикулярного к направлению растяжения. На концах продольного диаметра ($\theta = 0$; $\theta = \pi$) напряжение σ_θ является сжимающим и равно $(\sigma_\theta)_{\min} = -S$ (рис. 6.14). Определенный интерес представляет исследование характера изменения σ_θ по радиусу. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ из уравнений (6.42) имеем

$$\sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right).$$

Отсюда следует, что с увеличением r окружное напряжение убывает и быстро приближается к значению S . Это свидетельствует о том, что влияние малого отверстия носит местный характер.

§ 6.8. Изгиб кривого бруса силой на конце

Рассмотрим брус прямоугольного поперечного сечения. Один конец бруса зашпелен, а на другом действует в радиальном направлении изгибающая сила P (рис. 6.15). Для простоты толщину бруса принимаем равной единице.

В данном случае компоненты напряжений зависят как от радиуса r , так и от угла θ . Поэтому для определения напряженного состояния, возникающего в брус, воспользуемся уравнением (6.6) и подберем функцию напряжений так, чтобы она удовлетворяла этому уравнению.

Используем положение элементарной теории изгиба кривых брусев, по которому окружное напряжение σ_θ пропорционально $\sin \theta$. Так как $\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$, приходим к выводу, что функция напряжений $\varphi(r, \theta)$ должна быть пропорциональна $\sin \theta$. Таким образом, частное решение уравнения (6.6) ищем в виде

$$\varphi(r, \theta) = f(r) \sin \theta, \quad (6.43)$$

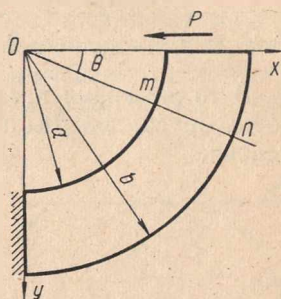


Рис. 6.15

где $f(r)$ — искомая функция, зависящая только от радиуса. Подставив (6.43) в уравнение (6.6), получим

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} f \right) = 0. \quad (6.44)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами путем замены независимой переменной $r = e^t$ можно преобразовать в линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Общее решение такого уравнения будет

$$f(r) = Ar^3 + B \frac{1}{r} + Cr + Dr \ln r.$$

Здесь, как и ранее, A, B, C, D — произвольные постоянные интегрирования, определяемые из условий на контуре.

Теперь функция напряжения имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \left(Ar^3 + B \frac{1}{r} + Cr + Dr \ln r \right) \sin \theta.$$

Используя это решение и уравнения (6.5), запишем выражения для составляющих напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left(2Ar - 2B \frac{1}{r^3} + D \frac{1}{r} \right) \sin \theta; \\ \sigma_\theta &= \left(6Ar + 2B \frac{1}{r^3} + D \frac{1}{r} \right) \sin \theta; \\ \tau_{r\theta} &= - \left(2Ar - 2B \frac{1}{r^3} + D \frac{1}{r} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Произвольные постоянные определяем из условия, что внутренняя и наружная поверхности бруса свободны от нагрузок и на них радиальное и касательное напряжения равны нулю, т. е.

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = a; \quad r = b.$$

С учетом (6.43) эти условия запишутся так:

$$\begin{aligned} 2Aa - 2B \frac{1}{a^3} + D \frac{1}{a} &= 0; \\ 2Ab - 2B \frac{1}{b^3} + D \frac{1}{b} &= 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

В то же время касательные усилия, распределенные по верхнему торцу бруса, должны приводиться к силе P , что дает 3-е необходимое условие:

$$\int_a^b \tau_{r\theta} dr = P,$$

или

$$-A(b^2 - a^2) + B \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} - D \ln \frac{b}{a} = P. \quad (6.47)$$

Из трех уравнений (6.46) и (6.47) определяются произвольные постоянные интегрирования, а затем по (6.45) — выражения для составляющих напряжения.

Следует отметить, что полученное решение можно распространить и на случай произвольного направления изгибающей силы P .

§ 6.9. Действие сосредоточенной силы на прямолинейный край пластинки

Пусть к упругому полупространству, ограниченному плоскостью AB , приложена в точке C некоторая сила P (рис. 6.16, a). Протяженность тела в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, может быть или неограниченной (рис. 6.16, b), или весьма ма-

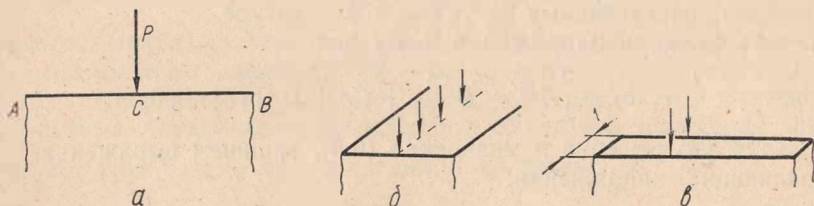


Рис. 6.16

лой (рис. 6.16, c). В 1-м варианте имеем случай плоской деформации, во 2-м — обобщенного плоского напряженного состояния. Принципиального различия в определении напряженного состояния эти варианты не имеют и поэтому безразлично, какой из них рассматривать. Остановимся на 2-м.

Итак, рассмотрим пластинку единичной толщины — упругую полуплоскость — под действием силы P , перпендикулярной к ее краю AB (рис. 6.17). Хотя практически сила распределена по малой площадке, будем считать ее приложенной в точке C . Из-за этого в окрестности точки C возникнут большие напряжения, превышающие предел

упругости. Поэтому заменим силу P эквивалентной ей нагрузкой, распределенной по полуокружности радиуса ρ . Определим напряжения в точках, лежащих вне этой области.

По мере удаления от точки приложения силы вдоль оси x напряжение убывает. Естественно предположить его изменяющимся обратно пропорционально радиусу r . Кроме того, с увеличением отклонения от направления действия силы, т. е. от оси x , радиальные напряжения тоже убывают. Поэтому можно предположить, что напряжения σ_r изменяются прямо пропорционально $\cos \theta$.

Возьмем любую точку M , определяемую координатами r, θ , и проведем через нее площадку, нормальную к радиусу r . Тогда по этой площадке

$$\sigma_r = -k \frac{\cos \theta}{r}, \quad (6.48)$$

где k — подлежащий определению коэффициент. Таким образом, любой элемент на расстоянии r от точки приложения силы испытывает сжатие (об этом говорит знак «минус») в радиальном направлении.

Относительно напряжений σ_θ и $\tau_{r\theta}$ сделаем предположение, что по площадкам радиального направления их нет, т. е.

$$\sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (6.49)$$

Распределение напряжений, описываемое формулами (6.48) и (6.49), называется *радиальным*.

Легко убедиться, что принятые нами значения напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (6.2). Ввиду того что прямолинейный край, кроме точки C , которую мы исключили из рассмотрения, свободен от внешних сил, условия на контуре также выполняются.

Коэффициент k найдем из условия, чтобы равнодействующая усилий, действующих по цилиндрической поверхности радиуса ρ , уравновешивала силу P :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \rho \cos \theta d\theta = P.$$

Подставляем сюда σ_r из (6.48), причем опускаем знак, так как он уже учтен при выборе направления усилий. Проинтегрировав, получаем

$$k = \frac{2P}{\pi}.$$

Таким образом,

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (6.50)$$

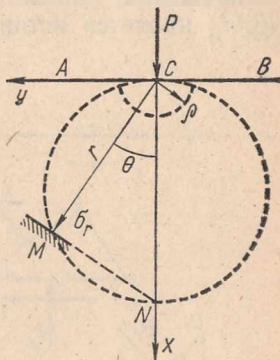


Рис. 6.17

Решение (6.50) и (6.49) будет точным, если удовлетворим и уравнению совместности. Для доказательства этого введем в рассмотрение функцию напряжений

$$\varphi = -\frac{k}{2} r \theta \sin \theta. \quad (6.51)$$

Подставив (6.51) в (6.5), получаем выражения для составляющих напряжения, полностью совпадающие с (6.48) и (6.49), т. е. функция (6.51) является истинной функцией напряжений. Подстановка (6.51)

в уравнение совместности деформаций

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

показывает, что оно тождественно удовлетворяется.

Таким образом, можно утверждать, что полученное нами решение точное, а сделанные предположения соответствуют действительности.

Проведем дополнительное исследование, позволяющее лучше представить характер распределения напряжений по полуплоскости.

Построим окружность, проходящую через точки C и M (рис. 6.17),

и продолжим направление площадки до пересечения с осью x в точке N . Диаметр этой окружности $CN = d$, а отрезок $CM = r$. Из треугольника CMN

$$\cos \theta = \frac{CM}{CN}, \text{ или } \cos \theta = \frac{r}{d}.$$

Отсюда

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{d}.$$

Учитывая (6.50), имеем

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d} = \text{const.}$$

Значит, в любой точке окружности, за исключением точки C , на площадках, перпендикулярных к радиусу-вектору, радиальные напряжения одинаковы. Иными словами, такую окружность можно считать траекторией равных напряжений σ_r .

Теперь получим соотношения, позволяющие найти характер распределения напряжений на некоторой глубине x от поверхности. Рассмотрим условия равновесия элементарных призм abc и $a_1b_1c_1$ (рис. 6.18). Площадь грани ab обозначим dF , тогда площадь грани

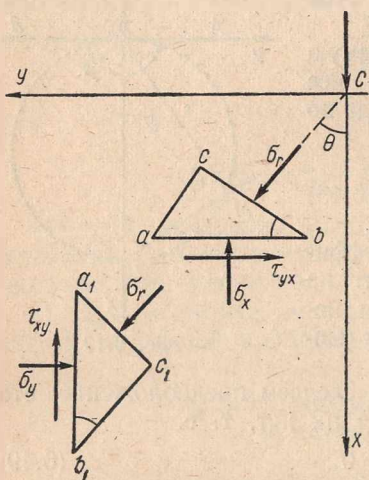


Рис. 6.18

■ будет $dF \cos \theta$. Для призмы abc

$$\sum_{\text{пр}} x = 0; \quad -\sigma_x dF + \sigma_r \cos^2 \theta dF = 0;$$

$$\sum_{\text{пр}} y = 0; \quad -\tau_{xy} dF + \sigma_r \cos \theta \sin \theta dF = 0.$$

Для призмы $a_1 b_1 c_1$

$$\sum_{\text{пр}} y = 0; \quad -\sigma_y dF + \sigma_r \sin^2 \theta dF = 0.$$

Итак, имеем

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta;$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta;$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta.$$

(6.52)

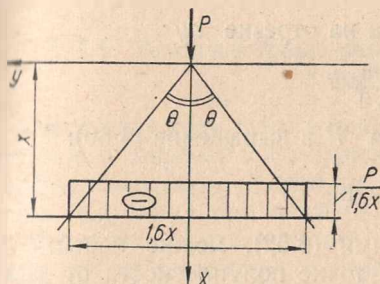


Рис. 6.19

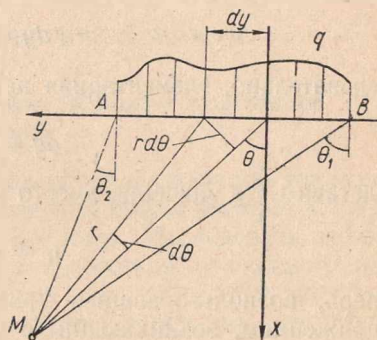


Рис. 6.20

Чтобы записать уравнения (6.52) в декартовых координатах, воспользуемся формулами перехода $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos \theta = \frac{x}{r}$; $\sin \theta = \frac{y}{r}$;

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi r} \sin^2 \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi r} \sin \theta \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Нормальное напряжение σ_x достигает своего максимального значения по линии действия силы P :

$$\sigma_{x\text{max}} = -\frac{2P}{\pi x}$$

и убывает по мере удаления от нее влево и вправо, а также с увеличением расстояния от прямолинейного края пластинки.

Обычно принимают, что действие приложенного усилия по глубине распределяется под некоторым углом (рис. 6.19):

$$\sigma_{x\text{max}} = -\frac{P}{\frac{\pi x}{2}} \approx -\frac{P}{1,6x}.$$

Таким образом, на глубине x груз равномерно распределяется по площадке длиной $1,6x$. Теперь не сложно определить угол:

$$2y = 1,6x; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = 0,8;$$

$$\theta \approx 38^\circ.$$

Полученное решение можно обобщить на случай сплошной нагрузки интенсивностью q (рис. 6.20).

Выделим бесконечно малый элемент dy , на который приходится нагрузка qdy . В полярной системе координат

$$dy = \frac{rd\theta}{\cos \theta}.$$

Следовательно, элементарная нагрузка на отрезке dy

$$dq = q \frac{rd\theta}{\cos \theta}.$$

Подставим это значение вместо усилия P в выражение (6.50):

$$\sigma_r = - \frac{2q}{\pi} d\theta.$$

Теперь, воспользовавшись уравнениями (6.52), можно перейти к напряжениям, возникающим в любой точке полуплоскости от действия нагрузки dq :

$$\sigma_x = - \frac{2q}{\pi} \cos^2 \theta d\theta;$$

$$\sigma_y = - \frac{2q}{\pi} \sin^2 \theta d\theta;$$

$$\tau_{xy} = - \frac{2q}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Если нагрузка распределена на отрезке AB и угол изменяется от θ_1 до θ_2 , то, суммируя напряжения от отдельных элементарных грузов, получим

$$\sigma_x = - \frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \cos^2 \theta d\theta;$$

$$\sigma_y = - \frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \sin^2 \theta d\theta;$$

$$\tau_{xy} = - \frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Чтобы проинтегрировать эти выражения, в общем случае требуется предварительно выразить нагрузку q как функцию угла θ . Наиболее просто задача решается в случае равномерно распределенной нагруз-

II. В этом случае ($q = \text{const}$) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{q}{2\pi} \left| \sin 2\theta + 2\theta \right|_{\theta_1}^{\theta_2}; \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2\pi} \left| -\sin 2\theta + 2\theta \right|_{\theta_1}^{\theta_2}; \\ \tau_{xy} &= \frac{P}{2\pi} \left| \cos 2\theta \right|_{\theta_1}^{\theta_2}.\end{aligned}$$

Глава 7

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 7.1. Температурные напряжения. Основные уравнения термоупругости

В последние годы с увеличением температур и скоростей тепловых процессов в современной технике значительно возрос интерес к проблеме температурного состояния упругого тела. Исследовать напряженное состояние при температурном воздействии необходимо при разработке новых конструкций паровых и газовых турбин, ракетных и реактивных двигателей, ядерных реакторов, в авиации, металлургии и т. д. Очень часто при этом приходится изучать и перемещения, вызванные изменением температур и определяющие относительное положение элементов конструкций в работе. Кроме того, в деталях, работающих в условиях высоких температур, особенно при неравномерном нестационарном нагреве, может иметь место изменение физико-механических свойств материалов. В деталях из материала повышенной хрупкости температурные напряжения как сами по себе, так и совместно с напряжениями от внешних сил могут привести к появлению трещин и к разрушению. Таким образом, температурные напряжения играют важную роль при оценке работоспособности элементов конструкций и, естественно, исследователь должен уметь владеть методами их определения.

Рассмотрим элементарный параллелепипед, нагретый до некоторой температуры T . Если ничто не препятствует его свободному расширению, то температурные напряжения в нем не возникают. В результате нагревания элемент длины ds получает новую длину $(1 + \alpha T) ds$, где α — коэффициент линейного температурного расширения, представляющий собой относительное удлинение при повышении температуры на один градус. Если тело однородно и изотропно, то коэффициент α не зависит ни от направления элемента ds , ни от координат. Обычно для упрощения расчетов считают, что коэффициент α не зависит и от температуры, хотя такое предположение, вообще говоря, оправдывается более или менее приближенно. В случае свободного расширения элементарного параллелепипеда углы между его гранями не искажаются, вследствие чего деформация сдвига отсутствует, а удлинения по всем направлениям имеют одинаковую

величину. Таким образом, тепловые деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_x'' &= \varepsilon_y'' = \varepsilon_z'' = \alpha T; \\ \gamma_{xy}'' &= \gamma_{yz}'' = \gamma_{xz}'' = 0.\end{aligned}\quad (7.1)$$

Если элемент не имеет возможности свободно расширяться или тело нагрето неравномерно, то в нем возникают температурные или тепловые напряжения. Тогда общая деформация складывается из упругой ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \dots$) и тепловой ($\varepsilon_x'', \varepsilon_y'', \varepsilon_z'', \dots$) деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T.\end{aligned}\quad (7.2)$$

Используя полученную систему уравнений, можно получить выражения напряжений через деформации. Сложим три уравнения (7.2):

$$\vartheta = \frac{1}{E} (1 - 2\nu) \vartheta + 3\alpha T. \quad (7.3)$$

Теперь, решая уравнения (7.2) относительно напряжений и принимая во внимание (7.3), получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \vartheta + 2G\varepsilon_x - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu}; \\ \sigma_y &= \lambda \vartheta + 2G\varepsilon_y - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu}; \\ \sigma_z &= \lambda \vartheta + 2G\varepsilon_z - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu}.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Здесь λ и G — упругие постоянные Ламе. Напомним, что

$$\lambda = \frac{Ev}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{и} \quad \frac{E}{2(1 + \nu)} = G.$$

Уравнения (7.4) представляют собой закон Гука в форме Ламе при температурном воздействии.

Касательные напряжения определяются по обычным выражениям:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}. \quad (7.5)$$

Для тела, испытывающего тепловые напряжения, остаются в силе зависимости Коши между перемещениями и деформациями и условия совместности деформаций Сен-Венана. Тепловые напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия и граничным условиям.

Подставим выражения (7.4), (7.5) в уравнения равновесия (1.5), полагая, что объемные силы отсутствуют. В результате получим сле-

дующие уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + G \nabla^2 u - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0; \\(\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + G \nabla^2 v - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0; \\(\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + G \nabla^2 w - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (7.6)$$

При наличии температурных воздействий выражения (7.6) замещают уравнения Ламе (4.2) и известны как *уравнения Дюгамеля — Неймана*. Сопоставляя (7.6) и (4.2) и полагая, что нагрев не изменяет механических свойств материала, видим, что влияние температуры вызывает появление в (7.6) фиктивной силы, пропорциональной температурному градиенту.

Граничные условия при отсутствии поверхностных сил имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0; \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= 0; \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= 0.\end{aligned}$$

С помощью уравнений (7.4) и (7.5) они могут быть преобразованы к компонентам перемещений:

$$\begin{aligned}l \lambda \vartheta + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) = l \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu}; \\ m \lambda \vartheta + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + \\ + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) = m \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu}; \\ n \lambda \vartheta + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + \\ + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) = n \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu}.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Сравнивая (7.6) и (7.7) с соответствующими уравнениями обычной задачи теории упругости, замечаем, что они между собой полностью совпадают, если величины

$$-\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (7.8)$$

принять за составляющие объемных сил, а $\frac{\alpha E T}{1 - 2\nu}$ — за внешнее, нормальное к поверхности давление.

В данном случае рассматривается тело, которое находится под воздействием только температур, а любые иные нагрузки отсутствуют. Следовательно, перемещения u , v , w , возникающие от изменения

температуры T , будут точно такими же, как перемещения при действии объемных сил (7.8) и поверхностного давления $\frac{\alpha ET}{1-2\nu}$. Иными словами, температурная задача приводится к обычной задаче теории упругости при наличии объемных сил с компонентами (7.8) и поверхностного давления интенсивностью

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu}.$$

Аналогично можно сказать, что нормальные составляющие напряжения (7.4) состоят из слагаемых, обусловленных воздействием объемных сил (7.8) и поверхностного давления $\frac{\alpha ET}{1-2\nu}$.

§ 7.2. Температурные напряжения в тонких дисках

Рассмотрим в полярной системе координат тонкий круговой диск без отверстия при неравномерном распределении температур. Пусть температура T — функция только радиуса r , а тепловое состояние диска установившееся. Поскольку осевой размер диска мал, имеем случай осесимметричного плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$).

Для рассматриваемого случая связь между компонентами деформации и напряжения с учетом температурной деформации запишется, согласно (6.4), в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha T; \\ \gamma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (7.10)$$

будет тождественно удовлетворено, если ввести в рассмотрение такую функцию напряжений φ , чтобы

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r}; \quad \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr}. \quad (7.11)$$

Подставим выражения (7.9) и (7.11) в уравнение совместности деформаций (см. § 6.3):

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0.$$

После преобразований получим дифференциальное уравнение относительно функции напряжений:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\alpha E \frac{dT}{dr}.$$

Принимем это уравнение в виде, удобном для интегрирования:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\alpha E \frac{dT}{dr}. \quad (7.12)$$

Проинтегрировав дважды (7.12), получим

$$\varphi = -\frac{\alpha E}{r} \int_0^r T(r) r dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (7.13)$$

Теперь не представляет труда, используя (7.11) и (7.13), найти выражения для напряжений:

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{r^2} \int_0^r T(r) r dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}; \quad (7.14)$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left[-T(r) + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условий на контуре. Если диск сплошной, то из условия, что напряжения в центре должны иметь конечные значения, следует $C_2 = 0$. В случае отсутствия на наружном контуре внешних сил $\sigma_r = 0$ при $r = b$ и значение C_1 находится из первого уравнения (7.14):

$$C_1 = \frac{2\alpha E}{b^2} \int_0^b T(r) r dr.$$

Окончательно выражения для напряжений примут вид

$$\sigma_r = \alpha E \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right); \quad (7.15)$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left(-T(r) + \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right).$$

Наконец напряжения определяются величинами членов в скобках. Так, напряжение σ_r на расстоянии r от центра диска будет растягивающим, если средняя температура диска больше средней температуры внутренней части диска, очерченной радиусом r . В центре диска (при $r = 0$) радиальное и окружное напряжения равны.

Можно показать еще один вариант вывода выражений компонентов напряжений для тонкого диска с радиальным распределением температур.

Радиальные перемещения u вследствие симметрии задачи зависят только от радиуса r , а перемещения v в направлении θ равны нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha T; \\ \gamma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Решив уравнения (7.16) относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu) \alpha T \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} - (1+\nu) \alpha T \right].\end{aligned}\quad (7.17)$$

Подставив эти выражения в уравнение равновесия (7.10), найдем уравнение для радиального перемещения:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu) \alpha \frac{dT}{dr},$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right] = (1+\nu) \alpha \frac{dT}{dr}.$$

После интегрирования последнего уравнения имеем

$$u = \frac{\alpha(1+\nu)}{r} \int_0^r T(r) r dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}.$$

Располагая выражением для перемещения u , получим из (7.17) формулы для напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{\alpha E}{r^2} \int_0^r T(r) r dr + \frac{E}{2(1-\nu)} C_1 - \frac{E}{(1+\nu)r^2} C_2; \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E}{r^2} \int_0^r T(r) r dr + \frac{E}{2(1-\nu)} C_1 + \frac{E}{(1+\nu)r^2} C_2.\end{aligned}\quad (7.18)$$

Учитывая, что для сплошного диска постоянная интегрирования $C_2 = 0$, постоянную C_1 найдем из условия, что при $r = b$ радиальное напряжение $\sigma_r = 0$:

$$C_1 = \frac{2(1-\nu)\alpha}{b^2} \int_0^b T(r) r dr.$$

Тогда выражения для напряжений приводятся к виду (7.15).

В качестве примера рассмотрим тонкий диск, у которого температура в точке, определяемой радиусом r , выражается формулой

$$T = (T_1 - T_2) - (T_1 - T_2) \frac{r^2}{b^2},$$

где T_1 — температура в центре диска, а T_2 — температура у контура. Тогда из (7.15) после интегрирования получаем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{1}{4} \alpha E (T_1 - T_2) \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{1}{4} \alpha E (T_1 - T_2) \left(1 - \frac{3r^2}{b^2} \right).\end{aligned}$$

Если диск имеет центральное отверстие радиуса $r = a$, то в случае отсутствия внешних сил постоянные

$$C_1 = \frac{2\alpha E}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr, \quad C_2 = - \frac{a^2 \alpha E}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr$$

вместо (7.15) получим

$$\begin{aligned} \sigma_r = \alpha E \left[- \frac{1}{r^2} \int_a^b T(r) r dr + \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - \right. \\ \left. - \frac{a^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \int_a^b T(r) r dr \right]; \\ \sigma_\theta = \alpha E \left[- T + \frac{1}{r^2} \int_a^b T(r) r dr + \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \int_a^b T(r) r dr \right]. \end{aligned}$$

§ 7.3. Температурные напряжения в цилиндре

Рассмотрим длинный толстостенный цилиндр (трубу), находящийся под температурным воздействием. Пусть на контуре отсутствуют внешние силы, а распределение температур симметрично относительно оси цилиндра и не изменяется в осевом направлении, т. е. $T = T(r)$. Внутренний радиус цилиндра равен a , наружный — b (рис. 7.1).

Поскольку температура постоянна по длине, можно полагать, что на достаточном удалении от концов все сечения цилиндра, перпендикулярные к его оси, остаются плоскими и работают в одинаковых условиях. Таким образом, относительное удлинение по направлению оси z следует считать постоянной, но пока неизвестной величиной:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \text{const.} \quad (7.19)$$

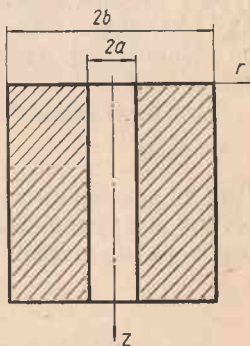


Рис. 7.1

Каждая точка цилиндра будет перемещаться только в направлении радиуса r на величину u и параллельно оси z на величину w . Ни u , ни w не зависят от угла θ . Следовательно, относительные удлинения в радиальном и окружном направлениях можно выразить формулами

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (7.20)$$

Напомним, что в полярной системе координат закон Гука в форме Ламе при наличии температурного воздействия имеет вид

$$\sigma_r = \lambda \vartheta + 2G\varepsilon_r - \frac{\alpha ET}{1-2\nu};$$

$$\sigma_\theta = \lambda \vartheta + 2G\varepsilon_\theta - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}.$$

С учетом (7.20) эти уравнения могут быть записаны в другой форме

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right) + 2G \frac{du}{dr} - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}; \\ \sigma_\theta &= \lambda \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right) + 2G \frac{u}{r} - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}.\end{aligned}\quad (7.21)$$

Подставим теперь σ_r и σ_θ из (7.21) в дифференциальное уравнение равновесия (7.10), записанное для случая отсутствия внешних сил. После преобразований получим

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{dT}{dr}. \quad (7.22)$$

С интегрированием такого уравнения, отличающегося от (7.22) только коэффициентом в правой части, мы встречались в § 7.2. Решение уравнения (7.22) имеет вид

$$u = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)r} \int_a^r T(r) r dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (7.23)$$

Если перемещение u известно, то по формулам (7.21), где температура T задана, можно найти напряжения σ_r и σ_θ . Однако в выражениях (7.21) присутствует постоянная величина ε_z , значение которой еще не установлено. Таким образом, кроме постоянных C_1 и C_2 необходимо также найти 3-ю постоянную — ε_z .

Для определения C_1 и C_2 используем условия на контуре:

$$\sigma_r|_{r=a} = \sigma_r|_{r=b} = 0. \quad (7.24)$$

Для определения ε_z воспользуемся условием, что цилиндр не несет осевой нагрузки, иными словами, равнодействующая в направлении оси z равна нулю:

$$2\pi \int_a^b \sigma_z r dr = 0. \quad (7.25)$$

Из уравнения

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T$$

выразим σ_z через ε_z и подставим его в (7.25). Тогда 2 условия (7.24) и условие (7.25) дают нам систему трех уравнений относительно трех постоянных — C_1 , C_2 , ε_z . Решая эту систему, находим искомые значения

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2\alpha (1 - 3\nu)}{(b^2 - a^2) (1 - \nu)} \int_a^b T(r) r dr; \\ C_2 &= \frac{\alpha a^2 (1 + \nu)}{(b^2 - a^2) (1 - \nu)} \int_a^b T(r) r dr; \\ \varepsilon_z &= \frac{2\alpha}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Подставляя постоянные (7.26) в формулы для нормальных напряжений, получаем их окончательное выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr + \frac{r^2 - a^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \int_a^b T(r) r dr \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr + \frac{r^2 + a^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \int_a^b T(r) r dr - T \right]; \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - T \right]. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае все сдвиги, а следовательно, и касательные напряжения будут отсутствовать.

Следует отметить, что чем тоньше стенки цилиндра, тем точнее выполняется условие отсутствия напряжений σ_z на торце.

Если в стенках цилиндра имеет место установившийся тепловой поток, причем температура на внутренней поверхности T_a , а на внешней равна нулю, то на расстоянии r от центра зависимость температуры от радиуса представляется формулой

$$T = \frac{T_a}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r}.$$

Температурные напряжения в этом случае определяются из следующих формул:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E T_a}{2 (1 - \nu) \ln \frac{b}{a}} \left[-\ln \frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E T_a}{2 (1 - \nu) \ln \frac{b}{a}} \left[1 - \ln \frac{b}{a} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right]; \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E T_a}{2 (1 - \nu) \ln \frac{b}{a}} \left[1 - 2 \ln \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right]. \end{aligned}$$

Распределение напряжений по толщине стенки цилиндра показано на рис. 7.2. При положительной температуре T_a напряжения на

внутренней поверхности будут сжимающими, а на внешней — растягивающими. Причем напряжения σ_θ и σ_z по абсолютной величине одинаковы как на внешней, так и на внутренней поверхности. Радиальное напряжение во всех точках сечения сжимающее, а на поверхностях равняется нулю.

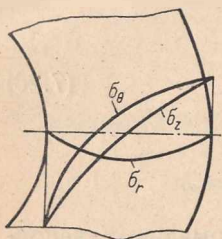


Рис. 7.2

Если цилиндр имеет тонкие стенки, т. е. отношение радиусов близко к единице, то выражения для напряжений можно приближенно записать в виде

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = -\frac{\alpha E T_a}{2(1-\nu)};$$

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha E T_a}{2(1-\nu)}.$$

В случае сплошного цилиндра постоянная C_2 по тем же соображениям, что и в § 7.2, должна быть равна нулю. Постоянная

$$C_1 = \frac{2\alpha(1-3\nu)}{(1-\nu)b^2} \int_0^b T(r) r dr,$$

и нормальные напряжения запишутся в более простой форме:

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr + \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr \right];$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr + \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr - T \right];$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{2}{b^2} \int_0^b T(r) r dr - T \right].$$

Температурные напряжения в пластинках и оболочках рассмотрены в § 10.6 и 11.5.

Глава 8

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

§ 8.1. Постановка вопроса. Решение задачи о кручении с помощью функции кручения

Изучая работу реальных упругих структур, инженер-исследователь часто сталкивается с задачами кручения. Такие задачи встречаются прежде всего при расчете всевозможных машинных валов. В большинстве своем эти валы имеют круглое поперечное сечение, но бывают и отклонения от этого правила. Нередко на кручение работают стержни прямолинейного очертания, входящие в состав сложных сооружений (мостов, ферм), балки судового набора и др.

Задача о чистом кручении прямых призматического и цилиндриче-

ного стержней решается следующим образом. Рассмотрим упругий стержень произвольного поперечного сечения, нагруженный лишь на торцовых поверхностях, перпендикулярных к оси стержня, нагрузками, статически эквивалентными крутящему моменту. Объемными силами пренебрегаем.

Поместим начало координат на левом торце, ось z направим вдоль оси стержня, а оси x и y — по главным осям оснований. Граничные условия запишутся следующим образом:

на боковой поверхности

$$\begin{aligned} p_{Nx} &= \sigma_x \cos(N, x) + \tau_{xy} \cos(N, y) = 0; \\ p_{Ny} &= \tau_{xy} \cos(N, x) + \sigma_y \cos(N, y) = 0; \\ p_{Nz} &= \tau_{xz} \cos(N, x) + \tau_{yz} \cos(N, y) = 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

на торцах

$$\begin{aligned} Q_x &= \iint_F \tau_{xz} dF = 0; \quad M_x = \iint_F \sigma_z y dF = 0; \\ Q_y &= \iint_F \tau_{yz} dF = 0; \quad M_y = \iint_F \sigma_z x dF = 0; \\ Q_z &= \iint_F \sigma_z dF = 0; \quad M_z = \iint_F (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dF. \end{aligned} \quad (8.2)$$

При выполнении граничных условий (8.1), (8.2) возникает *чистое кручение*. Существенно здесь то, что брус имеет постоянное сечение и крутящий момент также постоянен по длине стержня. Если эти условия не выполняются, а именно: крутящий момент является функцией от z , а на торцах помимо крутящих моментов дополнительно действуют самоуравновешенные нормальные нагрузки, то кручение, возникающее в этом случае, носит название *стесненного*.

Задачу о чистом кручении стержня будем решать, используя полубратный метод Сен-Венана. При этом сделаем некоторые предположения относительно закона распределения части напряжений, основываясь на результатах элементарного решения для круглого стержня. Затем попытаемся определить остальные компоненты напряжений так, чтобы удовлетворялись все основные уравнения теории упругости. Если такая попытка окажется удачной, то на основании теоремы о единственности решения можно будет утверждать, что решение, частично предугаданное, является решением (правильным настолько, насколько верны сделанные ранее допущения) поставленной задачи.

Итак, принимаем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz}(x, y); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \end{aligned} \quad (8.3)$$

В этом случае уравнения равновесия упростятся и примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

На боковой поверхности первые 2 уравнения (8.1) выполняются тождественно, а 3-е принимает вид

$$\tau_{xz} \cos(N, x) + \tau_{yz} \cos(N, y) = 0. \quad (8.5)$$

На торцах $\cos(N, x) = 0$ и $\cos(N, y) = 0$, а $\cos(N, z) = 1$. Поэтому компоненты p_{Nx} , p_{Ny} и p_{Nz} из (1.7) будут равны соответственно τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z . Чтобы облегчить задачу, попытаемся вместо касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} подобрать компоненты вектора перемещений. Значения последних легко определить из не-
сложных геометрических построений.

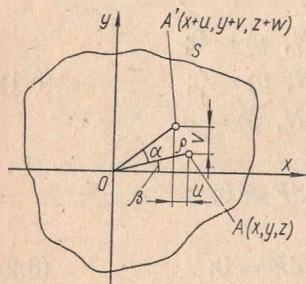


Рис. 8.1

Рассмотрим произвольную точку $A(x, y, z)$ внутри контура s сечения (рис. 8.1). Расстояние от точки A до начала координат обозначим через ρ . После деформации стержня, которая, естественно, принимается малой, точка A перейдет в положение A' . Координаты ее теперь будут соответственно $x + u$; $y + v$; $z + w$. Угол закручивания при перемещении точки A в положение A' обозначим через α . Будем считать, что при малых деформациях этот угол ли-

нейно зависит от расстояния, на которое сечение удалено от начала координат:

$$\alpha = kx,$$

где k — угол закручивания на единицу длины; он называется иногда *круткой*.

Малость деформации, которая предопределяет малость угла α , позволяет предположить, что

$$\sin \alpha \approx \alpha; \quad \cos \alpha \approx 1; \quad OA = OA' = \rho. \quad (8.6)$$

Из чертежа следует, что

$$\begin{aligned} u &= \rho \cos(\alpha + \beta) - \rho \cos \beta; \\ v &= \rho \sin(\alpha + \beta) - \rho \sin \beta. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Отсюда с учетом (8.6)

$$u = -kyz; \quad v = kxz. \quad (8.8)$$

Проведенные геометрические рассуждения ни в коей мере не могут претендовать на исчерпывающую полноту. Правильность выбора тех или иных зависимостей для перемещений определяет то, насколько точно они удовлетворяют основным уравнениям теории упругости и граничным условиям.

На перемещение w не накладываются никакие ограничения, кроме предположения о том, что оно не зависит от координаты z , а это означает, что деформации всех поперечных сечений одинаковы;

$$w = k\varphi(x, y), \quad (8.9)$$

где φ — неизвестная функция от x и y , называемая *функцией кручения*.

Здесь при строгом исследовании задачи о кручении призматического стержня уже не делаем предположения о неизменности формы поперечного сечения, которое было подтверждено элементарной теорией при решении задачи для круглого бруса. Решения (8.8) и (8.9) не противостоят ранее сделанному предположению (8.3) относительно нормальных напряжений и касательного напряжения τ_{xy} . Чтобы убедиться в скажем, перейдем при помощи обобщенного физического закона от (8.3) к относительным деформациям:

$$\varepsilon_x = 0; \quad \varepsilon_y = 0; \quad \varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{xy} = 0. \quad (8.10)$$

Выражения (8.10) можно считать эквивалентом (8.3). С другой стороны, подставив (8.8) и (8.9) в уравнения Коши, опять-таки получим для относительных деформаций значения, совпадающие с (8.10). Выражения для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} найдем непосредственной подстановкой:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = kG \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right); \\ \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = kG \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Теперь проверим, удовлетворяют ли (8.8) и (8.9) основным разрешающим уравнениям теории упругости и граничным условиям, с тем чтобы получить непротиворечивый результат.

Если подставить (8.11) в (8.4), то первые 2 уравнения из (8.4) удовлетворяются тождественно, а 3-е преобразуется в

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

или

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Таким образом, функция кручения — гармоническая функция, определяемая из уравнения Лапласа.

Граничные условия (8.5) после подстановки (8.11) приобретут следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(N, y) = y \cos(N, x) - x \cos(N, y). \quad (8.12)$$

Очевидно, что левую часть (8.12) можно записать более компактно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(N, y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dN} + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dN} = \frac{\partial \varphi}{\partial N}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

и поэтому (8.12) примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = y \cos(N, x) - x \cos(N, y). \quad (8.14)$$

Итак, задача о кручении свелась к определению функции кручения φ , которая внутри контура сечения должна удовлетворять уравнению

Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$, а на контуре — условию (8.14). Такая задача, когда ищут решение уравнения Лапласа в области, имеющей на границе заданную нормальную производную от искомой функции $\frac{\partial \varphi}{\partial N} \Big|_{\text{гр}} = f(s)$, носит название *второй граничной задачи* или *задачи Неймана*.

Если известна функция кручения φ , можно легко отыскать как перемещения, так и напряжения с точностью до постоянного множителя k , который определится из интегральных выражений для усилий на торцах стержня:

$$\begin{aligned} Q_x &= \iint_F \tau_{xz} dx dy; \\ Q_y &= \iint_F \tau_{yz} dx dy; \\ M_z &= \iint_F (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Преобразуем 1-е выражение (8.15), для чего прибавим к подынтегральному выражению 3-е из уравнений (8.4), умноженное на x . Такая операция, очевидно, не изменит 1-го выражения (8.15), которое в этом случае приобретет вид

$$\begin{aligned} Q_x &= \iint_F \left[\tau_{xz} + x \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \right] dx dy = \\ &= \iint_F \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (x\tau_{yz}) \right] dx dy. \end{aligned}$$

На основании формулы Грина выражение для Q_x можно преобразовать к контурному интегралу:

$$Q_x = \int_s x [\tau_{xz} \cos(N, x) + \tau_{yz} \cos(N, y)] ds,$$

который равен нулю, потому что равно нулю выражение (8.5) под знаком интеграла. Аналогично можно получить, что $Q_y = 0$. Итак, $Q_x = 0$; $Q_y = 0$, что и было предположено ранее в (8.2).

Используем 3-е выражение (8.15):

$$M_z = kG \iint_F \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dx dy. \quad (8.16)$$

Из него, после того как определена функция кручения φ , можно определить единичный угол закручивания k , а затем легко найти все напряжения и перемещения [(8.11), (8.9), (8.10)].

Бывают случаи, когда граничные условия (8.5) удобно представить в несколько ином виде, чем это было сделано ранее.

Полагая положительными направление внешней нормали и обход контура против часовой стрелки, в соответствии с рис. 8.2 можем запи-

$$\cos(N, x) = \cos \alpha_1 = \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dN} = \cos(s, y); \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \cos(N, y) &= \cos \alpha_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = \\ &= -\sin \alpha_1 = -\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dN} = -\cos(s, x). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения для $\cos(N, x)$ и $\cos(N, y)$ в (8.5), получим

$$\tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0,$$

$$\text{или} \quad \left(\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}\right)_{\text{гп}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{гп}}. \quad (8.18)$$

Физический смысл полученного равенства состоит в том, что полное касательное напряжение направлено по касательной к контуру.

Как уже указывалось, задача о кручении в той постановке, в какой мы ее рассматривали, свелась к задаче Неймана. Нетрудно показать, что задачу о кручении можно свести к задаче Дирихле — задаче нахождения гармонической функции F внутри некоторой области, удовлетворяющей условию на границе $F(s) = f(s)$, где $f(s)$ — известная функция от координат точек s контура. Задача Дирихле называется также *первой краевой задачей*.

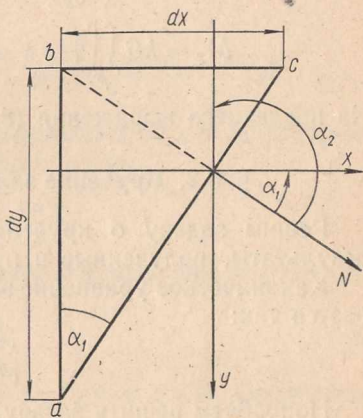


Рис. 8.2

Чтобы перейти от задачи Неймана к задаче Дирихле, введем новую функцию $F(x, y)$, связанную с функцией кручения $\varphi(x, y)$ следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (8.19)$$

Соотношения (8.19) носят название *условий Коши — Римана* и определяют две сопряженные гармонические функции, которые, вообще говоря, можно рассматривать как действительную и мнимую части аналитической функции комплексного переменного.

Функция F называется *сопряженной гармонической функцией* φ . Функция F также гармоническая. В этом легко убедиться, если продифференцировать 1-е выражение (8.19) по x , 2-е — по y и результаты сложить.

Преобразуем граничные условия с помощью соотношений (8.19) и (8.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial N} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(N, y) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial x} \left(-\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial F}{\partial s}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Используя (8.20), преобразуем (8.14):

$$\frac{\partial F}{\partial s} = y \cos(N, x) - x \cos(N, y) = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right).$$

Интегрируя, получим

$$F = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + B \text{ (на контуре } s).$$

Для однозначных областей, не нарушая общности, можно считать $B = 0$.

Определим в заключение через функцию F касательные напряжения (8.11) и крутящий момент (8.16):

$$\tau_{xz} = kG \left(\frac{\partial F}{\partial y} - y \right); \quad \tau_{yz} = -kG \left(\frac{\partial F}{\partial x} - x \right); \quad (8.21)$$

$$M_z = kG \iint_F \left(-x \frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial F}{\partial y} + x^2 + y^2 \right) dx dy.$$

Из последнего выражения (8.21) определяется k .

§ 8.2. Кручение эллиптического и круглого стержней

Решим задачу о кручении эллиптического стержня, используя результаты, полученные в предыдущем параграфе.

Каноническое уравнение эллипса, отнесенного к осям x и y , записывается так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8.22)$$

Попробуем решить задачу, приняв функцию кручения в виде

$$\varphi = Axy, \quad (8.23)$$

где A — константа, которая в последующем будет определена через параметры эллипса. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что φ из (8.23) удовлетворяет уравнению Лапласа. Помимо уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$ принятое выражение для φ должно удовлетворять и граничным условиям (8.18).

Определим константу A . Для этого дважды составим отношение $\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}$. Первый раз используем выражения (8.11), в которые φ подставим из (8.23):

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{A+1}{A-1} \frac{x}{y}.$$

Вторично это отношение можно получить из (8.5), (8.17) и выражения $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$ — результата дифференцирования уравнения контура (8.22). В этом случае

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}.$$

Подставив полученные результаты, видим, что

$$A = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (8.24)$$

Таким образом,

$$\varphi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \quad (8.25)$$

В выражениях напряжений (8.11), а также перемещений (8.8) и (8.9) входит еще единичный угол закрутки k .

Подставим в выражение (8.16) функцию кручения в виде (8.25), считая, что момент M известен:

$$\begin{aligned} M_z &= kG \iint_F \left(-x^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + y^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + x^2 + y^2 \right) dx dy = \\ &= \frac{2kG}{a^2 + b^2} \iint_F (b^2 x^2 + a^2 y^2) dx dy = \frac{2kG}{a^2 + b^2} (a^2 J_x + b^2 J_y). \end{aligned}$$

Здесь J_x и J_y — моменты инерции относительно осей x и y , которые для эллиптического сечения соответственно равны:

$$J_x = \frac{\pi ab^3}{4}; \quad J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Подставляя эти значения в последнее равенство и разрешая его относительно k , получим

$$k = \frac{M_z (a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3}. \quad (8.26)$$

Зная k , обратимся вновь к выражениям (8.8), (8.9) и (8.11). После подстановки получим

$$\begin{aligned} u &= -\frac{M_z (a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3} yz; \quad \tau_{xz} = -\frac{2M_z}{\pi a b^3} y = -\frac{M_z}{2J_x} y; \\ v &= -\frac{M_z (a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3} xz; \quad \tau_{yz} = \frac{2M_z}{\pi a^3 b} x = \frac{M_z}{2J_y} x. \\ w &= -\frac{M_z (a^2 - b^2)}{\pi G a^3 b^3} xy; \end{aligned} \quad (8.27)$$

Проанализируем полученные результаты. Касательные напряжения изменяются по линейному закону и достигают наибольшего значения на контуре стержня. Полное напряжение τ определяется следующим образом:

$$\tau^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \frac{4M_z^2}{\pi^2 a^2 b^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right). \quad (8.28)$$

Найдем выражение для наибольшего полного напряжения, которое, очевидно, будет на контуре эллипса. В этом случае x и y , входящие в (8.28), связаны между собой уравнением (8.22). Решая (8.28) и (8.22) совместно, получим

$$\tau^2 = \frac{4M_z^2}{\pi^2 a^6 b^4} [a^4 - x^2 (a^2 - b^2)].$$

Выражение τ достигает наибольшего значения при $x = 0$ ($a > b$),

$$\tau_{\max} = \frac{2M_z}{\pi a b^3}. \quad (8.29)$$

Итак, наибольшее напряжение будет иметь место в конце малой полуоси эллипса, т. е. на наименьшем расстоянии от центра эллипса (рис. 8.3).

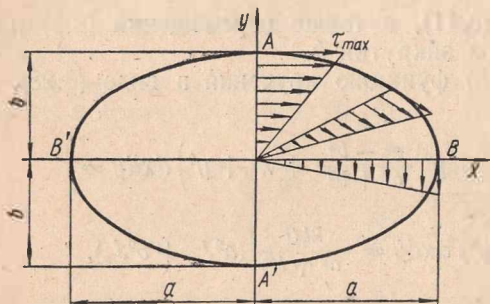


Рис. 8.3

Если в 3-м равенстве (8.27) заменить перемещение w на z , то получим уравнение деформированной поверхности поперечного сечения:

$$z = \alpha xy, \quad (8.30)$$

где

$$\alpha = -\frac{M(a^2 - b^2)}{\pi G a^3 b^3} = \text{const.}$$

Поверхность (8.30) — гиперболический параболоид.

В заключение рассмотрим кручение круглого стержня. Для сокращения объема выкладок не будем воспроизводить весь вывод (хотя это весьма просто сделать), а только преобразуем уже полученные результаты, приняв $a = b$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Функция кручения для круглого стержня

$$\varphi = 0.$$

(Для круглого стержня можно получить решение и в том случае, когда $\varphi = \text{const}$. Порядок решения при этом тот же.) Очевидно, что уравнение Лапласа при этом значении φ будет удовлетворено. Граничное условие (8.14) также выполняется. Действительно, $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$, а

$$\cos(N, x) = \frac{x}{r}; \quad \cos(N, y) = \frac{y}{r}. \quad (8.31)$$

Подставив эти значения косинусов в правую часть (8.14), получим, что $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$.

Выражение для k найдем, положив в (8.26) $a = b$. Тогда $k = -\frac{M_z}{G J_p}$, где J_p — полярный момент инерции; $J_p = 2J_x = 2J_y = \frac{\pi a^4}{2}$.

Компоненты напряжений (8.27)

$$\tau_{xz} = -\frac{M_z}{J_p} y; \quad \tau_{yz} = \frac{M_z}{J_p} x.$$

Полное касательное напряжение (8.28) примет вид

$$\tau^2 = \frac{4M_z^2 \rho^2}{\pi^2 a^8} = \frac{M_z^2 \rho^2}{2J_x^2} = \frac{M_z^2 \rho^2}{J_p^2},$$

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho. \quad (8.32)$$

Из 3-го уравнения (8.27) следует, что $w = 0$. Таким образом, сечения круглого стержня при чистом кручении остаются плоскими, как это и предполагалось гипотезой плоских сечений, принимаемой в сопротивлении материалов.

Перемещения u и v для круглого стержня приобретают вид $u = -\frac{M_z}{GJ_p} yz$; $v = \frac{M_z}{GJ_p} xz$. Из этих зависимостей легко получить выражение для угла закручивания α , отнеся максимальное смещение u при $y = r$ к радиусу:

$$\alpha = \frac{M_z z}{GJ_p}.$$

Выражения для τ и α полностью совпадают с результатами, имеющимися в сопротивлении материалов, что подтверждает достоверность полученного там решения для стержня круглого сечения и позволяет считать его точным с позиций теории упругости.

§ 8.3. Решение задачи о кручении стержня при помощи функции напряжения

Здесь изложен другой подход к задаче о кручении стержня. Этот подход имеет равное (если не большее) право на существование по отношению к уже приведенному.

Не будем делать никаких предположений относительно характера распределения перемещений, как это делалось ранее в (8.8) и (8.9). Основополагающие допущения (8.3) остаются в силе.

Исходными уравнениями для решения поставленной задачи будет 3-е уравнение равновесия (8.4):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (8.33)$$

и уравнения Бельтрами — Митчелла, которые с учетом (8.3) записываются так:

$$\nabla^2 \tau_{xz} = 0 \text{ и } \nabla^2 \tau_{yz} = 0. \quad (8.34)$$

Составим выражения $\frac{\partial}{\partial x} [(8.33)] - \nabla^2 \tau_{xz}$ и $\frac{\partial}{\partial y} [(8.33)] - \nabla^2 \tau_{yz}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Из (8.35) видно, что

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = C, \quad (8.36)$$

где $C = \text{const}$. После этих преобразований исходными уравнениями стали не (8.33) и (8.34), а (8.33) и (8.36).

Подставим в (8.36) выражения для напряжений τ_{xz} и τ_{yz} , выраженные через перемещения при помощи зависимостей Коши:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (8.37)$$

С учетом (8.37) выражение (8.36) перепишется так:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2G \frac{\partial \omega_z}{\partial z}, \quad (8.38)$$

где $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ — компонент элементарного вращения вокруг оси z .

Сравнивая (8.36) и (8.38), имеем

$$-2G \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = C. \quad (8.39)$$

Из (8.39) следует, что $\frac{\partial \omega_z}{\partial z}$ — постоянная величина. Она характеризует угол закручивания на единицу длины стержня. Ранее такой угол мы обозначали буквой k и называли круткой. С учетом сказанного

$$C = -2Gk.$$

Итак, исходные уравнения (8.33) и (8.34) преобразовались в

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} &= -2Gk.\end{aligned}\quad (8.40)$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= Gk \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}; \\ \tau_{yz} &= -Gk \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x},\end{aligned}\quad (8.41)$$

где $\Phi(x, y)$ — некоторая функция координат x и y , называемая *функцией напряжения при кручении* или *функцией Прандтля*.

Первому уравнению (8.40) удовлетворит любая дважды дифференцируемая функция $\Phi(x, y)$. Чтобы эта функция удовлетворяла и 2-му уравнению, необходимо потребовать, чтобы она удовлетворяла уравнению Пуассона. Действительно, подставляя (8.41) во 2-е уравнение (8.40), убеждаемся, что

$$Gk \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + Gk \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2Gk, \quad (8.42)$$

или $\nabla^2 \Phi = -2$ (уравнение Пуассона).

Граничные условия на боковой поверхности с учетом (8.4) сведутся, как и прежде, к одному уравнению:

$$\tau_{xz} \cos(N, x) + \tau_{yz} \cos(N, y) = 0,$$

которое ранее было приведено к виду (8.18). С учетом (8.41) оно запишется так:

$$\left(\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} \right)_{\text{гп}} = - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{гп}}. \quad (8.43)$$

Из (8.43) следует:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \right)_{\text{гп}} = 0,$$

или

$$d\Phi_{\text{гп}} = 0.$$

Становится очевидным, что функция напряжений на контуре должна сохранять постоянное значение:

$$\Phi_{\text{гп}} = \text{const}.$$

Для односвязных контуров величина этой константы не существенна, так как на основании (8.41) касательные напряжения при кручении зависят только от производных функции кручения. На этом основании можно принять, что

$$\Phi_{\text{гп}} = 0. \quad (8.44)$$

Как легко видеть, граничные условия при решении задачи с помощью функции напряжений значительно проще тех, которые нужно было выполнять, когда применялась функция кручения или функция, с ней сопряженная.

Во всех приведенных построениях функция напряжений вводилась независимо и в никакой мере не связывалась с функцией кручения. Укажем теперь на связь между ними. Введем функцию напряжения при помощи функции, сопряженной с функцией кручения.

Рассмотрим функцию

$$\Phi^*(x, y) = F(x, y) - \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (8.45)$$

Чтобы установить, какому уравнению удовлетворит функция (8.45), возьмем лапласиан от обеих частей этого равенства:

$$\nabla^2 \Phi^* = \nabla^2 F - 2. \quad (8.46)$$

Ранее было установлено, что функция F гармоническая. Следовательно, $\nabla^2 F = 0$ и (8.46) переписывается так:

$$\nabla^2 \Phi^* = -2.$$

Сравнивая полученное уравнение с (8.42), убеждаемся в их идентичности. Таким образом, введенная функция Φ^* есть не что иное, как функция напряжений при кручении.

Величину крутки k определим из выражения (8.2) для крутящего момента, воспринимаемого сечением:

$$M_z = \iint_F (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dF.$$

Перепишем это выражение, используя (8.41):

$$M_z = -kG \iint_F x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dF - kG \iint_F y \frac{\partial \Phi}{\partial y} dF. \quad (8.47)$$

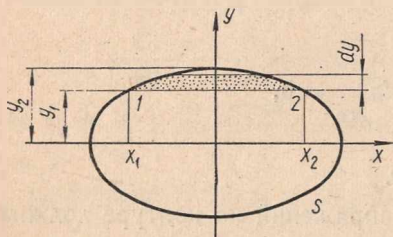


Рис. 8.4

Упростим выражение (8.47). Для этого рассмотрим поперечное сечение стержня (рис. 8.4). Выделим двумя прямыми $y_1 = \text{const}$ и $y_2 = y_1 + dy$, параллельными оси x , полосу шириной dy . Координаты, определяющие начало и конец полосы, соответственно равны x_1 и x_2 .

Первый интеграл перепишем так:

$$\iint_F x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dF = \iint_F x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx.$$

Внутренний интеграл проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx &= \int_{y_1}^{y_2} dy \left(x\Phi \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx \right) = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} dy \left[x_2 \Phi(x_2 y) - x_1 \Phi(x_1 y) - \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx \right]. \end{aligned}$$

Функции $\Phi(x_2 y)$ и $\Phi(x_1 y)$ — не что иное, как значения функции напряжений на границе области. На основании (8.44) они равны нулю. Таким образом,

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = - \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx = - \iint_F \Phi dF.$$

Аналогичные преобразования можно провести и для 2-го интеграла. Поэтому (8.47) перепишем так:

$$M_z = 2kG \iint_F \Phi dF. \quad (8.48)$$

Из этой записи, зная Φ , можно определить k .

§ 8.4. Кручение стержня прямоугольного сечения

Пусть поперечное сечение стержня ограничено прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$, образующими прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, отношение которых конечно. Для этого профиля подобрать функцию напряжений в замкнутом виде, удовлетворяющую одновременно (8.42) и (8.44), не представляется возможным. Можно получить лишь приближенное решение (в рядах), хотя и с любой степенью точности.

Симметричность прямоугольного сечения относительно осей координат x и y предопределяет четность функции напряжений относительно обеих переменных x и y . Будем искать решение методом разделения переменных (методом Фурье). Примем

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cos \frac{n\pi x}{2a}, \quad (8.49)$$

где Y_n — пока неизвестные функции от y . Граничные условия будут выполнены, если при $x = \pm a$ и $y = \pm b$ функция напряжений Φ обратится в нуль. Первое условие выполняется, если в ряде (8.49) сохранить члены с нечетными n . Общность ряда (8.49) от этого не нарушится, так как в ряд

$$\Phi(x, y) = \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} Y_n(y) \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (8.50)$$

можно в пределах от $x = -a$ до $x = +a$ разложить всякую четную функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле.

Для того чтобы выполнить 2-е условие, а именно: $\Phi = 0$ при $y = \pm b$, необходимо подобрать Y_n таким образом, чтобы они также обращались в нуль при $y = \pm b$. Вид этих функций определится после того, как мы подчиним решение (8.50) уравнению (8.42):

$$\sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \left[Y_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{4a^2} Y_n \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} = -2. \quad (8.51)$$

Левую часть (8.51) будем трактовать как разложение в ряд Фурье по косинусам с периодом $4a$, которое в интервале $-a \leq x \leq a$ равно -2 . Для определения неизвестных функций Y_n , которые входят в коэффициенты ряда (8.51), разложим и правую часть (8.51) в ряд по косинусам на том же интервале:

$$-2 = \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi x}{2a}.$$

Приравняв члены при косинусах, получим

$$Y_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{4a^2} Y_n(y) = C_n. \quad (8.52)$$

Определим C_n как коэффициенты ряда Фурье:

$$C_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a (-2) \cos \frac{n\pi x}{2a} dx = -\frac{4}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{2a} \right]_{-a}^a = \frac{8}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

С учетом этого равенство (8.52) можно записать так:

$$Y_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} Y_n = -\frac{8}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (8.53)$$

Уравнение (8.53) есть линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и с постоянной правой частью. Она позволяет искать частное решение в виде

$$Y_n^* = D_n.$$

Непосредственной подстановкой получаем, что частное решение

$$Y_n^* = \frac{32a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (8.54)$$

Для нахождения общего интеграла однородного уравнения запишем его характеристическое уравнение:

$$k^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$k = \pm \frac{n\pi}{2a}.$$

Общее решение уравнения (8.53) определится как сумма двух решений — частного решения (8.54) неоднородного уравнения и общего решения однородного, ему соответствующего:

$$Y_n(y) = \bar{A}_n e^{\frac{n\pi}{2a}y} + \bar{B}_n e^{-\frac{n\pi}{2a}y} + \frac{32a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

С равным правом последнее выражение можно записать и так:

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a} + \frac{32a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Произвольные постоянные A_n и B_n определим из условия, что на границе $y = \pm b$ функции Y_n , а поэтому и $\Phi(x, y)$, обращаются в нуль. Реализуем эти условия:

$$\left. \begin{aligned} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + \frac{32a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} &= 0; \\ A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + \frac{32a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

Решая систему (8.55), получим

$$B_n = 0; \quad A_n = -\frac{32a^2}{n^3 \pi^3} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}.$$

Таким образом,

$$Y_n(y) = \frac{32a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right).$$

Теперь функция

$$\Phi(x, y) = \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a}. \quad (8.56)$$

Изложенное дает основание утверждать, что функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет не только разрешающему уравнению (8.42), но и граничным условиям. Сходимость ряда, входящего в (8.56), зависит от величины отношения $\frac{a}{b}$: чем оно меньше, тем сходимость лучше.

Определим M_z из (8.48):

$$\begin{aligned} M_z &= 2kG \iint_F \Phi(x, y) dx dy = \\ &= \frac{64a^2 kG}{\pi^3} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a} dx dy. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$M_z = \frac{256a^3 kG}{\pi^4} \int_{-b}^b \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) dy$$

и затем

$$M_z = \frac{512a^3 b kG}{\pi^4} \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(1 - \frac{2a}{n\pi b} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \right).$$

С учетом того что

$$\sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

выражение для M_z переписется так:

$$M_z = \frac{16}{3} a^3 b kG \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \right). \quad (8.57)$$

Из (8.57) можно определить k :

$$k = \frac{M_z}{C}, \quad (8.58)$$

где

$$C = \frac{16}{3} G a^3 b \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \right). \quad (8.59)$$

Считая произведение kG известным, найдем напряжения (8.41)

$$\tau_{xz} = -\frac{16a}{\pi^2} kG \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}};$$

$$\tau_{yz} = +\frac{16a}{\pi^2} kG \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{2a}.$$

Исследуем полученные результаты.

Сначала проследим, как изменяются касательные напряжения вдоль оси x ($y = 0$):

$$\tau_{xz} = 0;$$

$$\tau_{yz} = +\frac{16a}{\pi^2} kG \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{2a}.$$

В центре сечения ($x = 0$; $y = 0$)

$$\tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0.$$

При $x = a$ (посредине стороны)

$$\tau_{xz} = 0;$$

$$\tau_{yz} = \frac{16a}{\pi^2} kG \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right).$$

Вдоль оси y ($x = 0$) напряжения имеют вид

$$\tau_{xz} = -\frac{16a}{\pi^2} kG \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}};$$

$$\tau_{yz} = 0.$$

В центре сечения ($x = 0$; $y = 0$)

$$\tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0.$$

Посредине стороны ($y = b$)

$$\tau_{xz} = 0;$$

$$\tau_{yz} = -\frac{16a}{\pi^2} kG \sum_{n-\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a}.$$

Посредине сторон прямоугольника бóльшим будет то напряжение, которое принадлежит большей стороне.

Запишем выражение напряжений по контуру прямоугольника на

сторонах, параллельных оси y :

$$\tau_{xz} = 0;$$

$$\tau_{yz} = -\frac{16a}{\pi^2} kG \sum_{n-\text{неч}} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right).$$

на сторонах, параллельных оси x ,

$$\tau_{xz} = -\frac{16a}{\pi^2} kG \sum_{n-\text{неч}} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times$$

$$\times \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a};$$

$$\tau_{yz} = 0.$$

Распределение напряжений показано на рис. 8.5.

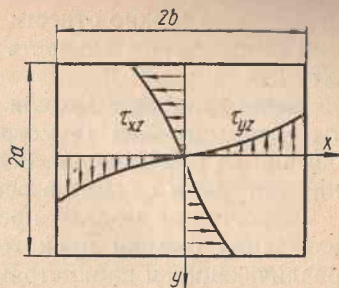


Рис. 8.5

§ 8.5. Моделирование напряженного состояния при кручении

Для многих технических реализаций, встречающихся в инженерной практике, получение аналитического решения, хотя бы в виде рядов, связано со значительными, а иногда и непреодолимыми затруднениями. Среди задач о кручении в первую очередь следует упомянуть расчеты призматических стержней со сложными профилями, причем в случае многосвязных профилей сложность задачи значительно возрастает. Предпочтительны, конечно, точные аналитические решения. Однако описанные трудности заставляют прибегать к численным методам, хорошо адаптированным к ЭВМ, вариационным методам и к экспериментально-модельным методам (по установившейся традиции эти методы носят название *методов аналогий*).

Кратко остановимся на общих вопросах моделирования. Понятию «модель» придают различный смысл, поэтому прежде всего следует уточнить определения всех необходимых понятий.

Под *моделью* понимают такую мысленно представляемую или искусственно реализуемую материальную систему (квазиобъект), которая, отражая главные свойства объекта или процесса исследования, способна определенным образом заменять его так, что при ее изучении получают новую информацию об этом объекте. К понятию «модель» непосредственно примыкает понятие *моделирование*, которое обозначает процесс исследования на моделях. Моделирование в широком смысле — это естественный и, пожалуй, единственный метод познания природы. Модели, которыми пользуются при исследовании упругих структур, обычно делят на пять больших групп. (Приведенная ниже классификация, как, впрочем, и всякая классификация, в определенной степени условна.)

Логические модели на основе определенных физических данных эксперимента, аналогий или математических соотношений дают представление об изучаемом явлении. К таким моделям можно отнести модель атома, модель сплошного тела и др. Сюда с определенными

оговорками можно отнести программы вычислений, содержащие указания на последовательность операций при исследовании того или иного объекта.

