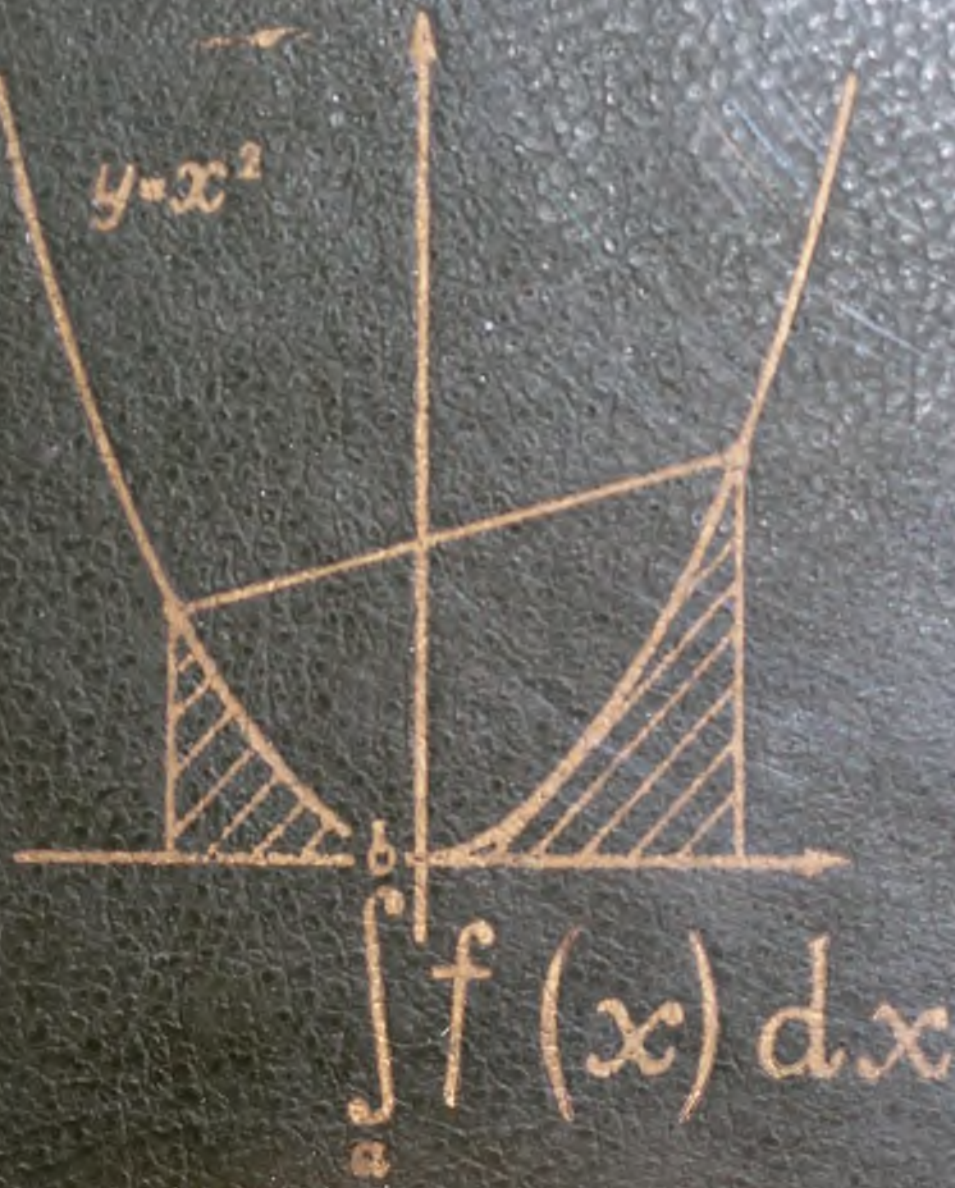
В.А.ИЛЬИН, Э.Г.ПОЗНЯК

АСОСҲОИ АНАЛИЗИ МАТЕМАТИКӢ



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ҚИСМИ I

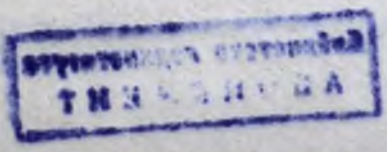
В. А. ИЛЬИН, Э. Г. ПОЗНЯК

АСОСҲОИ АНАЛИЗИ МАТЕМАТИКӢ

ҚИСМИ I

Вазорати маълумоти олӣ ва миёнаи махсус ба сифати китоби дарсӣ барои студентони ихтисоси физика ва ихтисоси «Математикаи амалӣ»-и университетҳо рухсат додааст

ТАРҶУМА АЗ НАШРИ ЧОРУМИ РУСӢ



ДУШАНБЕ «МАОРИФ»
1987

22. 16
И 46
УДК 517

КИТОБИ ДАРСӢ
СОЛИ 1980 БА МУКОФОТИ ДАВЛАТӢ
САЗОВОР ШУДААСТ

МУТАРҶИМ
ҒОИБ ҶӮРАЗОДА

БИБЛИОТЕКА
Душ[illegible]
Госпо[illegible]итута
им. Т. Г. [illegible]евченко
ИНВ. № _____

Библиотека редакционно-
АБ[illegible]ЕМИТ

1702050000—744
И ——————— 68—87
М 504(13)—87

© Издательство «Наука», 1982.
© Тарҷума ба забони тоҷикӣ, «Маориф», 1987.

САРСУХАН БА НАШРИ ЧОРУМИ РУСӢ

Дар нашри чоруми ин китоб чандинҳо тағьироте шудааст, ки онҳо матнро беҳтар ва такмил додаанд. Тағьироти асоситарин ба баёни методҳои тақрибии ҳисоб кардани интегралҳои муайян, ба назарияи чустучӯи экстремумҳои локалӣ ва нуқтаи хамии графики функция, ба баёни методи градиентии чустучӯи экстремуми функцияҳои хеле барчаста ва ба хулосаи формулаи Тейлор бо аъзои бокимонда дар шакли Пеано (ҳам дар мавриди якченака ва ҳам дар мавриди бисьёрченака) мутааллиқ аст.

Муаллифон ба муҳаррирон А. Н. Тихонов ва А. Г. Свешников барои қайдҳои пурбаҳояшон миннатдории зиёд изҳор мекунанд.

Муаллифон инчунин ба Л. Д. Кудрявцев, ки қайдҳои ӯ ба беҳтар шудани баёни матн мусоидат кард, ташаккур мегӯянд.

Муаллифон, ғайр аз он, қайд кардани онро зарур мешуморанд, ки сӯҳбати онҳо бо И. М. Виноградов ва А. А. Самарский барои ташаккули ақидаҳои педагогиашон таъсири калон расонд ва ба онҳо миннатдории зиёд изҳор менамоянд.

9 марти соли 1981. *В. Ильин, Э. Позняк*

САРСУХАН БА НАШРИ ЯКУМИ РУСӢ

Лекцияҳое, ки муаллифон дар муддати чандин солҳо дар факултети физикаи Университети Давлатии Москва хондаанд, асоси ин китобро ташкил медиҳанд.

Муаллифон ҳангоми навиштани ин китоб ба муттасилии баён риоя карда, мафҳум ва теоремаҳои муҳимтаринро чудо кардаанд. Теоремаҳое, ки роли муҳимтарро мебозанд, дар матн теоремаҳои асосӣ номида шудаанд. Муаллифон инчунин кӯшиш кардаанд, ки мафҳум ва теоремаҳои навро то бевосита истифода шуданашон баён накунанд.

Тартиби ҷойгиршавии материали китоб ба плани хониши курси лексияҳо, ки дар факултети физикаи Университети Давлатии Москва муқаррар шудааст, мувофиқ аст. Аз ҷумла, дар ин китоб баёни курси муттасил аз бобои I — «Маълумоти пешакӣ доир ба мафҳумҳои асосии анализи математикӣ» шурӯъ мешавад. Дар ин боб баъзе масъалаҳои физикавии муҳимтарин омӯхта шуда, воситаҳои математикие, ки барои ҳалли онҳо заруранд, муҳокима карда мешаванд. Ҳамон масъалаю мафҳумҳое, ки мо дар курси анализи математикӣ бо онҳо кордор мешавем, бо ҳамин роҳ аниқ карда мешаванд. Таҷрибаи хониши лексияҳо нишон медиҳад, ки чунин пешакӣ аниқ кардани масъалаҳое, ки курси анализ ба онҳо бахшида шудааст, кори студентонро доир ба азхуд кардани мафҳумҳои математикии абстрактӣ хеле осон мекунад.

Роли афзудаистодаи математикаи ҳисоббарорӣ ва методҳои тақрибӣ низ дар ин китоб таҷассум шудаанд. Барои ҳамин ҳам муаллифон кӯшиш карданд, ки (дар ҷое, ки ин имконпазир аст) баёни исботи теоремаҳо ва ҳисоббарорӣ алгоритмӣ бошад. Аз ҷумла, дар боби 12 дар навбати аввал ҷиҳати алгоритмии методҳои тақрибии ҳисоббарорӣ қайд шуда, фақат баъд ин методҳо асоснок карда шудаанд.

Муаллифон дар китоб, ғайр аз материали асосӣ, дохил кардани баъзе масъалаҳои иловагиро, ки бо ҳарфҳои хурд чоп шудаанд, раво донистаанд.

Муаллифон ҳангоми навиштани ин китоб аз курси лексия-

хои Н. В. Ефимов, аз китобҳои Э. Гурс, Ш. Ж. Валле—Пуссен ва Ф. Франклин баъзе усулҳои методиро истифода кардаанд.

Муаллифон ба А. Н. Тихонов барои идея ва маслиҳати зиёди пуркимат ва барои мадади калоне, ки дар навиштани ин китоб расонд, миннатдории самимӣ изҳор мекунанд.

Муаллифон инчунин ба И. А. Шишмарёв, ки таҳрири ӯ ба беҳтаршавии сифати китоб мусоидат кард, миннатдории самимӣ изҳор мекунанд.

Муаллифон ба Н. В. Ефимов, Л. Д. Кудрявцев ва махсусан ба А. А. Самарский барои тавсияҳои зиёди методиашон, ба Б. М. Будак ва С. В. Фомин барои хондани бобҳои алоҳида ва баён кардани фикру мулоҳизаҳояшон, ба Б. Химченко, П. Заикин ва А. Золотарев барои мадади ҳангоми ба чоп тайёр кардани дастнавис расондаашон миннатдории самимӣ изҳор мекунанд.

В. Ильин, Э. Позняк

БОБИ I

МАЪЛУМОТИ ПЕШАКӢ ДОИР БА МАФҲУМҲОИ АСОСИИ АНАЛИЗИ МАТЕМАТИКӢ

§ 1. Мафҳумҳои математикие, ки ҳангоми баёни ҳаракат дучор мешаванд

1. Математика муносибатҳои миқдорӣ ва шаклҳои фазоии дунёи атрофамонро меомӯзад.

Математикаи элементарӣ фақат ба омӯзиши муносибатҳои миқдорӣ ва шаклҳои фазоӣ маҳдуд мешавад, чунки он асосан бо *бузургиҳои доимӣ* ва фигураҳои геометрии соддатарин (секунчаҳо, даврaҳо ва ғайра) кордор аст. Мафҳумҳо ва методҳои математикаи элементарӣ барои баён кардани ҳаракати механикӣ ва процессҳои бо гузашти вақт бавучудоянди дигар кифоя нестанд. Барои ин кадом мафҳумҳои математикии нав заруранд? Инро аниқ мекунем*.

2. Тасаввурот дар бораи *бузургии тағьирьёбанда* бо ҳаргуна процесс алоқаманд мебошад, яъне бузургие, ки дар шароити процесси маълум қиматҳои гуногун қабул мекунад, бо ҳамин процесс алоқаманд аст. Ба замми он, ҳаргуна процесс ақаллан бо ду бузургии тағьирьёбандае, ки *тағьирьёбиашон алоқамандӣ доранд*, тавсиф мешавад.

Масалан, ҳаракати механикии нуқтаи материалӣ аз рӯи хати ростро муоина мекунем. Ин ҳаракат процесси бо гузашти вақт дар хати рост тағьир ёфтани мавқеи нуқтаро ифода мекунад. Ду бузургии тағьирьёбанда — вақт ва роҳи аз ибтидои сарҳисоб тайкардаи нуқта ба ин процесс алоқаманданд. Барои тавсифи ҳаракати муоинашаванда донистан лозим аст, ки нуқта дар ҳар як лаҳзаи додашудаи вақт аз ибтидои сарҳисоб дар кадом масофа воқеъ мебошад, яъне *аз вақт вобаста будани*

---

* Мо, дар айни ҳол, ба аниқ баён кардани онҳо чидду чаҳд намекунем, балки кӯшиш мекунем, ки фақат ҳамон масъалаҳоеро аниқ намоем, ки мо минбаъд бо онҳо кордор мешавем.

роҳи тайкардаи нуқтаро донистан лозим аст. Дар механика чунин вобастагиро *қонуни ҳаракат* меноманд. Ба ибораи дигар, қонуни ҳаракат қоидаест, ки ба воситаи он ба ҳар як қимати вақт (x) қимати муайяни роҳе (y), ки нуқта дар лаҳзаи вақт (x) тай кардааст, дар мувофиқатӣ гузошта мешавад.

Чунин вобастагии байни ду тағйирёбандаи x ва y, ки дар онҳо ба ҳар як қимати тағйирёбандаи x қимати муайяни тағйирёбандаи y дар мувофиқатӣ гузошта мешавад, на фақат ҳангоми омӯзиши ҳаракати механикии нуқтаи материалӣ, балки ҳангоми баёни процессҳои физикавии дигар ҳам дучор мешавад. Тағйирёбандаҳои x ва y-ро аз мазмуни физикавии конкретиашон абстракция карда, мо ба яке аз мафҳумҳои математикии муҳимтарин — *мафҳуми функция** меоем.

Агар қоидае маълум бошад, ки ба воситаи он ба ҳар як қимати тағйирёбандаи x қимати муайяни тағйирёбандаи y дар мувофиқатӣ гузошта шавад, онгоҳ мегӯянд, ки тағйирёбандаи y функцияи тағйирёбандаи x мебошад.

Дар айни ҳол тағйирёбандаи x-ро *аргументи функция* меноманд; қиматҳои ба x-и додашуда мувофиқи тағйирёбандаи y-ро *қиматҳои хусусии функция* дар қимати x меноманд.

Барои ишорати функцияҳо символҳои зерин истифода мешаванд:

$$y = y(x) \text{ ё } y = f(x).$$

Дар ишорати охирин ҳарфи f, ки характеристикаи функция номида мешавад, қоидаи дар боло баёншударо бо символ ифода мекунад. Агар функцияҳои гуногун мавриди таҳқиқ қарор гиранд, онгоҳ барои ишорати характеристикаи онҳо ҳарфҳои гуногун истифода мешаванд. Барои ишорати аргумент ва функция фақат истифодаи ҳарфҳои x ва y ҳатмӣ нест. Масалан, навишти $S = h(t)$ чунин маъно дорад, ки тағйирёбандаи S функцияи аргументи t мебошад ва характеристикаи ин функция бо ҳарфи h ишорат шудааст.

Ҳам бузургии тағйирёбанда ва ҳам функция одатан бо *қиматҳои ададии* гуногун тавсиф карда мешаванд. Бинобар ин васеъ кардани тасаввурот дар бораи ин мафҳумҳо бо зарурияти инкишофи назарияи ададҳои ҳақиқӣ** зич алоқаманд аст.

Чанд мисоли функцияҳоро меорем.

1) Роҳи S, ки нуқтаи материалии беҳаракат ҳангоми дар зери таъсири қувваи кашиш афтидан дар лаҳзаи вақти t тай

---

* Ба математика дохил кардани мафҳуми функцияро бо номи олими машҳури англис И. Ньютон (1642—1727) алоқаманд менамоянд.

** Бояд қайд кард, ки мафҳуми функция ва мафҳуми адад ба *мафҳумҳои ибтидоӣ* номидашаванда тааллуқ доранд. Ҳар як мафҳуми ибтидоиро шарҳ додан мумкин аст, лекин ҳангоми ба мафҳуми ибтидоӣ таъриф додан мафҳуми таърифшаванда ба мафҳуми ба он баробарқувва иваз карда мешавад. Хонанда аз курси элементарӣ ба мафҳумҳои ибтидоӣ шинос аст. Масалан, мафҳумҳои хати рост ва ҳамворӣ ба мафҳумҳои ибтидоӣ мутааллиқ мебошанд.

кардааст, бо формулаи

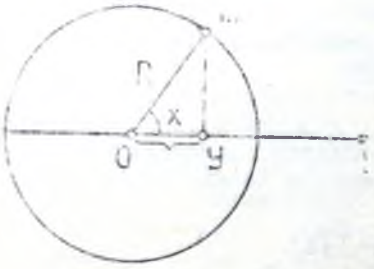
$$S = gt^2/2$$

муайян карда мешавад. Ин формула қоидаеро ифода мекунад, ки ба воситаи он ба ҳар як қимати тағьирьёбандаи t қимати тағьирьёбандаи S дар мувофиқатӣ гузошта мешавад, яъне он S-ро чун функцияи аргументи t муайян мекунад.

2) Мувофиқи қонуни Кулон ду заряди воҳидии гуногунном, ки аз якдигар дар масофаи r воқеъ мебошанд, бо қувваи

$$F = c/r^2$$

ба якдигар кашида мешаванд (дар ин ҷо c — ягон доимӣ). Ин формула низ қоидаеро ифода мекунад, ки ба воситаи он ба ҳар як қимати тағьирьёбандаи r қимати тағьирьёбандаи F дар мувофиқатӣ гузошта мешавад, яъне он F-ро чун функцияи аргументи r муайян мекунад.



Расми 1.1

Дар ин ду мисол қоидаи муқоисаи аргумент ва функция *бо ёрии формула дода* шуд. Чунин тарзи дода шудани функцияро *тарзи аналитикӣ* меноманд.

Дар қатори ин тарз тарзҳои дигари дода шудани функция вуҷуд доранд. Баъзеи онҳоро қайд мекунем. Дар амалиёти ченкуниҳои физикавӣ *тарзи ҷадвалии* дода шудани функция васеъ истифода мешавад, ки бо ёрии он қиматҳои аргумент ва қиматҳои ба онҳо мувофиқи функция ба намуди ҷадвал навишта мешаванд. Аксар вақт вобастагии байни аргумент ва функция ба воситаи график дода мешавад, ки он, масалан, дар осциллограф тасвир мешавад. Чунин тарзи дода шудани функцияро *тарзи графикӣ** меноманд.

3. Талаботи физика баъзан ба зарурияти омӯзиши функцияи $y = f(x)$ меорад, ки аргумент (x)-и он ягон функцияи $x = \varphi(t)$-и аргументи нав (t)-ро ифода мекунад. Дар ингуна маврид мегуянд, ки *y функцияи мураккаби аргументи t*-ро ифода мекунад ва x аргументи *фосилавӣ* номида мешавад. Ин функцияи мурракабро ба намуди зерин навиштан мумкин аст: $y = f[\varphi(t)]$.

Мисол меорем.

Фарз мекунем, ки нуқтаи материалии M аз рӯи давраи радиусаш R бо суръати кунҷии ω мунтазам чарх мезанад (расми 1.1). Қонуни ҳаракати проексия (y)-и ин нуқта дар тири Oy-ро, ки дар ҳамворӣи давра воқеъ аст ва аз маркази он (O) мегузарад, меёбем. Дар айни ҳол чунин мепиндорем, ки нуқтаи M дар лаҳзаи вақти $t = 0$ дар тири Oy воқеъ мебошад. Ко-

* Тарзҳои дода шудани функция дар боби 4 муфассал баён шудаанд.

ординатаи проекцияи муоинашаванда дар тири Oy-ро бо y ва $\angle MOy$-ро бо x ишорат мекунем. Маълум аст, ки $y = R\cos x$. Аз дигар чихат, азбаски нуқта бо суръати кунчии ω ҳаракати гирдхатта* мекунад ва дар лаҳзаи вақти $t = 0$ дар тири Oy воқеъ мебошад, пас $x = \omega t$ аст. Ҳамин тариқ, *у функцияи мураккаби* аргументи t-ро ифода мекунад: $y = R\cos x$, дар ин ҷо $x = \omega t$, ё $y = R\cos \omega t$. Дар механика ҳаракат мувофики қонуни $y = R\cos \omega t$-ро *лаппиши гармоникӣ* меноманд.

§ 2. Суръати лаҳзавӣ ва мафҳумҳои математикии нави ба он алоқаманд

1. Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ қонуни дар тири Oy ҳаракат кардани нуқтаи материалиро ифода мекунад. Барои тавсифи ҳаракат мафҳуми *суръати миёна* роли муҳим мебозад. Суръати миёна $v_м$-и нуқтаи ҳаракаткунанда дар фосилаи вақти аз x то $x + \Delta x$-ро ҳисоб мекунем, дар ин ҷо x — лаҳзаи вақти қайдшуда ва Δx — ягон афзоиши вақт. Азбаски нуқтаи ҳаракаткунанда дар лаҳзаи вақти x аз ибтидои сарҳисоб дар масофаи $f(x)$ ва дар лаҳзаи вақти $x + \Delta x$ дар масофаи $f(x + \Delta x)$ воқеъ мебошад, пас роҳ (Δy)-е, ки нуқта дар лаҳзаи вақти Δx тай мекунад, ба $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ баробар аст. Бинобар ин суръати миёна

$$v_м = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Азбаски лаҳзаи вақти t қайд шудааст, пас аз формулаи охирин намоён аст, ки $v_м$ функцияи аргументи Δx мебошад. Барои тавсифи ҳаракати номунтазам, дар қатори суръати миёна, мафҳуми *суръати лаҳзавӣ* дар лаҳзаи додашудаи вақти x роли калон мебозад.

Суръати лаҳзавӣ (ё фақат *суръат*) дар лаҳзаи вақти x гуфта ададеро меноманд, ки ҳангоми ба нуль майл кардани фосилаи вақти Δx қимати суръати миёна

$$v_м = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ба он наздик мешавад.

Мафҳуми физикавии суръати лаҳзавӣ манбаи мафҳуми математикии муҳими *ҳосила* мебошад. Мо функцияи $y = f(x)$-ро аз маънои физикавии конкретӣ абстракция карда, лимитеро, ки касри $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ҳангоми ба нуль майл кардани

* Минбаъд ба ҷои ҳаракат аз рӯи давра ё ҳаракати доиравӣ ҳаракати гирдхатта мегӯем.

Δx ба он майл мекунад, *ҳосилаи ин функция* дар нуқтаи қайдшудаи x меноманд.

Амали ёфтани ҳосиларо *дифференсиронидан* меноманд. Ҳосилаи функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи қайдшудаи додашуда бо символи $y'(x)$ ё $f'(x)$ ишорат карда мешавад. Барои ишорати лимит символи маълумро истифода карда, ифодаи зайлро навиштан мумкин аст:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Баъзе мисолҳо меорем.

1) Суръати лаҳзавии нуқтаи материалии дар зери таъсири қувваи кашиш афтидаистодаро ҳисоб мекунем. Азбаски қонуни ҳаракати ин нуқта бо функцияи $S = gt^2/2$ муайян карда мешавад, пас роҳи ΔS, ки нуқта дар фосилаи вақти аз t то $t + \Delta t$ тай кардааст, ба ифодаи зерин баробар аст:

$$\Delta S = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt\,\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

Бинобар ин суръати миёна дар ҳамон фосилаи вақт ба ифодаи зерин баробар аст:

$$v_м = \frac{\Delta S}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\Delta t.$$

Пас, суръати лаҳзавӣ v дар лаҳзаи қайдшудаи вақти t ба ифодаи зерин баробар аст:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{g}{2}\Delta t\right) = gt.$$

Дар ҳақиқат мо ҳосилаи функцияи $S = gt^2/2$-ро ҳисоб кардем. Ҳамин тавр, мо чунин навишта метавонем: $S' = gt$.

2) Ҳосилаи функцияи $y = x^n$-ро ҳисоб мекунем, дар ин ҷо n — адади мусбати бутун. x-ро қайд карда, Δx-ро дилхоҳ гирифта ва биноми Ньютонро истифода карда, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n.$$

Бинобар ин суръати миёна $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-и тағьирьёбии функцияи $y = f(x)$ дар қисми аз x то $x + \Delta x$ ба ифодаи зайл баробар аст:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-1}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Пас, ҳосила дар нуқтаи қайдшудаи додашудаи x баробари

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}.$$

Мо мебинем, ки барои ҳисоб кардани ҳосилаҳо мафҳуми лимити функция роли асосиро мебозад. Аниқ кардани ин мафҳум дар навбати аввал бо зарурияти аниқтар муайян кардани худи мафҳуми функция, бузургии тағьирьёбанда ва ададҳои ҳақиқӣ алоқаманд аст.

2. Ҳозир мо бовар мекунем, ки дар процесси ҳисоб кардани ҳосилаи функцияҳои соддатарин масъалаҳои математикии нав пайдо мешаванд.

Ба ҳисоб кардани ҳосилаи функцияи $y = \sin x$ машғул мешавем. x-ро қайд карда ва Δx-ро дилхоҳ гирифта, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Аз ин чо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}.$$

Ҳамин тариқ, барои ҳисоб кардани ҳосилаи функцияи $y = \sin x$ (дар нуқтаи x) лимити зеринро ёфтан лозим аст:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} \right]. \qquad (1.1)$$

Мунтазир шудан табиист, ки дар x-и қайдшуда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x. \qquad (1.2)$$

Аммо на ҳаргуна функцияи $y = f(x)$ ба хосияти зерин соҳиб аст:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = f(x).$$

Дар ҳақиқат ин хосият чунин маъно дорад, ки ҳангоми аргументи функция ба ададн x майл кардан қимати мувофиқи ин функция ба ададн $f(x)$ майл мекунад. Функцияҳое, ки ба ҳамин хосият соҳибанд, функцияҳои (дар нуқтаи x) *бефосила* номида мешаванд. Мафҳуми бефосилагии функция яке аз мафҳумҳои математикии муҳимтарин мебошад.

Барои ҳисоб кардани лимити (1.1), ғайр аз лимити (1.2) боз лимити

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} \tag{1.3}$$

-ро ҳисоб кардан лозим аст. Ин лимит дар анализи математикӣ роли муҳим мебозад. Онро аксаран лимити аҷоиби якум меноманд. Исбот карда мешавад, ки ин лимит ба 1 баробар аст ва, бинобар ин, лимити (1.1) ба $\cos x$ баробар мебошад.

Инак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Ба сифати мисоли дуюм ҳосилаи функцияи $y = \log_a x$-ро ҳисоб мекунем. $x > 0$-ро қайд карда ва Δx-ро дилхоҳ гирифта (чунон ки $x + \Delta x > 0$ аст) ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Аз ин ҷо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\left[\frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] = \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

Ҳамин тариқ, барои ҳисоб кардани ҳосилаи функцияи $y = \log_a x$ дар нуқтаи x лимити зеринро ёфтан лозим аст:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]. \tag{1.4}$$

Лимити ифодаи дар қавсҳои квадратӣ бударо ҳангоми $\Delta x \to 0$ муоина мекунем. Он ба чунин лимит оварда мешавад:

$$\lim_{h \to 0} \left[(1 + h)^{1/h}\right] \quad (\text{ҳангоми } h = \frac{\Delta x}{x} \text{ будан}).$$

Ин лимит ҳам дар анализи математикӣ роли муҳим мебозад. Онро аксаран *лимити аҷоиби дуюм* меноманд. Исбот карда мешавад, ки ин лимит вуҷуд дорад. Пайрави Эйлер* шуда, ададеро, ки ба ин лимит баробар аст, бо ҳарфи e** ишорат меку-

---

* Леонард Эйлер (1707—1783) — математики бузург, аъзои Академияи фанҳои Петербург, ҳиссаи зиёди ҳаёташро дар Россия гузаронидааст, аслу насабаш швейцарӣ мебошад.

** Дар § 16-уми боби 8 тарзи бо саҳеҳии дилхоҳ ҳисоб кардани адади e баён шудааст. Дар он ҷо натиҷаи ҳисоби адади e, ки дар мошини электронии ҳисоббарор бо саҳеҳии то 590 аломати баъди вергул иҷро шудааст, вуҷуд дорад.

нанд, яъне

$$\lim_{h\to 0}[(1+h)^{1/h}]=e. \qquad (1.5)$$

Ба ҳисоби лимити (1.4) бармегардем. Дар формулаи (1.4) бузургии $[(1+\frac{\Delta x}{x})^{x/\Delta x}]$, ки, мувофики (1.5), ҳангоми $\Delta x\to 0$ ба e майл мекунад, чун аргументи логарифм хизмат мекунад. Агар функцияи логарифмӣ бефосила бошад, онгоҳ $\log_a[(1+\frac{\Delta x}{x})^{x/\Delta x}]$ ҳангоми $\Delta x\to 0$ ба $\log_a e$ майл мекунад. Ҳамин тариқ, барои ёфтани лимити (1.4) бефосилагии функцияи логарифмиро асос-ноқ кардан ва лимити (1.5)-ро истифода кардан лозим аст. Иҷро шудани инро фарз карда, ба $\frac{1}{x}\log_a e$ баробар шудани лимити (1.4)-ро ҳосил мекунем. Инак,

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e.$$

Дар ин ҷо ҳосилаи функцияҳои элементарии соддатарини дигар: $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$, $y=a^x$ ва $y=x^\alpha$ (дар ин ҷо α — ададӣ дилхоҳ)-ро ҳисоб намекунем. Ҳангоми ҳисоб кардани ҳосилаи ин функцияҳо, ғайр аз мушкилии нишон додашуда, дигар ҳеҷ ягон мушкилии наве пайдо намешавад. Яъне, барои ҳисоб кардани ҳосилаи ҳамаи функцияҳои элементарии соддатарин фақат бефосилагии онҳо ва ду лимити аҷоиб талаб карда мешавад.

Ҷадвали ҳосилаи функцияҳои элементарии соддатаринро меорем:

1°. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, α — ададӣ дилхоҳ.

2°. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$, аз ҷумла, агар $a=e$ бошад, онгоҳ $(\log_e x)'=\frac{1}{x}$ мешавад.

3°. $(a^x)'=a^x\log_e a$, аз ҷумла, агар $a=e$ бошад, онгоҳ $(e^x)'=e^x$ мешавад.

4°. $(\sin x)'=\cos x$.

5°. $(\cos x)'=-\sin x$.

6°. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

7°. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8°. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9°. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10°. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

11°. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Барои ҳисоб кардани ҳосилаи класси васеи функцияҳо ба ин чадвали ҳосилаҳо *қоидаи дифференцironидани функцияи мураккаб*, инчунин *қоидаи дифференцironидани сумма, фарқ, ҳосили зарб ва ҳосили тақсими функцияҳоро* ҳамроҳ кардан лозим аст. Қоидаи дифференцironидани функцияи мураккаби $y = f(x)$-ро, ки дар ин ҷо $x = \varphi(t)$ мебошад, баён мекунем.

Барои ёфтани ҳосила $(y'(t))$-и функцияи мураккаби $y = f[\varphi(t)]$ (нисбат ба аргументи t дар нуқтаи додашудаи t) лозим аст, ки: 1) *ҳосила $(\varphi'(t))$-и функцияи $x = \varphi(t)$ дар нуқтаи t ҳисоб карда шавад*; 2) *ҳосила $(f'(x))$-и функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x, ки дар ин ҷо $x = \varphi(t)$ мебошад, ҳисоб карда шавад*; 3) *ин ҳосилаҳо ба якдигар зарб карда шаванд.*

Ҳамин тариқ, ҳосилаи функцияи мураккаби $y = f[\varphi(t)]$-ро мувофиқи формулаи $y'(t) = f'(x)\,\varphi'(t)$ ёфтан мумкин аст. Муҳокимаронии зерин қоидаи баёншударо шарҳ медиҳад. Ба аргументи t (дар нуқтаи t) афзоиши дилхоҳи $\Delta t \neq 0$ медиҳем. Ба ин афзоиш афзоиши $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$-и функцияи $x = \varphi(t)$ мувофиқ меояд. Ба афзоиши ҳосилшудаи Δx афзоиши $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$-и функцияи $y = f(x)$ (дар нуқтаи x) мувофиқ меояд. Мавриди $\Delta x = 0$-ро қатъи назар карда, нисбати

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

-ро таҳқиқ мекунем. Азбаски $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ аст ва аз мавҷудияти якумини ин лимитҳо фаҳмост, ки ҳангоми $\Delta t \to 0$ ва $\Delta x \to 0$*, пас $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ вуҷуд дорад ва ба $f'(x)\,\varphi'(t)$ баробар мебошад, яъне $y'(t) = f'(x)\,\varphi'(t)$.

* Агар маҳраҷи касре, ки соҳиби лимит аст, ба нуль майл кунад, он гоҳ сурати ин каср низ ба нуль майл мекунад.

Акнун қоидаи дифференцирониданн сумма, фарқ, ҳосили зарб ва ҳосили тақсимро баён мекунем (фарз мекунем, ки $u(x)$ ва $v(x)$ соҳиби ҳосила мебошанд):

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$[u(x)\, v(x)]' = u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x),$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v^2(x)}.$$

Акнун, масалан, чӣ тавр ҳосил кардани формулаи дуюмро нишон медиҳем. Ба аргументи x афзоиши дилхоҳи $\Delta x \neq 0$ медиҳем, ки ба он афзоиши Δy-и функцияи $y = u(x)\, v(x)$ мувофиқ меояд.

$$\Delta y = u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x) =$$
$$= u(x + \Delta x)\, [v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)\, [u(x + \Delta x) - u(x)] =$$
$$= u(x + \Delta x)\, \Delta v + v(x)\, \Delta u.$$

Ҳамин тариқ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x + \Delta x)\, \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\, \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Азбаски лимитҳои $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ ва $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$ вуҷуд доранд ва аз мавҷудияти лимити якум фаҳмост, ки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x) = u(x)$ мебошад, пас $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ вуҷуд дорад ва ба $u(x)v'(x) + v(x)\, u'(x)$ баробар мебошад.

Чанд мисоли татбиқи қоидаҳои баёншударо меорем.

1) Ҳосилаи функцияи $y = cu(x)$-ро ҳисоб мекунем, ки дар ин ҷо c ягон доимӣ мебошад. Санҷидан осон аст, ки ҳосилаи ифодаи доимӣ ба нуль баробар мебошад. Бинобар ин мувофиқи формулаи дифференцирониданн ҳосили зарб: $[cu(x)]' = cu'(x)$.

2) Ҳосилаи функцияи $y = \operatorname{tg} x$-ро ҳисоб мекунем. Азбаски $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ мебошад, пас мувофиқи формулаи дифференцирониданн ҳосили тақсим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Ҳосилаи функцияи $y = A\cos(\omega t + \delta)$-ро, ки лимити гармоникиро ифода мекунад (дар ин ҷо A, ω ва δ — доимиҳо), ҳисоб мекунем. Ин функцияро чун функцияи мураккаби намуди

$y = A\cos x$ (дар ин ҷо $x = \omega t + \delta$) муоина мекунем. Мувофиқи қоидаи дифференсиронидани функцияи мураккаб чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$y'(t) = (A\cos x)'(\omega t + \delta)' = -(A\sin x)\,\omega,$$

дар ин ҷо $x = \omega t + \delta$. Бинобар ин

$$y'(t) = -A\,\omega\sin(\omega t + \delta).$$

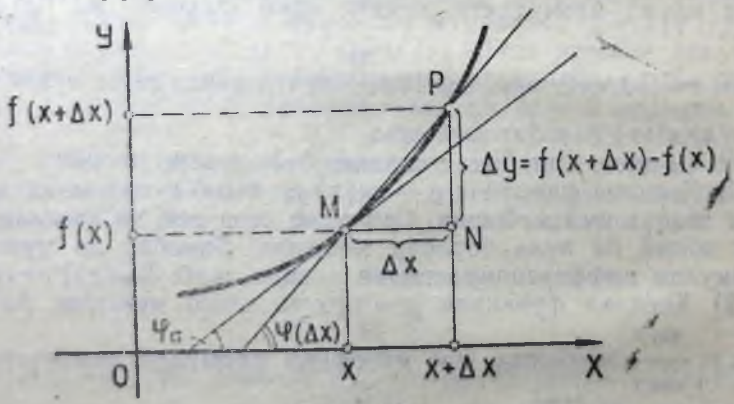
4) Ҳосилаи функцияи $y = a^{\operatorname{arctg} t}$-ро ҳисоб мекунем. Ин функцияро чун функцияи мураккаби намуди $y = a^x$ (дар ин ҷо $x = \operatorname{arctg} t$) муоина мекунем. Мувофиқи қоидаи дифференсиронидани функцияи мураккаб чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$y'(t) = (a^x)'(\operatorname{arctg} t)' = (a^x \log_e a)\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

дар ин ҷо $x = \operatorname{arctg} t$. Бинобар ин

$$(a^{\operatorname{arctg} t})' = \frac{a^{\operatorname{arctg} t}\log_e a}{1+t^2}.$$

Қоидаи баёншудаи дифференсиронӣ ва ҷадвали ҳосилаҳо аппарати асосии ҳамон қисми анализи математикӣ мебошад, ки онро одатан *ҳисоби дифференсиалӣ* меноманд. Ҳамин тариқ, асоснок кардани ҳамаи формулаҳои ҷадвали ҳосилаҳо ва қоидаҳои дифференсиронидани сумма, фарқ, ҳосили зарб, ҳосили тақсим ва функцияи мураккаб яке аз масъалаҳои муҳимтарини ҳисоби дифференсиалӣ мебошанд.



Расми 1.2.

4. Маънои геометрии ҳосиларо аниқ мекунем. Бо ин мақсад графики функцияи $y = f(x)$*-ро муоина мекунем (расми 1.2). Фарз мекунем, ки дар графики функция нуқтаи M ба қимати

* Графики функцияи $y = f(x)$ гуфта чои геометрии нуқтаҳои ҳамвориро меноманд, ки барои ҳар яки онҳо ордината қимати y-и ин функцияи ба абсциссаи x мувофиқ мебошад.

қайдшудаи аргументи x ва нуқтаи P ба қимати $x + \Delta x$ (дар ин ҷо Δx — ягон афзоиши аргумент) мувофиқ аст. Хати рости MP-ро *бурандa* меномем. Кунҷеро, ки ин бурандаю тири Ox ҳосил менамоянд, бо $\varphi(\Delta x)$ ишорат мекунем (маълум, ки ин кунҷ аз Δx вобаста аст). *Мавқеи лимитии бурандаи MP ҳангоми ба нуқтаи M майл кардани нуқтаи P-ро расандаи графики функцияи $y = f(x)$ (дар нуқтаи M) меноманд (ё ҳамон мавқеъро ҳангоми $\Delta x \to 0$ графики функция меноманд).* Аз расми 1.2 фаҳмост, ки

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{PN}{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Азбаски ҳангоми $\Delta x \to 0$ бурандаи MP ба расанда табдил мешавад, пас

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \operatorname{tg} \varphi_0,$$

дар ин ҷо φ_0 кунҷест, ки расандаю тири Ox ҳосил менамоянд. Аз ҷиҳати дигар,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Пас, $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi_0$. Тангенси кунҷи моили хати рост ба тири Ox-ро *коэффициенти кунҷии* ин хати рост меноманд. Ҳамин тариқ, *ҳосилаи $f(x)$, яъне $f'(x)$ ба коэффициенти кунҷии расандаи графики функцияи $y = f(x)$ (дар нуқтаи M) баробар аст.*

§ 3. Масъалаи аз рӯи суръат барқарор кардани қонуни ҳаракат ва проблемаи математикии ба он алоқаманд

Масъалаи физикавии зеринро дида мебароем. Фарз мекунем, ки барои лаҳзаи дилхоҳи вақти t суръати лаҳзавии $f(x)$-и нуқтаи материалии дар тири Oy ҳаракаткунанда дода шудааст ва мавқеъ y_0-и ин нуқта дар лаҳзаи ибтидоии вақти $x = x_0$ маълум аст. Қонуни ҳаракати ин нуқтаро ёфтан лозим аст.

Азбаски суръати лаҳзавии $f(x)$ ҳосилаи функцияи $y = F(x)$ мебошад ва $y = F(x)$ қонуни дар тири Oy ҳаракат кардани нуқтаи материалиро муайян мекунад, пас аз рӯи функцияи додашудаи $f(x)$ чунин функцияи $F(x)$-ро ёфтан лозим аст, ки ҳосилааш $F'(x)$ ба $f(x)$ баробар мебошад.

Мо диққатро аз маънои физикавии конкретии функцияҳои $f(x)$ ва $F(x)$ каме дур карда, ба мафҳумҳои математикии *функцияи ибтидоӣ ва интеграли номуайян* меоем. *Функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ гуфта чунин функцияи $F(x)$-ро меноманд, ки ҳосилааш $F'(x)$ ба $f(x)$ баробар мебошад.*

БИБЛИОТЕКА
Душанбинского
Госпединститута
им. Т. Г. Шевченко

Агар функцияи $F(x)$ функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ бошад, онгоҳ функцияи $F(x) + C$ (дар ин ҷо C — доимии дилхоҳ) низ функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ мебошад (чунки ҳосилаи ифодаи доимӣ ба нуль баробар аст).

Исбот кардан мумкин аст, ки ду функцияи ибтидоии дилхоҳи як функцияи $f(x)$ аз якдигар бо доимие тафовут доранд. Ҳамин тариқ, агар функцияи $F(x)$ яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x)$ бошад, онгоҳ *функцияи ибтидоии дилхоҳи* функцияи $f(x)$ ба намуди $F(x) + C$ (дар ин ҷо C — доимӣ) соҳиб аст.

Маҷмӯаи ҳама функцияҳои ибтидоии як функцияи $f(x)$ интеграли номуайян аз функцияи $f(x)$ номида мешавад ва бо символи $\int f(x)\,dx$ ишорат карда мешавад.

Пас, агар $F(x)$ яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x)$ бошад, онгоҳ

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Акнун ба ҳалли масъалаи физикавии болоӣ бармегардем. Қонуни ҳаракати нуқта, ки мо ба он кордор ҳастему он ба суръати лаҳзавии $f(x)$ соҳиб аст, бо функцияи $y = F(x) + C$ муайян карда мешавад; дар ин ҷо $F(x)$ — ягон функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ ва C — ягон доимӣ. Барои муайян кардани доимии C аз он истифода мекунем, ки дар лаҳзаи ибтидоии вақти $x = x_0$ $y = y_0$ мебошад, яъне $y_0 = F(x_0) + C$, аз ин ҷо $C = y_0 - F(x_0)$. Ҳамин тариқ, қонуни ҳаракат, ки мо бо он кордор ҳастем, чунин намуд дорад:

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

Чанд мисолҳои физикавӣ ва математикиро дида мебароем.

1) Бигзор суръати лаҳзавии нуқтаи материалие, ки дар тири Oy ҳаракат мекунад, намуди $f(x) = \cos x$ дошта бошад. Нуқта дар лаҳзаи ибтидоии вақти $x = x_0$ дар тири Oy мавқеи $y = y_0$-ро ишғол мекунад. Қонуни ҳаракати ин нуқта ёфта шавад. Аз ҷадвали ҳосилаҳо фаҳмост, ки функцияи $F(x) = \sin x$ яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x) = \cos x$ мебошад. Пас, қонуни ҳаракати матлуб чунин намуд дорад: $y = \sin x + C$.

Ҳангоми $x = x_0$ будан аз шарти $y = y_0$ меёбем, ки $C = y_0 - \sin x_0$, яъне қонуни ҳаракатро ба таври комил ҳосил мекунем:

$$y = \sin x + y_0 - \sin x_0.$$

2) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ёфта шавад. Аз ҷадвали ҳосилаҳо фаҳмост, ки функцияи $F(x) = \operatorname{arctg} x$ яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ мебошад. Пас,

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C.$$

Мо дар параграфи гузашта ҷадвали ҳосилаи функцияҳои элементариро навишта будем. Ҳар як формулаи $F'(x) = f(x)$-и ин ҷадвал ба формулаи мувофиқи $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ меоварад. Ҳаминро ба эътибор гирифта, мо ҷадвали зерини интегралҳои номуайянро ҳосил мекунем:

1°. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

2°. $\int \dfrac{dx}{x} = \log_e |x| + C.$

3°. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\log_e a} + C.$

4°. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5°. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6°. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7°. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8°. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

9°. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

Ин ҷадвал бо ҳамроҳии қоидаҳои интегронӣ (ки онҳо дар ин ҷо дода нашудаанд) аппарати ҳисоббарори муҳимтарини ҳамон қисми анализи математикиро ифода мекунанд, ки онро одатан *ҳисоби интегралӣ* меноманд.

Аммо барои ҳисоб кардани аксарияти интегралҳои номуайян ин аппарат кифоя нест. Доир ба мавҷудияти функцияи ибтидоӣ (ва интегралӣ номуайян)-и функцияи дилхоҳи $f(x)$, ки дар ҳар як нуқтаи x бефосила мебошад, проблемае пайдо мешавад. Дар параграфи оянда мо ба масъалаи интегронидани функция рафтори дигар карданро нишон медиҳем, ки он барои ҳал кардани ин проблема имконият медиҳад.

Мо дар ин ҷо якбора қайд мекунем, ки функцияҳои (дар ҳар як нуқтаи x) бефосилае (масалан, $y = \cos x^2$) мавҷуданд, ки функцияҳои ибтидоии онҳо вуҷуд доранд, лекин онҳоро бо ёрии шумораи охирноки амалҳои ҷамъ, тарҳ, зарб, тақсим ва

аз функцияҳои элементарии соддатарин (ки мо дар п. 2, § 2 номбар кардем) ҳосил шудани функцияҳои мураккаб ифода кардан ғайриимкон аст.

§ 4. Проблемаҳое, ки ҳангоми ҳал кардани масъалаҳои ҳисоби роҳ пайдо мешаванд

1. Бигзор функцияи $f(x)$ суръати ҳаракати нуқтаи материалӣ дар тири Oy-ро ифода намояд. Барои соддагӣ чунин мепиндорем, ки ҳамаи қиматҳои функцияи $f(x)$ ғайриманфӣ мебошанд. Роҳеро, ки нуқтаи материалӣ дар фосилаи вақти аз $x = a$ то $x = b$ тай кардааст, ҳисоб кардан лозим аст.

Барои ҳал кардани масъала* фосилаи муоинашавандаи вақтро ба фосилаҳои хурде, ки бо лаҳзаҳои $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ маҳдуданд, тақсим мекунем. Чунин ҳисобидан табиист, ки дар ҳар як фосилаи аз x_{k-1} то x_k суръат $f(x)$ кам тағйир меёбад. Бинобар ин суръатро дар фосилаи номбурда тақрибан доимӣ ва, масалан, ба $f(x_k)$ баробар ҳисобидан мумкин аст. Дар чунин маврид, роҳе, ки нуқтаи материалӣ дар вақти $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ тай кардааст, тақрибан ба $f(x_k)\,\Delta x_k$ баробар буда, роҳе $(S_a{}^b)$, ки нуқта дар вақти аз a то b тай кардааст, тақрибан ба ифодаи зерин баробар аст:

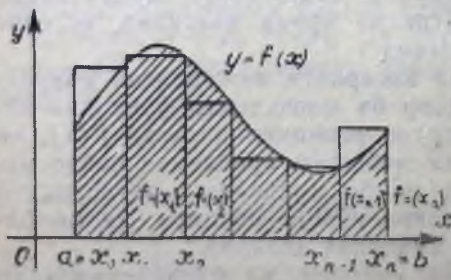
$$S_a{}^b \approx f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\,\Delta x_n. \qquad (1.6)$$

Ҳангоми хурд кардани ҳамаи фосилаҳои вақти Δx_k мо қимати саҳеҳтари роҳи $S_a{}^b$-ро ҳосил мекунем. Агар суммаи (1.6)-ро ҳангоми ба нуль майл кардани ҳамаи Δx_k-ҳо лимит гирем, қимати саҳеҳи роҳи $S_a{}^b$-ро ҳосил менамоем (дар айни ҳол, албатта, шумораи ҷамъшавандаҳои суммаи (1.6) номаҳдуд меафзояд). Символи лимитро истифода карда, мо формулаи зеринро навишта метавонем:

$$S_a{}^b = \lim_{\Delta x_k \to 0} [f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\,\Delta x_n]. \qquad (1.7)$$

Дар айни ҳол масъала дар бораи он, ки мо дар таҳти лимити суммаи навишташуда чиро мефаҳмем, шарҳеро талаб мекунад. Бо ҳамин мо дафъаи дигар ба зарурияти чуқур ва васеъ кардани мафҳуми лимит боварӣ ҳосил мекунем. Дар математика лимити (1.7) гуфта *интеграли муайян* аз функцияи $f(x)$ дар ҳудудҳои аз a то b-ро меноманд ва бо символи

$$S_a{}^b = \int_a^b f(x)\,dx$$



Расми 1.3

* Алоқамандии ин масъалаю масъалаи дар параграфи гузашта муоинашуда сонитар аниқ карда мешавад.

ишорат мекунанд. Суммаи (1.6) суммаи масоҳати росткунчаҳоеро, ки асосҳояшон порчаҳои Δx_k ва баландиҳояшон $f(x_k)$ мебошанд, ифода мекунад. Ба ибораи дигар, ин сумма ба масоҳати фигураи зинашакле, ки дар расми 1.3 тасвир шудааст, баробар мебошад (ин фигураи зинашакл дар нақша бо хати ғафс рӯйдавон карда шудааст). Ҳангоми ба нуль майл кардани дарозии ҳамаи порчаҳои Δx_k масоҳати фигураи зинашакл ба масоҳати фигураи каҷхаттае, ки дар нақша бо хатҳои штрих тасвир шудаасту дар поёни графики функцияи $y = f(x)$ дар порчаи аз a то b воқеъ мебошад, майл мекунад. Ин фигураи каҷхаттаро аксар вақт *трапецияи каҷхатта* меноманд. Ҳамин тариқ, интеграли муайян ба масоҳати трапецияи каҷхаттаи қайдшуда баробар аст.

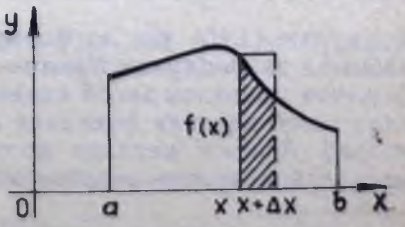
Албатта, ин муҳокимаронии мо характери ибтидоӣ дорад. Аз ҷумла, ҳуди мафҳуми масоҳати трапецияи каҷхатта ва, умуман, масоҳати фигураи ҳамвор аниқкунӣеро талаб мекунад.

2. Мо дидем, ки ду масъалаи муҳим: масъалаи физикавӣ доир ба ҳисоб кардани роҳ ва масъалаи геометрӣ доир ба ҳисоб кардани масоҳати фигураи ҳамвор бо мафҳуми интеграли муайян зич алоқаманд аст. Ба ҳамин муносибат масъалаи доир ба тарзҳои ҳисоб кардани интеграли муайян масъалаи муҳимтарин ба ҳисоб меравад.

Интеграли муайян аз функцияи $f(x)$ дар ҳудудҳои аз a то x-ро бо $F(x)$ ишорат мекунем, яъне

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Аз нуқтаи назари геометрӣ, ин интеграл ба масоҳати трапецияи каҷхаттае, ки дар зери графики функцияи $y = f(x)$ дар порчаи аз a то x воқеъ аст, баробар мебошад. Ин трапеция дар расми 1.4 бо хати ғафс рӯйдавон карда шудааст. Мулоҳизоти геометрии аёниро истифода карда, нишон медиҳем, ки функцияи ишоратшудаи $F(x)$ яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x)$ мебошад, яъне боварӣ ҳосил мекунем, ки $F'(x) = f(x)$ аст. Бигзор Δx ягон афзоиши аргументи x бошад. Маълум аст, ки фарқи $F(x + \Delta x) - F(x)$ ба масоҳати трапецияи каҷхаттаи штрих кардашуда баробар «камбар»-и дар расми 1.4 мебошад. Масоҳати ин трапеция ҳангоми хурд будани Δx аз масоҳати росткунчаи асосаш Δx ва баландиаш $f(x)$, яъне аз $f(x)\,\Delta x$ тафовути кам дорад. Аз ин ҷо фаҳмост, ки ҳангоми хурд будани Δx нисбати



Расми 1.4

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \tag{1.8}$$

аз баландӣ $f(x)$-и росткунчаи номбаршуда тафовути кам дорад. Азбаски лимити касри (1.8) ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба ҳосилаи $F'(x)$ баробар аст, пас $F'(x) = f(x)$. Инак, функцияи $F(x)$ яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x)$ мебошад. Пас, функцияи ибтидоии дилхоҳи $\Phi(x)$-и функцияи $f(x)$ ба чунин намуд соҳиб аст:

$$\Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(x)\,dx + C. \tag{1.9}$$

Албатта, ин муҳокимаронӣҳо ва формулаи аз онҳо ҳосилшудаи (1.9), умуман, на барои ҳаргуна функцияи $f(x)$ дуруст аст. Барои функцияи (дар ҳар як нуқтаи x) бефосилаи $f(x)$ дуруст будани формулаи (1.9)-ро бовар кардан осон аст. Муқаррар шудани формулаи (1.9) проблемаи мавҷудияти функцияи ибтидоии (ва интегрални номуайяни) функцияи дилхоҳи $f(x)$-и дар ҳар як нуқтаи x бефосиларо ҳал мекунад.

Акнун бо ёрии формулаи (1.9) алоқамандии байни интегрални муайяни $\int_a^b f(x)\,dx$ ва функцияи ибтидоии дилхоҳи $\Phi(x)$-и функцияи $f(x)$-ро муқаррар мекунем. Дар формулаи (1.9) пай дар пай $x = a$ ва $x = b$ фарз карда ва маълумоти мулоҳизоти геометрии аёнии баробарии

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

-ро ба эътибор гирифта, чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$\Phi(a) = \int_a^a f(x)\,dx + C = C,\ \Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx + C.$$

Бинобар ин

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1.10}$$

Формулаи (1.10) яке аз формулаҳои асосии ҳисоби интегралӣ мебошад ва *формулаи Ньютон—Лейбниц** номида мешавад. Ин формула масъалаи ҳисоб кардани интегрални муайянро ба масъалаи ҳисоб кардани функцияи ибтидоӣ (ё интегрални номуайян) меорад. Асоснок кардани формулаи Ньютон—Лейбниц яке аз масъалаҳои асосии анализи математикӣ мебошад. Барои ҳақ-

---

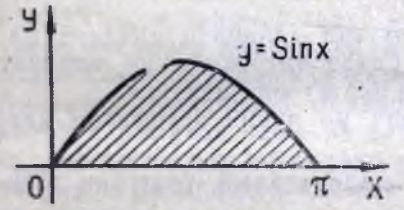
* Готфрид Вильгельм Лейбниц — философ ва математики немис (1642—1716).

рибӣ ҳисоб кардани интеграли муайян чандин тарзҳо вуҷуд доранд ва ба суммаи (1.6) иваз кардани ин интеграл яке аз он тарзҳои соддатарин мебошад. Ин тарзҳо ва формулаи (1.9) имконият медиҳанд, ки интегралҳои номуайян ҳам тақрибӣ ҳисоб карда шаванд ва, аз ҷумла, онҳо имконият медиҳанд, ки функцияи ибтидоии функцияи дилхоҳи (дар ҳар як нуқтаи x) бефосилаи $f(x)$ ҳисоб карда шавад.

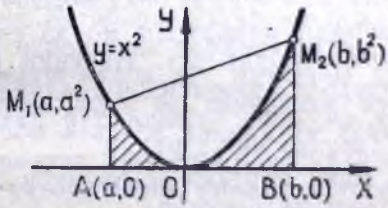
Ба сифати мисол масоҳати S_1-ро, ки дар байни графики функцияи $y = \sin x$ дар порчаи аз 0 то π ва тири Ox воқеъ аст, ҳисоб мекунем (расми 1.5)*. Дар асоси суханҳои гуфтаамон $S_1 = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$. Азбаски функцияи $\Phi(x) = -\cos x$ яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x) = \sin x$ мебошад, пас мувофиқи формулаи (1.10)

$$S_1 = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2.$$

Акнун мисоли дигар. Параболаи $y = x^2$ дода шудааст. Хати росте. ки аз ду нуқтаи $M_1(a, a^2)$ ва $M_2(b, b^2)$-и ин парабола мегузарад, фигураеро бурида чудо мекунад (расми 1.6).** Масоҳати S_2-и ҳамин фигураро ҳисоб мекунем. Масоҳати матлуби



Расми 1.5



Расми 1.6

S_2 ба фарқи масоҳатҳои трапецияи ростхаттаи AM_1M_2B ва трапецияи каҷхаттаи дар нақша штрихшуда баробар аст, яъне

$$S_2 = \frac{(b^2 + a^2)(b - a)}{2} - \int_a^b x^2\,dx = \frac{(b^2 + a^2)(b - a)}{2} - \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{(b - a)^3}{6}$$

---

* Бо ёрии математикаи элементарӣ ҳисоб кардани ин масоҳат ба мушкилиҳои зиёде меоварад.

** Олими бузурги Юнони қадим Архимед (асри III то эраи мо) ин масъаларо бо ёрии математикаи элементарӣ ҳал карда буд.

§ 5. Қайди хотимавӣ

Ҳисоби дифференциалӣ ва интегралӣ асоси анализи математикиро ташкил медиҳанд, ки ба вуҷуд овардани он яке аз комьёбихои бузургтарини ақлу хиради инсон мебошад. Ба математика дохил кардани мафҳумҳои бузургии тағьирьёбанда ва функция имконият дод, ки аз ҳалли масъалаҳои геометрӣ ва физикавии алоҳида ба пайдоиши методҳои умумии ҳалли ин масъалаҳо гузашта шавад. Инкишофи ҳисоби дифференциалӣ ва интегралӣ ба прогресси умумии илму техника таъсири калон расонд.

Прогресси минбаъдаи илму техника бо математиконии тасаввуроти мо дар бораи табиат, бо инкишофи равияҳои нав дар математика зич алоқаманд аст. Бо боварии комил гуфтан мумкин аст, ки математиконии тасаввуроти мо, баёни миқдории аниқи конуниятҳо, истифодаи васеи методҳои ҳисоббарорӣ ва мошинҳои электронии ҳисоббарор (МЭҲ) буньёди асосии табиатшиносии хозиразамонро ташкил медиҳанд.

Ҷорӣ кардани методҳои ҳисоббарорӣ ва истифодаи мошинҳои электронии ҳисоббарор, чун қоида, масъалаи меҳнатталаб ва мураккаб будани ҳисоббарориҳоро аз байн мебардоранд*. Дар баробари ин чандин проблемаҳои математикӣ пайдо мешаванд. Масъалаҳои коркарди алгоритмҳои ҳисоббарорӣ**, ки манбаи тартибдиҳии программа барои МЭҲ мебошанд, коркарди проблемаҳои назарияи идоракунӣ, назарияи процессҳои оптималӣ, мантиқи математикӣ ва кибернетикаи назариявӣ аз ҷумлаи онҳо мебошанд.

Вазифаи минбаъдаи мо аз сохтани аппарати анализи математикӣ иборат аст. Инчунин баъзе татбиқоти ин аппарат ба коркарди алгоритмҳои ададиро низ муоина мекунем.

Ин омӯзиши пешакӣ дар назди мо чунин вазифаҳои навбати аввалро мегузорад:

1. Аниқ кардани мафҳумҳои адади ҳақиқӣ, бузургии тағьирьёбанда ва функция.

2. Муайян кардан ва инкишоф додани мафҳуми лимити функция ва мафҳуми ба он алоқаманди бефосилагии функция.

3. Асоснок кардани формулаҳо ва қоидаҳои ҳисоби дифференциалӣ ва интегралӣ.

4. Ташкил додани назарияи интеграли муайян чун лимити суммаи намуди махсус ва инкишоф додани методҳои ҳисоб кардани интеграли муайян.

5. Аниқ кардани баъзе мафҳумоти геометрӣ (масоҳати фигураҳои ҳамвор, дарозии камон ва ғайра).

---

* МЭҲ-и хозиразамон дар якчанд дақиқа амалҳоеро ҳисоб мекунанд, ки барои иҷрои онҳо як ҳаёти пурраи одам лозим мешавад.

** Алгоритм (ё алгорифм) системаи ҳисоббарориҳоест, ки аз рӯи қоидаи муайяни қатъӣ (ки баъди ягон даври иҷро ба ҳалли масъалаи додашуда меорад) иҷро карда мешавад.

БОБИ 2

НАЗАРИЯИ АДАДҲОИ ҲАҚИҚӢ

Хонанда аз курси математикаи элементарӣ дар бораи ададҳои ҳақиқӣ тасаввурот дорад ва медонад, ки онҳо, масалан, барои чен кардани порчаҳо ва фосилаҳои вақт зарур мебошанд. Барои васеъ кардани тасаввуротамон дар бораи мафҳумҳои математикии муҳимтарин — мафҳумҳои бузургии тағьирьёбанда, функция ва лимит — назарияи ададҳои ҳақиқиро минбаъд инкишоф додан лозим меояд.

Масалан, бузургии тағьирьёбандаи физикавӣ — вақтро муоина мекунем. Барои фосилаҳои гуногуни вақтро байни якдигар муқоиса кардан ададҳои ҳақиқиро байни якдигар муқоиса карда тавонистанамон зарур аст. Ба иборaи дигар, мо бояд қоидаеро муқаррар намоем, ки он барои аниқ кардани он, ки аз ду адади ҳақиқии додашуда кадомаш калон аст, имконият диҳад. Амалиёти ченкуниҳои пайдарпаи вақт ба зарурияти муайян кардани амалҳои ҷамъ ва зарби ададҳои ҳақиқӣ ва аниқ намудани хосиятҳои ин амалҳо меорад. Инчунин бояд қайд кард, ки барои ба ададҳои ҳақиқӣ татбиқшавии қоидаҳои алгебраи элементариро асоснок кардан хосиятҳои асосии ададҳои ҳақиқиро аниқ намудан зарур мебошад.

§ 1. Ададҳои ҳақиқӣ

1. Хосиятҳои ададҳои рационалӣ. Ба хотир меорем: ададеро, ки ба намуди нисбати ду адади бутун* навиштан мумкин аст, адади рационалӣ меноманд. Аз курси математикаи элементарӣ тарзҳои ичрои (муайян кардани) амалҳои ҷамъ ва зарби ададҳои рационалӣ, қоидаҳои муқоисаи ин ададҳо ва хосиятҳои

---

* Як адади рационалиро ба намуди нисбати ададҳои бутуни гуногун навиштан мумкин аст. Масалан, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$

соддатарини онхо маълум аст. Дар ин ҷо мо хосиятҳои асосии ададҳои рационалиеро, ки аз хосиятҳои мувофиқи ададҳои бутун бармеоянд, номбар мекунем.

Дар байни хосиятҳои ададҳои рационалӣ се қоидаи зерин роли асосиро мебозанд: қоидаи муқоиса ва қоидаи пайдоиши сумма ва ҳосили зарб:

I. *Ду ададӣ рационалии дилхоҳи a ва b фақат бо яке аз се аломати $>$, $<$ ё $=$ алоқаманданд, дар айни ҳол агар $a > b$ бошад, онгоҳ $b < a$ аст.* Ба ибораи дигар, *қоидае вуҷуд дорад, ки он барои муқаррар кардани он, ки ду ададӣ рационалии додашуда бо кадоме аз се аломати номбурда алоқаманданд, имконият медиҳад.* Ин қоида қоидаи муқоиса* номида мешавад.

II. *Қоидае вуҷуд дорад, ки ба воситаи он ду ададӣ рационалии дилхоҳи a ва b бо ададӣ рационалии муайяни c дар мувофиқатӣ гузошта мешавад ва c-ро суммаи ададҳои a ва b номида, бо символи $c = a + b$** ишорат менамоянд.*

Амали ёфтани суммаро амали ҷамъ меноманд.

III. *Қоидае вуҷуд дорад, ки ба воситаи он ду ададӣ рационалии дилхоҳи a ва b бо ададӣ рационалии дилхоҳи c дар мувофиқатӣ гузошта мешавад ва c-ро ҳосили зарби ададҳои a ва b номида, бо символи $c = ab$*** ишорат менамоянд.*

Амали ёфтани ҳосили зарбро амали зарб меноманд.

Қоидаи муқоисаи ададҳои рационалӣ ба хосияти зерин соҳиб аст:

1°. *аз $a > b$ ва $b > c$ бармеояд, ки $a > c$* (хосияти транзитивии аломати $>$); *аз $a = b$ ва $b = c$ бармеояд, ки $a = c$* (хосияти транзитивии аломати $=$).

Қоидаи ҷамъи ададҳои рационалӣ ба хосиятҳои зерин соҳиб аст:

2°. $a + b = b + a$ (хосияти ҷойивазкунӣ).

---

* Қоидаи муқоисаи ададҳои рационалӣ чунин баён карда мешавад: ду ададӣ рационалии ғайриманфии $a = \frac{m_1}{n_1}$ ва $b = \frac{m_2}{n_2}$ бо ҳамон аломате, ки ду ададӣ бутуни m_1n_2 ва m_2n_1 алоқаманданд, алоқаманд мебошанд; ду ададӣ рационалии ғайримусбати a ва b бо ҳамон аломате, ки ду ададӣ ғайриманфии $|b|$ ва $|a|$ алоқаманданд, алоқаманд мебошанд; агар a ададӣ рационалии ғайриманфӣ ва b ададӣ рационалии манфӣ бошад, онгоҳ $a > b$ мебошад.

** Қоидаи пайдоиши суммаи ададҳои рационалии $a = \frac{m_1}{n_1}$ ва $b = \frac{m_2}{n_2}$ ба воситаи формулаи $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2}$ муайян карда мешавад.

*** Қоидаи пайдоиши ҳосили зарби ададҳои рационалӣ ба воситаи формулаи $\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1m_2}{n_1n_2}$ муайян карда мешавад.

3° $(a + b) + c = a + (b + c)$ (хосияти комбинациягӣ).

4° *адади рационалии* 0 *вуҷуд дорад, ки барои адади рационалии дилхоҳи* a $a + 0 = a$ *мебошад* (роли махсуси нуль);

5° *барои ҳар як адади рационалии* a *адади ба он муқобили* a' *вуҷуд дорад, ки* $a + a' = 0$ *аст.*

Қоидаи зарби ададҳои рационалӣ ба хосиятҳои зерин соҳиб аст:

6° $ab = ba$ (хосияти ҷойивазкунӣ);

7° $(ab)\,c = a\,(bc)$ (хосияти комбинациягӣ);

8° *адади рационалии* 1 *вуҷуд дорад, ки барои адади рационалии дилхоҳи* a $a \cdot 1 = a$ *мебошад* (роли махсуси як);

9° *барои ҳар як адади рационалии* a*-и нобаробари нуль адади ба он чаппаи* a' *вуҷуд дорад, ки* $aa' = 1$ *аст.*

Қоидаҳои ҷамъу зарб бо хосияти зерин ба якдигар алоқаманданд:

10° $(a + b)\,c = ac + bc$ (хосияти тақсимотии зарб нисбат ба сумма).

Ду қоидаи зерин аломати $>$-ро бо аломатҳои ҷамъу зарб алоқаманд менамоянд:

11° *аз* $a > b$ *бармеояд, ки* $a + c > b + c$;

12° *аз* $a > b$ *ва* $c > 0$ *бармеояд, ки* $ac > bc$.

Хосияти охирин роли махсус дорад:

13° *адади рационалии* a *чи хеле ки бошад, адади* 1*-ро чун ҷамъшаванда ҳамон қадар маротиба такрор кардан мумкин аст, ки суммаи ҳосилшуда аз* a *калон шавад**.

13 хосияти номбаршударо одатан хосиятҳои асосии ададҳои рационалӣ меноманд, чунки ҳамаи хосиятҳои алгебравии дигари ин ададҳоро, ки ба амалҳои арифметикӣ ва ба ҷамъи баробарию нобаробариҳо тааллуқ доранд, аз ин хосиятҳои асосӣ чун натиҷа ҳосил кардан мумкин аст.

Масалан, хосияти минбаъд бисьёр истифодашавандае, ки барои аъзо ба аъзо ҷамъ кардани нобаробариҳои якаломата имконият медиҳад, яъне

агар $a > b$ ва $c > d$ бошад, онгоҳ $a + c > b + d$

аз хосиятҳои асосӣ ҳосил мешавад.

Воқеан, аз нобаробариҳои $a > b$ ва $c > d$ ва аз хосиятҳои 11° ва 2 бармеояд, ки $a + c > b + c$ ва $b + c > b + d$ ва аз нобаробариҳои охирин ва аз хосияти 1 бармеояд, ки $a + c > b + d$.

2. Доир ба чен кардани порчаҳои тири ададӣ. Аз курси математикаи элементарӣ маълум аст, ки ду порча ҳамченак (агар нисбати дарозии онҳо бо ададӣ рационалӣ ифода шавад) ва ноҳамченак (диагональ ва тарафи квадрат мисоли порчаҳои ноҳамченак мебошанд) шуда метавонанд.

Беҳтар аст, ки якбора ба омӯзиши тири ададӣ шурӯъ намоем. Хати ростеро, ки дар он нуқтаи муайяни O (ибтидои сар-

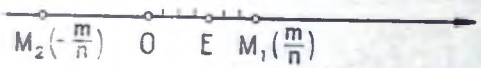
---

* Ин хосиятро аксаран *аксиомаи Архимед* меноманд.

ҳисоб), порчаи масштабии OE (дарозии онро баробари як воҳид мепиндорем) ва самти мусбат (одатан аз O ба E) интихоб карда шудааст, *тири ададӣ* меноманд.

Чунин масъала пайдо мешавад: ба ҳар як нуқтаи M-и тири ададӣ ягон ададеро, ки дарозии порчаи OM-ро ифода мекунад, дар мувофиқатӣ гузоштан мумкин аст. Агар M ва E дар як тарафи O воқеъ бошанд, ин ададро ададӣ мусбат меҳисобем ва агар M ва E дар тарафҳои гуногуни O воқеъ бошанд, ин ададро ададӣ манфӣ мепиндорем.

Пеш аз ҳама бояд қайд кард, ки *ба ҳар як ададӣ рационалӣ дар тири ададӣ нуқтаи муайян мувофиқ меояд.* Воқеан, чӣ тавр сохтани порчае, ки дарозиаш $\frac{1}{n}$ ҳиссаи дарозии порчаи масштабиро ташкил медиҳад (n — ададӣ мусбати бутуни дилхоҳ) аз курси математикаи элементарӣ маълум аст. Пас, мо порчаи AB-ро, ки дарозиаш ба дарозии порчаи масштабӣ (OE) чун $\frac{m}{n}$ нисбат дорад (дар ин ҷо m ва n — ададҳои мусбати бутуни дилхоҳ), сохта метавонем. Нуқтаи E дар тарафи рости O воқеъ буданашро ба эътибор гирифта (расми 2.1) ва дар тарафи рости (чапи) нуқтаи O порчаи AB-ро ҷудо карда, мо нуқтаи $M_1(M_2)$-и ба ададӣ рационалии $+\frac{m}{n}$ $\left(-\frac{m}{n}\right)$ мувофиқро ҳосил мекунем.



Расми 2.1

Дар баробари он мавҷудияти порчаҳои ноҳамченак барои тасдиқ кардани он, ки *на ҳамаи нуқтаҳои тири ададӣ ба ададҳои рационалӣ мувофиқ меоянд, имконият медиҳад.*

Васеъ кардани соҳаи рационалӣ ва омӯхтани чунин ададҳое, ки ба ҳама нуқтаҳои тири ададӣ мувофиқ бошанду ба чен кардани порчаи дилхоҳ (бо ёрии порчаи масштабии OE) имконият диҳанд, лозим мешавад.

Мо процесси махсуси чен кардани порчаи OM-и тири ададиро баён мекунем ва нишон медиҳем, ки ин процесс *барои ба нуқтаи дилхоҳи M-и ин тир дар мувофиқатӣ гузоштани ягон касри даҳии беохири муайян имконият медиҳад.*



Расми 2.2

Фарз мекунем, ки M нуқтаи дилхоҳи тири ададӣ мебошад. Барои муайянӣ фарз мекунем, ки M (мисли E) дар тарафи рости O воқеъ мебошад (расми 2.2).

Порчаи OM-ро бо ёрии порчаи масштабии OE чен мекунем. Пеш аз ҳама аниқ мекунем, ки порчаи OE дар порчаи OM чанд маротиба бутун ҷойгир мешавад. Ду маврид ҳаст:

1) Порчаи OE дар порчаи OM a_0 маротибаи бутун ҷой мегираду боз NM-и аз OE хурд боқӣ мемонад (ба расми 2.2 нигаред). Дар ин маврид адади бутуни a_0 натиҷаи тақрибии бо саҳеҳии то воҳид чен кардан *(бо норасоӣ)*-ро ифода мекунад.

2) Порчаи OE дар порчаи OM $a_0 + 1$ маротибаи бутун бе бақия ҷой мегирад. Дар ин маврид ҳам a_0 натиҷаи тақрибии бо саҳеҳии то воҳид чен кардан *(бо норасоӣ)*-ро ифода мекунад, чунки порчаи OE дар порчаи OM a_0 маротиба ҷой мегираду боз NM-и ба OE баробар бақия мемонад*.

Акнун аниқ мекунем, ки 1/10 ҳиссаи порчаи масштабии OE дар бақияи NM чанд маротиба ҷой мегирад. Боз ду маврид ҳаст:

1) 1/10 ҳиссаи порчаи OE дар порчаи NM a_1 маротибаи бутун ҷой мегираду боз PM бақия мемонад, ки он аз 1/10 ҳиссаи порчаи OE хурд аст (ба расми 2.2 ниг.). Дар ин маврид адади рационалии a_0, a_1 натиҷаи бо саҳеҳии то 1/10 ченкунӣ *(бо норасоӣ)*-ро ифода мекунад.

2) 1/10 ҳиссаи порчаи OE дар порчаи NM $a_1 + 1$ маротибаи бутун бебақия ҷой мегирад. Дар ин маврид адади рационалии a_0, a_1 натиҷаи бо саҳеҳии то 1/10 ченкунӣ *(бо норасоӣ)*-ро ифода мекунад, чунки 1/10 ҳиссаи OE дар порчаи NM a_1 маротиба ҷой мегираду боз бақияи PM мемонад, ки он ба 1/10 ҳиссаи OE* баробар аст.

Ин муҳокимаронӣҳоро номаҳдуд давом дода, мо маҷмӯи беохири ададҳои рационалии

$$a_0;\ a_0, a_1;\ \ldots;\ a_0, a_1a_2 \ldots a_n;\ \ldots \qquad (2.1)$$

-ро ҳосил мекунем, ки ҳар яки онҳо натиҷаи бо саҳеҳии мувофиқ ченкунӣ *(бо норасоӣ)*-ро ифода мекунанд. Дар айни ҳол ҳар яки ададҳои (2.1)-ро дар натиҷаи *касри даҳии беохири*

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots \qquad (2.2)$$

-ро ба аломати мувофиқ чудо кардан ҳосил намудан мумкин аст.

Агар нуқтаи M дар чапи нуқтаи O воқеъ бошад ҳам, муҳокимаронӣҳои номбурда татбиқшаванда аст; фақат дар ин маврид ҳамаи ададҳои (2.1) ва касри даҳии беохири (2.2) соҳиби аломати манфӣ мешаванд.

---

* Албатта, дар амалиёт, дар мавриди дуюм процесси ченкуниро охиршуда меҳисобанд ва дарозии порчаи OM-ро баробари $a_0 + 1$ мепиндоранд. Аммо беҳтар аст, ки (бо мақсади якхелагӣ) ченкунӣ бо норасоӣ иҷро карда шавад, то ки дар ин маврид ҳам бақияи NM ҳосил карда шавад ва имконияти давом додани процесси ченкунӣ пайдо шавад.

Ҳамин тариқ, мо муқаррар кардем, ки *ба воситаи процесси баёншудаи ченкунии порчаи ОМ нуқтаи дилхоҳ (М)-и тири ададиро ба касри даҳии беохири пурра муайян дар мувофиқатӣ гузоштан мумкин аст.*

Инак, процесси баёншудаи бо ёрии порчаи масштабӣ чен кардани порчаи дилхоҳи *ОМ*-и тири ададӣ моро ба тарзи табиӣ ба муоинаи ададҳое, ки ба намуди *касрҳои даҳии беохир* навиштан мумкин аст, меорад. Дар айни ҳол ҳар як касри даҳии беохири (2.2) бо маҷмӯи беохири ададҳои рационалӣ (2.1), ки ба ин каср наздик мешаванд, пурра тавсиф карда мешавад. Албатта, намуди процесси баёншудаи ченкунии порчаи *ОМ*-ро чунон тағьир додан мумкин аст, ки он ба муоинаи касрҳои дуии беохир ё ба муоинаи касрҳои беохир дар ягон системаи дигари дилхоҳи ҳисоб меоварад.

Қайд мекунем, ки барои ба мошинҳои ҳисоббарори электронии хозиразамон додани ададҳо аксаран системаи дуии ҳисоб ва баъзан системаи сеии ҳисоб истифода карда мешавад. Сабабаш он аст, ки радиолампаҳо ва элементҳои нимноқилии дар конструксияи мошинҳои электронӣ вуҷуддошта аксаран ду ва баъзан се ҳолати устувор доранд (масалан, лампа пӯшида, ҷараён намеояд — ҳолати устувори якум, лампа кушода, ҷараён меояд — ҳолати устувори дуюм; агар самти омади ҷараён ба эътибор гирифта шавад, ҳолати устувори сеюм пайдо мешавад).

Вобаста ба ҳолатҳои баёншуда зарурияти коркарди алгоритми аз системаи даҳии ҳисоб ба системаи дуии ҳисоб гузаронидани ададҳо ва, баръакс, коркарди алгоритми аз системаи дуии ҳисоб ба системаи даҳии ҳисоб гузаронидани ададҳо пайдо мешавад. Мисолҳои чунин алгоритмҳо дар Иловаи 1-и ҳамин боб дода шудаанд.

3. Ададҳои ҳақиқӣ ва қоидаи муқоисаи онҳо. *Маҷмӯи касрҳои даҳии беохири гуногунро муоина мекунем. Ададҳои ба намуди ин касрҳо навишташавандаро ададҳои ҳақиқӣ меномем*.*

Агар ададиро ҳақиқиро ба намуди касри даҳии беохири *мусбат (манфӣ)* навиштан имконпазир бошад, ададиро ҳақиқиро ададиро ҳақиқии *мусбат (манфӣ)* меномем.

Албатта, ҳамаи ададҳои рационалӣ низ ба таркиби маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ дохил мешаванд, чунки ҳамаи онҳоро ба намуди касрҳои даҳии беохир навиштан мумкин аст. Масалан, дар асоси мулоҳизоти зайл ададиро рационалиро додашударо ба намуди касри даҳии беохир навиштан мумкин аст. Ба ададиро рационалиро дилхоҳ нуқтаи муайяни *(М)*-и тири ададӣ мувофиқ меояд ва ба ин нуқта касри даҳии беохири муайян бо тарзи дар п. 2 баёншуда дар мувофиқатӣ гузошта мешавад. Чунончӣ, ба ададиро рационалиро 1/2 касри даҳии беохири 0,4999 ..., ба

---

* Чунон ки дар поварақи *-и сах. 7 қайд шуд, мафҳуми адад ба *мафҳумҳои ибтидоӣ* мутааллиқ аст.

адади рационалии 4/3 касри даҳии беохири 1,333 ... дар мувофиқатӣ гузошта мешавад.

Ададҳои ҳақиқие, ки ададҳои рационалӣ намебошанд, *ададҳои иррационалӣ* номида мешаванд.

Вазифаи мо аз он иборат аст, ки се қоида ва ҳамаи хосиятҳои асосии ададҳои рационалиеро, ки дар п. 1 номбар шудаанд, барои мавриди дилхоҳ будани ададҳои ҳақиқӣ пай дар пай татбиқ намоем. Ба замми ин ҳамаи қоидаҳои алгебраи элементарӣ, ки ба амалҳои арифметикӣ ва ба муттаҳиди баробарию нобаробариҳо тааллуқ доранд, барои ададҳои ҳақиқӣ асоснок карда мешаванд.

Мо дар ин пункт қоидаи муқоисаи ададҳои ҳақиқиро муқаррар мекунем. Пеш аз он, ки ба баёни ин қоида шурӯъ намоем, шакли муайяни навишти ҳамон ададҳои рационалиеро, ки онҳоро *ба намуди касрҳои даҳии охирнок навиштан мумкин аст*, муқаррар менамоем. Бояд қайд кард, ки ададҳои рационалии номбурдаро ба намуди касрҳои даҳии беохир ду хел навиштан мумкин аст. Масалан, адади $\frac{1}{2} = 0{,}5$-ро ба намуди

1) $\frac{1}{2} = 0{,}4999...$; 2) $\frac{1}{2} = 0{,}50000...$ навиштан мумкин аст.

Умуман, адади рационалии a_0, $a_1a_2 \dots a_n$-ро, ки дар ин ҷо $a_n \neq 0$ аст, ба намуди 1) a_0, $a_1a_2 \dots a_{n-1}\,(a_n - 1)\,999 \dots$; 2) a_0, $a_1a_2 \dots a_n\,000$ навиштан мумкин аст.

Намуди якуми навиштро ба воситаи тарзи дар п. 2 баёншуда ва намуди дуюми навиштро бо тарзи касри даҳии охирноки додашударо бо навиштани нульҳо ба касри даҳии беохир ба таври формалӣ табдил додан ҳосил кардан мумкин аст.

Мо қарор медиҳем, ки *ҳангоми муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ* барои ададҳои рационалии номбурда фақат намуди якуми навишт (ба намуди касрҳои даҳии беохир навиштан)-ро истифода намоем.

Ба ибораи дигар, ҳангоми муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ мо касрҳои даҳии беохиреро, ки ҳама аломатҳои даҳиашон, аз ягон ҷой сар карда, баробари нуль мебошанд (албатта, ба ғайр аз касри 0,000 ...), истифода намекунем*.

Акнун *қоидаи муқоисаи* ададҳои ҳақиқиро баён мекунем.

Ду адади ҳақиқии дилхоҳи a ва b-ро муоина мекунем. Фарз мекунем, ки ин ададҳоро ба намуди касрҳои даҳии беохири зерин навиштан мумкин аст:

---

* Ин қарордиҳӣ ба процесси ченкунии порча, ки дар п. 2 баён шудааст, пурра мувофиқ аст, чунки процесси баёншуда ба касри даҳии беохире, ки ҳама аломатҳои даҳиаш, аз ягон ҷой сар карда, баробари нуль мебошад, намеоварад.

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \quad (2.3)$$

$$b = \pm b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \quad (2.4)$$

(дар ин чо аз ду аломати $\pm$ якеаш гирифта мешавад).

Ду адади ҳақиқии (2.3) ва (2.4) *ададҳои баробар* номида мешаванд, агар онҳо аломатҳои якхела дошта бошанд ва агар баробариҳои $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$, ... дуруст бошанд.

Фарз мекунем, ки ду адади ҳақиқии *нобаробари* a ва b дода шудааст. Қоидаеро муқаррар мекунем, ки бо ёрии он ин ду адад бо кадом аломат ($>$ ё $<$) алоқаманд буданашонро аниқ кардан мумкин аст:

1) Аввал фарз мекунем, ки a ва b ҳардуяшон *ададҳои ғайриманфианд* ва онҳоро ин тавр навиштан мумкин аст: $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$; $b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$.

Азбаски ададҳои a ва b нобаробаранд, пас ақаллан яке аз баробариҳои $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$, ... ичро намешавад. Аз номерҳои n, ки барояшон баробарии $a_n = b_n$ ичро намешавад, хурдтаринашро бо k ишорат мекунем*. Онгоҳ чунин мепиндорем, ки агар $a_k > b_k$ бошад, онгоҳ $a > b$ аст ва агар $a_k < b_k$ бошад, онгоҳ $a < b$ аст.

2) Агар аз ду ададҳои a ва b *якеаш адади ғайриманфӣ* ва *дигараш адади манфӣ* бошад, онгоҳ, мо, албатта, чунин мепиндорем, ки адади ғайриманфӣ аз адади манфӣ калон аст.

3) Мавридеро, ки ҳар ду адади a ва b *ададҳои манфӣ* мебошанд, дида мебароем. *Чунин қарор медиҳем, ки адади ҳақиқии ғайриманфиеро, ки бо символи $|a|$ ишорат карда мешавад ва ба касри даҳии ифодакунандаи адади a (-и бо аломати + гирифташуда) баробар аст, модули адади ҳақиқии a номем.*

Агар a ва b ҳардуяшон ададҳои манфӣ бошанд, онгоҳ мо чунин меҳисобем, ки агар $|b| > |a|$ бошад, $a > b$ аст ва агар $|a| > |b|$ бошад, $a < b$ аст**.

---

* Ба ибораи дигар, мо чунин меҳисобем, ки $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$, лекин $a_k \neq b_k$.

** Қоидаи баёншудаи муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ, ки ба ду адади рационалӣ татбиқ шуд, ба натиҷае меорад, ки он ба натиҷаи қоидаи муқоисаи ададҳои рационалии дар поварақи сах. 26 баёншуда якхел аст.

Воқеан, фақат мавриди ду адади рационалии ғайриманфии a ва b-ро муоина кардан кифоя аст. Мувофиқи қоидаи муқоисаи ададҳои рационалӣ фарз мекунем, ки $a > b$ аст, ва бигзор $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$; $b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ бошад. Фарз мекунем, ки дар тири ададӣ ба адади рационалии a нуқтаи M_1 ва ба адади рационалии b нуқтаи M_2 мувофиқ аст. Онгоҳ фаҳмост, ки нуқтаи M_1 дар рости нуқтаи M_2 воқеъ аст. Бар замми он ва пункти 2 натиҷа мебарояд, ки адади бутуни $a_0 a_1 \ldots a_k$ ($b_0 b_1 \ldots b_k$) дар порчаи OM_1 (OM_2) чанд маротиба чой гирифтани $1/10^k$ ҳиссаи порчаи масштабии OE-ро нишон медиҳад. Азбаски порчаи OM_1 аз порчаи OM_2 калон аст, пас чунин номери k ёфт мешавад, ки $a_0 a_1 \ldots a_{k-1} = b_0 b_1 \ldots b_{k-1}$ ва $a_0 a_1 \ldots a_k > b_0 b_1 \ldots b_k$ аст, лекин ин низ чунин маъно дорад, ки мувофиқи қоидаи муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ $a > b$ аст.

Қоидаи муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ ба хосияти 1°, ки дар п. 1 барои ададҳои рационалӣ баён шуда буд, соҳиб аст. Яъне, исбот мекунем, ки агар a, b ва c ададҳои ҳақиқии дилхоҳ бошанд ва агар $a > b$ ва $b > c$ бошад, онгоҳ $a > c$ аст (хосияти транзитивии аломати $>$)*. Барои исботи ин хосият се мавриди имкондорро муоина мекунем:

1) Аввал фарз мекунем, ки $c \geqslant 0$ аст. Онгоҳ аз қоидаи муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ ошкор аст, ки $b > 0$ ва $a > 0$ мебошад. Бигзор $a = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$; $b = b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$; $c = c_0, c_1c_2 \ldots c_n \ldots$ бошад. Аз номерҳои n, ки барояшон баробарии $a_n = b_n$ вайрон мешавад, яъне ичро намешавад, хурдтаринашро бо k ишорат мекунем (яъне фарз мекунем, ки $a_0 = b_0$. $a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k > b_k$). Аз номерҳои n, ки барояшон баробарии $b_n = c_n$ вайрон мешавад, яъне ичро намешавад, хурдтаринашро бо p ишорат мекунем (яъне фарз мекунем, ки $b_0 = c_0, b_1 = c_1, \ldots, b_{p-1} = c_{p-1}, b_p > c_p$). Онгоҳ, агар аз ду номерҳои k ва p хурдтаринашро бо m ишорат намоем, муносибати $a_0 = c_0, a_1 = c_1, \ldots, a_{m-1} = c_{m-1}, a_m > c_m$ дуруст хоҳад шуд ва ин чунин маъно дорад, ки $a > c$ аст.

2) Фарз мекунем, ки $c < 0$ ва $a \geqslant 0$ аст. Онгоҳ нобаробарии $a > c$ дар қимати дилхоҳи b дуруст мебошад.

3) Акнун мавридеро, ки ҳар се адади a, b ва c *ададҳои манфӣ* мебошанд, муоина мекунем. Азбаски $a > b$ ва $b > c$ аст, пас $|b| > |a|$ ва $|c| > |b|$. Лекин, онгоҳ, дар асоси мавриди баёншудаи се адади мусбат, $|c| > |a|$ мешавад ва ин чунин маъно дорад, ки $a > c$ аст. Хосияти транзитивии аломати $>$ пурра исбот шуд.

4. Ба ададҳои рационалӣ наздикшавии адади ҳақиқӣ. Дар ин ҷо мо нишон медиҳем, ки ҳаргуна адади ҳақиқиро бо саҳеҳии дилхоҳ ба ададҳои рационалӣ наздик кардан мумкин аст. Адади ҳақиқии дилхоҳи a-ро дида мебароем. Барои муайянӣ ин ададро адади ғайриманфӣ мепиндорем ва онро ба намуди касри даҳии беохир менависем: $a = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$

Ин касрро дар аломати n-уми баъди вергул канда карда, адади рационалии $a_0, a_1a_2 \ldots a_n$-ро ҳосил мекунем. Ин ададро ба $\frac{1}{10^n}$ зиёд карда, адади рационалии дигари $a_0, a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}$-ро ҳосил менамоем. Аз қоидаи муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ муқаррар кардан осон аст, ки барои номери дилхоҳи n нобаробарии

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_n \leqslant a \leqslant a_0, a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} \qquad (2.5)$$

* Хосияти транзитивии аломати $=$, ки аз $a = b$ ва $b = c$ натиҷа баромадани $a = c$-ро тасдиқ мекунад, аз қоидаи муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ ягбора пайдо мешавад.

дуруст аст. Нобаробарии (2.5) чунин маъно дорад: *адади ҳақиқии a дар байни ду адади рационалие, ки фарқашон ба* $\frac{1}{10^n}$ *баробар аст, воқеъ мебошад. Дар айни ҳол номери n-ро дилхоҳ гирифтан мумкин аст.*

Нишон медиҳем, ки барои адади рационалии мусбати *пешакӣ гирифташудаи* дилхоҳи ε аз ягон номери n сар карда, нобаробарии $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ дуруст аст. Воқеан, адади рационалии $\varepsilon > 0$ чи хеле ки бошад, фақат шумораи охирноки ададҳои натуралии аз адади $1/\varepsilon$ калон набудагӣ ёфт мешавад. Бинобар ин фақат барои шумораи охирноки номерҳои n нобаробарии $10^n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ ё $\frac{1}{10^n} \geqslant \varepsilon$ дуруст аст. Барои ҳама номерҳои боқимондаи n нобаробарии баръакси $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ дуруст мебошад, ки ҳаминро исбот кардан лозим буд.

Ҳамин тариқ, мо *тасдиқоти* зеринро ҳосил мекунем: *барои адади ҳақиқии дилхоҳи a ва барои адади рационалии мусбати пешакӣ гирифташудаи дилхоҳи* ε *ду адади рационалии* α_1 *ва* α_2 *ёфт мешаванд, ки* $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ *аст, бар замми ин* $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$ *мебошад.*

Нобаробарии (2.5) ба тасдиқ имкон медиҳад, ки адади рационалии $a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n$ адади ҳақиқии a-ро бо саҳеҳии то $\frac{1}{10^n}$ наздик менамояд. Дар амалиёт доимо бо қимати тақрибии адади ҳақиқӣ (онро бо саҳеҳии даркорӣ ба адади рационалӣ иваз карда) кордор мешаванд.

5. Маҷмӯи ададҳои ҳақиқие, ки аз боло ё аз поён маҳдуданд. Мо дар ин пункт маҷмӯи дилхоҳи ададҳои ҳақиқиеро, ки ақаллан якто адад дорад*, муоина мекунем. Онро бо символи $\{x\}$ ишорат менамоем. Ададҳои алоҳидаеро, ки ба таркиби маҷмӯи $\{x\}$ дохиланд, *элементҳои* ин маҷмӯъ** меномем.

Таърифи 1. Маҷмӯи ададҳои ҳақиқии $\{x\}$ *аз боло (аз поён) маҳдуд номида мешавад, агар чунин адади ҳақиқии M (адади ҳақиқии m) мавҷуд бошад, ки ҳар як элементи x-и маҷмӯи* $\{x\}$ *нобаробарии*

---

* Ингуна маҷмӯъро одатан *маҷмӯи ғайрихолӣ* меноманд.

** Кайд мекунем, ки мафҳуми маҷмӯъ ва элементҳои он ба мафҳумҳои ибтидоӣ тааллуқ доранд (ба поварақи **-и сах. 7 ниг.).

$$x \leqslant M \quad (x \geqslant m)$$

-ро қаноат менамояд. Дар айни ҳол адади M (адади m) *ҳудуди болоии (ҳудуди поёнии)* маҷмӯи $\{x\}$ номида мешавад.

Албатта, маҷмӯи аз боло маҳдуди дилхоҳи $\{x\}$ ҳудудҳои болоии беҳад бисьёр дорад. Воқеан, агар адади ҳақиқии M ҳудуди болоии маҷмӯи $\{x\}$ бошад, онгоҳ адади ҳақиқии дилхоҳи M_1, ки аз адади M калон аст, низ ҳудуди болоии маҷмӯи $\{x\}$ мебошад. Доир ба ҳудудҳои поёнии маҷмӯи аз поён маҳдуди $\{x\}$ ҳам ҳамин тавр муҳокима рондан мумкин аст.

Масалан, маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқии манфӣ аз поён маҳдуд мебошанд. Ба сифати ҳудуди болоӣ M-и чунин маҷмӯъ адади ҳақиқии ғайриманфии дилхоҳро гирифтан мумкин аст. Маҷмӯи ҳамаи ададҳои мусбати бутуни 1, 2, 3, ... аз поён маҳдуд мебошанд. Ба сифати ҳудуди поёнии ин маҷмӯъ адади ҳақиқии дилхоҳи m-ро, ки нобаробарии $m \leqslant 1$-ро қаноат менамояд, гирифтан мумкин аст.

Табиист, ки доир ба мавҷудияти ҳудуди хурдтарини ҳудудҳои болоии маҷмӯи аз боло маҳдуд ва ҳудуди калонтарини ҳудудҳои поёнии маҷмӯи аз поён маҳдуд масъала ба миён меояд.

Таърифи 2. Ҳудуди хурдтарини ҳудудҳои болоии маҷмӯи аз боло маҳдуди $\{x\}$ *гуфта ҳудуди болоии саҳеҳи ин маҷмӯъро меноманд ва бо символи* $\bar{x} = \sup\{x\}^*$ *ишорат менамоянд.*

Ҳудуди калонтарини ҳудудҳои поёнии маҷмӯи аз поён маҳдуди $\{x\}$ *гуфта ҳудуди поёнии саҳеҳи ин маҷмӯъро меноманд ва бо символи* $\underline{x} = \inf\{x\}^{**}$ *ишорат менамоянд.*

Таърифи 2-юмро дигар хел ҳам баён кардан мумкин аст, яъне:

Адади $\bar{x}$ *(адади* $\underline{x}$*) ҳудуди болоии саҳеҳи (поёнии саҳеҳи) маҷмӯи аз боло (аз поён) маҳдуди* $\{x\}$ *номида мешавад, агар ду талаботи зерин иҷро шавад:* 1) *ҳар як элементи x-и маҷмӯи* $\{x\}$ *нобаробарии* $x \leqslant \bar{x}$ $(x \geqslant \underline{x})$*-ро қаноат намояд;* 2) *адади ҳақиқии x′-и аз* $\bar{x}$ *хурд (аз* $\underline{x}$ *калон) чи хеле ки бошад, ақаллан якто элементи x-и маҷмӯи* $\{x\}$ *ёфт мешавад, ки нобаробарии* $x > x'$ $(x < x')$*-ро қаноат менамояд.*

Дар ин таъриф талаботи 1) чунин маъно дорад, ки адади $\bar{x}$ (адади $\underline{x}$) яке аз ҳудудҳои болоӣ (поёнӣ) мебошад ва талаботи 2) чунин маъно дорад, ки ин ҳудуд ҳудуди *хурдтарин (калонтарин)* мебошад ва хурд кардан (калон кардан) мумкин нест.

---

* sup — се ҳарфи аввали калимаи лотинии supremum («супремум»), ки маънояш «болотар» мебошад.

** inf — се ҳарфи аввали калимаи лотинии infimum («инфимум»), ки маънояш «поёнтар» мебошад.

Маълум аст, ки дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқии манфӣ ҳудуди болоии саҳеҳ вуҷуд дорад, ки он ададӣ нуль мебошад ва ин адад *ба маҷмӯи номбурда тааллуқ надорад*. Инчунин маълум аст, ки дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои мусбати бутуни 1, 2, 3, ... ҳудуди поёнии саҳеҳи $x = 1$ вуҷуд дорад, ки он *ба маҷмӯи номбурда тааллуқ дорад* (яъне *элементи ҳурдтарини* ин маҷмӯъ мебошад). Ҳамин тариқ, ҳудуди болоии саҳеҳи (поёнии саҳеҳи) маҷмӯъ ба ин маҷмӯъ ҳам тааллуқ дорад ва ҳам не.

Дар маҷмӯи аз боло (аз поён) маҳдуди дилхоҳ вуҷуд доштани ҳудуди болоии саҳеҳ (поёнии саҳеҳ) возеҳ нест ва исбот-ро талаб мекунад.

Теореман асосии зеринро исбот мекунем.

Т е о р е м а и 2.1. *Агар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ ақаллан якто элемент дошта бошад ва аз боло (аз поён) маҳдуд бошад, онгоҳ адади ҳақиқии $\bar{x}$ (адади ҳақиқии $\underline{x}$) мавҷуд ҳаст, ки он ҳудуди болоии саҳеҳи (ҳудуди поёнии саҳеҳи) ин маҷмӯъ мебошад.*

И с б о т. Мо фақат дар маҷмӯи аз боло маҳдуди дилхоҳ вуҷуд доштани ҳудуди болоии саҳеҳро исбот мекунем, чунки дар маҷмӯи аз поён маҳдуди дилхоҳ вуҷуд доштани ҳудуди поёнии саҳеҳ айнан ҳамон тавр исбот карда мешавад.

Инак, фарз мекунем, ки маҷмӯи $\{x\}$ аз боло маҳдуд аст, яъне чунин ададии ҳақиқии M вуҷуд дорад, ки ҳар як элементи x-и маҷмӯи $\{x\}$ нобаробарии

$$x \leqslant M \tag{2.6}$$

-ро қаноат менамояд.

Ду маврид шуданаш мумкин аст: 1°. Дар байни элементҳои маҷмӯи $\{x\}$ *ақаллан* якто ададии ҳақиқии ғайриманфӣ ҳаст. 2°. Ҳама элементҳои маҷмӯъ ададҳои ҳақиқии манфӣ мебошанд. Ин мавридҳоро алоҳида-алоҳида дида мебароем.

1°. Фақат ададҳои ҳақиқии ғайриманфиеро, ки ба таркиби маҷмӯи $\{x\}$ дохиланд, муоина мекунем. Ҳар яки ин ададҳоро ба намуди касри даҳии беохир менависем ва қисмҳои бутуни ин касрҳои даҳиро муоина мекунем. Дар асоси (2.6) ҳамаи қисмҳои бутун аз ададии M калон намешаванд ва, бинобар ин, қисми бутуни *калонтарине* ҳаст. ки онро бо $\bar{x}_0$ ишорат менамоем. Аз байни ададҳои ғайриманфии маҷмӯи $\{x\}$ ҳамонашро нигоҳ медорем, ки дар онҳо қисми бутун ба $\bar{x}_0$ баробар аст, ва ҳама ададҳои боқимондаро мепартоем. Дар ададҳои нигоҳ дошташуда аломатҳои даҳии якуми баъди вергулро дида мебароем. Аз ин аломатҳо калонтаринашро бо $\bar{x}_1$ ишорат мекунем. Аз байни ададҳои ғайриманфии маҷмӯи $\{x\}$ ҳамонашро нигоҳ медорем, ки дар онҳо қисми бутун ба $\bar{x}_0$ баробар асту аломати даҳии якум ба $\bar{x}_1$, ва ҳама ададҳои боқимондаро мепартоем. Дар ададҳои нигоҳ дошташуда аломатҳои даҳии дуюми баъди вергулро дида мебароем. Аз ин аломатҳо калонтаринашро бо $\bar{x}_2$

ишорат мекунем. Муҳокимарониро ҳамин тавр давом дода, мо аломатҳои даҳии ягон адади ҳақиқии x-ро пай дар пай муайян менамоем:

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ \bar{x}_n \ldots .$$

Исбот мекунем, ки ин адади ҳақиқии $\bar{x}$ ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи $\{x\}$ мебошад. Барои ин ду тасдиқотро исбот кардан кифоя аст: 1) ҳар як элементи x-и маҷмӯи $\{x\}$ нобаробарии $x \leqslant \bar{x}$-ро қаноат менамояд; 2) адади ҳақиқии x-и аз $\bar{x}$ хурд чи хеле ки бошад, ақаллан якто элементи x-и маҷмӯи $\{x\}$ ёфт мешавад, ки нобаробарии $x > x'$-ро қаноат менамояд.

Аввал *тасдиқоти* 1)-ро исбот мекунем. Азбаски $\bar{x}$ адади ғайриманфӣ мебошад, пас адади манфии дилхоҳи x-и маҷмӯи $\{x\}$ нобаробарии $x \leqslant \bar{x}$-ро қаноат менамояд. Бигзор $x = x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$ адади *ғайриманфии* дилхоҳе бошад, ки ба таркиби маҷмӯи $\{x\}$ дохил аст.

Фарз мекунем, ки ин адади x нобаробарии $x \leqslant \bar{x}$-ро қаноат намекунад. Онгоҳ $x > \bar{x}$ ва мувофиқи қоидаи муқоиса номери k ёфт мешавад, ки $x_0 = \bar{x}_0, \ldots, x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}, x_k > \bar{x}_k$. Лекин вобастагии охирин ба чумлаи зерин мухолиф аст: ба сифати $\bar{x}_k$ аломати калонтарини аломатҳои даҳии x_k-и ҳамон элементҳои x, ки дар онҳо қисми бутун ва $k-1$ аломати якумини баъди вергул мувофиқан ба $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ баробаранд, гирифта мешаванд.

Акнун *тасдиқоти* 2)-ро исбот мекунем. Бигзор $x' = x_0', x_1'x_2' \ldots x_n' \ldots$ адади ҳақиқии дилхоҳи* аз $\bar{x}$ хурд бошад. Онгоҳ дар асоси қоидаи муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ номери n-е ёфт мешавад, ки

$$x_0' = \bar{x}_0, x_1' = \bar{x}_1, \ldots, x'_{n-1} = \bar{x}_{n-1}, x_n' < \bar{x}_n. \qquad (2.7)$$

Аз дигар чиҳат, мо адади $\bar{x}$-ро чунон тартиб додем, ки аз байни элементҳои маҷмӯи $\{x\}$ адади $x = x_0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots$ ёфт мешавад, ки қисми бутун ва n аломати даҳии якумаш ба қисми бутун ва n аломати даҳии якуми адади $\bar{x}$ якхел аст, яъне

$$\bar{x}_0 = x_0, \bar{x}_1 = x_1, \ldots, \bar{x}_{n-1} = x_{n-1}, \bar{x}_n = x_n. \qquad (2.8)$$

(2.7) ва (2.8)-ро муқоиса карда, дар асоси қоидаи муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ $x' < x$-ро ҳосил мекунем. *Тасдиқоти* 2) *исбот шуд*. Ҳамин тариқ, барои мавриди 1° мавчудияти ҳудуди болоии саҳеҳ исбот карда шуд.

2°. Мавчудияти ҳудуди болоии саҳеҳи мавриди дуюм, ки ҳаман элементҳои маҷмӯи $\{x\}$ ададҳои ҳақиқии манфӣ мебошанд, ҳамин тавр исбот карда мешавад. Дар ин мавриди мо *ҳамаи элементҳои маҷмӯи* $\{x\}$-*ро ба намуди касрҳои даҳии беохири*

---

* Мо, ба умумият маҳдуд нашуда, ин адади x'-ро адади ғайриманфӣ мепиндорем, чунки агар он адади манфӣ мебуд, онгоҳ элементи ғайриманфии x-и маҷмӯи $\{x\}$ нобаробарии $x > x'$-ро қаноат мекард.

манфӣ менависем. Қисми хурдтарини қисмҳои бутуни ин касрҳоро бо $\bar{x}_0$ ишорат мекунем; аломати *хурдтарини* аломатҳои даҳии якуми ҳамон касрҳоеро, ки қисми бутунашон ба $\bar{x}_0$ баробар аст, бо $\bar{x}_1$ ишорат менамоем; аломати *хурдтарини* аломатҳои даҳии дуюми ҳамон касрҳоеро, ки қисми бутунашон ба $\bar{x}_0$ ва аломати даҳии якумашон ба $\bar{x}_1$ баробар аст, бо $\bar{x}_2$ ишорат мекунем; ... Мо бо ҳамин усул адади ҳақиқии манфии

$$\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots$$

-ро муайян менамоем. Айнан мисли мавриди 1° исбот карда мешавад, ки адади $\bar{x}$ ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи $\{x\}$ мебошад (яъне он ду тасдиқоти ҳангоми муоинаи мавриди 1° баёншударо қаноат менамояд). Теорема исбот шуд.

Қайд. Ҳангоми исботи теоремаи 2.1 дар мавриди 2° ҳама аломатҳои даҳии адади $\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots$, аз ягон ҷой сар карда, баробари нуль шуда метавонанд, яъне ин адад чунин намуд доштанаш мумкин аст: $\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k-1}x_k\,000 \dots$, дар ин ҷо $\bar{x}_k \neq 0$.

Дар ин маврид исботи болоӣ эътибор дорад, лекин мувофиқи шарт, ки дар п. 3 қабул шуда буд, ҳангоми муқоиса бо элементҳои маҷмӯъ адади $\bar{x}$-ро ба намуди

$$\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k-1}\,(\bar{x}_k - 1)\,999 \dots$$

навиштан лозим аст.

§ 2. Амалҳои арифметикӣ бо ададҳои ҳақиқӣ. Хосиятҳои асосии ададҳои ҳақиқӣ

1. Таърифи суммаи ададҳои ҳақиқӣ. *Масъалаи муайян кардани амалҳои ҷамъ ва зарби ададҳои ҳақиқӣ ва масъалаи хосиятҳои ин амалҳо* яке аз масъалаҳои муҳимтарини назарияи ададҳои ҳақиқӣ мебошад. Пеш аз ҳама ба амали ҷамъи ададҳои ҳақиқӣ таваққуф мекунем.

Дар амалиёт чӣ тавр ҷамъ кардани ду адади ҳақиқӣ нағз маълум аст. Барои ҷамъ кардани ду адади ҳақиқии a ва b, онҳоро бо саҳеҳии дилхоҳ ба ададҳои рационалӣ иваз карда, ба сифати қимати тақрибии суммаи ду адади ҳақиқии додашуда суммаи ададҳои рационалии ҳосилшударо гирифта мешавад. Дар айни ҳол ба он эътибор дода намешавад, ки ададҳои рационалии гирифташуда аз кадом ҷиҳат (бо норасоӣ ё бо барзиёдӣ) ба ададҳои ҳақиқии додашудаи a ва b наздик мешаванд. Ин тарзи амалии ҷамъи ададҳои ҳақиқӣ мақсад дорад, ки ададҳои рационалии α ва β (аз ҷиҳати дилхоҳ) мувофиқан ба ададҳои ҳақиқии a ва b ҳар қадар саҳеҳтар наздик шаванд, суммаи $\alpha + \beta$ ба ҳамон адади ҳақиқие, ки бояд суммаи ададҳои ҳақиқии a ва b шавад, ҳамон қадар саҳеҳтар наздик мешавад.

Майли тасдиқ кардани ин тарзи амалии ҷамъи ададҳои ҳақиқӣ, албатта, моро ба таърифи зерини суммаи ду ададӣ ҳақиқӣ меорад.

Фарз мекунем, ки α_1 ва α_2 ягон ададҳои рационалие бошанд, ки ададӣ ҳақиқии a дар байни онҳо воқеъ аст (яъне $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$) ва β_1 ва β_2 ягон ададҳои рационалие бошанд, ки ададӣ ҳақиқии b дар байни онҳо воқеъ аст (яъне $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$). Онгоҳ суммаи ададҳои ҳақиқии a ва b гуфта мо чунин ададӣ ҳақиқии x-ро меномем, ки он дар байни ададҳои рационалии $(\alpha_1 + \beta_1)$ ва $(\alpha_2 + \beta_2)$ воқеъ аст*.

Ба ибораи дигар, *суммаи ададҳои ҳақиқии a ва b гуфта мо чунин ададӣ ҳақиқии x-ро меномем, ки он барои ададҳои рационалии дилхоҳи α_1, α_2, β_1, β_2, ки нобаробариҳои*

$$\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2, \quad \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2 \tag{2.9}$$

-ро қаноат менамоянд, нобаробарии

$$\alpha_1 + \beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2 + \beta_2 \tag{2.10}$$

-ро қаноат менамояд. Мавҷудияти чунин ададӣ ҳақиқии x (ва, ғайр аз ин, фақат якто) ҳеҷ ҷои шубҳа нест. (Исботи мувофиқ дар поён бо хати петит оварда шудааст.) Бовар кардан осон аст, ки ингуна ададӣ x ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи $\{\alpha_1 + \beta_1\}$-и суммаи ҳама ададҳои рационалии α_1 ва β_1 мебошад (α_1 ва β_1 нобаробарии чапи (2.9)-ро қаноат менамоянд).**

1°. Пеш аз ҳама бовар мекунем, ки ҳудуди болоии номбурда вуҷуд дорад. Воқеан, ададҳои рационалии дилхоҳи α_2 ва β_2-ро, ки нобаробарии рости (2.9)-ро қаноат менамоянд, қайд менамоем, ва ададҳои рационалии гуногуни α_1 ва β_1-ро, ки нобаробарии чапи (2.9)-ро қаноат менамоянд, мушоина мекунем. Аз хосияти транзитивии аломати $>$, ки дар п. 3 § 1 муқаррар шуд, хулоса мебарояд, ки $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant \beta_2$ ва аз ин нобаробариҳо натиҷа мебарояд, ки $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant \alpha_2 + \beta_2$ (ба охири п. 1, § 1 ниг.). Ҳамин тариқ, маҷмӯи ҳама ададҳои рационалии $\{\alpha_1 + \beta_1\}$ аз боло маҳдуд аст ва ададӣ $\alpha_2 + \beta_2$ яке аз ҳудудҳои болоии ин маҷмӯъ мебошад. Мувофиқи теоремаи 2.1 маҷмӯи $\{\alpha_1 + \beta_1\}$ ҳудуди болоии саҳеҳ дорад, ки онро бо x ишорат мекунем. Акнун бовар кардан лозим мешавад, ки ададӣ x суммаи ададҳои ҳақиқии a ва b мебошад, яъне нобаробариҳои (2.10)-ро қаноат менамояд. Воқеан, мувофиқи таърифи ҳудуди болоии саҳеҳ, нобаробарии чапи (2.10) дуруст аст ва дурустии нобаробарии рости (2.10) аз он тасдиқ мешавад, ки $\alpha_2 + \beta_2$ *яке аз ҳудудҳои болоӣ буда, x ҳудуди болоии саҳеҳи* маҷмӯи $\{\alpha_1 + \beta_1\}$ мебошад.

2°. Акнун муқаррар мекунем, ки фақат якто ададӣ ҳақиқии x ҳаст, ки он нобаробариҳои (2.10)-ро қаноат менамояд. Леммаи зеринро ба асос мегирем (барои муносиб шудан исботи ин лемма дар охири ҳамин пункт дода шудааст).

---

* Дар курси элементарӣ суммаи ду ададӣ ҳақиқӣ ҳамин тавр таъриф дода мешавад (ниг. А. П. Киселев, Алгебра II, Учпедгиз, 1959, сах. 9).

** Ҳамин тавр, бовар кардан мумкин аст, ки ингуна ададе ҳудуди поёнии саҳеҳи маҷмӯи $\{\alpha_2 + \beta_2\}$-и суммаи ҳама ададҳои рационалии α_2 ва β_2 мебошад (α_2 ва β_2 нобаробарии рости (2.9)-ро қаноат менамоянд).

Лемма. Агар барои ду адади ҳақиқии додашудаи x_1 ва x_2 ва барои ε-и рационалии мусбати пешакӣ гирифташудаи дилхоҳ ду адади рационалии γ_1 ва γ_2 ёфт шаванд, ки $\gamma_1 \leqslant x_1 \leqslant \gamma_2$, $\gamma_1 \leqslant x_2 \leqslant \gamma_2$ ва $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$ бошанд, онгоҳ x_1 ва x_2 баробар мешаванд.

Фарз мекунем, ки ду адади ҳақиқии x_1 ва x_2 ҳастанд, ки онҳо нобаробариҳои (2.10)-ро (дар қиматҳои дилхоҳи ададҳои рационалии α_1, α_2, β_1 ва β_2, ки нобаробариҳои (2.9)-ро қаноат менамоянд) қаноат мекунанд. Адади рационалии дилхоҳи ε-ро мегирем. Мувофиқи тасдиқоте, ки дар п. 4, § 1 исбот шуд, барои адади ҳақиқии a ва барои адади рационалии $\varepsilon/2$ чунин ададҳои рационалии α_1 ва α_2 ёфт мешаванд, ки $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ аст ва дар айни ҳол $\alpha_2 - \alpha_1 < (\varepsilon/2)$. Ҳамин тавр барои адади рационалии b ва барои адади рационалии $\varepsilon/2$ чунин ададҳои рационалии β_1 ва β_2 ёфт мешаванд, ки $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$ аст ва дар айни ҳол $\beta_2 - \beta_1 < (\varepsilon/2)$.

Ҳамин тариқ, ҳар ду ададҳои ҳақиқии x_1 ва x_2 дар байни ду адади рационалии $(\alpha_1 + \beta_1)$ ва $(\alpha_2 + \beta_2)$ воқеъ мешаванд ва фарқи байни онҳо (аз рӯи модулашон) ба

$$(\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) < \varepsilon$$

баробар аст. Азбаски ε адади рационалии мусбати пешакӣ гирифташудаи дилхоҳ мебошад, пас дар асоси леммаи баёншуда $x_1 = x_2$ мебошад.

3°. Ниҳоят, муқаррар мекунем, ки агар мо таърифи баёншудаи суммаи ададҳои ҳақиқӣ ва таърифи аз курси элементарӣ маълуми суммаи ададҳои рационалиро ба ду адади *рационалӣ* татбиқ намоем, *якхел натиҷа ҳосил мешавад*. Воқеан, агар a ва b ду адади рационалие мебошанд, ки нобаробариҳои $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$-ро қаноат менамоянд ва $(a + b)$ суммаи онҳо бошад, ки мувофиқи таърифи аз курси элементарӣ маълум ҳосил шудааст, онгоҳ

$$(\alpha_1 + \beta_1) \leqslant a + b \leqslant (\alpha_2 + \beta_2) \qquad (2.11)$$

аст, ғайр аз ин, мувофиқи тасдиқоти ҳозир исботшуда, адади рационалии $(a + b)$ адади ҳақиқии ягонае мебошад, ки нобаробарии (2.11)-ро қаноат менамояд.

4°. Пеш аз он, ки леммаи баёншударо исбот намоем, тасдиқоти ёрирасони зеринро муқаррар мекунем.

Ду адади ҳақиқии a ва b чи хеле ки бошанду $b < a$ шавад, адади рационалии α ёфт мешавад, ки дар байни онҳо воқеъ аст, яъне чунин ки $b < \alpha < a$ бошад (ва, бинобар ин, маҷмӯи беохири ададҳои рационалии гуногун ёфт мешавад, ки дар байни a ва b воқеъ аст).

Муоинаи мавриде, ки ҳар ду адади a ва b ададҳои *ғайриманфӣ* мебошанд, ё мавриде ки ҳар ду адади a ва b ададҳои *ғайримусбат* мебошанд, бо ёрии ба модулҳо гузаштан ба мавриди баёншуда меорад ва мавриде, ки як адад *адади мусбату* дигараш *адади манфӣ* мебошад, муносиб нест (ба сифати α нуль гирифтан мумкин аст).

Инак, бигзор $b > 0$; $b < a$; $a = a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$; $b = b_0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ бошад. Бигзор k аз номерҳои n, ки барояшон баробарии $a_n = b_n$ вайрон мешавад, хурдтаринаш бошад, яъне $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = b_{k-1},\ a_k > b_k$.

Дар асоси шарте, ки дар п. 4 § 1 қабул карда шуд, чунин ҳисобидан мумкин аст, ки *ҳамаи a_n-ҳо ҳангоми $n > k$ будан ба нуль баробар шуда наметавонанд*. Бигзор p номери *хурдтарини* номерҳои n, ки аз номерҳои k калон мебошанду барояшон $a_n > 0$ аст, бошад, яъне

$$a = a_0,\ a_1 \ldots a_k\, 00 \ldots 0\ a_p \ldots$$

Онгоҳ аз қоидаи мукоисаи ададҳои ҳақиқӣ бевосита натиҷа мебарояд, ки адади рационалии $\alpha = a_0,\ a_1 \ldots a_k\, 00 \ldots 0\ (a_p - 1)\, 999 \ldots$ нобаробариҳои $b < \alpha < a$-ро қаноат менамояд. Тасдиқоти ёрирасон исбот шуд.

Ба исботи лемма шуруъ намуда, фарз мекунем, ки $x_1 \neq x_2$ аст. Бигзор барои муайяни $x_1 < x_2$ бошад. Онгоҳ дар асоси тасдиқоти ёрирасон ду адади рационалии α_1 ва α_2 ёфт мешавад, ки

$$x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < x_2 \tag{2.12}$$

аст. Акнун бигзор γ_1 ва γ_2 ягон ададҳои рационалие бошанд, ки нобаробариҳои

$$\gamma_1 \leqslant x_1 \leqslant \gamma_2, \quad \gamma_1 \leqslant x_2 \leqslant \gamma_2 \tag{2.13}$$

-ро қаноат менамоянд. Аз муқоисаи (2.12) ва (2.13) ва аз хосияти транзитивии аломати $>$ $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$-ро ҳосил мекунем. Лекин онгоҳ $\gamma_2 - \gamma_1 > \alpha_2 - \alpha_1$ мешавад, ки ин ба фарқи $\gamma_2 - \gamma_1$-ро аз адади рационалии мусбати пешакӣ гирифташудан дилхоҳи е хурд кардан мумкин аст, мухолиф мебошад. Лемма исбот шуд.

2. Таърифи ҳосили зарби ададҳои ҳақиқӣ. Масъалаҳое, ки ҳангоми таъриф додани ҳосили зарби ададҳои ҳақиқӣ пайдо мешаванд, асосан бо масъалаҳое, ки ҳангоми таъриф додани суммаи ададҳои ҳақиқӣ муоина шуда буданд, якхел мебошанд, бинобар ин мо фақат ба баёни мухтасари натичаҳо маҳдуд мешавем.

Аввал ҳосили зарби ду адади мусбати a ва b-ро муайян мекунем. Ададҳои рационалии мусбати дилхоҳеро, ки нобаробариҳои $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$-ро қаноат менамоянд, бо α_1, α_2, β_1, β_2 ишорат мекунем.

Ҳосили зарби ададҳои ҳақиқии мусбати a ва b гуфта адади ҳақиқии x-ро меномем, ки он нобаробариҳои $\alpha_1\beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2\beta_2$-ро қаноат менамояд.

Мисли мавриди сумма муқаррар карда мешавад, ки чунин адади ҳақиқии x вуҷуд дорад ва фақат якто мебошад. Чунин адади x ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи $\{\alpha_1\beta_1\}$-и ҳосили зарби ҳама ададҳои рационалии α_1 ва β_1, ки нобаробариҳои $0 < \alpha_1 \leqslant a$, $0 < \beta_1 \leqslant b$-ро қаноат менамоянд, мебошад; ба ин бовар кардан осон аст.

Ҳосили зарби ададҳои ҳақиқии аломаташон дилхоҳ аз рӯи қоидаи зерин муайян карда мешавад:

1) чунин меҳисобанд, ки $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;

2) чунин меҳисобанд, ки $ab = \begin{cases} |a| \cdot |b|, & \text{агар} \\ -|a| \cdot |b|, & \text{агар} \end{cases}$

аломатҳои a ва b якхел бошанд,

аломатҳои a ва b гуногун бошанд.

Дар хулоса қайд мекунем, ки мисли мавриди сумма исбот кардан мумкин аст, ки ба ду адади рационалӣ татбиқ кардани таърифи ҳосили зарби ададҳои ҳақиқӣ ва таърифи аз курси элементарӣ маълуми ҳосили зарби ададҳои рационалӣ ба якхел натича меорад.

3. Хосиятҳои ададҳои ҳақиқӣ. Ҳамаи хосиятҳои асосие, ки дар п. 1 § 1 барои ададҳои рационалӣ номбар шуда буданд, барои ададҳои ҳақиқии дилхоҳ низ дурустанд. Дурустии хосияти 1° барои ададҳои ҳақиқӣ муқаррар карда шуд. Ҳамин

тариқ, фақат масъалаи барои ададҳои ҳақиқӣ дуруст будани хосиятҳои 2°—13°-ро аниқ кардан лозим аст.

Барои ададҳои ҳақиқӣ дуруст будани хосиятҳои 2°—5° ва 11°-ро, ки бо мафҳуми сумма алоқаманданд, бовар кардан осон аст. Дуруст будани хосиятҳои 2°—5° бевосита аз таърифи сумман ададҳои ҳақиқӣ ва аз дурустии хосиятҳои номбаршудаи ададҳои рационалӣ тасдиқ мешавад.

Ба исботи хосияти 11° таваққуф менамоем, яъне исбот мекунем, ки *агар a, b ва c се адади ҳақиқии дилхоҳ бошанд ва* $a > b$ *бошад, онгоҳ* $a + c > b + c$ *мебошад.*

Азбаски $a > b$ мебошад, пас дар асоси тасдиқоти ёрирасон, ки ҳангоми исботи лемма мукаррар карда шуд (ба охири п. 1-уми ҳамин параграф нигаред), ададҳои рационалии α_1 ва β_2 ёфт мешаванд, ки $a > \alpha_1 > \beta_2 > b$ мебошад. Барои ададии ҳақиқии c ва барои ададии рационалии мусбати $\varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ ададҳои рационалии γ_1 ва γ_2 ёфт мешаванд, ки $\gamma_1 < c < \gamma_2$ мебошад ва ғайр аз ин $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ аст (ба тасдиқоти дар п. 4-уми § 1 исботшуда нигаред).

Акнун бигзор α_2 ва β_1 ададҳои рационалии дилхоҳе бошанд, ки нобаробариҳои $\alpha_2 \geqslant a$, $a \geqslant \beta_1$-ро қаноат менамоянд. Онгоҳ мувофиқи таърифи сумман ададҳои ҳақиқӣ

$$\alpha_2 + \gamma_2 \geqslant a + c \geqslant \alpha_1 + \gamma_1, \quad \beta_2 + \gamma_2 \geqslant b + c \geqslant \beta_1 + \gamma_1.$$

Барои исбот кардани он, ки $a + c > b + c$ мебошад, дар асоси транзитивии аломати $>$ исбот кардан кифоя аст, ки $\alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$ мебошад, лекин ин аз нобаробарии $\gamma_2 - \gamma_1 < \alpha_1 - \beta_2$ бевосита ҳосил мешавад.

Масъалаи *тарҳи* ададҳои ҳақиқӣ чун амали баръакси ҷамъ дар асоси хосиятҳои 2°—5° пурра ҳал карда мешавад. *Фарқи ададҳои ҳақиқии a ва b гуфта ададии ҳақиқии c-ро меномем, ки* $c + b = a$ *мебошад.*

Боварӣ ҳосил мекунем, ки чунин фарқ аз адади $c = a + b'$ иборат мебошад (дар ин ҷо b' — ададе ба b муқобил).

Воқеан, хосиятҳои 2°—5°-ро истифода карда, чунин навиштан мумкин аст:

$$c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a.$$

Фақат якто ададии ҳақиқие вуҷуд дорад, ки он фарқи ду ададии ҳақиқии додашуда мебошад. Ба ин боварӣ ҳосил мекунем. Фарз мекунем, ки ғайр аз адади дар боло номбурдаи $c = a + b'$ боз якто ададии d ҳаст, ки $d + b = a$ мебошад. Онгоҳ, аз як ҷиҳат, $(d + b) + b' = a + b' = c$ ва, аз дигар ҷиҳат, $(d + b) + b' = d + (b + b') = d + 0 = d$, яъне $c = d$ мебошад.

Аз таърифи фарқ ва аз хосияти 5° натиҷа мебарояд, ки ададии a'-и ба a муқобил ба фарқи ададии 0 ва ададии a баробар аст. Ин ададро одатан ба намуди $-a$ менависанд.

Хосиятҳои 6°, 7°, 8°, 9°, 10° ва 12°-ро, ки бо мафҳуми ҳосили зарб алоқаманданд, ба мавриди ададҳои ҳақиқӣ татбиқ кардан мушкилие намеорад. Фақат доир ба хосияти 9° қайд мекунем, ки агар a ададии ҳақиқии мусбат бошад ва α_1 ва α_2 ягон ададҳои рационалие бошанд, ки нобаробариҳои $0 < \alpha_1 < a < \alpha_2$-ро қаноат менамоянд, онгоҳ ададии a'-и ба a чаппа

чун адади ҳақиқии ягонае, ки нобаробариҳои $\frac{1}{\alpha_2} \leqslant a' \leqslant \frac{1}{\alpha_1}$-ро қаноат менамоянд*, муайян карда мешавад.

Хосиятҳои 6°—9° барои чунин хулоса баровардан имконият медиҳанд: барои ду адади ҳақиқии дилхоҳи a ва b $(b \neq 0)$ фақат якто адади ҳақиқии c вуҷуд дорад, ки шарти $cb = a$-ро қаноат менамояд. Ин адади c ҳосили тақсими ададҳои a ва b номида мешавад.

Аз таърифи ҳосили тақсим ва аз хосияти 9° натича мебарояд, ки адади a'-и ба адади a чапа ба ҳосили тақсими ададҳои 1 ва b баробар мебошад ва мо онро бо $1/a$ ишорат менамоем.

Ниҳоят, хосияти 13-уми охирин ҳам ба мавриди ададҳои ҳақиқӣ татбиқ мешавад, яъне: *адади ҳақиқии a чи хеле ки бошад, адади 1-ро чун ҷамъшаванда ҳамон қадар маротиба такрор кардан мумкин аст, ки суммаи ҳосилшуда аз a калон шавад***. Ин хосиятро исбот мекунем. Дар мавриди $a < 0$ будан исбот лозим нест, чунки $1 > a$ мебошад. Бигзор $a \geqslant 0$ бошад; $a = a_0$, $a_1 \ldots a_n \ldots$ Дар асоси он, ки таърифи суммаи ададҳои ҳақиқӣ нисбат ба суммаи ададҳои рационалӣ (татбиқаш) бо таърифи суммаи ададҳои рационалӣ якхел аст, адади 1-ро чун ҷамъшаванда n маротиба такрор карда, адади бутуни n-ро ҳосил мекунем. Ҳамин тариқ, исбот кардан кифоя аст, ки барои адади a адади бутуни n ёфт мешавад, ки $n > a$ мебошад. Лекин ин аниқ аст: $n = a_0 + 2$ гирифтан кифоя аст.

Ҳамин тариқ, *ҳамаи хосиятҳои асосие, ки дар п. 1-уми ҳамин параграф барои ададҳои рационалӣ баён карда шуданд, барои мавриди ададҳои ҳақиқӣ татбиқ мешаванд. Пас, ҳамаи қоидаҳои алгебра, ки ба амалҳои арифметикӣ ва ба ҷамъи баробарию нобаробариҳо тааллуқ доранд, барои ададҳои ҳақиқӣ татбиқ доранд.*

Мо бо ҳамин баёни элементҳои назарияи ададҳои ҳақиқиро, ки барои тартиб додани курси анализи математикӣ заруранд, ба итмом мерасонем. Дар иловаи охири ҳамин китоб инкишофи минбаъдаи назарияи ададҳои ҳақиқӣ баён шудааст.

Дар хотима қайд мекунем, ки мо ададҳои ҳақиқиро ба намуди касрҳои даҳии беохир навишта, назарияи ададҳои ҳақиқиро тартиб додем.

Мо ба касрҳои беохири асосашон дилхоҳ ҳам (даҳӣ будан-ашон ҳатмӣ нест) муроҷиат карда метавонистем, ки ин тамоман фаҳмост. Аз ин ҷиҳат системаҳои ҳисоби асосашон гуногун байни якдигар баробарқувва мебошанд. Аммо дар баъзе

---

* Ба сифати адади a' ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи ҳама ададҳои рационалии $\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)$-ро гирифтан мумкин аст.

** Ин хосиятро аксиоман Архимед меноманд.

тариқ, фақат масъалаи барои ададҳои ҳақиқӣ дуруст будани хосиятҳои 2°—13°-ро аниқ кардан лозим аст.

Барои ададҳои ҳақиқӣ дуруст будани хосиятҳои 2°—5° ва 11°-ро, ки бо мафҳуми сумма алоқаманданд, бовар кардан осон аст. Дуруст будани хосиятҳои 2°—5° бевосита аз таърифи суммаи ададҳои ҳақиқӣ ва аз дурустии хосиятҳои номбаршудаи ададҳои рационалӣ тасдиқ мешавад.

Ба исботи хосияти 11° таваққуф менамоем, яъне исбот мекунем, ки *агар a, b ва c се адади ҳақиқии дилхоҳ бошанд ва* $a > b$ *бошад, онгоҳ* $a + c > b + c$ *мебошад.*

Азбаски $a > b$ мебошад, пас дар асоси тасдиқоти ёрирасон, ки ҳангоми исботи лемма муқаррар карда шуд (ба охири п. 1-уми ҳамин параграф нигаред), ададҳои рационалии α_1 ва β_2 ёфт мешаванд, ки $a > \alpha_1 > \beta_2 > b$ мебошад. Барои ададиҳақиқии c ва барои адади рационалии мусбати $\varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ ададҳои рационалии γ_1 ва γ_2 ёфт мешаванд, ки $\gamma_1 < c < \gamma_2$ мебошад ва ғайр аз ин $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ аст (ба тасдиқоти дар п. 4-уми § 1 исботшуда нигаред).

Акнун бигзор α_2 ва β_1 ададҳои рационалии дилхоҳе бошанд, ки нобаробариҳои $\alpha_2 \geqslant a$, $a \geqslant \beta_1$-ро қаноат менамоянд. Онгоҳ мувофиқи таърифи суммаи ададҳои ҳақиқӣ

$$\alpha_2 + \gamma_2 \geqslant a + c \geqslant \alpha_1 + \gamma_1, \quad \beta_2 + \gamma_2 \geqslant b + c \geqslant \beta_1 + \gamma_1.$$

Барои исбот кардани он, ки $a + c > b + c$ мебошад, дар асоси транзитивии аломати $>$ исбот кардан кифоя аст, ки $\alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$ мебошад, лекин ин аз нобаробарии $\gamma_2 - \gamma_1 < \alpha_1 - \beta_2$ бевосита ҳосил мешавад.

Масъалаи *тарҳи* ададҳои ҳақиқӣ чун амали баръакси ҷамъ дар асоси хосиятҳои 2°—5° пурра ҳал карда мешавад. *Фарқи ададҳои ҳақиқии a ва b гуфта ададиҳақиқии c-ро меномем, ки* $c + b = a$ *мебошад.*

Боварӣ ҳосил мекунем, ки чунин фарқ аз адади $c = a + b'$ иборат мебошад (дар ин ҷо b' — ададиба b муқобил).

Воқеан, хосиятҳои 2°—5°-ро истифода карда, чунин навиштан мумкин аст:

$$c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a.$$

Фақат якто ададиҳақиқие вуҷуд дорад, ки он фарқи ду ададиҳақиқии додашуда мебошад. Ба ин боварӣ ҳосил мекунем. Фарз мекунем, ки ғайр аз ададидар боло номбурдаи $c = a + b'$ боз якто ададиd ҳаст, ки $d + b = a$ мебошад. Онгоҳ, аз як ҷиҳат, $(d + b) + b' = a + b' = c$ ва, аз дигар ҷиҳат, $(d + b) + b' = d + (b + b') = d + 0 = d$, яъне $c = d$ мебошад.

Аз таърифи фарқ ва аз хосияти 5° натиҷа мебарояд, ки ададиa'-и ба a муқобил ба фарқи адади 0 ва ададиa баробар аст. Ин ададро одатан ба намуди $-a$ менависанд.

Хосиятҳои 6°, 7°, 8°, 9°, 10° ва 12°-ро, ки бо мафҳуми ҳосили зарб алоқаманданд, ба мавриди ададҳои ҳақиқӣ татбиқ кардан мушкилие намеорад. Фақат доир ба хосияти 9° қайд мекунем, ки агар a ададиҳақиқии мусбат бошад ва α_1 ва α_2 ягон ададҳои рационалие бошанд, ки нобаробариҳои $0 < \alpha_1 < a < \alpha_2$-ро қаноат менамоянд, онгоҳ ададиa'-и ба a чапа

чун адади ҳақиқии ягонае, ки нобаробариҳои $\frac{1}{\alpha_2} \leqslant a' \leqslant \frac{1}{\alpha_1}$-ро қаноат менамоянд*, муайян карда мешавад.

Хосиятҳои 6°—9° барои чунин хулоса баровардан имконият медиҳанд: барои ду адади ҳақиқии дилхоҳи a ва b $(b \neq 0)$ фақат якто адади ҳақиқии c вуҷуд дорад, ки шарти $cb = a$-ро қаноат менамояд. Ин адади c ҳосили тақсими ададҳои a ва b номида мешавад.

Аз таърифи ҳосили тақсим ва аз хосияти 9° натиҷа мебарояд, ки адади a'-и ба адади a чаппа ба ҳосили тақсими ададҳои 1 ва b баробар мебошад ва мо онро бо $1/a$ ишорат менамоем.

Ниҳоят, хосияти 13-уми охирин ҳам ба мавриди ададҳои ҳақиқӣ татбиқ мешавад, яъне: *адади ҳақиқии a чи хеле ки бошад, адади 1-ро чун ҷамъшаванда ҳамон қадар маротиба такрор кардан мумкин аст, ки суммаи ҳосилшуда аз a калон шавад***. Ин хосиятро исбот мекунем. Дар мавриди $a < 0$ будан исбот лозим нест, чунки $1 > a$ мебошад. Бигзор $a \geqslant 0$ бошад; $a = a_0$, $a_1 \ldots a_n \ldots$ Дар асоси он, ки таърифи суммаи ададҳои ҳақиқӣ нисбат ба суммаи ададҳои рационалӣ (татбиқаш) бо таърифи суммаи ададҳои рационалӣ якхел аст, адади 1-ро чун ҷамъшаванда n маротиба такрор карда, адади бутуни n-ро ҳосил мекунем. Ҳамин тариқ, исбот кардан кифоя аст, ки барои адади a адади бутуни n ёфт мешавад, ки $n > a$ мебошад. Лекин ин аниқ аст: $n = a_0 + 2$ гирифтан кифоя аст.

Ҳамин тариқ, *ҳамаи хосиятҳои асосие, ки дар п. 1-уми ҳамин параграф барои ададҳои рационалӣ баён карда шуданд, барои мавриди ададҳои ҳақиқӣ татбиқ мешаванд. Пас, ҳамаи қоидаҳои алгебра, ки ба амалҳои арифметикӣ ва ба ҷамъи баробарию нобаробариҳо тааллуқ доранд, барои ададҳои ҳақиқӣ татбиқ доранд.*

Мо бо ҳамин баёни элементҳои назарияи ададҳои ҳақиқиро, ки барои тартиб додани курси анализи математикӣ заруранд, ба итмом мерасонем. Дар иловаи охири ҳамин китоб инкишофи минбаъдаи назарияи ададҳои ҳақиқӣ баён шудааст.

Дар хотима қайд мекунем, ки мо ададҳои ҳақиқиро ба намуди касрҳои даҳии беохир навишта, назарияи ададҳои ҳақиқиро тартиб додем.

Мо ба касрҳои беохири асосашон дилхоҳ ҳам (даҳӣ будаашон ҳатмӣ нест) мурочиат карда метавонистем, ки ин тамоман фаҳмост. Аз ин ҷиҳат системаҳои ҳисоби асосашон гуногун байни якдигар баробаркувва мебошанд. Аммо дар баъзе

---

* Ба сифати адади a' ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи ҳама ададҳои рационалии $\left\{\frac{1}{\alpha_2}\right\}$-ро гирифтан мумкин аст.

** Ин хосиятро аксиоман Архимед меноманд.

ДАР БОРАИ АЗ СИСТЕМАИ ДАҲИИ ҲИСОБ БА СИСТЕМАИ ДУЙ ВА АЗ СИСТЕМАИ ДУЙ БА СИСТЕМАИ ДАҲЙ ГУЗАРОНИДАНИ АДАДҲО

Дар ин илова мо ба алгоритми аз системаи даҳии ҳисоб ба системаи дуй ва аз системаи дуй ба системаи даҳй гузаронидани ададҳо таваққуф мекунем*.

1. **Аз системаи даҳии ҳисоб ба системаи дуй гузаронидани ададҳо.** Барои дар сеткаи разрядии мошини электронй дода шудани ададн даҳии x_{10} намуди нормалй номидашавандаи навишти ин адад, яъне

$$x_{10} = q_{10} \cdot 10^{p_{10}} \tag{2.18}$$

истифода карда мешавад.

Дар ин намуди навишт бузургии

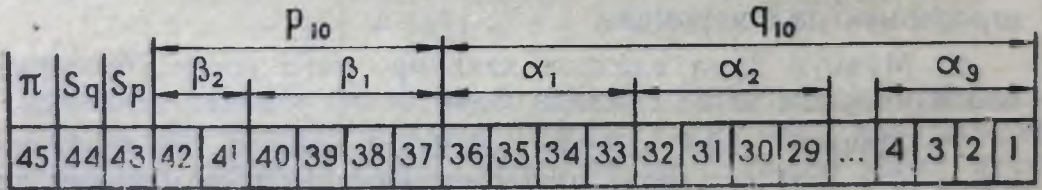
$$q_{10} = (1 - 2S_q)\,(\alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + \alpha_9 \cdot 10^{-9}) \tag{2.19}$$

мантиссаи даҳии ададн додашуда номида мешавад, дар айни ҳол $\alpha_1 \geqslant \geqslant 1$; ҳангоми $q_{10} \geqslant 0$ будан S_q баробари нуль ва ҳангоми $q_{10} < 0$** будан S_q баробари як воҳид гирифта мешавад; нишондиҳандаи дараҷа

$$p_{10} = (1 - 2S_p)\,(\beta_1 + 10\beta_2) \tag{2.20}$$

тартиби даҳии ададн додашуда номида мешавад, дар айни ҳол ҳангоми $p_{10} \leqslant 0$ будан S_p баробари нуль ва ҳангоми $p_{10} < 0$*** будан S_p баробари як воҳид гирифта мешавад.

Дар сеткаи разрядии мошини электронй чй тавр дода шудани ададҳои даҳии (2.18)—(2.20) дар расми 2.3 нишон дода шудааст. Дар тасвири ҳар яки ададҳои даҳии β_1, α_1, α_2, ..., α_9 чортогй разряди дуй чудо карда шудааст, чунки ҳар яки ададҳои нишон додашуда қимати бутунадади дилхоҳи аз 0 то 15-ро қабул карда метавонад; дар тасвири ададн β_2 ҳамагй ду разряд чудо карда шудааст, чунки β_2 қиматҳои 0, 1, 2, 3****-ро қабул карда метавонад.



Расми 2.3

* Алгоритме, ки дар поён баён мешавад, аз чумла, дар мошинҳои электронии БЭСМ-4 истифода мешавад.

** Ҳамин тариқ, дар баробарии (2.19) зарбкунандаи $(1 - 2S_q)$ аломати мантиссаи q_{10}-ро тавсиф мекунад.

*** Чунки дар баробарии (2.20) зарбкунандаи $(1 - 2S_p)$ аломати тартиби p_{10}-ро тавсиф мекунад.

**** Вокеан, вобаста ба сохти асбоби клавишдор, дар ин асбоб ҳар яке аз ададҳои β_1, α_1, α_2, ..., α_9-ро аз нӯҳ зиёд ва ададн β_2-ро аз як воҳид зиёд гузоштан мумкин нест. Ҳамин тариқ, ҳар яки ададҳои β_1, α_1, α_2, ..., α_9 дар диапазони аз 0 то 9 тағьир меёбад ва ададн β_2 қиматҳои аз 0 то 1-ро қабул мекунад.

Программаи стандартӣ аз рӯи адади даҳии (2.18)—(2.20), ки ба он адади дуии x_2 мувофиқ меояд, кор мекунад. Ин программа ин тавр амал мекунад. Аввал бузургии γ ҳисоб карда мешавад:

$$\gamma = (1 - 2S_q)\,(\alpha_1 \cdot 10^9 + \alpha_2 \cdot 10^8 + \ldots + \alpha_9) \cdot 2^{68}.$$

Баъд ин бузургии γ ба бузургии $k = 2^{68} \cdot 10^{-10}$ зарб карда мешавад (бузургии k ба намуди нормалӣ ба мошин дода мешавад; дар айни ҳол он одатан бо барзиёдӣ дар ду воҳиди разряди хурди мантисса дода мешавад).

Ҳосили зарби $k\gamma$ ба мантиссаи даҳии (2.19) ҷавоб медиҳад. Баъд $k\gamma$ ба 10 ё ба 1/10, вобаста аз аломати p_{10} (яъне аз S_p) ҳамон қадар маротибаи бузургии $|p_{10}|$, зарб карда мешавад. Дар охири программа дар натиҷаи ҳосил кардашуда одатан се разряди хурди мантисса хориҷ карда мешавад.

Программаи номбурда 1) ақаллан 30-то аломати дуии дурусти натиҷаро таъмин мекунад, 2) дар диапазони аз 0 то 50 000 ба адади дуӣ гузаронидани адади даҳии бутуни дилхоҳро таъмин мекунад, 3) ба адади нормалишудаи дуӣ* гузаронидани адади нормалишудаи даҳиро таъмин мекунад.

Дар хулоса бояд қайд кард, ки агар ҳангоми амали программаи номбурда дар процесси зарб ба 10 тартиби дуии адади гузаронидашаванда аз 59 калон бошад, онгоҳ зарби минбаъда ба 10 (ҳатто агар онҳо мувофиқи бузургии $|p_{10}|$ талаб карда шаванд ҳам) қатъ карда мешавад.

2. Аз системаи дуии ҳисоб ба системаи даҳӣ гузаронидани ададҳо. Программаи стандартиеро нишон медиҳем, ки он аз рӯи адади дуии ба намуди нормалӣ овардашудаи додашудаи $x_2 = q_2 \cdot 2^{p_2}$ адади даҳии ба он мувофиқи x_{10}-ро, ки он ба намуди нормалӣ (2.18)—(2.20) навишта шудааст, кор карда мебарорад. Адади кор кардашаванда дар сеткаи разрядии мошин, чунон ки дар расми 2.3 нишон дода шудааст, ҷойгир шудааст.

Программа ин тавр амал мекунад. Аввал адади ибтидоии x_2 ба 1/10 зарб карда мешавад. Баъд адади ҳосилшуда ба 10 ё ба 1/10 (вобаста аз он, ки он аз воҳид калон аст ё не) то он вақте, ки натиҷаи зарб дар интервали аз 1/10 то 1 набошад, зарб карда мешавад. Шумораи зарбҳои иҷрошуда $|p_{10}|$-ро муайян мекунад. Агар адади ибтидоӣ аз воҳид калон бошад, аломати p_{10} мусбат ва дар мавриди баръакс аломати он манфӣ мешавад.

Баъд, маълум аст, ки адади дар натиҷаи зарб ҳосилшуда мантиссаи даҳии q_{10} мебошад. Рақамҳои α_1, α_2, ..., α_9-и мантиссаи даҳии q_{10} пай дар пай бо роҳи ба 10 зарб кардан ва ҷудо кардани қисми бутун муайян карда мешаванд.