Геометрические модели воспроизводят различные реальные объекты с соблюдением геометрического подобия. Подобие явления в природе обычно не соблюдается. Обычно они дают лишь внешнее представление натуры и служат в основном для демонстрационных целей.

Физические модели предназначены главным образом для воспроизведения физики происходящих явлений на установках (моделях), различающихся параметрами и масштабом. Физическое моделирование сохраняет особенность проведения эксперимента, но существенно упрощает получение искоемых результатов, так как в этом случае выбираются удобные размеры, диапазон изменения исследуемых величин и т. д. Измерения на модели приходится проводить и тогда, когда реальный объект еще только проектируется. В этом случае модельные испытания учитываются при проектировании. Исследования на физических моделях применяют и тогда, когда из-за сложности самого объекта либо граничных условий рассчитать его вообще невозможно или достоверность расчета требует тщательной экспериментальной проверки. Такие же исследования проводят, чтобы апробировать новые расчетные методы, примененные для еще нерешенных задач.

К физическому моделированию можно отнести, например, все исследования на тензометрических моделях.

Математические модели не требуют геометрического или физического подобия между моделью и объектом. Они основаны на возможности применять уравнения (чаще всего дифференциальные), описывающие процесс или систему, к натуре и модели.

В математическом моделировании одна система понятий переводится в другую. Природа явлений в объекте и модели может быть совершенно различна. Тожественность уравнений, описывающих натуру и модель, — основа математического моделирования, или моделирования по аналогии. Математическое моделирование является технической реализацией аналогии. Осуществляется оно, чтобы получить численные значения величин, характеризующих натуральный объект, по данным, измеренным на модели. Модель обычно подбирают так, чтобы эти замеры можно было провести с меньшей трудоемкостью, чем на натурном объекте.

Модель объекта фиксируется математической структурой, которая способна изоморфно или гомоморфно* отразить свойства объекта, проявляемые им в различных экспериментальных условиях.

* *Изоморфными* считают такие две системы A и B объектов, для которых выполняются следующие условия:

1) каждому объекту (параметру) a_i из системы A однозначно соответствует объект (параметр) b_i из системы B , и наоборот;

2) каждому отношению в системе A однозначно соответствует отношение в системе B , и наоборот;

3) если некоторые объекты (параметры) $a_1, a_2, \dots$ в системе A связаны некоторой зависимостью $F(a_1, a_2, \dots) = 0$, то в системе B должны быть связаны соответствующие объекты: $F_1(b_1, b_2, \dots) = 0$.

Гомоморфными называют две системы A и B , между которыми нет взаимно однозначного соответствия, т. е. одна система является упрощенной копией другой.

Классическим примером математической модели может служить колебательный электрический контур, состоящий из емкости, индуктивности и активного сопротивления, который моделирует колебания механического маятника. Движение такой инерционной массы описывается на основе законов Ньютона и Д'Аламбера суммированием всех сил (в меру идеализации рассматриваемого процесса), действующих

Таблица 3

Символ объекта уравнения	α	γ	β	$\theta(t)$	w	$\frac{dw}{dt}$	$\frac{d^2w}{dt^2}$
<i>Механические колебания</i>							
Параметр	Масса	Коэффициент упругости	Коэффициент трения	Внешняя сила	Отклонение положения равновесия	Скорость	Ускорение (скорость изменения скорости)
Символ	m	k	r	$N(t)$	x	$\frac{dx}{dt} = v$	$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$
<i>Электрические колебания</i>							
Параметр	Индуктивность	Активное сопротивление	Величина, обратная емкости	ЭДС	Электрический заряд	Электрический ток	Скорость изменения тока
Символ	L	R	$\frac{1}{C}$	$E(t)$	q	$\frac{dq}{dt} = I$	$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dI}{dt}$

на эту массу. В состав суммы при нулевых начальных условиях входит: сила инерции массы, демпфирующая сила воздушной среды, сила пружины. Сумма равна силе, которая направлена вверх и играет роль источника. Для электрической цепи, на основании законов Кирхгофа, сумма падений напряжений в замкнутом контуре равна нулю, или иначе: сумма падений напряжений на индуктивности, емкости и активном сопротивлении равна напряжению источника.

Оба процесса можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением

$$\alpha \frac{d^2w}{dt^2} + \beta \frac{dw}{dt} + \gamma w = \theta(t).$$

Интерпретация символов этого уравнения для механических и электрических систем приведена в табл. 3. Физическая природа этих процессов совершенно различна, но они изоморфны. Измерить электрические величины на модели можно гораздо более точно, чем изоморфные с ними величины на натурном объекте.

От всех моделей математические отличаются тем, что средством описания моделей и их изучения является формально-логический аппарат математики. Другое важное преимущество математических моделей — универсальность языка математики, возможность использовать одни и те же модели для исследования различных по своей сути физических систем. На этом и основаны наши последние широкие применения аналоговых машин.

Цифровые математические модели — установки, содержащие цифровые быстродействующие дискретные машины, настроенные на работу по определенной программе — логической модели.

Из всех приведенных типов моделей в дальнейшем подробно рассмотрим лишь математические. Применение их для решения задач кручения дает поразительный эффект.

Будут рассмотрены следующие математические модели-аналоги: 1) мембранная; 2) гидродинамические; 3) электродинамическая.

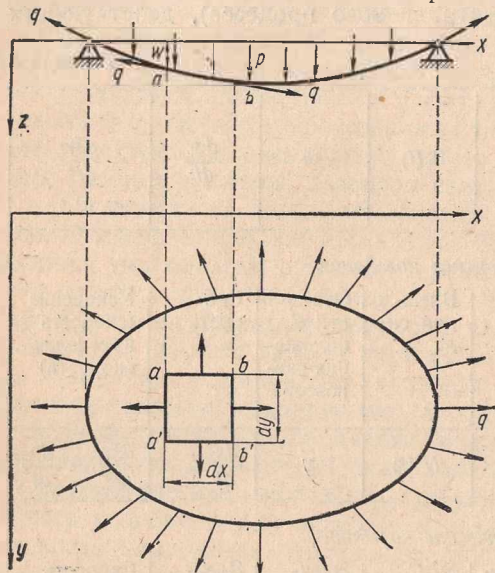


Рис. 8.6

1. Мембранная модель (аналогия) установлена в 1904 г. Л. Прандтлем.

Рассмотрим жесткий контур, совпадающий с контуром скручиваемого стержня. На этот контур натягивается однородная мембрана, которая подвергается равномерному поперечному постоянному давлению интенсивности p . Ввиду малости толщины мембрана может работать только на растяжение. В равновесии она удерживается растягивающими силами q , равномерно распределенными по контуру (рис. 8.6).

Вырежем из мембраны элемент $dx dy$ и составим уравнение его равновесия, спроектировав все приложенные к нему силы на вертикальную ось z . Перемещение мембраны в направлении оси z обозначим через w . Угол наклона касательной в силу малости деформаций примем $\alpha \approx \frac{\partial w}{\partial x}$. Функция $w = w(x, y)$, и поэтому угол наклона в точке b

$$\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx.$$

К стороне aa' элемента $abb'a'$ приложена сила натяжения $q dy$. С учетом направления оси z проекция этой силы на ось z равна $-q dy \frac{\partial w}{\partial x}$. Проекция на ту же ось силы, действующей по стороне bb' , соответственно равна $q dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right)$. Опуская дальнейшие пояснения,

запишем уравнение равновесия элемента мембраны

$$-q \frac{\partial w}{\partial x} dy + q \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy - \\ - q \frac{\partial w}{\partial y} dx + q \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx + p dx dy = 0.$$

Упрощая, получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{p}{q}. \quad (8.60)$$

Прогибов мембраны на контуре не будет из-за жесткости контура, т. е.

$$w = 0 \text{ на } L (L — контур мембраны). \quad (8.61)$$

Положим теперь

$$w(x, y) = \frac{p}{2q} \Phi(x, y). \quad (8.62)$$

После подстановки (8.62) в (8.60) придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2.$$

Оно тождественно совпадает с (8.42), а контурное условие (8.61) после замены (8.62) — с контурным условием (8.44).

Таким образом, значения функции напряжений $\Phi(x, y)$ при кручении сплошного упругого стержня пропорциональны малым прогибам мембраны, натянутой на контур, подобный контуру поперечного сечения стержня, и подвергнутой одностороннему равномерному давлению. Выпуклую поверхность мембраны Л. Прандтль назвал *холмом напряжений*. Коэффициент пропорциональности $k = \frac{2a}{p}$.

Аналогия может претендовать на право существования при соблюдении следующих условий:

- 1) силы, действующие параллельно плоскости xy , равномерно распределены по всей мембране;
- 2) натяжение тонкой мембраны настолько велико, что прогибы ее, обусловленные собственным весом, пренебрежимо малы;
- 3) наклон мембраны по всей ее площади небольшой.

Мембранную аналогию можно использовать не только при изучении кручения призматических стержней, а и для математического моделирования всех двумерных полей, описанных уравнением Пуассона.

Выделим на деформированной мембране множество точек, имеющих равные прогибы ($w = \text{const}$). Линии, на которых лежат эти точки (линии равных перемещений), можно рассматривать как следы сечений деформированной мембраны набором эквидистантных плоскостей, параллельных контуру, — топографических горизонталей. Эти линии естественно назвать *горизонталями*. Постоянство перемещений w на горизонталях подтверждает правомерность утверждения $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$.

Установленная ранее аналогия позволяет заключить, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0, \quad (8.63)$$

и поэтому на горизонталях $\Phi = \text{const}$.

Определим в точке A проекцию касательного напряжения на нормаль N (рис. 8.7):

$$\tau_N = \tau_{xz} \cos(N, x) + \tau_{yz} \cos(N, y).$$

Используя (8.41) и (8.17), получим

$$\tau_N = kG \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) = kG \frac{\partial \Phi}{\partial s}.$$

Таким образом, учитывая (8.63), имеем

$$\tau_N = 0,$$

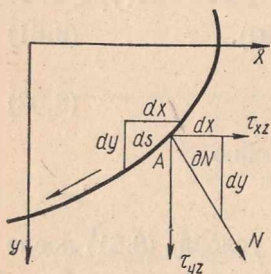


Рис. 8.7

т. е. составляющая касательного напряжения, нормальная к горизонтали, отсутствует. Отсюда следует, что полное касательное напряжение в любой точке горизонтали направлено по касательной к ней. На этом основании горизонтали часто называют *траекториями касательных напряжений*.

Найдем теперь равнодействующее касательное напряжение. Его можно получить, если спроецировать составляющие (учитывая ранее принятое положительное направление) на касательную к горизонтали (рис. 8.7):

$$\tau = \tau_{xz} \cos(N, y) - \tau_{yz} \cos(N, x) = kG \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{\partial N} + kG \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{\partial N},$$

или

$$\tau = kG \frac{\partial \Phi}{\partial N}.$$

Если перейти к прогибам мембраны (8.62), то для τ получится такое выражение:

$$\tau = \frac{2kGq}{p} \frac{\partial w}{\partial N}. \quad (8.64)$$

Из (8.64) видно, что тангенциальное напряжение пропорционально тангенсу угла наклона мембраны к горизонтальной плоскости, проходящей через рассматриваемую горизонталь. Максимальное касательное напряжение соответствует той точке, где уклон поверхности максимален. Поскольку горизонтали проводят эквидистантно, то наибольший уклон (наибольшее касательное напряжение) наблюдается в месте сгущения горизонталей:

$$\tau_{\max} = 2Gk \frac{q}{p} \left(\frac{\partial w}{\partial N} \right)_{\max}. \quad (8.65)$$

Величина $\frac{q}{p}$, входящая в (8.65), пока не определена. Касательные напряжения максимальны у контура сечения, поэтому для их определения проводят одну горизонталь в непосредственной близости от контура. В той точке, где горизонталь наиболее близко подходит к контуру, и ищут наибольшее напряжение (8.65). Чтобы найти величину $\frac{q}{p}$, воспользуемся выражением (8.48) для M_z . Заменяя в нем при помощи

(8.62) Φ на ω , получим

$$M_z = 2kG \iint_F \Phi dF = 4kG \frac{q}{\rho} \iint_F \omega dF = 4kG \frac{q}{\rho} V, \quad (8.66)$$

где V — объем, заключенный между деформированной мембраной и горизонтальной плоскостью, проходящей через контур (объем напряженный). Из (8.66) следует, что

$$\frac{q}{\rho} = \frac{M_z}{4kGV},$$

и поэтому выражения (8.64) и (8.65) запишутся так:

$$\tau = \frac{M_z}{2V} \frac{\partial \omega}{\partial N};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2V} \left(\frac{\partial \omega}{\partial N} \right)_{\max}.$$

Если $M_z = 2V$, то

$$\tau = \frac{\partial \omega}{\partial N} = \operatorname{tg} \alpha; \quad (8.67)$$

$$\tau_{\max} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial N} \right)_{\max} = (\operatorname{tg} \alpha)_{\max}.$$

Завершая обсуждение полученных результатов, заметим, что мембранная модель-аналог дает возможность экспериментально изучать напряженное состояние стержней, на форму контура которых не накладываются никакие ограничения. Такие стержни сложного профиля обычно из-за этой сложности не имеют приемлемого решения. В экспериментальных установках в качестве мембраны применяют резиновую и мыльную пленки, углы наклона измеряют при помощи различных оптических устройств. Число измеряемых параметров в таких экспериментах невелико: уклон поверхности мембраны и объем, заключенный под ней. Мембранная аналогия дает возможность составить наглядное представление о характере функции Φ , а следовательно, и о траекториях касательных напряжений.

Для иллюстрации всего изложенного рассмотрим некоторые примеры.

Определим напряжения в стержне круглого сечения. Этот случай интересен тем, что для него в § 8.2 получено точное решение. Прежде всего найдем вид холма напряжений, показанного на рис. 8.8. Для этого двумя близкими параллельными оси симметрии z плоскостями $x = x_0$ и $x = x_0 + dx$ выделим полоску, которую будем трактовать как нитку с закрепленными контурами. Кривая, по которой изогибается эта полоска, носит название *цепной линии*. Она описывается уравнением

$$\omega = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad (8.68)$$

где $a = \operatorname{const} (a > 0)$.

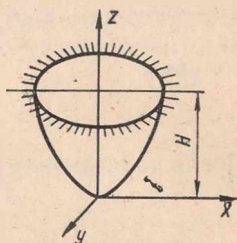


Рис. 8.8

Цепную линию с достаточной степенью точности можно аппроксимировать параболой. Действительно, разложим правую часть (8.68) в бесконечный ряд

$$w = a \left(1 + \frac{1}{2!} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{a^4} + \dots \right).$$

Когда максимальная стрела провисания $w_{\max}$ мала, для малых значений x члены ряда быстро убывают. Это дает возможность ограничиться лишь двумя первыми членами ряда, что эквивалентно замене цепной линии квадратной параболой

$$w = a + \frac{1}{2a} x^2.$$

Удобнее представить эту формулу в виде

$$x^2 = \frac{R^2}{H} z. \quad (8.69)$$

Постоянные R и H зависят от a и имеют физический смысл: H — максимальная стрела провисания; R — радиус скручиваемого стержня. Для определения H используем зависимость $M_z = 2V$. Объем параболоида вращения

$$V = \pi \int_0^H x^2 dz = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

Приравнявая

$$V = \frac{M_z}{2} \text{ и } V = \frac{\pi R^2 H}{2},$$

получим

$$H = \frac{M_z}{\pi R^2}. \quad (8.70)$$

После подстановки (8.70) в (8.69) видим, что

$$w = \frac{M_z x}{\pi R^4} x^2.$$

Напряжение τ определится по (8.67):

$$\tau = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{M_z}{\pi R^4} 2x = \frac{M_z x}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{M_z}{J_p} x.$$

Таким образом, мы пришли к ранее полученному результату (см. § 8.2).

В качестве 2-го примера рассмотрим кручение призматического стержня с сечением в виде узкого прямоугольника $2a \times 2b$ (рис. 8.9, а). Холм напряжений здесь симметричен относительно обеих осей x и y . В направлении оси y изогнутая мембрана (за исключением области, непосредственно примыкающей к границам прямоугольника $y = \pm b$) представит собой цилиндрическую поверхность — «получилиндр», направляющая которой, с учетом замечаний предыдущего примера, может быть принята за параболу (рис. 8.9, б):

$$x^2 = \frac{a^2}{H} z. \quad (8.71)$$

Формула (8.71) несколько отличается от (8.69) видом констант. Это вызвано стремлением придать последним физический смысл: H — максимальная стрела прогиба мембраны; a — половина ширины холма напряжений. Очевидно, что объем «полуцилиндра»

$$V = \frac{8}{3} abH.$$

Поскольку $V = \frac{M_z}{2}$,

$$H = \frac{3M_z}{16ab}.$$

Касательное напряжение определится как производная от прогиба (8.71):

$$\tau = \frac{3M}{8a^3b} x.$$

Очевидно, что наибольшее напряжение на длинной стороне будет при $x = a$:

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{8a^2b}. \quad (8.72)$$

Этот же результат можно получить из точного решения в рядах для прямоугольника (см. § 8.4), положив, что $\frac{a}{b}$ достаточно мало.

Мембранную аналогию легко обобщить для случая многосвязных стержней. Следует сразу отметить, что провести эксперимент для

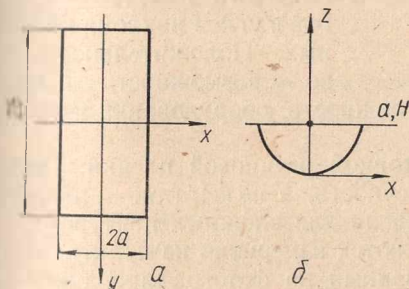


Рис. 8.9

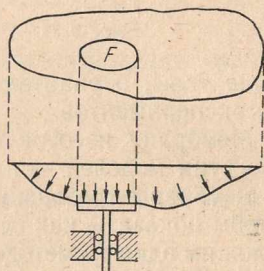


Рис. 8.10

таких стержней очень трудно. Поэтому использование аналогии сводится к получению только качественных оценок. По этим причинам не будем детально обсуждать и обосновывать способы моделирования для многосвязных стержней, а отметим лишь основные рекомендации:

1. Внешний контур мембраны должен быть идентичен внешнему контуру стержня; перемещений этого контура быть не должно.

2. Внутренние пустоты-контуры моделируются невесомыми плоскими пластинами — дисками, имеющими форму внутренних пустот и параллельными между собой. Эти диски должны быть прикреплены к мембране и свободно перемещаться в направлении, перпендикулярном

к их плоскости (рис. 8.10). Поверхность ненагруженной мембраны после изъятия дисков должна иметь вид профиля исследуемого стержня.

3. Загружают диски тем же равномерным давлением, что и мембрану.

Практическое осуществление мембранного моделирования можно условно разбить на три группы:

1. В качестве мембраны используется мыльная пленка или мениск раздела между несмешивающимися жидкостями. Поверхность пленки,

находящейся под давлением, фотографируется. По полученным снимкам определяют уклоны точек пленки. Положительные стороны этой реализации — простота и малая затрата времени на опыты, отрицательные — недостаточная точность в зоне входящих углов контура и определенные трудности при обработке графического материала.

2. Деформированные мембраны, применяемые здесь, те же, что и в предыдущем случае. Однако для измерений применяется метод непосредственного измерения прогибов и углов наклона касательных. Положительное качество — возможность измерять

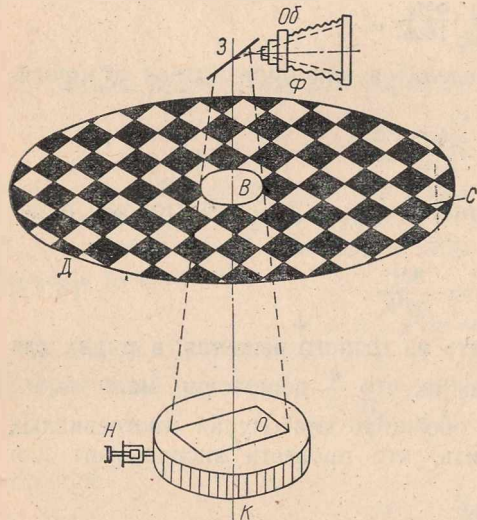


Рис. 8.11

большие углы, отрицательное — сложность оборудования и длительность экспериментов.

3. Мембрану изготовляют из тонкой резиновой пленки. Преимущество этих моделей — их долговечность, а недостаток — неадекватность мембраны требованиям аналогии для сложных контуров.

Чтобы показать, как осуществляются измерения на практике, кратко изложим один из методов, основанный на фотографировании мыльной пленки. На рис. 8.11 показана пустотелая коробка К с набором крышек, отверстия О в которых повторяют форму исследуемых стержней (эти отверстия служат контурами для мыльных пленок). Крышки плотно прилегают к коробке, в которую цилиндрический насос Н нагнетает воздух. Объем воздуха, поступившего в коробку (объем сегмента мембраны), определяется измерением хода винта насоса, связанного с поршнем.

Над коробкой располагается круглый диск Д с центральным вырезом В, над которым находится наклонное зеркало З, визируемое объективом Об от фотокамеры Ф. На нижнюю сторону диска нанесена регулярная сетка С из черных и белых квадратов. На мыльной пленке при сильном освещении отражается «шахматный» диск, отражение ко-

торого фиксируется фотокамерой Φ . Для расшифровки полученных снимков необходимо знать масштаб «шахматки» диска, расстояние мембраны от щита и размер контура. Вычислив по фотографиям угол наклона мембраны, можно определить величину и направление напряжения и его составляющих в интересующих точках сечения деформированного стержня.

2. Гидродинамическая модель позволяет качественно оценить характер происходящих процессов при кручении стержней. Таких аналогий существует несколько. Остановимся на основных.

Аналогия Буссинеска. Ж. Буссинек первый заметил, что уравнение (8.42) и граничное условие (8.44) для отыскания функции напряжений Φ при кручении стержней аналогичны уравнению и граничным условиям, определяющим скорости слоев вязкой жидкости при ламинарном течении ($Re < 2200$) по трубе, контур которой совпадает с контуром стержня, подвергнутого кручению. При движении жидкости по трубе с осью, ориентированной по оси z , скорость жидкости должна удовлетворять уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const.} \quad (8.73)$$

Здесь

$\frac{\partial p}{\partial z}$ — падение гидродинамического давления, принимаемое постоянным при установившемся движении; μ_0 — коэффициент абсолютной вязкости жидкости.

На стенках трубы скорости жидкости равны нулю (условие Рейнольдса):

$$w = 0. \quad (8.74)$$

Условия (8.74) и (8.44) идентичны. Для идентификации уравнений (8.73) и (8.42) необходимо положить

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} = -2,$$

что влечет за собой требование линейного изменения гидравлического давления по длине трубы:

$$p = -2\mu_0 z.$$

Аналогия А. Гринхилла. Автор аналогии показал, что функция напряжений Φ при кручении совпадает с функцией тока идеальной жидкости при плоском течении ее в трубе, профиль которой подобен сечению скручиваемого стержня. Циркуляция жидкости в трубе происходит при наличии вихря, равного -2 .

Из гидродинамики известно, что проекции скорости жидкости

$$v_x = \frac{\partial \Phi^*}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial x}. \quad (8.75)$$

Они должны быть подчинены условию несжимаемости идеальной жидкости:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Кроме того, должно выполняться условие постоянства компонента скорости относительно оси z :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} = -2. \quad (8.70)$$

Уравнение (8.76), как видим, совпадает с (8.42).

Сравнивая (8.41) с (8.75), замечаем, что

$$\tau_{xz} = Gk v_x; \quad \tau_{yz} = Gk v_y.$$

Граничные условия также совпадают: касательные напряжения и скорости движения частиц жидкости направлены по касательной к контуру.

В этой аналогии компоненты скорости течения жидкости моделируют касательные напряжения, и наоборот. Результирующая касательных напряжений будет соответствовать общей скорости жидкости. Гидродинамическая модель приводит к утверждению, что в выступающих по отношению к контуру трубы углах скорость жидкости приближается к нулю (она там застывает), что говорит об отсутствии в этой зоне касательных напряжений. Во входящих углах скорости жидкости теоретически растут бесконечно, что влечет за собой, как следствие, утверждение о значительной концентрации напряжений в этой зоне. Отсюда же следует, что малые по величине крутящие моменты могут вызывать в зоне входящих углов явление текучести у пластичных материалов и появление трещин у хрупких.

Гидродинамическая аналогия наглядно показывает, что для двусвязного гладкого контура скорость (касательные напряжения) больше у внешнего контура. В тонкостенных трубчатых контурах изменение скорости по толщине мало, и поэтому можно считать, что напряжения вдоль толщины стенки постоянны. Действительно, суммарное усилие T по толщине h

$$T = \tau_{cp} h,$$

τ_{cp} — среднее по толщине напряжение. Это условие соответствует расходу жидкости в единицу времени, протекающей через осевое сечение $\omega = h \cdot 1$. Отсюда можно заключить, что при изменении толщины стенки вдоль контура: $h = h(s)$ касательное напряжение тоже меняется обратно пропорционально толщине стенки.

Проиллюстрируем применение гидродинамической аналогии на нескольких примерах. Выберем уже решенные задачи, расположив их в порядке нарастающей сложности.

1. *Стержень круглого сечения.* Жидкость движется в круглой трубе с постоянной скоростью. Линейные скорости жидкости, соответствующие разным точкам радиуса, линейно зависят от расстояния, которое отделяет их от центра трубы. Здесь наблюдается осевая симметрия относительно оси вращения. Напряжения в круглом стержне распределяются таким же образом.

2. *Стержень эллиптического сечения.* Линейные скорости жидкости в сосуде, основание которого имеет форму эллипса с осями a и b ($a > b$), больше в тех точках эллипса, которые имеют меньшую кривизну, т. е. скорость в точках, лежащих на концах оси a , меньше скорости в

точках, лежащих на концах оси b . Справедливость такого утверждения можно усматривать в том, что объемы жидкости, протекающей через эти точки в единицу времени, должны быть равны между собой. Таким образом, касательные напряжения, которые в этом случае моделируются скоростями жидкости, достигнут наибольшего значения на концах оси b .

3. *Стержень прямоугольного сечения.* Ход рассуждений остается таким же, как и в предыдущем случае. В средней части больших сторон форма линий тока уменьшает кривизну и приближается к прямолинейной. Степень приближения зависит от соотношения сторон прямоугольника. Чем уже сечение прямоугольника, тем больше к прямолинейному очертанию приближаются линии тока у больших сторон. В углах прямоугольника жидкость застаивается. Поэтому можно говорить о малой величине или полном отсутствии касательных напряжений в этих зонах.

Аналогия Томсона и Тэта основана на том, что если вращать трубу вокруг ее оси с постоянной угловой скоростью ω , то функция $\Phi(x, y)$ тока идеальной жидкости относительно осей x и y , жестко связанных с вращающейся трубой, будет гармонической:

$$\nabla^2 \Phi = 0.$$

Граничным условием в этом случае будет требование, чтобы на внутренней поверхности трубы выполнялось равенство

$$\Phi = \frac{\omega R^2}{2} + C, \quad (8.77)$$

где $C = \text{const}$, а R — радиус трубы ($R^2 = x^2 + y^2$).

Из сопоставления функции Φ и сопряженной функции кручения F видно, что обе они гармонические, а граничные условия (8.20) и (8.77) совпадают, если положить $\omega = 1$. Для реализации этой аналогии был поставлен эксперимент, в котором фотокамеру соединили с вращающимся сосудом. К воде примешивали алюминиевую пудру. На снимке получались линии касательных напряжений.

3. *Электродинамическая модель (аналогия).* Выбор моделирующих систем определяется удобством проведения замеров и эксплуатации, универсальностью и экономичностью.

Электрические модели начали применять значительно позже, чем мембранные и гидродинамические. Электрические модели отвечают перечисленным ранее требованиям и кроме того отличаются большой надежностью. Они проще в изготовлении и, самое главное, универсальны. Это относится как к уравнениям, подлежащим моделированию, так и к граничным условиям.

Основные типы электродинамических моделей — проводящие среды и пластины, электростатические модели, а также цепи с сосредоточенными параметрами.

Поля, описываемые уравнением Лапласа, можно смоделировать, измеряя на соответствующей модели один из трех электрических параметров: сопротивление, емкость или индуктивность. Измерять сопротивление более предпочтительно, так как ни индуктивную, ни емкостную модель, не содержащие активного сопротивления, создать

невозможно, а активные сопротивления содержат лишь незначительную реактивность. Форма проводящей среды обычно геометрически подобна форме прототипа (сечения). Граничные условия задаются при помощи токов или напряжений. Распределение напряжений в проводящей среде регистрируется электрическими измерительными приборами.

Электродинамическое моделирование, основанное на сеточных аппроксимациях и применении аналоговых машин непрерывного действия, здесь освещать не будем.

§ 8.6. Теорема о циркуляции касательного напряжения при кручении

Циркуляцией касательного напряжения называется криволинейный интеграл

$$I = \oint_L \tau_{sz} ds, \quad (8.78)$$

взятый по замкнутому контуру L внутри поперечного сечения скручиваемого стержня (рис. 8.12). (Дальнейшее изложение применимо к стержням с одно- и многосвязным сечением).

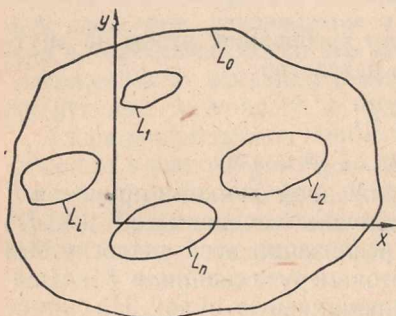


Рис. 8.12

Циркуляция поля по контуру L — это работа, совершаемая при перемещении точки в поле вдоль контура L . В (8.78) τ_{sz} — проекция касательного напряжения в произвольной точке контура на направление касательной к контуру в этой точке:

$$\tau_{sz} = \tau_{xz} \cos(s, x) + \tau_{yz} \cos(s, y). \quad (8.79)$$

Используя (8.17), перепишем (8.79):

$$\tau_{sz} = \tau_{xz} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds}.$$

Если использовать формулы (8.11), то

$$\tau_{sz} = kG \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \frac{dx}{ds} + kG \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \frac{dy}{ds}.$$

Отсюда

$$\tau_{sz} ds = kG \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) + (x dy - y dx) \right],$$

или

$$\tau_{sz} ds = kG [d\varphi + (x dy - y dx)]. \quad (8.80)$$

Подставим (8.80) в (8.78):

$$\oint_L \tau_{sz} ds = kG \oint_L d\varphi + kG \oint_L (x dy - y dx). \quad (8.81)$$

Крипосимейный интеграл от полного дифференциала вдоль любого замкнутого контура L , лежащего внутри области (сечения) F , равен нулю. На этом основании 1-е слагаемое в правой части (8.81) равно нулю. Таким образом,

$$\oint_L \tau_{sz} ds = kG \oint_L (x dy - y dx). \quad (8.81a)$$

Чтобы вычислить интеграл, обратимся к формуле Остроградского — Грина, которая является плоским аналогом формулы Стокса:

$$\oint_L (P dx + Q dy) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (8.82)$$

Если P и Q — непрерывные функции с непрерывными частными производными 1-го порядка всюду в области S и на ее границе.

Сформируем левую часть (8.82) так, чтобы она совпала с интегралом, стоящим в правой части (8.81a), положив для этого $P = -y$, а $Q = x$.

$$\oint_L (x dy - y dx) = 2 \iint_F dx dy = 2F.$$

Таким образом,

$$\oint_L \tau_{sz} ds = 2kGF. \quad (8.83)$$

Равенство (8.83) носит название *теоремы о циркуляции касательных напряжений*. Эту формулу совершенно иным путем, без применения формулы Стокса, получил в 1896 г. Р. Бредт. Теорема Бредта формулируется следующим образом: циркуляция касательного напряжения по замкнутому контуру, целиком лежащему в пределах поперечного сечения, равна площади, ограниченной этим контуром, умноженной на $2kG$.

Теорема Бредта — необходимое и достаточное условие однозначности упругих перемещений в скручиваемом стержне, определяемых через функцию кручения. Если выразить τ_{sz} через функцию напряжений, то (8.83) запишется так:

$$\oint_L \frac{\partial \Phi}{\partial N} ds = 2F. \quad (8.84)$$

Эта теорема позволяет получить контурные значения функции напряжений Φ на всех n внутренних контурах. Действительно,

$$\oint_{L_1} \frac{\partial \Phi}{\partial N} ds = 2F_1;$$

$$\oint_{L_2} \frac{\partial \Phi}{\partial N} ds = 2F_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\oint_{L_n} \frac{\partial \Phi}{\partial N} ds = 2F_n.$$

Теорема о циркуляции касательных напряжений особо важна при рассмотрении многосвязных стержней. В этом случае функция напряжений должна удовлетворять уравнению Пуассона и, помимо того, дополнительному условию (8.84), которое гарантирует однозначность осевых деформаций в скручиваемом стержне.

§ 8.7. Кручение тонкостенных стержней

В инженерных сооружениях все чаще применяют конструкции из тонкостенных стержней: в авиа-, ракето- и судостроении, строительстве и др. Обусловлено это тем, что такие стержни прочны и жестки при небольшом собственном весе.

Тонкостенным называют такой стержень цилиндрической или призматической формы, все три измерения которого имеют различный порядок: толщина δ стенок мала в сравнении с длиной d контура поперечного сечения, а последняя мала в сравнении с длиной l стержня

$$\delta \ll d \ll l; \quad \frac{d}{\delta} \geq 8 \div 10; \quad \frac{l}{d} \geq 8 \div 10.$$

По форме сечения тонкостенные профили разделяют на открытые (односвязные — рис. 8.13) и замкнутые (дву- и многосвязные — рис. 8.14).

Различают чистое и стесненное кручение тонкостенных стержней. *Чистым*, или *сен-венановским*, *кручением* называется такое кручение стержня, когда все поперечные сечения деформируются одинаково.



Рис. 8.13



Рис. 8.14

продольные волокна сохраняют свою длину и, как следствие, поперечные сечения свободны от нормальных напряжений, касательные же распределяются по всем сечениям одинаково. При стесненном кручении (иногда его называют *изгибным кручением*) имеются те или иные препятствия свободному искривлению сечений. В этом случае продольные перемещения стержня стеснены, стержень искривляется и в сечениях, перпендикулярных к оси, кроме касательных напряжений возникают еще и нормальные растягивающие и сжимающие напряжения, обусловленные изгибом продольных элементов в двух плоскостях. Помехой свободному искривлению поперечных сечений тонкостенного стержня могут служить: 1) закрепление концов стержня в неподвижной среде или соединение торцов его с жесткими диафрагмами; 2) изменение по длине стержня крутящего момента; 3) переменность сечения по длине стержня.

Остановимся лишь на чистом кручении.

Кручение открытых (односвязных) стержней. Рассмотрим чистое кручение односвязного тонкостенного стержня, составленного из прямоугольных полос (рис. 8.15). Будем полагать, что толщина полос постоянна. Для прокатных профилей это требование выполняется не стро-

то, но в первом приближении усредненные толщины можно считать постоянными.

Попытаемся использовать решение для стержня с поперечным сечением в виде вытянутого прямоугольника (см. § 8.5). Мысленно разделим тонкостенный стержень (рис. 8.15) на элементы, каждый из которых имеет прямоугольное сечение $l_i \times h_i$. Прибегнем к мембранной аналогии.

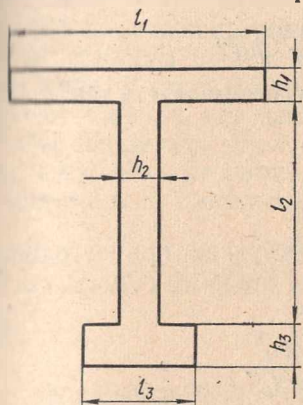


Рис. 8.15

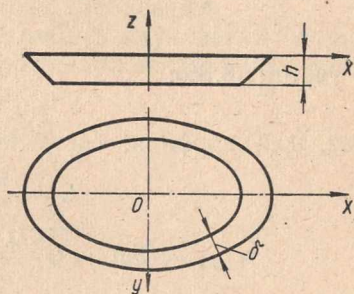


Рис. 8.16

Если сравнить холмы напряжений для всего сечения и отдельных прямоугольников, то можно предположить, что при прочих равных условиях прогибы, соответствующие прямоугольникам, будут близки к прогибам, соответствующим всему сечению. Отличия наблюдаются в зоне разрезов, поскольку в этих местах прогибов мембраны не будет. Следовательно, объем холма напряжений всего сечения приблизительно равен (ошибки накапливаются в стыках) сумме объемов холмов напряжений отдельных прямоугольников. Это, в свою очередь, означает, что жесткость составного тонкостенного стержня при кручении равна (с определенной погрешностью) сумме жесткостей составляющих «простых» стержней.

Поскольку для тонкостенного стержня $\frac{a}{b}$ — малая величина, то в (8.59) можно опустить 2-й член. Тогда жесткость и крутящий момент

$$C = \frac{16}{3} Ga^3b; \quad M = \frac{16}{3} Gka^3b. \quad (8.85)$$

Оценим погрешность, которая при этом возникает. Если из (8.59) вычесть (8.85) и поделить на (8.59), то результат, взятый по модулю, даст величину относительной погрешности:

$$\Delta = \frac{192}{5} \frac{a}{b} \sum_{n=\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a}.$$

Гиперболический тангенс никогда не выше единицы, а поэтому

$$\sum_{n=\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} < \sum_{n=\text{неч}}^{\infty} \frac{1}{n^5} \approx 1,0045.$$

С учетом этого $\Delta = \frac{192}{\pi^2} \frac{b}{a}$, или $\Delta = 0,63 \frac{b}{a}$. Если $\frac{b}{a} < \frac{1}{12}$, то Δ не превысит 5%, что для технических расчетов следует считать приемлемым.

В обозначениях рис. 8.15 формулы (8.85) можно переписать следующим образом:

$$C = \frac{1}{3} Gh^3 l; \quad M = \frac{1}{3} Gkh^3 l. \quad (8.86)$$

В этих же обозначениях формула (8.72) будет выглядеть так:

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{h^3 l},$$

или с учетом (8.86):

$$\tau_{\max} = Gkh.$$

Итак, для профиля, составленного из узких прямоугольников,

$$C = \frac{G}{3} \sum_i h_i^3 l_i; \quad (8.87)$$

$$\tau_{i \max} = Gkh_i = G \frac{M}{C} h_i = \frac{3Mh_i}{\sum h_i^3 l_i}.$$

В полосах прямоугольного сечения, из которых составлен профиль, наибольшее напряжение возникнет вдоль кромок наиболее широкой полосы.

Следует отметить, что полученные формулы не учитывают концентрации напряжений в углах, образующихся при сопряжении полос.

Кручение замкнутых (двусвязных стержней). В тонкостенном замкнутом стержне толщина стенок (вообще говоря, не обязательно постоянного сечения) мала по сравнению с остальными размерами поперечного сечения. В этом случае холм напряжений с большой степенью достоверности можно аппроксимировать конической поверхностью (рис. 8.16). Это равнозначно допущению, что уклон мембраны в пределах толщины стенки практически не меняется.

Применение мембранной аналогии для трубчатых стержней с учетом сделанных замечаний приводит к таким допущениям: 1) касательные напряжения в стенке тонкостенного профиля параллельны в каждой его точке касательной к срединной линии в этой точке (*срединным контуром сечения, или срединной линией*, называют линию, проведенную посередине между внешним и внутренним контурами); 2) касательные напряжения не изменяются по толщине стенки.

Следуя Прандтлю, определим напряжение τ как уклон мембраны (рис. 8.16):

$$\tau = \frac{h}{\delta(s)}, \quad (8.88)$$

где h — разность уровней; $\delta(s)$ — толщина стенки стержня, переменная по контуру.

Свяжем напряжение τ с крутящим моментом M . Ранее было установлено, что крутящий момент равен удвоенному объему холма напряжений:

$$M = 2Fh, \quad (8.89)$$

где F — площадь, отвечающая срединному контуру сечения. Ее можно рассматривать как среднее арифметическое между площадями наружного и внутреннего контуров.

Подставив (8.89) в (8.88), получим

$$\tau = \frac{M}{2F\delta(s)}, \quad (8.90)$$

касательное напряжение замкнутого контура изменяется в зависимости от толщины стенки контура и достигает максимума в самом тонком месте. В открытом же контуре наибольшие напряжения (8.87) возникают в местах, где толщина стенки наибольшая.

Чтобы определить крутку k , т. е. угол закручивания на единицу длины, воспользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения, применив ее к срединной линии:

$$\oint \tau ds = 2kGF.$$

Подставив сюда τ из (8.90), получим

$$k = \frac{M}{4F^2G} \oint \frac{ds}{\delta(s)}.$$

Для случая, когда $\delta(s) = \delta = \text{const}$,

$$k = \frac{Ms}{4F^2G\delta}. \quad (8.91)$$

Наибольшая площадь среди контуров у круга. Поэтому наименьшие напряжения и наибольшая жесткость присущи круглой трубе. Интересно сравнить жесткость круга и других сечений, чтобы количественно проследить преимущества круглого сечения.

Перепишем выражение (8.58) для жесткости и учтем при этом (8.91);

$$C = 4G\delta \frac{F^2}{s}.$$

Вычислим значение C для некоторых профилей, полагая, что длина контура s у всех этих контуров одинакова:

а) труба круглого сечения

$$s = \pi D; \quad F = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi^2 D^2}{4\pi} = \frac{s^2}{4\pi};$$

$$\frac{F^2}{s} = \frac{s^3}{16\pi^2}; \quad C = \frac{1}{4\pi^2} G\delta s^3;$$

б) прямоугольное сечение $\frac{b}{a} = n \quad (b > a)$

$$s = 2a + 2b; \quad F = ab;$$

$$s = 2a(1 + n); \quad F = a^2 n;$$

$$a = \frac{s}{2(1 + n)}; \quad F = \frac{s^2 n}{4(1 + n)^2};$$

$$\frac{F^2}{s} = \frac{n^2 s^3}{16(1 + n)^4};$$

$$C = \frac{n^2}{4(1 + n)^4} G\delta s^3.$$

Сравниваемое сечение	Эллипс		Прямоугольник			Равносторонний треугольник
	$\frac{b}{a} = 2$	$\frac{b}{a} = 3$	$\frac{b}{a} = 1$	$\frac{b}{a} = 2$	$\frac{b}{a} = 3$	
Отношение жесткостей $\frac{C_i}{C_{кр}}$	0,68	0,32	0,62	0,49	0,35	0,37

Для квадратного сечения

$$\frac{b}{a} = n = 1.$$

Составим отношение жесткостей квадрата и круга $\frac{C_{кв}}{C_{кр}}$:

$$\frac{C_{кв}}{C_{кр}} = \frac{\frac{1}{64} G \delta s^3}{\frac{1}{4\pi^2} G \delta s^3} = 0,62.$$

Подобные соотношения можно получить, сравнивая $C_{кр}$ с жесткостью других профилей. Опуская пояснения, сведем результаты в табл. 4. Так еще раз убеждаемся в преимуществах круглого сечения.

Кручение многосвязных стержней. Расчет на кручение тонкостенного многосвязного стержня по сути не отличается от рассмотренного.

В силе остаются допущения о форме холма напряжений и, как следствие, допущения, принятые при приближенном определении производных. Для многосвязного контура теорема о циркуляции касательного напряжения применяется уже не один раз, как это было сделано ранее, а столько, сколько внутренних контуров содержит многосвязное сечение.

Сначала рассмотрим простую задачу для контура, имеющего всего две внутренние полости, а затем наметим пути решения для более сложного случая.

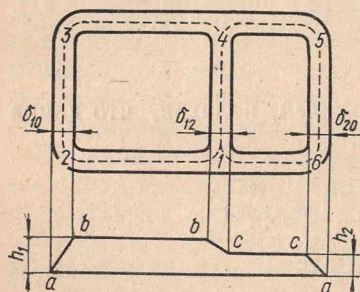


Рис. 8.17

Рассмотрим сечение с двумя внутренними полостями (рис. 8.17). Здесь пунктирными линиями обозначены очертания контуров s_i , которые охватывают соответствующие площади F_i и делят пополам толщину стенок профиля, постоянную для каждого участка. Эти контуры расположены в разных плоскостях, так как перемещения жестких дисков, соответствующих площадям F_i , неодинаковы. Касательные напряжения обозначим, как и обычно — буквой τ с двумя индексами. Нумерация индексов соответствует нумерации полей (площадей),

прилегающих к стенкам профиля, где возникает это касательное напряжение, причем внешнее поле обозначим индексом «ноль»:

$$\tau_{10} = \frac{h_1}{\delta_{10}}; \quad \tau_{20} = \frac{h_2}{\delta_{20}}; \quad (8.92)$$

$$\tau_{12} = \frac{h_1 - h_2}{\delta_{12}} = \frac{\tau_{10}\delta_{10} - \tau_{20}\delta_{20}}{\delta_{12}}. \quad (8.93)$$

Крутящий момент можно определить, удваивая объем холма напряжений *abbcca*:

$$M = 2(F_1 h_1 + F_2 h_2),$$

или, используя (8.92):

$$M = 2F_1 \delta_{10} \tau_{10} + 2F_2 \delta_{20} \tau_{20}. \quad (8.94)$$

Применим теорему о циркуляции касательных напряжений для каждого контура:

$$\begin{aligned} \oint_{s_1} \tau ds &= \int_{4321} \frac{h_1}{\delta_{10}} ds + \int_{14} \frac{h_1 - h_2}{\delta_{12}} ds = 2GkF_1; \\ \oint_{s_2} \tau ds &= \int_{1654} \frac{h_2}{\delta_{20}} ds + \int_{41} \frac{h_2 - h_1}{\delta_{12}} ds = 2GkF_2. \end{aligned} \quad (8.95)$$

Развернем интегралы (8.95), применив для отрезков пунктирных линий ту же систему обозначений, что и для касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{\delta_{10}} s_{10} + \frac{h_1 - h_2}{\delta_{12}} s_{12} &= 2GkF_1; \\ \frac{h_2}{\delta_{20}} s_{20} + \frac{h_2 - h_1}{\delta_{12}} s_{21} &= 2GkF_2. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Используя (8.92), (8.93) и полагая, что $s_{ij} = s_{ji}$, выражения (8.96) можно записать в компактном виде:

$$\begin{aligned} \tau_{10} s_{10} + \tau_{12} s_{12} &= 2GkF_1; \\ \tau_{20} s_{20} - \tau_{12} s_{12} &= 2GkF_2. \end{aligned} \quad (8.97)$$

Для определения четырех искомых величин τ_{10} , τ_{20} , τ_{12} и k в нашем распоряжении 4 уравнения — (8.93), (8.94) и (8.97), решая которые, получим

$$\begin{aligned} \tau_{10} &= M \frac{\delta_{12} s_{20} F_1 + \delta_{20} s_{12} (F_1 + F_2)}{2 [\delta_{10} \delta_{20} s_{20} F_1^2 + \delta_{20} \delta_{12} s_{10} F_2^2 + \delta_{10} \delta_{20} s_{12} (F_1 + F_2)^2]}; \\ \tau_{20} &= M \frac{\delta_{12} s_{10} F_2 + \delta_{10} s_{12} (F_1 + F_2)}{2 [\delta_{10} \delta_{20} s_{20} F_1^2 + \delta_{20} \delta_{12} F_2^2 + \delta_{10} \delta_{20} s_{12} (F_1 + F_2)^2]}; \\ \tau_{12} &= M \frac{\delta_1 s_{20} F_1 - \delta_2 s_{10} F_2}{2 [\delta_{10} \delta_{12} F_1^2 + \delta_{20} \delta_{30} s_{10} F_2^2 + \delta_{10} \delta_{20} s_{12} (F_1 + F_2)^2]}. \end{aligned}$$

Если стенка 1—4 является плоскостью симметрии сечения (рис. 8.17), то $s_{10} = s_{20}$, $\delta_{10} = \delta_{20}$ и $F_1 = F_2$. Тогда касательное напряжение $\tau_{12} = 0$, а это означает, что крутящий момент воспринимается только

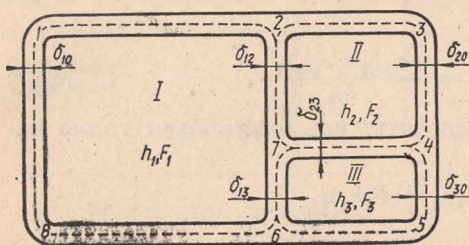


Рис. 8.18

наружной стенкой трубы; промежуточная перемычка 1—4 остается ненапряженной. Внутренняя перемычка может остаться ненапряженной и в случае несимметричного профиля, если удастся подобрать геометрические параметры так, чтобы

$$\delta_{10}s_{20}F_1 = \delta_{20}s_{10}F_2.$$

Выражение для угла закручивания k можно получить, если подставить значения τ в (8.97).

Обратимся к более сложному примеру, когда полость, вокруг которой совершается обход, граничит уже не с одной, а с несколькими полостями (рис. 8.18). Построение расчетных уравнений будет аналогичным только что проведенному. Поэтому

$$\oint_{s_1} \tau ds = \int_{2186} \frac{h_1}{\delta_{10}} ds + \int_{67} \frac{h_1 - h_3}{\delta_{13}} ds + \int_{72} \frac{h_1 - h_2}{\delta_{12}} ds = 2GkF_1;$$

$$\oint_{s_2} \tau ds = \int_{432} \frac{h_2}{\delta_{20}} ds + \int_{27} \frac{h_2 - h_1}{\delta_{12}} ds + \int_{74} \frac{h_2 - h_3}{\delta_{23}} ds = 2GkF_2;$$

$$\oint_{s_3} \tau ds = \int_{456} \frac{h_3}{\delta_{30}} ds + \int_{67} \frac{h_3 - h_1}{\delta_{13}} ds + \int_{74} \frac{h_3 - h_2}{\delta_{23}} ds = 2GkF_3.$$

Упрощая, получим

$$h_1 \oint_{s_1} \frac{ds}{\delta(s_1)} - h_2 \int_{72} \frac{ds}{\delta_{12}} - h_3 \int_{67} \frac{ds}{\delta_{13}} = 2GkF_1;$$

$$h_2 \oint_{s_2} \frac{ds}{\delta(s_2)} - h_1 \int_{27} \frac{ds}{\delta_{12}} - h_3 \int_{74} \frac{ds}{\delta_{23}} = 2GkF_2; \quad (8.98)$$

$$h_3 \oint_{s_3} \frac{ds}{\delta(s_3)} - h_1 \int_{67} \frac{ds}{\delta_{13}} - h_2 \int_{74} \frac{ds}{\delta_{23}} = 2GkF_3.$$

Система (8.98) строится по единому правилу, все интегралы, входящие в нее, положительны по логике вывода и поэтому она может считаться канонической. В каждом уравнении первый член является интегралом по контуру, вокруг которого совершается обход; в знаменателях этих интегралов величина $\delta(s_i)$ условно обозначает толщину стенки контура, примыкающей к данному контуру. Остальные интегралы берутся по отрезкам стенок, отделяющих рассматриваемую полость от других. Для полного решения задачи необходимо к уравнениям

000) прибавить еще одно:

$$M = 2 \sum_i h_i F_i.$$

Если в тонкостенном стержне сложного профиля есть как открытые, так и замкнутые контуры, то стержень замкнутого контура и примыкающие к нему призматические (цилиндрические) стержни следует рассматривать отдельно. Общая жесткость всего стержня определится суммированием жесткостей, его составляющих.

Рассматривая работу тонкостенных профилей, особенно многосвязных, весьма полезно воспользоваться гидродинамической аналогией А. Грипхилла, которая дает наглядное представление о процессах, происходящих при кручении.

Методы, основанные на использовании моделей-аналогов при решении задач кручения для тонкостенных стержней, не являются единственными. Трудами С. П. Тимошенко, Б. Г. Галеркина, Л. С. Лейбенсона, В. З. Власова, Г. Ю. Джаналидзе, В. В. Новожилова, А. А. Уманского, А. И. Лурье, А. Л. Гольденвейзера, Я. Г. Пановко и др. была создана законченная, экспериментально проверенная теория, широко применяемая в практике инженерных расчетов. Эта теория отражена в многочисленных специальных монографиях и здесь не рассматривается.

Глава 9

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 9.1. Общее выражение для работы внешних сил

Приложим к упругому телу некоторую систему внешних сил. Очевидно, что в результате такого воздействия тело изменит свою форму и положение в пространстве. Деформируя тело, внешние силы при этом совершают определенную работу, которая (если исключить тепловые, электромагнитные и другие необратимые явления) полностью переходит в потенциальную энергию упругой системы. Определим, какую работу должны совершить внешние силы для того, чтобы точки тела получили перемещения u , v , w .

Как известно, внешние силы делятся на объемные и поверхностные. На выделенный внутри тела элементарный объем действуют объемные силы с составляющими $X dx dy dz$; $Y dx dy dz$; $Z dx dy dz$. В то же время на каждый элемент поверхности может действовать сила с составляющими $P_x N ds$; $P_y N ds$; $P_z N ds$ (ds — площадь элемента поверхности упругого тела). Очевидно, что сумма работ всех внешних сил, действующих на тело на некоторых произвольных перемещениях u , v , w ,

$$A = \iiint (Xu + Yv + Zw) dx dy dz + \\ + \iint (P_x Nu + P_y Nv + P_z Nw) ds. \quad (9.1)$$

Уравнение (9.1) не изменится, если к правой части прибавить некоторую величину I_1 :

$$I_1 = \iint [(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) u + (\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n) v + (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n) w] ds. \quad (9.2)$$

Применяя к (9.2) формулу Остроградского — Гаусса

$$\iiint \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iint P(x, y, z) dy dz$$

и учитывая соотношения

$$ds \cdot l = dy dz; \quad ds \cdot m = dx dz; \quad ds \cdot n = dx dy,$$

получим, что

$$I_1 = \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} u + \sigma_y v + \tau_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_z w) \right] dx dy dz. \quad (9.3)$$

Прибавим теперь к правой части (9.1) выражение (9.3) и из полученного результата вычтем тождественно равное ему выражение (9.2). После преобразований имеем

$$\begin{aligned} A = & \iint [(P_{xN} - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) u + (P_{yN} - \tau_{xy} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) v + (P_{zN} - \tau_{xz} l - \tau_{yz} m - \sigma_z n) w] ds + \\ & + \iiint \left[X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) u + \left(Y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) v + \right. \\ & \left. + \left(Z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w \right] dx dy dz + \\ & + \iiint \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz. \quad (9.4) \end{aligned}$$

В полученном выражении внешние силы, компоненты перемещений и напряжения соответствуют как бы трем разным произвольным напряженным состояниям упругого тела.

Теперь прибавим и вычтем из правой части (9.4) величину I_2 , равную

$$\iiint (\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz.$$

Этим мы вводим в рассмотрение компоненты деформации $e_x, e_y, \dots, \gamma_{xz}$, соответствующие некоторому 4-му произвольному напряженному состоянию. Тогда

$$\begin{aligned} A = & \iint [(P_{xN} - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) u + (P_{yN} - \tau_{xy} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) v + (P_{zN} - \tau_{xz} l - \tau_{yz} m - \sigma_z n) w] ds + \\ & + \iiint \left[\left(X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) u + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) v + \\
& + \left(Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w \Big] dxdydz + \\
& + \iiint \left[\sigma_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_y \right) + \sigma_z \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_z \right) + \right. \\
& + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{xy} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \right) + \\
& \left. + \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \gamma_{xz} \right) \right] dxdydz + \\
& + \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dxdydz. \quad (9.5)
\end{aligned}$$

Уравнение (9.5) представляет собой общее выражение для работы внешних сил. Из него следует, что работа внешних сил, соответствующая некоторому произвольному напряженному состоянию, произведенная на перемещения, соответствующих другому напряженному состоянию, связана с составляющими напряжениями и компонентами деформации, соответствующими некоторым новым произвольным напряженным состояниям.

Несмотря на то что выражение (9.5) получено путем формальных рассуждений, оно очень удобно для доказательства многих общих теорем.

§ 9.2. Теорема Клапейрона

Пусть составляющие объемных и поверхностных сил, а также компоненты напряжения, деформации и перемещения, входящие в выражения для работы внешних сил (9.5), соответствуют одному и тому же напряженному состоянию. В этом случае уравнение (9.5) значительно упростится. Так как упругое тело находится в равновесии, то первые два интеграла в правой части (9.5) обращаются в нуль на том основании, что для всех точек тела должны удовлетворяться дифференциальные уравнения равновесия, а на контуре — граничные условия. Третий интеграл обращается в нуль на основании зависимостей Коши. Теперь выражение для работы внешних сил можно представить в виде

$$A = \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dxdydz.$$

В § 3.3 было показано, что если тело следует закону Гука, то потенциальная энергия единицы объема тела, или удельная потенциальная энергия

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}).$$

Таким образом,

$$A = 2 \iiint W dxdydz = 2V, \quad (9.6)$$

где V — потенциальная энергия тела.

Последнее выражение представляет собой теорему Клапейрона: работа внешних сил, производимая на соответствующих им перемещениях, равна удвоенной потенциальной энергии деформации тела в напряженном состоянии, соответствующем действию этих внешних сил.

§ 9.3. Начало возможных перемещений.

Принцип минимума для перемещений (принцип Лагранжа)

В теории упругости исследуется упругое тело, представляющее собой совокупность материальных точек и находящееся в равновесии под воздействием системы внешних сил. По отношению к материальной точке, находящейся в равновесии, начало возможных перемещений заключается в том, что полная сумма работ внешних сил, действующих на нее на любом возможном перемещении, равна нулю. Точно так же и полная работа, совершаемая всеми силами, приложенными к телу, обращается в нуль.

Пусть перемещения u, v, w , напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ и деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ в уравнении работы внешних сил (9.5) соответствуют внешним нагрузкам и принадлежат одной и той же системе. Пусть наши перемещения получают некоторые бесконечно малые приращения $\delta u, \delta v, \delta w$, которые допускаются связями и не нарушают их. Например, если некоторая часть тела закреплена неподвижно, то в ней должны выполняться следующие условия:

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0.$$

При наличии некоторой системы перемещений работа, затрачиваемая на преодоление взаимодействий между частицами тела, равна потенциальной энергии деформации, соответствующей этим перемещениям. Вычислим работу δA , которую произведут внешние силы на возможно малых приращениях $\delta u, \delta v, \delta w$. Для этого в уравнении работы (9.5) заменим перемещения и деформации их приращениями. Тогда из (9.5) следует

$$\delta A = \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dy dz.$$

Принимая во внимание существование потенциала упругих сил (§ 3.3), преобразуем правую часть последнего уравнения:

$$\begin{aligned} & \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \dots + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} = \\ & = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} \delta \epsilon_y + \dots + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xz}} \delta \gamma_{xz} = \delta W. \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta A = \delta \iiint W dx dy dz = \delta V. \quad (9.7)$$

Итак, при всяком возможном отклонении тела от положения равновесия сумма работ внешних сил на этих возможных перемещениях равна потенциальной энергии тела. Иными словами, мы имеем признак равновесия: положение тела, при малом отклонении от которого рабо-

внешних сил равна приращению потенциальной энергии тела, является положением равновесия. Этот признак может быть использован для определения положения равновесия системы.

Левая часть уравнения (9.7) представляет собой работу объемных и поверхностных сил на возможных перемещениях δu , δv , δw и равна вариации (изменению) потенциальной энергии тела. Обозначим ее δU . Тогда, согласно (9.7),

$$\delta U = \delta V,$$

или, что то же:

$$\delta(V - U) = \delta \mathcal{E} = 0. \quad (9.8)$$

Выражение в круглых скобках представляет собой полную потенциальную энергию упругой системы $\mathcal{E}$. Отсюда можно заключить, что перемещения, действительно имеющие место под воздействием внешних сил, обращают в нуль приращение полной потенциальной энергии системы на любом возможном перемещении от положения равновесия. Это эквивалентно условию равновесия упругого тела. Равенство нулю 1-й вариации от $\mathcal{E}$ говорит о том, что потенциальная энергия имеет экстремальное значение. Если взять 2-ю вариацию от $\mathcal{E}$, то можно показать, что она положительна, а следовательно, в состоянии равновесия потенциальная энергия имеет минимальное значение:

$$\mathcal{E} = \min.$$

Теперь можно сформулировать принцип минимума для перемещений, или принцип Лагранжа: из всех возможных систем перемещений упругого тела перемещения, действительно имеющие место, сообщают потенциальной энергии минимальное значение. Принцип Лагранжа вытекает непосредственно из начала возможных перемещений.

Следует отметить, что уравнение (9.8) справедливо только в случае деформирования при постоянной температуре. В противном случае напряжения и деформации возникнут независимо от наличия внешних сил. Тогда потенциальная энергия деформации V будет изменяться и без работы внешних сил.

§ 9.4. Начало виртуальных изменений напряженного состояния. Принцип Кастильяно

В предыдущем параграфе был установлен признак равновесия упругого тела, находящегося под воздействием системы внешних сил при изменении перемещений. Рассмотрим теперь напряжения, соответствующие положению равновесия тела.

Пусть компоненты напряжения, деформации и перемещения соответствуют некоторой системе внешних сил, действующей на упругое тело, причем перемещения и деформации связаны между собой соотношениями Коши. Используя уравнение (9.5), определим работу, произвольную приращениями внешних сил δX , δY , δZ , δP_{xN} , δP_{yN} , δP_{zN} на заданных перемещениях точек приложения сил.

Изменения напряженного состояния, при которых приращение внешних сил связаны с приращениями компонентов напряжения уравнениями статики, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{xz}) + \delta X = 0; \quad (9.9)$$

$$\delta P_{xN} = (\delta \sigma_x) l + (\delta \tau_{xy}) m + (\delta \tau_{xz}) n; \quad (9.10)$$

называются *виртуальными изменениями напряженного состояния*.

Подвергнем наше напряженное состояние такой произвольной вариации (изменению), чтобы новое напряженное состояние, характеризующее компонентами $\delta \sigma_x$, $\delta \sigma_y$, $\delta \sigma_z$, $\delta \tau_{xy}$, $\delta \tau_{yz}$, $\delta \tau_{xz}$, было статически возможным. Для этого достаточно, чтобы удовлетворялись уравнениям (9.9) и (9.10). Из (9.5) получим

$$\delta A = \iiint (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \epsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz}) dx dy dz. \quad (9.11)$$

Внесем (3.9) в выражение удельной потенциальной энергии

$$2W = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}.$$

После преобразований имеем

$$2W = \lambda \vartheta^2 + 2G (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + G (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2).$$

Внесем сюда уравнения (3.10) и γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} из трех последних уравнений (3.9). Тогда

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2). \quad (9.12)$$

Дифференцируя это уравнение, с учетом (3.10) и (3.9) получим

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = \epsilon_x; \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_y} = \epsilon_y; \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_z} = \epsilon_z; \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{xz}} = \gamma_{xz}. \quad (9.13)$$

Полученные соотношения называются *формулами Кастильяно*.

Удельная потенциальная энергия (9.12) является функцией шести компонентов напряженного состояния, следовательно,

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial W}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial W}{\partial \sigma_z} \delta \sigma_z + \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial W}{\partial \tau_{yz}} \delta \tau_{yz} + \frac{\partial W}{\partial \tau_{xz}} \delta \tau_{xz},$$

или, принимая во внимание (9.13):

$$\delta W = \epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \epsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz}. \quad (9.14)$$

Следует отметить, что формулы Кастильяно (9.13) и уравнение (9.14) имеют место в случае, если упругое тело следует закону Гука.

С учетом (9.14) из (9.11) получаем

$$\delta A = \iiint \delta W dx dy dz = \delta V. \quad (9.15)$$

Таким образом, при всяком возможном изменении напряженного состояния тела сумма работ, производимая приращениями всех внешних сил на перемещениях, им статически соответствующих, равна приращению потенциальной энергии тела.

Если в уравнении (9.5) заменить внешние силы и компоненты напряжений их приращениями и принять во внимание, что при этом удовлетворяются равенства (9.9) и (9.10), а также, согласно (9.15), имеет место зависимость

$$\delta V = \iiint (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz}) dx dy dz,$$

то приходим к выводу, что 3-й интеграл в (9.5) должен быть равен нулю. Иными словами, из начала виртуальных изменений напряженного состояния вытекают условия сплошности, формируемые уравнениями Коши.

Правая часть уравнения (9.15) представляет собой интегральную сумму (9.1) работ объемных и поверхностных сил на некоторых произвольных перемещениях u , v , w . Если положить вариации объемных сил равными нулю, т. е. потребовать, чтобы силы не менялись, то, вынеся знак вариации δ за знаки интегралов, получим

$$\delta \left[\iiint W dx dy dz - \iint (P_x n u + P_y n v + P_z n w) ds \right] = \delta \mathcal{E}_1 = 0.$$

Здесь $\mathcal{E}_1$ представляет собой неполную потенциальную энергию, т. е. энергию поверхностных сил. Равенство первой вариации потенциальной энергии $\mathcal{E}_1$ нулю свидетельствует о том, что она имеет экстремальное значение. Вторая вариация от $\mathcal{E}_1$ положительна, следовательно, $\mathcal{E}_1$ имеет минимальное значение, т. е.

$$\mathcal{E}_1 = \min.$$

Таким образом, из всех статически возможных систем напряжений только та система имеет место, для которой энергия внутренних и поверхностных сил имеет минимум. В этом заключается вариационный принцип Кастильяно, выражающий в энергетической форме условие совместности деформаций. Действительно, истинное напряженное состояние тела, находящегося в равновесии, отличается от любого другого возможного напряженного состояния только тем, что для него удовлетворяются условия совместности деформации.

В принципе Кастильяно, в отличие от принципа Лагранжа, варьируются напряжения. Однако оба эти принципа предполагают, что энергия системы в действительном состоянии имеет минимальное значение.

§ 9.5. Теорема Кастильяно и начало наименьшей работы

Теорема Кастильяно вытекает как следствие из начала виртуальных изменений напряженного состояния.

Пусть на упругое тело, перемещения опорных точек которого равны нулю, действует сила P , которая меняет свою величину. Ее

виртуальное изменение есть δP . Сила приложена в некоторой точке, перемещения которой равны u, v, w , а направление ее действия определяется направляющими косинусами l, m, n . Естественно, что виртуальные изменения проекций этой силы на координатные оси будут $l\delta P, m\delta P, n\delta P$.

Согласно началу виртуальных изменений напряженного состояния, на основании уравнения (9.15) можно записать

$$\delta V = (ul + vm + wn) \delta P.$$

Как известно, для оператора δ приняты те же правила, что и для дифференциального оператора d . Различие состоит только в том, что символ d относится к действительному изменению, а δ — к возможному. Поэтому вместо последнего равенства имеем

$$\frac{\partial V}{\partial P} = ul + vm + wn.$$

Правая часть этого уравнения представляет собой проекцию перемещения рассматриваемой точки на направление действия силы P . Обозначим эту проекцию через ρ . Таким образом,

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \rho.$$

Этим выражением формулируется теорема Кастильяно: частная производная потенциальной энергии упругого тела по любой приложенной к нему силе равна проекции перемещения точки приложения силы на направление ее действия.

Принцип наименьшей работы также вытекает из начала виртуальных изменений напряженного состояния и имеет важные приложения в механике твердого деформируемого тела.

Если внешние силы, приложенные к упругому телу, не меняются, т. е.

$$\delta X = \delta Y = \delta Z = 0;$$

$$\delta P_{xN} = \delta P_{yN} = \delta P_{zN} = 0,$$

то в силу (9.15) имеем

$$\delta V = 0. \quad (9.16)$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия в этих случаях достигает относительного экстремума, причем, как это отмечалось, он соответствует минимуму, а не максимуму потенциальной энергии.

Уравнением (9.16) выражается так называемое начало наименьшей работы, которое можно сформулировать так: из всех возможных напряженных состояний тела, статически соответствующих заданной внешней нагрузке, только то удовлетворяет условиям сплошности, которое обращает потенциальную энергию деформации тела в относительный минимум. Таким образом, это единственное напряженное состояние, удовлетворяющее уравнениям статики и условиям сплошности, может быть получено из условия равенства нулю вариации потенциальной энергии тела V .

Следует подчеркнуть, что начало наименьшей работы имеет место только в том случае, если упругое тело следует закону Гука.

Ранее рассматривались различные, в основном простейшие, приемы задач теории упругости, допускающие точные решения. Все они были получены тем или иным путем непосредственно из дифференциальных уравнений равновесия. Если же уравнения не поддаются точному решению, то прибегают к численным методам их интегрирования. Существует, однако, и другой подход к приближенному решению задач теории упругости, который опирается на вариационные принципы механики и состоит в минимизации функционала. Остановимся на некоторых разновидностях такого подхода.

Исходным функционалом для решения задач теории упругости является выражение потенциальной энергии всей системы:

$$\Theta = \iiint W dV - \iiint (Xu + Yv + Zw) dV - \iint (P_{xN}u + P_{yN}v + P_{zN}w) ds. \quad (9.17)$$

В механике доказана теорема, по которой функционал энергии (9.17) достигает минимума на функциях u , v , w , полностью определяющих деформированное состояние системы, если она под воздействием заданных сил $(X, Y, \dots, P_{zN})$ находится в устойчивом равновесии. При этом с точки зрения вариационного исчисления функции u , v , w должны удовлетворять уравнениям Эйлера, которые для задач теории упругости являются уравнениями равновесия. Чтобы в этом убедиться, запишем необходимое условие минимума функционала (9.17) подробно:

$$\begin{aligned} \delta\Theta = & \iiint \left\{ \sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial(\delta w)}{\partial z} + \right. \\ & + \tau_{xy} \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \right] + \tau_{yz} \left[\frac{\partial(\delta v)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} \right] + \\ & \left. + \tau_{xz} \left[\frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta u)}{\partial z} \right] \right\} dxdydz - \\ & - \iiint (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dxdydz - \iint (P_{xN}\delta u + P_{yN}\delta v + P_{zN}\delta w) ds = 0 \end{aligned} \quad (9.18)$$

и к каждому слагаемому 1-го тройного интеграла применим формулы интегрирования по частям, учитывая соотношения $lds = dydz$; $m ds = dx dz$; $n ds = dxdy$. Например:

$$\begin{aligned} \iiint \sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dxdydz &= \iint \sigma_x \delta u l ds - \iiint \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u dxdydz; \\ \iiint \tau_{xy} \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} dxdydz &= \iint \tau_{xy} \delta u m ds - \iiint \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta u dxdydz; \\ \iiint \tau_{xz} \frac{\partial(\delta u)}{\partial z} dxdydz &= \iint \tau_{xz} \delta u n ds - \iiint \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \delta u dxdydz \end{aligned}$$

и т. д. Группируя после этого двойные и тройные интегралы и объединяя затем выражения с одинаковыми вариациями, получим

$$\begin{aligned} \delta\Theta = & \iiint \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u + \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \end{aligned} \quad a)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \Big] dx dy dz - \\
& - \iint \left[(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - P_{xN}) \delta u + \right. \\
& \quad + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - P_{yN}) \delta v + \\
& \quad \left. + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n - P_{zN}) \delta w \right] ds = 0.
\end{aligned} \tag{9.19}$$

Поскольку вариации δu , δv , δw по своей сути — величины произвольные, обращение в нуль выражения (9.19) возможно лишь при условии равенства нулю коэффициентов при этих вариациях. Так из вариационного уравнения $\delta \mathcal{E} = 0$ получаются уже известные уравнения равновесия (1.5) и граничные условия (1.7), которые при желании можно записать в перемещениях u , v , w . Для этого достаточно воспользоваться физическими (3.9) и геометрическими (2.7) соотношениями, как это было сделано в гл. 4 (§ 4.2) при получении уравнений Ламе.

Итак, для получения точного решения вариационного уравнения $\delta \mathcal{E} = 0$ следует обращаться к вытекающим из него уравнениям Эйлера. Однако если нас устраивают приближенные результаты, то не обязательно пользоваться дифференциальными уравнениями, можно оперировать непосредственно вариационным уравнением. Как это делается, впервые показал Ритц.

Нетрудно представить, что после подстановки решения в виде

$$u = \sum_{i=1}^K \alpha_i u_i; \quad v = \sum_{j=1}^L \beta_j v_j; \quad w = \sum_{q=1}^M \gamma_q w_q, \tag{9.20}$$

где α_i , β_j , γ_q — неизвестные параметры, а u_i , v_j , w_q — заданные функции координат x , y , z , выражение (9.18) будет зависеть только (1) от неизвестных α_i , β_j , γ_q . В результате мы имеем дело уже не с функционалом, а с обычной функцией нескольких переменных. Естественно, что теперь и условие (9.18) должно преобразоваться в необходимое условие экстремума функции многих переменных:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \beta_j} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_q} = 0, \tag{9.21}$$

где $i = 1, 2, \dots, K$; $j = 1, 2, \dots, L$; $q = 1, 2, \dots, M$.

Для квадратичных функционалов, каким является выражение (9.17), соотношения (9.21) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых параметров α_i , β_j , γ_q , определяющих в конечном итоге приближенное решение задачи (9.20).

Здесь мы рассмотрим три основных способа прямого решения вариационной задачи, отличающихся своим отношением к подбору координатных функций.

По методу Ритца каждая координатная функция должна обязательно удовлетворять кинематическим условиям на границе. Очевидно, что с таким набором функций решение (9.20) после определения параметров α_i , β_j , γ_q из системы (9.21) будет приближенно удовлетворять как дифференциальным уравнениям равновесия, так и силовым краевым условиям.

В варианте Галеркина функции u_i, v_j, w_q подчиняют всем краевым условиям. Так как в этом случае контурные интегралы (9.19б) тождественно обращаются в нуль, для построения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений вместо выражения полной энергии (17) обычно используются интегралы, содержащие дифференциальные уравнения задачи (9.19а), записанные в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_i} &= \iiint \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) u_i dx dy dz = 0; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \beta_j} &= \iiint \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) v_j dx dy dz = 0; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_q} &= \iiint \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) w_q dx dy dz = 0. \end{aligned} \right\}$$

К третьей разновидности (метод Трефца) относится случай, когда координатная последовательность состоит из функций, являющихся интегралами дифференциальных уравнений задачи и не удовлетворяющих краевым условиям. Поэтому при построении системы алгебраических уравнений опираются на выражения контурных интегралов (9.19б):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_i} &= \iint (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - P_{xN}) u_i ds = 0; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \beta_j} &= \iint (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - P_{yN}) v_j ds = 0; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_q} &= \iint (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n - P_{zN}) w_q ds = 0. \end{aligned} \right\}$$

Глава 10

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИН

§ 10.1. Основные допущения и определения

Пластиной будем называть тело, имеющее форму прямой призмы или прямого цилиндра, наибольшая высота h которых, измеренная между плоскими основаниями, мала по сравнению с размерами оснований (рис. 10.1). Высота (толщина) h , вообще говоря, может быть переменной. Если $h = \text{const}$, пластина называется *пластиной постоянной толщины*, а плоскость, равноудаленная от оснований, — *срединной плоскостью*. Строгая теория пластин без упрощающих допущений весьма сложна и представляет собой одну из труднейших задач математической физики. В дальнейшем рассмотрим пластины только постоянной толщины.

Чтобы систематизировать методы расчета пластин, последние в зависимости от толщины разбивают на следующие группы:

1. Толщина пластины весьма мала и не превосходит 1,25% наименьшего размера a основания ($h \leq \frac{a}{80}$). Такие пластины, называемые *мембранами*, обладают незначительной изгибной жесткостью и работают в основном на растяжение.

2. Толщина пластины превышает 20% наименьшего размера основания ($h > \frac{a}{5}$). Такая пластина называется *толстой плитой*. Эти задачи относятся к пространственной задаче теории упругости, и решение их встречает чрезвычайно большие трудности.

3. Толщина пластины невелика и колеблется в пределах 1,25—20% от меньшего размера a основания ($\frac{a}{80} \leq h \leq \frac{a}{5}$). Пластины такой толщины называют *тонкими*. Их расчет можно упростить за счет введения некоторых дополнительных допущений. Именно этой категории

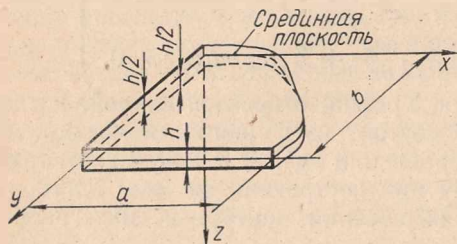


Рис. 10.1

пластин посвящена в основном настоящая глава. Пределы толщин тонких пластин можно преобразовать, но одновременно с этим уменьшится правомерность принятых допущений, что, в свою очередь, немедленно скажется на достоверности окончательных результатов.

Пластины классифицируют по их деформативной способности.

Так, если наибольший прогиб при изгибе не превосходит $h/5$, то пластина считается *жесткой* и напряжениями растяжения (сжатия), действующими в ее срединной плоскости, пренебрегают. Если прогибы значительны — более $h/5$, то пластина называется *гибкой*. Напряжения в срединной плоскости в этом случае имеют один порядок с изгибными и ими, естественно, пренебречь нельзя. Гибкая пластина, в которой прогибы превышают $5h$, называется *мембраной*.

Внешние нагрузки и объемные силы в случае, когда они учитываются, будем считать приложенными к срединной плоскости. Эти нагрузки можно всегда разложить на две составляющие, одна из которых действует в срединной плоскости, а другая — перпендикулярно к ней. Если силы действуют в срединной плоскости, то пластина испытывает плоское напряженное состояние (этот случай разобран в предыдущих главах). Силы, действующие перпендикулярно к срединной плоскости, вызывают поперечный изгиб пластины.

При построении инженерной теории тонких пластин примем следующие допущения (гипотезы).

Основная гипотеза о прямых нормалях Кирхгофа — Лава: прямолинейные отрезки, выделенные в теле пластины, нормальные до деформации к срединной плоскости, остаются после деформации прямолинейными и нормальными к срединной поверхности, в которую перейдет срединная плоскость. Эта гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений, повсеместно используемой в сопротивлении материалов. В действительности прямолинейные элементы при изгибе слегка искривляются. Это искривление значительно меньше, чем перемещения $z \frac{\partial w}{\partial x}$ (рис. 10.2, а) и $z \frac{\partial w}{\partial y}$ (рис. 10.2, б), обусловленные поворотом нормали, который возникает из-за искривления срединной плоскости.

Гипотезу прямых нормалей можно трактовать как требование неизменности прямых углов в плоскостях xz и yz , а это значит, что сдвиг в этих плоскостях должен отсутствовать:

$$\gamma_{xz} = 0; \quad \gamma_{yz} = 0.$$

Гипотеза о вертикальном смещении точек срединной плоскости: точки срединной плоскости при малых деформациях смещаются

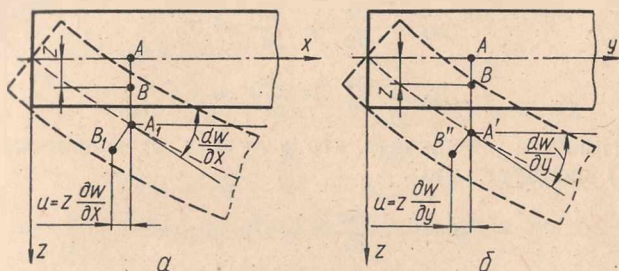


Рис. 10.2

только в направлениях, к ней перпендикулярных, т. е. по направлению оси z . Горизонтальными перемещениями вследствие малости пренебрегают:

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0; \quad w_0 = w(x, y).$$

Здесь u_0 , v_0 и w_0 — перемещения срединной плоскости.

Гипотеза об отсутствии поперечного давления: слои пластины, параллельные срединной плоскости, не надавливают друг на друга. Это означает, что на площадках, параллельных срединной плоскости, можно пренебречь нормальными напряжениями:

$$\sigma_z = 0.$$

Эта гипотеза аналогична утверждению, что любой слой, параллельный срединной плоскости пластины, находится в плоском напряженном состоянии.

На самом деле некоторое нажатие слоев существует. Внешняя нагрузка не только изгибает пластину, но и надавливает на плоскость основания, вызывая тем самым на слоях, параллельных нейтральной плоскости, напряжения сжатия σ_z . Однако эти напряжения на три порядка ниже изгибных, и ими с полным правом можно пренебречь.

После того как приняты некоторые допущения, совместная система основных уравнений теории упругости — уравнения Навье, Коши, Сен-Венана и Гука — распадается и решение ее значительно упрощается. Именно в этом и заключаются смысл и назначение принимаемых допущений. На основании принятых гипотез задача решается — определяются напряжения, которые можно условно назвать «основными» в отличие от отброшенных — «второстепенных». Знание «основных» напряжений позволяет определить вначале отброшенные — «второстепенные». Последние находят при помощи известных уже «основных».

§ 10.2. Дифференциальное уравнение изгиба тонких пластин

Реализуем допущения, сделанные в § 10.1, с тем чтобы, используя основные зависимости гл. 4, получить разрешающее уравнение для тонких пластин.

Из 1-й гипотезы при использовании уравнений Коши непосредственно следует:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.\end{aligned}\tag{10.1}$$

Вторая гипотеза утверждает, что $w = w(x, y)$ не зависит от z . Тогда из (10.1) явствует, что

$$\begin{aligned}u &= -\frac{\partial w}{\partial x} z + C_1(x, y); \\ v &= -\frac{\partial w}{\partial y} z + C_2(x, y).\end{aligned}\tag{10.2}$$

Вновь воспользуемся 2-й гипотезой: на срединной плоскости, т. е. при $z = 0$,

$$u = u_0 = 0; \quad v = v_0 = 0.$$

При использовании этих условий уравнения (10.2) упрощаются:

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z; \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y} z.\tag{10.3}$$

Относительные деформации ε_x , ε_y и γ_{xy} определяются из уравнений Коши. С учетом (10.3)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{10.4}$$

Получим теперь из (10.4) выражения для напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} , используя 3-ю гипотезу, согласно которой $\sigma_z = 0$, и уравнения обобщенного закона Гука, разрешенные относительно напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{10.5}$$

Напряжения связаны между собой при помощи уравнений Навье (объемные силы не учитываются; в случае необходимости их можно

включенными во внешнюю нагрузку). Из 1-го и 2-го уравнений Навье выразим τ_{xz} и τ_{yz} через σ_x , σ_y и τ_{xy} , учитывая (10.5). Получив напряжения через перемещение w , подставим их в 3-е уравнение Навье. Итак, согласно принятому плану,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right).\end{aligned}\quad (10.6)$$

Интегрируя (10.6) по z , получим

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + f_1(x, y); \\ \tau_{yz} &= \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + f_2(x, y).\end{aligned}\quad (10.7)$$

Произвольные функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ определим из следующих граничных условий:

$$-z = \pm 0,5h; \quad \tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0. \quad (10.8)$$

При использовании (10.8) выражения (10.7) перепишутся так:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = \\ &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w.\end{aligned}\quad (10.9)$$

Из выражений (10.5) и (10.9) следует, что напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} зависят от координаты z линейно, а τ_{xz} и τ_{yz} — по квадратичному закону (рис. 10.3).

Подставим (10.9) в 3-е уравнение Навье, предварительно разрешив последнее относительно $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right).\end{aligned}$$

Интегрируя по z , получим

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{1}{3} z^3 \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + f_3(x, y). \quad (10.10)$$

Будем полагать, что по верхней грани пластины действует нормальная к ней нагрузка $q = q(x, y)$, нижняя грань свободна от нагрузки:

$$\sigma_z(x, y, 0,5h) = 0; \quad \sigma_z(x, y, -0,5h) = -q. \quad (10.11)$$

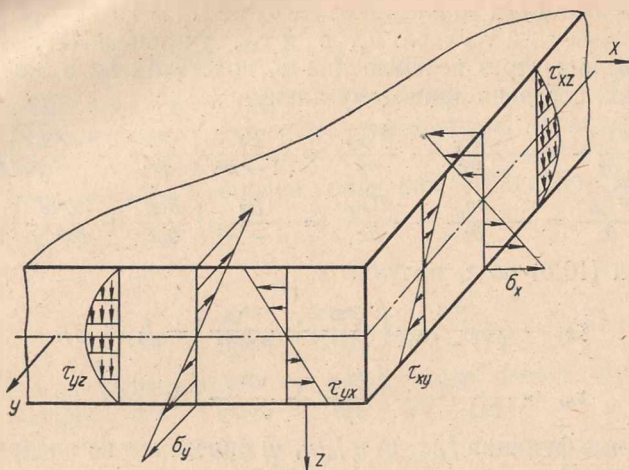


Рис. 10.3

Подчинение зависимости (10.10) 1-му условию из (10.11) дает следующее выражение для σ_z :

$$\sigma_z = \frac{-E}{24(1-\nu^2)} (h^3 - 3h^2z + 4z^3) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right).$$

Использование 2-го граничного условия приводит к искомому дифференциальному уравнению изогнутой срединной поверхности пластины:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (10.12)$$

или

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D},$$

где $D = Eh^3 12^{-1} (1 - \nu^2)^{-1}$ — цилиндрическая жесткость пластины.

Уравнение (10.12) носит название *уравнения Софи Жермен*.

Цилиндрическая жесткость пластины имеет тот же смысл, что и жесткость EJ балки при изгибе. Цилиндрическая жесткость D и жесткость балки прямоугольного сечения, имеющей ту же высоту h , что и пластина, а ширину, равную единице, отличаются лишь на величину $0 < 1 - \nu^2 < 1$. Поэтому различие между ними невелико, а $D > EJ$. Из двух перекрытий, одно из которых — пластина толщиной h , а другое — набор не связанных между собой балок той же высоты, имеющих единичную ширину, при прочих равных условиях 1-е будет предпочтительней.

Отметим, что использованные до сих пор граничные условия (10.8) и (10.11) носят статический характер и не накладывают никаких ограничений на геометрические контурные условия (условия закрепления), а также на закон изменения нагрузки по верхней поверхности пластины.

Рассматривая работу нагруженной пластины, часто (например, при формировании граничных условий) приходится использовать выражения для сил и момента, которые действуют на площадках, перпен-

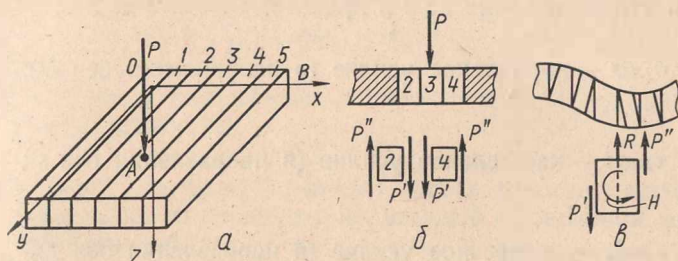


Рис. 10.4

дикулярных к основаниям. Следует отметить, что на этих площадках наряду с изгибающими моментами могут действовать и моменты кручения, возникающие от действия касательных напряжений. Физику возникновения крутящих моментов легко уяснить на следующем простом примере. Прямоугольную пластину, защемленную по грани OB , мысленно расслоим на ряд блоков-полос (рис. 10.4, а). Сила P , действуя только на ту полосу, к которой приложена (полоска 3), изогнет ее. В сплошной пластине полоски 2 и 4, соседние с нагруженной, будут испытывать усилие P' , передаваемое полоской 3 (рис. 10.4, б). Полоски 1 и 5, примыкающие к полоскам 2 и 4 с другой стороны, будут выдерживать усилие P'' . Из-за различия P' и P'' возникают равнодействующая R и пара H (рис. 10.4, в).

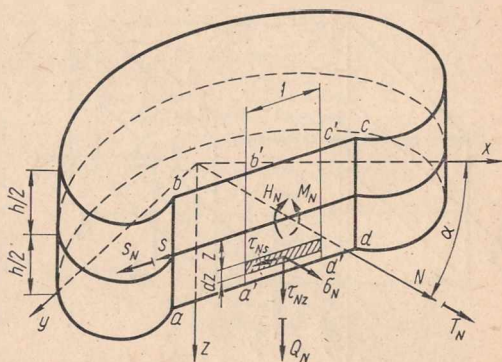


Рис. 10.5

Чтобы получить выражения для сил и моментов в наиболее общем случае, рассмотрим площадку $abcd$ (рис. 10.5). Нормаль N к площадке не параллельна ни одной из координатных осей, сама же площадка перпендикулярна к основаниям пластины. Поместим нормаль N в срединной плоскости пластины, в той же плоскости отметим направление s . Направления N и s выберем так, чтобы они были конгруэнтны осям x и y . Напомним, что конгруэнтными называют такие фигуры, которые можно совместить в результате некоторого движения. Системы координат конгруэнтны в том случае, если при совмещении соответствующих осей совместятся и другие оси.

Выделим на площадке $abcd$ элементарную полоску $1 \times dz$, удаленную от срединной плоскости на расстояние z (рис. 10.5). Напряжение, действующее по этой площадке, разложим на составляющие σ_N , τ_{Nz} и

τ_{Ns} . Элементарные усилия, действующие на полоске, такие: $\sigma_N dz$ (нормальные); $\tau_{Nx} dz$ и $\tau_{Ns} dz$ (касательные). Чтобы получить усилия, приходящиеся на единичную полоску $a'b'c'd'$, очевидно, следует проинтегрировать эти выражения по z в пределах от $-h/2$ до $h/2$:

$$T_N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_N dz \text{ — нормальное усилие (в направлении оси } N);$$

$$S_N = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{Ns} dz \text{ — касательное усилие (в направлении оси } s);$$

$$Q_N = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{Nz} dz \text{ — поперечное усилие (в направлении оси } z); \quad (10.13)$$

$$M_N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_N z dz \text{ — изгибающий момент относительно оси } s;$$

$$H_N = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{Ns} z dz \text{ — крутящий момент относительно оси } N.$$

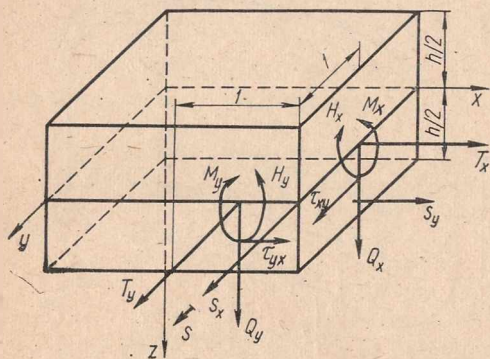


Рис. 10.6

Усилия T_N , S_N и Q_N положительны, когда ориентированы в сторону положительных направлений осей, по которым действуют (для нормального усилия T_N это соответствует растяжению). Момент M_N положителен, когда растягивает нижнюю поверхность пластины. Крутящий момент H_N считается положительным, когда направлен по стрелке часов, если смотреть со стороны положительного направления внешней нормали. На

рис. 10.5 все усилия показаны положительными.

Совмещая внешнюю нормаль с координатными осями x и y (рис. 10.6), из (10.13) получим соответственно

$$\begin{aligned} T_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; & T_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz; \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz; \\ S_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; & S_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz; \end{aligned} \quad (10.14)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz;$$

$$H_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz; \quad H_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} z dz.$$

Закон парности касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ приводит к следующим зависимостям:

$$S_y = S_x; \quad H_y = H_x.$$

В некоторых случаях возникает необходимость выразить напряжения и усилия на площадке, нормальной к срединной поверхности и не параллельной ни оси x , ни оси y , через «осевые» напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} . Такие зависимости могут понадобиться при составлении граничных условий для пластин, имеющих «неправильную» форму: прямоугольника со скошенным углом, трапеции и т. д. Кроме того, эти соотношения позволяют вывести некоторые экстремальные зависимости между составляющими усилия.

Рассмотрим призму, высеченную из пластины тремя плоскостями, перпендикулярными к ее основаниям. Две из этих плоскостей параллельны координатным плоскостям xOz и yOz (рис. 10.7, а). Площадь $abfe$ обозначим dF , тогда площади граней $abdc$ и $cdfe$ будут соответственно $dF \cdot \cos \alpha$ и $dF \cdot \sin \alpha$. Чтобы избежать решения системы уравнений, спроецируем усилия не на оси x , y , z , а на N , s и z соответственно (рис. 10.7, б):

$$\Sigma_{\text{пр}N} = -\sigma_x dF \cdot \cos \alpha \cos \alpha - \sigma_y dF \cdot \sin \alpha \sin \alpha - \tau_{xy} dF \cdot \cos \alpha \sin \alpha -$$

$$- \tau_{xy} dF \cdot \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_N dF = 0;$$

$$\Sigma_{\text{пр}z} = \sigma_x dF \cdot \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_y dF \cdot \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{yx} dF \cdot \sin \alpha \sin \alpha -$$

$$- \tau_{xy} dF \cdot \cos \alpha \cos \alpha + \tau_{Ns} dF = 0;$$

$$\Sigma_{\text{пр}z} = -\tau_{xz} dF \cdot \cos \alpha - \tau_{yz} dF \cdot \sin \alpha + \tau_{Nz} dF = 0.$$

После очевидных упрощений (10.15) преобразуются в следующие уравнения:

$$\sigma_N = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_{Ns} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha;$$

$$\tau_{Nz} = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \sin \alpha.$$

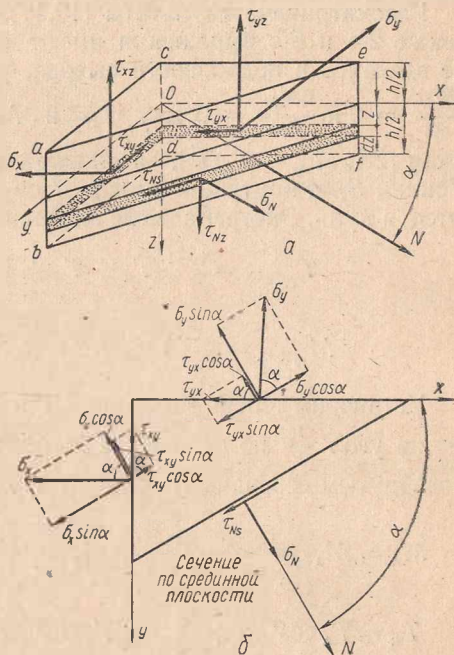


Рис. 10.7

Подставив (10.16) в (10.13), с учетом (10.14) получим

$$T_N = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha + S_x \sin 2\alpha;$$

$$S_N = -\frac{T_x - T_y}{2} \sin 2\alpha + S_x \cos 2\alpha;$$

$$M_N = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + H_x \sin 2\alpha; \quad (10.17)$$

$$Q_N = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha;$$

$$H_N = -\frac{M_x - M_y}{2} \sin 2\alpha + H_x \cos 2\alpha.$$

Рассматривая результаты (10.17), легко увидеть, что 1-е и 3-е, а также 2-е и 5-е выражения имеют одинаковую структуру. Поэтому, не вдаваясь в подробности вывода, укажем, что условия экстремума $\frac{\partial T_N}{\partial \alpha} = 0$ и $\frac{\partial M_N}{\partial \alpha} = 0$ для T_N и M_N выполняются, когда $\alpha = 2^{-1} \arctg [2S_x (T_x - T_y)^{-1}]$, а также $\alpha = 2^{-1} \arctg [2H_x (M_x - M_y)^{-1}]$. Усилия S_N и крутящий момент H_N в сечениях с таким углом α обращаются в нуль. Экстремальные значения для T_N и M_N имеют вид

$$T_{N_{\min}^{\max}} = 2^{-1} (T_x + T_y \pm \sqrt{(T_x - T_y)^2 + 4S_x^2}); \quad (10.18)$$

$$M_{N_{\min}^{\max}} = 2^{-1} (M_x + M_y \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4H_x^2}). \quad (10.19)$$

Установим теперь значения M_N и T_N для сечений, которые повернуты на угол $\frac{\pi}{2}$ по отношению к сечениям с нормалью N (нормаль к повернутым сечениям обозначим через n):

$$M_n = M_x \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + M_y \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + H_x \sin 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$T_n = T_x \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + T_y \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + S_x \sin 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right),$$

или

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha - H_x \sin 2\alpha; \\ T_n &= T_x \sin^2 \alpha + T_y \cos^2 \alpha - S_x \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Сложив попарно M_N и M_n , T_N и T_n , получим

$$\begin{aligned} M_N + M_n &= M_x + M_y; \\ T_N + T_n &= T_x + T_y. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Результат (10.21) можно сформулировать следующим образом: сумма изгибающих моментов (нормальных усилий) инвариантна относительно любых двух взаимно перпендикулярных поперечных сечений.

Выразим теперь составляющие изгибающих и крутящих моментов, а также составляющие нормальных и касательных усилий через перемещения w , подставляя для этого (10.5) и (10.9) в (10.14). Опуская со-

полностью элементарные выкладки, получим

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad (10.22)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w$$

$$H_x = H_y = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

$$T_x = 0; \quad T_y = 0; \quad S_x = 0; \quad S_y = 0. \quad (10.23)$$

Свяжем выражение для цилиндрической жесткости с изгибной жесткостью балки-полоски сечения $1 \times h$. Осовой момент этой балки, очевидно, $J^6 = \frac{1 \cdot h^3}{12}$. В этом случае

$$D = \frac{EJ^6}{1 - \nu^2},$$

где EJ^6 — жесткость балки указанного сечения.

Определим теперь напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} через M_x , M_y , H_x , Q_x и Q_y . Из (10.22) непосредственно следует, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_x}{D}; \quad (10.24)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{D};$$

$$(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{H_x}{D}.$$

Сопоставляя (10.5) с (10.24), для σ_x можно получить следующее выражение:

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{1 - \nu^2} \left(-\frac{M_x}{D} \right) = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{M_x}{\frac{EJ^6}{1 - \nu^2}} = \frac{M_x}{J^6} z.$$

Для σ_y и τ_{xy} аналогично получим

$$\sigma_y = \frac{M_y}{J^6} z; \quad \tau_{xy} = \frac{H_x}{J^6} z. \quad (10.25)$$

Таким образом, оперируя с балками-полосками единичной ширины, можно усмотреть связь между изгибом этих балок и пластин. Нормальные напряжения из (10.25) совпадают с формулами элементарной теории (напряжения τ_{xy} в элементарной теории не рассматривались). Наибольшие значения эти напряжения получают при $z = \pm \frac{h}{2}$.

Обозначая $\frac{J^6}{h} = W^6$, получим

$$\sigma_x^{\max} = \frac{M_x}{W^6}; \quad \sigma_y^{\max} = \frac{M_y}{W^6}; \quad \tau_{xy}^{\max} = \frac{H_x}{W^6}.$$

Для определения τ_{xz} и τ_{yz} воспользуемся (10.22) для Q_x и Q_y . Подставив $-\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w$ из (10.22) в 1-е уравнение (10.9), имеем

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(-\frac{Q_x}{D} \right) = \frac{Q_x}{J^6} \frac{\frac{h^2}{4} - z^2}{2}.$$

Выражение $\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$ есть не что иное, как статический момент площади поперечного сечения, лежащей по одну сторону от той линии,

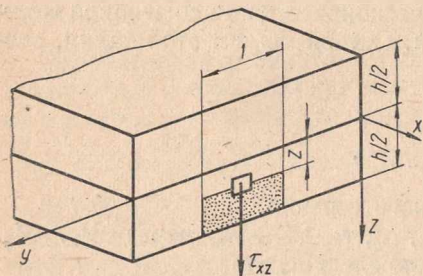


Рис. 10.8

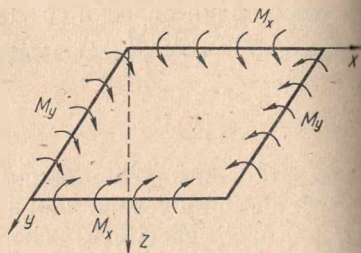


Рис. 10.9

на которой определяется τ_{xz} (на рис. 10.8 эта площадка выделена точечной штриховкой). Действительно,

$$S^* = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{2} + z \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Тогда выражение для τ_{xz} , а по аналогии и τ_{yz} , можно записать так:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x S^*}{1 \cdot J^6}; \quad \tau_{yz} = \frac{Q_y S^*}{1 \cdot J^6}.$$

Эти формулы совпадают с известными формулами элементарной теории для балок при $b = 1$.

Определим таким же образом напряжения на «косых» площадках. Подставив (10.25) в (10.16), получим

$$\sigma_N = \frac{M_N}{J^6} z; \quad \tau_{Ns} = \frac{M_s}{J^6} z; \quad \tau_{Nz} = \frac{Q_N S^*}{J^6}.$$

Проследим теперь, как будут изменяться результаты для некоторых частных случаев изгиба пластин. Определим комплект величин, соответствующий этим случаям.

Ч и с т ы й и з г и б. По кромкам пластины (рис. 10.9) действуют только погонные изгибающие моменты M_x и M_y . Крутящих моментов и поперечных сил нет. Пластина находится в состоянии чистого изгиба в двух направлениях, нормальных друг к другу. При чистом изгибе $H_x = 0$ и $H_y = 0$, а поэтому $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$ и, как следствие, $\tau_{xy} = 0$, а $w = \psi_1(x) + \psi_2(y)$.

Чистое кручение возникает в пластине, когда внешнее воздействие сводится лишь к погонным крутящим моментам (рис. 10.10).

Уравнение изогнутой срединной поверхности, очевидно, будет

$$-D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = H. \quad (10.26)$$

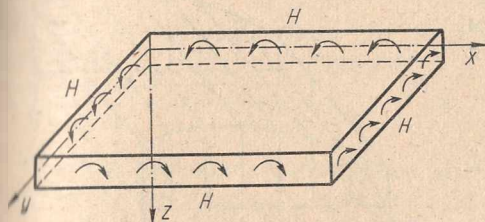


Рис. 10.10

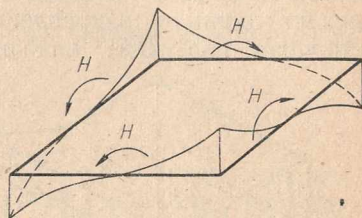


Рис. 10.11

Из (10.26) легко получить общее решение:

$$w = -\frac{H}{D(1-\nu)} xy + f(x) + \varphi(y).$$

Здесь $f(x)$ и $\varphi(y)$ — произвольные функции. Когда они равны нулю, уравнение изогнутой поверхности упрощается:

$$w = Axy, \quad (10.27)$$

где

$$A = -\frac{H}{D(1-\nu)}.$$

Уравнение изогнутой срединной поверхности пластины в виде (10.27) есть не что иное, как уравнение гиперболического параболоида (рис. 10.11). Таким образом, гиперболический параболоид есть только одна из возможных поверхностей, по которым искривится срединная поверхность пластины при чистом кручении.

Нормальных напряжений в пластине при чистом кручении не будет, а отличное от нуля касательное напряжение τ_{xy} определится по формуле

$$\tau_{xy} = \frac{EH}{D(1-\nu^2)} z.$$

Цилиндрический изгиб пластины возникает тогда, когда под действием внешней нагрузки ее срединная плоскость превращается в цилиндрическую поверхность (рис. 10.12). Этим и обусловлено название рассматриваемого случая изгиба.

Цилиндрический изгиб может возникнуть лишь в тех пластинах, которые закреплены по одной или двум параллельным сторонам; две другие параллельные стороны должны быть не закреплены. Будем далее полагать, что пластина имеет весьма развитый размер в направлении оси y и несет нагрузку, которая изменяется только по оси x , оставаясь неизменной вдоль y . В этом случае прогибы пластины зависят

также только от координаты x и не зависят от y . Тогда $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$, так как $w = w(x)$, а 2-я частная производная от прогиба по x перейдет во 2-ю обыкновенную производную: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d^2 w}{dx^2}$. В результате из пластины единичная полоска, стороны которой перпендикулярны к закрепленным сторонам пластины, находится

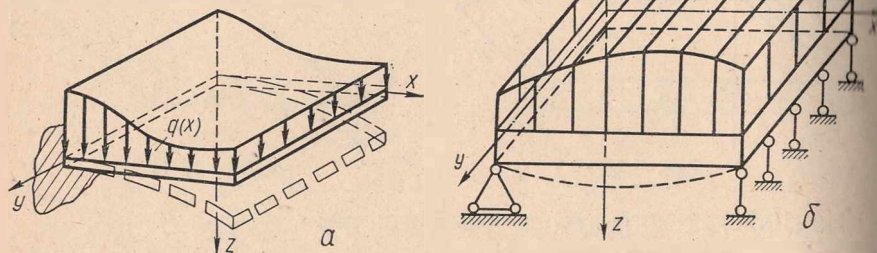


Рис. 10.12

в условиях плоской деформации, ибо контакт с соседними полосками не позволяет ей деформироваться в направлении оси y . Это влечет за собой, как следствие,

$$\epsilon_y = 0.$$

Тогда из уравнений обобщенного закона Гука для плоской деформации получим, что

$$\sigma_y = \nu \sigma_x. \quad (10.28)$$

Сами значения напряжений σ_x и σ_y получим с учетом ранее сделанных замечаний из (10.5):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{d^2 w}{dx^2}; \\ \sigma_y &= - \nu \frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{d^2 w}{dx^2}; \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Уравнение С. Жермен для цилиндрического изгиба будет

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{D}. \quad (10.30)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением изогнутой оси балки, которое было получено в элементарной теории:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ}, \quad (10.31)$$

видим, что их отличают лишь выражения для жесткости, стоящие в знаменателе правой части.

Выражения для изгибающих моментов (10.22) применительно к случаю цилиндрического изгиба имеют вид

$$\begin{aligned} M_x &= -D \frac{d^2 w}{dx^2}; \\ M_y &= -\nu D \frac{d^2 w}{dx^2}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Сравнив первые выражения (10.29) и (10.32), получим известную из элементарной теории зависимость:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J} z.$$

Все рассуждения, приведенные до сих пор, предусматривали как необходимое условие то, что пара параллельных сторон пластины обязательно должна быть свободной. Жесткость этого требования можно смягчить, если учесть, что размер b пластины в направлении оси y значительно больше размера a , параллельного оси x (рис. 10.13). Поэтому влияние закрепления тех кромок пластины, которые все время считались свободными, на цилиндричности формы срединной поверхности скажется лишь в непосредственной близости от закрепления (рис. 10.13 — сечение $II-II$). Области пластины, удаленные от этого закрепле-

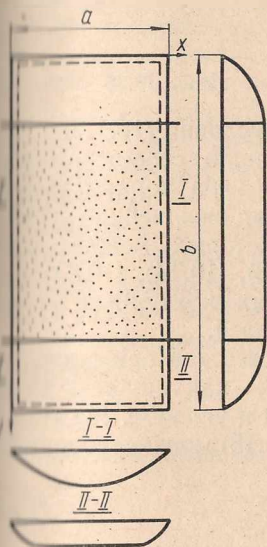


Рис. 10.13

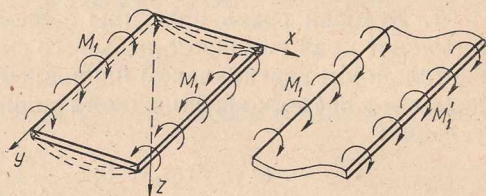


Рис. 10.14

ния, и в этом случае изгибаются по цилиндрической поверхности (рис. 10.13 — сечение $I-I$). Точечной штриховкой на рис. 10.13 выделена зона цилиндрического изгиба.

Чистый изгиб пластины моментами, распределенными вдоль двух противоположных параллельных сторон пластины, который вытекает из более общего случая, рассмотренного ранее, является, по сути, цилиндрическим изгибом (рис. 10.14).

Граничные условия для прямоугольной пластины. Решение дифференциального уравнения (или системы), описывающего поставленную задачу, должно быть подчинено дополнительным условиям, которые носят название *граничных*, *краевых* или *контурных*. Такие условия позволяют выделить лишь одно интересующее нас решение, которое описывает конкретную задачу. Граничных условий должно быть «не

слишком много», чтобы существовало решение, удовлетворяющее им. Эти условия должны обеспечить решению существование и единственность.

Граничные условия задач теории упругости могут иметь статический и геометрический характер (существуют и смешанные краевые условия). Со статическими граничными условиями мы уже встречались ранее, когда вводили предположение о том, что нижняя грань свободна от всякой нагрузки, а верхняя загружена только перпендикулярно.

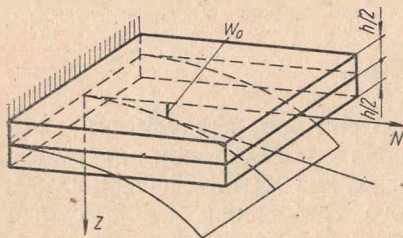


Рис. 10.15

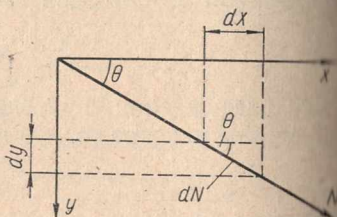


Рис. 10.16

к ней распределенной нагрузкой $q = q(x, y)$ [условия (10.11)]. Влияние этих статических граничных условий нашло свое отражение в основном разрешающем уравнении теории изгиба тонких пластин (10.12), где в правой части присутствует функция внешней нагрузки $q(x, y)$. К числу выражений, посредством которых можно задать статические граничные условия, отнесем (10.13), (10.14), (10.17) и др.

Остановимся подробнее на геометрических контурных условиях, так как до сих пор этот вопрос не затрагивался.

1. Боковая грань пластины закреплена в жесткое основание. Закрепление края устраняет любые его смещения — как линейные в горизонтальном и вертикальном направлениях, так и угловые. На этом основании для точек зажатой грани (рис. 10.15) можно записать следующие условия:

$$w|_{\Gamma_p} = w_0 = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial N} \Big|_{\Gamma_p} = \frac{dw_0}{dN} = 0. \quad (10.33)$$

С другой стороны, если задать угол между нормалью N и осью x (рис. 10.16), выражения (10.33) легко представить в другом виде. Действительно, в очевидном выражении

$$\frac{dw_0}{dN} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{dx}{dN} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{dy}{dN}$$

можно произвести следующие замены:

$$\frac{dx}{dN} = \cos \theta; \quad \frac{dy}{dN} = \sin \theta.$$

С учетом этих зависимостей граничные условия (10.33) примут вид

$$w|_{\Gamma_p} = 0; \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \right]_{\Gamma_p} = 0. \quad (10.34)$$

Если оси координат x и y совпадают с гранями рассматриваемой прямоугольной пластины, граничные условия (10.34) значительно упрощаются.

Тик, если заземленная грань параллельна оси y (в этом случае $\theta = 0$), то условия (10.34) преобразуются в

$$w|_{\Gamma p} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{\Gamma p} = 0. \quad (10.35)$$

2. Боковая грань пластины свободно опира на жесткую опору. Свободноопертая грань пластины не смещается в вертикальной плоскости, но может смещаться в горизонтальной и поворачиваться. Таким образом, вертикальное смещение свободноопертой грани равно нулю и угол ее поворота в общем случае нулю не равен. Нормальное напряжение на опертой грани равно нулю.

Уместно рассмотреть случай шарнирного опирания, с тем чтобы в дальнейшем объединить оба случая опирания — шарнирное и свободное. Шарнирно-опертая грань отличается от свободноопертой тем, что она не может смещаться в горизонтальной плоскости.

Напомним, что мы рассматриваем жесткие пластины, а для них, как уже отмечалось, растягивающими напряжениями в срединной плоскости пренебрегают и поэтому все формулы, которые будут получены, в равной степени пригодны для обоих случаев.

Итак, граничные условия для свободноопертой грани (рис. 10.17) следующие:

$$w|_{\Gamma p} = 0; \quad \sigma_N = 0. \quad (10.36)$$

На основании выражения для M_N (10.13) эти условия можно трактовать так:

$$w|_{\Gamma p} = 0; \quad M_N|_{\Gamma p} = 0. \quad (10.37)$$

Если воспользоваться соотношениями (10.16) и (10.5), то выражения для граничных условий (10.36) преобразуются в

$$w|_{\Gamma p} = 0; \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\cos \alpha + \nu \sin \alpha) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\sin \alpha + \nu \cos \alpha) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 - \nu) \sin 2\alpha \right]_{\Gamma p} = 0. \quad (10.38)$$

Тот же результат можно получить, если M_N (10.37) заменить через (10.17) и (10.22).

Пусть опертая грань параллельна, например, оси y , тогда нормаль N совпадает с осью x . В этом случае ($\sin \alpha = 0$) 2-е из условий (10.38) упрощается и они примут вид

$$w|_{\Gamma p} = 0; \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{\Gamma p} = 0. \quad (10.39)$$

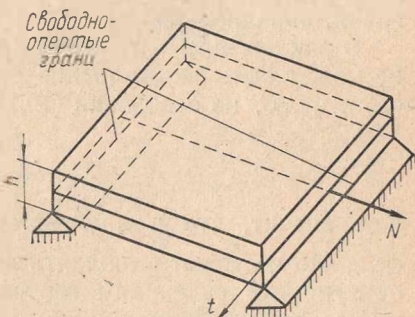


Рис. 10.17

Из 1-го условия (10.39) (w_0 тождественно равно нулю) явствуе

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{\text{гр}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{\text{гр}} = 0.$$

Таким образом, граничные условия (10.39) еще более упрощаются

$$w|_{\text{гр}} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{\text{гр}} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{\text{гр}} = 0.$$

Легко увидеть, что эти же условия сохраняются и для свободноопертой грани, параллельной оси x .

В заключение заметим, что в общем случае крутящий момент M не может быть тождественно равен нулю. Действительно, приравняв его к нулю, на основании (10.22) придем к

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{\text{гр}} = 0,$$

а это значит, что угол поворота на свободной опоре $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{\text{гр}}$ не зависит от y , что не может выполняться для общего случая нагружения. Это объясняется тенденция к вертикальному смещению углов прямоугольной свободноопертой пластины при нормальной нагрузке.

Если на шарнирно-опертый край действует моментная распределенная нагрузка интенсивностью m , то 2-е из условий (10.39) примет вид

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{\text{гр}} = -\frac{m}{D},$$

или, как и ранее:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{\text{гр}} = -\frac{m}{D}.$$

3. Боковая грань пластины лишена опорных связей (свободная грань). На такой грани все напряжения σ_N , τ_{Ns} и τ_{Nz} должны отсутствовать. Поэтому из (10.13) следует, что

$$M_N = 0; \quad H_N = 0 \quad \text{и} \quad Q_N = 0. \quad (10.40)$$

До сих пор на каждой из граней прямоугольной пластины мы получили по два независимых граничных условия (общее число условий определяется порядком дифференциального уравнения). Требование удовлетворения на свободной грани трем граничным условиям (10.40) в совокупности с другими граничными условиями привело к математической неразрешимости задачи. Объяснил это противоречие Кирхгоф. Он показал, что вместе все три условия выполняться не могут. Это является следствием ранее принятой гипотезы прямых нормалей, которая накладывает дополнительные условия на деформацию пластины.

В любой точке тела при решении задач теории упругости должны удовлетворяться уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций. Если принять гипотезу прямых нормалей (геометрическую гипотезу), уравнения совместности удовлетворятся автоматически. Уравнения равновесия точно удовлетворить уже нельзя, ибо в этом случае мы имели бы точное решение. Если не использовать гипотезу прямых нормалей, порядок дифференциального уравнения возрастает

шестого. При этом могут быть удовлетворены все три граничных условия. Для устранения такого противоречия следует, по предложению Каргоффа, объединить условия, определяющие Q_N и H_N . Крутящий момент на основании принципа Сен-Венана заменяется системой двух эквивалентных сил, которые затем суммируются с касательной силой.

На элемент длины свободной грани ds (рис. 10.18, а) действует крутящий момент $H_N ds$ (момент H_N действует по единичной площадке). Он образован парой сил, возникающих от действия касательных напряжений τ_{Ns} .

Нет никаких оснований полагать, что крутящие моменты распределены по свободной грани пластины равномерно. Поэтому будем считать, что их величина нарастает в направлении поперечной оси s . Таким образом, крутящий момент на следующем участке длиной ds

будет уже $(H_N + dH_N) ds$, или $(H_N + \frac{\partial H_N}{\partial s} ds) ds$. С другой стороны, крутящий момент на участке ds можно считать образованным двумя равными вертикальными силами P , отстоящими друг от друга на расстоянии ds (рис. 10.18, б). Иными словами, он равен Pds . На следующем участке его величина возрастает до $(P + \frac{\partial P}{\partial s} ds) ds$. Приравнявая эти крутящие моменты ($H_N ds$ и Pds), убеждаемся, что

$$P = H_N. \quad (10.41)$$

Второй из моментов, которые мы только что рассмотрели, образован силой

$$\frac{\left(P + \frac{\partial P}{\partial s} ds\right) ds}{ds} = P + \frac{\partial P}{\partial s} ds.$$

На общей границе этих двух смежных участков суммарная вертикальная сила, очевидно,

$$P + \frac{\partial P}{\partial s} ds - P = \frac{\partial P}{\partial s} ds,$$

или с учетом (10.41): $\frac{\partial H_N}{\partial s} ds$. На единицу длины свободной грани приходится усилие $\frac{\partial H_N}{\partial s}$.

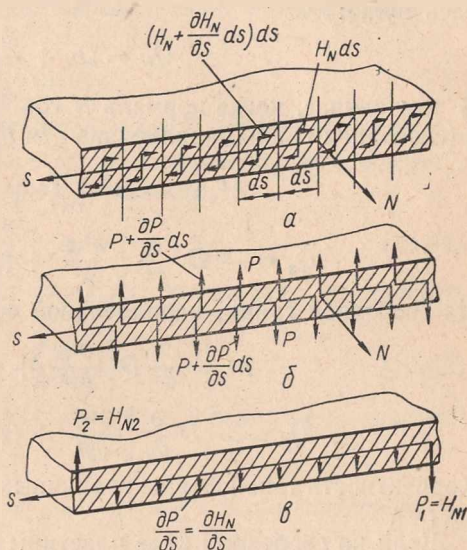


Рис. 10.18

Итак, для свободного края вместо условий, требующих равенств нулю Q_N и H_N , вводится одно объединенное условие, которое требует, чтобы статически эквивалентная Q_N и H_N вертикальная сила $\bar{Q}_N$ равнялась нулю:

$$\bar{Q}_N = Q_N + \frac{\partial H_N}{\partial s} = 0.$$

В том случае, когда нормаль N совпадает с осью x , а ось s — с осью y (свободная грань параллельна оси y),

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{\text{гр}} = 0; \quad (10.42)$$

$$\bar{Q}_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{\text{гр}} = 0.$$

На свободной грани, параллельной оси x ,

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{\text{гр}} = 0; \quad (10.43)$$

$$\bar{Q}_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{\text{гр}} = 0.$$

Корректность такой формы граничных условий сомнений уже не вызывает.

Если на свободном крае пластины приложены изгибающий момент m и распределенная нагрузка q , то в правые части (10.42) или (10.43) вместо нулей следует подставить соответственно m и q .

Заканчивая рассмотрение граничных условий для свободной грани, отметим, что после преобразования крутящего момента в эквивалентную поперечную нагрузку на левом и правом ее концах будут приложены две неуравновешенные сосредоточенные силы, которые остались от «крайних» пар. Эти силы равны между собой и направлены по вертикали в разные стороны (рис. 10.18, в). Если стороны пластины, примыкающие к свободному краю, зашпелены или оперты, то учитывать эти силы нет необходимости, так как они будут нейтрализованы реакциями опор. Если «примыкающие» стороны тоже свободны, то эти силы игнорировать уже нельзя и они должны быть учтены.

4. Боковая грань пластины упруго закреплена в жесткий контур. Рассмотрим случай, когда закрепленный таким образом край совпадает с одной из координатных осей, например с осью y . Связь между углом поворота пластины и изгибающим моментом будем считать линейной. С учетом этих замечаний на рассматриваемой грани будут выполняться следующие граничные условия:

$$w|_{\text{гр}} = 0;$$

$$D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{\text{гр}} = -\chi \frac{\partial w}{\partial x},$$

где χ — коэффициент податливости заделки пластины.

5. Боковая грань пластины свободно оперта на упругую опору (упругую балку). Если опирание плиты происходит без отрыва от упругой опоры, то можно считать, что вдоль линии контакта выполня-

того условие

$$\omega_n = \omega_6|_{\Gamma P} = 0.$$

Отделим упругое ребро от пластины и нагрузим его силами взаимодействия. Для балки эти силы можно определить из элементарной теории

$$EJ \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = -q.$$

Если сравнить это выражение с выражением для $\bar{Q}_x$ из (10.42) (заметим, что q и $\bar{Q}_x$ суть одинаковые величины, характеризующие давление), то условие контакта можно реализовать, записав

$$\left. \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right|_{\Gamma P} = \frac{D}{EJ} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]_{\Gamma P}. \quad (10.44)$$

Если упругоопертая грань может свободно вращаться, то должно быть выполнено условие

$$M_x|_{\Gamma P} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \Big|_{\Gamma P} = 0. \quad (10.45)$$

Выражения (10.44) и (10.45) будут граничными условиями для рассматриваемого случая.

§ 10.3. Решения Навье и Леви для прямоугольной пластины

Приступим к решению бигармонического уравнения (10.12) при заданных граничных условиях. Среди множества методов решения этой задачи остановимся на двух классических решениях в тригонометрических рядах Л. Навье и М. Леви.

Решение в двойных тригонометрических рядах (решение Навье). Задачу об изгибе прямоугольной свободноопертой пластины по предложению Ж. Фурье впервые рассмотрел и решил Л. Навье в 1820 г.

При выводе уравнения (10.12) относительно функции $q = q(x, y)$ в области, где она определена, не было сделано никаких ограничивающих допущений кроме того, что нагрузка действует нормально к срединной поверхности пластины. Поэтому, чтобы сохранить наибольшую общность решения, представим нагрузку q в виде двойного ряда Фурье:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10.46)$$

Решение уравнения (10.12) также будем искать в виде двойного тригонометрического ряда:

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10.47)$$

Здесь, как и в (10.46), a и b — длины сторон прямоугольной пластины (рис. 10.19). Легко видеть, что решение (10.47) удовлетворяет граничным условиям свободного опирания. Действительно, при

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array} \right\} \omega = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = b \end{array} \right\} w = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

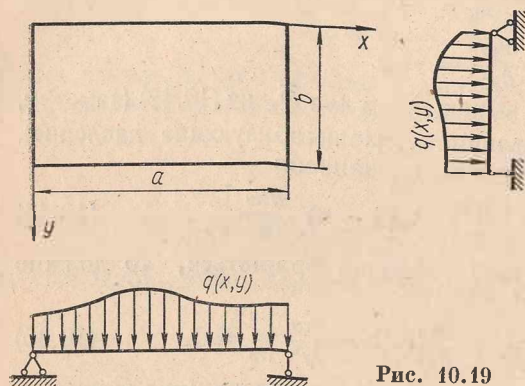


Рис. 10.19

В форме двойного ряда Фурье представима внутри прямоугольника $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ любая функция двух переменных, удовлетворяющая граничным условиям. Это дает основание считать решение (10.47) наиболее общим для искомой функции w .

Если подставить (10.46) и (10.47) в (10.12), то по приведению можно получить

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{q_{mn}}{D} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (10.48)$$

Ряд, стоящий в левой части (10.48), может быть равен нулю при любых x и y в том случае, когда каждый из его коэффициентов имеет нулевое значение. Реализация этого требования:

$$A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{q_{mn}}{D} = 0. \quad (10.49)$$

приведет к тому, что (10.48) обратится в тождество. Из (10.49) следует, что

$$A_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (10.50)$$

Дальнейшая задача состоит в определении коэффициентов q_{mn} , через которые выражается A_{mn} . Эти коэффициенты можно отыскать при помощи общей процедуры разложения заданной функции (внешняя нагрузка предполагается известной) в ряд Фурье. В соответствии с ней умножим обе части (10.46) на $\sin \frac{m\pi x}{a}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до a :

$$\begin{aligned} & \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Остановимся подробнее на выборе значения $\bar{m}$ в аргументе синуса и проследим, как ведется суммирование в правой части (10.51). В по-

следней сумме индекс суммирования m пробегает значения от единицы до бесконечности. Это текущий, изменяющийся индекс.

Выражение, стоящее в правой части (10.51), можно значительно упростить, если использовать свойство ортогональности системы тригонометрических функций. Используемая нами система синусов

$$\sin \frac{\pi x}{a}; \sin \frac{2\pi x}{a}; \sin \frac{3\pi x}{a}, \dots, \quad (10.52)$$

как легко проверить, ортогональна на отрезке $(0, a)$:

при $\bar{m} \neq m$

$$\int_0^a \sin \frac{\bar{m}\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = 0;$$

при $\bar{m} = m$

$$\int_0^a \sin \frac{\bar{m}\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \int_0^a \sin \frac{2m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2};$$

аналогично при $\bar{n} \neq n$

$$\int_0^b \sin \frac{\bar{n}\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = 0; \quad (10.53)$$

при $\bar{n} = n$

$$\int_0^b \sin \frac{\bar{n}\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \int_0^b \sin \frac{2n\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}.$$

С учетом (10.53) выражение (10.51) можно переписать так:

$$\int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10.54)$$

Повторим применительно к (10.54) ту же процедуру, которая была применена при выводе (10.51):

$$\left(\int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right) \sin \frac{\bar{n}\pi y}{b} dy = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \int_0^b \sin \frac{\bar{n}\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (10.55)$$

Если, как и прежде, воспользоваться условиями ортогональности (10.53), то (10.55) легко перейдет в формулу для определения q_{mn} :

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Возвращаясь к (10.50), получим

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 D ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Таким образом, искомое решение (10.47) приобретает вид

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10.56)$$

По формулам (10.19), (10.42), (10.43) легко определяются изгибающие моменты, поперечные силы, приведенные поперечные силы и др. Решение (10.56) для каждой конкретной задачи определяется видом функции $q(x, y)$. Рассмотрим, следуя Л. Навье, некоторые частные случаи.

1. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины: $q(x, y) = q_0$. Начнем с вычисления коэффициентов A_{mn} :

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4q_0}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \\ &= \frac{4q_0}{\pi^4 Dab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \frac{ab}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi). \end{aligned} \quad (10.57)$$

Когда m и n одновременно или в отдельности четные числа, то, как видно из (10.57), $A_{mn} = 0$. Для нечетных m и n ($m = 1, 3, 5, \dots$; $n = 1, 3, 5, \dots$)

$$A_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^6 Dmn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Таким образом, выражение для функции прогибов имеет вид

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (10.58)$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$; $n = 1, 3, 5, \dots$.

Максимальный прогиб пластины $w_{\max}$ будет наблюдаться в центре пластины $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right)$:

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

2. Нагрузка на пластину сосредоточена в одной точке (изгиб пластины сосредоточенной силой). Сосредоточенную силу P будем аппроксимировать распределенной нагрузкой постоянной величины $\bar{q} = \frac{P}{\delta^2}$, действующей на малой квадратной площадке δ при $\delta \rightarrow 0$. Эта распределенная нагрузка равна нулю повсюду за исключением квадратного

элемента, образованного пересечением параллельных линий $x = \xi$; $x = \xi + \delta$ и $y = \eta$; $y = \eta + \delta$.

Запишем сначала выражение для q_{mn} при $q = \frac{P}{\delta^2}$, а затем будем брать его предел при $\delta \rightarrow 0$, используя теорему о среднем:

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_{\xi}^{\xi+\delta} \int_{\eta}^{\eta+\delta} \frac{P}{\delta^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \\ &= \frac{4}{ab} \frac{P}{\delta^2} \sin \frac{m\pi}{a} (\xi + \theta\delta) \sin \frac{n\pi}{b} (\eta + \theta\delta) \delta^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Из q_{mn} получить выражение для w не представляет затруднений:
 $w(x, y) =$

$$= \frac{4P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10.60)$$

Вычислим прогиб в середине пластины. Пусть в этой же точке приложена и сила P . Тогда $x = \xi = \frac{a}{2}$; $y = \eta = \frac{b}{2}$. Выражение (10.60) в этом случае будет иметь вид

$$w_{\max} = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}.$$

Использованный метод решения в двойных тригонометрических рядах Навье наряду с простотой и предметностью выкладок обладает и существенными недостатками:

- 1) скорость сходимости рядов, входящих в решение, чрезвычайно низка, а в некоторых случаях эти ряды вообще расходятся;
- 2) перенесение метода на другие классы граничных условий весьма затруднительно, а иногда просто невозможно.