ИЛОВАИ 2

ДОИР БА САҲВ ДАР ЯКЛУХТКУНИИ АДАДҲО ДАР СИСТЕМАИ ҲИСОБИ АСОСАШОН ҶУФТ ВА ТОҚ

Фарз мекунем, ки мошини ҳисоббарор бо ададҳои t-разряда дар системаи ҳисоби асосаш $p \geqslant 2$ кор мекунад. Онгоҳ, умумиятро кам накарда, чунин ҳисобидан мумкин, ки ҳамаи ададҳои $x^{(t)}$, ки дар хотираи мошин нигоҳ дошта мешаванд, намуди зерин доранд:

$$x^{(t)} = a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \ldots + a_t p^{-t}.$$

---

* Агар адади даҳии ибтидоӣ нормалӣ набошад (яъне дар (2.10) шарти $\alpha_1 \geqslant 1$ вайрон шавад), онгоҳ натиҷаи ба системаи дуӣ гузаронидани он ҳам нормалӣ намешавад.

дар ин ҷо коэффициенти a_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ қиматҳои 0, 1, ..., $(p-1)$-ро қабул карда метавонад. Дар натиҷаи чунин амалҳо, монанди ҷамъ, зарб ё тақсим, ки бо ададҳои t-разряда иҷро карда мешаванд, ададҳое ҳосил шуданашон мумкин, ки онҳо зиёда аз t разряд доранд ва, бинобар ин, ба яклухткунии ададҳои номбурда (то t разряд) зарурият пайдо шуданаш табиист.

Амали соддатарро, яъне то ададҳои дорои t разряд яклухт кардани ададҳои дорои $t+r$ (дар ин ҷо $r > 0$) разрядро дида мебароем. Адади $x^{(t+r)}$-и дорои $(t+r)$ разрядро бо қадом тарзе ки яклухт кунем, натиҷаи яклухткунӣ бояд адади t-разряда бошад. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки саҳви яклухткунии адади $x^{(t+r)}$ (ин саҳвро бо символи $\varepsilon(x^{(t+r)})$ ишорат мекунем) чунин намуд дорад:

$$\varepsilon(x^{(t+r)}) = -ip^{-(t+r)} + m(i) \cdot p^{-t}.$$

Дар ин ҷо i вобаста аз қимати r разряди охирини адади $x^{(i+r)}$ қиматҳои 0, 1, ..., $p^r - 1$-ро қабул карда метавонад. $m(i)$ ягон функция аз i мебошад, ки қиматҳои бутунадад мегирад ва аз тарзи интихобшудаи яклухткунӣ вобаста мебошад.

Характеристикаи муҳимтарини саҳви яклухткунӣ қимати миёнаи он (Δ) мебошад, ки чун касри*

$$\Delta = \frac{\sum \varepsilon(x^{(t+r)})}{n^{(t+r)}}$$

муайян карда мешавад; сурати каср суммаи саҳвест, ки ба ҳама қиматҳои равои адади $x^{(t+r)}$ мувофиқ меояд ва махраҷ шумораи чунин ададҳои $x^{(t+r)}$ мебошад.

Фарз мекунем, ки ҳама ададҳои муоинашавандаи $x^{(t+r)}$ нобаробарии $0 \leqslant x^{(t+r)} < 1$ро қаноат менамоянд. Онгоҳ шумораи $n^{(t+r)}$-то $x^{(t+r)}$-ҳо ба p^{t+r} баробар мешавад ва баъди ҳисоббарориҳои номураккаб чунин ифода ҳосил мешавад:

$$\Delta = \frac{\sum [-ip^{-(t+r)} + m(i) \cdot p^{-t}]}{p^{t+r}} = p^{-(t+r)} \left\{ \sum_{i=0}^{p^r-1} m(i) - \frac{p^r - 1}{2} \right\}.$$

Суммаи $\sum m(i)$, ки дар таҳти қавсҳои фигуравӣ воқеъ аст, аз тарзи интихобшудаи яклухткунӣ вобаста мебошад, лекин дар мавриди дилхоҳ ин сумма адади бутун мешавад. Аъзои дуюми таҳти қавсҳои фигуравӣ $\frac{p^r - 1}{2}$ ҳангоми дилхоҳ будани p-и ҷуфт адади бутун намешавад. Ҳамин тариқ, ҳангоми дилхоҳ будани асоси ҷуфт (p) саҳви миёна ба нуль баробар намешавад. Ин чунин маъно дорад, ки дар тарзи қайдшудаи дилхоҳи яклухткунӣ, ки фақат бо разрядҳои партофташаванда муайян мешавад, саҳви (то адади хурди разрядҳо) яклухткунӣ дар системаи дилхоҳи ҳисоби асосаш ҷуфт муттасил ҷой иваз мекунад. Аз дигар ҷиҳат, санҷидан осон аст, ки қоидаи муқаррарии «мактабии» яклухткунӣ дар системаи дилхоҳи ҳисоби асосаш тоқ ба саҳви «ҷойивазнакунанда» меорад.

---

* Символи $\sum$ символи сумма кардани ҳамон ҷамъшавандаҳоест, ки онҳо аз паси ин символ навишта шудаанд. Агар ҷамъшавандаҳои номбурда аз номери i вобаста бошанд, онгоҳ навишти $\sum_{i=m}^{n}$ чунин маъно дорад, ки ҳама қиматҳои i-ро аз m то n сумма кардан лозим аст.

БОБИ 3

ЛИМИТИ ПАЙДАРПАИҲО

Амали гузариши лимитӣ яке аз амалҳои асосии анализи математикӣ мебошад. Ин амал дар анализи математикӣ дар шаклҳои гуногун дучор мешавад. Дар ин боб шакли соддатарини амали гузариши лимитӣ, ки ба мафҳуми лимити пайдарпаии ададӣ номидашаванда асос ёфтааст, омӯхта мешавад. Мафҳуми лимити пайдарпаии ададӣ имконият медиҳад, ки мо минбаъд шаклҳои дигари амали гузариши лимитиро муайян намоем.

§ 1. Пайдарпаиҳои ададӣ

1. Пайдарпаиҳои ададӣ ва амалҳо бо онҳо. Мо аз курси математикаи элементарӣ дар бораи пайдарпаиҳои ададӣ тасаввурот дорем. Ана, мисолҳои пайдарпаиҳои ададӣ: 1) пайдарпаии ҳама элементҳои прогрессияҳои арифметикӣ ва геометрӣ, 2) пайдарпаии периметри n-кунҷаҳои мунтазам, ки дар даруни давраи додашуда кашида шудаанд, 3) пайдарпаии $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$ ...-и қиматҳои тақрибии ададии $\sqrt{2}$. Мо омӯзиши ин пунктро аз аниқ кардани мафҳуми лимити пайдарпаӣ сар мекунем.

Агар ба ҳар як адади n-и қатори ададҳои натуралии 1, 2, ..., n, ... *аз рӯи қонуни муайян ягон ададии ҳақиқии* x_n *дар мувофиқатӣ гузошта шавад, онгоҳ мо маҷмӯи ададҳои ҳақиқии номеронидашудаи*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (3.1)$$

-ро пайдарпаии ададӣ ё фақат пайдарпаӣ меномем.

Ададҳои x_n-ро *элементҳо* ё *аъзоҳои* пайдарпаии (3.1) меномем. Пайдарпаии (3.1)-ро мухтасаран бо символи $\{x_n\}$ ишорат мекунем. Масалан, пайдарпаии 1, 1/2, ..., $1/n$, ...-ро бо символи

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ва пайдарпаии 0, 2, 0, 2, ...-ро бо символи $\{1+(-1)^n\}$ ишорат менамоем.

Мафҳуми амалҳои арифметикӣ бо пайдарпаиҳои ададиро чорӣ мекунем. Фарз мекунем, ки пайдарпаиҳои дилхоҳи $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ дода шудаанд. Пайдарпаии $x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots$ (ё $\{x_n+y_n\}$)-ро *суммаи* ин пайдарпаиҳо меномем. Пайдарпаии $x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n, \ldots$ (ё $\{x_n-y_n\}$)-ро *фарқи* ин пайдарпаиҳо меномем. Пайдарпаии $x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots$ (ё $\{x_n \cdot y_n\}$)-ро *ҳосили зарби* ин пайдарпаиҳо меномем. Пайдарпаии $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots$ (ё $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$)-ро *ҳосили тақсими* ин пайдарпаиҳо меномем.

✔Қайд. Ҳангоми муайян кардани (таъриф додани) ҳосили тақсими $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ бояд *ҳама элементҳои* y_n-и пайдарпаии $\{y_n\}$ аз нуль тафовут дошта бошанд. Аммо, агар дар пайдарпаии $\{y_n\}$ *фақат шумораи охирноки элементҳо* баробари нуль шаванд, онгоҳ ҳосили тақсими $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$-ро аз ҳамон номераш, ки аз он сар карда, ҳама элементҳои y_n аз нуль тафовут доранд, муайян кардан мумкин аст.

2. Пайдарпаиҳои маҳдуд ва номаҳдуд.

Таърифи 1. Пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии аз боло (аз поён) маҳдуд номида мешавад, агар чунин ададии ҳақиқии M (ададии ҳақиқии m) мавҷуд бошад, ки ҳар як элементи x_n-и пайдарпаии $\{x_n\}$ нобаробарии $x_n \leqslant M$ ($x_n \geqslant m$)-ро қаноат намояд.*

Дар айни ҳол ададии M (ададии m) *ҳудуди болоии (ҳудуди поёнии)* пайдарпаии $\{x_n\}$ номида мешавад. Нобаробарии $x_n \leqslant M$ ($x_n \geqslant m$) *шарти* аз боло (аз поён) *маҳдуд будани* пайдарпай номида мешавад.

Бояд қайд кард, ки пайдарпаии аз боло маҳдуди дилхоҳ маҷмӯи бешумори ҳудудҳои болой дорад. Воқеан, агар M ҳудуди болой бошад, онгоҳ ададии дилхоҳи M*, ки аз M калон аст, низ ҳудуди болой мебошад. Дар шарти $x_n \leqslant M$-и аз боло маҳдуд будани пайдарпаии $\{x_n\}$ ҳудуди болоии дилхоҳро ба си-

---

* Ин таъриф ба таърифи маҷмӯи аз боло (аз поён) маҳдуди ададҳои ҳақиқӣ пурра монанд аст (ба п. 5-уми § 1-уми боби 2 нигаред).

фати M муоина кардан мумкин аст. Доир ба ҳудудҳои поёнии пайдарпаии аз поён маҳдуди $\{x_n\}$ ҳамингуна қайд раво мебошад.

Таърифи 2. Пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии аз ҳар ду тараф маҳдуд ё фақат пайдарпаии маҳдуд номида мешавад, агар он ҳам аз боло ва ҳам аз поён маҳдуд бошад, яъне агар чунин ададҳои m ва M мавҷуд бошанд, ки элементи дилхоҳи x_n-и ин пайдарпай нобаробарии $m \leqslant x_n \leqslant M$-ро қаноат намояд.

Агар пайдарпаии $\{x_n\}$ маҳдуд бошад ва M ва m ҳудудҳои болоӣ ва поёнии он бошанд, онгоҳ ҳама элементҳои x_n-и ин пайдарпай нобаробарии

$$|x_n| \leqslant A \tag{3.2}$$

-ро қаноат менамоянд, дар ин ҷо A — адади максималии ададҳои $|M|$ ва $|m|$. Баръакс, агар ҳама элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$ нобаробарии (3.2)-ро қаноат намоянд, онгоҳ нобаробарии $-A \leqslant x_n \leqslant A$ низ ичро мешавад ва, бинобар ин, пайдарпаии $\{x_n\}$ маҳдуд аст. Ҳамин тариқ, нобаробарии (3.2) шакли дигари маҳдудияти пайдарпай мебошад. Мафҳуми пайдарпаии номаҳдудро аниқ мекунем. *Пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии номаҳдуд номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи A элементи x_n-и ин пайдарпай ёфт шавад, ки он нобаробарии $|x_n| > A$-ро қаноат менамояд.* Чанд мисол меорем.

1) Пайдарпаии $-1, -4, -9, \ldots, -n^2, \ldots$ аз боло маҳдуд буда, аз поён номаҳдуд мебошад. Адади дилхоҳи аз -1 хурд набудаги ҳудуди болоии ин пайдарпай мебошад.

2) Пайдарпаии $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ пайдарпаии маҳдуд мебошад. Ҳақиқатан, адади дилхоҳи $M \geqslant 1$ ҳудуди болоӣ ва адади дилхоҳи $m \leqslant 0$ ҳудуди поёнии ин пайдарпай мебошад.

3) Пайдарпаии $1, 2, 1, 3, \ldots, 1, n, 1, (n+1), \ldots$ пайдарпаии номаҳдуд мебошад. Воқеан, адади мусбати A чи хеле ки бошад, дар байни элементҳои ин пайдарпай (элементҳои номарашон ҷуфт) элементе ёфт мешавад, ки он аз A калон мебошад.

3. Пайдарпаиҳои беохир калон ва беохир хурд.

Таърифи 1. Пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии беохир калон номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи A чунин номери N-ро** нишон додан мумкин бошад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан ҳама элементҳои x_n-и ин пайдарпай нобаробарии $|x_n| > A$-ро қаноат менамоянд.*

Қайд. Возеҳ аст, ки пайдарпаии беохир калони дилхоҳ пайдарпаии номаҳдуд мебошад, чунки барои $A > 0$-и дилхоҳ

---

* Ҳар чи қадар калон нагирем ҳам.

** Азбаски номери N аз адади A вобаста аст, пас баъзан чунин менависанд: $N = N(A)$.

чунин номери N-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан *ҳама элементҳои* x_n нобаробарии $|x_n| > A$-ро қаноат менамоянд, бинобар ин, барои $A > 0$-и дилхоҳ ақаллан якто чунин элементи x_n ёфт мешавад, ки $|x_n| > A$ мебошад. Бо вуҷуди он пайдарпаии номаҳдуд беохир калон нашуданаш мумкин аст. Масалан, пайдарпаии номаҳдуди 1, 2, 1, 3, ..., 1, n, ... пайдарпаии беохир калон намебошад, чунки ҳангоми $A > 1$ будан нобаробарии $|x_n| > A$ *барои ҳама* x_n-ҳои номерашон тоқ мавқеъ надорад.

Таърифи 2. Пайдарпаии $\{\alpha_n\}$* *пайдарпаии беохир хурд номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи* ε** *чунин номери* N*** *ёфт шавад, ки ҳангоми* $n \geqslant N$ *будан ҳама элементҳои* α_n*-и ин пайдарпай нобаробарии* $|\alpha_n| < \varepsilon$*-ро қаноат менамоянд.*

Чанд мисол меорем.

1) Исбот мекунем, ки пайдарпаии $q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$ ҳангоми $|q| > 1$ будан пайдарпаии беохир калон аст ва он ҳангоми $|q| < 1$ будан пайдарпаии беохир хурд аст.

Аввал мавриди $|q| > 1$-ро муоина мекунем. Онгоҳ $|q| = 1 + \delta$, дар ин ҷо $\delta > 0$. Формулаи биноми Ньютонро истифода карда, $|q|^N = (1 + \delta)^N = 1 + \delta N +$ (аъзоҳои мусбат)-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо

$$|q|^N > \delta N. \tag{3.3}$$

Адади дилхоҳи $A > 0$-ро қайд мекунем ва номери N-ро чунон калон интихоб менамоем, ки нобаробарии $\delta N > A$**** мавқеъ дошта бошад. Аз нобаробарии охирин ва нобаробарии (3.3) нобаробарии $|q|^N > A$ ҳосил мешавад. Азбаски ҳангоми $n \geqslant N$ будан ва ҳангоми $|q| > 1$ будан $|q|^n \geqslant |q|^N$ мебошад (дар асоси хосияти ҳосили зарби ададҳои ҳақиқӣ), пас ҳангоми $n \geqslant N$ будан $|q|^n > A$ мебошад. Бо ҳамин исбот карда шуд, ки ҳангоми $|q| > 1$ будан пайдарпаии муоинашаванда пайдарпаии беохир калон мебошад.

Мавриди $|q| < 1$ айнан ҳамин тавр муоина карда мешавад. Дар ин мавриди $\frac{1}{q} = 1 + \delta$, дар ин ҷо $\delta > 0$ (мо мавриди $q = 0$-ро қатъи назар кардем). Формулаи биноми Ньютонро боз

---

* Элементҳои пайдарпаиҳои беохир хурдро, чун қоида, бо ҳарфҳои юноний ишорат мекунем.

** Ҳар чи қадар хурд нагирем ҳам.

*** Азбаски номери N аз адади ε вобаста аст, пас баъзан чунин менависанд: $N = N(\varepsilon)$.

**** Чунин фарз кардан кифоя аст: $N = \left[\frac{A}{\delta}\right] + 1$, дар ин ҷо символи $[x]$ қисми бутуни адади x-ро ифода мекунад. Масалан, $[5, 138] = 5$, $[-172{,}9] = -173$.

истифода карда, мо ба чои (3.3) нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{|q|^N} > \delta N, \quad \text{ё} \quad |q|^N < \frac{1}{\delta N}. \qquad (3.3^*)$$

$\varepsilon > 0$-и дилхоҳро қайд менамоем ва аз шарти $\frac{1}{\delta N} < \varepsilon^*$ номери N-ро интихоб мекунем. Азбаски ҳангоми $n \geqslant N$ ва $|q| < 1$ будан $|q|^n \leqslant |q|^N$ аст, пас аз нобаробариҳои ҳосилшуда натича мебарояд, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан $|q|^n < \varepsilon$ мебошад. Бо ҳамин исбот карда шуд, ки ҳангоми $|q| < 1$ будан пайдарпаии муоинашаванда пайдарпаии беохир хурд мебошад.

2) Исбот мекунем, ки пайдарпаии $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Воқеан, агар $n \geqslant N$ бошад, онгоҳ $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N}$ аст. Бинобар ин аз рӯи ε-и додашуда аз шарти $\frac{1}{N} < \varepsilon$ номери N-ро интихоб кардан кифоя аст. Масалан, фарз кардан мумкин аст, ки $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

4. Хосиятҳои асосии пайдарпаиҳои беохир хурд.

Теореми 3.1. Суммаи ду пайдарпаии беохир хурд пайдарпаии беохир хурд мебошад.

Исбот. Фарз мекунем, ки $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ пайдарпаиҳои беохир хурд мебошанд. Исбот мекунем, ки пайдарпаии $\{\alpha_n + \beta_n\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Бигзор ε адади мусбати дилхоҳ бошад, N_1 номерест, ки аз он сар карда, $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ ва N_2 номерест, ки аз он сар карда, $|\beta_n| < \varepsilon/2$ мебошад. (Чунин номерҳои N_1 ва N_2 мувофиқи таърифи **пайдарпаии беохир хурд** ёфта мешаванд.) Азбаски модули суммаи ду адад аз суммаи модулҳои онҳо калон нест, яъне $|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|$ (ба п. 4-уми § 2-юми боби 2 нигаред), пас аз ду номери N_1 ва N_2 калонтаринашро бо N ишорат карда мебинем, ки аз номери N сар карда, нобаробарии $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$ иҷро мешавад. Ин чунин маъно дорад, ки пайдарпаии $\{\alpha_n + \beta_n\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Теорема исбот шуд.

---

* Чунин фарз кардан кифоя аст: $N = [\frac{1}{\delta\varepsilon}] + 1$.

Теорема 3.2. *Фарқи ду пайдарпаии беохир хурд пайдарпаии беохир хурд мебошад.*

Ин теорема мисли теоремаи 3.1 исбот карда мешавад, фақат ба ҷои нобаробарии $|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|$ нобаробарии $|\alpha_n - \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|$-ро гирифтан лозим аст.

Натиҷа. Суммаи алгебравии пайдарпаиҳои беохир хурди шумораашон охирноки дилхоҳ пайдарпаии беохир хурд мебошад.

Теорема 3.3. Пайдарпаии беохир хурд пайдарпаии маҳдуд мебошад.

Исбот. Фарз мекунем, ки $\{\alpha_n\}$ пайдарпаии беохир хурд ва ε ягон адади мусбат мебошад. Баъд, бигзор N номере бошад, ки аз он сар карда, $|\alpha_n| < \varepsilon$ мебошад. Аз N-то ададҳои ε, $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, ..., $|\alpha_{N-1}|$ калонтаринашро бо A ишорат мекунем. Инро чунин навиштан мумкин аст: $A = \max\{\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N-1}|\}$*. Возеҳ аст, ки барои номери n-и дилхоҳ $|\alpha_n| \leqslant A$ мебошад. Ин маънои маҳдудияти пайдарпаиро дорад. Теорема исбот шуд.

Теорема 3.4. *Ҳосили зарби пайдарпаии маҳдуд ва пайдарпаии беохир хурд пайдарпаии беохир хурд мебошад.*

Исбот. Фарз мекунем, ки $\{x_n\}$ пайдарпаии маҳдуд ва $\{\alpha_n\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Азбаски пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии маҳдуд мебошад, пас чунин адади $A > 0$ ёфт мешавад, ки элементи дилхоҳи x_n нобаробарии $|x_n| \leqslant A$-ро қаноат менамояд. Адади мусбати дилхоҳи ε-ро мегирем. Азбаски пайдарпаии $\{\alpha_n\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад, пас барои адади мусбати ε/A чунин номери N-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $|\alpha_n| < \varepsilon/A$ иҷро мешавад. Онгоҳ ҳангоми $n \geqslant N$ будан $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$. Бинобар ин пайдарпаии $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Теорема исбот шуд.

Натиҷа. Ҳосили зарби пайдарпаиҳои беохир хурди шумораашон охирноки дилхоҳ пайдарпаии беохир хурд мебошад.

Қайд. Ҳосили таксими ду пайдарпаии беохир хурд пайдарпаии типи дилхоҳ шуда метавонад ва ҳатто маъно надоштанаш мумкин аст. Масалан, агар $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n$ бошад, онгоҳ ҳама элементҳои пайдарпаии $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ ба воҳид баробаранд. Агар $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n^2$ бошад, онгоҳ пайдарпаии

* Дар ин ҷо ва минбаъд символи $a = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ чунин маъно дорад, ки адади a ба адади максималии ададҳои $a_1, a_2, \ldots, a_n$ баробар аст.

$\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ пайдарпаии беохир калон аст ва, баръакс, агар $\alpha_n = 1/n^2$ ва $\beta_n = 1/n$ бошад, онгоҳ пайдарпаии $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ пайдарпаии беохир хурд аст. Агар элементҳои беҳад бисьёри пайдарпаии $\{\beta_n\}$ баробари нуль бошанд, онгоҳ ҳосили тақсими $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ маъно надорад.

Теореми 3.5. *Агар ҳама элементҳои пайдарпаии беохир хурди* $\{\alpha_n\}$ *ба як адади с баробар бошанд. онгоҳ* $c = 0$ *аст.*

Исбот. Фарз мекунем, ки $c \neq 0$ аст. Бигзор $\varepsilon = |c|/2$ бошад, онгоҳ $\varepsilon > 0$ аст. Аз номери N, ки ба ин ε мувофиқ меояд, сар карда, нобаробарии $|\alpha_n| < \varepsilon$ иҷро мешавад. Азбаски $\alpha_n = c$ ва $\varepsilon = |c|/2$ мебошад, пас нобаробарии охиринро ин тавр навиштан мумкин аст: $|c| < |c|/2$, аз ин ҷо $1 < 1/2$. Зиддияти ҳосилшуда нишон медиҳад, ки фарзияти $c \neq 0$ мавқеъ надорад. Инак, $c = 0$ мебошад. Теорема исбот шуд.

Дар хотима ҷумлаеро баён мекунем, ки он алоқамандии пайдарпаиҳои беохир калон ва беохир хурдро муқаррар мекунад.

Теореми 3.6. *Агар* $\{x_n\}$ *пайдарпаии беохир калон бошад, онгоҳ, аз ягон номери n сар карда, пайдарпаии* $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ *муайян аст, ки он пайдарпаии беохир хурд мебошад. Агар ҳама элементҳои пайдарпаии беохир хурди* $\{\alpha_n\}$ *ба нуль баробар набошанд, онгоҳ пайдарпаии* $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ *пайдарпаии беохир калон мебошад.*

Исбот. Аввалан, қайд мекунем, ки дар пайдарпаии беохир калон фақат шумораи охирноки элементҳо баробари нуль шуда метавонанд. Боқеан, аз таърифи пайдарпаии беохир калон натиҷа мебарояд, ки барои адади мусбати додашудаи A чунин номери N^*-ро нишон додан мумкин аст, ки, аз он сар карда, нобаробарии $|x_n| > A$ иҷро мешавад. Ин чунин маъно дорад, ки ҳангоми $n \geqslant N^*$ будан ҳама элементҳои x_n баробари нуль нестанд ва, бинобар ин, агар элементҳои пайдарпаии $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$-ро аз номери N^* сар карда, муоина намоем, онгоҳ ин пайдарпай соҳиби маъно мебошад. Бигзор ε адади мусбати дилхоҳ бошад. Барои адади $1/\varepsilon$ чунин номери $N \geqslant N^*$-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан элементҳои x_n-и пайдарпаии $\{x_n\}$ нобаробарии $|x_n| > 1/\varepsilon$-ро қаноат мена-

моянд. Бинобар ин, аз номери номбаршудаи N сар карда, нобаробарии $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ ичро мешавад. Ҳамин тариқ, исбот карда шуд, ки пайдарпаии $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад.

Қисми дуюми теорема ҳамин тавр исбот карда мешавад.

§ 2. Пайдарпаиҳои наздикшаванда ва хосиятҳои асосии онҳо

1. Мафҳуми пайдарпаиҳои наздикшаванда.

Таъриф. Пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии наздикшаванда номида мешавад, агар чунин адади a мавҷуд бошад, ки пайдарпаии $\{x_n - a\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Дар айни ҳол адади a лимити пайдарпаии $\{x_n\}$ номида мешавад.*

Таърифи пайдарпаии наздикшавандаро, одатан, ин тавр ҳам баён кардан мумкин аст:

*Пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии наздикшаванда номида мешавад, агар чунин адади a мавҷуд бошад, ки барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин номери N-ро** нишон додан мумкин бошад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан ҳама элементҳои x_n-и ин пайдарпай нобаробарии*

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (3.4)$$

-ро қаноат менамоянд. Дар айни ҳол адади a лимити пайдарпаии $\{x_n\}$ номида мешавад.

Агар пайдарпаии $\{x_n\}$ наздик шавад ва адади a лимити он бошад, онгоҳ онро ба таври символ ин тавр менависанд***.

---

* Мувофиқи ин таъриф ҳаргуна пайдарпаии беохир хурд пайдарпаии наздикшаванда мебошад ва адади нуль лимити он аст.

** Азбаски N аз ε вобаста мебошад, пас баъзан ин тавр менависанд: $N = N(\varepsilon)$.

*** Пайдарпаиҳои беохир калонро баъзан пайдарпаиҳои ба беохирӣ наздикшаванда меноманд. Бинобар ин, агар пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии беохир калон бошад, онгоҳ инро бо символ ин тавр менависанд:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Агар элементҳои пайдарпаии беохир калон, аз ягон номер сар карда, аломати муайян дошта бошанд, онгоҳ мегӯянд, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ ба беохирии аломаташ муайян наздик мешавад. Инро ба таври символ ин тавр менависанд:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ ё } x_n \to a \text{ ҳангоми } n \to \infty.$$

Қайди 1. Нобаробарии (3.4) ба нобаробариҳои $-\varepsilon < x_n - a < +\varepsilon$, ё $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, баробаркувва мебошад. Нобаробариҳои охирин чунин маъно доранд, ки элементи x_n дар ε-атрофи адади a воқеъ мебошад (ба хотир меорем, ки ε-атрофи адади a гуфта интервали $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$-ро меноманд). Бинобар ин таърифи пайдарпаии наздикшавандаро ин тавр ҳам баён кардан мумкин аст:

Пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии наздикшаванда номида мешавад, агар чунин адади a мавҷуд бошад, ки ҳама элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$, аз ягон номер сар карда, дар ε-атрофи дилхоҳи адади a воқеъ мебошанд.*

Таърифи пайдарпаии наздикшаванда тасдиқ мекунад, ки фарқи $x_n - a = \alpha_n$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Пас, элементи дилхоҳи x_n-и пайдарпаии наздикшавандаро, ки адади a лимити ин пайдарпай мебошад, ба намуди

$$x_n = a + \alpha_n \qquad (3.5)$$

навиштан мумкин аст, дар ин ҷо α_n элементи пайдарпаии беохир хурд мебошад.

Қайди 2. Аз таърифи лимити пайдарпай возеҳ аст, ки элементҳои шумораашон охирнок ба наздикшавии ин пайдарпай ва ба бузургии лимити он таъсир намекунад.

Мисолҳои пайдарпаиҳои наздикшавандаро дида мебароем.

1) Пайдарпаии $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ наздик мешавад; лимити ин пайдарпай ба 1 баробар аст. Воқеан, азбаски $\dfrac{n}{n+1} - 1 = -\dfrac{1}{n+1}$ мебошад, пас барои исбот бовари кардан кифоя аст, ки пайдарпаии $\left\{-\dfrac{1}{n+1}\right\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Агар $n \geqslant N$ бошад, онгоҳ $\left|-\dfrac{1}{n+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{N+1}$, ва, бинобар ин, аз рӯи $\varepsilon > 0$-и додашуда аз шарти $\dfrac{1}{N+1} < \varepsilon$ ё $N > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ номери N-ро интихоб кардан кифоя аст. Масалан, чунин фарз кардан мумкин аст:

$$N = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 & \text{ҳангоми } \varepsilon \leqslant 1 \text{ будан,} \\ 1 & \text{ҳангоми } \varepsilon > 1 \text{ будан.} \end{cases}$$

* Албатта, аз ε вобаста.

2) Исбот мекунем, ки пайдарпаии $x_1 = 0{,}3;\ x_2 = 0{,}33,\ \ldots;$ $x_n = \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n\text{ мар.}};\ \ldots$ наздик мешавад ва ададн 1/3 лимиташ мебошад. Азбаски ададн 1/3-ро ба намуди касри даҳии беохири 0,333 ... навиштан мумкин аст, пас аз қоидаи муқоисаи ададҳои ҳақиқӣ (ба п. 3-юми § 1-уми боби 2 ниг.) нобаробарии

$$\underbrace{0{,}33\ldots3}_{n\text{ мар.}} \leqslant \frac{1}{3} \leqslant \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n\text{ мар.}} + \frac{1}{10^n}.$$

ҳосил мешавад*. Аз ин нобаробариҳо нобаробарии $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{10^n}$-ро ҳосил мекунем. Азбаски ҳангоми $n \geqslant N$ будан $\frac{1}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^N}$ мебошад, пас аз рӯи $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ аз шарти $\frac{1}{10^N} < \varepsilon$ номери N-ро интихоб карда, ҳангоми $n \geqslant N$ будан $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$-ро ҳосил мекунем.

Имконпазирии интихоби номери N, ки шарти $|q|^N < \varepsilon$-ро ҳангоми дилхоҳ будани $|q| < 1$ қаноат менамояд, дар мисоли 1-уми п. 3-юми § 1 муқаррар шуда буд.

2. Хосиятҳои асосии пайдарпаиҳои наздикшаванда.

Теореми 3.7. Пайдарпаии наздикшаванда фақат якто лимит дорад.

Исбот. Фарз мекунем, ки a ва b лимитҳои пайдарпаии наздикшавандаи $\{x_n\}$ мебошанд. Онгоҳ, формулаи махсуси (3.5)-ро, ки барои элементҳои x_n-и пайдарпаии наздикшавандаи $\{x_n\}$ таъин шудааст, истифода карда, $x_n = a + \alpha_n$, $x_n = b + \beta_n$-ро ҳосил мекунем, дар ин ҷо α_n ва β_n элементҳои пайдарпаиҳои беохир хурди $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ мебошанд.

Ин ифодаҳоро тарҳ карда, меёбем, ки $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Азбаски ҳама элементҳои пайдарпаии беохир хурди $\{\alpha_n - \beta_n\}$ як қимати доимии $b - a$ доранд, пас мувофиқи теореми 3.5 $b - a = 0$ аст, яъне $b = a$ мебошад. Теорема исбот шуд.

Теореми 3.8. Пайдарпаии наздикшаванда маҳдуд мебошад.

Исбот. Фарз мекунем, ки $\{x_n\}$ пайдарпаии наздикшаванда мебошад ва a лимити он аст. Формулаи (3.5)-ро истифода карда,

* Инчунин ба нобаробариҳои (2.5)-и п. 4-уми § 1-уми боби 2 нигаред.

$$x_n = a + \alpha_n$$

-ро ҳосил мекунем, дар ин ҷо α_n элементи пайдарпаии беохир хурд мебошад. Азбаски пайдарпаии беохир хурди $\{\alpha_n\}$ маҳдуд мебошад (ба теоремаи 3.3 нигаред), пас чунин адади A ёфт мешавад, ки барои ҳама номерҳои n нобаробарии $|\alpha_n| \leqslant A$ дуруст мебошад. Бинобар ин барои ҳама номерҳои n $|x_n| \leqslant |a| + A$ мебошад ва ин чунин маъно дорад, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ маҳдуд мебошад. Теорема исбот шуд.

Қайд. Пайдарпаии маҳдуд наздикшаванда набуданаш мумкин аст. Масалан, пайдарпаии 1, —1, 1, —1, ... маҳдуд аст, лекин наздикшаванда намебошад. Воқеан, агар ин пайдарпаи ба ягон адади a наздик мешуд, онгоҳ ҳар яки пайдарпаиҳои $\{x_n - a\}$ ва $\{x_{n+1} - a\}$ пайдарпаиҳои беохир хурд мешуданд. Лекин, онгоҳ, дар асоси теоремаи 3.2, пайдарпаии $\{(x_n - a) - (x_{n+1} - a)\} = \{x_n - x_{n+1}\}$ пайдарпаии беохир хурд мебуд, ки ин имконнопазир аст, чунки барои номери дилхоҳи n $|x_n - x_{n+1}| = 2$ мебошад.

Теоремаҳои асосии зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 3.9. *Суммаи пайдарпаиҳои наздикшавандаи* $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ *пайдарпаии наздикшаванда мебошад, ки лимити он ба суммаи лимитҳои пайдарпаиҳои* $\{x_n\}$ *ва* $\{y_n\}$ *баробар аст.*

Исбот. Фарз мекунем, ки a ва b мувофиқан лимити пайдарпаиҳои $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ мебошанд. Онгоҳ

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

дар ин ҷо $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ пайдарпаиҳои беохир хурд мебошанд. Пас, $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$.

Ҳамин тариқ, пайдарпаии $\{(x_n + y_n) - (a + b)\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад ва, бинобар ин, пайдарпаии $\{x_n + y_n\}$ наздик мешавад ва адади $a + b$ лимиташ мебошад.

Теоремаи 3.10. *Фарқи пайдарпаиҳои наздикшавандаи* $\{x_n\}$ *ва* $\{y_n\}$ *пайдарпаии наздикшаванда мебошад, ки лимити он ба фарқи лимитҳои пайдарпаиҳои* $\{x_n\}$ *ва* $\{y_n\}$ *баробар аст.*

Исботи ин теорема ба исботи теоремаи 3.9 монанд аст.

Теоремаи 3.11. *Ҳосили зарби пайдарпаиҳои наздикшавандаи* $\{x_n\}$ *ва* $\{y_n\}$ *пайдарпаии наздикшаванда мебошад, ки лимити он ба ҳосили зарби лимитҳои пайдарпаиҳои* $\{x_n\}$ *ва* $\{y_n\}$ *баробар аст.*

Исбот. Агар a ва b мувофиқан лимити пайдарпаиҳои $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ бошанд, онгоҳ $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ ва $x_n \cdot y_n = a \cdot b + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$. Пас,

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b = a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n.$$

Дар асоси теоремаи 3.4 ва натиҷаи он, инчунин теоремаи 3.1 пайдарпаии $\{a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад, яъне пайдарпаии $\{x_n \cdot y_n - a \cdot b\}$ пайдарпаии

беохир хурд аст ва, бинобар ин, пайдарпаии $\{x_n \cdot y_n\}$ наздик мешавад ва ададди $a \cdot b$ лимити он мебошад.

Барои исбот кардани теореми мувофиқи ҳосили тақсими ду пайдарпай исботи леммаи зерин лозим аст.

Л е м м а и 1. *Агар пайдарпаии* $\{y_n\}$ *наздик шавад ва лимити аз нуль фарқкунандаи* b *дошта бошад, онгоҳ, аз ягон номер сар карда, пайдарпаии* $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ *муайян аст ва он пайдарпаии маҳдуд мебошад.*

И с б о т. Бигзор $\varepsilon = |b|/2$ бошад. Азбаски $b \neq 0$ аст, пас $\varepsilon > 0$ мебошад. Фарз мекунем, ки N номерест, ки ба ин ε мувофиқ аст ва аз он сар карда, нобаробарии $|y_n - b| < \varepsilon$ ё $|y_n - b| < |b|/2$ иҷро мешавад. Аз ин нобаробарӣ натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии* $|y_n| > |b|/2$ иҷро мешавад. Бинобар ин ҳангоми $n \geqslant N$ будан $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ аст. Пас, аз ҳамин номери N сар карда, мо пайдарпаии $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ -ро муоина карда метавонем, ва ин пайдарпай маҳдуд мебошад. Леммаи 1 исбот шуд.

Т е о р е м а и 3.12. *Ҳосили тақсими ду пайдарпаии наздикшавандаи* $\{x_n\}$ *ва* $\{y_n\}$ *дар мавриди ба нуль баробар набудани лимити* $\{y_n\}$ *пайдарпаии наздикшаванда мебошад, ки лимиташ ба ҳосили тақсими лимитҳои пайдарпаиҳои* $\{x_n\}$ *ва* $\{y_n\}$ *баробар аст.*

И с б о т. Аз леммаи исботшудаи 1 натиҷа мебарояд, ки, аз ягон номери N сар карда, элементҳои пайдарпаии $\{y_n\}$ аз нуль тафовут доранд ва пайдарпаии $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ маҳдуд мебошад. Аз ҳамин номер сар карда, мо пайдарпаии $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ -ро муоина мекунем. Фарз мекунем, ки a ва b лимити пайдарпаиҳои $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ мебошанд. Исбот мекунем, ки пайдарпаии $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$

---

* Вокеан, азбаски $b = (b - y_n) + y_n$ ва $|b - y_n| < \frac{|b|}{2}$ аст, пас $|b| < |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|$.

пайдарпаии беохир мебошад. Воқеан, азбаски $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ мебошад, пас

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n \cdot b - y_n \cdot a}{y_n \cdot b} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Азбаски пайдарпаии $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ маҳдуд мебошад ва пайдарпаии $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$ пайдарпаии беохир хурд аст, пас пайдарпаии $\left\{\frac{1}{y_n} \cdot \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\right\} \equiv \left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Теорема исбот шуд.

3. Гузариши лимитӣ дар нобаробариҳо. Мо ҳозир аниқ кардем, ки амалҳои арифметикӣ бо пайдарпаиҳои наздикшаванда ба ҳамин хел амалҳои арифметикӣ бо лимити онҳо меоварад. Дар ин пункт мо нишон медиҳем, ки нобаробариҳое, ки онҳоро элементҳои пайдарпаиҳои наздикшаванда қаноат менамоянд, ҳангоми лимит гирифтан ба нобаробариҳои мувофиқи лимити ин пайдарпаиҳо табдил мешаванд.

Теореми 3.13. *Агар элементҳои пайдарпаии наздикшавандаи* $\{x_n\}$, *аз ягон номер сар карда, нобаробарии* $x_n \geqslant b$ $(x_n \leqslant b)$*-ро қаноат намоянд, онгоҳ лимит* (a)*-и ин пайдарпаӣ ҳам нобаробарии* $a \geqslant b$ $(a \leqslant b)$*-ро қаноат менамояд.*

Исбот. Фарз мекунем, ки ҳама элементҳои x_n, ақаллан аз ягон номер сар карда, нобаробарии $x_n \geqslant b$-ро қаноат менамоянд. Нобаробарии $a \geqslant b$-ро исбот кардан лозим аст. Фарз мекунем, ки $a < b$ мебошад. Азбаски a лимити пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад, пас барои $\varepsilon = b - a$-и мусбат чунин номери N-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $|x_n - a| < b - a$ иҷро мешавад. Ин нобаробарӣ ба ду нобаробарии $-(b-a) < x_n - a < b - a$ баробаркувва мебошад. Аз ин нобаробариҳо нобаробарии якумашро истифода карда, $x_n < b$ -ро ҳосил мекунем, ки ин ба шарти теорема мухолиф мебошад. Мавриди $x_n \leqslant b$ ҳамин тавр муоина мешавад. Теорема исбот шуд.

Қайд. Элементҳои пайдарпаии наздикшавандаи $\{x_n\}$ нобаробарии қатъии $x_n > b$-ро қаноат карда метавонанд, аммо дар айни ҳол лимити a ба b баробар шуданаш мумкин аст. Масалан, агар $x_n = 1/n$ бошад, онгоҳ $x_n > 0$ аст, лекин $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ мебошад.

Натиҷаи 1. Агар элементҳои x_n ва y_n-и пайдарпаиҳои наздикшавандаи $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$, аз ягон номер сар карда, нобаробарии $x_n \leqslant y_n$-ро қаноат намоянд, онгоҳ лимити онҳо чунин нобаробариро қаноат мекунанд:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Воқеан, элементҳои пайдарпаии $\{y_n - x_n\}$ ғайриманфӣ мебошанд, бинобар ин лимити он $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ҳам ғайриманфӣ аст. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Натиҷаи 2. Агар ҳама элементҳои пайдарпаии наздикшавандаи $\{x_n\}$ дар сегменти $[a, b]$ воқеъ бошанд, онгоҳ лимити он ҳам дар ҳамин сегмент воқеъ аст.

Воқеан, азбаски $a \leqslant x_n \leqslant b$ аст, пас $a \leqslant c \leqslant b$ мебошад.

Теоремаи зерин дар татбиқоти гуногун роли муҳим мебозад.

Теорема 3.14. Бигзор $\{x_n\}$ ва $\{z_n\}$ пайдарпаиҳои наздикшавандае бошанд, ки лимити умумии a доранд. Ғайр аз он, фарз мекунем, ки аз ягон номер сар карда, элементҳои пайдарпаии $\{y_n\}$ нобаробарии $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$-ро қаноат менамоянд. Онгоҳ пайдарпаии $\{y_n\}$ наздик мешавад ва соҳиби лимити a мебошад.

Исбот. Исбот кардан кифоя аст, ки пайдарпаии $\{y_n - a\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Номбурда, ки аз он сар карда, нобаробарии дар шарти теорема номбурда иҷро мешавад, бо N^* ишорат мекунем. Онгоҳ, аз ҳамин номер сар карда, нобаробариҳои $x_n - a \leqslant y_n - a \leqslant z_n - a$ низ иҷро мешаванд. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $n \geqslant N^*$ будан элементҳои пайдарпаии $\{y_n - a\}$ нобаробарии

$$|y_n - a| \leqslant \max\{|x_n - a|, |z_n - a|\}$$

-ро қаноат менамоянд.

Азбаски $\lim x_n = a$ ва $\lim z_n = a$ мебошад, пас барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номерҳои N_1 ва N_2-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n \geqslant N_1$ будан $|x_n - a| < \varepsilon$ ва ҳангоми $n \geqslant N_2$ будан $|z_n - a| < \varepsilon$ мебошад. Фарз мекунем, ки $N = \max\{N^*, N_1, N_2\}$ аст. Аз ҳамин номер сар карда, нобаробарии $|y_n - a| < \varepsilon$ мавқеъ дорад. Инак, пайдарпаии $\{y_n - a\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Теорема исбот шуд.

§ 3. Пайдарпаиҳои монотонӣ

1. Таърифи пайдарпаиҳои монотонӣ.

Таъриф. Пайдарпаии $\{x_n\}$ *пайдарпаии камнашаванда (афзуннашаванда) номида мешавад, агар ҳар як аъзои ин пайдарпай, аз аъзои дуюм сар карда, аз аъзои пешоянд хурд набошад (калон набошад), яъне агар барои ҳама номерҳои* n *нобаробарии*

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad (x_n \geqslant x_{n+1})$$

дуруст бошад.

Пайдарпаиҳои камнашаванда ва афзуннашаванда бо номи умумии *пайдарпаиҳои монотонӣ* муттаҳид мебошанд. Агар элементҳои пайдарпаии монотонии $\{x_n\}$ барои ҳама номерҳои n нобаробарии $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$-ро қаноат намоянд, онгоҳ пайдарпаии $\{x_n\}$-ро *пайдарпаии афзуншаванда (камшаванда)* меноманд. Пайдарпаиҳои афзуншаванда ва камшавандаро инчунин *пайдарпаиҳои қатъӣ монотонӣ* меноманд.

Пайдарпаиҳои монотонӣ ё аз боло ё аз поён маҳдуд мебошанд. Яъне: *пайдарпаиҳои афзуншаванда* бо аъзои якумашон *аз боло маҳдуд мебошанд*; *пайдарпаиҳои камнашаванда* бо аъзои якумашон *аз поён маҳдуд мебошанд*. Бинобар ин пайдарпаии афзуннашаванда аз ду тараф маҳдуд мебошад, агар он аз поён маҳдуд бошад; пайдарпаии камнашаванда аз ду тараф маҳдуд мебошад, агар он аз боло маҳдуд бошад.

Мисолҳои пайдарпаиҳои монотониро дида мебароем.

1. Пайдарпаии $1, 1, 1/2, 1/2, \ldots, 1/n, 1/n, \ldots$ пайдарпаии афзуннашаванда мебошад. Ин пайдарпай бо элементи якумаш, ки ба 1 баробар аст, аз боло маҳдуд аст ва бо адади нуль аз поён маҳдуд мебошад.

2. Пайдарпаии $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n, \ldots$ пайдарпаии камнашаванда мебошад. Ин пайдарпай бо элементи якумаш, ки ба 1 баробар аст, аз поён маҳдуд мебошад ва аз боло маҳдуд нест.

3. Пайдарпаии $1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots$ пайдарпаии афзуншаванда мебошад. Ин пайдарпай аз ду тараф (бо элементи якумаш, ки ба 1/2 баробар аст, аз поён ва бо, масалан, адади 1 аз боло) маҳдуд мебошад.

2. Аломати наздикшавии пайдарпаии монотонӣ. Теоремаи асосии зерин мавқеъ дорад.

Теорема 3.15. *Агар пайдарпаии камнашавандаи (афзуннашавандаи)* $\{x_n\}$ *аз боло (аз поён) маҳдуд бошад, онгоҳ он наздик мешавад.*

Мувофиқи пункти гузашта пайдарпаии $\{x_n\}$, ки шарти теоремаи 3.15-ро қаноат менамояд, пайдарпаии маҳдуд мебошад. Бинобар ин теоремаи 3.15-ро мухтасар ин тавр баён кардан мумкин аст: *агар пайдарпаии монотонии* $\{x_n\}$ *аз ду тараф маҳдуд бошад, онгоҳ он наздик мешавад.*

Исбот. Азбаски пайдарпаии $\{x_n\}$ маҳдуд аст, пас маҷмӯи элементҳои он соҳиби ҳудуди болоии саҳеҳи $\bar{x}$ ва ҳудуди поёнии саҳеҳии $\underline{x}$ мебошад (ба теоремаи 2.1 ниг.). Исбот мекунем, ки агар $\{x_n\}$ пайдарпаии камнашаванда бошад, онгоҳ ҳудуди болоии саҳеҳи $\bar{x}$ лимити он мешавад; агар $\{x_n\}$ пайдарпаии афзуннашаванда бошад, онгоҳ ҳудуди поёнии саҳеҳии $\underline{x}$ лимити он мешавад. Мо ба мавриди пайдарпаии камнашаванда маҳдуд мешавем, чунки барои пайдарпаии афзуннашаванда муҳокима рондан ба он монанд мебошад.

Азбаски $\bar{x}$ ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад, пас барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин элементи x_N-ро нишон додан мумкин аст, ки $x_N > \bar{x} - \varepsilon$ ва $x_N \leqslant \bar{x}$ (элементи дилхоҳи x_n аз ҳудуди болоии саҳеҳи $\bar{x}$ калон нест, $x_n \leqslant \bar{x}$). Нобаробариҳои номбурдаро муқоиса карда, нобаробарии $0 \leqslant \bar{x} - x_N < \varepsilon$-ро ҳосил мекунем. Азбаски $\{x_n\}$ пайдарпаии камнашаванда мебошад, пас ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $x_N \leqslant x_n \leqslant \bar{x}$ дуруст аст. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $0 \leqslant \bar{x} - x_n \leqslant \bar{x} - x_N$ иҷро мешавад. Азбаски $\bar{x} - x_N < \varepsilon$ мебошад, пас ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $0 \leqslant \bar{x} - x_n < \varepsilon$ дуруст аст ва аз онҳо нобаробарии $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ ҳосил мешавад. Ҳамин тариқ, муқаррар карда шуд, ки $\bar{x}$ лимити пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад. Теорема исбот шуд.

Қайди 1. *Шарти маҳдудияти пайдарпаии монотонӣ шарти зарурӣ ва кифоягии наздикшавии он мебошад.*

Воқеан, агар пайдарпаии монотонӣ маҳдуд бошад, онгоҳ дар асоси теоремаи 3.15 он наздик мешавад; агар пайдарпаии монотонӣ наздик шавад, онгоҳ дар асоси теоремаи 3.8 он маҳдуд аст.

Қайди 2. Пайдарпаии наздикшаванда монотонӣ нашудан мумкин аст. Масалан, пайдарпаии $\{x_n\}$, ки барояш $x_n = (-1)^n/n$ наздик мешавад ва адади нуль лимиташ мебошад. Азбаски аломати элементҳои ин пайдарпай бадал мешаванд, пас он монотонӣ намебошад.

Қайди 3. Агар пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии камнашаванда ва маҳдуд ва $\bar{x}$ лимиташ бошад, онгоҳ барои ҳама номерҳои n нобаробарии $x_n \leqslant \bar{x}$ дуруст аст. Элементҳои пайдарпаии афзуннашавандаи маҳдуди $\{x_n\}$, ки ба $\underline{x}$ наздик мешавад, нобаробарии $x \leqslant x_n$-ро қаноат менамоянд. Дурустии ин тасдиқот дар процесси исботи теоремаи 3.15 муқаррар шуда буд.

Натиҷаи теоремаи 3.15. *Бигзор системаи сегментҳои* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, ..., $[a_n, b_n]$, ..., *ки ҳар як сегменти пасоянд дар сегменти пешоянд ҳаст*, дода шуда бошад, ва бигзор фарқи* $b_n - a_n$ *(инро дарозии сегменти* $[a_n, b_n]$ *меномем) ҳангоми* $n \to \infty$ *ба нуль майл кунад (системаи сегментҳоеро, ки*

* Ин чунин маъно дорад, ки $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$.

ба ин хосиятҳо соҳиб мебошанд, системаи сегментҳои дар як ҷой ҷамъшуда меномем). Онгоҳ нуқтаи (илова бар ин ягонаи) c мавҷуд ҳаст, ки ба ҳама сегментҳои ин система тааллуқ дорад.

Исбот. Пеш аз ҳама қайд мекунем, ки нуқтаи c, ки ба ҳама сегментҳо тааллуқ дорад, фақат якто шуда метавонад. Воқеан, агар боз як нуқтаи d ёфт мешуд, ки ба ҳамаи сегментҳо тааллуқ медошт, онгоҳ ҳамаи сегменти* $[c, d]$ ба ҳамаи сегментҳои $[a_n, b_n]$ тааллуқдор мешуд. Лекин онгоҳ барои номери дилхоҳи n нобаробарии $b_n - a_n \geqslant d - c > 0$ иҷро мешуд, ки ин имконнопазир аст, чунки ҳангоми $n \to \infty$ $b_n - a_n \to 0$. Акнун исбот мекунем, ки нуқтаи c *вуҷуд дорад,* ки он ба ҳама сегментҳои $[a_n, b_n]$ тааллуқ дорад. Азбаски системаи сегментҳо дар як ҷой ҷамъшуда мебошанд, пас пайдарпаии нӯҳои чап $\{a_n\}$ пайдарпаии камнашаванда буда, пайдарпаии нӯҳои рост $\{b_n\}$ пайдарпаии афзуннашаванда мебошад. Азбаски ҳардуи ин пайдарпаиҳо маҳдуд мебошанд (ҳамаи элементҳои пайдарпаиҳои $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ дар сегменти $[a_1, b_1]$ воқеъ мебошанд), пас мувофиқи теоремаи 3.15 ҳардуи онҳо наздик мешаванд. Аз он, ки фарқи $b_n - a_n$ беохир хурд мебошад, натиҷа мебарояд, ки пайдарпаиҳои номбурда лимити умумӣ доранд. Ин лимитро бо c ишорат мекунем. Аз қайди 3 натиҷа мебарояд, ки барои номери дилхоҳи n нобаробарии $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ дуруст аст, яъне нуқтаи c ба ҳама сегментҳои $[a_n, b_n]$ тааллуқ дорад.

3. Баъзе мисолҳои пайдарпаиҳои монотонии наздикшаванда. Мисолҳои пайдарпаиҳоеро дида мебароем, ки барои ёфтани лимити онҳо теоремаи 3.15 (доир ба лимити пайдарпаиҳои монотонӣ) истифода карда мешавад. Ғайр аз он, дар ин пункт мо бояд усули умумии ёфтани лимити пайдарпаиҳо, ки бо формулаҳои рекуррентӣ ифода мешавад, шинос мешавем**.

Мисоли 1. Пайдарпаии $\{x_n\}$-ро муоина мекунем, ки элементи x_n-аш ба

$$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}}, \quad a > 0$$

баробар аст. Ин пайдарпаиро, зоҳиран, бо формулаи рекуррентии

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$$

ифода кардан мумкин аст. Барои муқаррар кардани мавҷуди-

---

* Барои муайянӣ чунин меҳисобем, ки $d > c$ аст.

** Формулаи рекуррентӣ (аз калимаи лотинии recurrens — баргардонда) формулаест, ки барои элементи $(n+1)$-уми пайдарпаиро бо қимати n элементи аввалини он ифода кардан имконият медиҳад.

яти лимити пайдарпаии $\{x_n\}$ исбот мекунем, ки ин пайдарпай *пайдарпаии афзуншаванда* ва *маҳдуд* мебошад. Афзуншаванда будани он бевосита маълум аст. Исбот мекунем, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ аз боло бо адади A маҳдуд аст (дар ин ҷо A — калонтарини ададҳои a ва 2). Агар $x_n \leqslant a$ бошад, онгоҳ маҳдуд будани пайдарпай исбот шудааст. Агар $x_n > a$ бошад, онгоҳ, дар қисми рости нобаробарии $x_n^2 = a + x_{n-1} \leqslant a + x_n$ адади a-ро бо адади аз он калони x_n иваз карда, $x_n^2 < 2x_n$-ро ҳосил мекунем, аз ин ҷо $x_n < 2$. Инак, мо исбот кардем, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ аз боло маҳдуд аст. Мувофиқи теоремаи 3.15 он соҳиби лимит мебошад. Ин лимитро бо c ишорат мекунем. Маълум аст, ки $c > 0$ аст. Аз формулаи рекуррентӣ муносибати

$$x_n^2 = a + x_{n-1}$$

ҳосил мешавад; ин чунин маъно дорад, ки пайдарпаиҳои $\{x_n^2\}$ ва $\{a + x_{n-1}\}$ айниятӣ мебошанд. Бинобар ин лимити онҳо баробаранд. Азбаски пайдарпаии якум соҳиби лимити c^2 ва пайдарпаии дуюм соҳиби лимити $c^2 = a + c$ мебошад, пас $c^2 = a + c$. Аз ин ҷо, азбаски $c > 0$ аст, пас $c = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Мисоли 2. Акнун пайдарпаии $\{x_n\}$-ро дида мебароем, ки бо ёрии он дар мошинҳои электронии зудамали ҳозиразамон одатан реша квадратӣ аз адади мусбати a-ро ҳисоб мекунанд. Ин пайдарпай бо формулаи рекуррентии

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо ба сифати x_1 адади мусбати дилхоҳ гирифтан мумкин аст.

Исбот мекунем, ки ин пайдарпай наздик мешавад ва адади $\sqrt{a}$ лимиташ мебошад. Пеш аз ҳама мавҷудияти лимити пайдарпаии $\{x_n\}$-ро исбот мекунем. Барои ин муқаррар кардан кифоя аст, ки *пайдарпаии $\{x_n\}$ аз поён маҳдуд аст ва, аз номери дуюм сар карда, пайдарпаии афзуннашаванда мебошад.* Аввал исбот мекунем, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ аз поён маҳдуд мебошад. Мувофиқи шарт $x_1 > 0$. Лекин, онгоҳ, аз формулаи рекуррентӣ (ҳангоми $n = 1$ будан) натиҷа мебарояд, ки $x_2 > 0$ аст; аз ин ҷо ва аз формулаи рекуррентӣ (ҳангоми $n = 2$ будан) натиҷа мебарояд, ки $x_3 > 0$ аст. Ин муҳокимарониро давом дода, мо исбот мекунем, ки ҳамаи $x_n > 0$ аст.

Акнун исбот мекунем, ки *ҳангоми $n \geqslant 2$ будан ҳамаи x_n-ҳо нобаробарии $x_n \geqslant \sqrt{a}$-ро қаноат менамоянд.* Формулаи рекур-

рентиро ба намуди $x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$ навишта, нобаробарии кариб возеҳи $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$*-ро истифода мекунем, ки он барои $t > 0$ дуруст аст (мо $t = \frac{x_n}{\sqrt{a}}$ мегирем). Ҳангоми $n \geqslant 1$ будан $x_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$ ҳосил мешавад, яъне аз номери $n = 2$ сар карда, $x_n \geqslant \sqrt{a}$ аст.

Ниҳоят, исбот мекунем, ки *пайдарпаии* $\{x_n\}$ *ҳангоми* $n \geqslant 2$ *будан намеафзояд*. Аз формулаи рекуррентӣ чунин ифодаро ҳосил мекунем: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right)$ ва, аз ин ҷо, $x_n \geqslant \sqrt{a}$-ро ба эътибор гирифта, меёбем, ки $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1$ ё $x_n \geqslant x_{n+1}$ (ҳангоми $n \geqslant 2$ будан). Азбаски пайдарпаии $\{x_n\}$ ҳангоми $n \geqslant 2$ будан пайдарпаии афзуннашаванда ва бо адади $\sqrt{a}$ аз поён маҳдуд мебошад, пас он соҳиби лимитест, ки аз $\sqrt{a}$ хурд намебошад (ба теоремаи 3.15 ва теоремаи 3.13 нигаред). Ин лимитро бо c ишорат карда ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = c$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right)$-ро ба эътибор гирифта $c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right)$**-ро ҳосил менамоем. Пас, $c = \sqrt{a}$.

Қайди 1. Дар мисолҳои муоинашуда чунин усули маъмули ҷустуҷӯи лимити пайдарпаиҳо истифода карда шуд. Аввал мавҷудияти лимит муқаррар карда мешавад, баъд аз муодилае, ки аз формулаи рекуррентӣ (бо роҳи дар он иваз кардани x_n ва x_{n+1} бо қимати матлуби c-и лимити пайдарпаии $\{x_n\}$) ҳосил мешавад, қимати ададии он ёфта мешавад.

---

* Барои исботи ин нобаробарӣ қайд кардан кифоя аст, ки ҳангоми $t > 0$ будан он ба нобаробарии $t^2 - 2t + 1 \geqslant 0$ баробаркувва аст.

** Ин баробарӣ аз формулаи рекуррентии

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

ҳосил мешавад.

Қайди 2. Формулаҳои рекуррентӣ аксаран дар математикаи ҳисоббарори ҳозиразамон истифода карда мешаванд, чунки татбиқоти онҳо ба такрори бисьёркаратаи амалҳои ҳисоббарори якнамуда меоваранд; бинобар ин дар мошинҳои электронии ҳисоббарори зудамал ҳисоб кардан хеле муносиб мебошад.

Формулаи рекуррентии муоинакардаамон, чунон ки боварӣ ҳосил кардем, алгоритми ҳисоби $\sqrt{a}$-ро муайян мекунад (мо исбот кардем, ки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$).

Дар Иловаи 2-юми ҳамин боб масъалаи суръати ба $\sqrt{a}$ наздикшавии пайдарпаии $\{x_n\}$ омӯхта мешавад. Мо исбот мекунем, ки барои $a > 1$-и дилхоҳ ҳангоми ба таври муайян интихоб кардани наздикшавии якум (x_1) дар наздикшавии чорум (x_4) адади $\sqrt{a}$ (бо саҳви аз 10^{-10} калон набудагӣ) ҳосил мешавад.

Мисоли 3. Пайдарпаии $\{c_n\}$, ки барояш

$$c_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

мебошад, дар x-и қайдшудаи дилхоҳ дорои лимити баробари нуль мебошад. Инро исбот мекунем. Азбаски ҳангоми ба қадри кифоя калон будани n касри $\dfrac{x}{n+1} < 1$ аст, пас, аз ягон номери N сар карда, $|c_{n+1}| < |c_n|$ мебошад, чунки $|c_{n+1}| = \dfrac{|x|^n}{n!} \cdot \dfrac{x}{n+1} = c_n \cdot \dfrac{x}{n+1}$.

Пас, аз номери N сар карда, пайдарпаии $\{|c_n|\}$ пайдарпаии монотонӣ камшаванда мешавад ва аз поён (масалан, бо нуль) маҳдуд мебошад. Пайдарпаии $\{|c_n|\}$ мувофиқи теореми 3.15 наздик мешавад. Бигзор c лимити ин пайдарпай бошад. Аз вобастагии $|c_{n+1}| = |c_n| \cdot \dfrac{x}{n+1}$ натиҷа мебарояд, ки $c = 0$ аст, чунки лимити пайдарпаии $\{c_{n+1}\}$ ба c ва лимити пайдарпаии $\left\{\dfrac{|x|}{n+1}\right\}$ ба нуль баробар мебошад.

4. Адади е. Теореми 3.15-ро (ки ба мавҷудияти лимити пайдарпаии монотонӣ оид аст) барои исботи мавҷудияти лимити пайдарпаии $\{x_n\}$, ки элементи x_n-умаш бо формулаи

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

муайян карда мешавад, татбиқ мекунем.

Исбот мекунем, ки ин пайдарпай *меафзояд* ва *аз боло маҳдуд* мебошад. Формулаи биноми Ньютонро татбиқ карда, меёбем, ки

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Ин ифодаро ба намуди зерин менависем:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \qquad (3.6)$$

Элементи x_{n+1}-умро айнан ҳамин тавр менависем:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Бо муқоисаи бевосита боварӣ ҳосил мекунем*, ки

$$x_n < x_{n+1}$$

мебошад, яъне пайдарпаии $\{x_n\}$ *пайдарпаии афзуншаванда* мебошад.

Барои исботи аз боло маҳдуд будани ин пайдарпай қайд мекунем, ки ҳар як ифодаи даруни қавсҳои мудаввари муносибати (3.6) аз воҳид хурд аст. Инчунин ҳангоми $k \geqslant 2$ будан $\frac{1}{k} <$

---

* Чунки барои $0 < k < n$-и дилхоҳ $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < \left(\frac{k}{n+1}\right)$ мебошад ва, ғайр аз он, x_{n+1} назар ба x_n аъзои мусбати зиёдатӣ дорад.

Қайди 2. Формулаҳои рекуррентӣ аксаран дар математикаи ҳисоббарори ҳозиразамон истифода карда мешаванд, чунки татбиқоти онҳо ба такрори бисьёркаратаи амалҳои ҳисоббарори якнамуда меоваранд; бинобар ин дар мошинҳои электронии ҳисоббарори зудамал ҳисоб кардан хеле муносиб мебошад.

Формулаи рекуррентии муоинакардаамон, чунон ки боварӣ ҳосил кардем, алгоритми ҳисоби $\sqrt{a}$-ро муайян мекунад (мо исбот кардем, ки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$).

Дар Иловаи 2-юми ҳамин боб масъалаи суръати ба $\sqrt{a}$ наздикшавии пайдарпаии $\{x_n\}$ омӯхта мешавад. Мо исбот мекунем, ки барои $a > 1$-и дилхоҳ ҳангоми ба таври муайян интихоб кардани наздикшавии якум (x_1) дар наздикшавии чорум (x_4) адади $\sqrt{a}$ (бо саҳви аз 10^{-10} калон набудагӣ) ҳосил мешавад.

Мисоли 3. Пайдарпаии $\{c_n\}$, ки барояш

$$c_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

мебошад, дар x-и қайдшудаи дилхоҳ доимо лимити баробари нуль мебошад. Инро исбот мекунем. Азбаски ҳангоми ба қадри кифоя калон будани n касри $\dfrac{x}{n+1} < 1$ аст, пас, аз ягон номери N сар карда, $|c_{n+1}| < |c_n|$ мебошад, чунки $|c_{n+1}| = \dfrac{|x|^n}{n!} \cdot \dfrac{x}{n+1} = c_n \cdot \dfrac{x}{n+1}$.

Пас, аз номери N сар карда, пайдарпаии $\{|c_n|\}$ пайдарпаии монотонӣ камшаванда мешавад ва аз поён (масалан, бо нуль) маҳдуд мебошад. Пайдарпаии $\{|c_n|\}$ мувофиқи теоремаи 3.15 наздик мешавад. Бигзор c лимити ин пайдарпай бошад. Аз вобастагии $|c_{n+1}| = |c_n| \cdot \dfrac{x}{n+1}$ натиҷа мебарояд, ки $c = 0$ аст, чунки лимити пайдарпаии $\{c_{n+1}\}$ ба c ва лимити пайдарпаии $\left\{\dfrac{|x|}{n+1}\right\}$ ба нуль баробар мебошад.

4. Адади е. Теоремаи 3.15-ро (ки ба мавҷудияти лимити пайдарпаии монотонӣ оид аст) барои исботи мавҷудияти лимити пайдарпаии $\{x_n\}$, ки элементи x_n-умаш бо формулаи

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

муайян карда мешавад, татбиқ мекунем.

Исбот мекунем, ки ин пайдарпай *меафзояд* ва *аз боло маҳдуд* мебошад. Формулаи биноми Ньютонро татбиқ карда, меёбем, ки

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Ин ифодаро ба намуди зерин менависем:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \qquad (3.6)$$

Элементи x_{n+1}-умро айнан ҳамин тавр менависем:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Бо муқоисаи бевосита бовариҳосил мекунем*, ки

$$x_n < x_{n+1}$$

мебошад, яъне пайдарпаии $\{x_n\}$ *пайдарпаии афзуншаванда* мебошад.

Барои исботи аз боло маҳдуд будани ин пайдарпай қайд мекунем, ки ҳар як ифодаи даруни қавсҳои мудаввари муносибати (3.6) аз воҳид хурд аст. Инчунин ҳангоми $k \geqslant 2$ будан $\frac{1}{k} <$

---

* Чунки барои $0 < k < n$-и дилхоҳ $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < \left(\frac{k}{n+1}\right)$ мебошад ва, ғайр аз он, x_{n+1} назар ба x_n аъзои мусбати зиёдатӣ дорад.

$< \frac{1}{2^{k-1}}$ буданашро ба эътибор гирифта, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Инак, пайдарпаии $\{x_n\}$ меафзояд ва аз боло маҳдуд аст. Пайдарпаии $\{x_n\}$ мувофиқи теоремаи 3.15 соҳиби лимит мебошад. Ин лимитро адади e меноманд. Пас, мувофиқи таъриф,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Қайд. Минбаъд аниқ карда мешавад, ки адади e дар математика роли муҳим мебозад. Дар ин пункт мо фақат ба адади e таъриф медиҳем, лекин тарзи бо саҳеҳии дилхоҳ ҳисоб кардани ин ададро нишон намедиҳем. Инро дар пп. 1 ва 2-юми § 16-уми боби 8 баён мекунем.

Дар ин ҷо мо фақат қайд мекунем, ки азбаски $x_n < 3$ аст ва аз (3.6) бевосита возеҳ аст, ки $2 < x_n$ мебошад, пас адади e дар ҳудуди

$$2 \leqslant e \leqslant 3 \tag{3.7}$$

воқеъ мебошад (дар асоси натиҷаи 2-юми теоремаи 3.13).

§ 4. Баъзе хосиятҳои пайдарпаиҳои дилхоҳ ва маҷмӯъҳои ададӣ

1. Таҳтпайдарпаиҳои пайдарпаиҳои ададӣ. Фарз мекунем, ки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ягон пайдарпаии ададӣ мебошад. Пайдарпаии афзуншавандаи дилхоҳи ададҳои мусбати бутуни $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$-ро муоина мекунем. Аз пайдарпаии $\{x_n\}$ элементҳои номерашон $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$-ро интихоб мекунем ва онҳоро бо ҳамон тартибе, ки адади k_n соҳиб аст, ҷойгир менамоем:

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$$

Пайдарпаии ададии ҳосилшударо *таҳтпайдарпаии* пайдарпаии $\{x_n\}$ меномем. Аз ҷумла, худи пайдарпаии $\{x_n\}$-ро чун таҳтпайдарпаӣ муоина кардан мумкин аст (дар ин маврид $k_n = n$ мебошад). Хосияти зеринии таҳтпайдарпаиҳои пайдарпаиҳои наздикшавандаро баён мекунем: *агар пайдарпаии $\{x_n\}$ наздик шавад ва адади a лимиташ бошад, онгоҳ таҳтпайдарпаии дилхоҳи ин пайдарпаӣ ҳам наздик мешавад ва адади a лимиташ мебошад.* Воқеан, азбаски $\{x_n\}$ пайдарпаии наздикшаванда ва a лимиташ мебошад, пас барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери

N-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $|x_n - a| < \varepsilon$ ичро мешавад. Фарз мекунем, ки $\{x_{k_n}\}$ ягон таҳтпайдарпаии пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад. Азбаски $k_N \geqslant N$ мебошад, пас аз номери k_N сар карда, элементҳои таҳтпайдарпаии $\{x_{k_n}\}$ нобаробарии $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$-ро қаноат менамоянд. Бинобар ин таҳтпайдарпаии $\{x_{k_n}\}$ наздик мешавад ва адади a лимиташ мебошад. Чумлаи баръакс низ дуруст аст: *агар ҳамаи таҳтпайдарпаиҳои пайдарпаии додашудаи $\{x_n\}$ наздик шаванд, онгоҳ лимитҳои ҳамаи ин таҳтпайдарпаиҳо ба як адади a баробар мешаванд; аз чумла, пайдарпаии $\{x_n\}$ ҳам ба ҳамин адад наздик мешавад.* Ҳақиқатан, азбаски пайдарпаии $\{x_n\}$ ҳам таҳтпайдарпай мебошад, пас он наздик мешавад ва ягон адади a лимиташ мебошад. Лекин, онгоҳ, таҳтпайдарпаии дигари дилхоҳ ҳам наздик мешавад ва ҳамон адади a лимиташ мебошад.

Таҳтпайдарпаиҳои пайдарпаиҳои беохир калон соҳиби ҳамин хел хосият мебошанд. Яъне, *ҳар як таҳтпайдарпаии пайдарпаии беохир калон низ таҳтпайдарпаии беохир калон мебошад.* Исботи ин тасдиқот ба исботи чумлаи мувофиқи таҳтпайдарпаиҳои пайдарпаиҳои наздикшаванда монанд аст.

Қайд. Аз ҳар як пайдарпаиҳои наздикшаванда таҳтпайдарпаии наздикшавандаи монотониро чудо кардан мумкин аст. Воқеан, агар $\{x_n\}$ пайдарпаии наздикшаванда ва a лимити он бошад, онгоҳ ақаллан яке аз се мавриди зерин мавқеъ дорад: 1) элементҳои беохир бисьёри ба a баробари пайдарпаиҳо вуҷуд доранд, 2) дар ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи a элементҳои беохир бисьёре ҳастанд, ки нобаробарии $x_n < a$-ро қаноат менамоянд, 3) дар ε-атрофи нуқтаи a элементҳои беохир бисьёре ҳастанд, ки нобаробарии $x_n > a$*-ро қаноат менамоянд. Дар мавриди якум таҳтпайдарпаии элементҳояш баробари a таҳтпайдарпаии монотонии наздикшаванда мебошад. Мавридҳои дуюму сеюм якхел муоина мешаванд, бинобар ин ба муоинаи мавриди дуюм маҳдуд мешавем, яъне чунин меҳисобем, ки дар ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи a элементҳои бисьёри x_n ҳастанд, ки онҳо нобаробарии $x_n < a$-ро қаноат менамоянд. Ба ибораи дигар, мавридеро, ки дар интервали дилхоҳи $(a - \varepsilon, a)$ элементҳои беохир бисьёри пайдарпай вуҷуд доранд, муоина мекунем. Фарз мекунем, ки x_{k_1} яке аз ин элементҳо мебошад, $x_{k_1} < a$. Аз маҷмӯи беохири элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$, ки дар интервали (x_{k_1}, a) воқеъ мебошад, ягон элементи x_{k_2}-ро интихоб мекунем, ки номери k_2-и он аз k_1 калон аст. Бояд аз маҷмӯи беохири элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$, ки дар интервали (x_{k_2}, a)

---

* Агар ягонтои ин мавридҳо мавқеъ намедошт, онгоҳ дар ягон ε-атрофи нуқтаи a элементҳои шумораашон охирноки пайдарпай воқеъ мешуд, яъне, нуқтаи a лимити пайдарпай намебуд.

вокеъ мебошад, элементи x_{k_3}-ро интихоб мекунем, ки барояш $k_3 > k_2$ аст. Ин процессро номаҳдуд давом дода, мо таҳтпайдарпаии афзуншавандаи монотонии $\{x_{k_n}\}$-и пайдарпаии $\{x_n\}$-ро ҳосил мекунем, ки он дар асоси хосияти дар ин пункт баёншудаи таҳтпайдарпаиҳои пайдарпаиҳои наздикшаванда ба a наздик мешавад.

Аз ҳар як пайдарпаии беохир калон таҳтпайдарпаиҳои беохир калони монотониро чудо кардан мумкин аст.

2. Нуқтаҳои лимитии пайдарпаиҳо.

Таърифи 1. Нуқтаи x-и хати рости беохир нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ номида мешавад, агар дар ε-атрофи дилхоҳи ин нуқта элементҳои беохир бисьёри пайдарпаии $\{x_n\}$ мавҷуд бошад.

Лемmаи зерин дуруст аст.

Лемmаи 2. Агар x нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ бошад, онгоҳ аз ин пайдарпай таҳтпайдарпаии $\{x_{k_n}\}$-ро, ки ба ададди x наздик мешавад, чудо кардан мумкин аст.

Исбот. Фарз мекунем, ки x нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад. Системаи ε-атрофи нуқтаи x-ро дида мебароем, ки барояш ε пай дар пай ба 1, 1/2, 1/3, ..., $1/n$, ... баробар мешавад. Дар атрофи якум элементи x_{k_1}-и пайдарпаии $\{x_n\}$-ро интихоб мекунем; дар атрофи дуюм элементи x_{k_2}-ро интихоб мекунем, ки $k_2 > k_1$ аст. Дар атрофи сеюм элементи x_{k_3}-ро интихоб мекунем, ки $k_3 > k_1$ аст. Ин процессро номаҳдуд давом додан мумкин аст, чунки дар ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи x элементҳои беохир бисьёри пайдарпаии $\{x_n\}$ мавҷуд ҳастанд. Дар натича мо таҳтпайдарпаии $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$-и пайдарпаии $\{x_n\}$-ро ҳосил мекунем, ки он ба x наздик мешавад, чунки $|x_{k_n} - x| < \frac{1}{n}$ мебошад. Лемма исбот шуд.

Қайд. Тасдиқоти баръакс низ дуруст аст: агар аз пайдарпаии $\{x_n\}$ таҳтпайдарпаии ба ададди x наздикшавандаро чудо кардан мумкин бошад, онгоҳ ададди x нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад. Воқеан, дар ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи x элементҳои беохир бисьёри таҳтпайдарпаии чудо кардашуда, ва худи пайдарпаии $\{x_n\}$, ҳастанд.

Ҳамин тариқ, таърифи дигари нуқтаи лимитии пайдарпаиро баён мекунем, ки он ба таърифи 1 баробаркувва аст.

Таърифи 2. Нуқтаи x нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ номида мешавад, агар аз ин пайдарпай таҳтпайдарпаии ба x наздикшавандаро чудо кардан мумкин бошад.

Тасдиқоти зеринро қайд мекунем.

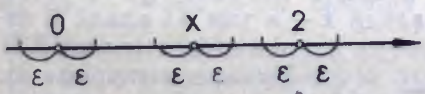
Л е м м а и 3. Ҳар як пайдарпаии наздикшаванда фақат якто нуқтаи лимитие дорад, ки бо лимити ин пайдарпай мувофиқ меояд.

И с б о т. Аввалан, қайд мекунем, ки лимити a-и пайдарпаии наздикшавандаи $\{x_n\}$ нуқтаи лимитии ин пайдарпай мебошад, чунки ҳама элементҳои пайдарпай, аз ягон номер сар карда, дар ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи a воқеъ мебошанд. Боварӣ ҳосил мекунем, ки дар пайдарпаиҳои наздикшаванда дигар нуқтаҳои лимитӣ нестанд. Ҳақиқатан, фарз мекунем, ки b нуқтаи лимитии пайдарпаии наздикшаванда мебошад. Дар асоси леммаи 2 аз $\{x_n\}$ тахтпайдарпаии $\{x_{k_n}\}$-и ба b наздикшавандаро чудо кардан мумкин аст, лекин тахтпайдарпаии дилхоҳи пайдарпаии наздикшаванда соҳиби лимити a мебошад (ба п. 1-уми ҳамин параграф нигаред), ва бинобар ин $b = a$ мебошад.

Пайдарпаиеро мисол меорем, ки он ду нуқтаи лимитӣ дорад. Исбот мекунем, ки пайдарпаии

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 2,\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ 2,\ \ldots$$

фақат ду нуқтаи лимитии 0 ва 2 дорад. Зоҳиран, ин нуқтаҳо нуқтаҳои лимитии пайдарпаии муоинашаванда мебошанд, чунки тахтпайдарпаии $1,\ 1/2,\ 1/3,\ \ldots,\ 1/n,\ \ldots$-и ин пайдарпай соҳиби лимити нуль мебошад ва тахтпайдарпаии $2,\ 2,\ \ldots,\ 2,\ \ldots$ соҳиби лимити 2 аст*. Ин пайдарпай дигар нуқтаҳои лимитӣ надорад. Воқеан, фарз мекунем, ки x нуқтаи дилхоҳи тири ададист ва аз нуқтаҳои 0 ва 2 тафовут дорад. ε-атрофи нуқтаҳои якдигарро напӯшонандаи 0, 2 ва x-ро дида мебароем (расми 3.1). Дар ε-атрофи нуқтаҳои 0 ва 2, аз ягон номер сар карда, ҳама элементҳои пайдарпай ҳастанд, ва бинобар ин дар ε-атрофи нӯмбурдаи нуқтаи x фақат элементҳои шумораашон охирноки он воқеъ мебошанд, яъне x нуқтаи лимитӣ намебошад.



Расми 3.1

3. Мавҷудияти нуқтаи лимитии пайдарпаии маҳдуд. Тасдиқоти ақоиби зерин дуруст аст.

Т е о р е м а и 3.16. Дар ҳаргуна пайдарпаии маҳдуд ақаллан якто нуқтаи лимитӣ ҳаст.

И с б о т. Азбаски пайдарпаии $\{x_n\}$ маҳдуд аст, пас чунин ададҳои ҳақиқии m ва M ҳастанд, ки ҳамаи элементҳои x_n-и пайдарпаии $\{x_n\}$ нобаробарии $m \leqslant x_n \leqslant M$-ро қаноат менамоянд. *Маҷмӯи $\{x\}$-и чунин ададҳои ҳақиқии x-ро дида мебароем,*

* Ба таърифи 2-юми нуқтаи лимитӣниг.

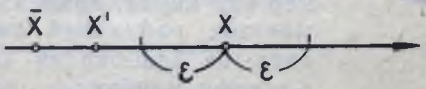
ки дар рости ҳар яки ин ададҳо элементҳои пайдарпаии* $\{x_n\}$ *ё умуман нестанд ё шумораи ингуна элементҳо охирнок аст.* Маҷмӯи $\{x\}$ ақаллан якто элемент (масалан, адади M) дорад ва аз поён (бо адади дилхоҳи аз m хурд) маҳдуд мебошад. Дар асоси теоремаи 2.1 маҷмӯи $\{x\}$ *ҳудуди поёнии саҳеҳ* дорад, ки мо онро бо $\bar{x}$ ишорат мекунем**.

Исбот мекунем, ки ин адади $\bar{x}$ нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад. Фарз мекунем, ки ε адади мусбати дилхоҳ мебошад. Адади $\bar{x} - \varepsilon$ ба маҷмӯи $\{x\}$ тааллуқ надорад, бинобар ин *дар рости адади* $\bar{x} - \varepsilon$ *элементҳои беохир бисьёри пайдарпаии* $\{x_n\}$ *воқеъ мебошанд.* Мувофиқи таърифи ҳудуди поёнии саҳеҳ аз маҷмӯи $\{x\}$ адади x'-е ёфт мешавад, ки он нобаробарии $\bar{x} \leqslant x' < \bar{x} + \varepsilon$-ро қаноат менамояд (расми 3.2). Мувофиқи таърифи маҷмӯи $\{x\}$ *дар рости* x' *элементҳои пайдарпаии* $\{x\}$ *воқеъ мебошанд, ки шумораашон аз шумораи охирноки элементҳо зиёд нест.* Дар нимсегменти $(\bar{x} - \varepsilon, x')$ хусусан дар ε-атрофи нуқтаи $\bar{x}$ элементҳои беохир бисьёри пайдарпай вуҷуд доранд, яъне $\bar{x}$ нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад. Теорема исбот шуд.



Расми 3.2

Қ а й д и 1. Боз ба маҷмӯи $\{x\}$, ки ҳангоми исботи теоремаи 3.1б кордор будем, мурочиат мекунем. Мо исбот кардем, ки ҳудуди поёнии саҳеҳи $\bar{x}$-и ин маҷмӯъ нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x\}$ мебошад. Исбот мекунем, ки *ҳеҷ ягон адади* x, *ки аз* $\bar{x}$ *калон аст, нуқтаи лимитии пайдарпаии* $\{x_n\}$ *намебошад,* яъне $\bar{x}$ *нуқтаи лимитии калонтарини ин пайдарпай мебошад.* Фарз мекунем, ки x адади дилхоҳи аз $\bar{x}$ калон мебошад. $\varepsilon > 0$-ро чунон хурд интихоб мекунем, ки адади $x - \varepsilon$ ҳам аз адади $\bar{x}$ калон шавад (расми 3.3). Мувофиқи таърифи ҳудуди поёнии саҳеҳ аз маҷмӯи $\{x\}$ адади x'-е ёфт мешавад, ки он дар чапи $x - \varepsilon$ воқеъ мебошад. Мувофиқи таърифи маҷмӯи $\{x\}$ дар рости x' ва дар ε-атрофи нуқтаи x элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$ воқеъ мебошанд, ки шумораашон аз шумораи охирноки элементҳо зиёд нест. Ин исбот мекунад, ки адади x нуқтаи лимитӣ намебошад.



Расми 3.3

---

* Мо мегӯем, ки, агар $a > b$ бошад, адади a дар рости адади b воқеъ мебошад (ба § 3-юми боби 2 нигаред).

** Муносибии бо символи $\bar{x}$ ишорат кардани ин ҳудуди поёнӣ сонитар аниқ карда мешавад.

Таъриф. Лимити болоии пайдарпаии $\{x_n\}$*-ро нуқтаи лимитии калонтарин* $(\bar{x})$*-и ин пайдарпай меноманд ва бо символи* $\bar{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ *ишорат менамоянд.*

Қайди 1 барои тасдиқ кардани он, ки *дар ҳаргуна пайдарпаии маҳдуд лимити болоӣ мавҷуд аст, имконият медиҳад.*

Мафҳуми *лимити поёнӣ* $(\underline{x})$-и пайдарпаии $\{x_n\}$ ҳамин тавр ҷорӣ карда мешавад, ки он чун нуқтаи лимитии хурдтарини ин пайдарпай муайян карда мешавад. Барои лимити поёнӣ ишорати $\underline{x} = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ истифода карда мешавад.

Мавҷудияти лимити поёнии пайдарпаии маҳдуди дилхоҳи $\{x_n\}$ мисли муҳокимаронии теоремаи 3.16 ва қайди 1-уми ин теорема исбот карда мешавад. Фақат дар ин ҷафъа маҷмӯи $\{x\}$-и ададҳои ҳақиқии x-ро чунин муоина кардан лозим аст, ки дар чапи ҳар яки ин ададҳо элементҳои ин пайдарпай воқеъ мебошанд, ки шумораашон аз шумораи охирноки элементҳо зиёд нест.

Инак, мо ба тасдиқоти зерин меоем.

Дар ҳаргуна пайдарпаии маҳдуд лимитҳои болоӣ ва поёнӣ мавҷуд ҳастанд.

Аз муҳокимаронии теоремаи 3.16 ва қайди 1 боз ду натиҷа ҳосил мешавад.

Натиҷаи 1. Агар (a, b) *интервале бошад, ки дар берунии он фақат элементҳои шумораашон охирноки пайдарпаии маҳдуди* $\{x_n\}$ *воқеъ аст, ва* $\underline{x}$ *ва* $\bar{x}$ *лимитҳои поёнӣ ва болоии ин пайдарпай бошанд, онгоҳ интервали* $(\underline{x}, \bar{x})$ *дар интервали* (a, b) *воқеъ мешавад ва, бинобар ин,* $\bar{x} - \underline{x} \leqslant b - a$ *мебошад.*

Исбот. Азбаски дар рости нуқтаи b элементҳое ҳастанд, ки шумораашон аз шумораи охирноки пайдарпай зиёд намебошанд, пас b ба маҷмӯи $\{x\}$, ки дар исботи теоремаи 3.16 қайд шуд, тааллуқ дорад ва, бинобар ин, $\bar{x} \leqslant b$ мебошад. Ҳамин тавр муҳокима ронда, боварӣ ҳосил мекунем, ки $a \leqslant x$ мебошад. Ин чунин маъно дорад, ки интервали $(\underline{x}, \bar{x})$ дар интервали (a, b) воқеъ мебошад.

Натиҷаи 2. Барои адади мусбати дилхоҳи ε *интервали* $(\underline{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ *ҳамаи элементҳои пайдарпаии* $\{x_n\}$*-ро, аз ягон номер (-и, албатта, аз* ε *вобаста) сар карда, дарбар мегирад.*

Исбот. Азбаски $\bar{x}$ ҳудуди поёнии саҳеҳи маҷмӯи $\{x\}$, ки ҳангоми исботи теоремаи 3.16 қайд карда шуд, мебошад, пас барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ адади x'-и аз $\bar{x} + \varepsilon$ хурд ва ба $\{x\}$ мутааллиқ ёфт мешавад. Лекин ин чунин маъно дорад, ки *дар рости* x' *ва дар рости интервали* $(\underline{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ *фақат элементҳои*

шумораашон охирноки пайдарпаии $\{x_n\}$ *воқеъ шуда метавонанд.* Ҳамин тавр исбот карда мешавад, ки дар чапи интервали $(\underline{x} - \varepsilon,\ \bar{x} + \varepsilon)$ фақат элементҳои шумораашон охирноки пайдарпаии $\{x_n\}$ воқеъ шуда метавонанд.

Қайди 2. Масъалаи пайдарпаии маҳдуди $\{x_n\}$ чандто нуқтаҳои лимитӣ доштанашро аниқ мекунем.

Лимитҳои поёнӣ ва болоии ин пайдарпаиро мувофиқан бо $\underline{x}$ ва $\bar{x}$ ишорат мекунем. Маълум, ки ҳама нуқтаҳои лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ (чандтое ки бошанд) дар сегменти $[\underline{x}, \bar{x}]$ воқеъ мебошанд.

Агар $\underline{x} = \bar{x}$* бошад, пайдарпай фақат якто нуқтаи лимитӣ дорад. Агар $\underline{x} < \bar{x}$ бошад, онгоҳ пайдарпай ақаллан ду нуқтаи лимитии $\underline{x}$ ва $\bar{x}$ дорад. Бояд қайд кард, ки пайдарпай соҳиби нуқтаҳои лимитии шумораашон дилхоҳ ва ҳатто шумораашон беохир шуда метавонад. Пайдарпаии 1, 2, 1/2, 2, ..., 1/*n*, 2, ..., ки дар пункти гузашта муоина шуд, фақат ду нуқтаи лимитӣ дорад: лимити поёнии $\underline{x} = 0$ ва лимити болоии $\bar{x} = 2$. Пайдарпаиеро мисол меорем, ки он нуқтаҳои лимитии беохир бисьёр дорад. Масалан, пайдарпаиеро муоина мекунем, ки элементҳои он бетакроршавӣ аз ҳама ададҳои рационалии сегменти [0, 1]** зиёд аст. Нуқтаи дилхоҳи ин сегмент нуқтаи лимитии пайдарпаии номбурда мебошад.

4. Доир ба ҷудо кардани пайдарпаиҳои наздикшаванда. Натиҷаҳои пункти гузашта ба теоремаи асосии зерин меоранд.

Теоремаи 3.17. *(теоремаи Больцано-Вейерштрасс***). Аз пайдарпаии маҳдуди дилхоҳ тақтпайдарпаии наздикшавандаеро ҷудо кардан мумкин аст.*

Исбот. Азбаски пайдарпай маҳдуд аст, пас он ақаллан якто нуқтаи лимитии x дорад. Дар ингуна маврид аз ин пай-

---

* Мо сонитар исбот мекунем, ки баробарии $\underline{x} = \bar{x}$ ва шарти маҳдудият шартҳои зарурӣ ва кифоягии наздикшавии пайдарпаиҳо мебошанд.

** Ададҳои рационалии сегменти [0, 1]-ро ба намуди пайдарпай, бе такрор шудани элементҳо, масалан, ин тавр ҷойгир кардан мумкин аст. Гурӯҳҳои ададҳои рационалии ин сегментро дида мебароем; дар гурӯҳи якум ададҳои 0 ва 1, дар гурӯҳи дуюм ададҳои 1/2, дар гурӯҳи сеюм ҳамаи ададҳои ихтисорнашавандаи p/q (-и махрачашон 3) ва, умуман, дар гурӯҳи n-ум ҳамаи касрҳои рационалии ихтисорнашавандаи сегменти [0, 1] (-и махрачашон n)-ро ҷудо мекунем. Ҳар як ададӣ рационалӣ ба як гурӯҳ дохил мешавад ва дар ҳар як гурӯҳ фақат ададҳои рационалии шумораашон охирнок дохиланд. Акнун элементҳои гурӯҳи якум, аз паси онҳо элементҳои гурӯҳи дуюм, баъд элементҳои гурӯҳи сеюм ва ғайраро пайдарҳам менависем. Дар натиҷа мо пайдарпаии даркориро ҳосил мекунем.

*** Бернгард Больцано — философ ва математики чех (1781—1848), Карл Вейерштрасс — математики немис (1815—1897).

дарпай тахтпайдарпаии ба нуқтаи x наздикшавандаро чудо кардан мумкин аст (ба таърифи 2-юми нуқтаҳои лимитӣ нигаред).

Қайди 1. *Аз пайдарпаии маҳдуди дилхоҳ тахтпайдарпаии монотониро чудо кардан мумкин аст.* Вокеан, дар асоси теореми Больцано-Вейерштрасс аз пайдарпаии маҳдуди дилхоҳ тахтпайдарпаии наздикшавандаро чудо кардан мумкин аст ва аз ин тахтпайдарпай, дар асоси қайди п. 1-уми ин параграф, тахтпайдарпаии монотониро чудо кардан мумкин аст.

Қайди 2. *Бигзор $\{x_n\}$ пайдарпаии маҳдуде бошад, ки элементҳояш дар сегменти $[a, b]$ воқеъ мебошанд. Онгоҳ лимити тахтпайдарпаии наздикшавандаи дилхоҳи $\{x_{k_n}\}$ ҳам дар сегменти $[a, b]$ воқеъ мебошад.* Хакикатан, азбаски $a \leqslant x_{k_n} \leqslant b$ мебошад, пас дар асоси натичаи 2-юми теореми 3.13 нобаробарии $a \leqslant c \leqslant b$ ичро мешавад. Ин чунин маъно дорад, ки c дар сегменти $[a, b]$ воқеъ мебошад.

Қайд мекунем, ки дар мавридҳои чудогона аз пайдарпаии номаҳдуд ҳам тахтпайдарпаии наздикшавандаро чудо кардан мумкин аст. Чунончи, пайдарпаии 1, 1/2, 2, 1/3, ..., n, $1/(n+1)$, ... пайдарпаии номаҳдуд мебошад, аммо тахтпайдарпаии 1/2, 1/3, ..., $1/n$, ...-и элементҳои он (ки номерҳояш чуфт аст) наздик мешавад. Лекин на аз ҳар як пайдарпаии номаҳдуд тахтпайдарпаии наздикшавандаро чудо кардан мумкин аст. Масалан, тахтпайдарпаии дилхоҳи пайдарпаии номаҳдуди 1, 2, ..., n, ... дур мешавад. Бинобар ин теореми Больцано-Вейерштрассро, умуман, ба пайдарпаиҳои номаҳдуд татбиқ кардан мумкин нест.

Чумлаи зерин барои пайдарпаиҳои номаҳдуд мушобеҳи ин теорема мебошад.

Леммаи 4. Аз ҳар пайдарпаии номаҳдуд тахтпайдарпаии беохир калонро чудо кардан мумкин аст.

Исбот. Фарз мекунем, ки $\{x_n\}$ пайдарпаии номаҳдуд мебошад. Онгоҳ элементи x_{k_1}-и ин пайдарпай ёфт мешавад, ки шарти $|x_{k_1}| > 1$-ро қаноат менамояд; элементи x_{k_2}-и ин пайдарпай ёфт мешавад, ки шартҳои $|x_{k_n}| > 2$, $k_2 > k_1$-ро қаноат менамояд; ..., элементи x_{k_n}-и ин пайдарпай ёфт мешавад, ки шартҳои $|x_{k_n}| > n$, $k_n > k_{n-1}$-ро қаноат менамояд ва ғайра. Тахтпайдарпаии $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ пайдарпаии беохир калон мебошад.

Аз леммаи 4 ва аз теореми Больцано—Вейерштрасс тасдиқоти зерин бармеояд.

Леммаи 5. Аз пайдарпаии комилан дилхоҳ ё тахтпайдарпаии наздикшаванда, ё тахтпайдарпаии беохир калонро чудо кардан мумкин аст.

Қайди 3. Натичаҳои ҳамин пункт имконият медиҳанд, ки мафҳумҳои нуқтаи лимитӣ ва лимитҳои болоӣ ва поёнии пайдарпаиҳо чанде васеъ карда шаванд.

Гуфтан мумкин аст, ки $+\infty$ ($-\infty$) нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад, агар аз ин пайдарпай тахтпайдарпаии беохир калонеро, ки аз элементҳои мусбат (манфӣ) иборат аст, чудо кардан мумкин бошад.

Ҳангоми ин тавр васеъ кардани мафҳуми нуқтаи лимитӣ дар пайдарпаиҳо, ба ғайр аз нуқтаҳои лимитии охирнок, боз ду нуқтаи лимитии $+\infty$ ва $-\infty$ вуҷуд доштанаш мумкин аст. Дар ингуна маврид леммаи 5 барои тасдиқ кардани он, ки *дар пайдарпаии комилан дилхоҳ ақаллан якто нуқтаи лимитӣ вуҷуд дорад*, имконият медиҳад*.

Чунин мепиндорем, ки $+\infty$ ва $-\infty$ бо адади ҳақиқии охирноки дилхоҳи x бо вобастагии $-\infty < x < +\infty$ алоқаманданд ва боварӣ ҳосил мекунем, ки *дар пайдарпаии комилан дилхоҳ лимитҳои болой ва поёнӣ вуҷуд доранд* (яъне нуқтаҳои лимитии калонтарин ва хурдтарин мавҷуд ҳастанд).

Барои муайянӣ, мавҷудияти лимити болоиро муқаррар мекунем. Дар асоси қайди 1-уми теоремаи 3.16 фақат чунин мавридеро, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии маҳдуд намебошад, муоина кардан кифоя аст. Агар дар ин маврид $\{x_n\}$ аз боло маҳдуд набошад, онгоҳ аз он пайдарпаии беохир калонеро чудо кардан мумкин аст, ки ҳамаи элементҳояш мусбат мебошанд ва, бинобар ин, $+\infty$ нуқтаи лимитӣ мебошад ва лимити болоии $\{x_n\}$ ҳам мешавад.

Мавридеро муоина мекунем, ки пайдарпаии номаҳдуди $\{x_n\}$ аз боло маҳдуд мебошад, яъне чунин адади ҳақиқии M вуҷуд дорад, ки ҳамаи элементҳои x_n шарти $x_n \leqslant M$-ро қаноат менамоянд. Азбаски пайдарпаии $\{x_n\}$ аз поён маҳдуд намебошад, пас аз он пайдарпаии беохир калонеро чудо кардан мумкин аст, ки ҳамаи элементҳояш манфӣ мебошанд ва ин чунин маъно дорад, ки $-\infty$ нуқтаи лимитии пайдарпаии муоинашаванда мебошад.

Агар дар ин маврид пайдарпай ягонто ҳам нуқтаи лимитии охирнок надошта бошад, онгоҳ $-\infty$ нуқтаи лимитии ягона мебошад ва, аз ҳамин сабаб, лимити болоии пайдарпаии муоинашаванда мебошад. Исбот мекунем, ки агар пайдарпай, ғайр аз $-\infty$, боз ақаллан якто нуқтаи лимитии охирноки x_0 дошта бошад, онгоҳ дар ин маврид ҳам дар он лимити болой вуҷуд дорад. Азбаски ҳамаи элементҳои x_n шарти $x_n \leqslant M$-ро қаноат менамоянд, пас дар асоси теоремаи 3.13 x_0 ҳам шарти $x_0 \leqslant M$-ро қаноат менамояд. $\varepsilon > 0$-и дилхоҳро қайд мекунем. Азбаски дар ε-атрофи x_0 элементҳои беохир бисьёри пайдарпаии $\{x_n\}$ воқеъ мебошанд, пас дар сегменти $[x_0 - \varepsilon, M]$ ҳам беохир бисьёри ин элементҳо воқеъ мебошанд.

Аз пайдарпаии $\{x_n\}$ тахтпайдарпаии ҳамон элементҳои онро чудо мекунем, ки онҳо дар сегменти $[x_0 - \varepsilon, M]$ воқеъ мебошанд. Тахтпайдарпаии чудо кардашуда тахтпайдарпаии маҳдуд мебошад. Бинобар ин дар асоси қайди 1-уми теоремаи 3.16 дар он лимити болой вуҷуд дорад, яъне нуқтаи лимитии калонтарини x мавҷуд ҳаст. Маълум аст, ки $\bar{x} \geqslant x_0$ мебошад ва он нуқтаи лимитӣ аст ва нуқтаи лимитии ҳамаи пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад. Инчунин маълум аст, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ нуқтаҳои лимитии аз $\bar{x}$ калон надорад, чунки агар ягон адади $\bar{\bar{x}}$-и аз $\bar{x}$ калон нуқтаи лимитии пайдарпаии $\{x_n\}$ мебуд, онгоҳ, азбаски ҳамаи элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$, ки аз адади $x_0 - \varepsilon$ калонанд, элементҳои тахтпайдарпаии чудокардаамон ҳам мебошанд, пас ин адади $\bar{\bar{x}}$ нуқтаи лимитии тахтпайдарпаии чудокардаамон ҳам мешуд, ва ин тахтпайдарпай нуқтаҳои лимитии аз $\bar{x}$ калон надорад.

Инак, адади $\bar{x}$ нуқтаи лимитии калонтарини пайдарпаии муоинашаванда мебошад.

Дар пайдарпаии комилан дилхоҳ мавҷуд будани лимити болой исбот шуд.

Мавҷудияти лимити поёнӣ ҳамин тавр исбот карда мешавад.

---

* Ё охирнок, ё беохир.

5. Шартҳои зарурӣ ва кифоягии наздикшавии пайдарпаиҳо. Ҳангоми бо ёрии таърифи наздикшавӣ аниқ кардани масъалаи наздикшавии пайдарпаии $\{x_n\}$ ба мо лозим меояд, ки фарқи элементҳо (x_n)-и ин пайдарпай ва лимити таҳминшуда (a)-и ин пайдарпаиро баҳо диҳем. Ба ибораи дигар, ба чӣ баробар будани лимити a-и ин пайдарпаиро ёфтан лозим аст.

Критерияи «дохилии» наздикшавии пайдарпаиро нишон додан табиист, ки он барои фақат аз рӯи бузургии элементҳои он аниқ кардани масъалаи наздикшавии пайдарпай имконият медиҳад. Ҳамин критерияи дохилӣ дар ҳамин пункт муқаррар карда мешавад. Барои баён кардани ин критерия мафҳуми пайдарпаии фундаменталиро чорӣ мекунем.

Таъриф. Пайдарпаии $\{x_n\}$ *пайдарпаии фундаменталӣ номида мешавад, агар барои* ε*-и мусбати дилхоҳ чунин номери* N *ёфт шавад, ки барои ҳама номерҳои* n*-и шарти* $n \geqslant N$*-ро қаноаткунанда ва барои ҳама ададҳои натуралии* p $(p = 1, 2, \ldots)$ *нобаробарии*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

дуруст бошад.

Исботи критерияи зерини наздикшавии пайдарпай (ки критерияи Коши* номида мешавад) масъалаи асосии ҳамин пункт мебошад: *барои он, ки пайдарпаи наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки он пайдарпаии фундаменталӣ бошад.*

• Пеш аз он, ки ба исботи критерияи Коши шурӯъ намоем, якчанд чумлаҳои ёрирасонро исбот мекунем.

Теоремаи 3.18. *Барои он, ки пайдарпаии* $\{x_n\}$ *наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки он пайдарпаии маҳдуд бошад ва лимитҳои болоию поёниаш* $\bar{x}$ *ва* $\underline{x}$ *мувофиқ оянд.*

Исбот. 1) Шарти зарурӣ. Фарз мекунем, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ наздик мешавад. Онгоҳ он маҳдуд мебошад (дар асоси теоремаи 3.8) ва соҳиби нуқтаи лимитии ягона мебошад (дар асоси леммаи 3-юми п. 2). Ҳамин тариқ, $\underline{x} = \bar{x}$.

2) Шарти кифоягӣ. Натиҷаи 2-юми теоремаи 3.16 тасдиқ мекунад, ки барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ интервали $(\underline{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ ҳама элементҳои пайдарпаии $\{x_n\}$-ро, аз ягон номер сар карда, дарбар мегирад. Азбаски $\underline{x} = \bar{x} = x$ мебошад, пас интервали номбурда бо ε-атрофи нуқтаи x мувофиқ меояд, яъне адади x лимити пайдарпаии $\{x_n\}$ мебошад (ба қайди 1-уми п. 1-уми § 2 ниг.).

Акнун хосияти муҳими пайдарпаии фундаменталиро, ки аз таърифи он бевосита ҳосил мешавад, муқаррар мекунем:

---

* Огюстен Луи Коши — математики франсавӣ (1789—1857).

Барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин элементи x_N-и пайдарпаии фундаменталиро нишон додан мумкин аст, ки дар ε-атрофи он ҳама элементҳои пайдарпай, аз номери N сар карда, воқеъ мешаванд. Ба ибораи дигар, дар беруни интервали $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ на зиёда аз шумораи охирноки элементҳои пайдарпай воқеъ мебошанд.*

Воқеан, аз таърифи пайдарпаии фундаменталӣ чунин натича мебарояд: барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери N-ро нишон додан мумкин аст, ки барои ҳама ададҳои натуралии p ($p = 1, 2, 3, \ldots$) нобаробарии $|x_{N+p} - x_N| < \varepsilon$ иҷро мешавад ва ин чунин маъно дорад, ки ҳама элементҳои пайдарпай, аз номери N сар карда, дар ε-атрофи элементи x_N воқеъ мебошанд.

Хосияти қайдшуда имконият медиҳад, ки маҳдудиятии пайдарпаии фундаменталиро муқаррар намоем. Воқеан, фарз мекунем, ки ε ягон адади мусбати қайдшуда бошад ва x_N элементе бошад, ки дар ε-атрофи он ҳама элементҳои пайдарпай, аз ягон номери N сар карда, воқеъ мебошанд. Онгоҳ дар беруни ин ε-атроф фақат элементҳои $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ воқеъ шуда метавонанд. Фарз мекунем, ки

$$A = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N - \varepsilon|, |x_N + \varepsilon|\}^{**}.$$

Онгоҳ ададҳои $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon$ ва, бинобар ин, ҳама нуқтаҳои ε-атрофи элементи x_N ҳам дар сегменти $[-A, +A]$ воқеъ мебошанд. Аз ин ҷо натича мебарояд, ки ҳама элементҳои пайдарпаии фундаменталӣ дар сегменти $[-A, +A]$ воқеъ мебошанд ва ин чунин маъно дорад, ки пайдарпаии фундаменталӣ маҳдуд мебошад.

Ба исботи тасдиқоти асосии ин пункт шурӯъ мекунем.

Теоремаи 3.19. *(критерияи Кошии наздикшавии пайдарпаиҳо). Барои он ки пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки он бояд пайдарпаии фундаменталӣ бошад.*

Исбот. 1) Шарти зарурӣ. Фарз мекунем, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ наздик мешавад ва x лимити он мебошад. Исбот кардан лозим аст, ки ин пайдарпай пайдарпаии фундаменталӣ мебошад. Адади мусбати дилхоҳи ε-ро мегирем. Аз таърифи пайдарпаии наздикшаванда натича мебарояд, ки барои адади $(\varepsilon/2) > 0$ чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $|x_n - x| < \varepsilon/2$ иҷро мешавад.

Агар p адади натуралии дилхоҳ бошад, онгоҳ ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $|x_{n+p} - x| < \varepsilon/2$ низ иҷро мешавад.

---

* Хосияти номбурда ба таърифи пайдарпаии фундаменталӣ баробарқувва аст.

** Ин аз чиҳати геометрӣ чунин маъно дорад, ки A ба масофаи максималии байни сарҳисоб 0 ва нуқтаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon$ баробар аст.

Азбаски модули суммаи ду бузургӣ аз суммаи модули онҳо калон нест, пас аз ду нобаробарии охирин ифодаеро ҳосил мекунем, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан ва барои ҳама ададҳои натуралии p

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x) + (x - x_n)| \leqslant |x_{n+p} - x| + \\ + |x_n - x| < \varepsilon.$$

Бо ҳамин фундаменталӣ будани пайдарпаии $\{x_n\}$ муқаррар карда шуд.

2) Ш а р т и к и ф о я г ӣ. Фарз мекунем, ки $\{x_n\}$ пайдарпаии фундаменталӣ мебошад. Исбот кардан лозим аст, ки ин пайдарпай наздик мешавад. Мувофиқи теореми 3.18 барои ин маҳдудиятии пайдарпаии $\{x_n\}$ ва баробар будани лимитҳои болоӣ ва поёнӣ $\bar{x}$ ва $\underline{x}$-ро исбот кардан кифоя аст. Маҳдудиятии пайдарпаии фундаменталиро дар боло муқаррар кардем.

Барои исботи баробарии лимитҳои болоию поёнӣ $\bar{x}$ ва $\underline{x}$ аз хосияти дар боло исботшудаи пайдарпаии фундаменталӣ истифода мекунем: барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин элементи x_N-ро нишон додан мумкин аст, ки дар беруни интервали $(x_N - \varepsilon,\ x_N + \varepsilon)$ элементҳои пайдарпай на зиёда аз шумораи охирнок воқеъ мебошанд. Дар асоси натиҷаи 1-уми теореми 3.16 интервали $(x_N - \varepsilon,\ x_N + \varepsilon)$ интервали $(\underline{x},\ \bar{x})$-ро дарбар дорад ва, бинобар ин $\bar{x} - \underline{x} \leqslant 2\varepsilon$, аз ин ҷо, дар асоси дилхоҳ будани ε, $\underline{x} = \bar{x}$. Бо ҳамин наздикшаванда будани пайдарпай муқаррар карда шуд. Теорема пурра исбот шуд.

М и с о л. Барои муқаррар кардани наздикшавандагии пайдарпаии $\{x_n\}$:

$$x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

критерияи Коширо татбиқ мекунем, дар ин ҷо a_k $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ адади ҳақиқии дилхоҳ, ки шарти $|a_k| \leqslant q^k$-ро қаноат менамояд ва q — ягон адад аз интервали $0 < q < 1$.

Фарз мекунем, ки n номери дилхоҳ ва p адади натуралии дилхоҳ мебошад. Онгоҳ

$$|x_{n+p} - x_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant \\ \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| \leqslant q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots + q^{n+p} = \\ = \frac{q^{n+1} - q^{n+1+p}}{1-q} < \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Беохир хурд будани пайдарпаии $\{q^n\}$-ро ба эътибор гирифта (ба мисоли 1-уми п. 3-юми § 1 ниг.), мо тасдиқ карда мета-

вонем, ки барои $\varepsilon > 0$-и *дилхоҳ* чунин номери N ёфт мешавад, ки

$$q^{n+1} < \varepsilon\ (1 - q_l)\ \text{(ҳангоми } n \geqslant N \text{ будан)}.$$

Ҳангоми $n \geqslant N$ будан ва барои адади натуралии дилхоҳи p

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{q^{n+1}}{1-q} < \varepsilon,$$

яъне пайдарпаии $\{x_n\}$ *пайдарпаии фундаменталӣ* мебошад ва мувофиқи теоремаи 3.17 пайдарпаии наздикшаванда аст.

6. Баъзе хосиятҳои маҷмӯъҳои ададии дилхоҳ. Мо дар ин пункт баъзе хосиятҳои *маҷмӯъҳои ададии дилхоҳро* меомӯзем. Як қисми ин хосиятҳо ба хосиятҳои пайдарпаиҳои ададӣ монанданд.

Мо дар п. 5-уми § 1-уми боби 2 мафҳуми *маҷмӯи аз боло (аз поён)* маҳдудро муоина кардем. Акнун маҷмӯи $\{x\}$-ро *аз ҳар ду тараф маҳдуд* ё фақат *маҳдуд* меномем, агар ин маҷмӯъ ҳам аз боло ва ҳам аз поён маҳдуд бошад, яъне агар чунин ду адади ҳақиқии m ва M ёфт шаванд, ки ҳар як элементи x-и маҷмӯи $\{x\}$ нобаробарии $m \leqslant x \leqslant M$-ро қаноат намоянд. Маҷмӯи $\{x\}$-ро, вобаста аз он, ки оё шумораи элементҳои таркиби ин маҷмӯъ охирнок ё беохиранд, *маҷмӯи охирнок* ё *беохир* меномем.

Нуқтаи x-и хати рости беохирро нуқтаи лимитии маҷмӯи $\{x\}$ меномем, агар дар ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи x элементҳои беохир бисьёри ин маҷмӯъ воқеъ бошанд.

Нуқтаи $\bar{x}$ (нуқтаи $\underline{x}$)-ро *нуқтаи лимитии болоии (поёнии) маҷмӯи $\{x\}$* меномем, агар ин нуқта нуқтаи лимитии маҷмӯи $\{x\}$ бошад, лекин ягон нуқтаи аз $\bar{x}$ калон (аз $\underline{x}$ хурд) нуқтаи лимитии ин маҷмӯъ намебошад.

Исботи теоремаи 2.16-ро бо иваз намудани термини «пайдарпаии $\{x_n\}$» ба «маҷмӯи $\{x\}$» айнан такрор карда, мо ба тасдиқоти зерин меоем: *дар ҳаргуна маҷмӯи беохири маҳдуд ақаллан якто нуқтаи лимитӣ ҳаст.*

Муҳокимаронии қайди 1-уми теоремаи 3.16-ро айнан такрор карда, мо ба чунин тасдиқот меоем: *дар ҳаргуна маҷмӯи беохири маҳдуд нуқтаҳои лимитии болоӣ ва поёнӣ ҳастанд.* Ҷумлаи зерин натиҷаи тасдиқотҳои номбурда мебошанд: *аз элементҳои ҳаргуна маҷмӯи беохири маҳдуд пайдарпаии наздикшаванда ҷудо кардан мумкин аст.*

Дар баробари мафҳуми маҷмӯъ аксаран мафҳуми *таҳтмаҷмӯъ* истифода карда мешавад. Маҷмӯи $\{x'\}$ *таҳтмаҷмӯи маҷмӯи* $\{x\}$ номида мешавад, агар ҳама элементҳои маҷмӯи $\{x'\}$ дар таркиби маҷмӯи $\{x\}$ бошанд. Масалан, маҷмӯи ҳама ададҳои бутуни ҷуфт таҳтмаҷмӯи маҷмӯи ҳаман ададҳои бутун мебошад.

Ду маҷмӯи $\{x\}$ ва $\{y\}$ *маҷмӯъҳои баробарқувва* номида мешаванд, агар дар байни элементҳои ин маҷмӯъҳо мувофиқати байни якдигар якқиматаи* муқаррар кардан мумкин бошад. Ду маҷмӯи охирнок фақат дар ҳамон вақт баробарқувва мешаванд, ки агар шумораи элементҳои ин маҷмӯъҳо якхела бошанд. Дониб ба ду маҷмӯи беохири баробарқувва мисол меорем. Маҷмӯи $\{x\}$, ки ададҳои мусбати ҷуфти 2, 4, 6, ..., $2n$, ... элементҳои он мебошанд, ба маҷмӯи $\{y\}$, ки ададҳои натуралии 1, 2, 3, ..., n, ... элементҳояш мебо-

---

* *Мувофиқати ба ҳам якқиматаи* байни элементҳои ду маҷмӯъ гуфта чунин мувофиқатеро меноманд, ки дар он ба ҳар як элементи маҷмӯи якум фақат як элементи маҷмӯи дуюм чунон мувофиқ ояд, ки дар айни ҳол ҳар як элементи маҷмӯи дуюм фақат ба як элементи маҷмӯи якум мувофиқ меояд.

шанд, баробарқувва мебошад. Воқеан, элементи $2n$-и маҷмӯи $\{x\}$-ро ба элементи n-и маҷмӯи $\{y\}$ дар мувофиқатӣ гузошта, дар байни элементҳои ин маҷмӯъҳо мувофиқати байни ҳам якқиматаро муқаррар мекунем. Ба он диққат медиҳем, ки маҷмӯи муоинакардаи мо $\{x\}$ таҳтмаҷмӯи маҷмӯи $\{y\}$ мебошад. Ҳамин тариқ, маҷмӯи беохири $\{y\}$ ба таҳтмаҷмӯи худ $\{x\}$ баробарқувва мебошад*.

Аз маҷмӯъҳои гуногун ду намӯди муҳимтарини зеринро ҷудо мекунем:

1°. *Ҳаргуна маҷмӯаро, ки ба маҷмӯи ҳамаи ададҳои натуралии 1, 2, 3, ..., n, ... баробарқувва мебошад, маҷмӯи шумор меномем.* Аз таърифи маҷмӯи шумор натиҷа мебарояд, ки ҳамаи элементҳои ин маҷмӯъро номернок кардан мумкин аст.

2°. *Ҳаргуна маҷмӯаро, ки ба маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқии интервали* (0, 1) *баробарқувва мебошад, маҷмӯи тавонои континуум меномем.*

Доир ба маҷмӯи шумор ва маҷмӯи тавонои континуум мисолҳо меорем. Маҷмӯи ададҳои мусбати ҷуфти 2, 4, 6, ..., $2n$, ... ки дар боло муоина кардем, мисоли якуми маҷмӯи шумор мебошад. Маҷмӯи ҳама ададҳои рационалии сегменти [0, 1] мисоли дуюми маҷмӯи шумор мебошад, чунки, чунон ки дар поварақи саҳ. 76 исбот шуд, ин маҷмӯъро ба намуди пайдарпай (бе такрор шудани элементҳо) ҷойгир кардан, яъне номернок кардан мумкин аст. Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ (хати рости беохир) мисоли маҷмӯи тавонои континуум мебошад. Воқеан, функцияи $y = \operatorname{ctg} \pi x$** дар байни нуқтаҳои интервали $0 < x < 1$ ва нуқтаҳои хати рости беохир мувофиқати баҳам якқиматаро муқаррар мекунад.

Дар хотима исбот мекунем, ки *маҷмӯи тавонои континуум ба маҷмӯи шумор баробарқувва намебошад.* Барои ин исбот кардан кифоя аст, ки маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқии интервали (0, 1)-ро номернок кардан мумкин нест. Баръаксашро фарз мекунем, яъне фарз мекунем, ки ҳамаи ададҳои ҳақиқии интервали (0, 1)-ро номернок кардан мумкин аст. Онгоҳ, ин ададҳоро ба намуди касрҳои даҳии беохир навишта, мо пайдарпаиҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12} \ldots a_{1n}, \ldots,$$
$$x_2 = 0, a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = 0, a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Акнун ададӣ ҳақиқии $x = 0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$-ро муоина мекунем, ки дар ин ҷо b_1 рақами дилхоҳест, ки аз a_{11}, 0 ва 9 тафовут дорад, b_2 рақами дилхоҳест, ки аз a_{22}, 0 ва 9 тафовут дорад, ва, умуман, b_n рақами дилхоҳест, ки аз a_{nn}, 0 ва 9 тафовут дорад.

Азбаски ададии x баъди вергул нулу нӯҳиҳо надорад, пас ин адад ба класси ададҳои рационалие, ки онҳоро бо ду тарз ба намуди касрҳои даҳии беохир навиштан мумкин аст, тааллуқ дорад. Лекин дар ингуна маврид ададии x аз ҳамаи ададҳои $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ тафовут дорад, чунки бо ягон ададии x_n мувофиқ омадани x чунин маъно дорад, ки b_n ва a_{nn} ба якдигар мувофиқанд.

---

* Нишон додан осон аст, ки маҷмӯи беохири дилхоҳ ба ягон таҳтмаҷмӯи худ, ки ба ҳамаи маҷмӯъ мувофиқ нест, баробарқувва мебошад. Ин далелро ба сифати таърифи маҷмӯи беохир қабул кардан мумкин аст.

** Мо аз курси математикаи элементарӣ дар бораи функцияи $y = \operatorname{ctg} \pi x$ тасаввурот дорем. Масъалаи ташкили қатъии функцияҳои тригонометрӣ дар боби 4 аниқ карда мешавад.

*** Ба п. 3-юми § 1-уми боби 2 нигаред.

Масъалаи мавҷудияти маҷмӯи беохири $\{x\}$, ки ҳам ба маҷмӯи шумор ва ҳам ба маҷмӯи тавонои континуум баробарқувва намебошаду лекин ба як қисми маҷмӯи тавонои континуум баробарқувва аст, математикҳоро муддатҳои дурудароз машғул кард. Математики америкой П. Коэн соли 1963 исбот кард, ки гипотезаи мавҷудияти нигуна маҷмӯъ аз аксиомахои бокимондаи назарияи маҷмӯъҳо вобаста нест. Ин чунин маъно дорад, ки назарияи аз ҷиҳати дохилӣ номуҳолифи маҷмӯъҳоро ташкил додан мумкин аст, ки он ҳам далели мавҷудияти нигуна маҷмӯъ ва ҳам далели мавҷуд набудани онро тасдиқ мекунад (нигг. ба китоби П. Ҷ. Коэн «Теория множеств и континуум-гипотеза», Мир, 1969).

ИЛОВАИ 1

ТЕОРЕМАИ ШТОЛЬЦ

Дар аксари мавридхо барои тадқиқи паздикшавии ҳосили тақсим $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$-и пайдарпаиҳои $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ чумлаи зерин манфиат мебахшад.

Теоремаи Штольц. Бигзор $\{y_n\}$ пайдарпаии беохир калони афзуншаванда бошад, ва бигзор пайдарпаии $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ наздик шавад ва лимити a дошта бошад. Онгоҳ пайдарпаии $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ наздик мешавад ва соҳиби лимити a мебошад. Ҳамин тариқ,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Исбот. Азбаски пайдарпаии $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ наздик мешавад ва ададаи a лимиташ мебошад, онгоҳ пайдарпаии $\{\alpha_n\}$, ки дар ин ҷо $\alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a$ мебошад, пайдарпаии беохир хурд мебошад. Фарз мекунем, ки $\overline{N}$ номери қайдшудаи дилхоҳ ва $n > \overline{N}$ мебошад. Ифодаи α_n-ро истифода карда, баробарихои зеринро муоина мекунем:

$$x_{\overline{N}+1} - x_{\overline{N}} = a(y_{\overline{N}+1} - y_{\overline{N}}) + \alpha_{\overline{N}+1}(y_{\overline{N}+1} - y_{\overline{N}}),$$
$$x_{\overline{N}+2} - x_{\overline{N}+1} = a(y_{\overline{N}+2} - y_{\overline{N}+1}) + \alpha_{\overline{N}+2}(y_{\overline{N}+2} - y_{\overline{N}+1}),$$
. . . . . .

$$x_{n-1} - x_{n-2} = a(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}),$$
$$x_n - x_{n-1} = a(y_n - y_{n-1}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1}).$$

Ин баробариҳоро ҷамъ карда, меёбем, ки

$$x_n - x_{\underset{N}{_}} = a y_{\underset{N}{_}} + \alpha_{\underset{N+1}{_}}(y_{\underset{N+1}{_}} - y_{\underset{N}{_}}) + \alpha_{\underset{N+2}{_}}(y_{\underset{N+2}{_}} - y_{\underset{N+1}{_}}) + \ldots + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1}).$$

Азбаски $\{y_n\}$ пайдарпаии беохир калони афзуншаванда мебошад, пас, аз ягон номер сар карда, элементҳои он мусбат мебошанд. Чунин мепиндорем, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан $y_n > 0$ мебошад. Онгоҳ аз баробарии охирин чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_{\underset{N}{_}} - a y_{\underset{N}{_}}}{y_n} + \frac{\alpha_{\underset{N+1}{_}}(y_{\underset{N+1}{_}} - y_{\underset{N}{_}}) + \alpha_{\underset{N+2}{_}}(y_{\underset{N+2}{_}} - y_{\underset{N+1}{_}}) + \ldots + \alpha_n(y_n - y_{n-1})}{y_n}.$$

Азбаски пайдарпаии $\{y_n\}$ пайдарпаии афзуншаванда мебошад, пас фарқи $y_{k+1} - y_k$, $k = \overline{N}, \overline{N+1}, \ldots, n-1$, мусбат аст. Бинобар ин аз вобастагии охирин ифодаи зеринро ҳосил менамоем:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| \leqslant \left|\frac{x_{\underset{N}{_}} - a y_{\underset{N}{_}}}{y_n}\right| + \frac{|\alpha_{\underset{N+1}{_}}|(y_{\underset{N+1}{_}} - y_{\underset{N}{_}}) + |\alpha_{\underset{N+2}{_}}|(y_{\underset{N+2}{_}} - y_{\underset{N+1}{_}}) + \ldots + |\alpha_n|(y_n - y_{n-1})}{y_n}. \tag{3.8}$$

Акнун исбот мекунем, ки пайдарпаии $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ наздик мешавад ва соҳиби лимити a мебошад. Барои ин исбот кардан кифоя аст, ки барои ε-и мусбати дилхоҳ чунин номери N-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon$ ичро мешавад. Аввал, аз рӯи $\varepsilon > 0$-и додашуда чунин номери N-ро интихоб мекунем, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ ичро шавад (ин ичро мешавад, чунки пайдарпаии $\{\alpha_n\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад). Баъд, чунин номери $N \geqslant \overline{N}$-ро интихоб мекунем, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $\left|\frac{x_N - a y_N}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

ичро шавад. Чунин интихоби номери N имконпазир аст, чунки ададн $x_N - ay_N$ ададн қайдшуда мебошад ва пайдарпаии $\{y_n\}$ пайдарпаии беохир калон аст, бинобар ин пайдарпаии $\left\{\dfrac{x_N - ay_N}{y_n}\right\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад.

Бигзор $n \geqslant N$ бошад. Аз нобаробарии (3.8) чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(y_{N+1} - y_N) + (y_{N+2} - y_{N+1}) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}{y_n},$$

ё

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{y_n - y_N}{y_n}.$$

Азбаски ҳангоми $n \geqslant N$ будан $y_n - y_N < y_n$ ва $y_n > 0$ мебошад, пас $\dfrac{y_n - y_N}{y_n} < 1$ аст. Бинобар ин ҳангоми $n \geqslant N$ будан аз нобаробарии охирин чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon.$$

Теорема исбот шуд.

Қайд. *Агар $\{y_n\}$ пайдарпаии беохир калони афзуншаванда бошад ва пайдарпаии $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ ҳам пайдарпаии беохир калон бошад ва ба беохирии аломаташ муайян майл намояд, онгоҳ пайдарпаии $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ пайдарпаии беохир калон мебошад.*

Воқеан, бигзор

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A_n$$

бошад. Пайдарпаии $\{A_n\}$ пайдарпаии беохир калон аст. Ҳангоми $n > N$ будан

$$x_{N+1} - x_N = A_{N+1}(y_{N+1} - y_N),$$

. . . . . .

$$x_n - x_{n-1} = A_n(y_n - y_{n-1}).$$

Ин баробариҳоро ҷамъ карда, меёбем, ки

$$x_n - x_{\underset{N}{-}} = A_{\underset{N+1}{-}}(y_{\underset{N+1}{-}} - y_{\underset{N}{-}}) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1}).$$

Аз ин ҷо

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{A_{\underset{N+1}{-}}(y_{\underset{N+1}{-}} - y_{\underset{N}{-}}) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n} + \frac{x_{\underset{N}{-}}}{y_n}.$$

Аз ин вобастагӣ чунин формуларо ҳосил мекунем:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| = \left|\frac{A_{\underset{N+1}{-}}(y_{\underset{N+1}{-}} - y_{\underset{N}{-}}) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n}\right| - \left|\frac{x_{\underset{N}{-}}}{y_n}\right|. \qquad (3.9)$$

Барои муайянӣ чунин мепиндорем, ки ҳангоми $n \geqslant \overline{N}$ будан элементҳои пайдарпаиҳои $\{y_n\}$ ва $\{A_n\}$ мусбат мебошанд. Баъд, аз рӯи A-и мусбати додашуда номери $\overline{N}$-ро чунон интихоб мекунем, ки ҳангоми $n \geqslant \overline{N}$ будан нобаробарии $A_n > 4A$ иҷро шавад, сонӣ чунин $N \geqslant \overline{N}$-ро интихоб мекунем, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробариҳои зерин иҷро мешаванд:

$$\left|\frac{x_{\underset{N}{-}}}{y_n}\right| < A, \quad \frac{y_{\underset{N}{-}}}{y_n} < \frac{1}{2}.$$

Азбаски пайдарпаиҳои $\{A_n\}$ ва $\{y_n\}$ пайдарпаиҳои беохир калон мебошанд, ва аъзоҳои онҳо, аз ягон номер сар карда, мусбатанд, пас имконияти интихоби чунин N таъмин мешавад. Ҳангоми $n \geqslant N$ будан аз нобаробарии (3.9) чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\,\frac{(y_{\underset{N+1}{-}} - y_{\underset{N}{-}}) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}{y_n} - \left|\frac{x_{\underset{N}{-}}}{y_n}\right|,$$

ё

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\left(1 - \frac{y_{\underset{N}{-}}}{y_n}\right) - A > A.$$

Ҳамин тариқ, пайдарпаии $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ пайдарпаии беохир калон мебошад.

Чанд мисол меорем.

1°. Исбот мекунем, ки агар пайдарпаии $\{a_n\}$ наздик шавад ва лимити a дошта бошад, онгоҳ пайдарпаии $\left\{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right\}$-и қиматҳои арифме-

тикии миёнаи элементхои пайдарпаии $\{a_n\}$ ба хамон лимити a наздик мешавад*. Воқеан, агар фарз кунем, ки $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = x_n$ ва $y_n = n$ мебошад, онгох $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ мешавад. Азбаски $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ вучуд дорад, пас мувофики теоремаи Штольц

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

2°. Акнун пайдарпаии $\{a_n\}$-ро муоина мекунем, ки дар ин чо

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$$

ва k адади мусбати бутун мебошад.

$1^k + 2^k + \ldots + n^k$-ро бо x_n ва n^{k+1}-ро бо y_n ишорат мекунем. Онгох пайдарпаии $\{a_n\}$ ба намуди $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ соҳиб мешавад. Наздикшавии пайдарпаии $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$-ро тадқиқ мекунем.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{n^k}{(k+1)n^k - \dfrac{(k+1)\,k}{2} n^{k-1} + \ldots + (-1)^{k+1}}.$$

Сурат ва махраҷи ифодаи охиринро ба n^k тақсим карда, чунин ифодаро хосил мекунем:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{k + 1 + \dfrac{1}{n}[\ldots]};$$

дар кавсхои квадратии махраҷ ифодае партофта шудааст, ки лимити он ҳангоми $n \to \infty$ ба $\left[-\dfrac{(k+1)\,k}{2}\right]$ баробар аст. Аз формулаи охирин меёбем, ки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{k+1}.$$

---

* Ин чумларо Коши исбот карда буд.

Пас, мувофиқи теоремаи Штольц

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

3°. Нихоят, пайдарпаии $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$ $(a>1)$-ро муоина мекунем. $a^n=x_n$ ва $n=y_n$ фарз карда ва пайдарпаии $\left\{\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right\}$-ро тадқиқ намуда, мебёбем, ки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(a^n-a^{n-1})=\lim_{n\to\infty}a^n\left(1-\frac{1}{a}\right)=+\infty.$$

Бинобар ин, дар асоси қайди теоремаи Штольц:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty.$$

ИЛОВАИ 2.

ДОИР БА СУРЪАТИ НАЗДИҚШАВИИ ПАЙДАРПАИЕ, КИ БА $\sqrt{a}$ НАЗДИҚ МЕШАВАД

Мо дар п. 3-юми § 3 исбот кардем, ки лимити пайдарпаии $\{x_n\}$, ки бо формулаи рекуррентии

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\ n=1,2,\ldots, \tag{3.10}$$

муайян карда мешавад, дар ин ҷо $a>0$ ва x_n — адади мусбати дилхоҳ, ба $\sqrt{a}$ баробар аст. Мо ба сифати қимати тақрибии $\sqrt{a}$ элементи дилхоҳи x_{n+1}-и пайдарпаии (3.10)-ро гирифта метавонем. Дар айни ҳол, масъалаи интихоби адади n итерацияро*, ки бо саҳеҳии додашуда наздик шудани $\sqrt{a}$-ро таъмин менамояд, аниқ кардан лозим аст.

Пайдарпаии $\{x_n\}$-ро, ки бо формулаи рекуррентии (3.10) муайян карда мешавад, муоина мекунем. Элементи x_n-и ин пайдарпаиро *наздикшавии n-уми адади* $\mathbf{y}=\sqrt{a}$ меномем. Бузургии

---

* Итерация (аз калимаи лотинии iteratio — такрор) — натиҷаи татбиқи такрории ягон амали математикӣ. Дар мавриди муоинашаванда бо ёрии формулаи рекуррентии (3.10) аз рӯи x_n ҳисоб кардани x_{n+1} як итерация мебошад.

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - \gamma}{\gamma} \tag{3.11}$$

-ро *саҳви нисбии наздикшавии* n-ум меномем.

Тасдиқоти зерин (ба воситаи саҳви нисбии ε_1-и наздикшавии якум баҳо додани саҳви нисбии ε_{n+1}) дуруст аст.

Бигзор x_1 *чунон интихоб шуда бошад, ки* $|\varepsilon_1| < 1/2$ *аст. Онгоҳ ҳангоми* $n \geqslant 1$ *будан нобаробарии*

$$0 \leqslant \varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon_1{}^{2n} \tag{3.12}$$

мавқеъ дорад.

Исбот. Аз формулаи (3.11) меёбем:

$$x_n = \gamma\,(1 + \varepsilon_n). \tag{3.13}$$

Ба формулаҳои (3.10), (3.13) ва ба баробарии $(a/\gamma) = \gamma$ мурочиат карда, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left[\gamma\,(1 + \varepsilon_n) + \frac{a}{\gamma\,(1 + \varepsilon_n)}\right] = \gamma\left[1 + \frac{\varepsilon_n{}^2}{2\,(1 + \varepsilon_n)}\right].$$

Азбаски $x_{n+1} = \gamma\,(1 + \varepsilon_{n+1})$ аст, пас

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2\,(1 + \varepsilon_n)}\,\varepsilon_n{}^2. \tag{3.14}$$

Мувофиқи шарт $|\varepsilon_1| < 1/2$. Аз ин ҷо нобаробарии $0 < \dfrac{1}{2\,(1 + \varepsilon_1)} < 1$ ҳосил мешавад. Лекин аз (3.14) ҳангоми $n = 1$ будан нобаробарии $\varepsilon_2 \geqslant 0$ ҳосил мешавад. Баъд муносибати (3.14)-ро ҳангоми $n = 2, 3, \ldots$ будан истифода карда, ба ғайриманфӣ будани ε_{n+1} (барои $n \geqslant 1$-и дилхоҳ) боварӣ ҳосил мекунем.

Аз баробарии (3.14), аз муносибати $0 < \dfrac{1}{2\,(1 + \varepsilon_1)} < 1$ ва аз ғайриманфӣ будани ε_n (барои $n > 1$-и дилхоҳ) нобаробарии $\varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon_n{}^2$ (барои $n \geqslant 1$-и дилхоҳ) ҳосил мешавад. Аз ин ҷо қисми рости нобаробарии (3.12)-ро якбора ҳосил мекунем. Тасдиқот исбот шуд.

Ба нобаробарии (3.12) мурочиат карда, мо мебинем, ки саҳви нисбии ε_{n+1}-и ҳисоби $\sqrt{a}$ баъди n итерация ба воситаи саҳви нисбии ε_1-и наздикшавии якуми x_1 ва адади n итерация баҳо дода мешавад. Мо дар поёнтар боварӣ ҳосил мекунем, ки ҳангоми $a > 1$* будан наздикшавии якуми x_1-ро чунон интихоб кардан мумкин аст, ки ε_1 аз рӯи бузургии мутлақаш аз 0,05 калон намешавад. Ҳангоми ин тавр интихоб кардани x_1 саҳви нисбии ε_1 шарти тас-

---

* Агар $a < 1$ бошад, онгоҳ $a = 1/b$ аст, дар ин ҷо $b > 1$ ва $\sqrt{a}$ ба $1/\sqrt{b}$ баробар аст.

дикоти исбот кардаамонро қаноат менамояд. Инчунин фаҳмост, ки бо ҳамин масъалаи интихоби адади n итерация, ки бо саҳви нисбии додашудаи ε ба $\sqrt{a}$ наздик шуданро таъмин мекунад, ҳал мешавад: *ин адади n-ро аз формулаи** -

$$(0{,}05)^{2^n} < \varepsilon \tag{3.15}$$

ёфтан мумкин аст. Инак, бигзор $a > 1$ бошад. Адади a-ро ба намуди зерин менависем:

$$a = 2^{2k+i} M \tag{3.16}$$

дар ин ҷо k — адади ғайриманфии бутун, адади i ё ба нуль, ё ба 1 баробар аст ва адади M шарти

$$1 \leqslant M < 2 \tag{3.17}$$

-ро қаноат менамояд.

Бояд қайд кард, ки ба намуди (3.16) навиштани адади a ягона мебошад.

x_1-ро ин тавр интихоб мекунем:

$$x_1 = 2^k \left(\frac{1}{3} 2^i M + \frac{17}{24}\right). \tag{3.18}$$

Барои M-и дилхоҳ, ки шарти (3.17)-ро қаноат менамояд, наздикшавии якумин x_1, ки аз рӯи формулаи (3.18) ҳисоб карда мешавад, саҳви нисбии ε_1-ро (кангоми ҳисоб кардани $\gamma = \sqrt{a}$, ки аз рӯи бузургии мутлақаш аз адади 0,05 калон нест) ҳосил мекунад.

Барои исбот ба ифодаи аниқи саҳви нисбии $\varepsilon_1 = \dfrac{x_1 - \gamma}{\gamma}$ мурочиат мекунем. Азбаски, мувофиқи (3.16), $\gamma = 2^k \sqrt{2^i M}$ аст, пас аз ифодаи ε_1 ва формулаи (3.18) ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{3} 2^i M + \frac{17}{24} - \sqrt{2^i M}}{\sqrt{2^i M}}. \tag{3.19}$$

Азбаски адади i ё ба нуль, ё ба 1 баробар аст ва $M \geqslant 1$ мебошад, пас $\sqrt{2^i M} \geqslant 1$ аст. Аз ин ҷо ва аз (3.19) нобаробарии зерин ҳосил мешавад:

$$|\varepsilon_1| < \left|\frac{1}{3} 2^i M + \frac{17}{24} - \sqrt{2^i M}\right|. \tag{3.20}$$

$\sqrt{2^i M}$-ро бо X ишорат мекунем. Азбаски $1 \leqslant M < 2$ ва i ё ба нуль, ё ба 1 баробар аст, пас ҳама қиматҳои равои X дар сегменти $[1, 2]$ воқеъ шуданаш аз эҳтимол дур нест:

$$1 \leqslant X < 2. \tag{3.21}$$

---

* Муносибати (3.12) дурустии ин формуларо тасдиқ мекунад.

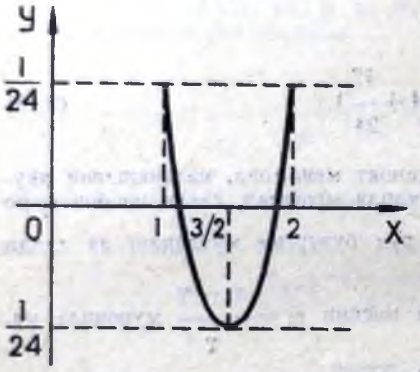
Ишорати барои $\sqrt{2iM}$ қабул кардаамон X-ро истифода карда, нобаробарии (3.20)-ро ин тавр менависем:

$$|\varepsilon_1| \leqslant \left|\frac{1}{3}X^2 - X + \frac{17}{24}\right|. \qquad (3.22)$$

Дар асоси (3.22) қимати максималии $|\varepsilon_1|$ аз қимати максималии $\left|\frac{1}{3}X^2 - X + \frac{17}{24}\right|$-и қимати X, ки шарти (3.21)-ро қаноат мекунонад, калон нест.

Барои аниқ кардани масъалаи ин қимати максималӣ графики функцияи $f(X) = \frac{1}{3}X^2 - X + \frac{17}{24}$-ро истифода мекунем. Аз курси математикаи элементарӣ маълум аст, ки графики ин функция параболаест, ки қуллааш дар нуқтаи $X = 3/2$ мебошад (расми 3.4)*. Азбаски $f(1) = f(2) = 1/24$ *ва* $f(3/2) = -1/24$ мебошад, пас барои қиматҳои x, ки шарти (3.21)-ро қаноат менамоянд, қиматҳои $f(x)$ дар байни $-1/24$ ва $1/24$ воқеанд. Ба ибораи дигар,

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{3}X^2 - X + \frac{17}{24}\right| \leqslant \frac{1}{24}.$$



Расми 3.4

Аз нобаробарии охирин ва нобаробарии (3.22) нобаробарии ба мо даркорӣ

$$|\varepsilon_1| \leqslant \frac{1}{24} < 0{,}05$$

ҳосил мешавад.

Қайд. Агар саҳви нисбии додашудаи ε ба 10^{-10} баробар бошад, онгоҳ барои бо ҳамин саҳеҳӣ аз рӯи формулаи (3.18) баъди интихоби x_1 ҳисоб кардани решаи квадратӣ аз *адади дилхоҳи* $a > 1$ ҳамагӣ фақат *се итерация* ($n = 3$) лозим мешавад, чунки $(0{,}05)^{2^3} < 10^{-10}$ аст.

---

* Дар расми 3.4 масштаби тири Oy аз масштаби тири Ox 20 маротиба калон аст.

БОБИ 4

МАФҲУМИ ФУНКЦИЯ. ҚИМАТИ ЛИМИТИИ ФУНКЦИЯ. БЕФОСИЛАГӢ

Мо омӯзиши ин бобро аз аниқ кардани мафҳуми муҳимтарини анализи математикӣ — мафҳуми функция сар мекунем. Мо ба мафҳуми лимити пайдарпаии ададӣ такья карда, шакли нави амали гузариши лимитиро, ки ба мафҳуми қимати лимитии (ё лимити) функция асос меёбад, чорӣ мекунем. Дар ин боб инчунин мафҳуми математикии муҳимтарин — бефосилагии функция омӯхта мешавад.

Дар ин боб аниқ кардани хосиятҳои бефосилагӣ ва хосиятҳои дигари функцияҳои элементарии соддатарин мавқеи калон дорад.

Масъалаи ҳисоби тақрибии қиматҳои функцияҳои элементарӣ дар Иловаи боби 8 омӯхта мешавад.

§ 1. Мафҳуми функция

1. Бузургии тағьирьёбанда ва функция. Мо дар боби 1 қайд кардем, ки бо ҳаргуна процессҳои физикавии реалӣ ақаллан ду бузургии тағьирьёбанда, ки боиси тағьирьёбии якдигар мешаванд, алоқаманд мебошанд.

Бузургиҳои тағьирьёбандаи физикавии реалиро муоина карда, мо ба хулосае меоем, ки ин бузургиҳо на ҳама вақт қиматҳои дилхоҳро қабул карда метавонанд. Чунончи, ҳарорати ҷисм аз -273° С паст шуда наметавонад, суръати нуқтаи материалӣ аз $3 \cdot 10$ см/сония (яъне суръати рӯшноӣ дар холигӣ) зиёд шуда наметавонад, кӯчиши нуқтаи материалӣ, ки мувофиқи қонуни $y = A \sin(\omega t + \delta)$ лаппиши гармоникӣ мекунад, фақат дар ҳудудҳои сегменти $[-A, +A]$ тағьир ёфта метавонад.

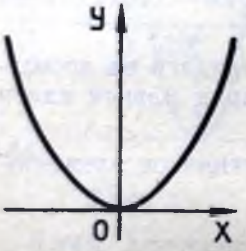
Дар математика аз хосиятҳои физикавии конкретии бузургиҳои тағьирьёбандае, ки дар табиат мушоҳида мешаванд, сарфи

назар карда, бузургиҳои* тағьирьёбандаи абстрактӣ, ки фақат бо қиматҳои адади (ки онҳоро қабул карда метавонад) тавсиф мешаванд, омӯхта хоҳанд шуд.

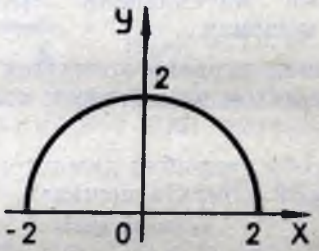
Маҷмӯи $\{x\}$-и ҳамаи қиматҳо, ки онҳоро бузургии тағьирьёбандаи додашуда қабул карда метавонад, *соҳаи тағьирьёбии* ин бузургии тағьирьёбанда номида мешавад. Бузургии тағьирьёбанда додашуда ҳисобида мешавад, агар соҳаи тағьирьёбии он дода шуда бошад. Минбаъд мо, чун қоида, бузургиҳои тағьирьёбандаро бо ҳарфҳои лотинии хурд x, y, u, ... ва соҳаи тағьирьёбии ин тағьирьёбандаҳоро бо символҳои $\{x\}$, $\{y\}$, $\{u\}$, ... ишорат мекунем.

Бигзор бузургии тағьирьёбандаи x, ки ягон маҷмӯи $\{x\}$ соҳаи тағьирьёбиаш мебошад, дода шуда бошад.

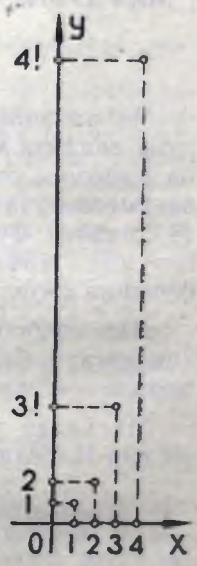
Агар ба ҳар як қимати тағьирьёбандаи x (аз маҷмӯи $\{x\}$) аз рӯи қонуни муайян ягон адади y дар мувофиқатӣ гузошта шавад, онгоҳ мегӯянд, ки дар маҷмӯи $\{x\}$ функцияи $y = y(x)$ ё $y = f(x)$ дода шудааст.



Расми 4.1.



Расми 4.2.



Расми 4.3.