Поэтому перейдем к изложению более приемлемого метода решения задачи об изгибе прямоугольной пластины.

Решение в одинарных тригонометрических рядах (решение Леви) охватывает класс задач об изгибе пластин, у которых две противоположные грани свободно оперты. На двух других гранях граничные условия предполагаются произвольными. Таким образом, это решение носит более общий характер, чем решение Навье. Кроме того, оно удобнее для численной реализации.

Грани OC и AB пластины (рис. 10.20) свободно оперты. Краевые условия на этих гранях, которые будем называть *доминирующими*,

можно записать так:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ \text{при} \\ x=a \end{array} \right\} \begin{array}{l} w=0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{array}$$

Краевые условия на гранях $y=0$ и $y=b$ пока не формулируем.

Решение в одинарных тригонометрических рядах является простейшей на рассматриваемую задачу более общего метода — метода разделения переменных Фурье. В том случае, когда искомая функция зависит от двух переменных, решение ищется в виде произведения двух функций одного переменного:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) Y_m(y). \quad (10.61)$$

Подставляя решение (10.61) в уравнение С. Жермен, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} (X_m^{IV} Y_m + 2X_m'' Y_m'' + X_m Y_m^{IV}) = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (10.62)$$

Уравнение (10.62) можно значительно упростить, если удастся подобрать функцию X_k так, чтобы

$$X_k'' = S X_k. \quad (10.63)$$

В этом случае (10.62) перейдет в

$$\sum_{m=1}^{\infty} (Y_m^{IV} + 2S Y_m'' + S^2 Y_m) X_m = \frac{q}{D}. \quad (10.64)$$

Легко увидеть, что условие (10.63) будет выполнено, если принять

$$X_m = \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

В этом случае решение (10.61) будет иметь вид

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (10.65)$$

Именно в таком виде искал решение М. Леви. В свою очередь, (10.64) с учетом (10.65) запишется более просто:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q}{D}. \quad (10.66)$$

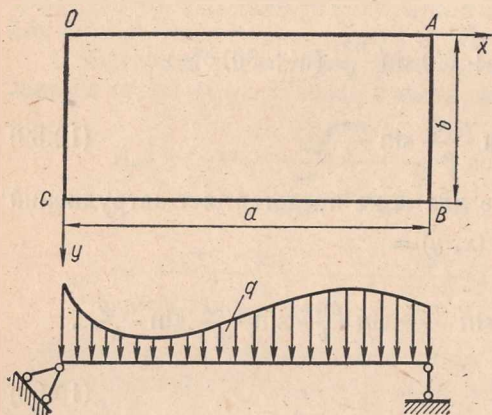


Рис. 10.20

Разложим правую часть (10.66) в ряд по синусам. Такое разложение обусловлено тем, что и левую часть можно трактовать, как ряд Фурье, также по синусам. Тогда

$$\frac{q(x, y)}{D} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (10.67)$$

Если подставим (10.67) в (10.66), то получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m - q_m(y) \right] = 0. \quad (10.68)$$

Коэффициенты ряда Фурье $q_m(y)$ определяются по формуле, известной из курса математического анализа:

$$q_m = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx.$$

Ряд (10.68) равен нулю при любых x и y в том случае, когда каждый из его коэффициентов также равен нулю. Поэтому

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = q_m(x, y). \quad (10.69)$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения в частных производных $\nabla^4 w = \frac{q}{D}$ свелось к интегрированию обыкновенного линейного неоднородного уравнения (10.69). Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, как известно, складывается из какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$Y_m = Y_m^{o.p} + Y_m^{u.p}.$$

Однородное уравнение, адекватное (10.69), выглядит так:

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0. \quad (10.70)$$

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$k^4 - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} k^2 + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} = 0.$$

Его корнями будут

$$k_1 = \frac{m\pi}{a}; \quad k_2 = \frac{m\pi}{a}; \quad k_3 = -\frac{m\pi}{a}; \quad k_4 = -\frac{m\pi}{a}.$$

Общий интеграл (10.70) может быть представлен в виде

$$Y_m^{o.p} = B_m^{(1)} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(2)} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(3)} y \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(4)} y \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y. \quad (10.71)$$

Итак,

$$Y_m = B_m^{(1)} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(2)} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(3)} y \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(4)} y \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + Y_m^{u.p}. \quad (10.72)$$

Таким образом,

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_m^{(1)} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(2)} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(3)} y \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + \right. \\ \left. + B_m^{(4)} y \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + Y_m^{q,p} \right] \sin \frac{m\pi}{a} x. \quad (10.73)$$

Полное решение (10.73) представляет собой решение уравнения С. Жермен и удовлетворяет доминирующим краевым условиям на свободнопертых гранях. Произвольные постоянные $B_m^{(i)}$, входящие в решение, определяются таким образом, чтобы оно было подчинено краевым условиям на двух оставшихся гранях. Число этих граничных условий равно четырем, что соответствует числу произвольных постоянных, входящих в (10.73).

Частное решение $Y_m^{q,p}$ будем искать по правилу Коши:

$$Y_m^{q,p} = \int_0^y Y_m(y-h) q_m(h) dh, \quad (10.74)$$

где Y_m — частное решение однородного уравнения (10.70), удовлетворяющее начальным условиям

$$Y_m(0) = 0; Y'_m(0) = 0; Y''_m(0) = 0; Y'''_m(0) = 1; \quad (10.75)$$

q_m — правая часть (10.69); h — параметр.

При построении Y_m используется процедура Коши. Она состоит, как известно, в том, что общее решение однородного уравнения подчиняют условиям (10.75), определяя тем самым коэффициенты, входящие в это решение. Умножив эти коэффициенты на соответствующие им решения из фундаментальной системы, можно получить Y_m . Реализацию намеченного начнем с того, что продифференцируем трижды (10.71):

$$Y'_m(y) = B_m^{(1)} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(2)} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(3)} \left(\frac{m\pi}{a} y \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y \right) + B_m^{(4)} \left(\frac{m\pi}{a} y \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y \right);$$

$$Y''_m(y) = B_m^{(1)} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(2)} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + \\ + B_m^{(3)} \left[2 \frac{m\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 y \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y \right] + B_m^{(4)} \left[2 \frac{m\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + \right. \\ \left. + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 y \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y \right];$$

$$Y'''_m(y) = B_m^{(1)} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + B_m^{(2)} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + \\ + B_m^{(3)} \left[3 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + y \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + \right. \\ \left. + B_m^{(4)} \left[3 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + \frac{m\pi}{a} y \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y \right] \right].$$

■ соответствии с (10.75) составим условия для определения $B_m^{(i)}$:

$$B_m^{(2)} = 0; \quad \frac{m\pi}{a} B_m^{(1)} + B_m^{(4)} = 0;$$

$$B_m^{(3)} = 0; \quad \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 B_m^{(1)} + 3 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 B_m^{(4)} = 1.$$

Совместное решение 2-го и 4-го уравнений этой системы дает

$$B_m^{(1)} = -\frac{1}{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3}; \quad B_m^{(4)} = \frac{1}{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}.$$

Внося определенные таким образом $B_m^{(i)}$ в (10.71), получим

$$Y_m^{o.p} = \frac{a^2}{2m^2\pi^2} \left(y \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y - \frac{a}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y \right).$$

Эту функцию иногда называют *функцией Коши*.

Преобразуя аргумент $Y_m^{o.p}$ в соответствии с (10.74), получим разыскиваемое частное решение (10.69):

$$Y_m^{q.p} = \frac{a}{m^2\pi^2 D} \int_0^y \left[\left((y-h) \operatorname{ch} \frac{m\pi(y-h)}{a} - \frac{a}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi(y-h)}{a} \right) \int_0^a q(x, h) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] dh.$$

Как уже указывалось, для определения произвольных постоянных следует использовать краевые условия на гранях, примыкающих к необходимоопертым. До сих пор эти условия не были сформулированы несмотря на то, что решение уже близко к завершению. Это придает выводу общность, что выгодно отличает его от решения Навье.

Конкретизируем граничные условия. Рассмотрим случай, когда грани пластины OA и CB (рис. 10.20) жестко заделаны. Граничные условия в этом случае такие:

$$\text{при } \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases} \quad \omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Учетом (10.65) их можно переписать так:

$$\text{при } \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(0) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0; \\ \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(b) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} Y'_m(0) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0; \\ \sum_{m=1}^{\infty} Y'_m(b) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0. \end{cases} \quad (10.76)$$

Условия (10.76), представленные в виде ряда, справедливы при любом $0 \leq x \leq a$ в том случае, когда на защемленных гранях

$$\begin{aligned} Y_m(0) &= 0; \quad Y'_m(0) = 0; \\ Y_m(b) &= 0; \quad Y'_m(b) = 0. \end{aligned} \quad (10.77)$$

Развернув условия (10.77) при помощи (10.72), получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$B_m^{(1)} = 0;$$

$$B_m^{(2)} + \frac{m\pi}{a} B_m^{(3)} = 0;$$

$$B_m^{(1)} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} b + B_m^{(2)} b \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} b + B_m^{(3)} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b + B_m^{(4)} b \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b + Y(b) = 0$$

$$+ B_m^{(1)} \frac{m\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b + B_m^{(2)} \left(\operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} b + b \frac{m\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} b \right) +$$

$$+ B_m^{(3)} \frac{m\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} b + B_m^{(4)} \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b + b \frac{m\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} b \right) + Y'(b) = 0.$$

Из этой системы находим $B_m^{(i)}$:

$$B_m^{(1)} = 0;$$

$$B_m^{(2)} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{a} b - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} b^2} \left[-\frac{m\pi}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b + b \frac{m\pi}{a} b \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} b \right) Y(b) - \right.$$

$$\left. - \frac{m\pi}{a} b \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b Y'(b) \right];$$

$$B_m^{(3)} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{a} b - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} b^2} \left[- \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b + \frac{m\pi}{a} b \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} b \right) Y(b) + \right.$$

$$\left. + b \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b Y'(b) \right];$$

$$B_m^{(4)} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{a} b - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} b^2} \left[- \frac{m^2 \pi^2}{a^2} b^2 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b Y(b) - \right.$$

$$\left. - \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b - b \frac{m\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} b \right) Y'(b) \right].$$

Отметим, что решение получено для произвольной нагрузки $q(x, y)$.

Большая заслуга в разработке решения типа (10.65) принадлежит Б. Г. Галеркину, решившему большое число задач для прямоугольных пластин при различных граничных условиях.

§ 10.4. Решение задачи об изгибе круглых пластин

Круглыми пластинами постоянной толщины будем называть пластины, которые образованы одной или двумя цилиндрическими поверхностями, нормальными к плоскостям пластины.

Чтобы сохранить преемственность выводов, не будем, как прежде, выделять элемент круглой пластины и повторять аналог уже проведенного вывода. Попытаемся преобразовать уже полученные уравнения для случая полярных координат (рис. 10.21), применение которых при рассмотрении круглых пластин естественно.

В полярной системе координат прогиб w и ассоциирующиеся с ним величины M , Q , а также нагрузка q будут уже функциями не x и y , а r и θ . Связь между декартовыми и полярными координатами установлена в § 6.1. Там же получено выражение для оператора Лапласа в полярной системе координат:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (10.78)$$

Применяя этот оператор для перемещения w , получим

$$\nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w. \quad (10.79)$$

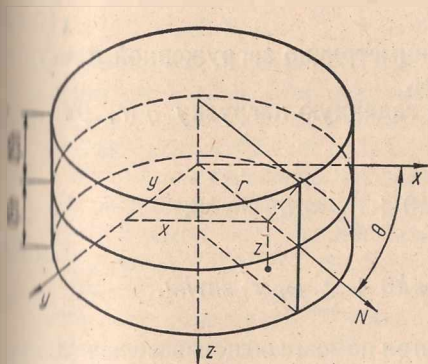


Рис. 10.21

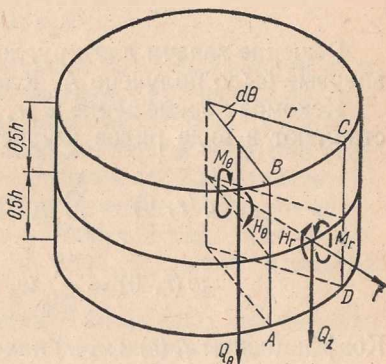


Рис. 10.22

Дифференциальное уравнение прогибов пластины (10.12) $\nabla^2 \nabla^2 = \frac{q}{D}$ с учетом (10.78) и (10.79) можно записать так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D}. \quad (10.80)$$

Перейдем к определению упругих усилий круглой пластины: изгибающих M_r , M_θ и крутящих H_r , H_θ моментов, поперечных сил Q_r , Q_θ . Эти усилия действуют в радиальных (r) и тангенциальных (θ) поперечных сечениях. Нормаль к первым направлена по радиусу, а ко вторым — по касательной (рис. 10.22).

Вновь подчеркнем, что эти усилия являются погонными, т. е. вычисляются по площадкам, имеющим высотой всю толщину пластины h (что было уже учтено при выводе (10.22)) и ширину не $rd\theta$, а равную единице. Здесь r — текущий, промежуточный радиус.

Таким образом, на радиальной площадке $ABCD$ действуют следующие усилия:

$$M_r r d\theta; H_r r d\theta \text{ и } Q_r r d\theta.$$

Упругие усилия в круглой пластине получим из (10.22), перейдя к полярным координатам при помощи (10.78), (10.79). Совместим ось z с радиусом r . В этом случае $\theta = 0$, что следует учесть при использовании (10.78), (10.79). Тогда

$$\begin{aligned}
 M_r &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right]; \\
 M_\theta &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]; \\
 H_r &= H_\theta = H = (1 - \nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} = (1 - \nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \\
 Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); \\
 Q_\theta &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right).
 \end{aligned} \tag{10.81}$$

Решение задачи для круглой асимметрично загруженной пластины впервые было получено А. Клебшем.

Искомое перемещение $w(r, \theta)$ и заданную нагрузку $q(r, \theta)$ представляют в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
 q(r, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k(r) \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_k(r) \sin k\theta; \\
 w(r, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k(r) \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(r) \sin k\theta.
 \end{aligned} \tag{10.82}$$

Коэффициенты $q_k(r)$ и $\kappa_k(r)$ находят при помощи общеизвестных формул

$$q_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \cos k\theta d\theta; \quad \kappa_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \sin k\theta d\theta;$$

$$q_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \theta) d\theta.$$

Коэффициенты $w_k(r)$ и $\omega_k(r)$ определим, подставив (10.82) в (10.80):

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \right)^2 w_k(r) - \frac{q_k(r)}{D} \right) \cos k\theta + \right. \\
 \left. + \left(\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \right) \omega_k(r) - \frac{\kappa_k(r)}{D} \right) \sin k\theta \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{10.83}$$

Уравнение (10.83) может быть удовлетворено при любых r и θ лишь в том случае, когда

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} w_k \right) &= + \frac{q_k(r)}{D}; \\
 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 \omega_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \omega_k \right) &= + \frac{\kappa_k(r)}{D}
 \end{aligned} \tag{10.84}$$

при любом k .

Общее решение (10.84) ищется, как обычно, в виде суммы

$$w = w^{a.p} + w^{o.p}.$$

где $w^{ч.р}$ — частное решение уравнения с правой частью; $w^{о.р}$ — общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (10.84).

Далее в этом параграфе подробно рассмотрена осесимметричная задача для круглой пластины. Там же проведено решение однородного уравнения при $k = 0$. Здесь лишь приводим уже готовые результаты:

$$\begin{aligned} k = 0 \quad w_0(r) &= a_{01}r^2 \ln r + a_{02}r^2 + a_{03} \ln r + a_{04}; \\ k = 1 \quad w_1(r) &= a_{11}r^3 + a_{12}r \ln r + a_{13}r + a_{14} \frac{1}{r}; \\ k = 2, 3, 4, \dots \quad w_k(r) &= a_{k1}r^{k+2} + a_{k2}r^{-k+2} + a_{k3}r^k + a_{k4}r^{-k}. \end{aligned} \quad (10.85)$$

В справедливости решений (10.85) легко убедиться, подставляя их в 1-е выражение (10.84). Аналогичные решения можно привести и для w_k .

Если в конкретной пластине можно выделить некоторую плоскость, относительно которой будет соблюдаться симметрия или обратная симметрия нагрузки и граничных условий, 2-е решение (10.82) упростится. В случае симметрии нагрузки и граничных условий в нем следует опустить 2-е слагаемое, содержащее нечетные функции $\sin k\theta$, для обратной симметрии нагрузки исключается 1-й член, в состав которого входят симметричные функции $\cos k\theta$.

После того как будет получено решение однородных уравнений, следует прибавить к ним любое частное решение неоднородного уравнения. Структура этого частного решения определится видом правой части (10.84).

Рассмотрим пластины, изгибаемые симметрично относительно центральной оси. В этом случае граничные условия и нагрузка обладают симметрией вращения, т. е. не зависят от полярного угла θ . При симметричном изгибе угол поворота (девиация) в центре равен нулю, а на цилиндрических поверхностях произвольного радиуса все расчетные величины (напряжения, прогибы, моменты и т. д.) не изменяются.

Преобразуем (10.80) и (10.81) для случая симметричного изгиба. Не вдаваясь в подробности вывода, приведем лишь результаты:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q(r)}{D},$$

или (проверьте!)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D}; \quad (10.86)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right); \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right); \\ H_r &= H_\theta = Q_\theta = 0; \\ Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.87)$$

Структура (10,86) такова, что нахождение его решения сводится к последовательному интегрированию:

$$w = \frac{1}{D} \int \frac{1}{r} \left\{ \int r \left| \frac{1}{r} \left(\int q(r) r dr \right) dr \right| dr \right\} dr + A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4. \quad (10.8)$$

Чтобы определить произвольные постоянные A_i , следует сформулировать граничные условия для круглых и кольцевых пластин.

Граничные условия для кольцевой пластины (наружный радиус $R_{\text{гр}}$, внутренний — $r_{\text{гр}}$)

Шарнирное опирание по наружному контуру

$$w|_{R_{rp}} = 0; \quad M_r|_{R_{rp}} = 0; \quad w|_{R_{rp}} = 0; \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{R_{rp}} = 0;$$

по внутреннему контуру

$$\omega|_{r_{\text{rp}}} = 0; \quad M_r|_{r_{\text{rp}}} = 0; \quad \omega|_{r_{\text{rp}}} = 0; \quad \left. \frac{d\omega}{dr} \right|_{r_{\text{rp}}} = 0.$$

С в о б о д н ы й к р а й

У п р у г о о п е р т ы й к р а й
н а р у ж н ы й

$$Q_r|_{R_{rp}} = 0; \quad M_r|_{R_{rp}} = 0; \quad Q_r|_{R_{rp}} = kw; \quad M_r|_{R_{rp}} = 0;$$

$$Q_r|_{r_{\text{rp}}} = 0; \quad M_r|_{r_{\text{rp}}} = 0; \quad Q_r|_{r_{\text{rp}}} = k\omega; \quad M_r|_{r_{\text{rp}}} = 0.$$

Здесь k — коэффициент жесткости опоры на осадку.

Упруго закрепленный край в жесткий контур

наружный $w|_{R_{\text{гп}}} = 0$; $M_r|_{R_{\text{гп}}} = \chi \frac{dw}{dr}$;

$$\text{внутренний } w|_{r_{\text{гр}}} = 0; \quad M_r|_{r_{\text{гр}}} = \chi \frac{dw}{dr}.$$

Таким образом, для определения четырех произвольных постоянных всегда есть четыре независимых граничных условия.

Граничные условия для сплошной пластины. Для пластины, у которой нет центрального выреза, в приведенных граничных условиях можно использовать лишь те, которые относятся к наружному краю, так как в центре пластины ($r = 0$) имеется особенность: отношение $\frac{1}{r}$

входящее в структуру решения, в этой точке не существует. (Когда опорная окружность пластины r_0 ($r_{\text{гр}} < r_0 < R_{\text{гр}}$) не совпадает с граничными ($r_{\text{гр}}$ и $R_{\text{гр}}$), краевые условия могут быть заданы на r_0 , а также на контурных окружностях.) Используя условия на наружном крае, удастся записать 2 уравнения для определения произвольных постоянных. Покажем, как это делается.

В центре пластины, при $r = 0$, перемещение w должно сохранять конечное значение. В решении (10.88) предпоследний член содержит множитель $\ln r$. Очевидно, что $\lim_{r \rightarrow 0} \ln r = \infty$. Чтобы перемещение w не

и производные сохраняли конечные значения, произвольная постоянная, присущая этому члену, должна тождественно равняться нулю: $A_0 = 0$.

Рассмотрим далее сомножитель при A_1 , также содержащий логарифм. При $r \rightarrow 0 \ln r$ — величина бесконечно большая, а r^2 — бесконечно малая. Таким образом, здесь имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Следуя общей процедуре, превратим ее в неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$, с тем чтобы к ней применить правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \ln r &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln r}{\frac{1}{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r^4} 2r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{r^2}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Этот результат показывает, что от присутствия в структуре решения члена, содержащего $r^2 \ln r$, затруднения в точке $r = 0$ не возникнут.

Сформируем последнее недостающее условие. Осевая симметрия изогнутой поверхности круглой пластины позволяет сделать вывод, что угол поворота в центральной точке равен нулю:

$$\theta|_{r=0} = \left(-\frac{dw}{dr} \right)_{r=0} = 0.$$

Однако реализация этого условия встречает затруднения из-за того, что в выражении для $\frac{dw}{dr}$ опять-таки присутствуют величины вида $\frac{1}{r}$, предел которых при $r \rightarrow 0$ стремится к бесконечности.

Используем другой возможный подход: обследуем область, охватывающую центр пластины. Пусть это будет круг с бесконечно малым радиусом ρ (рис. 10.23). Рассмотрим наиболее общий случай загрузки этой области. В центре ее приложена сосредоточенная сила P ; она единственна, иначе нарушатся условия симметрии. Кроме того, в зоне этой области действует распределенная нагрузка $q(r)$. По боковой поверхности этого цилиндра действуют моменты M_r и поперечные силы Q_r (на рис. 10.23 моменты M_r не показаны).

Условия равновесия $\sum_{\text{пр}} z = 0$ можно записать так:

$$P + \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} q(r) r dr d\theta + Q_r 2\pi \rho = 0. \quad (10.89)$$

Второе слагаемое (10.89) можно определять также как объем тела вращения.

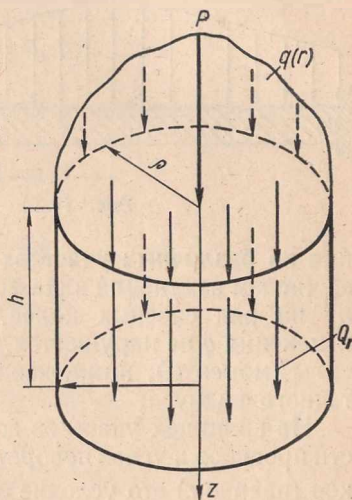


Рис. 10.23

Затем следует развернуть 2-е и 3-е слагаемые в (10.89), считая, что функция $q(r)$ известна. В выражение для Q_r войдет w , а от него, в свою очередь, — произвольные A_1 , A_2 и A_4 . Таким образом, (10.89) дает искомую дополнительную связь для определения произвольных постоянных. Конкретное применение условия (10.89) приведено в примере (см. далее).

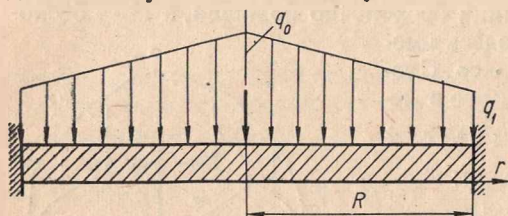


Рис. 10.24

Завершая рассмотрение граничных условий, следует остановиться на том случае, когда $q(r)$ не непрерывная функция, а имеет различные законы изменения на различных участках радиуса r . Число участков определяется числом изменений вида функции $q(r)$. Участки разбивают пластину на ряд соосных колец, в пределах каждого из которых закон изменения q не нарушается. На число участков влияют также внешние силы (моменты), приложенные по какой-либо окружности промежуточного радиуса.

На границах участков должны выполняться условия непрерывности прогибов и углов поворота. Так, на границе i -го и $(i + 1)$ -го участков (радиус $\bar{r}$) это условие будет

$$\begin{aligned} w_i \Big|_{r=\bar{r}+0} &= w_{i+1} \Big|_{r=\bar{r}-0}; \\ \frac{dw_i}{dr} \Big|_{r=\bar{r}+0} &= \frac{dw_{i+1}}{dr} \Big|_{r=\bar{r}-0}. \end{aligned}$$

Кроме того, следует выполнить статические условия стыковки участков. Если на границе участков (радиус $\bar{r}$) нет сосредоточенных воздействий, то эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} (M_r^i)_{r=\bar{r}+0} &= (M_r^{i+1})_{r=\bar{r}-0}; \\ (Q_r^i)_{r=\bar{r}+0} &= (Q_r^{i+1})_{r=\bar{r}-0}. \end{aligned}$$

На границе двух участков могут действовать равномерно распределенные по окружности поперечные силы P или распределенные моменты m либо те и другие одновременно. В этом случае условия стыковки будут выглядеть по-иному:

$$\begin{aligned} (M_r^i)_{r=\bar{r}+0} &= (M_r^{i+1})_{r=\bar{r}-0} + m; \\ (Q_r^i)_{r=\bar{r}+0} &= (Q_r^{i+1})_{r=\bar{r}-0} + P. \end{aligned}$$

Из сказанного вытекает, что на границе двух участков можно записать 4 дополнительных (промежуточных) граничных условия.

Пример решения задачи для круглой пластины. Рассмотрим круглую пластину, несущую распределенную нагрузку (рис. 10.24)

$$q(r) = q_0 - \frac{q_0 - q_1}{R} r \quad (q_1 < q_0). \quad (10.90)$$

Эту нагрузку можно считать состоящей из двух одновременно действующих нагрузок:

- 1) равномерно распределенной («цилиндрической»)

$$q(r) = q_0 \quad (q_0 = q_1);$$

- 2) линейно-изменяющейся («конической»)

$$q(r) = q_0 - \frac{q_0}{R} r \quad (q_1 = 0).$$

Первое слагаемое в (10.88) с учетом (10.90) после четырехкратного интегрирования дает частное решение

$$\frac{q_0}{64D} r^4 - \frac{q_0 - q_1}{225RD} r^5.$$

Тогда общее решение (10.88) запишется в виде

$$w = A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 + \frac{q_0}{64D} r^4 - \frac{q_0 - q_1}{225RD} r^5. \quad (10.91)$$

Внутренние усилия (10.87) с учетом (10.91)

$$M_r = -D \left\{ A_1 [3 + \nu + 2(1 + \nu) \ln r] + 2A_2(1 + \nu) - A_3(1 - \nu) \frac{1}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{q_0(3 + \nu)}{16D} r^2 - \frac{(q_0 - q_1)(1 + 4\nu)}{45RD} r^3 \right\};$$

$$M_\theta = -D \left\{ A_1 \left[1 - 3\nu + 2(1 + \nu) \ln r + 2A_2(1 + \nu) + A_3(1 - \nu) \frac{1}{r^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{q_0(1 + 3\nu)}{16D} r^2 - \frac{(q_0 - q_1)(1 + 4\nu)}{45RD} r^3 \right\};$$

$$Q_r = -D \left[A_1 \frac{4}{r} + \frac{q_0 r}{2D} - \frac{q_0 - q_1}{3RD} r^2 \right].$$

Как уже отмечалось при общем анализе решения (10.88), произвольная постоянная $A_3 = 0$, в противном случае прогибы при $r = 0$ будут стремиться к бесконечности. Для определения A_1 развернем (10.89):

$$P - 8\pi A_1 D - \pi q_0 r^2 + \frac{q_0 - q_1}{R} \frac{2}{3} \pi r^3 + \pi q_0 r - \frac{q_0 - q_1}{R} \frac{2}{3} \pi r^2 = 0,$$

откуда

$$A_1 = \frac{P}{8\pi D}.$$

В соответствии с условиями задачи на пластину действует лишь распределенная нагрузка q (10.90), поэтому силу P в выражении для A_1 следует положить равной нулю. Тогда $A_1 = 0$. Теперь выражение для w будет выглядеть так:

$$w = A_4 + A_2 r^2 + \frac{q_0}{64D} r^4 - \frac{q_0 - q_1}{225RD} r^5. \quad (10.92)$$

Произвольные постоянные определяются из граничных условий. Например, если пластина закреплена по внешнему контуру, то при

$r = R$ должно выполняться $w = 0$ и $\frac{dw}{dr} = 0$. Расписав эти условия при помощи (10.92), получим

$$2A_2R + \frac{q_0R^3}{16D} - \frac{q_0 - q_1}{45D} R^3 = 0;$$

$$A_4 + A_2R^2 + \frac{q_0R^4}{64D} - \frac{q_0 - q_1}{225D} R^4 = 0.$$

Решениями этой системы будут

$$A_2 = \left(-\frac{q_0}{32} + \frac{q_0 - q_1}{90} \right) \frac{R^2}{D};$$

$$A_4 = \left(\frac{q_0}{64} - \frac{q_0 - q_1}{150} \right) \frac{R^4}{D}. \quad (10.93)$$

Подставив (10.93) в (10.92), после некоторых преобразований получим

$$w = \frac{R^4}{D} \left[\frac{q_0}{64} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 - \frac{q_0 - q_1}{450} \left(3 - 5 \frac{r^2}{R^2} + 2 \frac{r^5}{R^5} \right) \right]. \quad (10.94)$$

В качестве частных реализаций этого решения рассмотрим два случая:

1. Равномерно распределенная нагрузка $q_0 = q_1$; $q(r) = q_0$:

$$w = \frac{q_0R^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2. \quad (10.95)$$

Вид (10.95) показывает, что 1-е слагаемое в (10.94) отражает влияние равномерно распределенной нагрузки. Наибольший прогиб будет по середине пластинки ($r = 0$):

$$w_{\max} = \frac{q_0R^4}{64D}. \quad (10.96)$$

2. Линейно-изменяющаяся («коническая») нагрузка $q_1 = 0$. В этом случае

$$w = \frac{q_0R^4}{12^2 \cdot 10^2 D} \left(129 - 290 \frac{r^2}{R^2} + 225 \frac{r^4}{R^4} - 64 \frac{r^5}{R^5} \right);$$

$$w_{\max} = \frac{43q_0R^4}{48 \cdot 10^2 D}.$$

В рассмотренном только что примере внешняя нагрузка была задана одной функцией в пределах всего радиуса пластины. Это предопределило компактный вид полученных результатов и их сравнительно небольшую трудоемкость.

Если нагрузка прерывистая, для каждого участка надо составить и интегрировать дифференциальное уравнение изгиба пластины, составлять условия контакта между участками и т. д. Даже при двух-трех участках задача становится исключительно громоздкой и трудоемкой. Метод начальных параметров Соколова позволяет обойти указанные трудности.

Метод начальных параметров (МНП). Следуя С. Соколову, примем в качестве исходного 4-е уравнение (10.87), положив в нем $\varphi = \frac{dw}{dr}$ (ввиду малости деформаций $\operatorname{tg} \varphi$ заменим на φ).

Составляя уравнения МНП, примем во внимание 3 типа наиболее часто встречающихся нагрузок (рис. 10.25):

- 1) силы P , равномерно распределенные по окружности радиуса r_P ;
- 2) моменты m , действующие в радиальном направлении и равномерно распределенные по окружности радиуса r_m ;
- 3) равномерно распределенную по площади соосного кольца (радиусы r_0 и r_0) нагрузку q , нормальную к плоскости пластины. Направление нагрузок, показанные на рис. 10.25, примем за положительными.

Изложим основные положения МНП:

1. Вид искомой функции φ должен быть таким, чтобы выражение для каждого $(i + 1)$ -го участка содержало в себе как слагаемое выражение для i -го участка. Добавка

при переходе на последующий участок отражает влияние нового силового фактора, действующего на этом участке.

2. Произвольным постоянным приписывают физический смысл. Их выражают через значения ω , M_r и M_θ в начале координат, если пластина сплошная, и на внутреннем контуре радиуса r , если она кольцевая.

Для удобства изложения сгруппируем выражения, используемые в последующем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] &= \frac{Q_r}{D}; \\ M_r &= -D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right); \\ M_\theta &= -D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right). \end{aligned} \quad (10.97)$$

1. **Первый участок — участок незагруженный** ($r_0 \leq r \leq r_m$). На первом, как и на втором, участке поперечная сила $Q_r = 0$. В этом можно непосредственно убедиться, составив сумму проекций всех сил, приложенных к участку, на вертикальную ось. Таким образом, 1-е уравнение (10.97) для этого участка будет иметь вид

$$D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = 0.$$

Последовательно интегрируя, получим

$$\begin{aligned} D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) &= C_{11}; \\ D (r\varphi) &= \int C_{11} r dr + C_{12}; \\ D\varphi &= C_{11} \frac{r}{2} + \frac{C_{12}}{r}; \\ D\omega &= C_{11} \frac{r^2}{4} + C_{12} \ln r + C_{13}. \end{aligned} \quad (10.98)$$

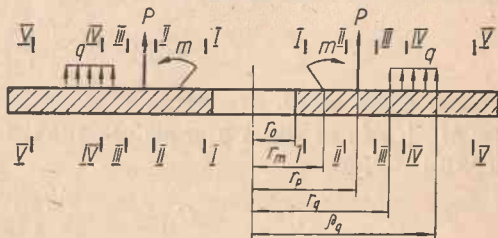


Рис. 10.25

Решая совместно 3-е и 2-е уравнения (10.97), получаем

$$\frac{M_r + M_\theta}{1 + \nu} = -D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi); \quad (10.99)$$

$$D\varphi = -\frac{M_\theta - \nu M_r}{1 - \nu^2} r.$$

Сопоставляя первые выражения (10.98) и (10.99), видим, что

$$C_{11} = -\frac{M_r + M_\theta}{1 + \nu}.$$

Левая часть этого равенства — константа, а поэтому на первом участке $M_r + M_\theta = \text{const}$ при любых значениях r , в том числе и при $r = r_0$. Таким образом,

$$C_{11} = -\frac{M_{r0} + M_{\theta0}}{1 + \nu}. \quad (10.100)$$

Попытаемся и две другие произвольные постоянные C_{12} и C_{13} выразить через значения M_r , M_θ и φ в точке $r = r_0$. Для начального сечения при $r = r_0$ 3-е выражение (10.98) имеет вид

$$C_{12} = D\varphi_0 r_0 - C_{11} \frac{r_0^2}{2}.$$

С учетом (10.100) и (10.99) при том же значении r_0

$$C_{12} = -\left(\frac{M_{\theta0} - \nu M_{r0}}{1 - \nu^2} r_0^2 - \frac{M_{r0} + M_{\theta0}}{1 + \nu} \frac{r_0^2}{r} \right). \quad (10.101)$$

Аналогично из 4-го выражения (10.98) получим

$$C_{13} = D\varphi_0 + \frac{M_{r0} + M_{\theta0}}{1 + \nu} \frac{r_0^2}{4} + \left(\frac{M_{\theta0} - \nu M_{r0}}{1 - \nu^2} r_0^2 - \frac{M_{r0} + M_{\theta0}}{1 + \nu} \right) \ln r_0. \quad (10.102)$$

Чтобы судить о прочности и жесткости пластины, нужно знать M_r , M_θ , φ и w . Используем для этого 1-е и 3-е выражения (10.97), 1-е и 4-е (10.98) и (10.100)–(10.102). После преобразований получим

$$M_r = M_{r0} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right] + M_{\theta0} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right];$$

$$M_\theta = M_{r0} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right] + M_{\theta0} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right];$$

$$D\varphi = -M_{r0} r \left\{ \frac{1}{2(1 - \nu^2)} \left[(1 - \nu) - \frac{r_0^2}{r^2} (1 + \nu) \right] \right\} -$$

$$-M_{\theta0} r \left\{ \frac{1}{2(1 - \nu^2)} \left[(1 - \nu) + \frac{r_0^2}{r^2} (1 + \nu) \right] \right\}; \quad (10.103)$$

$$Dw = Dw_0 - M_{r0}r^2 \left\{ \frac{1}{4(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1+\nu) \frac{r_0^2}{r^2} \ln \frac{r_0^2}{r^2} \right] \right\} - M_{\theta 0}r^2 \left\{ \frac{1}{4(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (1+\nu) \frac{r_0^2}{r^2} \ln \frac{r_0^2}{r^2} \right] \right\}.$$

Как видим, коэффициенты при M_{r0} и $M_{\theta 0}$ являются функциями безразмерного аргумента $\lambda = \frac{r_0}{r}$. Эти функции были названы С. Соколовым *сопровождающими* и протабулированы для различных λ . Значение λ изменяется от 0 до 1; $\lambda = 0$ для сплошной пластины, когда $r_0 = 0$.

Итак, для свободного от нагрузки участка можно записать

$$\begin{aligned} M_r &= M_{r0}\psi_{rr} + M_{\theta 0}\psi_{r\theta}; \\ M_\theta &= M_{r0}\psi_{\theta r} + M_{\theta 0}\psi_{\theta\theta}; \\ D\varphi &= rM_{r0}\psi_{\varphi r} + rM_{\theta 0}\psi_{\varphi\theta}; \\ Dw &= Dw_0 + r^2M_{r0}\psi_{wr} + r^2M_{\theta 0}\psi_{w\theta}. \end{aligned} \tag{10.104}$$

Для сопровождающих функций принято унифицированное обозначение ψ с двумя индексами, первый из которых указывает на принадлежность сопровождающей функции к той или иной искомой величине ($M_r, M_\theta, \varphi, w$), второй — на сопричастность к начальному параметру или внешней нагрузке.

2. Второй участок — участок, содержащий $m(r_m \leq r \leq r_p)$. Как уже указывалось, во втором участке $Q_r = 0$. Поэтому аналогично предыдущему

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] &= 0; \\ D\varphi &= C_{21} \frac{r}{2} + C_{22} \frac{1}{r}; \\ Dw &= C_{21} \frac{r^2}{4} + C_{22} \ln r + C_{23}; \\ M_r &= -C_{21} \frac{1+\nu}{2} + C_{22} \frac{1-\nu}{r^2}; \\ M_\theta &= -C_{21} \frac{1+\nu}{2} - C_{22} \frac{1-\nu}{r^2}. \end{aligned} \right\} \tag{10.105}$$

Попытаемся установить связь между C_{21} , C_{22} и C_{23} и постоянными интегрирования, введенными на первом участке. Условия контакта первого и второго участков ($r = r_m$) можно представить так:

$$\varphi_I = \varphi_{II}; \quad w_I = w_{II}; \quad (M_r)_I + m = (M_r)_{II}. \tag{10.106}$$

Подставив (10.98) и (10.105) в (10.106), получим

$$\left. \begin{aligned} C_{11} \frac{r_m}{2} + \frac{C_{12}}{r_m} &= C_{21} \frac{r_m}{2} + \frac{C_{22}}{r_m}; \\ C_{11} \frac{r_m^2}{4} + C_{12} \ln r_m + C_{13} &= C_{21} \frac{r_m^2}{4} + C_{22} r_m + C_{23}; \\ -C_{11} \frac{1+\nu}{2} + C_{12} \frac{1-\nu}{r_m^2} + m &= -C_{21} \frac{1+\nu}{2} + C_{22} \frac{1-\nu}{r_m^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.107)$$

Решив совместно (10.107), имеем

$$\begin{aligned} C_{21} &= C_{11} - m; \\ C_{22} &= C_{12} + \frac{mr_m^2}{2}; \\ C_{23} &= C_{13} + \frac{mr_m^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \ln r_m \right). \end{aligned} \quad (10.108)$$

Подставим (10.108) в (10.105). Подробные преобразования покажем на примере w :

$$\begin{aligned} Dw &= C_{21} \frac{r^2}{4} + C_{22} \ln r + C_{23} = \\ &= (C_{11} - m) \frac{r^2}{4} + \left(C_{12} + \frac{mr_m^2}{2} \right) \ln r + C_{13} + \frac{mr_m^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \ln r_m \right) = \\ &= C_{11} \frac{r^2}{4} + C_{12} \ln r + C_{13} - mr^2 \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{r_m^2}{r^2} \ln r^2 - \frac{r_m^2}{r^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{r_m^2}{r^2} \ln r_m^2 \right) \right] = C_{11} \frac{r^2}{4} + C_{12} \ln r + C_{13} - mr^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{4} \left[1 - \frac{r_m^2}{r^2} \left(1 - \ln \frac{r_m^2}{r^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Первые три слагаемых есть не что иное, как w на первом участке [(10.98)]. Таким образом,

$$Dw = Dw_I - mr^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[1 - \frac{r_m^2}{r^2} \left(1 - \ln \frac{r_m^2}{r^2} \right) \right] \right\}, \quad (10.109)$$

т. е. перемещение w на втором участке включает в себя перемещение на первом участке и дополнительное слагаемое, обусловленное наличием моментной нагрузки. Обозначим «моментное» слагаемое через Dw_m .

$$Dw_m = -mr^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[1 - \frac{r_m^2}{r^2} \left(1 - \ln \frac{r_m^2}{r^2} \right) \right] \right\} = -mr^2 \psi_{wm}. \quad (10.110)$$

В (10.110) слагаемое в фигурных скобках есть сопровождающая функция безразмерного аргумента.

Выпишем «добавки», входящие в уравнения от моментной нагрузки

$$M_{rm} = m \left\{ \frac{1}{2} \left[(1 + \nu) + (1 - \nu) \frac{r_m^2}{r^2} \right] \right\} = m \psi_{rm};$$

$$M_{\theta m} = m \left\{ \frac{1}{2} \left[(1 + \nu) - (1 - \nu) \frac{r_m^2}{r^2} \right] \right\} = m \psi_{\theta m}; \quad (10.111)$$

$$D\varphi_m = -mr \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_m^2}{r^2} \right) \right] = -mr \psi_{\varphi m};$$

$$Dw_m = -mr^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[1 - \frac{r_m^2}{r^2} \left(1 - \ln \frac{r_m^2}{r^2} \right) \right] \right\} = -mr^2 \psi_{wm}.$$

3. Третий участок — участок, содержащий P ($r_P \leq r \leq r_q$). Величину Q_r , стоящую в правой части (10.97), определим, спроецировав все силы на вертикальную ось:

$$2\pi r_P \bar{P} - Q_r 2\pi r = 0; \quad P = 2\pi r_P \bar{P}.$$

Тогда

$$Q_r = \frac{P}{2\pi r}.$$

Таким образом,

$$D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = \frac{P}{2\pi r}.$$

Отсюда

$$D\varphi = -\frac{Pr}{4\pi} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + C_{31} \frac{r}{2} + \frac{C_{32}}{r};$$

$$Dw = C_{31} \frac{r^2}{4} + C_{32} \ln r + C_{33} - \frac{8r^2}{8\pi} (\ln r - 1); \quad (10.112)$$

$$M_r = -C_{31} \frac{1+\nu}{2} + C_{32} \frac{1-\nu}{r^2} + \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + \frac{1}{2} (1-\nu) \right];$$

$$M_{\theta} = -C_{31} \frac{1+\nu}{2} - C_{32} \frac{1-\nu}{r^2} + \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r - \frac{1}{2} (1-\nu) \right].$$

Выполним условия контакта между вторым и третьим участками в точке $r = r_P$:

$$\varphi_{II} = \varphi_{III}; \quad w_{II} = w_{III}; \quad (M_r)_{II} = (M_r)_{III}.$$

Найдем произвольные постоянные:

$$\left. \begin{aligned} C_{21} \frac{r_P}{2} + C_{22} \frac{1}{r_P} &= C_{31} \frac{r_P}{2} + C_{32} \frac{1}{r_P} - \frac{P r_P}{4\pi} \left(\ln r_P - \frac{1}{2} \right); \\ C_{21} \frac{r_P^2}{4} + C_{22} \ln r_P + C_{23} &= C_{31} \frac{r_P^2}{4} + C_{32} \ln r_P + C_{33} - \\ - \frac{8r_P^2}{8\pi} (\ln r_P - 1) - C_{21} \frac{1+\nu}{2} + C_{22} \frac{1-\nu}{r_P^2} &= \\ = -C_{31} \frac{1+\nu}{2} + C_{32} \frac{1-\nu}{r_P^2} + \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r_P + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1-\nu) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.113)$$

Решив систему (10.113), получим

$$\begin{aligned} C_{31} &= C_{21} + \frac{P}{2\pi} \ln r_P; \quad C_{32} = C_{22} - \frac{P r_P^2}{8\pi}; \\ C_{33} &= C_{23} + \frac{P r_P^2}{8\pi} (\ln r_P - 1). \end{aligned} \quad (10.114)$$

Подставим (10.114) в (10.112). Увидим, что величины $D\varphi$, Dw , M_r и M_θ состоят из двух слагаемых, первое из которых дает соответствующее значение искомой функции на предыдущем, втором, участке, а второе — добавка, обусловленная наличием силы P на третьем участке. Приведем значения этих добавок:

$$\begin{aligned} M_{rP} &= P \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[(1-\nu) \left(1 - \frac{r_P^2}{r^2} \right) - (1+\nu) \ln \frac{r_P^2}{r^2} \right] \right\} = P \psi_{rP}; \\ M_{\theta P} &= -P \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[(1-\nu) \left(1 - \frac{r_P^2}{r^2} \right) + (1+\nu) \ln \frac{r_P^2}{r^2} \right] \right\} = P \psi_{\theta P}; \\ D\varphi_P &= -Pr \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[\frac{r_P^2}{r^3} - \ln \frac{r_P^2}{r^2} - 1 \right] \right\} = -Pr \psi_{\varphi P}; \\ Dw_P &= -Pr^2 \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[\frac{r_P^2}{r^2} - 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_P^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_P^2}{r^2} \right] \right\} = -Pr^2 \psi_{wP}. \end{aligned} \quad (10.115)$$

Здесь, как и прежде, ψ — сопровождающие функции.

4. Четвертый участок — участок, содержащий равномерно распределенную нагрузку q ($r_q \leq r \leq r_0$). Уравнения для четвертого участка можно получить непосредственно из уравнений для третьего участка, если рассматривать равномерно распределенную нагрузку q как сумму элементарных сосредоточенных сил $dP = q \cdot 2\pi r dr$. Здесь r — некая переменная интегрирования, изменяющаяся в пределах от r_q до r .

Заменим, например, в M_{rP} из (10.115) значение силы на dP , r — на ρ и проинтегрируем полученное выражение в указанных пределах:

$$M_{rq} = \int_{r_q}^r \frac{q 2\pi \rho}{8\pi} \left[(1-\nu) \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) - (1+\nu) \ln \frac{\rho^2}{r^2} \right] d\rho,$$

$$M_{rq} = \frac{q}{4} \left\{ (1 - \nu) \int_{r_q}^{\rho} \left(\rho - \frac{\rho^3}{r^2} \right) d\rho - (1 + \nu) \int_{r_q}^r \rho \ln \frac{\rho^2}{r^2} d\rho \right\}.$$

Проинтегрировав это выражение, а также проведя подобную операцию для M_r , $D\varphi$ и $D\omega$, получим

$$\begin{aligned} M_{rq} &= qr^2 \left\{ \frac{1}{16} \left[3 + \nu - \frac{r_q^2}{r^2} \left(4 - (1 - \nu) \frac{r_q^2}{r^2} - 2(1 + \nu) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \ln \frac{r_q^2}{r^2} \right) \right] \right\} = qr^2 \psi_{rq}; \\ M_{\theta q} &= qr^2 \left\{ \frac{1}{16} \left[1 + 3\nu - \frac{r_q^2}{r^2} \left(4\nu + \frac{r_q^2}{r^2} (1 - \nu) - 2(1 + \nu) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \ln \frac{r_q^2}{r^2} \right) \right] \right\} = qr^2 \psi_{\theta q}; \\ D\varphi_q &= -qr^3 \left\{ \frac{1}{16} \left[1 + \frac{r_q^2}{r^2} \left(2 \ln \frac{r_q^2}{r^2} - \frac{r_q^2}{r^2} \right) \right] \right\} = -qr^3 \psi_{\varphi q}; \\ D\omega_q &= -qr^4 \left\{ \frac{1}{64} \left[1 + \frac{r_q^2}{r^2} \left(4 - 5 \frac{r_q^2}{r^2} + 2 \left(2 + \frac{r_q^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_q^2}{r^2} \right) \right] \right\} = \\ &= -qr^4 \psi_{\omega q}. \end{aligned} \quad (10.116)$$

5. Пятый участок — свободный ($r \geq \rho_q$). На пятом участке нет необходимости вновь составлять все уравнения для определения M_r , M_θ и $D\varphi$, $D\omega$. Если продлить распределенную нагрузку q до интересующего нас сечения $V-V$, компенсировать ее такой же нагрузкой противоположного направления, то можно использовать уравнения (10.116) для четвертого участка.

Когда на пластину одновременно действуют системы сосредоточенных сил, моментов и распределенных нагрузок, то на основе принципа наложения, используя (10.104), (10.111), (10.115) и (10.116), можно записать

$$\begin{aligned} M_r &= +M_{r0}\psi_{rr} + M_{\theta 0}\psi_{r\theta} + \sum_i m_i \psi_{ri} + \sum_j P_j \psi_{rP} + \sum_k q_k r^2 \psi_{rk}; \\ M_\theta &= +M_{r0}\psi_{\theta r} + M_{\theta 0}\psi_{\theta\theta} + \sum_i m_i \psi_{\theta i} + \sum_j P_j \psi_{\theta P} + \sum_k q_k r^2 \psi_{\theta k}; \\ D\varphi &= -rM_{r0}\psi_{\varphi r} - rM_{\theta 0}\psi_{\varphi\theta} - \sum_i m_i r \psi_{\varphi i} - \sum_j P_j r \psi_{\varphi P} - \\ &\quad - \sum_k q_k r^3 \psi_{\varphi k}; \\ D\omega &= D\omega_0 - r^2 M_{r0}\psi_{\omega r} - r^2 M_{\theta 0}\psi_{\omega\theta} - \sum_i m_i r^2 \psi_{\omega i} - \sum_j P_j r^2 \psi_{\omega P} - \\ &\quad - \sum_k q_k r^4 \psi_{\omega k}. \end{aligned} \quad (10.117)$$

Последние три члена в каждой строке (10.117) называются *грузовыми членами*. Суммирование в этих членах ведется по количеству внешних нагрузок (P , m и q), находящихся в круге, радиус которого определяется расстоянием до рассматриваемой точки. Слагаемые в каждой строке

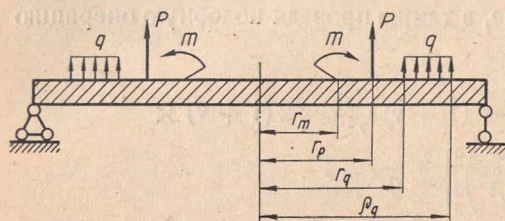


Рис. 10.26

(10.117), предшествующие грузовым членам, включают в себя начальные параметры.

Сплошную круглую пластину (рис. 10.26) можно рассматривать как частный случай кольцевой пластины при $r_0 = 0$. В центре ее из-за осевой симметрии $M_{r0} = M_{\theta 0} = M_0$. Грузовые члены выражения (10.117) начальных па-

раметров M_{r0} , $M_{\theta 0}$ и w_0 не содержат, следовательно, в уравнениях для сплошных круглых пластин эти члены останутся неизменными. Члены, содержащие начальные параметры в (10.117), относятся лишь к первому участку. Поэтому уравнения (10.103) для первого участка ($r_0 = 0$) изменяется так:

$$M_r = M_0; \quad M_\theta = M_0; \quad D\varphi = -M_0 \frac{r}{1+\nu}; \quad D\omega = D\omega_0 - M_0 \frac{r^2}{2(1+\nu)}.$$

Чтобы убедиться в непротиворечивости результата, следует раскрыть неопределенность, которая встречается в 4-м выражении (10.103).

Действительно, в слагаемом $\frac{r_0^2}{r^2} \ln \frac{r_0^2}{r^2}$ при $r_0 \rightarrow 0$ $\ln r_0^2 \rightarrow \infty$, что приводит к неопределенности типа $0 \cdot \infty$. Преобразуя это выражение, получим

$$\frac{1}{r^2} [r_0^2 \ln r_0^2 - r_0^2 \ln r^2].$$

Очевидно, что рассматривать нужно лишь 1-е слагаемое. Если запишем его в виде

$$\frac{\ln r_0^2}{\frac{1}{r_0^2}},$$

то приходим к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя к раскрытию этой неопределенности:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{\ln r_0^2}{\frac{1}{r_0^2}} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{2 \ln r_0}{r_0^{-2}} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{2 \frac{1}{r_0}}{-2 r_0^{-3}} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (-r_0)^2 = 0.$$

Заканчивая, приведем аналог уравнений (10.117) для случая сплошной пластины:

$$M_r = M_0 + \sum_i m_i \psi_{rm} + \sum_j P_j \psi_{rP} + \sum_k q_k r^2 \psi_{rk};$$

$$M_\theta = M_0 + \sum_i m_i \psi_{\theta m} + \sum_j P_j \psi_{\theta P} + \sum_k q_k r^2 \psi_{\theta k};$$

$$D\varphi = -M_0 \frac{r}{1+\nu} - \sum_i m_i r \psi_{\varphi m} - \sum_j P_j r \psi_{\varphi P} - \sum_k q_k r^3 \psi_{\varphi k}; \quad (10.118)$$

$$Dw = Dw_0 - M_0 \frac{r^2}{2(1+\nu)} - \sum_i m_i r^2 \psi_{wm} - \sum_j P_j r^2 \psi_{wP} - \\ - \sum_k q_k r^4 \psi_{wk}.$$

Применяя МНП, целесообразно придерживаться такой последовательности:

1. Задаться расчетной моделью (расчетной схемой).
2. Установить число участков. Первый участок всегда отсчитывают от r_0 для кольцевых пластин и от центра для сплошных.
3. Определить начальные параметры:

а) в соответствии с расчетной схемой сформировать граничные условия:

$w = 0$ — при опирании или заделке контура пластины;

$\varphi = 0$ — при заделке контура пластины;

$M_r = \begin{cases} m & \text{— моментная нагрузка } m \text{ приложена к контуру пластины;} \\ 0 & \text{— моментной нагрузки нет;} \end{cases}$

б) для участков, примыкающих к контуру, на котором заданы граничные условия, записать уравнения МНП. Полагая r равным значению контурного радиуса, вычислить или определить по таблицам [10], [47], [51] сопровождающие функции.

Удовлетворяя граничным условиям, получить систему уравнений, из которых определить начальные параметры.

4. Записать уравнения МНП для каждого участка.

5. Построить эпюры M_r и M_θ по уравнениям этих величин, полученным при помощи МНП, чтобы определить опасное сечение для расчетов на прочность.

6. Определить прогибы w и построить эпюру прогибов для расчета пластины на жесткость.

Пример расчета защемленной по внешнему контуру сплошной пластины, несущей равномерно распределенную нагрузку

(рис. 10.27). Такая задача решена в (10.96). Это позволит сопоставить результат решения по МНП с ранее полученным. Решать пример станем, следуя только что намеченному плану:

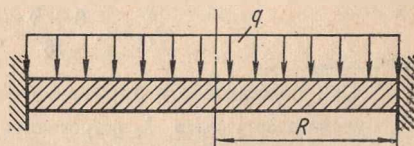


Рис. 10.27

1. Расчетная схема — рис. 10.27.

2. Число участков — один.

3. Определяем начальные параметры:

а) граничные условия, соответствующие схеме рис. 10.27, имеют вид

$$\text{при } r = R \quad \varphi = 0; \quad w = 0;$$

б) составляем и решаем уравнения, определяющие начальные параметры [реализуем уравнения (10.118)]:

$$D\varphi = -M_0 \frac{1}{1+\nu} r + qr^3 \psi_{\varphi q};$$

$$Dw = D\omega_0 - M_0 \frac{1}{2(1+\nu)} r^2 + qr^4 \psi_{wq}.$$

Определим для каждого случая значения сопровождающих функций. Аргумент этих функций $\lambda_3 = \frac{r_q}{r}$. Здесь r_q — расстояние от центра пластины до внутреннего радиуса площади, находящейся под действием распределенной нагрузки q . У нас $r_q = 0$, а следовательно, $\lambda_3 = 0$. Из таблицы для ψ [10] находим, что

$$\psi_{\varphi q} = \frac{1}{16}, \quad \text{а} \quad \psi_{wq} = \frac{1}{64}.$$

В соответствии с принятыми граничными условиями

$$0 = -M_0 R \frac{1}{1+\nu} + qR^3 \frac{1}{16};$$

$$0 = D\omega_0 - M_0 R^2 \frac{1}{2(1+\nu)} + qR^4 \frac{1}{64}.$$

Решая эту систему, найдем, что

$$M_0 = \frac{qR^3(1+\nu)}{16};$$

$$D\omega_0 = \frac{qR^4}{64}.$$

Значение ω_0 — прогиба в центре — совпадает с тем значением [(10.96)], которое было получено при непосредственном интегрировании исходного уравнения.

4. Уравнения МНП легко записать, вычислив предварительно значения ψ_{rq} и $\psi_{\theta q}$ *:

$$\psi_{rq} = \frac{3+\nu}{16}; \quad \psi_{\theta q} = \frac{1+3\nu}{16}.$$

* При подстановке в выражения сопровождающих функций ψ_{rq} , $\psi_{\theta q}$, $\psi_{\varphi q}$ и ψ_{wq} нулевого аргумента λ_3 встречаются выражения вида $\lambda_3^2 \ln \lambda_3^2$ и $\lambda_3^4 \ln \lambda_3^2$, которые при $\lambda_3 = 0$ приводят к неопределенности типа $0 \cdot \infty$. Первая неопределенность была раскрыта, раскроем вторую:

$$\lim_{\lambda_3 \rightarrow 0} \lambda_3^4 \ln \lambda_3^2 = \lim_{\lambda_3 \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_3^2}{\frac{1}{\lambda_3^4}} = \frac{\frac{1}{\lambda_3^2} 2\lambda_3}{-4\lambda_3^{-5}} = -\frac{1}{2} \lambda_3^4 = 0.$$

Таким образом, в операциях при вычислении сопровождающих функций нет ошибки.

Итак, уравнения МНП после подстановки ψ_{rq} и $\psi_{\theta q}$ и преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{qR^2}{16} \left[1 + \nu - (3 + \nu) \frac{r^2}{R^2} \right]; \\ M_\theta &= \frac{qR^2}{16} \left[1 + \nu - (1 + 3\nu) \frac{r^2}{R^2} \right]; \\ \omega &= \frac{qR^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 \quad [\text{сравните с (10.95)}]. \end{aligned} \quad (10.119)$$

5; 6. Эпюры M_r , M_θ и ω можно легко построить по уравнениям (10.119). Однако в нашем изложении эти построения опускаются.

§ 10.5. Изгиб пластины при совместном действии поперечной нагрузки и сил, приложенных в срединной плоскости

Основное дифференциальное уравнение (10.12) было получено без учета влияния усилий T и S , действующих в срединной плоскости пластины. В некоторых случаях продольные усилия могут достигать такой величины, что пренебрежение ими будет уже некорректно. Это может случиться, например, тогда, когда края пластины закреплены так, что лишены возможности свободно перемещаться в ее плоскости. При рассмотрении задач, в которых учитываются усилия, действующие в срединной плоскости, могут возникнуть два случая:

1. Напряжения в срединной плоскости незначительны, и их влиянием на изгиб пластины можно пренебречь. Суммарное напряженное состояние образуется сложением напряжений изгиба и напряжений, вызванных усилиями в срединной плоскости. Это, по сути, означает, что суммируются решения при поперечном изгибе и плоском напряженном состоянии (из рассмотрения исключаем случай действия таких сжимающих продольных сил, которые вызывают потерю устойчивости плоской формы пластины).

Обозначив, как и прежде, перемещения точек срединной поверхности в направлении осей x , y и z соответственно u , v и w , можно, используя принцип наложения, записать

$$u = u_{из} + u_{п.з}; \quad v = v_{из} + v_{п.з}; \quad w = w_{из}, \quad (10.120)$$

где $u_{из}$, $v_{из}$ и $w_{из}$ — перемещения при поперечном изгибе; $v_{п.з}$ и $u_{п.з}$ — перемещения в условиях плоской задачи. Зависимости (10.120) характерны для жестких пластин.

2. Напряжения в срединной плоскости значительны, и пренебрегать ими нельзя. Здесь соотношения (10.120) не соблюдаются. Этот случай, который мы и рассмотрим, присущ изгибу пластин.

Составляя дифференциальные уравнения изгиба для случая 2, следует рассматривать схему деформированного элементарного параллелепипеда (рис. 10.28). В противном случае утрачивается взаимосвязь между влиянием продольных сил на деформацию от поперечных, и наоборот. Установим значения тригонометрических функций тех углов, которые будут фигурировать в уравнениях.

Примем, как и ранее, что в случае малых прогибов $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$. Угол α' можно трактовать следующим образом:

$$\alpha' = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx,$$

и тогда $\sin \alpha' \approx \alpha' = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$. Для малых α в разложении $\cos \alpha$ по степеням α величиной $\frac{\alpha^2}{2}$ и последующими по сравнению

с единицей обычно пренебрегают, и поэтому в дальнейшем $\cos \alpha \approx 1$. На основании тех же соображений $\cos \alpha'$ также равен единице. Теперь распишем условие $\sum \text{пр} x = 0$ (без учета объемных сил):

$$\begin{aligned} & \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot 1 - \\ & - T_x dy \cdot 1 + \left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) \times \\ & \times dx \cdot 1 - S dx \cdot 1 = 0, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0. \quad (10.121)$$

Аналогично из $\sum \text{пр} y = 0$ можно прийти к

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0. \quad (10.122)$$

Как уже говорилось, задача состоит в том, чтобы уточнить основное разрешающее уравнение С. Жермен (10.12) — учесть T_x , T_y и S , которые при выводе (10.12) были опущены. Очевидно, что спроецировав силы, изображенные на рис. 10.28, на ось z , мы и получим искомую добавку, которую можно трактовать как дополнительную поперечную нагрузку в правой части (10.12).

Развернем условие $\sum \text{пр} z = 0$. Проекция нормальных усилий $T_x dy$ и $(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx) dy$ на ось z будет равна

$$\begin{aligned} & \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - T_x dy \frac{\partial w}{\partial x} = T_x \frac{\partial w}{\partial x} dy + \\ & + \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx^2 dy - T_x \frac{\partial w}{\partial x} dy. \end{aligned}$$

Произведя упрощения и опустив члены высшего порядка малости, получим

$$T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy. \quad (10.123)$$

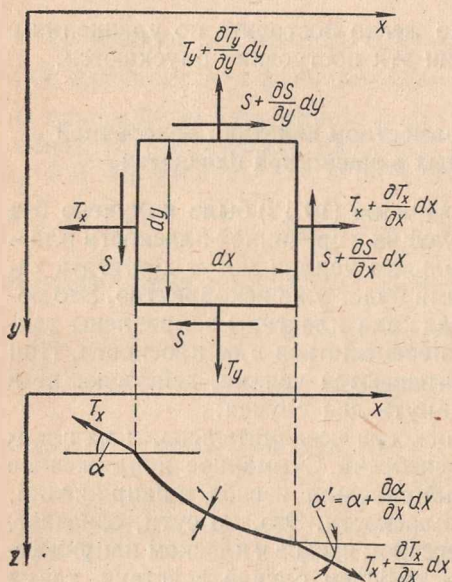


Рис. 10.28

Точно так же проекция на ось z нормальных усилий, действующих вдоль оси y , будет равна

$$T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dxdy + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dxdy. \quad (10.124)$$

Чтобы спроецировать тангенциальные силы на ось z , рассмотрим прогиб элемента $dxdy$ срединной поверхности (рис. 10.29). Отсюда

$$\begin{aligned} & \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) dy \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \right] - S dy \frac{\partial w}{\partial y} = \\ & = S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dxdy. \end{aligned} \quad (10.125)$$

Таким же образом определяется вертикальная проекция тангенциальных сил, действующих по двум другим граням:

$$S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dxdy. \quad (10.126)$$

Просуммируем полученные результаты (10.123), (10.124), (10.125), (10.126). Полученная сумма после деления на $dxdy$ и будет искомой добавкой Δq :

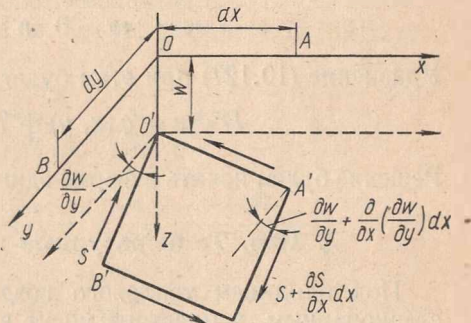


Рис. 10.29

$$\begin{aligned} \Delta q = & T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ & + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} = T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ & + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

В силу (10.121) и (10.122) два последних слагаемых равны нулю. Таким образом,

$$\Delta q = T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Включив эту добавку в правую часть уравнения (10.12), получим искомое уравнение изгиба пластины при одновременном действии нормальной нагрузки и усилий в срединной плоскости:

$$D \nabla^4 w = q + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (10.127)$$

Уравнения (10.127), (10.122) — основные разрешающие уравнения для пластины, находящейся под действием рассматриваемой нагрузки. Уравнение (10.127) впервые было получено Сен-Венаном. Если учитываются объемные силы, уравнения (10.121), (10.127) и (10.122) переходят

соответственно в следующие:

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^4 w &= q + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X \frac{\partial w}{\partial x} - Y \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Наметим контуры решения уравнения (10.127). Для определенности будем считать, что $T_x = T_1 = \text{const}$; $T_y = T_2 = \text{const}$, а $S = 0$. Рассмотрим случай, когда две противоположные кромки свободно оперты: при $x = 0$ и $x = a$

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Уравнение (10.127) при этом будет иметь вид

$$D\nabla^4 w = q(x, y) + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Решение будем искать в форме одинарного ряда, как это уже делалось.

§ 10.6. Температурные напряжения в пластинах

Под влиянием теплового воздействия, которое будем полагать стационарным, в пластине могут возникать температурные напряжения. Это происходит при: неоднородности температурного поля, когда менее нагретая часть сдерживает деформацию более нагретой; несвободном тепловом расширении тела или различных его зон, что влечет за собой возникновение реакций со стороны тел, находящихся с ним в контакте (включая и опорные устройства); различии коэффициентов линейного расширения вследствие анизотропии или неоднородности свойств (биметалл, составные тела). Термические напряжения отличаются от других видов внутренних напряжений только вызвавшей их причиной.

Решая температурную задачу для пластины, воспользуемся уравнением С. Жермен, преобразовав его так:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (10.128)$$

В справедливости такого вида уравнения С. Жермен можно убедиться непосредственной подстановкой (10.22) в (10.128).

Затем выпишем уравнения обобщенного физического закона для материала, находящегося в зоне повышенной температуры:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y - (1+\nu) \alpha T]; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x - (1+\nu) \alpha T]; \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (10.129)$$

Здесь T — повышение температуры — разность $T_t - T_0$, где T_0 — начальная температура, а T_t — температура в рассматриваемый момент времени.

Касательное напряжение τ_{xy} не зависит от T . Это обусловлено тем, что единичные компоненты тензора тепловой деформации равны нулю, так как при свободном температурном расширении не происходит искажения углов. Вообще говоря, модули E , G и коэффициенты ν и α зависят от T : $E = E(T)$; $G = G(T)$; $\nu = \nu(T)$; $\alpha = \alpha(T)$. Переменность E , G , ν и α обусловлена нестационарным и неравномерным нагревом при высоких температурах. Здесь же предполагается, что T меняется в таких пределах, при которых E , G , ν и α остаются неизменными, а температурный процесс стационарен. Предполагается также, что температура — известная функция координат.

Составим выражения для M_x , M_y и H_x , входящих в (10.128), используя (10.14) и (10.129):

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{1 - \nu}; \\ M_y &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{M_T}{1 - \nu}; \\ H_x &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{xy} z dz = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (10.130)$$

где

$$M_T = \alpha E \int_{-0,5h}^{0,5h} T z dz.$$

Подставим (10.130) в (10.128) и, опуская промежуточные выкладки, получим термоупругий аналог уравнения С. Жермен для пластин постоянной толщины:

$$D \nabla^4 w = q - \frac{1}{1 - \nu} \nabla^2 M_T. \quad (10.131)$$

Когда нужно определить перемещения ненагруженной пластины ($q = 0$) от неравномерного нагрева, уравнение (10.131) упрощается:

$$D \nabla^4 w = - \frac{1}{1 - \nu} \nabla^2 M_T. \quad (10.132)$$

Если положить, что эквивалентная нагрузка

$$q_T(x, y) = - \frac{1}{1 - \nu} \nabla^2 M_T,$$

уравнение (10.132) будет тождественно уравнению С. Жермен:

$$\nabla^4 w = \frac{q_T}{D}. \quad (10.133)$$

Решение этого уравнения можно найти методами § 10.3, например методом двойных тригонометрических рядов. Однако построение

такого решения эффективно только в случае однородных граничных условий.

Аналогия между уравнением С. Жермен и (10.133) будет полной лишь при вычислении прогибов. При определении напряжений надо пользоваться (10.129).

Используя правило эквивалентной нагрузки, дифференциальное уравнение для круглых осесимметрично нагретых пластин при тепловом поле, зависящем только от z и r , можно записать так [(10.86)]

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q_T}{D}.$$

Решение этого уравнения, как и прежде [(10.88)], будет

$$w = \frac{1}{D} \int \frac{1}{r} \left\{ \int r \left[\frac{1}{r} \left(\int q_T(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr + \\ + A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4.$$

Глава 11 ОБОЛОЧКИ

§ 11.1. Основополагающие понятия и допущения

В теории упругости *оболочкой* принято называть тело, заключенное между двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми, именуемое в дальнейшем *толщиной оболочки* h , мало по сравнению с прочими его размерами. Вообще говоря, толщина оболочки может быть переменной величиной. Однако среди реальных конструкций в большинстве своем встречаются оболочки, толщина которых остается неизменной. Поэтому в дальнейшем рассматривать будем исключительно этот случай.

Совокупность точек, равноотстоящих от образующих оболочку поверхностей, называется *срединной поверхностью*. В зависимости от толщины оболочки делят на *толстые* и *тонкие*. К тонким оболочкам, рассматриваемым в этой главе, обычно относят такие, у которых отношение $h/R \leq 1/20$ (R — минимальный радиус кривизны срединной поверхности). Следует, однако, отметить, что величина эта носит не абсолютный, а условно-ориентировочный характер.

Оболочки делят также на замкнутые и незамкнутые. *Замкнутые* — это такие оболочки, которые не имеют иных границ, кроме основных образующих поверхностей. Если кроме указанных поверхностей оболочка имеет и граничный контур, то ее называют *незамкнутой* или *открытой*. Такую оболочку можно рассматривать как часть замкнутой. Среди незамкнутых выделяют особый класс оболочек, которые называют *пологими*. Пологие оболочки имеют сравнительно небольшой подъем, поэтому геометрию их поверхности можно без особой погрешности отождествить с геометрией на плоскости. К пологим оболочкам принято относить такие, у которых $\Delta_{\max} \leq \frac{1}{5} L_{\min}$, где Δ — подъем

над перекрываемым планом; L — перекрываемый пролет. Если для замкнутой оболочки это условие не выполняется, то она относится к классу непологих. Геометрия такой оболочки полностью определяется конфигурацией ее срединной поверхности (она предполагается непрерывной и достаточно гладкой), толщиной и граничным контуром.

Замкнутые оболочки, в свою очередь, также можно классифицировать по различным признакам. Остановимся на наиболее важном случае — оболочках вращения. *Оболочкой вращения* называется оболочка, срединная поверхность которой получается от вращения некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей эту кривую. Частный весьма распространенный случай оболочек вращения — *цилиндрические оболочки* *.

Широкое использование оболочки в инженерных сооружениях обусловлено ее легкостью и высокой прочностью. Конструкция, изготовленная в виде оболочки, при прочих равных условиях экономичнее пластинчатой. Сфера применения конструкций в виде оболочек чрезвычайно широка. Среди них в первую очередь нужно назвать судостроение и ракетостроение, химическое машиностроение, строительство. Использование оболочек в таких быстро прогрессирующих областях, как авиа- и судостроение, обусловило развитие методов их расчета. В настоящее время теория тонких оболочек развита довольно широко.

В основе технической (прикладной) теории оболочек лежат допущения (гипотезы) Кирхгофа — Лава. Приняв эти допущения, можно перейти от трехмерной (пространственной) задачи теории упругости к двумерной задаче о равновесии и деформации срединной поверхности. Следует отметить, что эта теория приближенная и не может быть преобразована в точную.

Суть гипотез Кирхгофа — Лава сводится к следующему:

1. Прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, после деформации останется прямолинейным и нормальным к деформированной срединной поверхности, сохранив при этом свою длину. Эта гипотеза носит название *гипотезы прямых нормалей*.

2. Нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с соответствующими напряжениями на площадках, нормальных к той же поверхности. Гипотезу можно трактовать как *условие ненадавливаемости слоев, параллельных срединной поверхности*. Это, в свою очередь, позволяет говорить (с известной степенью приближения) о том, что такие слои находятся в плоском напряженном состоянии.

Приведем некоторые сведения из теории поверхностей. Они понадобятся нам в дальнейшем.

Нормальным сечением в некоторой точке A (рис. 11.1) называется плоская кривая $I—I$, получаемая от пересечения рассматриваемой поверхности с плоскостью V , проходящей через нормаль N к поверхности в этой точке.

* Приведенная здесь классификация, как, впрочем, и всякая классификация, в определенной степени условна.

Линией кривизны поверхности называется линия, имеющая в каждой своей точке главное направление.

Главное направление поверхности в данной точке — такое направление, где кривизна нормального сечения поверхности достигает экстремума. Из каждой точки A исходят две линии кривизны (1—1 и 2—2), ортогональные друг к другу.

Главные кривизны K_1 и K_2 поверхности в точке — это наибольшие и наименьшие кривизны нормального сечения поверхности в данной точке.

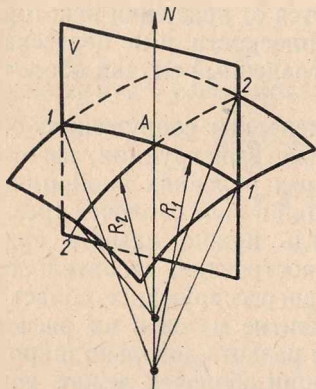


Рис. 11.1

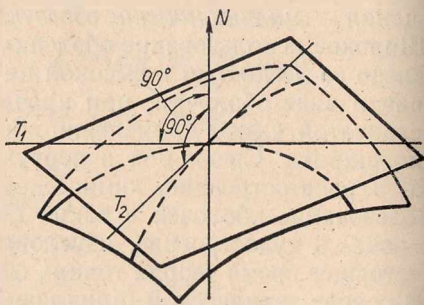


Рис. 11.2

ке. Величины, обратные главным кривизнам, называются радиусами главных кривизн R_1 и R_2 .

Геометрия поверхности оболочки характеризуется гауссовой, или полной, кривизной:

$$\Gamma = K_1 K_2 = \frac{1}{R_1 R_2},$$

а также срединной кривизной

$$K = \frac{1}{2} (K_1 + K_2).$$

Символ Γ имеет непосредственное отношение к форме оболочки. Например, сферические и эллиптические оболочки имеют $\Gamma > 0$, цилиндрические и конические — $\Gamma = 0$, гиперболические (имеющие форму однополостного гиперboloида) — $\Gamma < 0$, тороидальные оболочки имеют зоны, где $\Gamma > 0$, $\Gamma < 0$ и $\Gamma = 0$.

Касательная плоскость к поверхности в некоторой точке (рис. 11.2) — это такая плоскость, в которой лежат касательные ко всем линиям, проходящим через выбранную точку.

В оболочке вращения след пересечения плоскости, проходящей через ось, со срединной поверхностью называется меридианом. След пересечения срединной поверхности с плоскостью, перпендикулярной к оси, называется параллелью. Меридианы и параллели здесь взаимно ортогональны.

Получим теперь некоторые геометрические зависимости, которые используем в дальнейшем. Рассмотрим оболочку вращения толщиной

В (рис. 11.3). В такой оболочке положение произвольной точки M на срединной поверхности определяется пересечением соответствующих параллели и меридиана. Положение меридиана определяется углом φ , лежащим в плоскости параллели, а самой параллели — углом θ , который заключен между осью вращения и нормалью $\vec{N}$. Естественно, что положение точки M срединной поверхности определится теми же углами φ и θ , а также координатой z , отсчитываемой от срединной поверхности. Иногда с векторами $\vec{N}$, $\vec{t}_1$ и $\vec{t}_2$, которые лежат соответственно в нормальной и касательной плоскости к срединной поверхности в точке M , связывают прямоугольную систему координат.

В ходе дальнейших преобразований наряду с угловой координатой θ будем пользоваться меридиональной координатой s . Дифференциал дуги меридиана можно определить как

$$ds = R_1 d\theta, \quad (11.1)$$

где R_1 — первый главный радиус кривизны меридиана. Радиус кривизны, полученный из пересечения меридиана плоскостью, перпендикулярной к этому меридиану, называется вторым главным радиусом и обозначается R_2 . Величину R_2 можно связать с радиусом параллели r , если рассмотреть прямоугольный треугольник O_2MO :

$$R_2 = \frac{r}{\sin \theta}. \quad (11.2)$$

Из рассмотрения другого прямоугольного треугольника O_3MO следует,

$$a = O_3M = \frac{r}{\cos \theta}.$$

Принимая ось вращения x и радиус параллели r за прямоугольную систему координат, можно записать

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \text{а} \quad \frac{dr}{ds} = \cos \theta. \quad (11.3)$$

Продифференцируем (11.2), предварительно разрешив его относительно r :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dR_2}{d\theta} \sin \theta + R_2 \cos \theta. \quad (11.4)$$

С другой стороны, $\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\theta}$, а если использовать (11.1) и

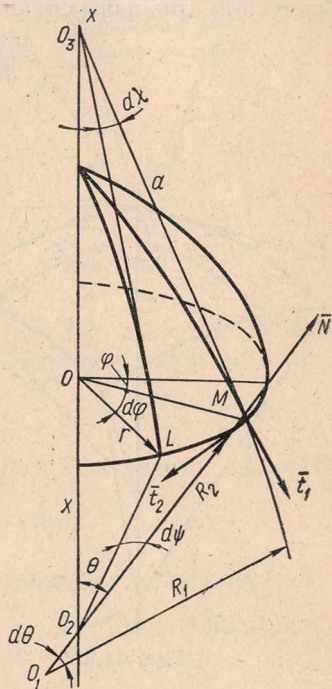


Рис. 11.3

(11.3), то

$$\frac{dr}{d\theta} = R_1 \cos \theta. \quad (11.4)$$

Решая (11.4) и (11.5) совместно, найдем связь между первым и вторым радиусами кривизны срединной поверхности:

$$\frac{dR_2}{d\theta} = (R_2 - R_1) \operatorname{ctg} \theta.$$

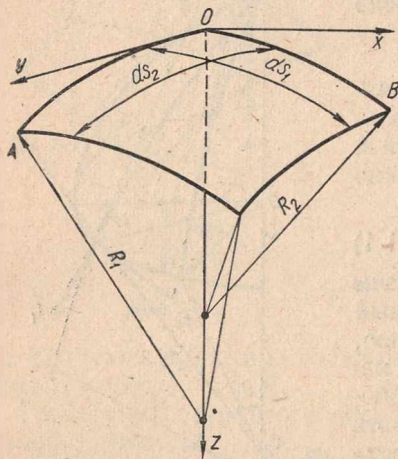


Рис. 11.4

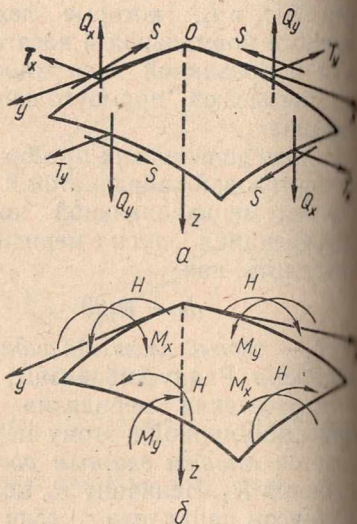


Рис. 11.5

Расстояние по дуге параллели между точками M и L равно $r d\varphi$. С другой стороны, из треугольника MO_2L та же дуга равна $R_2 d\psi$. Таким образом, $R_2 d\psi = r d\varphi$, откуда

$$d\psi = \frac{r}{R_2} d\varphi = \sin \theta d\varphi.$$

В заключение получим выражение для $d\chi$ — угла между прямыми O_3M и O_3L . Очевидно, что

$$ad\chi = r d\varphi,$$

откуда

$$d\chi = \frac{r}{a} d\varphi = \cos \theta d\varphi.$$

Рассмотрим теперь элемент оболочки, выделенный из нее двумя парами нормальных к срединной поверхности взаимно ортогональных смежных сечений, содержащих главные радиусы кривизны оболочки (рис. 11.4). Воздействия внешней нагрузки и отброшенной части оболочки уравниваются внутренними напряжениями, которые действуют по вертикальным граням элемента. Вместо этих напряжений

Введем в рассмотрение статически эквивалентные им усилия (для большей наглядности рис. 11.5 разделен на два). Свяжем с этим элементом декартову систему координат x, y, z , начало которой поместим в точке O . Оси x и y направим по касательным к линиям главных кривизн, а ось z — перпендикулярно срединной поверхности. Размеры выделенного элемента примем малыми, и это позволит считать, что при постоянном z напряжения на границах элемента также остаются постоянными. Чтобы получить зависимость между усилиями и напряжениями, необходимо прежде всего вычислить длину дуги CD (рис. 11.6), отстоящей от срединной поверхности на расстоянии z .

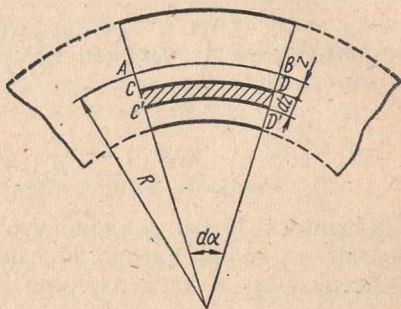


Рис. 11.6

Обозначим дугу $\widehat{AB}$ через ds , а $\widehat{CD}$ — через ds_z ; $ds = R d\alpha$, а $ds_z = (R - z) d\alpha$. Решив совместно эти два равенства, получим, что

$$ds_z = \left(1 - \frac{z}{R}\right) ds.$$

Площадь заштрихованной площадки $CDD'C'$ обозначим через dF ;

$$dF = ds_z dz = \left(1 - \frac{z}{R}\right) ds dz.$$

Продольная сила в направлении оси y с одной стороны может быть представлена как $T_y ds$, а с другой — как $\int_F \sigma_y dF$. Таким образом,

$$T_y ds = \int_F \sigma_y dF,$$

или

$$T_y ds = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{R}\right) ds dz.$$

Окончательно

$$T_y = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz.$$

Повторив подобные построения, можно записать выражения для всех усилий, показанных на рис. 11.5:

$$\text{а) } T_x = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; \quad \text{б) } T_y = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz;$$

$$\text{в) } S_{xy} = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; \quad \text{г) } S_{yx} = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz; \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} \text{д) } Q_x &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; & \text{е) } Q_y &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz; \\ \text{ж) } M_x &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; & \text{з) } M_y &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz; \\ \text{и) } H_x &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; & \text{к) } H_y &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz. \end{aligned}$$

Из формул (11.6 в, г) видно, что парность касательных напряжений не влечет за собой равенство сдвигающих сил и крутящих моментов, действующих в двух взаимно перпендикулярных сечениях. Если же пренебречь влиянием членов $\frac{z}{R_1}$ и $\frac{z}{R_2}$, которые в тонких оболочках малы по сравнению с единицей, то

$$S_{yx} = S_{xy} = S \text{ и } H_x = H_y = H.$$

Очевидно, что восемь искомых усилий из условий статики определить нельзя. Поэтому задача о расчете оболочки статически неопределима. Для решения этой задачи необходимо составить:

1. Условия равновесия статики. Следует сразу отметить, что одно из них — сумма моментов относительно оси z — в силу закона парности касательных напряжений удовлетворяется тождественно. Поэтому вместо шести уравнений для определения усилий получим лишь пять.

2. Три геометрических уравнения, устанавливающих зависимость между относительными деформациями ϵ_x , ϵ_y и γ_{xy} и составляющими вектора перемещений срединной поверхности u_0 , v_0 и w_0 . И еще три зависимости, связывающие те же перемещения u_0 , v_0 и w_0 с величинами κ_x , κ_y и θ , характеризующими изменение кривизны и кручение срединной поверхности оболочки.

3. Физические уравнения, подобные обобщенному закону Гука, которые связывают усилия (11.6) с составляющими деформации. Таких уравнений будет шесть.

Теперь имеется соответствие между числом уравнений ($5 + 3 + 3 + 6 = 17$) и числом входящих в них неизвестных: T_x , T_y , S , Q_x , Q_y , M_x , M_y , H , u_0 , v_0 , w_0 , κ_x , κ_y , θ , ϵ_x , ϵ_y , и γ_{xy} , которых тоже семнадцать. Решение такой системы при заданных граничных условиях в общем виде представляет собой значительные трудности. Поэтому, чтобы получить решение, вводят дополнительные предположения или упрощают расчетную модель.

Когда главный вектор внутренних напряжений совпадает с касательной к срединной плоскости, а главный момент равен нулю, напряженное состояние называется *безмоментным*, а напряжения, его вызвавшие, — *цепными* или *мембранными*. Обратное рассмотренному напряженному состоянию — *моментное*. Оно возникает тогда, когда главный момент отличен от нуля, а главный вектор равен нулю. Напряжения, вызвавшие моментное напряженное состояние, называется *моментными* или *изгибными*. Помимо моментного и безмоментного напря-

женных состояний может существовать смешанное напряженное состояние, где есть как безмоментные, так и моментные участки.

В чистом виде обычно ни моментное, ни безмоментное напряженные состояния не существуют. Однако в некоторых случаях можно пренебречь моментными напряжениями и рассматривать напряженное состояние как безмоментное. В других случаях, наоборот, пренебрегают цепными напряжениями и рассматривают моментное напряженное состояние. Рассмотрим отдельно каждое из этих состояний.

§ 11.2. Безмоментная теория тонких оболочек

Безмоментная оболочка, как это уже отмечалось, есть упрощенная модель реальной конструкции — оболочки — при условии, что изгибающие и крутящие моменты, а также связанные с ними поперечные силы могут не учитываться из-за их малости. Малость этих моментов и сил точно охарактеризовать трудно. Однако это не сказывается на состоятельности получаемых решений. Отсутствие изгибающих моментов обусловлено тем, что напряжения, возникающие в безмоментной оболочке, равномерно распределены по толщине ее стенки.

Безмоментная теория — наиболее простой частный случай общей теории оболочек. Эту теорию широко применяют для расчета различных инженерных объектов. Большое удобство безмоментной теории объясняется не только относительной простотой ее математического аппарата, но и тем, что она вполне удовлетворительно описывает работу тонких оболочек при достаточно широком классе внешних воздействий.

Принятая нами модель исследования неадекватна реальной системе. Но по мере уменьшения относительной толщины системы неадекватность сокращается. Происходит это потому, что изгибная жесткость пропорциональна h^3 , в то время как жесткость на растяжение (сжатие) — всего лишь первой степени h .

Безмоментное напряженное состояние осуществляется, когда выполняются следующие условия:

1. Срединная поверхность оболочки является плавно изменяющейся непрерывной поверхностью. Невыполнение этого условия влечет за собой существенное отличие деформаций в таких местах. Это, как следствие, приводит к напряжениям изгиба, имеющим, однако, локальный характер. Последнее обстоятельство часто позволяет пренебрегать изгибными напряжениями в оболочках по той причине, что местные пластические зоны не снижают общей несущей способности оболочки.

2. Неизменность или плавность изменения толщины стенки оболочки.

3. Внешнее воздействие на оболочку изменяется плавно и непрерывно.

4. Граничные условия на краю оболочки таковы, что не возникают как значительные реактивные силы в направлении нормали к срединной поверхности, так и реактивные моменты. Кинематически это означает, что края оболочки должны иметь возможность свободно поворачиваться и перемещаться в направлении нормали к срединной

поверхности. Помимо этого опорные устройства должны обеспечивать неизменяемость формы оболочки.

5. Краевые силы лежат в плоскости, касательной к срединной поверхности.

Если (вопреки сформулированным требованиям) к оболочке приложены сосредоточенные силы и моменты или имеются жесткие закрепления, усиливающие ребра и прочее, то на некотором удалении от места действия таких факторов напряжения все же можно (и достаточно точно) определить по безмоментной теории.

Наиболее важный с точки зрения конкретных инженерных применений случай — расчет оболочки вращения. Начнем с определения в ней относительных деформаций.

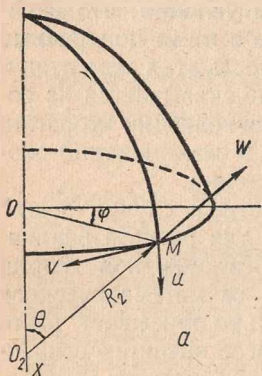
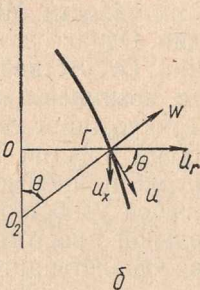


Рис. 11.7



б

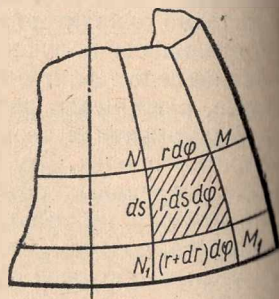


Рис. 11.8

Рассмотрим деформированную срединную поверхность оболочки (рис. 11.7). Перемещения u , v и w точки M направлены вдоль меридиана, параллели и внешней нормали соответственно (рис. 11.7, а). Обозначим перемещение вдоль оси вращения через u_x , а в направлении радиуса r , лежащего в плоскости параллели, — через u_r . Тогда (рис. 11.7, б)

$$\begin{aligned} u_x &= u \sin \theta - w \cos \theta; \\ u_r &= u \cos \theta + w \sin \theta. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Деформации оболочки будем считать, как обычно, малыми. Поэтому произведения перемещений и их степени будем опускать в уравнениях как величины высшего порядка малости.

Пересечением двух меридианов, разделенных углом $d\chi$, и двух параллелей, радиусы которых r и $r + dr$, выделим на срединной поверхности оболочки элемент MM_1N_1N (рис. 11.8). Будем полагать, что $u = u(\theta, \varphi)$; $w = w(\theta, \varphi)$; $u_x = u_x(\theta, \varphi)$; $u_r = u_r(\theta, \varphi)$; вместо переменной θ будем использовать и связанную с ней переменную s . Площадь элемента MM_1N_1N равна $rdsd\varphi$. Определим относительные перемещения ϵ_m и ϵ_φ — в направлении меридиана и параллели.

Перемещение u дуги MM_1 , равной ds , вызовет относительное удли-

рис. 11.9)

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Перемещения w также вызовут относительное удлинение дуги MM_1 . Оно будет равно $\frac{w d\theta}{R d\theta}$. Таким образом, относительная деформация

$$e_m = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right). \quad (11.8)$$

Таким же образом можно получить относительную деформацию в направлении параллели:

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u_r \right),$$

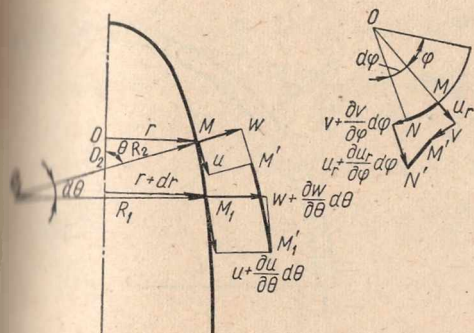


Рис. 11.9

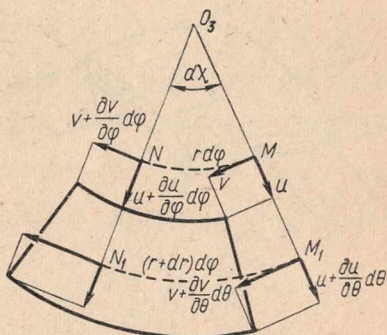


Рис. 11.10

или с учетом (11.2) и (11.7):

$$e_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2}. \quad (11.9)$$

Вычислим теперь деформацию сдвига γ , которая характеризует изменение прямого угла NMM_1 в элементе NMM_1N_1 (рис. 11.10). В дальнейших рассуждениях этот малый неплоский элемент будем полагать плоским.

Изменение угла NMM_1 от перемещения u обозначим γ_1 , от v — γ_2 . Тогда

$$\gamma_1 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi - u}{rd\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Величина γ_2 находится из следующих соображений. Перемещения отрезков MN и M_1N_1 по направлениям касательных к параллелям будут v и $v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta$. Однако разность этих перемещений еще не характеризует изменение угла NMM_1 . Элемент NMM_1N_1 вращается как твердое тело около точки O_3 , и это вращение сказывается на изменении

угла NMM_1 величиной

$$v = \frac{O_3 M_1}{O_3 M} = v \frac{a + ds}{a} = v \left(1 + \frac{ds}{a} \right) = v \left(1 + \frac{\frac{dr}{\cos \theta}}{r} \right) = v \left(1 + \frac{dr}{r} \right)$$

Таким образом, сдвиг

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta - v \left(1 + \frac{dr}{r} \right)}{ds} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} = \\ &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta. \end{aligned}$$

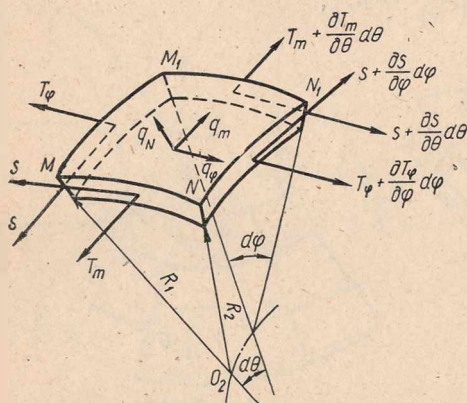


Рис. 11.11

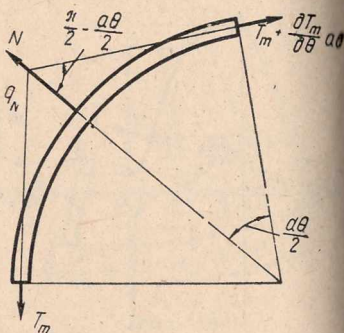


Рис. 11.12

Итак, общее изменение угла NMM_1

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta. \quad (11.10)$$

Получим теперь уравнения безмоментной теории оболочек вращения.

Безмоментное напряженное состояние в оболочке определится, если в любой ее точке известны меридиональное T_m , окружное T_φ и сдвигающие S усилия (рис. 11.11). В безмоментной теории, как это уже отмечалось, напряжения, действующие по кромкам выделенного элемента, распределяются по толщине h равномерно. Таким образом,

$$T_m = \sigma_m h; \quad T_\varphi = \sigma_\varphi h; \quad S = \tau h.$$

Здесь напряжения σ_m и σ_φ — соответственно меридиональное и окружное нормальные напряжения, а τ — касательное. Усилия T_m , T_φ и S — по смыслу погонные, они отнесены к единице длины дуги срединной поверхности.

Будем полагать, что внешняя нагрузка, которая, вообще говоря, произвольна, непрерывно распределена по поверхности оболочки. Эту нагрузку q представим в виде трех составляющих: q_N , q_m и q_φ , которые

действуют соответственно по нормали к поверхности, по касательной к меридиану и по касательной к параллели. Нагрузки q_N , q_m и q_φ отнесены к единице площади срединной поверхности.

Условия равновесия элемента NMM_1N_1 оболочки приводят к трем дифференциальным уравнениям, отвечающим трем искомым усилиям T_m , T_φ и S . Совпадение числа уравнений и усилий указывает на то, что задача об определении усилий в безмоментной оболочке статически определима. Перед составлением условий равновесия запишем некоторые геометрические соотношения, необходимые в дальнейшем (рис. 11.3; 11.8).

Площадь элемента MNN_1M_1 равна $rd\varphi ds$. Длины сторон: $MN = r d\varphi$; $M_1N_1 = (r + dr) d\varphi$; $MM_1 = NN_1 = ds$. Затем

$$\cos \chi = 1; \quad \sin \frac{d\chi}{2} = \frac{d\chi}{2}; \quad d\chi = \frac{r}{a} d\varphi;$$

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{r}{a} = \frac{dr}{ds} = \cos \theta; \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1}; \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{r}{R_2}.$$

Составим сумму проекций всех усилий на нормаль N (рис. 11.11). Силы $T_m r d\varphi$ и $\left(T_m + \frac{\partial T_m}{\partial \theta} d\theta\right) (r + dr) d\varphi$ лежат в плоскости меридиана (рис. 11.12). Спроецируем их на нормаль:

$$\begin{aligned} T_m r d\varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\theta}{2}\right) + \left(T_m + \frac{\partial T_m}{\partial \theta} d\theta\right) (r + dr) d\varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\theta}{2}\right) = \\ = T_m r d\varphi \frac{d\theta}{2} + T_m r d\varphi \frac{d\theta}{2} + \frac{\partial T_m}{\partial \theta} d\theta \cdot r d\varphi \frac{d\theta}{2} + \\ + \frac{\partial T_m}{\partial \theta} d\theta dr d\varphi \frac{d\theta}{2}. \end{aligned}$$

Опуская величины высшего порядка малости, получим

$$T_m r d\varphi d\theta.$$

Если повторить аналогичную операцию для окружных усилий, то сумму проекций всех усилий на нормаль можно представить в следующем виде:

$$T_m r d\varphi d\theta + T_\varphi ds d\varphi - q_N r ds d\varphi = 0,$$

или

$$\frac{T_m}{R_1} + \frac{T_\varphi}{R_2} = q_N. \quad (11.11)$$

Уравнение (11.11) носит название *уравнения Лапласа*. Это уравнение справедливо не только для оболочек вращения. Его можно применять в самом общем случае, если линии $\varphi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ являются главными линиями кривизны поверхности.

Спроецируем затем все силы на ось, параллельную q_m . В случае равновесия будем иметь

$$\begin{aligned} \left(T_m + \frac{\partial T_m}{\partial \theta} d\theta\right) (r + dr) d\varphi - T_m r d\varphi - T_\varphi ds \frac{d\chi}{2} - \\ - \left(T_\varphi + \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi\right) ds \frac{d\chi}{2} + \left(S + \frac{\partial S}{\partial \varphi} d\varphi\right) ds - S ds + q_m r d\varphi ds = 0. \end{aligned}$$

Проделав необходимые преобразования и опустив величины высшего порядка малости, приходим к следующему уравнению:

$$T_m \frac{dr}{ds} + r \frac{\partial T_m}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} - T_\varphi \frac{d\chi}{ds} + \frac{dS}{d\varphi} + r q_m = 0. \quad (11.12)$$

Последнее (третье) уравнение удобнее всего получить, взяв $\Sigma_{\text{мом}} O_3 = 0$ (рис. 11.3; 11.11):

$$\begin{aligned} & \left(T_\varphi + \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(a + \frac{dS}{2} \right) ds - T_\varphi \left(a + \frac{dS}{2} \right) ds + \\ & + \left(S + \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta \right) (a + ds) (r + dr) d\varphi - S a r d\varphi + \\ & + q_\varphi \left(a + \frac{dS}{2} \right) r d\varphi ds = 0. \end{aligned}$$

Преобразовывая, как и прежде, получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial S}{\partial \theta} + 2 \frac{S}{r} \cos \theta + q_\varphi = 0. \quad (11.13)$$

Уравнения (11.11) — (11.13) — искомые уравнения равновесия безмоментного напряженного состояния тонкой оболочки вращения.

Физические уравнения, связывающие относительные деформации и усилия, получим, используя обобщенный физический закон:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{\sigma_m - \nu \sigma_\varphi}{E} = \frac{T_m - \nu T_\varphi}{Eh}; \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi - \nu \sigma_m}{E} = \frac{T_\varphi - \nu T_m}{Eh}; \\ \gamma &= \frac{\tau}{G} = \frac{S}{Gh}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Характерной чертой полученной разрешающей системы уравнений (11.8) — (11.14) безмоментного состояния оболочки является то, что их можно разбить на три группы, как это делалось при выводе, и интегрировать отдельно. Так, определив усилия T_m , T_φ и S , можно найти относительные деформации, а зная последние, — перемещения.

Если граничные условия заданы в усилиях, то задача об определении усилий T_m , T_φ и S решается при помощи трех уравнений (11.11) — (11.13).

§ 11.3. Осесимметричная задача

Осесимметричная задача — частный случай безмоментного напряженного состояния оболочки вращения.

Если нагрузка, приложенная к оболочке вращения, осесимметрична, то все усилия и перемещения не зависят от угла φ и, как следствие, в разрешающих уравнениях безмоментной теории оболочек пропадут

их производные по φ . В этом случае

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_1} \frac{dT_m}{d\theta} + (T_m - T_\varphi) \frac{\cos \theta}{r} + q_m = 0; \\ & \frac{T_m}{R_1} + \frac{T_\varphi}{R_2} = q_N; \\ & \varepsilon_m = \frac{1}{R_1} \frac{du}{d\theta} + \frac{w}{R_1}; \\ & \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2} = \frac{u_r}{r}; \\ & \varepsilon_m = \frac{1}{Eh} (T_m - \nu T_\varphi); \\ & \varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh} (T_\varphi - \nu T_m), \end{aligned} \quad (11.15)$$

где $u_r = u \cos \theta + w \sin \theta$. Подставим 2-е уравнение (11.15) в 1-е и, используя ранее полученные соотношения $R_1 d\theta = ds$; $R_2 \frac{\cos \theta}{r} = \text{ctg } \theta$;

$\frac{dr}{ds} = \cos \theta$, получим

$$\frac{d(rT_m)}{d\theta} - R_1 R_2 \cos \theta \left(q_N - \frac{1}{R_1} T_m \right) + R_1 r q_\theta = 0.$$

Если умножить полученное уравнение на $\sin \theta$, то после элементарных преобразований оно приобретет вид

$$\frac{d}{d\theta} (rT_m \sin \theta) + rR_1 (q_\theta \sin \theta - q_N \cos \theta) = 0. \quad (11.16)$$

Введем обозначение

$$q_x = q_N \cos \theta - q_\theta \sin \theta. \quad (11.17)$$

Величина q_x — проекция внешней нагрузки на ось x . Проинтегрируем (11.16), произведя предварительно замену (11.17):

$$rT_m \sin \theta = \int_{s_1}^s q_x r ds + C.$$

Для того чтобы уяснить физический смысл полученного решения, умножим обе части последнего равенства на 2π :

$$2\pi r T_m \sin \theta = 2\pi \int_{s_1}^s q_x r ds + 2\pi C. \quad (11.18)$$

Судя по рис. 11.13, $T_m \sin \theta$ — вертикальная составляющая меридионального усилия T_m ; $2\pi r T_m \sin \theta$ — равнодействующая нормальных усилий на экваторе, определяемом углом θ . Рассмотрим подынтегральное выражение: $2\pi r ds$ — площадь элементарного кольца, соответствующего дуге ds , а $2\pi r q_x ds$ — вертикальная составляющая внешней нагрузки, приходящаяся на элементарное кольцо. Интеграл, стоящий в правой части, представляет собой полную вертикальную нагрузку,

действующую на боковую поверхность оболочки выше круга, присущего углу θ , для которого была определена T_m . Приведенные соображения позволяют трактовать выражение (11.18) как развернутую запись условия равновесия $\Sigma p_{rx} = 0$ для части оболочки, расположенной выше круга, соответствующего углу θ . Выясним физический смысл произвольной постоянной C . Для этого рассмотрим наиболее общий случай оболочки вращения — оболочку с отверстием (рис. 11.13). Если торцовое сечение, соответствующее отверстию, загружено равномерно распределенной нагрузкой q , то равнодействующая этой нагрузки эквивалентна вертикальной силе $2\pi b q$. Поэтому (11.18) можно переписать в следующем виде:

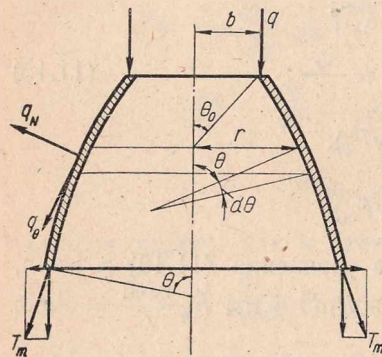


Рис. 11.13

или

$$2\pi r T_m \sin \theta = 2\pi \int_{s_1} q_x r ds + 2\pi q b,$$

$$P = P_0 + 2\pi \int_{s_1} r q_x ds,$$

(11.19)

где

$$P = 2\pi r T_m \sin \theta —$$

это продольная сила в рассматриваемом сечении оболочки, а P_0 — продольная сила, приложенная в торцовом сечении $s = s_1$.

Итак, вместо того чтобы решать совместную систему, как это было сделано ранее, проще составить результирующую всей нагрузки, действующей на часть оболочки, определяемую углом θ . Найдя таким образом составляющую T_m , из уравнения Лапласа находят другую составляющую — T_φ . Для оболочки конкретной формы найти такую результирующую нетрудно.

Меридиональное напряжение

$$\sigma_m = \frac{T_m}{h} = \frac{P}{2\pi r h \sin \theta},$$

а окружное

$$\sigma_\varphi = \frac{T_\varphi}{h} = \frac{q_N R_2}{h} - \frac{T_m}{h} \frac{R_2}{R_1} = \frac{q_N R_2}{h} - \frac{P}{2\pi r h \sin \theta} \frac{R_2}{R_1}.$$

В заключение приведем несколько примеров определения безмоментного напряженного состояния.

1. Сферическая оболочка (рис. 11.14). Нагрузка q — равномерная радиальная; $R_1 = R_2 = R$; $T_m = T_\varphi = T$ (R — радиус сферы).

Из уравнения Лапласа (11.11) непосредственно следует, что

$$T = \frac{qR}{2},$$

$$\sigma_m = \frac{qR}{2h}; \quad \sigma_\varphi = \frac{qR}{h} - \frac{qR}{2h} = \frac{qR}{2h}.$$

Таким образом, $\sigma_m = \sigma_\varphi = \sigma$, что, естественно, можно было предвидеть, не прибегая к формальным выкладкам.

2. Цилиндрическая оболочка (рис. 11.15). Нагрузка равномерно распределенной интенсивности q ; $R_1 = \infty$; $R_2 = R$ (R — радиус цилиндра).

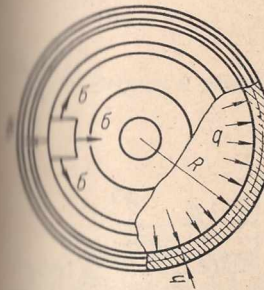


Рис. 11.14

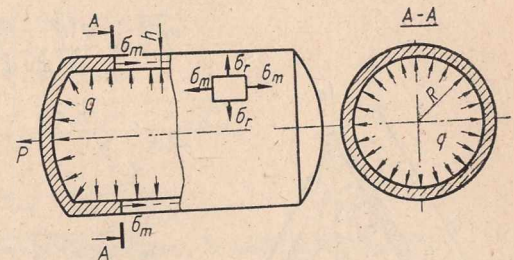


Рис. 11.15

Из уравнения Лапласа следует, что

$$T_\varphi = qR; \quad \sigma_\varphi = \frac{qR}{h}. \quad (11.20)$$

Меридиональное напряжение σ_m можно найти, рассматривая равновесие левой части рассеченной оболочки:

$$\sigma_m 2\pi R h - q\pi R^2 = 0; \quad \sigma_m = \frac{qR}{2h}. \quad (11.21)$$

3. Коническая оболочка (рис. 11.16). Нагрузка q — равномерно распределенная; $R_1 = \infty$; $R_2 = a \operatorname{tg} \alpha$.

Из уравнения Лапласа следует:

$$T_\varphi = qR_2 = qa \operatorname{tg} \alpha.$$

Уравнение равновесия позволяет записать, что

$$P - T_m 2\pi R_a \cos \alpha = 0.$$

Боковая поверхность конуса

$$F = \pi R_a a = \pi a^2 \sin \alpha.$$

Для величины боковой поверхности, можно найти осевую составляющую P :

$$P = qF \sin \alpha = qa^2 \sin^2 \alpha.$$

Подставим это значение P в уравнение равновесия и определим T_m :

$$T_m = \frac{qa^2 \sin^2 \alpha}{2\pi R_a \cos \alpha} = \frac{qa^2 \sin^2 \alpha}{2\pi a \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{qa}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Напряжения σ_ϕ и σ_m найдем, поделив T_ϕ и T_m на h :

$$\sigma_{\varphi} = \frac{qa}{h} \operatorname{tg} \alpha; \quad \sigma_m = \frac{qa}{2h} \operatorname{tg} \alpha.$$

4. Эллипсоидальная торовая оболочка (рис. 11.17). Нагрузки равномерно распределенное внутреннее давление q .

Из условия равновесия кольца AB ($\sum \text{пр} y = 0$) следует:

$$2\pi r T_m \sin \alpha = \pi q (r^2 - r_0^2).$$

Отсюда меридиональное усилие

$$T_m = \frac{q(r^2 - r_0^2)}{2r \sin \alpha}. \quad (11.22)$$

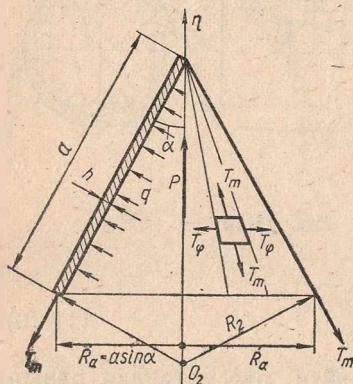


Рис. 11.16

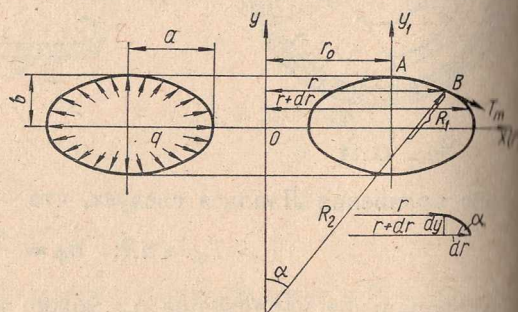


Рис. 11.17

Окружное усилие T_{Φ} найдем, подставив (11.22) в уравнение Лапласа

$$T_{\varphi} = qR_2 \left(1 - \frac{r^2 - r_0^2}{2R_1 r \sin \alpha} \right). \quad (11.23)$$

Формулы (11.22) и (11.23) удобнее использовать, когда R_1 и R_2 , а также $\sin \alpha$ выражены через r .

Известно, что

$$\frac{1}{R_I} = \frac{\frac{d^2 r}{dy^2}}{\left[1 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Из рис. 11.17

$$R_2 = \frac{r}{\sin \alpha};$$

$$\frac{dr}{dy} = -\operatorname{ctg} \alpha. \quad (11.24)$$

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы получить выражения 1-й и 2-й производных по радиусу r , входящих в выражение для R_1 , а также выражение $\sin \alpha$ через параметры тора. Уравнение эллипса

Функция $\chi_1(t)$ имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Очевидно, что в осях r и y оно преобразуется в

$$\frac{(r - r_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$r = r_0 + a \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Дифференцируя дважды по y , получим

$$\frac{dr}{dy} = - \frac{a \sqrt{a^2 - (r - r_0)^2}}{b (r - r_0)}; \quad \frac{d^2 r}{dy^2} = - \frac{a^3}{b^2 (r - r_0)^3}.$$

Если подставить эти значения производных в выражения для R_1 , R_2 и в выражение (11.24), разрешенное относительно $\sin \alpha$, то получим

$$R_1 = \frac{[(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4]^{3/2}}{a^4 b};$$

$$R_2 = \frac{r \sqrt{(b^2 - a^2) (r - r_0)^2 + a^4}}{b (r - r_0)};$$

$$\sin \alpha = \frac{b(r-r_0)}{\sqrt{(b^2-a^2)(r-r_0)^2+a^4}}.$$

Выражения для напряжений легко получить из (11.22) и (11.23), если в последние подставить значения R_1 , R_2 и $\sin \alpha$:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{q(r+r_0)}{2rbh} \sqrt{(b^2-a^2)(r-r_0)^2+a^4}; \quad (11.25)$$

$$\sigma_m = \frac{q}{2bh} \frac{2r(b^2 - a^2)(r - r_0) + a^4}{\sqrt{(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4}}$$

Для круглого тора, у которого $a = b = R$ (рис. 11.18), формулы (11.25) упростятся:

$$\sigma_s = \frac{qR}{2h} \left(1 + \frac{r_0}{r} \right); \quad \sigma_m = \frac{qR}{2h}. \quad (11.26)$$

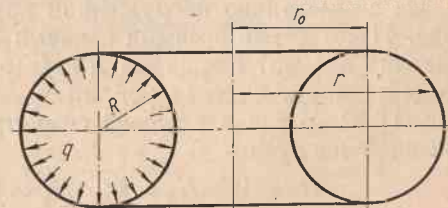


Рис. 11.18

Из формулы (11.26) как частный случай можно получить значения напряжений σ_ϕ и σ_m для сферической и цилиндрической

оболочек. Для сферы $r_0 = 0$,

$$\sigma_m = \sigma_\psi = \frac{qR}{2h}.$$

Для цилиндрической оболочки формула σ_m , не связанная с присущим ему параметром r_0 , непосредственно совпадает с ранее полученной (11.21). Для цилиндрической оболочки $r_0 \rightarrow \infty$; одновременно и $r \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r_0}{r} \right) = 2.$$

Таким образом, $\sigma_\varphi = \frac{qR}{h}$, что совпадает с (11.20).

§ 11.4. Моментная теория осесимметрично нагруженных тонких круговых цилиндрических оболочек

Осесимметричная изгибная деформация возникает в местах скачкообразного изменения сечения оболочки или внешней нагрузки, а также в местах сопряжения оболочки с другими конструкциями (рис. 11.19). В таких местах напряженное состояние уже нельзя описать безмоментной теорией. Возникает необходимость создать моментную теорию. Из-за малости толщины оболочки моментные напряжения даже

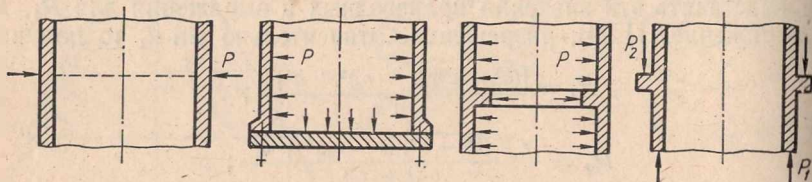


Рис. 11.19

при небольшой величине изгибающих моментов могут быть значительными. Они имеют местный характер, и поэтому для таких участков нужно суммировать напряжения от изгиба с напряжениями безмоментного состояния. Исследуя моментную теорию, сосредоточим внимание на цилиндрической оболочке, на которой легче проследить основные идеи этой теории. Простота геометрии цилиндрической оболочки предопределяет сравнительную несложность используемого математического аппарата.

Из симметрично нагруженной круговой цилиндрической оболочки (рис. 11.20) двумя осевыми и двумя нормальными к оси x сечениями выделим элемент площадью $Rd\varphi dx$ (рис. 11.21). На этот элемент будет действовать система усилий и внешних нагрузок, показанная на рис. 11.22. В связи с осевой симметрией цилиндрической оболочки и внешней нагрузки

$$Q_y = 0; \quad H_x = 0; \quad H_y = 0; \quad S_{xy} = 0; \quad S_{yx} = 0,$$

а усилия T_φ и M_x при переходе по окружности от одной грани к другой приращения не получают. Наличие симметрии влечет за собой также и то, что из шести уравнений равновесия 3 будут удовлетворяться тождественно, а 6 нетривиальным результатам приведут только следующие условия:

$$\Sigma_{\text{пр}} x = 0; \quad \Sigma_{\text{пр}} R = 0; \quad \Sigma_{\text{мом}} y = 0.$$

Разбернем последовательно эти условия:

$$(T_m + dT_m) R d\varphi - T_m R d\varphi + q_m R d\varphi dx = 0,$$

$$dT_m + q_m dx = 0; \quad (11.27)$$

$$T_m dx \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + (Q + dQ) R d\varphi - Q R d\varphi - q_N R d\varphi dx = 0.$$

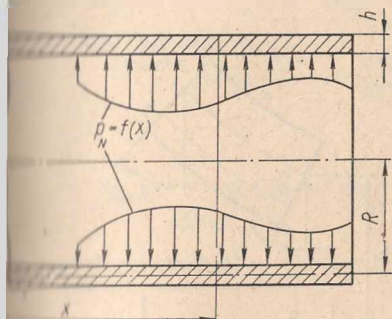


Рис. 11.20

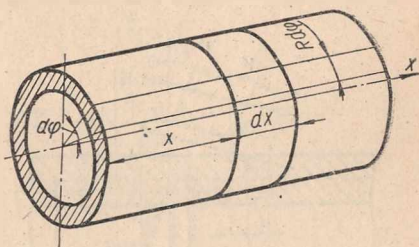


Рис. 11.21

ввиду малости углов $\sin \frac{d\varphi}{2}$ на $\frac{d\varphi}{2}$, получим

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{T_\varphi}{R} = q_N;$$

$$M_y R d\varphi - (M_y + dM_y) R d\varphi + (Q + dQ) R d\varphi dx - q_N R d\varphi dx \frac{dx}{2} = 0.$$

выбросив скобки и отбросив слагаемые высшего порядка малости, получим

$$Q = \frac{dM_y}{dx}. \quad (11.29)$$

Это уравнение совпадает с уравнением, которая была установлена в элементарной теории для стержней.

На этом заканчивается статическое обследование задачи. Заметим в заключение, что усилие T_m можно положить известным: оно легко определяется простым интегрированием из (11.27).

Обратимся к геометрической стороне задачи. Рассмотрим удлиненное волокно ab оболочки, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности (рис. 11.23). Попытаемся связать его перемещения перемещениями волокна на срединной поверхности.

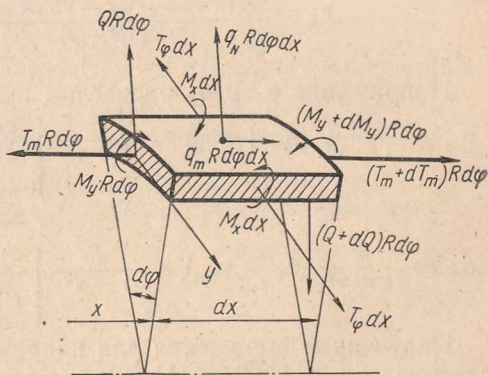


Рис. 11.22

Относительная деформация ε_m будет состоять из двух слагаемых. Первое из них $\frac{du}{dx}$ обусловлено неодинаковым смещением точек a и b в осевом направлении, второе — искривлением отрезка ab . Из сравнения отрезков aa_1 , bb_1 (рис. 11.24) следует, что это слагаемое равно $z \frac{d\theta}{dx} = z \frac{d^2w}{dx^2}$. Таким образом,

$$\varepsilon_m = \frac{du}{dx} + z \frac{d^2w}{dx^2}.$$

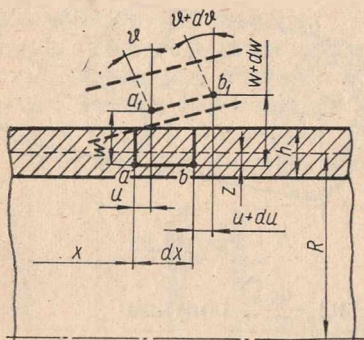


Рис. 11.23

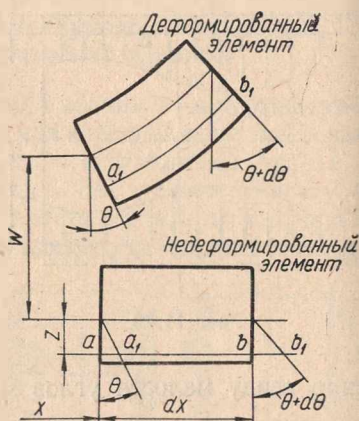


Рис. 11.24

Относительная деформация в радиальном направлении определится из сравнения длин окружностей срединной поверхности до и после деформации:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2\pi(R - z + w) - 2\pi(R - z)}{2\pi(R - z)} = \frac{w}{R\left(1 - \frac{z}{R}\right)}. \quad (11.30)$$

Напряжения σ и σ_φ определим при помощи закона Гука:

$$\sigma_m = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_m + \nu \varepsilon_\varphi) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{du}{dx} + z \frac{d^2w}{dx^2} + \nu \frac{w}{R\left(1 - \frac{z}{R}\right)} \right]; \quad (11.31)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\varphi - \nu \varepsilon_m) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{w}{R\left(1 - \frac{z}{R}\right)} + \nu \frac{du}{dx} + \nu z \frac{d^2w}{dx^2} \right].$$

Полученные выражения для напряжений подставим в (11.6), а последние — в (11.27) — (11.29):

$$T_m = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_m \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-0,5h}^{0,5h} \left(1 - \frac{z}{R}\right) \times \\ \times \left[\frac{du}{dx} + z \frac{d^2w}{dx^2} + \nu \frac{w}{R\left(1 - \frac{z}{R}\right)} \right] dz;$$

$$T_{\varphi} = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_{\varphi} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-0,5h}^{0,5h} \left(1 - \frac{z}{R}\right) \times \\ \times \left[\nu \frac{du}{dx} + \nu z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{w}{R \left(1 - \frac{z}{R}\right)} \right] dz; \quad (11.32)$$

$$M_x = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_m z \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-0,5h}^{0,5h} z \left(1 - \frac{z}{R}\right) \times \\ \times \left[\frac{du}{dx} + z \frac{d^2 w}{dx^2} + \nu \frac{w}{R \left(1 - \frac{z}{R}\right)} \right] dz;$$

$$M_y = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_{\varphi} z \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-0,5h}^{0,5h} z \left(1 - \frac{z}{R}\right) \times \\ \times \left[\nu \frac{du}{dx} + \nu z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{w}{R \left(1 - \frac{z}{R}\right)} \right] dz.$$

В силу тонкостенности оболочки членами $\frac{z}{R}$ в формулах (11.30), (11.31) и (11.32) по сравнению с единицей можно пренебречь. Отметим также, что $\frac{du}{dx}$, w и его производные не зависят от z и могут быть вынесены из-под знака интеграла. Таким образом,

$$T_m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} + \nu \frac{w}{R} \right); \\ T_{\varphi} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} \right); \\ M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nu \frac{d^2 w}{dx^2} = \nu D \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad (11.33) \\ \bar{M}_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} = D \frac{d^2 w}{dx^2},$$

где $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость.

Объединим теперь уравнения (11.28), (11.29) и первые два (11.33)

$$-\frac{d^2 M_y}{dx^2} + \frac{T_{\varphi}}{R} = q_N; \quad (11.34)$$

$$T_{\varphi} = \nu T_m + E \frac{h}{R} w. \quad (11.35)$$

Подставим в (11.34) 4-е выражение (11.33) и (11.35):

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w + \frac{\nu T_m}{R} = q_N,$$

или

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2 D} w = \frac{q_N}{D} - \nu \frac{T_m}{DR}.$$

Обозначим

$$\frac{Eh}{R^2 D} = \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R^2} = 4k^4.$$

Тогда (11.34) примет вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{q_N}{D} - \nu \frac{T_m}{DR}. \quad (11.36)$$

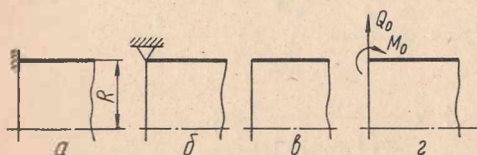


Рис. 11.25

Коэффициент k называют коэффициентом затухания перемещений. Он определяет степень затухания перемещений по мере удаления от зоны приложения усилий.

Как уже говорилось, T_m считается известным. Если же поверхностная нагрузка $q_m = 0$ (значение T_m в этом случае можно найти из условий на торцах оболочки), то (11.36) упрощается:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{q_N}{D}. \quad (11.37)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$w = w_{ч.р} + e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx), \quad (11.38)$$

где $w_{ч.р}$ — частное решение, определяемое характером распределения внешних нагрузок; C_i — произвольные постоянные.

После решения уравнения (11.37) и определения произвольных постоянных напряжения в оболочке находят по формулам (11.31), в которых из-за малости опущены члены $\frac{z}{R}$, а по формулам (11.33) — усилия.

Произвольные постоянные C_i в (11.38) определяют из граничных условий:

1. При жесткой заделке края (рис. 11.25, а)

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0.$$

2. При шарнирном опирании края (рис. 11.25, б)

$$w = 0; \quad M_y = 0, \text{ т. е. } \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

3. При свободном крае (рис. 11.25, в)

$$M_y = 0; \quad Q = 0. \quad (11.39)$$

Выражение для Q получим, подставив 4-е равенство (11.33) в (11.29):

$$Q = D \frac{d^3 w}{dx^3}.$$

Таким образом, граничные условия (11.39) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = 0. \quad (11.40)$$

4. Для края, загруженного заданными силой Q_0 и моментом M_0 (рис. 11.25, з),

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0; \quad D \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0.$$

Рассмотрим две задачи.

1. Цилиндрическая круговая длинная оболочка, нагруженная равномерно распределенной по окружности нагрузкой в сечении (рис. 11.26).

Расчетная модель соответствует, в частности, оболочке, обозначенной бандажом, кольцевым ребром, или оболочке с диафрагмой. В силу симметрии оболочки относительно начала координат можно рассматривать только ее половину.

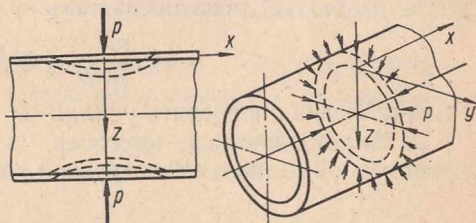


Рис. 11.26

С ростом x величины e^{-kx} и e^{kx} соответственно быстро убывают и возрастают. При больших значениях x прогиб w (11.38) незначителен:

$$w|_{x \rightarrow \infty} = e^{kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Это имеет место, если выражение в скобке равно нулю, а последнее возможно лишь в том случае, когда $C_3 = 0$ и $C_4 = 0$. Поэтому решение (11.38) упрощается так:

$$w = w_{q,p} + e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx). \quad (11.41)$$

В нашем случае распределенная нагрузка $q_N = 0$, а поэтому и $w_{q,p} = 0$. Таким образом,

$$w = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx). \quad (11.42)$$

Сформулируем граничные условия из условий симметрии:

$$1) \text{ при } x = 0 \quad \frac{dw}{dx} = 0;$$

$$2) \text{ при } x = 0 \quad Q = \frac{P}{2}.$$

Первое граничное условие приводит к одному из уравнений, которые определяют произвольные постоянные C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} &= k e^{-kx} [(C_1 - C_2) \cos kx - (C_1 + C_2) \sin kx]_{x=0} = \\ &= k (C_1 - C_2) = 0. \end{aligned} \quad (11.43)$$

Второе условие, очевидно, можно переписать так:

$$\frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} = \frac{P}{2D}.$$

Подставив сюда значение $\frac{d^3 w}{dx^3}$, получим

$$2k^3 e^{-kx} [(C_1 + C_2) \cos kx + (C_1 - C_2) \sin kx]_{x=0} = \frac{P}{2D}.$$

Окончательно

$$2k^3 (C_1 + C_2) = \frac{P}{2D}. \quad (11.43)$$

Решая совместно (11.43) и (11.44), найдем C_1 и C_2 :

$$C_1 = C_2 = \frac{P}{8k^3 D}. \quad (11.45)$$

С учетом (11.45) решение (11.42) примет вид

$$w = \frac{Pe^{-kx}}{8k^3 D} (\sin kx + \cos kx). \quad (11.46)$$

Зная w , легко определить усилия по формулам (11.33) и (11.40).