Дар айни ҳол тағьирьёбандаи x *аргумент* ва маҷмӯи $\{x\}$ соҳаи дода шудани функцияи $y=f(x)$ номида мешавад.

Адади y, ки ба қимати додашудаи аргументи x мувофиқ меояд, қимати хусусии функция дар нуқтаи x номида мешавад. Маҷмӯи ҳама қиматҳои хусусии функция маҷмӯи пурра муайяни $\{y\}$-ро ташкил медиҳад, ки онро маҷмӯи ҳама қиматҳои функция меноманд.

Дар ишорати $y = f(x)$ ҳарфи f *характеристикаи* функция номида мешавад. Барои ишорати аргумент, функция ва характеристикаи он ҳарфҳои гуногунро истифода кардан мумкин аст.

* Қайд кардан чоиз аст, ки мафҳуми бузургӣ ба қатори мафҳумҳои математикии ибтидоӣ тааллуқ дорад (ба пояраки сах. 7 нигг.).

Мисолҳои функцияро меорем:

1°. $y = x^2$. Ин функция дар хати рости беохири $-\infty < x < +\infty$ дода шудааст. Нимхати рости $0 \leqslant y < +\infty$ маҷмӯи ҳама қиматҳои ин функция мебошад (расми 4.1).

2°. $y = \sqrt{1 - x^2}$. Функция дар сегменти $-1 \leqslant x \leqslant +1$ дода шудааст. Сегменти $0 \leqslant y \leqslant 1$ маҷмӯи ҳама қиматҳои функция мебошад (расми 4.2).

3°. $y = n!$ Ин функция дар маҷмӯи ададҳои натуралии $n = 1, 2, \ldots$ дода шудааст. Маҷмӯи ададҳои натуралии намуди $n!$ маҷмӯи ҳама қиматҳои ин функция мебошад (расми 4.3).

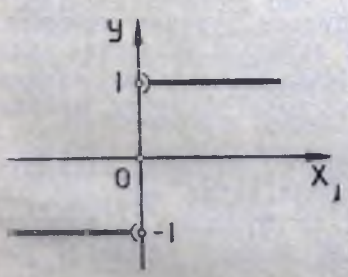
4°. Функцияи Дирихле*

$$y = \begin{cases} 0, \text{ агар } x \text{ ададӣ иррационалӣ бошад,} \\ 1, \text{ агар } x \text{ ададӣ рационалӣ бошад.} \end{cases}$$

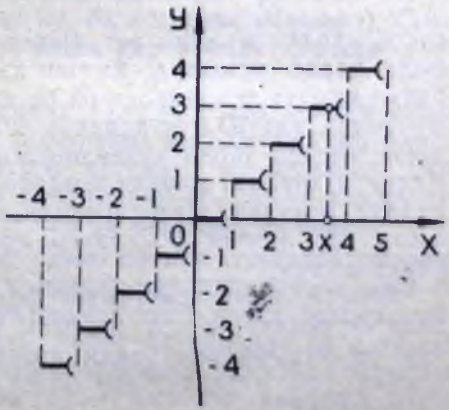
Ин функция дар хати рости беохири $-\infty < x < +\infty$ дода шудааст ва маҷмӯи ҳама қиматҳои он аз ду нуқтаи 0 ва 1 иборат аст.

5°.
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, \text{ агар } x > 0 \text{ бошад,} \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бошад,} \\ -1, \text{ агар } x < 0 \text{ бошад.} \end{cases}$$

(Термини sgn аз калимаи лотинии signum — аломат гирифта шудааст). Ин функция дар ҳамаи хати рости беохири $-\infty < x < +\infty$ дода шудааст ва маҷмӯи ҳама қиматҳои он аз се нуқтаи -1, 0 ва $+1$ иборат аст (расми 4.4).



Расми 4.4



Расми 4.5.

6°. $y = [x]$, дар ин ҷо $[x]$ қисми бутуни ададӣ ҳақиқии x-ро ифода мекунад. Чунин хонда мешавад: «y баробари антье x» (аз калимаи франсавии entier — бутун). Ин функция барои ҳа-

* Петер Густав Лежен-Дирихле — математики немис (1805—1859).

ма қиматҳои ҳақиқии x дода шудааст ва мачмӯи ҳама қиматҳои он аз ададҳои бутун иборат аст (расми 4.5).

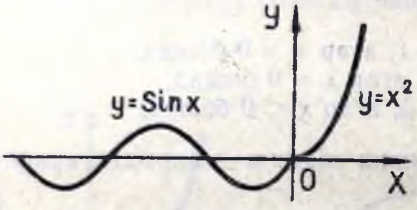
2. **Дар бораи тарзҳои дода шудани функция.** Дар ин пункт мо баъзе тарзҳои дода шудани функцияро меомӯзем.

Аксаран қонуне, ки алоқамандии байни аргумент ва функцияро муқаррар мекунад, ба воситаи функция дода мешавад. Ингуна тарзи дода шудани функцияро *тарзи аналитикӣ* меноманд. Бояд қайд кард, ки функцияро дар китъаҳои гуногуни соҳаи дода шуданаш бо формулаҳои гуногун муайян кардан мумкин аст.

Масалан, функцияи

$$y = \begin{cases} \sin x \text{ ҳангоми } x \leqslant 0 \text{ будан,} \\ x^2 \text{ ҳангоми } x > 0 \text{ будан} \end{cases}$$

дар ҳамаи хати рости беохир бо тарзи аналитикӣ дода шудааст (расми 4.6).



Расми 4.6.

Тарзи ҷадвалӣ, ки қиматҳои алоҳидаи аргумент ва қиматҳои ба онҳо мувофиқи функция ба намуди ҷадвал (дар ҷадвал) дода шудаанд, тарзи маъмули дода шудани функция мебошад. Дар айни ҳол қиматҳои функцияеро, ки ба қиматҳои фосилавии аргумент мувофиқанд, тақрибан ҳисоб кардан мумкин аст. Барои ин *тарзи интерполяция* истифода карда мешавад, ки он аз иваз кардани функция дар байни қиматҳои ҷадвалии он бо ягон функцияи содда (масалан, функцияи хаттӣ ё квадратӣ) иборат аст. Ҷадвали ҳаракати поезд мисоли тарзи ҷадвалии дода шудани функция мебошад. Ҷадвали ҳаракат мавқеи поездро дар лаҳзаҳои чудогонаи вақт муайян мекунад. Интерполяция имконият медиҳад, ки мавқеи поезд дар лаҳзаи фосилавии дилхоҳи вақт тақрибан муайян карда шавад.

Дар амалиёти ченкуниҳои физикавӣ боз як тарзи дода шудани функция — *тарзи графикӣ* истифода карда мешавад, ки дар он мувофиқати байни аргумент ва функция ба воситаи график (ки, масалан, дар осциллограф кашида мешавад) дода мешавад.

§ 2. Мафҳуми қимати лимитии функция

1. Таърифи қимати лимитии функция. Функцияи $y = f(x)$, ки дар ягон мачмӯи $\{x\}$ муайян аст, ва нуқтаи a-ро, ки ба мач-

мӯи $\{x\}$ мутааллиқ несту лекин ба чунин хосият, ки дар ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи a нуқтаҳои аз a тафовутдори маҷмӯи $\{x\}$ вуҷуд доранд, соҳиб мебошад, муоина мекунем. Масалан, нуқтаи a нуқтаи ҳудудии интервале, ки дар он функция муайян аст, шуда метавонад.

Таърифи 1. *Адади b қимати лимитии функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ (ё лимити функция ҳангоми $x \to a$) номида мешавад, агар барои пайдарпаии $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$-и ба a наздикшавандаи дилхоҳ қиматҳои аргументи x, ки элементи x_n-умаш аз a тафовут дорад* ($x_n \neq a$), пайдарпаии мувофиқи $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$-и қиматҳои функция ба b наздик шавад.*

Барои ишорати қимати лимитии функция символикаи зерин истифода карда мешавад:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи a фақат ба як қимати лимитӣ соҳиб шуда метавонад. Ин натиҷаи он аст, ки пайдарпаии $\{f(x_n)\}$ фақат соҳиби як лимит шуда метавонад.

Чанд мисол меорем.

1°. Функцияи $f(x) = c$ дар ҳар як нуқтаи a-и хати рости беохир қимати лимитӣ дорад. Воқеан, агар $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ пайдарпаии ба a наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргумент бошад, онгоҳ пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функция намуди $c, c, \ldots, c, \ldots$ дорад ва, бинобар ин, ба c наздик мешавад. Ҳамин тариқ, қимати лимитии ин функция дар нуқтаи дилхоҳи $x = a$ ба c баробар аст.

2°. Қимати лимитии функцияи $f(x) = x$ дар нуқтаи дилхоҳи a-и хати рости беохир ба a баробар аст. Ҳақиқатан, дар ин мавриди пайдарпаиҳои қиматҳои аргумент ва функция айниятианд ва, бинобар ин, агар пайдарпаии $\{x_n\}$ ба a наздик шавад, онгоҳ пайдарпаии $\{f(x_n)\}$ ҳам ба a наздик мешавад.

3°. Функцияи Дирихле, ки қиматаш дар нуқтаҳои рационалӣ ба 1 баробар аст ва дар нуқтаҳои иррационалӣ ба нуль баробар мебошад, дар ягон нуқтаи a-и хати рости беохир қимати лимитӣ надорад. Ҳақиқатан, барои пайдарпаии ба a наздикшавандаи қиматҳои рационалии аргумент лимити пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функция ба 1 баробар мебошад; барои пайдарпаии ба a наздикшавандаи қиматҳои иррационалии аргумент лимити пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функция ба нуль баробар аст.

Минбаъд мо мафҳуми қиматҳои лимитии яктарафаи функцияро истифода мекунем.

---

* Ин талабот, аз ҷумла, бо он шарҳ дода мешавад, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи a номуайян буданаш мумкин аст.

Чунин мепиндорем, ки маҷмӯи $\{x\}$, ки дар он функцияи $f(x)$ дода шудааст, барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ ақаллан якто элементе дорад, ки он дар интервали $(a, a+\varepsilon)$ (мувофиқан дар интервали $(a-\varepsilon, a)$) воқеъ мебошад.

Таърифи 2. Адади b қимати лимитии рости (чапи) функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x=a$ номида мешавад, агар барои пайдарпаии $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$-и ба a наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргументи x, ки элементи x_n-умаш аз a калон (хурд) мебошад, пайдарпаии мувофиқи $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$-и қиматҳои функция ба b наздик шавад.

Барои қимати лимитии рости функция ишорати зерин истифода мешавад:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \text{ ё } f(a+0) = b.$$

Барои қимати лимитии чапи функция ишорати зерин истифода мешавад:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \text{ ё } f(a-0) = b.$$

Ба сифати мисол функцияи $f(x) = \operatorname{sgn} x$-ро* муоина мекунем. Ин функция дар нуль ба қиматҳои лимитии рост ва чап соҳиб аст, дар айни ҳол $\operatorname{sgn}(0+0) = 1$ ва $\operatorname{sgn}(0-0) = -1$. Воқеан, агар $\{x_n\}$ пайдарпаии ба нуль наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргументи ин функция бошад, ки элементи x_n-умаш аз нуль калон аст $(x_n > 0)$, онгоҳ $\operatorname{sgn} = 1$ ва, бинобар ин, $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sgn} x_n = 1$. Ҳамин тариқ, дурустии баробарии $\operatorname{sgn}(0+0) = 1$ муқаррар карда шуд. Ҳамин тавр исбот карда мешавад, ки $\operatorname{sgn}(0-0) = -1$.

Қайд. *Агар дар нуқтаи a қиматҳои лимитии рост ва чапи функцияи $f(x)$ баробар бошанд, онгоҳ дар нуқтаи a қимати лимитии ин функция вуҷуд дорад, ки он ба қиматҳои лимитии яктарафаи номбаршуда баробар аст.* Инро исбот мекунем.

Фарз мекунем, ки $\{x_n\}$ пайдарпаии ба a наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргументи функцияи $f(x)$ мебошад, ки элементҳояш ба a баробар нестанд. Боз фарз мекунем, ки $\{x_k\}_m$ таҳтпайдарпаии ин пайдарпаие мебошад, ки аз ҳама элементҳои аз a калони пайдарпаии $\{x_n\}$ иборат аст; $\{x_l\}_m$ таҳтпайдарпаии ин пайдарпаие мебошад, ки аз ҳама элементҳои аз a хурди пайдарпаии $\{x_m\}$ иборат аст**. Азбаски дар асоси п. 1-уми

---

* Таърифи функцияи $y = \operatorname{sgn} x$ дар п. 1-уми § 1 дода шудааст.

** Мо мавридеро, ки фақат элементҳои шумораашон охирноки пайдарпаии $\{x_n\}$ дар рости (чапи) нуқтаи a воқеъ мебошанд, муоина намекунем. Дар ин мавриди наздикшавандагии $\{f(x_n)\}$ возеҳ аст.

§ 4-уми боби 3 таҳтпайдарпаиҳои $\{x_k\}$ ва $\{x_l\}$ ба a наздик мешаванд, пас аз (дар нуқтаи a) мавҷуд будани қиматҳои лимитии рост ва чапи функцияи $f(x)$ натича мебарояд, ки пайдарпаиҳои $\{f(x_k)\}$ ва $\{f(x_l)\}$ соҳиби лимит мебошанд, ки онҳо мувофиқи шарт баробаранд. Фарз мекунем, ки b лимити ин пайдарпаиҳо мебошад. Барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери N-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳама элементҳои пайдарпаиҳои $\{f(x_k)\}$ ва $\{f(x_l)\}$, ки барояшон $k_m \geqslant N$ ва $l_m \geqslant N$ аст, нобаробариҳои $|f(x_k) - b| < \varepsilon$ ва $|f(x_l) - b| < \varepsilon$-ро қаноат менамоянд. Пас, ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ иҷро мешавад, яъне пайдарпаии $\{f(x_n)\}$ ба b наздик ҳоҳад шуд. Бо ҳамин исбот карда шуд, ки қимати лимитии функцияи $f(x)$ дар нуқтаи a вуҷуд дорад ва он ба b баробар мебошад.

Таърифи қимати лимитии функцияро ҳангоми ба беохирӣ ва ба беохирии аломаташ муайян майл кардани аргументи x баён мекунем.

Чунин меҳисобем, ки маҷмӯи $\{x\}$, ки дар он функцияи $f(x)$ дода шудааст, барои $A > 0$-и дилхоҳ ақаллан якто элемент дорад ва ин элемент дар беруни сегменти $[-A, +A]$ воқеъ мебошад.

Таърифи 3. Адади b қимати лимитии функцияи $f(x)$ ҳангоми $x \to \infty$ (ё лимити функция ҳангоми $x \to \infty$) номида мешавад, агар барои пайдарпаии беохир калони қиматҳои аргумент пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функция ба b наздик шавад.

Барои ишорати қимати лимитии функция ҳангоми $x \to \infty$ символикаи зерин истифода карда мешавад:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Ниҳоят, чунин меҳисобем, ки маҷмӯи $\{x\}$, ки дар он функцияи $f(x)$ дода шудааст, барои $A > 0$-и дилхоҳ ақаллан якто элементи x дорад ва ин элемент шарти $x > A$ $(x < -A)$-ро қаноат менамояд.

Таърифи 4. Адади b қимати лимитии функцияи $f(x)$ ҳангоми ба беохирии мусбат майл кардани аргументи x номида мешавад, агар барои пайдарпаии беохир калони дилхоҳи қиматҳои аргумент, ки элементҳояш, аз ягон номер сар карда, мусбат (манфӣ) мебошанд, пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функция ба b наздик шавад.

Ишоратҳои символикӣ:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Ба сифати мисол функцияи $f(x) = 1/x$-ро муоина мекунем. Ин функция ҳангоми $x \to \infty$ қимати лимитии ба нуль баробар дорад. Ҳақиқатан, агар $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ пайдарпаии беохир калони қиматҳои аргумент бошад, онгоҳ пайдарпаии $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n, \ldots$ пайдарпаии беохир хурд мебошад ва, бинобар ин, лимите дорад, ки он баробари нуль аст.

2. **Амалҳои арифметикӣ бо функцияҳое, ки қиматҳои лимитӣ доранд.** Амалҳои арифметикӣ бо функцияҳое, ки дар нуқтаи a қимати лимитӣ доранд, ба функцияҳое меоранд, ки онҳо низ дар ин нуқта қимати лимитӣ доранд. Теоремаи асосии зерин дуруст аст.

Теоремаи 4.1. *Бигзор функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$-и дар як маҷмӯъ додашуда дар нуқтаи a қиматҳои лимитии b ва c дошта бошанд. Онгоҳ функцияҳои $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ва $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ дар нуқтаи a қиматҳои лимитии (қиматҳои хусусӣ ҳангоми $c \neq 0$ будан) мувофиқан баробари $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$, $\dfrac{b}{c}$ доранд.*

Исбот. Фарз мекунем, ки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_n \neq a)$ пайдарпаии ба a наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргументи функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ мебошанд. Пайдарпаиҳои мувофиқи $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ ва $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n), \ldots$-и қиматҳои ин функцияҳо соҳиби лимитҳои b ва c мебошанд. Лекин, онгоҳ, дар асоси теоремаҳои 3.9—3.12, пайдарпаиҳои $\{f(x_n) + g(x_n)\}$, $\{f(x_n) - g(x_n)\}$, $\{f(x_n) \cdot g(x_n)\}$ ва $\left\{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ лимитҳое доранд, ки мувофиқан ба $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$, $\dfrac{b}{c}$ баробаранд. Дар асоси дилхоҳ будани пайдарпаии $\{x_n\}$ ин чунин маъно дорад, ки $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + g(x)] = b + c$, $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - g(x)] = b - c$, $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$, $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$. Теорема исбот шуд.

Теоремаи исботшударо барои ҷустуҷӯи қиматҳои лимитии бисёраъзогиҳо ва касрҳои алгебравии ихтисорнашаванда татбиқ мекунем*. Тасдиқоти зерин мавқеъ дорад:

Дар ҳар як нуқтаи a-и хати рости беохир қиматҳои лимитии бисёраъзогиҳо ва касрҳои алгебравии ихтисорнашаванда ву-

---

* Касри алгебравии ихтисорнашаванда ҳосили тақсими ду бисёраъзогиест, ки зарбкунандаи умумии доимӣ надоранд.

чуд доранд ва ба қиматҳои хусусии ин функцияҳо дар нуқтаи номбаршуда баробар мебошанд (дар мавриди касри алгебравӣ а на бояд решаи махраҷ бошад).

Ҳақиқатан, дар асоси теоремаи 4.1.

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \cdot x = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a^2.$$

Ҳамин тавр бовар кардан мумкин аст, ки

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n.$$

Пас, барои бисёраъзогии $b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ (теоремаи 4.1-и ҳосили зарб ва суммаро истифода карда) чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\lim_{x\to a} (b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n) = b_0a^n + b_1a^{n-1} + \\ + \ldots + b_{n-1}a + b_n.$$

Дар мавриди касри алгебравии ихтисорнашаванда, ҳангоме ки a решаи махраҷ намебошад, (теоремаи 4.1-и ҳосили тақсимро татбиқ намуда), ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\lim_{x\to a} \frac{b_0x^n+b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x+b_n}{c_0x^m+c_1x^{m-1}+ \ldots +c_{m-1}x+c_m} = \frac{b_0a^n+b_1a^{n-1} + \ldots + b_{n-1}a+b_n}{c_0a^m+c_1a^{m-1}+ \ldots +c_{m-1}a+c_m}.$$

3. Муқоисаи функцияҳои беохир хурд ва беохир калон. *Функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ (ҳангоми $x \to a$) функцияи беохир хурд номида мешавад, агар $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ бошад.* Масалан, бовар кардан осон аст, ки функцияи $f(x) = (x - a)^m$, дар ин ҷо m — адади мусбати бутун, дар нуқтаи $x = a$ функцияи беохир хурд мебошад. Воқеан, мо дар пункти гузашта муқаррар кардем, ки дар нуқтаи дилхоҳи ҳати рости беохир қимати лимитии бисьёраъзогии $f(x) = (x - a)^m$ вуҷуд дорад ва ба қимати хусусии бисьёраъзогӣ дар ин нуқта баробар аст. Бинобар ин $\lim\limits_{x\to a}(x - a)^m = 0$.

Қайд мекунем, ки *агар функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи a қимати лимитии баробари b дошта бошад, онгоҳ функцияи $\alpha(x) = f(x) - b$ дар нуқтаи a функцияи беохир хурд мебошад.* Ҳақиқатан, қиматҳои лимитии ҳар яки функцияҳои $f(x)$ ва b дар нуқтаи a ба b баробар мебошанд ва, бинобар ин, дар асоси теоремаи 4.1

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a} (f(x) - b) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} b = 0.$$

Натичаи ҳосилшударо истифода карда, мо барои функцияе, ки дар нуқтаи $x = a$ қимати лимитии баробари b-ро соҳиб аст, ифодаи махсусро ҳосил мекунем:

$$f(x) = b + \alpha(x) \quad [\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0]. \tag{4.1}$$

Ифодаи (4.1) ҳангоми исботи чумлаҳои гуногун хеле муносиб мебошад ва мо онро сонитарҳо чандин маротиба истифода мекунем.

Дар қатори мафҳуми функцияи беохир хурд аксаран мафҳуми функцияи дар нуқтаи a аз рост беохир калон ё функцияи дар нуқтаи a аз чап беохир калон истифода карда мешавад. Яъне, *функцияи $f(x)$ функцияи дар нуқтаи a аз рост (аз чап) беохир калон номида мешавад, агар барои пайдарпаии $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$-и ба a наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргументи x, ки элементи x_n-умаш аз a калон (аз a хурд) аст, пайдарпаии мувофиқи $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$-и қиматҳои функция пайдарпаии беохир калони аломаташ муайян бошад.*

Барои функцияҳои беохир калон ишоратҳои зерин истифода карда мешаванд:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty \text{ ё } f(a+0) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty \text{ ё } f(a-0) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty \text{ ё } f(a+0) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty \text{ ё } f(a-0) = -\infty,$$

Бо методикаи муқоисаи функцияҳои беохир хурд ва терминологияи истифодашаванда шинос мешавем.

Бигзор $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ ду функцияи дар як маҷмӯъ додашудае бошанд, ки дар нуқтаи $x = a$ беохир хурд мебошанд.

1) Функцияи $\alpha(x)$ назар ба функцияи $\beta(x)$ *функцияи беохир хурди тартиби баландтар* номида мешавад (тартиби баландтари хурдӣ дорад), агар қимати лимитии функцияи $\alpha(x)/\beta(x)$ дар нуқтаи a ба нуль баробар бошад.

2) Функцияҳои $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ *функцияҳои беохир хурди яктартиба* номида мешаванд (тартиби якхелаи хурдӣ доранд), агар қимати лимитии функцияи $\alpha(x)/\beta(x)$ дар нуқтаи a мавҷуд бошад ва аз нуль фарқ кунад.

3) Функцияҳои $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ *функцияҳои беохир хурди баробарқувва* номида мешаванд, агар қимати лимитии функцияи $\alpha(x)/\beta(x)$ дар нуқтаи a ба 1 баробар бошад.

Аксаран функцияҳои беохир хурдро бо ягон функцияҳои беохир хурди стандартӣ муқоиса менамоянд. Одатан ба сифати функцияи муқоиса функцияи $(x-a)^m$-ро мегиранд, ки дар ин-

чо m адади мусбати бутун мебошад. Дар ин маврид терминологияи зерин истифода карда мешавад: функцияи дар нуқтаи a беохир хурди $\alpha(x)$ соҳиби *тартиби хурдии* m мебошад, агар қимати лимитии функцияи $\alpha(x)/(x-a)^m$ дар нуқтаи a аз нуль тафовут дошта бошад.

Ҳангоми муқоисаи функцияҳои беохир хурд аксаран символи o (o-и хурд)-ро истифода менамоянд. Яъне, агар функцияи $\alpha = \alpha(x)$ назар ба функцияи дар нуқтаи a беохир хурди $\beta = \beta(x)$ функцияи дар нуқтаи a беохир хурди тартиби баландтар бошад, онгоҳ инро шартан ин тавр менависанд:

$$\alpha = o(\beta)$$

(чунин хонда мешавад: α баробари o хурд аз β). Ҳамин тариқ, символи $o(\beta)$ функцияи беохир хурди дилхоҳеро ифода мекунад, ки он назар ба функцияи дар нуқтаи a беохир хурди $\beta = \beta(x)$ дар ҳамин нуқтаи a тартиби баландтари хурдӣ дорад.

Хосиятҳои маълуми зерини символи o-ро қайд мекунем: агар $\gamma = o(\beta)$ бошад, онгоҳ $o(\beta) \pm o(\gamma) = o(\beta)$, $o(\beta) \pm o(\beta) = o(\beta)$.

Инчунин қайд мекунем, ки агар α ва β функцияҳои дар нуқтаи a беохир хурд бошанд, онгоҳ функцияи α/β назар ба ҳар як ҳамзарбшавандаҳо тартиби баландтари хурдиро соҳиб аст ва, бинобар ин,

$$\alpha\beta = o(\alpha), \quad \alpha\beta = o(\beta).$$

Барои функцияҳои дар нуқтаи a аз рост (ё аз чап) беохир калон ҳамингуна методикаи муқоиса истифода карда мешавад.

Фарз мекунем, ки $A(x)$ ва $B(x)$ функцияҳои дар нуқтаи a аз рост беохир калон мебошанд, ва бигзор, масалан, аломати ҳардуи ин функцияҳои беохир калон мусбат бошад, яъне

$$\lim_{x \to a+0} A(x) = +\infty \text{ ва } \lim_{x \to a+0} B(x) = +\infty.$$

Мо мегӯем, ки функцияи $A(x)$ назар ба функцияи $B(x)$ дар нуқтаи a аз рост *тартиби баландтари калонӣ* дорад, агар функцияи $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ функцияи дар нуқтаи a аз рост беохир калон бошад.

Агар қимати лимитии рости функцияи $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ дар нуқтаи a охирнок ва аз нуль тафовут дошта бошад, онгоҳ мо дар ин маврид мегӯем, ки $A(x)$ ва $B(x)$ дар нуқтаи a аз рост *тартибҳои якхелаи калонӣ* доранд.

Чанд мисол меорем.

1°. Функцияҳои $\alpha(x) = 3x^2 + x^3$ ва $\beta(x) = 2x^2$ функцияҳои беохир хурди дар нуқтаи $x = 0$ якаломата мебошанд. Ҳақиқа-

тан, ҳангоми $x \neq 0$ будан $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$ аст. Азбаски $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}x = 0$ аст, пас дар асоси теоремаи 4.1 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{3}{2}$. Ин чунин маъно дорад, ки $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функцияҳои беохир хурди якаломата мебошанд.

2°. Функцияҳои $\alpha(x) = x^2 - 6x^3$ ва $\beta(x) = x^2$ функцияҳои беохир хурди дар нуқтаи $x = 0$ баробаркувва мебошанд. Воқеан, $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 - 6x$. Азбаски $\lim\limits_{x \to 0} 6x = 0$ мебошад, дар асоси теоремаи 4.1 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ аст. Ин чунин маъно дорад, ки функцияҳои беохир хурди $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ баробаркувва мебошанд.

3°. Функцияҳои $A(x) = \frac{1+x}{x}$ ва $B(x) = \frac{1}{x}$ дар нуқтаи $x = 0$ аз рост ва аз чап тартиби якхелаи калонӣ доранд. Ин натичаи $\lim\limits_{x \to 0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x) = 1$ мебошад.

§ 3. Мафҳуми бефосилагии функцияҳо

1. Таърифи бефосилагии функцияҳо. Фарз мекунием, ки нуқтаи a ба соҳаи дода шудани функцияи $f(x)$ тааллуқ дорад ва ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи a нуқтаҳои аз a тафовутдори соҳаи дода шудани ин функцияро дарбар дорад.

Таърифи 1. Функцияи $f(x)$ функцияи дар нуқтаи a бефосила номида мешавад, агар қимати лимитии ин функция дар нуқтаи a мавҷуд бошад ва ба қимати хусусии $f(a)$ баробар бошад.

Ҳамин тариқ, шарти дар нуқтаи a бефосила будани функцияи $f(x)$-ро ба таври символ ин тавр навиштан мумкин аст:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Азбаски $a = \lim\limits_{x \to a} x$ мебошад, онгоҳ баробарии болоиро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right).$$

Пас, барои функцияи бефосила ҷойҳои символи «lim»-и гузариши лимитӣ ва символи «f»-и характеристикаи функцияро иваз кардан мумкин аст.

Таърифи 1-уми қимати лимитии функцияи $f(x)$ дар нуқтаи a-ро истифода карда (ба п. 1-уми § 2-юми ҳамин боб нигаред), мо таърифи 1-уми дар нуқтаи a бефосила будани функцияро ин тавр баён карда метавонем.

Таърифи 1. Функцияи $f(x)$ функцияи дар нуқтаи a бефосила номида мешавад, агар барои пайдарпаии $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$-и ба a наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргументи x пайдарпаии мувофиқи $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$-и қиматҳои ин функция ба адади $f(a)$ наздик шавад.*

Нисбат ба таърифи 1-уми қимати лимитии $f(x)$ дар нуқтаи a (п. 1-уми § 2), мо дар таърифи 1* чунин талаботеро, ки бояд ҳама элементҳои пайдарпаии $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ аз a тафовут дошта бошанд, сарфи назар кардем. Ин чунин асос дорад: ба элементҳои пайдарпаии $\{f(x_n)\}$, ки ба $f(a)$ наздик мешавад, ҳамроҳ кардани элементҳои нави шумораашон дилхоҳ, ки ба $f(a)$ баробаранд, ба $f(a)$ наздикшавандагии пайдарпаии дар ин ҳангом ҳосилшударо вайрон намекунад.

Фарз мекунем, ки маҷмӯи $\{x\}$, ки дар он функцияи $f(x)$ дода шудааст, нуқтаи a-ро соҳиб аст ва барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ ақаллан якто элементи ин маҷмӯъ ҳаст, ки он дар интервали $(a, a + \varepsilon)$ дар интервали $(a - \varepsilon, a)$ воқеъ мебошад.

Таърифи 2. Функцияи $f(x)$ функцияи дар нуқтаи a аз рост (аз чап) бефосила номида мешавад, агар қимати лимитии рости (чапи) ин функция дар нуқтаи a мавҷуд бошад ва ба қимати хусусии $f(a)$ баробар бошад.

Ишоратҳои символии бефосилаги аз рост (аз чап):

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \text{ ё } f(a + 0) = f(a)$$

$$(\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \text{ ё } f(a - 0) = f(a)).$$

Қайд. *Агар функцияи $f(x)$ дар нуқтаи x ҳам аз чап ва ҳам аз рост бефосила бошад, онгоҳ он дар ин нуқта бефосила мебошад.* Воқеан, дар асоси қайди п. 1-уми § 2-юми ҳамин боб дар ин маврид қимати лимитии функция дар нуқтаи a вуҷуд дорад, ки он ба қимати хусусии ин функция дар нуқтаи a баробар аст.

Мисолҳо меорем.

1°. Функцияи дараҷагии $f(x) = x^n$, ки нишондиҳандааш n адади мусбати бутун мебошад, дар ҳар як нуқтаи хати рости беохир бефосила мебошад. Ҳақиқатан, мо дар п. 2-юми § 2 исбот кардем, ки қимати лимитии ин функция дар нуқтаи дилхоҳи хати рости беохир ба қимати хусусии a^n баробар аст.

2°. Азбаски бисьёраъзогиҳо ва касрҳои алгебравии ихтиёрнашаванда дар ҳар як нуқтаи соҳаи дода шуданаш қимати ли-

митии ба қимати хусусӣ баробарро соҳибанд (ба п. 2-юми § 2 ниг.), пас онҳо функцияҳои бефосила мебошанд.

Нуқтаҳое, ки дар онҳо функция ба хосияти бефосилагӣ соҳиб нест, *нуқтаҳои каниши* функция* номида мешавад. Масалан, функцияи $f(x) = \operatorname{sgn} x$ дар нуқтаи $x = 0$ каниш дорад (мо дар п. 1-уми § 2 исбот кардем, ки қиматҳои лимитии рост ва чапи ин функция дар нуқтаи $x = 0$ вуҷуд доранд, лекин ба якдигар баробар намебошанд ва, бинобар ин, қимати лимитии функция дар ин нуқта вуҷуд надорад). Функцияи Дирихле дар ҳар як нуқтаи хати рости беохир канишдор аст, чунки он дар ҳеҷ ягон нуқтаи ин хати рост қимати лимитӣ надорад (ба п. 1-уми § 2 ниг.).

Мо мегӯем, ки функцияи $f(x)$ *дар маҷмӯи* $\{x\}$ *бефосила* мебошад, агар он дар ҳар як нуқтаи ин маҷмӯъ бефосила бошад. Агар функция дар ҳар як нуқтаи интервал бефосила бошад, онгоҳ мегӯянд, ки он дар ин интервал бефосила мебошад. Агар функция дар ҳар як нуқтаи дарунии сегменти $[a, b]$ бефосила бошад ва, ғайр аз он, дар нуқтаи a аз рост ва дар нуқтаи b аз чап бефосила бошад, онгоҳ мегӯянд, ки он дар сегменти $[a, b]$ бефосила мебошад.

2. Амалҳои арифметикӣ бо функцияҳои бефосила. Амалҳои арифметикӣ бо функцияҳои бефосила ба функцияҳои бефосила меоваранд.

Теоремаи *асосии* зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 4.2. Бигзор функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$-и дар як маҷмӯъ додашуда дар нуқтаи a бефосила бошанд. Онгоҳ функцияҳои $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ва $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a) \neq 0)$ дар нуқтаи a бефосила мебошанд.

Исбот. Азбаски функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$-и дар нуқтаи a бефосила дар ин нуқта ба қиматҳои лимитии $f(a)$ ва $g(a)$ соҳиб мебошанд, пас дар асоси теоремаи 4.1 қиматҳои лимитии функцияҳои $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ва $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ мавчуданд ва мувофиқан ба $f(a) + g(a)$, $f(a) - g(a)$, $f(a) \cdot g(a)$, $\dfrac{f(a)}{g(a)}$ баробар мебошанд. Лекин ин бузургиҳо ба қиматҳои хусусии функцияҳои номбаршуда дар нуқтаи a баробар мебошанд. Теорема исбот шуд.

3. Функцияи мураккаб ва бефосилагии он. Функцияеро, ки дар натиҷаи суперпозицияи (яъне татбиқи пайдарпаи) ду ё якчанд функция ҳосил мешавад, *функцияи мураккаб* меномем.

---

* Мо дар § 8 классификацияи нуқтаҳои канишро баён мекунем.

Функцияи мураккаберо, ки дар натичаи суперпозицияи ду функция хосил мешавад, муайян кардан кифоя аст.

Бигзор функцияи $x = \varphi(t)$ дар ягон мачмӯи $\{t\}$ дода шуда бошад ва бигзор $\{x\}$ мачмӯи қиматҳои ин функция бошад.

Баъд фарз мекунем, ки дар мачмӯи номбаршудаи $\{x\}$ функцияи дигари $y = f(x)$ муайян аст. Онгоҳ мегӯянд, ки функцияи мураккаби

$$y = f(x), \text{ дар ин ҷо } x = \varphi(t),$$

ё

$$y = f[\varphi(t)] = F(t)$$

дар мачмӯи $\{t\}$ дода шудааст.

Теоремаи *асосии* зерин дуруст аст.

Теорема 4.3. *Агар функцияи* $x = \varphi(t)$ *дар нуқтаи* a *бефосила бошад ва функцияи* $y = f(x)$ *дар нуқтаи мувофиқи* $b = \varphi(a)$ *бефосила бошад, онгоҳ функцияи мураккаби* $y = f[\varphi(t)] = F(t)$ *дар нуқтаи* a *бефосила мебошад.*

Исбот. Бигзор $\{t_n\}$ пайдарпаии дилхоҳи қиматҳои аргументи функцияи мураккабе бошад, ки ба a наздик мешавад. Азбаски функцияи $x = \varphi(t)$ дар нуқтаи a бефосила мебошад, пас (дар асоси таърифи 1*-и п. 1) пайдарпаии мувофиқи қиматҳои ин функция $x_n = \varphi(t_n)$ ба қимати хусусии ин функция дар нуқтаи a, яъне ба адади $b = \varphi(a)$ наздик мешавад. Баъд, азбаски функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $b = \varphi(a)$ бефосила мебошад ва барои он пайдарпаии номбаршудаи $\{x_n\}$-и ба $b = \varphi(a)$ наздикшаванда пайдарпаии қиматҳои аргумент аст, пас (дар асоси ҳамон таърифи 1*-и п. 1) пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функцияи $f(x_n) = f[\varphi(t_n)] = F(t_n)$ ба адади $f(b) = f[\varphi(a)] = F(a)$ наздик мешавад.

Инак, барои пайдарпаии дилхоҳи $\{t_n\}$-и қиматҳои аргументи функцияи мураккаб, ки ба a наздик мешавад, пайдарпаии мувофиқи қиматҳои худи функцияи мураккаби $\{f[\varphi(t_n)]\} \equiv \{F(t_n)\}$ ба адади $f[\varphi(a)] = F(a)$, ки қимати хусусии функцияи мураккаб дар нуқтаи a мебошад, наздик мешавад. Дар асоси таърифи 1*-и п. 1 ин чунин маъно дорад, ки функцияи мураккаби $f[\varphi(t)] = F(t)$ дар нуқтаи a бефосила мебошад. Теорема исбот шуд.

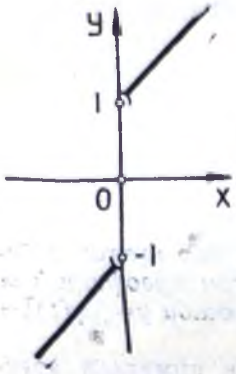
§ 4. Баъзе хосиятҳои функцияҳои монотонӣ

1. Таъриф ва мисолҳои функцияҳои монотонӣ.

Таъриф. Функцияи $y = f(x)$ *функцияи дар мачмӯи* $\{x\}$ *камнашаванда (афзуннашаванда) номида мешавад, агар барои* x_1 *ва* x_2*-и дилхоҳи ин мачмӯъ, ки шарти* $x_1 < x_2$*-ро қаноат менамоянд, нобаробарии* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$ *дуруст бошад.*

Функцияҳои камнашаванда ва афзуннашавандаро *функцияҳои монотонӣ* меноманд.

Агар барои x_1 ва x_2-и дилхоҳи маҷмӯи $\{x\}$, ки шарти $x_1<x_2$-ро қаноат менамоянд, нобаробарии $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ дуруст бошад, онгоҳ функцияи $y = f(x)$-ро функцияи дар маҷмӯи $\{x\}$ *афзуншаванда (камшаванда)* меноманд. Функцияҳои афзуншаванда ва камшавандаро *функцияҳои қатъӣ монотонӣ* ҳам меноманд.



Расми 4.7.

Мисолҳои функцияҳои монотониро меорем.

1. Функцияи $f(x) = x + \operatorname{sgn} x$ дар ҳамаи хати рости ададӣ меафзояд (расми 4.7).

2. Функцияи $f(x) = \operatorname{sgn} x$ дар ҳамаи хати рости ададӣ камнашаванда мебошад (ба расми 4.4 ниг.).

2. Мафҳуми функцияи чаппа. Функцияҳои монотоние, ки функцияи чаппа доранд. Дар ин пункт мафҳуми функцияи чаппа баён карда шуда, шарти мавҷудияти функцияи чаппаи функцияи монотонӣ муқаррар карда мешавад.

Бигзор функцияи $y = f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ дода шуда бошад, ва бигзор сегменти $[\alpha, \beta]$ маҷмӯи қиматҳои ин функция бошад. Баъд, бигзор ба ҳар як y-и сегменти $[\alpha, \beta]$ фақат якто қимати x-и сегменти $[a, b]$, ки барояш $f(x) = y$ мебошад, мувофиқ ояд. Онгоҳ ба ҳар як y-и $[\alpha, \beta]$ ҳамон қимати x-и $[a, b]$-ро, ки барояш $f(x) = y$ мебошад, дар мувофиқатӣ гузошта, дар сегменти $[\alpha, \beta]$ функцияи $x = f^{-1}(y)$-ро муайян кардан мумкин аст. Функцияи $x = f^{-1}(y)$ функцияи чаппаи $y = f(x)$ номида мешавад.

Дар ин таъриф *ба ҷои сегментҳои* $[a, b]$ ва $[\alpha, \beta]$ *интервалҳои* (a, b) ва (α, β)-ро муоина кардан мумкин буд. Ин чунин фарз кардан мумкин буд, ки як ё ҳарду интервали (a, b) ва (α, β) ба хати рости беохир ё ба нимхати рости кушода табдил мешаванд.

Агар $x = f^{-1}(y)$ функцияи чаппаи $y = f(x)$ бошад, онгоҳ возеҳ аст, ки функцияи $y = f(x)$ функцияи чаппаи функцияи $x = f^{-1}(y)$ мебошад. Бинобар ин функцияҳои $y = f(x)$ ва $x = f^{-1}(y)$ *функцияҳои ба якдигар чаппа* номида мешаванд.

Функцияҳои ба якдигар чаппа ба хосиятҳои зерин соҳиб мебошанд:

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Мисолҳои функцияҳои ба якдигар чаппаро муоина мекунем.

1°. Бигзор функцияи $f(x) = 3x$ дар сегменти $[0, 1]$ дода шуда бошад. Сегменти $[0, 3]$ маҷмӯи қиматҳои ин функция мебо-

шад. Функцияи $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y$, ки дар сегменти [0, 3] муайян аст, барои функцияи додашудаи $f(x) = 3x$ функцияи чаппа мебошад.

2°. Функцияеро, ки ба таври зерин муайян аст, дар сегменти [0, 1] муоина мекунем:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, \text{ агар } x \text{ адади рационалӣ бошад,} \\ 1 - x, \text{ агар } x \text{ адади иррационалӣ бошад.} \end{cases}$$

Функцияи $x = f^{-1}(y)$, ки дар сегменти [0, 1] дода шудааст ва бо баробариҳои

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, \text{ агар } y \text{ адади рационалӣ бошад,} \\ 1 - y, \text{ агар } y \text{ адади иррационалӣ бошад,} \end{cases}$$

муайян мебошад, ба функцияи додашуда чаппа мебошад. Ба воситаи санҷиш ба ин боварӣ ҳосил кардан осон аст.

• Қайди 1. Фарз мекунем, ки дар сегменти $[a, b]$ функцияи қатъӣ монотонии $y = f(x)$ дода шудааст ва боз фарз мекунем, ки сегменти $[\alpha, \beta]$ маҷмӯи қиматҳои ин функция мебошад. Онгоҳ, дар асоси функцияи қатъӣ монотонӣ будани $y = f(x)$ ба ҳар як y-и $[\alpha, \beta]$ *фақат якто* қимати x-и $[a, b]$, ки барояш $f(x) = y$ мебошад, мувофиқ меояд ва, бинобар ин, дар сегменти $[\alpha, \beta]$ функцияи $x = f^{-1}(y)$-и ба функцияи $y = f(x)$ чаппа вуҷуд дорад. Ба замми ин, агар функцияи $y = f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ функцияи афзуншаванда бошад, онгоҳ функцияи $x = f^{-1}(y)$ ҳам дар сегменти $[\alpha, \beta]$ функцияи афзуншаванда мебошад; агар $y = f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ функцияи камшаванда бошад, онгоҳ $x = f^{-1}(y)$ дар сегменти $[\beta, \alpha]$ функцияи камшаванда аст. Масалан, агар $y = f(x)$ функцияи афзуншаванда бошад, онгоҳ $x = f^{-1}(y)$ ҳам функцияи афзуншаванда аст. Ҳақиқатан, агар $y_1 < y_2$ бошад, онгоҳ $x_1 < x_2$ ($x_1 = f^{-1}(y_1)$ ва $x_2 = f^{-1}(y_2)$), чунки аз нобаробарии $x_1 \geqslant x_2$ ва аз афзуншавии функцияи $y = f(x)$ натиҷа мебаромад, ки $y_1 \geqslant y_2$ аст ва ин ба нобаробарии $y_1 < y_2$ мухолиф аст.

Леммаи 1. *Барои он ки функцияи дар сегменти* $[a, b]$ *қатъӣ монотонии* $y = f(x)$ *дар ҳамин сегмент бефосила бошад, зарур ва кифоя аст, ки адади дилхоҳи* γ, *ки дар байни ададҳои* $\alpha = f(a)$ *ва* $\beta = f(b)$ ***воқеъ аст, қимати ин функция бошад.***

Ба ибораи дигар, барои он ки функцияи қатъӣ монотонии $y = f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила бошад, зарур ва кифоя аст, ки сегменти $[\alpha, \beta]$ (ё $[\beta, \alpha]$ ҳангоми $\beta < \alpha$ будан), ки дар ин ҷо $\alpha = f(a)$ ва $\beta = f(b)$ аст, маҷмӯи қиматҳои ин функция бошад.

Исбот. 1) Шарти зарурӣ. Барои муайянӣ функцияи афзуншавандаи дар сегменти $[a, b]$ бефосилаи $y = f(x)$-ро муоина мекунем (барои функцияи камшаванда ҳам ҳамин тавр исбот карда мешавад). Нишон медиҳем, ки агар $\alpha < \gamma < \beta$ бошад, онгоҳ нуқтаи дарунии (c) сегменти $[a, b]$ вуҷуд дорад, ки дар он $f(c) = \gamma$ мебошад (дар асоси афзуншаванда будани функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи c ягона аст). Маҷмӯи нуқтаҳои сегменти $[a, b]$-ро, ки барояш $f(x) \leqslant \gamma$ мебошад, бо $\{x\}$ ишорат мекунем (масалан, нуқтаи a ба ҳамин маҷмӯъ тааллуқ дорад, чунки $f(a) = \alpha < \gamma$ аст). Маҷмӯи $\{x\}$ аз боло маҳдуд аст ва, бинобар ин, ҳудуди болоии саҳеҳи c-ро соҳиб аст. Исбот мекунем, ки $f(c) = \gamma$ мебошад. Адади дилхоҳи сегменти $[a, b]$, ки аз c хурд аст, ба маҷмӯи $\{x\}$* тааллуқ дорад ва адади дилхоҳе, ки аз c калон мебошад, ба ин маҷмӯъ** тааллуқ надорад. Нишон медиҳем, ки c нуқтаи дарунии сегменти $[a, b]$ мебошад. Воқеан, фарз мекунем, ки, масалан, $c = b$ аст. Пайдарпаии афзуншавандаи ба b наздикшавандаи $\{x_n\}$-и қиматҳои аргументи функцияи $y = f(x)$-ро муоина мекунем. Азбаски $f(x)$ дар нуқтаи b аз чап бефосила мебошад, пас $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \beta$. Аз дигар тараф, $f(x) \leqslant \gamma$*** ва, бинобар ин, дар асоси теоремаи 3.13 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \gamma$. Ҳамин тариқ, $\beta \leqslant \gamma$, ки ин ба шарти $\alpha < \beta$ мухолиф аст. Мухолифоти ҳосилшуда исбот мекунад, ки $c < b$ аст. Ҳамин тавр бовар кардан мумкин аст, ки $a < c$ мебошад. Азбаски c нуқтаи дарунии сегменти $[a, b]$ мебошад, пас $\{x_n'\}$ ва $\{x_n''\}$ пайдарпаиҳои афзуншаванда ва камшавандаи ба c наздикшавандаи қиматҳои аргументи x мебошанд. Азбаски $f(x)$ дар нуқтаи c бефосила мебошад, пас $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = f(c)$. Лекин $f(x_n') \leqslant \gamma$ ва $f(x_n'') > \gamma$****. Бинобар ин $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') \leqslant \gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') \geqslant \gamma$, аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки $f(c) = \gamma$ мебошад.

2) Шарти кифоягӣ. Исботро барои функцияи дар сегменти $[a, b]$ афзуншаванда меорем (барои функцияи камшаванда ҳам ҳамин тавр муҳокима ронда мешавад). Фарз мекунем, ки c нуқтаи дилхоҳи сегменти $[a, b]$ ва $\gamma = f(c)$ қимати функцияи $y = f(x)$ дар ҳамин нуқта бошад. Адади γ қимати лимитии рост ва чапи функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c мебошад (агар c нуқтаи ҳудудии сегменти $[a, b]$ бошад, онгоҳ γ қимати лимитии яктарафаи мувофиқ дар ҳамин нуқтаи ҳудудӣ мебошад). Бигзор $a < c \leqslant b$ бошад; исбот мекунем, ки γ қи-

---

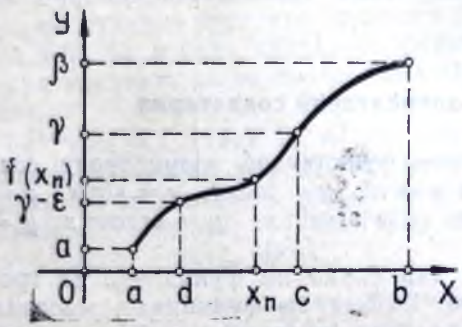
* Чунки мувофиқи таърифи ҳудуди болоии саҳеҳ барои x-и дилхоҳи аз c хурд чунин x' ёфт мешавад, ки $x < x'$ ва $f(x') \leqslant \gamma$. Лекин, онгоҳ, аз афзуншавии $f(x)$ натиҷа мебарояд, ки $f(x) \leqslant \gamma$, яъне x ба $\{x\}$ тааллуқ дорад.

** Дар асоси таърифи ҳудуди болоии саҳеҳ.

*** Азбаски ҳамаи x_n-ҳо аз c хурданд, пас онҳо ба $\{x\}$ мутаалликанд.

**** Дар асоси он, ки барои номери дилхоҳи n $x_n' < c < x_n''$ аст.

мати лимитии чапи функция дар нуқтаи c мебошад. Бигзор ε адади мусбати хурдтаринест, ки $\alpha < \gamma - \varepsilon$ аст (расми 4.8). Азбаски мувофиқи шарти лемма адади $\gamma - \varepsilon$ қимати функцияи $f(x)$ мебошад, пас дар сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи d-ро нишон додан мумкин аст, ки $f(d) = \gamma - \varepsilon$ аст. Азбаски функцияи $f(x)$ меафзояд, пас $d < c$ аст. Акнун пайдарпаии $\{x_n\}$-и ба c наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргументи x-ро, ки элементҳояш аз c хурданд, муоина мекунем. Аз ягон номери N сар карда, ҳама элементҳои x_n-и ин пайдарпай нобаробарии $d < x_n < c$-ро қаноат менамоянд (яқто чунин элемент дар расми 4.8 тасвир шудааст) ва дар асоси афзуншаванда будани $f(x)$ (ҳангоми $n \geqslant N$ будан) нобаробарии $f(d) < f(x_n) < f(c)$ дуруст аст. Азбаски $f(d) = \gamma - \varepsilon$ ва $f(c) = \gamma$ мебошад, пас аз нобаробариҳои охирин натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан



Расми 4.8.

$$0 < \gamma - f(x_n) < \varepsilon$$

мебошад, яъне пайдарпаии $\{f(x_n)\}$ ба γ наздик мешавад ва азбаски $\{x_n\}$ пайдарпаии аз чап ба c наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргумент мебошад, пас бо ҳамин исбот карда шуд, ки дар нуқтаи c қимати лимитии чап вуҷуд дорад ва ба $\gamma = f(c)$* баробар мебошад. Агар $a \leqslant c < b$ бошад, пас, ҳамин тавр муҳокима ронда, исбот кардан мумкин аст, ки $\gamma = f(c)$ қимати лимитии рости функция дар нуқтаи c мебошад. Мо исбот кардем, ки қиматҳои лимитии росту чапи функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи дарунии дилхоҳи c ба қимати хусусии он $f(c)$ баробаранд ва ин, дар асоси қайди п. 1-уми § 2, чунин маъно дорад, ки $f(x)$ дар нуқтаҳои дарунии сегмент бефосила мебошад. Дар нуқтаҳои ҳудудии сегмент бефосила будани ин функция натиҷаи он аст, ки қиматҳои лимитии яктарафаи мувофиқи $f(x)$ дар нуқтаҳои ҳудудии сегмент ба қиматҳои хусусии функция баробаранд. Лемма пурра исбот шуд.

Натиҷа. Бигзор дар сегменти $[a, b]$ функцияи бефосилаи қатъӣ монотонии $y = f(x)$ дода шуда бошад, ва бигзор $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ бошад. Онгоҳ ин функция дар сегменти $[\alpha, \beta]$ (ё $[\beta, \alpha]$, агар $\beta < \alpha$ бошад) ба функцияи чаппаи бефосила ва қатъӣ монотонии $x = f^{-1}(y)$ соҳиб аст.

---

* Мо мавриди $\varepsilon > 0$-и хурдтаринеро муоина кардем, ки $\alpha < \gamma - \varepsilon$ аст. Агар $\alpha \geqslant \gamma - \varepsilon$ бошад, пас $d = a$ фарз кардан кифоя аст ва баробарии маълуми $\gamma - \varepsilon < f(d)$-ро истифода карда, муҳокимаронирo такрор кардан кофист.

Исбот. Дар асоси леммаи ҳозир исботкардаамон сегменти $[\alpha, \beta]$ маҷмӯи қиматҳои функцияи $y = f(x)$ мебошад ва, онгоҳ, дар асоси қайди 1-уми ҳамин пункт, дар сегменти $[\alpha, \beta]$ функцияи қатъӣ монотонии $x = f^{-1}(y)$ вуҷуд дорад, ки сегменти $[a, b]$ маҷмӯи қиматҳояш мебошад ва он, дар асоси ҳамон лемма, дар сегменти $[\alpha, \beta]$ бефосила мебошад.

Қайди 2. Бояд қайд кард, ки функцияҳои монотонӣ дар ҳар як нуқтаи дарунии соҳаи дода шуданашон ба қиматҳои лимитии росту чап соҳиб мебошанд. Исботи ин чумларо ба хонанда месупорем.

§ 5. Функцияҳои элементарии соддатарин

Одатан функцияҳои зеринро функцияҳои элементарии соддатарин меноманд: $y = x^{\alpha}$, $y = a^{x}$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Мо аз курси элементарӣ дар бораи ин функцияҳо ва графики онҳо тасаввурот дорем. Баъзеи ин функцияҳо, масалан $y = a^x$ барои қиматҳои рационалии аргументи x бе мушкилӣ муайян карда мешаванд. Мо масъалаи муайян кардани функцияҳои элементарии соддатаринро барои қиматҳои ҳақиқии гуногуни аргументи онҳо аниқ мекунем. Ин масъала содда нест: масалан, чӣ тавр ба дараҷаи ҳақиқии дилхоҳи x бардоштани адади ҳақиқии дилхоҳи x нофаҳмо аст.

Мо инчунин масъалаи бефосилагии функцияҳои элементарии соддатаринро дар ҳамаи нуқтаҳои соҳаи дода шуданашон меомӯзем. Мо ҳамон хосиятҳои функцияҳои элементарии соддатаринро асоснок мекунем, ки онҳо аз муоинаи графикашон ба таври аёнӣ намудор мебошанд.

Дар иловаи боби 8 алгоритмҳои ҳисоб кардани қиматҳои функцияҳои элементарии соддатарин баён шудаанд.

1. Дараҷаи рационалии ададҳои мусбат. *Ба дараҷаи мусбати бутуни n* бардоштани адади ҳақиқии дилхоҳи x чун зарби n-каратаи адади x ба худаш муайян карда мешавад. Пас, ҳангоми бутун будани n мо функцияи дараҷагии муайяни $y = x^n$-ро барои ҳама қиматҳои ҳақиқии x ҳисоб карда метавонем. Мо баъзе хосиятҳои ин функцияро барои муайян кардани дараҷаҳои рационалии ададҳои мусбат истифода мекунем.

Леммаи зеринро исбот мекунем.

Лемма и 2. Функцияи дараҷагии $y = x^n$ ҳангоми $x \geqslant 0$ ва n адади мусбати бутун будан меафзояд ва бефосила аст.

Исбот. Афзуншавии ин функцияро исбот мекунем. Бигзор $0 \leqslant x_1 < x_2$ бошад. Азбаски $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1})$, $x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1} > 0$ аст, пас $x_2^n > x_1^n$ мебошад. Мо бефосилагии ин функцияро пештар (ба мисоли 1-уми п. 1 § 3 нигар.) муқаррар карда будем.

Натиҷа. Функцияи дараҷагии $y = x^n$-ро дар сегменти $[0, N]$ муоина мекунем, дар ин ҷо N — адади мусбати дилхоҳ. Азбаски ин функция бефосила аст ва дар сегменти номбаршуда меафзояд, пас он, дар асоси натиҷаи леммаи 1-уми ҳамин боб, дар сегменти $[0, N^n]$ ба функцияи чаппаи афзуншаванда ва бефосила соҳиб мебошад, ки мо онро бо $y^{1/n}$ ишорат мекунем.

Азбаски N-ро ҳар қадар калон интихоб кардан мумкин аст, пас N^n ҳам ҳар қадар калон буда метавонад. Пас, функцияи $y = y^{1/n}$ барои ҳама қиматҳои ғайриманфӣ y муайян аст. Барои ин функция ишорати аргумент y-ро ба x ва ишорати функция x-ро ба y иваз карда, мо функцияи дараҷагии $y = x^{1/n}$-ро ҳосил мекунем, ки он барои ҳама қиматҳои ғайриманфии x муайян аст.

$a^{1/n}$-ро чун адади b, ки ба қимати функцияи $y = x^{1/n}$ дар нуқтаи a баробар аст, муайян мекунем. Мо акнун дараҷаи рационалии дилхоҳи r-и адади мусбати a-ро муайян карда метавонем. Яъне, агар $r = m/n$ (дар ин ҷо m ва n — ададҳои мусбати бутун) бошад, онгоҳ

$$a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m.$$

Ғайр аз он, шарт мекунем, ки

$$a^0 = 1, \quad a^{-r} = (1/a)^r.$$

Ба дурустии хосиятҳои зерини дараҷаи рационалии ададҳои мусбат бовар кардан осон аст:

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}, \quad a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r, \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}. \qquad (*)$$

Аввал дурустии хосияти якуми $(*)$-ро исбот мекунем. Ҳангоми адади мусбати бутун будан p баробарии $(a^{m/n})^p = a^{m \cdot p/n}$, ки дар ин ҷо m ва n ададҳои мусбати бутуни дилхоҳ мебошанд, дуруст аст, чунки ҳам қисми чап ва ҳам қисми рости ин баробарӣ ба ҳосили зарби адади $a^{1/n}$, ки ба худаш $m \cdot p$ маротиба зарб карда шудааст, баробар мебошад.

$r = \frac{m_1}{n_1}$, $s = \frac{m_2}{n_2}$ фарз карда, баробарии $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$-ро дар вазъияти r ва s-ҳои рационалии мусбати дилхоҳ исбот мекунем. Фарз мекунем, ки

$$c_1 = (a^{\frac{m_1}{n_1}})^{n_2}, \quad c_2 = a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}}$$

мебошад. Агар c_1 аз c_2 тафовут медошт, онгоҳ аз афзуншавии функцияи дараҷагии $y = x^{n_2}$ натиҷа мебаромад, ки $c_1^{n_2} \neq c_2^{n_2}$ аст ва муносибати охирин, дар асоси дурустии исботшудаи баробарии $(a^{m/n})^p = a^{m \cdot p/n}$ (ҳангоми бутун будани p), чунин маъно медошт, ки $(a^{m_1/n_1})^{m_2} \neq a^{m_1 \cdot m_2/n_1}$. Муносибати ҳосилшуда ба баробарии барои ададҳои мусбати бутуни $m_1 n_1$ ва m_2 исботшудаи $(a^{m_1/n_1})^{m_2} = a^{m_1 \cdot m_2/n_1}$ мухолиф аст. Бо ҳамин, $c_1 = c_2$ аст ва баробарии якуми $(*)$ барои r ва s-ҳои рационалии мусбати дилхоҳ исбот шуд.

Дар асоси шарти мо:

$$a^0 = 1,\ a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r \text{ ҳангоми } r > 0 \text{ будан}$$

ба r ва s-ҳои ғайримусбат татбиқ кардани ин баробарӣ мушкилие намеорад.

Баробарии дуюми (✳)-ро ҳам барои r-и рационалии м у с б а т исбот кардан кифоя аст. r-ро баробари m/n фарз карда (дар ин ҷо m ва n — ададҳои мусбати бутун), баробарии $a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a \cdot b)^{1/n}$-ро исбот намудан кифоя аст, чунки ба якдигар зарб кардани m-то ҳамингуна баробариҳо муносибати $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$-ро исбот мекунад.

Барои исботи баробарии $a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a \cdot b)^{1/n}$ қайд мекунем, ки дар асоси хосиятҳои функцияҳои ба якдигар чаппаи $y = x^{1/n}$ ва $y = y^n$ тасдиқ кардан мумкин аст, ки $(b^{1/n})^n = b$, $(a^{1/n})^n = a$, $((a \cdot b)^{1/n})^n = a \cdot b$. Бинобар ин, $c_1 = a^{1/n} \cdot b^{1/n}$, $c_2 = (a \cdot b)^{1/n}$ пиндошта ва $c_1 \neq c_2$ фарз карда, $c_1{}^n \neq c_2{}^n$-ро ҳосил мекардем, ки ин ба баробарии $a \cdot b = ab$ мухолиф аст.

Акнун хосияти охирини (✳)-ро исбот мекунем. Бигзор $r = m_1/n_1$, $s = m_2/n_2$ бошад, онгоҳ $r = m_1n_2/(n_1n_2)$, $s = m_2 \cdot n_1/(n_2 \cdot n_1)$, ва мо баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$a^r \cdot a^s = (a^{\frac{1}{n_1n_2}})^{m_1 \cdot n_2} \cdot (a^{\frac{1}{n_1n_2}})^{m_2 \cdot n_1} = (a^{\frac{1}{n_1n_2}})^{m_1n_2+m_2n_1}.$$

Баробарии охирин дуруст аст, чунки $m_1 \cdot n_2$ ва $m_2 \cdot n_1$ ададҳои бутун мебошанд.

Ҳамин тариқ,

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{(m_1n_2+m_2n_1)}{(n_1n_2)}} = a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}} = a^{r+s},$$

ки ҳаминро исбот кардан лозим буд.

Исбот мекунем, ки ҳангоми $a > 1$ ва адади рационалӣ будани $r > 0$ нобаробарии $a^r > 1$ дуруст аст. Воқеан, бигзор $r = m/n$ ва $a^r = a^{m/n} \leqslant 1$ бошад. n-то нобаробариҳои номбаршударо аъзо ба аъзо ба якдигар зарб карда, $a^m \leqslant 1$-ро ҳосил мекунем. Нобаробарии охирин ба нобаробарии $a^m > 1$ мухолиф аст (нобаробарии $a^m > 1$ дар натиҷаи m-то нобаробариҳои намуди $a > 1$-ро аъзо ба аъзо ба якдигар зарб кардан ҳосил мешавад). Ниҳоят, агар касри рационалии $r = m/n$ соҳиби махраҷи тоқи n бошад, онгоҳ $(-a)^r = a^r$ (агар m адади ҷуфт бошад), $(-a)^r = -a^r$ (агар m адади тоқ бошад) фарз карда, таърифи дараҷаи рационалиро ба ададҳои манфӣ ҳам татбиқ кардан мумкин аст.

2. Функцияи нишондиҳандагӣ. Аз муҳокимаронии пункти гузашта натиҷа мебарояд, ки агар a адади мусбат бошад, онгоҳ функцияи $y = a^x$ барои ҳама x-ҳои рационалӣ муайян аст.

Функцияи $y = a^x$ $(a > 1)$, ки дар маҷмӯи $\{x\}$-и ҳама ададҳои рационалӣ муайян аст, дар ҳамин маҷмӯъ монотонӣ меафзояд. Ба ин бовар кардан осон аст.

Вокеан, бигзор x_1 ва x_2 ду ададӣ рационалии дилхоҳе бошанд, ки шарти $x_2 > x_1$-ро қаноат менамоянд. Онгоҳ

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2-x_1} - 1).$$

Азбаски $x_2 - x_1 > 0$ ва $a > 1$ мебошад, пас $a^{x_2-x_1} > 1$ аст, яъне қисми рости баробарии охирин мусбат аст, ва, бинобар ин, $a^{x_2} > a^{x_1}$ мебошад. Дар маҷмӯи ададҳои рационалӣ афзуншаванда будани функцияи a^x исбот шуд.

Акнун функцияи a^x-ро *дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ* муайян мекунем.

Ададӣ ҳақиқии дилхоҳи x-ро қайд мекунем ва ададҳои рационалии гуногуни α ва β-ро, ки нобаробарии

$$\alpha < x < \beta \tag{4.2}$$

-ро қаноат менамояд, муоина мекунем.

a^x-ро ҳангоми $a > 1$ будан чун ададӣ ҳақиқии y, ки нобаробарии

$$\alpha^\alpha \leqslant y \leqslant a^\beta \tag{4.3}$$

-ро қаноат менамояд, муайян мекунем. Ҳозир исбот мекунем, ки чунин ададӣ y *вуҷуд дорад ва фақат якто мебошад.* Инчунин исбот мекунем, ки функцияи муайян кардаамон $y = a^x$ ба хосиятҳои муҳимтарини зерин соҳиб аст: 1) $y = a^x$ *дар ҳамаи хати рости беохир меафзояд,* 2) $y = a^x$ *дар нуқтаи дилхоҳи* x*-и ин хати рост бефосила мебошад.*

1°. Пеш аз ҳама исбот мекунем, ки барои x-и қайдшудаи дилхоҳ ва ададҳои рационалии дилхоҳи α ва β, ки нобаробарии (4.2)-ро қаноат менамоянд, *ададӣ ҳақиқии* y*-и нобаробарии* (4.3)*-ро қаноаткунанда вуҷуд дорад.*

Ададӣ рационалии дилхоҳи β-ро қайд мекунем, ки он нобаробарии рости (4.2)-ро қаноат менамояд ва ададҳои рационалии гуногуни α-ро, ки нобаробарии чапи (4.2)-ро қаноат менамоянд, муоина мекунем.

Азбаски $\alpha < \beta$ мебошад ва функцияи нишондиҳандагие, ки дар маҷмӯи ададҳои рационалӣ муайян аст, меафзояд, пас $a^\alpha < a^\beta$ мебошад. Ҳамин тариқ, маҷмуи $\{a^\alpha\}$ аз боло маҳдуд аст, ва ададӣ a^β яке аз ҳудудҳои болоии ин маҷмӯъ мебошад. Яъне, ин маҷмӯъ ҳудуди болоии саҳеҳ дорад, ки мо онро бо y ишорат мекунем. Акнун исбот кардан лозим, ки y нобаробариҳои (4.3)-ро қаноат менамояд. Аз таърифи ҳудуди болоии саҳеҳ дурустии нобаробарии чапи (4.3) тасдиқ мешавад ва дурустии нобаробарии рости (4.3) аз он тасдиқ мешавад, ки a^β яке аз ҳудудҳои болоӣ буда, y ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи $\{a^\alpha\}$ мебошад.

2°. Акнун муқаррар мекунем, ки *фақат якто ададӣ ҳақиқии* y *вуҷуд дорад, ки он нобаробариҳои* (4.3)*-ро қаноат менамояд.*

Исбот кардан кифоя аст, ки барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин ададҳои рационалии α ва β, ки нобаробариҳои (4.2)-ро қаноат менамоянд, ёфт мешаванд, ки барояшон $a^\beta - a^\alpha < \varepsilon$ аст. Вокеан, онгоҳ ду ададӣ дилхоҳи y_1 ва y_2, ки нобаробариҳои (4.3)-ро қаноат менамоянд, бояд мувофиқ оянд, чунин фарқи байни онҳо аз рӯи модуль аз ададӣ мусбати дилхоҳи пешакӣ гирифташудаи ε хурд аст.

$\varepsilon > 0$-и дилхоҳ ва ягон адади рационалии β_0-ро, ки нобаробарии ростиро (4.2)-ро қаноат менамояд, қайд мекунем. Онгоҳ азбаски $a^{\alpha} < a^{\beta_0}$ мебошад, пас

$$a^{\beta} - a^{\alpha} = a^{\alpha}(a^{\beta-\alpha} - 1) < a^{\beta_0}(a^{\beta-\alpha} - 1).$$

Агар мо имконияти интихоби чунин α ва β-ро муқаррар намоем, ки $a^{\beta-\alpha} - 1 < \dfrac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}$ бошад, онгоҳ нобаробарии $a^{\beta} - a^{\alpha} < \varepsilon$ исбот мешавад.

Аз боби 2 натиҷа мебарояд, ки барои n-и натуралии дилхоҳ ададҳои рационалии α ва β-ро, ки нобаробариҳои (4.2)-ро қаноат менамоянд, интихоб кардан мумкин аст, ки фарқи $\beta - \alpha$ аз $1/n$ хурд мешавад. Ҳамин тариқ, мавҷудияти чунин n-и натуралиро, ки барояш

$$a^{1/n} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}, \qquad (4.4)$$

мебошад, исбот кардан кифоя аст. Месанҷем, ки оё интихоби чунин n-и натуралӣ имконият дорад. Бигзор

$$a^{1/n} = 1 + \delta_n$$

бошад. Азбаски $a^{1/n} > 1$ аст, пас δ_n мусбат мебошад. Формулаи биноми Ньютонро истифода карда, $a = (a^{1/n})^n = (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + (аъзоҳои мусбат) > 1 + n\delta_n$-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $a - 1 > n\delta_n$ ва $0 < \delta_n < \dfrac{a-1}{n}$. Пас, $a^{1/n} - 1 = \delta_n < \dfrac{a-1}{n}$. Агар n-ро, ки талаботи $\dfrac{a-1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}$ ё $\dfrac{(a-1)\,a^{\beta}}{\varepsilon}$-ро қаноат менамояд, интихоб кунем, нобаробарии (4.4) дуруст хоҳад шуд. Исботи якқиматаи муайян будани адади y, ки нобаробариҳои (4.3)-ро қаноат менамояд, ба итмом расид.

Агар x адади рационалӣ ва a^x қимати дар нуқтаи x доштаи функцияи нишондиҳандагие, ки аввалан фақат дар маҷмӯи ададҳои рационалӣ муайян карда шуда буд, бошад, онгоҳ a^x ҳам ҳамон адади ҳақиқии ягонаи y мебошад, ки он нобаробариҳои (4.3)-ро қаноат менамояд.

3°. Акнун исбот мекунем, ки функцияи сохтагии мо a^x (ҳангоми $a > 1$ будан) *дар ҳамаи хати рости беохир меафзояд.*

Бигзор x_1 ва x_2 ададҳои ҳақиқии дилхоҳе бошанд, ки онҳо нобаробарии $x_1 < x_2$-ро қаноат менамоянд. Ададҳои α ва β-е ёфт мешаванд, ки онҳо нобаробариҳои $x_1 < \alpha < \beta < x_2$-ро қаноат менамоянд (ниг. ба тасдиқоте, ки дар охири п. 1 § 2-юми боби 2 исбот шуда буд). Аз таърифи функцияи нишондиҳандагӣ ва аз афзуншавии он (дар маҷмӯи ададҳои рационалӣ) нобаробарии $a^{x_1} < a^{\alpha} < a^{\beta} < a^{x_2}$, яъне $a^{x_1} < a^{x_2}$ ҳосил мешавад. Афзуншавандагии функцияи a^x исбот шуд.

4°. Акнун дар қимати дилхоҳи x-и хати рости беохир *бефосила будани* функцияи сохтагии мо a^x-ро исбот кардан лозим аст.

Фарз мекунем, ки $\{x_n\}$ пайдарпаии дилхоҳи ба x наздикшавандаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад. Исбот кардан кифоя аст, ки барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $n > N$ будан нобаробарии $|a^{x_n} - a^{x}| < \varepsilon$ дуруст аст.

$\varepsilon > 0$-и дилхоҳро қайд мекунем ва ададҳои рационалии α ва β-ро, ки нобаробариҳои (4.2)-ро қаноат менамоянд, чунон интихоб мекунем, ки нобарабарии $a^{\beta} - a^{\alpha} < \varepsilon$ дуруст бошад (имконияти интихоби чунин α ва β дар 2° исбот шуда буд). Азбаски пайдарпаии $\{x_n\}$ ба x наздик мешавад ва $\alpha < x < \beta$ мебошад, пас чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $\alpha < x_n < \beta$ дуруст аст. Аз нобаробариҳои $\alpha < x < \beta$ ва $\alpha < x_n < \beta$ ва аз хосиятҳои монотонии функцияи нишондиҳандагӣ натича мебарояд, ки $a^{\alpha} < a^{x_n} < a^{\beta}$ ва $a^{\alpha} < a^{x} < a^{\beta}$ (ҳангоми $n \geqslant N$ будан). Азбаски фарқи байни ададҳои a^{β} ва a^{α} аз ε хурд аст ва ҳар ду ададҳои a^{x} ва a^{x_n} дар байни a^{α} ва a^{β} воқеъ мебошанд, пас $|a^{x_n} - a^{x}| < \varepsilon$ ҳангоми $n \geqslant N$ будан). Исботи бефосилагӣ ба итмом расид.

Қайди 1. Агар $0 < a < 1$ бошад, онгоҳ $a = 1/b$, дар ин ҷо $b > 1$. Бинобар ин функцияи $y = a^x$-ро ҳангоми $0 < a < 1$ будан чун функцияи $y = b^{-x}$ $(b > 1)$ муайян кардан мумкин аст.

Баъзе хосиятҳои функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ $(a > 1)$-ро муқаррар мекунем.

1) Ҳама қиматҳои функцияи нишондиҳандагӣ мусбат мебошанд. Ҳақиқатан, фарз мекунем, ки x нуқтаи дилхоҳи хати рости ададӣ мебошад ва x' нуқтаи рационалиест, ки аз x хурд $(x' < x)$ аст. Азбаски, мувофиқи таъриф, $a^{x'} > 0$ ва $a^{x'} < a^{x}$ мебошад, пас $a^{x} > 0$ аст.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

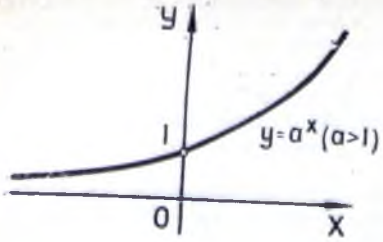
Воқеан, азбаски $a > 1$ мебошад, пас $a = 1 + \alpha$, дар ин ҷо $\alpha > 0$ ва $a^n = (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$. Пас, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$. Дар асоси монотонии функция $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. Азбаски $a^{-n} = 1/a^n$ аст, пас $\lim\limits_{n \to \infty} a^{-n} = 0$ ва, бинобар ин, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

3) Аз хосиятҳои 1) ва 2) ва, инчунин, аз монотонӣ ва бефосилагии функцияи $y = a^x$, дар асоси леммаи 1, натича мебарояд, ки *қиматҳои ин функция ҳамаи нимхати рости мусбати* $y > 0$*-ро пур мекунанд.*

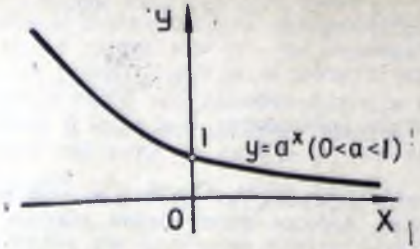
4) Барои ададҳои ҳақиқии дилхоҳи x_1 ва x_2 муносибатҳои зерин дурустанд:

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}, \quad a^{x_1} b^{x_1} = (a \cdot b)^{x_1}, \quad a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

Ҳақиқатан, мо дурустии ин муносибатҳоро барои нишондиҳандаҳои рационалӣ қайд кардем. Барои он ки ба дурустии ин муносибатҳо барои нишондиҳандаҳои дилхоҳ боварӣ ҳосил намоем, пайдарпаиҳои $\{x_n'\}$ ва $\{x_n''\}$-и ададҳои рационалиеро, ки мувофиқан ба x_1 ва x_2 наздик мешаванд, муоина кардан кифоя аст, Онгоҳ, масалан, $a^{x_n'} a^{x_n''} = a^{x_n' + x_n''}$. Ҳангоми $n \to \infty$ лимит мегирем ва хосияти бефосилагии функцияи нишондиҳандагиро истифода карда, мо $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$-ро ҳосил мекунем. Ҳамин тавр ба дурустии муносибатҳои дигари номбаршуда боварӣ ҳосил кардан мумкин аст.



Расми 4.9.



Расми 4.10.

Қайди 2. Мо хосиятҳои 1)—4)-и функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$, инчунин бефосилагӣ ва дар хати рости беохир барои мавриди $a > 1$ монотонӣ афзуншавии ин функцияро муқаррар кардем. Функцияи $y = a^x$ ҳангоми $0 < a < 1$ будан, дар асоси қайди 1, бефосила аст ва дар хати рости беохир монотонӣ кам мешавад. Ғайр аз он, хосиятҳои 1), 3) ва 4) барои ин функция дурустанд ва хосияти 2)-ро ин тавр модификация кардан (шаклашро дигаргун кардан) мумкин аст:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Дар расмҳои 4.9 ва 4.10 графики функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ барои мавридҳои $a > 1$ ва $0 < a < 1$ тасвир шудааст.

Қайди 3. Хосияти $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$-ро чун асоси таърифи функционалии функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ қабул кардан мумкин аст. Исбот кардан мумкин аст, ки функцияи $f(x)$, ки дар ҳамаи хати рости беохир муайян аст ва се талаботи зеринро қаноат менамояд, вуҷуд дорад ва, ғайр аз ин, ягона мебошад:

1) барои x_1 ва x_2-ҳои ҳақиқии дилхоҳ $f(x_1+x_2) = f(x_1)\,f(x_2)$;
2) $f(0) = 1, f(1) = a$, дар ин ҷо $a > 0$;
3) ҳангоми $x = 0$ бефосила аст.

Ҳамин аст функцияи дар боло сохташудаи a^x.

3. Функцияи логарифмӣ. *Сегменти дилхоҳи* $[c, d]$-и хати рости беохирро таҳқиқ мекунем. Функцияи $y = a^x$ дар ин сегмент монотонӣ ва бефосила мебошад. Бинобар ин, дар асоси натиҷаи леммаи 1, функцияи $y = f(x) = a^x$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$, ки дар ин ҷо $\alpha = a^c$, $\beta = a^d$ мебошад, ба функцияи чаппаи $x = f^{-1}(y)$ соҳиб мебошад, ки мо онро функцияи логарифмӣ меномем. Функцияи логарифмӣ ин тавр ишорат карда мешавад:

$$x = \log_a y.$$

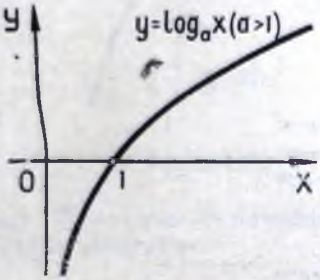
Барои ин функция ишорати аргумент y-ро ба x ва ишорати функция x-ро ба y иваз карда, мо функцияи

$$y = \log_a x$$

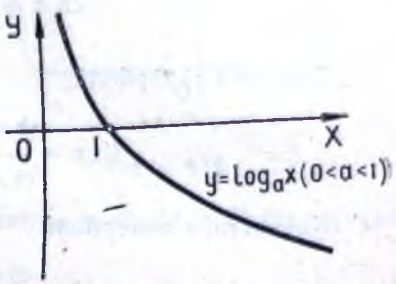
-ро ҳосил менамоем.

Хосиятҳои зерини функцияи логарифмиро, ки бевосита аз таърифи он бармеоянд, баён мекунем:

1°. Функцияи логарифмӣ дар ҳама қиматҳои мусбати x муайян аст. Ин натиҷаи он аст, ки аргументи функция қиматҳои функцияи нишондиҳандагиро ифода мекунад, ки онҳо дар асоси хосиятҳои 1) ва 3)-юми ин функция (ба пункти гузаштаниг.) фақат мусбатанд ва ҳамаи нимхати рости мусбати $x > 0$ пур мекунанд.



Расми 4.11.



Расми 4.12.

2°. Функцияи логарифмӣ бефосила аст ва он ҳангоми $a > 1$ будан дар ҳамаи нимхати рости кушодаи $x > 0$ меафзояд (ҳангоми $a < 1$ будан кам мешавад), дар айни ҳол ҳангоми $a > 1$ будан

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty.$$

Аз хосиятҳои функцияи нишондиҳандагӣ ва аз қайди 1-уми п. 2 § 4 натиҷа мебарояд, ки ин хосият дуруст аст.

3°. Барои ададҳои мусбати дилхоҳи x_1 ва x_2

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Ин хосият ҳам аз хосиятҳои функцияи нишондиҳандагӣ бармеояд.

Қайд. Функцияи логарифмии $y = \log_e x$-ро, ки дар ин ҷо $e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ мебошад, махсус қайд кардан лозим меояд. Мо барои ин функция ишорати $y = \ln x$-ро истифода мекунем. Функцияи логарифмии $y = \ln x$ дар математика ва татбиқоти он роли калон мебозад. Логарифмҳои асосашон e-ро *логарифмҳои натуралӣ* меноманд.

Дар расмҳои 4.11 ва 4.12 графики функцияи логарифмии $y = \log_a x$ барои мавридҳои $a > 1$ ва $0 < a < 1$ тасвир шудаанд.

4. Функцияҳои гиперболӣ. Функцияҳои зерин функцияҳои гиперболӣ номида мешаванд*:

1°. Синуси гиперболӣ

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2°. Косинуси гиперболӣ

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

3°. Тангенси гиперболӣ

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

4°. Котангенси гиперболӣ

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Аз таърифи функцияҳои гиперболӣ натиҷа мебарояд, ки синуси гиперболӣ, косинуси гиперболӣ ва тангенси гиперболӣ дар ҳамаи хати рости ададӣ дода шудаанд. Котангенси гиперболӣ дар ҳамаи хати рост, ба ғайр аз адади $x = 0$, муайян аст.

Функцияҳои гиперболӣ дар ҳар як нуқтаи соҳаи дода шудаашон бефосила мебошанд (ин аз бефосилагии функцияҳои нишондиҳандагӣ ва теоремаи 4.2 бармеояд).

Функцияҳои гиперболӣ ба чандин хосиятҳое соҳиб мебошанд, ки онҳо ба хосиятҳои функцияҳои тригонометрӣ монанданд. Масалан, барои функцияҳои гиперболӣ теоремаи ҷамъ мавкеъ дорад, ки он ба теоремаи ҷамъи функцияҳои тригонометрӣ монанд аст. Яъне:

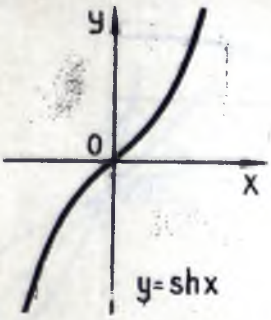
$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Дар расмҳои 4.13—4.16 графики функцияҳои гиперболӣ тасвир шудаанд.

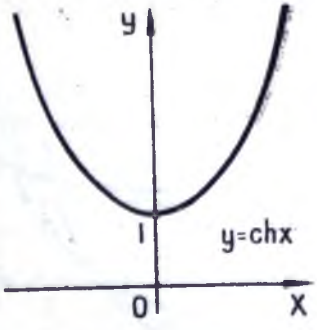
5. Функцияи дараҷагии нишондиҳандааш ададӣ ҳақиқии дилхоҳи α. Фарз мекунем, ки α ададӣ ҳақиқии дилхоҳ мебо-

---

* Номи «функцияҳои гиперболӣ» бо он шарҳ дода мешавад, ки функцияҳои геометрии $y = \operatorname{sh} x$ ва $y = \operatorname{ch} x$-ро аз муоинаи гиперболаи баробарпаҳлу аз рӯи ҳамон қоидаҳое муайян кардан мумкин аст, ки аз рӯи онҳо функцияҳои $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ аз муоинаи давраи воҳидӣ муайян карда мешуд.



Расми 4.13.



Расми 4.14.

шад. *Функцияи дараҷагии* умумии $y = x^\alpha$ $(x > 0)$-ро ин тавр муайян мекунем:

$$y = x^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \log_a x} \qquad (a > 1).$$

Аз таърифи функцияи дараҷагӣ натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $\alpha > 0$ будан он функцияи афзуншаванда ва ҳангоми $\alpha < 0$ будан функцияи камшаванда мебошад.

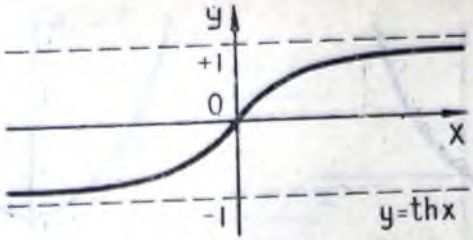
Қимати лимитии функцияи дараҷагиро ҳангоми $x \to 0 + 0$ муоина мекунем. Исбот мекунем, ки

$$\lim_{x \to 0+0} x^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ ҳангоми } \alpha > 0 \text{ будан,} \\ +\infty \text{ ҳангоми } \alpha < 0 \text{ будан.} \end{cases}$$

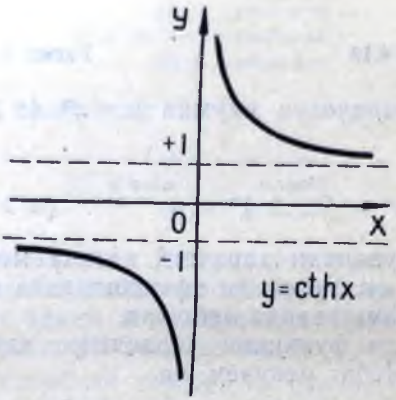
Ҳақиқатан, бигзор $\{x\}$ пайдарпаии дилхоҳи аз рост ба нуль наздикшавандаи қиматҳои аргументи x бошад. Азбаски $\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = -\infty$ мебошад, пас аз хосиятҳои функцияи нишондиҳандагӣ натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $\alpha > 0$ будан $\lim_{n\to\infty} a^{\alpha \log_a x_n} = 0$ ва ҳангоми $\alpha < 0$ будан $\lim_{n\to\infty} a^{\alpha \log_a x_n} = +\infty$ аст.

Акнун фарз кардан табиист, ки ҳангоми $\alpha > 0$ будан $0^\alpha = 0$ мебошад ва ин ифодаро ҳангоми $\alpha \leqslant 0$ будан номуайян пиндоштан мумкин аст.

Дар нуқтаи дилхоҳи x-и нимхати рости беохири мусбат $(x > 0)$ *бефосила будани* функцияи дараҷагиро исбот мекунем. Барои ин муқаррар кардан кифоя аст, ки ин функция дар ҳар як нуқтаи x-и нимхати рости номбаршуда аз чап ва аз рост бефосила мебошад (ба қайди п. 1 § 3 нигар.). Масалан, дар нуқтаи x аз чап бефосила будани ин функцияро исбот мекунем (аз рост бефосила будан ҳамин тавр исбот карда мешавад). Дар айни ҳол барои муайянӣ $\alpha > 0$ мепиндорем. Ба фор-



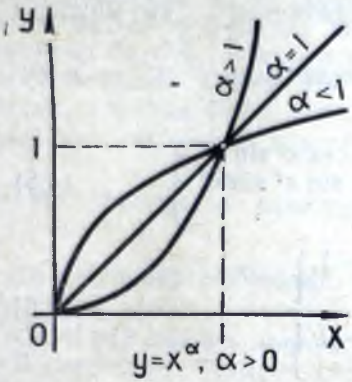
Расми 4.15.



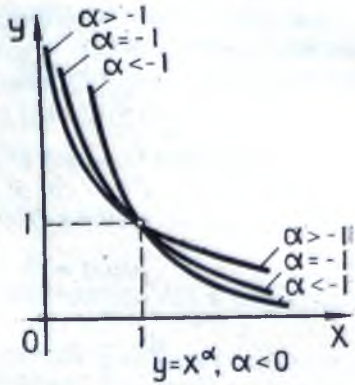
Расми 4.16.

мулаи $y = x^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x}$ $(a > 1)$ муроҷиат мекунем. Бигзор $\{x_n\}$ пайдарпаии дилхоҳи аз чап ба x наздикшавандаи қиматҳои аргументи функцияи дараҷагие бошад, ки $x_n < x$ аст. Азбаски функцияи дараҷагӣ бефосила аст, пас пайдарпаии $\{u_n\}$, ки дар ин ҷо $u_n = \alpha \log_a x_n$ мебошад, ба $u = \alpha \log_a x$ наздик мешавад, дар айни ҳол ҳама элементҳои u_n аз u тафовут доранд (воқеан, азбаски ҳангоми $a > 1$ будан функцияи логарифмӣ меафзояд, пас нобаробарии $u_n < u$ дуруст аст). Дар асоси бефосилагии функцияи нишондиҳандагӣ пайдарпаии $\{a_n{}^{u}\}$ ба a^{u} наздик мешавад. Ба ибораи дигар, пайдарпаии $\{a^{\alpha \log_a x_n}\}$, ки пайдарпаии $\{x_n{}^{\alpha}\}$-и қиматҳои функцияи дараҷагии ба пайдарпаии мувофиқро ифода мекунад, ба $a^{\alpha \log_a x}$, яъне ба x^{α} наздик мешавад. Дар нуқтаи $x > 0$ аз чап бефосила будани функцияи дараҷагӣ исбот шуд. Дар нуқтаи $x > 0$ аз рост бефосила будани ин функция айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад. Лекин дар нуқтаи x аз чап ва аз рост бефосила будани функция чунин маъно дорад, ки функция дар ин нуқта бефосила мебо-

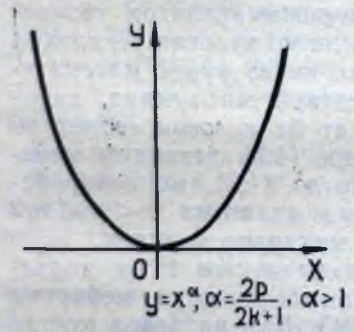
шад. Бояд қайд кард, ки агар $\alpha > 0$ бошад, онгоҳ функцияи дараҷагии $y = x^{\alpha}$ дар нуқтаи $x = 0$ ҳам бефосила мебошад.



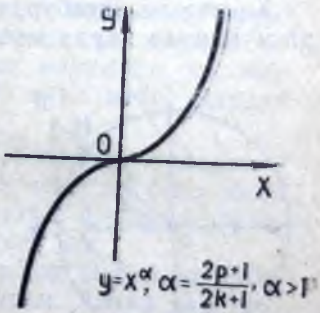
Расми 4.17.



Расми 4.18.



Расми 4.19.



Расми 4.20.

Қайд. Агар нишондиҳандаи α-и функцияи дараҷагӣ ададӣ рационалии m/n (дар ин ҷо n — ададӣ бутуни тоқ)-ро ифода намояд, онгоҳ барои $x < 0$

$y = |x|^{\alpha}$, агар $\alpha = m/n$ ва m ададӣ ҷуфт бошад,

$y = -|x|^{\alpha}$, агар $\alpha = m/n$ ва m ададӣ тоқ бошад,

пиндошта, функцияи дараҷагии $y = x^{\alpha}$-ро муайян кардан мумкин аст.

Дар расмҳои 4.17—4.20 графики функцияи дараҷагии $y = x^{\alpha}$ барои қиматҳои гуногуни α тасвир шудаанд.

6. Функцияҳои тригонометрӣ. Дар курси математикаи элементарӣ функцияҳои тригонометрии $y = \sin x$ ва $y = \cos x$* бо ёрии тасвироти геометрии аёнӣ чорӣ ва муайян шуда буданд.

Баъзе хосиятҳои функцияҳои тригонометриро, ки минбаъд лозим мешаванд, номбар мекунем:

1°. Ҳангоми дилхоҳ будани ададҳои ҳақиқии x', x'' ва x муносибатҳои зерин дурустанд:

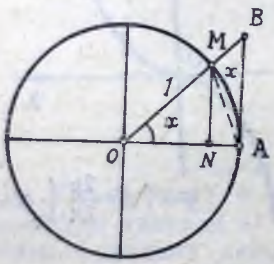
$$\left.\begin{aligned} \sin(x' + x'') &= \sin x' \cos x'' + \cos x' \sin x'', \\ \cos(x' + x'') &= \cos x' \cos x'' - \sin x' \sin x'', \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

2°.
$$\left.\begin{aligned} \sin 0 = 0; \quad \cos 0 = 1, \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

3°. Агар $0 < x < \pi/2$ бошад, онгоҳ

$$0 < \sin x < x. \qquad (4.7)$$

Хосиятҳои номбурда ба воситаи муҳокимаронӣҳои геометрӣ муқаррар карда мешаванд. Мо дар ин ҷо хулосаи хосиятҳои 1° ва 2°-ро, ки аз курси математикаи элементарӣ маълуманд, намеорем. Фақат ба *хулосаи геометрии* нобаробарии (4.7) таваққуф менамоем. Ғайр аз (4.7), мо нобаробарии $x < \operatorname{tg} x$ (ҳангоми $0 < x < \pi/2$ будан)-ро муқаррар мекунем.



Расми 4.21.

Давраи радиусаш 1 ва марказаш нуқтаи O-ро дида мебароем (расми 4.21). Дар ин давра нуқтаи A дода шудааст. Аз нуқтаи A ба муқобили ҳаракати акрабаки соат камони даврароро ҳисоб мекунем.

---

* Функцияҳои тригонометрии боқимонда $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ ва $y = \operatorname{cosec} x$ ба воситаи $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ муайян карда мешаванд:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Таърифи функцияҳои $\sin x$ ва $\cos x$ бо ёрии тасвироти геометрии аёнӣ аз ҷиҳати мантиқӣ бенуқсон намебошанд, чунки дар ин ҳангом имконияти барои ҳама қиматҳои ҳақиқии аргументи x муайян кардани ин функцияҳо ба имконияти дар байни ҳама нуқтаҳои давраи воҳидӣ ва ҳама ададҳои ҳақиқии сегменти $[0, 2\pi]$ муқаррар кардани мувофиқати баҳам якқимата меорад.

Фарз мекунем, ки M нуқтаи давра мебошад ва он дар чорякии якум воқеъ аст; x — дарозии камони $\overset{\smile}{AM}$, $0 < x < \pi/2$ (x — ченаки радиании кунҷи AOM), N — асоси перпендикуляресте, ки аз M ба OA фуроварда шудааст; B — нуқтаи буриши перпендикуляр ба OA, ки аз нуқтаи A ба давоми порчаи OM гузаронида шудааст. Онгоҳ $MN = \sin x$, $ON = \cos x$, $AB = \operatorname{tg} x$. Азбаски секунҷаи OMA дар сектори OMA воқеъ аст ва, дар навбати худ, ин сектор дар секунҷаи OBA воқеъ мебошад, ва масоҳати фигураҳои номбурда мувофиқан ба $\frac{1}{2}\sin x$, $\frac{x}{2}$ ва $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ баробар мебошанд, пас нобаробариҳои $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $0 < x < \pi/2$ мавқеъ доранд. Дар қиматҳои номбурдаи x $\sin x > 0$ мебошад. Ҳамин тариқ, дурустии нобаробариҳои $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ (ҳангоми $0 < x < \pi/2$ будан) муқаррар карда шуд.

Хосиятҳои 1°, 2°, 3°-ро чун асоси таърифи функцияҳои $\sin x$ ва $\cos x$ қабул кардан мумкин аст. *Чуфти функцияҳое, ки барои ҳама қиматҳои ҳақиқии аргумент муайян мебошанд, вуҷуд доранд ва, бар замми ин, ягонаанд; функцияи якумро бо* $\sin x$ *ва функцияи дуюмро бо* $\cos x$ *ишорат менамоем, ки онҳо талаботи* 1°, 2°, 3°-*ро қаноат менамоянд*; инро исбот кардан мумкин аст.

Исботи ин тасдиқот дар иловаи ҳамин боб дода шудааст.

Аз хосиятҳои 1°, 2° ва 3°-и функцияҳои $\sin x$ ва $\cos x$ ҳама хосиятҳои аз курси математикаи элементарӣ маълуми функцияҳои тригонометриро* ҳосил кардан мумкин аст.

Дар ҳар як нуқтаи соҳаи дода шуданашон *бефосила будани* функцияҳои тригонометриро исбот мекунем. Аввал дар нуқтаи $x = 0$ бефосила будани функцияи $y = \sin x$-ро муқаррар мекунем. Бигзор пайдарпаии дилхоҳи ба нуқтаи $x = 0$ аз рост наздикшавандаи қиматҳои аргументи x бошад. Аз нобаробарии (4.7): $0 < \sin x_n < x_n$. Аз ин ҷо, дар асоси теоремаи 3.14, натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\{\sin x_n\}$ лимити ба нуль баробар дорад. Ҳамин тариқ, $\lim\limits_{x \to 0+0} \sin x = \sin 0 = 0$. Азбаски ҳангоми $(-\pi/2) < x < 0$ будан нобаробарии $x < \sin x < 0$** дуруст аст, пас ҳамин тавр муҳокима ронда, $\lim\limits_{x \to 0-0} \sin x = \sin 0$-ро ҳосил мекунем. Мо муқаррар кардем, ки функцияи $y = \sin x$ дар нуқтаи $x = 0$ аз рост ва аз чап бефосила мебошад, яъне ин функ-

---

* Масалан, баробариҳои $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.

** Ин нобаробариҳо аз нобаробариҳои (4.7) бо ёрии x-ро ба $-x$ иваз кардан ва ба эътиборгирии формулаи $\sin(-x) = -\sin x$ ҳосил карда мешаванд.

ция дар нуқтаи мазкур бефосила аст. Барои дар нуқтаи дилхоҳи x-и хати рости беохир бефосила будани функцияи $y = \sin x$-ро исбот кардан формулаи $\sin x'' - \sin x' = 2\cos\frac{x''+x'}{2} \times \sin\frac{x''-x'}{2}$-ро истифода мекунем, ки инро аз формулаи (4.5) ҳосил кардан мумкин аст. Бигзор $\{x_n\}$ пайдарпаии дилхоҳи ба x наздикшавандаи қиматҳои аргумент бошад. Дар формулаи охирин $x'' = x_n$ ва $x' = x$ фарз карда, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\lim_{n\to\infty}(\sin x_n - \sin x) = 2\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x_n+x}{2}\sin\frac{x_n-x}{2} = 0.$$

Дурустии ин хулоса аз он бармеояд, ки пайдарпаии $\left\{\cos\frac{x_n+x}{2}\right\}$ маҳдуд аст* ва пайдарпаии $\left\{\sin\frac{x_n-x}{2}\right\}$, дар асоси исботи болоӣ пайдарпаии беохир хурд мебошад.

Бефосилагии функцияи $y = \cos x$ бо ёрии ҳамингуна муҳокимаронӣ аз формулаи

$$\cos x'' - \cos x' = -2\sin\frac{x''+x'}{2}\sin\frac{x''-x'}{2}$$

мукаррар карда мешавад.

Дар ҳар як нуқтаи соҳаи дода шуданашон *бефосила буданиҳ функцияҳои тригонометрии боқимонда* ($\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$) аз теоремаи 4.2 бармеояд.

Соҳаи дода шудани ҳар як функцияи тритонометрӣ** дар қитъаҳои монотонии ин функция тақсим мешавад. Функцияи $y = \sin x$ дар ҳар як сегменти $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$*** меафзояд

---

* Формулаи сеюми (4.5) имконият медиҳад, ки чунин хулоса барорем: $|\cos x| \leqslant 1$ ва $|\sin x| \leqslant 1$. Аз ин ҷо маҳдудиятии пайдарпаии $\left\{\cos\frac{x_n+x}{2}\right\}$ возеҳ аст.

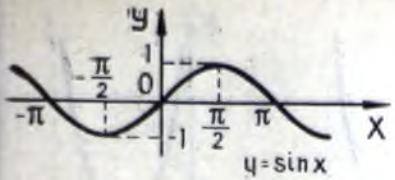
** Дар сегментҳои мувофиқ монотонӣ будани функцияҳои $\sin x$ ва $\cos x$-ро аз формулаҳои

$$\sin x'' - \sin x' = 2\cos\frac{x''+x'}{2}\sin\frac{x''-x'}{2},$$

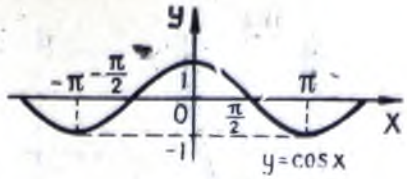
$$\cos x'' - \cos x' = -2\sin\frac{x''+x'}{2}\sin\frac{x''-x'}{2}$$

мукаррар кардан осон аст.

*** Дар ин ҷо k адади бутуни дилхоҳро ифода мекунад.



Расми 4.22.

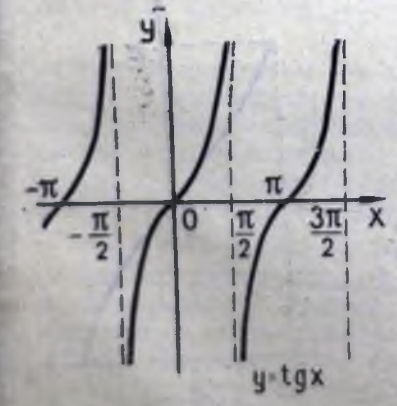


Расми 4.23.

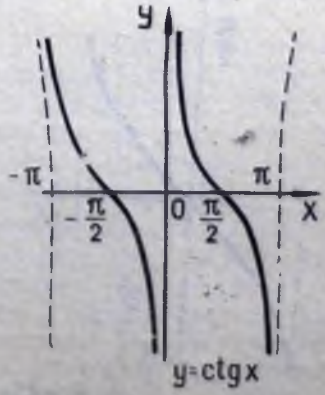
ва дар ҳар як сегменти $[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]$ кам мешавад. Функцияи $y = \cos x$ дар ҳар як сегменти $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ меафзояд ва дар ҳар як сегменти $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ кам мешавад. Функцияи $y = \operatorname{tg} x$ дар ҳар як интервали $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ меафзояд. Функцияи $y = \operatorname{ctg} x$ дар ҳар як интервали $((k-1)\pi, k\pi)$ кам мешавад. Шумо, хонандаи мӯҳтарам, соҳаи афзуншавӣ ва соҳаи камшавии функцияҳои $y = \sec x$ ва $y = \operatorname{cosec} x$-ро бе ҳеҷ мушкилӣ муқаррар карда метавонед.

Дар расмҳои 4.22—4.27 графики функцияҳои тригонометрӣ тасвир шудаанд.

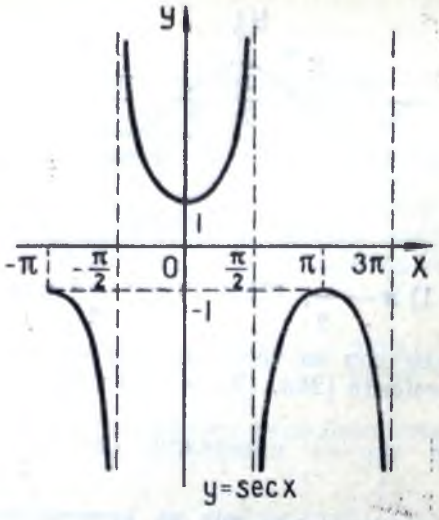
7. Функцияҳои тригонометрии чаппа. Функцияи $y = \arcsin x$ ба таври зерин муайян карда мешавад. Функцияи $y = \sin x$-ро дар сегменти $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ муоина мекунем. Мо дар пункти гузаш-



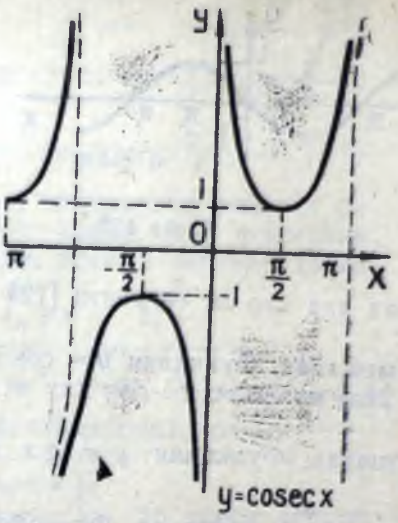
Расми 4.24.



Расми 4.25.

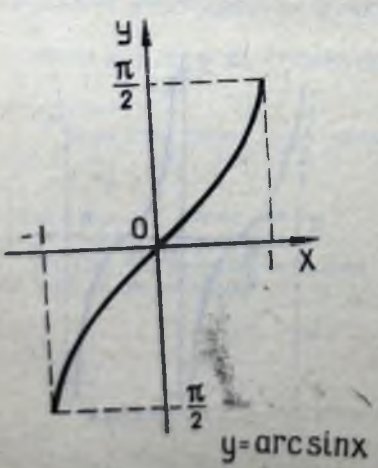


Расми 4.26.



Расми 4.27.

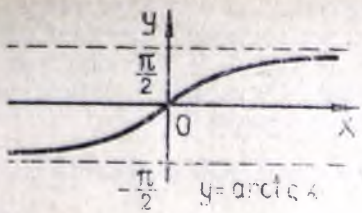
та қайд кардем, ки функцияи $y = \sin x$ дар ин сегмент меафзояд, бефосила аст ва сегменти $[-1, 1]$ маҷмӯи қиматҳояш мебошад. Дар асоси натиҷаи леммаи 1 дар сегменти $[-1, 1]$ барои функцияи $y = \sin x$ функцияи чаппаи анфзуншавандаи бефосила вуҷуд дорад. Мо ин функцияро бо $x = \arcsin y$ ишорат мекунем, Барои ин функция ишорати аргумент y-ро ба x ва ишорати функция x-ро ба y иваз карда, функцияи $y = \arcsin x$-ро ҳосил мекунем. Дар расми 4.28 графики ин функция тасвир шудааст.



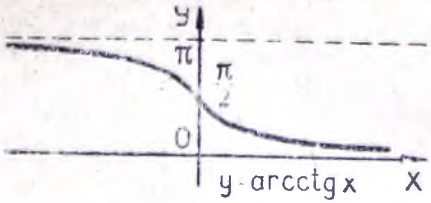
Расми 4.28.



Расми 4.29.



Расми 4.30.



Расми 4.31.

Функцияи $y = \arccos x$ айнан ҳамин тавр муайян карда мешавад. Сегменти $[-1, 1]$ соҳаи дода шудан ва сегменти $[0, \pi]$ маҷмӯи қиматҳояш мебошад. Ин функция дар сегменти $[-1, 1]$ кам мешавад ва бефосила мебошад. Дар расми 4.29 графики функцияи $y = \arccos x$ тасвир шудааст.

Функцияҳои $y = \operatorname{arctg} x$ ва $y = \operatorname{arcctg} x$ чун функцияҳои чаппаи тангенс ва котангенс муайян карда мешаванд. Ин функцияҳо дар хати рости беохир муайян, монотонӣ ва бефосила мебошанд. Дар расмҳои 4.30 ва 4.31 графики ин функцияҳо тасвир шудаанд.

§ 6. Қиматҳои лимитии баъзе функцияҳо

1. Қайди пешакӣ. Дар боби 1 гуфта будем, ки барои ҳисоб кардани ҳосилаи функцияҳои $y = \sin x$ ва $y = \log_a x$ мавҷудияти қиматҳои лимитии (ё лимити) функцияи $\dfrac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ ва функцияи $\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ ва ҳангоми аз нуль калон будани x-и қайдшуда $(x > 0)$-и исбот кардан лозим аст. Ҳамин параграф ба ҳамин масъала бахшида шудааст. Доир ба қимати лимитии функцияе, ки дар байни ду функцияи соҳиби қиматҳои лимитии умумӣ (дар нуқтаи додашуда) вокеанд, чумлаеро баён кардан лозим меояд. Ин чумла бо теоремаи 3.14 аз ҷиҳати функционалӣ монанд аст.

Леммаи 3. Бигзор дар ягон δ-атрофи нуқтаи a (эҳтимол, ба ғайр аз худи нуқтаи a) функцияҳои $f(x)$, $g(x)$ ва $h(x)$ дода шуда бошанд, дар айни ҳол функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар нуқтаи a қиматҳои лимитии якхелаи ба b баробар доранд. Агар дар атрофи номбурдаи нуқтаи a (эҳтимол, ба ғайр аз худи нуқтаи a) нобаробарии $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ иҷро шавад, онгоҳ дар нуқтаи a қимати лимитии функцияи $h(x)$ вуҷуд дорад ва он ба b баробар мебошад.

Исбот. Бигзор $\{x_n\}$ пайдарпаии дилхоҳи ба a наздикшавандаи қиматҳои аргументи x бошад, ки элементи x_n-умаш дар δ-атрофи номбурдаи нуқтаи a воқеъ аст ва ба a баробар нест; $\{f(x_n)\}$, $\{f(x_n)\}$, $\{h(x_n)\}$ — пайдарпаиҳои мувофиқи қиматҳои функцияҳои $f(x)$, $g(x)$ ва $h(x)$. Мувофиқи шарт

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = b; \quad f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n).$$

Лекин, онгоҳ, дар асоси теореми 3.14, $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = b$. Азбаски $\{x_n\}$ пайдарпаии дилхоҳи ба a наздикшавандаи қиматҳои аргумент мебошад, пас баробарии охирин чунин маъно дорад, ки $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ мебошад. Лемма исбот шуд.

2. **Қимати лимитии функцияи $\dfrac{\sin x}{x}$ * дар нуқтаи $x = 0$ (лимити аҷоиби якум).** Теоремаи зеринро исбот мекунем.

Теорема 4.4. *Қимати лимитии функцияи* $\dfrac{\sin x}{x}$ *дар нуқтаи* $x = 0$ *вуҷуд дорад ва ба* 1 *баробар мебошад*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{4.8}$$

Исбот. Мо қайд карда будем, ки ҳангоми $0 < x < \pi/2$ будан нобаробариҳои $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ дурустанд (ба п. 6-уми параграфи гузашта нигаред). Ин нобаробариҳоро аъзо ба аъзо ба $\sin x$ тақсим мекунем:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{ё} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Нобаробарии охирин барои қиматҳои x, ки шарти $-\dfrac{2}{\pi} < x < 0$-ро қаноат менамоянд, низ дуруст мебошанд. Барои ин боварӣ ҳосил кардан $\cos x = \cos(-x)$ ва $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{-x}$

---

* Мо дар бораи функцияи $\dfrac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}$ сухан ронда будем. Агар $\Delta x/2$-ро бо x ишорат намоем, функцияи $\dfrac{\sin x}{x}$-ро ҳосил мекунем. Дар ин ишорат шарти $\Delta x \to 0$ ба шарти $x \to 0$ меорад.

буданаш кифоя аст. Азбаски $\cos x$ функцияи бефосила мебошад, пас $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ аст. Ҳамин тариқ, барои функцияҳои $\cos x$, 1 ва $\dfrac{\sin x}{x}$ дар ягон δ-атрофи нуқтаи $x = 0$ ҳама шартҳои леммаи 3 ичро мешаванд (барои ба ин боварӣ ҳосил кардан $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1$ ва $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ишорат мекунем ва фарз менамоем, ки $\delta = \dfrac{\pi}{2}$ аст). Пас, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x =$ $= 1$. Теорема исбот шуд.

3. Қимати лимитии функцияи $(1+\dfrac{1}{x})^x$ ҳангоми $x\to\infty$ (лимити аҷоиби дуюм)*. Теореман зеринро исбот мекунем.

Теорема 4.5. *Қимати лимитии функцияи* $f(x) = (1 + \dfrac{1}{x})^x$ *ҳангоми* $x \to \infty$ *вуҷуд дорад ва ба* e *баробар мебошад:*

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e. \tag{4.9}$$

Исбот. Пайдарпаии беохир калони $\{x_k\}$-и қиматҳои аргументи функцияи $f(x) = (1 + \dfrac{1}{x})^x$ чи хеле ки бошад, пайдарпаии мувофиқи $\{f(x_k)\}$-и қиматҳои ин функция лимите дорад, ки он адади e мебошад. Чор гурӯҳи пайдарпаиҳои беохир калони қиматҳои аргументи x-ро муоина мекунем:

---

* Масъалаи пештар номбурдаи қимати лимитии функцияи $(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{x/\Delta x}$ ҳангоми ба нуль майл кардани Δx ва аз нуль калон будани x-и қайдшуда $(x > 0)$ ба ҳамин масъала меорад. Ҳақиқатан, агар фарз кунем, ки $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{1}{u}$ аст, онгоҳ ҳангоми $\Delta x \to 0$ $u \to \infty$ ва $(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{x/\Delta x} = (1+\dfrac{1}{u})^u$ ва ин функция фақат бо ишорати аргумент аз функцияи $(1+\dfrac{1}{x})^x$ тафовут дорад.

1°. Пайдарпаиҳои беохир калони $\{n_k\}$, ки ададҳои мусбати бутун элементҳои онҳо мебошанд. Масалан, пайдарпаии

$$2, 2, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 4, 4, \ldots, n+1, n+1, n, n, \ldots$$

ба ин гурӯҳ тааллуқ дорад.

2°. Пайдарпаиҳои беохир калоне, ки элементҳояшон, аз ягон номер сар карда, аз ададҳои ҳақиқии мусбат иборатанд.

3°. Пайдарпаиҳои беохир калоне, ки элементҳояшон, аз ягон номер сар карда, аз ададҳои ҳақиқии манфӣ иборатанд.

4°. Пайдарпаиҳои беохир калоне, ки дорои ҳам ададҳои ҳақиқии мусбат ва ҳам ададҳои ҳақиқии манфии беохир бисьёр мебошанд*.

Пайдарпаии дилхоҳи беохир калони қиматҳои аргумент ба яке аз гурӯҳҳои 1°, 2°, 3°, 4° тааллуқ дорад. Бинобар ин, агар исботро барои ҳар як гурӯҳи 1°, 2°, 3°, 4° иҷро намоем, теорема исбот мешавад. (Дар айни ҳол пайдарпаиҳои гурӯҳи 1 характери ёрирасон доранд.) Бигзор $\{n_k\}$ ягон пайдарпаии гурӯҳи якум бошад. Исбот мекунем, ки $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e$. Бигзор ε адади мусбати дилхоҳ бошад. Азбаски $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ аст (ба п. 4 § 3 боби 3 нигаред), пас чунин номери N^*-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n\geqslant N^*$ будан нобаробарии

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right|<\varepsilon$$

иҷро мешавад. Азбаски пайдарпаии $\{n_k\}$ беохир калон аст ва ададҳои мусбати бутун элементҳои он мебошанд, пас барои адади мусбати N^* чунин номери N-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $k\geqslant N$ будан шарти $n_k\geqslant N^*$ иҷро мешавад. Лекин барои чунин n_k-ҳои бутун, чунон ки қайд шуд, нобаробарии

$$\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}-e\right|<\varepsilon$$

иҷро мешавад.

---

* Азбаски функцияи $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ дар сегменти $[-1, 0]$ муайян нест (чун ки барои қиматҳои x-и ин сегмент ифодаи $\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ё манфӣ аст, ё маъно надорад), пас чунин ҳисобидан табиист, ки элементҳои пайдарпаиҳои 2°, 3°, 4° ба сегменти $[-1, 0]$ тааллуқ надоранд.

Пас,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e.$$

Акнун пайдарпаиҳои гурӯҳи дуюмро мебинем. Бигзор $\{x_k\}$ пайдарпаии дилхоҳи гурӯҳ бошад ва N номере бошад, ки, аз он сар карда, ҳама элементҳои ин пайдарпай аз 1 калон аст. $k \geqslant N$ пиндошта, қисми бутуни x_k-ро бо n_k ишорат мекунем, $n_k = [x_k]$. Онгоҳ

$$n_k \leqslant x_k < n_k + 1. \tag{4.10}$$

Пайдарпаиҳои $\{n_k\}$ ва $\{n_k + 1\}$ пайдарпаиҳои гурӯҳи якумро ифода мекунанд. Аз нобаробариҳои (4.10) чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \leqslant \frac{1}{n_k}$$

ё

$$1+\frac{1}{n_k+1} < 1+\frac{1}{x_k} \leqslant 1+\frac{1}{n_k}.$$

Аз ин ҷо нобаробарии (4.10)-ро маротибаи дуюм истифода карда, чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{4.11}$$

Лимити пайдарпаиҳои $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}\right\}$ ва $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}\right\}$ ба e баробаранд. Ҳақиқатан, аз ин пайдарпаиҳо якумашро ба намуди ҳосили зарби пайдарпаиҳои $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{m_k+1}\right\}$ ва $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}\right\}$* навиштан мумкин аст, ки лимити онҳо мувофиқан ба e ва 1 баробар мебошанд. Пайдарпаии дуюм ҳосили зарби пайдарпаиҳои $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ ва $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right\}$-ро

* Дар айни ҳол ба эътибор гирифта мешавад, ки $\{n_k\}$ ба гурӯҳи якум тааллуқ дорад.

ифода мекунад, лимити онҳо мувофиқан ба e ва 1 баробар мебошанд. Дар асоси нобаробариҳои (4.11) аз теоремаи 3.14 чунин формуларо ҳосил мекунем:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

Пайдарпаиҳои гурӯҳи сеюмро муоина мекунем. Агар $\{x_k\}$ пайдарпаии беохир калоне бошад, ки элементҳояш, аз ягон номер сар карда, манфианд, онгоҳ пайдарпаии $\{z_k\}$ (дар ин ҷо $z_k=-1-x_k$) пайдарпаии беохир калон мебошад ва элементҳояш, аз ягон номер сар карда, аз ададҳои ҳақиқии мусбат иборатанд. Бинобар ин пайдарпаии гурӯҳи дуюм мебошад. Азбаски

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1+\frac{1}{z_k}\right)^{z_k+1}$$

ва

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)^{x_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)^{z_k}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=e$$

мебошад, пас

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

Барои ба итмом расонидани исбот мо бояд пайдарпаиҳои гурӯҳи чорумро муоина намоем. Бигзор $\{x_k\}$ чунин пайдарпай бошад. Таҳтпайдарпаии ин пайдарпаиро, ки аз ҳама элементҳои ғайриманфии пайдарпаии $\{x_k\}$ ташкил шудааст, бо $\{x_k'\}$ ишорат мекунем. Таҳтпайдарпаиеро, ки аз ҳама элементҳои манфии пайдарпаии $\{x_k\}$** ташкил шудааст, бо $\{x_k''\}$ ишорат менамоем. Азбаски мувофиқи исбот

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k'}\right)^{x_k'}=e \text{ ва } \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k''}\right)^{x_k''}=e$$

мебошад, пас барои $\varepsilon>0$-и дилхоҳ чунин номери N-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $k\geqslant N$ будан

$$\left|\left(1+\frac{1}{x_k'}\right)^{x_k'}-e\right|<\varepsilon \text{ ва } \left|\left(1+\frac{1}{x_k''}\right)^{x_k''}-e\right|<\varepsilon$$

---

* Ин элементҳо, аз ягон номер сар карда, қатъӣ мусбат мебошанд.

** Мо дар ин ҷо, тафовутан аз боби 3, таҳтпайдарпаиҳои нитихобшударо бо аломатҳои $'$ ва $''$ нишона мекунем, дар айни ҳол дар элементи таҳтпайдарпай ҳамон номереро, ки дар пайдарпаии $\{x_k\}$ сохиб буд, нигоҳ медорем.

аст, яъне ҳангоми $k \geqslant N$ будан

$$\left|\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}-e\right|<\varepsilon.$$

Пас,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

Теорема исбот шуд.

Қайд. Аз теоремаи исбот шуда натиҷа мебарояд, ки

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Воқеан, бигзор $\{x_n\}$ пайдарпаии дилхоҳи ба нуль наздикшавандаи қиматҳои аргументи функцияи $(1+x)^{1/x}$ бошад, ки элементи x_n-умаш аз нуль тафовут дорад. Онгоҳ пайдарпаии $\{z_n\}$, ки дар ин ҷо $z_n = 1/x_n$ аст, пайдарпаии беохир калон мебошад (ба теоремаи 3.6 ниг.). Азбаски

$$(1+x_n)^{1/x_n}=\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n} \text{ ва } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n}=e$$

аст, пас

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n}=e,$$

ва, бинобар ин,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

§ 7. Бефосилагӣ ва қиматҳои лимитии баъзе функцияҳои мураккаб

1. Бефосилагӣ ва қиматҳои лимитии баъзе функцияҳои мураккаб. Бефосилагии баъзе функцияҳои мураккабро исбот мекунем.

1°. Фарз мекунем, ки $x=\varphi(t)$ ва $y=f(x)$ функцияҳои элементарии соддатарин мебошанд (ба § 5 ниг.), дар айни ҳол маҷмӯи қиматҳои $\{x\}$-и функцияи $x=\varphi(t)$ соҳаи дода шудани функцияи $y=f(x)$ мебошад. Аз натиҷаҳои § 5 натиҷа мебарояд, ки функцияҳои элементарии соддатарин дар ҳар як нуқтаи соҳаи дода шуданашон бефосила мебошанд. Бинобар ин, дар асоси теоремаи 4.3, функцияи мураккаби $y=f[\varphi(t)]$, яъне суперпозицияи ду функцияи элементарӣ бефосила аст. Масалан,

функцияи $y = \sin\frac{1}{x}$ дар нуқтаи дилхоҳи $x \neq 0$ бефосила ме-

бошад. Барои ба ин боварӣ ҳосил кардан муоинаи функцияҳои $x = t^{-1}$ ва $y = \sin x$ кифоя аст. Функцияи мураккаби $y = \sin^{-1}$

фақат бо ишорати аргументаш аз функцияи $y = \sin\frac{1}{x}$ тафовут

дорад ва, дар асоси гуфтаҳои болоӣ, дар нуқтаи дилхоҳи $t \neq 0$ бефосила мебошад. Ҳамин тавр муҳокима ронда, бовар кардан осон аст, ки функцияи $y = \ln \sin x$ дар нуқтаи дилхоҳи ҳар як интервали $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$* бефосила аст.

2°. Ифодаҳои дараҷагию нишондиҳандагии $u(x)^{v(x)}$.

Фақат мавриди $u(x) > 0$ маъно дорад. Бовар кардан осон аст, ки агар $u(x)$ ва $v(x)$ дар нуқтаи a бефосила бошанд ва дар атрофи нуқтаи a $u(x) > 0$ бошад, онгоҳ функцияи $u(x)^{v(x)}$ ҳам дар нуқтаи a бефосила мебошад.

Воқеан, $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$. Азбаски $\ln u(x)$ функцияи дар нуқтаи a бефосиларо ифода мекунад, пас функцияи $v(x) \ln u(x)$ ҳам дар нуқтаи a бефосила мебошад. Лекин, онгоҳ, функцияи $e^{v(x)\ln u(x)}$ дар нуқтаи a бефосила мешавад. Хосиятҳои мукарраршудаи бефосилагӣ барои дар асоси фарзиятҳо тасдиқ кардани $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = u(a)^{v(a)}$ имконият медиҳанд.

3°. Қиматҳои лимитии ифодаҳои дараҷагию нишондиҳандагӣ.

Масъалаи қиматҳои лимитии ифодаҳои дараҷагию нишондиҳандагии $u(x)^{v(x)}$ ҳангоми $x \to a$-ро аниқ мекунем. Дар айни ҳол мо фарз мекунем, ки дар ягон атрофи нуқтаи a $u(x) > 0$ мебошад.

Аз муносибати $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ намоён аст, ки қимати лимитии ифодаи $u(x)^{v(x)}$ ҳангоми $x \to a$ аз қимати лимитии ифодаи $v(x)\ln u(x)$ вобаста аст.

1. Бигзор $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = b$ бошад.

Бовар мекунем, ки дар ин маврид $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^b$.

Воқеан, функцияи

$$w(x) = \begin{cases} v(x)\ln u(x) & \text{ҳангоми } x \neq a \text{ будан,} \\ b & \text{ҳангоми } x = a \text{ будан} \end{cases}$$

дар нуқтаи $x = a$ бефосила аст. Бинобар ин функцияи мураккаби $e^{w(x)}$ ҳам дар ин нуқта бефосила мебошад. Пас, $\lim\limits_{x\to a} e^{w(x)} = e^{w(a)} = e^b$. Азбаски $\lim\limits_{x\to a} e^{w(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)}$ аст, пас $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ вуҷуд дорад ва ба b баробар мебошад.

Маълумоти аз ин боб гирифтаамонро оид ба қиматҳои лимитии e^w ҳангоми $w \to -\infty$ ва $w \to +\infty$ истифода карда, бовар кардан осон аст, ки

* Дар он ҷое, ки $\sin x > 0$ аст.

II. Агар $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = -\infty$ бошад, онгоҳ $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = 0$.

III. Агар $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = +\infty$ бошад, онгоҳ $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = +\infty$.

Агар қиматҳои лимитии $u(x)$ ва $v(x)$ маълум бошанд, алоқамандии муқарраршудаи байни қиматҳои лимитии ифодаҳои $u(x)^{v(x)}$ ва $v(x)\ln u(x)$ имконият медиҳанд, ки қимати лимитии функцияи $u(x)^{v(x)}$ дар як қатор мавридҳо бо осонӣ ёфта шаванд. Барои мисол мавридҳои зеринро муоина мекунем:

1) $\lim\limits_{x\to a} u(x) > 0$ ва $\lim\limits_{x\to a} v(x)$ вуҷуд доранд.

2) $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, $b > 1$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, $b > 1$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = -\infty$.

Боварӣ ҳосил мекунем, ки дар мавриди 1) $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = [\lim\limits_{x\to a} u(x)]^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}$. Ҳақиқатан, азбаски $\lim\limits_{x\to a} u(x) > 0$ мебошад, пас, дар асоси бефосилагии функцияи логарифмӣ, $\lim\limits_{x\to a}\ln u(x)$ вуҷуд дорад ва ба $\ln[\lim\limits_{x\to a} u(x)]$ баробар мебошад. Бинобар ин $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x)\ln[\lim\limits_{x\to a} u(x)]$ вуҷуд дорад.

Мувофиқи 1 аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln[\lim\limits_{x\to a} u(x)]} = [\lim_{x\to a} u(x)]^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}.$$

Дар мавриди 2) $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = +\infty$ ва, бинобар ин, мувофиқи III $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = +\infty$.

Дар мавриди 3) $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = -\infty$ ва, бинобар ин, мувофиқи II $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = 0$.

Дар хотима се мавридеро қайд мекунем, ки дар онҳо ёфтани қимати лимитии $u(x)^{v(x)}$ тадқиқи иловагиро металабад.

1. *Номуайянии намуди* 1^{∞}:

$$\lim_{x\to a} u(x) = 1, \quad \lim_{x\to a} v(x) = \infty.$$

2. *Номуайянии намуди* 0^0:

$$\lim_{x\to a} u(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} v(x) = 0.$$

3. *Номуайянии намуди* ∞^0:

$$\lim_{x\to a} u(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} v(x) = 0.$$

Барои мавриди якум формулаеро меорем, ки он барои татбиқоти амалӣ қулай мебошад.

Ифодаи $u(x)^{v(x)}$-ро ба намуди зерин табдил медиҳем:

$$u(x)^{v(x)} = \left\{[1 + (u(x) - 1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\right\}^{[u(x)-1]\,v(x)}.$$

Фарз мекунем, ки, баъд,

$$U(x) = [1 + (u(x) - 1)]^{\frac{1}{u(x)-1}} \quad \text{ва} \quad V(x) = [u(x) - 1]\,v(x),$$

чунки

$$u(x)^{v(x)} = U(x)^{V(x)}.$$

Азбаски $\lim\limits_{x\to a} U(x) = e$ (ба қайди теоремаи 4.5 ниг.) ва $e > 1$ мебошад, пас қимати $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} U(x)^{V(x)}$ аз қимати лимитии функцияи $V(x)$ дар нуқтаи a, яъне аз $\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x)$ вобаста мебошад. Яъне: агар $\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x) = \lim\limits_{x\to a} V(x) = c$ бошад, онгоҳ $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} U(x)^{V(x)} = e^c$ (ба мавриди 1) ниг.); агар $\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x) = +\infty$ бошад, онгоҳ $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = +\infty$ (ба мавриди 2) ниг.); агар $\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x) = -\infty$ бошад, онгоҳ $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = 0$ (ба мавриди 3) ниг.). Хамин тариқ, мо формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x)}.$$

Номуайяниҳои намуди 2 ва 3 ин тавр ба шакли номуайяннии намуди 1 оварда мешаванд.

Фарз мекунем, ки

$$U(x) = e^{v(x)}, \quad V(x) = \ln u(x)$$

аст. Маълум аст, ки $\lim\limits_{x\to a} U(x) = 1$ ва $\lim\limits_{x\to a} V(x) = \pm\infty$ мебошад. Ғайр аз он,

$$u(x)^{v(x)} = [e^{V(x)}]^{\ln U(x)} = e^{\ln U(x)^{V(x)}} = U(x)^{V(x)}.$$

Мисол. $\lim\limits_{x\to 0}[\cos x]^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ ёфта шавад. Азбаски $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ ва $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^2 x} = \infty$ мебошад, пас номуайяннии намуди 1^∞ намудор аст.

Формулаи ҳосилшудаи $\lim\limits_{x\to 0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}[u(x)-1]v(x)}$-ро истифода мекунем. Чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$\lim_{x\to 0}[u(x)-1]v(x) = \lim_{x\to 0}[\cos x - 1]\frac{1}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-2\sin^2\frac{x}{2}\right]\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Бинобар ин

$$\lim_{x\to 0}[\cos x]^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

4°. Қиматҳои лимитии баъзе функцияҳои мураккаб. Дурустии баробариҳои зеринро исбот мекунем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}. \qquad (4.12)$$

1) Лимити якумашро муоина мекунем:

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{(1+x)^{1/n}-1}{x}=$$
$$=\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\right]\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]}{x\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]}=$$
$$=\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{n}}\right]^n-1}{x\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]}=$$
$$=\frac{1}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1}.$$

Азбаски махраҷи ифодаи охирин ҳангоми $x\to 0$ лимити ба n баробар дорад (функцияи $(1+x)^{k/n}$ дар нуқтаи $x=0$ бефосила мебошад ва бинобар ин $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{k/n}=1$), пас

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}.$$

2) Ба исботи баробарии дуюми (4.12) шурӯъ мекунем. $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{1/x}$. $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ фарз карда, функцияи $f(x)=(1+x)^{1/x}$-ро муайян мекунем. Дар натиҷа мо функцияи дар нуқтаи $x=0$ бефосилаи $f(x)$-ро ҳосил менамоем. Онгоҳ функцияи $\ln f(x)$ ҳам дар нуқтаи нулӣ бефосила хоҳад шуд, ва бинобар ин $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln f(0)=$ $=\ln e=1$. Инак, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

3) Дурустии баробарии сеюми (4.12)-ро исбот мекунем. Фарз мекунем, ки $x=\ln(1+u)$ ва қайд менамоем, ки ҳангоми $x\to 0$ тағйирёбандаи u ба нуль майл менамояд. $\dfrac{e^x-1}{x}=$ $=\dfrac{u}{\ln(1+u)}$. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1.$$

4) Дурустии баробарии охирини (4.12)-ро исбот мекунем.

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$ Азбаски $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1$ мебошад (ба (4.8) ниг.), пас $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Муносибатҳои (4.8), (4.12), баробарии (4.1) ва символи $o(x)$ (ба п. 3, § 2 ниг.)-ро истифода карда, ба дурустии формулаҳои зерин боварӣ ҳосил кардан осон аст:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x+o(x),\\
\sqrt[n]{1+x} &= 1+\frac{x}{n}+o(x),\\
\ln(1+x) &= x+o(x),\\
e^x &= 1+x+o(x),\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2).
\end{aligned}$$

Масалан, дурустии формулаи якумро исбот мекунем. Азбаски $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ мебошад, пас дар асоси (4.11) $\dfrac{\sin x}{x}=1+\alpha(x)$, дар ин ҷо $\alpha(x)$ — функцияи дар нуқтаи $x=0$ беохир хурд. Аз формулаи охирин натиҷа мебарояд, ки $\sin x = x + x\,\alpha(x)$. Азбаски $x\,\alpha(x)=o(x)$ аст, пас $\sin x = x + o(x)$.

2. Мафҳуми функцияи элементарӣ. Класси функцияҳои элементарӣ. Класси функцияҳое, ки ба воситаи амалҳои арифметикии шумораашон охирнок бо функцияҳои элементарии соддатарин ҳосил карда мешаванд ва инчунин класси функцияҳое, ки бо роҳи суперпозицияи ин функцияҳо ҳосил мешаванд, татбиқи васеъ доранд. Масалан, функцияҳои $x^3+3\cos 2x$, $\ln|\sin 3x| - e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$ ба ҳамин класс тааллуқ доранд. Мо ин класси функцияҳоро *класси функцияҳои элементарӣ* ва ҳар як функцияи ин классро *функцияи элементарӣ* меномем.

Хосияти зерини функцияҳои элементариро қайд мекунем: *функцияҳои элементарӣ дар ҳар як нуқтаи соҳаи дода шуда нашон* бефосила мебошанд.*

---

* Агар дар айни ҳол соҳаи дода шудани функция аз нуқтаҳои ҷудогона иборат бошад, онгоҳ чунин ҳисобидан табиист, ки функция мувофиқи таъриф дар ҳар яки ин нуқтаҳо бефосила мебошад.

Ин хосият бевосита аз теоремаҳои 4.2 ва 4.3 ва аз бефосилагии функцияҳои элементарии соддатарин (дар ҳар як нуқтаи соҳаи дода шуданашон) бармеояд.

§ 8. Классификацияи нуқтаҳои каниши функция

1. Нуқтаҳои каниши функцияҳо ва классификацияи онҳо. Мо дар п. 1-уми § 3 нуқтаҳои каниши функцияҳоро чун нуқтаҳое, ки дар онҳо функция ба хосиятҳои бефосилагӣ соҳиб нест, муайян кардем. Мо инчунин нуқтаҳоеро, ки дар онҳо функция муайян нест, лекин дар ε-атрофи дилхоҳи онҳо нуқтаҳои соҳаи дода шудани функция мавҷуданд, нуқтаҳои каниши функция меномем.

Намудҳои имконпазири нуқтаҳои каниши функцияҳоро муоина мекунем.

1°. *Каниши бартарафшаванда.* *Нуқтаи a нуқтаи каниши бартарафшавандаи функцияи $y = f(x)$ номида мешавад, агар дар ин нуқта қимати лимитии функция мавҷуд бошаду лекин дар нуқтаи a функцияи $f(x)$ ё муайян нест, ё қимати хусусии он $f(a)$ дар нуқтаи a ба қимати лимитӣ баробар намебошад.*

Масалан, функцияи

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{ҳангоми } x \neq 0 \text{ будан,} \\ 2 & \text{ҳангоми } x = 0 \text{ будан} \end{cases}$$

дар нуқтаи нулӣ каниши бартарафшаванда дорад, чунки қимати лимитии ин функция дар нуқтаи $x = 0$ ба 1 ва қимати хусусиаш ба 2 баробар аст. Агар функцияи $f(x)$ дар нуқтаи a ба каниши намуди номбурда соҳиб бошад, онгоҳ, қиматҳои функцияро дар нуқтаҳои аз a тафовутдошта тағйир надода, ин канишро б а р т а р а ф к а р д а н мумкин аст. Барои ин қимати функция дар нуқтаи a-ро, ки ба қимати лимитии он дар ин нуқта баробар аст, муайян кардан кифоя мебошад. Чунончи, агар дар мисоли муоинашуда $f(0) = 1$ бошад, онгоҳ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ва функция дар нуқтаи $x = 0$ бефосила мешавад.

К а й д. Дар амалия нуқтаҳои каниши бартарафшаванда барои тақсимоти муттамарказ (локализацияшуда)-и бузургиҳои физикавӣ дучор меояд.

2°. *К а н и ш и ҷ и н с и 1-у м.* *Нуқтаи a нуқтаи каниши ҷинси 1-ум номида мешавад, агар функцияи $f(x)$ дар ин нуқта қиматҳои лимитии охирноки росту чап дошта бошаду лекин ин қиматҳо ба якдигар баробар набошанд:*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x) \quad (\text{ё } f(a+0) \neq f(a-0)).$$

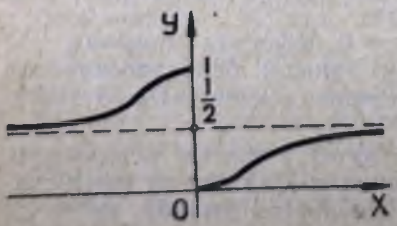
1. Барои функцияи $f(x) = \operatorname{sgn} x$ нуқтаи $x = 0$ нуқтаи каниши чинси 1-ум мебошад (ба расми 4.4 ниг.). Ҳақиқатан, аз баски

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ ҳангоми } x > 0 \text{ будан,} \\ 0 \text{ ҳангоми } x = 0 \text{ будан,} \\ -1 \text{ ҳангоми } x < 0 \text{ будан} \end{cases}$$

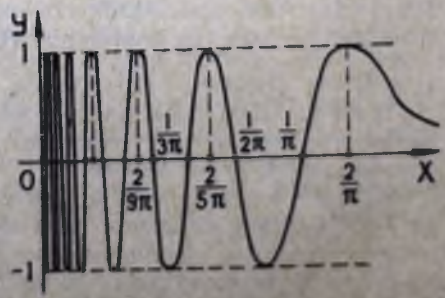
аст, пас

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1.$$

2. Функцияи $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{1/x}}$, ки дар ҳама ҷой, ғайр аз нуқтаи $x = 0$, муайян аст, дар нуқтаи $x = 0$ каниши чинси 1-ум дорад (расми 4.32). Воқеан, агар $\{x_n\}$ пайдарпаии ба нуль наздикшаванда бошад, ки элементҳояш мусбатанд, онгоҳ $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ пайдарпаии беохир калони аъзоҳояш мусбат мебошад ва, бинобар ин, $\{1 + 2^{1/x_n}\}$ низ пайдарпаии беохир калон аст. Лекин, онгоҳ, пайдарпаии $\left\{\dfrac{1}{1 + 2^{1/x}}\right\}$ пайдарпаии беохир хурд аст ва, бинобар ин, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 0$. Агар $\{x_n\}$ пайдарпаии ба нуль наздикшаванда бошад, ки элементҳояш манфианд, онгоҳ $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ пайдарпаии беохир калони аъзоҳояш манфӣ мебошад ва, бинобар ин, $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{1/x_n} = 0$. Пас, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 1$.



Расми 4.32.



Расми 4.33.

3°. *Каниши чинси 2-юм. Нуқтаи a нуқтаи каниши чинси 2-юм номида мешавад, агар функцияи $f(x)$ дар ин нуқта ақаллан якто аз қиматҳои лимитии яктарафаро надошта бошад ё агар ақаллан якто аз қиматҳои лимитии яктарафа беохир бошад.*

Масалан, функцияи $f(x) = \sin\frac{1}{x}$-ро дида мебароем (расми 4.33)*. Ин функция дар нуқтаи $x = 0$ на қимати лимитии рост ва на қимати лимитии чап дорад. Ҳақиқатан, пайдарпаиҳои зерини аз рост ба нуль наздикшавандаи қиматҳои аргументро муоина менамоем:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots, \frac{2}{(4\pi-3)\pi}, \ldots$$

ва

$$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots, \frac{1}{n\pi}, \ldots$$

Пайдарпаиҳои мувофиқи қиматҳои функцияи $y = \sin\frac{1}{x}$ чунин намуд доранд:

$$1, 1. 1, \ldots, 1, \ldots$$

ва

$$0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

Пайдарпаии якум лимити ба 1 баробар ва пайдарпаии дуюм лимити ба нуль баробар дорад. Пас, функцияи $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ дар нуқтаи $x=0$ қимати лимитии рост надорад. Азбаски $\sin\frac{1}{-x} = -\sin\frac{1}{x}$ мебошад, пас ин функция дар ҳамин нуқта қимати лимитии чап ҳам надорад.

Функцияи $y = \operatorname{ctg} x$ мисоли дигари функцияест, ки соҳиби нуқтаҳои каниши чинси 2-юм мебошад (ба расми 4.25 нигар.). Ин функция дар ҳар яки нуқтаҳои $n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, соҳиби каниши чинси 2-юм мебошад.

2. Функцияҳои порча-порча бефосила. Функцияи $y = f(x)$ функцияи дар сегменти $[a, b]$ *порча-порча бефосила* номида мешавад, агар он дар ҳама нуқтаҳои дарунии $[a, b]$ ба ғайр аз, эҳтимол, нуқтаҳои шумораашон охирнок, ки дар онҳо соҳиби

* Расми 4.33 характери соф тасвирӣ дорад.

каниши чинси 1-ум мебошад, бефосила бошад ва, ғайр аз он, дар нуқтаҳои a ва b қиматҳои лимитии яктарафа дошта бошад. Функция дар интервал ё хати рости беохир порча-порча бефосила номида мешавад, агар он дар сегменти ба он мутааллиқи дилхоҳ порча-порча бефосила бошад. Масалан, функцияи $f(x) = [x]$* ҳам дар сегменти дилхоҳ ва ҳам дар хати рости беохир порча-порча бефосила мебошад.

ИЛОВА

ИСБОТИ ТАСДИҚОТИ П. 6, § 5

Дар ин илова тасдиқоти п. 6, § 5 исбот карда мешавад. Барои қулайи исбот ин тасдиқотро ин тавр баён мекунем.

Ҷуфти функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$, ки дар ҳамаи хати рости беохир муайян мебошанд ва се талаботи зеринро қаноат менамоянд, вуҷуд доранд ва, бар замми ин, ягона мебошанд:

1°. *Барои ададҳои ҳақиқии дилхоҳи x', x'' ва x муносибатҳои зерин иҷро мешаванд:*

$$S(x' + x'') = S(x')\,C(x'') + C(x')\,S(x''),$$
$$C(x' + x'') = C(x')\,C(x'') - S(x')\,S(x'),$$
$$S^2(x) + C^2(x) = 1. \qquad (4.5')^{**}$$

2°.

$$\left.\begin{aligned} S(0) &= 0, \quad C(0) = 1, \\ S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \quad C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.6')$$

3°. *Ҳангоми* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ *будан нобаробарии*

$$0 < S(x) < x \qquad (4.7')$$

дуруст аст.

Исботи ин тасдиқотро ба ду қисм ҷудо мекунем. Яъне: мо аввал *ягонагӣ* ва баъд *мавҷудияти* функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$-ро, ки талаботи 1°, 2° ва 3°-ро қаноат менамоянд, исбот менамоем.

1. Исботи ягонагӣ. Барои исботи ягонагӣ ба дурустии ду тасдиқоти зерин боварӣ ҳосил кардан кифоя аст:

1) *Функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$, ки ба хосиятҳои номбурда соҳибанд, дар ҳамаи хати рости адади бефосила мебошанд.*

2) *Қиматҳои функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар ягон маҷмӯи нуқтаҳои дар ҳама ҷо зичи хати рости беохир*** ба таври ягона муайян карда мешаванд.*

Ҳақиқатан, дар асоси бефосилагии функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ қиматҳои хусусии онҳо дар ҳар як нуқтаи x-и хати рости беохир ба қиматҳои лими-

---

* Ба хотир меорем, ки символи $[x]$ қисми бутуни адади x-ро ифода мекунад.

** Формулаҳои (4.5′)—(4.7′) аз формулаҳои (4.5)—(4.7)-и п. 6 § 5 бо роҳи ба $S(x)$ ва $C(x)$ мувофиқан иваз кардани ишорати функцияҳои $\sin x$ ва $\cos x$ ҳосил карда шудаанд.

*** Маҷмӯи $\{x\}$-и нуқтаҳои хати рости беохир дар хати рости беохир *дар ҳама ҷо зич* номида мешавад, агар дар ε-атрофи дилхоҳи ҳар як нуқтаи ин хати рост нуқтаҳои беохир бисьёри маҷмӯи $\{x\}$ вокеъ бошанд.

тин онҳо дар ҳамин нуқта баробар мебошанд. Акнун агар мо пайдарпаии ба x наздикшавандаи қиматҳои аргументро, ки элементҳояш ба маҷмӯи нуқтаҳои дар ҳама ҷо зичи дар боло номбурда тааллуқ доранд, муоина намоем, онгоҳ пайдарпаиҳои мувофиқи қиматҳои функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар асоси тасдиқоти 2)-и баёншуда, ба таври ягона муайян карда мешаванд ва, бинобар ин, лимити ин пайдарпаиҳо ҳам ба таври ягона муайян карда мешаванд. Лекин ин лимитҳо айнан қиматҳои хусусии функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар нуқтаи x мебошанд. Пас, функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар ҳаман хати рости беохир ба таври ягона муайян карда мешаванд.

1) Пеш аз он, ки ба исботи бефосилагии функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ шуруъ намоем, баъзе формулаҳоро муқаррар менамоем.