2. Цилиндрическая круговая длинная оболочка, нагруженная равномерной радиальной нагрузкой q по пояску шириной l (рис. 11.27, а)

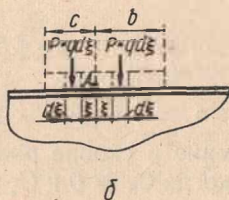
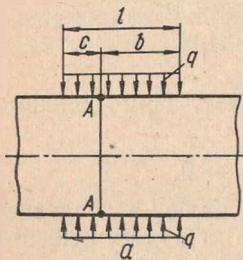


Рис. 11.27

Для решения этой задачи можно использовать результаты, полученные в предыдущей.

Будем считать, что нагрузка $q d\xi$, действующая на малой длине $d\xi$, есть погонная радиальная нагрузка P (рис. 11.27, б). Перемещения w (и ассоциированные с ними усилия) определяются интегрированием выражения (11.46),

в котором погонное усилие P заменено элементарной нагрузкой $q d\xi$. Интегрирование ведется по всей длине загруженного участка.

При вычислении перемещения в точке A (рис. 11.27, б) следует учесть нагрузку, расположенную как слева, так и справа от этой точки. Таким образом, в точке A перемещение

$$w = \frac{q}{8k^3 D} \left[\int_0^b e^{-k\xi} (\sin k\xi + \cos k\xi) d\xi + \int_0^c e^{-k\xi} (\sin k\xi + \cos k\xi) d\xi \right].$$

§ 11.5. Термоупругие напряжения в цилиндрической оболочке

Термоупругое напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины рассматривается в квазистатической постановке. При такой постановке задачи в уравнениях движения не учитываются инерционные члены.

Здесь, как и ранее, принимаются гипотезы о неизменности нормального элемента и о малости нормальных напряжений на площадках, параллельных срединной поверхности. Термоупругие напряжения в оболочке возникают вследствие неравномерного распределения температур или при закреплениях, которые не позволяют ей свободно расширяться.

Рассматриваемая теория термоупругих напряжений в оболочке ограничена следующими допущениями:

1. Материал, из которого изготовлена оболочка, термически изотропен и характеризуется одной величиной α — коэффициентом линейного теплового расширения в интервале температур $t_1 - t_2$.

2. Температура нагрева оболочки находится в том интервале $t_1 - t_2$, при котором физические и механические характеристики материала существенно изменяются по сравнению со своими обычными значениями. Будем в дальнейшем полагать, что E , ν и α остаются постоянными величинами, средними для рассматриваемого диапазона температур.

3. Температурное поле считается заданным и осесимметричным.

4. Температура в направлении радиуса изменяется по линейному закону

$$t = t_0 + \frac{z}{h} \Delta t,$$

где $t_0 = \frac{1}{2}(t^+ + t^-)$, а $\Delta t = t^+ - t^-$; t^+ — температура на наружной поверхности ($z = 0,5h$); t^- — температура на внутренней поверхности оболочки ($z = -0,5h$).

Учитывая линейный характер рассматриваемых задач, отметим, что полное напряжение от действия внешних сил и нагрева можно получить суммированием этих двух видов напряжений. Вывод основного разрешающего уравнения моментной теории для цилиндрической оболочки, находящейся в температурном поле, подобен выводу, приведенному в предыдущем параграфе, и поэтому здесь приведен не будет. Разница заключается лишь в том, что соотношения упругости, определяемые обобщенным законом Гука, несут в себе дополнительно температурные слагаемые.

Не вдаваясь в подробности вывода, приведем значения для напряжений и усилий в случае температурного воздействия на тонкостенную оболочку [см. (11.31), (11.33), (11.35), (11.29) и (11.36)]:

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dx} + z \frac{d^2w}{dx^2} + \nu \frac{w}{R} - (1+\nu)\alpha t \right]; \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{du}{dx} + \nu z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{w}{R} - (1-\nu)\alpha t \right]; \\ T_m &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dx} + \nu \frac{w}{R} - (1+\nu)\alpha t_0 \right]; \\ T_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} - (1+\nu)\alpha t_0 \right]; \\ M_x &= D \left[\nu \frac{d^2w}{dx^2} - (1+\nu)\alpha \frac{\Delta t}{h} \right]; \\ M_y &= D \left[\frac{d^2w}{dx^2} - (1+\nu)\alpha \frac{\Delta t}{h} \right]; \\ T_\varphi &= \nu T_m + \frac{Eh}{R} w - Eh\alpha t_0;\end{aligned}\tag{11.47}$$

$$Q = \frac{dM_g}{dx} = D \left[\frac{d^3 w}{dx^3} - (1 + \nu) \frac{\alpha}{h} \frac{d(\Delta t)}{dx} \right];$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{q_N}{D} - \nu \frac{T_m}{DR} - \frac{Eh\alpha t_0}{DR} + \frac{(1 + \nu)\alpha}{h} \frac{d^2(\Delta t)}{dx^2}.$$

Остановимся далее на определении функции w из последнего уравнения (11.47).

Ограничим круг рассматриваемых задач длинной цилиндрической оболочкой, у которой закон изменения давления и температуры задается полиномом степени не выше третьей, с тем чтобы

$$\frac{d^4 q}{dx^4} = 0; \quad \frac{d^4 t_0}{dx^4} = 0 \text{ и } \frac{d^2 \Delta t}{dx^2} = 0. \quad (11.48)$$

Такое ограничение на характер изменения давления и температуры вполне приемлемо с точки зрения практических приложений. С учетом сказанного решение w будет иметь вид

$$w(x) = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) +$$

$$+ e^{kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) - \frac{qR^2}{Eh} \left(1 - \nu \frac{T_m}{qR} \right) - \alpha R t_0. \quad (11.49)$$

Последние два слагаемых есть не что иное, как $w_{ч.р}$ при ограничениях (11.48). В справедливости решения (11.49) легко убедиться прямой постановкой его в последнее уравнение (11.47).

Для длинной оболочки, находящейся в зоне повышенных температур, справедливы соображения, высказанные при выводе (11.41), (11.42). С учетом последних выражение (11.49) существенно упростится:

$$w(x) = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) - \frac{qR^2}{Eh} \left(1 - \nu \frac{T_m}{qR} \right) - \alpha R t_0.$$

Часть II

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Глава 12

СОВРЕМЕННЫЙ АППАРАТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 12.1. Приближения функций

Появление быстродействующих электронных вычислительных машин (ЭВМ), давших толчок к разработке методов доведения математических исследований до числового результата, и возросшие требования к достоверности прогнозов поведения конструкции в сложных условиях эксплуатации сделали подход к решению прикладных задач с позиций теории упругости явлением повсеместным. В корне изменился смысл термина «инженерное решение». От инженера теперь требуется не только глубоко понимать физику явления, но и владеть современным аппаратом вычислительной математики.

Представим себе, что при решении задачи в качестве исходной информации имеется некоторая функция $f(x)$, заданная таблицей значений для конечного числа точек: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. В процессе вычислений могут, например, потребоваться значения $f(x)$ в промежуточных точках, величина $f'(x)$ или $\int_a^x f(x) dx$. В подобных ситуациях строят аналитическую модель функции $f(x)$, с помощью которой и вычисляют приближенные значения нужных величин. Приближенное представление функции $f(x)$ необходимо или целесообразно и в том случае, когда для функции известно ее аналитическое выражение, например, если $\int f(x) dx$ не удастся выразить через элементарные функции или вычисление каждого значения $f(x)$ сопряжено с большими затратами времени. Наконец, вычисление элементарных функций $\sin x$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ и т. д. просто невысказимо без применения приближенных формул. Таким образом, приближенное представление функции путем замены ее другой, более простой аналитической моделью — типичная процедура при решении задач на ЭВМ.

Одним из способов аппроксимации функции является интерполирование. Сущность этой операции заключается в следующем. Для функции, заданной на отрезке (a, b) рядом значений $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$, строится интерполирующая функция $\varphi(x)$, принадлежащая известному классу, такая что

$$\varphi(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (12.1)$$

Наиболее простым классом функций, как известно, являются полиномы. Поскольку через $n + 1$ точку можно провести только один полином n -й степени, для сформулированной задачи интерполирующая функция в виде

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (12.1)$$

будет единственным полиномом, совпадающим в узлах интерполиции x_i с интерполируемой функцией при любой системе значений $f(x_i)$. При этом коэффициенты a_k однозначно определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n a_k x_i^k = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (12.2)$$

Следует отметить, что существуют явные формы записи интерполирующего многочлена (12.2), не требующие решения системы (12.3). К ним относится интерполяционная формула Лагранжа

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} f(x_0) + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} f(x_1) + \dots \\ & \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} f(x_n) \end{aligned} \quad (12.3)$$

и близкие к ней по структуре формулы Ньютона, Гаусса, Бесселя, Стирлинга и т. д. [7]. Однако при решении задач на ЭВМ бывает целесообразно, однажды определив коэффициенты a_k из системы (12.3), в дальнейшем оперировать с полиномом вида (12.2), используя для вычисления функции $\varphi(x)$ и ее производных следующие рекуррентные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= P_{n+1}^{(0)}, \text{ где } P_{i+1}^{(0)} = P_i^{(0)}x + a_{n-i} \text{ при } P_0^{(0)} = 0; \\ \frac{d\varphi(x)}{dx} &= P_n^{(1)}, \text{ где } P_{i+1}^{(1)} = P_i^{(1)}x + P_{i+1}^{(0)} \text{ при } P_0^{(1)} = 0; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^k\varphi(x)}{dx^k} &= k! P_{n+1-k}^{(k)}, \text{ где } P_{i+1}^{(k)} = P_i^{(k)}x + P_{i+1}^{(k-1)} \text{ при } P_0^{(k)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Первая строка формул (12.5) — обычная схема Горнера. Остальные ее обобщают.

Исходная информация в виде таблиц, как правило, представляет собой результат наблюдений и, естественно, подвержена случайным ошибкам. Поэтому интерполяционная функция, подчиненная условиям (12.1), может исказить истинный характер поведения функции. Значительные погрешности могут иметь место также в межузловом пространстве при аналитическом описании больших экспериментальных массивов многочленом высокой степени. В этих случаях для построения аппроксимирующего полинома можно отказаться от «точного» выпол-

ния условий (12.1) и потребовать, чтобы величина

$$F = \sum_{i=0}^m [\varphi(x_i) - f(x_i)]^2$$

квадратичного отклонения полинома $\varphi(x)$ от данной функции была минимальна. Тогда коэффициенты полинома $\varphi(x)$ определяются из условий

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n \leq m),$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0}^m [a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - f(x_i)] \cdot 1 = 0; \quad (12.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=0}^m [a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - f(x_i)] x_i = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_n} = 2 \sum_{i=0}^m [a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - f(x_i)] x_i^n = 0.$$

Нетрудно заметить, что при $n = m$ условия (12.1) и (12.6) эквивалентны. Следовательно, описанный только что способ наименьших квадратов в частном случае охватывает процесс интерполирования.

Следует отметить, что применение таких глобальных способов интерполяции иногда приводит к интерполяционному многочлену высокой степени. Это может оказать влияние на точность и, кроме того, не всегда рационально с точки зрения численной реализации. В связи с этим на практике часто применяют методы локальной интерполяции, среди которых наиболее перспективен метод *сплайн-аппроксимации* [2].

Для вычерчивания плавных кривых в чертежной практике издавна пользовались длинными гибкими рейками (сплайнми) с подвешенными на них грузами. Варьируя величину груза и его положение, можно добиться, чтобы рейка проходила через заданную систему точек. Этот физический прием навел на мысль об использовании аналитических структур, подобных уравнению изогнутой балки, для приближенного представления функции.

Известно, что если упругая и невесомая балка загружена (как и рейка чертежника) системой сосредоточенных сил, то изгибающий момент $M(x)$ представляет собой непрерывную ломаную линию, которая между точками приложения сил изменяется по линейному закону

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} = a_i x + b_i,$$

а деформированная ось балки на каждом i -м участке описывается, вообще говоря, различными кусками кубических парабол. По аналогии с этим в методах *сплайн-аппроксимации* исходную функцию заменяют кусочно-полиномиальным многозвенником, называемым в американской литературе *spline-функцией*. К простейшим и хорошо изученным сплайн-функциям относится кубический сплайн.

Для аппроксимации функции $f(x)$ кубическим сплайном $F(x)$ на отрезке (x_{i-1}, x_i) будем исходить из линейной формы для второй производной сплайна:

$$\frac{d^2 F_i}{dx^2} = z \varphi_i + (1 - z) \varphi_{i-1}, \quad (12.7)$$

где φ_{i-1}, φ_i — пока неизвестные значения вторых производных сплайна в узлах x_{i-1}, x_i соответственно;

$$z = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{\lambda_i}.$$

Интегрируя (12.7) в пределах отрезка (x_{i-1}, x_i) , получим выражение для производной сплайна:

$$\frac{dF_i}{dx} = \lambda_i \int_0^z \left(\frac{d^2 F_i}{dx^2} \right) dz + C_i = \lambda_i \left[\frac{z^2}{2} \varphi_i + \left(z - \frac{z^2}{2} \right) \varphi_{i-1} \right] + C_i. \quad (12.8)$$

После интегрирования (12.8) будем иметь выражение для кубического сплайна:

$$F_i(z) = \lambda_i \int_0^z \left(\frac{dF_i}{dx} \right) dz + D_i = \lambda_i^2 \left[\frac{z^3}{6} \varphi_i + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \varphi_{i-1} \right] + \lambda_i C_i z + D_i. \quad (12.9)$$

Так как в узлах интерполяции значения сплайна и исходной функции должны совпадать, то имеем два условия для определения произвольных постоянных C_i и D_i :

$$F_i(0) = f_{i-1}; \quad F_i(1) = f_i. \quad (12.10)$$

Первое условие (12.10) дает

$$D_i = f_{i-1},$$

а из второго получаем

$$C_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i} - \lambda_i \left(\frac{\varphi_i}{6} + \frac{\varphi_{i-1}}{3} \right). \quad (12.11)$$

Для определения вторых производных φ_i в узловых точках подчиним сплайны стыковке по первой производной, т. е.

$$\left(\frac{dF_i}{dx} \right)_{z=1} = \left(\frac{dF_{i+1}}{dx} \right)_{z=0},$$

откуда

$$\lambda_i \left(\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \right) + C_i = C_{i+1}. \quad (12.12)$$

Теперь, используя выражения (12.11) и (12.12), приходим к рекуррентным соотношениям для $\varphi_{i-1}, \varphi_i, \varphi_{i+1}$:

$$\lambda_i \varphi_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) \varphi_i + \lambda_{i+1} \varphi_{i+1} = \frac{6(f_{i+1} - f_i)}{\lambda_{i+1}} - \frac{6(f_i - f_{i-1})}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (12.13)$$

Чтобы получить систему $n + 1$ уравнения с $n + 1$ неизвестным, к системе (12.13) необходимо добавить еще два условия. Такими условиями могут быть, например,

$$\begin{aligned}\frac{dF_i}{dx} &= \frac{df(x_i)}{dx} \quad (i = 0, n); \\ \frac{d^2F_i}{dx^2} &= \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} \quad (i = 0, n).\end{aligned}\tag{12.13a}$$

Решение системы (12.13) с условиями типа (12.13a) однозначно определит кубический сплайн (12.9), который, аппроксимируя $f(x)$ на том участке, будет стыковаться со смежными сплайнами до вторых производных включительно.

В тех случаях, когда нет конкретной информации о производных функции $f(x)$, полагают $\varphi_0 = \varphi_n = 0$, что соответствует аналитическому продолжению $f(x)$ за пределы интервала в виде прямых, касающихся $f(x)$ в крайних узлах x_0 и x_n . Тогда остальные $n - 1$ неизвестные полностью определяются из линейной системы алгебраических уравнений (12.13). Если при этом интервал разбить на равные части $h = x_i - x_{i-1}$, то матрица коэффициентов системы (12.13) примет стандартный вид, а кубический сплайн будет полностью определяться только через значения $f(x)$ в узловых точках. В самом деле, после подстановки C_i, D_i и $\chi_i = \frac{h^2}{6} \varphi_i$ в (12.9) получим, что сплайн

$$F_i(z) = z(z-1)[(z-1)\chi_i - (z-2)\chi_{i-1}] + z(f_i - f_{i-1}) + f_{i-1}$$

и система уравнений

$$\chi_{i-1} + 4\chi_i + \chi_{i+1} = f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

не содержат явно величину h .

§ 12.2. Численное дифференцирование и интегрирование

Подавляющее большинство методов решения задач включают операции дифференцирования и интегрирования. Однако при численной реализации метода на ЭВМ не всегда можно применить точные методы дифференциального и интегрального исчисления. Чаще приходится прибегать к численным способам.

Для получения производной используется аналитическое (чаще полиномиальное) представление исходной функции $f(x)$ по какой-нибудь интерполяционной формуле, которую затем дифференцируют обычным путем необходимое число раз. Это особенно просто осуществить для интерполяционного многочлена, приведенного к виду (12.2). Если при этом для получения числовых значений функции и ее производных используется алгоритм (12.5), то отпадает необходимость получать конкретные аналитические выражения для производных.

Во избежание большой погрешности, возможной при глобальной интерполяции, для вычисления производных, как и для вычисления функции, сужают интервал интерполяции, добиваясь понижения степени интерполяционного многочлена без ущерба для точности. Как

уже отмечалось, эти цели преследует и метод сплайн-аппроксимации, так что выражение для производной кубического сплайна (12.8) следует рассматривать как разновидность формул приближенного дифференцирования.

Выражение производной, полученное при помощи интерполяционного многочлена, значительно упрощается в узлах интерполяции, если эти узлы делят интервал (a, b) на равные части $h = \frac{b-a}{n}$. Некоторые из них, часто употребляемые в счете, здесь приводятся. Например, при параболической интерполяции функции $(n=2)$ ее производная в узлах интервала выражается формулами [7]

$$y'_0 = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 + y_2);$$

$$y'_1 = \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2);$$

$$y'_2 = \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2),$$

или более компактно — в матричной форме численного дифференцирования:

$$Y' = D_2 Y; \quad D_2 = \frac{1}{2h} \begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для интерполяционного многочлена третьей степени $(n=3)$ производная вычисляется по аналогичной схеме:

$$\begin{vmatrix} y'_0 \\ y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{vmatrix} = Y' = D_3 Y; \quad D_3 = \frac{1}{6h} \begin{vmatrix} -11 & 18 & -9 & 2 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & 2 \\ -2 & 9 & -18 & 11 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, если нас устраивает интерполяция функции полиномом n -й степени, столбец значений производной Y' $(y'_0, y'_1, \dots, y'_n)$ получается в результате умножения матрицы D_n на вектор Y $(y_0, y_1, \dots, y_n)$:

$$Y' = D_n Y. \quad (12.14)$$

Процедура (12.14) может быть использована и для вычисления узловых значений производной более высокого порядка. Достаточно обратиться к ней нужное число раз:

$$Y' = D_n Y;$$

$$Y'' = D_n Y' = D_n^2 Y;$$

$$Y^{(k)} = D_n Y^{(k-1)} = \dots = D_n^k Y$$

получить однажды матрицу D_n^k , которая, кстати, обладает следующими свойствами:

$$Y^{(n)} = D_n^n Y = \text{const};$$

$$D_n^{n+1} = 0.$$

Необходимо заметить, что зависимости вида (12.14) служат не только для получения числовых значений производных. В некоторых численных методах они используются для замены производной ординатами еще неизвестной функции.

Идея интерполирования лежит и в основе приближенного интегрирования. При этом вычислительная процедура сводится к квадратурной формуле вида

$$\sum_{k=0}^n c_k f(x_k), \quad (12.15)$$

где $f(x_k)$ — значения подынтегральной функции в узлах интерполяционного интервала (a, b) ; c_k — квадратурные коэффициенты.

Пусть известны ординаты $f(x_0) = f_0$; $f(x_1) = f_1$; $f(x_2) = f_2$ на интервале (a, b) и требуется приближенно вычислить

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (12.16)$$

Для аналитического представления этой функции воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа

$$f(x) \approx \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2. \quad (12.17)$$

Подставив (12.17) в (12.16), после замены переменной $x = a + (b-a)z$ получим

$$\begin{aligned} I &= (b-a) \int_0^1 f(x) dz \approx (b-a) \left[f_0 \int_0^1 \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} dz + \right. \\ &\quad \left. + f_1 \int_0^1 \frac{(z-z_0)(z-z_2)}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)} dz + f_2 \int_0^1 \frac{(z-z_0)(z-z_1)}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)} dz \right] = \\ &= (b-a) \sum_{k=0}^2 c_k f(x_k). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Из (12.18) видно, что квадратурные коэффициенты c_k не зависят от промежутка интегрирования и для конкретного распределения узлов интерполирования являются константами. В частном случае, когда интервал интегрирования разбивается на равные части $(z_0=0; z_1=0,5; z_2=1)$, из (12.18) вытекает известная формула Симпсона

$$I \approx (b-a) \left(\frac{1}{6} f_0 + \frac{4}{6} f_1 + \frac{1}{6} f_2 \right) = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2).$$

Заменяя подынтегральную функцию в (12.16) полиномом более высокой степени, можно получить различные наборы квадратурных коэффициентов, обеспечивающих точные значения интеграла от полиномов, степень которых, по крайней мере, не превышает степени интерполирующего многочлена. Например, для равноотстоящих узлов $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) такие коэффициенты получены Котесом. Среди них квадратурные коэффициенты Симпсона ($n = 2$) обладают повышенной точностью — они точны и для полиномов третьей степени.

Как уже отмечалось, каждому распределению узлов интерполяции соответствует свой набор квадратурных коэффициентов. Оказывается (это доказал Гаусс), существует такое расположение узлов, при котором квадратурные формулы точны для полиномов степени $2n + 1$ включительно (n — степень интерполирующего полинома). Например, для квадратичной интерполяции по Гауссу такими узлами будут $z_0 = 0,5 - \sqrt{0,15}$; $z_1 = 0,5$; $z_2 = 0,5 + \sqrt{0,15}$. Квадратурные коэффициенты Гаусса можно получить, воспользовавшись их выражением из (12.18):

$$c_0 = \int_0^1 \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} dz = \frac{5}{18}; \quad c_1 = \int_0^1 \frac{(z - z_0)(z - z_2)}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)} dz = \frac{4}{9};$$

$$c_2 = \int_0^1 \frac{(z - z_0)(z - z_1)}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)} dz = \frac{5}{18}.$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что по трехузловой квадратурной формуле Гаусса интегралы от полиномов до 5-й степени включительно вычисляются точно. Непосредственная подстановка z_0, z_1, z_2 дает равенство для $k = 0, 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} \frac{5}{18} (0,5 - \sqrt{0,15})^k + \frac{4}{9} (0,5)^k + \frac{5}{18} (0,5 + \sqrt{0,15})^k = \\ = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dk. \end{aligned}$$

Необходимо иметь в виду, что повышенная точность квадратурных формул Гаусса имеет смысл для подынтегральной функции в виде полинома. Для других классов функций результат всегда будет приближенным, так что может представиться случай, когда «менее» точные формулы могут дать более точный результат. Для некоторых узких классов функций ошибку, возникающую при этом, можно оценить, располагая величинами производных высоких порядков от подынтегральной функции. Однако такой метод применяется чрезвычайно редко. На практике выбору конкретной квадратурной формулы обычно предшествует численный эксперимент, по результатам которого и определяется необходимое число узлов, выясняется качество той или иной квадратуры.

Метод прогонки. С методом Гаусса тесно связан метод, разработанный специально для систем с ленточными матрицами. Вычислительная схема метода устойчива к ошибкам округления и удобна для машинной реализации. Рассмотрим типичную систему уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$a_k u_{k-1} + b_k u_k + c_k u_{k+1} = f_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (12.24)$$

ограниченную краевыми связями

$$\begin{aligned} a_0 u_0 + a_1 u_1 &= A; \\ b_0 u_{n-1} + b_1 u_n &= B. \end{aligned} \quad (12.25)$$

Такие системы возникают при построении сплайн-функций и при решении различных задач разностными методами.

Алгоритмической основой метода являются рекуррентные соотношения вида

$$u_k = M_k + N_k u_{k+1}, \quad (12.26)$$

которые получаются из (12.24) после исключения неизвестной u_{k-1} . Делается это следующим образом. Выражение

$$u_{k-1} = M_{k-1} + N_{k-1} u_k,$$

полученное на основании (12.26), подставляется в уравнение (12.24), откуда сразу следует рекуррентная связь между u_k и u_{k+1} :

$$u_k = \frac{f_k - a_k M_{k-1}}{a_k N_{k-1} + b_k} - \frac{c_k}{a_k N_{k-1} + b_k} u_{k+1}. \quad (12.27)$$

Сопоставляя выражения (12.26) и (12.27), получаем рекуррентные зависимости и для коэффициентов M_k , N_k :

$$M_k = \frac{f_k - a_k M_{k-1}}{a_k N_{k-1} + b_k}; \quad N_k = -\frac{c_k}{a_k N_{k-1} + b_k}. \quad (12.28)$$

Легко показать, что начальные значения коэффициентов M_0 и N_0 однозначно определяются из первого условия (12.25), записанного в форме (12.26):

$$u_0 = \frac{A}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} u_1,$$

откуда

$$M_0 = \frac{A}{a_0}; \quad N_0 = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Таким образом, формулы (12.28) дают возможность последовательно вычислить все M_k и N_k вплоть до $k = n-1$. При известных M_{n-1} и N_{n-1} уравнение (12.26) для $k = n-1$

$$u_{n-1} - N_{n-1} u_n = M_{n-1}$$

совместно со 2-м уравнением (12.25)

$$b_0 u_{n-1} + b_1 u_n = B$$

позволяют определить неизвестные u_n и u_{n-1} . После этого, пользуясь (12.26) и вычисленными значениями M_k и N_k , без труда находят остальные неизвестные в обратном порядке.

Метод квадратного корня. Многие численные методы решения задач теории упругости порождают системы ЛАУ с симметричными матрицами. Учет этого при разработке алгоритма позволяет, по крайней мере, сократить объем памяти, занимаемый коэффициентами системы. При этом можно воспользоваться методом Гаусса, однако с ним успешно конкурирует метод, опирающийся в своей основе на симметрию матрицы. Как известно, симметричная матрица допускает представление

$$A = S'S, \quad (12.29)$$

где S и S' — транспонированные друг к другу треугольные матрицы. При этом

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

а связь между элементами матриц A и S определяется правилом умножения матриц:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i s_{ki}s_{kj}. \quad (12.30)$$

С введением матриц S и S' исходную систему $Ax = b$ можно записать в виде двух последовательно решаемых систем:

$$\left. \begin{aligned} S'y &= b; \\ S'x &= y. \end{aligned} \right\} \quad (12.31)$$

Элементы промежуточного вектора неизвестных y ($y_1, y_2, \dots, y_n$) в первом равенстве (12.31) определяются правилом умножения матрицы на столбец:

$$b_i = \sum_{k=1}^i s_{ki}y_k. \quad (12.32)$$

Обычный путь реализации метода состоит в том, что вначале (прямой ход) вычисляют элементы треугольной матрицы S и вектора y . Формулы для их получения вытекают непосредственно из выражений (12.30) и (12.32):

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \sqrt{a_{11}}; \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}; \quad y_1 = \frac{b_1}{s_{11}}; \\ s_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2}; \quad s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}s_{kj}}{s_{ii}}; \\ y_i &= \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}y_k}{s_{ii}} \quad (j \geq i = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

Получно можно вычислять определитель матрицы A , равный произведению диагональных элементов матриц S и S' :

$$\Delta = \prod_{l=1}^n s_{ll}^2.$$

Затем (обратный ход) из второго равенства (12.31) при условии, что элементы s_{ij} и y_i уже известны, определяют компоненты решения обратной последовательности:

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}; \quad x_t = \frac{y_t - \sum_{k=t+1}^n s_{tk} x_k}{s_{tt}} \quad (t = n-1, n-2, \dots, 1). \quad (12.34)$$

Следует отметить, что в зависимости от особенностей задачи и возможностей ЭВМ на основе полученных формул могут быть построены различные модификации вычислительной схемы метода. В частности, можно обобщить метод на случай системы с несколькими правыми частями, то, избегая процедуры обращения и умножения, матрицу

$$X = A^{-1}B$$

можно получить как результат решения системы

$$AX = B,$$

где B — произвольная матрица. Для этого вместо выражений y_1 и y_l в (12.33) должны использоваться формулы соответственно

$$y_{1l} = \frac{b_{1l}}{s_{11}}; \quad y_{ll} = \frac{b_{ll} - \sum_{k=1}^{l-1} s_{kl} y_{kl}}{s_{ll}} \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

а вместо x_n и x_t в (12.34) — соответственно

$$x_{nt} = \frac{y_{nt}}{s_{nn}}; \quad x_{tl} = \frac{y_{tl} - \sum_{k=t+1}^n s_{tk} s_{kl}}{s_{tt}}, \quad t = n-1, n-2, \dots, 1; \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Для случая, когда нет уверенности в том, что матрица A положительно-определенная, приводим вариант вычислительной схемы метода, учитывающий возможность появления отрицательных элементов на диагонали, т. е. $s_{ii}^2 < 0$:

1. Допустим $i = 1$; $\Delta = 1$;

2. Вычислим $r = \sqrt{|a_{ii}|}$; $\Delta = \Delta a_{ii}$;

$$a_{ij} = a_{ij} : r \quad (j = i, i+1, \dots, n);$$

$$b_{ik} = b_{ik} : r \quad (k = 1, 2, \dots, m);$$

3. Если $i = n$, идти к 9
4. Вставим $i = i + 1$; $t = 1$;
5. Вычислим $c = a_{ii} \operatorname{sign} a_{ii}$;

$$a_{ij} = a_{ij} - ca_{ij} \quad (j = i, i + 1, \dots, n);$$

$$b_{ik} = b_{ik} - cb_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, m);$$

6. Вставим $t = t + 1$;
 7. Если $t < i - 1$, идти к 5
 8. Исполним 2
 9. Вычислим $b_{ik} = b_{ik} : a_{ii} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$;
 10. Если $i = 1$, идти к 16
 11. Вставим $t = i$; $i = i - 1$;
 12. Вычислим $b_{ik} = b_{ik} - a_{ii}b_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$;
 13. Вставим $t = t + 1$;
 14. Если $t - 1 < n$, идти к 12
 15. Исполним 9
 16. Конец решения
- Если задача сводится к итеративному процессу вида

$$Ax_{k+1} = b(x_k), \quad (12.35)$$

то для экономии машинного времени преобразование исходной матрицы в треугольную осуществляют один раз на первой итерации. При наличии треугольной матрицы S решение системы (12.35) с новой правой частью равносильно умножению матрицы на столбец, т. е. матрица S как бы играет роль обратной матрицы.

Метод квадратного корня успешно используется при решении систем ЛАУ с ленточными матрицами, порядки которых часто достигают нескольких тысяч. При этом используется, во-первых, свойство метода сохранять первоначальную структуру уравнений при переходе к треугольной матрице; во-вторых, вычислительный процесс видоизменяется таким образом, что информация от сформированных строк матрицы S , необходимая для элементов последующих строк, постепенно накапливается в специально отведенном массиве оперативной памяти ЭВМ. Стандартной программе, выполненной по такой схеме в кодах ЭВМ типа М-222, под силу решение систем ЛАУ с порядком $n \leq 4095$ и шириной полуленты матрицы $L \leq 90$.

Глава 13

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

§ 13.1. Метод Ритца

Как уже было показано (гл. 9), из вариационного уравнения равновесия упругого тела можно получить дифференциальные уравнения и граничные условия рассматриваемых в теории упругости краевых задач. С точки зрения вариационного исчисления эти соотношения являются уравнениями Эйлера для функционала полной потенциальной энергии упругой системы. В 1909 г. Ритц предложил метод реше-

или общей задачи об экстремуме функционала, после чего труднейшие задачи с уравнениями в частных производных стали поддаваться решению.

Допустим, что задан функционал

$$I(w) = \iint_s L(x, y, w, \dot{w}_x, \dot{w}_y, \ddot{w}_{xx}, \dots) ds \quad (13.1)$$

и требуется подобрать функцию $w = w(x, y)$, удовлетворяющую заданным граничным условиям, так чтобы функционал $I(w)$ принимал экстремальное значение. Эту вариационную задачу Ритц предложил решать непосредственно, т. е. не сводить к дифференциальным уравнениям Эйлера, а прямо минимизировать функционал $I(w)$.

Искомая функция в методе Ритца задается в виде ряда

$$w(x, y) \approx \tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x, y) = \tilde{w}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x, y),$$

где так называемые *координатные функции* $w_i(x, y)$ должны быть линейно-независимыми и такими, чтобы $w(x, y)$ удовлетворяла заданным граничным условиям при любых значениях произвольных параметров α_i . После подстановки выбранной функции $\tilde{w}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x, y)$ и ее производных в функционал (13.1), выполнив интегрирование по области s , получим некоторую функцию от параметров α_i :

$$I = I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Для того чтобы эта функция принимала экстремальное значение, очевидно, необходимо

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (13.2)$$

Таким образом, Ритц сводит вариационную задачу (13.1) к задаче (13.2) на разыскание экстремума функции многих переменных.

С позиций вариационного исчисления условия (13.2) являются необходимыми для равенства нулю первой вариации функционала:

$$\delta I = \sum \frac{\partial I}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = 0.$$

В силу произвольности вариаций $\delta \alpha_i$ это возможно только тогда, когда коэффициент при каждой из вариаций $\delta \alpha_i$ обращается в нуль. Поэтому вновь приходим к условиям (13.2).

Найденные из системы (13.2) параметры полностью определяют приближенное решение $w(x, y)$ поставленной задачи.

Вариационный принцип равновесия упругого тела выражается условием равенства нулю вариации полной потенциальной энергии:

$$\delta I = \delta(U - A) = 0, \quad (13.3)$$

где U — энергия деформации; A — работа внешних сил. Поэтому функционал $U - A$ является суммой квадратичной и линейной форм коэффициентов α_i и, следовательно, условия (13.2) составят систему n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Чтобы лучше разобраться в деталях метода Ритца, рассмотрим несколько примеров.

1. Тонкий диск. Согласно общей схеме метода Ритца необходимо построить функционал $U - A$ для конкретной задачи. В случае диска энергия деформации

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\hbar/2}^{\hbar/2} \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta) r dr d\theta dz = \pi \int_a^b h(r) (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta) r dr$$

после подстановки соотношений Гука

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta); \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_r + \varepsilon_\theta)$$

и Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

легко приводится к виду

$$U = \pi \int_a^b \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{du}{dr} \right)^2 + 2\nu \frac{du}{dr} \frac{u}{r} + \left(\frac{u}{r} \right)^2 \right] r dr.$$

После варьирования получим

$$\begin{aligned} \delta U = 2\pi \int_a^b \frac{Eh}{1-\nu^2} & \left[\frac{du}{dr} \delta \left(\frac{du}{dr} \right) + \nu \frac{du}{dr} \delta \left(\frac{u}{r} \right) + \nu \frac{u}{r} \delta \left(\frac{du}{dr} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{u}{r} \delta \left(\frac{u}{r} \right) \right] r dr = 2\pi \int_a^b \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \delta \left(\frac{du}{dr} \right) + \\ & \left(\nu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) \delta \left(\frac{u}{r} \right) r dr. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Из внешних факторов нагружения учтем работу центробежных сил

$A(\omega) = 2\pi \frac{\gamma}{g} \omega^2 \int_a^b hr^2 u dr$, вариация которой будет

$$\delta A(\omega) = 2\pi \frac{\gamma}{g} \omega^2 \int_a^b hr^2 \delta u dr, \quad (13.5)$$

и работу сил, приложенных на внутреннем и внешнем радиусах диска соответственно:

$$\begin{aligned} A(a) &= 2\pi ah(a) P_a u(a); \quad \delta A(a) = 2\pi ah(a) P_a \delta u(a); \\ A(b) &= 2\pi bh(b) P_b u(b); \quad \delta A(b) = 2\pi bh(b) P_b \delta u(b). \end{aligned} \quad (13.6)$$

Решение $U(r)$ будем искать в виде ряда

$$u(r) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(r), \quad (13.7)$$

где α_k — неизвестные параметры, подлежащие определению, а $f_k(r)$ — заданные координатные функции, не противоречащие кинематически возможным перемещениям диска.

Учитывая произвольность параметров α_k , проварьируем искомую функцию $u(r)$ и ее производную $\frac{du}{dr}$:

$$\begin{aligned}\delta u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = \sum_{i=1}^n f_i \delta \alpha_i; \\ \delta \frac{du}{dr} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{du}{dr} \right) \delta \alpha_i = \sum_{i=1}^n f'_i \delta \alpha_i.\end{aligned}\quad (13.8)$$

Теперь можно приступить к составлению системы алгебраических уравнений, вытекающих из условия минимума потенциальной энергии диска:

$$\delta(U - A) = \delta U - \delta A = \delta U - \delta A(\omega) - \delta A(a) - \delta A(b) = 0. \quad (13.9)$$

Для этого в (13.9) подставим полученные ранее выражения (13.4), (13.5), (13.6), учитывая вид решения (13.7) и вариаций (13.8). Тогда

$$\begin{aligned}& \int_0^b \frac{Ehr}{1-v^2} \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j \left(f'_j + \frac{v}{r} f_j \right) \right] \left[\sum_{k=1}^n f'_k \delta \alpha_k \right] + \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j \left(v f'_j + \frac{1}{r} f_j \right) \right] \times \right. \\& \quad \times \left. \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f_k \delta \alpha_k \right] \right\} dr - \frac{v}{g} \omega^2 \int_a^b hr^2 \left(\sum_{k=1}^n f_k \delta \alpha_k \right) dr - \\& - ah(a) P_a \left[\sum_{k=1}^n f_k(a) \delta \alpha_k \right] - bh(b) P_b \left[\sum_{k=1}^n f_k(b) \delta \alpha_k \right] = 0. \quad (13.10)\end{aligned}$$

Так как вариации параметров α_k произвольны, то равенство нулю выражения (13.10) возможно только тогда, когда коэффициенты при всех вариациях $\delta \alpha_k$ одновременно равны нулю. Запишем это условие, сгруппировав множители в (13.10) при $\delta \alpha_i$:

$$\begin{aligned}& \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_a^b \frac{Ehr}{1-v^2} \left[\left(f'_j + \frac{v}{r} f_j \right) f'_i + \frac{1}{r} \left(v f'_j + \frac{1}{r} f_j \right) f_i \right] dr - \\& - \frac{v}{g} \omega^2 \int_a^b hr^2 f_i dr - ah(a) P_a f_i(a) - bh(b) P_b f_i(b) = 0.\end{aligned}$$

Проделав аналогичную процедуру для $i = 1, 2, \dots, n$, после введения безразмерной координаты $\rho = \frac{r-a}{b-a}$ получим окончательный вид системы алгебраических уравнений относительно неизвестных α_j :

$$\begin{aligned}& \sum_{j=1}^n \alpha_j \left\{ \int_0^1 \frac{Eh}{1-v^2} \left[\left(f'_j + \frac{v}{\rho+t} f_j \right) f'_i + \frac{1}{\rho+t} \left(v f'_j + \frac{1}{\rho+t} f_j \right) f_i \right] \times \right. \\& \quad \times (\rho+t) d\rho \left. \right\} = (b-a)^3 \frac{v}{g} \omega^2 \int_0^1 h(\rho+t)^2 f_i d\rho + a P_a f_i(0) +\end{aligned}$$

$$+ b P_b f_i(1) \frac{h(b)}{h(a)}, \quad (13.11)$$

где $t = \frac{a}{b-a}$; $h = \frac{h(r)}{h(a)}$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Заметим, что после перехода к безразмерным координатам f_i должны быть определены на интервале (0, 1) в соответствии с заданными кинематическими условиями. Например, для диска, закрепленного по внутреннему радиусу, можно положить $f_k(r) = r^k$, а в случае, когда на радиальное перемещение не накладываются никакие ограничения ($P_a \neq 0$, $P_b \neq 0$),

$$f_k(r) = r^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Построением разрешающей системы линейных алгебраических уравнений фактически заканчивается этап аналитических преобразований в методе Рунга. Полученные при этом формулы для элементов матрицы и правых частей являются основой алгоритма численной реализации метода.

Рассмотрим принципиальную блок-схему вычислений (рис. 13.1), полагая, что в оперативной памяти уже есть необходимая информация для подсчета элементов матрицы и правых частей: 1) таблица относительных толщин $h(r)$, заданных в узлах интервала; 2) квадратурные коэффициенты (Гаусса, Симпсона, Котеса или др.); 3) вид координатных функций f_j ; 4) константы E , a , b , ν , νg^{-1} , ω . На участке A для текущего значения j вычисляются f_j и f'_j в узлах ρ_k . Например, для $f_j = \rho^j$, $f'_j = j\rho^{j-1}$ программная реализация не составляет особого труда. Участок B работает только в случае $i = j$ и пересылает

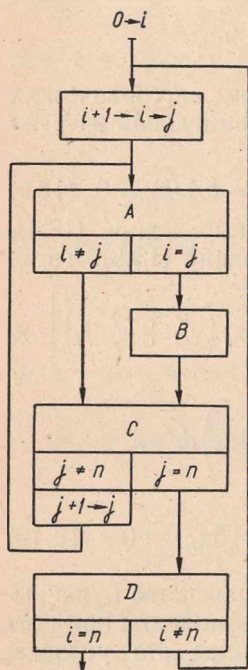


Рис. 13.1

столбцы $f_j(\rho_k)$, $f'_j(\rho_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) в массив, предназначенный для столбцов функции f_i и f'_i . Это необходимо для того, чтобы однажды вычисленные ординаты f_i , f'_i без перевычислений сохранялись до перехода к вычислению следующей $(i+1)$ -й строки матрицы. Кроме того, здесь вычисляется и запоминается правая часть. Симметрия матрицы (13.11) дает возможность ограничиться определением элементов ее верхней правой половины. Поэтому счет каждой новой строки начинается с диагонального элемента. Как видно из блок-схемы, переход к новой строке в программе достигается ссылкой в ячейку, хранящую текущий номер столбца j , номера строки i .

На участке C непосредственно вычисляются и запоминаются элементы матрицы. Необходимое при этом интегрирование выполняется приближенно, в соответствии с принятой квадратурной формулой, поскольку охватить всевозможные случаи распределения толщин $h(r)$ удобней, если задавать толщины в табличной форме.

На последнем участке D по стандартной программе, например методом главных элементов или квадратного корня, определяются неизвестные параметры α_i , а затем по формулам

$$u(\rho) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(\rho);$$

$$\sigma_r(\rho) = \frac{E}{(b-a)(1-\nu^2)} \sum \alpha_k \left[f'_k(\rho) + \frac{\nu}{\rho+t} f_k(\rho) \right]; \quad (13.11a)$$

$$\sigma_\theta(\rho) = \frac{E}{(b-a)(1-\nu^2)} \sum \alpha_k \left[\nu f'_k(\rho) + \frac{1}{\rho+t} f_k(\rho) \right]$$

вычисляется и выдается на печать в интересующих нас точках интервала $0 \leq \rho \leq 1$ решение задачи.

Выполняя расчет с различным количеством координатных функций, можно проследить за сходимостью метода, например, по отклонению решения в граничной точке от заданного значения.

2. Консольная пластина. Чтобы построить разрешающую систему алгебраических уравнений Ритца в задаче об изгибе пластин, будем опираться на допущения технической теории тонких упругих пластин (гл. 10). В рамках этой теории энергия деформированной пластины выражается через прогиб $w(x, y)$ точек срединной поверхности, являющейся функцией координат в плоскости пластины:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{(s)} D [(\Delta w)^2 - (1-\nu) L(w, w)] ds,$$

где D — изгибная жесткость:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Работа внешней поперечной нагрузки при этом

$$A = \iint_{(s)} p w ds.$$

Для расчета пластин, имеющих в плане форму прямоугольника, удобно использовать декартовы координаты, в которых операторы

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right],$$

толщина $h = h(x, y)$, элемент площади срединной плоскости $ds = dx dy$.

В полярных координатах

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2};$$

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right];$$

$$h = h(r, \theta); \quad ds = r dr d\theta.$$

В косоугольных координатах

$$\Delta w = \frac{1}{\cos^2 \beta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right);$$

$$L(w, w) = \frac{2}{\cos^2 \beta} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right];$$

$$h = h(\xi, \eta); \quad ds = d\xi d\eta \cos \beta.$$

Построение матрицы Ритца, после того как определены выражения U и A , аналогично построению, показанному в предыдущем примере (для диска). Здесь также необходимо получить вариации δU , δA , δw , учитывая, что изогнутая поверхность пластины представлена в виде

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w(x, y), \quad (13.12)$$

и приравнять к нулю коэффициенты при $\delta \alpha_i$. Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что для прямоугольных пластин элементы матрицы и столбца правых частей системы Ритца соответственно имеют вид

$$\alpha_i = \int_{(s)} D(x, y) [w_{ixx} w_{jxx} + w_{iyy} w_{jyy} + \nu (w_{ixx} w_{jyy} + w_{iyy} w_{jxx}) - 2(1 - \nu) w_{ixy} w_{jxy}] ds; \quad (13.13)$$

$$b_i = \int_{(s)} p(x, y) w_i ds.$$

Сохраняется и принципиальная блок-схема при алгоритмизации вычислительного процесса. Однако двумерность задачи существенно изменяет организацию счета на участках A, B, C, D . Кроме того, возрастают трудоемкость и связность алгоритма из-за необходимости интегрировать по площади и вычислять координатные функции с их частными производными до 2-го порядка в узлах двумерной области. В связи с этим построим алгоритм на примере прямоугольной консольной пластины, предусматривая полную автоматизацию вычислений, экономии машинного времени и уменьшение связности алгоритма.

Каждую координатную функцию в решении (13.12) будем задавать в виде

$$w_i(x, y) = f_i(x) \varphi_i(y), \quad (13.14)$$

где $f_i(x)$ и $\varphi_i(y)$ — ортонормированные на интервале $(0, 1)$ полиномы степени $\lambda(i)$ и $\mu(i)$ соответственно. При таком задании для хранения значений w_i потребуется лишь $l + m$ ячеек (l, m — число узлов сетки соответственно вдоль осей x и y) вместо $l \times m$ при $w_i = w_i(x, y)$. Кроме этого, решение (13.14) легко подчинить кинематическим условиям на краях пластины. Для консоли с жестким закреплением края $x = 0$ воспользуемся полиномами

$$f_i(x) = T_{\lambda(i)}(x) = \sqrt{2\lambda(i) + 1} \sum_{k=2}^{\lambda(i)} (-1)^{\lambda(i)+k} \frac{(\lambda(i) + k)!}{(\lambda(i) - k)! (k-2)! (k+2)!} x^k;$$

$$\varphi_i(y) = P_{\mu(i)}(y) = \sqrt{2\mu(i) + 1} \sum_{k=0}^{\mu(i)} (-1)^{\mu(i)+k} \frac{(\mu(i) + k)!}{(\mu(i) - k)! k! k!} y^k.$$

Выражение (13.13) для элементов матрицы и столбца правых частей после введения безразмерных величин

$$\bar{x} = \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = \frac{y}{b}; \quad h = \frac{h(x, y)}{h_0}; \quad \bar{p} = \frac{p(x, y)}{p_0}$$

преобразуем (опуская штрихи при x и y) к виду

$$a_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 h^3 \left[\sum_{k=1}^5 F_k(x) \Phi_k(y) \right] dx dy;$$

$$b_i = \frac{p_0 a^4}{D_0} \int_0^1 \int_0^1 \bar{p} f_i(x) \varphi_i(y) dx dy,$$

где $D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}$, p_0 — характерные значения жесткости и поперечной нагрузки;

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) &= f''_{ij}; & F_2(x) &= f_{ij}''; & F_3(x) &= f_i f''_j; & F_4(x) &= f_i f'_j; \\ F_5(x) &= f'_i f'_j; \\ \Phi_1(y) &= \varphi_i \varphi_j; & \Phi_2(y) &= \nu \frac{a^2}{b^2} \varphi_i \varphi''_j; & \Phi_3(y) &= \nu \frac{a^2}{b^2} \varphi_i \varphi'_j; \\ \Phi_4(y) &= \frac{a^4}{b^4} \varphi_i \varphi''_j; & \Phi_5(y) &= 2(1-\nu) \frac{a^2}{b^2} \varphi'_i \varphi'_j. \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование координатных функций $f_i(x) = \dot{f}_i$; $\varphi_i(y) = \dot{\varphi}_i$ по x и y соответственно. При этом производные будем вычислять точно, используя рекуррентные формулы (12.5).

Проследим за ходом вычислений, придерживаясь принятой блок-схемы. На участке A для текущего значения j выбирается информация (справка) о структуре j -й координатной функции, обеспечивающая вычисление по формулам (12.5) величин $\dot{f}_i(x_k)$, $\dot{f}'_i(x_k)$, ..., $\dot{\varphi}'_j(y)$ в заданных узлах x_k , y_m . Вообще говоря, конкретное моделирование вычислений осуществляется по-разному в зависимости от того, каковы ЭВМ и используемый транслятор, структура координатных функций и квалификация вычислителя. Для принятого нами полиномиального представления и формул (12.5) задается таблица справок, где каждому j соответствует информация о степени и начале (конце) массива коэффициентов полиномов $\dot{f}_j$ и $\dot{\varphi}_j$.

На участке B , как и в предыдущей задаче, происходят запоминание (пересылка) столбцов $\dot{f}_i$, $\dot{f}'_i$, ..., $\dot{\varphi}'_i$ в массив для $\dot{f}_i$, $\dot{f}'_i$, ..., $\dot{\varphi}'_i$ и вычисление i -го элемента правой части (13.13), уменьшенного в $\frac{D_0}{a^4 p_0}$ раз.

При вычислении элементов матрицы (участок C) и правых частей кратное интегрирование выполняется приближенно — путем последовательного применения квадратурных формул. Вначале для фиксированного значения y_m формируется столбец подынтегральной функции элемента a_{ij} и определяется интеграл вдоль оси x , затем к полученным для всех y_m результатам вторично применяется квадратурная формула. Обычно пластина разбивается на одинаковое число узлов в обоих

направлениях, что позволяет использовать одну и ту же квадратурную формулу для интегрирования как в направлении x , так и в направлении y .

Перебирая $j = i, i + 1, \dots, n$ для $i = 1, 2, \dots, n$, ЭВМ постепенно заполняет массив из $\frac{n^2 + 3n}{2}$ ячеек, предназначенный для хранения элементов матрицы и правой части. Если нужно выполнить расчет с большим количеством координатных функций, порядок матрицы Ритца можно увеличить за счет запоминания ее в дополнительном ЗУ или за счет постепенного накопления на магнитном барабане. При этом взаимное расположение a_{ij} и b_i должно осуществляться в соответствии с требованиями используемой стандартной программы решения системы линейных алгебраических уравнений.

На участке D система $\sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_j = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) с известными элементами решается относительно параметров Ритца. Здесь же вычисляются решения в узлах координатной сетки. При этом для перехода к размерным величинам используются формулы

$$\left. \begin{aligned} \omega(x, y) &= \frac{p_0 a^4}{D_0} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \Phi_i(y); \\ \sigma_x &= -\frac{p_0 a^2}{h_0^2} h \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(f_i' \Phi_i + \nu \frac{a^2}{b^2} f_i \Phi_i'' \right); \\ \sigma_y &= -\frac{p_0 a^2}{h_0^2} h \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\nu f_i' \Phi_i + \frac{a^2}{b^2} f_i \Phi_i'' \right); \\ \tau_{xy} &= (1 - \nu) \frac{p_0 a^2}{h_0^2} h \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{a^2}{b^2} f_i' \Phi_i'. \end{aligned} \right\}$$

Для секториальных или косоугольных пластин в программе изменяются лишь формула элемента матрицы (13.15) и выражения для напряжений. Например, в случае секториальной пластины, опираясь на вариационное уравнение $\delta(U - A) = 0$ в полярной системе координат, после введения безразмерных переменных $x = \frac{r - r_0}{R_0 - r_0}$, $y = \frac{\theta}{\theta_0}$ получим выражения для столбцов $F_k(x)$, $\Phi_k(y)$:

$$\begin{aligned} F_1 &= f_i'' \left(\frac{\nu}{\rho} f_i' + f_i' \right) + \frac{1}{\rho} f_i' \left(\nu f_i' + \frac{1}{\rho} f_i' \right); & \Phi_1 &= \Phi_i \Phi_j; \\ F_2 &= \frac{1}{\rho^2} f_i \left(\nu f_i'' + \frac{1}{\rho} f_i' \right); & \Phi_2 &= \frac{1}{\theta_0^2} \Phi_i \Phi_j''; \\ F_3 &= \frac{1}{\rho} f_i \left(\nu f_i' + \frac{1}{\rho} f_i' \right); & \Phi_3 &= \frac{1}{\theta_0^2} \Phi_i \Phi_j''; \\ F_4 &= \frac{1}{\rho^2} f_i f_j; & \Phi_4 &= \frac{1}{\theta_0^2} \Phi_i'' \Phi_j; \\ F_5 &= 2(1 - \nu) \frac{1}{\rho^2} (\rho f_i' - f_i) (\rho f_j' - f_j); & \Phi_5 &= \frac{1}{\theta_0^2} \Phi_i' \Phi_j'. \end{aligned}$$

где $\rho = \frac{r}{R_0 - r_0} = x + \frac{r_0}{R_0 - r_0}$. Для прогиба и напряжений при переходе к размерным величинам в этом случае имеем формулы

$$w(x, y) = \frac{\rho_0 (R_0 - r_0)^4}{D_0} \sum \alpha_i f_i \varphi_i;$$

$$\sigma_r = - \frac{6\rho_0 (R_0 - r_0)^2}{h_0^2} h \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\ddot{f}_i \varphi_i + \nu \left(\frac{1}{\rho} \dot{f}_i \varphi_i + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\theta_0^2} f_i \ddot{\varphi}_i \right) \right];$$

$$\sigma_\theta = - \frac{6\rho_0 (R_0 - r_0)^2}{h_0^2} h \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\nu \ddot{f}_i \varphi_i + \frac{1}{\rho} \dot{f}_i \varphi_i + \frac{1}{\rho^2 \theta_0^2} f_i \ddot{\varphi}_i \right];$$

$$\tau_{r\theta} = (1 - \nu) \frac{6\rho_0 (R_0 - r_0)^2}{h_0^2} h \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{\rho \theta_0} \left(\dot{f}_i - \frac{1}{\rho} f_i \right) \dot{\varphi}_i.$$

Рассмотрим еще один практически важный пример изгиба пластины сложной формы (рис. 13.2), когда полностью сохраняется описанный алгоритм. В принципе можно воспользоваться непосредственно уравнением $\delta(U - A) = 0$ в декартовой системе координат. Однако это существенно усложнит алгоритм из-за необходимости интегрировать с переменными пределами и строить координатные функции для двух переменных общего вида. Если же осуществить переход к новой системе координат (z, ρ) по формулам

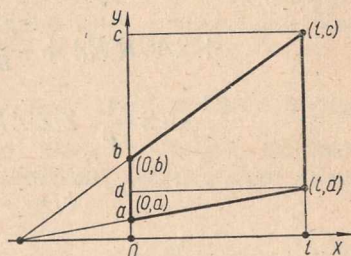


Рис. 13.2

переход к новой системе координат (z, ρ) по формулам

$$x = lz; \quad y = y_0 + (y_1 - y_0) \rho; \quad y_0 = a + (d - a) z; \quad y_1 = b + (c - b) z; \\ 0 \leq z \leq 1; \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

то можно, как и прежде, воспользоваться обычной структурой решения

$$w(z, \rho) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Z(z) R(\rho).$$

При построении уравнения $\delta(U - A)$ в новой системе координат учтем изменения в выражении элемента площади:

$$ds = l(y_1 - y_0) dz d\rho = \beta dz d\rho$$

и операторах дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \rho} \right); \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{lB} \frac{\partial}{\partial \rho};$$

$$A = \frac{d-a}{l} + C\rho; \quad B = \frac{b-a}{l} + Cz; \quad C = \frac{a-b+c-d}{l}.$$

Опуская выкладки, связанные с получением вариаций $\delta(U - A)$, δw и группировкой выражений при $\delta \alpha_j$, запишем окончательный вид

элемента матрицы и правой части:

$$\begin{aligned}
 a_{ij} = & \int_0^1 \int_0^1 h^3 \left\{ Z_i \bar{Z}_j R_i R_j + \frac{1}{B^4} Z_i Z_j \left[(A^2 + 1)^2 R_i'' R_j'' + \right. \right. \\
 & + 2AC (A^2 + 1) (R_i' R_j' + R_j' R_i) + 4C^2 \left(A^2 + \frac{1-\nu}{2} \right) R_i' R_j' \left. \right] + \\
 & + 4 \frac{1}{B^2} Z_i' Z_j' R_i' R_j' \left(\frac{1-\nu}{2} + A^2 \right) - 2 \frac{1}{B^3} Z_i' Z_j \left[A (A^2 + 1) R_i' R_j'' + \right. \\
 & + 2C \left(A^2 + \frac{1-\nu}{2} \right) R_i' R_j' \left. \right] - 2 \frac{1}{B^3} Z_j Z_i \left[A (A^2 + 1) R_j' R_i' + \right. \\
 & + 2C \left(A^2 + \frac{1-\nu}{2} \right) R_i' R_j' \left. \right] + \frac{Z_i' Z_j}{B^2} [(A^2 + \nu) R_i R_j'' + \\
 & + 2AC R_i R_j] + \frac{Z_j' Z_i}{B^2} [(A^2 + \nu) R_j R_i'' + 2AC R_j R_i] - \\
 & - 2 \frac{1}{B} Z_i' Z_j' A R_j' R_i - 2 \frac{1}{B} Z_j' Z_i' A R_i' R_j \left. \right\} B dz dp; \\
 b_i = & - \frac{\rho_0 l^4}{D_0} \int_0^1 \int_0^1 p R_i Z_i B dz dp.
 \end{aligned}$$

В отличие от предыдущих примеров, здесь подынтегральная функция значительно сложнее. В частности, здесь уже девять столбцов $F_k(z)$ и $\Phi_k(p)$. Безусловно, усложнятся и формулы для напряжений

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = & - \frac{6\rho_0 l^2}{h_0^2} h \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\{ Z_i' R_i - 2 \frac{A}{B} Z_i' R_i' + \right. \\
 & + \frac{1}{B^2} Z_i [2AC R_i' + (A^2 + \nu) R_i''] \left. \right\}; \\
 \sigma_y = & - \frac{6\rho_0 l^2 \nu}{h_0^2} h \sum \alpha_i \left\{ Z_i' R_i - 2 \frac{A}{B} Z_i' R_i' + \frac{1}{B^2} Z_i [2AC R_i' + \right. \\
 & + (A^2 + \frac{1}{\nu}) R_i''] \left. \right\}; \\
 \tau_{xy} = & (1 - \nu) \frac{6\rho_0 l^2}{h_0^2} h \sum \alpha_i \left\{ \frac{1}{B} [Z_i' R_i' - \frac{1}{B} Z_i (A R_i' + C R_i)] \right\}.
 \end{aligned}$$

Из рассмотренных примеров следует, что если оставаться в классе полиномиального представления координатных функций, то переход к другим условиям закрепления пластины сводится лишь к замене коэффициентов соответствующих полиномов. Таким образом, по однажды составленной программе для пластин заданной конфигурации можно выполнять расчеты с различными комбинациями граничных

ловний. Кроме того, введение в алгоритм приближенного интегрирования позволяет рассматривать пластины с практически любым законом распределения толщины $h(x, y)$.

§ 13.2. Метод неопределенных множителей Лагранжа

Построение координатных функций, которые бы удовлетворяли всем краевым условиям, — очень сложная и трудоемкая задача. Значительно проще подчинить функции только условиям закрепления, тем более что для перемещений в таком случае метод Ритца дает хорошее приближение уже при относительно небольшом числе членов ряда. Однако, если координатные функции не удовлетворяют всем граничным условиям, получить достоверную картину распределения напряжений, которые выражаются через производные от перемещений, можно, лишь значительно увеличив количество параметров Ритца. Улучшить сходимость по напряжениям без существенного увеличения числа координатных функций позволяет метод неопределенных множителей Лагранжа.

Пусть на решение $w(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x, y)$, в котором каждая координатная функция удовлетворяет только геометрическим краевым условиям, дополнительно наложены ограничения, вытекающие из силовых граничных условий:

$$F_k(w, w_x, \dots, w_{yy})|_{\Gamma_p} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m < n). \quad (13.16)$$

В связи с тем что варьируемые параметры теперь уже связаны добавочными условиями (13.16), вариационная задача $\delta(U - A) = 0$ (в отличие от метода Ритца) сведется к поиску условного экстремума функции

$$L = \left(U - A + \sum_{k=1}^m \lambda_k F_k \right),$$

где λ_k — неопределенные множители Лагранжа. Поскольку в линейных краевых задачах теории упругости U — квадратичная форма, а F_k и A — линейные формы относительно параметров α_i , то из необходимого условия экстремума

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $n + m$ неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m$. По найденным из этой системы параметрам α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и определится приближенное решение задачи, подчиненное условиям (13.16).

Применим метод Лагранжа к задаче о тонком диске. Потребуем, чтобы решение удовлетворяло силовым граничным условиям

$$\sigma_r|_{r=a} = P_a; \quad \sigma_r|_{r=b} = P_b. \quad (13.18)$$

Подставив в условие (13.18) σ_r по формуле (13.11a), запишем выражения для ограничений F_k :

$$F_1 = \frac{E}{(b-a)(1-\nu^2)} \sum_{j=1}^n \alpha_j \left[f_j'(0) + \frac{\nu}{t} f_j(0) \right] - P_a = 0;$$

$$F_2 = \frac{E}{(b-a)(1-\nu^2)} \sum_{j=1}^n \alpha_j \left[f_j'(1) + \frac{\nu}{1+t} f_j(1) \right] - P_b = 0,$$

или, если ввести обозначение σ_{jk} для коэффициента при параметре α_j в k -м ограничении:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_{j1} - P_a = 0; \\ F_2 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_{j2} - P_b = 0. \end{aligned} \right\}$$

Распишем систему (13.17). Учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial \alpha_i}$ представляет собой не что иное, как левую часть i -го уравнения системы Ритца (13.11), а $\frac{\partial A}{\partial \alpha_i}$ — соответственно i -й элемент правой части в (13.11), первые n уравнений запишем так:

$$h(a) \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j + \sum_{k=1}^m \lambda_k \sigma_{ik} = h(a) b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где a_{ij} , b_i — соответственно элементы матрицы и правая часть системы (13.11). Остальные $m = 2$ уравнений $\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0$ в связи с тем, что $\frac{\partial U}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial A}{\partial \lambda_k} = 0$, запишутся в виде

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{jk} \alpha_j = \begin{cases} P_a & \text{при } k = 1; \\ P_b & \text{при } k = 2. \end{cases}$$

Для наглядности изобразим полученную систему уравнений в матричном виде:

$h(a) a_{ij}$ $i, j = 1, 2, \dots, n$	σ_{i1}	σ_{i2}	$\times$	$=$	α_i	$=$	$h(a) b_i$
σ_{j1}	0	0			λ_1		P_a
σ_{j2}	0	0			λ_2		P_b

Отсюда видно, что столбцы σ_{ik} , окаймляющие матрицу Ритца, не нарушают ее симметрии. В принципе сохраняется и вычислительная блок-схема метода Ритца. Очевидно, необходимо, чтобы на этапе i при $j = n$ перед переходом к новой строке включался блок, который будет дополнять i -ю строку элементами σ_{ik} ($k = 1, 2, \dots, m$). Кроме

того, следует перед решением системы вычислить недостающие элементы правой части (P_a , P_b) и дополнить матрицу нулевыми элементами в соответствии с ее структурой.