Дар ду муносибати аввали (4.5′) $x' = x$, $x'' = -x$ фарз карда ва $S(0) = 0$, $C(0) = 0$-ро ба эътибор гирифта, муносибати зеринро ҳосил мекунем:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= S(x)\cdot C(-x) + C(x)\cdot S(-x),\\ 1 &= C(x)\cdot C(-x) - S(x)\cdot S(-x). \end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

Муносибати (4.14)-ро мувофиқан ба $S(x)$ ва $C(x)$ зарб карда, муносибати ҳосилшударо ҷамъ мекунем. $S^2(x) + C^2(x) = 1$ буданашро ба эътибор гирифта, $C(-x) = C(x)$-ро ҳосил менамоем.

Айнан ҳамин тавр, муносибати (4.14)-ро мувофиқан ба $C(x)$ ва $-S(x)$ зарб карда ва онҳоро ҷамъ намуда, $S(-x) = -S(x)$-ро ҳосил мекунем. Ҳамин тариқ, $C(x)$ *функцияи ҷуфт* ва $S(x)$ *функцияи тоқ* мебошад.*

Формулаи якуми (4.5′)-ро истифода карда, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$S(x'') = S\left(\frac{x'+x''}{2} + \frac{x''-x'}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) C\left(\frac{x''-x'}{2}\right) +$$

$$+ C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right)$$

ва ҳамин тавр

$$S(x') = S\left(\frac{x'+x''}{2} + \frac{x'-x''}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) C\left(-\frac{x''-x'}{2}\right) +$$

$$+ C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(-\frac{x''-x'}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) C\left(\frac{x''-x'}{2}\right) -$$

$$- C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right).$$

Ду формулаи охиринро аъзо ба аъзо тарҳ карда, чунин формуларо ҳосил менамоем:

$$S(x'') - S(x') = 2C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right). \qquad (4.15)$$

Акнун дар нуқтаи дилхоҳи x-и хати рости беохир бефосила будани функцияҳои $C(x)$ ва $S(x)$-ро исбот мекунем. *Дар нуқтаи* $x = 0$ *аз рост* бефосила будани функцияи $S(x)$ бевосита аз муносибати (4.7′) ва аз баробарии $S(0) = 0$ бармеояд. Воқеан, агар $\{x_n\}$ пайдарпаии дилхоҳи қиматҳои аргумент, ки аз рост ба нуль наздик мешавад, бошад, онгоҳ аз муносибати $0 < S(x_n) < x_n$ хулоса мебарояд, ки пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функцияи $\{S(x_n)\}$ низ ба нуль, яъне ба қимати хусусии $S(0)$ наздик мешавад.

---

* Функцияи $f(x)$, ки дар хати рости беохир муайян аст, *функцияи тоқ* номида мешавад, агар $f(-x) = -f(x)$ бошад, ва, *функцияи ҷуфт* номида мешавад, агар $f(-x) = f(x)$ бошад.

Аз *тоқ будани* функцияи $S(x)$ натиҷа мебарояд, ки ин функция *дар нуқтаи* $x = 0$ *аз чап* бефосила мебошад. Ҳамин тариқ, функцияи $S(x)$ *дар нуқтаи* $x = 0$ *бефосила* мебошад.

Дар нуқтаи дилхоҳи x *бефосила будани* $S(x)$ аз муносибати (4.15) бармеояд. Воқеан, фарз мекунем, ки x *нуқтаи дилхоҳи хати рости беохир ва* $\{x_n\}$ *пайдарпаии дилхоҳи ба* x *наздикшавандаи қиматҳои аргумент мебошад.* Дар (4.15) $x' = x$, $x'' = x_n$ фарз карда, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$S(x_n) - S(x) = 2C\left(\frac{x + x_n}{2}\right) S\left(\frac{x_n - x}{2}\right). \qquad (4.16)$$

Дар асоси он, ки $S(x)$ дар нуль бефосила мебошад ва $S(0) = 0$ аст, $\lim\limits_{n\to\infty} S\left(\frac{x_n - x}{2}\right) = 0$-ро ҳосил менамоем. Азбаски пайдарпаии $\left\{C\left(\frac{x + x_n}{2}\right)\right\}$ *маҳдуд** мебошад, пас қисми рости (4.16) (мумкин, ки қисми чапаш ҳам) соҳиби лимити нуль мебошад. Лекин ин чунин маъно дорад, ки $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n) = S(x)$, яъне функцияи $S(x)$ дар нуқтаи x бефосила мебошад.

Бефосилагии функцияи $C(x)$ айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад. Барои ин ба ҷои (4.15) формулаи зеринро ҳосил кардан лозим аст:

$$C(x'') - C(x') = -2S\left(\frac{x'' + x'}{2}\right) S\left(\frac{x'' - x'}{2}\right).$$

2) Исбот мекунем, ки қиматҳои функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар нуқтаҳои $\frac{p\pi}{2^n}$ ба таври ягона муайян карда мешаванд, дар ин ҷо p — адади бутуни мусбат ё манфӣ, n — адади бутуни мусбат. Чунин нуқтаҳо маҷмӯи нуқтаҳои дар ҳама ҷо зичи хати рости ададиро ташкил медиҳанд. Баъзе хосиятҳои функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$-ро пешакӣ муқаррар мекунем. Аввалан, муқаррар мекунем, ки ин функцияҳо *даврӣ мебошанд ва давраш* 2π** *аст.* Воқеан, дар (4.15) $x'' = x + 2\pi$ ва $x' = x$ фарз карда, формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$S(x + 2\pi) - S(x) = 2C(x + \pi)\, S(\pi).$$

Азбаски $S(\pi) = S\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2S\left(\frac{\pi}{2}\right) C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ аст, пас аз муносибати охирин натиҷа мебарояд, ки

$$S(x + 2\pi) = S(x)$$

аст, яъне функцияи $S(x)$ функцияи даврӣ мебошад ва давраш 2π аст. Аз ин ҷо, аз ҷумла, натиҷа мебарояд, ки $S(2\pi) = 0$ аст.

---

* Аз муносибати $S^2(x) + C^2(x) = 1$ натиҷа мебарояд, ки барои ҳамаи x-ҳо $|C(x)| < 1$ аст ва аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\left\{C\left(\frac{x + x_n}{2}\right)\right\}$ маҳдуд аст.

** Функцияи $f(x)$ *функцияи даврии давраш* $a > 0$ номида мешавад, агар барои x-и дилхоҳ муносибати $f(x + a) = f(x)$ дуруст бошад.

Дар формулаи дуюми (4.5′) $x' = x$ ва $x'' = 2\pi$ фарз карда ва $S(2\pi) = 0$ буданашро ба эътибор гирифта, меёбем, ки

$$C(x + 2\pi) = C(x)\,C(2\pi).$$

Азбаски $C(2\pi) = 1$ аст (формулаҳои (4.5′)-ро аввал барои $x' = \pi/2$ ва $x'' = \pi/2$ ва баъд барои $x' = \pi$ ва $x'' = \pi$ татбиқ намуда, ба ин бовар кардан мумкин аст), пас

$$C(x + 2\pi) = C(x).$$

Ҳамин тариқ, даврӣ будани $C(x)$ ҳам муқаррар карда шуд.

Хосиятҳои даврӣ будани функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар муҳокимаронихои мо имконият медиҳанд, ки ба сегменти $[0, 2\pi]$ маҳдуд шавем. Қиматҳои функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар нуқтаҳои гуногуни ин сегмент чигуна аломатҳо доранд? Мо ҳозир инро муқаррар мекунем. Аз (4.6′), (4.7′) ва аз бефосилагии $S(x)$ натича мебарояд, ки қиматҳои функцияи $S(x)$ дар сегменти $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ғайриманфӣ мебошанд, бар замми ин дар ин сегмент функцияи $S(x)$ фақат дар нуқтаи $x = 0$ ба нуль табдил мешавад. Азбаски $S(\pi - x) = S(\pi)\,C(-x) - C(\pi)\,S(x)$* ва $S(\pi) = 0$, $C(\pi) = -1$ аст, пас $S(\pi - x) = S(x)$ мебошад. Бинобар ин дар сегменти $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ қиматҳои функцияи $S(x)$ ғайриманфианд, бар замми ин дар ин сегмент функцияи $S(x)$ фақат дар нуқтаи $x = \pi$ ба нуль баробар мешавад. Аз формулаи $S(2\pi - x) = -S(x)$, ки айнан монанди формулаи $S(\pi - x) = S(x)$ ҳосил кардан мумкин аст, натича мебарояд, ки дар сегменти $[\pi, 2\pi]$ қиматҳои функцияи $S(x)$ ғайримусбатанд, бар замми ин функцияи $S(x)$ фақат дар нуқтаҳои ин сегмент ба нуль баробар мешавад. Ҳамин тавр муҳокима ронда, бовар кардан мумкин аст, ки функцияи $C(x)$ дар сегментҳои $[0, \pi/2]$ ва $[3\pi/2, 2\pi]$ ғайриманфӣ ва дар сегменти $[\pi/2], 3\pi/2]$ ғайримусбат мебошад ва фақат дар нуқтаҳои $\pi/2$ ва $3\pi/2$ ба нуль баробар мешавад.

Барои ба итмом расонидани исботи ягонагии функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ ба мо баъзе формулаҳо лозим мешаванд ва ба ҳосил кардани онҳо шурӯъ мекунем. Аввалан, қайд мекунем, ки аз (4.5′) формулаҳои зерин** ҳосил мешаванд:

$$S^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - C(x)}{2}, \quad C^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + C(x)}{2}. \tag{4.17}$$

Дар ин формулаҳо $x = x' + x''$ фарз карда ва формулаи (4.5′)-ро боз як маротиба татбиқ намуда, мо муносибатҳои даркориро ҳосил мекунем:

$$S^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 - C(x')\,C(x'') + S(x')\,S(x'')}{2},$$

$$C^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 + C(x')\,C(x'') - S(x')\,S(x'')}{2}.$$

---

* Ин формула аз формулаи якуми (4.5) ва аз тоқ будани функцияи $S(x)$ ҳосил мешавад.

** Дар формулаи дуюми (4.5′) $x' = x'' = x/2$ ва дар формулаи сеюми (4.5′) ба чои x $x/2$ гирифтан кифоя аст.

Ин формулаҳо нишон медиҳанд, ки агар қиматҳои функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар нуқтаҳои x' ва x'' маълум бошанд, онгоҳ қиматҳои ин функцияҳо дар нуқтаи $\frac{x'+x''}{2}$ ба таври ягона муайян карда мешаванд, чунки аз мухокимарониҳоямон натича мебарояд, ки ба мо аломатҳои функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар ҳар як нуқтаи сегменти $[0, 2\pi]$ маълум аст ва, бинобар ин, дар асоси даврӣ будану даврашон 2π будан, қиматҳои онҳо дар нуқтаи дилхоҳи x-и хати рости ададӣ маълум мебошад. Дар асоси муайян будан ва ба таври ягона муайян шудани қиматҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар нуқтаҳои $0, \pi/2, \pi, 2\pi$-и сегменти $[0, 2\pi]$ мо формулаҳои ҳозир ҳосилкардаамонро пай дар пай татбиқ намуда, қиматҳои ин функцияҳоро дар ҳама нуқтаҳои намуди $p\pi/2^n$-и сегменти $[0, 2\pi]$ ба таври ягона муайян карда метавонем (p ва n — ададҳои гайриманфии бутун ва $p \leqslant 2^{n+1}$). Азбаски маҷмӯи нуқтаҳои намуди $p\pi/2^n$ дар сегменти $[0, 2\pi]$ зич мебошанд, пас, дар асоси ягонагии дар аввали исбот қайдшуда, функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар ҳамаи хати рости ададӣ ба таври ягона муайян мебошанд.

2. **Исботи мавҷудият.** Мо тасдиқоти умумитарро исбот мекунем.

Функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$, ки дар ҳамаи хати рости ададӣ муайян ва бефосила мебошанду талаботи зеринро қаноат менамоянд, мавҷуд ҳастанд.

1°. *Барои ададҳои ҳақиқии x', x'' ва x муносибатҳои зерин иҷро мешаванд:*

$$\left.\begin{aligned} S(x'+x'') &= S(x')\,C(x'') + C(x')\,S(x''),\\ C(x'+x'') &= C(x')\,C(x'') + S(x')\,S(x''),\\ S^2(x) + C^2(x) &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.5′}$$

2°.

$$\left.\begin{aligned} S(0) &= 0,\ C(0) = 1,\\ S(d) &= 1,\ C(d) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.6′}$$

дар ин ҷо d — ягон ададӣ мусбати додашуда.

3°. *Ададӣ мусбати L чунон мавҷуд ҳаст, ки ҳангоми $0 < x < d$ будан нобаробарии*

$$0 < S(x) < Lx \tag{4.7′}$$

дуруст аст, бар замми ин, агар $d = \pi/2$ бошад, онгоҳ $L = 1$ аст.

Исбот. Аввалан, қиматҳои функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$-ро дар маҷмӯи $\{s\}$-и нуқтаҳои сегменти $[0, d]$ муайян мекунем, ки ҳар яки онҳоро ба намуди $s = \frac{pd}{2^n}$ (дар ин ҷо p ва n — ададҳои ғайриманфии бутун ва $p < 2^n$) навиштан мумкин аст. Мо қиматҳои ин функцияҳоро дар нуқтаҳои $S_n = \frac{d}{2^n}$ ($n = 0, 1, \ldots$) пешакӣ муайян мекунем. Азбаски $S_{n+1} = \frac{S_n}{2}$ аст, пас, формулаҳои (4.17)-ро истифода карда, чунин навиштан мумкин аст:

$$S(s_{n+1}) = S\left(\frac{s_n}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-C(s_n)}{2}},$$
$$C(s_{n+1}) = C\left(\frac{s_n}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+C(s_n)}{2}}. \qquad (1.18)$$

Бо ёрии формулаҳои рекуррентии (4.18) аз муносибати $C(d) = C\left(\frac{d}{2^0}\right) =$

$= C(s_0) = 0$ қиматҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар ҳама нуқтаҳои $s_n = d/2^n$ муайян карда мешаванд. Илова ба қиматҳои номбурдаи $S(x)$ ва $C(x)$ дар нуқтаҳои s_n мо қиматҳои ин функцияҳоро дар нуқтаҳои 0 ва d чунон ки дар (4.6′) дода шудааст, муайян мекунем.

Акнун ба муайян кардани қиматҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар ҳамаи нуқтаҳои маҷмӯи $\{s\}$ шурӯъ мекунем; $s = \frac{pd}{2^n}$, p ва n — ададҳои ғайриманфии бутун, $p < 2^n$. Маълум аст, ки адади мусбати бутуни дилхоҳро ба намуди суммаи дараҷаҳои бутуни адади 2* ба таври ягона навиштан мумкин аст:

$$p = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}**,$$

дар ин ҷо a_i ё ба нуль, ё ба 1 баробар аст. Бинобар ин

$$s = \frac{pd}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i d}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i. \qquad (4.19)$$

Ҳамин тариқ, ҳар як қимати s-ро ба намуди суммаи охирноки ададҳои s_i, ки барои ҳар кадомаш қиматҳои $S(s_i)$ ва $C(s_i)$ муайян шуда буд, навиштан мумкин аст. Мо акнун, формулаи (4.5′)-ро истифода карда, қиматҳои $S(x)$ ва $C(x)$-ро дар нуқтаҳои маҷмӯи $\{s\}$ муайян карда метавонем. Бар замми ин мо бояд боварӣ ҳосил намоем, ки пай дар пай татбиқ кардани ин формулаҳо, новобаста аз тарзи ба гурӯҳҳо (дар формулаи (4.19)) муттаҳид кардани ҷамъшавандаҳои s_i, ба як натиҷа меоранд.

Масалан, мо $s = x' + x''$, дар ин ҷо $x' = a_1 s_1$ ва $x'' = \sum_{i=2}^{n} a_i s_i$ фарз карда ва баъд аз рӯи формулаи (4.5′) $S(s)$-ро ҳисоб карда метавонем. Лекин ничунин фарз кардан мумкин аст, ки $x' = a_1 s_1 + a_2 s_2$ ва $x'' = \sum_{i=3}^{n} a_i s_i$.

---

* Дар системаи дуии ҳисоб адади бутуни p ба таври ягона ба намуди символе, ки аз нульҳо ва воҳидҳо иборат аст, навишта мешавад. Ин символ навишти мухтасари ададии p ба намуди суммаи дараҷаҳои ададии 2 мебошад.

** Ба поварақи сах. 48 ниг.

Пай дар пай татбиқ кардани формулаҳои (4.5′), новобаста аз тарзи ба гурӯҳҳо (дар формулаи (4.19) муттаҳид кардани ҷамъшавандаҳои s_i ба як натиҷа меоранд; барои ба ин боварӣ ҳосил кардан дуруст будани муносибатҳои зерин кифоя аст:

$$S[(x'+x'')+x'''] = S[x'+(x''+x''')],$$
$$C[(x'+x'')+x'''] = C[x'+(x''+x''')].$$

Дуруст будани ин муносибатҳо бо роҳи татбиқи дукаратаи формулаҳои (4.5′) бевосита муқаррар карда мешавад.

Функцияҳои $S(s)$ ва $C(s)$, ки дар маҷмӯи $\{s\}$ муайян кардем, дар ҳамин маҷмӯъ ба ҳосияти 1 соҳиб мебошанд. Инро санҷида, ба дурустиаш боварӣ ҳосил мекунем. Бигзор s', s'' ва $s'+s''$ ба маҷмӯи номбурда мутааллиқ бошанд, s', s'' ва $s'+s''$-ро ба намуди суммаҳои (4.19) менависем. Ададҳои s_n-и дорои n-ҳои якхелаи мутааллиқи s' ва s''-ро то лаҳзаи s_n-ҳои боқимонда соҳиби индексҳои гуногун шудан муттаҳид карда, гурӯҳи ҷамъшавандаҳои s_n-ро ҳосил мекунем, ки онҳо суммаи (4.19)-ро барои адади $s'+s''$ ифода менамоянд. Лекин дар боло нишон додем, ки натиҷаи ҳисоби $S(s)$ ё $C(s)$ барои суммаи якчанд аргумент аз тарзи ба гурӯҳҳо ҷудо кардани ҷамъшавандаҳои ин сумма вобаста нест. Пас, агар s', s'' ва $s'+s''$ ба маҷмӯи $\{s\}$ мутааллиқ бошанд, онгоҳ қиматҳои $S(s)$ ва $C(s)$, ки дар ин нуқтаҳо ҳисоб карда шудаанд, ду муносибати аввали (4.5′)-ро қаноат менамоянд. Барои қиматҳои номбурдаи аргумент дуруст будани муносибати сеюми (4.5′)-ро санҷидан осон аст. Воқеан, аз таърифи $S(x)$ ва $C(x)$ дар нуқтаҳои 0 ва d натиҷа мебарояд, ки $S^2(0)+C^2(0)=1$ ва $S^2(d)+C^2(d)=1$. Аз формулаҳои рекуррентии (4.18) натиҷа мебарояд, ки муносибати $S^2(s_n)+C^2(s_n)=1$ барои ҳамаи s_n-ҳо дуруст аст ва аз формулаи бевосита санҷидашавандаи

$$S^2(x'+x'')+C^2(x'+x'') = (S^2(x')+C^2(x'))\,(S^2(x'')+C^2(x''))$$

натиҷа мебарояд, ки муносибати $S^2(s)+C^2(s)=1$ барои ҳама нуқтаҳои маҷмӯи $\{s\}$ дуруст мебошад.

Акнун нишон медиҳем, ки барои ҳама нуқтаҳои маҷмӯи $\{s\}$, ки аз 0 то d тафовут доранд, нобаробариҳои

$$0 < S(s) < 1, \quad 0 < C(s) < 1^* \tag{4.20}$$

дуруст мебошанд.

Дурустии нобаробариҳои (4.20)-ро аз рӯи индукция исбот мекунем. Барои ин ба ҳар як n гурӯҳи элементҳои маҷмӯи $\{s\}$-ро дар мувофиқатӣ мегузорем (ба ин гурӯҳ ҳама элементҳои $\{s\}$-ро, ки онҳоро ба намуди $\frac{pd}{2^n}$ навиштан мумкин аст, дохил мекунем, дар ин ҷо $0<p<2^n$ ва p — адади тоқ). Элементҳои ин гурӯҳ элементҳои тартиби n-ум номида мешавад. Ҳар як элементи тартиби $(n+1)$-ум дар байни ду элементҳои пай дар пай, ки тартиби онҳо аз n калон нест ва онҳо аз якдигар ба $\frac{d}{2^n}$, яъне ба s_n тафовут доранд, воқеъ аст. Элементи якуми тартиби $(n+1)$-ум ба s_{n+1} баробар аст. Ҳамаи элементҳои боқимондаи тартиби $(n+1)$-умро дар на-

---

* Ба хотир меорем, ки қиматҳои $S(s)$ ва $C(s)$ дар нуқтаҳои 0 ва d бо формулаҳои (4.6) муайян карда шудаанд.

тиҷаи ба s_{n+1} ҷамъ кардани s-ҳои гуногуни тартиби n-ум ҳосил намудан мумкин аст. Қиматҳои $S(s_1)$ ва $C(s_1)$ (s_1 — қимати ягонаи s — то тартиби вохидҳо)-ро ҳисоб мекунем. Аз (4.18) ҳосил мекунем: $S(s_1) = \sqrt{1/2}$ ва ва $C(s_1) = \sqrt{1/2}$. Ҳамин тариқ, нобаробариҳои (4.20) барои элементҳои гурӯҳи якум мавҷеъ доранд. Акнун фарз мекунем, ки нобаробариҳои (4.20) барои ҳама элементҳое, ки тартибашон аз n калон нест, дуруст мебошанд.

Онгоҳ, дар асоси формулаи якуми (4.5′), қиматҳои $S(s)$ дар ҳама нуқтаҳои тартиби $(n+1)$-ум мусбат мебошанд ва дар асоси формулаи сеюми (4.5′) ин қиматҳо аз 1 калон нестанд. Дар формулаи якуми (4.5′) $x'' = d$, $x' = -s$ фарз карда ва ҷуфт будани функцияи $C(s)$-ро ба эътибор гирифта, меёбем, ки $C(s) = S(d-s)$ ва, бинобар ин, барои $C(s)$ нобаробариҳои (4.20) барои қиматҳои s-и тартиби $(n+1)$-ум дурустанд, чунки, агар s тартиби $(n+1)$-ум дошта бошад, онгоҳ $d-s$ ҳам сохиби тартиби $(n+1)$-ум мебошад. Мувофиқи индукция аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки нобаробариҳои (4.20) барои ҳама нуқтаҳои маҷмӯи $\{s\}$, ки аз 0 ва d тафовут доранд, дуруст мебошанд.

Функцияҳои $S(s)$ ва $C(s)$, ки дар маҷмӯи $\{s\}$ муайян кардем, дар ин маҷмӯъ монотонӣ мебошанд. Инро исбот мекунем. Яъне, нишон медиҳем, ки $S(s)$ функцияи афзуншаванда ва $C(s)$ функцияи камшаванда мебошад.

Бигзор $0 \leqslant s' < s'' < d$ бошад. Онгоҳ $\dfrac{s'+s''}{2}$ ва $\dfrac{s''-s'}{2}$ дар байни нуль ва d воқеъ мешаванд. Аз формулаи (4.15) ва аз нобаробариҳои (4.20) натиҷа мебарояд, ки $S(s'') > S(s')$. Пас, $S(s)$ функцияи афзуншаванда мебошад. Аз муносибати $C(s) = S(d-s)$ натиҷа мебарояд, ки $C(s)$ функцияи дар маҷмӯи $\{s\}$ камшаванда мебошад.

Функцияҳои $S(s)$ ва $C(s)$, ки дар маҷмӯи $\{s\}$-и нуқтаҳои дар ҳама ҷо зичи сегменти $[0, d]$ муайян мебошанд, дар ҳар як нуқтаи сегменти $[0, d]$ қиматҳои лимитӣ доранд. Инро исбот мекунем.

Аввалан, пайдарпаии $\{s_n\}$-ро муоина мекунем ва нишон медиҳем, ки $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n) = 0$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} C(s_n) = 1$ (мавҷудиятии ин лимитҳо аз монотонӣ будан ва дар маҷмӯи $\{s\}$ маҳдуд будани $S(s)$ ва $C(s)$ бармеоянд). Барои исбот пайдарпаии $\left\{\dfrac{t(s_n)}{s_n}\right\}$-ро муоина мекунем, ки дар ин ҷо $t(s_n) = \dfrac{S(s_n)}{C(s_n)}$. Аз (4.18) ҳосил мекунем:

$$2S(s_{n+1})\,C(s_{n+1}) = \sqrt{1-C^2(s_n)} = S(s_n),$$

$$C(s_n) = C^2(s_{n+1}) - S^2(s_{n+1}) < C^2(s_{n+1}).$$

Бинобар ин

$$\frac{t(s_n)}{s_n} = \frac{S(s_n)}{s_n C(s_n)} = \frac{2S(s_{n+1})\,C(s_{n+1})}{2s_{n+1}C(s_n)} = \frac{t(s_{n+1})}{s_{n+1}}\,\frac{C^2(s_{n+1})}{C(s_n)} > \frac{t(s_{n+1})}{s_{n+1}}.$$

Инак, дар қиматҳои дилхоҳи n $\dfrac{t(s_n)}{s_n} > \dfrac{t(s_{n+1})}{s_{n+1}}$ ва $\dfrac{t(s_n)}{s_n} > 0$, яъне пайдарпаи $\left\{\dfrac{t(s_n)}{s_n}\right\}$ пайдарпаии камшаванда ва маҳдуд мебошад. Мувофиқи теореми 3.15 ин пайдарпай соҳиби лимит мебошад ва мо онро бо L ишорат мекунем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t(s_n)}{s_n} = L. \tag{4.21}$$

Азбаски ҳангоми $n \to \infty$, $s_n \to 0$, пас $\lim\limits_{n\to\infty} t(s_n) = 0$ ва, бинобар ин, дар асоси маҳдуд будани функцияи $C(s)$ (ба 4.20 ниг.)

$$\lim_{n\to\infty} S(s_n) = \lim_{n\to\infty} (t(s_n)\, C(s_n)) = 0. \tag{4.22}$$

Азбаски $C(s) > 0$ аст, аз (4.22) ва муносибати $S^2(s_n) + C^2(s_n) = 1$ натиҷа мебарояд, ки

$$\lim_{n\to\infty} C(s_n) = 1. \tag{4.23}$$

Аз (4.21) ва (4.23) натиҷа мебарояд, ки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(s_n)}{s_n} = L. \tag{4.24}$$

Азбаски $\dfrac{S(s_n)}{s_n} = \dfrac{2S(s_{n+1})\, C(s_{n+1})}{2s_{n+1}} < \dfrac{S(s_{n+1})}{s_{n+1}}$ аст, пас пайдарпаии $\left\{\dfrac{S(s_n)}{s_n}\right\}$ меафзояд. Бинобар ин аз (4.21) ва (4.24) чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\frac{S(s_n)}{s_n} < L < \frac{t(s_n)}{s_n}$$

ё

$$S(s_n) < L \cdot s_n < t(s_n). \tag{4.25}$$

Фарз мекунем, ки $\{s_n^*\}$ пайдарпаии дилхоҳи ба нуль наздикшавандаи қиматҳои s-и маҷмӯи $\{s\}$ мебошад. Барои n-и дилхоҳ, зоҳиран, чунин номери k-ро нишон додан мумкин аст, ки $0 < s_n^* < S(s_n)$ мебошад. Бинобар ин аз (4.22) натиҷа мебарояд, ки $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n) = 0$ аст.

Акнун исбот мекунем, ки функцияи $S(s)$, ки дар маҷмӯи $\{s\}$[1] муайян мебошад, дар нуқтаи дилхоҳи x-и сегменти $[0, d]$ қимати лимитӣ дорад. Бигзор $\{s_n'\}$ пайдарпаии монотонӣ афзуншавандаи ба x наздикшавандаи элементҳои маҷмӯи $\{s\}$ бошад. Азбаски $\{S(s_n')\}$ пайдарпаии афзуншавандаи маҳдуд мебошад, пас $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n')$ мавҷуд ҳаст, ки мо онро бо $S(x)$ ишорат менамоем. Бигзор $\{s_n''\}$ пайдарпаии дилхоҳи ба x наздикшавандаи элементҳои маҷмӯи $\{s\}$ бошад $(s_n'' \neq x)$. Онгоҳ пайдарпаии $\left\{\left|\frac{s_n'' - s_n'}{2}\right|\right\}$ соҳиби лимити нуль мебошад. Мувофиқи исбот $\lim\limits_{n\to\infty} S\left(\left|\frac{s_n'' - s_n'}{2}\right|\right) = 0$. Аз (4.15) ва маҳдуд будани функцияи $C(s)$ чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\lim_{n\to\infty} \left| S(s_n'') - S(s_n') \right| = \lim_{n\to\infty} C\left(\frac{s_n'' + s_n'}{2}\right) S\left(\left|\frac{s_n'' - s_n'}{2}\right|\right) = 0.$$

Ба ибораи дигар, $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n') = S(x)$. Дар асоси дилхоҳ будани пайдарпаии $\{s_n''\}$ ин дар ҳар як нуқтаи x-и сегменти $[0, d]$ мавҷуд будани қимати лимитии функцияи $S(s)$-ро, ки дар $\{s\}$ муайян аст, ифода мекунад:

$$\lim_{s\to x} S(s) = S(x).$$

Аз муносибати $S^2(s) + C^2(s) = 1$ ва дар маҷмӯи $\{s\}$ ғайриманфӣ будани функцияи $C(s)$ натиҷа мебарояд, ки дар ҳар як нуқтаи сегменти $[0, d]$ қимати лимитии функцияи $C(s)$ мавҷуд ҳаст. Мо қимати лимитии ин функция дар нуқтаи x-ро бо символи $C(x)$ ишорат мекунем.

Акнун қиматҳои функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи x-и сегменти $[0, d]$-ро чун қиматҳои лимитии дар нуқтаи x доштаи функцияҳои $S(s)$ ва $C(s)$, ки дар маҷмӯи $\{s\}$ муайян мебошанд, муайян мекунем. Функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$-и ҳамин тавр муайяншуда ба хосиятҳои 1° ва 2°-и тасдиқоте, ки дар ибтидои *исботи мавҷудияти функцияҳои* $S(x)$ ва $C(x)$ баён шуда буд, соҳиб мебошанд. Ҳаминро исбот мекунем. Пешакӣ муқаррар мекунем, ки *функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$*, ки дар сегменти $[0, d]$ бо тарзи дар боло номбурда муайян шудаанд, дар ҳамин сегмент *монотонӣ ва бефосила* мебошанд. Аввалан, исбот мекунем, ки агар x адади дилхоҳи сегменти $[0, d]$ бошад ва s' ва s'' ададҳои дилхоҳи маҷмӯи $\{s\}$-и қаноатқунандаи нобаробарии $s' < x < s''$ бошанд, онгоҳ $S(s') < S(x) < S(s'')$, $C(s') > C(x) > C(s'')$. Муқаррар мекунем, ки, масалан, $S(s') < S(x)$ аст (нобаробариҳои $S(x) < S(s'')$ ва $C(s') > C(x) > C(s'')$ ҳамин тавр исбот карда мешаванд). Бигзор $\{s_n'\}$ пайдарпаии афзуншавандаи ададҳои маҷмӯи $\{s\}$-и ба x наздикшаванда бошад, ки ҳама элементҳои s_n'-и он нобаробарии $s' < s_n' < x$-ро қаноат менамоянд. Азбаски функцияи $S(s)$ дар маҷмӯи $\{s\}$ меафзояд, пас пайдарпаии $\{S(s_n') - S(s')\}$ меафзояд ва элементҳои мус-

---

[1] Ба хотир меорем, ки $\{s\}$ маҷмӯи нуқтаҳои дар ҳама ҷо зич сегменти $[0, d]$ мебошад.

бат дорад. Бинобар ин лимити $S(x) - S(s')$*-и ин пайдарпай мусбат мебошад. Ҳамин тариқ, $S(s') < S(x)$. Акнун исбот мекунем, ки *функцияи* $S(x)$ *дар сегменти* $[0, d]$ *меафзояд (дар ҳамин сегмент кам шудани функцияи* $C(x)$ айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад). Бигзор x' ва x'' ду адади дилхоҳи сегменти $[0, d]$ бошанд, ки онҳо нобаробарии $x' < x''$-ро қаноат менамоянд. Агар s' ягон адади маҷмӯи $\{s\}$ бошад, ки дар байни x' ва x'' воқеъ аст $(x' < s < x'')$, онгоҳ мувофиқи исбот $S(x') < S(s')$ ва $S(s') < S(x'')$, яъне $S(x') < S(x'')$. Дар $[0, d]$ монотонӣ будани функцияи $S(x)$ исбот шуд. *Пеш аз он, ки ба исботи бефосилагии функцияҳои* $S(s)$ *ва* $C(s)$ *шурӯъ намоем, муқаррар мекунем, ки қиматҳои лимитии функцияҳои* $S(s)$ *ва* $C(s)$ *дар нуқтаҳои маҷмӯи* $\{s\}$ *бо қиматҳои ҳамин функцияҳо дар нуқтаҳои мувофиқи маҷмӯи* $\{s\}$ *мувофиқ мешаванд.*

Адади дилхоҳи s-и маҷмӯи $\{s\}$ ва ду пайдарпаиҳои $\{s_n'\}$ ва $\{s_n''\}$-и ба s наздикшавандаи элементҳои маҷмӯи $\{s\}$-ро муоина мекунем, ки $s_n' < s < s_n''$ аст. Дар асоси дар маҷмӯи $\{s\}$ монотонӣ будани функцияи $S(s)$ нобаробарии $S(s_n') < S(s) < S(s_n'')$** дуруст аст. Азбаски $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n') = \lim\limits_{n\to\infty} S(s_n'')$ ва лимитҳои номбурда ба қимати лимитии дар нуқтаи S доштаи функцияи $S(s)$ баробар мебошанд, пас тасдиқоти ҳозир баёншуда исбот шуд. Акнун боварӣ ҳосил мекунем, ки функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ *дар ҳар як нуқтаи сегменти* $[0, d]$ *бефосила* мебошанд. Барои ин муқаррар кардан кифоя аст, ки ин функцияҳо дар ҳар як нуқтаи x-и сегменти номбурда аз чапу рост (аз рост дар нуқтаи 0 ва аз чап дар нуқтаи d) бефосила мебошанд (ба қайди п. 1 § 3 инг.). Барои муайянӣ дар нуқтаи x-и сегменти $[0, d]$ аз чап бефосила будани функцияи $S(x)$-ро исбот мекунем (аз рост бефосила будани $S(x)$ ва бефосилагии $C(x)$ айнан ҳамин тавр исбот карда мешаванд).

Фарз мекунем, ки $\{s_k'\}$ ягон пайдарпаии аз чап ба x наздикшавандаи ададҳои маҷмӯи $\{s\}$ мебошад. Азбаски $\lim\limits_{k\to\infty} S(s_k') = S(x)$ аст, пас барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ элементи s_k'-и ин пайдарпаиро нишон додан мумкин аст, ки барояш $0 < S(x) - S(s_k') < \varepsilon$ мебошад. Акнун пайдарпаии аз чап ба x наздикшавандаи дилхоҳи $\{x_n\}$-ро муоина мекунем.

Бигзор N номере бошад, ки аз он сар карда нобаробарии $s_n' < x_n < x$ иҷро мешавад. Дар асоси ҳангоми $n \geqslant N$ будан афзуншаванда будани функция нобаробариҳои $S(s_k') < S(x_n) < S(x)$ иҷро мешаванд. Ин нобаробариҳоро бо нобаробариҳои $0 < S(x) - S(s_k') < \varepsilon$ муқоиса карда, боварӣ ҳосил мекунем, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарихои $0 < S(x) - S(x_n) < \varepsilon$ дурустанд. Ба ибораи дигар, қимати лимитии функцияи $S(x)$ дар нуқтаи x аз чап ба қимати хусусии он дар ҳамин нуқта баробар аст. Ҳамин тариқ, дар нуқтаи x аз чап бефосила будани $S(x)$ исбот шуд.

Акнун функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$-ро дар сегменти $[d, 2d]$ бо ёрии муносибатҳои $S(x + d) = C(x)$ ва $C(x + d) = -S(x)$ муайян менамоем. Ин формулаҳоро боз як маротиба татбиқ намуда, ин функцияҳоро дар сегменти $[2d, 4d]$ муоина менамоем. Ин муҳокимарониро такрор намуда, мо ин функцияҳоро барои ҳама қиматҳои мусбати x муайян мекунем. Мо ин функцияҳоро барои қиматҳои манфии x бо ёрии муносибатҳои $S(x) = -S(-x)$ ва $C(x) = C(-x)$ муайян менамоем. Мо дар натиҷа функцияҳоеро ҳосил мекунем, ки онҳо дар ҳамаи хати рости беохир бефосила мебошанд. Ба ин бовар кардан осон аст.

---

* Азбаски $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n') = S(x)$ ва $S(s')$ адади қайдшуда мебошад, пас $\lim\limits_{n\to\infty} [S(s_n') - S(s')] = S(x) - S(s')$.

** Барои муайянӣ мо ин тасдиқотро барои функцияи $S(x)$ исбот мекунем .

Функцияхои $S(x)$ ва $C(x)$ талаботи 1°, 2° ва 3°-юми тасдиқоти дар ибтидои *исботи мавҷудиятӣ* баёншударо қаноат менамоянд. Инро исбот мекунем. Агар s', s'', $s'+s''$ ва s ба маҷмӯи $\{s\}$-и сегменти $[0, d]$ мутааллиқ бошанд, онгоҳ формулаҳои (4.5) барои ин қиматҳои аргумент дуруст аст. Аз тарзи дар боло номбурдаи давомдиҳии функцияхои $S(x)$ ва $C(x)$ натиҷа мебарояд, ки ин формулаҳо барои қиматҳои аргументи $d+s'$ s'' (дар ин ҷо s' ва s'' ба сегменти $[0, d]$ тааллуқ доранд) дурустанд. Ин муҳокимаронихоро давом дода, мо исбот мекунем, ки муносибати (4.5′) барои ҳама қиматҳои аргументи хати рости беохири намуди $pd/2^n$ (дар ин ҷо p ва n — ададҳои бутуни дилхоҳ) дуруст аст. Азбаски ин қиматҳои аргумент маҷмӯи нуқтаҳои дар хама ҷо зичи хати рости беохирро[1] ташкил медиҳанд, пас, дар асоси бефосилагии функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$, муносибати (4.5′) барои ҳама қиматҳои x дуруст мебошад.

Азбаски талаботи 2° дар натиҷаи сохтани функцияҳои $S(x)$ ва $C(x)$ иҷро шуд. пас дурустии талаботи 3°-ро муқаррар кардан лозим меояд. Агар s', s'' ва $s'+s''$ элементҳои маҷмӯи $\{s\}$-и сегменти $[0, d]$ бошанд ва нобаробариҳои $0 < S(s') < Ls'$ ва $0 < S(s') < Ls''$ дуруст бошанд, онгоҳ дар асоси формулаи якуми (4.5) ва нобаробариҳои (4.20), нобаробариҳои $0 < S(s'+s'') < Ls'+Ls'' = L(s'+s'')$ низ иҷро мешаванд. Ин қайд, формулаи (4.19) ва нобаробариҳои (4.20) ва (4.25)-ро истифода карда, бовар кардан осон аст, ки нобаробариҳои $0 < S(s) < Ls$ барои ҳама қиматҳои s-и маҷмӯи $\{s\}$-и сегменти $[0, d]$ дурустанд. Азбаски ин маҷмӯъ дар $[0, d]$ дар ҳама ҷо зич аст ва $S(x)$ функцияи бефосила мебошад, пас барои ҳама қиматҳои x-и $[0, d]$ нобаробарии $0 < S(x) < L(x)$ иҷро мешавад. Дурустии талаботи 3° муқаррар карда шуд.

Акнун қайд мекунем, ки адади L аз интихоби d вобаста аст. Яъне, агар ба ҷои d адади $d^* = d/k$-ро гирем, онгоҳ $s_n{}^x = s_n/k$ мешавад. Муво-

фиқи сохтан $S(s_n{}^x) = S(s_n)$ ва, бинобар ин, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S(s_n{}^*)}{s_n} = \lim\limits_{n\to\infty} k\dfrac{S(s_n)}{s_n} = kL$ (ба (4.24)ниг.) $k = 1/L$ интихоб карда, мо функцияхои $S(x)$ ва $C(x)$-ро дар сегменти $[0, d^*]$ муайян мекунем ва нобаробарии $0 < S(x) < x$ иҷро мешавад.

Тасаввуроти геометрӣ нишон медиҳад, ки агар $d = \pi/2$ бошад, онгоҳ $2S(s_n)$ дарозии тарафи 2^n-кунҷаи мунтазами дар даруни давраи радиусаш 1 кашидашуда, $2s_n$ дарозии камони давраи хордаи дарозиаш $2S(s_n)$-ро дарбаргиранда ва $2t(s_n)$ дарозии тарафи 2^n-кунҷаи мунтазами дар атрофи ин давра кашидашударо ифода мекунад. Дар ин маврид нобаробарии (4.25) ба намуди $S(s_n) < s_n < t(s_n)$ соҳиб мешавад. Бинобар ин дар мавриди номбурда $L = 1$ аст. Тасдиқот пурра исбот шуд.

---

[1] Ба поварақи сах. 144 ниг.

БОБИ 5

АСОСҲОИ ҲИСОБИ ДИФФЕРЕНЦИАЛӢ

Дар ин боб мафҳумҳои ҳосила ва дифференциал мавриди омӯзиш қарор мегиранд, қоидаҳои дифференсиронӣ муқаррар карда мешаванд, ҳосилаи ҳама функцияҳои элементарии содда тарин, ки дар боби 1 навишта будем, ҳисоб карда мешаванд. Баъд ҳосила ва дифференциалҳои тартиби олӣ омӯхта мешаванд.

§ 1. Ҳосила. Интерпретацияи физикавӣ ва геометрии он

1. Афзоиши аргумент ва функция. Шакли фарқиятии шарти бефосилагӣ. Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар ягон интервали* (a, b) муайян аст. Аз ҳамин интервал қимати дилхоҳи x-ро қайд мекунем ва ба аргумент дар нуқтаи x чунин афзоиши дилхоҳи Δx медиҳем, ки қимати $x + \Delta x$ ҳам ба интервали (a, b) мутааллиқ бошад. *Адади*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{5.1}$$

ро афзоиши функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x, ки ба афзоиши аргументи Δx мувофиқ аст, меноманд.

Чунончи, афзоиши функцияи $y = \sin x$ дар нуқтаи x, ки ба афзоиши аргументи Δx мувофиқ аст, ба ифодаи зерин баробар мешавад:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}. \tag{5.2}$$

---

* Ба ҷои интервали (a, b) сегменти $[a, b]$, нимхати рост, ҳама хати рости беохир ва умуман маҷмӯи ба худаш зичи дилхоҳи $\{x\}$-ро муоина кардан мумкин аст. Таърифи маҷмӯи ба худаш зичи $\{x\}$ дар § 3 боби 2 дода шудааст.

Чунин тасдиқот мавқеъ дорад: *барои он ки функцияи* $y = f(x)$ *дар нуқтаи* x *бефосила бошад, зарур ва кифоя аст, ки афзоиши* Δy*-и ин функция дар нуқтаи* x*, ки ба афзоиши аргументи* Δx *мувофиқ аст, ҳангоми* $\Delta x \to 0$ *беохир хурд мебошад.*

Воқеан, мувофиқи таъриф, функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x бефосила мебошад, агар қимати лимитии

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x) \tag{5.3}$$

мавҷуд бошад. Дар асоси п. 3 § 2 боби 4 мавҷудияти қимати лимитии (5.3) ба он баробарқувва аст, ки функцияи $[f(x + \Delta x) - f(x)]$-и аргументи Δx ҳангоми $\Delta x \to 0$ беохир хурд мебошад.

Тасдиқоти исботшуда имконият медиҳад, ки шарти дар нуқтаи x бефосила будани функцияи $y = f(x)$ дар шакли нав ифода карда шавад, яъне: *функцияи* $y = f(x)$ *дар нуқтаи* x *бефосила мебошад, агар афзоиши* Δy*-и ин функция дар нуқтаи* x*, ки ба афзоиши аргумент* Δx *мувофиқ аст, ҳангоми* $\Delta x \to 0$ *беохир хурд бошад, яъне агар*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0. \tag{5.4}$$

Мо шарти (5.4)-ро *шакли фарқиятии шарти дар нуқтаи* x *бефосила будани функцияи* $y = f(x)$ меномем. Мо ин шартро минбаъд чандинҳо маротиба истифода мекунем.

Бо ёрии шарти (5.4) мо боз боварӣ ҳосил мекунем, ки функцияи $y = \sin x$ дар нуқтаи дилхоҳи x-и хати рости беохир бефосила мебошад. Воқеан, аз формулаи (5.2), аз шарти $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1$ ва аз баробарии $\lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$ бевосита натиҷа мебарояд, ки $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

2. Таърифи ҳосила. Барои функцияи $y = f(x)$ фарзият ва ишоратҳое, ки дар ибтидои пункти гузашта баён шудаанд, нигоҳ медорем.

$\Delta x \neq 0$ пиндошта, дар нуқтаи *қайдшудаи* додашудаи x нисбати афзоиши Δy-и функция дар ҳамин нуқта ба афзоиши мувофиқи аргумент Δx-ро муоина мекунем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.5}$$

Нисбати (5.5)-ро *нисбати фарқиятӣ* (дар нуқтаи додашудаи x) меномем. Азбаски мо қимати x-ро *қимати қайдшуда* меҳисобем, пас нисбати фарқиятии (5.5) *функцияи аргумент* Δx-ро ифода мекунад. Ин функция барои ҳама қиматҳои аргумент

Δx, ки ба ягон атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаҳои $\Delta x = 0$ тааллуқ доранд, ба ғайр аз худи нуқтаи $\Delta x = 0$ муайян мебошад. Ҳамин тариқ, мо масъалаи мавҷудияти лимити функцияи номбурдаро ҳангоми $\Delta x \to 0$ муоина карда метавонем.

Таъриф. Ҳосилаи функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи қайдшудаи додашудаи x гуфта нисбати фарқиятии (5.5)*-ро ҳангоми $\Delta x \to 0$ меномем (ба шарте ки ин лимит вуҷуд дошта бошад).*

Ҳосилаи функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x-ро бо символи $y'(x)$ ё $f'(x)$ ишорат менамоем. Инак, мувофиқи таъриф,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (5.6)$$

Агар функцияи $y = f(x)$ барои ҳама x-ҳои интервали (a, b) муайян ва соҳиби ҳосила бошад, онгоҳ ин ҳосила ягон функцияи тағйирёбандаи x, инчунин дар интервали (a, b) муайянро ифода мекунад.

3. Ҳосила аз нуқтаи назари физика. Мо ҳанӯз дар боби 1 мафҳуми ҳосиларо аз нуқтаи назари физика омӯхта будем. Дар ин ҷо боз ба татбиқоти физикавии мафҳуми ҳосила таваққуф менамоем.

Пеш аз ҳама, фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ *қонуни ҳаракати нуқтаи материалӣ аз рӯи хати ростро* (яъне аз вақти x вобаста будани роҳи y-ро, ки нуқта аз ибтидои ҳисоб тай кардааст) баён мекунад. Онгоҳ, чунон ки маълум аст, нисбати фарқиятии (5.5) суръати миёнаи нуқта дар фосилаи вақти аз x то $x + \Delta x$-ро муайян мекунад. Дар ингуна мавриди ҳосилаи $f'(x)$, яъне лимити нисбати фарқиятии (5.5) ҳангоми $\Delta x \to 0$, *суръати лаҳзавии нуқта дар лаҳзаи вақти t*-ро муайян мекунад. Инак, ҳосилаи функция, ки қонуни ҳаракатро тавсиф мекунад, суръати лаҳзавии нуқтаро муайян менамояд.

Барои он ки чунин тасаввурот пайдо нашавад: мафҳуми ҳосила фақат дар механика васеъ истифода мешавад, доир ба татбиқи мафҳуми ҳосила аз дигар фаслҳои физика мисолҳо меорем.

Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ миқдори электрик y-ро, ки аз буриши кӯндалангии нокил дар вақти x ҷорӣ мешавад, муайян мекунад. (Дар айни ҳол лаҳзаи вақти $x = 0$ ба сифати ибтидои ҳисоб гирифта мешавад.) Дар ин мавриди ҳосилаи $f'(x)$ *қувваи ҷараёни* аз буриши кӯндалангии нокил дар лаҳзаи вақти x ҷоришавандаро муайян мекунад.

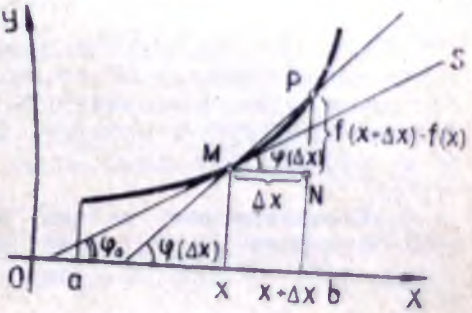
Баъд, процесси гармшавии ягон ҷисмро муоина мекунем. Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ миқдори гармии* y-ро, ки ба ҷисм барои аз 0° то x° гарм кардани он дода мешавад, муайян мекунад. Онгоҳ, чунон ки аз курси физикаи элементарӣ маълум аст, нисбати фарқиятии (5.5) *гармигунҷоиши миёнаи*

* Масалан, бо калорияҳо ифода шудааст.

чисмро ҳангоми аз x° то $(x+\Delta x)^\circ$ гарм кардани он муайян мекунад. Дар ингуна маврид ҳосилаи $f'(x)$, яъне қимати лимитии нисбати фарқиятии (5.5) ҳангоми $\Delta x \to 0$, *гармигунҷоиши чисмро дар ҳарорати додашудаи x* муайян мекунад. Бояд қайд кард, ки ин гармигунҷоиш, умуман, бо тағьир ёфтани ҳарорат (x) тағьир меёбад.

Мо мисолҳои дар се соҳаи гуногуни физика татбиқ шудани мафҳуми ҳосиларо дида мебароем. Ҳангоми омӯзиши курси физикаи умумӣ мо бо дигар мисолҳои сершумори татбиқи мафҳуми ҳосила дучор мешавем.

4. Ҳосила аз нуқтаи назари геометрия. Мо дар § 2-юми боби 1 масъалаи ёфтани расандаи хати кҷро, ки (дар ягон интервали (a, b)) графики функцияи $y = f(x)$ мебошад, омӯхтем. Мо дар он ҷо ба расандаи ин хати кҷ (дар нуқтаи $M(x, f(x))$-и ҳамин хати кҷ) таъриф дода будем. (Дар ин ҷо x — ягон қимати аргумент аз интервали (a, b). Ба расми 5.1 ниг.). Агар афзоиши дилхоҳи аргументро бо Δx ва нуқтаи хати кҷро, ки координатаҳояш $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ мебошад, бо символи P ишорат намоем, онгоҳ расандаеро, ки аз нуқтаи M-и хати кҷи додашуда мегузарад, чун мавқеи лимитии бурандаи MP ҳангоми $\Delta x \to 0$ муайян менамоем. Аз расми 5.1 фаҳмост, ки коэффициенти кунҷии бурандаи MP (яъне тангенси кунҷи моили ин буранда ва тири Ox) ба нисбати фарқиятии (5.5) баробар аст. Аз ҳамин далел ва аз он, ки ҳангоми $\Delta x \to 0$ лимит гирифтан кунҷи моили буранда бояд ба кунҷи моили расанда табдил шавад, мо дар § 2-юми боби 1 ба чунин хулосае омада будем, ки он ба тасаввуроти аёнӣ асос ёфтааст: *ҳосилаи $f'(x)$ ба коэффициенти кунҷии расанда дар нуқтаи M-и графики функцияи $y = f(x)$ баробар аст.*



Расми 5.1.

Мо дар ҳамин пункт тасаввуроти аёнии номбурдаро аниқтар мекунем. Функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи додашудаи x соҳиби ҳосила будани шро фарз карда, исбот мекунем, ки: 1) графики функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи додашудаи $M(x, f(x))$ соҳиби расанда мебошад, 2) коэффициенти кунҷии расандаи номбурда ба $f'(x)$ баробар аст.

Тасдиқоти 1) ва 2)-ро дар як вақт исбот мекунем. Кунҷи моили бурандаи MP ба тири Ox-ро бо символи $\varphi(\Delta x)$ ишорат менамоем. Азбаски коэффициенти кунҷии бурандаи MP (яъне

Δx, ки ба ягон атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаҳои $\Delta x = 0$ тааллуқ доранд, ба ғайр аз худи нуқтаи $\Delta x = 0$ муайян мебошад. Ҳамин тариқ, мо масъалаи мавчудияти лимити функцияи номбурдаро ҳангоми $\Delta x \to 0$ муоина карда метавонем.

Таъриф. Ҳосилаи функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи қайдшудаи додашудаи x гуфта нисбати фарқиятии (5.5)*-ро ҳангоми $\Delta x \to 0$ меномем (ба шарте ки ин лимит вуҷуд дошта бошад).*

Ҳосилаи функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x-ро бо символи $y'(x)$ ё $f'(x)$ ишорат менамоем. Инак, мувофиқи таъриф,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (5.6)$$

Агар функцияи $y = f(x)$ барои ҳама x-ҳои интервали (a, b) муайян ва соҳиби ҳосила бошад, онгоҳ ин ҳосила ягон функцияи тағйирёбандаи x, инчунин дар интервали (a, b) муайянро ифода мекунад.

3. Ҳосила аз нуқтаи назари физика. Мо ҳанӯз дар боби 1 мафҳуми ҳосиларо аз нуқтаи назари физика омӯхта будем. Дар ин ҷо боз ба татбиқоти физикавии мафҳуми ҳосила таваққуф менамоем.

Пеш аз ҳама, фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ *қонуни ҳаракати нуқтаи материалӣ аз рӯи хати ростро* (яъне аз вақти x вобаста будани роҳи y-ро, ки нуқта аз ибтидои ҳисоб тай кардааст) баён мекунад. Онгоҳ, чунон ки маълум аст, нисбати фарқиятии (5.5) суръати миёнаи нуқта дар фосилаи вақти аз x то $x + \Delta x$-ро муайян мекунад. Дар ингуна маврид ҳосилаи $f'(x)$, яъне лимити нисбати фарқиятии (5.5) ҳангоми $\Delta x \to 0$, *суръати лаҳзавии нуқта дар лаҳзаи вақти t*-ро муайян мекунад. Инак, ҳосилаи функция, ки қонуни ҳаракатро тавсиф мекунад, суръати лаҳзавии нуқтаро муайян менамояд.

Барои он ки чунин тасаввурот пайдо нашавад: мафҳуми ҳосила фақат дар механика васеъ истифода мешавад, доир ба татбиқи мафҳуми ҳосила аз дигар фаслҳои физика мисолҳо меорем.

Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ миқдори электрик y-ро, ки аз буриши кӯндалангии нокил дар вақти x ҷорӣ мешавад, муайян мекунад. (Дар айни ҳол лаҳзаи вақти $x = 0$ ба сифати ибтидои ҳисоб гирифта мешавад.) Дар ин маврид ҳосилаи $f'(x)$ *қувваи ҷараёни* аз буриши кӯндалангии нокил дар лаҳзаи вақти x ҷоришавандаро муайян мекунад.

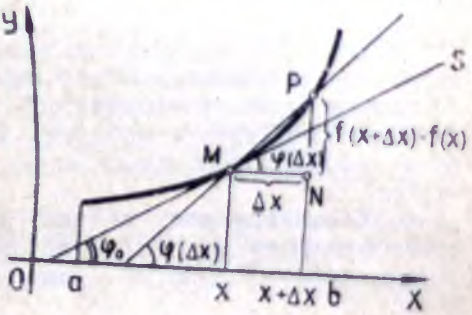
Баъд, процесси гармшавии ягон ҷисмро муоина мекунем. Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ миқдори гармии* y-ро, ки ба ҷисм барои аз 0° то x° гарм кардани он дода мешавад, муайян мекунад. Онгоҳ, чунон ки аз курси физикаи элементарӣ маълум аст, нисбати фарқиятии (5.5) *гармигунҷоиши миёнаи*

* Масалан, бо калорияҳо ифода шудааст.

чисмро ҳангоми аз $x°$ то $(x + \Delta x)°$ гарм кардани он муайян мекунад. Дар ингуна маврид ҳосилаи $f'(x)$, яъне қимати лимитии нисбати фарқиятии (5.5) ҳангоми $\Delta x \to 0$, *гармигунҷоиши чисмро дар ҳарорати додашудаи x* муайян мекунад. Бояд қайд кард, ки ин гармигунҷоиш, умуман, бо тағьир ёфтани ҳарорат (x) тағьир меёбад.

Мо мисолҳои дар се соҳаи гуногуни физика татбиқ шудани мафҳуми ҳосиларо дида мебароем. Ҳангоми омӯзиши курси физикаи умумӣ мо бо дигар мисолҳои сершумори татбиқи мафҳуми ҳосила дучор мешавем.

4. Ҳосила аз нуқтаи назари геометрия. Мо дар § 2-юми боби 1 масъалаи ёфтани расандаи хати качро, ки (дар ягон интервали (a, b)) графики функцияи $y = f(x)$ мебошад, омӯхтем. Мо дар он чо ба расандаи ин хати кач (дар нуқтаи $M(x, f(x))$-и ҳамин хати кач) таъриф дода будем. (Дар ин чо x — ягон қимати аргумент аз интервали (a, b). Ба расми 5.1 ниг.). Агар афзоиши дилхоҳи аргументро бо Δx ва нуқтаи хати качро, ки координатаҳояш $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ мебошад, бо символи P ишорат намоем, онгоҳ расандаеро, ки аз нуқтаи M-и хати качи додашуда мегузарад, чун мавқеи лимитии бурандаи MP ҳангоми $\Delta x \to 0$ муайян менамоем. Аз расми 5.1 фаҳмост, ки коэффициенти кунҷии бурандаи MP (яъне тангенси кунҷи моили ин буранда ва тири Ox) ба нисбати фарқиятии (5.5) баробар аст. Аз ҳамин далел ва аз он, ки ҳангоми $\Delta x \to 0$ лимит гирифтан кунҷи моили буранда бояд ба кунҷи моили расанда табдил шавад, мо дар § 2-юми боби 1 ба чунин хулосае омада будем, ки он ба тасаввуроти аёнӣ асос ёфтааст: *ҳосилаи $f'(x)$ ба коэффициенти кунҷии расанда дар нуқтаи M-и графики функцияи $y = f(x)$ баробар аст.*



Расми 5.1.

Мо дар ҳамин пункт тасаввуроти аёнии номбурдаро аниқтар мекунем. Функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи додашудаи x соҳиби ҳосила будан ашро фарз карда, исбот мекунем, ки: 1) графики функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи додашудаи $M(x, f(x))$ соҳиби расанда мебошад, 2) коэффициенти кунҷии расандаи номбурда ба $f'(x)$ баробар аст.

Тасдиқоти 1) ва 2)-ро дар як вақт исбот мекунем. Кунҷи моили бурандаи MP ба тири Ox-ро бо символи $\varphi(\Delta x)$ ишорат менамоем. Азбаски коэффициенти кунҷии бурандаи MP (яъне

$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x))$ ба нисбати $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ баробар аст, пас ҳангоми ба қадри дилхоҳи кифоя хурд будани Δx-и нобаробари нуль

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{5.7}$$

Аз мавчудияти ҳосилаи $f'(x)$, яъне аз мавчудияти қимати лимитии $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ва аз бефосилагии функцияи $u = \operatorname{arctg} x$ (барои ҳама қиматҳои аргумент) мавчудияти қимати лимитии функцияи (5.7) дар нуқтаи $\Delta x = 0$ ва баробарии зерин бармеояд:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x). \tag{5.8}$$

Баробарии (5.8) мавчудияти қимати лимитии (ҳангоми $\Delta x\to 0$) кунчи моили бурандаи MP-ро исбот мекунад, яъне дар нуқтаи M мавчуд будани расандаро исбот мекунад. Ғайр аз он, аз баробарии (5.8) натича мебарояд, ки агар кунчи моили расанда бо φ_0 ишорат карда шавад, онгоҳ $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f'(x)$, яъне $\operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x)$.

5. Ҳосилаҳои рост ва чап. Мафҳуми *ҳосилаҳои рост ва чапи* функцияи $y = f(x)$ (дар нуқтаи додашудаи x) ба монанди мафҳуми қиматҳои лимитии росту чап муоина мешаванд.

Таъриф. Ҳосилаи рости (чапи) функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи қайдшудаи додашудаи x гуфта қимати лимитии рост (чап)-и нисбати фарқиятии (5.5) дар нуқтаи $\Delta x = 0$-ро меноманд (ба шарте, ки ин қимати лимитӣ вуҷуд дошта бошад).

Ҳосилаи рости функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x-ро одатан бо символи $f'(x+0)$ ва ҳосилаи чапи он дар нуқтаи x-ро бо символи $f'(x-0)$ ишорат менамоянд.

*Агар функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x соҳиби ҳосила бошад, онгоҳ он дар ин нуқта ҳам ҳосилаи рост ва ҳам ҳосилаи чап дорад, ки онҳо байни якдигар мувофиқанд. Агар функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x ҳам ҳосилаи рост ва ҳам ҳосилаи чап дошта бошад ва ин ҳосилаҳо байни якдигар мувофиқ бошанд, онгоҳ функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x соҳиби ҳосила мебошад.**

---

* Ин тасдиқот аз тасдиқоти мувофиқи қиматҳои лимитии росту чапи функция бармеояд (ба қайди п. 1 § 2 боби 4 нигаред).

Дар баробари ин функцияҳое ҳастанд, ки дар нуқтаи додашудаи x ҳам ҳосилаи рост ва ҳам ҳосилаи чап доранд, лекин онҳо дар ин нуқта соҳиби ҳосила намебошанд. Функцияи зерин мисоли ингуна функцияҳо мебошад:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} +x, \text{ агар } x \geqslant 0 \text{ бошад,} \\ -x, \text{ агар } x < 0 \text{ бошад.} \end{cases}$$

Ин функция дар нуқтаи $x = 0$ ҳам ҳосилаи рост дорад, ки ба $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ баробар аст, ва ҳам ҳосилаи чап дорад, ки ба $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$ баробар аст, лекин он дар нуқтаи $x = 0$ ҳосила надорад.

6. Мафҳуми ҳосилаи функцияи векторӣ. Дар анализи математикӣ ва татбиқоти он мафҳуми функцияи векторӣ ва ҳосилаи он бисьёр дучор меояд.

Агар ба ҳар як қимати тағьирьёбандаи t-и ягон маҷмӯи $\{t\}$ аз рӯи қонуни муайян вектори a дар мувофиқатӣ гузошта шавад, онгоҳ мегӯянд, ки функцияи вектории $a = a(t)$ дар маҷмӯи $\{t\}$ дода шудааст.

Азбаски ҳар як вектори a дар системаи росткунҷагии декартии додашуда бо се координатаҳои x, y ва z якқимата муайян карда мешавад, пас дода шудани функцияи вектории $a = a(t)$ бо дода шудани се функцияҳои скалярии $x = x(t)$, $y = y(t)$ ва $z = z(t)$ баробаркувва мебошад.

Агар ба *годографи* функцияи векторӣ муроҷиат намоем, мафҳуми ин функция аёнитар мегардад.

Ҷои геометрии интиҳоии ҳама векторҳои $a(t)$, ки аз ибтидои координата O гузаронида шудаанд, годограф номида мешавад. Дар расми 5.2 хати қачи L годографи функцияи вектории $a = a(t)$-ро тасвир мекунад.

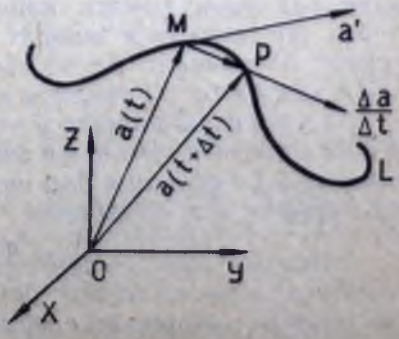
Мафҳуми годографи функцияи векторӣ ҷамъбасти мафҳуми графики функцияи скаляриро ифода мекунад.

Мафҳуми ҳосилаи функцияи вектории $a(t)$ дар нуқтаи қайдшудаи додашудаи t-ро ҷорӣ мекунем. Барои ин мақсад ба аргументи t афзоиши дилхоҳи $\Delta t \neq 0$ медиҳем ва вектори $\Delta a = a(t + \Delta t) - a(t)$-ро муоина мекунем (дар расми 5.2 вектори номбурда бо вектори $\overline{MP}$ ҳамҷоя аст). Вектори номбурдаро ба адади $1/\Delta t$ зарб карда, вектори нави ба вектори пештара коллинеарии

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[a(t + \Delta t) - a(t)] \qquad (5.5^*)$$

-ро ҳосил мекунем. Вектори (5.5*) қиёси нисбати фарқиятии (5.5) мебошад. Вектори (5.5*) суръати миёнаи тағьирьёбии функцияи векторӣ дар сегменти $[t, t + \Delta t]$-ро ифода мекунад.

Ҳосилаи функцияи вектории $a = a(t)$ дар нуқтаи қайдшудаи додашудаи t гуфта лимити нисбати фарқиятии (5.5*) *ҳангоми $\Delta t \to 0$-ро меноманд.*



Расми 5.2

Ҳосилаи функцияи вектории $a(t)$ бо символи $a'(t)$ ё $\frac{da}{dt}$ ишорат карда мешавад.

Аз тасаввуроти геометрӣ маълум аст, ки ҳосилаи функцияи вектории $a = a(t)$ векторест, ки ба годографи ин функция расанда мебошад.

Азбаски координатаҳои нисбати фарқиятии (5.5*) мувофиқан ба

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}, \quad \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}, \quad \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}$$

баробар мебошанд, пас фаҳмост, ки координатаҳои ҳосилаи $a'(t)$ ба функцияҳои ҳосилавии $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ баробаранд. Ҳамин тариқ, ҳисоби ҳосилаи функцияи векторӣ ба ҳисоби ҳосилаи координатаҳои он меорад.

Қайди 1. Азбаски функцияи вектории $a = a(t)$ қонуни ҳаракати нуқтаи материалӣ аз рӯи хати қачи L (годографи ин функция)-ро муайян мекунад, пас ҳосилаи $a'(t)$ ба суръати ҳаракат аз рӯи хати қачи номбурда баробар аст.

Қайди 2. Аз курси геометрияи аналитикӣ намудҳои гуногуни ҳосилҳои зарби векторӣ (ҳосили зарби скалярӣ, ҳосили зарби векторӣ, ҳосили зарби омехта) маълуманд. Бо координатаҳо ифода кардани ҳамаи ин ҳосилҳои зарб барои нишон додани қоидае имконият медиҳанд, ки аз рӯи он ҳосилаи ҳосилҳои зарби мувофиқи функцияҳои векторӣ ҳисоб карда мешаванд. Ба сифати мисол қоидаи ҳисоби ҳосилаи ҳосили зарби скалярии ду функцияи вектории $a(t) = \{a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t)\}$ ва $b(t) = \{b_1(t),\ b_2(t),\ b_3(t)\}$-ро меорем:

$$\{a(t)\,b(t)\}' = a'(t)\,b(t) + a(t)\,b'(t) = \{a_1'(t)\,b_1(t) + a_2'(t)\,b_2(t) + a_3'(t)\,b_3'(t)\} + \{a_1(t)\,b_1'(t) + a_2(t)\,b_2'(t) + a_3(t)\,b_3'(t)\}.$$

Ҳамингуна қоида барои ҳосили зарби вектории ду функцияи векторӣ низ дуруст аст:

$$[a(t)\,b(t)]' = [a'(t)\,b(t)] + [a(t)\,b'(t)].$$

§ 2. Мафҳуми дифференсиронии функцияҳо

1. Мафҳуми дифференсиронии функцияҳо дар нуқтаи додашуда. Чунон ки дар пп. 1, 2-и параграфи гузашта буд, фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар ягон интервали $(a,\ b)$ муайян аст, ягон қимати қайдшудаи аргументи интервали номбурда бо символи x ишорат шудааст ва афзоиши дилхоҳи аргумент бо символи Δx чунон ишорат шудааст, ки қимати $x + \Delta x$ ҳам ба $(a,\ b)$ таалуқ дорад.

Таъриф. Функцияи $y = f(x)$ функцияи дар нуқтаи x дифференсиронидашаванда номида мешавад, агар афзоиши Δy-и ин функция дар нуқтаи x-ро, ки ба афзоиши аргумент Δx мувофиқ аст, ба намуди

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x \qquad (5.9)$$

навиштан мумкин бошад; дар ин ҷо A — ягон адади аз Δx новобаста ва α — функцияи аргументи Δx, ки ҳангоми $\Delta x \to 0$ беохир хурд мебошад.

Функцияи $\alpha(\Delta x)$ дар нуқтаи $\Delta x = 0$ *қимати дилхоҳ* қабул карда метавонад (дар айни ҳол дар ин нуқта ифодаи (5.9) дуруст аст). Барои муайянӣ $\alpha(0) = 0$* фарз кардан мумкин аст.

Азбаски ҳосили зарби ду беохир хурди $\alpha\Delta x$ назар ба Δx беохир хурди тартиби баландтар мебошад (ба п. 3 § 2 боби 4 нигар.), яъне $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, пас формулаи (5.9)-ро ба намуди

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$$

навиштан мумкин аст.

Теоремаи 5. 1. *Барои он, ки функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи додашудаи x дифференсиронидашаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки он дар ин нуқта ҳосилаи охирнок дошта бошад.*

Исбот. 1) Шарти зарурӣ. Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи додашудаи x дифференсиронидашаванда аст, яъне афзоиши Δy дар ин нуқта ба намуди (5.9) навишташаванда аст. $\Delta x \neq 0$ фарз карда ва баробарии (5.9)-ро ба Δx тақсим карда, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha. \tag{5.10}$$

Аз баробарии (5.10) мавҷудияти ҳосила, яъне қимати лимитии $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$ бармеояд.

2) Шарти кифоягӣ. Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи додашудаи x ҳосилаи охирнок дорад, яъне қимати лимитии

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \tag{5.11}$$

вуҷуд дорад.

Дар асоси таърифи қимати лимитӣ функцияи $\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$-и аргументи Δx ҳангоми $\Delta x \to 0$ функцияи беохир хурд мебошад, яъне

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x, \tag{5.12}$$

дар ин ҷо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Ифодаи (5.12) бо ифодаи (5.9) мувофиқ меояд, агар адади $f'(x)$-и аз Δx новобастаро бо A ишорат намоем. Бо ҳамин исбот карда шуд, ки функцияи $y = f(x)$ функцияи дар нуқтаи x дифференсиронидашаванда мебошад.

---

* Дар айни ҳол қимати хусусии функцияи $\alpha(\Delta x)$ дар нуқтаи $\Delta x = 0$ бо қимати лимитии он дар ин нуқта мувофиқ меояд.

Теоремаи исботшуда имконият медиҳад, ки мо минбаъд *мафҳуми дар нуқтаи додашуда дифференсиронидашаванда будани функцияро бо мафҳуми дар нуқтаи додашуда ҳосила доштани функция монанд ҳисобем.*

Амали ёфтани ҳосиларо минбаъд *дифференсиронӣ* меномем.

2. **Алоқамандии байни мафҳумҳои дифференсиронӣ ва бефосилагии функция.** Чунин тасдиқоти элементарӣ ҷой дорад.

Теоремаи 5.2. *Агар функцияи* $y = f(x)$ *дар нуқтаи додашудаи* x *дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ он дар ин нуқта низ бефосила мебошад.*

Исбот. Азбаски функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x дифференсиронидашаванда мебошад, пас афзоиши дар ин нуқтадоштаи он Δy-ро ба намуди (5.9) навиштан мумкин аст. Лекин аз формулаи (5.9) натиҷа мебарояд, ки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, яъне функцияи $y = f(x)$ дар асоси шаклии фарқиятии шарти бефосилагӣ (ба п. 1 § 1 нигар.) дар нуқтаи x бефосила мебошад. Теорема исбот шуд.

Чунин савол пайдо шуданаш табиист: оё тасдиқоти ба теоремаи 5.2 баръакс дуруст аст, яъне оё аз бефосилагии функция дар нуқтаи додашуда дифференсиронидашавандагии он дар ҳамин нуқта бармеояд? Ба ин савол ҷавоби манфӣ додан лозим аст, чунки функцияҳое ҳастанд, ки дар ягон нуқта бефосила мебошанд, лекин дар ин нуқта дифференсиронидашаванда намебошанд. Функцияи $y = |x|$ мисоли ингуна функция мебошад. Ин функция дар нуқтаи $x = 0$ бефосила мебошад, лекин он (чунон ки дар интиҳои п. 5 § 1 нишон дода шуд) дар ҳамин нуқта дифференсиронидашаванда намебошад. Функцияҳои дар ягон сегмент бефосилае ҳастанд, ки дар ҳеҷ ягон нуқтаи ин сегмент ҳосила надоранд.*

3. **Мафҳуми дифференциали функция.** Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x дифференсиронидашаванда аст, яъне афзоиши Δy-и ин функция дар нуқтаи x-ро ба намуди (5.9) навиштан мумкин аст. Формулаи (5.9)-ро таҳлил намуда, мо ба хулосае меоем, ки афзоиши Δy-и функцияи дифференсиронидашаванда суммаи ду ҷамъшавандаеро ифода мекунад: ҷамъшавандаи якум $A\,\Delta x$ ҳангоми $A \neq 0$ будан функцияи афзоиши аргумент Δx-ро, ки нисбат ба Δx хаттӣ ва якчинса мебошад,** ифода менамояд; ин ҷамъшаванда ҳангоми $\Delta x \to 0$ бе-

---

* Мисоли аввалин маротиба чопшудаи ингуна функция ба Вейерштрасс тааллуқ дорад. Математики чех Больцано новобаста аз Вейерштрасс хамингуна мисолро пештар тартиб дода буд, лекин ин мисол чоп нашуда буд. Дар Иловаи боби II мисоли ингуна функция дода мешавад.

** Ба хотир меорем: функцияи намуди $y = Ax + B$, ки дар ин ҷо A ва B ягон доимиҳо мебошанд, функцияи хаттии аргументи x номида мешавад. Дар мавриди $B = 0$ будан функцияи хаттӣ функцияи якчинса номида мешавад.

охир хурдеро ифода мекунад, ки тартибаш ба тартиби Δx якхел аст; ҷамъшавандаи дуюм $\alpha\Delta x$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ назар ба Δx беохир хурди тартиби баландтарро ифода менамояд, чунки нисбати $\dfrac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \alpha$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба нуль майл мекунад. Ҳамин тариқ, ҳангоми $A \neq 0$ будан ҷамъшавандаи якум $A\Delta x$ қисми асосии афзоиши функцияи дифференсиронидашаванда мебошад. Ин қисми асосии афзоишро дифференциали функция дар нуқтаи x, ки ба афзоиши аргумент Δx мувофиқ аст, меноманд.

Инак, дар мавриди $A \neq 0$ будан *қисми асосии нисбат ба Δx хаттии афзоиши функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи додашудаи x-ро дифференциали ҳамин функция дар нуқтаи x (ки ба афзоиши аргумент Δx мувофиқ аст) меноманд.* Дифференциали функцияи $y = f(x)$ бо символи dy ишорат карда мешавад. Агар формулаи (5.9) барои афзоиши функция (Δy) дуруст бошад, онгоҳ дифференциали ин функция, мувофиқи таъриф, ба

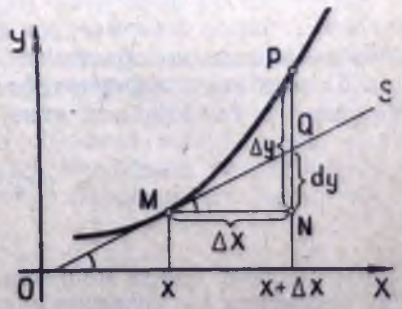
$$dy = A \cdot \Delta x \qquad (5.13)$$

баробар аст. Агар $A = 0$ бошад, ҷамъшавандаи $A \cdot \Delta x$ қисми асосии афзоиши Δy-и функцияи дифференсиронидашаванда намешавад (чунки ин ҷамъшавандаи дар мавриди, умуман, аз нуль тафовут доштани ҷамъшавандаи $\alpha \cdot \Delta x$ ба нуль баробар аст). Аммо дар мавриди $A = 0$ ҳам дифференциали функцияро бо формулаи (5.13) муайян менамоянд, яъне дар ин мавриди онро баробари нуль мепиндоранд.

Агар теоремаи 5.1-ро ба эътибор гирем, яъне агар ба эътибор гирем, ки $A = f'(x)$ аст, онгоҳ формулаи (5.13)-ро ба намуди

$$dy = f'(x)\,\Delta x \qquad (5.14)$$

навиштан мумкин аст. Формулаи (5.14) ифодаи дифференциали функция дар нуқтаи x мебошад, ки ба афзоиши аргумент Δx мувофиқ аст. Қайд кардан лозим аст, ки дифференциали функция (dy) дар нуқтаи додашудаи x, умуман, ба афзоиши функция (Δy) дар ҳамин нуқта баробар нест. Графики функцияи $y = f(x)$-ро муоина карда (расми 5.3), инро аниқ кардан осон аст. Фарз мекунем, ки ба нуқтаи M-и хати каҷи $y = f(x)$ қимати аргументи x мувофиқ меояд, ба нуқтаи



Расми 5.3

P-и ҳамин хати кач қимати аргументи $x + \Delta x$ мувофиқ меояд, MS — расандаи хати качи $y = f(x)$ дар нуқтаи M. Бигзор $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$ ва Q нуқтаи буриши расандаи MS ва хати рости PN бошад. Онгоҳ афзоиши функция Δy ба бузургии порчаи NP баробар мешавад. Дар як вақт аз секунчаи рост-кунчаи MQN ва аз формулаи (5.14) фаҳмост, ки дифференциали функция dy ба бузургии порчаи NQ баробар аст, чунки бузургии порчаи MN ба Δx ва тангенси кунчи QMN ба $f'(x)$ баробар аст. Маълум аст, ки бузургии порчаҳои NP ва NQ, умуман, гуногун мебошанд.

Дар хулосаи ин пункт мо ифодаи дифференциали функцияи $y = f(x)$-ро, ки аргументаш x *тағьирьёбандаи новобаста* мебошад, муқаррар мекунем.*

Мафҳуми *дифференциали dx-и тағьирьёбандаи новобастаи* x-ро чорӣ мекунем. Дифференциали dx-и тағьирьёбандаи новобастаи x гуфта адади дилхоҳ (-и аз x новобаста)-ро фаҳмидан мумкин аст. Минбаъд ин ададро ба афзоиши Δx-и тағьирьёбандаи новобаста баробар мегирем**. Аз ҳамин сабаб формулаи (5.14)-ро ин тавр менависем:

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{5.15}$$

Формулаи (5.15)-ро фақат барои мавриде, ки аргументи x *тағьирьёбандаи новобаста* мебошад, муқаррар кардем. Аммо, сонитар, дар § 9, исбот мекунем, ки формулаи (5.15) барои мавриде, ки аргументи x тағьирьёбандаи новобаста намебошад, низ дуруст аст ва он функцияи дифференцированидашавандаи ягон тағьирьёбандаи навро ифода мекунад.

Ҳозир мо аз формулаи (5.15) чунин хулоса бароварда метавонем: барои мавриде, ки аргументи x-и функцияи $y = f(x)$ тағьирьёбандаи новобаста мебошад, ҳосилаи $(f'(x))$-и ин функция ба нисбати дифференциали функция dy ба дифференциали аргумент dx баробар аст, яъне

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Дар § 9 исбот карда мешавад, ки ин формула барои мавриде, ки аргументи x функцияи дифференцированидашавандаи ягон тағьирьёбандаи нав мебошад, дуруст аст.

---

* Аргументи x-и функцияи $y = f(x)$, умуман, худаш функцияи ягон тағьирьёбанда шуда метавонад.

** Ин шартро муоинаи тағьирьёбандаи новобастаи x чун функцияи намуди $y = x$, ки барояш $dy = dx = \Delta x$ мебошад, тасдиқ мекунад.

§ 3. Қоидаҳои дифференсиронидани сумма, фарқ, ҳосили зарб ва ҳосили тақсим

Теоремаи 5.3. *Агар ҳар яки функцияҳои* $u(x)$ *ва* $v(x)$ *дар нуқтаи додашудаи* x *дифференсиронидашаванда бошанд, онгоҳ сумма, фарқ, ҳосили зарб ва ҳосили тақсими ин функцияҳо (ҳосили тақсим дар мавриди* $v(x) \neq 0$ *будан) низ дар ҳамин нуқта дифференсиронидашаванда мебошанд, дар айни ҳол формулаҳои зерин ҷой доранд:*

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$
$$[u(x)\,v(x)]' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x), \tag{5.16}$$
$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Исбот. Мавридҳои сумма (фарқ), ҳосили зарб ва ҳосили тақсимро алоҳида-алоҳида муоина мекунем.

1°. Фарз мекунем, ки $y(x) = u(x) \pm v(x)$ аст. Афзоиши функцияҳои $u(x)$, $v(x)$ ва $y(x)$ дар нуқтаи додашудаи x-ро, ки ба афзоиши аргументи Δx мувофиқанд, бо символҳои Δu, Δv ва Δy ишорат менамоем. Онгоҳ

$$\begin{aligned}\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) &= \\ &= [u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = \\ &= [u(x+\Delta x) - u(x)] \pm [v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v.\end{aligned}$$

Ҳамин тариқ, ҳангоми $\Delta x \neq 0$ будан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}. \tag{5.17}$$

Акнун фарз мекунем, ки $\Delta x \to 0$. Онгоҳ дар асоси мавҷудиятии ҳосилаҳои дар нуқтаи x доштаи функцияҳои $u(x)$ ва $v(x)$ қимати лимитии қисми рости (5.17), ки ба $u'(x) \pm v'(x)$ баробар аст, вуҷуд дорад. Пас, қимати лимитии қисми чапи (5.17) (ҳангоми $\Delta x \to 0$) низ вуҷуд дорад. Мувофиқи таърифи ҳосила қимати лимитии номбурда ба $y'(x)$ баробар аст, ва мо баробарии даркориро ҳосил мекунем:

$$y'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

2. Бигзор $y(x) = u(x)\,v(x)$ бошад. Δu, Δv ва Δy ҳамон маъноеро, ки дар 1 соҳиб буданд, нигоҳ медоранд, онгоҳ

$$\begin{aligned}\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \\ = [u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)\,v(x)] + \\ + [u(x+\Delta x)\,v(x) - u(x)\,v(x)]\end{aligned}$$

(мо ҷамъшавандаи $u(x+\Delta x)\,v(x)$-ро ҷамъ ва тарҳ кардем). Баъд чунин навишта метавонем:

$$\Delta y = u(x+\Delta x)\,[v(x+\Delta x) - v(x)] + v(x)\,[u(x+\Delta x) - u(x)] = \\ = u(x+\Delta x)\,\Delta v + v(x)\,\Delta u.$$

Ҳамин тариқ, ҳангоми $\Delta x \neq 0$ будан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (5.18)$$

Акнун фарз мекунем, ки $\Delta x \to 0$. Онгоҳ дар асоси дар нуқтаи x дифференсиронидашавандагии функцияҳои $u(x)$ ва $v(x)$ қиматҳои лимитии нисбатҳои $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ва $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, ки мувофиқан ба $u'(x)$ ва $v'(x)$ баробаранд, вуҷуд доранд. Баъд аз дифференсиронидашавандагии $u(x)$ дар нуқтаи x, дар асоси теореми 5.2, дар ҳамин нуқта бефосила будани $u(x)$ бармеояд. Пас, қимати лимитии $\lim\limits_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x)$, ки ба $u(x)$ баробар аст, низ вуҷуд дорад. Ҳамин тариқ, ҳангоми $\Delta x \to 0$ қимати лимитии қисми рости (5.18), ки ба $u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)$ баробар аст, вуҷуд дорад. Пас, (ҳангоми $\Delta x \to 0$) қимати лимитии қисми чап ҳам вуҷуд дорад. Мувофиқи таърифи ҳосила қимати лимитии номбурда ба $y'(x)$ баробар аст, ва мо формулаи даркориро ҳосил мекунем:

$$y'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

3°. Ниҳоят, бигзор $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ бошад. Онгоҳ*

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\ = \frac{u(x+\Delta x)\,v(x) - v(x+\Delta x)\,u(x)}{v(x)\,v(x+\Delta x)}.$$

Дар сурат ҷамъшавандаи $u(x)\,v(x)$-ро ҷамъ ва тарҳ карда, чунин формуларо ҳосил мекунем:

---

* Азбаски минбаъд дар махраҷ қимати $v(x+\Delta x)$ иштирок мекунад, пас исбот кардан осон аст, ки ин қимат барои ҳама қиматҳои ба қадри кифоя хурди Δx аз нуль тафовут дорад. Воқеан, агар ин тавр набошад, онгоҳ чунин пайдарпаии беохир хурди қиматҳои Δx_n ёфт мешавад, ки $v(x+\Delta x_n) = 0$ аст. Лекин, азбаски функцияи $v(x)$ барои қиматҳои x бефосила аст, пас аз шарти $v(x+\Delta x_n) = 0$ ифодаи $v(x) = 0$ ҳосил мешавад, ки ин ба шарти теорема мухолиф аст.

$$\Delta y = \frac{[u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)] - [v(x+\Delta x)u(x) - u(x)v(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{v(x)[u(x+\Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)} = \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x)v(x+\Delta x)}.$$

Ҳамин тариқ, ҳангоми $\Delta x \neq 0$ будан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)}. \qquad (5.19)$$

Акнун фарз мекунем, ки $\Delta x \to 0$. Дар асоси дар нуқтаи x дифференсиронидашаванда будан ва дар натиҷа бефосила будани функцияҳои $u(x)$ ва $v(x)$ қиматҳои лимитии зерин вуҷуд доранд:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x).$$

Ҳамин тариқ, азбаски $v(x) \neq 0$ аст, ҳангоми $\Delta x \to 0$ қимати лимитии қисми рости (5.19) вуҷуд дорад, ки он ба

$$\frac{v(x)u'(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

баробар аст. Пас, (ҳангоми $\Delta x \to 0$) қимати лимитии қисми чапи (5.19) низ вуҷуд дорад. Мувофиқи таърифи ҳосила қимати лимитии номбурда ба $y'(x)$ баробар аст, ва мо формулаи дарқориро ҳосил мекунем:

$$y'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

Теоремаи 5.3 пурра исбот шуд.

§ 4. Ҳисоб кардани ҳосилаҳои функцияи дараҷагӣ, функцияҳои тригонометрӣ ва функцияи логарифмӣ

Мо дар ин параграф ба ҳисоб кардани ҳосилаи функцияҳои элементарии соддатарин шурӯъ мекунем.

1. Ҳосилаи функцияи дараҷагии нишондиҳандааш адади бутун. Аввал ҳосилаи функцияи дараҷагии $y = x^n$-ро ҳисоб ме-

кунем, дар ин ҷо n адади мусбати *бутун* мебошад*. Мавриди функцияи дараҷагие, ки нишондиҳандааш *адади ҳақиқии дилхоҳ* мебошад (бутун будани аш ҳатмӣ нест!), дар § 8 омӯхта мешавад.

Формулаи биноми Ньютонро истифода карда, чунин навишта метавонем:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = \left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n\right] - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Ҳамин тариқ, ҳангоми $\Delta x \neq 0$ будан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}. \qquad (5.20)$$

Азбаски ҳамаи ҷамъшавандаҳои қисми рости (5.20), аз дуюмаш сар карда, ба сифати зарбкунандаи Δx-и дараҷаҳояшон мусбат доранд, пас ҳангоми $\Delta x \to 0$ қиматҳои лимитии ҷамъшавандаҳои номбурда, ки ба нуль баробаранд, мавҷуд ҳастанд. Ҷамъшавандаи якуми қисми рости (5.20) аз Δx вобаста нест. Пас, (ҳангоми $\Delta x \to 0$) қимати лимитии қисми рости (5.20), ки ба nx^{n-1} баробар аст, вуҷуд дорад. Мувофиқи таърифи ҳосила қимати лимитии номбурда ба ҳосилаи функцияи $y = x^n$ баробар аст, яъне

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Ин муҳокимаронӣҳо барои нуқтаи дилхоҳи x-и хати рости беохир дурустанд.

2. Ҳосилаи функцияи $y = \sin x$. Формулаи мувофиқоварии фарқи синусҳо ба намуди барои логарифмонидан муносибро истифода карда, чунин навишта метавонем:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Ҳамин тариқ, ҳангоми $\Delta x \neq 0$ будан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}. \qquad (5.21)$$

---

* Ин ҳосила ҳанӯз бар боби 1 бо ёрии тасаввуроти интуитивии ба лимит онд омӯхта шуда буд.

Азбаски функцияи $y = \cos x$ дар нуқтаи дилхоҳи хати рости беохир бефосила мебошад,* пас қимати лимитии

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \qquad (5.22)$$

вуҷуд дорад. Баъд, дар асоси натиҷаи асосии п. 2 § 6 боби 4 қимати лимитии зерин вуҷуд дорад:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 1. \qquad (5.23)$$

Ҳамин тариқ, (ҳангоми $\Delta x \to 0$) қимати лимитии қисми рости (5.21) вуҷуд дорад, ки он ба ҳосили зарби қиматҳои лимитии (5.22) ва (5.23), яъне ба $\cos x$ баробар аст. Мувофиқи таърифи ҳосила қимати лимитии номбурда ба ҳосилаи функцияи $y = \sin x$ баробар аст, яъне

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Ин муҳокимаронихо барои нуқтаи дилхоҳи x-и хати рости беохир дурустанд.

3. **Ҳосилаи функцияи** $y = \cos x$. Формулаи мувофиковарии фарқи косинусҳо ба намуди барои логарифмонидан муносибро истифода карда, чунин навишта метавонем:

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Ҳамин тариқ, ҳангоми $\Delta x \neq 0$ будан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}. \qquad (5.24)$$

Азбаски функцияи $y = \sin x$ дар нуқтаи дилхоҳи x-и хати рости беохир бефосила мебошад, пас қимати лимитии

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \sin x \qquad (5.25)$$

вуҷуд дорад. Аз мавҷудиятии қиматҳои лимитии (5.23) ва (5.25) мавҷудиятии қимати лимитии (ҳангоми $\Delta x \to 0$) қисми рости (5.24), ки ба $(-\sin x)$ баробар аст, бармеояд. Мувофиқи таърифи ҳосила қимати лимитии охирин ба ҳосилаи функцияи $y = \cos x$ баробар аст, яъне

---

* Ин дар п. 6 § 5 боби 4 исбот шуда буд. Бо вуҷуди он, *шакли фарқиятии* шарти бефосилагиро истифода карда, бефосилагии функцияи $y = \cos x$-ро исбот кардан осон аст.

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Ин муҳокимаронихо барои нуқтаи дилхоҳи x-и хати рости беохир дурустанд.

4. Ҳосилаи функцияҳои $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$. Азбаски мо ҳосилаи функцияҳои $y = \sin x$ ва $y = \cos x$-ро ҳисоб карда будем ва азбаски

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

мебошанд, пас барои ҳисоб кардани ҳосилаи функцияҳои $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ (аз теореми 5.3) аниқтараш, аз формулае, ки ҳосилаи ҳосили тақсимро ифода мекунад, яъне аз формулаи сеюми (5.16) истифода кардан мумкин аст.

Дар ҳамаи нуқтаҳо, ба ғайр аз ҳамон нуқтаҳое, ки дар онҳо $\cos x = 0$ аст,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Инак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

(барои ҳама қиматҳои x, ғайр аз $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, дар ин ҷо $n = 0, \pm 1, \ldots$). Айнан ҳамин тавр, дар ҳамаи нуқтаҳо, ба ғайр аз ҳамон нуқтаҳое, ки дар онҳо $\sin x = 0$ аст,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Инак,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

(барои ҳама қиматҳои x, ғайр аз $x = \pi n$, дар ин ҷо $n = 0, \pm 1, \ldots$).

5. Ҳосилаи функцияи $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$. Ба сифати x нуқтаи дилхоҳи нимхати рости $x > 0$-ро гирифта ва $|\Delta x| < x$ пиндошта, чунин навиштан мумкин аст:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Ҳамин тариқ, ҳангоми $\Delta x \neq 0$ будан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]. \qquad (5.26)$$

Дар асоси натиҷаи асосии п. 3 § 6 боби 4 ифодаи даруни қавсҳои квадратӣ ҳангоми $\Delta x \to 0$ (ва дар қиматҳои қайдшудаи дилхоҳи x) ба қимати лимитии баробари e соҳиб аст. Онгоҳ дар асоси дар нуқтаи $x = e$ бефосила будани функцияи $y = \log_a x$ қимати лимитии (ҳангоми $\Delta x \to 0$) қисми рости (5.26) вуҷуд дорад, ки он ба $\frac{1}{x} \log_a e$ баробар аст. Мувофиқи таърифи ҳосила қимати лимитии номбурда ба ҳосилаи функцияи $y = \log_a x$ баробар аст, яъне

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

(барои ҳама қиматҳои x, ки ба нимхати рости $x > 0$ тааллуқ доранд). Дар мавриди хусусии $a = e$ будан

$$(\ln x)' = 1/x.$$

§ 5. Теорема дар бораи ҳосилаи функцияи чаппа

Теоремаи 5.4. *Бигзор функцияи $y = f(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи x_0 афзояд (ё кам шавад) ва бефосила бошад. Ғайр аз ин, бигзор функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда бошад ва ҳосилаи $f'(x_0)$ аз нуль тафовут дошта бошад. Онгоҳ функцияи чаппаи $x = f^{-1}(y)$ вуҷуд дорад, ки он дар ягон атрофи нуқтаи мувофиқи $y_0 = f(x_0)$ муайян мебошад, дар ин нуқта дифференсиронидашаванда аст ва дар ин нуқта ҳосилаи ба $1/f'(x_0)$ баробар дорад.*

Исбот. Пеш аз ҳама қайд мекунем, ки барои функцияи $y = f(x)$ дар атрофи нуқтаи x_0 ҳама шартҳои натиҷаи леммаи 1 § 4 боби 4 иҷрошавандаанд. Мувофиқи ин натиҷа функцияи чаппаи $x = f^{-1}(y)$ вуҷуд дорад, ки он дар ягон атрофи нуқтаи $y_0 = f(x_0)$ муайян буда, дар ҳамин атроф бефосила мебошад. Ба аргументи y-и ин функцияи чаппа дар нуқтаи y_0 афзоиши *аз нуль тафовутдори* дилхоҳи Δy медиҳем. Ба ин афзоиш афзоиши Δx-и функцияи чаппа мувофиқ аст, бар замми ин дар асоси афзуншавандагии (ё камшавандагии) функция $\Delta x \neq 0$

мебошад. Ҳамин тариқ, чунин айниятро навишта метавонем:

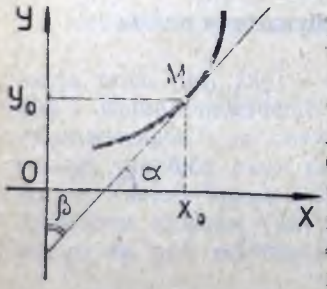
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 \Big/ \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (5.27)$$

Бигзор акнун дар айнияти (5.27) $\Delta y \to 0$. Онгоҳ, дар асоси дар нуқтаи y_0 бефосила будани функцияи чаппаи $x = f^{-1}(y)$ ва мувофиқи шакли фарқиятии шарти бефосилагӣ, $\Delta x \to 0$.

Лекин ҳангоми $\Delta x \to 0$ махрачи касре, ки дар қисми рости (5.27) воқеъ аст, мувофиқи таърифи ҳосила, қимати лимитие дорад, ки он ба $f'(x) \neq 0$ баробар аст. Пас, қисми рости (5.27) ҳангоми $\Delta y \to 0$ қимати лимитие дорад, ки ба $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ баробар аст. Онгоҳ қисми чапи (5.27) ҳам ҳангоми $\Delta y \to 0$ қимати лимитӣ дорад. Мувофиқи таърифи ҳосила қимати лимитии номбурда ба $\{f^{-1}(y_0)\}'$ баробар аст.* Ҳамин тариқ, мо дар нуқтаи y_0 дифференсиронидашаванда будани функцияи чаппаро исбот кардем ва барои ҳосилаи он муносибати зеринро ҳосил кардем:

$$\{f^{-1}(y_0)\}' = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (5.28)$$

Теоремаи 5.4 пурра исбот шуд.



Расми 5.4.

Теоремаи исботшуда маънои геометрии соддаеро соҳиб аст. Дар атрофи нуқтаи x_0 графики функцияи $y = f(x)$ (ё функцияи чаппа)-ро муоина мекунем. Фарз мекунем, ки ба нуқтаи x_0 нуқтаи M-и график мувофиқ меояд (расми 5.4). Онгоҳ, ҳосилаи $f'(x_0)$ ба тангенси кунҷи моил (α)-и расандаи аз нуқтаи M гузаранда ба тири Ox баробар аст. Ҳосилаи функцияи чаппа $\{f^{-1}(y_0)\}'$ ба тангенси кунҷи моил (β)-и ҳамон расанда ба тири Oy баробар аст. Азбаски суммаи кунҷҳои α ва β ба $\pi/2$ баробар аст, пас формулаи (5.28)-ро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$\operatorname{tg}\beta = 1/\operatorname{tg}\alpha.$$

---

* Мо ҳосилаи дар нуқтаи y_0 доштан функцияи чаппаро бо символи $\{f^{-1}(y_0)\}'$ ишорат мекунем.

§ 6. Ҳисоб кардани ҳосилаҳои функцияи нишондиҳандагӣ ва функцияҳои тригонометрии чаппа

Мо дар ин параграф, ба теоремаи исботшудаи 5.4 такья карда, ҳисоби ҳосилаи функцияҳои элементарии соддатаринро давом медиҳем.

1. Ҳосилаи функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$. Функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$, ки дар хати рости беохир муайян аст, барои функцияи логарифмии $x = \log_a y$, ки дар нимхати рости $y > 0$ муайян мебошад, функцияи чаппа аст. Азбаски ҳама шартҳои теоремаи 5.4 барои функцияи логарифмӣ дар атрофи нуқтаи дилхоҳи y-и нимхати рости $y > 0$ ичрошавандаанд, пас, мувофиқи ин теорема, функцияи $y = a^x$ дар нуқтаи дилхоҳи $x = \log_a y$ дифференсиронидашаванда мебошад ва барои ҳосилаи он формулаи зерин дуруст аст:

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{y}{\log_a e}.$$

Муносибати аз курси математикаи элементарӣ маълуми $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$-ро истифода карда ва $y = a^x$ буданашро ба эътибор гирифта, аз ин формула формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Формулаи ҳосилшуда барои ҳама нуқтаҳои x-и хати рости беохир дуруст аст. Дар мавриди хусусии $a = e$ ин формула чунин мешавад:

$$(e^x)' = e^x.$$

2. Ҳосилаи функцияҳои тригонометрии чаппа. Аввал ҳосилаи функцияи $y = \arcsin x$-ро ҳисоб мекунем. Ин функция, ки дар интервали $-1 < x < +1$ муайян мебошад, барои функцияи $x = \sin y$, ки дар интервали $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$ муайян мебошад, функцияи чаппа аст. Азбаски ҳама шартҳои теоремаи 5.4 барои функцияи $x = \sin y$ дар атрофи нуқтаи дилхоҳи y-и интервали $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ичрошаванда аст, пас, мувофиқи ин теорема, функцияи $y = \arcsin x$ дар нуқтаи дилхоҳи $x = \sin y$ дифференсиронидашаванда мебошад ва барои ҳосилаи он формулаи зерин дуруст аст:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}. \qquad (5.29)$$

Мо пеш аз реша аломати + гирифтем, чунки $\cos y$ дар ҳамаи интервали $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ мусбат мебошад. $\sin y = x$ буданашро ба эътибор гирифта, аз формулаи (5.29) чунин формуларо ҳосил мекунем:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Формулаи ҳосилшуда, чунон ки ҳангоми ҳосил кардани он қайд кардем, барои ҳамаи x-ҳои интервали $-1 < x < +1$ дуруст аст. Мувофиқи ҳамингуна схема ҳосилаи функцияи $y = \arccos x$ ҳисоб карда мешавад. Ин функция, ки дар интервали $-1 < x < +1$ муайян аст, барои функцияи $x = \cos y$, ки дар интервали $0 < y < \pi$ муайян мебошад, функцияи чаппа аст. Азбаски ҳама шартҳои теоремаи 5.4 барои функцияи $x = \cos y$ дар атрофи нуқтаи дилхоҳи y-и интервали $0 < y < \pi$ иҷрошаванда аст, пас мувофиқи ин теорема, функцияи $y = \arccos x$ дар нуқтаи дилхоҳи $x = \cos y$ дифференсиронидашаванда мебошад ва барои ҳосилаи он формулаи зерин дуруст аст:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}. \qquad (5.30)$$

Мо $\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y}$ буданашро ба эътибор гирифтем, чунки дар ҳамаи интервали $0 < y < \pi$ $\sin y > 0$ аст. $\cos y = x$ буданашро ба эътибор гирифта, аз формулаи (5.30) формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Формулаи ҳосилшуда, чунон ки дар процесси ҳосил кардани он қайд шуда буд, барои ҳама қиматҳои x-и интервали $-1 < x < 1$ дуруст аст.

Ба ҳисоб кардани ҳосилаи функцияи $y = \operatorname{arctg} x$ шурӯъ мекунем. Ин функция, ки дар хати рости беохири $-\infty < x < +\infty$ муайян аст, барои функцияи $x = \operatorname{tg} y$, ки дар интервали $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ муайян мебошад, функцияи чаппа аст. Азбаски

ҳамаи шартҳои теореми 5.4 барои функцияи $x = \operatorname{tg} y$ дар атрофи нуқтаи дилхоҳи y-и интервали $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ иҷрошаванд, пас, мувофиқи ин теорема, функцияи $y = \operatorname{arctg} x$ дар нуқтаи дилхоҳи $x = \operatorname{tg} y$ дифференсиронидашаванда мебошад ва барои ҳосилаи он формулаи зерин дуруст аст:

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}.$$

$\operatorname{tg} y = x$ будани ашро ба эътибор гирифта, формулаи комили зеринро ҳосил менамоем:

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Формулаи ҳосилшуда барои ҳама нуқтаҳои x-и хати рости беохир дуруст аст.

Акнун ҳосилаи функцияи $y = \operatorname{arcctg} x$-ро ҳисоб мекунем. Ин функция, ки дар хати рости беохири $-\infty < x + \infty$ муайян аст, барои функцияи $x = \operatorname{ctg} y$, ки дар интервали $0 < y < \pi$ муайян мебошад, функцияи чаппа аст. Аз баски ҳамаи шартҳои теоремаи 5.4 барои функцияи $x = \operatorname{ctg} y$ дар атрофи нуқтаи дилхоҳи y-и интервали $0 < y < \pi$ иҷрошавандаанд, пас мувофиқи ин теорема, функцияи **$y = \operatorname{arcctg} x$ дар нуқтаи дилхоҳи** $x = \operatorname{ctg} y$ дифференсиронидашаванда мебошад ва барои ҳосилаи он формулаи зерин дуруст аст:

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y}.$$

$\operatorname{ctg} y = x$ будани ашро ба эътибор гирифта, формулаи комили зеринро ҳосил мекунем:

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Ин формула барои ҳама нуқтаҳои x-и хати рости беохир дуруст аст.

Ҳамин тариқ, мо ба ғайр аз ҳосилаи функцияи дараҷагии нишондиҳандааш адади ҳақиқии дилхоҳ ҳосилаи ҳама функцияҳои элементарии соддатаринро ҳисоб кардем.

Ҳосилаи функцияи дараҷагии нишондиҳандааш адади ҳақиқии дилхоҳро дар § 8 ҳисоб мекунем. Ҳозир қоидаи дифференсиронидани функцияи мураккабро асоснок менамоем.

§ 7. Қоидаи дифференсиронидани функцияи мураккаб

Ин параграф мақсад дорад, ки қоидаи ёфтани ҳосилаи функцияи мураккаби $y = f[\varphi(t)]$-ро муқаррар намояд. Агар ҳосилаи функцияҳои ташкилдиҳандаи ин функция $y = f(x)$ ва $x = \varphi(t)$ маълум бошанд, ҳосилаи функцияи мураккаби номбурдаро ёфтан мумкин аст.

Теоремаи 5.4. *Бигзор функцияи* $x = \varphi(t)$ *дар ягон нуқтаи* t_0 *дифференсиронидашаванда бошад ва функцияи* $y = f(x)$ *дар нуқтаи мувофиқи* $x_0 = \varphi(t_0)$ *дифференсиронидашаванда бошад. Онгоҳ функцияи мураккаби* $f[\varphi(t)]$ *дар нуқтаи номбурдаи* t_0 *дифференсиронидашаванда мебошад, илова бар ин барои ҳосилаи ин функция формулаи зерин дуруст аст**:

$$\{f[\varphi(t_0)]\}' = f'(x_0)\,\varphi'(t_0). \tag{5.31}$$

Исбот. Дар нуқтаи t_0 ба аргументи t афзоиши б а н у л ь н о б а р о б а р и дилхохи Δt медиҳем. Ба ин афзоиш афзоиши Δx-и функцияи $x = \varphi(t)$ мувофиқ меояд. Ба афзоиши Δx, дар навбати худ, афзоиши Δy-и функцияи $y = f(x)$ (дар нуқтаи x_0) мувофиқ меояд. Азбаски функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда мебошад, пас афзоиши ин функция дар нуқтаи x_0-ро ба намуди

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x \tag{5.32}$$

навиштан мумкин аст, дар ин ҷо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Баробарии (5.32)-ро аъзо ба аъзо ба Δt тақсим мекунем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha\,\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{5.33}$$

Акнун бигзор дар баробарии (5.33) $\Delta t \to 0$. Азбаски функцияи $x = \varphi(t)$ дар нуқтаи t_0 дифференсиронидашаванда мебошад, пас ин функция дар нуқтаи t_0 бефосила аст; онгоҳ, дар асоси шакли фарқиятии шарти бефосилагӣ, $\Delta x \to 0$ (ҳангоми $\Delta t \to 0$). Бинобар ин тасдиқ кардан мумкин аст, ки қимати лимитии

$$\lim_{\Delta t \to 0} \alpha = 0 \tag{5.34}$$

вуҷуд дорад. Ғайр аз он, дар асоси дар нуқтаи t_0 дифференсиро-

---

* Мо ҳосилаи функцияи мураккаби $y = f[\varphi(t)]$ дар нуқтаи $t = t_0$-ро бо символи $\{[\varphi(t_0)]\}'$ ишорат менамоем.

нидашаванда будани функцияи $x = \varphi(t)$ қимати лимитии зерин вуҷуд дорад:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t_0) \qquad (5.35)$$

Мавҷуд будани қиматҳои лимитии қисми рости (5.33) ҳангоми $\Delta t \to 0$), ки ба $f'(x_0)\,\varphi'(t_0)$ баробаранд, мавҷудиятии қиматҳои лимитии (5.34) ва (5.35)-ро таъмин мекунад. Пас, қимати лимитии қисми чапи (5.33) ҳангоми $\Delta t \to 0$) низ вуҷуд дорад. Мувофиқи таърифи ҳосила қимати лимитии номбурда ба ҳосилаи функцияи мураккаби $f[\varphi(t)]$ дар нуқтаи t_0 баробар аст. Бо ҳамин мо дар нуқтаи t_0 дифференсиронидашаванда будани функцияи мураккабро исбот кардем ва дурустии формулаи (5.31)-ро муқаррар намудем.

Теоремаи 5.5 исбот шуд.

Қайд. Мо функцияи мураккаби $y = f(x)$-ро муоина кардем, ки дар ин ҷо $x = \varphi(t)$ мебошад, яъне x-ро ба сифати аргументи фосилавӣ ва t-ро ба сифати аргументи қатъӣ гирифтем. Аксар вақт лозим меояд, ки функцияи мураккаби намуди $y = f(u)$-ро, ки дар ин ҷо $u = \varphi(x)$ аст, муоина намоем, яъне x-ро ба сифати аргументи қатъӣ ва ягон тағйирёбандаи u-ро ба сифати аргументи фосилавӣ гирифтан лозим меояд. Формулаи дифференсиронии (5.31) барои ин функция чунин намуд мегирад:

$$y' = \{f[\varphi(x)]\}' = f'(u)\,\varphi'(x) \qquad (5.36)$$

(мо дар қиматҳои мувофиқи аргументҳои x ва u нульҳоеро, ки характери ёрирасон доранд, партофтем).

Оид ба қоидаи ҳозир исботшудаи дифференсиронидани функцияи мураккаб мисолҳо меорем.

1°. Ҳосилаи функцияи $y = e^{\operatorname{arctg} x}$ ҳисоб карда шавад. Ин функцияро чун функцияи мураккаби намуди $y = e^u$, ки дар ин ҷо $u = \operatorname{arctg} x$ мебошад, муоина мекунем. Формулаи (5.36)-ро истифода карда, чунин формуларо ҳосил мекунем:

$$y' = (e^u)'(\operatorname{arctg} x)' = e^u \frac{1}{1+x^2} = e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}.$$

2°. Ҳосилаи функцияи $y = 2^{x^2}$ ҳисоб карда шавад. Ин функцияро чун функцияи мураккаби намуди $y = 2^u$, ки дар ин ҷо $u = x^2$ мебошад, муоина мекунем. Формулаи (5.36)-ро истифода карда, чунин формуларо ҳосил менамоем:

$$y' = (2^u)'(x^2)' = (2^u \ln 2)\,2x = 2^{x^2+1}\,x \ln 2.$$

3°. Ҳангоми ҳалли ин ду мисол мо функцияҳоеро, ки функцияи мураккаби додашударо ташкил медиҳанд, алоҳида-алоҳи-

да навиштем. Ба ин, албатта, ҳеч зарурияте нест, ва дар амалия функцияи мураккаб бе чудо кардан ба функцияҳои ташкилдиҳандаи алоҳида якбора дифференцironида мешавад. Масалан,

$$y = \arcsin 75x;\ y' = \frac{1}{\sqrt{1-(75x)^2}}(75x)' = \frac{75}{\sqrt{1-(75x)^2}}$$

(дар ин ҷо $|x| < 1/75$).

4°. Теоремаи 5.5 ва қоидаи дар он баёншуда ба мавридҳои функцияи мураккабе, ки суперпозицияи се ё зиёда функцияҳо мебошад, пай дар пай татбиқ карда мешаванд.

Мисоли чунин функцияро меорем. Фарз мекунем, ки ҳосилаи функцияи $y = 5^{\operatorname{arcctg}(x^6)}$-ро ҳисоб кардан лозим аст. Қоидаи дифференцironидани функцияи мураккабро пай дар пай татбиқ карда, ҳосиларо меёбем:

$$y = (5^{\operatorname{arc\,ctg}(x^6)} \ln 5)\left(-\frac{(-1)}{1+x^{16}}\right) 8x^7.$$

§ 8. Ҳосилаи функцияи логарифмӣ. Ҳосилаи функцияи дараҷагии нишондиҳандааш адади ҳақиқии дилхоҳ. Ҷадвали ҳосилаҳои функцияҳои элементарии соддатарин

1. Мафҳуми ҳосилаи функцияи логарифмӣ. Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ *мусбат аст* ва дар нуқтаи додашудаи x дифференцironидашаванда мебошад. Онгоҳ дар ин нуқта $\ln y = \ln f(x)$ вуҷуд дорад. $\ln f(x)$-ро чун функцияи мураккаби аргументи x муоина карда, мо ҳосилаи ин функция дар нуқтаи додашудаи x-ро ҳисоб карда метавонем (дар айни ҳол $y = f(x)$ чун аргументи фосилавӣ қабул карда мешавад). Чунин формуларо ҳосил мекунем:

$$[\ln f(x)]' = y'/y. \qquad (5.37)$$

Бузургие, ки формулаи (5.37) муайян мекунад, *ҳосилаи логарифмии* функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи додашудаи x номида мешавад. Ба сифати мисол ҳосилаи логарифмии функцияи дараҷагию нишондиҳандагии $y = u(x)^{v(x)}$-ро ҳисоб мекунем. Мо аз п. 2 § 7 боби 4 медонем, ки ин функция барои ҳама қиматҳои x, ки барояшон $u(x)$ ва $v(x)$ бефосилаанд ва $u(x) > 0$ мебошад, муайян ва бефосила аст. Акнун мо ба таври илова талаб мекунем, ки $u(x)$ ва $v(x)$ бояд барои қиматҳои муоинашавандаи x дифференцironидашаванда бошанд. Онгоҳ, азбаски $\ln y = v(x) \ln u(x)$ мебошад, ҳосилаи логарифмии функцияи муоинашаванда ба ифодаи зерин баробар мешавад:

$$\frac{y'}{y} = [v(x) \ln u(x)]' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}. \qquad (5.38)$$

$y = u(x)^{v(x)}$-ро ба эътибор гирифта, аз баробарии (5.38) барои ҳосилаи функцияи дараҷагию нишондиҳандаги формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

2. Ҳосилаи функцияи дараҷагии нишондиҳандааш адади ҳақиқии дилхоҳ. Акнун ба ҳисоб кардани ҳосилаи функцияи дараҷагии $y = x^{\alpha}$-и нишондиҳандааш адади ҳақиқии дилхоҳи α шуруъ мекунем. Мо ҳосилаи ин функцияро барои ҳамон қиматҳои x, ки барояшон ин функция дар қиматҳои дилхоҳи α муайян мебошад, яъне барои қиматҳои x, ки ба нимхати рости* $x > 0$ тааллуқ доранд, ҳисоб мекунем. Функцияи $y = x^{\alpha}$ дар ҳама ҷои нимхати рости $x > 0$ *мусбат буданашро* ба эътибор гирифта, ҳосилаи логарифмии ин функцияро ҳисоб мекунем. Азбаски $\ln y = \alpha \ln x$ аст, пас ҳосилаи логарифмӣ ба ифодаи зерин баробар мешавад:

$$\frac{y'}{y} = [\alpha \ln x]' = \frac{\alpha}{x}.$$

Аз ин ҷо, $y = x^{\alpha}$ буданашро ба эътибор гирифта, барои ҳосилаи функцияи дараҷагӣ формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Ҳамин тариқ, ҳосилаи ҳама функцияҳои элементарии соддатаринро ҳисоб кардем. Ҳама ҳосилаҳои ҳисоб кардашударо дар як ҷой ҷамъ карда, ҷадвали зеринро, ки дар боби I навишта будем, ҳосил менамоем.

3. Ҷадвали ҳосилаҳои функцияҳои элементарии соддатарин.

1°. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$. Аз ҷумла, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

2°. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$ $(x > 0,\ 0 < a \neq 1)$. Аз ҷумла, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3°. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$. Аз ҷумла, $(e^x)' = e^x$.

4°. $(\sin x)' = \cos x$.

5°. $(\cos x)' = -\sin x$.

---

* Дар мавриди $\alpha = 1/m$ будан (m — адади тоқи бутун) функцияи $y = x^{\alpha}$ дар ҳамаи хати рости беохир муайян аст. Аммо дар ин маврид ҳам ҳосилаи функцияи номбурдаро фақат барои қиматҳои $x > 0$ ҳисоб кардан кифоя аст, чунки функцияи номбурда функцияи тоқ мебошад ва ҳосилаи онро барои қиматҳои $x < 0$ аз ин мулоҳизот пайдо кардан осон аст.

6°. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\right.$
дар ин ҷо $n = 0, \pm 1, \ldots$).

7°. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \quad (x \neq \pi n,$
дар ин ҷо $n = 0, \pm 1, \ldots$).

8°. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1)$.

9°. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1)$.

10°. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

11°. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Мо дар § 4 боби 4 функцияҳои гиперболии $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$-ро баён карда будем, ки инҳо комбинацияи соддаи функцияҳои нишондиҳандагӣ мебошанд. Аз таърифи ин функцияҳо ҳосилаҳои онҳо ба таври элементарӣ бармеоянд:

12°. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

13°. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

14°. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

15°. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$.

Ин ҷадвал бо ҳамроҳии қоидаҳои дифференсиронидани сумма, фарқ, ҳосили зарб ва ҳосили тақсим (яъне, формулаҳои (5.16)) ва қоидаи дифференсиронидани функцияи мураккаб асоси ҳисоби дифференсиалиро ташкил медиҳанд.

Қоидаҳои муқарраршуда ва формулаҳои дифференсиронӣ имконият медиҳанд, ки як хулосаи муҳим барорем.

Мо дар § 7 боби 4 мафҳуми *функцияи элементариро* чун функцияе муоина кардем, ки он ба воситаи чор амали арифметикӣ ва суперпозицияе, ки охирнок маротиба пай дар пай татбиқ мешаванд, бо функцияҳои элементарии соддатарин ифода мешавад. Акнун мо тасдиқ карда метавонем, ки *ҳосилаи функцияи элементарии дилхоҳ функцияи элементариро низ ифода мекунад*. Ҳамин тариқ, *амали дифференсиронӣ моро аз класси функцияҳои элементарӣ чудо намекунад*.

§ 9. Инвариантии шакли дифференциали якум. Баъзе татбиқоти дифференциал

1. Инвариантии шакли дифференциали якум. Дар интихои § 2 мо муқаррар кардем, ки барои мавриде, ки аргументи x *тағьирьёбандаи новобаста* мебошад, дифференциали функцияи $y = f(x)$ бо формулаи

$$dy = f'(x)\,dx$$

муайян карда мешавад. Мо дар ин пункт исбот мекунем, ки формулаи (5.39) формулаи универсалӣ мебошад ва он на факат дар мавриде, ки аргументи x тағьирьёбандаи новобаста аст, дуруст мебошад, балки дар мавриде, ки аргументи x худаш функцияи дифференсиронидашавандаи ягон тағьирьёбандаи нави t мебошад, низ дуруст аст. Хосияти номбурдаи дифференциали функцияро одатан *инвариантии шакли он* меноманд.

Инак, бигзор функцияи дар ягон нуқтаи x дифференсиронидашавандаи $y = f(x)$ дода шуда бошад, ки аргументаш функцияи дифференсиронидашавандаи $x = \varphi(t)$-и аргументи t-ро ифода мекунад. Дар ингуна маврид мо y-ро чун *функцияи мураккаби* $y = f[\varphi(t)]$-и аргументи t ва x-ро чун аргументи фосилавӣ муоина карда метавонем. Дар асоси теоремаи 5.5 ҳосилаи y нисбат ба t бо формулаи

$$y' = f'(x)\,\varphi'(t) \tag{5.40}$$

муайян карда мешавад. Азбаски мо тағьирьёбандаи t-ро чун *тағьирьёбандаи новобаста* муоина карда метавонем, пас ҳосилаи функцияҳои $x = \varphi(t)$ ва $y = f[\varphi(t)]$ нисбат ба аргументи t, мувофиқи қоидаи дар интиҳои § 2 мукарраршуда, ба нисбати дифференциали ин функцияҳо ба dt баробаранд, яъне

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}, \quad y' = f[\varphi(t)]' = \frac{dy}{dt}.$$

Ин қиматҳои ҳосилаҳоро ба формулаи (5.40) гузошта, ин формуларо ин тавр менависем:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\,\frac{dx}{dt}. \tag{5.41}$$

Ҳар ду қисми баробарии (5.41)-ро ба dt зарб карда, барои dy ифодаи (5.39)-ро ҳосил мекунем. Бо ҳамин инвариантии шакли дифференциали якуми функция исбот карда шуд, яъне исбот карда шуд, *ки ҳам дар мавриде, ки аргументи x тағьирьёбандаи новобаста мебошад, ва ҳам дар мавриде, ки аргументи x худаш функцияи дифференсиронидашавандаи тағьирьёбандаи дигар мебошад, дифференциали (dy)-и функцияи* $y = f(x)$ *ба ҳосилаи ин функция, ки ба дифференциали аргументи dx зарб карда шудааст, баробар мебошад.*

Хосияти инвариантии дифференциалро ба таври дигар ин тавр баён кардан мумкин аст: *ҳосилаи функцияи* $y = f(x)$ *до-*

имо ба нисбати дифференциали ин функция dy ба дифференциали аргумент dx баробар аст, яъне*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{5.42}$$

Баробарии исботшудаи (5.42) имконият медиҳад, ки мо минбаъд нисбати $\frac{dy}{dx}$-ро барои ишорати ҳосилаи функцияи $y = f(x)$ нисбат ба аргументи x истифода намоем.

Дар хулоса қайд мекунем, ки баъди исбот шудани баробарии (5.42) қоидаи дифференцирониданы функцияи мураккаб намуди айниятиро соддаро мегирад:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}. \tag{5.43}$$

Қоидаи дифференцирониданы функцияи чаппа ҳам намуди соддаро мегирад:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy}. \tag{5.44}$$

Қайд мекунем, ки бо вучуди он, баробариҳои (5.43) ва (5.44)-ро чун методҳои нави исботи теоремаҳои 5.5 ва 5.4 муоина кардан мумкин нест, чунки формулаҳои (5.43) ва (5.44) далели инвариантии дифференциали якумро, ки мо махсусан бо ёрии теоремаи 5.5 муқаррар кардем, моҳиятан истифода мекунад.

2. **Формулаҳо ва қоидаҳои ҳисоб кардани дифференциалҳо.** Мо исбот кардем, ки дифференциал (dy)-и функцияи $y = f(x)$ доимо ба ҳосилаи ин функция $f'(x)$, ки ба дифференциали аргумент dx зарб карда шудааст, баробар мебошад. Ҳамин тариқ, ҷадвали ҳосилаҳо, ки дар п. 3 § 8 навишта будем, ба ҷадвали мувофиқи дифференциалҳо меорад:

1°. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\,dx$. Аз ҷумла, $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$, $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

2°. $d(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}\,dx$ $(x > 0,\quad 0 < a \neq 1)$. Аз ҷумла, $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$.

---

* Яъне, ҳам дар мавриде, ки аргументи x тағьирёбандаи новобаста мебошад, ва ҳам дар мавриде, ки x худаш функцияи дифференцирониданшавандаи ягон тағьирёбандаи дигар мебошад.

3°. $d(a^x) = a^x \ln a\, dx$ $(0 < a \neq 1)$. Аз ҷумла, $d(e^x) = e^x dx$.

4°. $d(\sin x) = \cos x\, dx$.

5°. $d(\cos x) = -\sin x\, dx$.

6°. $d(\operatorname{tg} x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right.$, дар ин ҷо $\left.n = 0, \pm 1, \ldots\right)$.

7°. $d(\operatorname{ctg} x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)\, dx$ $(x \neq \pi n$, дар ин ҷо $n = 0, \pm 1, \ldots)$.

8°. $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

9°. $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

10° $d(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{dx}{1 + x^2}$.

11°. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{dx}{1 + x^2}$.

Аз формулаҳои (5.16) ва аз муносибати (5.39) қоидаҳои зерини ҳисоб кардани дифференциалҳои сумма, фарқ, ҳосили зарб ва ҳосили тақсим бевосита ҳосил мешаванд:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = v\, du + u\, dv,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}.$$

3. Истифодаи дифференциал барои муқаррар кардани формулаҳои тақрибӣ. Чунон ки мо дар § 2 дидем, гарчи дифференциал (dy)-и функцияи $y = f(x)$ ба афзоиши Δy-и ин функция баробар набошад ҳам, лекин баробарии тақрибии

$$\Delta y \approx dy,$$

назар ба Δx, бо саҳеҳии то бузургии беохир хурди тартиби баландтар дуруст аст. Саҳви нисбии* ин баробарӣ ҳангоми ба қадри кифоя хурд будани Δx ҳар қадар хурд мешавад. Формулаи (5.45) имконият медиҳад, ки афзоиши Δy-и функцияи $y = f(x)$ бо дифференциали он dy тақрибан иваз карда шавад. Афзалияти ингуна ивазкунӣ аз он иборат аст, ки дифферен-

---

* Саҳви нисбии баробарии (5.45) бо нисбати $\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ муайян карда мешавад. Мувофиқи таърифи дифференциал, $\Delta y - dy = 0\ (\Delta x)$.

циали dy аз Δx ба таври хаттӣ вобаста аст ва дар он вақт чун афзоиши Δy, умуман, функцияи мураккабтар аз Δx-ро ифода мекунад.

Азбаски афзоиши функция Δy бо формулаи (5.1) ва дифференциали dy бо формулаи (5.14) муайян карда мешавад, пас баробарии тақрибии (5.45)-ро ин тавр навишта метавонем:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x$$

ё

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{5.46}$$

Мувофиқи формулаи (5.46) функцияи f барои қиматҳои аргументи ба x наздик (яъне барои Δx-ҳои хурд) бо функцияи хаттӣ тақрибан иваз карда мешавад.

Аз ҷумла, аз формулаи (5.46) якчанд формулаҳои тақрибии ба мо аз боби 4 маълумро ҳосил кардан мумкин аст. Чунончи, $f(x) = (1 + x)^{1/n}$, $x = 0$, фарз карда,

$$(1 + \Delta x)^{1/n} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n} \tag{5.47}$$

-ро ҳосил мекунем. $f(x) = \sin x$, $x = 0$, фарз карда,

$$\sin \Delta x \approx \Delta x \tag{5.48}$$

-ро ҳосил мекунем. $f(x) = e^x$, $x = 0$, фарз карда,

$$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x \tag{5.49}$$

-ро ҳосил мекунем. $f(x) = \ln(1 + x)$, $x = 0$, фарз карда,

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x \tag{5.50}$$

-ро ҳосил мекунем. Ҳар яки баробариҳои (5.47)—(5.50) назар ба Δx бо сахеҳии то бузургии беохир хурди тартиби баландтар дурустанд.

Баробариҳои (5.47)—(5.50)-ро аниқтар дар интиҳои § 7 боби 4 муқаррар карда будем.

§ 10. Ҳосила ва дифференциалҳои тартиби олӣ

1. Мафҳуми ҳосилаи тартиби n-ум. Чунон ки дар п. 2 § 1 қайд кардем, ҳосилаи $f'(x)$-и функцияи $y = f(x)$, ки дар интервали (a, b) муайян ва дифференсиронидашаванда мебошад, *функцияи дар интервали (a, b) низ муайянро* ифода мекунад. Чунин шуданаш мумкин аст, ки ин функцияи $f'(x)$ худаш дар ягон нуқтаи x-и интервали (a, b) дифференсиронидашаванда мебошад, яъне дар ин нуқта дорои ҳосила аст. Онгоҳ ҳосилаи

номбурдаро *ҳосилаи дуюм* (ё *ҳосилаи тартиби 2-юм*)-и функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x меноманд ва бо символи $f^{(2)}(x)$ ё $y^{(2)}(x)$* ишорат менамоянд.

Баъди ҷорӣ кардани мафҳуми ҳосилаи дуюм мафҳуми ҳосилаи сеюм, баъд ҳосилаи чорум ва ғайраро пай дар пай ҷорӣ кардан мумкин аст. Агар фарз кунем, ки мо мафҳуми ҳосилаи $(n-1)$-умро ҷорӣ кардаем ва ҳосилаи $(n-1)$-ум дар ягон нуқтаи x-и интервали (a, b) дифференсиронидашаванда мебошад, яъне дар ин нуқта соҳиби ҳосила аст, онгоҳ ҳосилаи номбурдаро *ҳосилаи n-ум* (ё *ҳосилаи тартиби n-ум*)-и функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x меноманд ва бо символи $f^{(n)}(x)$ ё $y^{(n)}(x)$ ишорат менамоянд.

Ҳамин тариқ, мо аз мафҳуми ҳосилаи якум ба таври индуктивӣ пай дар пай ба ҳосилаи n-ум меоем. Муносибате, ки ҳосилаи n-умро муайян мекунад, чунин намуд дорад:

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'. \tag{5.51}$$

Функцияеро, ки дар маҷмӯи додашудаи $\{x\}$ соҳиби ҳосилаи охирноки тартиби n-ум мебошад, одатан дар ҳамин маҷмӯъ n маротиба дифференсиронидашаванда меноманд. Мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ дар физика татбиқи васеъ дорад. Мо дар ин ҷо ба нишон додани маънои механикии ҳосилаи дуюм маҳдуд мешавем. Агар функцияи $y = f(x)$ қонуни ҳаракати нуқтаи материалӣ аз рӯи хати ростро тавсиф намояд, онгоҳ, чунон ки медонем, ҳосилаи якум $f'(x)$ суръати лаҳзавии нуқтаи ҳаракаткунанда дар лаҳзаи вақти t-ро ифода менамояд. Дар ингуна мавриди ҳосилаи дуюм $f^{(2)}(x)$ ба *суръати тағьирьёбии суръат*, яъне ба *шитоби* нуқтаи ҳаракаткунанда дар лаҳзаи вақти t баробар аст.

Методикаи ҳисоб кардани ҳосилаи тартиби олӣ ҳисоб карда тавсияи фақат *ҳосилаи тартиби якумро* пешниҳод мекунад. Ба сифати мисол ҳосилаи тартиби n-уми баъзе функцияҳои элементарии соддатаринро ҳисоб мекунем.

2. Ҳосилаи n-уми баъзе функцияҳо. 1°. Ҳосилаи n-уми функцияи дараҷагии $y = x^\alpha$ $(x > 0,\ \alpha$ — адади ҳақиқии дилхоҳ)-ро ҳисоб мекунем. Функцияро пай дар пай медифференсиронем:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y^{(2)} = \alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2},\ y^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ \ldots$$

Аз ин ҷо қонуни умумиро ҳосил кардан осон аст:

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}.$$

Ин қонунро бо методи индукция қатъӣ исбот кардан осон аст.

---

* Ҳосилаи дуюми функцияи $y = f(x)$-ро инчунин бо символи $f''(x)$ ё $y''(x)$ ишорат менамоянд.

Дар мавриди хусусии $\alpha = m$, дар ин ҷо m — адади натуралӣ, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$(x^m)^{(m)} = m!, \quad (x^m)^{(n)} = 0 \text{ ҳангоми } n > m \text{ будан.}$$

Ҳамин тарик, ҳосилаи n-уми бисьёраъзогии тартиби m-ум ҳангоми $n > m$ будан ба нуль баробар аст*.

2°. Баъд ҳосилаи n-уми функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$-ро ҳисоб мекунем. Ин функцияро пай дар пай медифференцирунем:

$$y' = a^x \ln a, \quad y^{(2)} = a^x \ln^2 a, \quad y^{(3)} = a^x \ln^3 a, \ldots$$

Формулаи умумие, ки бо методи индукция бо осонӣ муқаррар мешавад, чунин намуд дорад:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

Аз ҷумла,

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

3°. Ҳосилаи n-уми функцияи $y = \sin x$-ро ҳисоб мекунем. Ҳосилаи якуми ин функцияро ба намуди $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ навиштан мумкин аст. Ҳамин тарик, *дифференцирунидани функцияи* $y = \sin x$ *ба аргументи ин функция бузургии* $\pi/2$*-ро ҳамроҳ менамояд.* Аз ин ҷо чунин формуларо ҳосил мекунем:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

4°. Формулаи

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

айнан ҳамин тавр муқаррар карда мешавад.

5°. Дар хотима ҳосилаи n-уми *функцияи касрию хаттӣ* номидашавандаи $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$-ро, ки дар ин ҷо a, b, c ва d доимиҳо мебошанд, ҳисоб мекунем. Ин функцияро пай дар пай медифференцирунем:

$$y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = (ad - bc)(cx+d)^{-2},$$

---

* Дар айни ҳол мо боз формулаи возеҳи $[Au(x) + Bv(x)]^{(n)} = Au^{(n)}(x) + Bv^{(n)}(x)$-ро, ки дар ин ҷо A ва B доимиҳо мебошанд, истифода мекунем.

$$y^{(2)} = (ad - bc)(-2)(cx + d)^{-3} c,$$
$$y^{(3)} = (ad - bc)(-2)(-3)(cx + d)^{-4} c^2, \ldots$$

Қонуни умумии

$$y^{(n)} = \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{(n)} = (ad - bc)(-1)^{n-1} n! (cx + d)^{-(n+1)} c^{n-1}$$

-ро низ ҳисоб кардан осон аст, ки инро бо методи индукция асоснок кардан мумкин аст.

3. Формулаи Лейбниц барои ҳосилаи *n*-уми ҳосили зарби ду функция. Дар ҳолатҳое, ки қоидаи дар боло муқарраршудаи ҳисоби ҳосилаи якум аз сумма ё фарқи ду функция $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ба мавриди ҳосилаи *n*-ум (масалан, бо методи индукция) бо осонӣ татбиқ мешавад: $(u \pm v)^n = u^{(n)} \pm v^{(n)}$, ҳангоми ҳисоб кардани ҳосилаи *n*-ум аз ҳосили зарби ду функцияи uv мушкилии зиёде пайдо мешавад.

Ин қоида *формулаи Лейбниц* номида мешавад ва чунин намуд дорад:

$$(uv)^n = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v^{(2)} + \\ + C_n^3 u^{(n-3)} v^{(3)} + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (5.52)$$

Қонунеро, ки мувофиқи он қисми рости формулаи Лейбниц (5.52) тартиб дода шудааст, баён кардан осон аст: *формулаи Лейбниц бо формулаи ҷудокунии биноми $(u + v)^n$ монанд асту фақат ба ҷои дараҷаҳои u ва v ҳосилаҳои тартибҳои мувофиқ воқеанд.* Агар ба ҷои функцияҳои u ва v мувофиқан $u^{(0)}$ ва $v^{(0)}$ навишта шавад (яъне, агар худи функция чун ҳосилаи тартиби нуль муоина шавад), ин монандӣ пурратар мегардад.

Формулаи Лейбницро бо методи индукция исбот мекунем. Ин формула ҳангоми $n = 1$ будан чунин мешавад: $(uv)' = u'v + uv'$, ки ин бо қоидаи дар боло (дар § 3) муқарраршудаи дифференсиронидани ҳосили зарби ду функция монанд аст. Бинобар ин барои ягон номери n дурустии формулаи (5.52)-ро фарз карда, дурустии онро барои номери $n + 1$ исбот кардан кифоя аст. Инак, бигзор формулаи (5.52) барои ягон номери n дуруст бошад. Ин формуларо дифференсиронида, ҷамъшавандаҳои қисми рострро муттаҳид менамоем:

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)} v + [C_n^0 u^{(n)} v' + C_n' u^{(n)} v'] + \\ + [C_n' u^{(n-1)} v^{(2)} + C_n^2 u^{(n-1)} v^{(2)}] + [C_n^2 u^{(n-2)} v^{(3)} + \\ + C_n^3 u^{(n-2)} v^{(3)}] + \ldots + uv^{(n+1)}. \qquad (5.53)$$

(Дар айни ҳол $1 = C_n^0$.) Аз курси математикаи элементарӣ маълум аст, ки барои номери дилхоҳи k-и аз n калон набудагӣ формулаи зерин* дуруст аст:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

---

* Бо вуҷуди он, ин формула ба таври элементарӣ санҷида мешавад.

Ин формуларо истифода карда, мо баробарии (5.53)-ро ин тавр навишта метавонем:

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + C_n' + {}_1u^{(n)}v' + C_n^2 + {}_1u^{(n-1)}v^{(2)} + \\ + \ldots + uv^{(n+1)}.$$

Бо ҳамин формулаи (5.52) барои номери $(n+1)$ исбот карда шуд. Ҳосил кардани формулаи Лейбниц ба итмом расид.

Мисоли 1. Ҳосилаи n-уми функцияи $y = x^2 \cos x$ ҳисоб карда шавад. Аз формулаи Лейбниц истифода мекунем ва дар он $u = \cos x$, $v = x^2$ мегирем. Дар ингуна маврид барои номери дилхоҳи k $u^{(k)} = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$, $v' = 2x$, $v^{(2)} = 2$, $v^{(3)} = v^{(4)} = v^{(5)} = \ldots = 0$.

Баъд

$$y^{(n)} = x^2\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx\cos\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] + \\ + n(n-1)\cos\left[x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right].$$

Мисоли 2. Ҳосилаи n-уми функцияи $y = x^3 e^x$ ҳисоб карда шавад. Формулаи Лейбницро истифода мекунем ва дар он $u = e^x$, $v = x^3$ мегирем. Онгоҳ барои номери дилхоҳи k $u^{(k)} = e^x$, $v' = 3x^2$, $v^{(2)} = 6x$, $v^{(3)} = 6$, $v^{(4)} = v^{(5)} = \ldots = 0$. Чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$y^{(n)} = (x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2))e^x.$$

Мисолҳои муоинашуда нишон медиҳанд, ки формулаи Лейбниц махсусан дар ҳамон маврид самарабахш аст, ки агар аз ду функцияҳои зарбшаванда якеаш фақат ҳосилаҳои нобаробари нули шумораашон охирнок дошта бошад.

4. **Дифференциалҳои тартиби олӣ.** Ҳангоми баёни материали ин пункт мо барои ишорати дифференциал дар қатори символи d инчунин аз символи δ истифода мекунем (яъне, дар он чое, ки муносиб аст, ба чои dx ва dy символҳои δx ва δy менависем).

Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда мебошад. Онгоҳ дифференциали якум (dy)-и ин функция чунин намуд дорад*: $dy = f'(x)\,dx$ ва функцияи ду тағьирёбанда (нуқтаи x ва бузургии dx) мебошад.

Инчунин фарз мекунем, ки функцияи $f'(x)$ низ дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда мебошад ва бузургии dx барои ҳама нуқтаҳои x-и атрофи муоинашавандаи нуқтаи x_0 як қимати қайдшуда дорад.

Дар ин фарзиятҳо дифференциали функцияи $dy = f'(x)\,dx$ дар нуқтаи x_0 вуҷуд дорад, ки мо онро бо символи $\delta(dy)$ ишо-

* Ба п. 1 § 9, формулаҳои (5.39) нигр.

рат менамоем ва дифференциали охирин бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)dx]|_{x=x_0} = [f'(x)dx]'|_{x=x_0}\delta x = f''(x_0)dx\,\delta x. \quad (5.54)$$

Таъриф. Қимати $\delta(dy)$*-и дифференциали дифференциали якуми* dy*-ро ҳангоми* $\delta x = dx$ *будан дифференциали дуюми функцияи* $y = f(x)$ *(дар нуқтаи* x_0*) меноманд ва бо символи* d^2y *ишорат менамоянд.*

Аз формулаи (5.54) ва аз таърифи дифференциали дуюм натиҷа мебарояд, ки

$$d^2y = f''(x_0)(dx)^2. \quad (5.55)$$

Азбаски мо бузургии dx-ро бузургии қайдшуда пиндоштем, пас аз таърифи дифференциали дуюм якбора натиҷа мебарояд, ки дифференциали дуюми тағйирёбандаи новобастаи d^2x ба нуль баробар аст.

Дифференциалҳои тартибҳои баландтар айнан ҳамин тавр пай дар пай муайян карда мешаванд. Фарз мекунем, ки ҳосилаи тартиби $(n-1)$-уми функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 дифференцирониданашаванда мебошад (яъне, фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 соҳиби ҳосилаи тартиби n-ум мебошад), онгоҳ дифференциали тартиби n-ум (d^ny)-и функцияи $y = f(x)$ (дар нуқтаи x_0)-ро чун дифференциали $\delta(d^{n-1}y)$-и дифференциали тартиби $(n-1)$-ум (ҳангоми $\delta x = dx$ будан) муайян мекунем.

Барои дифференциали тартиби n-ум (d^ny) формулаи зерин бо методи индукция ба таври элементарӣ муқаррар карда мешавад:

$$d^ny = f^{(n)}(x_0)(dx)^n. \quad (5.56)$$

Воқеан, ҳангоми $n = 1$ ва $n = 2$ будан формулаи (5.56) дуруст аст. Фарз мекунем, ки ин формула барои ягон номери $(n-1)$ дуруст аст, яъне фарз мекунем, ки $d^{n-1}y = f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}$.

Онгоҳ, мувофиқи таърифи d^ny, чунин ифодаро ҳосил мекунем*:

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x=dx} = \delta[f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}]|_{\delta x=dx} = f^{(n)}(x)(dx)^{n-1}\delta x|_{\delta x=dx} = f^{(n)}(x)(dx)^n,$$

яъне дурустии формулаи (5.56) муқаррар карда шуд.

Аз формулаи (5.56) барои ҳосилаи тартиби n-ум чунин ифода ҳосил мешавад:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}. \quad (5.56)$$

---

* Мо индекси 0-и нуқтаи x-ро мепартоем.

Қайд кардан муҳим аст, ки ҳангоми $n > 1$ будан формулаҳои (5.56) ва (5,56′), умуман, фақат дар мавриди т а ғ ь и р ь ё б а н д а и н о в о б а с т а будани x дурустанд (яъне дифференциалҳои дуюм ва минбаъда, умуман, ба хосияти шакли инвариантӣ соҳиб нестанд).

Барои ба ин боварӣ ҳосил кардан масъалаи ҳисоби дифференциали дуюми функцияи $y = f(x)$ (функцияи ду маротиба дифференцирониданшуда)-ро муоина мекунем. Барои ин фарз мекунем, ки тағьирьёбандаи x функцияи ду маротиба дифференцирониданшавандаи ягон аргументи t мебошад. Баробарии (5.39) ва формулаи $\delta(uv) = v\,\delta u + u\,\delta v$-ро истифода карда, чунин формуларо ҳосил мекунем:

$$d^2y = \delta(dy)\,|_{\delta x = dx} = \delta\,[f'(x)(dx)]_{\delta x = dx} = \{dx\,\delta\,[f'(x)] + f'(x)\delta(dx)\}|_{\delta x = dx} = [dx \cdot f''(x)\,\delta x]|_{\delta x = dx} + f'(x)d^2x.$$

Инак, $d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$.

Формулаи охирин аз формулаи (5.55) бо он тафовут дорад, ки дар он аъзои иловагии, умуман, ба нуль нобаробари $f'(x)\,d^2x$ мавҷуд ҳаст.

§ 11. Дифференцирониданӣ функцияҳое, ки ба таври параметрӣ дода шудаанд

Мо дар ин параграф ба омӯзиши методикаи ҳисоби ҳосилаи функцияҳое, ки ба таври параметрӣ дода шудаанд, таваққуф мекунем.

Бигзор x ва y чун функцияҳои ягон параметри t дода шуда бошанд: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Дар айни ҳол фарз мекунем, ки функцияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ дар соҳаи муоинашавандаи тағьирьёбии тағьирьёбандаи t аз рӯи ҳамин тағьирьёбанда ба ҳосилаҳои шумораашон даркорӣ соҳибанд. Ғайр аз он, мо фарз мекунем, ки функцияи $x = \varphi(t)$ дар атрофи нуқтаи муоинашаванда ба функцияи чаппаи $t = \varphi^{-1}(x)$ соҳиб аст*. Фарзияти охирин ба мо имконият медиҳад, ки y-ро чун функцияи аргументи x муоина намоем.

Масъалаи аз рӯи аргументи x ҳисоб кардани ҳосилаҳои y-ро ҳал мекунем. Ин ҳосилаҳоро бо символҳои

$$y'_x,\ y^{(2)}_{x^2},\ y^{(3)}_{x^3},\ \ldots$$

ишорат менамоем.

---

* Ин бо мавҷудиятни ҳосилаи якуми $\varphi'(t)$, нуқтаи дар ягон атроф муоинашавандаи ба нуль нобаробари t таъмин мегардад (ба п. 4 § 2 боби 15 нигаред).

Дар асоси хосияти инвариантии дифференциали якум ин тавр навишта метавонем*:

$$y'_x = \frac{dy}{dx},\quad dy = \psi'(t)\,dt,\quad dx = \varphi'(t)\,dt. \tag{5.57}$$

Аз ин формулаҳо барои ҳосилаи якум чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{5.58}$$

Ҳосилаҳои тартиби олӣ айнан ҳамин тавр ҳисоб карда мешаванд. Чунончи, барои ҳисоб кардани ҳосилаи дуюми y''_{x^2} онро ба намуди

$$y''_{x^2} = \frac{d(y'_x)}{dx}$$

навиштан ва формулаи (5.58), формулаи сеюми (5.57) ва қоидаи дифференцирониданӣ ҳосили тақсимро истифода кардан кифоя аст.

Мисол. Ҳосилаҳои якум ва дуюми функцияҳое, ки ба таври параметрӣ дода шудаанд, ҳисоб карда шаванд:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad -\infty < t < \infty.$$

Хатҳои каче, ки ин муодилаҳо муайян мекунанд, *циклоида*** номида мешаванд.

Чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\quad (t = 2\pi k,\ t - \text{бутун}),$$

$$y''_{x^2} = \frac{\left[\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right]'}{a(1-\cos t)} = \frac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

---

* Дар айни ҳол мо dy ва dx-ро дар як нуқтаи t ва барои як dt мегирем.

** Циклоида траекторияи ягон нуқтаи қайдшудаи давраест, ки он аз рӯи хати рост бе лағжиш меғелад.

БОБИ 6

ИНТЕГРАЛИ НОМУАЙЯН

Дар ин боб масъалаи аз рӯи ҳосилаи функция муқаррар кардани худи функция омӯхта мешавад. Актуалии (аҳамият доштани) ин масъала дар боби 1 аниқ шуда буд.

§ 1. Мафҳуми функцияи ибтидоӣ ва интеграли номуайян

1. Мафҳуми функцияи ибтидоӣ. Масъалаи аз рӯи суръати додашудаи ҳаракати нуқтаи материалӣ муайян кардани қонуни ҳаракати ин нуқта ва, инчунин, масъалаи аз рӯи шитоби* ҳаракати нуқтаи материалӣ муайян кардани қонуни ҳаракат ва суръати ин нуқта аз ҷумлаи масъалаҳои муҳимтарини механика мебошанд.

Ин масъалаҳо ба проблемаи математикии *аз рӯи ҳосилаи додашудаи функция ҷустуҷӯ кардани худи функция* меоранд. Ба омӯзиши ин проблема шурӯъ мекунем.

Таъриф. Функцияи $F(x)$ дар интервали (a, b) функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ номида мешавад, агар функцияи $F(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи x-и интервали (a, b) дифференсиронидашаванда бошад ва ҳосилаи $F'(x)$-и ба $f(x)$ баробар дошта бошад.

Қайд. Функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ *дар хати рости беохир ва дар нимхати рости кушода*** айнан ҳамин тавр муайян карда мешавад.

Мисолҳо. 1) Функцияи $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ дар интервали

---

* Ба ҷои шитоби нуқтаи материалӣ қувваи ба ин нуқта таъсиркунандаро гирифтан мумкин аст (чунки, мувофиқи қонуни дуюми Ньютон, қувва шитоби ин нуктаро муайян мекунад).

** Ва умуман дар маҷмӯи ба худ зичи дилхоҳи $\{x\}$. Таърифи маҷмӯи ба худ зич дар § 3 боби 2.

$(-1, +1)$ функцияи ибтидоии функцияи $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ мебошад, чунки дар нуқтаи дилхоҳи x-и ин интервал $(\sqrt{1-x^2})' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ аст.

2) Функцияи $F(x) = \sin x$ дар хати рости беохири $(-\infty, \infty)$ функцияи ибтидоии функцияи $f(x) = \cos x$ мебошад, чунки дар ҳар як нуқтаи x-и хати рости беохир $(\sin x)' = \cos x$ аст.

3) Функцияи $F(x) = \ln x$ дар нимхати рости кушодаи $x > 0$ функцияи ибтидоии функцияи $f(x) = \dfrac{1}{x}$ мебошад, чунки дар ҳар як нуқтаи x-и ин нимхати рост $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ аст.

Агар $F(x)$ дар интервали (a, b) функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ бошад, онгоҳ функцияи $F(x) + C$, ки дар ин ҷо C доимии дилхоҳ мебошад, низ дар интервали (a, b) функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ мебошад.

Чунин савол пайдо шуданаш табиист: функцияҳои ибтидоии гуногуни як функцияи $f(x)$ байни якдигар чӣ тавр алоқаманданд? Теоремаи асосии зерин дуруст аст.

Теореми 6.1. *Агар $F_1(x)$ ва $F_2(x)$ дар интервали (a, b) функцияҳои ибтидоии дилхоҳи функцияи $f(x)$ бошанд, онгоҳ дар ҳама ҷои ин интервал $F_1(x) - F_2(x) = C$ аст, ки дар ин ҷо C ягон доимӣ мебошад.*

Ба ибораи дигар, ду функцияи ибтидоии дилхоҳи як функция фақат бо доимиашон тафовут дошта метавонанд.

Исбот. Фарз мекунем, ки $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Азбаски ҳар яки функцияҳои $F_1(x)$ ва $F_2(x)$ дар интервали (a, b) дифференсиронидашаванда мебошанд, пас, дар асоси теоремаи 5.3, функцияи $\Phi(x)$ ҳам дар интервали (a, b) дифференсиронидашаванда мебошад, ғайр аз ин дар ҳама ҷои ин интервал $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ аст.

Дар § 10 боби 8 теореми 8.13-и чунин мазмундошта бо методҳое, ки аз натиҷаҳои ин боб истифода нашудааст, исбот карда мешавад: агар функцияи $\Phi(x)$ дар ҳама ҷои интервали (a, b) дифференсиронидашаванда бошад ва агар дар ҳама ҷои ин интервал $\Phi'(x) = 0$ бошад, онгоҳ функцияи $\Phi(x)$ дар интервали (a, b) доимӣ мебошад.*

---

* Бобҳои 6 ва 7-ро баъди боби 8 ҳондан мумкин аст, ки ин ба омӯзиши ин китоб халал намерасонад. Бобҳои 6 ва 7-ро барои он ба пеш овардем, ки бо техникаи интегронӣ шинос шудани ҳонандаро тезонем.

Аз ин теорема чунин ифодаро ҳосил мекунем: $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$, ки ҳаминро исбот кардан лозим буд.

Натиҷа. Агар $F(x)$ дар интервали (a, b) яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x)$ бошад, онгоҳ функцияи ибтидоии дилхоҳи функцияи $f(x)$ дар интервали (a, b) намуди $\Phi(x) = F(x) + C$ дорад, дар ин ҷо C — ягон доимӣ.

2. Интеграли номуайян.

Таъриф. Маҷмӯаи ҳама функцияҳои ибтидоии функцияи додашудаи $f(x)$ дар интервали (a, b) интеграли номуайян аз функцияи $f(x)$ (дар ҳамин интервал) номида мешавад ва бо символи

$$\int f(x)\,dx \tag{6.1}$$

ишорат карда мешавад. Дар ин ишорат аломати $\int$ *аломати интеграл*, ифодаи $f(x)dx$ *ифодаи таҳтиинтегралӣ* ва худи функцияи $f(x)$ *функцияи таҳтиинтегралӣ* номида мешавад.

Агар $F(x)$ дар интервали (a, b) яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x)$ бошад, онгоҳ, дар асоси натиҷаи теоремаи 6.1

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{6.2}$$

мешавад, дар ин ҷо C — доимии дилхоҳ.

Агар функцияи ибтидоӣ (ва, пас, интеграли номуайян)-и функцияи $f(x)$ дар интервали (a, b) мавҷуд бошад, онгоҳ ифодаи таҳтиинтегралии формулаи (6.1) *дифференциали яке аз функцияҳои ибтидоии дилхоҳро ифода мекунад.* Воқеан, фарз мекунем, ки $F(x)$ дар интервали (a, b) яке аз функцияҳои ибтидоии дилхоҳи функцияи $f(x)$ мебошад, яъне барои ҳама x-ҳои интервали (a, b) $F'(x) = f(x)$. Онгоҳ $f(x)dx = F'(x)dx = dF$.

Мисолҳо. 1) $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + C$ дар интервали $-1 < x < 1$, чунки функцияи $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ дар ҳамин интервал яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ мебошад.

2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ дар ҳамаи хати рости беохири $-\infty < x < \infty$, чунки функцияи $F(x) = \sin x$ дар хати рости беохир яке аз функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x) = \cos x$ мебошад.

Мо дар ин боб ба масъалаи мавҷудияти функцияҳои ибтидоии (ё интегралҳои номуайяни) функцияҳои классашон васеътар машғул намешавем. Дар ин ҷо фақат қайд мекунем, ки

дар § 7 боби 10 чунин ҷумла исбот карда мешавад: *барои ҳаргуна функцияи $f(x)$, ки дар интервали (a, b) бефосила мебошад, дар ҳамин интервал функцияи ибтидоӣ (ва интеграли номуайян) мавҷуд аст.*

Амали ёфтани функцияи ибтидоӣ ё интеграли номуайян (аз функцияи $f(x)$)-ро интегронидан (-и функцияи $f(x)$) меноманд.

3. Хосиятҳои асосии интеграли номуайян. Пеш аз ҳама ду хосиятеро баён мекунем, ки онҳо бевосита аз таърифи интеграли номуайян пайдо мешаванд:

$1°.\ d\int f(x)dx = f(x)dx.$

$2°.\ \int dF(x) = F(x) + C.$

Хосияти 1° чунин маъно дорад, ки агар аломати дифференциал пеш аз аломати интеграл воқеъ бошад, аломатҳои d ва $\int$ ба ҳамдигар ихтисор мешаванд.

Хосияти 2° чунин маъно дорад, ки агар аломати интеграл пеш аз аломати дифференциал воқеъ бошад, аломатҳои $\int$ ва d ба ҳамдигар ихтисор мешаванд, лекин дар ин маврид ба $F(x)$ доимии дилхоҳи C-ро ҷамъ кардан лозим аст.

Барои муқаррар кардани хосияти 1° аз ҳар ду қисми формулаи (6.2) дифференциал гирифтан ва $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ буданашро ба эътибор гирифтан кифоя аст.

Барои муқаррар кардани хосияти 2° баробарии $dF(x) = f(x)dx$-ро ба қисми чапи (6.2) истифода кардан кифоя аст.

Одатан ду хосияти зеринро *хосиятҳои хаттии* интеграл меноманд:

$3°.\ \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

$4°.\ \int [Af(x)]dx = A\int f(x)dx\ (A = \text{const}).$

Бояд қайд кард, ки баробариҳои формулаҳои 3° ва 4° характери шартӣ доранд: ин баробариҳоро чун баробариҳои қисмҳои росту чап бо саҳеҳии то ҷамъшавандаи доимии дилхоҳ фаҳмидан лозим аст (ин фаҳмост, чунки ҳар яке аз интегралҳои формулаҳои 3° ва 4° бо саҳеҳии то ҷамъшавандаи доимии дилхоҳ муайян мебошанд).

Азбаски ду функцияи ибтидоии як функция аз якдигар фақат бо доимиашон тафовут доранд, пас барои исботи хосияти 3° исбот кардан кифоя аст, ки агар $F(x)$ функцияи ибтидоии $f(x)$ ва $G(x)$ функцияи ибтидоии $g(x)$ бошад, онгоҳ $[F(x) \pm G(x)]$ функцияи ибтидоии функцияи $f(x) \pm g(x)$ мебошад. Ифодаи охирин бевосита аз он бармеояд, ки ҳосилаи суммаи (алгебравии) функцияҳо ба суммаи ҳосилаҳои ин функцияҳо баробар аст, яъне $[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$. Хосияти 4° айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад. Дар ин мавриди баробарии $[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x)$ истифода карда мешавад.

4. Ҷадвали интегралҳои номуайяни асосӣ. Мо дар боби 5 ҷадвали ҳосилаҳои функцияҳои элементарии соддатаринро навишта будем (ба § 8 боби 5 нигаред), ки он аппарати ҳисобкунии ҳисоби дифференциалиро ифода мекард. Ҳар як формулаи ин ҷадвал (муқаррар мекунад, ки ин ё он функцияи $F(x)$ ҳосилаи ба $f(x)$ баробарро соҳиб аст), дар асоси таърифи интегралӣ номуайян, ба формулаи мувофиқи ҳисоби интегралӣ

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

меорад.

Мо бо ҳамин роҳ ҷадвали зеринии интегралҳои номуайяни асосиро ҳосил мекунем:

1°. $\int 0 \cdot dx = C.$

2°. $\int 1 \cdot dx = x + C.$

3°. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

4°. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$

5°. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C.$

6°. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

7°. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

8°. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\right.$ дар ин ҷо $\left. n = 0, \pm 1, \ldots.\right)$

9°. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n,$ дар ин ҷо $n = 0, \pm 1, \ldots).$

10°. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases} \quad (-1 < x < 1).$

11°. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

12°. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$ (дар мавриди аломати $-|x| > 1$).

13°. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C \quad (|x| \neq 1).$

Ба ин формулаҳо формулаҳои мувофиқи функцияҳои гиперболиро ҳамроҳ кардан мумкин аст:

14°. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

15°. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

16°. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

17°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$

Дар ба формулаҳои 4, 12 ва 13 мулоҳиза меронем. Формулаи 4 барои интервали дилхоҳе, ки қимати $x = 0$ надорад, дуруст аст. Воқеан, агар $x > 0$ бошад, аз формулаи $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ хулоса мебарояд, ки $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ ва агар $x < 0$ бошад, аз формулаи $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ хулоса мебарояд, ки $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$. Бо ҳамин формулаи 4 барои $x \neq 0$-и дилхоҳ дуруст аст.

Формулаҳои 12 ва 13 дар ин ҷадвал мавқеи истисно доранд, чунки ин формулаҳо дар байни формулаҳои ҷадвали ҳосилаҳо мушоҳида надоранд.

Аммо барои санҷидани формулаҳои 12 ва 13 ба он бовар кардан кифоя аст, ки ҳосилаи ифодаҳои қисми рости ин формулаҳо бо функцияҳои таҳтиинтегралии мувофиқ мувофиқат мекунанд.

Мақсади асосии мо ин аст: бо усулҳо ва методҳои интегронидан пурра кардани ҷадвали интегралҳои номуайян. Лекин пеш аз он, ки ба ин мақсад расем, як қайди муҳимро баён мекунем.

Мо дар § 7 боби 4 мафҳуми *функцияи элементариро* ҷорӣ кардем ва дар § 8 боби 5 муқаррар кардем, ки ҳосилаи функцияи элементарии дилхоҳ боз функцияи элементарӣ аст. Ба ибораи дигар, мо муқаррар кардем, ки *амали дифференсиронӣ аз доираи класси функцияҳои элементарӣ берун намебарояд.*

Якбора бояд қайд кард, ки масъалаи амали интегронӣ дигар ҳел аст. Исбот кардан мумкин аст, ки интеграл аз баъзе функцияҳои элементарӣ ба функцияҳои элементарӣ баробар намешаванд. Ана, инҳо мисолҳои чунин интегралҳо мебошанд:

1°. $\int e^{-x^2}\,dx.$

2°. $\int \cos(x^2)\,dx.$

3°. $\int \sin(x^2)\,dx.$

$4^{\circ}.\ \int \frac{dx}{\ln x}\ (0 < x \neq 1).$

$5^{\circ}\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx\ (x \neq 0).$

$6^{\circ}\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx.$

Ҳар яки ин интегралҳо функцияеро ифода менамоянд, ки *онҳо функцияи элементарӣ намебошанд.* Функцияҳои номбурда на фақат ҳақиқатан вуҷуд доранд*, балки дар масъалаҳои гуногуни физика низ роли калон мебозанд. Масалан, интегрални 1, ки *интеграли Пуассон* ё *интеграли саҳвҳо* номида мешавад, дар физикаи статикӣ, дар назарияи нақли гармӣ ва диффузия васеъ истифода карда мешавад; интегралҳои 2 ва 3, ки *интегралҳои Френель* номида мешаванд, дар оптика васеъ истифода карда мешаванд. Интеграли 4, ки *логарифми интегралӣ* номида мешавад, ва интегралҳои 5—6, ки *косинус ва синуси интегралӣ* номида мешаванд, татбиқоти васеъ доранд.

Барои ҳама функцияҳои нави номбурда (интеграли Пуассон, интегралҳои Френель, логарифми интегралӣ, синус ва косинуси интегралӣ) ҷадвал ва графикҳо тартиб дода шудаанд.

Аз сабаби он, ки ин функцияҳо татбиқоти васеъ доранд, онҳо ба мисли функцияҳои элементарии соддатарин пурра омӯхта шудаанд. Умуман шартӣ будани мафҳуми функцияҳои элементарии соддатаринро қайд кардан лозим аст.

§ 2. Методҳои асосии интегронӣ

1. **Интегронӣ бо тарзи иваз кардани тағьирьёбанда (тарзи гузориш).** Тарзи иваз кардани тағьирьёбанда яке аз усулҳои самарабахштари интегронӣ мебошад. Ин усул ба тасдиқоти элементарии зерин асос ёфтааст.

*Бигзор функцияи $t = \varphi(x)$ дар ягон маҷмӯи $\{x\}$** муайян ва дифференсиронидашаванда бошад, ва бигзор $\{t\}$ маҷмӯи ҳама қиматҳои ин функция бошад. Акнун бигзор барои функцияи $g(t)$ дар маҷмӯи $\{t\}$ функцияи ибтидоии $G(t)$ мавҷуд бошад, яъне*

$$\int g(t)dt = G(x) + C. \qquad (6.3)$$

Онгоҳ дар ҳамаи маҷмӯи $\{x\}$ барои функцияи $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ функ-

---

* Мавҷудиятии интеграли номуайян аз функцияи бефосилаи дилхоҳ дар § 7 боби 10 исбот карда мешавад. Бефосилагии функцияҳои тахтиинтегралӣ мавҷудиятии интегралҳои 1—6-ро таъмин менамояд.

** Ин маҷмӯъ ё интервал, ё сегмент, ё нимхати рост, ё хати рости беохирро ифода мекунад.

цияи ибтидоие вуҷуд дорад, ки он ба $G[\varphi(x)]$ *баробар аст, яъне*

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = G[\varphi(x)] + C. \qquad (6.4)$$

Барои исботи ин тасдиқот аз қоидаи дифференсиронидани функцияи мураккаб* истифода кардан

$$\frac{d}{dx}\{G[\varphi(x)]\} = G'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

ва, мувофиқи таърифи функцияи ибтидоӣ, $G'(t) = g(t)$ будани-шро ба эътибор гирифтан кифоя аст. Акнун фарз мекунем, ки

$$\int f(x)dx \qquad (6.5)$$

-ро ҳисоб кардан лозим аст. Дар як қатор мавридҳо ба сифати тағйирёбандаи нав чунин функцияи дифференсиронидашавандаи $t = \varphi(x)$-ро интихоб кардан мумкин мешавад, ки баробарии

$$f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x) \qquad (6.6)$$

дуруст аст, дар айни ҳол функцияи $g(t)$ бо осонӣ интегронида мешавад, яъне

$$\int g(t)dt = G(t) + C$$

ҳисоб карда мешавад. Тасдиқоти исботшуда имконият медиҳад, ки барои интеграли (6.5) формулаи зеринро нависем:

$$\int f(x)dx = G[\varphi(x)] + C. \qquad (6.7)$$

Ин усули ҳисоб кардани интеграли (6.5) *интегронӣ бо тарзи иваз кардани тағйирёбанда* номида мешавад.

Албатта, чунин усул на ба ҳаргуна интеграл татбиқшаванда аст. Ғайр аз он, бояд қайд кард, ки интихоби гузориши дуруст ба андозаи зиёд аз санъати ҳисоббарор муайян мешавад. Чандин мисол меорем, ки дар онҳо методи баёншуда истифода шудаанд.

1°. $\int \cos 2x\,dx$ ҳисоб карда шавад. Барои ҳисоб кардани ин интеграл аз гузориши соддатарини $t = 2x$, $dt = 2dx$ истифода мекунем. Дар натиҷаи ин ивазкунӣ чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$\int \cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

---

* Ба § 7 боби 5 нигаред.

2°. $\int \frac{dx}{x+a}$ ҳисоб карда шавад. Ин интеграл ба воситаи иваз-

кунии $t = x + a$, $dt = dx$ ҳисоб карда мешавад:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+a| + C \ (x \neq -a).$$

3°. $\int e^{\cos x} \sin x\, dx$ ҳисоб карда шавад. Ин интеграл бо роҳи ивазкунии $t = \cos x$ ҳисоб карда мешавад.

Вокеан, дар ин ҳангом $dt = -\sin x\, dx$ ва

$$\int e^{\cos x} \sin x\, dx = -\int e^t\, dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C.$$

4°. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2} dx$ ҳисоб карда шавад. Барои ҳисоб карда-

ни ин интеграл ивазкунии $t = \operatorname{arctg} x$ муносиб мебошад. Во-

кеан, дар ин ҳолат $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ ва

$$\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2} dx = \int t^{100}\, dt = \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101} + C.$$

5°. $\int (7x-9)^{2999} dx$ ҳисоб карда шавад. Албатта, функцияи таҳтиинтегралиро мувофиқи формулаи биноми Ньютон навишта, интегралро ба намуди суммаи се ҳазор интегралҳои ҷадвалӣ овардан мумкин аст. Чунин ивазкунӣ бехтар аст: $t = 7x - 9$, $dt = 7dx$, дар натиҷа чунин ифода ҳосил мешавад:

$$\int (7x-9)^{2999} dx = \frac{1}{7} \int t^{2999}\, dt = \frac{t^{3000}}{21000} + C = \frac{(7x-9)^{3000}}{21000} + C.$$

6°. $\int \frac{dx}{\cos x}$ ҳисоб карда шавад. Пеш аз тарзи ивазкуниро ис-

тифода кардан интеграли додашударо ин тавр менависем:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{1-\sin^2 x},$$

Акнун фарз мекунем, ки $t = \sin x$, $dt = \cos x\, dx$. Дар натиҷа чунин ифода ҳосил мешавад:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

7°. $\int \frac{x^3\,dx}{(2x)^8+1}$ ҳисоб карда шавад. Чунин ивазкуний муносиб мебошад: $t=(2x)^4$, $dt=64x^3\,dx$. Дар айни ҳол

$$\int \frac{x^3dx}{(2x)^8+1}=\frac{1}{64}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\operatorname{arctg} t}{64}+C=\frac{\operatorname{arctg}(2x)^4}{64}+C.$$

8°. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ ҳисоб карда шавад. Барои ҳисоб кардани ин интеграл гузориши тригонометрии $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, $x=a\operatorname{tg} t$, $dx=a\frac{dt}{\cos^2 t}$ беҳтар аст.

Дар натичаи ин гузориш интеграл чунин намуд мегирад:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}}=\frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt=\frac{\sin t}{a^2}+C=$$

$$=\frac{\operatorname{tg} t}{a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

9°. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ ҳисоб карда шавад. Дар ин ҷо чунин гузориш беҳтар аст: $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $x=a\sin t$, $dx=a\cos t\,dt$. Дар айни ҳол

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{\operatorname{tg} t}{a^2}+C=$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

10°. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$ ҳисоб карда шавад. Барои ҳисоб кардани ин интеграл чунин гузориш беҳтар аст: $2t=\arccos\frac{x}{a}$, $x=a\cos 2t$, $dx=-2a\sin 2t\,dt$. Дар натиҷа

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=-4a\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=-4a\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=-2at-2a\int\cos 2t\,dt=$$

$$=-2at-a\sin 2t+C=-a\left[\arccos\frac{x}{a}+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]+C.$$

2. Интегронӣ аз рӯи ҳиссаҳо. *Методи интегронӣ* аз рӯи ҳиссаҳо ба қатори методҳои самарабахши интегронӣ тааллуқ дорад. Ин метод ба тасдиқоти зерин асос меёбад.

Бигзор ҳар яке аз функцияҳои $u(x)$ ва $v(x)$ дар маҷмӯи $\{x\}$ дифференсиронидашаванда бошанд ва, ғайр аз он, дар ин маҷмӯъ функцияи ибтидоии функцияи $v(x)\,u'(x)$ мавҷуд бошад. Онгоҳ дар маҷмӯи $\{x\}$ функцияи ибтидоии функцияи $u(x)\,v'(x)$ низ мавҷуд аст, дар айни ҳол формулаи зерин дуруст аст:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (6.8)$$

Қайд. Таърифи дифференциал ва хосияти инвариантии шакли он имконият медиҳад, ки формулаи (6.8) ба намуди

$$\int u\,dv = u(x)\,v(x) - \int v\,du \qquad (6.9)$$

навишта шавад. Барои исботи тасдиқоти баёншуда формулаи ҳосилаи ҳосили зарби ду функцияи $u(x)$ ва $v(x)$-ро менависем:

$$[u(x)\,v(x)]' = u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x). \qquad (6.10)$$

Баробарии (6.10)-ро ба dx зарб мекунем ва аз ҳар ду қисми баробарии ҳосилшуда интеграл мегирем. Азбаски мувофиқи шарт барои ҳама x-ҳои маҷмӯи $\{x\}$ $\int v(x)\,u'(x)\,dx$ ва $\int [u(x)\,v(x)]'\,dx = u(x)\,v(x) + C$ вуҷуд доранд (ба хосияти 2-и п. 3 § 1 ниг.), пас барои ҳама x-ҳои маҷмӯи $\{x\}$ интеграли $\int u(x)\,v'(x)\,dx$ низ вуҷуд дорад, дар айни ҳол формулаи (6.8) (ё (6.9)) дуруст мебошад.

Формулаи (6.9) *масъалаи ҳисоби интеграли $\int u\,dv$-ро ба масъалаи ҳисоби интеграли $\int v\,du$ меорад.* Дар як қатор мавридҳои конкретӣ интеграли $\int v\,du$ бо осонӣ ҳисоб карда мешавад.

Ба воситаи татбиқи формулаи (6.9) ҳисоб кардани интеграли $\int u\,dv$-ро *интегронӣ аз рӯи ҳиссаҳо* низ меноманд. Ҳангоми ба таври конкретӣ татбиқ кардани формулаи интегронӣ аз рӯи ҳиссаҳо (6.9) чадвали дифференциалҳоро, ки дар п. 2 § 9 боби 5 навишта будем, истифода кардан қулай мешавад.

Чанд мисол меорем.

1°. Интеграли $I = \int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq -1)$-ро ҳисоб мекунем. $u = \ln x$, $dv = x^n\,dx$ фарз карда ва формулаи (6.9)-ро истифода намуда, $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$-ро ҳосил мекунем ва

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

2°. Интеграли $I = \int x \operatorname{arctg} x\,dx$-ро ҳисоб мекунем. $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$ фарз карда ва формулаи (6.9)-ро истифода намуда, $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$-ро ҳосил ва интегралро ҳисоб мекунем:

$$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{[(1+x^2)-1]}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + C.$$

3°. Интеграли $I = \int x^2 \cos x\,dx$-ро ҳисоб мекунем. $u = x^2$, $dv = \cos x\,dx$ фарз карда, формулаи (6.9)-ро татбиқ менамоем. Ҳосил мекунем: $du = 2x\,dx$, $v = \sin x$, $I = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$. Барои ҳисоб кардани интеграли охирин ин дафъа $u = x$, $dv = \sin x\,dx$ фарз карда, формулаи (6.9)-ро боз як маротибаи дигар татбиқ менамоем: $du = dx$, $v = -\cos x$, $I = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int \cos x\,dx = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$. Ҳамин тариқ, мо интеграли $\int x^2 \cos x\,dx$-ро дар натичаи аз рӯи ҳиссаҳо ду маротиба интегронидан ҳисоб кардем. Фаҳмидан осон аст, ки интеграли $\int x^n \cos x\,dx$ (дар ин ҷо n — адади мусбати бутуни дилхоҳ)-ро аз рӯи ҳамингуна схема дар натичаи аз рӯи ҳиссаҳо n маротиба интегронидан ҳисоб кардан мумкин аст.

4°. Акнун интеграли $I = \int e^{ax} \cos bx\,dx$ ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$)-ро ҳисоб мекунем. Аввал $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$ фарз карда, формулаи (6.9)-ро татбиқ мекунем. Ҳосил мекунем: $du = ae^{ax}\,dx$, $v = \dfrac{\sin bx}{b}$,

$$I = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Барои ҳисоб кардани интеграли охирин ин дафъа $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\,dx$ фарз карда, формулаи (6.9)-ро боз як маротибаи дигар татбиқ мекунем. Ҳосил менамоем: $du = ae^{ax}$, $v = -\dfrac{\cos bx}{b}$,

$$I = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I. \qquad (6.11)$$

Ҳамин гариқ, ба воситаи ду маротиба аз рӯи ҳиссаҳо интегронидани I мо барои интеграли I муодилаи тартиби якуми (6.11)-ро ҳосил кардем. Аз ин муодила меёбем, ки

$$I = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax}.$$

Амалия нишон медиҳад, ки қисми зиёди интегралҳое, ки бо тарзи аз рӯи ҳиссаҳо интегронидан ҳисоб карда мешаванд, *ба се гурӯҳ* зерин чудо кардан мумкин аст:

1) Ба гурӯҳи *якум* интегралҳое тааллуқ доранд, ки функцияи таҳтиинтегралиашон ба сифати зарбкунанда яке аз функцияҳои зеринро доранд: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $(\operatorname{arctg} x)^2$, $(\arccos x)^2$, $\ln \varphi(x)$, ... (ба мисолҳои ҳалшудаи 1° ва 2° нигаред). Барои ҳисоб кардани интегралҳои гурӯҳи якум формулаи (6.9)-ро татбиқ кардан лозим аст, дар айни ҳол фарз карда мешавад, ки дар онҳо $u(x)$ ба яке аз функцияҳои номбаршуда* баробар аст.

2) Ба гурӯҳи *дуюм* интегралҳои намуди зерин тааллуқ доранд:

$$\int (ax + b)^n \cos(cx)\, dx, \quad \int (ax + b)^n (cx)\, dx, \quad \int (ax + b)^n e^{cx} dx,$$

дар ин ҷо a, b, c — доимиҳо, n — адади мусбати бутуни дилхоҳ (ба мисоли 3° нигаред). Интегралҳои гурӯҳи *дуюм* ба воситаи n маротиба татбиқ намудани формулаи аз рӯи ҳиссаҳо интегронӣ (6.9) ҳисоб карда мешаванд, дар айни замон ба сифати $u(x)$ ҳар дафъа $(ax + b)$-ро ба дараҷаи мувофиқ гирифтан лозим аст. Баъди ҳар як интегронӣ аз рӯи ҳиссаҳо ин дараҷа ба як воҳид паст мешавад.

3) Ба гурӯҳи *сеюм* интегралҳои намуди $\int e^{ax} \cos bx\, dx$, $\int e^{ax} \sin bx\, dx$, $\int \sin(\ln x)\, dx$, $\int \cos(\ln x)\, dx$, ... тааллуқ доранд (ба мисоли ҳалшудаи 4° нигаред). Интегрални дилхоҳи ин гурӯҳро бо I ишорат карда ва аз рӯи ҳиссаҳо ду маротиба интеграл гирифта, ҳисоб мекунем ва барои I муодилаи дараҷаи якумро ҳосил менамоем.

Албатта, се гурӯҳи номбурда ҳамаи интегралҳоеро, ки ба воситаи аз рӯи ҳиссаҳо интегронӣ ҳисоб карда мешаванд, дарбар намегиранд. Мисоли интегралҳоеро меорем, ки онҳо ба ҳеҷ ягон се гурӯҳи номбурда дохил намешаванд, лекин онҳо бо ёрии формулаи (6.9) ҳисоб карда мешаванд.

5°. Интегрални $I = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$-ро ҳисоб мекунем. Ин интеграл ба ҳеҷ ягон се гурӯҳи номбурда дохил намешавад. Бо вуҷуди

---

* Дар мавриде, ки агар функцияи таҳтиинтегралӣ ба сифати зарбкунанда $(\operatorname{arctg} x)^2$, $(\arccos x)^2$, ..., дошта бошад, формулаи аз рӯи ҳиссаҳо интегронӣ (6.9)-ро ду маротиба татбиқ намудан лозим меояд.

ин, формулаи (6.9)-ро татбиқ намуда ва дар он $u = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ фарз карда, $du = dx$, $v = \operatorname{tg} x$-ро ҳосил ва интегралро ҳисоб мекунем:

$$I = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\, dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} =$$

$$= x \operatorname{tg} x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

6°. Ниҳоят, интеграли $K_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\lambda}$-ро, ки минбаъд муҳим буданаш собит мешавад, ҳисоб мекунем, дар ин ҷо $a = \text{const}$, $\lambda = 1, 2, \ldots$. Ин интеграл ҳам ба се гурӯҳи номбурда дохил намешавад. Барои ҳисоб кардани ин интеграл барои он формулаи рекуррентиро муқаррар мекунем, ки он масъалаи ҳисоби K_λ-ро ба масъалаи ҳисоби $K_{\lambda-1}$ меорад. Ин тавр навиштан (ҳангоми $\lambda \neq 1$ будан) мумкин аст:

$$K_\lambda = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\, dt}{(t^2 + a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} \int \frac{[(t^2 + a^2) - t^2]\, dt}{(t^2 + a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{\lambda-1}} -$$

$$- \frac{1}{2a^2} \int t \cdot \frac{2t\, dt}{(t^2 + a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} K_{\lambda-1} - \frac{1}{2a^2} \int t \cdot \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^\lambda}.$$

Барои ҳисоб кардани интеграли охирин формулаи аз рӯи ҳиссаҳо интегронӣ (6.9)-ро татбиқ мекунем, дар айни ҳол фарз мекунем, ки дар он $u = t$, $dv = \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^\lambda}$. Чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$du = dt, \quad v = \frac{-1}{(\lambda - 1)(t^2 + a^2)^{\lambda-1}},$$

$$K_\lambda = \frac{1}{a^2} K_{\lambda-1} + \frac{t}{2a^2(\lambda - 1)(t^2 + a^2)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2(\lambda - 1)} K_{\lambda-1}.$$

Аз баробарии охирин формулаи рекуррентии зеринро ҳосил мекунем:

$$K_\lambda = \frac{t}{2a^2(\lambda - 1)(t^2 + a^2)^{\lambda-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{(2\lambda - 3)}{(2\lambda - 2)} K_{\lambda-1}. \qquad (6.12)$$

Формулаи реккурентии (6.12) имконият медиҳад, ки барои λ-и дилхоҳ ($\lambda = 2, 3, \ldots$) интеграли K_λ ҳисоб карда шавад. Вокеан, интеграли K_1 ба таври элементарӣ ҳисоб карда мешавад:

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(t/a)}{(t/a)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{a} + C.$$

Баъди он, ки интеграли K_1 ҳисоб карда шуд, дар формулаи (6.12) $\lambda = 2$ гирифта, мо K_2-ро бо осонӣ ҳисоб мекунем. Дар навбати худ, K_2-ро ҳисоб карда, дар формулаи (6.12) $\lambda = 3$ мегирем ва K_3-ро бо осонӣ ҳисоб мекунем. Ҳамин тавр амал карда, мо барои λ-и натуралии дилхоҳ интеграли K_λ-ро ҳисоб мекунем.

БОБИ 7

АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ. АЛГЕБРАИ БИСЬЕРАЪЗОГИҲО. ИНТЕГРОНИДАНИ ФУНКЦИЯҲОЕ, КИ ДАР НАТИҶА ФУНКЦИЯҲОИ ЭЛЕМЕНТАРӢ ҲОСИЛ МЕШАВАНД

Мо дар боби гузашта қайд кардем, ки интеграли номуайян аз функцияи элементарӣ, умуман, функцияи элементарӣ намебошад. Бо вуҷуди ин, классҳои васеътари функцияҳое ҳастанд, ки интеграли онҳо функцияҳои элементариро ифода менамоянд. (Мо чунин классҳои функцияҳоро *интегронидани функцияҳое* меномем, *ки дар натиҷа функцияҳои элементарӣ ҳосил мешаванд.*) Омӯхтани ин классҳои функцияҳо мақсади асосии ҳамин боб мебошад. Азбаски *класси функцияҳои рационалӣ* дар байни классҳои номбурдаи функцияҳо класси асосӣ мебошад, пас пеш аз ҳама мо бояд тасаввуротамонро рочеъ ба бисьёраъзогиҳо ва функцияҳои рационалӣ аниқтар намоем. Барои ин, дар навбати худ, мо бояд доир ба ададҳои комплексӣ маълумоти аниқтар дошта бошем.

§ 1. Маълумоти мухтасар дар бораи ададҳои комплексӣ

Мо ду ададиҳақиқии x ва y-ро ҷуфти тартибнокшуда меномем, агар кадоми ин ададҳо ададиякум ва кадомаш ададидуюм буданаш маълум бошад. Ҷуфти тартибнокшудаи ададҳои ҳақиқии x ва y-ро бо символи (x, y) ишорат мекунем; дар айни ҳол дар ҷои якум элементи якуми ҷуфт, яъне x навишта мешавад.

Ҷуфти тартибнокшудаи (x, y)-и ададҳои ҳақиқӣ ададикомплексӣ номида мешавад; қисми якуми он x қисми ҳақиқӣ ва қисми дуюмаш y қисми мавҳуми ададикомплексӣ номида мешавад.

Дар мавриде, ки қисми мавҳум y баробари нуль аст, ҷуфти мувофиқи $(x, 0)$ бо ададиҳақиқии x айниятан баробар пиндошта мешавад. Ин имконият медиҳад, ки маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ чун як қисми маҷмӯи ададҳои комплексӣ муоина карда шавад.

Ду адади комплексии $z_1 = (x_1, y_1)$ *ва* $z_2 = (x_2, y_2)$ *ададҳои комплексии баробар номида мешаванд, агар* $x_1 = x_2$ *ва* $y_1 = y_2$ *бошад*, Мегӯянд, ки адади комплексии $z = (x, y)$ *ба нуль баробар аст, агар* $x = 0$ *ва* $y = 0$ *бошад,*

Амал (операция)-ҳои ҷамъ ва зарби ададҳои комплексиро муайян мекунем. Азбаски ададҳои ҳақиқӣ як қисми маҷмӯи ададҳои комплексӣ мебошанд, пас ин амалҳо бояд чунон муайян карда шаванд, ки ҳангоми ба ду адади ҳақиқӣ татбиқ кардани онҳо амалҳои номбурда ба таърифи маълуми (§ 2 боби 2) сумма ва ҳосили зарби ададҳои ҳақиқӣ ованд.

Суммаи ду адади комплексии $z_1 = (x_1, y_1)$ ва $z_2 = (x_2, y_2)$ *гуфта адади комплексии z-и намуди*

$$z = (x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2) \tag{7.1}$$

-ро меноманд.

Ҳосили зарби ду адади комплексии $z_1 = (x_1, y_1)$ *ва* $z_2 = (x_2, y_2)$ *гуфта адади комплексии z-и намуди*

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2, \quad x_1y_2 + x_2y_1) \tag{7.2}$$

-ро меноманд.

Сумма ва ҳосили зарби ададҳои комплексӣ ба хосиятҳои сумма ва ҳосили зарби ададҳои ҳақиқӣ соҳиб мебошанд. Инро санҷидан осон аст. Хусусан хосиятҳои зерин дурустанд:

1°. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (хосияти ҷойивазкунии сумма).

2°. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (хосияти комбинациягии сумма).

3°. $z + (0, 0) = z$ (роли махсуси адади $(0, 0)$).

4°. Барои ҳар як адади $z = (x, y)$ адади ба он мукобили $z' = (-x, -y)$ мавҷуд ҳаст, ки $z + z' = (0, 0)$.

5°. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (хосияти ҷойивазкунии ҳосили зарб).

6°. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (хосияти комбинациягии ҳосили зарб).

7°. $z \cdot (1, 0) = z$ (роли махсуси адади $(1, 0)$).

8°. Барои адади комплексии дилхоҳи $z = (x, y)$-и нобаробари нуль адади ба он чаппаи $\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ мавҷуд ҳаст, ки $z \cdot \frac{1}{z} = (1, 0)$.

9°. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (хосияти таксимотии ҳосили зарб нисбат ба сумма).

Хосиятҳои 1°—9° барои тасдиқ кардани ҷумлаи зерин имконият медиҳанд: ҳама қоидаҳои алгебраи элементарӣ, ки ба амалҳои арифметикӣ ва ба ҷамъи баробариҳо тааллуқ доранд, барои ададҳои комплексӣ пурра иҷро мешаванд.

Ғайр аз он, ин хосиятҳо масъалаи *тарҳи ададҳои комплексиро* чун амали баръакси ҷамъ ва масъалаи *тақсими ададҳои комплексиро* чун амали баръакси зарб пурра ҳал менамоянд.

Фарқи ду адади комплексии $z_1 = (x_1, y_1)$ *ва* $z_2 = (x_2, y_2)$ *гуфта чунин адади комплексии* z*-ро меноманд, ки ҳангоми онро бо* z_2 *ҷамъ кардан* z_1 *ҳосил мешавад.* Мавҷудият ва ягонагии фарқи ду адади комплексии дилхоҳ* бо ёрии хосиятҳои 1°—4° ба таври элементарӣ муқаррар карда мешаванд.

Фарқи ду адади комплексии $z_1 = (x_1, y_1)$ ва $z_2 = (x_2, y_2)$ адади комплексии z-и намуди

$$z = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \tag{7.3}$$

мебошад. Инро санҷидан осон аст.

Ҳосили тақсими ду адади комплексии $z_1 = (x_1, y_1)$ *ва* $z_2 = (x_2, y_2)$*-и нобаробари нуль гуфта чунин адади комплексии* z*-ро меноманд, ки ҳангоми онро ба* z_2 *зарб кардан* z_1 *ҳосил мешавад.* Бо ёрии хосиятҳои 5°—8° муқаррар кардан осон аст, ки адади комплексии z-и намуди

$$z = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \tag{7.4}$$

ягонагии ҳосили тақсими ду адади комплексии номбурдаро ифода мекунад.

Ададе, ки ба намуди ҷуфти $(0, 1)$ навишта мешавад ва бо ҳарфи i ишорат мешавад, дар амалҳои ададҳои комплексӣ роли махсус мебозад. Ин ҷуфтро бо худаш зарб карда (яъне, ба квадрат бардошта), дар асоси таърифи ҳосили зарби ададҳои комплексӣ, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1, \quad \text{яъне } i^2 = -1.$$

Инро ба эътибор гирифта, мо адади комплексии дилхоҳи $z = (x, y)$-ро ба намуди зерин навишта метавонем:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + iy.$$

Мо минбаъд навишти $z = x + iy$-ро барои адади комплексии $z = (x, y)$ васеъ истифода мекунем. Ин навишт ва ба сифати зарбкунанда муоина кардани i, ки квадрааш ба -1 баробар аст, имконият медиҳад, ки амалҳои ададҳои комплексӣ мисли амалҳои бисьёраъзогиҳои алгебравӣ ичро карда шаванд.

Адади комплексии $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$*-ро нисбат ба адади комплексии* $z = (x, y) = x + iy$ *адади комплексии пайваста* меноманд.

---

* Чунон ки барои ададҳои ҳақиқӣ ичро шуда буд (ба п. 3 § 2 боби 2 нигр.), ҳамон тавр ичро карда мешавад.

Адади комплексӣ фақат дар ҳамон маврид баробари нуль мешавад, ки агар адади комплексии ба он пайваста баробари нуль бошад, чунки баробариҳои $x = 0$, $y = 0$ ба баробариҳои $x = 0$, $-y = 0$ баробарқувва мебошанд.

Барои ба таври геометрӣ тасвир кардани ададҳои комплексӣ аз системаи координатаҳои росткунҷагии декартӣ истифода кардан бехтар аст. Дар айни ҳол, адади комплексии $z = (x, y)$ ё бо нуқтаи M-и координатаҳояш (x, y), ё бо вектори $\overrightarrow{OM}$, ки аз ибтидои координатаҳо ба нуқтаи M равон аст, тасвир карда мешавад.

Дар ин тарзи тасвир ҷамъ ва тарҳи ададҳои комплексӣ ба ҷамъ ва тарҳи векторҳои ба онҳо мувофиқ оварда мешавад (ин аз формулаҳои (7.1)) ва (7.3) фаҳмо аст).

Агар дар қатори системаи координатаҳои декартӣ системаи координатаҳои қутбӣ муоина шавад, ки қутб дар ибтидои системаи декартӣ O воқеъ бошаду тири қутбӣ қад-қади самти мусбати тири Ox равон бошад, онгоҳ координатаҳои декартии (x, y) ва координатаҳои қутбии (ρ, θ)-и нуқтаи дилхоҳи M, чунон ки маълум аст, бо формулаҳои зерин алоқаманд мебошанд: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad \theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \text{ ҳангоми } x > 0 \text{ будан,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi\, sgn\, y \text{ ҳангоми } x < 0 \text{ будан,} \\ \dfrac{\pi}{2}\, sgn\, y \text{ ҳангоми } x = 0 \text{ будан.} \end{cases} \tag{7.5}$$

Формулаҳои (7.5) моро ба *шакли тригонометрии* навишти адади комплексии $z = (x, y)$ меоранд:

$$z = (x, y) = x + iy = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{7.6}$$

Дар шакли тригонометрии навишти (7.6) адади ρ *модуль* ва кунҷи θ *аргументи* адади комплексӣ номида мешавад. Аргументи θ ғайриякқимата муайян мебошад: ба ҷои қимати θ қимати $0 + 2\pi n$ (дар ин ҷо $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)-ро гирифтан мумкин аст.

Амалҳои зарб ва таксими ададҳои комплексиро дар шакли тригонометрии навишташон иҷро кардан қулайтар аст.

Бигзор ду адади комплексии дилхоҳ дода шуда бошад:

$$z_1 = (x_1, y_1) = (\rho\cos\theta_1, \rho\sin\theta_1) \text{ ва } z_2 = (x_2, y_2) = (\rho_2\cos\theta_2, \rho\sin\theta_2).$$

Онгоҳ, мувофиқи таърифи зарб (дар асоси формулаи (7.2)), ҳосили зарби ин ададҳо чунин намуд дорад:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1) =$$
$$= (\rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \rho_1\rho_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2,\ \rho_1\rho_2 \cos\theta_1, \sin\theta_2 +$$
$$+ \rho_1\rho_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2) = [(\rho_1\rho_2)\cos(\theta_1+\theta_2),\ (\rho_1\rho_2)\sin(\theta_1+\theta_2)]. \quad (7.7)$$

Ҳамин тавр аз формулаи (7.4) хулоса мебарояд, ки ҳосили тақсим $\frac{z_1}{z_2}$-и ду ададӣ комплексии $z_1 = (x_1,\ y_1) = (\rho_1 \cos\theta_1,\ \rho_2 \sin\theta_1)$ ва $z_2 = (x_2,\ y_2) = (\rho_2 \cos\theta_2,\ \rho_2 \sin\theta_2)$ чунин намуд дорад:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cos(\theta_1 - \theta_2),\ \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]. \quad (7.8)$$

Аз формулаҳои (7.7) ва (7.8) хулоса мебарояд, ки *ҳангоми зарб кардани ду ададӣ комплексӣ модулҳои онҳо зарб ва аргументҳояшон ҷамъ карда мешаванд (ҳангоми тақсими ду ададӣ комплексӣ модулҳои онҳо тақсим ва аргументҳояшон тарҳ карда мешаванд).* Ин хосият ба мавриди зарби ададҳои комплексии шумораашон охирноки дилхоҳ пай дар пай татбиқ карда мешавад. Аз ҷумла, агар n-то ададҳои комплексии баробар ба якдигар зарб карда шаванд (яъне, агар ададӣ комплексӣ ба дараҷаи n бардошта шавад), онгоҳ

$$(\rho \cos\theta,\ \rho \sin\theta)^n = (\rho^n \cos\theta n,\ \rho^n \sin\theta n). \quad (7.9)$$

Аз формулаи (7.9) ҳангоми $\rho = 1$ будан *формулаи Муаврро*** ҳосил мекунем:

$$(\cos\theta,\ \sin\theta)^n = (\cos\theta n,\ \sin\theta n). \quad (7.10)$$

Формулаи (7.10)-ро ин тавр ҳам навиштан мумкин аст:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos\theta n + i \sin\theta n. \quad (7.11)$$

Дар хотима қайд мекунем, ки ададӣ комплексии ба шакли тригонометрӣ навишташуда фақат дар ҳамон маврид баробари нуль мешавад, ки агар модули он баробари нуль бошад. Аз ин ҷо ва аз он, ки ҳангоми зарби ададҳои комплексӣ модулҳои онҳо ба якдигар зарб карда мешаванд, чунин хулоса мебарояд: *ҳосили зарби якчанд ададҳои комплексӣ фақат дар ҳамон маврид баробари нуль мешавад, ки агар ақаллан яке аз ҳамзарбшавандаҳо баробари нуль бошад.*

---

* Дар ин ҳолат фарз карда мешавад, ки ададӣ комплексии z_2 нобаробари нуль аст, яъне $\rho_2 \neq 0$.

** А. де Муавр — математики англис, миллаташ француз (1667—1754).

§ 2. Бисьёраъзогиҳои алгебравӣ

1. Ифодаи намуди

$$f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n \qquad (7.12)$$

бисьёраъзогии алгебравии дараҷаи n-ум номида мешавад, дар ҷо $z = (x, y) = x + iy$ адади комплексии тағьирёбанда, c_0, c_1, ..., c_n — баъзе ададҳои комплексии доимӣ, ки адади якумаш аз нуль тафовут дорад. Чунон ки маълум аст, бисьёраъзогии алгебравии дилхоҳи дараҷаи n-умро ба бисьёраъзогии алгебравии дигари дараҷааш аз n баланд набудагӣ «бо тарзи сутунча» тақсим кардан мумкин аст. Бо ҳамин усул мо ба тасдиқоти зерин меоем: *ду бисьёраъзогии $f(z)$ ва $\varphi(z)$ чи хеле ки бошанду дараҷаи $\varphi(z)$ аз дараҷаи $f(z)$ баланд набошад, баробарии*

$$f(z) = \varphi(z) \cdot q(z) + r(z) \qquad (7.13)$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо $q(z)$ ва $r(z)$ бисьёраъзогиҳо буда, бар замми ин дараҷаи $q(z)$ ба фарқи дараҷаҳои бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ баробар аст ва дараҷаи $r(z)$ аз дараҷаи $\varphi(z)$ паст мебошад.

Доир ба бисьёраъзогиҳои дар баробарии (7.13) дучоршудаи $f(z)$, $\varphi(z)$, $q(z)$ ва $\varphi(z)$ одатан терминҳои комилан фаҳмои «тақсимшаванда», «тақсимкунанда», «ҳосили тақсим» ва «бақия» истифода карда мешаванд.

Мегӯянд, ки бисьёраъзогии $f(z)$ ба бисьёраъзогии $\varphi(z)$ тақсим мешавад, агар дар формулаи (7.13), ки ба воситаи тақсими сутунчагӣ ҳосил шудааст, бақия $r(z) = 0$ бошад.

Барои доимии комплексии дилхоҳро бисьёраъзогии дараҷаи нулӣ номидан шарт мегузорем. Онгоҳ комилан фаҳмост, ки *бисьёраъзогии дилхоҳ ба бисьёраъзогии дараҷаи нулии аз нуль тафовутдошта тақсим мешавад.* Масъалаи ба бисьёраъзогии дараҷаи якуми $(z - b)$ тақсимшавии бисьёраъзогии $f(z)$-ро меомӯзем.

Таъриф. Адади комплексии b-ро решаи бисьёраъзогии $f(z)$ меномем, агар $f(b)$ баробари нуль бошад.

Теоремаи 7.1. *Бисьёраъзогии дараҷаи нулии $f(z)$ ба дуаъзогии $(z - b)$ фақат дар ҳамон мавриди тақсим мешавад, ки агар b решаи бисьёраъзогии $f(z)$ бошад.*

Исбот. Барои бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z) = (z - b)$ формулаи (7.13)-ро менависем. Азбаски дар ин формула дараҷаи бақия $r(z)$ *бояд* аз дараҷаи тақсимкунанда $\varphi(z) = z - b$ паст бошад, пас $r(z)$ *бисьёраъзогии дараҷаи нулӣ* мебошад, яъне $r(z) = c = \text{const}$. Ҳамин тариқ, формулаи (7.13) чунин намуд мегирад:

$$f(z) = (z - b) \cdot q(z) + c. \qquad (7.14)$$

Дар формулаи (7.14) $z = b$ фарз карда, меёбем, ки $c = f(b)$ мебошад. Мувофиқи таъриф $f(z)$ ба $z - b$ фақат дар ҳамон мавриде тақсим мешавад, ки агар дар формулаи (7.14) бақия $c = f(b)$ баробари нуль бошад, яъне фақат дар ҳамон мавриде, ки b решаи $f(z)$ бошад. Теорема исбот шуд.

2. Чунин савол пайдо шуданаш табиист: оё ҳаргуна бисьёраъзогии алгебравӣ реша дорад? Теоремаи асосии алгебра* ба ин савол ҷавоб медиҳад: *ҳаргуна бисьёраъзогии дараҷаи ғайринулӣ ақаллан якто реша дорад.*

Ба ин теорема асос карда, исбот мекунем, ки бисьёраъзогии алгебравии дараҷаи n-ум айнан n-то реша** дорад. Вокеан, бигзор $f(z)$ бисьёраъзогии дараҷаи n-ум бошад. Мувофиқи теоремаи асосии алгебра $f(z)$ ақаллан якто решаи b^1 дорад, яъне барои $f(z)$ навишти

$$f(z) = (z - b_1) f_1(z) \qquad (7.15')$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо бисьёраъзогии дараҷаи $(n-1)$-ум бо $f_1(z)$ ишорат шудааст. Агар $n \neq 1$ бошад, онгоҳ, мувофиқи теоремаи асосии алгебра $f(z)$ ақаллан якто решаи b_1 дорад, яъне барои $f_1(z)$ навишти

$$f_1(z) = (z - b_2) f_2(z) \qquad (7.15^2)$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо бисьёраъзогии дараҷаи $(n-2)$-юм бо $f_2(z)$ ишорат шудааст. Муҳокимаронихои номбурдаро такрор карда, мо навиштҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$f_2(z) = (z - b_3) f_3(z), \qquad (7.15^3)$$

. . . . . .

$$f_{n-1}(z) = (z - b_n) f_n(z). \qquad (7.15^n)$$

Дар навишти охирин бисьёраъзогии дараҷаи нулӣ бо $f_n(z)$ ишорат шудааст, яъне $f_n(z) = c = \text{const}$. Баробариҳои (7.15′) ва (7.15^n)-ро ба якдигар муқоиса карда ва $f_n(z) = c$ буданашро ба эътибор гирифта, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$f(z) = (z - b_1)(z - b_2) \ldots (z - b_n)\, c. \qquad (7.16)$$

Бояд қайд кард, ки доимии комплексии c ба нуль баробар нест, чунки дар мавриди баръакс бисьёраъзогии $f(z)$ айниятан

---

* Исботи ин теорема дар китобчаи «Функции комплексной переменной» дода шудааст.

** Албатта, мо дар ин ҳолат $n > 0$ мепиндорем.

ба нуль баробар мешуд ва бисьёраъзогии дараҷаи n-ум* намебуд.

Аз баробарии (7.16) маълум аст, ки $f(b_1) = f(b_2) = \ldots = f(b_n) = 0$, яъне ҳар яки ададҳои $b_1, b_2, \ldots, b_n$ решаи бисьёраъзогии $f(z)$ мебошад. Ғайр аз он, аз (7.16) маълум аст, ки ададе комплексии b-и аз $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тафовутдошта чи хеле ки бошад, ададе комплексии $f(b)$ ба нуль баробар нест, чунки ҳосили зарби якчанд ададҳои комплексӣ фақат дар ҳамон маврид баробари нуль аст, ки агар ақаллан яке аз ҳамзарбшавандаҳо баробари нуль бошад (ба § 1 нигар.). Ҳамин тариқ, бисьёраъзогии $f(z)$ расо n-то реша дорад, яъне $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Баробарии (7.16) ба зарбкунандаҳо чудокунии бисьёраъзогии $f(z)$-ро ифода мекунад. Агар намуди бисьёраъзогии $f(z)$ (7.12) маълум бошад, мо аз баробарии (7.16) доимии c-ро муайян карда метавонем. Дар баробариҳои (7.16) ва (7.12) коэффициентҳои назди z^n-ро муқоиса карда, $c = c_0$**-ро ҳосил мекунем.

Бисьёраъзогии (7.12), ки дар он $c_0 = 1$ мебошад, *бисьёраъзогии мувофиқ овардашуда* номида мешавад. Барои бисьёраъзогии мувофиқ овардашуда формулаи (7.16) чунин намуд дорад:

$$f(z) = (z - b_1)(z - b_2) \ldots (z - b_n). \qquad (7.17)$$

Формулаи (7.17)-ро бо формулаи (7.12) (ҳангоми $c_0 = 1$ будан) муқоиса карда, муносибатҳои зеринро ҳосил мекучем:

$$c = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$
$$c_2 = +(b_1b_2 + b_1b_3 + \ldots + b_{n-1}b_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n = (-1)^n b_1b_2 \ldots b_n.$$

Минбаъд, агар қайди махсус набошад, мо *бисьёраъзогиҳои мувофиқ овардашударо* муоина мекунем.

---

* Мо дар ин ҷо тасдиқоти зеринро истифода мекунем: *агар бисьёраъзогии* $f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$ *айниятан ба нуль баробар бошад, онгоҳ ҳама коэффициентҳои он баробари нуль мебошанд.* Воқеан, агар $f(z) \equiv 0$ бошад, онгоҳ ҳангоми $z = 0$ будан $a_n = 0$ аст. Лекин онгоҳ $f(z) \equiv z[a_0z^{n-1} + a_1z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}] \equiv 0$. Азбаски $z \not\equiv 0$ аст, пас ифодаи даруни қавсҳои квадратӣ айниятан ба нуль баробар мебошад, аз ин ҷо ҳангоми $z = 0$ будан $a_{n-1} = 0$ мешавад. Ҳамин гуна муҳокимаронии давом дода, исбот мекунем, ки ҳама коэффициентҳо баробари нуль мебошанд.

** Мо дар ин ҷо чунин тасдиқотро истифода мекунем: *агар ду бисьёраъзогии* $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ ва $b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n$ *айниятан ба якдигар баробар бошанд, онгоҳ* $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$ $a_n = b_n$ *аст.* Барои исбот ба фарқи бисьёраъзогиҳои номбурда тасдиқоти повараки якуми ҳамин саҳифаро татбиқ намудан кифоя аст.

§ 3. Решаҳои каратии бисьёраъзогӣ. Аломатҳои каратии реша

Дар байни решаҳои бисьёраъзогии $f(z)$ *решаҳои мувофиқ* шуданашон мумкин аст. Бигзор $a, b, ..., c$ решаҳои гуногуни бисьёраъзогии мувофиқ овардашудаи $f(z)$ бошанд. Онгоҳ дар асоси натиҷаҳои параграфи гузаштаи ба $f(z)$ оид чудокунии

$$f(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta} \dots (z-c)^{\gamma} \qquad (7.18)$$

дуруст аст.

Дар ин чудокунӣ $\alpha, \beta, ..., \gamma$ баъзе ададҳои бутуне мебошанд, ки ҳар кадомашон аз воҳид хурд намебошанд, дар айни ҳол $\alpha + \beta + ... + \gamma = n$, дар ин ҷо n — дараҷаи бисьёраъзогии $f(z)$.

Агар барои бисьёраъзогии $f(z)$ чудокунии (7.18) дуруст бошад, онгоҳ мегӯянд, ки адади комплексии a решаи $f(z)$-и каратиаш α, адади комплексии b решаи $f(z)$-и каратиаш β, ..., адади комплексии c решаи $f(z)$-и каратиаш γ мебошад.

Решаеро, ки каратиаш ба воҳид баробар аст, решаи я к к а р а т а ва решаеро, ки каратиаш аз воҳид калон аст, р е ш а и к а р а т й меноманд.

Таърифи баробарқувваи дигари решаи каратиаш додашударо баён кардан мумкин аст: *адади комплексии a решаи бисьёраъзогии $f(z)$-и каратиаш α номида мешавад, агар барои $f(z)$ навишти*

$$f(z) = (z-a)^{\alpha}\varphi(z), \text{ дар ин ҷо } \varphi(a) \neq 0 \qquad (7.19)$$

дуруст бошад. Барои он ки адади комплексии a решаи бисьёраъзогии $f(z)$-и каратиаш α бошад, шартҳои зарурӣ ва кифоягӣ вуҷуд доранд. Нишон додани ҳамин шартҳо мақсади мост.

Бисьёраъзогии $f'(z)$-ро, ки дар натиҷаи аз рӯи z ба таври формалӣ дифференсиронидани $f(z)$ ҳосил шудааст, ҳосилаи бисьёраъзогии $f(z)$ меномем.* Пеш аз ҳама тасдиқоти зеринро исбот мекунем.

Л е м м а и 1. *Агар адади комплексии a решаи каратиаш α-и бисьёраъзогии $f(z)$ бошад, онгоҳ ин адади a решаи каратиаш $(\alpha-1)$-и бисьёраъзогии $f'(z)$ мебошад.*

Қ а й д. Аз ҷумла, ҳангоми $\alpha = 1$ будан адади a, ки решаи якқаратаи $f(z)$ мебошад, решаи $f'(z)$ намешавад.

И с б о т. Мувофиқи шарти ба $f(z)$ оид навишти (7.19) дуруст аст. Формулаи (7.19)-ро дифференсиронида, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$f'(z) = \alpha(z-a)^{\alpha-1}\varphi(z) + (z-a)^{\alpha}\varphi'(z),$$

ё

$$f'(z) = (z-a)^{\alpha-1}\varphi_1(z), \qquad (7.20)$$

---

* Аз рӯи z дифференсиронидани $f(z)$ мисли он, ки тағьирьёбандаи ҳақиқӣ буд, иҷро карда мешавад.

дар ин ҷо

$$\varphi_1(z) = \alpha\varphi(z) + (z - a)\,\varphi'(z).$$

Азбаски $\varphi_1(a) = \alpha\varphi(a) \neq 0$ аст, пас навишти (7.20) чунин маъно дорад, ки адади a решаи каратиаш $(\alpha - 1)$-и бисьёраъзогии $f'(z)$ мебошад. Теорема исбот шуд.

Теореми 7.2. Барои он ки адади комплексии a решаи каратиаш α-и бисьёраъзогии $f(z)$ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро шаванд:

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(\alpha-1)}(a) = 0,\ f^{(\alpha)}(a) \neq 0. \qquad (7.21)$$

Исбот. 1) Шарти зарурӣ. Бигзор a решаи каратиаш α-и бисьёраъзогии $f(z)$ бошад. Онгоҳ, мувофиқи леммаи 1, ин адади a решаи каратиаш $(\alpha - 1)$-и бисьёраъзогии $f'(z)$, решаи каратиаш $(\alpha - 2)$-и бисьёраъзогии $f^{(2)}(z)$, ..., решаи каратиаш воҳиди бисьёраъзогии $f^{(\alpha-1)}(z)$ мебошад, яъне

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(\alpha-1)}(a) = 0.$$

Мувофиқи қайди леммаи 1 адади a решаи бисьёраъзогии $f^{(\alpha)}(z)$ мебошад, яъне $f^{(\alpha)}(a) \neq 0$. Иҷрошавии шарти (7.21) исбот шуд.

2) Шарти кифоягӣ. Бигзор шарти (7.21) иҷро шавад. Исбот кардан лозим аст, ки адади a решаи каратиаш α-и бисьёраъзогии $f(z)$ мебошад. Азбаски $f^{(\alpha-1)}(a) = 0$ мебошад, пас адади a решаи бисьёраъзогии $f^{(\alpha-1)}(z)$-и *каратиаш аз як паст набудагӣ* мебошад. Пас, дар асоси леммаи 1 адади a решаи бисьёраъзогии $f^{(\alpha-2)}(z)$-и *каратиаш аз ду паст набудагӣ*, решаи бисьёраъзогии $f^{(\alpha-3)}(z)$-и *каратиаш аз се паст набудагӣ*, ..., решаи бисьёраъзогии $f(z)$-и *каратиаш аз α паст набудагӣ* мебошад.

Акнун исбот кардан лозим аст, ки каратии решаи a-и бисьёраъзогии $f(z)$ аз α баланд нест. Агар ин каратӣ аз α баланд мебуд, онгоҳ, мувофиқи леммаи 1, каратии решаи a-и бисьёраъзогии $f^{(\alpha-1)}(z)$ аз як баланд мешуд, аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки a решаи $f^{(\alpha)}(z)$ мебошад, яъне $f^{(\alpha)}(a) = 0$, ки ин ба шарти охирини (7.21) мухолиф аст. Теорема исбот шуд.

§ 4. Принципи чудокунии решаҳои каратӣ. Алгоритми Евклид

1. Принципи чудокунии решаҳои каратӣ. Мо дар наздамон чунин мақсад мегузорем: барои бисьёраъзогии додашудаи $f(z)$, ки, умуман, соҳиби решаҳои каратӣ мебошад, чунин бисьёраъзогии $F(z)$ ёфта шавад, ки *ҳамон решаҳои $f(z)$-ро соҳиб асту лекин ҳамаашон ба як каратӣ мебошанд*. Барои ба ин мақсад ноил шудан баъзе мафҳумҳои навро муоина мекунем.

Таърифи 1. *Тақсимкунандаи ду бисьёраъзогии* $f(z)$ *ва* $\varphi(z)$ *гуфта бисьёраъзогии дилхоҳеро меноманд, ки ҳар ду бисьёраъзогии* $f(z)$ *ва* $\varphi(z)$ *ба он тақсим мешаванд.*

Таърифи 2. *Тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогии* $f(z)$ ва $\varphi(z)$ *гуфта чунин тақсимкунандаи онҳоро меноманд, ки он ба тақсимкунандаи дигари дилхоҳи ин ду бисьёраъзогӣ тақсим мешавад.*

Тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогии $f(z)$ ва $\varphi(z)$-ро бо символи $D[f(z), \varphi(z)]$ ишорат мекунем.

Аз таърифи тақсимкунандаи умумии калонтарин хулоса мебарояд, ки он бо саҳеҳии то зарбкунандаи доимии дилхоҳ муайян аст.

Ба мақсаде, ки дар ибтидои ҳамин параграф дар наздамон гузошта будем, баргашта, мо акнун бо осонӣ санҷида метавонем, ки бисьёраъзогии матлуби $F(z)$ чунин намуд дорад:

$$F(z) = \frac{f(z)}{D[f(z), f'(z)]}. \qquad (7.22)$$

Воқеан, бигзор

$$f(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta} \dots (z-c)^{\nu} \qquad (7.23)$$

бошад, ки дар ин ҷо $a, b, \dots, c$ решаҳои *гуногун* мебошанд. Онгоҳ, мувофиқи теоремаи 7.2, навишти

$$f'(z) = (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1} \dots (z-c)^{\nu-1}\psi(z) \qquad (7.24)$$

барои бисьёраъзогии $f'(z)$ дуруст аст, ки дар ин ҷо $\psi(z)$ ба зарбкунандаҳои $(z-a)$, $(z-b)$, ..., $(z-c)$ соҳиб нест.

Аз муқоисаи формулаҳои (7.23) ва (7.24) маълум мешавад, ки

$$D[f(z), f'(z)] = (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1} \dots (z-c)^{\nu-1}. \qquad (7.25)$$

Аз муқоисаи формулаҳои (7.23) ва (7.25), дар навбати худ, маълум мешавад, ки бисьёраъзогии $F(z)$, ки бо формулаи (7.22) муайян аст, чунин намуд дорад:

$$F(z) = (z-a)(z-b) \dots (z-c). \qquad (7.26)$$

Бо ҳамин исбот карда шуд, ки бисьёраъзогии $F(z)$, ки бо формулаи (7.22) муайян аст, ҳамон решаҳои бисьёраъзогии $f(z)$-ро соҳиб аст, лекин ҳамаашон ба як каратӣ мебошанд.

Ҳамин тариқ, масъалаи ҷудо кардани решаҳои каратӣ ба масъалаи аз рӯи бисьёраъзогии додашудаи $f(z)$ ташкил додани бисьёраъзогии $F(z)$ (ки бо формулаи (7.22) муайян аст) меорад.

Азбаски дар махраҷи формулаи (7.22) тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогии $f(z)$ ва $f'(z)$ вуҷуд дорад,

пас масъалаи ёфтани тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогӣ ба миён меояд. Ба ҳалли ин масъала мегузарем.

2. Ёфтани тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогӣ (алгоритми Евклид). Бигзор ду бисьёраъзогии комилан дилхоҳи $f(z)$ ва $\varphi(z)$ дода шуда бошад ва тақсимкунандаи умумии калонтарини онҳоро ёфтан лозим бошад. Ба умумиятии масъала маҳдуд нашуда, чунин мепиндорем, ки дараҷаи $\varphi(z)$ аз дараҷаи $f(z)$ баланд нест. Онгоҳ, $f(z)$-ро ба $\varphi(z)$ бо усули сутунча тақсим карда, мо формулаи (7.13)-ро ҳосил мекунем (ба § 2 ниг.):

$$f(z) = \varphi(z)\, q(z) + r_1(z), \qquad (7.21^1)$$

ки дар он, чунон ки дар § 2 муқаррар карда шуд, дараҷаи бақияи $r_1(z)$ аз дараҷаи тақсимкунандаи $\varphi(z)$ хурд аст. Ин ба мо ҳуқуқ медиҳад, ки $\varphi(z)$-ро ба $r_1(z)$ боз бо усули сутунча тақсим кунем. Дар натиҷаи ин тақсим мо формулаи ба формулаи (7.13) монандро ҳосил менамоем:

$$\varphi(z) = r_1(z)\, q_1(z) + r_2(z), \qquad (7.27^2)$$

ки дар он дараҷаи бақияи $r_2(z)$ аз дараҷаи тақсимкунандаи $r_1(z)$ паст аст.

Баъд мо $r_1(z)$-ро ба $r_2(z)$ бо усули сутунча тақсим карда ва ҳамин тавр тақсимро давом дода, дар натиҷа чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$r_1(z) = r_2(z)\, q_2(z) + r_3(z), \qquad (7.27^3)$$

. . . . . .

$$r_{k-2}(z) = r_{k-1}(z)\, q_{k-1}(z) + r_k(z). \qquad (7.27^k)$$

Азбаски дар вақти ҳар як тақсими сутунчагӣ дараҷаи бақия *ақаллан ба андозаи як воҳид* паст мешавад, пас процесси баёншударо k маротиба такрор карда, дар даври $(k+1)$-ум бақияи ба нуль баробар*, яъне

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)\, q_k(z) \qquad (7.27^{k+1})$$

-ро ҳосил мекунем. Исбот менамоем, ки бақияи охирини аз нуль тафовутдоштаи $r_k(z)$ *тақсимкунандаи умумии калонтарини* бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ мебошад.

Ду тасдиқоти зеринро исбот кардан кифоя аст:

---

* Агар бақия дар яке аз звеноҳои фосилавии процесси баёншуда ба нул баробар нашавад, онгоҳ баъди ягон даври k-ум бақияи $r_k(z)$-и дараҷаи нулиро ҳосил мекунем. Онгоҳ бақияи минбаъда, яъне $r_{k+1}(z)$ бануль баробар мешавад (чунки бисьёраъзогии дилхоҳ ба бисьёраъзогии дараҷаи нул тақсим мешавад).

1) бисьёраъзогиҳои $f(r)$ ва $\varphi(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешаванд (ин чунин маъно дорад, ки $r_k(z)$ яке аз тақсимкунандаҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ мебошад);

2) бисьёраъзогии $r_k(z)$ ба тақсимкунандаи дилхоҳ $r_0(z)$-и бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ тақсим мешавад (ин чунин маъно дорад, ки $r_k(z)$ *тақсимкунандаи умумии калонтарини* бисьёраъзогиҳои номбурда мебошад).

Барои исботи тасдиқоти 1) қайд мекунем, ки, дар асоси (7.27^{k+1}), $r_{k-1}(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешавад ва, онгоҳ, дар асоси (7.27^7), $r_{k-2}(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешавад... Ҳамин тавр, аз рӯи силсилаи баробариҳои (7.27^1)—(7.27^k) ба пеш амал карда, мо, ниҳоят, исбот мекунем, ки $\varphi(z)$ ва $f(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешаванд.

Акнун тасдиқоти 2)-ро исбот мекунем. Бигзор $r_0(z)$ тақсимкунандаи дилхоҳи бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ бошад. Дар асоси баробарии (7.27^1) $r_1(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад ва, онгоҳ, дар асоси баробарии (7.27^2), $r_2(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад, дар асоси баробарии (7.27^3), $r_3(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад... Ҳамин тавр, аз рӯи силсилаи баробариҳои (7.27^1)—(7.27^k) ба ақиб амал карда, мо, ниҳоят, исбот мекунем, ки $r_k(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад.

Бо ҳамин мо процесси баёншудаи ёфтани тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогиро асоснок кардем. Ин процессро одатан *алгоритми Евклид* меноманд.

Мисол. Тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогии

$$f(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 \text{ ва } \varphi(z) = 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2$$

-ро меёбем.* $f(z)$-ро ба $\varphi(z)$ бо усули сутунча тақсим мекунем:

$$\begin{array}{l|l} -z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 & 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2 \\ \hline z^4 - \frac{3}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}z & \frac{1}{4}z - \frac{1}{8} \\ \hline -\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}z + 1 & \\ -\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{4} & \\ \hline \frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{3}{4} & \end{array}$$

Баъд мо мебоист $\varphi(z)$-ро *ба* бисьёраъзогии боқимонда таксим мекардем. Аммо, азбаски тақсимкунандаи умумии калонтарин бо *саҳеҳии то зарбкунандаи доимии дилхоҳ*

* Дар ин ҷо $\varphi(z) = f'(z)$.

пас масъалаи ёфтани тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогӣ ба миён меояд. Ба ҳалли ин масъала мегузарем.

2. Ёфтани тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогӣ (алгоритми Евклид). Бигзор ду бисьёраъзогии комилан дилхоҳи $f(z)$ ва $\varphi(z)$ дода шуда бошад ва тақсимкунандаи умумии калонтарини онҳоро ёфтан лозим бошад. Ба умумиятии масъала маҳдуд нашуда, чунин мепиндорем, ки дараҷаи $\varphi(z)$ аз дараҷаи $f(z)$ баланд нест. Онгоҳ, $f(z)$-ро ба $\varphi(z)$ бо усули сутунча тақсим карда, мо формулаи (7.13)-ро ҳосил мекунем (ба § 2 нигар.):

$$f(z) = \varphi(z)\, q(z) + r_1(z), \qquad (7.21^1)$$

ки дар он, чунон ки дар § 2 муқаррар карда шуд, дараҷаи бақияи $r_1(z)$ аз дараҷаи тақсимкунандаи $\varphi(z)$ хурд аст. Ин ба мо ҳуқуқ медиҳад, ки $\varphi(z)$-ро ба $r_1(z)$ боз бо усули сутунча тақсим кунем. Дар натиҷаи ин тақсим мо формулаи ба формулаи (7.13) монандро ҳосил менамоем:

$$\varphi(z) = r_1(z)\, q_1(z) + r_2(z), \qquad (7.27^2)$$

ки дар он дараҷаи бақияи $r_2(z)$ аз дараҷаи тақсимкунандаи $r_1(z)$ паст аст.

Баъд мо $r_1(z)$-ро ба $r_2(z)$ бо усули сутунча тақсим карда ва ҳамин тавр тақсимро давом дода, дар натиҷа чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$r_1(z) = r_2(z)\, q_2(z) + r_3(z), \qquad (7.27^3)$$

. . . . . .

$$r_{k-2}(z) = r_{k-1}(z)\, q_{k-1}(z) + r_k(z). \qquad (7.27^k)$$

Азбаски дар вақти ҳар як тақсими сутунчагӣ дараҷаи бақия *ақаллан ба андозаи як воҳид* паст мешавад, пас процесси баёншударо k маротиба такрор карда, дар даври $(k+1)$-ум бақияи ба нуль баробар*, яъне

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)\, q_k(z) \qquad (7.27^{k+1})$$

-ро ҳосил мекунем. Исбот менамоем, ки бақияи охирини аз нуль тафовутдоштаи $r_k(z)$ *тақсимкунандаи умумии калонтарини* бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ мебошад.

Ду тасдиқоти зеринро исбот кардан кифоя аст:

---

* Агар бақия дар яке аз звеноҳои фосилавии процесси баёншуда ба нул баробар нашавад, онгоҳ баъди ягон даври k-ум бақияи $r_k(z)$-и дараҷаи нулиро ҳосил мекунем. Онгоҳ бақияи минбаъда, яъне $r_{k+1}(z)$ бануль баробар мешавад (чунки бисьёраъзогии дилхоҳ ба бисьёраъзогии дараҷаи нул тақсим мешавад).

1) бисьёраъзогиҳои $f(r)$ ва $\varphi(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешаванд (ин чунин маъно дорад, ки $r_k(z)$ яке аз тақсимкунандаҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ мебошад);

2) бисьёраъзогии $r_k(z)$ ба тақсимкунандаи дилхоҳ $r_0(z)$-и бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ тақсим мешавад (ин чунин маъно дорад, ки $r_k(z)$ *тақсимкунандаи умумии калонтарини* бисьёраъзогиҳои номбурда мебошад).

Барои исботи тасдиқоти 1) қайд мекунем, ки, дар асоси (7.27^{k+1}), $r_{k-1}(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешавад ва, онгоҳ, дар асоси (7.27^7), $r_{k-2}(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешавад... Ҳамин тавр, аз рӯи силсилаи баробариҳои (7.27^1)—(7.27^k) ба пеш амал карда, мо, ниҳоят, исбот мекунем, ки $\varphi(z)$ ва $f(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешаванд.

Акнун тасдиқоти 2)-ро исбот мекунем. Бигзор $r_0(z)$ тақсимкунандаи дилхоҳи бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ бошад. Дар асоси баробарии (7.27^1) $r_1(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад ва, онгоҳ, дар асоси баробарии (7.27^2), $r_2(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад, дар асоси баробарии (7.27^3), $r_3(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад... Ҳамин тавр, аз рӯи силсилаи баробариҳои (7.27^1)—(7.27^k) ба ақиб амал карда, мо, ниҳоят, исбот мекунем, ки $r_k(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад.

Бо ҳамин мо процесси баёншудаи ёфтани тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогиро асоснок кардем. Ин процессро одатан *алгоритми Евклид* меноманд.

Мисол. Тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогии

$$f(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 \text{ ва } \varphi(z) = 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2$$

-ро меёбем.* $f(z)$-ро ба $\varphi(z)$ бо усули сутунча тақсим мекунем:

$$\begin{array}{l|l}
-z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 & 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2 \\
\underline{z^4 - \frac{3}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}z} & \frac{1}{4}z - \frac{1}{8} \\
-\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}z + 1 & \\
\underline{-\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{4}} & \\
\frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{3}{4} &
\end{array}$$

Баъд мо мебоист $\varphi(z)$-ро *ба бисьёраъзогии* боқимонда тақсим мекардем. Аммо, азбаски тақсимкунандаи умумии калонтарин бо *саҳеҳии то зарбкунандаи доимии дилхоҳ*

---

* Дар ин ҷо $\varphi(z) = f'(z)$.

пас масъалаи ёфтани тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогӣ ба миён меояд. Ба ҳалли ин масъала мегузарем.

2. Ёфтани тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогӣ (алгоритми Евклид). Бигзор ду бисьёраъзогии комилан дилхохи $f(z)$ ва $\varphi(z)$ дода шуда бошад ва тақсимкунандаи умумии калонтарини онҳоро ёфтан лозим бошад. Ба умумиятии масъала маҳдуд нашуда, чунин мепиндорем, ки дараҷаи $\varphi(z)$ аз дараҷаи $f(z)$ баланд нест. Онгоҳ, $f(z)$-ро ба $\varphi(z)$ бо усули сутунча тақсим карда, мо формулаи (7.13)-ро ҳосил мекунем (ба § 2 ниг.):

$$f(z) = \varphi(z)\, q(z) + r_1(z), \qquad (7.21^1)$$

ки дар он, чунон ки дар § 2 муқаррар карда шуд, дараҷаи бақияи $r_1(z)$ аз дараҷаи тақсимкунандаи $\varphi(z)$ хурд аст. Ин ба мо ҳуқуқ медиҳад, ки $\varphi(z)$-ро ба $r_1(z)$ боз бо усули сутунча тақсим кунем. Дар натиҷаи ин тақсим мо формулаи ба формулаи (7.13) монандро ҳосил менамоем:

$$\varphi(z) = r_1(z)\, q_1(z) + r_2(z), \qquad (7.27^2)$$

ки дар он дараҷаи бақияи $r_2(z)$ аз дараҷаи тақсимкунандаи $r_1(z)$ паст аст.

Баъд мо $r_1(z)$-ро ба $r_2(z)$ бо усули сутунча тақсим карда ва ҳамин тавр тақсимро давом дода, дар натиҷа чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$r_1(z) = r_2(z)\, q_2(z) + r_3(z), \qquad (7.27^3)$$

. . . . . .

$$r_{k-2}(z) = r_{k-1}(z)\, q_{k-1}(z) + r_k(z). \qquad (7.27^k)$$

Азбаски дар вақти ҳар як тақсими сутунчагӣ дараҷаи бақия *ақаллан ба андозаи як воҳид* паст мешавад, пас процесси баёншударо k маротиба такрор карда, дар даври $(k+1)$-ум бақияи ба нуль баробар*, яъне

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)\, q_k(z) \qquad (7.27^{k+1})$$

-ро ҳосил мекунем. Исбот менамоем, ки бақияи охирини аз нуль тафовутдоштаи $r_k(z)$ *тақсимкунандаи умумии калонтарини* бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ мебошад.

Ду тасдиқоти зеринро исбот кардан кифоя аст:

---

* Агар бақия дар яке аз звеноҳои фосилавии процесси баёншуда ба нул баробар нашавад, онгоҳ баъди ягон даври k-ум бақияи $r_k(z)$-и дараҷаи нулиро ҳосил мекунем. Онгоҳ бақияи минбаъда, яъне $r_{k+1}(z)$ бануль баробар мешавад (чунки бисьёраъзогии дилхоҳ ба бисьёраъзогии дараҷаи нул тақсим мешавад).

1) бисьёраъзогиҳои $f(r)$ ва $\varphi(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешаванд (ин чунин маъно дорад, ки $r_k(z)$ яке аз тақсимкунандаҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ мебошад);

2) бисьёраъзогии $r_k(z)$ ба тақсимкунандаи дилхоҳ $r_0(z)$-и бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ тақсим мешавад (ин чунин маъно дорад, ки $r_k(z)$ *тақсимкунандаи умумии калонтарини* бисьёраъзогиҳои номбурда мебошад).

Барои исботи тасдиқоти 1) қайд мекунем, ки, дар асоси (7.27^{k+1}), $r_{k-1}(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешавад ва, онгоҳ, дар асоси (7.27^7), $r_{k-2}(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешавад... Ҳамин тавр, аз рӯи силсилаи баробариҳои (7.27^1)—(7.27^k) ба пеш амал карда, мо, ниҳоят, исбот мекунем, ки $\varphi(z)$ ва $f(z)$ ба $r_k(z)$ тақсим мешаванд.

Акнун тасдиқоти 2)-ро исбот мекунем. Бигзор $r_0(z)$ тақсимкунандаи дилхоҳи бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ бошад. Дар асоси баробарии (7.27^1) $r_1(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад ва, онгоҳ, дар асоси баробарии (7.27^2), $r_2(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад, дар асоси баробарии (7.27^3), $r_3(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад... Ҳамин тавр, аз рӯи силсилаи баробариҳои (7.27^1)—(7.27^k) ба ақиб амал карда, мо, ниҳоят, исбот мекунем, ки $r_k(z)$ ба $r_0(z)$ тақсим мешавад.

Бо ҳамин мо процесси баёншудаи ёфтани тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогиро асоснок кардем. Ин процессро одатан *алгоритми Евклид* меноманд.

Мисол. Тақсимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогии

$$f(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 \text{ ва } \varphi(z) = 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2$$

-ро меёбем.* $f(z)$-ро ба $\varphi(z)$ бо усули сутунча тақсим мекунем:

$$\begin{array}{l|l} -z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 & 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2 \\ \hline z^4 - \frac{3}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}z & \frac{1}{4}z - \frac{1}{8} \\ \hline -\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}z + 1 & \\ -\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{4} & \\ \hline \frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{3}{4} & \end{array}$$

Баъд мо мебоист $\varphi(z)$-ро *ба бисьёраъзогии* боқимонда тақсим мекардем. Аммо, азбаски тақсимкунандаи умумии калонтарин бо *саҳеҳии то зарбкунандаи доимии дилхоҳ*

---

* Дар ин ҷо $\varphi(z) = f'(z)$.

муаян аст, пас бақияро ба 4/3 зарб карда ва $4(z)$-ро ба бисьёраъзогии $z^2 - z + 1$ тақсим кадан бехтар аст, Дар натича:

$$\begin{array}{l|l} 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2 & z^2 - z + 1 \\ \underline{4z^3 - 4z^2 + 4z} & \overline{4z - 2} \\ -2z^2 + 2z - 2 & \\ \underline{-2z^2 + 2z - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

бақия ба нуль баробар аст.

Ҳамин тариқ, тақсимкунандаи умумии калонтарини бисьёраъзогихои $f(z)$ ва $\varphi(z)$ ба $z^2 - z + 1$ баробар аст, яъне

$$D[f(z), \varphi(z)] = z^2 - z + 1.$$

Қайди 1. Мо дар мисоли ҳалкардаамон барои соддапии баён коэффициентҳои бисьёраъзогиҳои $f(z)$ ва $\varphi(z)$-ро *ададҳои ҳақиқӣ* гирифтем. Ҳамон методика барои бисьёраъзогиҳои коэффициентҳояшон ададҳои комплексӣ низ дуруст аст.

Қайди 2. Бояд қайд кард, ки то ҳозир методҳои ададии устувори ҳисоб кардани решаҳои бисьёраъзогиҳои дилхоҳи сахехнашон додашуда амалан вуҷуд надоранд. Аммо, дар бораи мавкеи решаи матлуби бисьёраъзогӣ дар ягон сегменти тири ададӣ маълумоти пешакӣ дошта, мо ин решаро бо саҳеҳии даркорӣ бо ёрии методҳои дар § 1 боби 12 баёншуда ҳисоб карда метавонем.

§ 5. Ба суммаи касрҳои соддатарин ҷудо кардани касри рационалии дурусти коэффициентҳояш ададҳои комплексӣ

Нисбати ду бисьёраъзогии алгебравиро *касри рационалӣ* меноманд. Касри рационалӣ *касри дуруст* номида мешавад, агар дараҷаи бисьёраъзогии сурат аз дараҷаи бисьёраъзогии махраҷ хурд бошад. Дар мавриди баръакс касри рационалиро *касри нодуруст* меноманд. Чун қоида, мо касри рационалиро бо символи $\frac{P(z)}{Q(z)}$ ишорат менамоем, дар ин ҷо $P(z)$ ва $Q(z)$ — бисьёраъзогиҳои алгебравӣ.

Лемма 2. Бигзор $\frac{P(z)}{Q(z)}$ *касри рационалии дурусте бошад, ки махраҷаш решаи каратиаш* α*-и адади комплексӣ мебошад, яъне*

$$Q(z) = (z - a)^{\alpha} \varphi(z), \text{ дар ин ҷо } \varphi(a) \neq 0. \qquad (7.28)$$

Онгоҳ барои ин каср навишти зерин дуруст аст:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{(z-a)^{\alpha}} + \frac{\psi(z)}{(z-a)^{\alpha-k}\varphi(z)}, \qquad (7.29)$$

дар ин ҷо A *— доимии комплексӣ, ки ба* $\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}$ *баробар аст,* k *— адади бутуни* $\geqslant 1$, $\psi(z)$ *— ягон бисёраъзогӣ, бар замми ин касри охирини қисми рости* (7.29) *каср дуруст мебошад.*

Исбот. Адади доимии намуди $A = \dfrac{P(a)^*}{\varphi(a)}$-ро бо A ишорат карда, фарқи

$$\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{A}{(z-a)^{\alpha}}$$

-ро муоина мекунем. Ин фарқро ба махраҷи умумӣ меорем:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{A}{(z-a)^{\alpha}} = \frac{P(z) - A\varphi(z)}{(z-a)^{\alpha}\varphi(z)} = \frac{\phi(z)}{(z-a)^{\alpha}\varphi(z)}, \qquad (7.30)$$

дар ин ҷо бисьёраъзогии намуди $\Phi(z) = P(z) - A\varphi(z)$ ба воситаи $\Phi(z)$ ишорат шудааст. Азбаски $\Phi(a) = P(a) - A\varphi(a) = 0$ аст, пас адади комплексии *а решаи бисьёраъзогии* $\Phi(z)$-и каратиаш $k \geqslant 1$ мебошад, яъне

$$\Phi(z) = (z-a)^k \psi(z), \text{ дар ин ҷо } \psi(a) \neq 0. \qquad (7.31)$$

Навишти (7.31)-ро ба формулаи (7.30) мегузорем:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{A}{(z-a)^{\alpha}} = \frac{\psi(z)}{(z-a)^{\alpha-\kappa}\varphi(z)}. \qquad (7.32)$$

Бо ҳамин формулаи (7.29) исбот шуд. Акнун боварӣ ҳосил кардан лозим, ки касри қисми рости (7.32) каср дуруст мебошад. Ин аз он бевосита бармеояд, ки *фарқи ду касри дуруст касри дуруст мебошад.***

Леммаи 2 исбот шуд.

Аз леммаи 2 теоремаи аҷоиби зерин бевосита бармеояд, ки он факти ба суммаи касрҳои соддатарин ҷудошавандагии касри рационалии дурустро муқаррар мекунад.

Теоремаи 7.3. Бигзор $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *касри рационалии дурусте бошад, ки махраҷаш чунин намуд дорад:*

---

* Адади A сохиби маъно аст, чунки дар асоси (7.28) $\varphi(a) \neq 0$.

** Фарқи касрҳои дурустро ба махраҷи умумӣ оварда, ба ин бовар кардан осон аст.

$$Q(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta} \dots (z-c)^{\gamma}. \qquad (7.33)$$

Онгоҳ барои ин каср навишти зерин дуруст аст:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(z-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha}}{(z-a)} +$$
$$+ \frac{B_1}{(z-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(z-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta}}{(z-b)} +$$
$$+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots +$$
$$+ \frac{C_1}{(z-c)^{\gamma}} + \frac{C_2}{(z-c)^{\gamma-1}} + \dots + \frac{C_{\gamma}}{(z-c)}. \qquad (7.34)$$

Дар ин формула $A_1, A_2, \dots, A_{\alpha}, B_1, B_2, \dots, B_{\beta}, \dots, C_1, C_2, \dots, C_{\gamma}$ *баъзе ададҳои комплексии доимие мебошанд, ки як қисми онҳо ба нуль баробар шуда метавонанд.*

Исбот. Аввал ба касри $\frac{P(z)}{Q(z)}$ леммаи 2-ро татбиқ мекунем. Дар айни ҳол ба назар мегирем, ки адади комплексии a решаи $Q(z)$-и каратиаш α мебошад. Дар ин ҳолат баробарии (7.32)-ро ҳосил мекунем. Ба қисми рости ин баробарӣ боз леммаи 2-ро татбиқ мекунем; дар айни ҳол ба эътибор мегирем, ки ё адади комплексии a решаи махраҷи қисми рости номбурдаи каратиаш $\alpha - k$ (ҳангоми $\alpha - k > 0$ будан) мебошад, ё, дар асоси чудокунии (7.33), адади комплексии b решаи ин махраҷи каратиаш β (ҳангоми $\alpha - k = 0$ будан) мебошад. Дар натиҷа баробариеро ҳосил мекунем, ки он ба (7.32) монанд аст ва ба қисми рости он леммаи 2-ро боз татбиқ кардан мумкин аст. Ҳамин муҳокимарониро давом дода (яъне леммаи 2-ро ба ҳамаи решаҳои $Q(z)$ пай дар пай татбиқ намуда), барои касри $\frac{P(z)}{Q(z)}$ навишти (7.34)-ро ҳосил менамоем. Теорема исбот шуд.

Қайд. Азбаски дар леммаи 2 адади k аз 1 калон шуда метавонад ва бисьёраъзогии $P(z)$ соҳиби решаҳое шуда метавонад, ки онҳо бо решаҳои $Q(z)$ мувофиқанд, пас дар формулаи (7.34) як қисми коэффициентҳои $A_1, \dots, A_{\alpha}, B_1, \dots, B_{\beta}, \dots, C_1, \dots, C_{\gamma}$ ба нуль баробар шуда метавонанд.

§ 6. Ба ҳосили зарби зарбкунандаҳои ададҳои ҳақиқии мувофиқ оварданашаванда чудо кардани бисьёраъзогии алгебравии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ

Мо дар параграфи гузашта ба суммаи касрҳои соддатарин чудо кардани касри рационалии коэффициентҳояш ададҳои

комплексиро омӯхтем. Акнун мо мақсади комил дорем, ки касри рационалии коэффициентҳояш ададҳои *ҳақиқиро* ба суммаи касрҳои соддатарини коэффициентҳояшон ададҳои *ҳақиқӣ* чудо намоем.

Барои ба ин мақсад ноил шудан мо бояд пеш аз ҳама ба ҳосили зарби зарбкунандаҳои ададҳои ҳақиқии мувофиқ овардан ашаванда чудо кардани бисьёраъзогии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқиро ёбем. Ҳамин параграф ба ҳамин мақсад бахшида шудааст.

Бигзор

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_n \qquad (7.35)$$

бисьёраъзогии алгебравии мувофиқ овардашудаи коэффициентҳояш ададҳои *ҳақиқии* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ бошад.

Пеш аз ҳама теоремаи зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 7.4. *Агар адади комплексии a решаи бисьёраъзогии алгебравии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ* (7.35) *бошад, онгоҳ адади комплексии** *ба он пайвастаи* $\bar{a}$ *ҳам решаи бисьёраъзогии* (7.35) *мешавад. Ба замми он, агар решаи комплексии a каратии* λ *дошта бошад, онгоҳ решаи* $\bar{a}$ *ҳам каратии* λ *дорад.*

Исбот. Пеш аз ҳама тасдиқоти ёрирасони зеринро исбот мекунем: агар $f(z)$ бисьёраъзогии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ бошад, онгоҳ бузургии комплексии $f(\bar{z})$ нисбат ба бузургии $f(z)$ бузургии пайваста мебошад. Исбот кардан кифоя аст, ки барои номери дилхоҳи n бузургии $(\bar{z})^n$ нисбат ба бузургии z^n бузургии пайваста мебошад. Ин ифода бевосита аз шакли тригонометрии адади комплексӣ бармеояд. Вокеан, бигзор

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

бошад. Онгоҳ

$$\bar{z} = \rho[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)].$$

Дар асоси формулаи Муавр (7.11)

$$z^n = \rho^n(\cos\theta n + i\sin\theta n),$$

$$(\bar{z})^n = \rho^n[\cos(-\theta n) + i\sin(-\theta n)] = \rho^n(\cos\theta n - i\sin\theta n).$$

Аз муқоисаи ду формулаи охирин натича мебарояд, ки $(\bar{z})^n$ бузургии нисбат ба z^n пайваста мебошад. Тасдиқоти ёрирасон исбот шуд.

Бигзор акнун адади комплексии a решаи бисьёраъзогии $f(z)$ бошад, яъне $f(a) = 0$. Мо дар § 1-уми ҳамин боб муқаррар кардем, ки адади комплексӣ фақат дар ҳамон маврид баробари

---

* Минбаъд мо адади комплексии ба адади комплексии додашуда пайвастаро бо ҳамон символи адади додашуда, лекин дар болояш хатча ишорат мекунем.

нуль мешавад, ки агар адади ба он пайваста баробари нуль бошад. Пас, аз баробарии $f(a) = 0$ ва аз тасдиқоти ёрирасони исботшуда натиҷа мебарояд, ки $f(\bar{a}) = 0$ аст, яъне адади a решаи $f(z)$ мебошад.

Бигзор каратии решаи a ба λ баробар бошад ва он дода шуда бошад. Онгоҳ дар асоси теоремаи 7.2

$$f(a) = f'(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = f^{(\lambda-1)}(a) = 0;\ f^{(\lambda)}(a) \neq 0. \quad (7.36)$$

Азбаски адади комплексӣ фақат дар мавриди ба нуль баробар будани адади ба он пайваста ба нуль баробар мешавад, пас аз тасдиқоти ёрирасони исботшуда ва аз муносибати (7.36) муносибати зерин бармеояд:*

$$f(\bar{a}) = f'(a) = f^{(2)}(\bar{a}) = f^{(\lambda-1)}(\bar{a}) = 0,\ f^{(\lambda)}(\bar{a}) \neq 0. \quad (7.37)$$

Дар асоси теоремаи 7.2 муносибати (7.37) чунин маъно дорад, ки адади $\bar{a}$ решаи $f(z)$-и каратиаш λ мебошад. Теоремаи 7.4 исбот шуд.

Теоремаи 7.4-ро истифода карда, ба ҳосили зарби зарбкунандаҳои ададҳои ҳақиқии мувофиқ оварданашаванда ҷудо кардани бисьёраъзогии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқиро** меёбем. Бигзор бисьёраъзогии $f(x)$ ба решаҳои $b_1, b_2, \ldots, b_n$-и каратиашон мувофиқан $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ва ба ҷуфти решаҳои ба таври комплексӣ пайвастаи a_1 ва $\bar{a}_1$, a_2 ва $\bar{a}_2$, ..., a_n ва $\bar{a}_n$ (-и каратиашон мувофиқан ба ҳар як ҷуфт $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) соҳиб бошад.

Онгоҳ мувофиқи натиҷаҳои § 3, бисьёраъзогии $f(x)$-ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$f(x) = (x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}(x-a_1)^{\lambda_1}(x-\bar{a}_1)^{\lambda_1}\times \times(x-a_2)^{\lambda_2}(x-\bar{a}_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}(x-\bar{a}_n)^{\lambda_n} \quad (7.38)$$

Қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми решаи a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$-ро мувофиқан бо u_k ва v_k ишорат мекунем, яъне бигзор $a_k = u_k + iv_k$ бошад. Онгоҳ $\bar{a}_k = u_k - iv_k$. Ифодаи зеринро барои k-и дилхоҳ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ табдил медиҳем:

$$(x-a_k)^{\lambda_k}(x-\bar{a}_k)^{\lambda_k} = [(x-a_k)(x-\bar{a}_k)]^{\lambda_k} = \\ = [(x-u_k-iv_k)(x-u_k+iv_k)]^{\lambda_k} = [(x-u_k)^2+v_k^2]^{\lambda_k} = \\ = (x^2+p_kx+q_k)^{\lambda_k}, \quad (7.39)$$

дар ин ҷо

$$p_k = -2u_k, \quad q_k = u_k^2 + v_k^2.$$

---

* Дар айни ҳол мо ба эътибор мегирем, ки ҳосилаи бисьёраъзогии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ бисьёраъзогиест, ки коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ мебошанд.

** Минбаъд мо бо бисьёраъзогиҳои тағьирьёбандадоре кордор мешавем, ки *фақат қиматҳои ададҳои ҳақиқиро* қабул менамоянд. Бинобар ин барои ишорати он на ҳарфи z, балки ҳарфи x-ро истифода кардан беҳтар аст.

(7.39)-ро ба (7.38) гузошта, ифодаи ба ҳосили зарби зарбкунандаҳои ададҳои ҳақиқии мувофиқ оварданашаванда чудо кардани бисьёраъзогии $f(x)$-ро ҳосил менамоем:

$$f(x) = (x - b_1)^{\gamma_1}(x - b_2)^{\gamma_2}\ldots(x - b_m)^{\gamma_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \times (x^2 + p_2x + q_2)^{\lambda_2}\ldots(x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}. \quad (7.40)$$

Мо ба чунин хулоса меоем: бисьёраъзогии $f(x)$-и коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ ба ҳосили зарб (7.40)-и зарбкунандаҳои ададҳои ҳақиқии мувофиқ оварданашаванда чудо мешавад; дар айни ҳол зарбкунандаҳое, ки ба решаҳои ададҳои ҳақиқӣ мувофиқанд, намуди дуаъзогиҳои дарачадореро доранд, ки ба каратияти решаҳо баробаранд ва зарбкунандаҳое, ки ба чуфти решаҳои комплексӣ мувофиқанд, намуди сеаъзогихои квадратии дарачадореро доранд, ки ба каратияти ин чуфти решаҳо баробаранд.

§ 7. Ба суммаи касрҳои соддатарини коэффициентҳояшон ададҳои ҳақиқӣ чудо кардани касри рационалии дурусти коэффициентҳояш ададҳои комплексӣ

Ду тасдиқоти зерин мавқеъ дорад.

Л е м м а и 3. *Бигзор* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *касри рационалии дурусти коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ бошад, ки махраҷаш аз ададии ҳақиқии a-и решаи каратнаш α иборат аст, яъне*

$$Q(x) = (x - a)^{\alpha}\varphi(x), \text{ дар ин ҷо } \varphi(a) \neq 0.$$

Онгоҳ барои ин каср навишти зерин дуруст аст:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}. \quad (7.41)$$

Дар ин навишт A ададн ҳақиқии ба $A = \dfrac{P(a)}{\varphi(a)}$ *баробар мебошад, k — ададн бутуни* $\geqslant 1$ *ва* $\psi(x)$ *ягон бисьёраъзогиест, ки коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ мебошанд, дар айни ҳол касри охирини қисми рости* (7.41) *касри дуруст мебошад.* Леммаи 3 исботро наметалабад, чунки он бевосита аз леммаи 2 бармеояд. Фақат чумлаи зеринро ба эътибор гирифтан лозим аст: азбаски $P(x)$ ва $Q(x)$ бисьёраъзогиҳои коэффициентҳояшон ададҳои ҳақиқӣ мебошанд ва a решаи ҳақиқӣ (ададӣ) мебошад, пас бисьёраъзогиҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ҳам коэффициентҳои ададҳои ҳақиқӣ доранд ва, пас, доимии $A = \dfrac{P(a)}{\varphi(a)}$ ададн ҳақиқӣ мебошад.

Леммаи 4. *Бигзор* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *касри рационалии дурусти коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ бошад, ки махраҷи он* $Q(x)$ *соҳиби ададҳои комплексии* $a = u + iv$ *ва* $\bar{a} = u - iv$*-и решаҳояш ба* λ *каратӣ мебошад, яъне*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^{\lambda}\varphi(x), \text{ дар ин ҷо } \varphi(a) \neq 0, \varphi(\bar{a}) \neq 0, \quad p = -2u,\ q = u^2 + v^2. \tag{7.42}$$

Онгоҳ барои ин каср навишти зерин дуруст аст:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{\lambda}} + \frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-k}\varphi(x)}. \tag{7.43}$$

Дар ин формула M *ва* N *доимиҳои ададҳояш ҳақиқӣ,* k *— адади бутуни* $\geqslant 1$ *ва* $\psi(x)$ *ягон бисьёраъзогии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ; дар айни ҳол касри охирини қисми рости* (7.43) *касри дуруст мебошад.*

Исботи леммаи 4. Қисми ҳақикии бузургии комплексии A-ро бо символи $\mathrm{Re}[A]$ ва қисми мавҳуми бузургии комплексии A-ро бо символи $\mathrm{Im}[A]$ ишорат мекунем. Фарз мекунем, ки*

$$M = \frac{1}{v}\,\mathrm{Im}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right],\quad N = \mathrm{Re}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right] - \frac{u}{v}\,\mathrm{Im}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right].$$

Санҷидан осон аст, ки M ва N-ҳои номбурда ҳалҳои муодилаи

$$P(a) - (Ma + N)\varphi(a) = 0 \tag{7.44}$$

мебошанд. Воқеан, ин муодиларо ба $\varphi(a)$ тақсим карда, ва қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳумро баробари нуль карда, ду баробарии

$$Mu + N = \mathrm{Re}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right],$$
$$Mv = \mathrm{Im}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right]$$

-ро ҳосил мекунем, ки M ва N аз онҳо муайян карда мешаванд. Акнун фарқи

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{\lambda}}$$

-ро муоина мекунем. Ин фарқро ба махраҷи умумӣ меорем:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2+px+q)^{k}} = \frac{P(x) - (Mx + N)\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^{\lambda}\varphi(x)} = \frac{\Phi(x)}{(x^2 + px + q)^{\lambda}\varphi(x)}. \tag{7.45}$$

---

* Дар асоси (7.42) $\varphi(a) \neq 0$, пас нисбати $P(a)/\varphi(a)$-ро муоина кардан мумкин аст.

Дар ин ҷо бисьёраъзогии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқии намуди $P(x) - (Mx + N)\varphi(x)$-ро бо $\Phi(x)$ ишорат мекунем, яъне $\Phi(x) = P(x) - (Mx + N)\varphi(x)$. Баробарии (7.44) барои тасдиқи ҷумлаи зерин имконият медиҳад: ададн комплексии a ва, пас, дар асоси теоремаи 7.4, ададн ба он пайвастаи $\bar{a}$ решаҳои бисьёраъзогии $\Phi(x)$-и ягон каратии $k \geqslant 1$ мебошанд. Дар ингуна маврид барои бисьёраъзогии навишти

$$\Phi(x) = (x^2 + px + q)^k \psi(x) \qquad (7.46)$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо $\psi(x)$ ягон бисьёраъзогии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқиест, ки ба сифати решаҳо ададҳои a ва $\bar{a}$-ро соҳиб нест. Формулаи (7.46)-ро ба формулаи (7.45) гузошта, формулаи (7.43)-ро ҳосил менамоем. Касри дуруст будани касри охирини қисми рости (7.43) бо он тасдиқ мешавад, ки ин каср ба фарқи ду касри дуруст баробар аст. Теоремаи 4 исбот шуд.

Ба касри $P(x)/Q(x)$ (ба ҳама решаҳои махраҷ) пай дар пай татбиқ кардани леммаҳои 3 ва 4 моро ба омӯзиши тасдиқоти ачоиби зерин меоранд.

Теоремаи 7.5. *Бигзор* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *касри рационалии дурусти коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ бошад, ки махраҷаш чунин намуд дорад*:

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1}(x - b_2)^{\beta_2} \dots (x - b_m)^{\beta_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}.$$

Онгоҳ барои ин каср ба суммаи касрҳои соддатарин ҷудокунии зерин дуруст аст:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1^{(1)}}{(x-b_1)} + \frac{B_2^{(1)}}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)}}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{B_1^{(m)}}{(x-b_m)} + \frac{B_2^{(m)}}{(x-b_m)^2} + \frac{B_{\beta_m}^{(m)}}{(x-b_m)^{\beta_m}}$$
$$+ \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{M_2^{(1)}x + N_2^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x + N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2 + px + q_1)^{\lambda_1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{M_1^{(n)}x + N_1^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)} + \frac{M_2^{(n)}x + N_2^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x + N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}} \qquad (7.47)$$

Дар ин ҷудокунӣ $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots, B_m^{(m)}, M_1^{(1)}, N_1^{(1)}, \dots, M_{\lambda_n}^{(n)}, N_{\lambda_n}^{(n)}$ *баъзе доимиҳои ададҳои ҳақиқие мебошанд, ки як қисми онҳо баробари нуль шуда метавонанд.*

Қайд. Барои ба таври конкретӣ муайян кардани доимиҳои номбурда баробарии (7.47)-ро ба махраҷи умумӣ овардан

ва коэффициентҳои назди дараҷаҳои якхелаи x-и суратҳоро муқоиса кардан лозим аст.

Мисолҳо ва шарҳи онҳо.

1°. Касри дурусти соддатаринро

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^3(x^2+x+1)}$$

ба сумма ҷудо карда шавад. Азбаски сеаъзогии квадратии x^2+x+1 соҳиби решаҳои комплексӣ мебошад ва ба ҳамин боварӣ ҳосил карда, мувофиқи теоремаи 7.5 касрро ин тавр ба сумма ҷудо мекунем:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^3(x^2+x+1)}=\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^3}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}. \quad (7.48)$$

Баробарии (7.48)-ро ба махраҷи умумӣ меорем:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^3(x^2+x+1)}=\frac{B_1(x^1-1)+B_2(x^2+x+1)+(Mx+N)(x^2-2x+1)}{(x-1)^3(x^2+x+1)},$$

Коэффициентҳои назди x^0, x^1, x^2, x^3-и суратро муқоиса карда, системаи муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:*

$$\left.\begin{aligned} B_1+M&=2,\\ B_2+N-2M&=4\\ B_2+M-2N&=1,\\ -B_1+B_2+N&=2.\end{aligned}\right\}$$

Ин системаро ҳал карда, меёбем, ки $B_1=2$, $B_2=3$, $M=0$, $N=1$. Комилан чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^3(x^2+x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{x^2+x+1}. \quad (7.49)$$

Ҳамин методи ҷустуҷӯи ба сумма ҷудокунии касри рационалии дуруст *методи коэффициентҳои номуайян* номида мешавад. Ҳамин метод моро ҳама вақт ба мақсад мерасонад; ҳал доштани системаи муодилаҳоеро, ки дар натиҷаи татбиқи ин метод ҳосил шудаанд, исбот кардан лозим нест — теоремаи 7.5 ҳал доштани системаро тасдиқ мекунад.

2°. Бо як мисоли дигар татбиқи методи коэффициентҳои номуайянро нишон медиҳем. Ба сумма ҷудо кардани касри дурусти

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

---

* Дар айни ҳол мо тасдиқоти дар поварақи **-и сах. 216 баёншударо истифода мекунем.

талаб карда мешавад. Азбаски сеаъзогии квадратии x^2+1 решаҳои комплексӣ дорад, пас, мувофиқи теоремаи 7.5, касрро ба намуди зерин ҷудо мекунем:

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{B}{x-2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Ин баробариро ба махраҷи умумӣ меорем ва баъди ин суратҳоро муқоиса менамоем. Чунин ифода ҳосил мешавад:

$$3x^4+2x^3+3x^2-1=B(x^4+2x^2+1)+$$
$$+(M_1x+N_1)(x^3-2x^2+x-2)+(M_2x+N_2)(x-2).$$

Коэффициентҳои назди x^0, x^1, x^2, x^3, x^4-ро муқоиса карда, системаи муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\left.\begin{aligned} B+M_1&=3,\\ N_1-2M_1&=2,\\ 2B+M_1-2N_1+M_2&=3,\\ N_1-2M_1+N_2-2M_2&=0,\\ B-2N_1-2N_2&=-1. \end{aligned}\right\}$$

Ин системаро ҳал карда, меёбем, ки $B=3$, $M_1=0$, $N_1=2$, $M_2=1$, $N_2=0$. Дар охир чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}. \qquad (7.50)$$

3°. Чунон ки аз мисолҳои ҳалшуда намоён аст, методи коэффициентҳои номуайян хеле дуру дароз аст. Бинобар ин дар ҳамон мавридҳое, ки имконпазир аст, методи соддатари ҷустуҷӯи коэффициентҳоро (ҳангоми ба суммаи касрҳои соддатар ҷудо кардани касри рационалии дуруст) ёфтан лозим аст. Бигзор махраҷ $Q(x)$-и касри рационалии дурусти $P(x)/Q(x)$ ба решаи адади ҳақиқии a-и каратиаш α соҳиб бошад. Онгоҳ, ҳангоми ба суммаи касрҳои соддатарин ҷудо кардани касри $P(x)/Q(x)$ дар байни он касрҳо касри

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} \qquad (7.51)$$

вуҷуд хоҳад дошт. Методи соддатари ҳисоб кардани коэффициенти A-и назди ин касри соддатаринро нишон медиҳем. Мо **дар асоси леммаи 3** ва формулаи (7.41) бовар мекунем, ки коэффициенти A ба ифодаи зерин баробар аст:

$$A=P(a)/\varphi(a),\ \text{дар ин ҷо}\ \varphi(x)=Q(x)/(x-a)^\alpha.$$

Мо ба қоидаи зерин меорем: *барои ҳисоб кардани коэффициенти A-и назди касри соддатарини* (7.51), *ки ба решаи ададаш ҳақиқии a-и бисёраъзогии $Q(x)$-и каратиаш α мувофиқ аст, дар махраҷи касри* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *қавси $(x-a)^\alpha$-ро хат зада, дар ифодаи боқимонда $x=a$ фарз кардан лозим аст.*

Ин усули ёфтани коэффициенти A-ро одатан *методи хатзадан* меноманд. Ин усул фақат барои ҳисоб кардани коэффициентҳои назди *дараҷаҳои калони касрҳои соддатарин, ки ба решаҳои (ададҳояш) ҳақиқии $Q(x)$ мувофиқанд, татбиқ дорад.*

Методи хатзадан хусусан дар мавридҳое, ки махраҷ $Q(x)$ фақат *решаҳои ҳақиқии яккаратӣ* дорад, яъне дар мавриди $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ будан самарабахш мебошад. Онгоҳ, чунон ки мо медонем, чудокунии

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A}{x - a_2} + \dots + \frac{A_k}{x - a_k} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

дуруст аст, ки ҳама коэффициентҳои онро бо методи хатзадан ҳисоб кардан мумкин аст. Барои ҳисоб кардани коэффициенти A_k дар махраҷи касри $P(x)/Q(x)$ кавси $(x - a_k)$-ро хат задан ва дар ифодаи боқимонда $x = a_k$ фарз кардан лозим аст.

Мисол. Чудокунии касри

$$\frac{x + 1}{(x - 1)x(x - 2)} \tag{7.52}$$

ёфта шавад. Мувофиқи теоремаи 7.5

$$\frac{x + 1}{(x - 1)x(x - 2)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x - 2}.$$

Барои ёфтани A_1 дар ифодаи (7.52) кавси $(x - 1)$-ро хат мезанем ва дар ифодаи боқимонда $x = 1$ мегирем. Меёбем, ки $A_1 = -2$. Ҳамин тавр меёбем, ки $A_2 = 1/2$, $A_3 = 3/2$.

Дар хотима чунин чудокуниро ҳосил мекунем:

$$\frac{x + 1}{(x - 1)x(x - 2)} = \frac{-2}{x - 1} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2(x - 2)}. \tag{7.53}$$

§ 8. Проблемаи интегронидани касрҳои рационалӣ

Акнун мо тайёр ҳастем, ки проблемаи интегронидани касрҳои рационалии коэффициентҳояшон (ададҳои) ҳақиқиро ба намуди умумӣ ҳал намоем.

Пеш аз ҳама қайд мекунем, ки ин проблема ба проблемаи интегронидани *фақат касрҳои рационалии дуруст* меорад, чунки ҳаргуна касри рационалии нодурустро (ба воситаи ба махраҷ бо «усули сутунча» тақсим кардани сурат) ба намуди суммаи бисъёраъзогии алгебравӣ ва касри рационалии дуруст навиштан мумкин аст.

Мисол.

$$\frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2} = (x^2 - 2x) + \frac{4x + 1}{x^2 + x + 2},$$

чунки

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 + 1 & x^2 + x + 2 \\ \hline x^4 + x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x \\ \hline -2x^3 - 2x^2 + 1 & \\ -2x^3 - 2x^2 - 4x & \\ \hline \text{бақия } 1 + 4x & \end{array}$$

Мо бисьёраъзогиро интегронида метавонем (ба хотир меорем, ки интегрални номуайян аз бисьёраъзогй ба бисьёраъзогие баробар аст, ки дарачахояш назар ба дарачахои он як воҳид баландтар (калонтар) аст). Акнун интегронидани касри рационалии дурустро меомузем. Дар асоси теоремаи 7.5 проблемаи интегронидани касри рационалии дуруст ба интегронидани касрҳои соддатарини *чор намуди зерин* меорад:

$$\text{I. } \frac{B}{x-b},\quad \text{II. } \frac{B}{(x-b)^{\beta}},\quad \text{III. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)},\quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}. \tag{7.54}$$

Дар ин чо $\beta = 2, 3, \ldots$; $\lambda = 2, 3, \ldots$; B, M, N, b, p ва q — баъзе ададҳои ҳақиқӣ, ба замми ин сеаъзогии $x^2 + px + q$ решаҳои ҳақиқӣ надорад, яъне $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Исбот мекунем, ки ҳар яки чор касри номбурда интегронидашаванда мебошанд, яъне дар натичаи интегронидан функцияҳои элементарӣ ҳосил мешаванд.

Касрҳои намуди I ва II бо ёрии гузориши $t = x - b$ ба таври элементарӣ интегронида мешаванд, яъне

$$\int \frac{B}{x-b}dx = B\int \frac{dt}{t} = B\ln|t| + C = B\ln|x-b| + C, \tag{7.55}$$

$$\int \frac{B}{(x-b)^{\beta}}dx = B\int \frac{dt}{t^{\beta}} = -\frac{B}{(\beta-1)}\frac{1}{t^{\beta-1}} + C = \frac{-B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} + C. \tag{7.56}$$

Барои ҳисоб кардани интегрални касри намуди III сеаъзогии квадратиро ба намуди $(x^2 + px + q) = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})$ менависем ва $q - \frac{p^2}{4} > 0$ будани ашро ба эътибор гирифта, доимии ҳақиқии $a = +\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$-ро муоина мекунем. Бо ёрии гузориши $t = x + \frac{p}{2}$ интегралро ҳисоб мекунем:

$$\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)}dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\times$$

$$\times \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C. \qquad (7.57)$$

Акнун интеграли касри намуди IV-ро хисоб мекунем. Чунин ишоратхо: $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$-ро истифода ва интегралро хисоб мекунем:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^\lambda}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}.$$

Агар интегралхои

$$I = \int \frac{d\,(t2+a2)}{(t^2+a^2)^\lambda},\quad K_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+a2)^\lambda}.$$

хисоб карда шаванд, интегралхои болой хисоб карда хоханд шуд. Интеграли I ба таври элементарй хисоб карда мешавад:

$$I = -\frac{1}{(\lambda-1)}\frac{1}{(t^2+a2)^{\lambda-1}} + C = -\frac{1}{(\lambda-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + C.$$

Мо интеграли K_λ-ро дар мисоли 6-уми интихои § 2-и боби 6 хисоб карда будем. Мо дар ин чо барои ин интеграл формулаи рекуррентии (6.12)-ро хосил карда будем, ки он барои пай дар пай хисоб кардани K_λ (барои λ-и дилхохи баробари 2, 3, ...) имконият медихад. Дар асоси он

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Инак, мо интеграли хар чор касри соддатарини (7.54)-ро хисоб кардем ва исбот кардем, ки хар яки интегралхо ба *функцияхои элементарй* баробар мешаванд.* Бо хамин мо ба теореми зерин меоем, ки он проблемаи интегронидани касрхои рационалиро хал менамояд.

Теорема 7.6. *Харгуна касри рационалй дар натичаи интегронидан ба функцияхои элементарй баробар мешавад.*

---

* Аниктараш, ба воситаи логарифм, арктангенс ва функцияи рационалй ифода мешаванд.

Дар хотимаи ин параграф мо ба мисолҳои ҳисоб кардани интегралҳои номуайян аз касрҳои рационалӣ таваққуф менамоем. Интегралҳои номуайян аз се касреро, ки дар параграфи гузашта муоина кардем, яъне (7.49), (7.50) ва (7.53)-ро ҳисоб мекунем. Ҳар се формулаи номбурда ва, инчунин, формулаҳои (7.55), (7.56) ва (7.57)-ро истифода карда, интегралҳоро ҳисоб мекунем:

1. $$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx =$$

$$= \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

2. $$\int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{2\,dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$3\ln|x-2| + 2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= 3\ln|x-2| + 2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

3. $$\frac{x+1}{(x-1)x(x-2)}\,dx = \int \frac{-2}{x-1}\,dx + \int \frac{dx}{2x} + \int \frac{3}{2(x-2)}\,dx =$$

$$= -2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + C.$$

§ 9. Методи Остроградский

М. В. Остроградский* методи бозарофати ҷудо кардани *қисми рационалии* интеграли касри рационалии дурусти $P(x)/Q(x)$-ро пешниҳод карда буд.

Намуди интегралҳои чор касри соддатаринро (7.54)-ро таҳлил намуда, чунин хулоса баровардан мумкин аст:

1) Интегралҳои касрҳои намуди I ва III, ки махраҷашон мувофиқан аз дуаъзогӣ ва сеаъзогии дараҷаи якум иборатанд, *функцияҳои ғайрирационалӣ мебошанд* (онҳо ба логарифм ё арктангенс баробар мебошанд).

2) Интегралҳои касри намуди II, ки махраҷаш аз дуаъзогии дараҷааш $\beta > 1$ иборат аст, *касри рационалии дурусте мебошад, ки махраҷаш ба ҳамон дуаъзогии дараҷааш* $\beta - 1$ *баробар мебошад.*

---

* Михаил Васильевич Остроградский — математики рус (1801—1861).

3) Интегралӣ намуди IV, ки функцияи таҳтиинтегралиаш дар махраҷ сеаъзогии дараҷааш λ дорад, дар ҷамъбаст** *ба суммаи касрҳои рационалии дурусте баробар аст, ки махраҷашон ба ҳамон сеаъзогии дараҷааш* $\lambda - 1$ *баробаранд ва ба арктангенси интегралӣ* $\text{const} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)}$ *меоранд.*

Хулосаҳои 1), 2), 3) барои ёфтани ҷавоби чунин савол имконият медиҳанд: қисми рационалии ҳамаи интегралӣ касри дурусти $P(x)/Q(x)$, ки мо онро, ғайр аз он, касри ихтисорнашаванда мепиндорем, ба чӣ баробар аст? Бигзор махраҷ $Q(x)$ чунин намуд дошта бошад:

$$Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1} \dots (x-b_m)^{\beta_m} (x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1} \dots (x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}. \tag{7.58}$$

Онгоҳ қисми рационалии интегралӣ касри рационалии дурусти $P(x)/Q(x)$ ба суммаи касрҳои рационалии дурусте баробар аст, ки махраҷҳояшон мувофиқан ба

$$(x-b_1)^{\beta_1-1}, \dots, (x-b_m)^{\beta_m-1}, (x^2+p_1x+q_1)^{\lambda-1}, \dots$$
$$\dots, (x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n-1}$$

баробаранд. Қисми рационалии интегралӣ касри $P(x)/Q(x)$ касри рационалии дурусти $P_1(x)/Q_1(x)$ мебошад, ки махраҷаш $Q_1(x)$ чунин намуд дорад:

$$Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1-1} \dots (x-b_m)^{\beta_m-1} (x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1} \dots$$
$$\dots (x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n-1}. \tag{7.59}$$

Акнун суммаи ҳамон касрҳои соддатаринеро ҳисоб мекунем, ки интегралӣ онҳо ба функцияҳои ғайрирационалӣ баробаранд. Аз хулосаҳои 1) ва 3) натиҷа мебарояд, ки ин сумма ба касри рационалии дурусти $P_2(x)/Q_2(x)$ баробар аст, ки махраҷаш $Q_2(x)$ ба ифодаи зерин баробар мебошад:

$$Q_2(x) = (x-b_1) \dots (x-b_m)(x^2+p_1x+q_1) \dots (x^2+p_n+q_n) \tag{7.60}$$

Ҳамин тариқ, мо ба формулаи зерин меоем, ки онро М. В. Остроградский аввалин шуда ҳосил карда буд:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \tag{7.61}$$

Дар формулаи Остроградский бисьёраъзогиҳои $Q_1(x)$ ва $Q_2(x)$ бо формулаҳои (7.59) ва (7.60) муайян карда мешаванд ва онро *бе ёрии ба ҳосили зарби зарбкунандаҳои мувофиқ овардан ашаванда ҷудо кардани бисьёраъзогии* $Q(x)$ *ҳисоб кардан мумкин аст.*

** Бо эътирофи формулаи рекуррентии (6.12), ки дар интиҳои § 2-юми боби 6 ҳосил карда шуда буд.

Вокеан, дар асоси натичаи § 4 (ба формулаи (7.25) ниг.), бисьёраъзогии $Q_1(x)$ таксимкунандаи умумии калонтарини ду бисьёраъзогии $Q(x)$ ва $Q'(x)$-ро ифода мекунад ва онро бо ёрии алгоритми Евклид (ба § 4 ниг.) хисоб кардан мумкин аст.

Бисьёраъзогии $Q_2(x)$ дар асоси формулахои (7.58), (7.59) ва (7.60), хосили таксими $Q(x)/Q_1(x)$-ро ифода мекунад ва онро ба воситаи таксими $Q(x)$ ба $Q_1(x)$ бо «усули сутунча» хисоб кардан мумкин аст.

Акнун бисьёраъзогихои $P_1(x)$ ва $P_2(x)$-ро хисоб кардан лозим аст. Азбаски касрхои $P_1(x)/Q_1(x)$ ва $P_2(x)/Q_2(x)$ касрхои дуруст мебошанд, пас бисьёраъзогии $P_1(x)$-ро чун бисьёраъзогии коэффициентхояш номаълуми дарачааш назар ба дарачаи $Q_1(x)$ як вохид паст ва $P_2(x)$-ро чун бисьёраъзогии коэффициентхояш номаълуми дарачааш назар ба дарачаи $Q_2(x)$ як вохид паст ифода кардан мумкин аст. Барои хисоб кардани коэффициентхои номуайяни номбурда формулаи Остроградский (7.61)-ро дифференцирониданд, натичаи дифференцирониро ба махраци умумй овардан ва коэффициентхои назди дарачахои якхелаи x-и суратхоро мукоиса кардан лозим аст.

Хамин тариқ, методи Остроградский усули бозарофати интегронидани касрхои рационалй (бе чудокунии пешакии ин касрхо ба суммаи касрхои соддатарин) мебошад. Ин усул хусусан дар хамон мавриди самарабахш аст, ки агар решахои $Q(x)$ асосан каратй бошанд ё агар ёфтани решахои $Q(x)$ мушкилие орад.

Мисол.

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx$$

бо методи Остроградский хисоб карда шавад. Хисоб мекунем:

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1,$$
$$Q'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2.$$

$Q_1(x)$-ро чун таксимкунандаи умумии калонтарини $Q(x)$ ва $Q'(x)$ чустучу мекунем. Бояд кайд кард, ки таксимкунандаи умумии калонтарини хусусан ин ду бисьёраъзогиро дар мисоли интихои § 4 ёфта будем. Яъне

$$Q_1(x) = x^2 - x + 1.$$

$Q(x)$-ро ба $Q_1(x)$ бо «усули сутунча» таксим карда, меёбем, ки

$$Q_2(x) = x^2 - x + 1.$$

$P_1(x)$ ва $P_2(x)$-ро чун бисьёраъзогихои дарачаи якуми коэффициентхояшон номаълум ифода мекунем.

Формулаи Остроградский (7.61) чунин намуд мегирад:

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2-x+1}dx. \qquad (7.62)$$

Барои муайян кардани коэффициентҳои A, B, C, D формулаи (7.62)-ро медифференсиронем:

$$\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}=\frac{A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2-x+1)}.$$

Натиҷаи дифференсиронро ба махраҷи умумӣ оварда, баъд суратҳоро муқоиса мекунем, яъне

$$6-7x-x^2=A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)+$$
$$+(Cx+D)(x^2-x+1).$$

Коэффициентҳои назди x^0, x^1, x^2 ва x^3-ро муқоиса карда, системаи муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\left.\begin{aligned} C&=0\\ -A+D-C&=-1,\\ -2B-D+C&=-7,\\ A+B+D&=6.\end{aligned}\right|$$

Ин системаро ҳал карда, меёбем, ки $A=2$, $B=3$, $C=0$, $D=1$. Ҳамин тариқ, формулаи (7.62) чунин намуд мегирад:

$$\int\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx=\frac{2x+3}{x^2-x+1}+\int\frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Интеграли қисми ростро ҳисоб карда, меёбем, ки

$$\int\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx=\frac{2x+3}{x^2-x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

§ 10. Интегронидани баъзе ифодаҳои иррационалӣ ва трансценденти

Мо дар параграфи гузашта муқаррар кардем, ки интеграли касри рационалии дилхоҳ ба функцияҳои элементарӣ баробар мешавад. Дар ин параграф *баъзе класси дигари функцияҳоеро меомӯзем, ки дар натиҷаи интегронидани онҳо функцияҳои элементарӣ* ҳосил мешаванд. Чун қоида, мо ба воситаи ягон гузориш интеграли функцияи муоинашавандаро ба интеграли касри рационалӣ меорем. Мо нисбат ба гузориши номбурда гуфта метавонем, ки он интеграли функцияи муоинашавандаро такмил медиҳад.

1. Интегронидани баъзе ифодаҳои тригонометрӣ. Мо шарт мегузорем, ки минбаъд функцияи рационалии дилхоҳи дуаргумента (x ва y)*-ро бо символи $R(x, y)$ ишорат намоем.

---

* Функцияи рационалии дуаргумента ин тавр муайян карда мешавад. Ифодаи намуди $P_n(x, y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\ldots+a_{0n}y^n$, ки дар ин ҷо a_{00}, a_{10}, a_{01}, ..., a_{0n} баъзе ададҳои доимӣ мебошанд, бисёраъзогии дараҷаи n-ум аз ду аргументи x ва y номида мешавад. Нисбати намуди $P_n(x, y)/Q_m(x, y)$, ки дар ин ҷо $P_n(x, y)$ бисёраъзогии дилхоҳи дуаргументаи дараҷаи n-ум ва $Q_m(x, y)$ бисёраъзогии дилхоҳи дуаргументаи дараҷаи m-ум мебошад, функцияи рационалии дуаргумента номида мешавад.

Мо дар ин пункт функцияҳои дилхоҳи намуди

$$R(\sin x, \cos x) \tag{7.63}$$

-ро меинтегронем, ки дар натича функцияҳои элементарӣ ҳосил мешаванд. Исбот мекунем, ки интеграли ин функция бо гузориши $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ такмил меёбад. Ҳақиқатан,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

пас

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Азбаски функцияи рационалӣ аз функцияи рационалӣ низ функцияи рационалӣ мебошад, пас интеграли қисми рости баробарии охирин интеграли касри рационалӣ мебошад.

Гузориши $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, агарчи гузориши универсалии такмилдиҳандаи интеграли функцияи (7.63) бошад ҳам, аксаран ба ҳисоббарориҳои дурудароз меорад. Аз ҳамин сабаб мо якчанд мавриди хусусиро нишон медиҳем, ки дар онҳо интеграли функцияи (7.63)-ро бо ёрии гузоришҳои дигари соддатар такмил додан мумкин аст.

Пеш аз ҳама ду хосияти элементарии функцияи рационалии дуаргументаи $R(u, v)$-ро қайд мекунем:

1°. Агар функцияи рационалии $R(u, v)$ ҳангоми тағьирёбии аломати яке аз аргументҳояш (масалан, u) қиматашро иваз накунад, яъне $R(-u, v) = R(u, v)$, онгоҳ ин функцияи рационалиро ба намуди $R(u, v) = R_1(u^2, v)$ овардан мумкин аст, ки дар ин ҷо R_1 — ягон функцияи рационалии ду аргументаш. (Ин функция фақат дараҷаҳои *ҷуфти* u дорад.)

2°. Агар ҳангоми тағьирёбии аломати u функцияи $R(u, v)$ ҳам аломаташро иваз намояд, яъне $R(-u, v) = -R(u, v)$, онгоҳ он ба намуди $R(u, v) = R_2(u^2, v)u$ оварда мешавад. (Агар хосияти 2° ба функцияи $R(u, v)/u$ татбиқ карда шавад, он якбора аз хосияти 1° бармеояд.)

Акнун барои баъзе мавридҳои хусусӣ масъалаи такмилдиҳии интеграли функцияи (7.63)-ро муоина мекунем.

1. Бигзор $R(u, v)$ *аломаташро ҳангоми тағьирёбии аломати* u *иваз намояд. Онгоҳ, мувофиқи хосияти* 2°,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx = \\ = -\int R_2(1-\cos^2 x, \cos x)\,d(\cos x).$$

Ҳамин тариқ, дар натичаи гузориши $t = \cos x$ интеграли функцияи (7.63) такмил меёбад.

II. Бигзор, баъд. функцияи $R(u, v)$ *аломаташро ҳангоми тағирьёбии аломати* v *иваз намояд.* Онгох, мувофиқи ҳамон хосияти 2,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_3(\sin x, \cos^2 x)\cos x\, dx = \\ = \int R_3(\sin x, 1 - \sin^2 x)d(\sin x),$$

яъне дар натичаи гузориши $t = \sin x$ интеграли функцияи (7.63) такмил меёбад.

III. Бигзор, нихоят, функцияи $R(u, v)$ *ҳангоми дар як вақт тағьир ёфтани аломатҳои* u *ва* v *қиматашро иваз накунад, яъне*

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

Исбот мекунем, ки дар ин маврид дар натичаи гузориши $t = \operatorname{tg} x$ интеграли функцияи (7.63) такмил меёбад. Вокеан, дар ин маврид

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}\, v, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

$$R(-u, -v) = R\left(\frac{u}{v}(-v), -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right).$$

Ҳамин тариқ,

$$R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Лекин, онгох, мувофиқи хосияти 1°,

$$R_1\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

Комилан чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$R(u, v) = R_2\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Аз ин чо

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \int R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right) dx = \int R_2\left(t, \frac{1}{1 + t^2}\right)\frac{dt}{1 + t^2},$$

$\left(t = \operatorname{tg} x,\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1 + t^2}\right)$.

Мисолҳо. 1) Интеграли $I_1 = \int \frac{dx}{1 + a\cos x}$ ҳисоб карда шавад, ки дар ин чо $a > 0$ ва $a \neq 1$ мебошад. Гузориши тригонометрии универсалии $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$-ро татбиқ намуда, чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1 + t^2},\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$I_1 = 2\int \frac{dt}{(a + 1) + t^2(1 - a)} = \frac{2}{a + 1}\int \frac{dt}{1 + \frac{1 - a}{1 + a}t^2}.$$

Баъд мавридхои 1) $0 < a < 1$ ва 2) $a > 1$-ро алохида-алохида муоина кардан лозим аст. Дар мавриди $0 < a < 1$ будан

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Дар мавриди $a > 1$ будан

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln\left|\frac{1+t\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}{1-t\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}\right| = C = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

2) Интегрални $I_2 = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x + 1}$ хисоб карда шавад.

Азбаски функцияи тахтиинтегралй аломаташро хангоми тағьирьёбии аломати $\sin x$ нваз мекунад, пас, мувофики 1, гузориши $t = \cos x$-ро қабул кардан лозим аст. Дар натича:

$$I_2 = -\int \frac{dt}{1-t^2+1} = \int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\cos x + \sqrt{2}}{\cos x - \sqrt{2}}\right| + C$$

3) Интегрални $I_3 = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ хисоб карда шавад.

Азбаски функцияи тахтиинтегралй хангоми дар як вакт тағьир ёфтани аломатхои $\sin x$ ва $\cos x$ қиматашро нигох медорад, пас, мувофики III, гузориши $t = \operatorname{tg} x$-ро қабул кардан лозим аст. Дар натича:

$$I_3 = \int \frac{t\,dt}{t^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{(t^2)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t^2) + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t^2 x) + C.$$

2. Интегронидани функцияҳои иррационалии касрию хаттӣ. Мо дар ин пункт интегронидашавандагии функцияҳои намуди

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \qquad (7.64)$$

-ро исбот мекунем, ки дар натичаи интегронидани онҳо функцияҳои элементарй ҳосил мешаванд, дар ин ҷо a, b, c, d — баъзе доимиҳо, n — адади мусбати бутуни дилхоҳ. Функцияи ингуна намудро *функуцияи иррационалии касрию хаттӣ* меномем.

Исбот мекунем, ки интегрални функцияи (7.64) ҳангоми $ad - bc \neq 0$ будан дар натичаи истифодаи гузориши $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ такмил меёбанд. Вокеан,

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},\ x = \frac{dt^n - b}{a - c\cdot t^n},\quad dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt,$$

пас

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\frac{ad^n-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt.$$

Азбаски функцияи рационалӣ аз функцияи рационалӣ боз функцияи рационалӣ мебошад, пас интеграли қисми рости баробарии охирин интеграли касри рационалӣ мебошад. Бо ҳамин исбот карда шуд, ки интеграли функцияи иррационалии касрию хаттии (7.64) дар натиҷаи гузориши $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ такмил меёбад.

Мисол. Интеграли $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{1-x}$ ҳисоб карда шавад.

Гузоришҳои

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\quad t^2 = \frac{1+x}{1-x},\quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2},$$

-ро қабул мекунем, онгоҳ

$$I = 2\int \frac{t^2\,dt}{t^2+1} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

3. Интегронидани дифференциалҳои биномӣ. Ифодаи намуди

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

ки дар ин ҷо a ва b доимиҳои дилхоҳ ва нишондиҳандаҳои дараҷаҳои m, n, p баъзе ададҳои рационалӣ мебошанд, *дифференциали биномӣ* номида мешавад. Масъалаи интегронидашавандагии дифференциалҳои биномиро меомӯзем, ки дар натиҷаи интегронидани онҳо функцияҳои элементарӣ ҳосил мешаванд.

Пеш аз ҳама *се мавридеро,* ки интеграли дифференциали биномӣ гузориши такмилдиҳандаро ҷоиз медонад, қайд мекунем.

1°. Мавриди якум ба *р-и бутун* мувофиқ аст. Дифференциали биномӣ функцияи иррационалии касрию хаттии намуди $R(x, \sqrt[r]{x})$-ро ифода мекунад, ки дар ин ҷо r каратии умумии хурдтарини махраҷи ададҳои рационалии m ва n мебошад. Пас, дар ин мавриди интеграли дифференциали биномӣ дар натиҷаи гузориши $t = \sqrt[r]{x}$ такмил меёбад.

2°. Мавриди дуюм *ба ададе бутуни* $\frac{m+1}{n}$ мувофиқ меояд. Гузориши $z = x^n$-ро қабул карда, барои мухтасарӣ $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ фарз намуда, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\int x^m(a+bx)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q\,dz. \qquad (7.65)$$

Функцияи тахтиинтегралии қисми рости (7.65) функцияи иррационалии касрию хаттии намуди $R(z, \sqrt[s]{a+bz})$-ро ифода мекунад, ки дар ин ҷо s махрачи ададн рационалии p мебошад.

Ҳамин тариқ, дар мавриди дуюм дифференциали биномӣ дар натиҷаи гузориши

$$t = \sqrt[s]{a+bz} = \sqrt[s]{a+bx^n}$$

такмил меёбад.

3°. Мавриди сеюм *ба ададн бутуни* $\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$ мувофиқ аст. Функцияи тахтиинтегралии қисми рости (7.65) функцияи иррационалии касрию хаттии намуди $R\left(z, \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}\right)$-ро ифода мекунад. Ҳамин тариқ, дар ин мавриди дифференциали биномӣ дар натиҷаи гузориши намуди

$$t = \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[s]{\frac{a}{x^n}+b}$$

такмил меёбад.

Дар миёнаи асри гузашта П. Л. Чебышев* исбот кард, ки *бо ин се мавриди баёншуда ҳама мавридҳоеро, ки дар онҳо дифференциали биномӣ интегронида мешавад ва дар натиҷа функцияҳои элементарӣ ҳосил мешаванд, мукаммал кардан мумкин аст.*

Мисолҳо. 1) Интегралн $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}} = \int x^{-2}(a+bx^2)^{-1/2}dx$ ҳисоб карда шавад. Дар ин ҷо $m=-2$, $n=2$, $p=-1/2$; $\frac{m+1}{n}+p=-1$ (мавриди сеюм). Гузоришҳои

$$t = \sqrt{\frac{a}{x^2}+b}, \quad x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t^2-b}}, \quad dx = -\frac{\sqrt{a}\,tdt}{\sqrt{(t^2-b)^3}},$$

-ро қабул мекунем, пас

$$I = \int\left(-\frac{dt}{a}\right) = -\frac{t}{a}+C = -\frac{\sqrt{\frac{a}{x^2}+b}}{a}+C.$$

2) Интегралн $I = \int x^5(1-x^2)^{-1/2}\,dx$ ҳисоб карда шавад. Дар ин маврид $m=5$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=3$ (мавриди дуюм). Гузоришҳои

$$t = \sqrt{1-x^2}, \quad x = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = -\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

-ро қабул карда, интегралро ҳисоб мекунем:

$$I = -\int(1-t^2)^2dt = -\int dt + 2\int t^2dt - \int t^4dt =$$

$$= -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}+C = -\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5}+C.$$

---

* Пафнутий Львович Чебышев — математики бузурги рус (1821—1894).

4. Ба воситаи гузоришҳои Эйлер интегронидани функцияҳои иррационалии квадратӣ. Мо дар ин пункт интегронидашавандагии функцияҳои дилхоҳи намуди

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \tag{7.66}$$

-ро, ки дар натиҷа функцияҳои элементарӣ ҳосил мешаванд, исбот мекунем, дар ин ҷо a, b, c — баъзе доимиҳо. Функцияҳои ингуна намудро *функцияҳои иррационалии квадратӣ* меномем. Дар айни ҳол мо, албатта, чунин мепиндорем, ки сеаъзогии квадратии $ax^2 + bx + c$ решаҳои баробар надорад (вагарна решаи ин сеаъзогиро бо ифодаи рационалӣ иваз кардан мумкин аст).

Мо исбот мекунем, ки интеграли функцияи (7.66)-ро бо яке аз *гузоришҳои Эйлер* доимо такмил додан мумкин аст.

Аввал мавридеро, ки сеаъзогии квадратии $ax^2 + bx + c$ решаҳои *комплексӣ* дорад, муоина мекунем. Дар ин маврид аломати сеаъзогии квадратӣ бо аломати a якхел мешавад ва азбаски мувофиқи маъно сеаъзогии квадратӣ (аз он решаи квадратӣ бароварда мешавад) *мусбат* мебошад, пас $a > 0$ аст.

Ҳамин тариқ, мо ба қабул кардани чунин гузориш ҳуқуқ дорем:

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}. \tag{7.67}$$

Гузориши (7.67)-ро одатан *гузориши якуми Эйлер* меноманд. Исбот мекунем, ки ин гузориш интеграли функцияи (7.66)-ро барои мавриди муоинашаванда такмил медиҳад. Ҳар ду қисми баробарии $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$-ро ба квадрат бардошта, $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx$-ро ҳосил менамоем. x ва dx-ро меёбем:

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\,t + b},\quad i\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b},$$

$$dx = 2\,\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2}\,dt.$$

Ҳамин тариқ,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b},\ \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c}{2\sqrt{a}t + b}\right) 2\,\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2}\,dt.$$

Дар қисми рост дар таҳти аломати интеграл касри рационалӣ ҳаст.

Акнун мавридеро муоина мекунем, ки сеаъзогии квадратии $ax^2 + bx + c$ решаҳои *ҳақиқии* мувофиқнаояндаи x_1 ва x_2 дорад.

Дар ингуна маврид $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Исбот мекунем, ки дар ин маврид интеграли функцияи (7.66) ба воситаи гузориши

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + bx + c}}{x - x_1} \tag{7.68}$$

такмил меёбад; ин гузоришро одатан *гузориши дуюми Эйлер* меноманд. Вокеан, баробарии $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$-ро ба квадрат бардошта, баробарии ҳосилшударо ба $(x - x_1)$ ихтисор карда, $a(x - x_2) = t(x - x_1)$-ро ҳосил мекунем; x ва dx-ро меёбем:

$$x = \frac{-ax_2 + x_1 t^2}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(x_1 - x_2)}{t^2 - a} t,$$

$$dx = \frac{2a(x_1 - x_2)t}{(t^2 - a)^2} dt.$$

Ҳамин тариқ,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{-ax_2 + x_1 t^2}{t^2 - a}, \frac{a(x_1 - x_2)t}{t^2 - a}\right) \frac{2a(x_1 - x_2)t}{(t^2 - a)^2} dt.$$

Дар қисми рост дар таҳти аломати интеграл касри рационалӣ вокеъ аст.

Мисолҳо. 1) Интеграли $I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ ҳисоб карда шавад. Азбаски сеаъзогии квадратии $x^2 + x + 1$ решаҳои комплексӣ дорад, гузориши якуми Эйлерро қабул мекунем:

$$t = \sqrt{x^2 + x + 1} + x.$$

Ҳар ду қисми баробарии $\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$-ро ба квадрат бардошта, $x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$ ё $x + 1 = t^2 - 2tx$-ро ҳосил мекунем; x ва dx-ро меёбем:

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + t}, \quad dx = 2\frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} dt$$

Ҳамин тариқ,

$$I = 2\int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} dt = \int \left[\frac{A}{t} + \frac{B}{1 + 2t} + \frac{C}{(1 + 2t)^2}\right] dt$$

Коэффициентҳои номуайяни A, B, C бо усули ҳисоб карда мешаванд: $A = 2$, $B = -3$, $C = -3$. Комилан ҳосил мекунем:

$$I = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C =$$

$$= 2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right| +$$

$$+ \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + C.$$

2) Интеграли $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ ҳисоб карда шавад. Азбаски сеаъзогии квадратии $1-2x-x^2$ решаҳои ҳақиқии $x_1 = -1+\sqrt{2}$ ва $x_2 = -1-\sqrt{2}$ дорад, пас гузориши дуюми Эйлер (7.68)-ро қабул мекунем:

$$t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+1+\sqrt{2}}.$$

Ҳар ду қисми баробарии $\sqrt{1-2x-x^2} = t(x+1+\sqrt{2})$-ро ба квадрат бардошта, $(-1)(x+1-\sqrt{2}) = t^2(x+1+\sqrt{2})$-ро ҳосил мекунем; x ва dx-ро меёбем:

$$x = \frac{-t^2(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1}{t^2+1},\quad \sqrt{1-2x-x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{t^2+1}t,$$

$$1+\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1},\quad dx = -\frac{4\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}dt.$$

Ҳамин тариқ,

$$I = -4\sqrt{2}\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}.$$

Интеграли касри рационалиро ҳосил кардем, ки ҳисоби онро ба хонанда месупорем.

5. Бо тарзҳои дигар интегронидани функцияҳои иррационалии квадратӣ. Агарчи гузоришҳои Эйлер интеграли функцияи (7.66)-ро доимо такмил диханд ҳам, лекин одатан ин гузоришҳо ба ҳисобҳои дурудароз меоранд. Аз ҳамин сабаб дар амалия аксаран аз тарзҳои дигари интегронидани функцияи (7.66) истифода менамоянд. Ин пункт ба ҳамин тарз бахшида шудааст.

Ишорати $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$-ро қабул карда ва бисьёраъзогӣ будани y^2-ро ба эътибор гирифта, функцияи (7.66)-ро ба намуди суммаи

$$R(x, y) = R_1(x) + R_2(x)/y$$

навиштан мумкин аст, дар ин ҷо $R_1(x)$ ва $R_2(x)$ баъзе функцияҳои рационалии яктағирьёбанда мебошанд. Азбаски интеграли $R_1(x)$ ҳисобшаванда аст ва дар натиҷа функцияҳои элементарӣ ҳосил мешаванд, пас интегралӣ функцияи $R_2(x)/y$-ро ҳисоб кардан кифоя аст.

Мо аллакай медонем*, ки ҳаргуна касри рационалии $R_2(x)$-ро ба намуди суммаи бисьёраъзогии $P(x)$ ва касри рационалии дурусти $R_3(x)$ навиштан мумкин аст. Касри рационалии дурусти $R_3(x)$-ро, дар навбати худ, ба суммаи касрҳои соддатарин ҷудо кардан мумкин аст. Инро ба эътибор гирифта, мо тасдиқ карда метавонем, ки проблемаи интегронидани функцияи $R_2(x)/y$ ба ҳисоб кардани интегралҳои *се намуди зерин* меорад:

I. $\int \frac{P(x)}{y}\,dx$, дар ин ҷо $P(x)$ — бисьёраъзогӣ.

II. $\int \frac{B}{(x-A)^{\alpha}\,y}\,dx$, дар ин ҷо A ва B — баъзе доимиҳо, α — адади натуралӣ.

III. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}\,y}$, дар ин ҷо M, N, p ва q — баъзе доимиҳо, λ — адади натуралӣ, ғайр аз ин $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Интегралҳои намудҳои I, II ва III-ро алоҳида-алоҳида ҳисоб мекунем.

I. Барои ҳисоб кардани интеграли намуди 1 пеш аз ҳама барои интеграли

$$I_m=\int \frac{x^m\,dx}{y}\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

формулаи рекуррентиро муқаррар мекунем. Барои ин, $m\geqslant 1$ фарз карда, айнияти ба воситаи дифференсиронӣ санҷидашавандаи зеринро меинтегронем:

$$(x^{m-1}y)'=ma\frac{x^m}{y}+\left(m-\frac{1}{2}\right)b\,\frac{x^{m-1}}{y}+(m-1)\,c\,\frac{x^{m-2}}{y}.$$

Интегронидани ин айният моро ба баробарии

$$x^{m-1}y=maI_m+\left(m-\frac{1}{2}\right)bI_{m-1}+(m-1)\,cI_{m-2}. \qquad (7.69)$$

меорад. Дар баробарии (7.69) $m=1$ қабул карда, меёбем, ки

$$I_1=\frac{1}{a}y-\frac{b}{2a}I_0. \qquad (7.70)$$

Баъд дар баробарии (7.69) $m=2$ қабул карда, қимати ҳисоб кардашудаи I_1 (яъне формулаи (7.70))-ро истифода карда, меёбем, ки

$$I_2=\frac{1}{4a^2}(2ax-3b)\,y+\frac{1}{8a^2}\,(3b^2-4ac)\,I_0.$$

Ҳамингуна муҳокимарониро давом дода, мо формулаи умумии зеринро ҳосил мекунем:

$$I_m=P_{m-1}(x)y+c_m I_0. \qquad (7.71)$$

---

* Ба ибтидои § 8 ниг.

дар ин чо $P_{m-1}(x)$ — ягон бисьёраъзогии дарачаи $(m-1)$-ум ва c_m — ягон доимй. Агар дар интеграли намуди 1 $P(x)$ бисьёраъзогии дарачаи n-ум бошад, онгох интеграли намуди 1 ба суммаи интегралхои $I_0, I_1, \ldots, I_n$ бо ягон зарбкунандахои доимй (коэффициентхои бисьёраъзогии $P(x)$) баробар аст. Пас, дар асоси баробарии (7.71), мо барои интеграли намуди 1 формулаи комилиро зеринро хосил мекунем:

$$\int \frac{P(x)}{y}dx = Q_{n-1}(x)\,y + C_0\int\frac{dx}{y}. \qquad (7.72)$$

Дар ин формула $Q_{n-1}(x)$ ягон бисьёраъзогии дарачаи $(n-1)$-ум ва C_0 ягон доимй мебошад. Барои муайян кардани бисьёраъзогии $Q_{n-1}(x)$ ва доимии C_0 *методи коэффициентхои номуайян* истифода карда мешавад. Бисьёраъзогии $Q_{n-1}(x)$ чун бисьёраъзогии коэффициентхояш харфии

$$Q_{n-1}(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}$$

навишта мешавад. Баробарии (7.72)-ро дифференциронида ва натичаи дифференцирониро ба y зарб карда, баробарии зеринро хосил мекунем:

$$P(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + C_0. \qquad (7.73)$$

Дар хар ду кисми баробарии (7.73) бисьёраъзогихои дарачаи n-ум вокеъ мебошанд. Коэффициентхои онхоро баробар карда, системаи $(n+1)$ муодилахои хаттиро хосил мекунем, ки аз онхо $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ ва C_0 муайян карда мешаванд. Дурустии формулаи (7.72), ки мо онро исбот кардем, халшавандагии системаи хосилшударо тасдик мекунад. Бояд кайд кард, ки интеграли кисми (7.72) ба воситаи ба таври хаттй иваз кардани тагьирёбандаи $t = x + \frac{b}{2a}$ ба намуди интеграли чадвалй оварда мешавад. Бо ёрии ивазкунии номбурда $\int\frac{dx}{y}$ бо сахехии то зарбкунандаи доимй ба намуди яке аз ду интеграли зерин оварда мешавад:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + C \quad (k = \text{const} > 0)$$

ё

$$\int\frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{k} + C.$$

Мисол.

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx.$$

хисоб карда шавад. Формулаи (7.72) барои интеграли муоинашаванда чунин намуд дорад:

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (A_0 + A_1x + A_2x^2)\sqrt{1+2x-x^2} + C_0\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \qquad (7.74)$$

Ин формуларо дифференциронида ва натичаи дифференцирониро ба $\sqrt{1+2x-x^2}$ зарб карда,

$$x^3 = (A_1 + 2A_2x)(1 + 2x - x^2) \quad (A_0 + A_1x + A_2x^2)(1-x)+C_0$$

-ро хосил мекунем. Коэффициентхои назди x^3, x^2, x^1, x^0-и қисмхои росту чапро муқоиса карда, системаи муодилахои зеринро хосил мекунем:

$$\left.\begin{aligned} -3A_2 &= 1 \\ 5A_2 - 2A_1 &= 0 \\ 2A_2 + 3A_1 - A_0 &= 0 \\ A_1 + A_0 + C_0 &= 0 \end{aligned}\right|$$

Ин системаро хал карда, меёбем, ки $A_2 = -1/3$, $A_1 = -5/6$, $A_0 = -19/6$, $C_0 = 4$. Интеграли қисми рости (7.74)-ро ба воситаи ивазкунии $t = x - 1$ хисоб мекунем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

Комилан:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = \left(-\frac{19}{6} - \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}x^2\right)\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

II. *Интеграли намуди* II-ро хисоб мекунем. Нишон медихем, ки ин интеграл ба воситаи ивазкунии $t = \dfrac{1}{x-A}$ ба интеграли намуди 1 оварда мешавад. Вокеан, азбаски

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad ax^2 + bx + c = \frac{(A^2a + bx + c)t^2 + (2aA + b)t + a}{t^2},$$

аст, пас

$$\int \frac{B}{(x-A)^\alpha y}\, dx = -\int \frac{Bt^{\alpha-1}\, dt}{\sqrt{(A^2a + Ab + c)\, t^2 + (2aA + b)\, t + a}}.$$

III. Ниҳоят, *интеграли намуди* III-ро хисоб мекунем. Пеш аз хама интеграли намуди III-ро барои мавриди хусусии $p = 0$, $b = 0$ хисоб мекунем, яъне

$$K = \int \frac{Mx + N}{(x^2 + q)^\lambda \sqrt{ax^2 + c}}\, dx$$

-ро хисоб менамоем. Ин интеграл ба суммаи ду интегралҳои

$$K_1 = M\int \frac{x\, dx}{(x^2 + q)^\lambda \sqrt{ax^2 + c}} \text{ ва } K_2 = N\int \frac{dx}{(x^2 + q)^\lambda \sqrt{ax^2 + c}}$$

чудо мешавад. Интеграли якумро ба намуди

$$K_1 = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2 + q)^\lambda \sqrt{ax^2 + c}}$$

навиштан мумкин аст; аз ин намоён аст, ки функцияи тахтинтегралӣ нисбат ба x^2 функцияи иррационалии *хаттӣ* (на квадратӣ)-ро ифода мекунад.

Дар асоси исбот (п. 2) интеграли K_1 бо ёрии гузориши $t = \sqrt{ax^2 + c}$ такмил меёбад. Интеграли K_2-ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст.*

$$K_2 = N \int \frac{\frac{1}{x^{2\lambda-2}} \frac{dx}{x^3}}{\left(1 + q\frac{1}{x^2}\right)^{\lambda} \sqrt{a + c\frac{1}{x^2}}} = -\frac{N}{2} \int \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\lambda-1} d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left[1 + q\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\lambda} \sqrt{a + c\left(\frac{1}{x^2}\right)}},$$

аз ин намоён аст, ки функцияи тахтиинтегралӣ нисбат ба $1/x^2$ функцияи иррационалии хаттӣ мебошад. Пас, интеграли K_2 ба воситаи гузориши $r = \sqrt{a + \frac{c}{x^2}}$ такмил меёбад. Инак, барои мавриди хусусӣ, дар холати дар хар ду сеаъзогихои квадратӣ *набудани аъзохои дараҷаи якум*, мо интеграли намуди III-ро такмил додем.

Акнун интеграли намуди III-ро *барои мавриди умумӣ* муоина мекунем ва нишон медихем, ки онро ба интеграли намуди хусусии омӯхташуда овардан мумкин аст. Агар коэффициентхои сеаъзогихои квадратӣ муносибати

$$b = ap \tag{7.75}$$

-ро қаноат намоянд, онгох барои ба интеграли намуди хусусии омӯхташуда овардани интеграли намуди III ивазкунии $x = t - \frac{p}{2}$ кифоя аст. Вокеан, дар ин холат интеграли зеринро хосил мекунем:

$$\int \frac{(Mx + N)\,dx}{(x^2 + px + q)^{\lambda}\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{Mt + \left(\frac{Mp}{2} + N\right)}{\left[t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^{\lambda} \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{ap^2}{4}\right)}}\,dt.$$

Дар мавриде, ки коэффициентхои сеаъзогихои квадратӣ муносибати (7.75)-ро *қаноат намекунанд*, ба интеграли намуди хусусии омӯхташуда овардани интеграли намуди III мураккабтар аст. Дар ин маврид мо гузориши касрию хаттии

$$x = \frac{\mu t + \nu}{1 + t}, \tag{7.76}$$

-ро кабул мекунем; дар айни хол доимихои μ ва ν-ро чунон интихоб мекунем, ки дар сеаъзогихои квадратии хосилшуда *аъзохои нисбат ба t дараҷаи якум вокеъ набошанд*. Нишон медихем, ки чунин μ ва ν-ро интихоб кардан мумкин аст. Вокеан, ивазкунии (7.76)-ро ичро карда, чунин ифодахоро хосил мекунем:

$$x^2 + px + q = \frac{(\mu^2 + p\mu + q)t^2 + [2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q]t + (\nu^2 + p\nu + q)}{(1 + t)^2},$$

$$ax^2 + bx + c = \frac{(a\mu^2 + b\mu + c)t^2 + [2\mu\nu a + b(\mu + \nu) + 2c]t + (a\nu^2 + b\nu + c)}{(1 + t)^2}.$$

* Мо чунин мепиндорем, ки $x \neq 0$ аст.

Ҳамин тариқ, коэффициентҳои μ ва ν аз системаи муодилаҳои

$$2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q = 0,\ 2\mu\nu a + b(\mu + \nu) + 2c = 0$$

ё аз системаи муодилаҳои баробарқувваи

$$\mu + \nu = -\frac{7(c - aq)}{b - ap},\ \mu \cdot \nu = \frac{cp - bq}{b - ap}$$

муайян карда мешаванд. Пас, μ ва ν решаҳои муодилаи квадратии

$$z^2 + \frac{2(c - aq)}{b - ap} z + \frac{cp - bq}{b - ap} = 0 \qquad (7.77)$$

мебошанд.

Акнун исбот кардан лозим аст, ки муодилаи квадратии (7.77) решаҳои ҳақиқӣ ва гуногун дорад. Барои ин исбот кардан кифоя аст, ки дискриминанти ин муодила мусбат мебошад, яъне нобаробарии

$$(c - aq)^2 > (cp - bq)(b - ap) \qquad (7.78)$$

-ро муқаррар кардан кифоя аст. Бовар кардан осон аст, ки нобаробарии (7.78) ба нобаробарии зерин баробарқувва аст:

$$[2(c + aq) - bp]^2 > (4q - p^2)(4ac - b^2). \qquad (7.79)$$

Азбаски сеаъзогии квадратии $(x^2 + px + q)$ решаҳои комплексӣ дорад, пас $4q - p^2 > 0$ мебошад.

Агар $4ac - b^2 < 0$ бошад, нобаробарии (7.79) дуруст аст. Исбот мекунем, ки ин нобаробарӣ дар мавриди $4ac - b^2 > 0$ будан ҳам дуруст аст. Дар ин мавриди $q > 0$, $ac > 0$ ва $4\sqrt{acq} > pb$ мебошад. Бинобар ин, $\frac{c + aq}{2} \geqslant \sqrt{caq}$ будани нашро ба эътибор гирифта, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$[2(c + aq) - bp]^2 \geqslant [4\sqrt{qac} - pb]^2 =$$

$$= (4q - p^2)(4ac - b^2) + 4(p\sqrt{ac} - b\sqrt{q})^2 \geqslant (4q - p^2)(4ac - b^2).$$

Дар ин силсилаи нобаробариҳо аҳаллан як аломати нобаробарии қатъӣ $>$ мебошад, чунки аломати якум $\geqslant$ фақат дар мавриди $c = aq$ будан ба аломати $=$ табдил мешавад, лекин дар мавриди $c = aq$ будан, дар асоси он, ки $b \neq ap$ мебошад, $(p\sqrt{ac} - b\sqrt{q}) \neq 0$ аст, ва, бинобар ин, аломати дуюм $\geqslant$ ба аломати $=$ табдил намешавад. Инак, мо нобаробарии (7.79)-ро исбот кардем, яъне имконияти интихоби чунин μ ва ν исбот карда шуд, ки дар қиматҳои онҳо дар сеаъзогиҳои квадратии ҳосилшуда аъзоҳои дараҷаи якум (нисбат ба t) нестанд. (7.76)-ро бо μ ва ν-и номбурда иваз карда, мо интеграли намуди III-ро ба намуди

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2 + q_1)^\lambda \sqrt{a_1 t^2 + c_1}} \qquad (7.80)$$

меорем, дар ин ҷо a_1, c_1 ва q_1 — баъзе доимиҳо ва $P(t)$ — бисьёраъзогии дараҷаи $(2\lambda - 1)$-ум. Касри $\frac{P(t)}{(t^2 + q_1)^\lambda}$-ро ба сумман касрҳои соддатарин ҷудо карда, масъалаи ҳисоб кардани интеграли (7.80)-ро ба ҳисоб кардани суммаи интегралҳои намуди

$$\int \frac{M_k t + N_k}{(t^2 + q_1)^k \sqrt{a_1 t^2 + c_1}}\,dt \qquad (k = 1, \ldots, \lambda).$$

меорем. Хар яки ин интегралхо ба намуди хусусии омўхташуда тааллук доранд. Мо бо хамин интегронидашавандагии интегралхои хама намудхои I, II ва III-ро, ки дар натича функцияхои элементарй хосил мешаванд, исбот кардем. Хамин тарик, интегронидашавандагии функцияи (7.66), ки дар натича функцияхои элементарй хосил мешаванд, бе гузоришхои Эйлер дафъаи дигар исбот карда шуд.

Мисол. Интегрални $I = \int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ хисоб карда шавад.

Ин интеграл ба намуди III тааллук дорад. Азбаски барои он муносибати (7.75) иҷро намешавад, пас мо бояд ивазкунии (7.66)-ро истифода намоем. Дар натичаи ин ивазкунй ифодахои зеринро хосил мекунем:

$$x^2 + x + 1 = \frac{(\mu^2 + \mu + 1)t^2 + [2\mu\nu + (\mu + \nu) + 2]t + (\nu^2 + \nu + 1)}{(1 + t)^2},$$

$$x^2 - x + 1 = \frac{(\mu^2 - \mu + 1)t^2 + [2\mu\nu - (\mu + \nu) + 2]t + (\nu^2 - \nu + 1)}{(1 + t)^2}.$$

Доимихон μ ва ν-ро аз системаи муодилахои

$$2\mu\nu + (\mu + \nu) + 2 = 0, \quad 2\mu\nu - (\mu + \nu) + 2 = 0$$

меёбем. Бовар кардан осон аст,* ки $\mu = 1$, $\nu = -1$ мебошад. Хамин тарик, ивазкунии (7.76) чунин намуд дорад: $x = \frac{t-1}{t+1}$ аз ин чо

$$t = \frac{x+1}{1-x}, \quad dx = \frac{2dt}{(1+t)^2}, \quad x^2 + x + 1 = \frac{3t^2+1}{(1+t)^2}, \quad x^2 - x + 1 = \frac{t^2+3}{(1+t)^2}.$$

Интегрални муоинашаванда чунин намуд мегирад:

$$I = 2\int \frac{(1+t)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} = I_1 + I$$

дар ин чо

$$I_1 = 2\int \frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}, \quad I_2 = 2\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Барои хисоб кардани интегрални I_1 гузориши $u = \sqrt{3t^2+1}$ ва барои хисоб кардани интегрални I_2 гузориши $v = \sqrt{3 + \frac{1}{t^2}}$-ро қабул мекунем. Дар натича:

$$I_1 = 2\int \frac{dv}{v^2+8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{8}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{2(1-x)^2}} + C.$$

$$I_2 = -2\int \frac{dv}{3v^2-8} =$$

---

* Баръаксашро хам фарз кардан мумкин буд: $\mu = -1$, $\nu = 1$.

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{v + \sqrt{\frac{8}{3}}}{v - \sqrt{\frac{8}{3}}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2}} + \sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2}} - \sqrt{\frac{8}{3}}} \right| + C.$$

§ 11. Интегралҳои эллиптикӣ

Одатан интегралҳои зеринро ба интегралҳои функцияҳои иррационалии квадратӣ мутаалliқ меҳисобанд:

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d})\, dx, \tag{7.81}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})\, dx, \tag{7.82}$$

функцияҳои тахтиинтегралии онҳо решаи квадратӣ аз бисьёраъзогиҳои дараҷаи сеюм ё чорум доранд.

Ин интегралҳо дар татбиқот бисьёртар дучор мешаванд. Бояд якбора қайд кард, ки интегралҳои (7.81) ва (7.82), *умуман, функцияҳои элементарӣ намебошанд.*

Ҳардуи ин интегралҳоро дар ҳамон маврид *интегралҳои эллиптикӣ* меноманд, ки агар онҳо бо функцияҳои элементарӣ ифода нашаванд ва онҳоро дар ҳамон маврид *интегралҳои псевдоэллиптикӣ* меноманд, ки агар онҳо бо функцияҳои элементарӣ ифода шаванд.*

Аз сабаби он, ки интегралҳои (7.81) ва (7.82) татбиқи васеъ доранд, ба тартиб додани ҷадвал ва графики функцияҳое, ки бо ин интегралҳо муайян мешаванд, зарурияте пайдо мешавад. Ҳангоми дилхоҳ будани коэффициентҳои a, b, c, d ва e чунин ҷадвалу графикҳоро тартиб додан хеле мушкил аст. Бинобар ин масъалаи ба чандин намуди интегралҳое, ки аз рӯи имкон коэффициентҳои дилхоҳашон кам аст, овардани ҳама интегралҳои намуди (7.81) ва (7.82) пайдо мешавад (ё, чунон ки мегӯянд, масъалаи ба *шакли каноний* овардани интегралҳои (7.81) ва (7.82) ба миён меояд).

Пеш аз ҳама, қайд мекунем, ки интеграли (7.81) ба интеграли (7.82) оварда мешавад. Вокеан, сеаъзогии кубӣ ақаллан як решаи ҳақиқии x_0 дорад ва, бинобар ин, онро ба намуди $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_0)(x^2 + px + q)$ овардан мумкин аст.

Гузориши $x - x_0 = \pm t^2$-ро қабул карда, мо, чунон ки намоён аст, интегралҳои (7.81) ва (7.82)-ро табдил медиҳем.

Ҳамин тариқ, муоинаи фақат интеграли (7.82) кифоя аст.

Дар асоси натиҷаҳои § 6 бисьёраъзогии дараҷаи чорумро ба ҳосили зарби ду сеаъзогии квадратии коэффициентҳояш ҳақиқӣ чудо кардан мумкин аст:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q').$$

Доимо ягон гузориши хаттӣ ё касрию хаттие ёфт мешавад, ки он дар ҳар ду сеаъзогии квадратӣ аъзоҳои хаттиро барҳам медиҳад**. Чунин гузоришро интихоб карда, мо бо саҳеҳӣ то ҷамъшавандае, ки функцияи элементариро ифода менамояд, интеграли (7.82)-ро ба намуди

$$\int \frac{R(t^2)\, dt}{\sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't)}} \tag{7.83}$$

табдил медиҳем, ки дар ин ҷо R ягон функцияи рационалӣ мебошад. Баъд нишон додан мумкин аст, ки дар комбинацияҳои дилхоҳи қиматҳои мутлақ

---

* Ин ном аз он пайдо шудааст, ки бо ин интегралҳо аввалин маротиба ҳангоми ҳалли масъалаҳои росткунии эллипс дучор шудаанд (ба мисоли 3-юми п. 6 § 1 боби 11 нигаред).

** Ин ба мисли исботи п. 5 § 10 исбот карда мешавад.

ва аломатҳои доимиҳои A, m ва m' ивазкунии ёфт мешавад, ки он интегралии (7.83)-ро ба *интеграли канонӣ*

$$\int \frac{R_1(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{7.84}$$

меорад, ки дар он доимии шарти $0 < k < 1$-ро қаноаткунанда бо k ишорат карда шудааст.

Интеграли канонии дилхоҳи (7.84)-ро бо сахехии то ҷамъшавандае, ки функцияи элементариро ифода мекунад, ба се интеграли стандартии зерин овардан мумкин аст:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^4)(1-k^2z^2)}}, \tag{7.85}$$

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(7-k^2z^2)}} \quad (0 < k < 1)$$

Интегралҳои (7.85)-ро *интегралҳои эллиптикии мувофиқан ҷинсҳои 1-ум, 2-юм ва 3-юм* меноманд. Чунон ки Лиувилль* нишон дода буд, ҳар яки ин интегралҳо *функцияи ғайриэлементариро* ифода мекунанд. Интегралҳои эллиптикии ҷинсҳои 1-уму 2-юм фақат якто параметри k доранд, ки он қиматҳои ҳақиқии интервали $0 < k < 1$-ро қабул мекунад. Интеграли эллиптикии ҷинси 3-юм, ғайр аз он, параметри h дорад, ки он қиматҳои комплексиро низ қабул карда метавонад.

Лежандр** ивазкунии $z = \sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$-ро қабул карда, интегралҳои (7.85)-ро хеле содда кард.

Бо ёрии ин ивазкунӣ интеграли якуми (7.85) ба намуди

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{7.86}$$

табдил мешавад. Дар ин ивазкунӣ интеграли дуюми (7.85) бо сахехии то зарбкунандаи доимӣ ба фарқи интеграли (7.86) ва интеграли

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{7.87}$$

баробар мешавад. Интеграли сеюми (7.85) ба намуди

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin\varphi}} \tag{7.88}$$

табдил мешавад. Интегралҳои (7.86), (7.87) ва (7.88)-ро *интегралҳои эллиптикии мувофиқан ҷинсҳои 1-ум, 2-юм ва 3-юми шакли Лежандр* меноманд.

Интегралҳои (7.86) ва (7.87) дар татбиқот махсусан роли муҳим доранд. Агар чунин пиндорем, ки ҳардуи ин интегралҳо ҳангоми $\varphi = 0$ будан ба нуль баробар мешаванд, онгоҳ ду функцияи комилан муайяне ҳосил мешавад, ки онҳоро одатан бо $F(k, \varphi)$ ва $E(k, \varphi)$ ишорат менамоянд. Лежандр ва дигар математикҳо хосиятҳои онҳоро омӯхтаанд. Барои ин функцияҳо якчанд формулаҳо муқаррар карда шудаанд, ҷадвалу графикҳои бисьёре тартиб дода шудаанд.

Дар қатори функцияҳои элементарӣ функцияҳои E ва F ба ойлаи функцияҳое, ки дар анализи математикӣ бештар истифода мешаванд, мустаҳкам дохил шудаанд. Дар ин ҷо шартияти мафҳуми функцияи элементариро боз қайд кардан лозим меояд. Дар баробари ин қайд кардан лозим аст, ки масъалаи ҳисоби интегралӣ бо омӯзиши функцияҳое, ки дар натиҷаи интегронидан функцияҳои элементарӣ ҳосил мекунанд, пурра маҳдуд намешавад.

---

* Жозеф Лиувилль — математики франсавӣ (1809—1882).

** Андриан Мари Лежандр — математики франсавӣ (1752—1833).

БОБИ 8

ТЕОРЕМАҲОИ АСОСӢ ДАР БОРАИ ФУНКЦИЯҲОИ БЕФОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИРОНИДАШАВАНДА

Мафҳумҳои функцияҳои бефосила ва функцияҳои дифференцирондашаванда ба мо аз бобҳои 4 ва 5 маълуманд. Дар ин боб як қатор хосиятҳои муҳимтарини функцияҳои бефосила ва дифференцирондашавандаи дилхоҳ муқаррар карда мешаванд. Барои ҳосил кардани ин хосиятҳо мо таърифи нави қимати лимитии функцияро баён мекунем ва ба таърифи кӯҳнаи дар боби 4 додашуда баробарқувва будани ин таърифро исбот менамоем.

§ 1. Таърифи нави қимати лимитии функция

1. Таърифи нави қимати лимитии функция. Ба таърифи кӯҳна баробарқувва будани он. Бигзор, чунон ки дар § 2 боби 4 буд, функцияи $y = f(x)$ дар ягон маҷмӯи $\{x\}$ муайян бошад, ва бигзор a ягон нуқтаест, ки ба маҷмӯи $\{x\}$ мутааллиқ несту лекин ба он хосияте соҳиб аст, ки дар ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи a нуқтаҳои маҷмӯи $\{x\}$ ҳастанд.

Таърифи кӯҳнаи қимати лимитии функцияро, ки дар боби 4 баён шуда буд, ба хотир меорем:

Адади b қимати лимитии функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ (ё лимити функция ҳангоми $x \to a$) номида мешавад, агар барои пайдарпаии $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$-и ба a наздикшавандаи дилхоҳ қиматҳои аргументи x, ки элементи x_n-умаш аз a тафовут дорад ($x_n \neq a$) пайдарпаии мувофиқи $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$-и қиматҳои функция ба b наздик шавад.

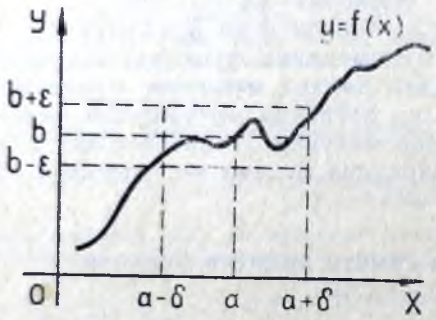
Акнун таърифи нави қимати лимитии функцияро баён мекунем. Адади b қимати лимитии функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати δ-е ёфт шавад, ки*

* Азбаски δ аз ε вобаста аст, пас баъзан $\delta = \delta(\varepsilon)$ менависанд.

барои ҳама қиматҳои аргументи x-и қаноаткунандаи нобаробарии $0 < |x - a| < \delta$ *нобаробарии* $|f(x) - b'| < \varepsilon$* *дуруст бошад.*

Қайди 1. Маҳдудияти $0 < |x - a|$ чунин маъно дорад, ки қиматҳои аргументи *x*-и аз *a* тафовутдошта муоина карда мешаванд. Агар ба хотир орем, ки функцияи омӯхташавандаи $f(x)$ *дар нуқтаи a муайян карда нашудааст,* онгоҳ ин маҳдудият фаҳмо мешавад. Агар ин маҳдудият намешуд, ба ҳосилаи $f'(a)$ чун қимати лимитии функцияи $F(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ дар нуқтаи *a* таъриф додан ғайриимкон мешуд.

Қайди 2. Дар таърифи нав ҷумлаи зерин аз нуқтаи назари мантиқӣ ҷумлаи асосӣ ба ҳисоб меравад: *барои ҳар яки* $\varepsilon > 0$ *адади мусбати* δ*-и ба ин* ε *ҷавобдиҳанда ёфт мешавад, ки он барои қиматҳои аргументи x-и нобаробарии* $0 < |x - a| < \delta$*-ро қаноаткунанда дурустии нобаробарии* $|f(x) - b'| < \varepsilon$*-ро кафолат медиҳад.*



Расми 8.1

Қайди 3. Аз идеяи ба атрофи нуқтаи $x = a$ бо саҳеҳии пешакӣ додашудаи ε наздикшавии функцияи $f(x)$ истифода карда, таърифи нави қимати лимитии функцияро ин тавр баён кардан мумкин аст: *адади b қимати лимитии функцияи* $f(x)$ *дар нуқтаи a номида мешавад, агар барои саҳеҳии пешакӣ додашудаи дилхоҳи* ε *чунин* δ*-атрофи нуқтаи a-ро нишон додан мумкин бошад, ки барои ҳама қиматҳои аргументи x-и аз a тафовутдошта ва мутааллиқи* δ*-атрофи номбурда адади* b' *қимати функцияи* $f(x)$*-ро бо саҳеҳии* ε *наздик намояд* (расми 8.1).

✓ *Теоремаи* 8.1. *Таърифи кӯҳнаю нави қимати лимитии функцияҳо баробарқувва мебошанд.*

Исбот. 1) Бигзор, *мувофиқи таърифи нав,* аввал адади *b* қимати лимитии $f(x)$ дар нуқтаи *a* бошад. Исбот мекунем, ки *мувофиқи таърифи кӯҳна* ҳам ин адади *b* қимати лимитии $f(x)$ дар нуқтаи *a* мебошад. Бигзор $\{x_n\}$ пайдарпаии ба адади *a* наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргументе бошад, ки ҳама қиматҳои он аз *a* тафовут доранд. Исбот кардан лозим аст,

---

* Таърифи кӯҳнаи қимати лимитии функцияро таърифи Гейнеи қимати лимитӣ ва таърифи навро таърифи Кошии қимати лимитӣ меноманд.

ки пайдарпаии мувофики $\{f(x_n)\}$-и қиматҳои функция ба адади b наздик мешавад. $\varepsilon > 0$-и дилхоҳро қайд мекунем. Мувофики таърифи нави қимати лимитии функция барои ин ε чунин $\delta > 0$-е ёфт мешавад, ки барои ҳамаи қиматҳои аргументи x, ки барояшон $0 < |x - a| < \delta$ мебошад, $|f(x) - b| < \varepsilon$ аст. Азбаски пайдарпаии $\{x_n\}$ ба адади a наздик мешавад, пас барои адади номбурдаи $\delta > 0$ чунин номери N ёфт мешавад, ки хангоми $n \geqslant N$ будан $0 < |x_n - a| < \delta$ мебошад. Пас, $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, $n \geqslant N$, ин чунин маъно дорад, ки $\{f(x_n)\}$ ба адади b наздик мешавад.

2) Бигзор акнун, *мувофиқи таърифи кӯҳна*, адади b қимати лимитии $f(x)$ дар нуқтаи a бошад. Исбот мекунем, ки *мувофиқи таърифи нав* ҳам ин адади b қимати лимитии $f(x)$ дар нуқтаи a мебошад. Фарз мекунем, ки ин тавр нест. Онгоҳ барои *ягон* адади мусбати ε адади мусбати кафолатдиҳандаи дар таърифи нав номбурда *ёфт намешавад*, яъне барои ин ε ва барои δ-и мусбати *ҳар қадар хурд* ақаллан якто чунин қимати x ёфт мешавад, ки $0 < |x - a| < \delta$ аст, лекин $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$ мебошад.

Дар асоси гуфтаҳоямон мо пайдарпаии $\delta_n = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$-ро гирифта ва тасдиқ карда метавонем, ки барои ҳар як элементи он $(\delta_n = 1/n)$ ақаллан якто қимати аргументи x_n ёфт мешавад, ки

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}, \text{ лекин } |f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon. \qquad (8.1)$$

Нобаробарии қисми чапи (8.1) чунин маъно дорад, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ ба адади a наздик мешавад ва аз элементҳои аз a тафовутдошта иборат аст. Лекин онгоҳ, мувофиқи таърифи кӯҳнаи қимати лимитии функция, пайдарпаии мувофики $\{f(x_n)\}$-и қиматҳои функция ба адади b наздик мешавад; ба ин нобаробарии қисми рости (8.1) барои ҳамаи номерҳои n дуруст мебошад, мухолиф аст. Мухолифоти ҳосилшуда теоремаро исбот менамояд.

Таърифи нави қимати лимитии функция барои баён кардани *таърифи нави дар нуқтаи $x = a^*$ бефосила будани функция* имконият медиҳад.

Таърифи нави дар нуқтаи $x=a$ бефосила будани функция. Функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ бефосила номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати δ-е ёфт шавад, ки барои ҳама қиматҳои аргументи x-и қаноаткунандаи нобаробарии $|x - a| < \delta$ нобаробарии

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (8.2)$$

дуруст бошад.

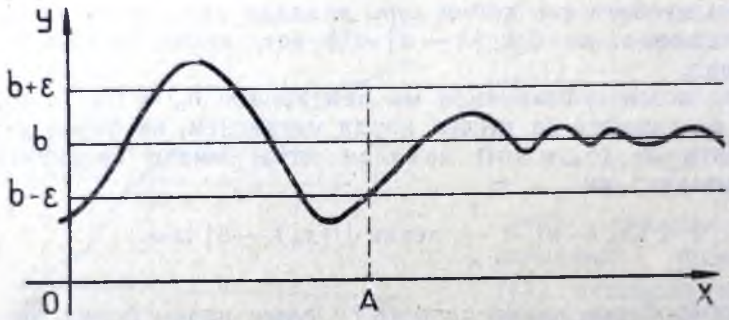
---

* Албатта, дар ин ҳолат фарз карда мешавад, ки функцияи $y = f(x)$ дар худи нуқтаи x низ муайян карда шудааст.

Қайди 4. Дар ин таъриф гузоштани маҳдудияти $0 < |x - a|$ зарурияте надорад, чунки ҳангоми $x = a$ будан қисми чапи нобаробарии (8.2) ба нуль табдил мешавад ва нобаробарии (8.2) дуруст аст.

Мисли баёноти болоӣ таърифи нави қимати лимитии функция баён карда мешавад ва ба таърифи кӯҳна *(дар мавриде, ки як ё ҳарду адади a ва b ба $+\infty$ ё $-\infty$ табдил мешавад)* баробарқувва будани ин таъриф исбот карда мешавад. Таърифи нави қимати лимитии функцияро барои мавриди $a = +\infty$ баён мекунем ва ба ҳамин маҳдуд мешавем: *адади b қимати лимитии $f(x)$ ҳангоми $x \to +\infty$ номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати A ёфт шавад, ки барои ҳама қиматҳои аргументи x-и қаноаткунандаи нобаробарии $x > A$ нобаробарии $|f(x) - b| < \varepsilon$ дуруст бошад.*

Расми 8.2 ин таърифро шарҳ медиҳад.



Расми 8.2.

Дар хотима таърифи нави қиматҳои лимитии рост ва чапи функцияи $f(x)$ дар нуқтаи a-ро баён мекунем: *адади b қимати лимитии рост (чап)-и функцияи $f(x)$ дар нуқтаи a номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати δ-е ёфт шавад, ки барои ҳама қиматҳои аргументи x-и қаноаткунандаи нобаробарии $0 < x - a < \delta$ $(0 < a - x < \delta)$ нобаробарии $|f(x) - b| < \varepsilon$ дуруст бошад.*

Исботи ба таърифи кӯҳнаи қимати лимитии рост (чап) баробарқувва будани ин таъриф ба исботи теоремаи 8.1 айнан монанд аст.

2. Шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти қимати лимитии функция (критерияи Коши). Баробарқуввагии таърифҳои кӯҳна ва нави қимати лимитии функцияро истифода карда, шартҳои зарурӣ ва кифоягии дар функцияи $f(x)$ мавҷуд будани қимати лимитӣ (дар нуқтаи a)-ро муқаррар менамоем.

Таъриф. Функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ шарти Коширо қаноат менамояд, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати δ-е ёфт шавад, ки ду қимати аргументи x'

ва x'' (ки нобаробариҳои $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$-ро қаноат менамоянд) чи хеле ки бошанд, барои қиматҳои мувофиқи функция нобаробарии

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

дуруст мебошад.

Теорема 8.2 (критерияи Коши). Барои он ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ қимати лимитии охирнок дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки функцияи $f(x)$ дар ин нуқта шарти Коширо қаноат намояд.

Исбот. 1) Шарти зарурӣ. Бигзор қимати лимитии охирноки $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ мавҷуд бошад. Исбот мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ шарти Коширо қаноат менамояд. $\varepsilon > 0$-и дилхоҳро мегирем. Мувофиқи таърифи нави қимати лимитии функция барои адади мусбати $\varepsilon/2$ адади мусбати δ-е ёфт мешавад, ки қиматҳои аргументҳои x' ва x'' (ки нобаробарихои $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$-ро қаноат менамоянд) чи хеле ки бошанд, барои қиматҳои мувофиқи функция нобаробариҳои $|f(x') - b| < \varepsilon/2$, $|f'(x'') - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ дуруст мебошанд. Азбаски модули суммаи ду бузургӣ аз суммаи модулҳои онҳо калон нест, пас аз нобаробариҳои охирин чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$|f(x') - f(x'')| = |[f(x') - b] - [f(x'') - b]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon.$$

Бо ҳамин исбот карда шуд, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ шарти Коширо қаноат менамояд.

2) Шарти кифоягӣ. Бигзор функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ шарти Коширо қаноат менамояд. Исбот мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ соҳиби қимати лимитӣ мебошад. Бигзор $\{x_n\}$ пайдарпаии ба a наздикшавандаи дилхоҳи қиматҳои аргумент бошад, ки ҳама элементҳои x_n-и он аз a тафовут доранд. Дар асоси таърифи кӯҳнаи қимати лимитии функция исбот кардан кифоя аст, ки пайдарпаии мувофиқи $\{f(x_n)\}$-и қиматҳои функция ба ягон адади b наздик мешавад; дар айни ҳол ин адади b барои ҳама пайдарпаиҳои ба a наздикшавандаи $\{x_n\}$ *якхел* аст ва $x_n \neq a$ мебошад.

Аввал *наздикшавандагии* пайдарпаии дилхоҳи $\{f(x_n)\}$-ро исбот мекунем. Бигзор $\varepsilon > 0$-и *дилхоҳ* дода шуда бошад. Ҳамон адади мусбати δ-еро мегирем, ки он мувофиқи шарти Коши ба ин ε мувофиқ меояд, ва, ба a наздикшавандагии пайдарпаии $\{x_n\}$-ро истифода карда, барои ин δ чунин номери N-ро интихоб мекунем, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан $0 < |x_n - a| < \delta$ мебошад. Дар айни ҳол барои p-и натуралии дилхоҳ ($p = 1, 2, \ldots$) ҳам ҳангоми $n \geqslant N$ будан албатта $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$ мешавад. Ду нобаробарии охирин дар асоси шарти Коши ҳангоми

$n \geqslant N$ будан ба нобаробарии $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$ меоранд, яъне пайдарпаии *асосӣ* будани пайдарпаии $\{f(x_n)\}$-ро исбот мекунанд. Дар асоси критерияи Коши барои пайдарпаиҳо (яъне теореман 3.19) пайдарпаии $\{f(x_n)\}$ ба ягон адади b наздик мешавад.

Ҳама пайдарпаиҳои $\{f(x_n)\}$, ки ба пайдарпаиҳои ба a наздикшавандаи гуногуни $\{x_n\}$ мувофиқанд, ба як лимити b соҳиб мебошанд. Ҳаминро исбот мекунем.

Бигзор $\{x_n\}$ ва $\{x'_n\}$ ду пайдарпаии ба a наздикшавандаи *дилхоҳи* қиматҳои аргумент бошанд, ки ҳама элементҳояшон аз a тафовут доранд. Дар асоси исботи боло ҳар ду пайдарпаиҳои $\{f(x_n)\}$ ва $\{f(x'_n)\}$ наздик мешаванд. Лимити пайдарпаии якумро бо b ва лимити пайдарпаии дуюмро бо b' ишорат мекунем. Исбот мекунем, ки $b = b'$ аст. Пайдарпаии ба a наздикшавандаи

$$x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots$$

-ро муоина мекунем. Дар асоси исботи боло пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функция

$$f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \ldots, f(x_n), f(x_n'), \ldots$$

пайдарпаии наздикшаванда мебошад. Лекин дар асоси п. 1 § 4 боби 3 *ҳама таҳтпайдарпаиҳои ин пайдарпай, аз ҷумла* $\{f(x_n)\}$ ва $\{f(x_n')\}$ *ба як лимит наздик мешаванд, яъне* $b' = b'$. Теореман 8.2 исбот шуд.

Шарти Коши ҳамин тавр баён карда мешавад ва шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти қиматҳои лимитии функцияи $f(x)$ ҳангоми $x \to +\infty$ ва ҳангоми $x \to -\infty$ ҳамон тавр мукаррар карда мешаванд.

Функцияи $f(x)$ *ҳангоми* $x \to +\infty$ *шарти Коширо қаноат менамояд, агар барои адади мусбати дилхоҳи* ε *чунин адади мусбати* A *ёфт шавад, ки барои ду қимати дилхоҳи аргументҳои* x' *ва* x'', *ки аз* A *калон мебошанд, нобаробарии* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ *дуруст аст.*

Тасдиқоти зерин ба мисли теореман 8.2 исбот карда мешавад: *барои он, ки функцияи* $f(x)$ *ҳангоми* $x \to +\infty$ *қимати лимитии охирнок дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки он ҳангоми* $x \to +\infty$ *шарти Коширо қаноат намояд.*

§ 2. Маҳдудияти локалии функцияҳое, ки қиматҳои лимитӣ доранд

Дар мувофиқатии комили таърифи маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ, ки аз боло (аз поён)* маҳдуданд, мафҳуми *функцияи дар маҷмӯи додашуда аз боло (аз поён) маҳдудро* меомӯзем.

---

* Ба п. 5 § 1 боби 2 ниг.

Таърифи 1. *Функцияи* $f(x)$ *дар маҷмӯи* $\{x\}$ *аз боло (аз поён) маҳдуд номида мешавад, агар чунин адади ҳақиқии* M *(адади ҳақиқии* m*) ёфт шавад, ки барои ҳама қиматҳои* x*-и маҷмӯи* $\{x\}$ *нобаробарии* $f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant m)$ *дуруст бошад.*

Дар ин ҳолат адади M (адади m) дар маҷмӯи $\{x\}$ ҳудуди болоии (поёнии) функцияи $f(x)$ номида мешавад.

Таърифи 2. *Функцияи* $f(x)$ *дар маҷмӯи* $\{x\}$ *аз ҳар ду тараф маҳдуд ё фақат маҳдуд номида мешавад, агар он дар ҳамин маҷмӯъ ҳам аз боло ва ҳам аз поён маҳдуд бошад, яъне чунин ададҳои ҳақиқии* m *ва* M *ёфт мешаванд, ки барои ҳама қиматҳои аргументи* x*-и маҷмӯи* $\{x\}$ *нобаробарии* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *дуруст мебошад.*

Ҳамин тариқ, дар маҷмӯи $\{x\}$ маҳдуд будани функцияи $f(x)$ амалан маънои маҳдудиятии маҷмӯи ҳама қиматҳои ин функцияро дорад.

Мисолҳо. 1) Функцияи $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ дар нимсегменти $[0, \pi/2]$ аз боло маҳдуд набуда, аз поён маҳдуд аст (адади дилхоҳи $m \leqslant 1$-ро ба сифати ҳудуди поёнӣ гирифтан мумкин аст).

2) Функцияи Дирихле* дар сегменти дилхоҳи $[a, b]$ аз ҳар ду тараф маҳдуд аст (адади дилхоҳи $m \leqslant 0$-ро ба сифати ҳудуди поёнӣ ва адади дилхоҳи $M \geqslant 1$-ро ба сифати ҳудуди болоӣ гирифтан мумкин аст).

Теорема 8.3. *Агар функцияи* $f(x)$ *дар нуқтаи* $x = a$ *қимати лимитии охирнок дошта бошад, онгоҳ ягон* δ*-атрофи нуқтаи* a**** *вуҷуд дорад, ки барои ҳама қиматҳои аргументи* δ*-атрофи номбурда функцияи* $f(x)$ *маҳдуд мебошад.****

Исбот. Бигзор $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ бошад. Мувофиқи таърифи нави қимати лимитии функция барои ягон адади мусбати ε чунин адади мусбати δ-е ёфт мешавад, ки ҳангоми $0 < |x - a| < \delta$ будан $|f(x) - b| < \varepsilon$ аст ё ҳангоми $a - \delta < x < a + \delta$ ва $x \neq a$ будан

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \qquad (8.3)$$

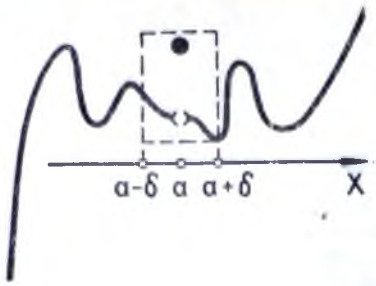
мебошад.

---

* Ба хотир меорем: функцияе, ки барои ҳама қиматҳои рационалии аргумент баробари як мебошад ва барои ҳама қиматҳои иррационалии аргумент баробари нуль мебошад, *функцияи Дирихле* номида мешавад.

** Ба хотир меорем: интервали $(a - \delta, a + \delta)$, ки дар ин ҷо $\delta > 0$ аст, δ*-атрофи нуқтаи* a номида мешавад.

*** Мо мавридеро, ки функцияи $y = f(x)$ дар ягон маҷмӯи $\{x\}$, ки ҳеҷ ягон δ-атрофи нуқтаи a-ро тамоман пур намекунад, истисно намекунем.



Расми 8.3.

Агар қимати $x = a$ *ба соҳаи муайянии функция дохил набошад,* онгоҳ теорема исбот шудааст (чунки нобаробариҳои (8.3)) чунин маъно доранд, ки барои ҳама қиматҳои аргументи x-и δ-атрофи нуқтаи a қиматҳои функция дар байни $b - \varepsilon$ ва $b + \varepsilon$ воқеъ мебошанд).

Агар функцияи $f(x)$ *муайян бошад ва ҳангоми* $x = a$ будан дар нуқтаи a ягон қимати $f(a)$-ро қабул намояд, онгоҳ аз ду ададҳои $(b - \varepsilon)$ ва $f(a)$ хурдтаринашро бо m ва аз ду адади $(b + \varepsilon)$ ва $f(a)$ калонтаринашро бо M ишорат карда, аз нобаробариҳои (8.3) нобаробариҳои зеринро ҳосил кардан мумкин аст:

$$\text{ҳангоми } a - \delta < x < a + \delta \text{ будан } m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Нобаробарии охирин чунин маъно дорад, ки функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои δ-атрофи нуқтаи a маҳдуд мебошад. Теорема исбот шуд. Расми 8.3 теоремаи 8.3-ро тасвир мекунад.

Қайд. Хосиятҳои функция, ки теоремаи 8.3 муқаррар мекунад, *маҳдудияти локалии функцияи соҳиби қимати лимит* номида мешавад.

Натиҷаи теоремаи 8.3. *Агар функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ маҳдуд бошад, онгоҳ ин функция барои ҳама қиматҳои аргументи ягон δ-атрофи нуқтаи a маҳдуд мебошад. (Функцияи дар нуқтаи $x = a$ маҳдуд дар ин нуқта қимати лимитии маҳдуд дорад.)*

§ 3. Теорема дар бораи устувории аломати функцияи бефосила

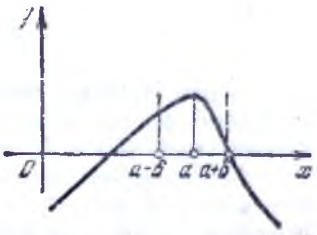
Теоремаи 8.4. *Агар функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ бефосила бошад ва агар $f(a) \neq 0$ бошад, онгоҳ чунин δ-атрофи нуқтаи a вуҷуд дорад, ки барои ҳама қиматҳои аргументи δ-атрофи номбурда функцияи $f(x)$ ба нуль табдил намешавад ва аломати ба аломати $f(a)$ мувофиқро соҳиб аст.*

Исбот. Азбаски функция дар нуқтаи a бефосила мебошад, онгоҳ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ вуҷуд дорад ва $b = f(a) \neq 0$ аст. Мувофиқи таърифи нави қимати лимитии функция барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин $\delta > 0$ ёфт мешавад, ки ҳангоми

$$a-\delta<x<a+\delta \text{ шудан* } b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon. \qquad (8.4)$$

Ба сифати ε адади мусбатеро мегирем, ки он талаботи $\varepsilon<|b|$-ро қаноат менамояд. Дар ҳамингуна интихоби ε ҳар се адади $b-\varepsilon$, $b+\varepsilon$ ва b дорои *якхел аломат* мешаванд. Пас, дар асоси (8.4) функцияи $f(x)$ дар ҳама чои δ-атрофи нуқтаи a аломати адади $b=f(a)$-ро нигоҳ медорад. Теорема исбот шуд. Расми 8.4 теоремаи 8.4-ро тасвир мекунад.

Қайд ба теореми 8.4. Теоремаи 8.4-ро барои мавриде, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи додашудаи $x=a$ *аз рост (аз чап)* бефосила мебошад, исбот кардан мумкин аст. Бигзор δ ягон адади мусбат бошад. Нимсегменти $[a, a+\delta]$-ро *ниматрофи рости нуқтаи* $x=a$ ва нимсегменти $(a-\delta, a]$-ро *ниматрофи чапи нуқтаи* $x=a$ меномем. Тасдиқоти зерин дуруст аст: *агар функцияи* $f(x)$ *дар нуқтаи* $x=a$ *аз рост (аз чап) бефосила бошад ва агар* $f(a)\neq a$ *бошад, онгоҳ чунин ниматрофи рост (чап)-и нуқтаи* $x=a$ *ёфт мешавад, ки барои ҳама қиматҳои аргументи ниматрофи номбурда функцияи* $f(x)$ *ба нуль табдил намешавад ва аломати ба аломати* $f(a)$ *мувофиқро соҳиб аст.*



Расми 8.4.

Исботи ин тасдиқот қариб исботи теоремаи 8.4-ро такрор менамояд, фақат ба чои нобаробарии чапи (8.4) мо нобаробарии $a\leqslant x<a+\delta$ $(a-\delta<x\leqslant a)$-ро ҳосил менамоем.

§ 4. Аз қимати фосилавии дилхоҳ гузаштани функцияи бефосила

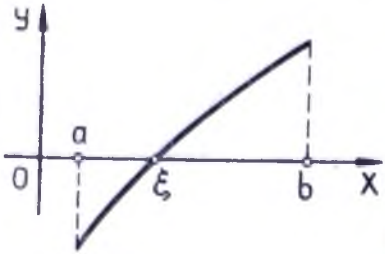
1. Аз нуль гузаштани функцияи бефосила ҳангоми ивазшавии аломатҳо.

Теореми 8.5. *Бигзор функцияи* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *бефосила бошад, ва бигзор қиматҳои ин функция дар нуқтаҳои сегмент* $f(a)$ *ва* $f(b)$ *ададҳои аломаташон гуногун бошанд. Онгоҳ дар дохили сегменти* $[a, b]$ *чунин нуқтаи* ξ *ёфт мешавад, ки дар он қимати функция баробари нуль аст.*

Исбот. Барои муайянӣ фарз мекунем, ки $f(a)<0$, $f(b)>0$ аст. Маҷмӯи $\{x\}$-и *ҳама қиматҳои* x-*и сегменти* $[a, b]$-*ро муоина мекунем, ки барои онҳо* $f(x)<0$ *аст.* Ин маҷмӯъ ақал-

---

* Дар ин ҳолат ба хориҷ кардани қимати $x=a$ зарурияте нест, чунки барои функцияи бефосилаи $f(x)$ қимати $f(a)=b$ нобаробарии рости (8.4)-ро низ қаноат менамояд.



Расми 8.5.

лан якто элементи $x = a$ дорад (*чунки* $f(a) < 0$ аст), ва *аз боло маҳдуд аст* (масалан, қимати $x = b$). Мувофиқи теоремаи 2.1 дар маҷмӯи $\{x\}$ ҳудуди болоии саҳеҳ вуҷуд дорад, ки мо онро бо ξ ишорат менамоем.

Пеш аз ҳама қайд мекунем, ки нуқтаи ξ нуқтаи *дохилии* сегменти $[a, b]$ мебошад, чунки аз бефосилагии функцияи $f(x)$ (дар сегменти $[a, b]$) ва аз шарти $f(a)<0$, $f(b)>0$, дар асоси қайди теоремаи 8.4, натиҷа мебарояд, ки ниматрофи рости нуқтаи $x = a$ ёфт мешавад, ки дар ҳудудҳои он $f(x) < 0$ аст, ва ниматрофи чапи нуқтаи $x = b$ ёфт мешавад, ки дар ҳудудҳои он $f(x) > 0$ аст. Акнун исбот мекунем, ки $f(\xi) = 0$ аст. Агар ин интавр намешуд, онгоҳ мувофиқи теоремаи 8.4 δ-атрофи $\xi - \delta < x < \xi + \delta$-и нуқтаи ξ ёфт мешуд, ки *дар ҳудудҳои он функцияи* $f(x)$ *соҳиби аломати муайян мешуд*. Лекин ин имконнопазир аст, чунки, мувофиқи таърифи ҳудуди болоии саҳеҳ, ақаллан аз нимсегменти $\xi - \delta < x \leqslant \xi$ якто қимати x ёфт мешавад, ки $f(x) < 0$ аст ва барои қимати дилхоҳи x-и интервали $\xi < x < \xi + \delta$ $f(x) \geqslant 0$ мебошад. Инак, $f(\xi) = 0$. Теорема исбот шуд. Расми 8.5 теоремаи 8.5-ро тасвир мекунад.

2. Аз қимати фосилавии дилхоҳ гузаштани функцияи бефосила.

Теоремаи 8.6. *Бигзор функцияи* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *бефосила бошад, дар айни ҳол* $f(a) = A$, $f(b) = B$. *Бигзор* C *адади дилхоҳе бошад, ки дар байни* A *ва* B *воқеъ аст. Онгоҳ дар сегменти* $[a, b]$ *чунин нуқтаи* ξ *ёфт мешавад, ки* $f(\xi) = C$ *аст.*

Исбот. Фақат мавридеро омӯхтан лозим, ки $A \neq B$ аст ва C бо ҳеҷ ягон адади A ва B мувофиқ нест. Бигзор барои муайянӣ $A < B$, $A < C < B$ бошад. Функцияи $\varphi(x) = f(x) - C$-ро муоина мекунем. Ин функция дар сегменти $[a, b]$ (чун фарқи функцияҳои бефосила) бефосила мебошад ва дар нӯҳои ин сегмент қиматҳои аломатҳояшон гуногунро қабул мекунад:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0, \quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Мувофиқи теоремаи 8.5 дар дохили сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки $\varphi(\xi) = f(\xi) - C = 0$ аст. Пас, $f(\xi) = C$. Теорема исбот шуд.

§ 5. Маҳдудияти функцияе, ки дар сегмент бефосила аст

Теоремаи 8.7 (*теоремаи якуми Вейер-*

штрасс). Агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила бошад, онгоҳ он дар ин сегмент маҳдуд аст.

Исбот. Исбот мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ аз боло маҳдуд мебошад (аз поён маҳдуд будани он мисли ҳамин исбот карда мешавад).

Баръаксашро фарз мекунем, яъне фарз мекунем, ки $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ аз боло маҳдуд намебошад.

Онгоҳ барои адади натуралии *дилхоҳи* n $(n = 1, 2, \ldots)$ аз сегменти $[a, b]$ ақаллан якто нуқтаи x_n ёфт мешавад, ки $f(x_n) > n$ аст (вагарна $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ аз боло маҳдуд мешуд).

Ҳамин тариқ, аз сегменти $[a, b]$ пайдарпаии қиматҳои x_n ёфт мешавад, ки пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функцияи $\{f(x_n)\}$ беохир калон мешаванд. Дар асоси теоремаи Больцано-Вейерштрасс (ба теореми 3.17-и п. 4 § 4 боби 3 нигар.) аз пайдарпаии $\{x_n\}$ тахтпайдарпаии ба нуқтаи ξ (-и дар асоси қайди 2-юми теоремаи номбурда мутааллиқи сегменти $[a, b]$) наздикшавандаро чудо кардан мумкин аст. Ин тахтпайдарпаиро бо символи $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ишорат мекунем. Дар асоси дар нуқтаи ξ бефосила будани функцияи $f(x)$ тахтпайдарпаии мувофиқи қиматҳои функцияи $\{f(x_k)\}$ бояд ба $f(\xi)$ наздик шавад. Лекин ин имконнопазир аст, чунки тахтпайдарпаии $\{f(x_k)\}$, ки аз пайдарпаии беохир калони $\{f(x_n)\}$ чудо карда шуда буд, худаш беохир калон мебошад (ба п. 1 § 4 боби 3 нигар.). Мухолифоти ҳосилшуда теоремаро исбот мекунад.

Қайд. Тасдиқоте, ки ба теоремаи 8.7 монанд аст, барои интервал (ё нимсегмент) аллакай нодуруст аст, яъне аз бефосилагии функция дар интервал (ё нимсегмент) аллакай натиҷа намебарояд, ки ин функция дар маҷмӯи номбурда бефосила мебошад. Масалан, функцияи $f(x) = 1/x$-ро дар интервали $(0, 1)$ (ё дар нимсегменти $(0, 1]$) муоина менамоем. Ин функция дар интервал (ё нимсегмент)-и номбурда бефосила мебошад, лекин дар он маҳдуд намебошад, чунки пайдарпаии нуқтаҳои $x_n = 1/n$ $(n = 2, 3, \ldots)$-и мутааллиқи интервал (ё нимсегмент)-и номбурда вуҷуд дорад, ки пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функцияи $\{f(x_n)\} \approx \{n\}$ беохир калон мебошад.

§ 6. Ҳудудҳои саҳеҳи функция ва ба онҳо оид шудани функцияҳое, ки дар сегмент бефосила мебошанд

1. **Мафҳуми ҳудуди болоии саҳеҳ ва ҳудуди поёнии саҳеҳи функция дар маҷмӯи додашуда.** Функцияи $f(x)$-ро муоина мекунем, ки он дар маҷмӯи додашудаи $\{x\}$ аз боло (аз поён) маҳдуд мебошад.* Мо мафҳуми ҳудуди болоии (поёнии) са-

* Таърифи функцияе, ки дар маҷмӯи додашуда аз боло (аз поён) маҳдуд мебошад, дар ибтидои § 2-и ҳамин боб дода шуда буд.

хеҳро барои маҷмӯи ҳама қиматҳои ин функция (ба п. 5 § 1 боби 2 ниг.) истифода карда, ба таърифи зерин меоем: *Адади M (адади m) дар маҷмӯи {x} ҳудуди болоии (поёнии) саҳеҳи функцияи f(x) номида мешавад, агар ду талаботи зерин иҷро шавад*: 1) *барои ҳар як қимати x-и маҷмӯи {x} нобаробарии* $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$) *дуруст аст* 2) *адади мусбати ε чи хеле ки бошад, аз маҷмӯи {x} ақаллан якто қимати x ёфт мешавад, ки барояш нобаробарии*

$$f(x) > M - \varepsilon \quad (f(x) < m + \varepsilon)$$

дуруст аст.

Дар ин таъриф талаботи 1) тасдиқ мекунад, ки адади M (адади m) дар маҷмӯи $\{x\}$ яке аз ҳудудҳои болоӣ (поёнӣ)-и функцияи $f(x)$ мебошад ва талаботи 2) тасдиқ мекунад, ки ин ҳудуд *хурдтарин (калонтарин)* мебошад ва хурд (калон) кардан мумкин нест. Барои ишорат кардани ҳудуди болоии саҳеҳ ва ҳудуди поёнии саҳеҳи функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи $\{x\}$ символҳои зерин истифода карда мешаванд:

$$M = \sup_{\{x\}} \{f(x)\}, \quad m = \inf_{\{x\}} \{f(x)\}.$$

Аз теоремаи 2.1 (ки дар п. 5 § 1 боби 2 исбот шуда буд) тасдиқоти зерин бевосита бармеояд: *агар функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи $\{x\}$ аз боло (аз поён) маҳдуд бошад, онгоҳ функцияи $f(x)$ дар ҳамин маҷмӯъ ҳудуди болоии (поёнии) саҳеҳ дорад.*

Чунин савол пайдо шуданаш табиист: *оё ҳудуди болоии (поёнии) саҳеҳи функция имконпазир аст,* яъне оё дар байни нуқтаҳои маҷмӯи $\{x\}$ чунин нуқтаи x-е мавҷуд ҳаст, ки дар он қимати функция ба ин ҳудуд баробар шавад? Мисоли зерин нишон медиҳад, ки ҳудудҳои болоӣ ва поёнии саҳеҳ, *умуман, имконпазир* намебошанд.

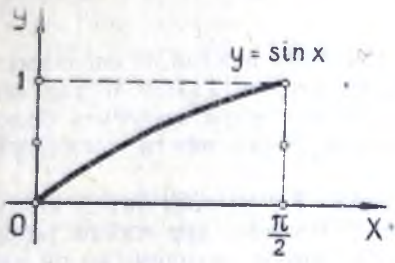
Функцияи

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ ҳангоми } 0 < x < \pi/2 \text{ будан,} \\ 1/2 \text{ ҳангоми } x = 0 \text{ ва } x = \pi/2 \text{ будан} \end{cases}$$

-ро дар сегменти $[0, \pi/2]$ муоина мекунем. Ин функция дар сегменти $[0, \pi/2]$ ҳам аз боло ва ҳам аз поён маҳдуд аст ва дар ин сегмент ҳудуди болоии саҳеҳи $M = 1$ ва ҳудуди поёнии саҳеҳи $m = 0$ дорад. Аммо ин функция дар ҳеҷ ягон нуктаи сегменти $[0, \pi/2]$ қиматҳои ба ин ҳудудҳо баробарро қабул намекунад (расми 8.6). Ҳамин тариқ, функцияи муонашаванда дар сегменти $[0, \pi/2]$ на қимати максимум ва на қимати минимум дорад.

Ба он диққат медиҳем, ки функцияи муоинашаванда дар сегменти $[0, \pi/2]$ функцияи бефосила намебошад. Ин ҳолат тасодуфӣ нест, чунки, чунон ки мо дар пункти оянда исбот ме-

кунем, функцияе, ки дар сегмент бефосила мебошад, албатта дар ягон нуқтаҳои ин сегмент ба ҳудудҳои болой ва поёнии саҳеҳаш соҳиб мешавад.



Расми 8.6

2. Ба ҳудудҳои саҳеҳаш ноил шудани функцияе, ки дар сегмент бефосила мебошад. Бигзор функцияи $f(x)$ дар ягон сегменти $[a, b]$ бефосила бошад. Онгоҳ, дар асоси теоремаи 8.7, ин функция дар ҳамин сегмент ҳам аз боло ва ҳам аз поён маҳдуд мебошад. Пас, дар асоси тасдиқоти дар пункти гузашта баёншуда, ин функция дар сегменти $[a, b]$ ҳудуди болоии саҳеҳи M ва ҳудуди поёнии саҳеҳи m *дорад*. Исбот мекунем, ки ин ҳудудҳо имконпазиранд.

Теоремаи 8.8 (*теоремаи дуюми Вейерштрасс*). *Агар функцияи* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *бефосила бошад, онгоҳ он дар ин сегмент ба ҳудудҳои болой ва поёнии саҳеҳаш ноил мешавад* (яъне дар сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаҳои x_1 ва x_2 ёфт мешаванд, ки $f(x_1) = M$ ва $f(x_2) = m$ аст).

Исбот. Исбот мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ ба ҳудуди болоии саҳеҳаш M ноил мешавад (ба ҳудуди поёнии саҳеҳи m ноил шудани функцияи $f(x)$ ҳамин тавр исбот карда мешавад).

Баръаксашро фарз мекунем, яъне фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар ҳеҷ ягон нуқтаи сегменти $[a, b]$ қимати ба M баробарро қабул намекунад. Онгоҳ нобаробарии $f(x) < M$ барои ҳама нуқтаҳои сегменти $[a, b]$ дуруст аст, ва мо дар ҳама ҷои сегменти $[a, b]$ функцияи мусбати

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

-ро муоина карда метавонем. Азбаски махраҷ $M - f(x)$ ба нуль табдил намешавад ва дар сегменти $[a, b]$ бефосила мебошад, пас, мувофиқи теоремаи 4.2, функцияи $F(x)$ ҳам дар сегменти $[a, b]$ бефосила мебошад. Дар ингуна маврид, мувофиқи теоремаи 8.7, функцияи $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$ маҳдуд мебошад, яъне чунин ададӣ мусбати B ёфт мешавад, ки барои ҳама x-ҳои сегменти $[a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant B$$

аст. Азбаски $M - f(x) > 0$ аст, пас нобаробарии охиринро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{B}.$$

Муносибати навишташуда, ки барои ҳама нуқтаҳои x-и сегменти $[a, b]$ дуруст аст, ба он мухолиф аст, ки адади M дар сегменти $[a, b]$ ҳудудҳои болоии саҳеҳи (*аз ҳама ҳудудҳои болой хурдтарини*) функцияи $f(x)$ мебошад. Мухолифоти ҳосилшуда теоремаро исбот мекунад.

Қайди 1. Тасдиқоти ба теоремаи 8.8 монанд барои интервал ва нимсегмент мавқеъ надорад. Воқеан, дар қайди теоремаи 8.7 (ба § 5 нигр.) мо функцияеро мисол овардем, ки он дар интервал (нимсегмент) бефосила мебошад ва дар он маҳдуд намебошад (ингуна функция на фақат ба ҳудуди болоии (ё поёнии) саҳеҳ ноил намешавад, балки он ҳудуд ҳатто вучуд надорад!).

Қайди 2. Баъди исботи он, ки функцияи $f(x)$-и дар сегмент бефосила дар ҳамин сегмент ба ҳудудҳои болой ва поёнии саҳеҳаш ноил мешавад, мо ҳудуди болоии саҳеҳро дар ҳамин сегмент *қимати максимум* ва ҳудуди поёнии саҳеҳро дар ҳамин сегмент *қимати минимум* меномем ва теоремаи 8.8-ро ба намуди зерин баён мекунем: *функцияи дар сегмент бефосила дар ҳамин сегмент қиматҳои максимум ва минимум дорад**.

Қайди 3. Функцияе, ки дар сегмент бефосила мебошад, ба қатори дигар хосиятҳояш ба хосияте соҳиб аст, ки он *бефосилагии мунтазам* номида мешавад. Мо ин хосиятро дар § 4 боби 10 меомӯзем. Мо дар ин ҷо фақат қайд мекунем, ки материали пп. 1 ва 2-юми § 4 боби 10-ро бевосита баъди материали ҳамин параграф омӯхтан мумкин аст.

§ 7. Афзуншавии (камшавии) функция дар нуқта. Максимуми (минимуми) локалӣ

1. Афзуншавии (камшавии) функция дар нуқта. Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи c муайян аст.

---

* Қайд мекунем, ки функцияи дар ягон сегмент канишдор дар ҳамин сегмент соҳиби қиматҳои максимум ва минимум мебошад. Масалан, функцияи Дирихле

$$y = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационалӣ бошад.} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационалӣ бошад,} \end{cases}$$

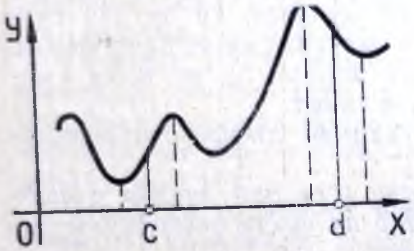
ки аз § 1-уми боби 4 ба мо маълум аст, дар нуқтаи дилхоҳи сегменти дилхоҳи $[a, b]$ канишдорад, лекин он дар ҳамин сегмент қимати максимуми ба як баробар ва қимати минимуми ба нуль баробарро дорад.

Таъриф. Функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c меафзояд (кам мешавад), агар чунин атрофи нуқтаи c ёфт шавад, ки дар ҳудудҳои он ҳангоми $x > c$ будан $f(x) > f(c)$ ва ҳангоми $x < c$ будан $f(x) < f(c)$ (ҳангоми $x > c$ будан $f(x) < f(c)$ ва ҳангоми $x < c$ будан $f(x) > f(c)$) аст.

Дар расми 8.7 функцияе тасвир шудааст, ки он дар нуқтаи c меафзояд ва дар нуқтаи d кам мешавад.

Шарти кифоягии дар нуқтаи c афзуншавии (камшавии) функцияи $f(x)$-ро муқаррар мекунем.

Теоремаи 8.9. Агар функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c дифференсиронидашаванда ва $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$) бошад, онгоҳ ин функция дар нуқтаи c меафзояд (кам мешавад).



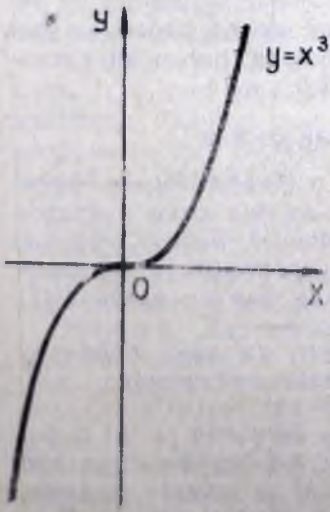
Расми 8.7.

Исбот. Теоремаро барои мавриди $f'(c) > 0$ исбот мекунем (мавриди $f'(c) < 0$ айнан ҳамин тавр муоина карда мешавад). Азбаски

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

аст, пас мувофики таърифи нави қимати лимитии функция, барои $\varepsilon > 0$-и *дилхоҳ* чунин δ-и мусбате ёфт мешавад, ки

$$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon \quad (0 < |x - c| < \delta) \qquad (8.5)$$



Расми 8.8.

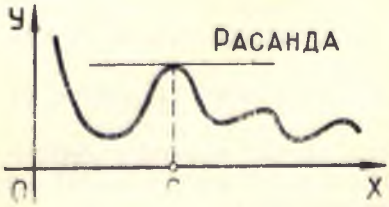
Ба сифати ε адади мусбати аз $f'(c)$ хурдро мегирем. Онгоҳ $f'(c) - \varepsilon > 0$ ва, пас, аз (8.5) чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad (0 < |x - c| < \delta). \qquad (8.6)$$

(8.6) чунин маъно дорад, ки *дар ҳамаи δ-атрофи нуқтаи c* ҳангоми $x > c$ будан $f(x) > f(c)$ ва ҳангоми $x < c$ будан $f(x) < f(c)$ аст. Дар нуқтаи c афзуншавии функцияи $f(x)$ исбот шуд.

Қайд. Қайд мекунем, ки *мусбат (манфӣ) будани ҳосилаи $f'(c)$ шарти зарурии дар нуқтаи c афзуншавии (камшавии) функцияи f намебошад.* Ба сифати мисол функцияи $f(x) = x^3$-ро нишон медиҳем, ки он дар нуқтаи $x = 0$ меафзояд ва бо вуҷуди ин дар ин нуқта ба ҳосилаи $f'(0) = 0$ соҳиб аст (графики ин функция дар расм 8.8 тасвир шудааст).

2. Максимуми локалӣ ва минимуми локалии функция. Бигзор боз функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи c муайян бошад.



Расми 8.9.

Таъриф. Функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c максимум (минимум)-и локалӣ дорад, агар чунин атрофи нуқтаи c ёфт шавад, ки дар ҳудудҳои он қимати $f(c)$ аз байни ҳама қиматҳои ин функция қимати калонтарин (хурдтарин) бошад.

Дар расми 8.9 функцияи f(x) тасвир шудааст, ки он дар нуқтаи c максимуми локалӣ дорад.

Максимуми локалӣ ва минимуми локалӣ ба як номи умумии *экстремуми локалӣ* муттаҳид мешаванд.

Шарти зарурии экстремуми функцияи дифференсиронидашавандаро муқаррар мекунем.

Теорема 8.10. *Агар функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c дифференсиронидашаванда бошад ва дар ин нуқта экстремуми локалӣ дошта бошад, онгоҳ $f'(c) = 0$ аст.*

Исбот. Азбаски функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c экстремуми локалӣ дорад, пас $f(x)$ дар ин нуқта на афзуда метавонаду на кам шуда. Пас, дар асоси теореми 8.9, ҳосилаи $f'(c)$ на мусбат шуда метавонаду на манфӣ, яъне $f'(c) = 0$.

Теореми 8.10 маънои геометрии содда дорад: он тасдиқ мекунад, ки агар дар нуқтаи хати качи $y = f(x)$, ки ба он экстремуми локалии функцияи $f(x)$ мувофиқ меояд, расандаи графики функцияи $y = f(x)$ вуҷуд дошта бошад, онгоҳ ин расанда ба тири Ox параллель аст (ба расми 8.9 нигар.).

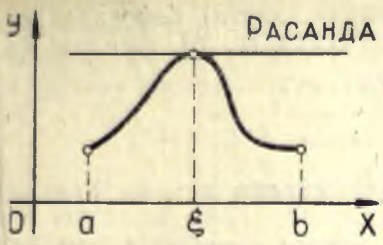
§ 8. Теорема дар бораи нули ҳосила

Теореми 8.11 (*теореми Ролль**). *Бигзор функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила ва дар ҳама нуқтаҳои ин сегмент дифференсиронидашаванда бошад. Бигзор, ғайр аз он, $f(a) = f(b)$ бошад. Онгоҳ дар дохили сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки қимати ҳосила дар ин нуқта $f'(\xi)$ ба нуль баробар аст.*

Мухтасаран чунин гуфтан мумкин аст, ки дар байни ду қиматҳои баробари функцияи дифференсиронидашаванда ҳатман нули ҳосилаи ин функция воқеъ аст.

Исбот. Азбаски функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила мебошад, пас, мувофиқи теореми 8.8, ин функция дар ҳамин сегмент ба қимати максималиаш M ва қимати минималиаш m соҳиб мешавад. Ду мавриди имконпазир аст: 1) $M = m$, 2) $M > m$. Дар мавриди 1) $f(x) = M = m = \text{const}$. Би-

* Мишель Ролль — математики франсавӣ (1652—1719).



Расми 8.10.

нобар ин хосилаи $f'(x)$ *дар нуқтаи дилхоҳи сегменти* $[a, b]$ *ба нуль баробар аст*. Дар мавриди $M > m$ будан, азбаски $f(a) = f(b)$ мебошад, пас чунин тасдиқ кардан мумкин аст, ки функция дар ягон нуқтаи *дарунии* ξ-и сегменти $[a, b]$ ақаллан ба яке аз ду қиматҳои M ё m ноил мешавад. Лекин онгоҳ функцияи $f(x)$ дар ин нуқтаи ξ соҳиби экстремуми локалӣ мебошад. Азбаски функцияи $f(x)$ дар нуқтаи ξ дифференсиронидашаванда мебошад, пас, теореми 8.10, $f'(\xi) = 0$ аст. Теорема пурра исбот шуд.

Теореми Ролль маънои геометрии содда дорад: агар ординатаҳои канории хати каҷи $y = f(x)$ баробар бошанд, онгоҳ, мувофиқи теореми Ролль, дар хати каҷи $y = f(x)$ нуқтае ёфт мешавад, ки дар он расандаи хати каҷ ба тири Ox параллель аст (расми 8.10).

Чунон ки сонитарҳо мебинем, теореми Ролль ба бисьёр формулаю теоремаҳои анализи математикӣ асос меша

§ 9. Формулаи афзоишҳои охирнок (формулаи Лагранж)

Теореми зерин, ки ба Лагранж* тааллуқ дорад, дар анализи математикӣ ва татбиқоти он аҳамияти калон дорад.

Теореми 8.12 *(теореми Лагранж). Агар функцияи* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *бефосила бошад ва дар ҳама нуқтаҳои дарунии ин сегмент дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ дар дарунии сегменти* $[a, b]$ *чунин нуқтаи* ξ *ёфт мешавад, ки формулаи*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \tag{8.7}$$

дуруст аст.

Формулаи (8.7) *формулаи Лагранж ё формулаи афзоишҳои охирнок* номида мешавад.

Исбот. Дар сегменти $[a, b]$ функцияи ёрирасони зеринро муоина мекунем:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{8.8}$$

Ҳамаи шартҳои теореми Ролль барои функцияи $F(x)$ иҷро мешавад. Инро месанҷем. Вокеан, $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$

* Жозеф Луи Лагранж — математик ва механики бузурги франсавӣ (1736—1813).

(чун фарқи функцияи $f(x)$ ва функцияи хаттӣ) бефосила аст ва дар ҳама нуқтаҳои дарунии сегменти $[a, b]$ ҳосилаи ба

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

баробарро дорад. Аз формулаи (8.8) маълум аст, ки $F(a) = F(b) = 0$.

Мувофиқи теоремаи Ролль дар дарунии сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки

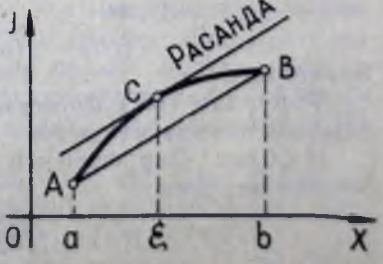
$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \qquad (8.9)$$

Аз баробарии (8.9) формулаи Лагранж (8.7) ҳосил мешавад. Бояд қайд кард, ки дар формулаи (8.7) $b > a$ ҳисобидан ҳатмӣ нест.

Қайд. Мо теоремаи Лагранжро чун натиҷаи теоремаи Ролль ҳосил кардем. Дар баробари ин бояд қайд кард, ки худи теоремаи Ролль мавриди хусусии теоремаи Лагранж (ҳангоми $f(a) = f(b)$ будан) мебошад.

Барои аниқ кардани маънои геометрии теоремаи Лагранж бояд қайд кард, ки бузургии $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ коэффициенти кунҷии бурандаест, ки он аз нуқтаҳои $A(a, f(a))$ ва $B(b, f(b))$-и хати қачи $y = f(x)$ мегузарад ва $f'(\xi)$ коэффициенти кунҷии расандаи хати қачи $y = f(x)$ мебошад, ки он аз нуқтаи $C(\xi, f(\xi))$ мегузарад. Формулаи Лагранж (8.7) чунин маъно дорад, ки дар хати қачи $y = f(x)$ дар байни нуқтаҳои A ва B чунин нуқтаи C ёфт мешавад, ки расандаи он ба бурандаи AB параллель аст (расми 8.11).

Формулаи Лагранжро ба намуди аз (8.7) қадре дигар навиштан аксар вақт бехтар мебошад. Бигзор $f(x)$ шартҳои теоремаи 8.11-ро қаноат намояд. Аз сегменти $[a, b]$ x_0-и дилхоҳро қайд мекунем ва ба он афзоиши дилхоҳи Δx медиҳем, лекин ин афзоиш бояд чунон бошад, ки қимати $(x_0 + \Delta x)$ ҳам дар сегменти $[a, b]$ воқеъ бошад. Онгоҳ, формулаи Лангранжро барои сегменти $[x_0, x_0 + \Delta x]$ навишта,



Расми 8.11.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(\xi) \qquad (8.10)$$

-ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо ξ ягон нуқтаест, ки дар бай-

ни x_0 ва $x_0 + \Delta x$ вокеъ аст. Тасдиқ кардан мумкин аст, ки аз интервали $0 < \theta < 1$ чунин адади θ (-и аз Δx вобастае) ёфт мешавад, ки $\xi = x_0 + \theta\Delta x$ аст. Ҳамин тариқ, формулаи (8.10)-ро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(x_0 + \theta\Delta x) \qquad (8.11)$$

дар ин ҷо θ ягон адади интервали $0 < \theta < 1$ мебошад. Формулаи Лагранж (8.11) барои афзоиши функция, ки ба воситаи афзоиши охирноки дилхоҳи Δx-и аргумент навишта шудааст, ифодаи аниқ мебошад. Ин намуди формулаи Лагранж термини «формулаи афзоишҳои охирнок»-ро тасдиқ мекунад.

§ 10. Баъзе натиҷаҳо аз формулаи Лагранж

1. Доимияти функцияе, ки дар интервал ҳосилаи ба нуль баробар дорад.

Теореми 8.13. *Агар функцияи $f(x)$ дар интервали (a, b) дифференсиронидашаванда бошад ва агар дар ҳама ҷои ин интервал $f'(x) = 0$ бошад, онгоҳ функцияи $f(x)$ дар интервали (a, b) доимӣ мебошад.*

Исбот. Бигзор x_0 ягон нуқтаи *қайдшудаи* интервали (a, b) ва x нуқтаи *дилхоҳи* ин интервал бошад.

Сегменти $[x_0, x]$ ба интервали (a, b) пурра тааллуқ дорад. Бинобар ин функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои сегменти $[x_0, x]$ дифференсиронидашаванда (ва, пас, бефосила ҳам) мебошад. Ин ба мо ҳуқуқ медиҳад, ки теоремаи Лагранжро дар сегменти $[x_0, x]$ ба функцияи $f(x)$ татбиқ намоем. Мувофиқи ин теорема дар даруни сегменти $[x_0, x]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi). \qquad (8.12)$$

Мувофиқи шарт ҳосилаи функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои интервали (a, b) ба нуль баробар аст. Пас, $f'(\xi) = 0$ ва мо аз формулаи (8.12) чунин баробариро ҳосил мекунем:

$$f(x) = f(x_0). \qquad (8.13)$$

Баробарии (8.13) тасдиқ мекунад, ки қимати функцияи $f(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи x-и интервали (a, b) ба қимати он дар нуқтаи *қайдшудаи* x_0 баробар аст. Ин чунин маъно дорад, ки функцияи $f(x)$ *дар ҳама ҷои интервали* (a, b) *доимӣ аст*. Теорема исбот шуд.

Теореми 8.13 маънои геометрии содда дорад: агар расандаи хати качи $y = f(x)$ дар ҳар як нуқтаи ягон қисмаш ба тири Ox параллель бошад, онгоҳ ҳамин қисми хати качи $y = f(x)$ порчаи хати рости ба тири Ox параллельро тасвир мекунад.

Қайд. Мо теореман 8.13-ро дар боби 6 ҳангоми исботи теореман 6.1 истифода карда будем. Дар ин ҷо боз қайд мекунем, ки ҳаман материали ҳамин боб (аз ҷумла, теореман 8.13) аз натиҷаҳои бобҳои 6 ва 7 комилан истифода намекунад. Ҳангоми такроран хондани ин китоб боби 8-ро бевосита баъди боби 5 омӯхта, баъд ба омӯхтани бобҳои 6 ва 7 шурӯъ кардан мумкин аст.

2. Шарти монотонии функция дар интервал. Ба сифати натиҷаи дуюми формулаи Лагранж шарти дар интервали додашуда камнашавӣ (афзуннашавӣ)-и функцияро меомӯзем.

Пеш аз ҳама, таърифи дар интервали додашуда камнашавӣ, афзуннашавӣ, афзуншавӣ ва камшавии функцияро ба хотир меорем.

1°. Функцияи $f(x)$ *дар интервали* (a, b) *кам намешавад (намеафзояд)*, агар барои ду нуқтаи дилхоҳи x_1 ва x_2-и интервали (a, b), ки шарти $x_1 < x_2$-ро қаноат менамоянд, нобаробарии

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

дуруст бошад.

2°. Функцияи $f(x)$ *дар интервали* (a, b) *меафзояд (кам намешавад)*, агар барои ду нуқтаи дилхоҳи x_1 ва x_2-и интервали (a, b), ки бо шарти $x_1 < x_2$ алоқаманданд, нобаробарии

$$f(x_1) < f(x_2) (f(x_1) > f(x_2))$$

дуруст бошад.

Теореман 8.14. *Барои он, ки функцияи* $f(x)$*-и дар интервали* (a, b) *дифференсиронидашаванда дар ҳамин интервал кам нашавад (наафзояд), зарур ва кифоя аст, ки ҳосилаи ин функция дар ҳама ҷои ин интервал ғайриманфӣ (ғайримусбат) бошад.*

Исбот. 1) Шарти кифоягӣ. Бигзор дар ҳама ҷои интервали (a, b) $f'(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ бошад. Исбот кардан лозим аст, ки $f(x)$ дар интервали (a, b) кам намешавад (намеафзояд). Бигзор x_1 ва x_2 ду нуқтаи дилхоҳи интервали (a, b) бошанд, ки онҳо шарти $x_1 < x_2$-ро қаноат менамоянд. Функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои сегменти $[x_1, x_2]$ дифференсиронидашаванда (ва, бинобар ин, бефосила ҳам) мебошад. Бинобар ин теоремаи Лагранжро дар сегменти $[x_1, x_2]$ ба $f(x)$ татбиқ кардан мумкин аст, дар натиҷа ифодаи зайлро ҳосил мекунем:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \tag{8.14}$$

дар ин ҷо $x_1 < \xi < x_2$.

Мувофиқи шарт $f'(\xi) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, $x_2 - x_1 > 0$. Бинобар ин қисми рости (8.14) ғайриманфӣ (ғайримусбат) аст, ки ин дар интервали (a, b) камнашавӣ (афзуннашавӣ)-и $f(x)$-ро исбот мекунад.

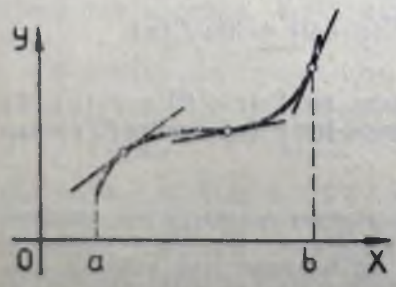
2) Шарти зарурӣ. Бигзор функцияи $f(x)$ дар интервали (a, b) дифференсиронидашаванда бошад ва дар ин интервал кам нашавад (наафзояд). Исбот кардан лозим аст, ки дар ҳама ҷои ин интервал $f'(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ аст. Азбаски $f(x)$ дар интервали (a, b) кам намешавад (намеафзояд), пас ин функция *дар ҳеҷ ягон нуқтаи интервали* (a, b) *кам шуда (афзуда) наметавонад.* Пас, дар асоси теореми 8.9, ҳосилаи $f'(x)$ *дар ҳеҷ ягон нуқтаи интервали* (a, b) *манфӣ (мусбат)* шуда наметавонад, ки ҳаминро исбот кардан лозим буд.

Теореми 8.15. *Барои он, ки функцияи* $f(x)$ *дар интервали* (a, b) *афзояд (кам шавад), кифоя аст, ки ҳосилаи* $f'(x)$ *дар ҳама ҷои ин интервал мусбат (манфӣ) бошад.*

Исботи ин аз рӯи схемаи исботи шарти кифоягии теореми 8.14 иҷро карда мешавад. Бигзор x_1 ва x_2 ду нуқтаи дилхоҳи интервали (a, b) бошанд, ки онҳо шарти $x_1 < x_2$-ро қаноат менамоянд. Формулаи Лагранжро барои сегменти $[x_1, x_2]$ навишта, баробарии (8.14)-ро ҳосил мекунем, лекин ин дафъа дар ин баробарӣ $f'(\xi) > 0$ (<0) мешавад.

Дар натиҷаи ин қисми чапи (8.14) мусбат (манфӣ) мешавад, ки ин дар интервали (a, b) афзуншавӣ (камшавӣ)-и $f(x)$-ро исбот мекунад.

Қайд. Дар интервали (a, b) мусбат (манфӣ) будани ҳосилаи $f'(x)$ *шарти зарурии* дар интервали (a, b) афзуншавӣ (камшавӣ)-и функцияи $f(x)$ намебошад. Чунончи, функцияи $y = x^3$ дар интервали $(-1, +1)$ меафзояд, лекин ҳосилаи ин функция $f'(x) = 3x^2$ дар ҳама ҷои ин интервал мусбат намешавад (дар нуқтаи $x = 0$ ба нуль табдил намешавад). Умуман, исбот кардан мумкин аст, ки агар ҳосилаи функцияи $f(x)$, яъне $f'(x)$ дар ҳама ҷои интервали (a, b) *(ба ғайр аз нуқтаҳои шумораашон охирнок,* ки дар онҳо ҳосила баробари нуль мешавад) мусбат (манфӣ) бошад, онгоҳ ин функция дар ҳамин интервал меафзояд (кам мешавад). (Барои исбот ба ҳар яки интервалҳои шумораашон охирнок, ки дар онҳо $f'(x)$ қатъиян мусбат (манфӣ) мебошад, теореми 8.15-ро татбиқ кардан ва дар ҳамон нуқтаҳое, ки дар онҳо ҳосила баробари нуль аст, бефосилагии $f(x)$-ро ба эътибор гирифтан кифоя аст).



Расми 8.12

Алоқамандии байни аломатҳои ҳосила ва самти тағйирёбии функцияро, ки теореми 8.15 муқаррар мекунад, аз тасвири геометрии он фаҳмидан осон аст. Азбаски ҳосила ба коэффициенти кунҷии расандаи графики функцияи $y = f(x)$ баробар аст, пас кунҷи тез ё кунҷи кунде, ки нури расандаи воқеи нимҳамвории болоӣ бо самти мусбати тири Ox ҳосил менамоянд, аломати ҳо-

силаро ифода мекунанд. Агар дар ҳама ҷои интервали (a, b) $f'(x) > 0$ бошад, онгоҳ дар ҳама ҷои ин интервал нури расандаи вокеи нимхаворияи боло бо тири Ox кунҷи тезро ташкил медиҳад, пас хати качи $y = f(x)$ ҳам дар ҳама ҷои ин интервал ба боло равон аст (расми 8.12).

3. Дар ҳосила набудани нуқтаҳои каниши ҷинси 1-ум ва каниши бартарафшаванда. Барои аниқ кардани як хосияти аҷиби ҳосила теоремаи Лагранжро татбиқ мекунем. Пеш аз ҳама тасдиқоти зеринро исбот менамоем. *Бигзор функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои ниматрофи рости (чапи) нуқтаи c ҳосилаи охирнок ва дар худи нуқтаи c ҳосилаи рост (чап) дошта бошад. Онгоҳ, агар ҳосилаи $f'(x)$ дар нуқтаи c қимати лимитии рост (чап) дошта бошад, ин қимати лимитӣ ба ҳосилаи рост (чап) (дар нуқтаи c) баробар аст.*

Барои исботи ин тасдиқот пайдарпаии дилхоҳи $\{x_n\}$-и қиматҳои аргументро, ки ба c аз рост (аз чап) наздик мешавад, муоина мекунем. Аз номери ба қадри кифоя калони n сар карда, ҳамаи x_n-ҳо ба ҳамон ниматрофе тааллуқ доранд, ки дар он функцияи $f(x)$ ҳосилаи якуми охирнок дорад; ҳаминро ба эътибор гирифта, теоремаи Лагранжро ба функцияи $f(x)$ аз рӯи сегменти* $[c, x_n]$ ($[x_n, c]$) татбиқ мекунем. Дар айни ҳол

$$\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(\xi_n) \qquad (8.15)$$

-ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо нуқтаи дар байни c ва x_n воқеъбуда бо ξ_n ишорат шудааст. Бигзор акнун дар баробарии (8.15) $n \to \infty$. Онгоҳ, маълум аст, ки аз рост (аз чап) $\xi_n \to c$. Азбаски мувофиқи шарт $f'(x)$ дар нуқтаи c ба қимати лимитии рост (чап)-и охирнок соҳиб аст, пас қисми рости (8.15), мувофиқи таърифи қимати лимитӣ, бояд ҳангоми $n \to \infty$ ба қимати лимитии номбурда майл намояд. Пас, ҳангоми $n \to \infty$ лимити қисми чапи (8.15) низ вуҷуд дорад. Мувофиқи таърифи ҳосилаи рост (чап) ин лимит ба $f'(c + 0)$ ($f'(c - 0)$) баробар аст. Инак, ҳангоми $n \to \infty$ баробарии (8.15)-ро лимит мегирем:

$$f'(c + 0) = \lim_{x \to c+0} f'(x), \quad (f'(c - 0) = \lim_{x \to c-0} f'(x).$$

Агар ба таври илова талаб намоем, ки $f'(c + 0) = f'(c - 0)$ шавад, онгоҳ аз мавҷудияти лимитҳои $\lim_{x \to c+0} f'(x)$ ва $\lim_{x \to c+0} f'(x)$ дар

---

* Ҳама шартҳои теоремаи Лагранж иҷрошавандаанд, чунки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи сегменти $[c, x_n]$ ($[x_n, c]$), ба ғайр аз нуқтаи c, дифференсиронидашаванда (ва, бинобар ин, бефосила ҳам) мебошад. Дар нуқтаи c аз рост (аз чап) бефосила будани $f(x)$ аз мавҷудияти $f'(c + 0)$ ($f'(c - 0)$) бармеояд.

нуқтаи c бефосила будани $f'(x)$ бармеояд.

Тасдиқоти ҳозир исбот кардаамонро ба ҳар як нуқтаи c-и ягон интервали (a, b) татбиқ намуда, тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем: *агар функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои интервали (a, b) ба ҳосилаи охирнок соҳиб бошад, онгоҳ $f'(x)$ дар ҳамин интервал соҳиби ҳам нуқтаҳои каниши бартарафшаванда ва ҳам нуқтаҳои каниши ҷинси 1-ум шуда наметавонад.*

Воқеан, агар дар ягон нуқтаи c-и интервали (a, b) қиматҳои лимитии рост ва чапи охирноки $f'(x)$ мавҷуд бошад, онгоҳ $f'(x)$ *дар нуқтаи c* (дар асоси тасдиқоти исботшуда) *бефосила* аст. Агар ақаллан яке аз ду қимати лимитии номбурда мавҷуд набошад, онгоҳ $f'(x)$ *дар нуқтаи c соҳиби каниши ҷинси 2-юм мешавад.* Функцияеро мисол меорем, ки ҳосилаи он вуҷуд дорад ва дар ҳама ҷои ягон интервал охирнок мебошад ва дар ягон нуқтаи ин интервал каниши ҷинси 2-юм дорад. Функцияи

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & \text{ҳангоми } x \neq 0 \text{ будан,} \\ 0 & \text{ҳангоми } x = 0 \text{ будан} \end{cases}$$

-ро дар интервали $(-1, +1)$ муоина мекунем. Маълум аст, ки ҳосилаи ин функция барои x-и дилхоҳи нобаробари нуль ($x \neq 0$) вуҷуд дорад ва бо формулаи $f'(x) = 2x \cos \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{x}$ муайян карда мешавад. Мавҷудиятии ҳосилаи $f'(0)$ (дар нуқтаи $x = 0$) бевосита аз мавҷудиятии қимати лимитии

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cos \frac{1}{\Delta x} = 0$$

бармеояд. Ҳосилаи $f'(x)$ дар нуқтаи $x = 0$ қиматҳои лимитии росту чап надорад, чунки ҷамъшавандаи $2x \cos \dfrac{1}{x}$ дар нуқтаи $x = 0$ қимати лимитии ба нуль баробар дорад ва ҷамъшавандаи $\sin \dfrac{1}{x}$ дар ин нуқта қиматҳои лимитии росту чап надорад (ба мисоли интиҳои п. 1 § 8 боби 4 нигар.).

4. Ҳосил кардани баъзе нобаробариҳо. Дар хотима бо ёрии теоремаи Лагранж чй тавр ҳосил карда шудани баъзе нобаробариҳои хеле муфидро нишон медиҳем. Ба сифати мисол ду баробарии зеринро муқаррар мекунем:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|, \tag{8.16}$$

$$|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \leqslant |x_1 - x_2|. \tag{8.17}$$

(Дар ин ҷо дар таҳти x_1 ва x_2 қиматҳои дилхоҳи аргументро фаҳмидан мумкин аст.) Барои муқаррар кардани нобаробарии (8.16) теоремаи Лагранжро ба функцияи $f(x) = \sin x$ (дар сегменти $[x_1, x_2]$ татбиқ мекунем. Чунин нобаробариро ҳосил менамоем:

$$\sin x_1 - \sin x_2 = (x_1 - x_2) f'(\xi). \tag{8.18}$$

$f'(\xi) = \cos\xi$ ва барои ξ-и дилхоҳ $|\cos\xi| \leqslant 1$ буданашро ба эътибор гирифта, нобаробарии (8.18)-ро ба модуль мегирем ва нобаробарии (8.16)-ро ҳосил менамоем.

Барои муқаррар кардани нобаробарии (8.17) теоремаи Лагранжро дар сегменти $[x_1, x_2]$ ба функцияи $f(x) = \operatorname{arctg} x$ татбиқ намуда, $f'(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi} \leqslant 1$ буданашро ба эътибор гирифтан лозим аст.

§ 11. Формулаи ҷамъбастии афзоишҳои охирнок (формулаи Коши)

Мо дар ин параграф теоремаеро, ки ба Коши мутааллиқ аст ва теоремаи дар боло муқарраршудаи ҷамъбастии Лагранжро исбот мекунем.

Теоремаи 8.16 *(теоремаи Коши). Агар ҳар яке аз ду функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила бошанд ва дар ҳама нуқтаҳои дарунии ин сегмент дифференсиронидашаванда бошанд ва агар, ғайр аз он, ҳосилаи $g'(x)$ дар ҳама ҷои дохили сегменти $[a, b]$ аз нуль тафовут дошта бошад, онгоҳ дар дохили ин сегмент чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки формулаи*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{8.19}$$

дуруст аст. Формулаи (8.19) *формулаи ҷамъбастии афзоишҳои охирнок* ё *формулаи Коши* номида мешавад.

Исбот. Пеш аз ҳама исбот мекунем, ки $g(a) \neq g(b)$. Вокеан, агар ин ҳамин тавр намебуд, онгоҳ дар сегменти $[a, b]$ ҳама шартҳои теоремаи 8.11 (теоремаи Ролль) барои функцияи $g(x)$ иҷро мешуд ва мувофиқи ин теорема дар дохили сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешуд, ки $g'(\xi) = 0$ мешуд. $g'(\xi) = 0$ ба шарти теорема мухолиф аст. Инак, $g(a) \neq g(b)$, ва мо

ҳукук дорем, ки функцияи ёрирасони зеринро муоина намоем:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]. \qquad (8.20)$$

Дар асоси талаботе, ки ба функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ гузошта шудааст, функцияи $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила мебошад ва дар ҳама нуқтаҳои дарунии ин сегмент дифференсиронидашаванда мебошад. Ғайр аз он, маълум аст, ки $F(a) = F(b) = 0$. Ҳамин тариқ, ҳама шартҳои теоремаи 8.11 (теоремаи Ролль) барои $F(x)$ иҷро мешаванд. Мувофиқи ин теорема дар дохили сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки

$$F'(\xi) = 0 \qquad (8.21)$$

аст. $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$ будаанашро ба эътибор гирифта ва баробарии (8.21)-ро истифода карда, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0. \qquad (8.22)$$

$g'(\xi) \neq 0$ будаанашро ба эътибор гирифта, аз баробарии (8.22) формулаи Коши (8.19)-ро ҳосил менамоем. Теорема исбот шуд.

Қайди 1. Формулаи Лагранж (8.7) мавриди хусусии формулаи Коши (8.19) дар ҳолати $g(x) = x$ будан мебошад.

Қайди 2. Дар формулаи (8.19) $b > a$ ҳисобидан ҳаргиз ҳатмӣ нест.

§ 12. Кушодани номуайяниҳо (қоидаи Лопиталь)

1. Кушодани номуайяниҳои намуди $\frac{0}{0}$. Нисбати ду функцияи $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ҳангоми $x \to a$ номуайянии намуди $\frac{0}{0}$-ро ифода мекунад, агар

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

бошад, Кушодани ин номуайянӣ маънои ҳисоб кардани қимати

лимитии $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$-ро дорад (ба шарте, ки ин қимати лимитӣ вуҷуд дошта бошад).

Теоремаи зерин барои кушодани номуайяниҳои намуди $\dfrac{0}{0}$ қоидае медиҳад.

Теоремаи 8.17 (*қоидаи Лопиталь**). *Бигзор ду функцияи* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи* a, *ба ғайр аз худи нуқтаи* a, *муайян ва дифференсиронидашаванда бошанд. Бигзор, баъд,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

бошад ва ҳосилаи $g'(x)$ *дар ҳама ҷои атрофи номбурдаи нуқтаи* a *аз нуль тафовут дошта бошад. Онгоҳ, агар қимати литӣ*** *(охирнок ё беохир)-и*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{8.23}$$

вуҷуд дошта бошад, онгоҳ қимати лимитии $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *ҳам вуҷуд дорад, ба замми ин формулаи*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{8.24}$$

дуруст аст.

Теоремаи 8.17 барои кушодани номуайяниҳои намуди $\dfrac{0}{0}$ қоидае медиҳад. Ин қоида имконият медиҳад, ки ҳисоби қимати лимитии нисбати ду функция ба ҳисоби қимати лимитии нисбати ҳосилаи онҳо оварда шавад.

Исбот. Бигзор $\{x_n\}$ пайдарпаии дилхоҳи қиматҳои аргумент бошад, ки он ба a наздик мешавад ва аз ададҳои нобаро-

---

* Гильом Франсуа де Лопиталь — математики франсавӣ (1661—1704).

** Қимати лимитии (8.23) вуҷуд надоштанаш мумкин аст, онгоҳ лимити нисбати функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$, яъне $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ вуҷуд хоҳад дошт. Масалан, $a=0$, $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$ гирифтан мумкин аст. Ҳамин тариқ, қоидаи Лопиталь на ҳама вақт «амал мекунад».

бари a иборат аст. Ин пайдарпаиро *аз ҳамон номери n, ки аз он сар карда, ҳамаи x_n-ҳо ба атрофи нуқтаи a-и дар шарти теорема номбурда тааллуқ доранд*, муоина мекунем. Функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$-ро дар нуқтаи a баробари нуль фарз карда, ин функцияҳоро дар ҳамин нуқта муайян мекунем. Онгоҳ, зоҳиран, $f(x)$ ва $g(x)$ дар ҳамаи сегменти $[a, x_n]$ бефосила мешаванд ва дар ҳама нуқтаҳои дарунии ин сегмент дифференсиронидашаванда мебошанд. Ғайр аз он, $g'(x)$ дар ҳама ҷои дохили ин сегмент аз нуль тафовут дорад. Ҳамин тариқ, дар сегменти $[a, x_n]$ ҳама шартҳои теоремаи 8.16 (теоремаи Коши) барои $f(x)$ ва $g(x)$ иҷро мешаванд. Мувофиқи ин теорема дар дохили сегменти $[a, x_n]$ чунин нуқтаи ξ_n ёфт мешавад, ки

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \qquad (8.25)$$

Мувофиқи муайянкардаамон, $f(a)=g(a)=0$ буданашро ба эътибор гирифта, формулаи (8.25)-ро ин тавр навишта метавонем:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \qquad (8.26)$$

Бигзор акнун дар формулаи (8.26) $n\to\infty$. Онгоҳ, зоҳиран, $\xi\to a$. Азбаски мо мавҷудиятии қимати лимитии (8.23)-ро фарз карда будем, пас қисми рости (8.26) ҳангоми $n\to\infty$ бояд ба ин қимати лимитӣ майл намояд. Пас, ҳангоми $n\to\infty$ лимити қисми чап ҳам вуҷуд дорад. Мувофиқи таърифи қимати лимитии функция ин лимит ба $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ баробар аст. Ҳамин тариқ, ҳангоми $n\to\infty$ лимити баробарии (8.26) ба баробарии (8.24) баробар мешавад. Теорема исбот шуд.

Қ а й д и 1. Агар ба шарти теоремаи 8.17 талаботи дар нуқтаи a бефосила будани ҳосилаҳои $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳамроҳ карда шавад, онгоҳ дар мавриди $g'(a)\neq 0$ будан формулаи (8.24)-ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}. \qquad (8.27)$$

Қ а й д и 2. Агар ҳосилаҳои $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳамон талаботеро, ки худи функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ қаноат мекарданд, қаноат намоянд, онгоҳ қоидаи Лопитальро такроран татбиқ кардан мумкин аст (яъне қимати лимитии ҳосилаи якуми функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$-ро ба қимати лимитии *нисбати ҳосилаҳои дуюми*

ин функцияҳо иваз кардан мумкин аст). Дар ин маврид чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Қайди 3. Теореми 8.17 ба мавриде, ки аргументи x на ба лимити охирнок, балки *ба лимити беохири* $a=+\infty$ ё $a=-\infty$ майл мекунад, бо осонӣ татбиқ мешавад. Теореми 8.17-ро барои мавриди $a=+\infty$ баён мекунем. *Бигзор ду функцияҳои* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *дар ҳама ҷои нимхати рости* $c<x<\infty$ *бефосила ва дифференсиронидашаванда бошанд. Бигзор, баъд,* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ *бошад ва ҳосилаи* $f'(x)$ *дар нимхати рости номбурда аз нуль тафовут дошта бошад. Онгоҳ, агар қимати лимитии* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *вуҷуд дошта бошад, онгоҳ қимати лимитии* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *ҳам вуҷуд дорад, ба замми ин баробарии зерин дуруст аст:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Мисолҳо.

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

2) Қимати лимитии зерин бо татбиқи дукаратаи қоидаи Лопиталь ҳисоб карда мешавад:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

3) Қимати лимитии зерин бо татбиқи секаратаи қоидаи Лопиталь ҳисоб карда мешавад:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^2+2\cos x-2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^3}{2x-2\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{12x^2}{2-2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{24x}{2\sin x}=12.$$

2. Кушодани номуайяниҳои намуди $\frac{\infty}{\infty}$. Нисбати ду функ-

ция $\frac{f(x)}{g(x)}$ ҳангоми $x \to a$ номуайянии намуди $\frac{\infty}{\infty}$-ро ифода мекунад, агар

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty^* \qquad (8.28)$$

бошад.

Барои кушодани ин номуайянӣ, яъне барои ҳисоб кардани қимати лимитии $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ тасдиқоти ба теореми 8.17 пурра монанд дуруст аст, яъне: *агар дар баёни теоремаи* 8.17 *талаботи* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *ба шарти* (8.28) *иваз карда шавад, пас теоремаи* 8.17 *дуруст мемонад.*

Барои исбот пайдарпаии *дилхоҳи* $\{x_n\}$-и қиматҳои аргументро, ки ба a аз рост (аз чап) наздик мешавад, муоина мекунем. Бигзор x_m ва x_n ду элементи дилхоҳи ин пайдарпай бошанд, ки номерҳояшон ба қадри кифоя калон m ва n ва шарти $n > m$-ро қаноат менамоянд.

Формулаи Қоширо дар сегменти $[x_m, x_n]$ татбиқ карда, тасдиқ карда метавонем, ки дар ин сегмент чунин нуқтаи ξ_{mn} ёфт мешавад, ки

$$\frac{f(x_n)-f(x_m)}{g(x_n)-g(x_m)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \cdot \frac{1-\frac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1-\frac{g(x_m)}{g(x_n)}} = \frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}.$$

Аз ин ҷо

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})} \cdot \frac{1-\frac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\frac{f(x_m)}{f(x_n)}}.$$

Агар $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ мавҷуд бошад, онгоҳ барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ номери m-ро ҳамон қадар калон қайд кардан мумкин аст, ки дар $n > m$-и дилхоҳ касри $\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}$ аз адади A назар ба $\varepsilon/2$ камтар фарқ мекунад. Баъд, (8.28)-

---

* Ба ҷои ∞ $+\infty$ ё $-\infty$ гирифтан мумкин аст.

ро ба эътибор гирифта, мо барои m-и қайдшудаи додашуда чунин номери n_0-ро ёфта метавонем, ки ҳангоми $n \geqslant n_0$ будан касри

$$\frac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}$$

аз як назар ба $\dfrac{\varepsilon/2}{A+\varepsilon/2}$ камтар фарқ мекунад. Лекин, онгоҳ ҳангоми $n \geqslant n_0$ будан касри $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$ аз адади A назар ба $\dfrac{\varepsilon}{2}+|A|\dfrac{\varepsilon/2}{A+\varepsilon/2}+\dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{\varepsilon/2}{A+\varepsilon/2}$ камтар фарқ мекунад. Ин чунин маъно дорад, ки қимати лимитни $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ вучуд дорад ва он ба A баробар аст.

Мисолҳо. 1) $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{x^{-1/2}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{(-\frac{1}{2})x^{-3/2}}=$

$=-2\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0.$

2) Қимати лимитии зерин бо татбиқи n-каратаи қоидаи Лопиталь ҳисоб карда мешавад:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

3. Кушодани номуайяниҳои намудҳои дигар. Ғайр аз номуайяниҳои омӯхташудаи намудҳои $\dfrac{0}{0}$ ва $\dfrac{\infty}{\infty}$ аксаран номуайяниҳои намудҳои зерин дучор мешаванд: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Ҳамаи ин номуайяниҳо бо роҳи табдилоти алгебравӣ ба намуди ду номуайянии омӯхташуда оварда мешаванд. Инро, масалан, нисбат ба *се номуайянии охирини* номбурда нишон медиҳем. Ҳар яки ин номуайяниҳо чунин намуд доранд:

$$y=f(x)^{g(x)}, \tag{8.29}$$

дар ин чо ҳангоми $x \to a$ $f(x)$ мувофиқан ба 1, 0 ё ∞, ва $g(x)$ мувофиқан ба ∞, 0 ё 0 майл мекунад. Ифодаи (8.29)-ро логарифмонида (чунин меҳисобем, ки $f(x) > 0$ аст),

$$\ln y = g(x) \ln f(x) \tag{8.30}$$

ро ҳосил мекунем. Барои ёфтани қимати лимитии ифодаи (8.29) ёфтани қимати лимитии ифодаи (8.30) кифоя аст.

Дар ҳар кадоми ин се ҳолати муоинашаванда ифодаи (8.30) ҳангоми $x \to \infty$ номуайянии намуди $0 \cdot \infty$-ро ифода мекунад. Пас, номуайянии намуди $0 \cdot \infty$-ро ба номуайяниҳои намуди $\frac{0}{0}$ ё $\frac{\infty}{\infty}$ овардан кифоя аст. Инро нишон медиҳем. Инак, бигзор

$$z = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

бошад, дар айни ҳол

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} \psi(x) = \pm\infty.$$

(8.31)-ро ба намуди

$$z = \varphi(x) \cdot \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} \tag{8.32}$$

менависем. Ифодаи (8.32) ҳангоми $x \to a$ номуайянии намуди $\frac{0}{0}$-ро ифода мекунад. Мо ба мақсад расидем.

Мисолҳо. 1) $\lim\limits_{x \to 0+0} x^x$ ҳисоб карда шавад. Ишорат мекунем: $y = x^x$. Онгоҳ $\ln y = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Қоидаи Лопитальро татбиқ карда, меёбем, ки

$$\lim_{x \to 0+0} (\ln y) = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0+0} x = 0.$$

Аз ин чо фаҳмост, ки $\lim\limits_{x \to 0+0} y = 1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-x-x}}$. Бигзор $y=(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-1}}$ бошад.

Онгоҳ

$$\ln y=\frac{1}{(e^x-1-1)}\cdot\ln(1+x^2).$$

Қоидаи Лопитальро истифода карда, меёбем, ки

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)2x}=2.$$

Аз ин ҷо фаҳмост, ки $\lim\limits_{x\to 0}y=e^2$.

§ 13. Формулаи Тейлор

Формулае, ки мо дар ин параграф муқаррар менамоем, яке аз формулаҳои асосии анализи математикӣ мебошад ва ҳам дар анализ ва ҳам дар фанҳои ба якдигар алоқаманд татбиқи васеъ дорад.

Теореми 8.18. *(теореми Тейлор*). Бигзор функцияи $f(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи a соҳиби ҳосилаи тартиби** $(n+1)$-ум бошад (n — номери қайдшудаи дилхоҳ). Бигзор x аз атрофи номбурда қимати дилхоҳи аргумент ва p адади мусбати дилхоҳ бошад. Онгоҳ дар байни нуқтаҳои a ва x чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки формулаи зерин дуруст аст:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x), \qquad (8.33)$$

---

* Брук Тейлор — математики англис (1685—1731).

** Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки *худи функцияи $f(x)$ ва ҳосилаи он то тартиби n-ум дар атрофи номаршудаи нуқтаи a бефосила мебошанд.*

дар ин чо*

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (8.34)$$

Формулаи (8.33) *формулаи Тейлор* (марказаш нуқтаи a) ва ифодаи $R_{n+1}(x)$ *аъзои боқимонда* номида мешавад. Чунон ки сонитар мебинем, аъзои боқимондаро на фақат ба намуди (8.34), балки ба намудҳои дигар ҳам навиштан мумкин аст. Аъзои боқимондаи ба намуди (8.34) навишташударо *аъзои боқимонда ба шакли умумӣ*** меноманд.

Исбот. Бисьёраъзогии нисбат ба x тартиби n-умро, ки дар қисми рости (8.33) воқеъ аст, бо символи $\varphi(x, a)$ ишорат мекунем, яъне фарз мекунем, ки

$$\varphi(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (8.35)$$

Баъд фарқи

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a) \qquad (8.36)$$

-ро бо символи $R_{n+1}(x)$ ишорат мекунем. Агар мо муқаррар кунем, ки $R_{n+1}(x)$ бо формулаи (8.34) муайян карда мешавад, теорема исбот хоҳад шуд.

Аз атрофе, ки дар баёни теорема номбар шуд, қимати дилхоҳи x-ро қайд мекунем. Барои муайянӣ $x > a$ меҳисобем. Бузургии тағьирьёбандаеро, ки сегменти $[a, x]$ соҳаи тағьирьёбиаш мебошад, бо t ишорат мекунем, ва функцияи ёрирасони намуди зеринро муоина менамоем:

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x, t) - (x-t)^p Q(x), \qquad (8.37)$$

дар ин чо

$$Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}. \qquad (8.38)$$

---

* Азбаски ξ дар байни x ва a воқеъ аст, пас $\frac{x-a}{x-\xi} > 0$ мебошад, чунки ифодаи $\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p$ барои $p > 0$-и дилхоҳ муайян аст.

** Ин шакли аъзои боқимондаро шакли Шлемильх—Рош ҳам меноманд.

$\psi(t)$-ро муфассал ин тавр навиштан мумкин аст:

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots -$$

$$- \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - (x-t)^p Q(x). \qquad (8.39)$$

Акнун дар асоси хосиятҳои функцияи $\psi(t)$ $Q(x)$-ро ифода мекунем.

Нишон медиҳем, ки функцияи $\psi(t)$ дар сегменти $[a, x]$ ҳама шартҳои теоремаи 8.11 (теоремаи Ролль)-ро қаноат менамояд.

Аз формулаи (8.39) ва аз шартҳои ба функцияи $f(x)$ гузошташуда маълум мешавад, ки функцияи $\psi(t)$ дар сегменти $[a, x]$ бефосила буда, дар ҳамин сегмент* дифференсиронидашаванда мебошад. Боварӣ ҳосил мекунем, ки $\psi(a) = \psi(x) = 0$ аст. Дар (8.37) $t = a$ фарз карда ва баробарии (8.38)-ро ба эътибор гирифта, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\psi(a) = f(x) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x).$$

Аз ин ҷо, дар асоси (8.36), $\psi(a) = 0$-ро ҳосил мекунем. Баробарии $\psi(x) = 0$ аз формулаи (8.39) якбора ҳосил мешавад.

Инак, дар сегменти $[a, x]$ ҳама шартҳои теоремаи 8.11 (теоремаи Ролль) барои функцияи $\psi(t)$ иҷро мешавад. Дар асоси ин теорема дар дохили сегменти $[a, x]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки

$$\psi'(\xi) = 0 \qquad (8.40)$$

аст. Ҳосилаи $\psi'(t)$-ро ҳисоб мекунем. Баробарии (8.39)-ро медифференсиронем:

$$\psi'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) - \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n +$$

$$+ p(x-t)^{p-1} Q(x). \qquad (8.41)$$

Бо осонӣ дида мешавад, ки ҳама аъзоҳои монанди қисми рости (8.41), ба ғайр аз ду аъзои охирин якдигарро нест менамоянд. Ҳамин тариқ,

---

* Функцияи $f(t)$ ва ҳосилаи он то тартиби n-ум дар сегменти $[a, x]$ бефосила мебошанд ва $f^{(n+1)}$ вучуд дорад ва дар ҳамин сегмент охирнок аст (ба поварақи *-и саҳ. 287 нигар.).

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x). \qquad (8.42)$$

Дар формулаи (8.42) $t = \xi$ фарз карда ва баробарии (8.40)-ро истифода карда,

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (8.43)$$

-ро ҳосил мекунем. (8.43) ва (8.38)-ро муқоиса карда, комилан ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$R_{n+1}(x) = (x-a)^p Q(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Теорема исбот шуд.

Мувофиқи формулаи Тейлор чудокунии функцияи соддатарин — *бисёраъзогии алгебравии тартиби n-умро* меёбем. Бигзор

$$f(x) = C_0x^n + C_1x^{n-1} + \cdots + C_{n-1}x + C_n$$

бошад. Онгоҳ, азбаски $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ аст, аъзои боқимонда $R_{n+1}(x) \equiv 0$ ва формулаи Тейлор (8.33) чунин намуд мегирад:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (8.44)$$

(Дар ин ҷо ба сифати a нуқтаи дилхоҳи хати рости беохирро гирифтан мумкин аст.) Ҳамин тариқ, формулаи Тейлор имконият медиҳад, ки бисёраъзогии дилхоҳи $f(x)$ *ба намуди бисёраъзогии дараҷаи* $(x-a)$ навишта шавад, дар ин ҷо a — адади ҳақиқии дилхоҳ.

Бигзор акнун $f(x)$ *функцияи дилхоҳе* бошад, ки шартҳои теоремаи 8.18-ро қаноат менамояд. Бисёраъзогии (8.35), ки дар формулаи Тейлор барои ин функция ифода шудааст, чиҳуна хосиятҳо дорад? Инро аниқ мекунем. Ин бисёраъзогиро бо символи $\varphi(x, a)$ ишорат мекунем. Ҳосилаи n-уми $\varphi(x, a)$-ро нисбат ба x бо символи $\varphi^{(n)}(x, a)$ ишорат менамоем. Формулаи (8.35)-ро нисбат ба x дифференсиронида ва баъд $x = a$ фарз карда, баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\varphi(a, a) = f(a),$$
$$\varphi'(a, a) = f'(a),$$
$$\varphi^{(2)}(a, a) = f^{(2)}(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^{(n)}(a, a) = f^{(n)}(a).$$

Ҳамин тариқ, бисьёраъзогии $\varphi(x, a)$, ки дар формулаи Тейлор барои функцияи дилхоҳи $f(x)$ ифода шудааст, ба чунин хосият соҳиб аст: ин бисьёраъзогӣ ва ҳосилаи он то худи тартиби n-ум дар нуқтаи $x = a$ мувофиқан ба $f(x)$ ва ҳосилаи он то тартиби n-ум баробар аст.

§ 14. Шаклҳои гуногуни аъзои боқимонда. Формулаи Маклорен

1. Аъзои боқимондаи шакли Лагранж, Коши ва Пеано. Мо дар параграфи гузашта формулаи Тейлорро бо аъзои боқимонда *ба шакли умумӣ* муқаррар кардем. Мо дар ин ҷо навиштҳои гуногуни дигари аъзои боқимондаро муқаррар мекунем. Аз шакли умумии аъзои боқимонда ду навишти онро чун мавриди хусусӣ ҳосил менамоем.

Пеш аз ҳама формулаи аъзои боқимонда (8.34)-ро қадре табдил медиҳем. Азбаски нуқтаи ξ дар байни нуқтаҳои a ва x воқеъ аст, пас *аз интервали* $0 < \theta < 1$ *чунин адади* θ^* *ёфт мешавад, ки* $\xi - a = \theta(x - a)$. Дар айни ҳол $\xi = a + \theta(x - a)$, $x - \xi = (x - a)(1 - \theta)$. Ҳамин тариқ, формулаи (8.34)-ро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)]. \qquad (8.45)$$

Акнун ду мавриди хусусии муҳими формулаи (8.45)-ро муоина мекунем: 1) $p = n + 1$, 2) $p = 1$ (хотиррасон мекунем, ки дар формулаҳои (8.34) ва (8.45) ба сифати p адади мусбати дилхоҳро гирифтан мумкин аст). Мавриди хусусии якум ($p = n + 1$) моро ба аъзои боқимондаи *шакли Лагранж* меорад:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)]. \qquad (8.46)$$

Ин шакли аъзои боқимонда татбиқи васеъ дорад. Аъзои боқимондаи шакли Лагранж аъзои пасоянд (навбатӣ)-и формулаи Тейлорро ба хотир меорад; фақат ҳосилаи $(n + 1)$-уми функцияи $f(t)$ на дар нуқтаи a, балки дар ягон нуқтаи фосилавии байни a ва x, яъне дар нуқтаи $\xi = a + \theta(x - a)$ ҳисоб карда мешавад. Мавриди хусусии дуюм ($p = 1$) моро ба аъзои боқимондаи *шакли Коши* меорад:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)]. \qquad (8.47)$$

---

* Бояд қайд кард, ки ξ ва, бинобар ин, θ на фақат аз x ва n, балки аз p низ вобаста аст.

Азбаски шаклҳои Лагранж ва Коши дар қиматҳои гуногуни p дурустанд ва θ аз p вобаста аст, пас қиматҳои θ-и формулаҳои (8.46) ва (8.47), умуман, гуногун мешаванд. Барои ба баъзе функцияҳо баҳо додан шакли Коши назар ба шакли Лагранж бехтар аст. Ҳар ду шакли аъзои боқимонда (шаклҳои Лагранж ва Коши)-ро одатан дар ҳамон мавридҳое истифода мекунанд, ки агар дар ин ё он қимати қайдшудаи x-и аз a тафовутдошта *функцияи* $f(x)$*-ро тақрибӣ* ҳисоб кардан лозим бошад.

$f(x)$-ро бо бисёраъзогии $\varphi(x, a)$ тақрибан иваз кардан ва саҳви ҳосилшударо ададан баҳо додан табиист. Дар қатори ин масъалаҳое дучор мешаванд, ки мо на ба бузургии ададии саҳви номбурда, балки *фақат ба тартиби бузургии нисбатан хурди он* $(x - a)$ кордор мешавем. Барои ин мақсад шакли дигари навишти аъзои боқимонда (*шакли Пеано**) муносиб мебошад, ки мо ҳозир онро муқаррар менамоем.

Бигзор функцияи $f(x)$ *дар ягон атрофи нуқтаи* a *ҳосилаи то тартиби* $(n-1)$*-ум ва дар худи нуқтаи* a *ҳосилаи тартиби* n*-ум дошта бошад.*

Мисли болой, фарқи функцияи $f(x)$ ва бисёраъзогии (8.35)-ро бо символи $R_{n+1}(x)$ ишорат мекунем ва исбот менамоем, ки барои $R_{n+1}(x)$ баробарии

$$R_{n+1}(x) = 0[(x-a)^n] \tag{8.48}$$

дуруст аст. Ин баробариро аъзои боқимондаи *шакли Пеано* меноманд.

Азбаски дар фарзиятҳои мо бисёраъзогии (8.35) ва ҳосилаи он то тартиби n-ум (ҳосилаи тартиби n-ум ҳам дохил аст) дар нуқтаи $x = a$ мувофиқан бо функцияи $f(x)$ ва ҳосилаи он (дар ҳамон нуқтаи $x = a$) мувофиқ меоянд, пас нобаробариҳои зерин дурустанд:

$$R_{n+1}(a) = 0,\ R'_{n+1}(a) = 0,\ \ldots,\ \overset{(n-1)}{R}_{n+1}(a) = 0,\ \overset{(n)}{R}_{n+1}(a) = 0 \tag{8.49}$$

ва исбот кардан лозим меояд, ки аз баробариҳои (8.49) баробарии (8.48) бармеояд.

Барои ин бо ёрии баробариҳои (8.49) исбот кардан кифоя аст, ки

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{8.50}$$

Азбаски ҳар яке аз функцияҳои $R_{n+1}(x)$ ва $(x-a)^n$ дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи a $(n-1)$ маротиба дифферен-

---

* Ҷузеппа Пеано — математики италиявӣ (1858—1932).

цирониданашаванда мебошад, баробариҳои (8.49) дуруст мебошанд ва ҳосилаи дилхоҳи функцияи $(x-a)^n$ то худи тартиби $(n-1)$-ум фақат дар нуқтаи a ба нуль табдил мешавад, пас барои кушодани номуайяниии қисми чапи (8.50) теореми Лопиталь (теореми 8.17)-ро $(n-1)$ маротиба пай дар пай татбиқ кардан лозим меояд ва дар натичаи он баробариҳои зеринро ҳосил менамоем:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R'_{n+1}(x)}{(x-a)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x)}{n!(x-a)}. \qquad (8.51)$$

Баробарии пеш аз охирини (8.49)-ро ба эътибор гирифта, баробариҳои (8.51)-ро ин тавр навишта метавонем:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x)-R^{(n-1)}_{n+1}(a).}{x-a}.$$

Азбаски ҳосилаи $R^{(n)}_{n+1}(a)$ вучуд дорад ва дар асоси муносибати охирини (8.49) баробари нуль мебошад, пас қимати лимитии қисми рости баробарии охирин вучуд дорад ва ба нуль баробар мебошад, ки ин исботи баробарии (8.50)-ро ба итмом мерасонад.

Бо ҳамин ҳосил кардани навишти (8.48) ба итмом расид.

Дар хотима формулаи Тейлорро бо аъзои боқимонда дар шакли Пеано пурра менависем:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$
$$+0[(x-a)^n]. \qquad (8.52)$$

2. Навишти дигари формулаи Тейлор. Аксаран формулаи Тейлор (8.33)-ро ба намуди дигар менависанд. Дар (8.33) $a=x_0$, $(x-a)=\Delta x$ фарз карда, аъзои боқимондаро ба шакли Лагранж (8.46) мегирем. Дар айни ҳол $x=x_0+\Delta x$, ва мо чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}. \qquad (8.53)$$

(Дар ин ҷо θ — ягон адад аз интервали $0<\theta<1$.) Формулаи Тейлор (8.53) ҷамъбасти формулаи Лагранж (8.11) ме-

бошад (ба § 9 нигар.). Формулаи Лагранж (8.11) аз формулаи (8.53) дар мавриди хусусии $n = 0$ будан ҳосил мешавад.

3. Формулаи Маклорен. Формулаи Тейлор (8.33), ки марказаш нуқтаи $a = 0$ аст, *формулаи Маклорен** номида мешавад. Ҳамин тариқ, формулаи Маклорен функцияи атрофи нуқтаи $x = 0$-ро ифода мекунад. Формулаи Маклоренро барои функцияи дилхоҳи $f(x)$ менависем ва аъзои боқимондаашро ба шакли Лагранж, Коши ва Пеано ифода мекунем**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \\ + R_{n+1}(x), \tag{8.54}$$

дар ин ҷо аъзои боқимонда чунин намуд дорад:

1) дар шакли Лагранж

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1), \tag{8.55}$$

2) дар шакли Коши***

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1), \tag{8.56}$$

3) дар шакли Пеано

$$R_{n+1}(x) = 0(x^n). \tag{8.57}$$

(Мо формулаҳои (8.46), (8.47) ва (8.48)-ро истифода кардем.

Акнун аъзои боқимондаи формулаи Тейлор—Маклоренро баҳо медиҳем, мувофиқи формулаи Маклорен ҷудокунии функцияҳои элементарии муҳимтаринро чустучӯ мекунем ва татбиқоти гуногуни ин формуларо муоина менамоем.

§ 15. Баҳодиҳии аъзои боқимонда. Ҷудокунии баъзе функцияҳои элементарӣ

1. Баҳодиҳии аъзои боқимонда барои функцияи дилхоҳ. Барои функцияи дилхоҳи $f(x)$ аъзои боқимондаи формулаи Мак-

---

* Колин Маклорен — математики англис (1698—1746).

** Дар айни ҳол фарз карда мешавад, ки $f(x)$ дар атрофи нуқтаи $x = 0$ ҳосилаи $(n+1)$-ум дорад ва барои аъзои боқимондаи шакли Пеано $f(x)$ дар атрофи нуқтаи $x = 0$ ҳосилаи $(n-1)$-ум дорад ва дар худи нуқтаи $x = 0$ соҳиби ҳосилаи n-ум мебошад.

*** Боз қайд мекунем, ки қиматҳои θ дар формулаҳои (8.55) ва (8.56), умуман, гуногун мебошанд.

лорен (8.54)-ро, ки ба шакли Лагранж (8.55) гирифта шудааст, баҳо медиҳем.

Фарз мекунем, ки функцияи муоинашавандаи $f(x)$ ба хосияти зерин соҳиб аст: *чунин адади ҳақиқии M вуҷуд дорад, ки барои ҳама номерҳои n ва барои ҳама қиматҳои аргументи x-и атрофи муоинашавандаи нуқтаи $x = 0$ нобаробарии*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M \tag{8.58}$$

дуруст аст.

Функцияеро, ки ба ҳамин хосият соҳиб аст, *функцияе* меномем, *ки ҷамъи ҳама хосиятҳояш дар атрофи нуқтаи $x = 0$ маҳдуд аст.*

Аз нобаробарии (8.58) натиҷа мебарояд, ки

$$|f^{(n)}(\theta x)| \leqslant M, \tag{8.59}$$

ва, бинобар ин, аз формулаи (8.55) чунин ифода ҳосил мешавад:

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\theta x)| \leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Инак, *мо барои функцияе, ки ҷамъи ҳама ҳосилаҳояш дар атрофи нуқтаи $x = 0$ бо адади M маҳдуд аст, баҳои универсалии зерини аъзои боқимондаро ҳосил мекунем*:

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8.60}$$

Хотирраҳон мекунем, ки дар x-и қайдшудаи дилхоҳ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

(ба мисоли 3-юми п. 3 § 3 боби 3 нигаред). Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки номери ба қадри кифоя калони n-ро интихоб карда, мо қисми рости (8.60)-ро ҳар қадар хурд карда метавонем. Ин ба мо имконият медиҳад, ки формулаи Маклоренро барои ҳисоби тақрибии функцияҳое, ки ба хосияти номбурда соҳибанд, бо саҳеҳии пешакӣ додашуда татбиқ намоем. Функцияҳоеро мисол меорем, ки ҷамъи ҳосилаҳояшон дар атрофи нуқтаи $x = 0$ маҳдуд мебошад.

1) $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$. Ҷамъи ҳама ҳосилаҳои ин функция дар сегменти дилхоҳи $[-r, r]$ $(r > 0)$ бо адади $M = e^r$ маҳдуд аст.

2) $f(x) = \cos x$ ё $f(x) = \sin x$. Ҷамъи ҳама ҳосилаҳои ҳар яки ин функцияҳо дар ҳама ҷои хати рости беохир бо адади $M = 1$ маҳдуд мебошад.

2. Мувофиқи формулаи Маклорен ҷудо кардани баъзе функцияҳои элементарӣ.

А. $f(x) = e^x$. Азбаски $f^{(n)}(x) = e^x$ ва барои n-и дилхоҳ $f^{(n)}(0) = 1$ мебошад, пас формулаи Маклорен (8.54) чунин намуд мегирад:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \tag{8.61}$$

дар ин ҷо аъзои бақимондаи шакли Лагранж ба

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

баробар аст. Дар асоси он, ки $|e^{\theta x}| < e^r$ мебошад, дар сегменти $[-r, +r]$ $(r > 0)$ аъзои бақимондаро баҳо медиҳем:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r. \tag{8.62}$$

Б. $f(x) = \sin x$. Азбаски $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$,

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 \text{ ҳангоми } n \text{ ҷуфт будан,} \\ (-1)^{n-1/2} \text{ ҳангоми } n \text{ тоқ будан} \end{cases}$$

аст, пас формулаи Маклорен (8.54) чунин намуд мегирад:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1/2}\frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x), \tag{8.63}$$

дар ин ҷо n — адади тоқ ва аъзои бақимондаи шакли Лагранж ба ифодаи зерин баробар мешавад:

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \sin(\theta x + n\frac{\pi}{2} + \pi) \quad (0 < \theta < 1).$$

Дар сегменти дилхоҳи $[-r, +r]$ $(r > 0)$ баробарии зерин барои аъзои бақимонда дуруст аст:

$$|R_{n+2}(x)| \leqslant \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}. \tag{8.64}$$

В. $f(x) = \cos x$. Азбаски $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$,

$$f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 \text{ ҳангоми } n \text{ тоқ будан,} \\ \\ (-1)^{n/2} \text{ ҳангоми } n \text{ ҷуфт будан} \end{cases}$$

аст, пас формулаи Маклорен (8.54) чунин намуд мегирад:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x), \quad (8.65)$$

дар ин ҷо n — адади ҷуфт ва аъзои бақимондаи шакли Лагранж ба ифодаи зерин баробар мешавад:

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos\left(\theta x + n\frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Дар сегменти дилхоҳи $[-r, +r]$ $(r > 0)$ барои аъзои бақимонда баҳодиҳии (8.64)-ро ҳосил мекунем.

Г. $f(x) = \ln(1 + x)$. Азбаски ҳангоми $n \geqslant 1$ будан

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

аст, пас формулаи Маклорен (8.54) чунин намуд мегирад:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x) \quad (8.66)$$

Ин дафъа аъзои бақимондаро ҳам ба *шакли Лагранж* ва ҳам ба *шакли Коши* навишта, баҳо медиҳем:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \text{ (шакли Лагранж)}, \quad (8.67)$$

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} * \text{ (шакли Коши)}. \quad (8.68)$$

Барои он ки функцияи $\ln(1 + x)$-ро барои қиматҳои x-и мутааллиқи сегменти $0 \leqslant x \leqslant 1$ баҳо диҳем, аъзои бақимондаи шакли Лагранж (8.67)-ро ба асос гирифтан лозим меояд. Формулаи (8.67)-ро ба модуль гирифта, барои ҳама x-ҳои сегменти $0 < x < 1$

---

* Боз қайд мекунем, ки дар формулаҳои (8.67) ва (8.68) қиматҳои θ, умуман, гуногун мебошанд.

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1} \tag{8.69}$$

-ро ҳосил мекунем. Аз баҳодиҳии (8.69) маълум аст, ки барои ҳама x-ҳои сегменти $0 \leqslant x \leqslant 1$ ҳангоми $n \to \infty$ $R_{n+1}(x) \to 0$.

Акнун функцияи $\ln(1+x)$-ро барои қиматҳои *манфии* x-и сегменти $-r \leqslant x \leqslant 0$ (дар ин ҷо $0 < r < 1$) баҳо медиҳем. Барои ин аъзои боқимондаи шакли Коши (8.68)-ро ба асос мегирем.

Ин аъзои боқимондаро ба намуди

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x} \tag{8.70}$$

менависем. Барои қиматҳои муоинашавандаи x $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ бу-

данашро ба эътибор гирифта ва формулаи (8.70)-ро модуль гирифта,

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r} \tag{8.71}$$

-ро ҳосил мекунем. Азбаски $0 < r < 1$ аст, пас баҳодиҳии (8.71) барои тасдиқ кардани он, ки $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ мебошад, имконият медиҳад.

Д. $f(x) = (1+x)^\alpha$, дар ин ҷо α — адади ҳақиқӣ. Азбаски

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

аст, пас формулаи Маклорен (8.54) чунин намуд мегирад:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{8.72}$$

дар ин ҷо аъзои боқимондаи шакли Лагранж ба ифодаи зерин баробар аст:

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}$$
$$(0 < \theta < 1). \tag{8.73}$$

Дар мавриди хусусӣ, ҳангоме ки $\alpha = n$ — адади бутун ва $R_{n+1}(x) = 0$ мебошад, мо формулаи биноми Ньютонро, ки аз курси математикаи элементарӣ маълум аст, ҳосил мекунем:

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n. \qquad (8.74)$$

Агар на чудокунии дуаъзогии $(1 + x)^n$, балки чудокунии дуаъзогии $(a + x)^n$-ро ҳосил кардан лозим бошад, онгоҳ a^n-ро аз қавс бароварда, формулаи (8.74)-ро истифода кардан мумкин аст. Дар натиҷа чунин ифода ҳосил мешавад:

$$(a+x)^n = a^n\left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = a^n\left[1 + \frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{a}\right)^n\right].$$

Ҳамин тариқ, мавриди умумии биноми Ньютон мавриди хусусии формулаи Маклорен мебошад.

Е. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Бовар кардан мумкин аст, ки

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ ҳангоми } n \text{ ҷуфт будан,} \\ (-1)^{n-1/2}(n-1)! \text{ ҳангоми } n \text{ тоқ будан.} \end{cases}$$

Ҳамин тариқ, формулаи Маклорен (8.54) бо аъзои боқимондаи шакли Пеано (8.57) чунин намуд дорад:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1/2}\frac{x^n}{n} + 0(x^n).$$

(Дар ин ҷо n — адади тоқ.)

§ 16. Мисолҳои татбиқоти формулаи Маклорен

1. Алгоритми ҳисоб кардани адади e. Мо дар п. 4 § 3 боби 3 адади e-ро чун $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ омӯхтем ва барои e баҳои тахминии $2 \leqslant e \leqslant 3$-ро ҳосил кардем (ба формулаи (3.7)-и боби 3 ниг.). Акнун бо саҳеҳии дилхоҳи даркорӣ ҳисоб кардани адади e-ро нишон медиҳем. Формулаи Маклорен (8.61) ва баҳодиҳии аъзои боқимонда (8.62)-ро истифода мекунем (дар ин формулаҳо $x = r = 1$ фарз мекунем). Чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1), \qquad (8.75)$$

дар ин ҷо

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{e}{(n+1)!} \leqslant \frac{3}{(n+1)!}. \qquad (8.76)$$

Дар формулаҳои (8.75) ва (8.76) n-ро ба қадри кифоя калон интихоб карда, мо бо ёрии ин формулаҳо ададӣ e-ро бо саҳеҳии дилхоҳи даркорӣ баҳо дода метавонем.

2. Дар мошинҳои электронӣ истифода кардани алгоритми ҳисоби ададӣ e. Алгоритми ҳисоби ададӣ e, ки дар пункти гузашта нишон дода шуд, дар мошинҳои электронии ҳисоббарор бо осонӣ истифода карда мешавад.

Мо натиҷаи ҳисоби ададӣ e-ро ки мувофиқи формулаи (8.75) (ҳангоми $n = 400$ будан) дар мошини электронии ҳисоббарори БЭСМ-6* ичро шудааст, меорем.

Ҳисоббарорӣ бо 600-то аломатҳои баъди вергул ичро шудааст. Саҳви имконпазири яклухткуниро ба эътибор гирифта, мо 10-то аломати охиринро партофтем ва натиҷаи ҳисобро, ки бо 590-то аломатҳои баъди вергул ичро шудааст, меорем:

---

* Барои хонандае, ки бо забони алгоритмии стандартии АЛГОЛ шинос аст, программаи ҳисоби бо ин забон навишташударо меорем:

Системаи Алгол — БЭСМ-6, варианти 10—12—69

```
begin integer i, c, p, n, m; integer array a, b, e [0 : 601];
  m : = 400; marg (39, 50, 39, 10, 0, 0);
  e [0]: = 1; b [0]: = 1;
  for i: = 1 step 1 until 601 do
    a [i]: = b [i]: = e [i]: = 0;
  for n: = 1 step 1 until m do
  begin for i: = 0 step 1 until 600 do
    a [i]: = b [i]; c: = a [0];
    for i = 0 step 1 until 600 lo
    begin b [i]: = c ÷ n;
      c: = (c — n × b [i] × 10 + a [i + 1] end
    p: = 0
    for i: = 600 step — 1 until 0 do
    begin c: = e [i] + b [i] + p;
      p: = 0
      if c < 10 then e [i]: = c else
      begin e [i]: = c — 10; p: = 1 end
    end
  for n: = 1 step 1 until 6 do
  begin output ('10/', '2d.', e [0]);
      for i: = 1 step 1 until 590 do
      output ('2d', e [i])
    end
  end
```

2,818281 828459 045235 360287 471352 662497 757247 093699
959574 966967 627724 076630 353547 594571 382178 525166 427427
466391 932003 059921 817413 596629 043572 900334 295260 595630
738132 328627 943490 763233 829880 753195 251019 011573 834187
930702 154089 149934 884167 509244 761460 668082 264800 168477
411853 742345 442437 107539 077744 992069 551702 761838 606261
331384 583000 752044 933826 560297 606737 113200 709328 709127
443747 047230 696977 209310 141692 836819 025515 108657 463772
111252 389784 425056 953696 770785 449969 967946 864454 905987
931636 889230 098793 127736 178215 424999 229576 351482 208269
895193 668033 182528 869398 496465 105820 939239 829488 793320
36...

Барои ҳаман ҳисоб кардан як дақиқа вақти мошин сарф шудааст.

3. Истифодаи формулаи Маклорен барои баҳодиҳии асимптотии* функцияҳои элементарӣ ва ҳисоб кардани лимитҳо. Формулаи Маклорен барои баҳодиҳии асимптотии функцияҳои элементарӣ ва ҳисоб кардани лимитҳо воситаи тавоноест.

Мо дар боби 4 барои функцияҳои элементарӣ формулаҳои асимптотии зеринро муқаррар кардем:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= x + 0(x), \\ \sqrt[n]{1+x} &= 1 + \frac{x}{n} + 0(x), \\ \ln(1+x) &= x + 0(x), \\ e^x &= 1 + x + 0(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + 0(x^2). \end{aligned}\right\} \qquad (8.77)$$

Формулаҳои (8.77) дар қиматҳои хурди x функцияҳои элементариро ифода менамоянд. Чор формулаи аввали (8.77) функцияҳои элементарии мувофиқро бо саҳеҳии то аъзоҳои тартиби 1-ум (нисбат ба бузургии хурди x) баҳо медиҳанд; формулаи охирини (8.77) функцияи мазкурро бо саҳеҳии то аъзоҳои *тартиби 2-юм* (нисбат ба x) баҳо медиҳад.

Баҳодиҳии (8.77) барои ҳисоб кардани лимитҳои соддатарин кифоя мебошанд. Аммо барои ҳисоб кардани лимитҳои мураккабтар, ки дар онҳо аъзоҳои тартиби нисбат ба бузургии хурди x баландтар роли муайянкунандаро мебозанд, формула-

---

* Формула ё баҳодиҳие, ки хосиятҳои $f(x)$-ро ҳангоми $x \to a$ (дар ин ҷо ҳангоми $x \to 0$) тавсиф медиҳанд, формула ё *баҳодиҳии асимптотӣ* номида мешавад.