Рассмотренный пример относится к одномерным задачам, для которых методом Лагранжа без построения специальных координатных функций точно и довольно просто удовлетворяются все граничные условия. В случае большей размерности метод позволяет выполнить краевые условия приближенно: интегрально или в конечном числе $m < n$ точек граничной линии (поверхности).

§ 13.3. Метод Рейсснера

Поиски методов, которые позволили бы подчинить приближенное решение всем краевым условиям задачи, привели Е. Рейсснера (1961 г.) к новому вариационному принципу. Рейсснер видоизменил функционал полной энергии $U - A$, используя две эквивалентные формы удельной потенциальной энергии деформаций:

$$W(\varepsilon, \sigma) = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (13.19)$$

и

$$W(\sigma) = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \\ + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2).$$

Как известно, в вариационном принципе Лагранжа потенциальная энергия деформаций

$$U = \iiint_{(v)} W(\varepsilon, \sigma) dv = \iiint_{(v)} W(\sigma) dv$$

при помощи соотношений Гука и Коши записывается через перемещения, так что в полученном таким образом вариационном уравнении $\delta(U - A) = 0$ варьируются только перемещения. По Рейсснеру потенциальная энергия деформаций записывается в форме

$$U = \iiint_{(v)} [2W(\varepsilon, \sigma) - W(\sigma)] dv,$$

а в функционале Рейсснера

$$R = (U - A) = \left\{ \iiint_{(v)} [2W(\varepsilon, \sigma) - W(\sigma)] dv - A \right\} \quad (13.20)$$

перемещения и напряжения варьируются как независимые между собой функции.

Теперь для каждого компонента $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ подбирается своя координатная последовательность, удовлетворяющая соответствующим граничным условиям. Естественно, что при независимом представлении искомых функций можно во многих случаях без затруднений выполнить все существующие краевые условия. В то же время рост числа

варьируемых функций усложняет алгоритм и увеличивает трудоемкость вычислительного процесса. Однако при современных возможностях вычислительной техники сложность алгоритма и в некоторой степени трудоемкость не должны препятствовать реализации выбранного метода. Основное преимущество метода — не его простота, а практически возможная точность решения.

В методе Рейсснера выполнить все граничные условия удастся только за счет усложнения алгоритма и увеличения трудоемкости. Более существенно то, что при построении функционала не используются соотношения Гука. Они, как и условия статики, для вариационной задачи $\delta R = 0$ служат уравнениями Эйлера. Следовательно, физический закон, связывающий напряжения и деформации, в методе Рейсснера выполняется приближенно.

Рассмотрим несколько примеров с использованием для решения функционала Рейсснера. В случае тонкого диска (внешнее воздействие — как и в предыдущих примерах) согласно выражениям (13.19) для ω (ε , σ) и W (σ) функционал Рейсснера запишется в виде

$$R = 2\pi \left\{ \int_a^b h(r) \left[\sigma_r \frac{dU}{dr} + \sigma_\theta \frac{U}{r} - \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - 2\nu\sigma_r\sigma_\theta) \right] r dr - \right. \\ \left. - \frac{\gamma}{g} \omega^2 \int_a^b h(r) U r^2 dr - [ah(a) P_a + bh(b) P_b] \right\},$$

а после обычного перехода к безразмерным координатам $r = a + (b - a)\rho$ и подстановки $h = \frac{h(r)}{h(a)}$ — так:

$$R = 2\pi \left\{ \int_0^1 h \left[\sigma_r \frac{1}{b-a} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \sigma_\theta \frac{1}{b-a} \frac{U}{\rho+t} - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - 2\nu\sigma_r\sigma_\theta) \right] (b-a)^2 (\rho+t) d\rho - \\ \left. - \frac{\gamma}{g} \omega^2 (b-a)^3 \int_0^1 h U (\rho+t) d\rho - aP_a - b \frac{h(b)}{h(a)} P_b \right\}.$$

В соответствии с принципом Рейсснера компоненты решения σ_r , σ_θ , U задаем независимыми между собой рядами

$$\sigma_r = \sigma_0(\rho) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(\rho); \quad \sigma_\theta = \sum_{i=1}^n \beta_i \psi_i(\rho); \quad U = \sum_{i=1}^h \delta_i f_i(\rho). \quad (13.21)$$

Функции $\sigma_0(\rho)$ и $\varphi_i(\rho)$ подбираются таким образом, чтобы независимо от значений параметров α_i выполнялись граничные условия для σ_r :

$$\sigma_r|_{r=a} = -P_a; \quad \sigma_r|_{r=b} = P_b.$$

Например, $\sigma_0(\rho)$ можно взять в виде решения Ламе для диска постоянной толщины или $\sigma_0(\rho) = -P_a + (P_a + P_b)\rho$. Каждая координатная функция $\varphi_i(\rho)$ при этом должна обращаться в нуль на концах интервала:

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

В результате подстановки (13.21) в функционал Рейсснера последний превращается в функцию переменных $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$. Система линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ будет вытекать из условия экстремума функционала:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m); \\ \frac{\partial R}{\partial \beta_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ \frac{\partial R}{\partial \delta_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \right\}$$

После дифференцирования функционала по параметрам $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ получим в развернутом виде соответственно m уравнений $\frac{\partial R}{\partial \alpha_i} = 0$:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^1 -\frac{h(b-a)^2}{E} \varphi_i \varphi_j(\rho+t) d\rho + \sum_{j=1}^n \beta_j \int_0^1 \frac{vh(b-a)^2}{E} \varphi_i \varphi_j(\rho+t) d\rho + \sum_{j=1}^k \delta_j \int_0^1 h(b-a) \varphi_i f_j'(\rho+t) d\rho = \int_0^1 \frac{h(b-a)^2}{E} \sigma_0 \varphi_i(\rho+t) d\rho,$$

$$i = 1, 2, \dots, m;$$

n уравнений $\frac{\partial R}{\partial \beta_i} = 0$:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^1 \frac{vh(b-a)^2}{E} \psi_i \varphi_j(\rho+t) d\rho + \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 -\frac{h(b-a)^2}{E} \psi_i \psi_j(\rho+t) d\rho + \sum_{j=1}^k \delta_j \int_0^1 \frac{h(b-a)}{(\rho+t)} \psi_i f_j d\rho = \int_0^1 -\frac{vh(b-a)^2}{E} \sigma_0 \psi_i(\rho+t) d\rho$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

k уравнений $\frac{\partial R}{\partial \delta_i} = 0$:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^1 h(b-a) f_i \varphi_i(\rho+t) d\rho + \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 \frac{h(b-a)}{\rho+t} \psi_i f_i d\rho =$$

$$= \frac{\gamma}{g} \omega^2 (b-a)^3 \int_0^1 h f_i(\rho+t)^2 d\rho + a P_a + b \frac{h(b)}{h(a)} P_b \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты при неизвестных параметрах полученной системы образуют симметричную матрицу размера $(k \times k)$ с нулевой диагональю. Это обстоятельство можно использовать для повышения общего порядка матрицы $N = m + n + k$, не

прибегая к услугам внешней памяти. Прием состоит в том, что вначале из уравнений $\frac{\partial R}{\partial \alpha_i} = 0$ и $\frac{\partial R}{\partial \beta_i} = 0$ неизвестные α_i, β_i выражаются через δ_i и подставляются в уравнения $\frac{\partial R}{\partial \delta_i} = 0$. В результате вместо решения одной системы порядка N решаются система $(m + n)$ -го порядка с $k + 1$ правой частью и система k -го порядка, из которой определяются δ_i , а затем уже и α_i, β_i , выраженные через δ_i .

Теперь рассмотрим задачу об изгибе консольной прямоугольной пластины. Прежде всего приведем функционал Рейсснера к форме, удобной для теории пластин. Поскольку компоненты напряженно-деформированного состояния пластины — линейные функции координаты z , выразим по известным соотношениям (10.25) напряжения через моменты:

$$\sigma_x = \frac{12z}{h^3} M_x; \quad \sigma_y = \frac{12z}{h^3} M_y; \quad \sigma_{xy} = -\frac{12z}{h^3} M_{xy},$$

а деформации — через прогиб:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

В результате подстановки этих выражений в функционал (13.20) и интегрирования по толщине пластины в пределах $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ получим

$$\begin{aligned} R = \iint_{(s)} & \left[-M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2D(1-\nu^2)} (M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1+\nu) M_{xy}^2) \right] ds - \\ & - \iint_{(s)} q w ds. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Зададимся решением в виде

$$M_x = \sum_{i=1}^k \alpha_i m_{xi}; \quad M_y = \sum_{i=1}^k \beta_i m_{yi};$$

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^m \gamma_i m_{xyi}; \quad W = \sum_{i=1}^n \delta_i w_i,$$

где координатные функции $(m_x, m_y, m_{xy}, w)_i$ подбираются с учетом граничных условий задачи. Например, для пластины, загруженной симметрично относительно оси x и защемленной по стороне $x = 0$, можно воспользоваться полиномами

$$\begin{aligned} w_1 &= x^4 - 4x^3 + 6x^2; & w_2 &= y^2(x^4 - 4x^3 + 6x^2); \\ m_{x1} &= (1-x)^2; & m_{x2} &= (1-x)^2(6x-1); \\ m_{y1} &= (1-4y^2)^2; & m_{y2} &= (2x-1)(1-4y^2)^2; \\ m_{xy1} &= x(1-x)(1-4y^2); & m_{xy2} &= (2x-1)m_{xy1}. \end{aligned}$$

Система алгебраических уравнений для определения неизвестных $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, получается из условия экстремума функционала (13.22):

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_i} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_j} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial \gamma_k} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial \delta_l} = 0. \quad (13.23)$$

Для алгебраических уравнений, вытекающих из принципа Рейссне-ри, характерны матрицы с нулевыми клетками. Не является исключе-

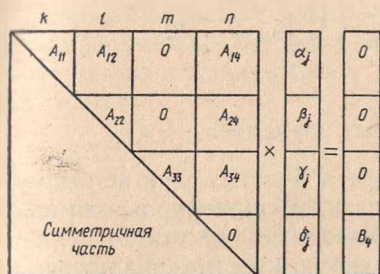


Рис. 13.3

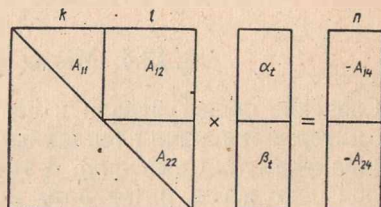


Рис. 13.4

нием и система (13.23) — рис. 13.3. Здесь проясняется следующая схема решения общей системы уравнений. Вначале неизвестные α_i, β_i выражаются через δ_i путем решения системы $(k + l)$ -го порядка с n правыми частями (рис. 13.4). Затем параметры γ_i выражаются через δ_i после решения системы, показанной на рис. 13.5. Если полученные теперь линейные формы зависимостей $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ от δ_i подставить в последние n уравнений общей системы, то получится система n уравнений, откуда определяются параметры δ_i , а затем и выраженные через δ_i остальные неизвестные $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

В заключение приведем выражения для коэффициентов матрицы A_{pq} и столбца правой части B_4 :

$$A_{11} = \iint -\frac{m_{xp}m_{xq}}{D(1-v^2)} ds \quad (q = p, p+1, \dots, k);$$

$$A_{12} = \iint \frac{vm_{xp}m_{yq}}{D(1-v^2)} ds \quad (q = 1, 2, \dots, l);$$

$$A_{14} = \iint -\frac{m_{xp}\omega_{xxq}}{a^2} ds \quad (q = 1, 2, \dots, n);$$

$$(p = 1, 2, \dots, k);$$

$$A_{22} = \iint -\frac{m_{yp}m_{yq}}{D(1-v^2)} ds \quad (q = p, p+1, \dots, l);$$

$$A_{24} = \iint -\frac{m_{yp}\omega_{yqq}}{b^2} ds \quad (q = 1, 2, \dots, n);$$

$$(p = 1, 2, \dots, l);$$

$$(13.24)$$

$$A_{33} = 2 \iint - \frac{m_{xyp} m_{xyq}}{D(1-\nu)} ds \quad (q = p, p+1, \dots, m);$$

$$A_{34} = 2 \iint \frac{m_{xyp} m_{xyq}}{ab} ds \quad (q = 1, 2, \dots, n);$$

$$(p = 1, 2, \dots, m);$$

$$B_4 = \iint q(x, y) \omega_p ds \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

§ 13.4. Метод конечных элементов

Сведение общей задачи к совокупности простых уже встречалось при интерполировании (сплайны) и численном интегрировании (обобщенная формула Симпсона). В этих случаях вместо сложной функции, единой для всего интервала, используются простые аналитические модели на небольших участках. Реализация такого подхода к решению в вариационных методах приводит к разновидностям метода конечных элементов (МКЭ).

В основе МКЭ лежит представление конструкции в виде плотной совокупности упругих образований — конечных элементов (КЭ). Расчленяя заданную область, используют однотипные элементы с простой конфигурацией. На треугольные и прямоугольные элементы разбивают плоские и осесимметричные тела, а в пространственных задачах используют элементы в виде тетраэдров и параллелепипедов. Дискретизировать непрерывную систему можно и при помощи таких хорошо изученных упругих элементов, как оболочки, плиты или стержни. Чтобы передать связь КЭ с прилегающими элементами, вдоль границ раздела фиксируют точки (узлы). В пределах элемента решение задают в виде функции, линейной относительно своих (пока еще неизвестных) значений в узловых точках и обеспечивающей непрерывность требуемого порядка при переходе от элемента к элементу. Очевидно, что при выполнении этих условий в каждом элементе, решение во всей области непрерывно и однозначно определится через его узловые значения. Рассматривая эти узловые величины как независимые, варьируем параметры и, используя, например, вариационный метод Ритца, получаем приближенное решение задачи. Таким образом, в сущности, МКЭ отличается от привычного метода Ритца лишь «непривычной» системой координатных функций. Естественно поэтому и алгоритмическую сторону МКЭ рассматривать с позиций уже знакомой вычислительной процедуры Ритца. Такая трактовка целесообразна еще и потому, что многие специалисты в области механики твердого деформируемого тела лучше ориентируются в вычислительном процессе Ритца, в то время как в литературе преобладает интерпретация МКЭ с позиций и традиций строительной механики.

Итак, представим, что нужно с помощью МКЭ найти приближенное решение некоторой краевой задачи для плоского тела с сложного очертания. Будем считать, что функционал $I = U - A$, соответствующий

ний задаче, зависит только от одной функции $w(r, z)$, причем

$$U = \frac{1}{2} \iint_{(s)} \left[w^2 - D(r, z) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] dr dz;$$

$$A = \iint_{(s)} Q(r, z) w dr dz. \quad (13.25)$$

Заданную область s покроем прямоугольной сеткой и рассмотрим один из полученных при этом внутренних прямоугольников n , для которого введем безразмерные координаты

$$x = \frac{r - a_n}{b_n - a_n}; \quad y = \frac{z - c_n}{d_n - c_n}$$

так, чтобы прямоугольник отобразился в единичный квадрат (рис. 13.6). В качестве узловых точек выберем вершины прямоугольника (a_n, c_n) (a_n, d_n) , (b_n, c_n) , (b_n, d_n) , переходящие соответственно в вершины квадрата $I(0, 0)$, $II(0, 1)$, $III(1, 0)$, $IV(1, 1)$.

Римские цифры здесь отразят внутренний порядок нумерации узловых точек элемента. Это значит, что, например, узел (a_n, c_n) в элементе n считается первым (I), в элементе $(m-1)$ — четвертым (IV), в элементе m — третьим (III), а в элементе $(n-1)$ — вторым (II). Наряду с местными обозначениями $w_I^n, \dots, w_{IV}^n$ в дальнейшем для рассмотрения системы элементов в целом будем пользоваться последовательностью q_i ($i = 1, 2, \dots, N$), в которой за каждым узловым параметром закреплен определенный номер.

Для описания решения внутри каждого конечного элемента воспользуемся простейшей структурой

$$w_n(x, y) = \alpha_{1n} + \alpha_{2n}x + \alpha_{3n}y + \alpha_{4n}xy, \quad (13.26)$$

которую, как этого требует МКЭ, преобразуем к линейной форме узловых значений функции $w(x, y)$. Индекс n указывает на принадлежность выражения (13.26) конечному элементу с номером n . Из очевидных равенств

$$w_n(0, 0) = w_I^n = \alpha_{1n}; \quad w_n(0, 1) = w_{II}^n = \alpha_{1n} + \alpha_{3n};$$

$$w_n(1, 0) = w_{III}^n = \alpha_{1n} + \alpha_{2n};$$

$$w_n(1, 1) = w_{IV}^n = \alpha_{1n} + \alpha_{2n} + \alpha_{3n} + \alpha_{4n}$$

нетрудно получить

$$w_n(x, y) = w_I^n(1-x)(1-y) + w_{II}^n(1-x)y + w_{III}^n x(1-y) + w_{IV}^n xy. \quad (13.27)$$

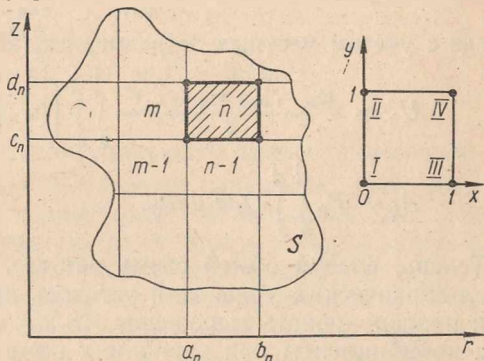


Рис. 13.6

Легко заметить, что непрерывность решения в данном случае обеспечивается тем, что вдоль каждой из границ $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ функция (13.27) вырождается в прямую, проходящую через две общие со смежным элементом точки (узловые значения).

В связи с поэлементным заданием решения результат интегрирования по области s в функционале (13.25) следует выразить через сумму интегралов по области каждого элемента:

$$I = \sum_{k=1}^M I_k = \sum_{k=1}^M (U_k - A_k),$$

где с учетом местных безразмерных координат x, y

$$U_k = \frac{(b_n - a_n)(d_n - c_n)}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[(\omega_k)^2 + \frac{D_k}{(\Delta r_n)^2} \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy,$$

$$A_k = F_k \int_0^1 \int_0^1 Q_k \omega_k dx dy.$$

Теперь, следуя общей схеме метода Ритца, для получения системы алгебраических уравнений осталось подставить (13.27) в функционал и проварьировать выражение (13.25) по всем узловым параметрам q_i , а коэффициенты при вариациях приравнять к нулю:

$$\frac{\partial I}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (13.28)$$

В классическом варианте метода Ритца из (13.28) получали легко обозримые выражения и четкую вычислительную схему. В варианте МКЭ алгоритм построения матрицы имеет более сложную логическую структуру.

Основными «кирпичиками» при построении разрешающей системы уравнений МКЭ являются собственные матрицы отдельных конечных элементов. Для получения одной из них рассмотрим конечный элемент n , абсолютно изолируя его от взаимодействия с прилегающими элементами. Если теперь воспользуемся решением в виде (13.27) и формально применим метод Ритца к функционалу для элемента n : $I_n = U_n - A_n$, то из условия

$$\frac{\partial I_n}{\partial \omega_i^n} = 0 \quad (i = I, II, III, IV) \quad (13.29)$$

получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно узловых параметров $\omega_I^n, \omega_{II}^n, \omega_{III}^n, \omega_{IV}^n$:

$$\sum_{j=I}^{IV} R_{ij}^n \omega_j^n - b_i^n = 0 \quad (i = I, II, III, IV). \quad (13.30)$$

Левую часть выражения (13.30) обозначим через R_n , т. е.

$$R_n = \left(\sum_{j=I}^{IV} R_{ij}^n \omega_j^n - b_i^n \right) \quad (i = I, II, III, IV),$$

и в дальнейшем будем называть *собственной матрицей элемента* n . Формулы для определения элементов матрицы R_{ij} и столбца b_i^n в нашем случае имеют вид

$$R_{ij}^n = F_n \int_0^1 \int_0^1 \left[\varphi_i \varphi_j + \frac{D_n}{(\Delta r_n)^2} \varphi_{xi} \varphi_{xj} \right] dx dy;$$

$$b_i^n = F_n \int_0^1 \int_0^1 Q_n \varphi_i dx dy,$$

где $F_n = \Delta r_n \Delta z_n$ — площадь элемента n ;

$$\varphi_I = (1-x)(1-y); \quad \varphi_{II} = (1-x)y;$$

$$\varphi_{III} = x(1-y); \quad \varphi_{IV} = xy.$$

Если хотя бы один из узлов рассматриваемого элемента принадлежит границе области, в выражении b_i^n появятся слагаемые, учитывающие работу внешнего силового воздействия. Естественно, что для конкретной краевой задачи в зависимости от формы и числа узловых параметров конечный элемент может иметь различные собственные матрицы. Однако общим для них является принцип построения, так как собственная матрица — это система уравнений Ритца, полученная для отдельного конечного элемента с использованием координатных структур, линейных относительно узловых параметров.

В § 13.1 подробно излагалась организация вычисления каждой строки и всей матрицы Ритца. Поэтому будем считать, что располагаем блоком $L(k, n)$, который определяет k -ю строку собственной матрицы R_n . Достаточно только задать конкретные значения k и n .

Установим связь между локальными системами Ритца и системой уравнений МКЭ. В связи с этим отметим, что попытки записать общую формулу для элемента матрицы в МКЭ обычно приводят к нагромождению выражений со множеством различных индексов, не способствующих пониманию общей канвы вычислительного процесса. Поэтому вначале рассмотрим лишь одно уравнение из системы (13.28), в котором $q_i = q$ является узловым параметром, например, в точке (a_n, c_n) . Рассматриваемый узловый параметр $q = \omega_I^n = \omega_{II}^{n-1} = \omega_{III}^m = \omega_{IV}^{m-1}$ (рис. 13.6) входит в структуру решения для четырех элементов — n , $n-1$, m , $m-1$. Поэтому после дифференцирования функционала отличны от нуля останутся только слагаемые с этими номерами:

$$\frac{\partial I}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (I_{m-1} + I_m + I_{n-1} + I_n) = 0,$$

или

$$\frac{\partial I_n}{\partial \omega_I^n} + \frac{\partial I_{n-1}}{\partial \omega_{II}^{n-1}} + \frac{\partial I_m}{\partial \omega_{III}^m} + \frac{\partial I_{m-1}}{\partial \omega_{IV}^{m-1}} = 0. \quad (13.31)$$

Сопоставляя выражения (13.29) и (13.31), видим, что слагаемые строк в системе уравнений МКЭ являются строками собственных матриц отдельных элементов. Из (13.31) также следует, что в образовании i -й строки общей системы участвуют строки собственных матриц только

тех элементов, которым принадлежит узловой параметр q_i . При этом номер строки собственной матрицы (римская цифра) должен совпадать с номером, под которым параметр q_i числится в рассматриваемом КЭ.

После расчленения объекта можно всегда тем или иным способом указать (например, используя список номеров), каким именно конечным элементам принадлежит данный узловой параметр q_i и какие узловые параметры принадлежат данному конечному элементу n . Зная это, можно различными программными путями скомпоновать строки разрешающей системы уравнений МКЭ из строк собственных матриц. Установленная таким образом связь локальных систем Ритца с общей системой уравнений МКЭ, во-первых, служит основой для построения реальной логической схемы процесса, а во-вторых, позволяет рассматривать матрицу МКЭ как результат сложения собственных матриц отдельных элементов, вычислительную же сторону процесса свести к известной процедуре Ритца.

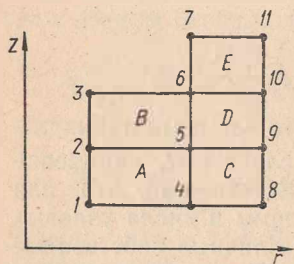


Рис. 13.7

Рассмотрим на примере один из возможных вариантов формирования общей матрицы МКЭ. Пусть объект разбит на 5 прямоугольных элементов (рис. 13.7). Приняв определенную систему нумерации для узловых параметров ($i = 1, 2, \dots, 11$) и конечных элементов ($k = A, B, \dots, E$), составим два информационных списка: 1) $S[i]$ — перечень признаков (например, номеров) конечных элементов, содержащих узловой параметр q_i ($i = 1, 2, \dots, 11$); 2) $T[k]$ — перечень признаков тех узловых параметров, которые принадлежат k -му конечному элементу ($k = A, B, \dots, E$). Упорядочим наборы признаков в соответствии с внутренней нумерацией узловых параметров КЭ. Тогда место признака в перечне $S[i]$ укажет номер строки данной собственной матрицы, а справка $T[k]$ о номерах неизвестных рассматриваемого элемента позволит однозначно распределить среди параметров q_i коэффициенты этой строки. Принимая во внимание сказанное, запишем информационные списки примера в следующем виде:

$$\begin{aligned} S[1] &= (A, 0, 0, 0); & S[2] &= (B, A, 0, 0); & S[3] &= (0, B, 0, 0); \\ S[4] &= (C, 0, A, 0); & S[5] &= (D, C, B, A); & S[6] &= (E, D, 0, B); \\ S[7] &= (0, E, 0, 0); & S[8] &= (0, 0, C, 0); & S[9] &= (0, 0, D, C); \\ S[10] &= (0, 0, E, D); & S[11] &= (0, 0, 0, E); \\ T[A] &= (1, 2, 4, 5); & T[B] &= (2, 3, 5, 6); & T[C] &= (4, 5, 8, 9); \\ T[D] &= (5, 6, 9, 10); & T[E] &= (6, 7, 10, 11). \end{aligned}$$

Теперь, очевидно, для построения i -й строки системы МКЭ достаточно организовать вычислительный процесс так, чтобы по информации из справки $S[i] = A_i, B_i, C_i, D_i$ последовательно вычислялись I, II, III и IV строки собственных матриц R_{Ai}, R_{Bi}, R_{Ci} и R_{Di} соответ-

ственно, а в промежутках между обращениями к блоку вычисления строки $L(k, n)$ коэффициенты полученных строк группировались при неизвестных q_j согласно перечню $T[A_i]$ для первой строки, $T[B_i]$ — для второй, $T[C_i]$ и $T[D_i]$ — соответственно для третьей и четвертой строк рассматриваемых собственных матриц.

Проследим за получением 4-й строки МКЭ в нашем примере. Первый отличный от нуля признак C занимает в справке $S[4]$ позицию «номер один». Следовательно, формируется обращение к блоку $L(I, C)$ и полученные коэффициенты $R_{11}^C, R_{12}^C, R_{13}^C, R_{14}^C, b_1^C$ привязываются к неизвестным q_j по списку $T[C]$, как бы образуя выражение

$$R_{11}^C q_4 + R_{12}^C q_5 + R_{13}^C q_8 + R_{14}^C q_9 - b_1^C. \quad (13.32)$$

Аналогично после обращения к блоку $L(III, A)$ и группировки коэффициентов по списку $T[A]$ получим

$$R_{31}^A q_1 + R_{32}^A q_2 + R_{33}^A q_4 + R_{34}^A q_5 - b_3^A.$$

После суммирования с (13.32) имеем для 4-й строки окончательное выражение

$$\begin{aligned} R_{31}^A q_1 + R_{32}^A q_2 + (R_{33}^A + R_{11}^C) q_4 + (R_{34}^A + R_{12}^C) q_5 + R_{13}^C q_8 + R_{14}^C q_9 = \\ = b_3^A + b_1^C. \end{aligned}$$

Существуют и другие варианты формирования матрицы. Например, если накапливать всю матрицу постепенно из отдельных строк собственных матриц, то получится более экономичный во времени алгоритм и отпадет необходимость в списке $S[i]$.

Пусть после обработки очередной справки $T[M] = (k, l, m, n)$ уже имеются массивы $R[i, j]$, $b[i]$, $t[i]$ соответственно с коэффициентами R_{ij}^M , b_i^M и индексами k, l, m, n . Тогда процесс распределения элементов собственной матрицы R_M в общей системе $A[p, q]$ и ее правой части $B[p]$, не учитывая симметрии матриц, можно осуществить по следующей схеме:

для $i := 1$ шаг 1 до 4 цикл
 начало $p := t[i]$; $B[p] := B[p] + b[i]$;
 для $j := 1$ шаг 1 до 4 цикл
 начало $q := t[j]$; $A[p, q] := A[p, q] + R[i, j]$;
 конец;
 конец;

Глава 14

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

§ 14.1. Метод конечных разностей

Одним из старейших методов приближенного решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей. До недавнего времени он был самым доступным, а порою и единственным. И сейчас метод широко используется в инженерной практике, не

утратив своего прикладного значения. Метод конечных разностей осуществляют следующим образом:

1. Исследуемую область покрывают сеткой, узлы которой нумеруют в определенном порядке. Будущее решение представляют в виде дискретной совокупности узловых значений искомой функции.

2. Строят разностную систему алгебраических уравнений. Для этого производные, входящие в исходное дифференциальное уравнение и краевые соотношения, заменяют соответствующими разностными отношениями, а известные функции — их узловыми значениями.

3. Из полученной системы уравнений определяют числовые значения искомой функции в узлах сетки.

Рассмотрим краевую задачу, описываемую на интервале (a, b) уравнением

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x) \quad (14.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) &= A; \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) &= B. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Разделим интервал на n равных частей так, чтобы точки деления определялись по формулам

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

а для дискретных значений встречающихся функций введем обозначения типа $F(x_k) = F_k$. Если теперь запишем дифференциальное уравнение (14.1) для точек деления $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, заменив в нем предварительно производные u'' и u' разностными отношениями

$$u_k' = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}; \quad u_k'' = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2},$$

то после приведения подобных членов получим $n-1$ уравнение в виде

$$a_k u_{k-1} + b_k u_k + c_k u_{k+1} = d_k \quad (14.3)$$

с простыми формулами для коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_k &= 2 - hp_k; & b_k &= h^2 q_k - 2; \\ c_k &= 2 + hp_k; & d_k &= h^2 f_k. \end{aligned}$$

Присоединив к ним два краевых условия (14.2), записанные в разностном виде:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{h}\right) u_0 + \frac{\alpha_1}{h} u_1 &= A; \\ \left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{h}\right) u_{n-1} + \frac{\beta_1}{h} u_n &= B, \end{aligned} \quad (14.4)$$

получим систему алгебраических уравнений, однозначно определяющую все неизвестные $u_0, u_1, \dots, u_n$. Решать систему эффективнее всего методом прогонки (§ 12.3).

Конечно-разностный метод, как видим, позволяет заменить систему дифференциальных уравнений системой алгебраических. При решении задачи (14.1), конечно, можно было обойтись и без разностного метода. Однако для уравнений в частных производных алгебраизация — уже один из немногих путей, ведущих к решению.

Разностные операторы для частных производных в общем случае строят исходя из разложения функции в ряд Тейлора:

$$\varphi(x + \xi, y + \eta) = \varphi(x, y) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \xi + \frac{\partial}{\partial y} \eta \right)^k \varphi(x, y) + \dots \quad (14.5)$$

Ограничиваясь определенным количеством членов ряда, можно все производные, входящие в приближенное разложение, выразить через дискретные значения функции $\varphi(x + \xi, y + \eta)$ и оценить точность такой замены. Вполне понятно, что для однозначности решения можно воспользоваться только определенным количеством узловых значений функции из окрестности рассматриваемой точки (x, y) . Однако при переходе от точки к точке однозначность разностного оператора и неизменность его структуры обеспечить удается не всегда.

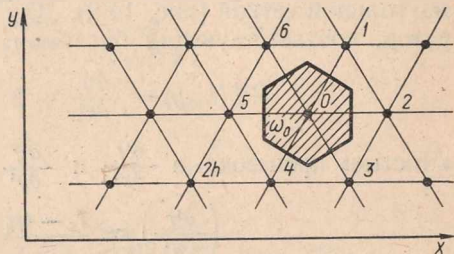


Рис. 14.1

В таких случаях строят усредненное выражение оператора. Поясним это на примере. Пусть нужно построить разностный оператор для уравнения $L(\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}) = q$ при условии, что вся область разбита регулярной сеткой на равносторонние треугольники (рис. 14.1). При $N = 2$ в разложении (14.5) будет как раз 5 интересующих нас неизвестных величин $\varphi_x, \dots, \varphi_{yy}$, для определения которых можно записать 6 равноправных между собой уравнений:

$$\xi_i \varphi_x + \eta_i \varphi_y + \frac{1}{2} (\xi_i^2 \varphi_{xx} + 2\xi_i \eta_i \varphi_{xy} + \eta_i^2 \varphi_{yy}) = \varphi_i - \varphi_0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, 6),$$

где

$$\xi_1 = \xi_3 = -\xi_4 = -\xi_6 = h; \quad \xi_2 = \xi_5 = 2h;$$

$$\eta_1 = \eta_6 = -\eta_3 = -\eta_4 = h; \quad \eta_2 = \eta_5 = 0.$$

Из этой переопределенной системы получаются 6 вариантов разностных выражений для дифференциального оператора: $L_1, L_2, \dots, L_6$. Усредняя полученные результаты, дискретным представлением оператора L будем считать выражение

$$L_\Delta = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 L_i.$$

Правая часть $q(x, y)$ в пределах площади ω_0 , примыкающей к рассматриваемому узлу (x_0, y_0) , принимает постоянное значение $q_0 = q(x_0, y_0)$.

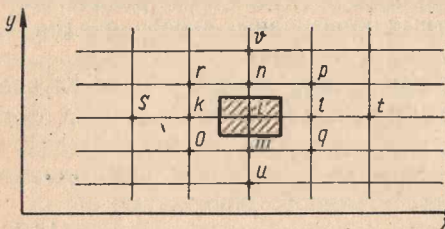


Рис. 14.2

Для сетки, линии которой параллельны координатным осям, построение разностных операторов значительно упрощается. Дело в том, что если производная берется в направлении линии, на которой располагаются узлы сетки и заданная точка, то удобно пользоваться уже готовыми формулами для обыкновенных производных.

Рассмотрим в качестве примера фрагмент области с регулярной прямоугольной сеткой (рис. 14.2). Для точки i построим разностный оператор, соответствующий бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 f(x, y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0.$$

«Чистые» производные $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ записываются сразу по формулам

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_i \approx \frac{f_s - 4f_k + 6f_i - 4f_l + f_t}{\Delta x^4};$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right)_i \approx \frac{f_u - 4f_m + 6f_i - 4f_v + f_o}{\Delta y^4},$$

а для смешанной производной $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$, согласно одной из формул

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_i \approx \frac{(f''_{yy})_k - 2(f''_{yy})_i + (f''_{yy})_l}{\Delta x^2};$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x} \right)_i \approx \frac{(f''_{yy})_m - 2(f''_{xx})_i + (f''_{xx})_n}{\Delta y^2},$$

следует выражение

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{4f_i - 2(f_k + f_l + f_m + f_n) + f_o + f_p + f_r + f_q}{\Delta x^2 \Delta y^2}.$$

Полагая для простоты $\Delta x = \Delta y$, в результате подстановки разностных выражений и приведения подобных членов получим алгебраическое уравнение для i -й точки:

$$20f_i - 8(f_k + f_l + f_m + f_n) + 2(f_o + f_p + f_r + f_q) + f_s + f_t + f_u + f_v = 0. \quad (14.6)$$

Из приведенных примеров видно, что техническая сторона построения разностных уравнений достаточно понятна и не представляет особых трудностей. Более того, для основополагающих дифференциальных уравнений и часто встречающихся операторов имеются различ-

ные модификации разностных схем [7]. Варианты диаграмм операторов $h^2 \nabla^2$ приведены на рис. 14.3.

Некоторый «беспорядок» в формировании систем уравнений получается при записи оператора для предконтурных и контурных узлов. Это связано с тем, что для точек, прилегающих к границе, разностные

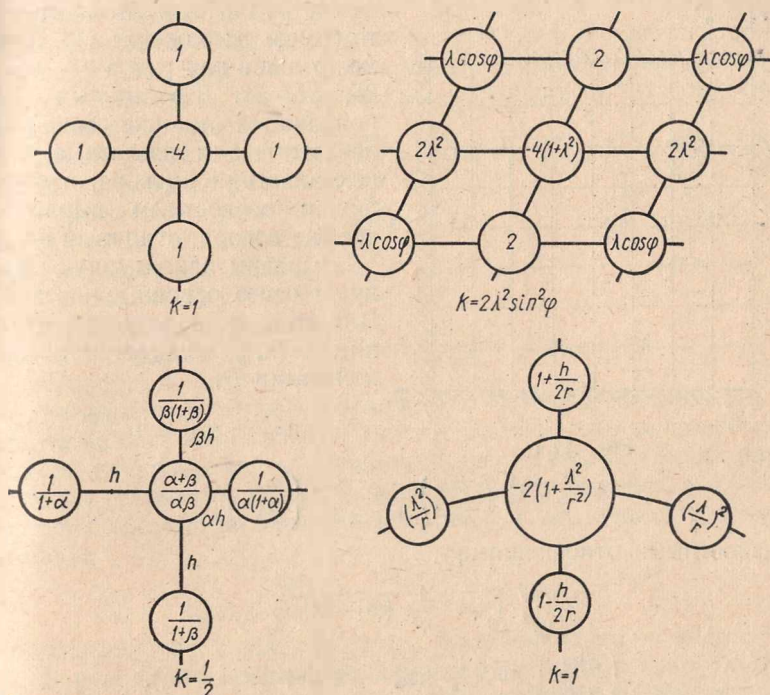


Рис. 14.3

уравнения в силу своей структуры будут содержать законтурные узловые значения искомой функции. Появившиеся таким образом лишние неизвестные требуют для однозначности решения общей системы дополнительных уравнений. Такими уравнениями являются граничные условия, записанные в разностном виде. Благодаря им удастся выразить дополнительные неизвестные через ординаты искомой функции, лежащие в пределах исследуемой области. Для примера применим метод сеток к задаче об изгибе жестко заземленной по всему контуру квадратной пластины под действием поперечной нагрузки $q(x, y)$ (рис. 14.4).

В случае квадратной сетки $(\Delta x = \Delta y = h = \frac{a}{8})$ из 81 узла в тридцати двух, принадлежащих контуру, значения функции известны по условию задачи: они равны нулю. Для оставшихся 49 неизвестных нужно построить систему алгебраических уравнений исходя из конечно-разностного представления дифференциального уравнения (10.12) равновесия пластины. Используя для этого разностный аналог

бигармонического оператора (14.6), получим

$$20w_i - 8(w_k + w_l + w_m + w_n) + 2(w_o + w_p + w_q + w_r) + w_s + w_t + w_u + w_v = \frac{q_i}{D} h^4. \quad (14.7)$$

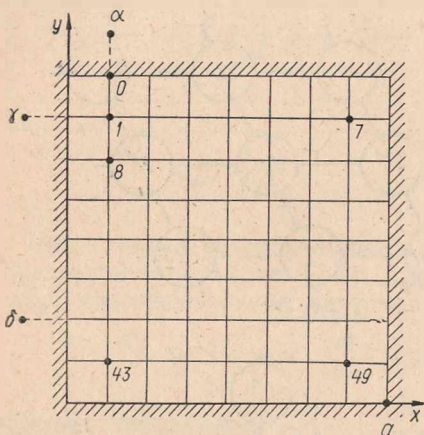


Рис. 14.4

Нетрудно заметить, что в числительном виде выражение (14.7) имеет место лишь для узлов 17—19, 24—26, 31—33. В остальных случаях появляются лишние законтурные неизвестные и известные контурные значения прогиба, что приводит к разностным выражениям, вообще говоря, отличным от (14.7).

Выразим законтурную величину w через основные неизвестные. Для этого воспользуемся разложением $w(x, y)$ в окрестности контурной точки O :

$$w_\alpha = w_0 + h \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 + \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)_0 \quad (14.8)$$

и разностными отношениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2} (w_1 - 2w_0 + w_\alpha); \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)_0 &= \frac{1}{h^3} (w_\alpha - 3w_0 + 3w_1 - w_8). \end{aligned} \quad (14.9)$$

Принимая во внимание, что на контуре в силу граничных условий отсутствуют прогиб ($w_0 = 0$) и угол поворота $\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 = 0 \right]$, после подстановки (14.9) в (14.8) получим

$$w_\alpha = 3w_1 - 0,5w_8. \quad (14.10)$$

Аналогичное уравнение получается и для законтурных неизвестных w_δ и w_γ :

$$w_\delta = 3w_{36} - 0,5w_{37}; \quad w_\gamma = 3w_1 - 0,5w_2.$$

Полученными зависимостями воспользуемся для исключения лишних неизвестных при записи разностных уравнений (14.7). При этом получим 2 различные диаграммы оператора (рис. 14.5). По схеме рис. 14.5, а записывают уравнения для узловых точек 1, 7, 43, 49, а по схеме рис. 14.5, б — для остальных двадцати предконтурных точек 2—6, 8, 14, 15, 21, ..., 44—48. Например, уравнение, соответствующее узлу 15, запишется в виде

$$w_1 - 8w_8 + 2w_9 + 23w_{15} - 8,5w_{16} + w_{17} - 8w_{22} + 2w_{23} + w_{29} = \frac{q_{15}h^4}{D},$$

и угловому узлу 43 — в виде

$$w_{29} - 8,5w_{36} + 2w_{37} + 26w_{43} - 8,5w_{44} + w_{45} = \frac{q_{43}h^4}{D}$$

Применяя в зависимости от положения узла один из трех разностных операторов, получим систему линейных алгебраических уравнений с несимметричной и слабозаполненной матрицей.

Обилие нулей в матрице характерно для всех дискретных методов. Несимметрия же матрицы противоречит, вообще говоря, основным принципам механики. Тем не менее так поступали до тех пор, пока решались простые задачи, не требовавшие густой сетки для получения надежных результатов. Практика решения сложных задач с большим числом неизвестных показала, что очень часто увеличение порядка матрицы в методе сеток ухудшает их обусловленность и затрудняет

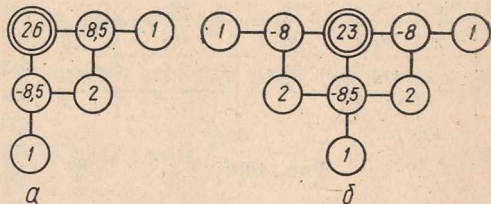


Рис. 14.5

получение решения с нужной точностью. Чтобы преодолеть эти трудности, развивали итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений и улучшали качественные свойства разностных систем уравнений. В частности, если вместо формулы типа (14.10), по которой исключались известные $w_\alpha, w_\beta, \dots, w_\gamma$, записать очевидное выражение

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 = \frac{w_\alpha - w_1}{2h} = 0,$$

то из него получится сразу $w_\alpha = w_1$. Аналогично $w_\beta = w_3$; ...; $w_\gamma = w_1$. В результате исключения законтурных неизвестных таким способом симметрия матриц не нарушается, так как в разностном операторе, построенном для i -го узла, искажается только центральный коэффициент при неизвестной w_i . Все это значительно облегчает построение и решение разностных уравнений на ЭВМ. Однако во многих задачах, оставаясь в рамках метода сеток, сделать матрицу симметричной далеко не всегда просто.

§ 14.2. Вариационно-разностный метод

Вариационно-разностный метод в настоящее время широко применяется при исследовании напряженно-деформированного состояния сложных конструкций. Он использует приемы классических вариационных методов и метода сеток. Здесь вариационная задача, сформулированная для непрерывных функций, заменяется аналогичной задачей для дискретных значений этих функций. Дискретизация энергетических соотношений позволяет учесть сложные геометрические формы объекта и неоднородные условия нагружения, а привлечение вариационных принципов существенно улучшает свойства разрешающих систем разностных уравнений.

Как и в обычных разностных методах, на исследуемую область накладывается сетка, а в качестве неизвестных выбираются дискретные значения искомой функции в узловых точках. После замены частных производных конечно-разностными отношениями функционал фактически превращается в функцию дискретных узловых значений искомого решения. Из необходимого условия минимума такого функционала

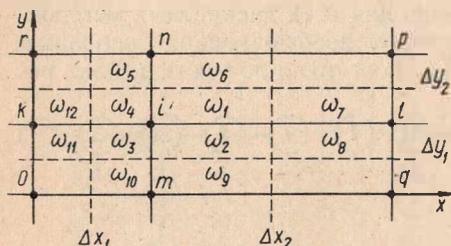


Рис. 14.6

вытекает система алгебраических уравнений с симметричной матрицей ленточной структуры. В связи с дискретизацией подынтегральной функции процесс интегрирования упрощается до формул прямоугольника. Это позволяет иногда при решении систем высокого порядка обходиться без хранения матрицы и эффективно применять итерационные методы.

На примере функционала

$$I = \frac{1}{2} \iint D[(u_x')^2 + (u_y')^2] dx dy - \iint Q u dx dy \quad (14.11)$$

рассмотрим процесс построения формул для коэффициентов вариационно-разностной системы алгебраических уравнений. Наложим на рассматриваемую область s две прямоугольные сетки (рис. 14.6) — основную с параметрами Δx_i , Δy_j и вспомогательную с линиями, проходящими через середины межузловых расстояний основной сетки. В результате область s покроется прямоугольными площадками ω_k (рис. 14.6). Дискретные величины u_i , D_i будем рассматривать как средние значения соответствующих функций в пределах площадок ω_k , непосредственно примыкающих к i -му узлу. Для вычисления производных u_x , u_y воспользуемся простейшими односторонними разностными формулами типа

$$u_x \approx \frac{u(x + \Delta x_2, y) - u(x, y)}{\Delta x_2}$$

или

$$u_x' \approx \frac{u(x, y) - u(x - \Delta x_1, y)}{\Delta x_1}.$$

При этом значения $(u_x')_{\omega_k}$, $(u_y')_{\omega_k}$ должны выражаться через ближайшие узловые параметры u_i , u_l , ..., между которыми расположена рассматриваемая площадка ω_k . Например, для площадки ω_3

$$D(x, y) = D_i; \quad u(x, y) = u_i;$$

$$(u_x')_{\omega_3} \approx \frac{u_l - u_k}{\Delta x_1}; \quad (u_y')_{\omega_3} \approx \frac{u_i - u_m}{\Delta y_1},$$

а для ω_{12} — соответственно

$$D_k; \quad u_k; \quad \frac{u_l - u_k}{\Delta x_1}; \quad \frac{u_r - u_k}{\Delta y_2}.$$

Прямоугольная сетка не всегда удобна для описания областей сложной конфигурации. Как и в методе сеток, здесь приемлемы другие виды деления и соответствующие им разностные операторы.

Очевидно, что подынтегральная функция в результате такой дискретизации сохранит постоянную, свою для каждой площадки ω_k , величину. В связи с этим интегралы по всей области легко заменяются на суммы приближенных квадратур по всем элементарным площадкам ω_k :

$$\begin{aligned} I &\approx \sum I_k; \\ I_k &= \frac{1}{2} D_k [(u'_x)^2 + (u'_y)^2]_k \omega_k - Q_k u_k \omega_k. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Разностное алгебраическое уравнение для i -го узла получается из условия

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sum_k I_k \right) = 0, \quad (14.13)$$

в котором интерес представляют слагаемые I_i , явно содержащие узловый параметр u_i и не исчезающие при дифференцировании. В нашем примере таких слагаемых 12, и если ввести локальную нумерацию для площадок ω_t ($t = 1, 2, \dots, 12$), то из (14.13) с учетом (14.12) можно получить

$$\sum \left\{ D \left[u'_x \frac{\partial (u'_x)}{\partial u_i} + u'_y \frac{\partial (u'_y)}{\partial u_i} \right] - \frac{\partial u}{\partial u_i} Q \right\} \omega_t = 0. \quad (14.14)$$

Выпишем разновидности выражения u'_x , содержащие узловое значение u_i . В нашем примере их всего лишь две:

$$\frac{u_l - u_i}{\Delta x_2} \quad \text{для } t = 1, 2, 7, 8;$$

$$\frac{u_i - u_k}{\Delta x_1} \quad \text{для } t = 3, 4, 11, 12.$$

В остальных областях ω_t ($t = 5, 6, 9, 10$) u'_x не содержит u_i . Выражение u'_y также имеет только две разновидности:

$$\frac{u_n - u_i}{\Delta y_2} \quad \text{для } t = 1, 4, 5, 6;$$

$$\frac{u_i - u_m}{\Delta y_1} \quad \text{для } t = 2, 3, 9, 10.$$

После группировки коэффициентов при неизвестных $u_k, u_l, \dots$ в (14.14) получим окончательный вид i -й строки вариационно-разностной системы. Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что при равномерной сетке $\Delta x = \Delta y = h$ из (14.14) уравнение для i -го узла будет иметь вид

$$\begin{aligned} &-(D_i + D_k) u_k - (D_i + D_m) u_m + (4D_i + D_k + D_m + D_n + D_l) u_i - \\ &-(D_i + D_n) u_n - (D_i + D_l) u_l = 2q_i h^2. \end{aligned}$$

Системы подобной структуры характерны для вариационно-разностного метода. Поскольку коэффициенты получить сравнительно легко, при решении системы уравнения часто применяют итерационные методы, у которых наиболее связной процедурой является умножение строки на столбец. Поэтому вместо формирования и хранения всех строк матрицы перечисляются только ненулевые элементы нужной строки. Это легко реализуется на алгоритмических языках АЛГОЛ, ФОРТРАН и др.

Сеточные уравнения, полученные в результате подстановки разностных выражений в дифференциальное уравнение задачи, путем линейных преобразований можно привести к уравнениям вариационно-разностного метода. В этом отношении метод сеток и вариационно-разностный метод отличаются лишь процедурой получения одной и той же разрешающей системы разностных уравнений. Следует признать, что вариационный способ оказался более приспособленным к полной автоматизации процесса построения сеточных уравнений, обеспечивающей симметрию матриц без ограничений на очертания области и крайние условия.

Глава 15

СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД

§ 15.1. Понятие структуры решения краевой задачи

Важное преимущество метода Ритца по сравнению с другими вариационными методами состоит в том, что для решения многих практических задач достаточно, чтобы координатные функции удовлетворяли только геометрическим условиям, записанным относительно функции и ее первой производной по нормали к контуру. Однако даже при таких, относительно простых ограничениях построить структуру решения для объектов сложной конфигурации довольно трудно. Структурный метод позволяет строить координатные последовательности, удовлетворяющие всем краевым условиям задачи и имеющие определенный произвол внутри области. Использование таких структур решения в сочетании с методом Ритца значительно расширяет области применения вариационных методов.

Картина поля (температурного, деформационного, напряжений и т. п.) зависит не только от физических законов, учитываемых основными дифференциальными уравнениями соответствующей задачи, но и от формы тела, формы участков контактного взаимодействия тел и его характера, расположения возбудителей поля и др. Наличие геометрической информации в задачах расчета полей создает специфические трудности, связанные с необходимостью учитывать ее на аналитическом уровне. Структурный метод, или метод *R-функций* [48], позволяет включать геометрическую информацию в формулы (структуры) вида

$$u = B(\Phi), \quad (15.1)$$

где u — искомое решение (в зависимости от вида задачи это может быть функция, вектор-функция, тензор и т. п.); Φ — элемент некоторого множества M ; B — оператор, который строится так, что при любом выборе элемента Φ (неопределенного компонента) в множестве M формула (15.1) удовлетворяет некоторым граничным условиям задачи.

Структура, удовлетворяющая всем граничным условиям, называется *общей структурой*. Очевидно, что общая структура, удовлетворяющая также и основным уравнениям краевой задачи, является ее точным решением. К числу граничных условий относятся также условия на бесконечности и в других «особых» точках.

1. Задача о кручении стержня с односвязным поперечным сечением Ω сводится к отысканию функции напряжений $u(x, y)$, удовлетворяющей в Ω уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

и на границе $\partial\Omega$ — краевому условию

$$u = 0.$$

Пусть, например, стержень имеет пятиугольное сечение $ABCDE$ (рис. 15.1). Функция

$$u = y(a^2 - x^2) \left(y + \frac{h-b}{a}x - h \right) \left(y - \frac{h-b}{a}x - h \right) \Phi \quad (15.2)$$

при любом выборе ограниченной функции Φ удовлетворяет краевому условию $u = 0$ на границе и, следовательно, является структурой решения. Так как других краевых условий в рассматриваемой задаче нет, то структура (15.2) является также и общей структурой.

Кроме удовлетворения тем или иным граничным условиям, структура должна также удовлетворять условию полноты. Последнее предполагает существование в множестве M такого элемента Φ , который при подстановке в структуру (15.1) превращает ее в точное решение задачи или, по крайней мере, в достаточно хорошее его приближение (в том или ином смысле). В последнем случае говорят, что *структура полна в некотором смысле*.

Структура (15.2) полна, если стержень имеет сечение, показанное на рис. 15.1 слева. Если же $h < b$, то полнота структуры (15.2) нарушается, так как независимо от выбора неопределенной компоненты Φ функция (15.2) равна нулю не только на границе области Ω , но и на продолжениях сторон AB и CB внутри области.

2. Задача об изгибе свободноопертой прямоугольной пластины (рис. 15.1 справа) сводится к отысканию решения уравнения С. Жермен

$$D\Delta\Delta w = q$$

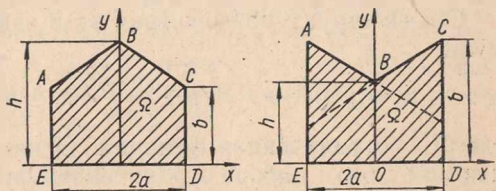


Рис. 15.1

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \omega|_{\partial\Omega} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \nu^2} \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (15.3)$$

где ν — внутренняя нормаль к контуру Ω .

Общей структурой решения этой задачи является, например, формула

$$\omega = y^2 (a^2 - x^2)^2 \left(y + \frac{h-b}{a} x - h \right)^2 \left(y - \frac{h-b}{a} x - h \right)^2 \Phi, \quad (15.4)$$

где Φ — ограниченная функция. Однако эта структура не полна, так как при любом выборе ограниченной функции Φ кроме условий (15.3) будет выполняться также условие жесткого защемления:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Наличие этого «лишнего» условия не позволяет воспользоваться структурой (15.4) для расчетов.

Для построения полных структур необходимо учитывать на аналитическом уровне геометрическую информацию о форме области Ω (или о форме участков ее границы — в задачах с краевыми условиями смешанного типа). Точнее, если $\partial\Omega$ — часть границы или вся граница некоторой области Ω , то необходимо строить такую функцию ω , которая бы удовлетворяла условиям

$$\omega > 0 \quad \text{вне } \partial\Omega_1; \quad (15.5)$$

$$\omega = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_1; \quad (15.6)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu} \quad \text{на } \partial\Omega_1; \quad (15.7)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \nu^2} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \nu^3} = \dots = \frac{\partial^n \omega}{\partial \nu^n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_1. \quad (15.8)$$

Если функция ω удовлетворяет условиям (15.5) и (15.6), то уравнение $\omega = 0$ является *уравнением* $\partial\Omega_1$. Если, кроме того, выполняется и условие (15.7), то уравнение $\omega = 0$ называется *нормализованным до 1-го порядка*, а при выполнении также и условий (15.8) — *нормализованным до n-го порядка*.

Построить функции ω для объектов практически произвольной геометрической формы можно с помощью так называемых R -функций, являющихся функциями обычных непрерывных аргументов и обладающих в то же время рядом логических свойств [48].

§ 15.2. Логические операции над множествами

Для простоты изложения будем говорить о множествах точек на плоскости или в пространстве. Принадлежность точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ множеству A принято обозначать $x \in A$. В противном случае пишут $x \notin A$ (или $x \notin A$). Если множество B является частью множества A , то пишут $B \subset A$. Множество всех точек пространства называют

унитарным множеством. Будем обозначать его I . Для удобства вводят также понятие *пустого множества* $\emptyset$ как множества, не содержащего ни одного элемента.

Основные логические операции над множествами, позволяющие с помощью данных множеств строить новые, следующие:

1) *пересечение* $A \cap B$ (читается « A и B ») — множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат как A , так и B (рис. 15.2, а);

2) *соединение (объединение)* $A \cup B$ (читается « A или B ») — множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств — A или B (рис. 15.2, б);

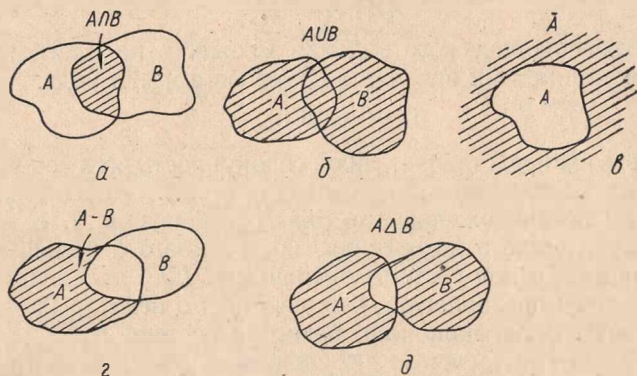


Рис. 15.2

3) *дополнение* $\bar{A}$ (читается «не A ») — множество, содержащее все точки унитарного пространства I , которые не вошли в A (рис. 15.2, в);

4) *разность* $A - B$ — множество, состоящее из всех элементов множества A , которые не принадлежат B (рис. 15.2, г). Множество $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ называется *симметрической разностью* множеств A и B (рис. 15.2, д). Очевидно, что $I - A = \bar{A}$.

Приведем некоторые свойства логических операций над множествами:

1) коммутативные законы —

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A;$$

2) ассоциативные законы —

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

3) идемпотентные законы —

$$A \cap A = A; \quad A \cup A = A;$$

4) дистрибутивные законы —

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

5) правила, относящиеся к унитарному множеству I и пустому множеству $\emptyset$ —

$$\begin{aligned} A \cap I &= A; & A \cup I &= I; \\ A \cap \emptyset &= \emptyset; & A \cup \emptyset &= A; \end{aligned}$$

6) правила, относящиеся к операции «дополнение», —

$$\bar{A} = A; \quad \bar{I} = \emptyset; \quad \bar{\emptyset} = I;$$

7) правила де Моргана —

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

8) закон логического противоречия —

$$A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

9) закон исключенного третьего —

$$A \cup \bar{A} = I.$$

В качестве канонического задания множеств на плоскости или в пространстве примем их задание с помощью формул вида

$$\Omega = \{\omega \geq 0\}, \quad (15.9)$$

т. е. множество Ω представляет собой совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству (15.9). Относительно функции ω введем предположение, что она H -реализуема, т. е. имеет вид единого аналитического выражения, построенного с помощью символов некоторой базисной системы операций H (для дальнейшего изложения достаточно предполагать, что речь идет о некоторых элементарных функциях). Если, например, базисная система $H_0 = \{x + y, xy, a, \forall a \in \{-\infty, +\infty\}\}$ состоит из сложения, умножения и действительных чисел, то множество $\mathfrak{M}\{H_0\}$ H -реализуемых функций представляет собой множество целых рациональных функций (полиномов).

Если задана некоторая («опорная») система областей $\Omega_i = \{\omega_i \geq 0\}$ ($i = 1, \dots, m$), то, применяя к ним те или иные логические операции, будем получать новые области, о которых, вообще говоря, уже нельзя утверждать, что они также могут быть заданы каноническими неравенствами вида (15.9) при использовании заданной базисной системы операций H .

Рассмотрим пример. Пусть опорная система состоит из следующих областей:

$$\Omega_1 = \{1 - x^2 - (y + 1)^2 \geq 0\} \text{ — круг радиуса } r = 1 \text{ с центром в точке } (0, -1);$$

$$\Omega_2 = \{16 - x^2 - y^2 \geq 0\} \text{ — круг радиуса } R = 4 \text{ с центром в точке } (0, 0);$$

$$\Omega_3 = \{4 - x^2 \geq 0\} \text{ — вертикальная полоса, ограниченная прямыми } x = \pm 2;$$

$$\Omega_4 = \{1 - y^2 \geq 0\} \text{ — горизонтальная полоса, ограниченная прямыми } y = \pm 1. \quad (15.10)$$

Тогда область Ω , определяемая логической формулой

$$\Omega = [\bar{\Omega}_1 \cap \Omega_2] \cap [\bar{\Omega}_4 \cap \bar{\Omega}_3], \quad (15.11)$$

имеет вид, показанный на рис. 15.3. Область Ω нельзя описать неравенством $p(x, y) \geq 0$, где $p(x, y)$ — целая рациональная функция, хотя каждая из опорных областей, участвующих в формировании области Ω , как это видно из формул (15.10), неравенством такого вида описывается. Это свидетельствует о том, что базисная система

$$H_0 = \{x + y, xy, \text{const} \in \{-\infty; +\infty\}\},$$

используемая при построении полиномов, не является алгоритмически полной (по терминологии В. Л. Рвачева [48]). Для алгоритмически полной системы характерно, что если опорные области H -реализуемы, то H -реализуема и всякая область, полученная путем логических операций над ними.

Алгоритмически полную базисную систему операций можно получить, добавляя к системе $H_0 = \{x + y, xy, \text{const} \in \{-\infty, +\infty\}\}$ одну из так называемых *достаточно полных* систем R -функций. Приведем некоторые из таких систем.

1. Система R_α :

$$x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \text{ (R-конъюнкция);}$$

$$x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \text{ (R-дизъюнкция);} \quad (15.12)$$

$$\bar{x} \equiv -x \text{ (R-отрицание),}$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$ — произвольная симметричная функция, удовлетворяющая условию $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$.

Частные случаи системы R_α — системы R_0 и R_1 , получающиеся при $\alpha \equiv 0$ и $\alpha \equiv 1$ соответственно:

система R_0 :

$$x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\bar{x} \equiv -x;$$

система R_1 :

$$x \wedge_1 y \equiv \frac{1}{2} (x + y - |x - y|) \equiv \min(x, y);$$

$$x \vee_1 y \equiv \frac{1}{2} (x + y + |x - y|) \equiv \max(x, y);$$

$$\bar{x} \equiv -x.$$

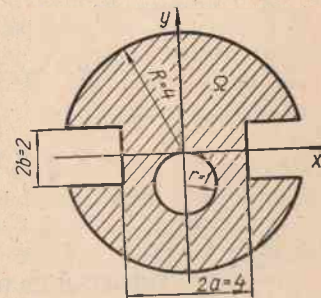


Рис. 15.3

2. Система R_0^m :

$$x \wedge_0^m y \equiv (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}};$$

$$x \vee_0^m y \equiv (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}};$$

$$\bar{x} \equiv -x.$$

3. Система R_p :

$$x \wedge_p y \equiv x + y - [|x|^p + |y|^p]^{\frac{1}{p}};$$

$$x \vee_p y \equiv x + y + [|x|^p + |y|^p]^{\frac{1}{p}};$$

$$\bar{x} \equiv -x,$$

где $p > 1$.

К алгоритмически полным системам, не нарушая их полноты, можно добавлять какие угодно другие операции. Это может привести лишь к расширению класса геометрических объектов, описываемых такими системами.

Практика применения R -функций к аналитическому описанию сложных геометрических объектов основана на их соответствии логическим операциям над множествами.

§ 15.3. Построение функции ω

Пусть $\Omega_i = \{\varphi_i \geq 0\}$ ($i = 1, 2$) есть некоторые области на плоскости или в пространстве, а φ_i — заданные H -реализуемые функции. Тогда области Σ_1 и Σ_2 , определяемые логическими формулами

$$\Sigma_1 = \Omega_1 \cap \Omega_2; \quad \Sigma_2 = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

могут быть описаны неравенствами

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= [\varphi_1 \wedge \varphi_2 \geq 0]; \\ \Sigma_2 &= [\varphi_1 \vee \varphi_2 \geq 0]. \end{aligned} \tag{15.13}$$

При этом в неравенствах (15.13) R -операции $x \wedge_\alpha y$ и $x \vee_\alpha y$ можно заменить любой другой соответствующей парой R -операций — $\wedge_0^m, \vee_0^m$; $\wedge_p, \vee_p$; ...