ҳои (8.77) акнун нокифоя мебошанд. Масалан, қимати лимитии

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \tag{8.78}$$

-ро бо ёрии формулаҳои (8.77) ҳисоб кардан имконнопазир аст, чунки аз намуди махраҷ хулоса баровардан мумкин аст, ки дар ин ҷо аъзоҳои *тартиби нисбат ба x* 3-*юм* роли муайянкунандаро мебозанд.

Ҳамин тариқ, барои ҳисоб кардани лимитҳои нозук баҳодиҳии асимптотии аниқтари функцияҳои қисмҳои чапи формулаҳои (8.77)-ро ҳосил кардан зарур аст.

Агар дар формулаи Маклорен (8.54) аъзои боқимондаро ба шакли Пеано (8.57) гирем, чунин баҳодиҳӣ аз формулаи Маклорен фавран бармеояд. Формулаҳои Маклорен (8.63), (8.72), (8.66), (8.61) ва (8.65)-ро навишта, дар ҳар яки ин формулаҳо аъзои боқимондаро ба шакли Пеано гирифта, баҳодиҳии асимптотии зеринро ҳосил мекунем:

$$\left.\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1/2}\frac{x^n}{n!} + 0(x^{n+1}),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots\\
&\quad \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n),\\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!} + 0(x^{n+1}).
\end{aligned}\right\} \tag{8.79}$$

(Дар ин ҷо дар формулаи якуми (8.79) n адади *тоқи* дилхоҳ ва дар формулаи охирини (8.79) n адади *ҷуфти* дилхоҳ мебошад. Формулаҳои (8.79) функцияҳои элементарии мувофиқро бо сахеҳии то аъзоҳои (нисбат ба бузургии хурди x) *тартиби дилхоҳи n*-ум баҳо медиҳад. Ин формулаҳо барои ҳисоб кардани як қатор қиматҳои лимитҳои нозук воситаи самарабахш мебошанд.

Мисолҳои истифодаи формулаҳои асимптотии (8.79)-ро меорем.

1°. Ба сифати мисоли якум қимати лимитии дар боло навишташудаи (8.78)-ро муоина менамоем. Формулаи якуми (8.79)-ро (ҳангоми $n = 3$ будан) истифода мекунем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3} + 0(x^4) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{3!} + 0(x)\right] = -\frac{1}{3!}.$$

2°.
$$I = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \sin x}.$$

Дар асоси намуди махраҷ хулоса баровардан мумкин аст, ки аъзоҳои нисбат ба x тартиби 4-ум бояд роли муайянкунандаро бозанд (чунки $\sin x = x + 0(x)$). Формулаҳои (8.79)-ро истифода карда, ин тавр навишта метавонем:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + 0(x^5), \tag{8.80}$$

$$\sin x = x + 0(x), \tag{8.81}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + 0(z^2).$$

Пас, ҳангоми $z = -x^2/2$ будан

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + 0(x^4). \tag{8.82}$$

Дар асоси формулаҳои (8.80), (8.81) ва (8.82) қимати лимитии матлубро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + 0(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^4 + 0(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \alpha(x)}{1 + \alpha(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

(Мо дар ин ҷо бузургии $\frac{0(x^4)}{x^4}$-ро, ки ҳангоми $x \to 0$ бузургии

беохир хурд мебошад, бо символи $\alpha(x)$ ишорат кардем.)

3°. $$I = \lim_{x\to 0} \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x(\sin x - x)}.$$

Бузургии* $y = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x(\sin x - x)}$ ро бо y ишорат кардем.

Онгох $I = \lim\limits_{x\to 0} y$. Ифодаи y-ро мелогарифмонем:

$$\ln y = \frac{1}{x(\sin x - x)} \ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Хисоб мекунем:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{x(\sin x - x)}.$$

Азбаски $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 0(x^5)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + 0(x^4)$ аст, пас

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x^4}{24} + 0(x^5)\right)}{-\frac{x^4}{6} + 0(x^5)}.$$

Ба эътибор мегирем, ки $\ln(1+z) = z + 0(z)$. Аз ин формулаҳо

$$\ln \left(1 + \frac{x^4}{24} + 0(x^5)\right) = \frac{x^4}{24} + 0(x^4).$$

Хамин тарик,

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + 0(x^4)}{-\frac{x^4}{6} + 0(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{24} + \frac{0(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{6} + 0(x)} = -\frac{1}{4}.$$

Аз ин чо

$$I = \lim_{x\to 0} y = e^{-1/4}.$$

---

* Хангоми хурд будани x ифодаи $\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)$ мусбат мешавад.

ҲИСОБ КАРДАНИ ФУНКЦИЯҲОИ ЭЛЕМЕНТАРӢ

Мо дар ин Илова масъалаи ҳисоб кардани қиматҳои функцияҳои элементарии соддатаринро меомӯзем.

Барои ҳисоб кардани қиматҳои ҳама функцияҳои номбурда ду намуди алгоритм истифода карда мешавад; алгоритми якум ба ҷудокунии функцияи ҳисоб кардашаванда (мувофиқи формулаи Тейлор) ва алгоритми дуюм ба касрҳои занҷирӣ ё бефосила* ҷудо кардани функция асос ёфтааст. Алгоритми якум барои тартиб додани программаи ягонаи ҳисоби қиматҳои функцияҳои логарифмӣ ва тригонометрии чаппа имконият медиҳад. Алгоритми дуюм ба программаи универсалии ҳисоби функцияҳои элементарии соддатарини боқимонда асос ёфтааст.

Ғайр аз асосноккунии алгоритмҳои номбурда, мо ба адади итерацияҳое, ки саҳеҳии додашударо ҳисоббарориро таъмин менамоянд, баҳо медиҳем.

1. Ҳисоб кардани функцияҳои логарифмӣ ва тригонометрии чаппа. Ҳисоб кардани ин функцияҳо ба татбиқи формулаи Тейлор асос ёфтааст. Мо масъалаи ҳисоб кардани логарифм ва арктангенсро муфассал муоина мекунем. Ҳисоби қиматҳои $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$ ва $\arccos x$ бо ёрии формулаҳои маълуми зерин бо осонӣ ба ҳисоби арктангенс оварда мешавад:

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \quad \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Ҳисоб кардани $\ln a$. Адади $a > 0$-ро ба шакли зерин менависем:

$$a = 2^p M, \tag{8.83}$$

дар ин ҷо p — адади бутун ва M шарти

$$\frac{1}{2} \leqslant M < 1 \tag{8.84}$$

-ро қаноат менамояд. Ба шакли (8.83) навиштани a ягона мебошад. Формулаи (8.83)-ро истифода карда, барои $\ln a$ ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\ln a = p \ln 2 + \ln M. \tag{8.85}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+x}{1-x} \tag{8.86}$$

фарз карда ва ин ифодаи M-ро ба (8.85) гузошта, формулаи (8.85)-ро барои $\ln a$ ба намуди зерин меорем:

$$\ln a = \left(p - \frac{1}{2}\right) \ln 2 + \ln \frac{1+x}{1-x}. \tag{8.87}$$

---

* Доир ба касрҳои бефосила аз китоби дарсии А. Киселев «Алгебра», қисми 11, барои синфҳои 9—10 мактаби миёна (Нашриёти Давлатии Тоҷикистон, Душанбе, 1964, саҳ. 219) маълумот гирифта метавонед.

Функцияи $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$-ро мувофиқи формулаи Маклорен ҷудо мекунем. Ин ҷудокунии аъзои боқимондааш шакли Лагранж чунин намуд дорад, ки ба он бовар кардан осон аст:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x), \qquad (8.88)$$

дар ин ҷо

$$R_{2n+2} = \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left[\frac{1}{(1+\theta x)^{2n+2}} - \frac{1}{(1-\theta x)^{2n+2}}\right], \qquad (8.89)$$

адади θ дар байни нуль ва воҳид қатъӣ ҷойгир аст.

Барои тақрибан ҳисоб кардани $\ln a$ формулаи зерин истифода карда мешавад:

$$\ln a \approx (p - \frac{1}{2})\ln 2 + 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+2}}{2n+1}\right), \qquad (8.90)$$

ин формула аз (8.87) бо роҳи ба қисми формулаи Маклорен (8.88), ки ба ин функция бе аъзои боқимондаи $R_{2n+2}(x)$ оид аст, иваз кардани $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ ҳосил мешавад. Адади x-и формулаи тақрибии (8.90) (барои $\ln a$) аз формулаи (8.86) бо эътибори маҳдудияти (8.84), ки ба M гузошта шудааст, муайян карда мешавад.

Акнун саҳви формулаи (8.90)-ро баҳо медиҳем. Азбаски қимати тақрибии $\ln a$, ки бо формулаи (8.90) ҳисоб карда мешавад, аз қимати саҳеҳи бо формулаи (8.87) ҳисоб кардашаванда ба бузургии аъзои боқимондаи $R_{2n+2}(x)$ тафовут дорад, пас барои аниқ кардани саҳв ин аъзои боқимондаро баҳо додан кифоя аст.

Аввалан, ҳудудҳои тағьирьёбии x-ро аниқ мекунем. Аз формулаи (8.86) x-ро меёбем:

$$x = \frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1}. \qquad (8.91)$$

Аз (8.91) натиҷа мебарояд, ки барои қиматҳои M, ки нобаробарии (8.84)-ро қаноат менамоянд, бузургии мутлақи x шарти*

$$|x| < 0{,}172$$

-ро қаноат менамояд.

Акнун қайд мекунем, ки сохти аъзои боқимондаи $R_{2n+2}(x)$ чунин аст, ки қиматҳои мусбат ва манфии x-ро бо тарзҳои яхела баҳо додан мумкин аст (аз формулаи (8.89) намоён аст, ки ба $-x$ иваз кардани x сохти

---

* Азбаски x функцияи M мебошад, пас масъалаи дар сегменти [1/2, 1] ҷудо кардани қимати максималии модули функцияи (8.91) ба миён меояд.

$R_{2n+2}(x)$-ро тағьир намедиҳад). Бинобар ин барои $x \geqslant 0$ баҳодиҳии $R_{2n+2}(x)$-ро хосил кардан кифоя аст. Ин ва нобаробарии (8.92)-ро ба эътибор гирифта, дар қисми рости (8.89) бузургии x-ро бо адади 0,172 иваз карда, бузургии $\frac{1}{1+\theta x}$ воҳид ва бузургии $\frac{1}{1-\theta x}$-ро бо адади $\frac{1}{1-0{,}172}$ иваз карда, баҳодиҳии зеринро хосил мекунем:

$$|R_{2n+2}(x)| \leqslant \frac{(0{,}172)^{2n+2}}{2n+2}\left[1+\frac{1}{(1-0{,}172)^{2n+2}}\right].$$

Дар формулаи охирин $(0{,}172)^{2n+2}$-ро ба даруни қавсҳои квадратӣ мегирем. Азбаски $\frac{0{,}172}{1-0{,}172} < 0{,}208$ аст, пас барои $R_{2n+2}(x)$ баҳодиҳии зеринро хосил мекунем:

$$|R_{2n+2}(x)| \leqslant \frac{(0{,}172)^{2n+2}+(0{,}208)^{2n+2}}{2n+2}. \qquad (8.93)$$

Ҳангоми дар мошини электронии ҳисоббарор* ҳисоб кардани $\ln a$ формулаи (8.90)-ро одатан дар ҳолати $n=6$ будан истифода менамоянд. Барои ин мавриди саҳеҳияти ҳисоббарорӣ, чунон ки аз (8.93) намоён аст, бо адади $\frac{(0{,}172)^{14}+(0{,}208)^{14}}{14}$, ки аз $1{,}625\cdot 10^{-10}$ калон нест, баҳо дода мешавад.

2. Ҳисоб кардани $\operatorname{arctg}\alpha$. Зоҳиран, ба мавриди мусбат будани қиматҳои аргумент маҳдуд шудан мумкин аст, чунки $|\alpha| = x$ фарз карда,

$$\operatorname{arctg}\alpha = \operatorname{sgn}\alpha \cdot \operatorname{arctg} x.$$

Акнун табдилоти стандартиеро нишон медиҳем, ки бо ёрии онҳо барои қиматҳои аргументи x-и аз 1/8 хурд набудагӣ ҳисоб кардани $\operatorname{arctg} x$ ба ҳисоб кардани арктангенси қиматҳои аргументи аз 1/8 хурд будагӣ оварда мешавад.

Бигзор аввал $x \geqslant 1$ бошад. Фарз мекунем, ки $y = \operatorname{arctg} x$ аст, яъне $x = \operatorname{tg} y$, ва $x_1 = \operatorname{tg}(y - \operatorname{arctg} 1)$. Аз формулаи охирин меёбем, ки $x_1 = \frac{\operatorname{tg} y - 1}{\operatorname{tg} y + 1} = \frac{x-1}{x+1} < 1$. Азбаски $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} x_1 = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x_1$ аст, пас барои қиматҳои $x \geqslant 1$ ҳисоб кардани $\operatorname{arctg} x$ ба ҳисоб кардани $\operatorname{arctg} x_1$ (ҳангоми $0 < x_1 < 1$ будан) меорад.

Акнун мавридеро, ки аргумент нобаробарии $\frac{1}{8} < x < 1$-ро қаноат менамояд, муоина мекунем. Бигзор $k_1 = 1$, $k_2 = 1/2$, $k_3 = 1/4$, $k^4 = 1/8$ бошад. Барои қиматҳои $i = 1, 2, 3, 4$ нобаробарии

---

* $\ln a$ дар мошини электронии ҳисоббарори БЭСМ-6 ҳамин тавр ҳисоб карда мешавад.

$$k_i \leqslant x < 2k_i \tag{8.94}$$

иҷро мешавад.

Фарз мекунем, ки $y = \operatorname{arctg} x$ аст, яъне $x = \operatorname{tg} y$ ва $x_i = \operatorname{tg}(y - \operatorname{arctg} k_i)$. Аз ин формула чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$x_i = \frac{\operatorname{tg} y - k_i}{1 + k_i \operatorname{tg} y} = \frac{x - k_i}{1 + k_i x}.$$

Азбаски $x > 0$ аст, пас $1 + k_i x > 1$ мебошад, ғайр аз он, мувофиқи нобаробарии рости (8.94) $x - k_i < 2k_i - k_i = k_i$. Бинобар ин аз ифодаи охирини x_i нобаробарии $x_i < k_i$-ро ҳосил мекунем. Азбаски $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} k_i + \operatorname{arctg} x_i$ мебошад, пас барои қиматҳои x (ки нобаробариҳои (8.94)-ро қаноат менамоянд) ҳисоб кардани $\operatorname{arctg} x$ ба ҳисоб кардани $\operatorname{arctg} x_i$ (ҳангоми $0 < x_i < k_i$ будан) оварда мешавад.

Табдилоти баёншудаи аргументи x-ро зиёдаш чор маротиба такрор карда, барои қиматҳои x-и нимintервали $1/8 \leqslant x < 1$ ҳисоб кардани $\operatorname{arctg} x$-ро ба ҳисоб кардани арктангенси қиматҳои аргументи аз 1/8 хурд будагӣ меорем.

Барои дар мавриди $x < 1/8$ будан ҳисоб кардани $\operatorname{arctg} x$ формулаи Маклорен

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x)$$

истифода карда мешавад. Ҳангоми ҳисоббарориҳо одатан формулаи охиринро дар мавриди $n = 6$ будан истифода мекунанд ва аъзои боқимондаро аз эътибор соқит менамоянд*. Программаи ҳисоббарории логарифм ва арктангенс умумӣ мебошад. Ҳангоми барои арктангенс истифода кардани ин программа фақат барои иваз намудани аломатҳои аъзоҳои ҳамсояи $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ кӯшиш кардан лозим аст.

2. Ҳисоб кардани функцияҳои тригонометрӣ, функцияҳои нишондиҳандагӣ ва функцияҳои гиперболӣ. Ҳисоб кардани ин функцияҳо ба татбиқи к а с р ҳ о и з а н ҷ и р ӣ (ё, чунон ки онҳоро к а с р ҳ о и б е ф о с и л а ҳам меноманд) асос ёфтааст. Хосиятҳои ба мо зарури ин касрҳо дар п. 1 баён мешаванд.

Ҳисоб кардани ҳама фмнкцияҳои номбаршуда бо касри занҷирии муайян, ки он ҳангоми ҷудокунии функцияи $\operatorname{th} x$ ҳосил мешавад, алоқаманд мебошад. Бинобар ин мо ҳисоб кардани қиматҳои функцияи $\operatorname{th} x$-ро муфассал муоина мекунем ва баъд чи тавр ҳисоб кардани фуакцияҳои боқимондаро нишон медиҳем.

1. Б а ъ з е м а ъ л у м о т о и д б а к а с р ҳ о и з а н ҷ и р ӣ. Ифодаи намуди

---

* Масалан, ҳангоми дар мошинҳои электронии БЭСМ-6 ҳисоб кардан ҳамин тавр амал менамоянд.

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}. \tag{8.95}$$

касри занҷирии охирноки $\frac{P_n}{Q_n}$ номида мешавад. Бузургиҳои $a_1, a_2, \cdots, a_n$-ро одатан *суратҳои ҳосили тақсим* ва бузургиҳои $b_0, b_1, \ldots, b_n$-ро *махраҷҳои ҳосили тақсим* меноманд.

Касрҳои занҷирии

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}}, \cdots \tag{8.96}$$

-ро барои $\frac{P_n}{Q_n}$ *касрҳои мувофиқ* меноманд.

Акнун фарз мекунем, ки $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$ аст, онгоҳ аз ифодаи (8.96)-и касрҳои мувофиқи $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ формулаҳоеро ҳосил кардан мумкин аст, ки онҳо P_k-ро бо P_{k-1} ва P_{k-2}, Q_k-ро бо Q_{k-1} ва Q_{k-2} алоқаманд менамоянд:

$$\left.\begin{aligned} P_k &= b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}, \\ Q_k &= b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.97}$$

Ба мо барои касри $\frac{P_n}{Q_n}$ формулаи махсусе лозим аст, ки он муносибати (8.95)-ро муайян менамояд. Барои муқаррар кардани ин формула ду касри мувофиқи $\frac{P_k}{Q_k}$ ва $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$-ро муқоиса менамоем. Фарқи ин касрҳо:

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1}}{Q_{k-1} Q_k}. \tag{8.98}$$

Сурати қисми рости (8.98)-ро дар асоси (8.97) ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$P_kQ_{k-1} - Q_kP_{k-1} = (b_kP_{k-1} + a_kP_{k-2})\,Q_{k-1} - (b_kQ_{k-1} + \\ + a_kQ_{k-2})P_{k-1} = -a_k[P_{k-1}Q_{k-2} - Q_{k-1}P_{k-2}]. \qquad (8.99)$$

Муносибати (8.99)-ро пай дар пай барои қиматҳои k, $(k-1)$, $(k-2)$, ..., 1 истифода карда ва $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$ буданашро ба эътибор гирифта, фарқи касрҳои (8.98)-ро ба намуди зайл менависем:

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k+1}\,a_ka_{k-1}\cdots a_k\,\frac{1}{Q_{k-1}Q_k}. \qquad (8.100)$$

Азбаски

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_0}{Q_0} + \left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0}\right) + \left(\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1}\right) + \cdots + \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)$$

аст, пас мо бо ёрии (8.100) барои касри $\frac{P_n}{Q_n}$ формулаи махсуси даркориро ҳосил мекунем:

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{Q_0Q_1} - \frac{a_1a_2}{Q_1Q_2} + \ldots + (-1)^{n+1}\,\frac{a_1a_2\cdots a_n}{Q_{n-1}Q_n}. \qquad (8.101)$$

2. Ба касри занҷирӣ ҷудо кардани функцияи $\operatorname{th} x$. Тарзи ба касри занҷирӣ ҷудо кардани функцияи $\operatorname{th} x$, ки дар ин пункт истифода мешавад, Шлёмильх* барои ба касри занҷирӣ ҷудо кардани функцияи $\operatorname{tg} x$ пешниҳод карда буд.

Функцияи $y = \operatorname{ch}\sqrt{x}$-ро барои қиматҳои $x > 0$ муоина менамоем. Айниятҳои зерин, ки дар натиҷаи пай дар пай дифференсиронидани функцияи додашуда ва табдилоти содда ҳосил карда мешаванд, маълуманд:

$$2\sqrt{x}\,y' = \operatorname{sh}\sqrt{x}, \quad 2\sqrt{x}\,y'' + \frac{y'}{\sqrt{x}} - \frac{y}{2\sqrt{x}} = 0.$$

Аз муносибати охирин айнияте ҳосил мекунем, ки он барои ҳамаи x-ҳои аз нуль калон $(x > 0)$ дуруст аст:

$$4xy'' + 2y' - y = 0. \qquad (8.102)$$

Айнияти (8.102)-ро пай дар пай медифференсиронем:

$$\left.\begin{aligned} 4xy''' + 6y'' - y' &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 4xy^{(n+2)} + (4n+2)\,y^{(n+1)} - y^{(n)} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.103)$$

Нисбати $\frac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}}$-ро бо u_{n+1} ишорат менамоем. Онгоҳ аз муносибати

---

* Schlömilch O. Ueber den Kettenbruch für tgx.— Zs. Math. und Phys. 2 (1857), 137—165.

охирини (8.103) айнияти $4xu_{n+2}+4n+2=\dfrac{1}{u_{n+1}}$-ро ҳосил мекунем, ки аз он муносибати зерин бармеояд:

$$u_{n+1}=\frac{1/2}{2n+1+2xu_{n+2}}. \qquad (8.104)$$

Азбаски $u_1=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\operatorname{th}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ аст, пас ҳангоми $n=0$ будан муносибати (8.104)-ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\operatorname{th}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{1+2xu_2}.$$

Дар қисми рости ин формула u_2-ро бо ифодааш, ки бо ёрии (8.104) ҳангоми $n=1$ будан ҳосил шуда буд, иваз менамоем. Дар натиҷа формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\operatorname{th}\sqrt{x}=\cfrac{\sqrt{x}}{1+\cfrac{x}{3+2xu_3}}.$$

Дар муносибати охирин мо u_3-ро бо ифодааш, ки бо ёрии (8.104) ҳангоми $n=2$ будан ҳосил шуда буд, иваз менамоем. Мо ингуна амалро дилхоҳ маротибаи охирнок иҷро карда метавонем. Дар натиҷа функцияи $\operatorname{th}\sqrt{x}$ ба касри занҷирӣ ҷудо карда мешавад. Дар ин ҷудокунӣ $\sqrt{x}$-ро ба x иваз карда, ба касри занҷирии охирнок ҷудо кардани функцияи $\operatorname{th}x$-ро меёбем. Ин ҷудокунӣ чунин аст:

$$\operatorname{th}x=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\ddots+\cfrac{x^2}{2n+1+2x^2u_{n+2}}}}} \qquad (8.105)$$

3. Ҳисоб кардани қиматҳои функцияи $\operatorname{th}x$. Баҳодиҳии саҳви ҳисоб. Қиматҳои функцияи $\operatorname{th}x$ дар мошинҳои электронии ҳисоббарор одатан бо ёрии формулаи (8.105), ки аз он аъзои $2x^2u_{n+2}$ партофта мешавад, ҳисоб карда мешавад. Дар ин ҳангом n баробари 6 ($n=6$) гирифта мешавад ва қиматҳои x аз рӯи бузургии мутлақаш бо адади $\pi/4$ маҳдуд мешавад.

Барои номери дилхоҳи n саҳви ҳисоббарориро баҳо медиҳем.

Қимати тақрибии функцияи $\operatorname{th} x$-ро, ки аз (8.105) бо роҳи партофтани аъзои $2x^2u_{n+2}$ ҳосил шудааст, бо $\overline{\operatorname{th}}\, x$ ишорат мекунем. Барои аниқ кардани саҳеҳии ҳисоббарорӣ фарқи $\operatorname{th} x - \overline{\operatorname{th}}\, x$-ро баҳо медиҳем. $\operatorname{th} x$ ва $\overline{\operatorname{th}}\, x$ касрҳои занҷириеро ифода менамоянд, ки мо онҳоро мувофиқан бо $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ ва $\dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$ ишорат мекунем.

Қиматҳои суратҳои ҳосили тақсим a_i, $\overline{a}_i$ ва махраҷҳои ҳосили тақсим b_i, $\overline{b}_i$-ро барои ин касрҳо менависем (бузургиҳое, ки ба касри $\dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$ таалуқ доранд, бо $\overline{a}_i$ ва $\overline{b}_i$ ишорат мекунем). Чунин ифодаҳоро ҳосил менамоем:

$$\left.\begin{aligned} a_1 = \overline{a}_1 = x,\ a_2 = \overline{a}_2 = x^2.\ \cdots,\ a_{n+1} = \overline{a}_{n+1} = x^2, \\ b_0 = \overline{b}_0 = 0,\ b_1 = \overline{b}_1 = 1,\ \cdots,\ b_n = \overline{b}_n = 2n-1, \\ b_{n+1} = 2n+1+2x^2u_{n+2},\ \overline{b}_{n+1} = 2n+1. \end{aligned}\right\} \quad (8.106)$$

Азбаски барои касрҳои $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ ва $\dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$ $Q_{-1} = \overline{Q}_{-1} = 0$ $Q_0 = \overline{Q}_0 = 1$ аст, пас бо ёрии формулаи (8.106) ва муносибати (8.97) баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 = \overline{Q}_1,\ Q_2 = \overline{Q}_2,\ \ldots,\ Q_n = \overline{Q}_n, \\ Q_{n+1} = (2n+1+2x^2u_{n+2})\overline{Q}_n + x^2\overline{Q}_{n-1},\ \overline{Q}_{n+1} = (2n+1)\overline{Q}_n + x^2\overline{Q}_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (8.107)$$

Акнун ҳар яки касрҳои $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ ва $\dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$-ро ба намуди (8.101) менависем. Аз формулаҳои (8.106) ва (8.107) фаҳмост, ки ин навиштаҳо фақат бо ҷамъшавандаи охиринашон тафовут доранд. Бинобар ин фарқи $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$ ба фарқи ҷамъшавандаҳои охирини навиштан ин касрҳо (мувофиқи формулаи (8.101)) баробар аст. Азбаски фарқи касрҳои муоинашаванда ба $\operatorname{th} x -$

$-\overline{\text{th}}\, x$ баробар аст, пас, (8.106)-ро истифода карда, формулаи зеринро ҳосил менамоем:

$$\text{th}\, x - \overline{\text{th}}\, x = (-1)^{n+2} x^{2n+1} \left[\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} - \frac{1}{\overline{Q}_n \overline{Q}_{n+1}}\right].$$

Ин муносибатро бо ёрии формулаҳои (8.107) ба намуди зерин табдил додан мумкин аст:

$$\text{th}\, x - \overline{\text{th}}\, x = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{\overline{Q}_n \overline{Q}_{n+1}} \left[\frac{2x^2 \overline{Q}_n u_{n+2}}{2x^2 \overline{Q}_n u_{n+2} + (2n+1)\overline{Q}_n + x^2 \overline{Q}_{n-1}}\right]. \quad (8.108)$$

Барои ҳосил кардани баҳои даркорӣ аз ду нобаробарии зерин, ки сонитар исбот карда мешавад, истифода мекунем.

Ҳангоми $x \geqslant 0$ *будан барои* $k \geqslant 1$*-и дилхоҳ нобаробарии*

$$\overline{Q}_k \geqslant (2k-1)!! \quad (8.109)$$

дуруст аст.

Ҳангоми $x > 0$ *будан бузургии* u_{n+2} *мусбат аст*:

$$u_{n+2} > 0. \quad (8.110)$$

Акнун фарқи $\text{th}\, x - \overline{\text{th}}\, x$-ро ҳангоми $x > 0$ будан баҳо медиҳем. Азбаски ҳангоми $x > 0$ будан $u_{n+2} > 0$ аст (ба (8.110)ниг.) ва $\overline{Q}_k$-и дилхоҳ аз нуль калон ($\overline{Q}_k > 0$) мебошад (ба (8.109) ниг.), пас ифодаи даруни қавсҳои квадратии қисми рости баробарии (8.108) аз як калон нест. Баъд аз (8.109) нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\overline{Q}_n \overline{Q}_{n+1} \geqslant [(2n-1)!!]^2 (2n+1).$$

Бинобар ин ҳангоми $x > 0$ будан барои номери дилхоҳи n баҳои саҳви зерин дуруст аст:

$$|\text{th}\, x - \overline{\text{th}}\, x| < \frac{x^{2n+1}}{[(2n-1)!!]^2 (2n+1)}. \quad (8.111)$$

Акнун ба баҳои саҳв ҳангоми $n = 6$ будан ва барои қиматҳои x, ки нобаробарии $0 < x < \pi/4$-ро қаноат менамоянд, тавассуф менамоем. Ҳангоми $n = 6$ будан адади $2n-1$ ба 11 ва адади $2n+1$ ба 13 баробар мешавад. Азбаски $(\pi/4) < 0{,}8$ аст, пас $x^{13} < (0{,}8)^{13} < 5{,}6 \cdot 10^{-2}$. Шуморидан осон аст, ки $11!! = 10395$. Бинобар ин, $2 \cdot 6 + 1 = 13$ будананшро ба эътибор гирифта, аз формулаи (8.111) меёбем, ки саҳви ҳисоби тақрибии $\text{th}\, x$ барои $n = 6$ аз $4 \cdot 10^{-11}$ калон нест.

Акнун нобаробариҳои (8.109) ва (8.110)-ро исбот мекунем.

Исботи нобаробарии (8.109).

Аввал ғайриманфӣ будани $\overline{Q}_k$-и дилхоҳро исбот мекунем. Аз формулаҳои (8.106) ҳангоми $n \geqslant 0$ будан барои $k < n$-и дилхоҳ ғайриманфигии $\overline{b}_k$ ва $\overline{a}_k$ бармеояд. Мо қайҳо қайд карда будем, ки $Q_{-1} = 0$ ва $Q_0 = 1$ аст. Аз ин ҷо ва аз формулаи дуюми (8.97) барои $k < n$-и дилхоҳ ғайриманфигии Q_k бармеояд.

Аз формулаи дуюми (8.97) ва, инчунин, аз ғайриманфигии a_k ва $\overline{Q}_k$ нобаробарии

$$\overline{Q}_k \geqslant b_k \overline{Q}_{k-1} \tag{8.112}$$

бармеояд.

Азбаски $Q_0 = 1$ ва ҳангоми $1 \leqslant k \leqslant n$ будан $b_k = 2k - 1$ мебошад, пас аз нобаробарии (8.112) нобаробариҳои зеринро пай дар пай ҳосил мекунем: $\overline{Q}_1 = 1$, $\overline{Q}_2 \geqslant 3$, $\cdots$, $\overline{Q}_k \geqslant (2k-1)!!$ Дурустии нобаробарии (8.109) муқаррар карда шуд.

Исботи нобаробарии (8.110).

Исбот кардан кифоя аст, ки ҳама ҳосилаҳои функцияҳои $y = \operatorname{ch}\sqrt{x}$ (ҳангоми $x > 0$ будан) мусбат мебошанд. Мо бо ҳамин нобаробарии (8.110)-ро исбот мекунем, чунки $u_{n+2} = \dfrac{y^{n+2}}{y^{(n+1)}}$ аст.

Муносибати охирини (8.103)-ро ба $\dfrac{x^{n-1/2}}{4}$ зарб карда, ин муносибатро ба намуди зерин менависем:

$$[x^{n+1/2}\, y^{(n+1)}]' = \frac{x^{n-1/2}}{4}\, y^{(n)}. \tag{8.113}$$

Боварӣ ҳосил мекунем, ки

$$\lim_{x \to 0+0} [x^{n+1/2}\, y^{(n+1)}(x)] = 0. \tag{8.114}$$

Барои ин бовар кардан кифоя аст, ки бузургии

$$x^n y^{(n+1)}(x) \tag{8.115}$$

ҳангоми $x \to 0+0$ маҳдуд мебошад. Аз муносибатҳои $y = \operatorname{ch}\sqrt{x}$ ва $y' = \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ бармеояд, ки $y(x)$ ва $y'(x)$ ҳангоми $x \to 0+0$ маҳдуд мебошанд. Онгоҳ аз (8.102) натиҷа мебарояд, ки бузургии $xy^2(x)$ ҳам ҳангоми $x \to 0+0$ маҳдуд мебошад.

Баъди ин аз муносибати охирин (8.103) мувофиқи индукция бармеояд, ки бузургии (8.115) ҳангоми $x \to 0+0$ барои номери дилхоҳи n маҳдуд мебошад. Бо ҳамин муносибати (8.114) исбот карда шуд.

Акнун исбот мекунем, ки барои номери дилхоҳи n ҳосилаи

$$y^{(n)}(x) \tag{8.116}$$

ҳангоми $x > 0$ будан мусбат аст. Маълум аст, ки ҳангоми $x > 0$ будан $y^{(0)}(x) = y(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x}$ мусбат мебошад. Фарз мекунем, ки барои ягон номери n бузургии (8.116) ҳангоми $x > 0$ будан мусбат мебошад. Онгоҳ боварӣ ҳосил мекунем, ки $y^{(n+1)}(x)$ ҳам ҳангоми $x > 0$ будан мусбат мебошад. Аз (8.113) хулоса мебарояд, ки ҳосилаи қисми чапи (8.113) ҳангоми $x > 0$ будан мусбат мебошад, яъне функцияи $x^{n+1/2} y^{(n+1)}(x)$ ҳангоми $x > 0$ будан меафзояд. Онгоҳ аз (8.114) натиҷа мебарояд, ки ин функция ҳан-

гоми $x > 0$ будан мусбат мебошад. Инак, ҳангоми $x > 0$ будан $y^{(n+1)}(x) > 0$ мебошад, ва нобаробарии (8.110) исбот шуд.

4. Ҳисоб кардани синуси гиперболӣ, косинуси гиперболӣ ва функцияи нишондиҳандагӣ. Мо минбаъд касри занҷирии зеринро бо символи $S_n(t)$ ишорат менамоем:

$$S_n(t) = 1 + \cfrac{t}{3 + \cfrac{t}{5 + \cfrac{t}{\ddots + \cfrac{t}{2n+1}}}}. \tag{8.117}$$

Одатан барои мошинҳои электронии ҳисоббарор программаи ҳисоб кардани ин касри занҷириро тартиб медиҳанд. Ин программаро истифода карда, программаи ҳисоби тангенси гиперболиро бо осонӣ тартиб додан мумкин аст, чунки, чунон ки дар пункти гузашта аниқ карда шуд, қимати тақрибии $\operatorname{th} x$-ро аз формулаи

$$\operatorname{th} x \approx \frac{x}{S_n(x^2)} \tag{8.118}$$

ҳисоб кардан мумкин аст, ғайр аз ин дар пункти гузашта ҳам аниқ шуда буд, ки бо зиёдшавии n саҳеҳии ҳисоббарорӣ меафзояд ва саҳв ба нуль майл мекунад.

Ҳисоби функцияҳои $\operatorname{sh} 2x$, $\operatorname{ch} 2x$, e^{2x}-ро бо ёрии формулаҳои

$$\operatorname{sh} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad ch\, x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad e^{2x} = \frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}$$

ба ҳисоби тангенси гиперболӣ редукция кардан мумкин аст. Аз ин формулаҳо ва аз муносибати (8.118) барои қиматҳои тақрибии функцияҳои номбурда формулаҳои зерин ҳосил мешаванд:

$$\operatorname{sh} 2x \approx \frac{2S_n(x^2) \cdot x}{S_n^2(x^2) - x^2}, \quad \operatorname{ch} 2x \approx \frac{S_n^2(x^2) + x^2}{S_n^2(x^2) - x^2}, \quad e^{2x} \approx \frac{S_n(x^2) + x}{S_n(x^2) - x}.$$

Бо ёрии ин формулаҳо ва программаи ҳисоби $S_n(t)$ барои ҳисоб кардани $\operatorname{sh} 2x$, $\operatorname{ch} 2x$ ва e^{2x} бо осонӣ программа тартиб дода мешавад.

5. Ҳисоб кардани функцияҳои тригонометрӣ. Чунон, ки функцияи $\operatorname{th} x$ ба касри занҷирӣ чудо карда шуда буд, функцияи $\operatorname{tg} x$ ҳам ҳамин тавр ба касри занҷирӣ чудо карда мешавад.

Функцияи $y = \cos \sqrt{x}$-ро барои қиматҳои $x > 0$ муоина мекунем. Дар натиҷа пай дар пай дифференсиронидани ин функция ва табдилоти сода муносибатҳои зерин ҳосил мешаванд:

$$2\sqrt{x}\, y' = -\sin \sqrt{x}; \quad 2\sqrt{x}\, y'' + \frac{y'}{\sqrt{x}} = -\frac{y}{2\sqrt{x}}.$$

Аз муносибати охирин айнияти

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

-ро ҳосил менамоем. Ин айниятро пай дар пай дифференсиронида, баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$4xy''' + 6y'' + y' = 0,$$

$$4xy^{(n+2)} + (4n + 2)\,y^{(n+1)} + y^{(n)} = 0.$$

Нисбати $\dfrac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}}$-ро бо u_{n+1} ишорат менамоем. Онгоҳ аз баробарии охирин баробарии $4xu_{n+2} + 4n + 2 = -\dfrac{1}{u_{n+1}}$-ро ҳосил мекунем, ки аз он муносибати

$$u_{n+1} = \frac{-1/2}{2n + 1 + 2xu_{n+2}}$$

ҳосил мешавад. Аз ин ҷо, чунон ки барои тангенси гиперболӣ муҳокима ронда будем, функцияи $\operatorname{tg} x$-ро ба касри занҷирӣ ҷудо мекунем:

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{-x^2}{3 + \cfrac{-x^2}{5 + \ddots + \cfrac{-x^2}{2n + 1 + 2x^2u_{n+2}}}}}.$$

Аз ин формула аъзои $2x^2u_{n+2}$-ро партофта, қимати тақрибии $\operatorname{tg} x$-ро ҳосил менамоем. Ифодаи (8.117)-ро ба эътибор гирифта, ин қимати тақрибиро аз формулаи

$$\operatorname{tg} x \approx \frac{x}{S_n(-x^2)} \tag{8.119}$$

ёфтан мумкин аст.

Мисли мавриди тангенси гиперболӣ бовар кардан мумкин аст, ки бо зиёдшавии n саҳехии ҳисоббарорӣ (мувофиқи формулаи (8.119) меафзояд ва саҳв ба нуль майл мекунад.

Бо ёрии формулаҳои аз курси математикаи элементарӣ маълуми $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ва $\cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ва муносибати (8.119) барои ҳисоб кардани қиматҳои тақрибии $\sin 2x$ ва $\cos 2x$ формулаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\sin 2x \approx \frac{2S_n(-x^2)\cdot x}{S_n^2(-x^2)-x^2}, \quad \cos 2x \approx \frac{S_n^2(-x^2)+x^2}{S_n^2(-x^2)-x^2}.$$

Дар хотима қайд мекунем, ки саҳеҳии ҳисоби ҳама функцияҳое, ки дар ду пункти охирин муоина шудаанд, барои шаш итерация ($n = 6$) аз 10^{-11} хурд намешавад (ба шарте, ки аргументи x аз рӯи бузургии мутлақаш аз $\pi/4$ калон нашавад).

БОБИ 9

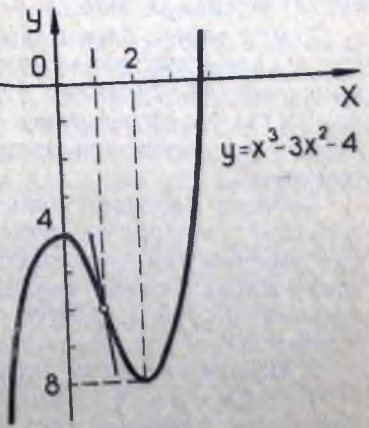
ТАДҚИҚИ ГЕОМЕТРИИ ГРАФИКИ ФУНКЦИЯ. ЁФТАНИ ҚИМАТҲОИ МАКСИМУМ ВА МИНИМУМИ ФУНКЦИЯ

§ 1. Қитъаи монотонии функция. Ҷустуҷӯи нуқтаҳои экстремум

1. Ҷустуҷӯи қитъаҳои монотонии функция. Мо дар § 10-уми боби гузашта як қатор шартҳоеро, ки дар ягон интервали (a, b) *афзуншавӣ* (ё мувофиқан *камшавӣ, афзуннашавӣ ва камнашавӣ*)-и функцияи $f(x)$-ро таъмин менамоянд, муқаррар карда будем. Барои бехтарии омӯзиш шартҳои ёфташударо боз як маротиба баён мекунем:

1°. Барои он ки функцияи дар интервали (a, b) дифференсиронидашавандаи $f(x)$ дар ҳамин интервал *кам нашавад (наафзояд)*, зарур ва кифоя аст, ки ҳосилаи ин функция $f'(x)$ дар ҳамин интервал манфӣ (ғайримусбат) бошад.

2°. Барои он ки функцияи дифференсиронидашавандаи $f(x)$ дар интервали (a, b) *афзояд (кам шавад)*, кифоя аст, ки ҳосилаи $f'(x)$ дар ҳамин интервал мусбат (манфӣ) бошад.



Расми 9.1

Ҳамин тариқ, омӯзиши масъалаи қитъаи монотонии функцияи дифференсиронидашавандаи $f(x)$ *ба тадқиқи аломати ҳосилаи якуми ин функция* меорад.

Ба сифати мисол масъалаи ҷустуҷӯи қитъаҳои монотонии функцияи $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$-ро муоина мекунем. Азбаски $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ аст, пас $f'(x)$

ҳангоми $-0 < x < 0$ будан мусбат аст,
ҳангоми $0 < x < 2$ будан манфӣ аст,
ҳангоми $2 < x < +\infty$ будан мусбат аст.

Ҳамин тариқ, функцияи муоинашаванда дар ҳар яки нимхатҳои рости $(-\infty, 0)$ ва $(2, +\infty)$ меафзояд ва дар интервали $(0, 2)$ кам мешавад. Графики ин функция дар расми 9.1 тасвир шудааст.

2. Ҷустуҷӯи нуқтаҳои экстремуми имконпазир. Мо дар п. 2-юми § 7-уми боби гузашта мафҳуми *максимум (минимум)-и локалии* функцияи $f(x)$-ро омӯхта будем ва *шарти зарурии* дар нуқтаи додашуда мавҷуд будани максимум (минимум)-и локалии функцияи $f(x)$-ро муқаррар карда будем. Барои беҳтарии омӯзиш таъриф ва натиҷаҳои дар пункти номбурда муқарраршударо боз як маротиба баён мекунем.

Бигзор функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи c муайян бошад. Функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c соҳиби *максимум (минимум)-и локалӣ* мебошад, агар чунин атрофи нуқтаи c ёфт шавад, ки дар ҳудудҳои он қимати $f(c)$ аз байни ҳама қиматҳои дигари ин функция қимати калонтарин (хурдтарин) бошад.

Максимуми локалӣ ва минимуми локалӣ бо номи умумии *экстремум* муттаҳид мешаванд.

Теоремаи зерин *шарти зарурии экстремуми функцияи дифференсиронидашавандаро муқаррар мекунад*: *агар функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c дифференсиронидашаванда бошад ва дар ин нуқта экстремум дошта бошад, онгоҳ $f'(c) = 0$ мешавад.*

Ҳамин тариқ, барои дар функцияи дифференсиронидашавандаи $f(x)$ ҷустуҷӯ кардани нуқтаҳои экстремуми имконпазир ҳамаи решаҳои муодилаи $f'(x) = 0$ (яъне ҳамаи нулҳои ҳосилаи $f'(x)$)-ро ёфтан лозим аст. Мо минбаъд решаҳои муодилаи $f'(x) = 0$-ро нуқтаҳои *экстремуми имконпазири* функцияи $f(x)$ меномем*.

Азбаски баробари нуль будани ҳосилаи якум *фақат шарти зарурии*** экстремум мебошад, пас масъалаи дар ҳар як нуқтаи экстремуми имконпазир мавҷуд будани экстремумро бевосита тадқиқ кардан лозим аст. Барои ингуна тадқиқи иловагӣ шарти кифоягии мавҷудияти экстремумро муқаррар кардан лозим аст. Мо инро муқаррар мекунем.

3. Шарти кифоягии якуми экстремум.

Теоремаи 9.1. *Бигзор нуқтаи c нуқтаи экстремуми имконпазири функцияи $f(x)$ бошад, ва бигзор функцияи $f(x)$ дар*

---

* Баъзан решаҳои муодилаи $f'(x) = 0$-ро *нуқтаҳои стационарӣ* меноманд.

** Аз муоинаи функцияи $y = x^3$ маълум, ки ин шарти кифоягӣ намебошад. Ин функция дар нуқтаи $x = 0$, ки дар он $f'(x) = 0$ аст, экстремум надорад.

ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи c дифференсиронидашаванда бошад. Онгоҳ, агар дар ҳудудҳои атрофи номбурда ҳосилаи $f'(x)$ аз чапи нуқтаи c мусбат (манфӣ) бошад ва аз рости нуқтаи c манфӣ (мусбат) бошад, онгоҳ функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c соҳиби максимум (минимум)-и локалӣ мебошад. Агар ҳосилаи $f'(x)$ аз чап ва аз рости нуқтаи c якхел аломат дошта бошад, онгоҳ дар нуқтаи c экстремум вуҷуд надорад.

Исбот. 1) Бигзор аввал ҳосилаи $f'(x)$ дар ҳудудҳои атрофи муоинашаванда аз чапи c мусбат (манфӣ) ва аз рости c манфӣ (мусбат) бошад. Исбот кардан лозим аст, ки қимати $f(c)$ аз байни ҳамаи қиматҳои $f(x)$-и атрофи муоинашаванда қимати калонтарин (хурдтарин) бошад. Аз атрофи муоинашаванда қимати *дилхоҳи* нобаробари c-и аргументро бо x_0 ишорат мекунем. Исбот кардан кифоя аст, ки

$$f(c) - f(x_0) > 0 \quad (< 0).$$

Функцияи $f(x)$ дар сегменти $[c, x_0]$ дифференсиронидашаванда (ва, бинобар ин, бефосила ҳам) мебошад. Теоремаи Лагранж (8.12)-ро аз рӯи сегменти $[c, x_0]$ ба $f(x)$ татбиқ карда,

$$f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0) \qquad (9.1)$$

-ро ҳосил менамоем, ки дар ин ҷо ξ ягон қимати аргументи байни c ва x_0 мебошад. Азбаски ҳосилаи $f'(\xi)$ ҳангоми $x_0 < c$ будан мусбат (манфӣ) ва ҳангоми $x_0 > c$ будан манфӣ (мусбат) мебошад, пас қисми рости (9.1) мусбат (манфӣ) аст.

2) Бигзор акнун ҳосилаи $f'(x)$ аз чап ва аз рости c аломатҳои якхела дошта бошад. Мисли ишорати болой, қимати дилхоҳи нобаробари c-и аргументро бо x_0 ишорат мекунем ва муҳокимаронии болоиро такрор карда, мо исбот мекунем, ки қисми рости (9.1) ҳангоми $x_0 < c$ ва ҳангоми $x_0 > c$ будан аломатҳои гуногун дорад. Ин дар нуқтаи c набудани экстремумро исбот мекунад.

Қоидае, ки аз теоремаи 9.1 бармеояд, ба таври мухтасар ин тавр баён кардан мумкин аст: 1) *агар ҳангоми аз нуқтаи додашудаи c гузаштани экстремуми имконпазир ҳосилаи $f'(x)$ аломаташро аз плюс ба минус (аз минус ба плюс) иваз намояд, онгоҳ функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c соҳиби максимум (минимум)-и локалӣ мебошад*; 2) *агар ҳангоми аз нуқтаи додашудаи c гузаштани экстремуми имконпазир ҳосилаи $f'(x)$ аломаташро иваз накунад, онгоҳ дар нуқтаи c экстремум вуҷуд надорад.*

Мисолҳо. 1) **Фарз мекунем**, ки банкаи консерв шакли силиндри мудаввари радиусаш r ва баландиаш h дорад. Банкаи консерв, ки масоҳати сатҳи пурраяш доимист, дар кадом муносибати байни r ва h ҳаҷми калонтарин дорад?

Масоҳати сатҳи пурраи банкаи консервро бо S ишорат мекунем. Онгоҳ

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = S = \text{const.} \tag{9.2}$$

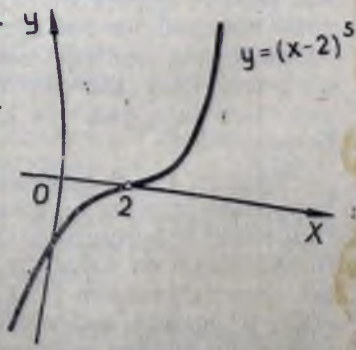
Аз ин баробарӣ меёбем, ки

$$h = \frac{S}{2\pi r} - r.$$

Ҳамин тариқ, ҳаҷми V-и банкаи консервро чун функцияи радиуси r ифода карда метавонем: $V = \pi r^2 h = \frac{S}{2} r - \pi r^3$. Масъала ба ҷустуҷӯи максимуми функцияи $V(r) = \frac{S}{2} r - \pi r^3$ оварда шуд. Ҳосилаи $V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$-ро баробари нуль карда ва $r > 0$ будани нашро ба эътибор гирифта, нуқтаи экстремуми имконпазирро

$$r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \tag{9.3}$$

-ро меёбем. Агарчи мувофиқи мазмуни масъала фаҳмост, ки нуқтаи ягонаи экстремуми имконпазир нуқтаи максимуми функцияи $V(r)$ мебошад, теореми 9.1-ро истифода карда ва ҳосилаи $V'(r) = 3\pi(S/6\pi - r^2)$ ҳангоми $r < \sqrt{S/6\pi}$ будан мусбат ва ҳангоми $r > \sqrt{S/6\pi}$ будан манфӣ будани нашро ба эътибор гирифта, ба он қатъиян бовар кардан мумкин аст. Акнун муқаррар мекунем, ки дар ҳар кадом муносибати байни радиус (r) ва баландӣ (h) ҳаҷми калонтарин $V(r)$-и банкаи консерв амалӣ мешавад. Барои ин баробарии (9.2)-ро ба r^2 тақсим мекунем ва муносибати (9.3)-ро дар қисми рости баробарии ҳосилшуда истифода менамоем. Дар натиҷа $h/r = 2$ ё $h = 2r$ ҳосил мешавад.



Расми 9.2

Ҳамин тариқ, *ҳаҷми ҳамон банкаи консерв калонтарин мешавад, ки агар баландии банка ба диаметраш баробар бошад.**

---

* Масъалаи ҳалкардаамон нишон медиҳад, ки барои сарфа кардани тунука банкаи консервро чунон сохтан даркор, ки баландиаш ба диаметраш баробар бошад.

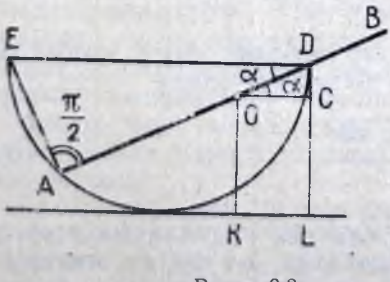
2) Нуқтаҳои экстремуми функцияи $f(x) = (x-2)^5$ ёфта шавад. Азбаски $f'(x) = 5(x-2)^4$ аст, пас нуқтаи $x = 2$ нуқтаи ягонаи экстремуми имконпазир мебошад.

Азбаски $f'(x)$ ҳам аз чап ва ҳам аз рости ин нуқта мусбат мебошад, пас функцияи $f(x) = (x-2)^5$ нуқтаҳои экстремум тамоман надорад (графики функцияи $f(x) = (x-2)^5$ дар расми 9.2 тасвир шудааст).

4. Шарти кифоягии дуюми экстремум. Тадқиқи аломати ҳосилаи якуми $f'(x)$ аз чап ва аз рости нуқтаи экстремуми имконпазир баъзан мушкилӣ меорад. Мо дар ин маврид шарти кифоягии дигари дар нуқтаи додашудаи c-и экстремуми имконпазир мавҷуд будани экстремумро нишон медиҳем, ки он дар атрофи c тадқиқ кардани аломати $f'(x)$-ро талаб намекунад, лекин *дар нуқтаи c мавҷуд будани ҳосилаи дуюми охирноки нобаробари нульи $f^{(2)}(x)$-ро пешбинӣ мекунад.*

Теореми 9.2 Бигзор функцияи $f(x)$ дар нуқтаи додашудаи c-и экстремуми имконпазир ҳосилаи дуюми охирнок дошта бошад. Он гоҳ, агар $f^{(2)}(c) < 0$ бошад, функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c соҳиби максимум аст ва агар $f^{(2)}(c) > 0$ бошад, ин функция дар нуқтаи c соҳиби минимум аст.

Исбот. Аз шарти $f^{(2)}(c) < 0$ (> 0) ва аз теореми 8.9 бармеояд, ки функцияи $f'(x)$ дар нуқтаи c кам мешавад (меафзояд). Азбаски мувофиқи шарт $f'(c) = 0$ аст, пас чунин атрофи нуқтаи c ёфт мешавад, ки дар ҳудудҳои он $f'(x)$ аз чапи c *мусбат* (манфӣ) буда, аз рости c манфӣ (мусбат) аст. Лекин онгоҳ мувофиқи теореми гузашта дар нуқтаи c соҳиби максимум (минимум) мебошад.



Расми 9.3

Қайд. Теореми 9.2, умуман, назар ба теореми 9.1 доираи маҳдуди амал дорад. Чунончи, теореми 9.2 масъалаи экстремумро барои мавриде, ки ҳосилаи дуюми $f^{(2)}(x)$ дар нуқтаи c вуҷуд надорад ва, инчунин, *барои мавриде, ки* $f^{(2)}(c) = 0$ мебошад, ҳал намекунад. Дар мавриди охирин барои ҳалли масъалаи мавҷудияти экстремум хосиятҳои ҳосилаҳои тартиби олиро дар нуқтаи c омӯхтан лозим аст. Инро дар § 4-уми ҳамин боб меомӯзем.

Мисолҳо. 1) Дар косаи нимкурашакли радиусаш r стержени якчинсаи дарозиаш l дохил карда шудааст (расми 9.3) $2r < l < 4r$ фарз карда, мавқеи мувозинатии стержень ёфта шавад.

Мавқеи мувозинатии стержень ба қимати минималии энергияи потенциалии он, яъне ба мавқеи пасттарини марказии вaз-

нинии он 0 мувофиқ меояд (азбаски стержень якчинса мебошад, маркази вазнинии он бо миёначояш мувофиқ аст). Перпендикуляри ҳамвориро, ки дар он коса вокеъ аст, бо OK ишорат карда, мавкеи стержени AB-ро, ки дар он порчаи OK дарозии минималӣ дорад, чустучӯ мекунем. Пеш аз ҳама дарозии порчаи OK-ро чун функцияи кунҷ (α)-и моили стержень ба ҳамворие, ки дар он коса вокеъ аст, ҳисоб менамоем. Бигзор DL ба OK параллель ва OC ба OK перпендикуляр бошад (D — нуқтаест, ки стержень дар он ба канори коса такья мекунад).

Аз секунҷаи росткунҷаи EAD $AD = ED\cos\alpha = 2r\cos\alpha$. Мувофиқи шарт $AO = l/2$. Ҳамин тариқ,

$$OD = AD - AO = 2r\cos\alpha - l/2.$$

Аз дигар тараф, $DC = DL - OK = r - OK$. Бинобар ин аз секунҷаи росткунҷаи ODC

$$\sin\alpha = \frac{DC}{OD} = \frac{r - OK}{2r\cos\alpha - l/2}.$$

Ҳамин тариқ, дарозии порчаи OK, ки бо $f(x)$ ишорат менамоем, ба $f(\alpha) = r + l/2\sin\alpha - r\sin 2\alpha$ баробар аст.

Акнун ҳамон қимати кунҷи α-ро чустучӯ мекунем, ки дар он $f(\alpha)$ ба минимум соҳиб мешавад. (Мо ба қимати кунҷи α-и чорьяки якум маҳдуд шуда метавонем.) Азбаски $f'(\alpha) = l/2\cos\alpha - 2r\cos 2\alpha = l/2\cos\alpha + 2r - 4r\cos^2\alpha$ аст, нуқтаҳои экстремуми имконпазир аз ҳалли муодилаи квадратии

$$4r\cos^2\alpha - l/2\cos\alpha - 2r = 0$$

ёфта мешавад. Азбаски $\cos\alpha$ дар чорьяки якум мусбат мебошад, пас ба мо фақат решаи мусбати ин муодила

$$\cos\alpha_0 = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128r^2}}{16r} \qquad (9.4)$$

бакор меояд. Агарчи мувофиқи мазмуни масъала фаҳмост, ки нуқтаи ягонаи экстремуми имконпазир α_0 нуқтаи минимуми функцияи $f(\alpha)$ мебошад, мо инро бо ёрии теоремаи 9.2 ба таври қатъӣ муқаррар мекунем. Бовар кардан кифоя аст, ки $f^{(2)}(\alpha_0) > 0$ аст. Азбаски

$$f^{(2)}(\alpha) = -l/2\sin\alpha + 4r\sin 2\alpha = 8r\sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{l}{16r}\right)$$

аст, пас, дар асоси (9.4),

$$f^{(2)}(\alpha_0) = 8r\sin\alpha_0\left(\cos\alpha_0 - \frac{l}{16r}\right) = \frac{\sin\alpha_0}{2}\sqrt{l^2 + 128r^2} > 0$$

Бо ҳамин муқаррар карда шуд, ки кунҷи моили стержень ба хамворие, ки дар он коса воқеъ асту ин кунҷ бо формулаи (9.4) муайян карда мешавад, мавқеи мувозинатии стерженьро муайян менамояд.

2) Қиматҳои экстремумии функцияи $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ ёфта шавад. Мо ин функцияро дар п. 1-уми ҳамин параграф тадқиқ карда будем (ба расми 9.1 ниг.). Азбаски $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ мебошад, пас функцияи $f(x)$ ду нуқтаи экстремуми имконпазир дорад, яъне $x_1 = 0$ ва $x_2 = 2$. Азбаски аломати $f'(x)$ аз чап ва аз рости ин нуқтаҳо бо осонӣ аниқ карда мешавад, пас масъалаи экстремумро бо ёрии теоремаи 9.1 (шарти кифоягии якум) ҳал кардан мумкин аст. Лекин мо теоремаи 9.2 (шарти кифоягии дуюм)-ро низ истифода мекунем. Яъне

$$f^{(2)}(x) = 6x - 6,\ f^{(2)}(0) = -6 < 0,\ f^{(2)}(2) = 6 > 0.$$

Ҳамин тариқ, функцияи $f(x)$ дар нуқтаи 0 ба максимум ва дар нуқтаи 2 ба минимум соҳиб аст. Қиматҳои экстремумии ин функция:

$$f_{\max} = f(0) = -4,\quad f_{\min} = f(2) = -8.$$

5. Экстремуми функцияе, ки дар нуқтаи додашуда дифференсиронидашаванда нест. Схемаи умумии ҷустуҷӯи экстремумҳо. Мо то ҳоло масъалаи *дар чунин нуқтаи c, ки дар он функцияи $f(x)$ дифференсиронидашаванда мебошад,* экстремум доштани функцияи $f(x)$-ро ҳал кардем. Акнун мо дар ин пункт масъалаи дар нуқтаи *c* экстремум доштани чунин функцияеро меомӯзем, ки он дар нуқтаи *c* дифференсиронидашаванда намебошаду лекин дар ҳама ҷои ягон атрофи рост ва чапи *c* дифференсиронидашаванда мебошад.

Маълум шуд, ки теоремаи 9.1-ро ба мавриди ингуна функция ҷамъбаст кардан мумкин аст. Хусусан таъдиқоти зерин мавқеъ дорад.

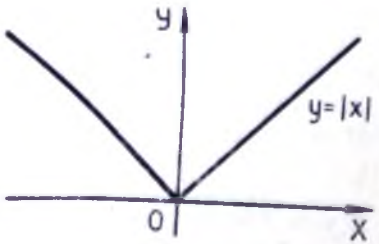
Теоремаи 9.3. *Бигзор функцияи $f(x)$* дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи *c*, ба ғайр аз худи нуқтаи *c*, дифференсиронидашаванда, ва дар нуқтаи *c* бефосила бошад.

Онгоҳ, агар ҳосилаи $f'(x)$ дар ҳудудҳои атрофи номбурда аз чапи нуқтаи c мусбат (манфӣ) ва аз рости нуқтаи c манфӣ (мусбат) бошад, функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c максимум (минимум)-и локалӣ дорад. Агар ҳосилаи $f'(x)$ аз чап ва рости нуқтаи c аломати якхела дошта бошад, онгоҳ дар нуқтаи c экстремум вуҷуд надорад.

Исбот мисли исботи теоремаи 9.1 мебошад. Фақат ин дафъа ба функцияи $f(x)$ аз рӯи сегменти $[c, x_0]$ татбиқшавии теоремаи Лагранж ин тавр муқаррар карда мешавад: мувофиқи шарт функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои нимсегменти $[c, x_0]$ дифференсиронидашаванда (ва, пас, бефосила ҳам) ва, ғайр аз

он, бефосила мебошад. Бо ҳамин $f(x)$ дар ҳама ҷои сегменти $[c, x_0]$ бефосила ва дар ҳама нуқтаҳои дарунии ин сегмент дифференсиронидашаванда мебошад.

Мисолҳо. 1) Нуқтаҳои экстремуми функцияи $f(x) = |x|$ ёфта шавад. Ин функция дар ҳама ҷои хати рости беохир, ғайр аз нуқтаи $x = 0$, дифференсиронидашаванда ва дар нуқтаи $x = 0$ бефосила мебошад, ба замми ин ҳангоми $x > 0$ будан $f'(x) = 1$ ва ҳангоми $x < 0$ будан $f'(x) = -1$ аст.



Расми 9.4

Теореми 9.1 ба ин функция татбиқнашаванда аст ва мувофиқи теореми 9.3 он ҳангоми $x = 0$ будан соҳиби минимум мебошад (расми 9.4).

2) Нуқтаҳои экстремуми функцияи $y = x^{2/3}$ ёфта шавад. Ин функция дар ҳама ҷои хати рости беохир бефосила ва дар ҳама ҷои ин хати рост, ба ғайр аз нуқтаи $x = 0$, дифференсиронидашаванда мебошад. Ҳангоми $x \neq 0$ будан

$$y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Дар мисоли гузашта ҳосила дар нуқтаи $x = 0$ ба каниши чинси якум* соҳиб буд; ин дафъа ҳосила дар нуқтаи $x = 0$ соҳиби каниши чинси дуюм («ҷаҳиши беохир») мебошад. Аз ифодаи ҳосила хулоса мебарояд, ки ин ҳосила аз чапи нуқтаи $x = 0$ манфӣ ва аз рости ин нуқта мусбат мебошад. Пас, теореми 9.3 ба чунин тасдиқе имконият медиҳад, ки функцияи муоинашаванда дар нуқтаи $x = 0$ соҳиби минимум мебошад (графики функцияи муоинашаванда дар расми 9.5 тасвир шудааст).

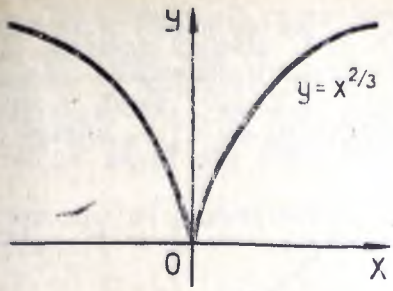
3) Нуқтаҳои экстремуми функцияи зерин ёфта шавад:

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} \text{ ҳангоми } x \neq 0 \text{ будан,} \\ 0 \text{ ҳангоми } x = 0 \text{ будан.} \end{cases}$$

Дидан осон аст, ки ин функция дар ҳамаи хати рости беохир бефосила мебошад. Воқеан, нуқтаи $x = 0$ нуқтаи «шубҳаноки»

---

* Ба ҳамон маъное, ки ин ҳосила агарчи дар нуқтаи $x = 0$ мавҷуд набошад ҳам, лекин дар ин нуқта қиматҳои лимитии рост ва чапи охирноке дорад, ки ба якдигар мувофиқ нестанд.



Расми 9.5

ягона мебошад, лекин функция дар ин нуқта ҳам бефосила мебошад, чунки

$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0-0} y = 0.$$

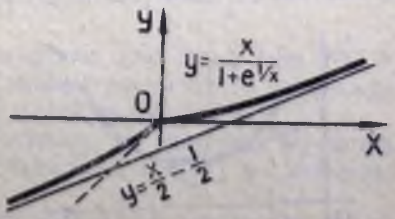
Баъд, маълум аст, ки функцияи муоинашаванда дар ҳама ҷои хати рости беохир, ғайр аз нуқтаи $x = 0$ дифференсиронидашаванда мебошад. Ҳосила, ғайр аз ин нуқта, дар ҳамаи нуқтаҳо бо формулаи зерин муайян мешавад:

$$y' = \frac{1 + e^{1/x} + \dfrac{1}{x}\, e^{1/x}}{(1 + e^{1/x})^2}.$$

Бо осонӣ дида мешавад, ки $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ вуҷуд надорад, чунки функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $x = 0$ дифференсиронидашаванда намебошад. Азбаски ҳосилаи y' ҳам аз чап ва ҳам аз рости нуқтаи $x = 0$ мусбат мебошад, пас функцияи муоинашаванда, мувофиқи теоремаи 9.3, дар нуқтаи $x = 0$ экстремум надорад ва, бинобар ин, умуман он соҳиби экстремумҳо намебошад. (Графики функцияи муоинашаванда дар расми 9.6 тасвир шудааст.)

Схемаи умумии ҷустуҷӯи экстремуми локалиро баён мекунем. Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ *дар интервали* (a, b) бефосила мебошад ва ҳосилаи он $f'(x)$ вуҷуд дорад ва дар ҳама ҷои ин интервал, ғайр аз нуқтаҳои шумораашон охирнок, бефосила мебошад.*

Ғайр аз он, фарз мекунем, ки *ҳосилаи $f'(x)$ дар интервали (a, b) фақат дар нуқтаҳои шумораашон охирнок ба нуль табдил мешавад.* Ба ибораи дигар, мо фарз мекунем, ки дар интервали (a, b) фақат нуқтаҳои шумораашон охирноке ҳастанд, ки дар онҳо ҳосилаи $f(x)$ вуҷуд надорад ё



Расми 9.6

* Ба ҷои интервал нимхати рост, хати рости беохир ва маҷмӯи дигарро муоина кардан мумкин аст.

ба нуль табдил мешавад. Ин нуқтаҳоро бо символҳои x_1, x_2, x_3, ..., x_n $(a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b)$ ишорат мекунем. Дар асоси фарзиятамон ҳосилаи $f'(x)$ *аломати доимиашро* дар ҳар яки интервалҳои (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) *нигоҳ медорад.* Пас, *масъалаи дар ҳар яки нуқтаҳои* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *мавҷуд будани экстремумро бо ёрии теоремаи* 9.3 *(ба таври мусбат ё манфӣ) ҳал кардан мумкин аст.*

Мо дар ин ҷо барои тасвир кардани схемаи умумии ҷустуҷӯи нуқтаҳои экстремуми локалӣ мисоле намеорем. Мо ингуна мисолҳоро дар § 6 меорем.

§ 2. Самти барҷастагии графики функция

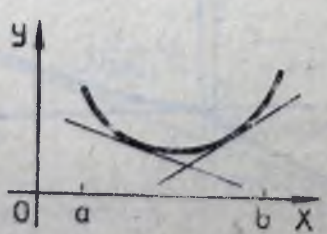
Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи интервали (a, b) дифференсиронидашаванда мебошад. Онгоҳ, чунон ки дар п. 4 § 1 боби 5 муқаррар карда шуд, *расандаи графики функцияи* $y = f(x)$ *мавҷуд ҳаст, ки он аз нуқтаи дилхоҳи* $M(x, f(x))$*-и ин график* $(a < x < b)$ *мегузарад,* дар айни ҳол ин расанда ба тири Oy параллель* нест.

Таъриф. Графики функцияи $y = f(x)$ *дар интервали* (a, b) *ба барҷастагии самташ ба поён (ба боло) соҳиб аст, агар графики ин функция дар ҳудудҳои интервали номбурда на поёнтари (на болотари) расандаи дилхоҳаш воқеъ бошад.*

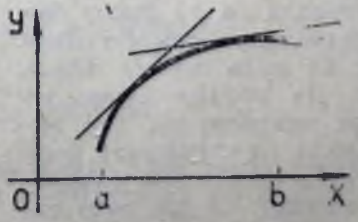
Қайди 1. Термини «*график на поёнтари (на болотари)* расандааш воқеъ аст» маъно дорад, чунки расанда ба тири Oy параллель нест.

Дар расми 9.7 графики функцияе, ки дар интервали (a, b) барҷастагии самташ ба поён дорад, тасвир шудааст; дар расми 9.8 графики функцияе, ки барҷастагии самташ ба боло дорад, тасвир шудааст.

Теоремаи 9.4. *Агар функцияи* $y = f(x)$ *дар интервали* (a, b) *ҳосилаи дуюми охирнок дошта бошад ва агар ин ҳосила дар ҳама ҷои ин интервал ғайриманфӣ (ғайримусбат) бошад, онгоҳ графики* $y = f(x)$ *дар интервали* (a, b) *соҳиби барҷастагии самташ ба поён (ба боло) мебошад.*



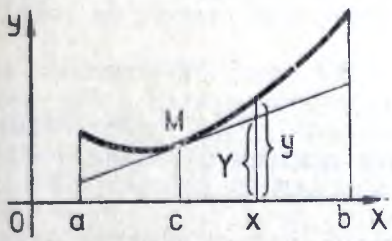
Расми 9.7



Расми 9.8

* Чунки коэффициенти кунҷии он, ки ба ҳосилаи $f'(x)$ баробар аст, *охирнок* мебошад.

И с б о т. Барои муайянӣ мавридеро, ки ҳосилаи дуюми функция дар ҳама ҷои (a, b) аз нуль калон ё ба нуль баробар мебошад $(f^{(2)}(x) \geqslant 0)$, муоина мекунем. Нуқтаи дилхоҳи интервали (a, b)-ро бо c ишорат менамоем (расми 9.9). Исбот кардан лозим аст, ки графики функцияи $y = f(x)$ на поёнтари расандаи аз нуқтаи $M(c, f(c))$ гузаранда воқеъ аст. Ординатаи ҷории расандаи номбурдаро бо Y ишорат мекунем ва муодилаи ин расандаро менависем. Азбаски коэффициенти кунҷии расандаи номбурда ба $f'(c)$ баробар аст, пас муодилаи он чунин намуд дорад*:



Расми 9.9.

$$Y - f(c) = f'(c)(x - c). \quad (9.5)$$

Функцияи $f(x)$-ро дар атрофи нуқтаи c мувофиқи формулаи Тейлор (дар ин формула $n = 1$ мегирем) ҷудо мекунем. Чунин ифода ҳосил мешавад:

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - c)^2, \quad (9.6)$$

дар ин ҷо аъзои боқимонда ба шакли Лагранж гирифта шудааст, ξ дар байни c ва x воқеъ аст. Азбаски мувофиқи шарт $f(x)$ дар интервали (a, b) ҳосилаи дуюм дорад, пас формулаи (9.6) барои x-и дилхоҳи интервали (a, b) дуруст мебошад (ба § 13 боби 8 ниг.).

(9.6) ва (9.5)-ро муқоиса карда, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$y - Y = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x - c)^2. \quad (9.7)$$

Азбаски мувофиқи шарт ҳосилаи дуюм дар ҳама ҷои (a, b) калон ё баробари нуль аст, пас қисми рости (9.7) *ғайриманфист*, яъне барои ҳама x-ҳои (a, b) $y - Y \geqslant 0$ ё $y \geqslant Y$.

Нобаробарии охирин исбот мекунад, ки графики функцияи $y = f(x)$ дар ҳама ҷои ҳудудҳои интервали (a, b) на поёнтари расандаи (9.5) воқеъ аст.

Теорема барои мавриди $f^{(2)}(x) \leqslant 0$ айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад.

---

* Дар бораҳои 8-уми ҳамин курс исбот карда шудааст, ки муодилаи хати росте, ки аз нуқтаи $M(a, b)$ мегузарад ва коэффициенти кунҷии k дорад, ин тавр аст: $Y - b = k(x - a)$.

Қайди 2. Агар дар ҳама ҷои интервали (a, b) $f^{(2)}(x) = 0$ бошад, онгоҳ, чунон ки бовар кардан осон аст, $y = f(x)$ функцияи хаттӣ мебошад, яъне графики он хати рост аст. Дар ин маврид самти барҷастагиро дилхоҳ пиндоштан мумкин аст.

Теореми 9.5. Бигзор ҳосилаи дуюми функцияи $y=f(x)$ дар нуқтаи c бефосила ва мусбат (манфӣ) бошад. Онгоҳ чунин атрофи нуқтаи c мавҷуд ҳаст, ки дар ҳудудҳои он графики функцияи $y = f(x)$ соҳиби барҷастагии самташ ба поён (ба боло) мебошад.

Исбот. Мувофиқи теореми 8.4 (доир ба устувории аломати функцияи бефосила) чунин атрофи нуқтаи c ёфт мешавад, ки дар ҳудудҳои он ҳосилаи дуюм $f^{(2)}(x)$ мусбат (манфӣ) аст. Мувофиқи теореми гузашта графики функцияи $y = f(x)$ дар ҳудудҳои ин атроф барҷастагии самташ ба поён (ба боло) дорад.

Ҳамин тариқ, *самти барҷастагии графики функция бо аломати ҳосилаи дуюми ҳамин функция пурра тавсиф мешавад.*

Мисол. Самти барҷастагии графики функцияи $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ тадқиқ карда шавад. Мо ин функцияро дар пп. 1 ва 4-уми параграфи гузашта (ба расми 9.1 ниг.) муоина карда будем. Аз намуди ҳосилаи дуюми $f^{(2)}(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ натиҷа мебарояд, ки ин ҳосила ҳангоми $x < 1$ будан манфӣ ва ҳангоми $x > 1$ будан мусбат аст. Ҳамин тариқ, барҷастагии графики функцияи $y = x^3 - 3x^2 - 4$ дар қитъаи $(-\infty, 1)$ ба боло ва дар қитъаи $(1, \infty)$ ба поён равон аст.

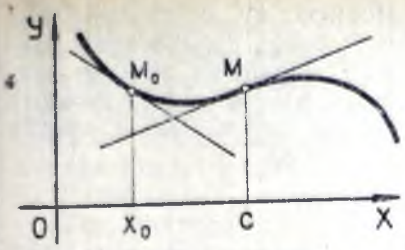
§ 3. Нуқтаҳои ҳамии графики функция

1. Муайян кардани нуқтаҳои ҳамӣ. Шарти зарурии ҳамӣ. Бигзор a, b ва c се ададе бошанд, ки бо нобаробарии $a < c < b$ алоқаманданд. Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар интервали (a, b) дифференсиронидашаванда мебошад, яъне расандаи графики ин функция дар ҳамаи нуқтаҳое, ки абсциссаашон ба интервали (a, b) тааллуқ доранд, вуҷуд дорад. Фарз мекунем, ки, ғайр аз он, графики функцияи $y = f(x)$ дар ҳар яки интервалҳои (a, c) ва (c, b) самти муайяни барҷастагӣ дорад.

Таъриф. Нуқтаи $M(c, f(c))$-и графики функцияи $y = f(x)$ нуқтаи ҳамии ин график номида мешавад, агар чунин атрофи нуқтаи c-и тири абсцисса вуҷуд дошта бошад, ки дар ҳудудҳои он графики функцияи $y = f(x)$ аз чап ва рости c самтҳои гуногуни барҷастагӣ дорад.

Дар расми 9.10 графики функцияе, ки дар нуқтаи $M(c, f(c))$ ҳамӣ дорад, тасвир шудааст.

Баъзан ҳангоми муайян кардани нуқтаҳои ҳамии графики функцияи $y = f(x)$ ба таври илова талаб карда мешавад, ки *графики номбурда бояд дар ҳама ҷои ҳудудҳои атрофи ба қадри қифоя хурди нуқтаи c-и тири абсциса аз чапу рости c дар*



Расми 9.10.

тарафҳои гуногуни расандаи ин график, ки аз нуқтаи $M(c, f(c))$ гузаронида шудааст, воқеъ бошад. Мо ҳозир исбот мекунем, ки ин хосият аз чунин таъриф, ки ҳосилаи $f'(x)$ дар нуқтаи c бефосила мебошад, бармеояд.

Ду леммаи зеринро исбот мекунем.

Л е м м а и 1. *Бигзор функцияи $y = f(x)$ дар ҳама ҷои δ-атрофи нуқтаи c соҳиби ҳосилаи $f'(x)$ бошад, дар айни ҳол ин ҳосила дар нуқтаи c бефосила мебошад. Онгоҳ, агар графики функцияи $y = f(x)$ дар интервали $(c, c + \delta)$ барҷастагии самташ ба поён (ба боло) дошта бошад, дар ҳама ҷои ҳудудҳои интервали $(c, c + \delta)$ ин график на поёнтари (на болотари) расандаи график, ки дар нуқтаи $M(c, f(c))$ гузаронида шудааст, воқеъ мебошад.*

И с б о т. Пайдарпаии $\{x_n\}$-и нуқтаҳои интервали $(c, c + \delta)$, ки ба нуқтаи c наздик мешавад, муоина мекунем. Аз ҳар яки нуқтаҳои $M(x_n, f(x_n))$-и графики функцияи $y = f(x)$ ба ҳамин график расанда, яъне хати рости*

$$Y_n = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

-ро мегузаронем. Азбаски мувофиқи шарт графики функцияи $y = f(x)$ дар интервали $(c, c + \delta)$ соҳиби барҷастагии самташ ба поён (ба боло) мебошад, пас барои номери дилхоҳи n ва нуқтаи к а й д ш у д а и дилхоҳи x-и интервали $(c, c+\delta)$

$$f(x) - Y_n = f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \qquad (*)$$

Аз шарти дар нуқтаи c бефосила будани $f'(x)$ (ва, хусусан, $f(x)$) ва аз таърифи бефосилагии дар п. 1 § 3 боби 4 баёншуда натиҷа мебарояд, ки лимити зерин вуҷуд дорад:

$$\lim_{n\to\infty}(f(x) - Y_n) = \lim_{n\to\infty}\{f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n)\} =$$
$$= f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$

Аз мавҷудияти лимити охирин дар асоси нобаробарии $(*)$ ва теореман 3.13-и § 1 боби 3 чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

---

* Мо аз муодилаи хати рост, ки аз нуқтаи додашудаи $M_n(x_n, f(x_n))$ мегузарад ва коэффициенти куҷнаш ба $f'(x_n)$ баробар мебошад, истифода мекунем. Ординатаи ҷории ин хати ростро бо Y_n ишорат менамоем.

Агар ординатаи чории расандаи (9.5)-ро, ки аз нуқтаи $M(c, f(c))$ мегузарад, бо Y ишорат намоем, онгоҳ нобаробарии охиринро ба намуди $f(x) - Y \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ навиштан мумкин аст.

Инак, нобаробарии (*)-ро ҳангоми $n \to \infty$ лимит гирифта ва теоремаи 3.13-и боби 3-ро истифода карда, барои нуқтаи x-и қайдшудаи дилхоҳи интервали $(c, c + \delta)$

$$f(x) - Y \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

-ро ҳосил мекунем, дар айни ҳол Y ординатаи чории расандаи аз нуқтаи $M(c, f(c))$ гузаронидашударо ифода мекунад. Лемма исбот шуд.

Қайд. Лемманы 1 барои мавриде, ки графики функция на дар интервали $(c, c + \delta)$, балки дар интервали $(c - \delta, c)$ самти муайяни барчастагӣ дорад, ҳамин тавр баён ва исбот карда мешавад.

Лемманы 2. Бигзор функцияи $y = f(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи c соҳиби ҳосилаи $f'(x)$ бошад, дар айни ҳол ин ҳосила дар нуқтаи c бефосила мебошад. Онгоҳ, агар графики функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $M(c, f(c))$ соҳиби хамӣ бошад, дар ҳудудҳои δ-атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи c ин график аз чапу рости c дар тарафҳои гуногуни расандае, ки аз нуқтаи $M(c, f(c))$ гузаронида шудааст, воқеъ мебошад.

Барои исботи ин лемма $\delta > 0$-ро чунон хурд интихоб кардан лозим, ки дар ҳар яки интервалҳои $(c - \delta, c)$ ва $(c, c + \delta)$ графики функцияи $y = f(x)$ самти муайяни барчастагӣ дошта бошад (ин самт дар интервалҳои $(c - \delta, c)$ ва $(c, c + \delta)$ гуногун мешавад). Баъди ин барои исботи лемманы 2 лемманы 1-ро ба функцияи $y = f(x)$ дар ҳар яки интервалҳои $(c - \delta, c)$ ва $(c, c + \delta)$ татбиқ кардан лозим мешавад.

Лемманы 2 имконият медиҳад, ки шарти зарурии хамии графики функцияи дар нуқтаи додашуда ду маротиба дифференсиронидашавандаро муқаррар намоем.

Теоремаи 9.6 *(шарти зарурии хамии графики функцияи ду маротиба дифференсиронидашаванда). Агар функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи c соҳиби ҳосилаи дуюм бошад ва графики ин функция дар нуқтаи $M(c, f(c))$ хамӣ дошта бошад, онгоҳ $f^{(2)}(c) = 0$ аст.*

Исбот. Бигзор, мисли болой, Y ординатаи чории расандаи $Y = f(c) + f'(c)(x - c)$, ки аз нуқтаи $M(c, f(c))$-и график мегузарад, бошад.

Функцияи $F(x)$-ро муоина мекунем, ки он ба фарқи $f(x)$ ва функцияи хаттии $f(c) + f'(c)(x - c)$ баробар аст, яъне

$$F(x) = f(x) - Y = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$

Ин функцияи $F(x)$, мисли функцияи $f(x)$, дар нуқтаи c ҳосилаи дуюм дорад (ва, бинобар ин, дар ягон атрофи нуқтаи c

ҳосилаи якум дорад, дар айни ҳол ин ҳосилаи якум дар нуқтаи c бефосила мебошад). Дар асоси леммаи 2 дар атрофи хурди нуқтаи c графики функцияи $y = f(x)$ аз чап ва рости c дар тарафҳои гуногуни расандае, ки аз нуқтаи $M(c, f(c))$ мегузарад, вокеъ мешавад ва, бинобар ин, функцияи $F(x)$ дар атрофи хурди нуқтаи c аз чапу рости c аломатҳои гуногун дорад.

Пас, *функцияи $F(x)$ дар нуқтаи c ба экстремуми локалӣ соҳиб шуда наметавонад.*

Фарз мекунем, ки акнун $f^{(2)}(c) \neq 0$ аст. Онгоҳ, азбаски $F'(x) = f'(x) - f'(c)$, $F^{(2)}(x) = f^{(2)}(x)$ аст, пас шарти $F'(c) = 0$, $F^{(2)}(c) \neq 0$ иҷро мешавад ва функцияи $F(x)$, дар асоси теоремаи 9.2, дар нуқтаи c экстремуми локалӣ дорад. Мухолифоти хосилшуда исбот мекунад, ки фарзияти $f^{(2)}(c) \neq 0$ нодуруст аст, яъне $f^{(2)}(c) = 0$ мебошад. Теорема исбот шуд.

Ба нуль баробар шудани ҳосилаи дуюм фақат шарти зарурии хамии графики функцияи ду маротиба дифференсирониданашаванда мебошад; ана ҳамин, масалан, аз муоинаи графики функцияи $y = x^4$ бармеояд. Барои ин функция ҳосилаи дуюми $y^{(2)} = 12x^2$ дар нуқтаи $x = 0$ ба нуль табдил мешавад, лекин графики он дар нуқтаи $M(0, 0)$ хамӣ надорад.

Дар асоси теоремаи 9.6 барои чустучӯи ҳама нуқтаҳои хамии графики функцияи ду маротиба дифференсирониданашавандаи $y = f(x)$ ҳама решаҳои муодилаи $f^{(2)}(x) = 0$-ро муоина кардан лозим аст.

Азбаски баробари нуль шудани ҳосилаи дуюм фақат шарти зарурии хамӣ мебошад, пас масъалаи дар ҳар як нуқтае, ки барояш $f^{(2)}(x) = 0$ мебошад, мавҷуд будани хамиро ба таври илова тадқиқ кардан лозим аст. Барои ингуна тадқиқ шарти кифоягии хамиро муқаррар кардан лозим аст.

2. Шарти кифоягии якуми хамӣ.

Теоремаи 9.7. Бигзор функцияи $y = f(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи c ҳосилаи дуюм дошта бошад ва $f^{(2)}(c) = 0$ бошад. Онгоҳ, агар дар ҳудудҳои атрофи номбурда ҳосилаи дуюми $f^{(2)}(x)$ аз чап ва рости c аломатҳои гуногун дошта бошад, графики ин функция дар нуқтаи $M(c, f(c))$ хамӣ дорад.

Исбот. Бояд қайд кард, ки, аввалан, графики функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $M(c, f(c))$ соҳиби расанда мебошад, чунки аз шарти теорема мавҷудиятии ҳосилаи охирноки $f'(c)$ бармеояд. Сониян, аз он, ки $f^{(2)}(x)$ аз чап ва рости c аломатҳои гуногун дорад, ва аз теоремаи 9.4 хулоса мебарояд, ки самти барҷастагӣ аз чапу рости c гуногун мебошад. Теорема исбот шуд.

Мисол. Нуқтаҳои хамии графики функцияи $y = x^3 - 3x^2 - 4$ ёфта шавад. Мо ин функцияро чандин маротиба муоина кардем (графики он дар расми 9.1 тасвир шудааст). Азбаски $f^{(2)}(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ мебошад, пас қимати ягонаи аргумент, ки барояш хамӣ имкон дорад, $x = 1$ мебошад.

Нуқтаи M (1, —6)-и график ба ҳамин қимати аргумент мувофиқ меояд. Азбаски $f^{(2)}(x)$ ҳангоми $x > 1$ ва $x < 1$ будан аломатҳои гуногун дорад, пас нуқтаи M (1, —6) нуқтаи ҳамии графики функцияи муоинашаванда мебошад.

3. Шарти кифоягии дуюми ҳамӣ. Дар мавриде, ки дар атрофи нуқтаи c тадқиқ кардани аломати ҳосилаи дуюм номатлуб аст, мо шарти кифоягии дуюми ҳамиро баён мекунем, ки он дар нуқтаи c мавҷуд будани ҳосилаи сеюми охирноки функцияи $y = f(x)$-ро тахмин мекунад.

Теоремаи 9.8. *Агар функцияи $y=f(x)$ дар нуқтаи c ҳосилаи сеюми охирнок дошта бошад ва дар ин нуқта шартҳои $f^{(2)}(c) = 0$ ва $f^{(3)}(c) \neq 0$-ро қаноат намояд, онгоҳ графики ин функция дар нуқтаи $M(c, f(c))$ соҳиби ҳамӣ мебошад.*

Исбот. Аз шарти $f^{(3)}(c) \neq 0$ ва аз теоремаи 8.9 натиҷа мебарояд, ки функцияи $f^{(2)}(x)$ дар нуқтаи c ё меафзояд, ё кам мешавад. Азбаски $f^{(2)}(c) = 0$ аст, пас дар ҳар ду мавриде ҳам чунин атрофи нуқтаи c ёфт мешавад, ки дар ҳудудҳои он $f^{(2)}(x)$ *аз чап ва рости c аломатҳои гуногун* дорад. Лекин мувофиқи теоремаи гузашта графики функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $M(c, f(c))$ соҳиби ҳамӣ мебошад.

Қайд. Албатта, теоремаи 9.8 назар ба теоремаи 9.7 татбиқи васеъ надорад. Чунончи, теоремаи 9.8 масъалаи мавҷудияти ҳамиро барои мавриде, ки дар функцияи $y = f(x)$ ҳосилаи сеюми охирнок вуҷуд надорад, ва инчунин барои мавриде, ки $f^{(3)}(x) = 0$ мебошад, ҳал намекунад. Дар мавриди охирин барои ҳалли масъалаи мавҷудияти ҳамӣ хосиятҳои дар нуқтаи c дошта ҳосилаҳои тартиби олиро омӯхтан лозим аст. Мо инро дар § 4-уми ҳамин боб меомӯзем.

Ба мисоле, ки дар пункти гузашта муоина кардем, бармегардем ва нишон медиҳем, ки масъалаи мавҷудияти ҳамии графики функцияи $y = x^3 - 3x^2 - 4$-ро бо ёрии теоремаи 9.8 ҳам ҳал кардан мумкин аст. Воқеан, $f^{(3)}(x) = 6 \neq 0$, пас, нуқтаи $M(1, -6)$ мувофиқи теоремаи 9.8, нуқтаи ҳамӣ мебошад.

4. Баъзе ҷамъбастҳои шарти кифоягии якуми ҳамӣ. Пеш аз ҳама бояд қайд кард, ки доир ба теоремаи 9.7 аз талаботи *дар ҳуди нуқтаи c* ду маротиба дифференсиронидашавандагии функцияи $y = f(x)$ даст кашидан мумкин аст; ин талаботро фақат барои нуқтаҳое, ки дар ягон атрофи чапу рости c воқеанд, нигоҳ доштан мумкин аст. Дар айни ҳол мавҷудияти ҳосилаи охирноки $f'(c)$-ро ба таври илова фарз кардан лозим аст.

Исботи теоремаи 9.7 бо тағьиротҳои номбурда айнан бо исботи болой мувофиқ меояд.

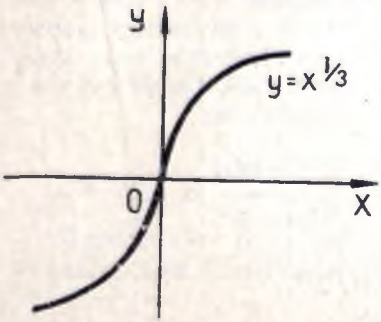
Баъд ҳангоми муайян кардани нуқтаҳои ҳамӣ мавридеро, ки расандаи график дар нуқтаи муоинашаванда ба тири Oy* параллель аст, истисно накардан мумкин аст. Дар ин мавриди истиснонакунӣ дар теоремаи 9.7 ҳатто аз талаботи дар ҳуди нуқтаи c як маротиба дифференсиронидашавандагии функцияи $f(x)$ даст кашидан ва ин теоремаро ин тавр баён кардан мумкин аст.

---

* Ин мавриди ба қиматҳои беохири $f'(c)$ мувофиқ меояд.

Бигзор функцияи $y=f(x)$ дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи c, ба ғайр аз худи нуқтаи c, ҳосилаи дуюми охирнок дошта бошад. Бигзор, баъд, функцияи $y=f(x)$ дар нуқтаи c бефосила бошад ва графики ин функция дар нуқтаи $M(c, f(c))$ расанда дошта бошад. Онгоҳ, агар ҳосилаи дуюми $f^{(2)}(x)$ дар ҳудудҳои атрофи номбурда аз чапу рости c аломатҳои гуногун дошта бошад, графики функцияи $y=f(x)$ дар нуқтаи $M(c, f(c))$ соҳиби хамӣ мебошад.*

Исботи тасдиқоти баёншуда ба исботи теореми 9.7 пурра монанд аст.



Расми 9.11.

Мисол. Нуқтаи хамии графики функцияи $y=x^{1/3}$ ёфта шавад. Ин функция дар ҳама ҷои хати рости беохир, ба ғайр аз нуқтаи $x=0$, ҳосилаи дуюм дорад. Функцияи муоинашаванда дар нуқтаи $x=0$ бефосила мебошад, лекин ҳосилаи якумаш ба беохирӣ табдил мешавад. Аммо графики функцияи $y=x^{1/3}$ дар нуқтаи (0, 0) расандае дорад, ки он ба тири Oy** параллель аст (расми 9.11).

Азбаски ҳосилаи дуюми

$$y^{(2)}=-\frac{2}{9}\frac{1}{x^{5/3}}$$

аз чапу рости нуқтаи $x=0$ аломатҳои гуногун дорад, пас графики функцияи $y=x^{1/3}$ дар нуқтаи (0, 0) соҳиби хамӣ мебошад.

§ 4. Шарти кифоягии сеюми экстремум ва хамӣ

Теореми 9.9. Бигзор $n\geqslant 1$ адади бутун бошад ва бигзор функцияи $y=f(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи c ҳосилаи тартиби n-ум ва дар худи нуқтаи c ҳосилаи тартиби $(n+1)$-ум дошта бошад. Бигзор, баъд, муносибатҳои зерин дуруст бошанд:

$$f^{(2)}(c)=f^{(3)}(c)=\cdots=f^{(n)}(c)=0, \quad f^{(n+1)}(c)\neq 0. \tag{9.8}$$

Онгоҳ, агар n адади ҷуфт бошад, графики функцияи $y=f(x)$ дар нуқтаи $M(c, f(c))$ хамӣ дорад. Агар n адади тоқ ва, ғайр аз он, $f'(c)=0$ бошад, функцияи $y=f(x)$ дар нуқтаи c экстремуми локалӣ дорад, аниқтараш, дар нуқтаи c ҳангоми $f^{(n+1)}(c)>0$ будан минимуми локалӣ ва ҳангоми $f^{(n+1)}(c)<0$ будан максимуми локалӣ дорад.

Исбот. 1) Бигзор аввал n адади ҷуфт бошад. Теореман исботшаванда ҳангоми $n=2$ будан бо теореми исботшудаи 9.8 мувофиқ меояд. Теоремаро фақат барои n-и ҷуфти $\geqslant 0$ исбот кардан лозим аст.

---

* Ақаллан расандаи ба тири Oy параллель.

** Ин, масалан, аз он бармеояд, ки графики функцияи чаппаи $x=y^3$ дар ин нукта ба расандаи $x=0$ соҳиб аст.

Бигзор n-и ҷуфт шарти $n \geqslant 4$-ро қаноат намояд. Аз шарти $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ ва аз теоремаи 8.9, ки ба функцияи $f^{(n)}(x)$ татбиқ шуда буд, натича мебарояд, ки ин функцияи $f^{(n)}(x)$ дар нуқтаи c ё меафзояд, ё кам мешавад. Азбаски, ғайр аз он, $f^{(n)}(c) = 0$ аст, пас дар он ва дар дигар мавриди *атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи c ёфт мешавад, ки дар ҳудудҳои он $f^{(n)}(x)$ аз рост ва аз чапи c аломатҳои гуногун дорад.*

Функцияи $f^{(2)}(x)$-ро дар атрофи нуқтаи c мувофики формулаи Тейлор бо аъзои бокимондаи шакли Лагранж чудо мекунем. Барои ҳама x-ҳои атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи c дар байни c ва x чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки

$$f^{(2)}(x) = f^{(2)}(c) + \frac{f^{(3)}(c)}{1!}\cdot(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-3)^{n-3} + \\ + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}.$$

Муносибати (9.8) барои ин тавр навиштани баробарии охирин имконият медиҳад:

$$f^{(2)}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}. \qquad (9.9)$$

Азбаски дар ҳудудҳои ба қадри кифоя хурди атрофи нуқтаи c функцияи $f^{(n)}(x)$ ҳангоми $x < c$ ва $x > c$ будан аломатҳои гуногун дорад ва азбаски ξ доимо дар байни c ва x воқеъ аст, пас $f^{(n)}(\xi)$ (ва, дар асоси ҷуфт будани n, ҳамаи қисми рости (9.9) ҳам) ҳангоми $x < c$ ва $x > c$ будан аломатҳои гуногун дорад. Лекин онгоҳ қисми чапи (9.9) ҳам, яъне $f^{(2)}(x)$ дар ҳудудҳои атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи c ҳангоми $x < c$ ва $x > c$ будан ба аломатҳои гуногун соҳиб мебошад. Дар асоси теоремаи 9.7 ин чунин маъно дорад, ки графики функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $M(c, f(c))$ хамӣ дорад, ва теорема барои мавриди ҷуфт будани n исбот шуд.

2) Бигзор акнун $n \geqslant 1$ адади тоқ бошад ва ба таври илова фарз карда мешавад, ки $f'(c) = 0$ аст. Азбаски ҳангоми $n = 1$ будан теоремаи исботшаванда бо теоремаи исботшудаи 9.2 мувофиқ меояд, пас теоремаро барои n-и тоқи $\geqslant 3$ исбот кардан лозим аст.

Бигзор n-и тоқ шарти $n \geqslant 3$-ро қаноат намояд. Барои муайянӣ, муҳокимарониро барои мавриди $f^{(n+1)}(c) > 0$ қарор медиҳем, чунки барои мавриди $f^{(n+1)}(c) < 0$ муҳокимаронӣ ба он монанд аст.

Аз шарти $f^{(n+1)}(c) > 0$ ва аз теоремаи 8.9, ки ба функцияи $f^{(n)}(x)$ татбиқ шуд, натича мебарояд, ки ин функцияи $f^{(n)}(x)$ дар нуқтаи c меафзояд. Азбаски, ғайр аз он, $f^{(n)}(c) = 0$ аст,

пас ин чунин маъно дорад, ки *чунин атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи c ёфт мешавад ,ки дар ҳудудҳои он* $f^{(n)}(x)$ *аз чапи с манфӣ буда, аз рости а мусбат мебошад.*

Функцияи $f'(x)$-ро дар атрофи нуқтаи c мувофиқи формулаи Тейлор бо аъзои боқимондаи шакли Лагранж чудо мекунем. Барои ҳама x-ҳои атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи c дар байни c ва x чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки

$$f'(x)=f'(c)+\frac{f^{(2)}(c)}{1!}(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}+$$

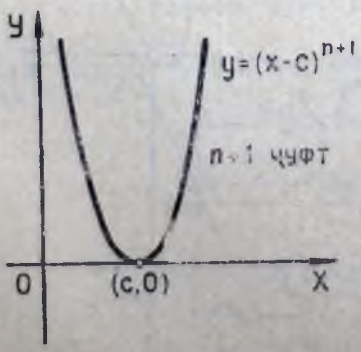
$$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}. \qquad (9.10)$$

Муносибати (9.8) ва шарти иловагии $f'(c)=0$ имконият медиҳанд, ки баробарии (9.10)-ро ба намуди зерин нависем:

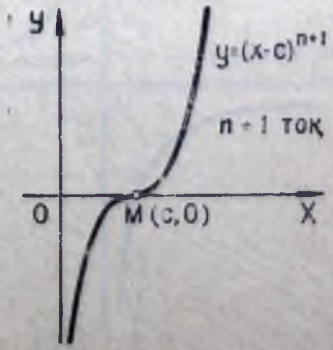
$$f'(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}. \qquad (9.11)$$

Азбаски ξ доимо дар байни c ва x вокеъ аст, пас барои ҳама x-ҳои атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи c ҳосилаи $f^{(n)}(\xi)$ ҳангоми $x<c$ будан манфӣ буда, ҳангоми $x>c$ будан мусбат аст. Ҳангоми n адади тоқ будан $n-1$ адади ҷуфт аст ва, бинобар ин, ҳамаи қисми рости 9.11 (ва, пас, қисми чапаш ҳам) барои ҳама x-ҳои атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи c аз чапи c манфӣ буда, аз рости c мусбат мебошад.

Дар асоси теоремаи 9.1 ин чунин маъно дорад, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c соҳиби минимуми локалӣ мебошад. Инак, барои мавриди $f^{(n+1)}(c)>0$ қисми дуюми теорема исбот шуд. Азбаски мавриди $f^{(n+1)}(c)<0$ айнан ҳамин тавр муоина мешавад, пас теорема пурра исбот шуд.



Расми 9.12



Расми 9.13

Мисол. Функцияи $f(x)=(x-c)^{n+1}$ доир ба экстремумҳо ва нуқтаи ҳамӣ тадқиқ карда шавад. Бо осонӣ ёфтан мумкин аст, ки $f'(c)=f^{(2)}(c)=\cdots=f^{(n)}(c)=0$, $f^{(n+1)}(c)=(n+1)!>0$. Мувофиқи теоремаи 9.9 ҳангоми чуфт будани $(n+1)$ функция дар нуқтаи $x=c$ ба минимум соҳиб аст (расми 9.12) ва ҳангоми тоқ будани $(n+1)$ графики функция дар нуқтаи $M(c, 0)$ соҳиби ҳамӣ мебошад (расми 9.13).

§ 5. Асимптотаҳои графики функция

Таърифи 1. Хати рости $x=a$ асимптотаи вертикалии графики функцияи $y=f(x)$ мебошад, агар ақаллан яке аз қиматҳои лимитии

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{ё} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

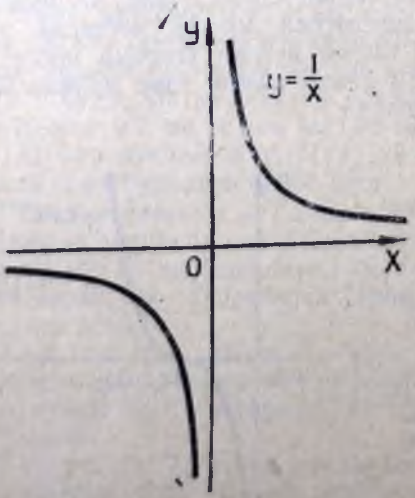
ба $+\infty$ ё ба $-\infty$ баробар бошад.

Мисол. Графики функцияи $y=1/x$ асимптотаи вертикалии $x=0$ дорад, чунки $\lim\limits_{x\to 0+0} 1/x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} 1/x=-\infty$ (расми 9.14).

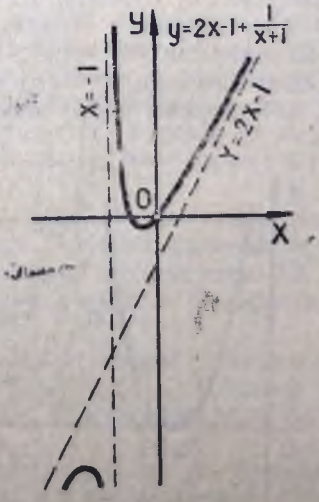
Баъд фарз мекунем, ки функцияи $y=f(x)$ барои қиматҳои ҳар қадар калони аргумент муайян аст. Барои муайянӣ қиматҳои ҳар қадар калони аломаташ *мусбатро* муоина мекунем.

Таърифи 2. Хати рости

$$Y=kx+b \tag{9.12}$$



Расми 9.14



Расми 9.15

асимптотаи моили графики функцияи $y = f(x)$ *ҳангоми* $x \to +\infty$ *мебошад, агар функцияи* $f(x)$*-ро ба намуди*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{9.13}$$

ки дар ин ҷо $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ *аст, навиштан мумкин бошад.*

Теоремаи 9.10. *Барои он ки графики функцияи* $y=f(x)$ *ҳангоми* $x \to +\infty$ *ба асимптотаи моили* (9.12) *соҳиб бошад, зарур ва кифоя аст, ки ду қимати лимитии*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ ва } \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b \tag{9.14}$$

мавҷуд бошад.

Исбот. 1) Шарти зарурӣ. Бигзор графики функцияи $y = f(x)$ ҳангоми $x = +\infty$ будан ба асимптотаи (9.12) соҳиб бошад, яъне барои $f(x)$ навишти (9.13) дуруст аст. Онгоҳ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx+b+\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

2) Шарти кифоягӣ. Бигзор қиматҳои лимитии (9.14) мавҷуд бошанд. Қимати лимитии дуюми (9.14) барои тасдиқ кардани он, ки фарқи $f(x) - kx - b$ ҳангоми $x \to +\infty$ бузургии беохир хурд мебошад, имконият медиҳад. Ин бузургии беохир хурдро бо $\alpha(x)$ ишорат карда, барои $f(x)$ навишти (9.13)-ро ҳосил мекунем. Теорема исбот шуд.

Қайд. Асимптотаи моил ҳамин тавр муайян карда шуда, теоремаи 9.10 барои мавриди $x \to -\infty$ ҳамин тавр исбот карда мешавад.

Мисол. Графики функцияи $y = \dfrac{2x^2+x}{x+1} = 2x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ ҳам дар вақти $x \to +\infty$ ва ҳам дар вақти $x \to -\infty$ асимптотаи моили $Y = 2x - 1$ дорад ва, ғайр аз он, ба асимптотаи вертикалии $x = -1$ соҳиб аст (расми 9.15). Воқеан,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x}{x(x+1)} = 2,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-1 + \frac{1}{x+1}\right] = -1,$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1-0} f(x) = -\infty.$$

Дар катори асимптотаи хаттии (9.12) инчунин асимптотаи намудаш мураккабтар муоина карда мешавад.

Параболаи тартиби n-ум, ки бисьёраъзогии

$$Y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (9.12^*)$$

муайян мекунад, ҳангоми $x \to +\infty$ *асимптотаи графики функцияи* $y = f(x)$ мебошад, агар функцияи $f(x)$-ро ба намуди $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 + \alpha(x)$ навиштан мумкин бошад, ки дар ин ҷо $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.

Тасдиқоти зеринро исбот кардан осон аст.

Барои он ки графики функцияи $y = f(x)$ *ҳангоми* $x \to +\infty$ *асимптотаи* (9.12) *дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки* $(n+1)$*-то қиматҳои лимитии зерин мавҷуд бошанд:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = a_n, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - a_n x^n}{x^{n-1}} = a_{n-1}, \quad \cdots,$$

$$\cdots, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2)}{x} = a_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x)] = a_0.$$

§ 6. Схемаи тадқиқи графики функция

Мо дар ин параграф схемаеро баён мекунем, ки мувофиқи он графики он графики функцияро тадқиқ кардан беҳтар аст ва мисоле меорем, ки он ин схемаро тасвир мекунад.

Барои тадқиқи сифатии графики функцияи $y = f(x)$ пеш аз ҳама тадқиқи зеринро иҷро кардан беҳтар аст.

1°. Соҳаи дода шудани функция аниқ карда шавад.

2°. Масъалаи мавҷудияти асимптотаҳо (вертикалӣ ва моил) муайян карда шавад.

3°. Соҳаҳои афзуншавӣ ва камшавии функция ва нуқтаҳои экстремум ёфта шаванд.

4°. Соҳаҳои нигоҳдошташавии самти барҷастагӣ ва нуқтаҳои хамӣ ёфта шаванд.

5°. Нуқтаҳои буриши графики функция ва тири Ox ёфта шаванд.

Аз рӯи маълумоти ҳосилшуда эскизи графики функция бо осонӣ сохта мешавад. Ба сифати мисол графики функцияи

$$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} \qquad (9.15)$$

-ро месозем. Мувофиқи схемаи баёншуда амал мекунем.

1°. Азбаски функцияи (9.15) касри рационалиро ифода мекунад, пас он дар ҳама ҷои хати рости беохир, ғайр аз нуқтаи

$x \neq 0$, ки дар он махраҷ ба нуль табдил мешавад, муайян ва бефосила мебошад.

2°. Масъалаи мавҷудияти асимптотаҳоро муайян мекунем. Маълум аст, ки

$$\lim_{x\to 0\pm 0} \frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2} = -\infty,$$

бинобар ин графики функция ба *асимптотаи вертикалии* $x=0$ соҳиб мебошад. Баъд, аз мавҷудияти лимитҳо

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{14}{x^2}-\frac{6}{x^3}}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x)-\frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-5x^2+14x-6-2x^3}{4x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5+\frac{14}{x}-\frac{6}{x^2}}{4} = -\frac{5}{4}$$

натича мебарояд, ки ҳам дар вақти $x\to+\infty$ ва ҳам дар вақти $x\to-\infty$ графики функция ба *асимптотаи моили* $Y=\frac{x}{2}-\frac{5}{4}$ соҳиб мебошад.

3°. Барои ёфтани соҳаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ ҳосилаи якуми функцияи (9.15)-ро ҳисоб мекунем:

$$y' = \frac{x^3-7x+6}{2x^3} = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Ғайр аз он, азбаски худи функция ва ҳосилаи якум ҳангоми $x=0$ будан вуҷуд надорад, мо инро ба эътибор гирифта, соҳаи нигоҳдошташавии аломати y'-ро ҳосил менамоем:

Соҳаи қиматҳои x	$-\infty<x<-3$	$-3<x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$2<x<\infty$
Аломати y'	+	−	+	−	+
Хосиятҳои функция	меафзояд	кам мешавад	меафзояд	кам мешавад	меафзояд

Аз ин ҷадвал маълум мешавад, ки функция нуқтаҳои зерини экстремум дорад:

1) максимум ҳангоми $x = -3$ будан, дар айни ҳол $f(-3) = -49/12$,

2) максимум ҳангоми $x = 1$ будан, дар айни ҳол $f(1) = 5/4$,

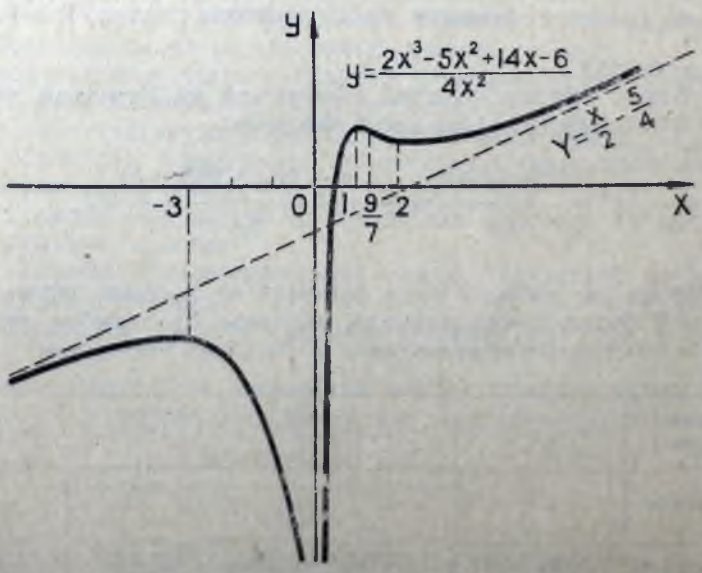
3) минимум ҳангоми $x = 2$ будан, дар айни ҳол $f(2) = 9/8$.

4°. Барои ёфтани соҳаҳои нигоҳдошташавии самти барчастагӣ ҳосилаи дуюмро ҳисоб мекунем:

$$y^{(2)} = \frac{7x-9}{x^4} = \frac{7\left(x-\frac{9}{7}\right)}{x^4}.$$

Азбаски худи функция ва ҳосилаи он дар нуқтаи $x = 0$ вуҷуд надорад, мо инро ба эътибор гирифта, соҳаҳои нигоҳдошташавии аломати $y^{(2)}$-ро ҳосил мекунем:

Соҳаи қиматҳои x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \frac{9}{7}$	$\frac{9}{7} < x < \infty$
Аломати $y^{(2)}$	−	−	+
Самти барчастагии график	ба боло	ба боло	ба поён



Расми 9.16

Аз ин ҷадвал маълум мешавад, ки графики функция дар нуқтаи $(9/7, f(9/7))$ соҳиби хамӣ мебошад. Ҳисоб кардан осон аст, ки $f(9/7) = 913/756$.

5°. Акнун нуқтаҳои буриши графику тири Ox-ро меёбем. Ин нуқтаҳо ба решаҳои ҳақиқии муодилаи

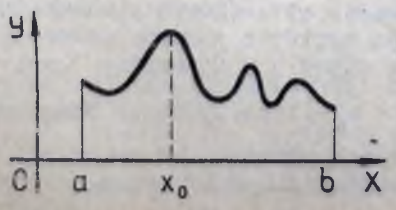
$$2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0$$

мувофиқ меоянд. Маълум аст, ки $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 2(x - 1/2)(x^2 - 2x + 6)$. Азбаски сеаъзогии квадратии $x^2 - 2x + 6$ решаҳои комплексӣ дорад, пас муодилаи муоинашаванда фақат якто решаи ҳақиқии $x = 1/2$ дорад; ҳамин тариқ, графики функция тири Ox-ро дар нуқтаи $(1/2, 0)$ мебурад. Мувофиқи маълумоти ҳосилшуда эскизи графики функцияи муоинашавандаро месозем (расми 9.16).

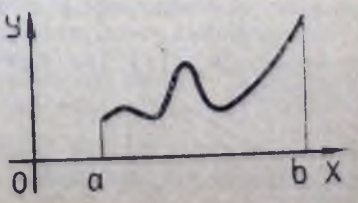
§ 7. Ҷустуҷӯи қиматҳои максимум ва минимуми функция. Экстремуми канорӣ

1. Ҷустуҷӯи қиматҳои максимум ва минимуми функция. Функцияи $y = f(x)$-ро муоина мекунем, ки он дар сегменти $[a, b]$ муайян ва бефосила мебошад. Мо то ҳоло фақат ба ҷустуҷӯи максимум ва минимумҳои локалии ин функция машғул мешудем, акнун масъалаи дар сегменти $[a, b]$ *ҷустуҷӯ кардани қиматҳои максимум ва минимуми* функцияи $f(x)$-ро ҳал менамоем. Функцияи $f(x)$ дар асоси теоремаи Вейерштрасс (ба § 6 боби 8 ниг.) ҳатман дар ягон нуқтаи сегменти $[a, b]$ ба қимати максимумӣ (минимумӣ)-и худ соҳиб мешавад. Барои муайянӣ ба ҷустуҷӯи қимати максимумии $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ таваққуф мекунем.

Функцияи $f(x)$ ё дар нуқтаи дохилии x_0-и сегменти $[a, b]$ ба қимати максимум соҳиб мешавад (онгоҳ он бо яке аз максимумҳои локалии функцияи $f(x)$ мувофиқ меояд, ба расми 9.17 ниг.), ё дар яке аз нӯҳои сегменти $[a, b]$ ба қимати максимум ноил мешавад (ба расми 9.18 ниг.). Аз ин чо фаҳмост, ки барои дар сегменти $[a, b]$ ёфтани қимати максимумии функцияи $f(x)$ қиматҳои $f(x)$-ро, ки дар ҳамаи нуқтаҳои максимумӣ



Расми 9.17.



Расми 9.18.

локалӣ ва дар нуқтаҳои ҳудудии сегменти a ва b дорад, ба якдигар муқоиса кардан лозим аст. Калонтаринии ин қиматҳо қимати максимуми $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ мебошад. Қимати минимуми $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ низ ҳамин тавр ёфта мешавад.

Агар тадқиқи нуқтаҳои экстремуми имконпазир матлуб набошад, онгоҳ қиматҳои $f(x)$-ро дар ҳама нуқтаҳои экстремуми имконпазир ва дар нуқтаҳои ҳудудии a ва b ба якдигар муқоиса кардан мумкин аст. Аз ин қиматҳо қимати калонтарин (хурдтаринаш)-аш қимати максимум (минимум)-и функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ мебошад.

Баъд, бояд қайд кард, ки агар $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ фақат *агар* нуқтаи экстремуми локалӣ, ки нуқтаи максимум (минимум)-и локалӣ* мебошад, дошта бошад, онгоҳ қиматҳои дар ин нуқта доштаи $f(x)$-ро бо $f(a)$ ва $f(b)$ муқоиса накарда, тасдиқ кардан мумкин аст, ки ин қимат қимати максимум (минимум)-и $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ мебошад (расми 9.19).

Масъалаи дар интервал, нимхати рост ва хати рости беохир ҷустуҷӯ кардани қимати максимум (минимум)-и функцияи $y = f(x)$ ҳамин тавр ҳал карда мешавад (агар ин қимат мавҷуд бошад).

Чунин шуданаш ҳам мумкин, ки функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ (ё нимхати рости $a \leqslant x < \infty$) нуқтаҳои экстремуми имконпазир тамоман надошта бошад.

Дар ингуна маврид $f(x)$ дар ҳамин сегмент (нимхати рост) монотонӣ мебошад ва дар нӯгҳои ин сегмент (дар нӯгҳои ин нимхати рост) ба қиматҳои максимум ва минимум соҳиб мешавад. Мо ин мавриди охиринро бо мисоли физикавӣ тасвир мекунем. Ба занҷир пай дар пай бо муқовимати додашудаи r чигуна муқовимати x-ро пайвастан лозим, ки дар r тавонои зиёдтарин ҷудо шавад (дар айни ҳол шиддат v_0-и батарея доимӣ ҳисобида мешавад, ба расми 9.20 ниг.)? Инро муайян кардан лозим аст. Мувофиқи қонуни Ом ҷараёни I-и занҷир баробари $I = v_0/(r + x)$. Пас, мувофиқи ҳамон қонун афтиши шиддати v_r ба муқовимати r баробари $v_r = I_r = v_0 r/(r + x)$. Ҳамин тариқ, тавонои $w(x)$, ки дар муқовимати r ҷудо мешавад, чунин аст:

$$w(x) = Iv_r = v_0^2 r(r + x)^2.$$

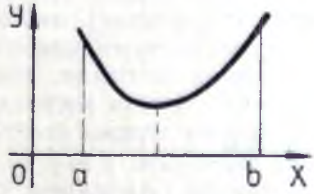
Азбаски мувофиқи маънои физикавӣ муқовимати x манфӣ шуда наметавонад, пас масъала ба ҷустуҷӯи қимати калонтарини функцияи $w(x)$ дар нимхати рости $x \geqslant 0$ меорад. Ҳосилаи ин функция

$$w'(x) = -\frac{2v_0^2 r}{(r + x)^3}$$

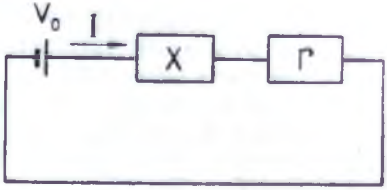
---

* Махсусан ингуна мавриҳ дар амалия бисёртар дучор меояд.

-ро ҳисоб карда, боварӣ ҳосил мекунем, ки дар ҳама чои нимхати рости $x \geqslant 0$ $w'(x) < 0$ аст ва нуқтаҳои экстремуми имконпазир вучуд надоранд. Ҳамин тариқ, функцияи $w(x)$ дар ҳама чои нимхати рости $x \geqslant 0$ кам мешавад ва ин функция ҳангоми $x = 0$ дар ин нимхати рост ба қимати максимум соҳиб мешавад ва ин қимат ба v_0^2/r баробар аст (расми 9.21). Ин аз маънои физикавиаш ҳам комилан фаҳмост.

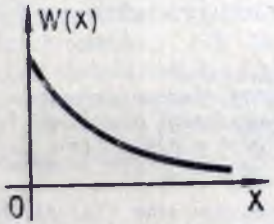


Расми 9.19.

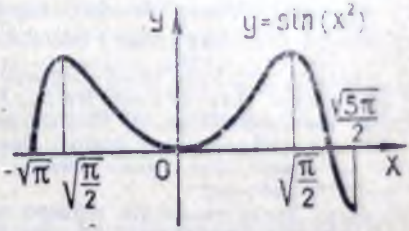


Расми 9.20.

Ба сифати мисоли дуюм масъалаи дар сегменти $-\sqrt{\pi} \leqslant x \leqslant \sqrt{5\pi}/2$ чустучӯ кардани қиматҳои максимум ва минимуми функцияи $y = \sin(x^2)$-ро муоина мекунем.



Расми 9.21.



Расми 9.22.

Азбаски $y' = 2x\cos^2 x$ аст, пас функцияи номбурда дар сегменти муоинашаванда се нуқтаи экстремуми имконпазир ($x = 0$, $x = \pm\sqrt{\pi/2}$) дорад. Қиматҳои функцияро дар нуқтаҳои номбурда ва дар нӯгҳои сегмент

$$f(0) = 0,\ f(\pm\sqrt{\pi/2}) = 1,\ f(-\sqrt{\pi}) = 0,\ f\left(\frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right) = \sin 5\pi/4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

муқоиса карда, боварӣ ҳосил мекунем, ки қимати максимуми функцияи муоинашаванда ба $+1$ баробар аст ва функция ба он дар ду нуқтаи дарунии сегмент ($x_1 = -\sqrt{\pi/2}$ ва $x_2 = +\sqrt{\pi/2}$) соҳиб мешавад; қимати минимуми функцияи муоинашаванда ба $-\sqrt{2}/2$ баробар аст ва функция ба он дар нӯги рости сег-

мент ($\sqrt{5}\pi/2$) соҳиб мешавад. Графики функцияи муоинашуда дар расми 9.22 тасвир шудааст.

2. Экстремуми канорӣ. Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар ягон сегменти $[a, b]$ муайян аст. Ин тавр мегӯем: ин функция дар нуқтаи ҳудудии b-и ин сегмент *максимуми канорӣ (минимуми канорӣ)* дорад, агар ниматрофи чапи нуқтаи b ёфт шавад, ки дар ҳудудҳои он қимати $f(b)$ аз байни ҳама қиматҳои дигари ин функция қимати калонтарин (хурдтарин) мебошад. Дар нуқтаи ҳудудии a-и сегменти $[a, b]$ максимуми канорӣ ва минимуми канорӣ ҳамин тавр муайян карда мешавад. Максимуми канорӣ ва минимуми канорӣ бо номи умумии *экстремуми канорӣ* муттаҳид мешаванд. *Шарти кифоягии зерини экстремуми канорӣ мавқеъ дорад: барои он ки функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи b-и сегменти $[a, b]$ максимуми канорӣ (минимуми канорӣ) дошта бошад, кифоя аст, ки ин функция дар нуқтаи b ба ҳосилаи чапи* мусбат (манфӣ) соҳиб бошад.* (Исботаш ба исботи теоремаи 8.9 монанд аст.) Аз шарти кифоягии номбурдаи экстремуми канорӣ шарти зарурии зерини *экстремуми канории функцияе, ки дар нуқтаи b ҳосилаи чап дорад, бевосита бармеояд: барои он ки функцияи $y = f(x)$, ки дар нуқтаи b ба ҳосилаи чап соҳиб мебошад, дар ин нуқта максимуми канорӣ (минимуми канорӣ) дошта бошад, зарур аст, ки ҳосилаи номбурда ғайриманфӣ (ғайримусбат) бошад.*

Дар хотима тасдиқоти аҷоиби зеринро исбот мекунем.

*Теоремаи 9.11 (теоремаи Дарбу**). Бигзор функцияи $f(x)$ дар ҳама ҷои сегменти $[a, b]$*** ҳосилаи охирнок дошта бошад, ва бигзор $f'(a + 0) = A$, $f'(b - 0) = B$ бошад. Онгоҳ, адади C-и воқеи байни A ва B чи хеле ки бошад, дар ҳамин сегмент чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки $f'(\xi) = C$**** мебошад.*

Исбот. Аввал тасдиқоти зеринро исбот мекунем: агар $F(x)$ дар $[a, b]$ ҳосилаи охирнок дошта бошад ва агар $F'(a + 0)$ ва $F'(b - 0)$ аддадҳои ало. маташон гуногун бошанд, онгоҳ дар сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки $F'(\xi) = 0$ мебошад. Бигзор барои муайянӣ $F'(a + 0) < 0$, $F'(b - 0) > 0$ бошад. Онгоҳ функцияи $F(x)$ дар ҳар ду нӯги сегменти $[a, b]$ максимуми канорӣ дорад. Лекин ин чунин маъно дорад, ки $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$ дар ягон нуқтаи дарунии ξ-и ин сегмент ба қимати минимум соҳиб мешавад (функцияи $F(x)$ дифференсиронидашаванда мебошад ва, пас, дар сегменти $[a, b]$ низ бефосила мебошад ва, бинобар ин, дар ҳамин сегмент ба қимати минимумаш соҳиб мешавад). Функцияи $F(x)$ дар нуқтаи номбурдаи ξ минимуми локалӣ дорад, ва бинобар ин $F'(\xi) = 0$ аст.

Барои исботи теоремаи 9.11 $F(x) = f(x) - Cx$ фарз кардан ва ба $F(x)$ тасдиқоти ҳозир исботшударо татбиқ кардан лозим меояд.

Қайд. Мо аз теоремаи 9.11 боз хулоса мебарорем, ки ҳосила соҳиби нуқтаҳои каниши чинси якум (чаҳишдор) шуда наметавонад.

---

* Манфӣ (мусбат) будани ҳосилаи рост дар нуқтаи ҳудудии a барои нуқтаи a шарти кифоягии максимуми канорӣ (минимуми канорӣ) мебошад.

** Гастон Дарбу — математики франсавӣ (1842—1917).

*** Чунин маъно дорад: $f(x)$ дар нуқтаи дарунии дилхоҳи сегменти $[a, b]$ соҳиби ҳосила мебошад ва, ғайр аз он, дар нуқтаи b ҳосилаи чап ва дар нуқтаи a ҳосилаи рост дорад.

**** Дар айни ҳол бефосилагии ҳосилаи $f'(x)$ аз эътибор дур аст.

БОБИ 10

ИНТЕГРАЛИ МУАЙЯН

Мо дар боби I масъалаи физикавиреро омӯхтем: роҳи тайкардаи нуқтаи материалие, ки ба қади тири Ou ҳаракат мекунад, аз рӯи суръати маълуми ин нуқта ҳисоб карда шуд; инчунин масъалаи геометриеро омӯхтем, ки ба ҳисоб кардани масоҳати *трапецияи каҷхатта* (яъне фигурае, ки дар байни графики функцияи $y = f(x)$ ва сегменти $[a, b]$-и тири Ox воқеъ аст) оид аст. Ин ду масъалаи номбурда дар боби I моро ба зарурияти ҷорӣ кардани мафҳуми математикии нав — мафҳуми *интеграли муайян* овард. Ғайр аз ду масъалаи номбурда як қатор масъалаҳои физикавӣ ва геометрии муҳими дигар ҳам ба мафҳуми интеграли муайян меоранд. Ин боб ба баёни назарияи интеграли муайян ва боби оянда ба татбиқи ин назария ба баъзе масъалаҳои геометрӣ ва физикавӣ бахшида мешавад.

§ 1. Суммаҳои интегралӣ. Интегронидашавандагӣ

Бигзор функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ дода шуда бошад, ки дар ин ҷо $a < b$ аст. Бо ёрии ягон нуқтаҳои ба якдигар мувофиқнаояндаи $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ба n-то сегментҳои қисмии $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ тақсим кардани сегменти $[a, b]$-ро бо символи T ишорат мекунем. Нуқтаҳои $x_0, x_1, \cdots, x_n$-ро нуқтаҳои тақсимоти T меномем. Фарз мекунем, ки ξ_i нуқтаи сегменти қисмии $[x_{i-1}, x_i]$ мебошад ва бигзор Δx_i фарқи $x_i - x_{i-1}$ бошад, ки мо онро минбаъд дарозии сегменти қисмии $[x_{i-1}, x_i]$ меномем.

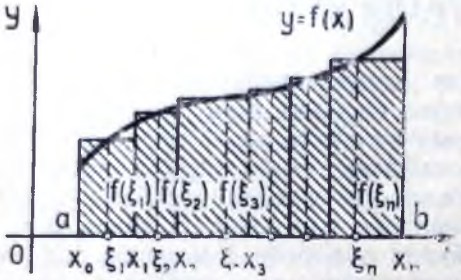
Таърифи 1. *Адади* $I\{x_i, \xi_i\}$, *ки дар ин ҷо*

$$I\{x_i, \xi_i\} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

мебошад, суммаи интегралии функцияи $f(x)$ *номида мешавад, ки он ба тақсимшавии* T-*и сегменти* $[a, b]$ *ва ба инти-*

хоби нуқтаҳои фосилавии ξ_i-и сегментҳои қисмии $[x_{i-1}, x_i]$ мувофиқ меояд. Минбаъд дарозии сегменти қисмии максималии тақсимоти T-ро бо Δ ишорат мекунем, яъне $\Delta = \max \Delta x_i$.

Маъноі геометрии суммаи интегралиро аниқ мекунем. Барои ин *трапецияи каҷхатта*, яъне фигураеро, ки бо графики функцияи $f(x)$ (барои соддагӣ ин функцияро мусбат ва бефосила мепиндорем), ду ординатае, ки аз нуқтаҳои a ва b-и тири абсциссаҳо гузаронида шудаанд, ва тири абсциссаҳо маҳдуд мебошанд (расми 10.1), муоина мекунем. Суммаи интегралии $I(x_i, \xi_i)$ масоҳати фигураи зинашакли дар расми 10.1 штрихшударо ифода мекунад.



Расми 10.1.

Таърифи 2. Адади I лимити суммаи интегралии $I\{x_i, \xi_i\}$ ҳангоми $\Delta \to 0$ номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати δ-еро нишон додан мумкин бошад, ки барои тақсимшавии дилхоҳи T-и сегменти $[a, b]$ (ки дарозиҳои максималӣ Δ-и сегментҳои қисмиаш аз δ хурд аст), новобаста аз интихоби нуқтаҳои ξ_i-и сегментҳои $[x_{i-1}, x_i]$ нобаробарии*

$$|I\{x_i, \varepsilon_i\} - I| < \varepsilon$$

иҷро мешавад.

Барои ишорати лимити суммаи интегралӣ символи

$$I = \lim_{\Delta \to 0} I\{x_i, \xi_i\}$$

истифода карда мешавад.

*Таърифи 3. Функцияи $f(x)$ функцияи дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда (-и Риман**) номида мешавад, агар лимити охирнок I-и суммаи интегралии ин функция ҳангоми $\Delta \to 0$ вуҷуд дошта бошад. Лимити номбурдаи I интеграли муайян аз функцияи $f(x)$ аз рӯи сегменти $[a, b]$ номида мешавад ва ин тавр ишорат карда мешавад:*

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

---

* Азбаски адади δ аз ε вобаста аст, пас баъзан $\delta = \delta(\varepsilon)$ менависанд.
** Бернгард Риман — математики немис (1826—1866).

Тасвири геометрии аёнӣ нишон медиҳад*, ки интеграли муайян ададан ба масоҳати трапецияи каҷҳаттае, ки графики функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ муайян мекунад, баробар аст. Мо дар боби II дурустии ин тасдиқотро исбот мекунем.

Мисоли *функцияи интегронидашавандаро* меорем. Исбот мекунем, ки функцияи $f(x) = c = \text{const}$ дар сегменти дилхоҳи $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад, ба замми ин $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Воқеан, азбаски дар ξ_i-и дилхоҳ $f(\xi_i) = c$ мебошад, пас

$$I\{x_i, \xi_i\} = c\,\Delta x_1 + c\,\Delta x_2 + \cdots + c\,\Delta x_n = \\ = c\,(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = c\,(b-a)$$

ва, бинобар ин $\lim\limits_{\Delta\to 0} I\{x_i, \xi_i\} = c\,(b-a)$.

Масъалаи дар сегменти $[a, b]$ интегронидашавандагии функцияҳои номаҳдудро аниқ мекунем.

Тасдиқоти зеринро исбот мекунем: *функцияи дар сегменти $[a, b]$ номаҳдуди $f(x)$ дар ҳамин сегмент интегронидашаванда намебошад.*

Исбот. Бигзор функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ маҳдуд набошад. Онгоҳ он дар ягон сегменти қисмии $[x_{k-1}, x_k]$-и тақсимоти додашудаи дилхоҳи T-и сегменти $[a, b]$ маҳдуд намебошад. Бинобар ин ҷамъшавандаи $f(\xi_k)\,\Delta x_k$-и суммаи интегралии $I\{x_i, \xi_i\}$-ро, ки ба ин тақсимоти T ҷавоб медиҳад, аз ҳисоби интихоби нуқтаи ξ_k аз рӯи бузургии мутлақаш ҳар қадар калон кардан мумкин аст. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки суммаи интегралии $I\{x_i, \xi_i\}$, ки ба тақсимоти дилхоҳи T ҷавоб медиҳад, маҳдуд намебошад** ва, бинобар ин, лимити охирноки суммаҳои интегралӣ вуҷуд надорад.

Тасдиқоти исботшударо ба эътибор гирифта, фақат функцияҳои дар сегменти $[a, b]$ маҳдудро муоина мекунем. Чунин савол пайдо мешавад: *оё ҳаргуна функцияи дар сегменти $[a, b]$ маҳдуд дар ҳамин сегмент интегронидашаванда аст?* Мисоли зерин нишон медиҳад, ки ин, умуман, ин тавр нест. *Функцияи* дар сегменти $[a, b]$ маҳдудии *Дирихле*, ки қиматаш дар нуқтаҳои рационалӣ ба як ва дар нуқтаҳои ирратионалӣ ба нуль баробар аст, дар сегменти $[a, b]$ *интегронидашаванда намебошад.* Мо ба ин боварӣ ҳосил мекунем. Ҳақиқатан, агар барои тақсимоти дилхоҳи T бо Δ-и *ҳар қадар хурд* нуқтаи ξ_i-ро рационалӣ қабул

---

* Ба § 4 боби 1 ниг.

** Барои ба ин боварӣ ҳосил кардан дар ҳамаи сегментҳои қисмии тақсимоти T, ба ғайр аз сегменти $[x_{n-1}, x_k]$, нуқтаи ξ_i-ро қайд кардан кифоя аст. Онгоҳ дар суммаи интегралии $I\{x_i, \xi_i\}$ фақат ҷамъшавандаи $f(\xi_k)\,\Delta x_k$, ки аз рӯи бузургии мутлақаш ҳар қадар калон шуда метавонад, тағйир меёбад.

кунем, онгоҳ, зоҳиран, $I\{x_i,\ \xi_i\} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$, агар барои ҳамон тақсимоти T нуқтаи ξ_i-ро ирроционалӣ қабул кунем, онгоҳ $I\{x_i,\ \xi_i\} = 0$. Бинобар ин барои функцияи Дирихле лимити суммаҳои интегралӣ вуҷуд надорад, яъне ин функция интегронидашаванда намебошад.

Минбаъд мо интегронидашавандагии ҳама функцияҳои бефосила ва функцияҳои бисёрӣ канишдорро исбот мекунем.

§ 2. Суммаҳои болоӣ ва поёнӣ

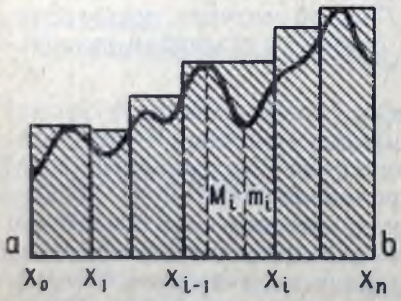
1. Мафҳуми суммаҳои болоӣ ва поёнӣ. Бигзор функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ маҳдуд ва T тақсимоти ин сегмент бо нуқтаҳои $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ бошад. Ҳудудҳои болоии саҳеҳ ва поёнии саҳеҳи ин функция дар сегменти $[x_{i-1},\ x_i]$-ро мувофиқан бо M_i ва m_i ишорат менамоем. *Суммаҳои*

$$S = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

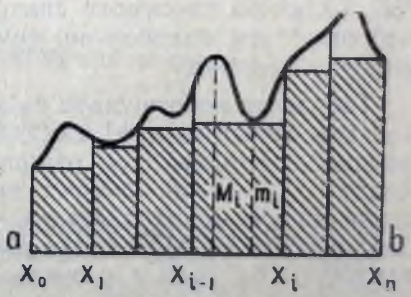
ва

$$s = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

барои тақсимоти T-и додашудаи сегменти $[a, b]$ мувофиқан суммаҳои болоӣ ва поёнии функцияи $f(x)$ номида мешавад.



Расми 10.2.



Расми 10.3.

Маълум мешавад, ки *суммаи интегралии дилхоҳи $I\{x_i,\ \xi_i\}$-и тақсимоти T-и дилхоҳи сегменти $[a, b]$ дар байни суммаҳои болоӣ ва поёнӣ S ва s-и ин тақсимот воқеъ мебошад.*

Агар ба тасвири геометрӣ нигарем, мафҳуми суммаҳои *болоӣ* ва *поёнӣ* фаҳмотар мешавад. Барои соддагии баён функцияи мусбат ва бефосилаи $f(x)$ ва трапецияи қаҷхаттаеро, ки ин функция муайян мекунад (расмҳои 10.2 ва 10.3), мулоҳиза мекунем.

Агар T ягон тақсимоти сегменти $[a, b]$ бошад, онгоҳ ададҳои M_i ва m_i дар мавриди бефосила будани функцияи $f(x)$ қиматҳои максимум ва минимуми ин функция дар сегменти қисмии $[x_{i-1}, x_i]$-и тақсимоти T-ро ифода менамоянд. Бинобар ин суммаи болоӣ S ба масоҳати фигураи зинашакле, ки дар расми 10.2 штрих карда шудааст трапецияи қаҷҳаттаро *дарбар дорад*, баробар мебошад; суммаи поёнӣ s ба масоҳати фигураи зинашакле, ки дар расми 10.3 штрих карда шудааст *дарбари* трапецияи қаҷҳатта мебошад, баробар аст (дар расмҳои 10.2 ва 10.3 ин трапецияҳо бо хати ғафс рӯйдавон шудаанд).

Чунон ки гуфтем, аз тасвири геометрии аёнӣ натича мебарояд, ки интеграл ададан ба масоҳати трапецияи қаҷҳатта баробар аст. Аз дигар ҷиҳат, маълум аст, ки, агар фарқи байни суммаҳои болоӣ ва поёниро ҳар қадар хурд кардан мумкин бошад, онгоҳ ин суммаҳо ба масоҳати трапецияи қаҷҳатта ҳар қадар наздик шуда метавонанд. Бинобар ин барои интегронидашавандагии функция зарур ва кифоя аст, ки фарқи байни суммаҳои болоӣ ва поёнӣ ҳар қадар хурд шуда тавонанд. Дар параграфи оянда исботи қатъии ин дода мешавад.

2. Хосиятҳои суммаҳои болоӣ ва поёнӣ. Дурустии хосиятҳои зеринии суммаҳои болоӣ ва поёниро исбот мекунем.

1°. *Барои тақсимоти қайдшудаи дилхоҳи T ва барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ нуқтаҳои фосилавиеро чунон интихоб кардан мумкин аст, ки суммаи интегралии $I\{x_i, \xi_i\}$ нобаробарии $0 \leqslant S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon$-ро қаноат менамояд. Инчунин нуқтаҳои ξ_i-ро чунон интихоб кардан мумкин аст, ки суммаи интегралӣ нобаробарии $0 \leqslant I\{x_i, \xi_i\} - s < \varepsilon$-ро қаноат менамояд.*

Фарз мекунем, ки T ягон тақсимоти қайдшудаи сегменти $[a, b]$ мебошад. Масалан, имконияти аз рӯи $\varepsilon > 0$-и додашуда интихоб кардани нуқтаҳои ξ_i-ро чунон исбот мекунем, ки нобаробарии $0 \leqslant S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon$ иҷро мешавад. Мувофиқи таърифи ҳудуди саҳеҳи M_i барои $\varepsilon > 0$-и додашуда дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ чунин нуқтаи ξ_i-ро нишон додан мумкин аст, ки

$$0 \leqslant M_i - f(\xi_i) < \varepsilon/(b-a), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Ин нобаробариҳоро ба Δx_i зарб карда ва баъд ҷамъ намуда, чунин ифода ҳосил мекунем:

$$0 \leqslant S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon.$$

Дурустии хосияти 1° муқаррар карда шуд.

2°. *Агар тақсимоти T'-и сегменти $[a, b]$ дар натиҷаи ба нуқтаҳои тақсимоти T-и ин сегмент ҳамроҳ кардани нуқтаҳои нав ҳосил шуда бошад, онгоҳ суммаи болоӣ S'-и тақсимоти T' аз суммаи болоӣ S-и тақсимоти T калон нест ва суммаи поёнӣ s-и тақсимоти T' аз суммаи поёнӣ s-и тақсимоти T хурд нест, яъне*

$$s \leqslant s', \quad S' \leqslant S.$$

Азбаски тақсимоти T' аз тақсимоти T дар натиҷаи ба он (ба T) пай дар пай ҳамроҳ кардани нуқтаҳои нав ҳосил шуданаш мумкин аст, пас хосияти баёншударо барои мавриде, ки ба тақсимоти T якто нуқта ҳамроҳ карда мешавад, исбот кардан кифоя аст. Бигзор ин нуқтаи x' дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$-и тақсимоти T-и сегменти $[a, b]$ воқеъ бошад. Ҳудудҳои болоии саҳеҳи функцияи $f(x)$ дар сегментҳои $[x_{i-1}, x']$ ва $[x', x_i]$-ро бо M_i' ва M_i'' ишорат менамоем; дарозии ин сегментҳоро бо $\Delta x_i'$ ва $\Delta x_i''$, суммаҳои болоии тақсимоти T ва тақсимоти T' (ки дар натиҷаи ба тақсимоти T ҳамроҳ кардани нуқтаи x' ҳосил шудааст)-ро бо S ва S' ишорат менамоем. Бояд қайд кард, ки $\Delta x_i = \Delta x_i' + \Delta x_i''$. Ғайр аз он, агар M_i ҳудуди болоии саҳеҳи қиматҳои функцияи $f(x)$ дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ бошад, онгоҳ $M_i \geqslant M_i'$ ва $M_i \geqslant M_i''$, чунки *ҳудуди болоии саҳеҳи функция дар қисми сегменти* $[x_{i-1}, x_i]$ *аз ҳудуди болоии саҳеҳи* M_i*-и ин функция дар ҳамаи сегменти* $[x_{i-1}, x_i]$ *калон нест.* Бинобар ин, азбаски суммаҳои S ва S' фақат бо ҷамъшавандаҳои $M_i\Delta x_i$ ва $M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i''$ тафовут доранд, пас

$$S - S' = M_i\Delta x_i - (M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i'') = \\ = (M_i - M_i')\Delta x_i' + (M_i - M_i'')\Delta x_i'' \geqslant 0,$$

яъне $S' \leqslant S$. Барои суммаҳои поёнӣ исбот ҳамин тавр иҷро карда мешавад.

3°. *Бигзор T' ва T'' ду тақсимоти дилхоҳи сегменти $[a, b]$ бошанд. Онгоҳ суммаи поёнии яке аз ин тақсимотҳо аз суммаи болоии дигараш калон намешавад. Яъне, агар s', S' ва s'', S'' мувофиқан суммаҳои поёнӣ ва болоии тақсимотҳои T' ва T'' бошанд, онгоҳ*

$$s' \leqslant S'', \quad s'' \leqslant S'.$$

Мо муқаррар кардем, ки суммаи поёнии тақсимоти додашуда аз суммаи болоии ин тақсимот калон намешавад. Бигзор T тақсимоти сегменти $[a, b]$ бошад, ки онро якҷояи тақсимотҳои* T' ва T'' ҳосил кардаанд, ва s ва S суммаҳои болоӣ ва поёнии тақсимоти T бошанд. Азбаски тақсимоти T-ро аз тақсимоти T' дар натиҷаи ба он ҳамроҳ кардани нуқтаҳои тақсимоти T'' ҳосил кардан мумкин аст, пас мувофиқи хосияти 2° ва хосияти баёншудаи суммаҳои поёнӣ ва болоии ҳамон як тақсимот:

$$s' \leqslant s \leqslant S \leqslant S'.$$

Лекин тақсимоти T-ро инчунин аз тақсимоти T'' дар натиҷаи ба он ҳамроҳ кардани нуқтаҳои тақсимоти T' ҳосил кардан мумкин аст. Бинобар ин

$$s'' \leqslant s \leqslant S \leqslant S''.$$

---

* Дар айни ҳол нуқтаҳои умумии тақсимотҳои T' ва T'' як маротиба ба эътибор гирифта мешаванд.

Нобаробариҳои дар боло муқарраршуда ва нобаробариҳои ҳозир ҳосилкардаамонро муқоиса карда, боварӣ ҳосил мекунем, ки $s' \leqslant S''$, $s'' \leqslant S'$.

Дурустии хосияти 3° муқаррар карда шуд.