Если в формировании некоторой области Ω участвуют несколько опорных областей $\Omega_i = \{\varphi_i \geq 0\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то для получения соответствующего неравенства достаточно в логической формуле $\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$ заменить символы Ω_i левыми частями φ_i соответствующих неравенств, а символы логических операций $\cap$ и $\cup$ — одной из соответствующих пар R -операций ($\wedge_0, \vee_0$; $\wedge_0^m, \vee_0^m$; ...).

Рассмотрим несколько примеров.

1. Область Ω (рис. 15.3), определяемую логической формулой (15.11), можно задать неравенством

$$\omega \equiv \overline{[1 - x^2 - (y + 1)^2] \wedge_0 [16 - x^2 - y^2]} \wedge_0 \overline{[(1 - y^2) \wedge_0 (4 - x^2)]}$$

или

$$\omega \equiv \{[x^2 + (y + 1)^2 - 1] \wedge_0 [16 - x^2 - y^2]\} \wedge_0 \{[y^2 - 1] \vee_0 (4 - x^2)\}. \quad (15.14)$$

Пользуясь формулами (15.12), можно исключить в формуле (15.14) символы $\wedge_0$, $\vee_0$ и получить функцию ω в виде обычной элементарной функции. Однако на практике этого не делают, так как R -операции $\wedge_0$, $\vee_0$, ... можно рассматривать как обычные вычислительные операции.

Функция ω (15.14) положительна внутри области Ω и отрицательна вне ее. Поэтому уравнение $\omega = 0$ есть уравнение границы области Ω . Чтобы функция ω была нормализованной до 1-го порядка, т. е. удовлетворяла бы и условию (15.7), можно, вообще говоря, воспользоваться формулой

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + |\text{grad } \omega_1|^2}}, \quad (15.15)$$

где ω_1 — функция, удовлетворяющая лишь условиям (15.5) и (15.6). Однако на практике применение формулы (15.15) приводит к неоправданно громоздким формулам. Эту трудность можно обойти, если есть возможность задать опорные области каноническими неравенствами с нормализованными на границах соответствующих им областей левыми частями. Приведем примеры таких опорных областей.

Нормальное уравнение прямой

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, а α — угол наклона этого перпендикуляра к оси абсцисс, нормализовано до бесконечного порядка. Аналогичным, т. е. нормализованным до бесконечного порядка, является нормальное уравнение плоскости:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, а $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — его направляющие косинусы.

Нормализованное до 1-го порядка уравнение окружности радиуса R с центром в точке (a, b) можно записать в виде

$$\frac{1}{2R} [R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2] = 0.$$

Это же уравнение рассматривают и как нормализованное до 1-го порядка уравнение бесконечного цилиндра, ось которого параллельна оси z .

Нормализованное до 1-го порядка уравнение края вертикальной полосы, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ ($b > a$), может быть

записано в виде

$$-\frac{1}{b-a}(x-a)(x-b)=0. \quad (15.16)$$

Применяя формулы переноса и поворота осей координат, эту полосу можно расположить на плоскости произвольно. Уравнение (15.16) рассматривают и как нормализованное до 1-го порядка уравнение двух параллельных плоскостей (границы бесконечного слоя).

Нормализованное до 1-го порядка уравнение сферы радиуса R с центром в точке (a, b, c) можно записать в виде

$$\frac{1}{2R}[R^2 - (x-a)^2 - (x-b)^2 - (x-c)^2] = 0.$$

Оказывается, если пользоваться базисными системами R_α ($\alpha = \text{const}$) или R_p ($p \geq 2$), то при условии, что опорные неравенства

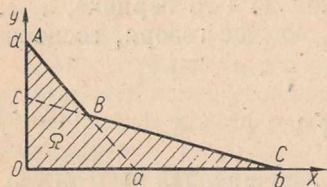


Рис. 15.4

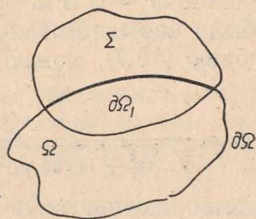


Рис. 15.5

нормализованы до 1-го порядка, неравенство $\omega \geq 0$, определяющее полученную с их помощью область Ω , также будет нормализовано до 1-го порядка. Если же опорные неравенства нормализованы до не-

которого порядка n , то при использовании системы R_p при $p \geq n+1$ обеспечивается нормализованность до n -го порядка и функции ω .

2. Нормализованное до 1-го порядка уравнение границы области Ω , изображенной на рис. 15.3, можно записать в виде

$$\omega = \left\{ \left[-\frac{1}{2}(x^2 + (y+1)^2 - 1) \right] \wedge_0 \left[\frac{1}{8}(16 - x^2 - y^2) \right] \right\} \wedge_0 \left\{ \left[\frac{1}{2}(y^2 - 1) \right] \vee_0 \left[\frac{1}{4}(4 - x^2) \right] \right\} = 0. \quad (15.17)$$

Функция ω (15.17) отличается от функции ω (15.14) лишь постоянными коэффициентами в квадратных скобках.

3. Четырехугольную область Ω (рис. 15.4) можно построить с помощью опорных областей

$\Omega_1 = \{x \geq 0\}$ — правая полуплоскость;

$\Omega_2 = \{y \geq 0\}$ — верхняя полуплоскость;

$\Omega_3 = \left\{ \frac{dx + ay - ad}{\sqrt{a^2 + d^2}} \geq 0 \right\}$ — часть плоскости, лежащая выше прямой AB ;

$\Omega_4 = \left\{ \frac{cx + by - bc}{\sqrt{c^2 + b^2}} \geq 0 \right\}$ — часть плоскости, лежащая выше прямой BC

в соответствии с логической формулой

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap (\bar{\Omega}_3 \cup \bar{\Omega}_4).$$

Воспользовавшись R -операциями $\bigwedge_4, \bigvee_4$:

$$x \bigwedge_4 y \equiv x + y - \sqrt[4]{x^4 + y^4};$$

$$x \bigvee_4 y \equiv x + y + \sqrt[4]{x^4 + y^4},$$

нормализованное до 3-го порядка уравнение четырехугольника можем записать в виде

$$\omega \equiv (x \bigwedge_4 y) \bigwedge_4 \left[\frac{ad - dx - ay}{\sqrt{a^2 + d^2}} \bigvee_4 \frac{bc - cx - by}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right].$$

При решении краевых задач со смешанными граничными условиями появляется необходимость строить нормализованные уравнения участков границ областей. Пусть требуется написать уравнение участка $\partial\Omega_1$, содержащегося в области $\Sigma = \{\varphi \geq 0\}$, границы $\partial\Omega$, которая определяется уравнением $\omega = 0$ (рис. 15.5).

Границу $\partial\Omega$ можно задать неравенством

$$\partial\Omega = \{-\omega^2 \geq 0\},$$

а ее участок $\partial\Omega_1$ рассматривать как пересечение областей $\Sigma = \{\varphi \geq 0\}$ и $\partial\Omega = \{-\omega^2 \geq 0\}$:

$$\partial\Omega_1 = \{\varphi \geq 0\} \cap \{-\omega^2 \geq 0\}.$$

Тогда, следуя 1-й из формул (15.13), неравенство, определяющее $\partial\Omega_1$, можно получить в виде

$$\omega_1 \equiv \varphi \bigwedge_\alpha (-\omega^2) \geq 0. \quad (15.18)$$

При этом вне $\partial\Omega_1$ функция ω_1 строго отрицательна. Пользуясь тем, что $x \bigwedge_\alpha y \equiv x \bigvee_\alpha y$, формулу (15.18) можно заменить более удобной формулой

$$\omega_1 \equiv -\omega_1 \equiv \bar{\varphi} \bigvee_\alpha \omega^2 = 0. \quad (15.19)$$

[Как и ранее, вместо операций $\bigwedge_\alpha, \bigvee_\alpha$ в формулах (15.18), (15.19) можно пользоваться и другими соответствующими R -функциями.]

Отметим также следующую форму уравнения:

$$\omega_2 \equiv \sqrt{\bar{\varphi} \bigvee_\alpha \omega^2} = 0 \quad (15.20)$$

Форма (15.20) обладает тем свойством, что если функция ω нормализована до 1-го порядка, то функция ω_2 также нормализована до 1-го порядка (за исключением, возможно, конечных точек участка $\partial\Omega_1$). Аналогично уравнение

$$\omega_3 \equiv \sqrt[p]{\bar{\varphi} \bigvee_\alpha \omega^2} = 0$$

при $p \geq n + 1$ нормализовано до n -го порядка, если до n -го порядка нормализована функция ω .

4. Пусть область Ω представляет собой прямой круговой цилиндр высотой h и радиусом R (рис. 15.6). Нужно написать нормализованные

до 1-го порядка уравнения правой половины его нижнего основания $\partial\Omega_1$ и остальной части $\partial\Omega_2$ его поверхности.

В качестве опорных областей выберем следующие:

$$\Sigma_1 = \left\{ \frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2) \geq 0 \right\}; \quad \Sigma_2 = \{z - h \geq 0\};$$

$$\Sigma_3 = \{z \geq 0\}; \quad \Sigma_4 = \{y \geq 0\}.$$

Участок $\partial\Omega_1$ выделен из плоскости $\partial\Sigma_3 = \{z = 0\}$ областью $\Sigma_1 \cap \Sigma_4$, которая может быть задана неравенством

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_4 = \left\{ \left[\frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2) \wedge \alpha y \right] \geq 0 \right\}.$$

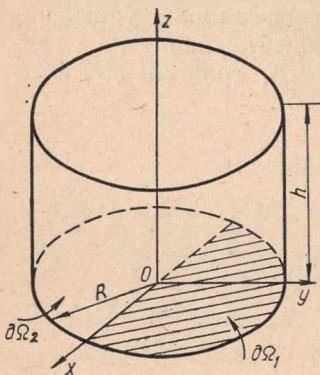


Рис. 15.6

Тогда, согласно (15.20), нормализованное до 1-го порядка уравнение $\partial\Omega_1$ получим в виде

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\left[\frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2) \wedge \alpha y \right] \vee \alpha z^2}.$$

Остальную часть $\partial\Omega_2$ представим как объединение левой половины $\partial\Omega_1$ нижнего основания и остальной части $\partial\Omega_2$. Для $\partial\Omega_1$, пользуясь ее симметрией с $\partial\Omega_1$ относительно плоскости xOz , можно записать уравнение

$$\begin{aligned} \omega_1' &\equiv \omega_1(x_1, -y, z) = \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2) \wedge \alpha \bar{y} \right] \vee \alpha z^2} = 0. \end{aligned}$$

Часть границы $\partial\Omega_2$ можно рассматривать как часть границы области $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, выделяемую областью Σ_3 . Следовательно, уравнение $\partial\Omega_2$ можно записать в виде

$$\omega_2 \equiv \sqrt{\bar{z} \vee \alpha \left\{ \frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2) \wedge \alpha (h - z) \right\}^2} = 0.$$

Поскольку функции ω_1 и ω_2 нормализованы до 1-го порядка, а операция $\wedge_\alpha$ сохраняет эту нормализованность, то, пользуясь тем, что $x \wedge_\alpha y = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, $y \geq 0$ или $y = 0$, $x \geq 0$, нормализованное до 1-го порядка уравнение участка $\partial\Omega_2$ напомним в виде

$$\begin{aligned} \omega_2 &\equiv \omega_1' \wedge_\alpha \omega_2 \equiv \sqrt{\frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2) \vee \alpha z^2 \wedge_\alpha} \\ &\wedge_\alpha \sqrt{\bar{z} \vee \alpha \left\{ \frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2) \wedge \alpha (h - z) \right\}^2} = 0. \end{aligned}$$

§ 15.4. Пучок функций, принимающих на границе области заданные значения

Пусть Ω есть некоторая область, для которой построена функция ω , удовлетворяющая условиям (15.5) — (15.7). Тогда формула

$$u = \omega\Phi, \quad (15.21)$$

где Φ — произвольная ограниченная («неопределенная») функция, определяет пучок функций, равных нулю на границе области Ω . Аналогично можно говорить о пучке функций, равных нулю на некотором участке $\partial\Omega_1$ границы $\partial\Omega$. При весьма общих предположениях можно считать, что множество функций, входящих в пучок, содержит всякую функцию, принимающую на $\partial\Omega$ значения, равные нулю. Это позволяет рассматривать формулу (15.21) как структуру решения краевой задачи, имеющей краевое условие $u = 0$ на $\partial\Omega$ (или на $\partial\Omega_1$). Нетрудно заметить, что пучок функций, равных нулю на $\partial\Omega$, представляет собой линейное множество функций (линеал).

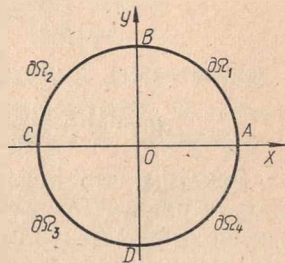


Рис. 15.7

Рассмотрим теперь задачу о построении пучка функций, принимающих в точках $\partial\Omega$ заданные значения, отличные от тождественного нуля.

Пусть $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \dots \cup \partial\Omega_n$, где $\partial\Omega_i$ — непересекающиеся между собой части $\partial\Omega$. Предположим, что $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ есть H -реализуемые функции, определенные везде в $\Omega \cup \partial\Omega$. Требуется построить пучок таких функций, которые удовлетворяли бы условию

$$u = \begin{cases} \varphi_1 & \text{на } \partial\Omega_1; \\ \varphi_2 & \text{на } \partial\Omega_2; \\ \dots & \dots \\ \varphi_n & \text{на } \partial\Omega_n. \end{cases} \quad (15.22)$$

Пусть $\partial\Sigma_i = \partial\Omega - \partial\Omega_i$ есть результат исключения из ее части $\partial\Omega_i$. Пользуясь описанной в предыдущем параграфе методикой, запишем уравнение $\psi_i = 0$ для $\partial\Sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) такое, что $\psi_i \geq 0$ вне $\partial\Sigma_i$. Тогда формулу для пучка функций, принимающих на $\partial\Omega$ значения (15.22), можно записать в виде

$$u = \frac{\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \dots + \varphi_n\psi_n}{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n} + \omega\Phi, \quad (15.23)$$

где Φ — неопределенный компонент пучка.

Рассмотрим пример. Окружность единичного радиуса разделена на четыре части AB, BC, CD и DA (рис. 15.7). Построить пучок функций, удовлетворяющих условию

$$u = \begin{cases} x + y & \text{на } \partial\Omega_1 = AB; \\ y & \text{на } \partial\Omega_2 = BC; \\ xy & \text{на } \partial\Omega_3 = CD; \\ x & \text{на } \partial\Omega_4 = DA. \end{cases}$$

Часть $\partial\Sigma_1 = BCDA$ можно рассматривать как часть окружности $\omega \equiv 1 - x^2 - y^2 = 0$, выделяемую областью $\varphi \equiv 1 - x - y \geq 0$. Согласно формуле (15.20), уравнение $\partial\Sigma_1$ можно записать в виде

$$\psi_1 \equiv \sqrt{(x+y-1) \vee_\alpha (1-x^2-y^2)^2} = 0.$$

Аналогично

$$\psi_2 \equiv \sqrt{(-x+y-1) \vee_\alpha (1-x^2-y^2)^2} = 0;$$

$$\psi_3 \equiv \sqrt{(-x-y-1) \vee_\alpha (1-x^2-y^2)^2} = 0;$$

$$\psi_4 \equiv \sqrt{(x-y-1) \vee_\alpha (1-x^2-y^2)^2} = 0.$$

Следовательно, формула для искомого пучка следующая:

$$u = \frac{(x+y)\psi_1 + y\psi_2 + xy\psi_3 + x\psi_4}{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4} + (1-x^2-y^2)\Phi.$$

Заметим, что пучок функций, которые на $\partial\Omega$ принимают значения, не равные тождественно нулю, линеалом не является. Первое слагаемое формулы (15.23) будем называть *функцией, склеивающей граничные значения пучка*, а функции ψ_i , со значениями которых склеивающая функция совпадает на соответствующих участках границы, — *нагружающими функциями*.

Во многих случаях можно отказываться от предположения, что нагружающие функции определены везде в области Ω . Например, если бы в рассмотренном примере вместо функции $x+y$ была задана функция $\sqrt{x}$, не определенная в левой половине области Ω , то можно было бы заменить ее функцией $\sqrt[4]{x^2 + (1-x^2-y^2)} \equiv \sqrt[4]{1-y^2}$, совпадающей с ней на $\partial\Omega_1$. Если бы нагружающей функцией на этом участке была, например, функция $1/x$, имеющая разрыв вдоль вертикального диаметра, то ее можно было бы заменить функцией

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 - x^2 - y^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Формулу (15.23) для пучка функций можно рассматривать как полную структуру в краевой задаче, где искомая функция на границе $\partial\Omega$ должна принимать заданные значения, в общем случае определяемые на различных участках различными зависимостями.

§ 15.5. Нормализанта и обобщенная формула Тейлора

Для простоты изложения рассмотрим лишь двумерные задачи построения пучков таких функций, которые на границе (или ее части) некоторой области Ω удовлетворяют заданным дифференциальным соотношениям. Поскольку функции, входящие в пучок, должны иметь смысл везде в области Ω , то возникает необходимость продолжать эти дифференциальные соотношения внутрь области. В связи с тем что в точках границы производные по любому направлению можно представить в виде линейных комбинаций производных по касательной и нормали, то достаточно уметь продолжать внутрь области операторы дифференцирования по этим направлениям.

В качестве положительного направления примем направление нормали внутрь области. Пусть $\omega = 0$ есть нормализованное до 1-го порядка уравнение границы $\partial\Omega$. Так как $\partial\Omega$ — линия (или поверхность) уровня для функции ω , то вектор $\text{grad } \omega$ направлен по нормали к $\partial\Omega$, а в силу нормализованности функции ω

$$|\text{grad } \omega| \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = 1.$$

Поэтому векторное поле, определяемое вектором $\text{grad } \omega$, на границе $\partial\Omega$ имеет направление нормали ν , а следовательно, вектор

$$\text{grad } \omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \bar{j}$$

можно рассматривать как продолжение внутрь области Ω вектора нормали ν , определенного лишь на границе области Ω . Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\nu, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\nu, y),$$

то выражение

$$D_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (15.24)$$

может рассматриваться как продолжение производной по нормали $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ внутрь Ω .

Аналогично для продолжения производных высшего порядка, определяемых формулой

$$-\frac{\partial^n u}{\partial \nu^n} \equiv \left[\cos(\nu, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\nu, y) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n u,$$

получаем выражение

$$D_n u \equiv \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u.$$

В частности,

$$D_2 u \equiv \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Подобным образом получаем продолжение производных по касательной (при левом обходе границы):

$$T_1 u \equiv -\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$T_2 u \equiv \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Из сказанного следует, что операторы D_n принадлежат пучку функций, совпадающих на границе с $\frac{\partial^n}{\partial \nu^n}$, а операторы T_n — пучку функций, совпадающих с $\frac{\partial^n}{\partial \tau^n}$. Поэтому

$$\begin{aligned} D_n u &\equiv \varphi + \omega \Phi_1; \\ T_n u &\equiv \psi + \omega \Phi_2, \end{aligned} \quad (15.25)$$

где φ и ψ — какие-либо функции, определенные в Ω и совпадающие на границе $\partial\Omega$ с $\frac{\partial^n u}{\partial \nu^n}$ и $\frac{\partial^n u}{\partial \tau^n}$ соответственно.

Заметим, что для операторов D_n и T_n справедливы некоторые формулы, аналогичные формулам для обычных операторов дифференцирования:

$$\begin{aligned} D_1(uv) &\equiv uD_1v + vD_1u; \\ D_2(uv) &\equiv uD_2v + 2D_1uD_1v + vD_2u; \\ T_1(uv) &\equiv uT_1v + vT_1u; \\ T_2(uv) &\equiv uT_2v + 2T_1uT_1v + vT_2u; \\ D_1F(u, v) &\equiv \frac{\partial F}{\partial u} D_1u + \frac{\partial F}{\partial v} D_1v \end{aligned} \quad (15.26)$$

и т. д.

С помощью операторов D_k можно нормализовать до заданного порядка n уравнение $\omega = 0$, нормализованное до 1-го порядка. Для этого используют рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \omega_2 &\equiv \omega - \frac{1}{2!} \omega^2 D_2 \omega; \\ \omega_3 &\equiv \omega_2 - \frac{1}{3!} \omega^3 D_3 \omega_2; \\ &\dots \dots \dots \\ \omega_n &\equiv \omega_{n-1} - \frac{1}{n!} \omega^n D_n \omega_{n-1}. \end{aligned}$$

Например, уравнение $\omega \equiv \frac{1}{2} (1 - x^2 - y^2) = 0$ нормализовано на границе единичной окружности до 1-го порядка. Поскольку

$$D_2 \omega \equiv -x^2 - y^2,$$

то функция

$$\omega_2 \equiv \omega - \frac{1}{2!} \omega^2 D_2 \omega \equiv \frac{1}{8} (1 - x^2 - y^2) [4 + (1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2)]$$

нормализована до 2-го порядка.

Пусть ω — функция, нормализованная на $\partial\Omega$ до $(n+1)$ -го порядка, а $f(x, y)$ — некоторая функция. Назовем функцию

$$f^*(x, y) \equiv f\left(x - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x}; y - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

нормализованной функцией $f(x, y)$ по функции $\omega(x, y)$ — нормализантой. Можно показать, что если $\omega(x, y)$ нормализована до $(n+1)$ -го порядка на $\partial\Omega$, а $f(x, y) \in C^n$, то справедливы формулы

$$f^*(x, y) \Big|_{\partial\Omega} = f(x, y) \Big|_{\partial\Omega}; \quad \frac{\partial^k f^*}{\partial \nu^k} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Кроме того,

$$[F(u_1, u_2, \dots, u_n)]^* = F(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*).$$

Используя понятие нормализанты, можно получить формулу разложения функции в окрестности границы $\partial\Omega$, аналогичную классической формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + O[(x - x_0)^{n+1}],$$

где $O[(x - x_0)^{n+1}]$ — величина порядка $(x - x_0)^{n+1}$.

Обобщение формулы Тейлора состоит в следующем. Пусть дано

$$f(x, y)|_{\partial\Omega} = f_0(x, y)|_{\partial\Omega}; \quad \left. \frac{\partial^k f}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} = f_k(x, y)|_{\partial\Omega},$$

где $f_i(x, y)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) — известные H -реализуемые функции. Тогда справедлива формула [49]

$$f(x, y) = f_0^* + f_1^* \omega + \frac{1}{2!} f_2^* \omega^2 + \dots + \frac{1}{n!} f_n^* \omega^n + O(\rho^{n+1}), \quad (15.27)$$

где ρ — кратчайшее расстояние от точки (x, y) до $\partial\Omega$, а функция ω — нормализована до $(n + 1)$ -го порядка; $O(\rho^{n+1})$ — величина порядка ρ^{n+1} .

15.6. Формирование структуры, удовлетворяющей на границе области условиям дифференциального вида

1. Построить пучок функций, удовлетворяющих на границе области Ω соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + au = b \text{ на } \partial\Omega, \quad (15.28)$$

где a и b — заданные на $\partial\Omega$ функции. Если функции a и b на различных участках границы $\partial\Omega$ заданы разными формулами, то, как было показано в § 15.5, их можно продолжить внутрь области Ω с помощью формулы (15.24), выбирая при этом функцию произвольно. Используя формулу (15.24), продолжим соотношение (15.28) внутрь области Ω :

$$D_1 u + au = b + \omega \Phi, \quad (15.29)$$

где Φ — произвольная ограниченная функция. Положим

$$u = \Phi_0 + \omega \Phi_1, \quad (15.30)$$

где Φ_0 и Φ_1 — пока неопределенные непрерывно дифференцируемые функции. Подставляя (15.30) в (15.29) и пользуясь 1-й из формул (15.26), получаем

$$a \Phi_0 + D_1 \Phi_0 + (D_1 \omega) \Phi_0 + \omega D_1 \Phi_1 + a \omega \Phi_1 = b + \omega \Phi. \quad (15.31)$$

Так как в силу нормализованности функции ω

$$D_1 \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \Big|_{\partial\Omega} = \left| \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right|^2 = 1,$$

то функция $D_1\omega$ принадлежит пучку функций, принимающих на $\partial\Omega$ значения, равные единице. Поэтому

$$D_1\omega = 1 + \omega\psi,$$

где ψ — некоторая неопределенная функция. Это позволяет формулу (15.31) переписать в виде

$$D_1\Phi_0 + \Phi_1 + a\Phi_0 = b + \omega\psi_0,$$

где

$$\psi_0 = \Phi - \psi\Phi_1 - D_1\Phi_1 - a\Phi_1.$$

Функция ψ_0 может рассматриваться как некоторая новая неопределенная функция. Отсюда находим

$$\Phi_1 = b + \omega\psi_0 - D_1\Phi_0 - a\Phi_0. \quad (15.32)$$

Подставляя (15.32) в (15.30), получаем

$$\begin{aligned} u &= \Phi_0 - a\omega\Phi_0 - \omega D_1\Phi_0 + \omega^2\psi_0 + b\omega = \\ &= \Phi_0 - a\Phi_0\omega - \omega \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) + \omega^2\psi_0 + b\omega. \end{aligned} \quad (15.33)$$

Формула (15.33), содержащая две неопределенные функции, описывает пучок функций, удовлетворяющих на $\partial\Omega$ дифференциальному соотношению (15.28).

Если в формуле (15.33) выберем функцию ψ тождественно равной нулю, то получим более простую формулу

$$u = \Phi_0 - a\Phi_0\omega - \omega D_1\Phi_0 + \omega b. \quad (15.34)$$

Принять в формуле (15.33) $\Phi_0 \equiv 0$ в общем случае нельзя, не нарушив полноты пучка. Действительно, если $\Phi_0 \equiv 0$, то

$$u = \omega^2\Phi + \omega b. \quad (15.35)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что кроме условия (15.28) функция (15.35) удовлетворяет также «лишнему» условию $\frac{\partial u}{\partial \nu} = b$ на $\partial\Omega$, которому функции рассматриваемого пучка не обязаны удовлетворять. В отличие от этого формула (15.34) обладает достаточной общностью.

2. В некоторых случаях бывает необходимо располагать таким пучком функций, элементы которого удовлетворяют нескольким соотношениям на границе $\partial\Omega$. Характерным примером в этом отношении являются задачи об изгибе пластин и оболочек.

Рассмотрим вначале задачу об изгибе жестко заземленной пластины. На границе $\partial\Omega$ должны выполняться условия

$$w = 0; \quad (15.36)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0. \quad (15.37)$$

Из условия (15.36) следует, что функция w должна принадлежать пучку $w = \omega\Phi$ функций, равных нулю на $\partial\Omega$. Подставляя $w = \omega\Phi$ в (15.37), получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial \nu} \Phi + \omega \frac{\partial\Phi}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Отсюда следует, что $\Phi = 0$ на $\partial\Omega$. Следовательно, функция Φ также принадлежит пучку функций, равных нулю на $\partial\Omega$. Поэтому $\Phi = \omega\Phi_0$, где Φ_0 — ограниченная функция. Таким образом,

$$\omega \equiv \omega^2\Phi_0. \quad (15.38)$$

В задаче о свободноопертой пластине краевые условия имеют вид

$$\omega = 0; \quad (15.39)$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\nu^2} + \nu_0 \frac{\partial^2\omega}{\partial\tau^2} = 0, \quad (15.40)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

На первый взгляд может показаться, что можно принять $\omega = \omega^3\Phi$. Действительно, при таком выборе функции ω будут удовлетворяться оба условия — (15.39) и (15.40). Однако в этом случае будет выполняться и условие (15.37), характерное для жесткого защемления, которое для свободноопертой пластинки, вообще говоря, не должно иметь места. Поэтому формула $\omega = \omega^3\Phi$ не обладает необходимой полнотой и в определяемом ею пучке точное решение не содержится.

Как и в задаче о жестком защемлении, условию (15.39) удовлетворим, полагая $\omega = \omega\Phi$. Продолжим краевое условие (15.40) внутрь области Ω , используя свойства (15.25) операторов D_2 и T_2 :

$$D_2\omega + \nu_0 T_2\omega = \omega\psi_1, \quad (15.41)$$

где ψ — неопределенная функция. В формуле $\omega = \omega\Phi$ положим

$$\Phi = \Phi_0 + \omega\Phi_1.$$

Таким образом, получаем

$$\omega = \omega\Phi_0 + \omega^2\Phi_1. \quad (15.42)$$

Подставляя (15.42) в (15.41) и учитывая свойства (15.26) операторов D_2 и T_2 , получим

$$D_2(\omega\Phi_0) + D_2(\omega^2) \cdot \Phi_1 + 2D_1(\omega^2) D_1(\Phi_1) + \omega^2 D_2(\Phi_1) + \nu_0 T_2(\omega\Phi_0) + \\ + \nu_0 T_2(\omega^2) \cdot \Phi_1 + 2\nu_0 T_1(\omega^2) T_1(\Phi_1) + \nu_0 \omega^2 T_2(\Phi_1) = \omega\psi_1. \quad (15.43)$$

Учитывая, что

$$T_1\omega \equiv 0;$$

$$D_1(\omega^2) \equiv 2\omega D_1\omega;$$

$$T_1(\omega^2) \equiv 2\omega T_1\omega \equiv 0;$$

$$D_2(\omega^2) \equiv 2\omega D_2\omega + 2(D_1\omega)^2 = 2 + \omega\psi;$$

$$T_2(\omega^2) \equiv 2\omega T_2\omega,$$

формулу (15.43) приведем к виду

$$D_2(\omega\Phi_0) + 2\Phi_1 + \nu_0 T_2(\omega\Phi_0) = \omega\psi_0, \quad (15.44)$$

где ψ_0 — новая неопределенная функция, «поглотившая» все функции, умножающиеся на ω . Эта процедура поглощения членов, исчезающих на границе, типична при построении структур. Из формулы (15.44) находим

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2} [D_2(\omega\Phi_0) + \nu_0 T_2(\omega\Phi_0) - \omega\psi_0]. \quad (15.45)$$

Подставляя (15.45) в (15.42), получаем

$$\omega = \omega\Phi_0 - \frac{\omega^2}{2}[D_2(\omega\Phi_0) + v_0T_2(\omega\Phi_0) - \omega\psi_0], \quad (15.46)$$

где Φ_0 и ψ_0 — неопределенные функции, причем 1-я из них существенна, а 2-я может быть принята равной нулю или выбрана из других соображений (см. далее).

3. С прикладной точки зрения важен класс так называемых смешанных задач, в которых на различных участках границы заданы краевые условия разных типов. При этом следует иметь в виду, что если заданы, например, краевые условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} + a_1 u &= b_1 \text{ на } \partial\Omega_1; \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + a_2 u &= b_2 \text{ на } \partial\Omega_2; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + a_m u &= b_m \text{ на } \partial\Omega_m, \end{aligned}$$

где a_i и b_i — известные функции, заданные на соответствующих участках $\partial\Omega_i$ границы, то такую задачу не следует рассматривать как смешанную. Достаточно осуществить описанную в § 15.5 процедуру «склеивания» граничных значений функций a_i , b_i и рассмотреть одно краевое условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + au = b,$$

где a и b — функции, продолжающие граничные значения функций a_i и b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) внутрь области Ω .

Рассмотрим краевую задачу

$$u = \varphi_1 \text{ на } \partial\Omega_1; \quad (15.47)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_2 \text{ на } \partial\Omega_2. \quad (15.48)$$

Пусть $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ — нормализованные уравнения $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ соответственно. Из условия (15.47) следует, что функция u принадлежит пучку функций, принимающих на $\partial\Omega_1$ значения, равные φ_1 . Поэтому

$$u = \varphi_1 + \omega_1\Phi. \quad (15.49)$$

Краевое условие (15.48) продолжим внутрь области Ω :

$$D_1^{(2)}u = \varphi_2 + \omega_2\psi, \quad (15.50)$$

где

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Полагая $\Phi = \Phi_0 + \omega_2\Phi_1$ и подставляя (15.49) в (15.50), как и ранее, получим

$$D_1^{(2)}\Phi_1 + D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_0) + D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) \cdot \omega_2 + D_1^{(2)}(\omega_2)\omega_1\Phi_1 = \varphi_2 + \omega_2\psi.$$

Так как $D_1^{(2)}\omega_2 = 1 + \omega_2\psi_1$, то

$$D_1^{(2)}\varphi_1 + D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_0) + \omega_1\Phi_1 = \varphi_2 + \omega_2\psi_2, \quad (15.51)$$

где ψ_2 — неопределенная функция. Найти из этой формулы функцию Φ_1 непосредственно нельзя, так как для этого пришлось бы делить на функцию ω_1 , равную нулю на $\partial\Omega_1$, что привело бы в конечном итоге к формуле, не удовлетворяющей условию (15.47). Поэтому поступим иначе. Воспользовавшись неопределенностью функции ψ_2 , выделим из выражения $\omega_2\psi_2$ слагаемое $(-\omega_2\Phi_1)$ и перенесем его в левую часть формулы (15.51):

$$D_1^{(2)}\varphi_1 + D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_0) + (\omega_1 + \omega_2)\Phi_1 = \varphi_2 + \omega_2\psi_0,$$

где ψ_0 — неопределенная функция. Отсюда

$$\Phi_1 = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} [\varphi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_0) - D_1^{(2)}\varphi_1 + \omega_2\psi_0]. \quad (15.52)$$

Подставляя (15.52) в (15.49) и учитывая, что $\Phi = \Phi_0 + \omega_2\Phi_1$, получим

$$u = \varphi_1 + \omega_1\Phi_0 + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [\varphi_2 - D_1^{(2)}\varphi_1 - D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_0) + \omega_2\psi_0]. \quad (15.53)$$

Формула (15.53) удовлетворяет условиям (15.47) и (15.48) при любом выборе функций Φ_0 и ψ и обладает необходимой полнотой. При этом функция Φ_0 существенна. Действительно, если принять, например, что $\Phi_0 \equiv 0$, то на участке $\partial\Omega_2$ границы кроме условия (15.48) будет выполняться также «лишнее» условие $u = \varphi_1$.

При построении пучков функций, удовлетворяющих на границе заданным условиям, можно воспользоваться также обобщенной формулой Тейлора, рассмотренной в § 15.5. Во многих случаях применение этой формулы приводит к более простым выражениям.

Рассмотрим, например, краевое условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + au = b \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (15.54)$$

где a и b — заданные функции. Пусть $\omega = 0$ — уравнение $\partial\Omega$, нормализованное до 2-го порядка. Разложим функцию u по обобщенной формуле Тейлора, полагая $n = 1$:

$$u = u^* + u_1^*\omega + O(\omega^2), \quad (15.55)$$

где u_0 и u_1 — какие-либо функции, с которыми функция u и ее производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ совпадают на $\partial\Omega$; u_0^* и u_1^* — их нормализанты по ω ; $O(\omega^2) = \omega^2\psi$ — величина порядка ω^2 ; ψ — некоторая ограниченная функция.

Из условия (15.54)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = b - au \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Следовательно, можно принять, что $u_1 = b - au_0$. Подставляя это выражение в (15.55), получаем

$$u = u_0^* + (b - au_0)^*\omega + \omega^2\psi_0 = u_0^* + (b^* - a^*u_0^*)\omega + \omega^2\psi_0. \quad (15.56)$$

Так как функция u_0 неизвестна, то положим $u_0 = \Phi_0(x, y)$, рассматривая Φ_0 как некоторую неопределенную функцию. Тогда формула (15.56) принимает вид

$$u = (1 - a^*\omega)\Phi_0^* + b^*\omega + \omega^2\psi_0.$$

Согласно формуле нормализованной функции,

$$u = \left[1 - \omega a \left(x - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x}; y - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \Phi_0 \left(x - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x}; y - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \omega b \left(x - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x}; y - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \omega^2 \psi_0(x, y). \quad (15.57)$$

Формула (15.57) определяет тот же пучок функций, что и формула (15.33). Однако в отличие от формулы (15.33) она не содержит частных производных неопределенной функции Φ_0 . В то же время, если, воспользовавшись обычной формулой Тейлора, написать разложения

$$a \left(x - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x}; y - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = a(x, y) - \omega \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + O(\omega^2);$$

$$b \left(x - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x}; y - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = b(x, y) - \omega \left(\frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + O(\omega^2);$$

$$\Phi_0 \left(x - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x}; y - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \Phi_0 - \omega \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + O(\omega^2)$$

и подставить их в формулу (15.57), а затем включить члены 2-го порядка относительно ω в слагаемое $\omega^2\psi_0$, можно получить

$$u = \Phi_0 - \omega \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - a\omega\Phi_0 + b\omega + \omega^2\psi_0.$$

Эта формула совпадает с формулой (15.33).

«Пучок функций» — термин, синонимичный термину «структура решения краевой задачи», если речь идет об удовлетворении на границе $\partial\Omega$ одним и тем же условиям. Однако понятие пучка функций в некотором смысле более общее, так как не предполагает, вообще говоря, его использования при решении именно краевых задач. Так, например, описанной методикой построения пучков функций можно воспользоваться для построения эмпирических формул при обработке результатов экспериментов.

Рассмотренные далее примеры иллюстрируют возможности метода построения пучков и подобраны с таким расчетом, чтобы подчеркнуть некоторые особенности структурного метода.

§ 15.7. Кручение стержня крестообразного поперечного сечения

Рассмотрим задачу о кручении стержня крестообразного поперечного сечения (рис. 15.8). Функция напряжений $u(x, y)$ должна удовлетворять внутри области Ω уравнению Пуассона

$$-\Delta u = 2, \quad (15.58)$$

а на границе области — краевому условию

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (15.59)$$

Из условия (15.59) следует, что решение задачи принадлежит пучку функций, равных нулю на $\partial\Omega$, определяемому формулой $u = \omega\Phi$, где $\omega = 0$ на $\partial\Omega$ и $\omega > 0$ внутри Ω , а Φ — неопределенная функция.

Для построения функции ω воспользуемся методикой, описанной в § 15.3. Выберем в качестве опорных областей следующие:

$\Omega_1 = \{a^2 - x^2 \geq 0\}$ — вертикальная полоса шириной $2a$;

$\Omega_2 = \{a^2 - y^2 \geq 0\}$ — горизонтальная полоса шириной $2a$; (15.60)

$\Omega_3 = \{b^2 - x^2 \geq 0\}$ — вертикальная полоса шириной $2b$;

$\Omega_4 = \{b^2 - y^2 \geq 0\}$ — горизонтальная полоса шириной $2b$.

Область Ω можно определить такой логической формулой:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap (\Omega_3 \cup \Omega_4). \quad (15.61)$$

Заменяя символы Ω_i на соответствующие левые части неравенств (15.60), а символы $\cap$ и $\cup$ — на символы R -операций $\wedge_0$ и $\vee_0$, получим следующую формулу для функции ω :

$$\omega = [(a^2 - x^2) \wedge_0 (a^2 - y^2)] \wedge_0 \times \\ \times [(b^2 - x^2) \vee_0 (b^2 - y^2)].$$

Таким образом, решение задачи можно искать в виде

$$u = [(a^2 - x^2) \wedge_0 (a^2 - y^2)] \wedge_0 \times \\ \times [(b^2 - x^2) \vee_0 (b^2 - y^2)] \Phi.$$

Неопределенную функцию Φ будем искать в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i, \quad (15.62)$$

где

$$\varphi_1 \equiv 1; \quad \varphi_2 \equiv x^2 + y^2; \quad \varphi_3 \equiv x^2 y^2; \quad \varphi_4 \equiv x^4 + y^4; \quad \varphi_5 \equiv x^6 + y^6; \quad \varphi^6 \equiv \\ \equiv x^2 y^2 (x^2 + y^2); \quad \dots$$

Заметим, что полином (15.62) получается как частный случай полинома более общего вида:

$$\sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j,$$

если в последнем в соответствии с симметрией задачи относительно осей координат опустить члены, содержащие аргументы в нечетных степенях, а в соответствии с симметрией задачи относительно биссектрис координатных углов приравнять коэффициенты при произведениях $x^i y^j$ и $x^j y^i$. Замена неопределенной функции Φ полиномом (15.62) позволяет свести задачу к отысканию неопределенных коэффициентов $C_1, C_2, \dots, C_n$.

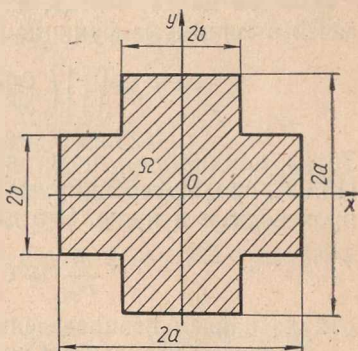


Рис. 15.8

Таблица 5

$\frac{a}{b}$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
1,5	4,393	-0,400	14,25	11,78	15,34	14,14
2,0	3,762	0,720	-3,688	-2,744	0,702	-0,062
2,5	3,168	2,641	-2,080	-3,708	-0,189	0,803
3,0	2,822	3,273	-1,737	-3,106	0,049	0,592
4,0	2,533	2,771	-0,925	-1,429	0,098	0,167
5,0	2,448	1,954	-0,453	-0,614	0,057	0,042
10,0	2,689	0,372	-0,020	-0,023	0,004	0,0002

Следуя методу Ритца, заменим краевую задачу (15.58), (15.59) задачей о минимуме функционала:

$$I = \iint_{(s)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] ds - 4 \iint_{(s)} u ds. \quad (15.63)$$

Затем, как обычно, подставим в (15.63) решение $u = \omega \Phi$ с учетом (15.62), продифференцируем (15.63) по C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) и приравняем производные к нулю. Это даст нам систему уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial C_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

откуда найдем неопределенные постоянные C_j .

Приведем результаты вычислений, полученные для различных отношений a/b при $n = 6$ (табл. 5).

Таблица 6

a/b	1,5	2,0	3,0	5,0	10,0
c/G	Структурный метод				
	0,574	1,048	1,843	3,156	6,355
	Метод Арутюняна — Абрамяна				
	0,580	1,050	1,844	3,215	6,549

Жесткость крестообразного стержня на кручение можно определить по формуле

$$c = 2G \int_{\Omega} n d\Omega,$$

где G — модуль сдвига. В табл. 6 приведены отношения c/G , полученные как структурным методом, так и методом Арутюняна — Абрамяна [4].

§ 15.8. Изгиб пластины, заземленной по контуру

Задача об изгибе тонкой пластины, жестко заземленной по контуру, сводится к отысканию минимума функционала

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ D (\Delta w)^2 - 2wq \} d\Omega, \quad (15.64)$$

где $w(x, y)$ — искомый поперечный прогиб пластины; $q(x, y)$ — вертикальная нагрузка. При этом функция w должна удовлетворять краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} w &= 0; \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } \partial\Omega.$$

Предположим, например, что пластина имеет форму, показанную на рис. 15.9; $q = \text{const}$; $q/D = 1$.

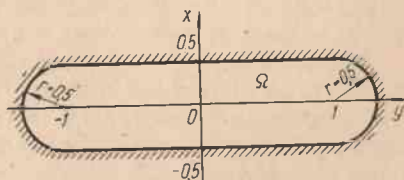


Рис. 15.9

В качестве опорных выберем следующие области:

$\Omega_1 = \{0,25 - x^2 - (y-1)^2 \geq 0\}$ — круг радиуса $r = 0,5$ с центром в точке $(0, 1)$;

$\Omega_2 = \{0,25 - x^2 - (y+1)^2 \geq 0\}$ — круг радиуса $r = 0,5$ с центром в точке $(0, -1)$;

$\Omega_3 = \{0,25 - x^2 \geq 0\}$ — горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $x = \pm 0,5$;

$\Omega_4 = \left\{ \frac{1}{2} (1 - y^2) \geq 0 \right\}$ — вертикальная полоса, ограниченная прямыми $y = \pm 1$.

Заметим, что для логического задания области Ω , занимаемой пластиной, недостаточно трех опорных областей Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 , которые естественно подсказываются ее формой. Дело в том, что точки $(0, 0)$ и $(0, 2)$, например, не принадлежат областям Ω_1 и Ω_2 и принадлежат области Ω_3 . Поэтому всякая логическая формула вида $F(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ определит множество, к которому эти точки либо обе принадлежат, либо обе не принадлежат. В то же время, одна из этих точек должна принадлежать пластине, а другая — нет. Чтобы преодолеть эту трудность, и пришлось взять дополнительную область Ω_4 .

Для области Ω можно записать следующую логическую формулу:

$$\Omega = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4).$$

Соответствующую функцию ω , удовлетворяющую условию нормализованности до 1-го порядка, получаем в виде

$$\omega = \{ [0,25 - x^2 - (y-1)^2] \vee_0 [0,25 - x^2 - (y+1)^2] \} \vee_0 [(0,25 - x^2) \wedge_0 \frac{1}{2} (1 - y^2)].$$

Пользуясь формулой (15.38), для рассматриваемой задачи структуру решения выбираем в виде

$$\omega = \omega^2 \Phi.$$

Неопределенную функцию Φ будем искать в виде

$$\Phi = \sum_{i+j=0}^n C_{ij} T_i(\lambda x) T_j(\mu y),$$

где $T_n(t)$ ($n = 0, 1, \dots$) — полная система полиномов Чебышева, а λ и μ — масштабные коэффициенты, которые выбираем исходя из размеров области по направлениям осей координат с таким расчетом, чтобы величины изменялись в пределах, близких к интервалу $(-1, 1)$.

Подставляя $\omega = \omega^2 \Phi$ в функционал (15.64) и дифференцируя его по C_{ij} , получим линейную алгебраическую систему для отыскания C_{ij} . Учитывая симметрию пластины относительно оси абсцисс, можно заранее положить равными нулю коэффициенты, у которых хотя бы один индекс нечетный. При $m = 4$, $\lambda = \mu = 1$ вычисления дают следующие значения коэффициентов: $C_{00} = 0,0208$; $C_{20} = 0,0163$; $C_{02} = 0,0394$; $C_{04} = 0,168$; $C_{22} = 0,0304$; $C_{40} = 0,0261$. Имея приближенное решение $\omega(x, y)$, можно по известным формулам рассчитать изгибающие моменты, перерезывающие силы и другие характеристики.

§ 15.9. Изгиб пластины, свободно опертой по контуру

Рассмотрим задачу об изгибе пластины Ω (рис. 15.10), подверженной равномерному поперечному давлению q . Поскольку пластина многоугольная, то $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = 0$ и краевые условия свободного опирания имеют вид

ют вид

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \nu^2} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Согласно (15.46), структуру решения выбираем в виде

$$\omega = \omega \Phi_0 - \frac{\omega^2}{2} [D_2(\omega \Phi_0) + \nu_0 T_2(\omega \Phi_0) - \omega \psi_0],$$

где $\omega = 0$ — нормализованное до 1-го порядка уравнение границы $\partial\Omega$.

Используя свойства (15.26) операторов D_2 и T_2 , преобразуем последнюю формулу к виду

$$\omega = \omega \Phi_0 - \frac{1}{2} \omega^2 \Phi_0 (D_2 \omega + \nu_0 T_2 \omega) - \omega^2 D_1 \Phi_0 + \omega^3 \psi_1, \quad (15.65)$$

где ψ_1 — новая неопределенная функция, включившая в себя все слагаемые с множителем ω^3 .

В качестве опорных областей выберем следующие:

$$\Sigma_1 = \{f_1 \equiv \frac{y(a_4 - a_1) - 2bx + b(a_1 + a_4)}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4b^2}} \geq 0\};$$

$$\Sigma_2 = \{f_2 \equiv \frac{y(a_4 - a_1) + 2bx + b(a_1 + a_4)}{\sqrt{(a_4 - a_1)^2 + 4b^2}} \geq 0\};$$

$$\Sigma_3 = \{f_3 \equiv \frac{1}{2b} (b^2 - y^2) \geq 0\};$$

$$\Sigma_4 = \{f_4 \equiv \frac{y(a_3 - a_2) - x(b - b_1) - b_1 a_3 + a_2 b}{\sqrt{(a_3 - a_2)^2 + (b - b_1)^2}} \geq 0\};$$

$$\Sigma_5 = \{f_5 \equiv \frac{y(a_3 - a_2) + x(b - b_1) - b_1 a_3 + a_2 b}{\sqrt{(a_3 - a_2)^2 + (b - b_1)^2}} \geq 0\};$$

$$\Sigma_6 = \{f_6 \equiv y - b \geq 0\}.$$

Область Ω может быть определена следующей логической формулой:

$$\Omega = [(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \cap \Sigma_3] \cap [(\Sigma_4 \cap \Sigma_5) \cap \Sigma_6].$$

Соответствующая ей функция

$$\omega \equiv [(f_1 \wedge f_2) \wedge f_3] \wedge \alpha [(f_4 \wedge f_5) \wedge f_6].$$

Для отыскания решения воспользуемся методом Ритца. Функционал, подлежащий минимизации,

$$I = \int_{\Omega} \left\{ D \left[(\Delta \omega)^2 - 2(1 - \nu_0) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] - q \omega \right\} d\Omega.$$

В формуле (15.65) положим $\psi_1 \equiv 0$, а функцию Φ_0 представим в виде разложения по произведениям полиномов Чебышева:

$$\Phi_0 = \sum_{i+j=0}^m a_{ij} T_i(\lambda x) T_j(\mu y).$$

Примем для вычислений $b = 0,3$; $b_1 = 0$; $a_1 = 0,4$; $a_2 = 0,2$; $a_3 = 0,4$; $a_4 = 1$.

При шести координатных функциях решение системы Ритца дает следующие результаты:

$$a_{00} = 0,000328; \quad a_{01} = -0,00448; \quad a_{02} = -0,0000200;$$

$$a_{20} = 0,00124; \quad a_{03} = 0,00689; \quad a_{21} = 0,0260.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций.— М.: Машиностроение, 1969.— 402 с.
2. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения.— М.: Мир, 1972.— 316 с.
3. Амензаде Ю. А. Теория упругости.— М.: Высшая школа, 1976.— 272 с.
4. Аругян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел.— М.: Физматгиз, 1963.— 686 с.
5. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.— М.: Высшая школа, 1968.— 512 с.
6. Безухов Н. И., Лужин О. В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач.— М.: Высшая школа, 1974.— 200 с.
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений.— М.: Физматгиз, 1959.— 434 с.
8. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных [напряжений].— М.: Мир, 1964.— 518 с.
9. Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф. Строительная механика (современное состояние и перспективы развития).— М.: Госстройиздат, 1972.— 192 с.
10. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин.— М.: Машиностроение, 1973.— 456 с.
11. Ван Цзиде. Прикладная теория упругости.— М.: Физматгиз, 1959.— 400 с.
12. Винокуров Л. П. Теория упругости и пластичности.— Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1965.— 328 с.
13. Власов В. З. Общая теория оболочек.— М.: Гостехиздат, 1949.— 784 с.
14. Гастев В. А. Курс теории упругости и основ теории пластичности.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1973.— 180 с.
15. Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1959.— 350 с.
16. Годфри Д. Теория упругости и пластичности.— Киев: Будівельник, 1969.— 310 с.
17. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1976.— 512 с.
18. Голянт-Головский С. К. Экспериментальное определение касательных напряжений при изгибе и кручении.— Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1962.— 67 с.
19. Джаналидзе Г. Ю., Пановко Я. Г. Принцип Сен-Венана и его использование в теории плит и оболочек.— Расчет пространственных сооружений, 1950, № 1, с. 329—342.
20. Джаналидзе Г. Ю. Принцип Сен-Венана.— Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 192, с. 17—19.
21. Динник А. Н. Продольный изгиб. Кручение.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.— 392 с.
22. Доннел Л. О принципе Сен-Венана.— Прикладная механика. Тр. амер. о-ва инж.-мех.— 1962, № 4, с. 85—96.
23. Жемочкин Б. Н. Теория упругости.— М.: Госстройиздат, 1957.— 256 с.
24. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975.— 542 с.
25. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Прочность пространственных элементов конструкций.— М.: Высшая школа, 1972.— 752 с.
26. Искрицкий Д. Е. Строительная механика элементов машин.— Л.: Судостроение, 1970.— 448 с.

27. Кац А. М. Теория упругости.— М.: Гостехиздат, 1956.— 207 с.
28. Киселев В. А. Расчет пластин.— М.: Стройиздат, 1973.— 162 с.
29. Коваленко А. Д. Основы термоупругости.— Киев: Наукова думка, 1970.— 308 с.
30. Колтунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек.— М.: Высшая школа, 1963.— 277 с.
31. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А., Шалдырван Г. Г. Изгиб толстых многосвязных плит.— Донецк: Вища школа. Изд-во при Донецк. ун-те, 1977.— 94 с.
32. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости.— М.— Л.: ОГИЗ — Гостехиздат, 1947.— 464 с.
33. Лурье А. И. Теория упругости.— М.: Наука, 1970.— 940 с.
34. Ляв Б. Математическая теория упругости.— М.— Л.: Объединен. науч.-техн. изд-во Нар. комиссариата тяжелой пром-сти СССР, 1935.— 674 с.
35. Напряжения и деформации в деталях паровых турбин / Подгорный А. Н., Сухинин В. П., Меллерович Г. М., Ингульцов Б. Л.— Киев: Наукова думка, 1978.— 275 с.
36. Никифоров С. Н. Теория упругости.— М.: Госстройиздат, 1955.— 284 с.
37. Никреев В. М., Шадурский В. Л. Практические методы расчета оболочек.— М.: Стройиздат, 1966.— 271 с.
38. Новацкий В. Вопросы термоупругости.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.— 364 с.
39. Новацкий В. Теория упругости.— М.: Мир, 1975.— 872 с.
40. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек.— Л.: Судпромгиз, 1962.— 432 с.
41. Новожилов В. В. Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958.— 370 с.
42. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластинки.— М.: Изд-во МГУ, 1969.— 696 с.
43. Основы строительной механики ракет / Балабух Л. И., Колесников К. С., Зарубин В. С. и др.— М.: Высшая школа, 1969.— 496 с.
44. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. В 2-х т.— Л.: Судпромгиз, 1941.— Т. 2.— 960 с.
45. Папкович П. Ф. Теория упругости.— Л.— М.: Оборонгиз, 1939.— 640 с.
46. Прошко В. М. Вариант вывода уравнений совместности Сен-Венана.— В кн.: Исследование по теории сооружений.— М.: Госстройиздат, 1959.— с. 579—580.
47. Расчеты на прочность в машиностроении / Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. и др. В 3-х т.— М.: Машгиз, 1956.— Т. 1.— 884 с., 1958.— Т. 2.— 974 с., 1959.— Т. 3.— 1118 с.
48. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики.— Киев: Техника, 1967.— 212 с.
49. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике.— Киев: Наукова думка, 1974.— 260 с.
50. Рекач В. Г. Конспект лекций по основам теории упругости и теории пластичности.— М.: Изд-во ун-та Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1968.— 106 с.
51. Рубинин М. В. Сопротивление материалов.— М.: Машгиз, 1961.— 468 с.
52. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности.— М.: Высшая школа, 1970.— 288 с.
53. Саркисов Г. М. Основы и основные задачи теории упругости.— Куйбышев: Изд-во Куйбышев. политехн. ин-та, 1972.— 182 с.
54. Сегаль А. И. Прикладная теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1957.— 245 с.
55. Скипский П. С. Изгиб упругих тонких пластинок.— В кн.: Лекции по теории упругости.— Горький: Изд-во Горьк. инж.-строит. ин-та, 1968.— Вып. 1.— 88 с.
56. Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения.— Л.— М.: Гостехиздат, 1949.— 166 с.
57. Строительная механика в СССР. 1917—1967.— М.: Стройиздат, 1969.— 423 с.
58. Строительная механика корабля и теория упругости / Курдюмов А. А., Локшин А. З., Иосифов Р. А. и др. В 2-х т.— Л.: Судостроение, 1968.— Т. 2.— 419 с.

59. Суслѳв В. Л., Качанов Ю. П., Спихтаренко В. Н. Стронтельная механика корабля и основы теории упругости.— Л. : Судостроение, 1972.— 719 с.
60. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.— М. : Физматгиз, 1963.— 636 с.
61. Тимошенко С. П. Курс теории упругости.— Киев : Наукова думка, 1972.— 508 с.
62. Тимошенко С. П., Гудьер Д. ж. Теория упругости.— М. : Наука, 1975.— 575 с.
63. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.— М. : Физматгиз, 1960.— 656 с.
64. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. В 2-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 1.— 832 с., 1978.— Т. 2.— 616 с.
65. Филин А. П. Элементы теории оболочек.— Л. : Стройиздат, 1975.— 256 с.
66. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости.— М. : Физматгиз, 1959.— 364 с.
67. Численные методы прикладной теории упругости / Филиппов А. П., Булгаков В. Н., Воробьев Ю. С. и др.— Киев : Наукова думка, 1968.— 250 с.
68. Шевченко К. Н. Основы математических методов в теории обработки металлов давлением.— М. : Высшая школа, 1970.— 351 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Часть I. Основы теории упругости	7
<i>Глава 1. Анализ напряженного состояния</i>	<i>7</i>
§ 1.1. Основные понятия	7
§ 1.2. Уравнения равновесия	10
§ 1.3. Напряжения на наклонных площадках	13
§ 1.4. Преобразование компонентов напряжения к новым осям	15
§ 1.5. Главные напряжения	19
§ 1.6. Наибольшие касательные напряжения	22
<i>Глава 2. Анализ деформированного состояния</i>	<i>25</i>
§ 2.1. Понятие о перемещениях. Зависимости между составляющими деформаций и перемещений	25
§ 2.2. Исследование деформации в произвольном направлении. Сдвиг между двумя произвольными направлениями. Преобразование компонентов деформации при переходе к новым ортогональным осям	29
§ 2.3. Объемная деформация	32
§ 2.4. Главные деформации	34
§ 2.5. Уравнения совместности деформаций	37
§ 2.6. Нелинейные меры деформации	39
<i>Глава 3. Зависимость между напряжениями и деформациями</i>	<i>42</i>
§ 3.1. Основной закон теории упругости	42
§ 3.2. Обобщенный закон Гука для изотропного тела	43
§ 3.3. Потенциальная энергия деформаций упругого тела	47
<i>Глава 4. Общая система уравнений теории упругости</i>	<i>50</i>
§ 4.1. Основные направления решения задач теории упругости	50
§ 4.2. Решение прямой задачи теории упругости в перемещениях	55
§ 4.3. Решение прямой задачи теории упругости в напряжениях	59
§ 4.4. Единственность решения задач теории упругости	64
§ 4.5. Принцип Сен-Венана	66
<i>Глава 5. Плоская задача в декартовых координатах</i>	<i>70</i>
§ 5.1. Плоская деформация	70
§ 5.2. Обобщенное плоское напряженное состояние	72
§ 5.3. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений	74
§ 5.4. Изгиб консоли	76
§ 5.5. Решение плоской задачи с помощью рядов Фурье	82
<i>Глава 6. Плоская задача в полярных координатах</i>	<i>85</i>
§ 6.1. Общие уравнения в полярных координатах	85
§ 6.2. Распределение напряжений, симметричное относительно оси	90
§ 6.3. О равномерном давлении в толстостенной трубе	92

§ 6.4. Чистый изгиб кривых брусьев	94
§ 6.5. Напряжения во вращающихся дисках	97
§ 6.6. Напряжения во вращающихся длинных цилиндрах	101
§ 6.7. Влияние отверстия малого диаметра на напряженное состояние растягиваемой пластинки	104
§ 6.8. Изгиб кривого бруса силой на конце	106
§ 6.9. Действие сосредоточенной силы на прямолинейный край пластинки	108
Глава 7. Температурная задача теории упругости	113
§ 7.1. Температурные напряжения. Основные уравнения термоупругости	113
§ 7.2. Температурные напряжения в тонких дисках	116
§ 7.3. Температурные напряжения в цилиндре	119
Глава 8. Кручение стержней	122
§ 8.1. Постановка вопроса. Решение задачи о кручении с помощью функции кручения	122
§ 8.2. Кручение эллиптического и круглого стержней	128
§ 8.3. Решение задачи о кручении стержня при помощи функции напряжения	131
§ 8.4. Кручение стержня прямоугольного сечения	135
§ 8.5. Моделирование напряженного состояния при кручении	139
§ 8.6. Теорема о циркуляции касательного напряжения при кручении	152
§ 8.7. Кручение тонкостенных стержней	154
Глава 9. Общие теоремы теории упругости	161
§ 9.1. Общее выражение для работы внешних сил	161
§ 9.2. Теорема Клапейрона	163
§ 9.3. Начало возможных перемещений. Принцип минимума для перемещений (принцип Лагранжа)	164
§ 9.4. Начало виртуальных изменений напряженного состояния. Принцип Кастильяно	165
§ 9.5. Теорема Кастильяно и начало наименьшей работы	167
Глава 10. Теория изгиба тонких пластин	171
§ 10.1. Основные допущения и определения	171
§ 10.2. Дифференциальное уравнение изгиба тонких пластин	174
§ 10.3. Решения Навье и Леви для прямоугольной пластины	191
§ 10.4. Решение задачи об изгибе круглых пластин	200
§ 10.5. Изгиб пластины при совместном действии поперечной нагрузки и сил, приложенных в срединной плоскости	219
§ 10.6. Температурные напряжения в пластинах	222
Глава 11. Оболочки	224
§ 11.1. Основополагающие понятия и допущения	224
§ 11.2. Безмоментная теория тонких оболочек	231
§ 11.3. Осесимметричная задача	236
§ 11.4. Моментная теория осесимметрично нагруженных тонких круговых цилиндрических оболочек	242
§ 11.5. Термоупругие напряжения в цилиндрической оболочке	248
Часть II. Методы решения задач теории упругости	251
Глава 12. Современный аппарат вычислительной математики	251
§ 12.1. Приближения функций	251
§ 12.2. Численное дифференцирование и интегрирование	255
§ 12.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений	259
Глава 13. Вариационные методы	264
§ 13.1. Метод Ритца	264
§ 13.2. Метод неопределенных множителей Лагранжа	275

§ 13.3. Метод Рейсснера	277
§ 13.4. Метод конечных элементов	282
<i>Глава 14. Разностные методы</i>	<i>287</i>
§ 14.1. Метод конечных разностей	287
§ 14.2. Вариационно-разностный метод	293
<i>Глава 15. Структурный метод</i>	<i>296</i>
§ 15.1. Понятие структуры решения краевой задачи	296
§ 15.2. Логические операции над множествами	298
§ 15.3. Построение функции ω	302
§ 15.4. Пучок функций, принимающих на границе области заданные значения	307
§ 15.5. Нормализанта и обобщенная формула Тейлора	308
§ 15.6. Формирование структуры, удовлетворяющей на границе области условиям дифференциального вида	311
§ 15.7. Кручение стержня крестообразного поперечного сечения	316
§ 15.8. Изгиб пластины, защемленной по контуру	319
§ 15.9. Изгиб пластины, свободно опертой по контуру	320
Список использованной и рекомендуемой литературы	322

Анатолий Николаевич Подгорный,
Геннадий Андреевич Марченко,
Владимир Ильич Пустынников

**ОСНОВЫ И МЕТОДЫ
ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ**

Редактор *Г. В. Елисеева*
Обложка художника *А. Ф. Мороза*
Художественный редактор *С. В. Анненков*
Технический редактор *Т. И. Трофимова*
Корректор *Т. Г. Щеголь*

Информ. бланк. 4257

Сдано в набор 31.05.80. Подп. в печать 21.10.80. Формат 60×90¹/₁₆.
Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Выс. печать. 20,5 печ. л. 20,44
уч.-изд. л. Тираж 3000 экз. Изд. № 4029. Зак. 1560. Цена 1 р.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского
производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата
УССР, г. Киев, Довженко, 3 в Киевской книжной типографии
научной книги. Киев-4, ул. Репина, 4. Зак. 0-906.