4°. *Маҷмӯи $\{S\}$-и суммаҳои болоии функцияи додашудаи $f(x)$ барои тақсимотҳои гуногуни сегменти $[a, b]$ аз поён маҳдуд аст. Маҷмӯи $\{s\}$-и суммаҳои поёнӣ аз боло маҳдуд аст.*

Ин хосият бевосита аз хосияти 3° бармеояд. Ҳақиқатан, суммаи болоии дилхоҳ аз ягон суммаи поёнии қайдшуда хурд нест, пас, маҷмӯи $\{S\}$-и суммаҳои болоӣ аз поён маҳдуд аст. Суммаи поёнии дилхоҳ аз ягон суммаи болоӣ калон нест ва, бинобар ин, маҷмӯи $\{s\}$-и суммаҳои поёнӣ аз боло маҳдуд аст. Ҳудуди поёнии саҳеҳи маҷмӯи $\{S\}$-и суммаҳои болоиро бо $\bar{I}$ ва ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи суммаҳои поёниро бо $\underline{I}$ ишорат мекунем:

$$\bar{I} = \inf\{S\}, \quad \underline{I} = \sup\{s\}.$$

Ададҳои $\bar{I}$ ва $\underline{I}$ мувофиқан *интегралҳои болоӣ ва поёнии Дарбу* аз функцияи $f(x)$ номида мешаванд. Исбот мекунем, ки $\underline{I} \leqslant \bar{I}$ аст. Бигзор $\underline{I} > \bar{I}$ бошад. Онгоҳ фарқи $\underline{I} - \bar{I}$ адади мусбат мебошад, ки мо онро бо ε ишорат мекунем, чунки $\underline{I} - \bar{I} = \varepsilon > 0$ аст. Аз таърифи ҳудудҳои саҳеҳи $\underline{I}$ ва $\bar{I}$ бармеояд, ки ададҳои S' ва s'' вуҷуд доранд, ки мувофиқан суммаҳои болоӣ ва поёнии ягон тақсимотҳои T' ва T''-и сегменти $[a, b]$-ро ифода менамоянд, яъне $\bar{I} + \varepsilon/2 > S'$ ва $\underline{I} - \varepsilon/2 < s''$. Аз нобаробарии якум нобаробарии дуюмро тарҳ карда ва $\bar{I} - \underline{I} = \varepsilon$ будани ашро ба эътибор гирифта, нобаробарии $s'' > S'$-ро ҳосил менамоем. Лекин ин нобаробарии охирин ба хосияти 3°-юми суммаҳои болоӣ ва поёнӣ мухолиф аст.

5°. *Фарз мекунем, ки тақсимоти T'-и сегменти $[a, b]$ аз тақсимоти T дар натиҷаи ба ин (ба T) ҳамроҳ кардани p-то нуқтаҳои нав ҳосил шудааст, ва фарз мекунем, ки s', S' ва s, S мувофиқан суммаҳои поёнӣ ва болоии тақсимотҳои T' ва T мебошанд. Онгоҳ барои фарқҳои $S - S'$ ва $s' - s$* баҳоеро ҳосил кардан мумкин аст, ки он аз дарозии максималӣ Δ-и сегментҳои қисмии тақсимоти T, миқдори p-то нуқтаҳои ҳамроҳшуда ва ҳудудҳои болоӣ ва поёнии саҳеҳи M ва m-и функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ вобаста аст. Яъне*

$$S - S' \leqslant (M - m)p\Delta, \quad s' - s \leqslant (M - m)p\Delta.$$

Барои ба дурустии ин хосият боварӣ ҳосил кардан нобаробари-

* Дар асоси хосияти 2° ин фарқҳо ғайриманфӣ мебошанд.

сегменти $[a, b]$ *ёфт шавад, ки барояш*

$$S - s \leqslant \varepsilon$$

аст.

Исбот. 1) Шарти зарурӣ. Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад. Лимити суммаҳои интегралии ин функцияро бо I ишорат мекунем. Мувофики таърифи лимити суммаҳои интегралӣ барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин $\delta > 0$-ро нишон додан мумкин аст, ки барои таксимоти дилхоҳи T, ки шарти $\Delta < \delta$-ро қаноат менамояд, новобаста аз интихоби нуктаҳои ξ_i (дар сегментҳои қисмии таксимот) нобаробарии

$$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon/4 \qquad (10.5)$$

ичро мешавад. Якто ҳамингуна таксимоти T-ро ба қайд мегирем. Мувофики хосияти 1° (ба п. 2-юми параграфи гузаштаниг.) барои таксимоти додашудаи T чунин ду суммаи интегралиеро нишон додан мумкин аст (ба ибораи дигар, дар ҳар яки сегментҳои қисмии $[x_{i-1}, x_i]$ нуктаҳои ξ_i' ва ξ_i''-ро интихоб кардан мумкин аст), ки

$$S - I\{x_i, \xi_i'\} \leqslant \varepsilon/4, \quad I\{x_i, \xi_i''\} \leqslant \varepsilon/4$$

мебошад. Ҳар ду суммаҳои интегралии $I\{x_i, \xi_i'\}$ ва $I\{x_i, \xi_i''\}$ нобаробарии (10.5)-ро қаноат менамоянд. Аз муносибати

$$S - s = (S - I\{x_i, \xi_i'\}) + (I\{x_i, \xi_i'\} - I) + \\ + (I - I\{x_i, \xi_i''\}) + (I\{x_i, \xi_i''\} - s),$$

нобаробарии (10.5) ва нобаробариҳои $S - I\{x_i, \xi_i'\} \leqslant \varepsilon/4$, $I\{x_i, \xi_i''\} - s \leqslant \varepsilon/4$ натича мебарояд, ки

$$S - s < \varepsilon$$

мебошад. Шарти зарурии теорема исбот шуд.

2) Шарти кифоягӣ. Азбаски барои таксимоти дилхоҳи T нобаробариҳои $s \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant S$ дурустанд ва барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ, мувофики шарти теорема, чунин таксимотеро нишон додан мумкин аст, ки $S - s \leqslant \varepsilon$ мебошад, пас $0 \leqslant \bar{I} \leqslant \underline{I} \leqslant \varepsilon$ аст. Дар асоси дилхоҳ будани ε $\underline{I} = \bar{I}$ мебошад.

Қимати умумии ададҳои $\underline{I}$ ва $\bar{I}$-ро бо I ишорат менамоем ва исбот мекунем, ки ин адади I лимити суммаҳои интегралии функцияи $f(x)$ мебошад. Ҳақиқатан, дар асоси леммаи Дарбу (ба п. 2, § 2 ниг.) ин адади I лимити умумии суммаҳои болой ва поёнӣ ҳангоми $\Delta \to 0$ мебошад. Бинобар ин барои ε-и дилхоҳ чунин δ-еро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $\Delta < \delta$ будан нобаробариҳои $I - s < \varepsilon/2$ ва $S - I < \varepsilon/2$ ичро мешаванд, яъне

ҳангоми $\Delta < \delta$ будан $S - s < \varepsilon$ аст, дар айни ҳол $s \leqslant I \leqslant S$ мебошад. Суммаи интегралии дилхоҳи $I\{x_i, \xi_i\}$-и тақсимоти додашудаи T дар байни суммаҳои болой ва поёнӣ воқеъ аст: $s \leqslant I\{x_i, \xi_i\} \leqslant S$. Ҳамин тариқ, ҳангоми $\Delta < \delta$ будан ҳар ду бузургии I ва $I\{x_i, \xi_i\}$ дар байни ададҳои S ва s, ки фарқи байнашон аз ε хурд аст, воқеъ мебошанд. Аз ин ҷо натича мебарояд, ки ҳангоми $\Delta < \delta$ будан

$$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon$$

аст. Пас, адади I лимити суммаҳои интегралӣ мебошад. Теорема исбот шуд.

Минбаъд ба мо шакли дигартари навишти шарти зарурӣ ва кифоягии интегронидашавандагӣ лозим мешавад. Фарз мекунем, ки M_i ва m_i ҳудудҳои саҳеҳи қиматҳои функцияи $f(x)$ дар $[x_{i-1}, x_i]$ мебошанд. Адади

$$\omega_i = M_i - m_i$$

лаппиши функцияи $f(x)$ дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ мебошад. Азбаски $M_i \geqslant m_i$ мебошад, пас лаппиши ω_i ададӣ ғайриманфӣ мебошад. Акнун фарқи $S - s$-ро ба шакли зерин менависем:

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

Азбаски $\omega_i \geqslant 0$ ва $\Delta x_i > 0$ аст, пас ҳар як ҷамъшавандаи суммаи охирин ғайриманфӣ мебошад.

Шарти зарурӣ ва кифоягии интегронидашавандагии функцияро дар шакли зерин баён кардан мумкин аст:

Барои он ки функцияи $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *интегронидашаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои* $\varepsilon > 0$*-и дилхоҳ чунин тақсимоти* T*-и сегменти* $[a, b]$ *ёфт шавад, ки барояш*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leqslant \varepsilon$$

мебошад.

§ 4. Баъзе классҳои функцияҳои интегронидашаванда

Мо дар ин параграф интегронидашавандагии функцияҳои дар сегмент бефосила, баъзе функцияҳои канишдор ва функцияҳои монотониро исбот мекунем. Барои исботи интегронидашавандагии функцияҳои бефосила ба мо хосияти муҳимтарини функцияҳои дар сегмент бефосила лозим мешавад, ки мо онро ҳозир муқаррар мекунем.

1. Хосияти бефосилагии мунтазами функцияхо.

Таъриф. Функцияи $f(x)$ функцияи дар маҷмӯи $\{x\}$ мунтазам бефосила номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин δ-и мусбати фақат аз ε вобастаеро нишон додан мумкин бошад, ки барои ду нуқтаи дилхоҳи x' ва x''-и маҷмӯи $\{x\}$, ки шарти $|x''-x'|<\delta$-ро қаноат менамоянд, нобаробарии $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$ ичро шавад.*

Қайд. Дар ин таъриф қисми асосиаш ин аст: барои $\varepsilon>0$-и дилхоҳ $\delta>0$-е ёфт мешавад, ки он *якбора барои ҳамаи x' ва x''-ҳои маҷмӯи $\{x\}$ дар шарти ягонаи $|x''-x'|<\delta$ иҷрошавии нобаробарии $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$-ро кафолат медиҳад.*

Барои шарҳ додани хосияти бефосилагии мунтазам мисолҳои зеринро муоина мекунем:

1) Функцияи $f(x)=\sqrt{x}$ дар нимхати рости $x\geqslant 1$ *мунтазам бефосила* мебошад. Воқеан, мувофиқи теореми Лагранж барои $x'\geqslant 1$-и дилхоҳ ва $x''\geqslant 1$-и дилхоҳ

$$|f(x'')-f(x')|=|f'(\xi)|\,|x''-x'|=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x''-x'|<1/2|x''-x'|$$

(нобаробарии охирин аз он бармеояд, ки ξ дар байни x' ва x'' воқеъ аст ва, бинобар ин, $\xi>1$ аст). Пас, агар барои $\varepsilon>0$-и додашуда δ-и дилхоҳе, ки шарти $0<\delta\leqslant 2\varepsilon$-ро қаноат менамояд, интихоб карда шавад, онгоҳ ҳангоми $|x''-x'|<\delta$ будан нобаробарии $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$ ичро мешавад, яъне функцияи $f(x)=\sqrt{x}$ дар маҷмӯи $x\geqslant 1$ мунтазам бефосила мебошад.

2) Функцияи $f(x)=x^2$ дар маҷмӯи $x\geqslant 1$ *мунтазам бефосила намебошад.* Барои ягон $\varepsilon>0$, $\delta>0$-ро, ки барои ҳамаи $x'\geqslant 1$ ва $x''\geqslant 1$ дар шарти ягонаи $|x''-x'|<\delta$ ба иҷрошавии нобаробарии $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$ кафолат медиҳад, интихоб кардан мумкин нест; инро исбот кардан кифоя аст. Мо исбот мекунем, ки дар ҳақиқат ҳатто барои $\varepsilon>0$-и дилхоҳ δ-и номбурдаро интихоб кардан мумкин нест. $\varepsilon>0$-ро қайд мекунем ва δ-и мусбати дилхохро муоина менамоем. Интихоб мекунем: $x'>\varepsilon/\delta$, $x''=x'+\delta/2$. Онгоҳ $|x''-x'|=\delta/2<\delta$. Теореми Лагранжро истифода карда, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$|f(x'')-f(x')|=2\xi\,|x''-x'|=\xi\delta.$$

Азбаски ξ дар байни x' ва x'' воқеъ аст, пас $\xi>\varepsilon/\delta$, ва, бинобар ин, агар чи $|x''-x'|<\delta$ бошад ҳам, аз нобаробарии охирин нобаробарии

$$|f(x'')-f(x')|>\varepsilon$$

бармеояд. Ҳамин тариқ, функцияи $f(x)=x^2$ дар маҷмӯи $x\geqslant 1$ функцияи мунтазам бефосила намебошад.

---

* Дар айни ҳол фарз карда мешавад, ки маҷмӯи $\{x\}$ ба худаш зич мебошад (ба охири § 3 боби 2 ниг.).

3) Функцияи $f(x) = \sin 1/x$ дар интервали $(0, 1)$ *функцияи мунтазам бефосила намебошад.* Барои ε-и дилхоҳ, ки шарти $0 < \varepsilon < 2$-ро қаноат менамояд, $\delta > 0$-ро, ки барои ҳамаи x' ва x''-и интервали $(0, 1)$ дар шарти ягонаи $|x'' - x'| < \delta$ ба иҷрошавии нобаробарии $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon < 2$ кафолат медиҳад, нишон додан номумкин аст; инро исбот мекунем. Барои ба ин боварӣ ҳосил кардан $x' = \dfrac{2}{(4k+3)\pi}$ ва $x'' = \dfrac{2}{(4k+1)\pi}$ фарз кардан ва барои $\delta > 0$-и дилхоҳ k-ро ҳамон қадар калон интихоб кардан кофист, ки $|x'' - x'| < \delta$ шавад. Барои нуқтаҳои номбурдаи x' ва x'' дар қимати дилхоҳи k фарқи

$$|f(x'') - f(x')| = |\sin 1/x'' - \sin 1/x'| = 2 > \varepsilon$$

мебошад.

Теоремаи асосии зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 10.2 *(теорема дар бораи бефосилагии мунтазам). Функцияи дар сегменти $[a, b]$ бефосилаи $f(x)$ дар ҳамин сегмент мунтазам бефосила мебошад.*

Исбот. Фарз мекунем, ки функцияи дар сегменти $[a, b]$ бефосилаи $f(x)$ дар ҳамин сегмент мунтазам бефосила намебошад. Онгоҳ барои *ягон* $\varepsilon > 0$ шарти дар таърифи бефосилагии мунтазам баёншуда иҷро намешавад. Ин чунин маъно дорад, ки барои $\varepsilon > 0$-и номбурда ва ададии мусбати *дилхоҳи* δ дар сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаҳои x' ва x'' ёфт мешаванд, ки $|x_n'' - x_n'| < \delta$, лекин $|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon$. Бинобар ин барои ҳар як $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, чунин нуқтаҳои x_n' ва x_n''-и сегменти $[a, b]$ ёфт мешаванд, ки $|x_n'' - x_n'| < 1/n$, лекин $|f(x_n'') - f(x_n')| \geqslant \varepsilon$. Азбаски $\{x_n'\}$ пайдарпаии нуқтаҳои сегменти $[a, b]$ мебошад, пас аз он, мувофиқи теоремаи Больцано-Вейерштрасс, тахтпайдарпаии $\{x_k'\}_n$-и ба ягон нуқтаи c-и ин сегмент наздикшавандаро чудо кардан мумкин аст (ба қайди 2-юми п. 4 § 4 боби 3 ниг.). Зоҳиран, тахтпайдарпаии $\{x_k''\}_n$-и пайдарпаии $\{x_n''\}$ низ ба c наздик мешавад. Азбаски функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c бефосила мебошад, пас лимити пайдарпаиҳои $\{f(x_k')\}_n$ ва $\{f(x_k'')\}_n$ ба $f(c)$ баробар мебошанд ва, бинобар ин, пайдарпаии $\{f(x_k'') - f(x_k')\}_n$ пайдарпаии беохир хурд мебошад. Лекин ин тавр шуданаш мумкин нест, чунки ҳама элементҳои $f(x_k'')_n - f(x_k')_n$-и пайдарпаии номбурда нобаробарии $|f(x_k'')_n - f(x_k')_n| \geqslant \varepsilon$-ро қаноат менамоянд. Ҳамин тариқ, фарзияте, ки функцияи

дар сегменти $[a, b]$ бефосила мунтазам бефосила намебошад, ба мухолифот овард. Теорема исбот шуд.

Натиҷа. Бигзор функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила бошад. Онгоҳ барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин $\delta > 0$-ро нишон додан мумкин аст, ки дар ҳар яки сегменти қисмии $[c, d]$-и мутааллиқи сегменти $[a, b]$ (дарозии $d - c$-и он аз δ хурд аст) лаппиши ω^*-и функцияи $f(x)$ аз ε хурд мебошад.

Исбот. Дар асоси теоремаи ҳозир исботкардаамон функцияи дар сегменти $[a, b]$ бефосилаи $f(x)$ дар ҳамин сегмент мунтазам бефосила мебошад. Бинобар ин барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин $\delta > 0$-ero нишон додан мумкин аст, ки барои x' ва x''-и дилхоҳи сегменти $[a, b]$, ки шарти $|x'' - x'| < \delta$-ро қаноат менамоянд, нобаробарии $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ ичро мешавад. Исбот мекунем, ки дар ҳар як сегменти қисмии $[c, d]$-и мутааллиқи сегменти $[a, b]$ (дарозии $d - c$-и он аз δ-и номбурда хурд аст) лаппиши ω-и функцияи $f(x)$ аз ε хурд мебошад. Воқеан, азбаски функцияи $f(x)$ дар сегменти $[c, d]$ бефосила мебошад, пас дар ин сегмент чунин нуқтаҳои x' ва x''-ро нишон додан мумкин аст, ки $f(x') = m$ ва $f(x'') = M$ дар ин ҷо m ва M ҳудудҳои поёнӣ ва болоии саҳеҳи $f(x)$ дар сегменти $[c\ d]$ (ба теоремаи 8.8 ниг.). Азбаски $|x'' - x'| < \delta$ мебошад (чунки дарозии сегменти $[c, d]$ аз δ хурд аст), пас $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ мебошад. Лекин $f(x'') - f(x') = M - m = \omega$ аст. Бинобар ин $\omega < \varepsilon$.

Қайд. Маҷмӯи $\{x\}$-и нуқтаҳои хати рости адади *маҷмӯи сарбаста* номида мешавад, агар он ҳама нуқтаҳои лимитиашро** дарбар гирад. Тасдиқоти зерин дуруст аст. *Функцияи $f(x)$-и дар маҷмӯи маҳдуди*** сарбастаи $\{x\}$ бефосила дар ҳамин маҷмӯъ мунтазам бефосила мебошад.* Исботи ин тасдиқот ба исботи теоремаи 10.2 монанд аст.

2. Леммаи Гейне-Борель. Исботи дигари теорема дар бораи бефосилагии мунтазам. Нуқтаи x-и маҷмӯи $\{x\}$ *нуқтаи дарунии* ин маҷмӯъ номида мешавад, агар он ба ягон интервале, ки ҳамаи нуқтаҳояш ба маҷмӯи $\{x\}$ тааллуқ доранд, мутааллиқ бошад. Маҷмӯи $\{x\}$ *маҷмӯи кушода* номида мешавад, агар ҳамаи нуқтаҳои ин маҷмӯъ нуқтаҳои дарунӣ бошанд.

Мо мегӯем, ки *маҷмӯи додашудаи $\{x\}$ бо системаи Σ -и маҷмӯъҳои кушода**** пӯшида мебошад,* агар ҳар як нуқтаи x-и ин маҷмӯъ ақаллан ба як маҷмӯи системаи Σ мутааллиқ бошад. Леммаи зеринро исбот мекунем.

*Лемма и Гейне—Борель.***** Агар сегменти $[a, b]$ бо системаи Σ-и беохири маҷмӯъҳои кушода пӯшида бошад, онгоҳ аз ин система тахт-системаи охирноки $\overline{\Sigma}$-и маҷмӯъҳоеро ҷудо кардан мумкин аст, ки он ҳам сегменти $[a, b]$-ро мепӯшонад.*

---

* Ба хотир меорем: *лаппиши* ω-и функцияи $f(x)$ дар сегменти $[c, d]$ гуфта фарқи $M - m$-и байни ҳудудҳои болоӣ ва поёнии саҳеҳи функцияи $f(x)$ дар ҳамин сегментро меноманд.

** Таърифи нуқтаи лимитии маҷмӯъ дар п. 6 § 4 боби 3 дода шудааст.

*** Таърифи маҷмӯи маҳдуд дар п. 6 § 4 боби 3 дода шудааст.

**** Агар маҷмӯи $\{x\}$ аз як нуқта иборат бошад ва системаи Σ фақат як маҷмӯи кушода дошта бошад, онгоҳ мо мегӯем, ки ин маҷмӯъ нуқтаи номбурдаро мепӯшонад.

***** Э. Гейне (1821—1881) — математики немис. Эмиль Борель (1871—1956) — математики франсавӣ.

Исбот.* Бигзор $\{x\}$ маҷмӯи чунин нуқтаҳои сегменти $[a, b]$ бошад, ки агар x ба ин маҷмӯъ мутааллиқ бошад, онгоҳ сегменти $[a, x]$ бо ягон тахтсистемаи охирноки $\overline{\Sigma}$-и маҷмӯи системаи Σ пӯшида мешавад. Исбот мекунем, ки маҷмӯи $\{x\}$ бо сегменти $[a, b]$ мувофиқ меояд. Азбаски нуқтаи a бо ягон маҷмӯи системаи Σ пӯшида аст ва ин маҷмӯъ маҷмӯи кушода мебошад, пас он ягон сегменти $[a, x]$-ро низ мепӯшонад, ки ҳама нуқтаҳои он, мувофиқи гуфтаҳои болой, ба маҷмӯи $\{x\}$ тааллуқ доранд. Маҷмӯи $\{x\}$ маҳдуд мебошад. Бигзор $\bar{x} = \sup\{x\}$ бошад. Бовар мекунем, ки $\bar{x}$ ба маҷмӯи $\{x\}$ тааллуқ дорад ва $\bar{x} = b$ мебошад. Вокеан, $\bar{x}$ бо ягон маҷмӯи системаи Σ пӯшида аст ва, аз ҳамин сабаб, ҳама нуқтаҳои ягон интервали $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ бо ҳамин маҷмӯъ пӯшида мебошад. Азбаски $\bar{x} = \sup\{x\}$ мебошад, пас нуқтаҳои маҷмӯи $\{x\}$ вуҷуд доранд, ки онҳо ба $\bar{x}$ ҳарчи наздиканд ва, бинобар ин, нуқтаи x'-и ин маҷмӯъ ёфт мешавад, ки он ба интервали $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ мутааллиқ аст. Аз таърифи маҷмӯи $\{x\}$ бармеояд, ки сегменти $[a, x']$ бо ягон тахтсистемаи охирноки Σ'-и маҷмӯи системаи Σ пӯшида мешавад. Маҷмӯеро, ки нуқтаи $\bar{x}$-ро мепӯшад, ба Σ' ҳамроҳ карда, мо тахтсистемаи охирноки $\overline{\Sigma}$-и маҷмӯи системаи Σ-ро ҳосил мекунем, ки он сегменти $[a, \bar{x}]$-ро мепӯшад. Пас, $\bar{x}$ ба $\{x\}$ тааллуқ дорад. Агар фарз кунем, ки $\bar{x} < b$ мебошад, онгоҳ тахтсистемаи $\overline{\Sigma}$ ҳама нуқтаҳои ягон сегменти $[a, x'']$-ро, ки дар ин ҷо $\bar{x} < x'' < \bar{x} + \varepsilon$ мебошад, мепӯшид, ва, бинобар ин, нуқтаи x'' ба маҷмӯи $\{x\}$ тааллуқ медошт. Лекин ин тавр шуданаш мумкин нест, чунки $\bar{x}$ ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи $\{x\}$ мебошад. Ҳамин тариқ, маҷмӯи $\{x\}$ бо сегменти $[a, b]$ мувофиқ меояд. Лемма исбот шуд.

Қайд. Леммаи Гейне—Борельро ба таври зерин ҷамъбаст кардан мумкин аст. *Агар маҷмӯи маҳдуди сарбастаи*** $\{x\}$ *бо системаи беохири* Σ*-и маҷмӯъҳои кушода пӯшида бошад, онгоҳ аз ин система тахтсистемаи охирноки* $\overline{\Sigma}$*-и маҷмӯъҳоро ҷудо кардан мумкин аст, ки он ҳам маҷмӯи* $\{x\}$*-ро мепӯшонад.* Исботи дигари теоремаи 10.2-ро меорем.

Исботи теорема дар бораи бефосилагии мунтазам. $f(x)$-ро ҳангоми $x > b$ будан баробари $f(b)$ ва ҳангоми $x < a$ будан баробари $f(a)$ фарз карда, онро дар ҳамаи хати рост давом медиҳем. Азбаски $f(x)$ дар ҳар як нуқтаи сегменти $[a, b]$ бефосила мебошад, пас барои нуқтаи дилхоҳи x-и ин сегмент ва $\varepsilon > 0$-и додашудаи дилхоҳ чунин $\delta' > 0$-, умуман, аз x вобастаро нишон додан мумкин аст, ки барои ҳама нуқтаҳои x' (ки шарти $|x' - x| < \delta'$-ро қаноат менамоянд) нобаробарии $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$ иҷро мешавад. Ҳамин тариқ, сегменти $[a, b]$ бо системаи беохири Σ-и интервалҳои $(x - \delta'/2, x + \delta'/2)$*** пӯшида аст, ки аз он, дар асоси леммаи Гейне—Борель, тахтсистемаи охирноки $\overline{\Sigma}$-и интервалҳоро ҷудо кардан мумкин аст, ки сегменти $[a, b]$-ро низ мепӯшонад. Фарз мекунем, ки δ барои ин тахтсистемаи охирноки Σ-и интервалҳо қимати минималӣ мебошад. Бигзор акнун x' ва x'' нуқтаҳои дилхоҳи сегменти $[a, b]$ бошанд, ки шарти $|x'' - x'| < \delta$-ро қаноат менамоянд ва x маркази ҳамон интервали $(x - \delta'/2, x + \delta'/2)$, $\delta \leqslant \delta'/2$, системаи $\overline{\Sigma}$ бошад, ки он нуқтаи x'-ро мепӯшонад. Азбаски $|x' - x| < (\delta'/2) < \delta'$ ва $|x'' - x'| < \delta'$ мебошад, пас

---

* Ин исботи леммаи Гейне-Борель аз они математики франсавӣ Анри Лебег (1875—1941) мебошад. Лебег ба проблемаи интегронӣ чӣ тавр рафтор карданро нишон дод ва онро ба таври умумӣ асоснок кард (назар ба оне, ки дар ин боб баён шуд). Мафҳуми мувофиқи интеграл интеграли Лебег номида мешавад.

** Ба қайди пункти гузашта ниг.

*** Барои бехтарии муҳокимаронии минбаъда ба ҷои $(x - \delta', x + \delta')$ интервали $(x - \delta'/2, x + \delta'/2)$-ро мегирем.

$|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$ ва $|f(x'') - f(x)| < \varepsilon/2$ ва, бинобар ин,

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant |f(x'') - f(x)| + |f(x') - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Инак, барои $\varepsilon > 0$-и додашудаи дилхоҳ мо чунин $\delta > 0$-ро нишон додем, ки барои нуқтаҳои дилхоҳи x' ва x''-и сегменти $[a, b]$ (ки шарти $|x'' - x'| < \delta$-ро қаноат менамоянд) нобаробарии $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ иҷро шавад. Пас, функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ функцияи мунтазам бефосила мебошад. Теорема исбот шуд.

3. Интегронидашавандагии функцияҳои бефосила. Теореманы асосии зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 10.3. *Функцияи дар сегменти* $[a, b]$ *бефосилаи* $f(x)$ *дар ҳамин сегмент интегронидашаванда мебошад.*

Исбот. Фарз мекунем, ки $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ дода шудааст. Дар асоси дар сегменти $[a, b]$ мунтазам бефосила будани функцияи $f(x)$ барои адади мусбати $\varepsilon/(b - a)$ чунин $\delta > 0$-ero нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми ба сегментҳои қисмии $[x_{i-1}, x_i]$ тақсим кардан (T)-и сегменти $[a, b]$ (ки дарозии Δx_i-и онҳо аз δ хурд аст) лаппиш ω_i-и функцияи $f(x)$ дар ҳар яки ингуна сегменти қисмӣ аз $\varepsilon/(b - a)$ хурд мешавад (ба натиҷаи теоремаи 10.2 ниг.). Бинобар ин барои ингуна тақсимотҳо T,

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Пас, шарти кифоягии интегронидашавандагӣ барои функцияи дар сегменти $[a, b]$ бефосилаи $f(x)$ иҷрошаванда аст.

4. Интегронидашавандагии баъзе функцияҳои канишдор. Мо мегӯем, ки нуқтаи x бо интервал пӯшида аст, агар ин нуқта ба интервали номбурда мутааллиқ бошад. Теоремаи зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 10.4. *Агар функцияи* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *муайян ва маҳдуд бошад ва агар барои адади мусбати дилхоҳи* ε *интервалҳои шумораашон охирнокеро, ки ҳама нуқтаҳои канишии ин функцияро мепӯшонанд ва суммаи умумии дарозиашон аз* ε *хурд мебошанд, нишон додан мумкин бошад, онгоҳ* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *интегронидашаванда мебошад.*

Исбот. Фарз мекунем, ки $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ дода шудааст. Нуқтаҳои канишии функцияи $f(x)$-ро бо интервалҳои шумораашон охирноке, ки суммаи дарозиҳояшон аз $\dfrac{\varepsilon}{2(M - m)}$ хурд аст, мепӯшонем, дар ин ҷо M ва m — ҳудудҳои болоӣ ва поёнии сатҳи функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ (мавриди $M = m$-ро истисно кардан мумкин аст, чунки онгоҳ $f(x) \equiv c \equiv \text{const}$ мешуд). Нуқтаҳои сегменте, ки ба интервалҳои номбурда тааллуқ надорад, маҷмӯеро ташкил медиҳанд, ки он аз сегментҳои якдигарро набурандаи шумораашон охирнок иборат аст. Функцияи $f(x)$

дар ҳар яки онҳо бефосила мебошад ва, бинобар ин, мунтазам бефосила аст. Ҳар яки ингуна сегментро чунон тақсим мекунем, ки лаппиши ω_i-и функцияи $f(x)$ дар сегменти қисмии дилхоҳи тақсимот аз $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ хурд бошад. Ин тақсимотҳо ва интервалҳоеро, ки нуқтаҳои каниши функцияи $f(x)$-ро мепӯшонанд, муттаҳид карда, мо тақсимот (T)-и ҳамаи сегменти $[a, b]$-ро ҳосил мекунем. Барои ин тақсимот ҷамъшавандаҳои суммаи $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ (-и баробари $S - s$) ба ду гурӯҳи $\sum' \omega_i \Delta x_i$ ва $\sum'' \omega_i \Delta x_i$ тақсим мешаванд, дар айни ҳол ба гурӯҳи якум ҳамаи ҷамъшавандаҳое, ки ба қисмҳои тақсимоти T (ки аз интервалҳои нуқтаҳои канишро пӯшонанда ташкил шудаанд) оиданд ва ба гурӯҳи дуюм ҷамъшавандаҳои боқимонда дохил мешаванд. Азбаски лаппиши $\omega_i = M_i - m_i$ барои ҷамъшавандаҳои гурӯҳи якум нобаробарии $\omega_i \leqslant M - m$-ро қаноат менамояд, пас

$$\sum' \omega_i \Delta x_i \leqslant (M-m) \sum' \Delta x_i < (M-m) \frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \varepsilon/2.$$

Барои ҷамъшавандаҳои гурӯҳи дуюм $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Бинобар ин

$$\sum'' \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \varepsilon/2.$$

Ҳамин тариқ,

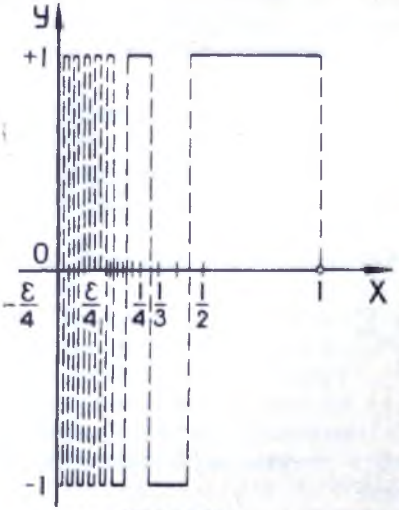
$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Инак, барои функцияи $f(x)$, ки дар шарти теорема нобар шуда буд, шарти кифоягии интегронидашавандагӣ иҷро мешавад. Теорема исбот шуд.

Натиҷа. Функцияи $f(x)$-и дар сегменти $[a, b]$ маҳдуд, ки фақат ба нуқтаҳои каниши шумораашон охирнок соҳиб аст, дар ҳамин сегмент интегронидашаванда мебошад. Аз ҷумла, функцияи дар сегменти додашуда қисм-қисм бефосила дар ҳамин сегмент интегронидашаванда мебошад.*

---

* Агар p шумораи нуқтаҳои каниш бошад, онгоҳ ҳар як нуқтаи канишро бо интервали дарозиаш $\varepsilon/2p$ пӯшидан кифоя аст.



Расми 10.4

Қ а й д. Агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда бошад ва функцияи $g(x)$ аз функцияи $f(x)$ фақат бо нуқтаҳои шумораашон охирнок тафовут дошта бошад, онгоҳ функцияи $g(x)$ ҳам дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад, дар айни ҳол

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Функцияи интегронидашавандаеро, ки ба нуқтаҳои каниши шумораашон беохир соҳиб мебошад, муоина мекунем. Бигзор функцияи $f(x)$ дар сегменти $[0, 1]$ дода шуда бошад (расми 10.4):

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ дар нимсегментҳои } \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n-1}\right], \ n = 1, 2, \ldots, \\ -1 \text{ дар нимсегментҳои } \left(\dfrac{1}{2n+2}, \dfrac{1}{2n}\right], \ n = 1, 2, \ldots, \\ \text{дар нуқтаи } 0. \end{cases}$$

Функцияи номбурда дар ҳамаи нуқтаҳои $x_n = 1/n$, $n = 2, 3, \ldots$, ба канишҳои чинси 1-ум соҳиб мебошад. $\varepsilon > 0$-и дилхоҳро қайд мекунем. Нуқтаи $x = 0$-ро бо интервали $(-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$ мепӯшем (дар атрофи дилхоҳи ин нуқта нуқтаҳои шумораашон беохири каниши функция воқеъ мебошанд). Дар беруни интервали $(-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$ p-то* нуқтаҳои шумораашон охирноки каниши функция воқеъ мебошанд, ки мо ҳар яки онҳоро бо интервали дарозиаш аз $\varepsilon/2p$ хурд мепӯшем. Суммаи дарозии интервалҳое, ки ҳама нуқтаҳои каниши функцияи муоинашавандаро мепӯшонанд, аз $\varepsilon/2 + p\dfrac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$ хурд мебошад. Пас, функцияи $f(x)$ дар сегменти $[0, 1]$ интегронидашаванда мебошад.

5. Интегронидашавандагии функцияҳои маҳдуди монотонӣ. *Т е о р е м а и* 10.5. *Функцияи дар сегменти* $[a, b]$ *монотонии* $f(x)$ *дар ҳамин сегмент*** *интегронидашаванда мебошад.*

---

* Ин адади p, албатта, аз ε вобаста мебошад.

** Агар функция дар сегменти $[a, b]$ монотонӣ бошад, онгоҳ қиматҳои он дар байни $f(a)$ ва $f(b)$ воқеъ мебошанд. Бинобар ин функцияи монотонии дар сегменти $[a, b]$ муайян дар ҳамин сегмент маҳдуд мебошад.

Исбот. Барои муайянӣ теоремаро барои функцияи дар сегменти $[a, b]$ камнашавандаи $f(x)$ исбот мекунем. Адади мусбати дилхоҳи ε-ро интихоб мекунем ва сегменти $[a, b]$-ро ба қисмҳои баробаре, ки дарозиашон аз $\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ хурд аст, таксим менамоем (мавриди $f(a) = f(b)$-ро истисно кардан мумкин аст, чунки онгоҳ $f(x) = \text{const}$ мешуд). Барои ин таксимот фарқи $S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$-ро баҳо медиҳем. Чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

Лекин барои функцияи камнашаванда $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = f(b) - f(a)$, бинобар ин $S - s < \varepsilon$. Теорема исбот шуд.

§ 5. Хосиятҳои асосии интеграли муайян

Дурустии хосиятҳои зерини интеграли муайянро исбот мекунем:

1°. Мо чунин меҳисобем, ки

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0. \tag{10.6}$$

Қайд мекунем, ки формулаи (10.6) чун қарордод муоина карда мешавад. Онро чун татбиқи табиии интеграли муайян ба сегменти дарозиаш нулӣ муоина кардан лозим аст.

2°. Мо чунин меҳисобем, ки ҳангоми $a < b$ будан

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{10.7}$$

Ин формуларо ҳам чун қарордод муоина кардан лозим аст. Он чамъбасти табиии мафҳуми интегралро барои мавриде ифода мекунад, ки сегменти $[a, b]$ ҳангоми $a < b$ будан ба самти аз b ба a равон аст (дар ин маврид дар суммаи интегралӣ ҳамаи фарқҳои $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ аломати манфӣ доранд).

3°. Бигзор функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда бошанд. Онгоҳ функцияҳои $f(x) + g(x)$,

$f(x) - g(x)$ ва $f(x)\,g(x)$ низ дар ҳамин сегмент интегронидашаванда мебошанд, дар айни ҳол

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (10.8)$$

Аввал интегронидашавандагии функцияи $f(x) \pm g(x)$ ва дурустии формулаи (10.8)-ро исбот мекунем. Дар таксимоти дилхоҳи сегменти $[a, b]$ ва дар интихоби дилхоҳи нуқтаҳои ξ_i барои суммаҳои интегралӣ муносибати

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i$$

дуруст аст ва, бинобар ин, аз мавҷудияти лимити қисми рост мавҷудияти лимити қисми чап бармеояд. Пас, функцияи $f(x) \pm g(x)$ интегронидашаванда мебошад ва формулаи (10.8) мавқеъ дорад.

Акнун исбот мекунем, ки ҳосили зарби функцияҳои интегронидашаванда функцияи интегронидашаванда мебошад. Азбаски функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошанд, пас онҳо дар ин сегмент маҳдуданд (ба тасдиқоти п. 1 § 1 нигар.), чунки $|f(x)| \leqslant A$ ва $|g(x)| \leqslant B$ аст. Таксимоти додашудаи дилхоҳи T-и сегменти $[a, b]$-ро муоина мекунем. Бигзор x' ва x'' нуқтаҳои дилхоҳи сегменти қисмии $[x_{i-1}, x_i]$ бошанд. Айнияти зеринро ҳосил мекунем:

$$f(x'')\,g(x'') - f(x')\,g(x') = [f(x'') - f(x')]\,g(x'') + [g(x'') - g(x')]\,f(x').$$

Азбаски

$$|f(x'')\,g(x'') - f(x')\,g(x')| \leqslant \omega_i, \quad |f(x'') - f(x')| \leqslant \bar{\omega}_i,$$
$$|g(x'') - g(x')| \leqslant \bar{\bar{\omega}}_i$$

мебошад, дар ин ҷо ω_i, $\bar{\omega}_i$, $\bar{\bar{\omega}}_i$ мувофиқан лаппиши функцияҳои $f(x)\,g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ пас, мувофиқи айнияти номбурда*

$$\omega_i \leqslant B\,\bar{\omega}_i + A\,\bar{\bar{\omega}}_i.$$

---

* Дар ин айният нуқтаҳои x' ва x''-ро чунон интихоб кардан мумкин, ки қисми чап аз ω_i ҳар қадар хурд тафовут дошта бошад.

Бинобар ин

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leqslant B \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i \Delta x_i + A \sum_{i=1}^{n} \underline{\omega}_i \Delta x_i.$$

Азбаски $f(x)$ ва $g(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошанд, пас барои $\varepsilon > 0$-и додашудаи дилхоҳ чунин таксимоти T-и ин сегментро нишон додан мумкин аст, ки $\sum_{i=1}^{n} \underline{\omega}_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2B}$ ва $\sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2A}$ мебошад. Пас, барои ин таксимот

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < B \frac{\varepsilon}{2B} + A \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon.$$

Бинобар ин ҳосили зарби функцияҳои интегронидашаванда функцияи интегронидашаванда мебошад.

4°. Агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда бошад, онгоҳ функцияи $cf(x)$ $(c = \text{const})$ дар ҳамин сегмент интегронидашаванда мебошад, дар айни ҳол

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx. \tag{10.9}$$

Ҳақиқатан, суммаҳои интегралии функцияҳои $f(x)$ ва $cf(x)$ бо зарбкунандаи доимии c тафовут доранд. Бинобар ин функцияи $cf(x)$ интегронидашаванда мебошад ва формулаи (10.9) дуруст аст.

5°. Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад. Онгоҳ ин функция дар сегменти дилхоҳи $[c, d]$-и дарбари сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад.

Азбаски функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад, пас барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин таксимоти T-и сегменти $[a, b]$ мавҷуд ҳаст, ки $S - s < \varepsilon$ мебошад (ба теоремаи 10.1 нигар.). Ба нуқтаҳои таксимоти T нуқтаҳои c ва d-ро ҳамроҳ мекунем. Дар асоси хосияти 2°-юми суммаҳои болой ва поёнӣ (ба п. 2 § 2 нигар.) барои таксимоти ҳосилшудаи T^* хусусан нобаробарии $S - s \leqslant \varepsilon$ дуруст аст. Таксимоти T^*-и сегменти $[a, b]$ таксимоти $\overline{T}$-и сегменти $[c, d]$ пайдо мекунад. Агар $\overline{S} - \overline{s}$ суммаҳои болой ва поёнии таксимоти $\overline{T}$ бошад, онгоҳ $\overline{S} - \overline{s} \leqslant S - s$ аст, чунки ҳар як ҷамъшавандаи ғайриманфии $\omega_i \Delta x_i$-и ифодаи $\overline{S} - \overline{s} = \sum \omega_i \Delta x_i$ дар ифодаи $S - s$ ҳам ҷамъшаванда хоҳад шуд. Пас, $\overline{S} - \overline{s} < \varepsilon$ аст, ва, бинобар ин, функцияи $f(x)$ дар сегменти $[c, d]$ интегронидашаванда мебошад.

6°. Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар сегментҳои $[a, c]$ ва $[c, b]$ интегронидашаванда мебошад. Онгоҳ ин функция дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад, дар айни ҳол

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \int_c^b f(x)\,dx. \tag{10.10}$$

Аввал мавриди $a < c < b$-ро муоина мекунем. Азбаски функцияи $f(x)$ дар сегментҳои $[a, c]$ ва $[c, b]$ интегронидашаванда мебошад, пас чунин тақсимотҳои ин сегментҳо мавчуданд, ки фарқи $S - s$ барои ҳар яки онҳо аз $\varepsilon/2$ хурд аст. Ин тақсимотҳоро муттаҳид карда, мо тақсимоти сегменти $[a, b]$-ро ҳосил мекунем, ки барояш фарқи $S - s$ аз ε хурд аст. Пас, функцияи $f(x)$ дар $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад. Нуқтаи c-ро ба қатори нуқтаҳои тақсимкунандаи сегменти $[a, b]$ (дар ҳар як тақсимоти он) дохил мекунем. Онгоҳ суммаи интегралии $f(x)$ дар $[a, b]$ ба сумман суммаҳои интегралии ин функция дар $[a, c]$ ва $[c, b]$ баробар мешавад. Ин суммаҳоро лимит гирифта, мо формулаи (10.10)-ро ҳосил менамоем.

Агар нуқтаи c дар беруни сегменти $[a, b]$ воқеъ бошад, онгоҳ сегменти $[a, b]$ як қисми сегменти $[a, c]$ (ё $[c, b]$) мешавад ва, бинобар ин, дар асоси хосияти 5°, функцияи $f(x)$ дар $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад. Мавриди $a < b < c$-ро муоина мекунем.
Онгоҳ

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Аз ин ҷо, хосияти 2° ва формулаи (10.7)-ро истифода карда, мо боз муносибати (10.10)-ро ҳосил менамоем. Ҳангоми $c<a<b$ будан ҳам ба дурустии ин муносибат боварӣ ҳосил кардан осон аст.

§ 6. Баҳодиҳии интегралҳо. Формулаҳои қимати миёна

1. Баҳодиҳии интегралҳо. Мо дар ин пункт барои интегралҳои муайяне, ки функцияҳои таҳтиинтегралии онҳо ба ин ё он шарт тобеъ мебошанд, баъзе баҳодиҳиҳоеро ҳосил менамоем.

1°. *Фарз мекунем, ки функцияи дар сегменти $[a, b]$ интегронидашавандаи $f(x)$ дар ҳамин сегмент ғайриманфӣ мебошад. Онгоҳ*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Ҳақиқатан, ҳар як суммаи интегралии чунин функция ғайриман-

фӣ мебошад, ва, бинобар ин, лимити $I = \int_a^b f(x)\,dx$-и суммаҳои интегралӣ ҳам ғайриманфӣ аст.*

Қайди 1. *Агар $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда ва $f(x) \geqslant m$ бошад, онгоҳ*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant m(b-a).$$

Воқеан, функцияи $f(x) - m \geqslant 0$ ҳам дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад. Бинобар ин $\int_a^b [f(x) - m]\,dx \geqslant 0$. Аз ин ҷо

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m(b-a)$$

(ба хосияти 3 ва мисоли § 1 нигаред).

2°. *Агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила, ғайриманфӣ ва ба нуль айниятан нобаробар бошад, онгоҳ*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant c > 0.$$

Ҳақиқатан, азбаски функцияи $f(x)$ ғайриманфӣ ва ба нуль айниятан нобаробар аст, пас дар сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки $f(\xi) = 2x > 0$ мебошад. Онгоҳ мувофиқи теоремаи устувории аломати функцияи бефосила чунин сегменти $[p, q]$-и дорои нуқтаи ξ-ро ёфтан мумкин аст, ки қимати функцияи $f(x)$ дар ҳудудҳои он аз адади $k > 0$ хурд намешавад. Бинобар ин, дар асоси қайди 1,

$$\int_p^q f(x)\,dx \geqslant k(q-p) > 0.$$

Мувофиқи хосияти 6°-уми интегралҳои муайян

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx.$$

Бинобар ин, азбаски $f(x) \geqslant 0$ ва $\int_p^q f(x)\,dx \geqslant c > 0$, дар ин ҷо

---

* Фарз мекунем, ки лимити I-и суммаҳои интегралӣ манфӣ мебошад. Онгоҳ, мувофиқи таърифи лимити I, барои адади $\varepsilon = |I|$ суммаи интегралии $I\{x_i, \xi_i\}$ ёфт мешавад, ки барояш $|I\{x_i, \xi_i\} - I| < |I|$ мебошад. Аз ин нобаробарӣ натиҷа мебарояд, ки $I\{x_i, \xi_i\} < 0$ аст, ва мо ҳозир бовар карда будем, ки ҳар як суммаи интегралӣ ғайриманфӣ мебошад. Пас, лимити I ғайриманфӣ мебошад.

$k = k(q - p)$ мебошад, пас

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant c > 0.$$

3°. *Агар функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда бошанд ва дар ҳама ҷои ин сегмент $f(x) \geqslant g(x)$ бошад, онгоҳ*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ҳақиқатан, функцияи $f(x) - g(x) \geqslant 0$ дар сегменти $[a, b]$ низ интегронидашаванда мебошад. Аз ин ҷо, дар асоси хосияти 1°, дурустии баҳодиҳии номбурда бармеояд.

Қайди 2. *Агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда бошад, онгоҳ функцияи $|f(x)|$ ҳам дар ҳамин сегмент интегронидашаванда мебошад, дар айни ҳол*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Аввал интегронидашавандагии модули $|f(x)|$-и функцияи интегронидашавандаи $f(x)$-ро исбот мекунем. Ҳудудҳои саҳеҳи $f(x)$ дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$-ро бо M_i ва m_i ва ҳудудҳои саҳеҳи $|f(x)|$ дар ҳамин сегментро бо M_i' ва m_i' ишорат менамоем. Боварӣ ҳосил кардан осон аст, ки $M_i' - m_i' \leqslant M_i - m_i$ (се мавриди имконпазир: 1) мавриди ғайриманфӣ будани M_i ва m_i, 2) мавриди ғайримусбат будани M_i ва m_i, 3) мавриди $M_i > 0$, $m_i \leqslant 0$-ро муоина кардан кифоя аст). Аз нобаробарии ҳосилшуда натиҷа мебарояд, ки $S' - s' \leqslant S - s$. Ҳамин тариқ, агар барои ягон таксимот $S - s < \varepsilon$ бошад, онгоҳ барои ҳамин таксимот $S' - s' < \varepsilon$ аст, яъне шарти кифоягии интегронидашавандагӣ* барои $|f(x)|$ иҷро шуд.

Акнун баҳодиҳии ба мо даркориро исбот мекунем. Азбаски $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ мебошад, пас $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant$

---

* Аз интегронидашавандагии функцияи $|f(x)|$, умуман, интегронидашавандагии $f(x)$ барнамеояд. Масалан, функцияи

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ барои } x\text{-ҳои рационалӣ}, \\ -1 \text{ барои } x\text{-ҳои иррационалӣ} \end{cases}$$

дар сегменти $[0, 1]$ интегронидашаванда намебошад, онгоҳ $|f(x)| = 1$ функцияи дар ҳамин сегмент интегронидашаванда мебошад.

$\leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$ аст ва ин чунин маъно дорад, ки $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

4°. *Фарз мекунем, ки функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошанд ва $g(x) \geqslant 0$ аст. Онгоҳ, агар M ва m ҳудудҳои саҳеҳи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бошанд, онгоҳ*

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (10.11)$$

Дурустии (10.11) аз он бармеояд, ки барои ҳама x-ҳои сегменти $[a, b]$ нобаробариҳои $mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x)$ дуруст-анд (ба баҳодиҳии 3-юми ҳамин пункт ва хосияти 4°-уми § 5 нигаред).

Қайди 3. Мо дар иловаи 1-уми ҳамин боб барои сумма ва интегралҳои муайян якчанд нобаробариҳои муҳимтаринро ҳосил мекунем.

2. Формулаи якуми қимати миёна. *Бигзор функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда бошад ва фарз мекунем, ки m ва M ҳудудҳои саҳеҳи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ мебошанд. Онгоҳ чунин адади μ-и қаноаткунандаи нобаробариҳои $m \leqslant \mu \leqslant M$ ёфт мешавад, ки*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a). \qquad (10.12)$$

Вокеан, $g(x) = 1$ фарз карда ва $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$ (ба мисоли п. 1 § 1 ниг.) будаанашро ба эътибор гирифта, аз (10.11) ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Адади $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$-ро бо μ ишорат карда, мо формулаи (10.12)-ро ҳосил менамоем.

Агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила бошад, онгоҳ чунин нуктаҳои p ва q-и ҳамин сегмент вуҷуд доранд, ки $f(p) = m$ ва $f(q) = M$ аст (ба теореми 8.8 ниг.) ва, бинобар ин, дар асоси теореми 8.6, дар сегменти $[p, q]$ ва, пас, дар $[a, b]$ ҳам чунин нуктаи ξ ёфт мешавад, ки $f(\xi) = \mu$ аст. Дар ин мав-

рид формулаи (10.12) чунин намуд мегирад:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \qquad (10.13)$$

Ин формула формулаи якуми қимати миёна номида мешавад.

3. Формулаи якуми қимати миёна дар шакли умумишуда. Тасдиқоти зеринро исбот мекунем. *Бигзор функцияҳои* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *интегронидашаванда бошанд, ва фарз мекунем, ки* m *ва* M *ҳудудҳои саҳеҳи* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *мебошанд. Бигзор, ғайр аз он, дар ҳамаи сегменти* $[a, b]$ $g(x) \geqslant 0$ *(ё* $g(x) \leqslant 0$*) бошад. Онгоҳ чунин ададиμ-и қаноаткунандаи нобаробариҳои* $m \leqslant \mu \leqslant M$ *ёфт мешавад, ки*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (10.14)$$

Аз ҷумла, агар $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *бефосила бошад, онгоҳ дар ҳамин сегмент чунин адади* ξ *вуҷуд дорад, ки*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (10.15)$$

Формулаи (10.15) *формулаи якуми қимати миёна дар шакли умумишуда* номида мешавад.

Дурустии формулаи (10.14)-ро исбот мекунем. Агар $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ бошад, онгоҳ дар асоси нобаробариҳои (10.11), $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ ва, бинобар ин, мо ба сифати μ ададидилхоҳро гирифта метавонем. Агар $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ бошад, онгоҳ ҳама қисмҳои нобаробариҳои (10.11)-ро ба $\int_a^b g(x)\,dx$ тақсим карда,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M$$

-ро ҳосил менамоем. μ-ро баробари $\dfrac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$ фарз карда,

мо формулаи (10.14)-ро ҳосил мекунем.

Агар $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила бошад, онгоҳ ададн μ, ки дар байни m ва M воқеъ аст, чи хеле ки бошад, дар ҳамин сегмент чунин нуктаи ξ ёфт мешавад, ки $f(\xi) = \mu$, яъне формулаи (10.14) ба формулаи (10.15) табдил мешавад.

Қайди 4. Агар функцияи $f(x)$ бефосила набошад, онгоҳ формулаи (10.15), умуман, нодуруст аст. Воқеан, фарз мекунем, ки, масалан,

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 \text{ ҳангоми } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \text{ будан,} \\ 1 \text{ ҳангоми } 1/2 < x \leqslant 1 \text{ будан} \end{cases}$$

ва

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ ҳангоми } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \text{ будан,} \\ 1/2 \text{ ҳангоми } 1/2 < x \leqslant 1 \text{ будан.} \end{cases}$$

Онгоҳ, чунон ки бовар кардан осон аст, дар формулаи (10.14) ададн μ ба $2/3$ баробар мебошад. Ҳамин тарик, барои ξ-и дилхоҳи сегменти $[0, 1]$ $f(\xi) \neq \mu$.

4. Формулаи дуюми қимати миёна. Тасдиқоти зерин дуруст аст. *Агар функцияи $g(x)$ дар сегменти $[a, b]$ монотонӣ ва $f(x)$ интегронидашаванда бошад, онгоҳ дар ҳамин сегмент чунин ададн ξ вуҷуд дорад, ки*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\, dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)\, dx. \qquad (10.16)$$

Формулаи (10.16) *формулаи дуюми қимати миёна ё формулаи Бонне** номида мешавад. Тасдиқоти баёншуда дар иловаи 2-юми ҳамин боб исбот карда мешавад.

§ 7. Мавҷудияти функцияи ибтидоии функцияи бефосила. Қоидаҳои асосии интегронидан

1. Мавҷудияти функцияи ибтидоии функцияи бефосила. Пеш аз он, ки ба исботи теоремаи мавҷудияти функцияи ибтидоии функцияи бефосила шурӯъ намоем, мафҳуми *интеграли ҳудуди болоиаш тағьирёбандаро* ҷорӣ мекунем.

Бигзор функцияи $f(x)$ дар сегменти дилхоҳе, ки дарбари интервали (a, b) мебошад, интегронидашаванда ва c ягон нуктаи қайдшудаи ин интервал бошад. Онгоҳ, ададн x-и интервали (a, b) чи хеле ки бошад, функцияи $f(x)$ дар сегменти $[c, x]$ ин-

* Бонне (1819—1892) — математики франсавӣ.

тегронидашаванда мебошад. Бинобар ин функцияи

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt^*$$

ро, ки *интеграли ҳудуди болоиаш тағирьёбанда* меноманд, дар интервали (a, b) муайян мебошад. Теореми зеринро исбот мекунем.

Теореми 10.6. *Функцияи дар интервали (a, b) бефосилаи дилхоҳи $f(x)$ дар ҳамин интервал соҳиби функцияи ибтидой мебошад. Функцияи*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt,$$

ки дар ин ҷо c нуқтаи қайдшудаи дилхоҳи интервали (a, b) мебошад, яке аз функцияҳои ибтидой мебошад.

Исбот. Барои x-и қайдшудаи дилхоҳи интервали (a, b) кимати лимитии $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ вуҷуд дорад ва ин кимати лимитӣ ба $f(x)$ баробар аст. Инро исбот кардан кифоя аст. Дар асоси хосияти 6-уми интегралҳои муайян (ба § 5 ниг.):**

$$F(x+\Delta x)-F(x) = \int_c^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_c^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Мувофиқи формулаи (10.13)-и қимати миёна меёбем, ки

$$F(x+\Delta x)-F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)\,\Delta x,$$

дар ин ҷо ξ — адади воқеи байни ададҳои x ва $x+\Delta x$. Азбаски функцияи $f(x)$ дар нуқтаи x бефосила мебошад, пас ҳангоми $\Delta x \to 0$ $f(\xi) \to f(x)$. Бинобар ин аз формулаи охирин меёбем, ки

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x).$$

Теорема исбот шуд.

---

* Мо тағирьёбандаи интегрониро бо ҳарфи t ишорат кардем, чунки ҳудуди болоии интегронӣ бо ҳарфи x ишорат шудааст.

** Мо афзоиши Δx-ро ҳамон қадар хурд мегирем, ки $(x+\Delta x)$ ба (a, b) тааллуқ дорад.

Қайди 1. Теоремаи мавҷудияти функцияи ибтидоии функцияи дар $[a, b]$ бефосила ҳамин тавр исбот карда мешавад. Дар ин маврид ба сифати ҳудуди поёнии интеграл c a-ро гирифтан мумкин аст.

Қайди 2. Барои исботи теоремаи 10.6 мо мавҷудияти ҳосилаи интеграли ҳудуди болоиаш тағйирёбандаро мукаррар кардем ва исбот кардем, ки ин ҳосила ба функцияи таҳтиинтегралии

$$d/dx \left(\int_c^x f(t)\, dt\right) = f(x) \qquad (10.17)$$

баробар аст.

Қайди 3. Агар функцияи $f(x)$ дар сегменти дилхоҳи дарбари интервали (a, b) интегронидашаванда бошад, онгоҳ интеграли ҳудуди болоиаш тағйирёбанда аз ҳудуди болоӣ функцияи дар интервали (a, b) бефосиларо ифода менамояд. Барои ба ин боварӣ ҳосил кардан, исбот мекунем, ки афзоиши $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$-и функцияи $F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба нуль майл мекунад. Дар асоси формулаи (10.12):

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt = \mu\, \Delta x,$$

дар ин ҷо адади μ дар байни ҳудудҳои болоӣ ва поёнии саҳеҳи функцияи $f(x)$ дар сегменти $[x, x + \Delta x]$ воқеъ аст. Аз формулаи охирин натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\Delta F \to 0$.

Қайди 4. Интеграли ҳудуди болоиаш тағйирёбандаро аксаран барои муайян кардани функцияҳои нав истифода мекунанд. Мо дар боби 6 қайд карда будем, ки функцияҳои ибтидоии баъзе функцияҳои элементарӣ ба воситаи функцияҳои элементарӣ ифода намешаванд ва, аз ҳамин сабаб, функцияҳои элементарӣ намебошанд. Ба хотир меорем, ки, масалан, функцияҳои $\int_0^x e^{-t^2} dt$, $\int_0^x \cos t^2\, dt$, аз ҷумлаи функцияҳои ғайриэлементарӣ мебошанд.

2. Формулаи асосии ҳисоби интегралӣ. Мо исбот кардем, ки ду функцияи ибтидоии дилхоҳи функцияи додашудаи $f(x)$ аз якдигар бо доимие тафовут доранд (ба теоремаи 6.1 ниг.). Бинобар ин, мувофиқи теоремаи 10.6 ва қайди 1-уми ин теорема, тасдиқ кардан мумкин аст, ки функцияи ибтидоии дилхоҳи $\Phi(x)$-и функцияи дар сегменти $[a, b]$ бефосилаи $f(x)$ чунин намуд дорад:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C,$$

дар ин ҷо C — ягон доимӣ.

Дар формулаи охирин аввал $x = a$, баъд $x = b$ фарз карда ва хосияти 1°-уми интегралҳои муайянро истифода намуда, меёбем, ки

$$\Phi(a) = C, \quad \Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx + C^*.$$

Аз ин баробариҳо муносибати

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{10.18}$$

бармеояд, ки онро *формулаи асосии ҳисоби интегралӣ*** меноманд.

Инак, *барои ҳисоб кардани интеграли муайян аз функцияи бефосилаи $f(x)$ фарқи қиматҳои функцияи ибтидоии дилхоҳи он барои ҳудудҳои болой ва поёнии интегрониро тартиб додан лозим аст.*

Формулаи асосии ҳисоби интегралӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои муайян имкониятҳои васеъ муҳайё месозад, чунки масъалаи ҳисоби интеграли муайян ба масъалаи ҷустуҷӯи функцияи ибтидой меорад. Мо методҳои ҷустуҷӯи функцияҳои ибтидоиро дар бобҳои 6 ва 7-уми ҳамин курс муфассал баён карда будем.

Азбаски дар аксари мавридҳо ҷустуҷӯи функцияҳои ибтидой масъалаи мушкил аст, пас масъалаи методҳои тақрибии ҳисоби интегралҳои муайян ба миён меояд. Дар боби 12 баъзе методҳои ҳисоби тақрибии интегралҳои муайян баён карда мешаванд.

Формулаи (10.18)-ро баъзан ба намуди дигар менависанд. Яъне, фарқи $\Phi(b) - \Phi(a)$ бо символи $\Phi(x)\Big|_a^b$ ишорат карда мешавад. Онгоҳ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b. \tag{10.19}$$

Чанд мисол меорем:

1) $\int_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b,$

2) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$

---

* Мо дар ин формула тағьирьёбандаи интегрониро бо ҳарфи x ишорат кардем, чунки ҳудуди болой ба қимати қайдшудаи b соҳиб аст.

** Ин формуларо *формулаи Ньютон—Лейбниц* ҳам меноманд.

3) $\int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$,

4) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$,

5) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$,

6) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^3 = \ln\left(3 + \sqrt{10}\right)$.

3. Иваз кардани тағьирьёбандаи таҳти аломати интеграли муайян. Фарз мекунем, ки шартҳои зерин иҷро мешаванд:

1) *функцияи* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *бефосила мебошад;*

2) *сегменти* $[a, b]$ *маҷмӯи қиматҳои ягон функцияи* $x = g(t)$, *ки дар сегменти* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *муайян мебошад ва дар ҳамин сегмент ҳосилаи бефосила дорад, мебошад;*

3) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

Формулаи

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]\,g'(t)\,dt \qquad (10.20)$$

дар шартҳои номбурда дуруст аст. Формулаи (10.20) нишон медиҳад, ки агар интеграли қисми чапи ин формула ҳисоб карда шуда бошад, онгоҳ интеграли қисми рост ҳам ҳисоб карда шудааст, ва баръакс. Формулаи (10.20) *формулаи иваз кардани тағьирьёбандаи таҳти аломати интеграли муайян* номида мешавад.

Ягон функцияи ибтидоӣ $\Phi(x)$-и функцияи $f(x)$-ро муоина мекунем. Мувофиқи формулаи (10.18)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (10.21)$$

-ро ҳосил мекунем. Азбаски функцияҳои $\Phi(x)$ ва $x = g(t)$ дар сегментҳои мувофиқ дифференсиронидашаванда мебошанд, пас функцияи мураккаби $\Phi(g(t))$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ дифференсиронидашаванда мебошад. Бинобар ин, қоидаи дифференсиронидани функцияи мураккабро татбиқ карда,

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = \Phi'(g(t))\,g'(t) \qquad (10.22)$$

-ро ҳосил мекунем, дар айни ҳол ҳосилаи Φ' аз рӯи аргументи x ҳисоб карда мешавад: $\Phi'(g(t)) = \Phi'(x)$, дар ин ҷо $x = g(t)$.

Азбаски $\Phi'(x) = f(x)$ мебошад, пас ҳангоми $x = g(t)$ будан $\Phi'(g(t)) = f(g(t))$ ҳосил мешавад. Ин қимати $\Phi'(g(t))$-ро ба қисми рости баробарии (10.22) гузошта,

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = f(g(t))\,g'(t)$$

-ро ҳосил мекунем. Пас, функцияи $\Phi(g(t))$, ки дар сегменти $[\alpha, \beta]$ муайян ва бефосила мебошад, дар ҳамин сегмент барои функцияи $f(g(t))\,g'(t)$ функцияи ибтидоӣ мебошад, ва, бинобар ин, мувофиқи формулаи (10.18),

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))\,g'(t)\,dt = \Phi\,(g(\beta)) - \Phi\,(g(\alpha)).$$

Азбаски $g(\beta) = b$ ва $g(\alpha) = a$ мебошад, пас

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)))g'(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Формулаи охиринро бо формулаи (10.21) муқоиса карда, ба дурустии формулаи (10.20) боварӣ ҳосил мекунем.

Мисолҳо. 1) Интеграли $\int_1^2 \ln x \frac{dx}{x}$-ро ҳисоб мекунем. Фарз мекунем, ки $x = e^t$ аст. Азбаски ҳангоми $x = 1$ будан $t = 0$ ва ҳангоми $x = 2$ будан $t = \ln 2$ аст, пас

$$\int_1^2 \ln x \frac{dx}{x} = \int_0^{\ln 2} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\ln^2 2.$$

2) Интеграли $\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\frac{-dx}{\sqrt{x}}$-ро ҳисоб мекунем. Бигзор $x = t^2$ бошад. Онгоҳ ҳангоми $t = \pi/2$ будан $x = \pi^2/4$ ва ҳангоми $t = \pi$ будан $x = \pi^2$ аст. Бинобар ин

$$\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\frac{-dx}{\sqrt{x}} = 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sin t\,dt = -2\cos t\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2.$$

4. Формулаи аз рӯи ҳиссаҳо интегронидан. *Фарз мекунем, ки функцияҳои $u(x)$ ва $v(x)$ дар сегменти $[a, b]$ соҳиби ҳосилаҳои бефосила мебошанд. Онгоҳ барои интегралҳои муайян формулаи зерини аз рӯи ҳиссаҳо интегронидан мавқеъ дорад:*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (10.23)$$

Азбаски $v'(x)\,dx = dv$ ва $u'(x)\,dx = du$ мебошад, пас ин формулаҳоро ба намуди зерин ҳам менависанд:

$$\int_a^b u\,dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (10.24)$$

Ба дурустии ин формулаҳо бовар кардан осон аст. Ҳақиқатан, функцияи $u(x)\,v(x)$ барои функцияи $u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)$ функцияи ибтидоӣ мебошад. Бинобар ин, дар асоси (10.19):

$$\int_a^b [u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)]\,dx = [u(x)\,v(x)]\Big|_a^b.$$

Аз ин ҷо хосияти 3-юми интегралҳои муайянро истифода карда (ба § 5 нигар.), мо формулаҳои (10.23) ва (10.24)-ро ҳосил менамоем.

Мисолҳо.

1) $\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{dx}{x} = [x\ln x - x]\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1,$

2) $\int_1^2 xe^x\,dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx = e^x(x-1)\Big|_1^2 = e^2,$

3) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} =$

$$= \left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

5. Аъзои боқимондаи формулаи Тейлор дар шакли интегралӣ. Барои ҳосил кардани формулаи Тейлори функцияи $f(x)$, ки аъзои боқимондааш дар шакли интегралӣ дода мешавад, формулаи (10.23)-ро татбиқ мекунем. Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар ягон ε-атрофи нуқтаи a ҳосилаи бефосилаи тартиби $(n+1)$-ум дорад ва бигзор x нуқтаи додашудаи дилхоҳи ин ε-атроф бошад. Боварӣ ҳосил мекунем, ки адади

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt \qquad (10.25)$$

аъзои боқимондаи формулаи Тейлор барои функцияи $f(x)$-и маркази чудокуниаш нуқтаи a мебошад. Ҳамин тариқ, *формулаи (10.25) аъзои боқимондаи формулаи Тейлор барои функцияи $f(x)$ дар шакли интегралӣ мебошад.*

Барои исбот қайд мекунем, ки

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

$u(t) = f'(t)$ ва $v(t) = -(x-t)$ фарз карда (азбаски x қайд-шуда аст, пас $v'\,dt = dt$), ба интеграли $\int_a^x f'(t)\,dt$ формулаи (10.23)-и интегронӣ аз рӯи ҳиссаҳоро татбиқ мекунем. Онгоҳ

$$\int_a^x f'(t)\,dt = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

Ифодаи барои $\int_a^x f'(t)\,dt$ ёфташударо ба формулаи барои $f(x)$ навишташуда гузошта, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

$u(t) = f''(t)$ ва $v(t) = -\frac{1}{2}(x-t)^2$ фарз карда (азбаски x қайд-шуда аст, пас $v'dt = (x-t)dt$), ба интеграли $\int_a^x f''(t)(x-t)dt$ формулаи интегронӣ аз рӯи ҳиссаҳоро татбиқ мекунем. Баъди чанд табдилоти номураккаб меёбем, ки

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{1}{2!}\int_a^x f^{(3)}(t)(x-t)^2dt,$$

ва, бинобар ин,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2!}\int_a^x f^{(3)}(t)(x-t)^2dt.$$

То ҳосил шудани формулаи зерин интегронӣ аз рӯи ҳиссаҳоро ичро кардан мегирем:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Ин формула нишон медиҳад, ки $R_{n+1}(x)$ ҳақиқатан аъзои боқимондаи формулаи Тейлор барои функцияи $f(x)$-и маркази чудокуниаш нуқтаи a мебошад (ба § 13 боби 8 ниг.). Шакли интегралӣ (10.25)-и аъзои боқимондаи формулаи Тейлорро истифода карда, аъзои боқимондаи формулаи Тейлорро дар шакли Лагранж ҳосил кардан осон аст. Яъне мувофиқи шакли умумишуда (10.15)-и формулаи қимати миёна:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)\,dt =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)}\Bigg|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ифодаи ҳосилшуда аъзои боқимонда шакли Лагранж мебошад* (ба формулаи (8.46)-и § 14 боби 8 ниг.).

ИЛОВАИ 1

БАЪЗЕ НОБАРОБАРИҲОИ МУҲИМТАРИН БАРОИ СУММА ВА ИНТЕГРАЛҲО

1. Ҳосил кардани як нобаробарии пешакӣ. Фарз мекунем, ки A ва B ададҳои ғайриманфии дилхоҳ мебошанд ва бигзор p ва p' ду ададӣ дилхоҳе бошанд, ки ҳар дуяшон ҳам аз як калонанд ва бо муносибати $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ алоқаманд мебошанд (ингуна ададҳоро *ададҳои алоқаманд* меноманд). Онгоҳ

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p}+\frac{B^{p'}}{p'}. \tag{10.26}$$

Қимати максимуми функцияи $f(x)=x^{1/p}-\frac{x}{p}$ дар нимхати рости $x \geqslant 0$-ро меёбем. Азбаски $f'(x)=\frac{1}{p}(x^{1/p-1}-1)=\frac{1}{p}(x^{-1/p}-1)$ мебошад, пас ҳангоми $0<x<1$ будан $f'(x)>0$ ва ҳангоми $x>1$ будан $f'(x)<0$ аст. Бинобар ин функция дар нуқтаи $x=1$ соҳиби максимум мебошад, илова бар

---

* Ҳангоми ин тавр ҳосил кардани аъзои боқимондаи шакли Лагранж ба ҳосилаи тартиби $(n+1)$-ум назар ба маҳдудияте, ки дар § 14 боби 8 буд, чанде зиёдтар маҳдудият гузошта мешавад. Аммо, агар теоремаи дар охири боби 9 исботшудаи Дарбу (доир ба гузаштани ҳосила аз ҳамин қиматҳои фосилавӣ)-ро истифода намоем, онгоҳ аъзои боқимондаи шакли Лагранжро фақат дар мавриди мавҷуд будан ва интегронидашаванда будани $f^{(n+1)}(x)$ ҳосил мекунем.

ин кимати максимумаш $f(1) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$. Инак, барои ҳама x-ҳои $\geqslant 0$

$$x^{1/p} - (x/p) \leqslant 1/p'.$$

$x = Ap/Bp^*$-ро ба нобаробарии охирин гузошта, ҳар ду қисми ин нобаробариро ба Bp' зарб мекунем ва нобаробарии (10.26)-ро ҳосил менамоем.

2. **Нобаробарии Гёлдер** барои суммаҳо.** Фарз мекунем, ки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ва $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ягон хел ададҳои ғайриманфие мебошанду p ва p' маънои дар пункти якум баёншударо доранд. Онгоҳ нобаробарии зерин дуруст аст:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^{p'}\right]^{1/p'}, \tag{10.27}$$

ки инро *нобаробарии Гёлдер барои суммаҳо* меноманд.

Аввал исбот мекунем, ки агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ягон хел ададҳои ғайриманфии қаноаткунандаи нобаробариҳои

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^p \leqslant 1 \text{ ва } \sum_{i=1}^{n} B_i^{p'} \leqslant 1 \tag{10.28}$$

бошанд, онгоҳ барои ин ададҳо нобаробарии

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqslant 1 \tag{10.29}$$

дуруст аст. Воқеан, нобаробарии (10.26)-ро барои ҳама ҷуфти ададҳои A_i ва Bi навишта, ин нобаробариҳоро аз рӯи ҳама i-ҳои аз 1 то n ба сумма гирифта, нобаробариҳои зеринро ҳосил мекунем;

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqslant \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} A_i^p + \frac{1}{p'} \sum_{i=1}^{n} B_i^{p'} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Бо ҳамин нобаробарии (10.29) исбот шуд.

Акнун фарз мекунем, ки

$$A_i = \frac{a_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p}}, \quad B_i = \frac{b_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^{p'}\right]^{1/p'}}\text{***}.$$

Маълум, ки ададҳои A_i ва B_i нобаробариҳои (10.28)-ро қаноат менамоянд, бинобар ин нобаробарии (10.29) барои ин ададҳо дуруст аст, ки онро дар

---

* Дар ин ҷо $B > 0$ мепиндорем, чунки ҳангоми $B = 0$ будан дурустии нобаробарии (10.26) шубҳае намеорад.

** Гёлдер (1859—1937) — математики немис.

*** Мо чунин мепиндорем, ки ақаллан яке аз ададҳои a_i ва ақаллан яке аз ададҳои b_i аз нуль тафовут доранд, чунки дар мавриди баръакс формулаи (10.27) исбот наметалабад.

ин мавриd ин тавр навиштан мумкин аст:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i{}^p\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i{}^{p'}\right]^{1/p'}} \leqslant 1.$$

Аз нобаробарии охирин нобаробарии Гёльдер (10.27) хосил мешавад.

Қайд. Дар мавриди хусусии $p = p' = 2$ нобаробарии Гёльдер ба нобаробарии зерин табдил мешавад:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i{}^2}. \qquad (10.30)$$

Нобаробарии (10.30) *нобаробарии Буняковский* барои суммаҳо* номида мешавад.

3. Нобаробарии Минковский барои суммаҳо.** Фарз мекунем, ки $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ягон хел ададҳои ғайриманфӣ мебошанд ва адади $p > 1$ аст. Онгоҳ нобаробарии зерин дуруст аст:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i{}^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i{}^p\right]^{1/p}, \qquad (10.31)$$

ки инро *нобаробарии Минковский барои суммаҳо* меноманд. Пеш аз ҳама суммаи қисми чапи (10.31)-ро табдил медиҳем. Ин тавр навиштан мумкин аст:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,(a_i + b_i)^{p-1}.$$

Ба ҳар як суммаи қисми рост нобаробарии Гёльдерро татбиқ мекунем. Дар айни ҳол, азбаски $(p-1)p' = p$ ва $\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$ аст, пас

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i{}^p\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)p'}\right]^{1/p'} +$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{n} b_i{}^p\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)p'}\right]^{1/p'} =$$

$$= \left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i{}^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i{}^p\right]^{1/p}\right\}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right]^{p-1/p}.$$

Ҳар ду қисми нобаробарии охиринро ба $\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right]^{p-1/p}$ тақсим карда, нобаробарии Минковский (10.31)-ро хосил менамоем.

---

* Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889) — математики рус.

** Герман Минковский (1864—1909) — математик ва физики немис.

4. Интегронидашавандагии дараҷаи мусбати дилхоҳи модули функцияи интегронидашаванда. Теоремаи зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 10.7. *Агар функцияи* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *интегронидашаванда бошад, онгоҳ функцияи* $|f(x)|^r$, *ки дар ин ҷо* r *адади ҳақиқии мусбати дилхоҳ мебошад, низ дар сегменти* $[a, b]$ *интегронидашаванда мебошад.*

Исбот. Теоремаро барои мавриди $r < 1$ исбот кардан кифоя аст, чунки агар $r > 1$ бошад, функцияи $|f(x)|^r$-ро ба намуди ҳосили зарби $|f(x)|^r\,|f(x)|^{r-r}$ навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо $[r]$ қисми бутуни r ва $-r-r < 1$ мебошад. Дар асоси қайди 2-юми п. 1 § 6 функцияи $|f(x)|$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад ва, бинобар ин, дар асоси хосияти 3°-юми § 5, функцияи $|f(x)|^r$ дар ҳамин сегменти интегронидашаванда мебошад. Лекин, онгоҳ дар асоси ҳамон хосият ва интегронидашавандагии функцияи $|f(x)|^{r-r}$, функцияи $|f(x)|^r$ ҳам дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад. Инак, теоремаро барои мавриди $r < 1$ будан исбот мекунем. $r = 1/p$ фарз карда, қайд мекунем, ки $p > 1$ аст. Азбаски функцияи $|f(x)|$ дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда мебошад, пас барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин тақсимоти T-и ин сегмент ёфт мешавад, ки барояш

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i < \varepsilon^p\,(b-a)^{(1-p)}. \tag{10.32}$$

Дар ин ҷо ҳудудҳои саҳеҳи функцияи $|f(x)|$ дар сегменти қисмии $[x_{i-1}, x_i]$ бо M_i ва m_i ишорат карда шудаанд. Исбот кардан кифоя аст, ки суммаи

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i^{1/p} - m_i^{1/p})\,\Delta x_i. \tag{10.33}$$

аз ε хурд аст.

Ин суммаро бо ёрии нобаробарии Гёльдер (10.27) баҳо медихем; дар айни ҳол фарз мекунем, ки дар он $a_i = (M_i^{1/p} - m_i^{1/p})\,(\Delta x_i)^{1/p}$, $b_i = (\Delta x_i)^{1/p'}$ аст. Чунин суммаро ҳосил мекунем:

$$S - s \leqslant \Big[\sum_{i=1}^{n} (M_i^{1/p} - m_i^{1/p})^p \Delta x_i\Big]^{1/p} \Big[\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\Big]^{1/p'}. \tag{10.34}$$

Акнун исбот мекунем, ки

$$(M_i^{1/p} - m_i^{1/p})^p \leqslant (M_i - m_i). \tag{10.35}$$

Нобаробарии охиринро ба M_i* тақсим карда,

$$\Big[1 - \Big(\frac{m_i}{M_i}\Big)^{1/p}\Big]^p \leqslant 1 - \frac{m_i}{M_i}$$

-ро ҳосил мекунем. $0 \leqslant \dfrac{m_i}{M_i} \leqslant 1$ ва $p > 1$ будани нашро ба эътибор гирифта, ба дурустии нобаробарии охирин бовар кардан осон аст. Нобаробарии (10.35)-ро истифода карда ва

---

* Чунин ҳисобидан мумкин, ки $M_i > 0$ аст, чунки агар $M_i = 0$ бошад, $m_i = 0$ мешавад, ва нобаробарии (10.35) дуруст мебошад.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$$

буданашро ба эътибор гирифта, мо аз нобаробарии (10.34) нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$S - s \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta x_i\right]^{1/p} (b-a)^{1/p'}.$$

Аз ин ҷо, нобаробарии (10.32)-ро истифода карда ва $(1/p) + (1/p') = 1$ буданашро ба эътибор гирифта, меёбем, ки $S - s < \varepsilon$ аст .Теорема исбот шуд.

5. **Нобаробарии Гёлдер барои интегралҳо.** Фарз мекунем, ки $f(x)$ ва $g(x)$ ду функцияи дар сегменти $[a, b]$ интегронидашавандаи дилхоҳ мебошанд ва бигзор p ва p' ду ададн дилхоҳе бошанд, ки ҳар дуяшон ҳам аз як калонанд ва бо муносибати $(1/p) + (1/p') = 1$ алоқаманд мебошанд. Онгоҳ нобаробарии зерин дуруст аст:

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right| \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^{p'}\, dx\right]^{1/p'}, \qquad (10.36)$$

ки инро *нобаробарии Гёлдер барои интегралҳо* меноманд. Теоремаи 10.7 ба мавҷудияти интегралҳои қисми рости нобаробарии (10.36) ва хосияти 3°-юми § 5 ба мавҷудияти интегрални қисми чапи (10.36) кафолат медиҳад.

Аввал исбот мекунем, ки агар $A(x)$ ва $B(x)$ ду функцияи ғайриманфӣ ва дар сегменти $[a, b]$ интегронидашавандае бошанд, ки нобаробариҳои

$$\int_a^b A^p(x)\, dx \leqslant 1, \quad \int_a^b B^{p'}(x)\, dx \leqslant 1 \qquad (10.37)$$

-ро қаноат менамоянд, онгоҳ

$$\int_a^b A(x)\, B(x)\, dx \leqslant 1 \qquad (10.38)$$

мебошад. Воқеан, нобаробарии (10.26)

$$A(x)\, B(x) \leqslant \frac{A^p(x)}{p} + \frac{B^{p'}(x)}{p'}$$

дар нуқтаи дилхоҳи x-и сегменти $[a, b]$ дуруст аст. Аз ин ҷо, дар асоси баҳодихии 3°-юми § 6 ва формулаи (10.37),

$$\int_a^b A(x)B(x)dx \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b A^p(x)dx + \frac{1}{p'}\int_a^b B^{p'}(x)dx \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Нобаробарии (10.38) исбот шуд.

$$A(x) = \frac{|f(x)|}{\left[\int_a^b |f(x)^p dx\right]^{1/p}}, \quad B(x) = \frac{|g(x)|}{\left[\int_a^b |g(x)|^{p'}\, dx\right]^{1/p'}}$$

фарз карда, мо нобаробарии

$$\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b |g(x)|^{p'}\,dx\right]^{1/p'}$$

-ро ҳосил мекунем. Азбаски, дар асоси қайди 2-юми п. 1 § 6,

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx$$

мебошад, пас нобаробарии Гёльдер (10.36) барои интегралҳо муқаррар карда шуд.

Қайд. Дар мавриди хусусии $p = p' = 2$ нобаробарии Гёльдер барои интегралҳо ба нобаробарии зерин табдил мешавад:

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}\,\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx}, \qquad (10.39)$$

ки инро *нобаробарии Коши — Буняковский барои интегралҳо* меноманд.

6. **Нобаробарии Минковский барои интегралҳо.** Барои функцияҳои ғайриманфии дилхоҳи $f(x)$ ва $g(x)$ ва барои ҳамин функцияҳои дар сегменти $[a, b]$ интегронидашаванда ва барои ададн дилхоҳи $p > 1$ нобаробарии зерин дуруст аст:

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b f^p(x)\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b g^p(x)\,dx\right]^{1/p}, \qquad (10.40)$$

ки инро *нобаробарии Минковский барои интегралҳо* меноманд. Барои ҳосил кардани ин нобаробарӣ формулаи

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^p\,dx = \int_a^b f(x)\,[f(x)+g(x)]^{p-1}\,dx + \int_a^b g(x)\,[f(x)+g(x)]^{p-1}\,dx$$

-ро асос кардан ва ба интегралҳои қисми рости ин формула нобаробарии Гёльдерро татбиқ намудан лозим аст. Муҳокимаронии инро ба хонанда месупорем.

Мувофиқи қоидаи индукция аз нобаробарии (10.40) барои n-то функцияҳои $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ки дар сегменти $[a, b]$ ғайриманфӣ ва интегронидашаванда мебошанд, нобаробарии зеринро ҳосил кардан мумкин аст:

$$\left\{\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b f_1^p(x)\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b f_2^p(x)\,dx\right]^{1/p} + \ldots + \left[\int_a^b f_n^p(x)\,dx\right]^{1/p}.$$

ИЛОВАИ 2

ИСБОТИ ТАСДИҚОТИ П. 4 § 6

Барои бехтар шудан тасдиқоти п. 4 § 6-ро боз баён мекунем.

Агар дар сегменти $[a, b]$ *функцияи* $g(x)$ *монотонӣ ва* $f(x)$ *интегронидашаванда бошад, онгоҳ дар ҳамин сегмент чунин адади* ξ *ёфт мешавад, ки*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx. \qquad (10.16)^*$$

Ҷумлаи ёрирасони зеринро пешакӣ исбот мекунем.

*Лемmаи Абель.*** *Бигзор* $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \ldots \geqslant v_n \geqslant 0$ *ва* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *— ададҳои дилхоҳ бошанд. Агар суммаи* $S_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_i$ *дар қимати дилхоҳи* i *дар байни* A *ва* B *воқеъ бошад, онгоҳ суммаи* $u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$ *дар байни ададҳои* Av_1 *ва* Bv_2 *воқеъ мебошанд.*

Исбот. Азбаски $u_1 = S_1$ ва $u_i = S_i - S_{i-1}$ аст, пас

$$v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots + v_nu_n = v_1S_1 + v_2(S_2 - S_1) + \ldots + v_n(S_n - S_{n-1}) =$$
$$= S_1(v_1 - v_2) + S_2(v_2 - v_3) + \ldots + S_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + S_nv_n.$$

Азбаски $v_i \geqslant 0$ *ва* $v_i - v_{i+1} \geqslant 0$ аст, пас, дар муносибати охирин ҳар яки S_i-ро аввал ба A, баъд ба B иваз карда, нобаробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$A[(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \ldots + (v_{n-1} - v_n) + v_n] \leqslant v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots +$$
$$+ v_nu_n \leqslant B[(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \ldots + (v_{n-1} - v_n) + v_n].$$

Аз ин ҷо, азбаски ифодаҳои дарунӣ қавсҳои квадратӣ баробари v_1 мебошанд, пас

$$Av_1 \leqslant v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots + v_nu_n \leqslant Bv_1.$$

Лемма исбот шуд.

Қайд. Ҳангоми исботи леммаи Абель мо табдилоти суммаи $\sum_{k=1}^{n} v_ku_k$-ро истифода кардем, ки онро одатан *табдилоти Абель* меноманд. Маълумоти мукаммали табдилоти Абель ва татбиқоти муҳимтарини ин табдилотро дар п. 2 § 5 боби 13 ёфтан мумкин аст.

Исботи тасдиқоти п. 4 § 6. Фарз мекунем, ки функцияи $g(x)$ дар $[a, b]$ намеафзояд ва дар ҳамин сегмент ғайриманфӣ мебошад. Дар асоси интегронидашавандагии***

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,g(x_{i-1})\,\Delta x_i \quad (\Delta = \max \Delta x_i).$$

Фарз мекунем, ки M_i ва m_i ҳудудҳои саҳеҳи $f(x)$ дар $[x_{i-1}, x_i]$ мебошанд. Онгоҳ, азбаски $g(x)$ ғайриманфист, пас нобаробариҳои зерин дурустанд:

$$\sum_{i=1}^{n} m_ig(x_{i-1})\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,g(x_{i-1})\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_ig(x_{i-1})\Delta x_i. \qquad (10.41)$$

---

* Барои қулай шудан нумерацияи формулаҳои навишташударо нигоҳ медорем.

** Нильс Генрих Абель (1802—1829) — математики норвегӣ.

*** Ба ҳосияти 3-юми § 5 нигар.

Азбаски $g(x)$ дар $[a, b]$ намеафзояд, пас фарқи

$$\sum_{i=1}^{n} M_i g(x_{i-1})\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i g(x_{i-1})\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\, g(x_{i-1})\Delta x_i$$

аз адади $g(a)\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i$ калон намешавад. Азбаски функцияи $f(x)$ интегронидашаванда мебошад, пас $\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i$ хангоми $\Delta \to 0$ ба нуль майл мекунад. Аз ин ҷо ва аз нобаробариҳои (10.41) натиҷа мебарояд, ки барои *ададҳои дилхоҳи* μ_i-и қаноаткунандаи нобаробариҳои $m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$ ҳар яки суммаҳои

$$\sum_{i=1}^{n} m_i g(x_{i-1})\Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i g(x_{i-1})\Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} M_i g(x_{i-1})\Delta x_i$$

хангоми $\Delta \to 0$ дар лимит ба интеграли $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ соҳибанд. Мувофиқи формулаи (10.12) адади μ_i (дар ин ҷо $m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$)-ро чунон интихоб кардан мумкин аст, ки $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = \mu_i \Delta x_i$. Азбаски функцияи $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила мебошад (ба қайди 3-юми п. 1 § 7 ниг.), пас адади $S_i = \sum_{k=1}^{i} \mu_k \Delta x_k = \int_a^{x_i} f(t)\, dt$ дар байни ҳудуди поёнии саҳеҳ ва ҳудуди болоии саҳеҳи M-и функцияи $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$ воқеъ ас Фарз мекунем, ки $v_1 = g(a)$, $v_2 = g(x_1)$, ..., $v_n = g(x_{n-1})$, $u_1 = \mu_1 \Delta x_1$, ..., $u_n = \mu_n \Delta x_n$. Азбаски $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \ldots \geqslant v_n \geqslant 0$ ва суммаи $S_i = \sum_{k=1}^{i} u_k$ дар байни m ва M воқеъ мебошад, пас, дар асоси леммаи Абель, суммаи $\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\mu_i \Delta x_i$ дар байни $mg(a)$ ва $Mg(a)$ воқеъ аст. Онгоҳ лимити ин сумма ҳангоми $\Delta \to 0$ ҳам дар байни $mg(a)$ ва $Mg(a)$ воқеъ мешавад, яъне нобаробариҳои

$$g(a)m \leqslant \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant g(a)M$$

дурустанд. Функцияи бефосилаи $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ қимати дилхоҳи A-ро, ки дар байни ҳудудҳои саҳеҳи он (m ва M) воқеъ аст, қабул мекунад, яъне чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(t)\,dt = A = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{g(a)}.$$

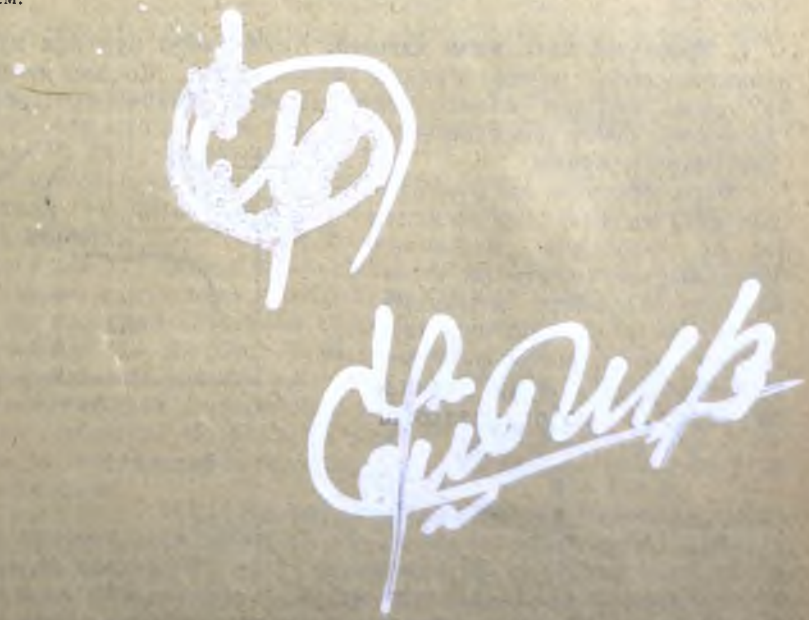
Бинобар ин

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx. \qquad (10.42)$$

Агар функцияи афзуннашавандаи $g(x)$ қиматҳои манфӣ ҳам дошта бошад, онгоҳ функцияи $h(x) = g(x) - g(b)$ афзуннашаванда мебошад ва қиматҳои ғайриманфӣ дорад. Бинобар ин, дар асоси (10.42),

$$\int_a^b f(x)\,[g(x) - g(b)]\,dx = [g(a) - g(b)]\int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Аз ин ҷо бо роҳи табдилоти номураккаб формулаи (10.16)-ро ҳосил менамоем.



БОБИ 11

ТАТБИҚОТИ ГЕОМЕТРӢ ВА ФИЗИКАВИИ ИНТЕГРАЛИ МУАЙЯН

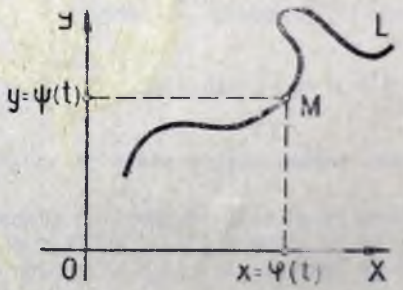
§ 1. Дарозии камони хати кач

1. Мафҳуми хати качи ҳамвор. Хати качро чун изи нуқтаи ҳаракаткунанда муоина кардан табиитар аст. Мо дар ин пункт ба ҳамин мафҳум маъноӣ математикӣ медиҳем ва мафҳуми *хати качи содда* номидашавандаро чорӣ мекунем.

Фарз мекунем, ки функцияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ бефосила мебошанд (минбаъд аргументи ин функцияҳоро параметр меномем). Агар параметри t-ро чун вақт муоина кунем, онгоҳ функцияҳои номбурда қонуни ҳаракати нуқтаи M-и координатаҳояш

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$$

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta \qquad (11.1)$$



Расми 11.1.

-ро дар ҳамвории муайян мекунанд (расми 11.1)*.

Маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои M-ро, ки ба қиматҳои гуногуни параметри t-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқанд, чун *изи* нуқтаи M, ки мувофиқи қонуни (11.1) ҳаракат мекунад, муоина кардан мумкин аст. Маҷмӯи $\{M\}$, ки изи нуқтаи ҳаракаткунандаро ифода мекунад, ба тасаввуроти аёнии мо доир ба хати кач мувофиқ наома-

---

* Мо дар ин ҷо ва минбаъд маҷмӯи ҷуфти тартибноки гуногуни (x, y)-и ададҳои x ва y (ҳар яки ингуна ҷуфтҳоро нуқтаи ҳамвории меномем)-ро ҳамвории меномем. Ададҳои x ва y координатаҳои нуқтаи (x, y) номида мешаванд. Барои мухтасарӣ мо нуқтаи (x, y)-ро бо як ҳарфи M ишорат мекунем. Навишти $M(x, y)$ чунин маъно дорад, ки нуқтаи M соҳиби координатаҳои x ва y мебошад.

данаш мумкин аст. Масалан, чунин функцияҳои бефосилаи $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$-ро, ки дар сегменти $[0, 1]$ дода шудаанд, нишон додан мумкин аст, ки изи нуқтаи M, ки мувофиқи қонуни $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ҳаракат мекунад, квадрати комилро пур менамояд. Бинобар ин чунин маҷмӯъҳои $\{M\}$-ро чудо кардан мумкин аст, ки онҳо ба тасаввуроти аёнии мо доир ба хати каҷ мувофиқ меоянд. Ҳамин тариқ, мо ба мафҳуми хати каҷи содда меоем.

Маҷмӯи $\{M\}$-и ҳама нуқтаҳои M-ро, ки координатаҳои x ва y-и онҳо бо муодилаҳои (11.1) *муайян карда мешаванд, хати каҷи ҳамвори соддаи L меномем, агар ба қиматҳои гуногуни параметри t-и сегменти $[\alpha, \beta]$ нуқтаҳои гуногуни ин маҷмӯъ мувофиқ оянд.*

Мо инчунин терминологияи зеринро истифода мекунем: *«муодилаҳои* (11.1) *хати каҷи ҳамвори соддаи L-ро муайян мекунанд»* ва *«хати каҷи ҳамвори соддаи L бо ёрии муодилаҳои* (11.1) *параметронида шудааст»*.

Ҳар як нуқтаи маҷмӯи $\{M\}$-ро, ки дар таърифи хати каҷи ҳамвори содда қайд шудаанд, нуқтаи ин хати каҷ меномем; бар замми ин нуқтаҳоеро, ки ба қиматҳои ҳудудии α ва β-и параметри t мувофиқанд, нуқтаҳои *ҳудудии* хати каҷи содда меномем.

Графики функцияи дар сегменти $[\alpha, \beta]$ бефосилаи $y = f(x)$ мисоли хати каҷи содда мебошад. Воқеан, ин графикро чун изи нуқтаи M, ки мувофиқи қонуни $x = t$, $y = f(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, ҳаракат мекунад, муоина кардан мумкин аст; ба замми ин, ба қиматҳои гуногуни параметри t нуқтаҳои гуногуни график мувофиқ меоянд.

Қайди 1. Хатҳои каҷи содда ҳамаи маҷмӯъҳои нуқтагиро, ки ба номи «хати каҷ» лоиқанд, мукаммал намекунанд. Бо вуҷуди ин мафҳуми хати каҷи содда барои мақсади мо кифоя аст.

Қайди 2. Як хати каҷи соддаи L-ро бо тарзҳои гуногун параметронидан мумкин аст. Мо параметризацияҳои гуногуни хати каҷи соддаи L-ро муоина мекунем, ки онҳо аз параметризацияи додашуда бо роҳи ба намуди функцияҳои қатъӣ монотонии бефосилаи параметри дигари s овардани параметри t ҳосил мешаванд.

Қайди 3. Мафҳуми *хати каҷи сарбастаи содда* мафҳуми муҳимтарин мебошад. Ингуна хати каҷ ин тавр ҳосил мешавад. Фарз мекунем, ки L_1 ва L_2 ду хати каҷи содда мебошанд, дар айни ҳол: 1) нуқтаҳои ҳудудии хати каҷи L_1 бо нуқтаҳои ҳудудии хати каҷи L_2 мувофиқ меоянд; 2) нуқтаҳои ғайриҳудудии дилхоҳи хатҳои каҷи L_1 ва L_2 гуногун мебошанд. Хати каҷи L, ки дар натиҷаи якҷоякунии хатҳои каҷи L_1 ва L_2 ҳосил мешавад, хати каҷи сарбастаи содда номида мешавад.

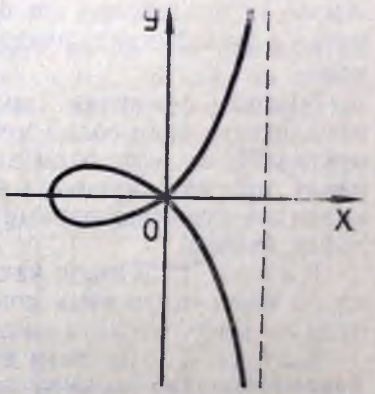
2. Ба таври параметрӣ дода шудани хати каҷ. Дар анализи математикӣ ва татбиқоти он хатҳои каҷеро, ки ба таври параметрӣ дода шудаанд, муоина кардан кулай мебошад. *Тасаввурот дар бораи хати каҷ чун ҷои геометрии мавқеъҳои пайдар-*

паии нуқтаҳои ҳаракаткунанда манбаи аёнии чунин тарзи дода шудани хати кач мебошад. Масалан, чои геометрии мавқеъҳои пайдарпаи нуқтаи M-и координатаҳояш x ва y, ки мувофики қонуни

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad y = at\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad -\infty < t < \infty, \qquad (11.2)$$

ҳаракат мекунад, хати качеро тасвир мекунад, ки онро *строфоида* меноманд (расми 11.2). Нуқтаи аз руи строфоида ҳаракаткунандаи M ҳангоми $t = -1$ ва $t = 1$ будан ду маротиба ба мавқеи $x = 0$, $y = 0$ меояд. Азбаски мо мавқеъҳои пайдарпаии нуқтаи ҳаракаткунандаро муоина мекунем, пас нуқтаҳои гуногуни строфоидаро, ки ба қиматҳои гуногуни параметри t мувофиқ меоянд, ҳисоб кардан табиист.

Строфоида хати качи содда намебошад. Аммо соҳаи тағьирьёбии параметри t-ро ба чунин қисмҳое тақсим кардан мумкин аст, ки қисмҳои мувофиқи строфоида хатҳои качи содда мешаванд. Ба ин боварӣ ҳосил кардан осон аст. Яъне, хати рости ададии $-\infty < t < \infty$-ро ба сегментҳои $[n-1, n]$ тақсим мекунем (дар ин ҷо n — адади бутуни дилхоҳ). Агар мо параметри t-ро дар ҳамингуна сегментҳо муоина намоем, онгоҳ қисми мувофиқи строфоида хати качи содда мешавад.



Расми 11.2.

Мо ин идеяи ба қисмҳо тақсимкуниро барои таърифи математикии мафҳуми хати каче, ки ба таври параметрӣ дода мешавад, истифода мекунем.

Чунин мепиндорем, ки маҷмӯи $\{t\}$ ё сегмент, ё нимсегмент, ё интервал, ё хати рости ададӣ, ё нимхати рости кушода ё сарбастаро ифода мекунад.

Мафҳуми тақсимоти маҷмӯи $\{t\}$-ро чорӣ менамоем. Системаи охирнок ё беохири сегментҳои $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ маҷмӯи $\{t\}$-ро тақсим мекунад, агар: 1) якҷояи ин сегментҳо ҳамаи маҷмӯи $\{t\}$-ро ифода намояд ва 2) фақат нӯгҳои ду сегменти дилхоҳ нуқтаҳои умумии онҳо бошанд.

Мисолҳои тақсимоти баъзе аз маҷмӯъҳои номбурдаро дида мебароем.

1. Системаи сегментҳои $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$, зоҳиран, сегменти $[0, 1]$-ро тақсим мекунад.

2. Системаи сегментҳои $[0, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, $[3/4, 7/8]$, ..., $\left[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right]$, ... нимсегменти $(0, 1)$-ро тақсим мекунад.

3. Системаи сегментҳои $\{[n-1, n]\}$, ки дар ин ҷо n адади бутуни дилхоҳ мебошад, зоҳиран, ҳамаи хати рости ададиро таҳсим мекунад.

Акнун ба баёни таърифи мафҳуми хати каҷ, ки ба таври параметрӣ дода шудааст, шурӯъ мекунем.

Бигзор функцияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ дар маҷмӯи $\{t\}$* бефосила бошанд. *Муодилаҳои*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{11.3}$$

ба таври параметрӣ хати каҷи L-ро ифода менамоянд, агар чунин системаи сегментҳои $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, *ки маҷмӯи* $\{t\}$*-ро таҳсим мекунанд, мавҷуд бошанд, ки барои қиматҳои t-и ҳар як сегменти додашудаи ин система муодилаҳои* (11.3) *хати каҷи соддаро муайян мекунанд.*

Дар айни ҳол *нуқтаҳои хати каҷи L мувофиқан бо афзуншавии параметри t бо тартиби муайян муоина карда мешаванд.* Яъне, агар нуқтаи M_1 ба қиматҳои параметри t_1 ва нуқтаи M_2 ба қиматҳои параметри t_2 мувофиқ ояд, онгоҳ, агар $t_1 < t_2$ бошад, M_1 пешоянди M_2 ҳисобида мешавад. *Нуқтаҳое, ки ба қиматҳои гуногуни параметр мувофиқ меоянд, доимо гуногун ҳисобида мешаванд.*

Ба ибораи дигар, хати каҷеро, ки ба таври параметрӣ дода мешавад, чун якҷояшавии хатҳои каҷи содда муоина кардан мумкин аст; дар айни ҳол ин хатҳои каҷи содда, дар мавриде, ки параметри t аз маҷмӯи $\{t\}$ монотонӣ «тез мегузарад», аз нуқтаи M, ки координатаҳояш бо муносибати (11.3) муайян карда мешаванд, пай дар пай «тез мегузаранд».

Қайди 1. Хати каҷи соддаро чун хати каҷе, ки ба таври параметрӣ дода шудааст, муоина кардан мумкин аст. Дар ин мавриди системаи сегментҳое, ки сегменти $[\alpha, \beta]$-ро таҳсим мекунанд, ба яктои ин сегмент оварда мешаванд.

Ба сифати мисол хати каҷи L-ро, ки бо муодилаҳои

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \tag{11.4}$$

ба таври параметрӣ дода шудааст, дида мебароем, ки дар ин ҷо t дар сегменти $[0, 4\pi]$ тағйир меёбад. Системаи сегментҳои $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, $[3\pi, 4\pi]$ сегменти $[0, 4\pi]$-ро таҳсим мекунанд, ба замми ин барои қиматҳои t-и ҳар як сегменти номбурдаи системаи додашуда муодилаҳои (11.4) хати каҷи содда (нимдавра)-ро муайян менамоянд. Ба таври аёнӣ фаҳмост, ки дар ин мисол хати каҷи L нимдавраро ду маротиба ифода мекунад.

Қайди 2. Мисоли муоинашуда ва мисоли строфоида нишон медиҳанд, ки хати каҷи ба таври параметрӣ додашуда нуқтаҳои худбуриш ва ҳатто қитъаҳои бутуни худтақья дошта метавонад.

---

* Маҷмӯи $\{t\}$ яке аз маҷмӯъҳои номбурдаро ифода мекунад.

Қайди 3. Дар мавриде, ки хати кач бо ёрии муодилахои (11.3) ба таври параметрӣ дода мешавад, мо дар бораи бо ёрии ин муодилаҳо параметризация кардани хати качи номбурда сухан меронем. Як хати качро бо тарзҳои гуногун параметризация кардан мумкин аст. Мо параметризацияҳои гуногуни хати качи L-ро, ки аз параметризацияи додашудаи дилхоҳ, бо роҳи ба намуди функцияҳои бефосилаю қатъӣ афзуншавандаи параметри дигари s овардани параметри t, ҳосил мешаванд, муоина мекунем. Бояд қайд кард, ки фақат дар ингуна табдилоти параметр тартиби пайравии нуқтаҳо дар хати качи L нигоҳ дошта мешавад.

3. Мафҳуми хати качи фазоӣ. Мафҳуми хати качи фазоӣ мисли мафҳуми хати качи ҳамвор чорӣ карда мешавад. Аввал мафҳуми хати качи фазоии содда чун мачмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои фазо, ки координатаҳои x, y ва z-и онҳо бо муодилаҳои

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{11.5}$$

муайян карда мешаванд (дар мавриди бефосила будани функцияҳои $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ ва дар мавриди мувофиқ наомадани нуқтаҳои мачмӯи $\{M\}$, ки ба қиматҳои гуногуни параметри t мувофиқ меоянд), чорӣ карда мешавад.

Мафҳуми хати качи фазоии содда ва мафҳуми таксимоти мачмӯи $\{t\}$-и тағьирьёбии параметр, мисли мавриди хати качи хамвор, ба мафҳуми хати качи фазоие, ки ба таври параметрӣ бо муодилаҳои (11.5) дода мешаванд (дар мавриди дар мачмӯи $\{t\}$ монотонӣ тағьир ёфтани параметри t), оварда мешаванд.

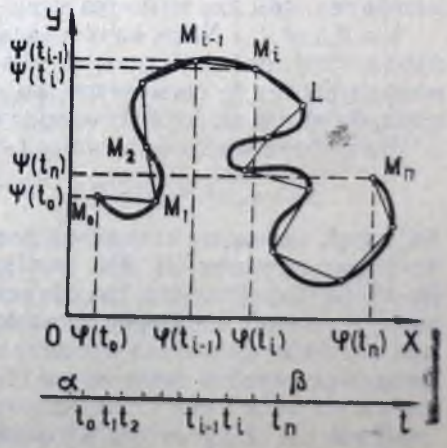
Ҳамаи терминологияе, ки дар пунктҳои гузашта истифода шуданд, ба хатҳои качи фазоӣ низ хос мебошанд.

4. Мафҳуми дарозии камони хати кач. Мо дар ин пункт мафҳуми дарозии камони хати качро, ки ба таври параметрӣ дода мешавад, чорӣ мекунем.

Фарз мекунем, ки хати качи L ба таври параметрӣ бо муодилаҳои (11.3)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

дода шудааст, ки дар ин ҷо параметри t дар сегменти $[\alpha, \beta]$ тағьир меёбад.



Расми 11.3.

Бигзор T таксимоти дилхоҳи сегменти $[\alpha, \beta]$ бо нуқтаҳои $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$ бошад. Нуқтаҳои мувофиқи хати качи L-ро бо M_0, M_1, M_2, ..., M_n ишорат мекунем (расми 11.3).

Хати шикастаи дар ин ҳангом ҳосилшудаи $M_0M_1M_2 \ldots M_n$-ро хати шикастаи* дар даруни хати каҷи L кашидашуда ва ба тақсимоти додашудаи T-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқоянда номида мешавад. Азбаски дарозии l_i-и звеноии $M_{i-1}M_i$-и ин хати шикаста ба

$$\sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}\ **$$

баробар аст, пас дарозии $\bar{l}(t_i)$-и ҳамаи ин хати шикаста ба ифодаи зерин баробар аст:

$$\bar{l}(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{l}_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}. \tag{11.6}$$

Таъриф. Агар маҷмӯи $\{l(t_i)\}$-и дарозиҳои хатҳои шикастаи дар даруни хати каҷи L кашидашуда, ки ба тақсимоти гуногуни T-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқанд, маҳдуд бошад, онгоҳ хати каҷи L-ро хати каҷи ростшаванда меноманд ва ҳудуди болоии саҳеҳи l-и маҷмӯи $\{l(t_i)\}$ дарозии камони хати каҷи L номида мешавад.

Қайди 1. Аз таърифи хати каҷи L, ки ба таври параметрӣ дода шудааст, ва таърифи дарозии камони l-и ҳамингуна хати каҷ натиҷа мебарояд, ки дарозии l мусбат, $l > 0$, мебошад.

Қайди 2. Хатҳои каҷи ростнашаванда вуҷуд доранд. Дар иловаи ин боб мо мисоли хати каҷи ҳамвореро меорем, ки қисми дилхоҳи он хати каҷи ростнашаванда мебошад.

Минбаъд мо леммаи зеринро бисьёртар истифода мекунем.

Лемма. Бигзор $l^*(t_i)$ дарозии хати шикастае, ки дар даруни хати каҷи L кашида шудааст ва ба тақсимоти T^*-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқ меояд, бошад; $\bar{l}(t_i)$ — дарозии хати шикастае, ки дар даруни хати каҷи L кашида шудааст ва ба тақсимоти T, ки аз тақсимоти T^* дар натиҷаи ҳамроҳ кардани якчанд нуқтаҳои нав ҳосил шудааст, мувофиқ аст. Онгоҳ $l^*(t_i) \leqslant \bar{l}(t_i)$ мебошад.

Исбот. Муоина кардани мавриде, ки ба тақсимоти T^* якто нуқтаи γ ҳамроҳ карда мешавад, кифоя аст. Хати шикастае, ки

---

* Хатеро, ки муодилаҳои параметрии $x = at + b$, $y = ct + d$ муайян мекунанд, *хати рост* меномем. Доимиҳои a, b, c ва d-ро чунон интихоб кардан мумкин аст, ки хати рост аз ду нуқтаи додашудаи $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ гузарад. Қитъаи хати рости байни нуқтаҳои M_1 ва M_2-ро *порча* номидан мумкин аст. Ҷамъи порчаҳои шумораашон охирноки ба якдигар пайвастро *хати шикаста* номидан мумкин аст.

** Мо формулаи масофаи байни ду нуқтаи M_{i-1} ва M_i-ро, ки координатаҳояшон мувофиқан ба

$$x_{i-1} = \varphi(t_{i-1}),\ y_{i-1} = \psi(t_{i-1}) \quad \text{ва} \quad x_i = \varphi(t_i),\ y_i = \psi(t_i)$$

баробаранд, истифода кардем.

ба тақсимоти T мувофиқ меояд, аз хати шикастае, ки ба тақсимоти T^* мувофиқ аст, фақат бо он тафовут дорад, ки якто звеноии $M_{i-1}M_i$ бо дуто звеноҳои $M_{i-1}C$ ва CM_i (C — нуқтаи хати каче, ки ба қимати γ-и параметри C мувофиқ аст) иваз карда мешавад. Азбаски дарозии тарафи $M_{i-1}M_i$-и секунҷаи $M_{i-1}CM_i$ аз суммаи дарозиҳои ду тарафи дигари он[1] $M_{i-1}C$ ва CM_i калон нест, пас $\overline{l}^*(t_i) \leqslant \overline{l}(t_i)$ мебошад.

Баъзе хосиятҳои хатҳои каҷи ростшавандаро номбар мекунем:

1°. *Агар хати каҷи L ростшаванда бошад, онгоҳ дарозӣ L-и камони он аз параметризацияи ин хати каҷ вобаста нест.*

2°. *Агар хати каҷи ростшавандаи L бо ёрии нуқтаҳои шумораашон охирноки*[2] $M_0, M_1, \ldots, M_n$ *ба хатҳои каҷи шумораашон охирноки L_i тақсим карда шуда бошад, онгоҳ ҳар яки ин хатҳои каҷи L_i ростшаванда буда, суммаи дарозиҳои l_i-и ҳамаи хатҳои каҷи L_i ба дарозии l-и хати каҷи L баробар аст.*

3°. *Бигзор хати каҷи L ба таври параметрӣ бо муодилаҳои* (11.3) *дода шуда бошад. Дарозии камони қитъаи L_t-и хати каҷи L-ро, ки нуқтаҳояш бо ҳамаи қиматҳои параметри сегменти $[\alpha, t]$ муайян карда мешавад, бо $l(t)$ ишорат мекунем. Функцияи $l(t)$ функцияи афзуншаванда ва бефосилаи параметри t мебошад.* Ин функцияи $l = l(t)$-ро *камони тағьирьёбандаи* хати каҷи L меномем.

4°. *Камони тағьирьёбандаи l-ро ба сифати параметр интихоб кардан мумкин аст.* Ин параметр *параметри натуралӣ* номида мешавад.

Дурустии хосияти 4° бевосита аз хосияти 3° бармеояд. Воқеан, азбаски камони тағьирьёбандаи $l = l(t)$ функцияи афзуншаванда ва бефосилаи параметри t мебошад, пас параметри t-ро ҳам ба намуди функцияи монотонӣ ва бефосилаи $t = f(l)$-и камони тағьирьёбандаи l навиштан мумкин аст ва, бинобар ин, камони тағьирьёбандаи l-ро ба сифати параметр интихоб кардан мумкин аст.

Исботи хосиятҳои 1°—3°.

1°. Бигзор ду параметризацияи хати каҷи L мавҷуд бошад ва t, s параметрҳои ин параметризация бошанд, ки мувофиқан дар сегментҳои $[\alpha, \beta]$ ва $[a, b]$ муайян мебошанд. Азбаски t функцияи қатъӣ монотонӣ ва бефосилаи s ва s функцияи қатъӣ монотонӣ ва бефосилаи t-ро ифода мекунад, пас ба ҳар як тақсимоти T-и сегменти $[\alpha, \beta]$ тақсимоти муайяни P-и сегменти $[a, b]$ мувофиқ меояд ва, баръакс, ба ҳар як тақсимоти P-и сегменти $[a, b]$ тақсимоти муайяни T-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқ меояд. Хатҳои шикастаи дар даруни L кашидашуда, ки ба тақсимоти мувофиқи сегментҳои $[\alpha, \beta]$ ва $[a, b]$ мувофиқ меоянд, айниятианд ва, бинобар ин, дарозиҳояшон $\overline{l}(t_i)$ ва $\overline{l}(s_i)$ баробар мебошанд. Пас, маҷмӯъҳои $\{\overline{l}(t_i)\}$ ва $\{\overline{l}(s_i)\}$ маҷмӯъҳои айниятӣ

---

[1] Ин фактн геометриро бо тарзи соф аналитикӣ исбот кардан осон аст.

[2] Дар айни ҳол нуқтаҳои $M_0, M_1, \ldots, M_n$ ба қиматҳои $t_0, t_1, \ldots, t_n$-и параметри t, ки шарти $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$-ро қаноат менамоянд, мувофиқ меоянд.

мебошанд. Аз ин чо натича мебарояд, ки дарозии камони хати кач аз параметризацияи ин хати кач вобаста нест.

2°. Хосияти 2°-ро барои мавриде, ки хати качи L бо нуктаи C ба ду хати качи L_1 ва L_2 таксим карда шудааст, исбот кардан кифоя мебошад. Кимати параметри t-ро, ки ба он нуктаи C мувофик меояд, бо γ ишорат мекунем. Онгох ба нуктахои хати качи L_1 кимathои параметри t-и сегменти $[\alpha, \gamma]$ ва ба нуктахои хати качи L_2 кимathои параметри t_2-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофик меоянд. Бигзор T_1 ва T_2 таксимотхои дилхохи сегментхои номбурда бошанд ва T таксимоти сегменти $[\alpha, \beta]$ бошад, ки он дар натичаи якчояшавии таксимотхои T_1 ва T_2 хосил шудааст. Агар $\overline{l}_1(t_i)$, $\overline{l}_2(t_i)$ ва $\overline{l}(t_i)$ дарозии хатхои шикастае, ки дар даруни хатхои качи L_1, L_2 ва L кашида шудаанд ва ба таксимотхои T_1, T_2 ва T-и сегментхои номбурда мувофик меоянд, бошанд, онгох

$$\overline{l}_1(t_i) + \overline{l}_2(t_i) = \overline{l}(t_i). \tag{11.7}$$

Азбаски ададхои $\overline{l}_1(t_i)$, $\overline{l}_2(t_i)$ ва $\overline{l}(t_i)$ мусбатанд, пас аз баробарии (11.7) ва ростшавандагии хати качи L натича мебарояд, ки мачмуи $\{\overline{l}_1(t_i)\}$ ва $\{\overline{l}_2(t_i)\}$-и дарозии хатхои шикастаи дар даруни хатхои качи L_1 ва L_2 кашидашуда (ки ба таксимотхои гуногуни сегментхои $[\alpha, \gamma]$ ва $[\gamma, \beta]$ мувофиканд) махдуд мебошанд, яъне хатхои качи L_1 ва L_2 ростшавандаанд. Аз баробарии (11.7) ва аз таърифи дарозии камони хати кач натича мебарояд, ки дарозихои l_1, l_2 ва l-и камони хатхои качи L_1, L_2 ва L нобаробарии*)

$$l_1 + l_2 \leqslant l \tag{11.8}$$

-ро каноат менамоянд. Фарз мекунем, ки $l_1 + l_2 < l$ аст. Онгох адади

$$l - (l_1 + l_2) = \varepsilon \tag{11.9}$$

мусбат мебошад. Аз таърифи дарозии l-и камони хати качи L натича мебарояд, ки барои адади мусбати ε чунин таксимоти T^*-и сегменти $[\alpha, \beta]$-ро нишон додан мумкин аст, ки дарозии $l^*(t_i)$-и хати шикастаи дар даруни хати качи L кашидашуда ва ба ин таксимот мувофикоянда нобаробарии $l - l(t_i) < \varepsilon$-ро каноат менамояд. Ба таксимоти T^* нуктаи γ-ро хамрох мекунем ва таксимоти хосилшударо бо T ишорат менамоем. Онгох, дар асоси леммаи ин параграф, дарозии $l(t_i)$-и хати шикастае, ки ба таксимоти T мувофик меояд, нобаробарии $l - l(t_i) < \varepsilon$-ро каноат менамояд. Азбаски таксимоти T-и сегменти $[\alpha, \beta]$ дар натичаи якчояшавии таксимотхои T_1 ва T_2-и сегментхои $[\alpha, \gamma]$ ва $[\gamma, \beta]$ хосил шудааст, пас дарозихои $l_1(t_i)$ ва $l_2(t_i)$-и хатхои шикастае, ки ба ин таксимотхо мувофиканд, муносибати (11.7)-ро каноат менамоянд. Бинобар ин нобаробарии $l - [l_1(t_i) + l_2(t_i)] < \varepsilon$ дуруст аст. Азбаски $l_1(t_i) + l_2(t_i) \leqslant l_1 + l_2$ аст, пас нобаробарии $l - (l_1 + l_2) < \varepsilon$ дуруст мебошад. Лекин ин нобаробарй ба баробарии (11.9) мухолиф аст. Бинобар ин фарзияти $l_1 + l_2 < l$ нодуруст мебошад, пас, дар асоси (11.8), $l_1 + l_2 = l$. Дурустии хосияти 2° муқаррар карда шуд.

3°. Аз хосияти 2° ва қайди 1-уми хамин пункт натича мебарояд, ки *камони тағьирьёбандаи $l = l(t)$ функцияи мусбати қатъй афзуншавандаи параметри t мебошад*. Барои исботи бефосилагии функцияи $l(t)$ тасдикотхои зеринро истифода мекунем:

---

*) Аз баробарии (11.7) натича мебарояд, ки барои таксимотхои дилхохи T_1 ва T_2-и сегментхои $[\alpha, \gamma]$ ва $[\gamma, \beta]$ нобаробарии $\overline{l}_1(t_i) + \overline{l}_2(t_i) \leqslant l$ дуруст аст. Аз ин чо ва аз таърифи худуди болоии саҳеҳ нобаробарии (11.8)-ро хосил мекунем.

1) *Бигзор* ε *адади мусбати қайдшудаи дилхоҳ,* t *нуқтаи дилхоҳи сегменти* $[\alpha, \beta]$ *ва* M *нуқтаи мувофиқи хати каҷи* L *бошад. Чунин хати шикастаи дарун кашидашудаи хати каҷи* L*, ки дар қуллааш нуқтаи* M *дорад, вуҷуд дорад ва дарозиаш аз дарозии хати каҷи* L *назар ба* $\varepsilon/2$ *камтар тафовут дорад.*

2) *Хати шикастаи номбурдаро чунон интихоб кардан мумкин аст, ки дарозии ҳар як звенои он аз* $\varepsilon/2$ *хурд бошад.*

3) *Бигзор хати шиқаста мисли нишондоди тасдиқотҳои* 1) *ва* 2) *интихоб шуда бошад. Онгоҳ як қисми хати каҷи* L*, ки звенои дилхоҳи хати шикастаи муоинашаванда дарбар дорад, соҳиби дарозии аз* ε *хурд мебошад.*

Аз тасдиқотҳои баёншуда ва монотонии функцияи $l(t)$ дар нуқтаи қайдшудаи дилхоҳи t-и ин сегмент бефосила будани он бармеояд (функцияи $l(t)$ дар нуқтаҳои α ва β мувофиқан аз рост ва аз чап бефосила мебошад).

Исбот кардан лозим аст, ки: барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин $\delta > 0$-ро нишон додан мумкин, ки ҳангоми $|\Delta t| < \delta$ будан нобаробарии $|l(t + \Delta t) - l(t)| < \varepsilon$ иҷро мешавад.

Ҳамон тақсимоти T-и сегменти $[\alpha, \beta]$-ро муоина мекунем, ки ба он хати шикастаи соҳиби хосиятҳои дар тасдиқотҳои 1) ва 2) баёншуда мувофиқ меояд. Дарозии хурдтарини ду сегментҳои қисмии $[t_{k-1}, t_k]$, $[t_k, t_{k+1}]$-и тақсимоти T-ро, ки дар нуқтаи $t = t_k$ ба сегменти $[\alpha, \beta]$ ҳамшафат мебошанд, бо δ ишорат менамоем. Бигзор афзоиши Δt-и аргумент шарти $|\Delta t| < \delta$-ро қаноат намояд. Барои муайянӣ чунин мепиндорем, ки $\Delta t > 0$ аст. Азбаски $t < t + \Delta t < t + \delta \leqslant t_{k+1}$ аст, пас дар асоси афзуншавии қатъии функцияи $l(t)$ нобаробариҳои зерин дурустанд:

$$l(t) < l(t + \Delta t) < l(t + \delta) \leqslant l(t_{k+1}).$$

Дар асоси тасдиқоти 3 нобаробарии

$$l(t_{k+1}) - l(t) < \varepsilon$$

дуруст аст. Аз ин ҷо ва аз нобаробариҳои гузашта натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $0 < \Delta t < \delta$ будан нобаробарии

$$l(t + \Delta t) - l(t) < \varepsilon$$

дуруст аст. Мавриди $\Delta t < 0$ айнан ҳамин тавр муоина карда мешавад.

Акнун ба исботи тасдиқотҳои 1), 2) ва 3) шурӯъ мекунем.

Исботи тасдиқоти 1). Бигзор ε адади мусбати қайдшудаи дилхоҳ бошад. Азбаски дарозии $l(\beta)$-и ҳамаи хати каҷи L, ки ба таври параметрӣ бо муодилаҳои (11.3) муайян мешавад, ҳудуди болоии саҳеҳи дарозиҳои хатҳои шикастаи дарун кашидашудаи ин хати каҷ (ки ба тақсимотҳои гуногуни сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқ аст) мебошад, пас барои $\varepsilon > 0$-и додашуда чунин тақсимоти T^{**}-и сегменти $[\alpha, \beta]$-ро нишон додан мумкин аст, ки барояш дарозии хати шикастаи мувофиқи дарун кашидашудаи хати каҷи L аз $l(\beta)$ назар ба $\varepsilon/2$ камтар тафовут дорад. Ба тақсимоти T^{**} нуқтаи t-ро ҳамроҳ мекунем. Дар асоси леммаи ҳамин параграф ва таърифи дарозии камон дарозии хати шикастае, ки ба тақсимоти ҳосилшудаи T^*-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқ аст, аз $l(\beta)$ назар ба $\varepsilon/2$ камтар тафовут дорад ва ин хати шиқаста соҳиби қуллаест, ки он дар нуқтаи M-и хати каҷ воқеъ аст ва ба нуқтаи t-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқ мебошад.

Исботи тасдиқоти 2). Азбаски функцияҳои дар сегменти $[\alpha, \beta]$ бефосилаи $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ дар ҳамин сегмент мунтазам бефосила мебошанд, пас аз рӯи $\varepsilon > 0$-и додашуда чунин $\delta > 0$-ро нишон додан мумкин аст, ки барои тақсимоти дилхоҳи T-и сегменти $[\alpha, \beta]$-и дарозии сегментҳои қисмиаш $[t_{i-1}, t_i]$ аз δ хурд нобаробариҳои $|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$, $|\psi(t_i) -$

$-\psi(t_{i-1})| < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$ ичро мешаванд. Азбаски дарозии l_i-и звенои хати шикастае, ки ба тақсимоти додашуда мувофиқ аст, ба

$$\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}$$

баробар аст, пас $\bar{l}_i < \varepsilon/2$ мебошад. Акнун тақсимоти қайдшудаи дилхоҳи T'-и сегменти $[\alpha, \beta]$-и дарозии сегментҳои қисмиаш аз δ хурдро муоина мекунем ва ба он нуқтаҳои тақсимоти T^*-ро ҳамроҳ менамоем (ба исботи тасдиқоти 1 нигаред). Мо дар натиҷа тақсимоти T-ро, ки ба он хати шикастаи дарун кашидашудаи хати каҷи L ва қаноаткунандаи ҳама шартҳои тасдиқоти 2 мувофиқ меояд, ҳосил мекунем.

Исботи тасдиқоти 3). Бигзор хати шикастаи $M_0M_1 \ldots M_{k-1}M_kM_{k+1} \ldots M_n$ шарти тасдиқотҳои 1) ва 2)-ро қаноат намояд. Дарозии ҳар як қисми хати каҷи L, ки звенои дилхоҳи хати шикастаи муоинашавандаро дарбар дорад, аз ε хурд мебошад. Вокеан, бигзор $\bar{l}_k$ дарозии қисми $M_{k-1}M_k$-и хати каҷи L ва $\bar{l}_k$ дарозии звенои $M_{k-1}M_k$-и хати шикаста бошад.

Онгоҳ, дар асоси шарти тасдиқоти 1), нобаробарии $\sum_{k=1}^{n}(l-\bar{l}_k) < \varepsilon/2$ ичро мешавад. Азбаски ҳар як ҷамъшавандаи $l-\bar{l}_k$-и суммаи охирин ғайриманфӣ мебошад, пас $(l_k-\bar{l}_k) < \varepsilon/2$ аст. Аз ин ҷо ва аз нобаробарии $\bar{l}_k < \varepsilon/2$ нобаробарии матлуби $l_k < \varepsilon$ бармеояд.

Мафҳуми дарозии камони хати каҷи фазоӣ, ки ба таври параметрӣ бо муодилаҳои (11.5) дода шудааст, мисли мафҳуми дарозии камони хати каҷи ҳамвор ҷорӣ карда мешавад. Дарозии $l(t_i)$-и хати шикастаи дарун кашидашудаи хати каҷи L ба ифодаи зерин баробар аст:

$$l(t_i)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2+[\chi(t_i)-\chi(t_{i-1})]^2}.$$

Хати каҷи фазоии L, ки бо муодилаҳои (11.5) муайян мешавад, *хати каҷи ростшаванда* номида мешавад, агар маҷмӯи $\{l(t_i)\}$-и дарозии хатҳои шикастаи дарун кашидашудаи ин хати каҷ маҳдуд бошанд. Ҳудуди болоии саҳеҳи l-и ин маҷмӯъ дарозии камони хати каҷи L номида мешавад.

Хатҳои каҷи ростшавандаи фазоӣ ба хосиятҳои дар ин пункт номбаршудаи 1°, 2°, 3° ва 4° соҳиб мебошанд. Ин хосиятҳо мисли исботи мавридҳои хатҳои каҷи ҳамвор исбот карда мешаванд.

5. Шарти кифоягии ростшавандагии хати каҷ. Формулаҳои ҳисоб кардани дарозии камони хати каҷ.

Теореми 11.1. *Агар функцияҳои* $x = \varphi(t)$ ва $\psi(t)$ *дар сегменти* $[\alpha, \beta]$ *ҳосилаҳои бефосила дошта бошанд, онгоҳ хати каҷи* L, *ки ба таври параметрӣ бо муодилаҳои* (11.3) *муайян мешаванд, ростшаванда буда, дарозии камони он* l*-ро бо формулаи*

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt \qquad (11.10)$$

ҳисоб кардан мумкин аст.

И с б о т. Аввал исбот мекунем, ки хати качи L ростшаванда мебошад. Барои ин ифодаи (11.6) — дарозии $\bar{l}(t_i)$-и хати шикастаеро, ки дар дарунӣ хати качи L кашида шудааст ва ба таксимоти дилхоҳи T-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқ аст, табдил медиҳем. Азбаски функцияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ соҳиби ҳосила мебошанд, пас, мувофиқи формулаи Лагранж, $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(t_i)\,\Delta t_i$, дар ин ҷо $t_i < \tau_i < t_i$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ва $\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\tau_i^*)\Delta t_i$, дар ин ҷо $t_{i-1} < \tau_i^* < t_i$. Ифодаҳои барои $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$ ва $\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})$ ёфташударо ба қисми рости ифодаи (11.6) гузошта, формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i^*)}\, \Delta t_i. \qquad (11.11)$$

Мувофиқи шарт функцияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ ҳосилаҳои бефосила доранд. Пас, ин ҳосилаҳо маҳдуд мебошанд, ва, бинобар ин, чунин M вуҷуд дорад, ки барои ҳама t-ҳои сегменти $[\alpha, \beta]$ нобаробариҳои $|\varphi'(t)| \leqslant M$ ва $|\psi'(t)| \leqslant M$ дуруст анд. Лекин онгоҳ аз формулаи (11.11) натиҷа мебарояд, ки

$$0 < l(t_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{M^2 + M^2}\,\Delta t_i = M\sqrt{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = M\sqrt{2}\,(\beta - \alpha).$$

Ҳамин тариқ, маҷмӯи $\{l(t_i)\}$-и дарозии хатҳои шикастаи дарун кашидашудаи хати качи L, ки ба таксимотҳои гуногуни T-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқанд, маҳдуд мебошанд, яъне *хати качи L ростшаванда аст.* Дарозии ин хати качро бо l ишорат мекунем. Исбот мекунем, ки дарозии l-и хати качи L-ро бо формулаи (11.10) ҳисоб кардан мумкин аст. Бояд қайд кард, ки қисми рости формулаи (11.11) ба суммаи интегралӣ

$$I\{t_i, \tau_i\} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)}\, \Delta t_i \qquad (11.12)$$

-и функцияи интегронидашавандаи $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ монанд аст; бар замми ин суммаи $I\{t_i, \tau_i\}$ ба таксимоти T-и сегменти $[\alpha, \beta]$ ва ба ҳамин интихоби нуқтаҳои τ_i-и сегментҳои қисмии $[t_{i-1}, t_i]$-и ин таксимот мувофиқ аст. Исбот мекунем, ки барои $\varepsilon > 0$-и мусбати дилхоҳ чунин $\delta > 0$-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $\Delta < \delta$ ($\Delta = \max \Delta t_i$) будан нобаробарии

$$|\bar{l}(t_i) - I| < \varepsilon/2 \qquad (11.13)$$

ичро мешавад, дар ин ҷо $I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$ лимити интегралии (11.12) ҳангоми $\Delta \to 0$ мебошад. Ба ибораи дигар: *исбот мекунем, ки дар тақсимотҳои кифоя «хурди» T-и сегменти* $[\alpha, \beta]$ *дарозиҳои* $l(t_i)$*-и хатҳои шикастае, ки дар даруни хати каҷи L кашида шудаанд ва ба ин тақсимотҳо мувофиқанд, аз интеграли I,* ки дар қисми рости формулаи (11.10) вокеъ аст, *ҳар қадар кам тафовут дорад.*

Қайд мекунем, ки

$$|\sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i^*)} - \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)}| \leqslant$$
$$\leqslant |\psi'^2(\tau_i^*) - \psi'(\tau_i)| \leqslant M_i - m_i^*, \qquad (11.14)$$

дар ин ҷо M_i ва m_i — ҳудудҳои саҳеҳи функцияи $\psi'(t)$ дар сегменти қисмии $[t_{i-1}, t_i]$. Дар асоси (11.11), (11.12) ва (11.14) нобаробариҳои зерин дуруст‌анд:

$$|l(t_i) - I\{t_i, \tau_i\}| = |\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\psi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i^*)} -$$
$$- \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)})\, \Delta t_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} -$$
$$- \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)}|\, \Delta t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta t_i = S - s, \qquad (11.15)$$

дар ин ҷо S ва s суммаҳои болой ва поёнии функцияи $\psi'(t)$ барои тақсимоти сегменти $[\alpha, \beta]$. Азбаски функцияҳои $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ ва $\psi'(t)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ интегронидашаванда мебошанд (ин аз бефосилагии ҳосилаҳои $\varphi'(t)$ ва $\psi'(t)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ бармеояд), пас, аз таърифи интегронидашавандагӣ ва аз теореми 10.1 (ба § 1 ва § 3 боби 10 нигар.) натиҷа мебарояд, ки барои

---

* Мо барои ҳосил кардани нобаробариҳои (11.14) нобаробарии $|\sqrt{a^2 + b^{*2}} - \sqrt{a^2 + b^2}| \leqslant |b^* - b|$, ки дар ин ҷо $a^2 = \varphi'^2(\tau_i)$, $b^{*2} = \psi'^2(\tau_i^*)$ ва $b^2 = \psi'^2(\tau_i)$ мебошад ва нобаробарии $|\psi'(\tau_i^*) - \psi'(\tau_i)| \leqslant M_i - m_i$-ро истифода кардем.

Нобаробарии дуюм маълум аст, чунки фарқи қиматҳои дилхоҳи функция аз фарқи ҳудудҳои саҳеҳи он калон нест. Нобаробарии навишташудаи якумро исбот мекунем:

$$|\sqrt{a^2 + b^{*2}} - \sqrt{a^2 + b^2}| = \frac{|b^{*2} - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^{*2}} + \sqrt{a^2 + b^2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|b^* - b|\, |b^* + b|}{\sqrt{b^{*2}} + \sqrt{b^2}} \leqslant \frac{|b^* - b|\, (|b^*| + |b|)}{|b^*| + |b|} = |b^* - b|.$$

$\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин $\delta > 0$-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $\Delta < \delta$ ($\Delta = \max \Delta t_i$) будан нобаробариҳои

$$|I\{t_i, \tau_i\} - I| < \varepsilon/4 \text{ ва } S - s < \varepsilon/4 \tag{11.16}$$

иҷро мешаванд. Бинобар ин ҳангоми $\Delta < \delta$ будан, дар асоси (11.15) ва (11.16), нобаробариҳои зерин дуруст мебошанд:

$$|I(t_i) - I| = |I(t_i) - I\{t_i, \tau_i\} + I\{t_i, \tau_i\} - I| \leqslant$$
$$\leqslant |I(t_i) - I\{t_i, \tau_i\}| + |I\{t_i, \tau_i\} - I| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2.$$

Ҳамин тариқ, дурустии нобаробарии (11.13) исбот шуд.

Акнун исбот мекунем, ки *дар байни хатҳои шикастае, ки дарозиашон $\bar{I}(t_i)$ нобаробарии* (11.13)*-ро қаноат менамоянд, хатҳои шикастае ҳастанд, ки дарозиашон аз дарозӣ (l)-и камони хати қачи L назар ба $\varepsilon/2$ камтар тафовут доранд.*

Азбаски l ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи $\{\bar{I}(t_i)\}$-и дарозии хатҳои шикастае, ки дар даруни хати қачи L кашида шудаанд ва ба тақсимотҳои гуногуни сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқанд, мебошад, пас чунин тақсимоти T^*-и ин сегмент ёфт мешавад, ки дарозӣ $l^*(t_i)$-и хати шикастаи мувофиқ нобаробариҳои

$$0 \leqslant l - l^*(t_i) < \varepsilon/2 \tag{11.17}$$

қаноат менамояд. Акнун ҳар яки сегментҳои қисмии $[t_{i-1}, t_i]$-и тақсимоти T^*-ро ба қисмҳои ҳар қадар хурд чунон тақсим мекунем, ки дарозии максималӣ (Δ)-и тақсимоти T-и сегменти $[\alpha, \beta]$, ки дар натиҷаи якҷояшавии тақсимотҳои номбурда ҳосил шудааст, аз δ хурд, $\Delta < \delta$, шавад. Дарозии $\bar{I}(t_i)$-и хати шикастае, ки ба тақсимоти T мувофиқ аст, нобаробарии (11.13)-ро қаноат менамояд. Азбаски қуллаи хати шикастае, ки ба тақсимоти T^* мувофиқ аст, низ қуллаи хати шикастаи ба тақсимоти T мувофиқоянда мебошад, пас дар асоси леммаи ин параграф дарозии $l(t_i)$ нобаробариҳои $0 < l^*(t_i) \leqslant l(t_i) \leqslant l$-ро қаноат менамояд ва, бинобар ин, дар асоси нобаробариҳои (11.17) нобаробариҳои

$$0 \leqslant l - l(t_i) < \varepsilon/2 \tag{11.18}$$

иҷро мешаванд. Инак, мо исбот кардем, ки дар байни хатҳои шикастае, ки дарозиашон $l(t_i)$ нобаробарии (11.13)-ро қаноат менамоянд, хатҳои шикастае ҳастанд, ки дарозиашон $l(t_i)$ нобаробариҳои (11.18)-ро қаноат мекунанд. Нобаробариҳои (11.13) ва (11.18)-ро муқоиса карда, нобаробарии

$$|l - I| < \varepsilon$$

-ро ҳосил менамоем. Дар асоси дилхоҳ будани ε аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки $l = I$ аст. Теорема исбот шуд.

Кайди 1. *Агар функцияҳои* $\varphi(t)$ *ва* $\psi(t)$ *дар сегменти* $[\alpha, \beta]$ *соҳиби ҳосилаҳои маҳдуд бошанд, онгоҳ хати качи* L, *ки муодилаҳои* (11.1) *муайян мекунанд, ростшаванда мебошад.* Воқеан, дар процесси исботи теоремаи (11.1) мо муқаррар кардем, ки ҳангоми маҳдуд будани ҳосилаи функцияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ дарозӣ $l(t_1)$-и хатҳои шикастае, ки дар даруни хати качи L кашида шудаанд ва ба тақсимотҳои гуногуни T-и сегменти $[\alpha, \beta]$ мувофиқанд, маҳдуд мебошанд.

Кайди 2. *Формулаи ҳисоб кардани дарозии камон* (11.10) *дуруст мебошад, агар ҳосилаҳои* $\varphi'(t)$ *ва* $\psi'(t)$ *муайян ва дар сегменти* $[\alpha, \beta]$ *интегронидашаванда бошанд.* Воқеан, аз интегронидашавандагии ин ҳосилаҳо маҳдудиятии онҳо бармеоянд ва, бинобар ин, дар асоси кайди 1, хати качи L ростшаванда аст. Кайд мекунем, ки барои ҳосил кардани нобаробариҳои (11.14), (11.15) ва (11.16) ва, бинобар ин, нобаробарии (11.13) фақат мавҷуд ва интегронидашаванда будани ҳосилаҳои $\varphi'(t)$ ва $\psi'(t)$ кифоя мебошанд, чунки аз ин ҷо, мувофиқи иловаи 1-уми боби 10, интегронидашавандагии функцияи $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ бармеояд. Муҳокимаронихои боқимонда мисли мухокимаронихои исботи теоремаи 11.1 мебошанд.

Кайди 3. *Агар хати качи* L *графики функцияи* $y = f(x)$, *ки дар сегменти* $[a, b]$ *соҳиби ҳосилаи бефосилаи* $y'(x)$ *мебошад, бошад, онгоҳ хати качи* L *ростшаванда аст ва дарозӣ* (l)-*и камони* L-*ро аз формулаи*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \tag{11.19}$$

ёфтан мумкин аст.

Барои исбот кайд мекунем, ки графики функцияи муоинашаванда хати качеро тасвир мекунад, ки он ба таври параметрӣ бо муодилаҳои $x = t$, $y = f(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, муайян мешавад ва, дар айни ҳол, ҳама шартҳои теоремаи 11.1 иҷро хоҳад шуд. Бинобар ин, дар формулаи (11.10) $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$ фарз карда ва тағьирёбандаи интегронӣ t-ро ба x иваз намуда, формулаи (11.19)-ро ҳосил менамоем. Инчунин кайд менамоем, ки агар хати качи L бо муодилаи қутбии $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, муайян шавад ва функцияи $r(\theta)$ дар сегменти $[\theta_1, \theta_2]$ ҳосилаи бефосила дошта бошад, онгоҳ хати качи L ростшаванда аст ва дарозӣ (l)-и камони L-ро аз формулаи

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta \tag{11.20}$$

муайян кардан мумкин аст. Барои исбот формулаҳои аз координатаҳои қутбӣ ба координатаҳои декартӣ гузаштан:

$$x = r(\theta)\cos\theta, \quad y = r(\theta)\sin\theta$$

-ро истифода мекунем. Ҳамин тариқ, мо мебинем, ки хати качи L ба таври параметрӣ бо муодилаҳо муайян карда мешавад ва, илова бар ин, функцияҳои $\varphi = r(\theta)\cos\theta$ ва $\psi = r(\theta)\sin\theta$ шартҳои теоремаи 11.1-ро қаноат менамоянд. Қиматҳои номбурдаи φ ва ψ-ро ба формулаи (11.10) гузошта, мо формулаи (11.20)-ро ҳосил мекунем.

Шарти кифоягии ростшавандагии хати качи фазоиро баён мекунем.

Агар функцияхои $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ва $\chi(t)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ хосилахои бефосила дошта бошанд, онгох хати качи L, ки муодилахои (11.5) муайян мекунанд, ростшаванда аст ва дарозии камони он l-ро аз формулаи

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt \qquad (11.21)$$

ёфтан мумкин аст. Исботи ин ба исботи теоремаи 11.1 монанд аст.

Кайди 4. Агар функцияхои $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ва $\chi(t)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ хосилахои махдуд дошта бошанд, онгох хати качи L, ки муодилахои (11.5) муайян мекунанд, ростшаванда мебошад. Агар дар айни хол хосилахои функцияхои номбурда дар сегменти $[\alpha, \beta]$ интегронидашаванда бошанд, онгох дарозй (l)-и камони хати качи L-ро аз формулаи (11.21) хисоб кардан мумкин аст (ба кайдхои 1 ва 2 нигаред).

6. Дифференциали камон. Фарз мекунем, ки функцияхои $x = \varphi(t)$ ва $y = \psi(t)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ хосилахои бефосила доранд. Дар ин маврид, дар асоси теоремаи 11.1, камони тағьирьёбандаи $l(t)$ бо формулаи зерин ифода карда мешавад:

$$l(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)}\, d\tau. \qquad (11.22)$$

Азбаски функцияи тахтиинтегралии кисми рости формулаи (11.22) бефосила мебошад, пас функцияи $l(t)$ интегронидашаванда аст, дар айни хол

$$l'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

(ба п. 1 § 7 боби 10 нигаред). Харду кисми баробарии охиринро ба квадрат бардошта ва баъд онро ба dt^2 зарб карда, формулаи

$$[l'(t)\, dt]^2 = [\varphi'(t)\, dt]^2 + [\psi'(t)\, dt]^2 \qquad (11.23)$$

-ро хосил мекунем. Азбаски $l'(t)\, dt = dl$, $\varphi'(t)\, dt = dx$, $\psi'(t) dt = dy$ мебошад, пас аз (11.23) меёбем, ки

$$dl^2 = dx^2 + dy^2. \qquad (11.24)$$

Аз формулаи (11.24), аз чумла, натича мебарояд, ки агар камони тағьирьёбандаи l ба сифати параметр интихоб карда шавад, яъне $x = g(l)$ ва $y = h(l)$ онгох

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 = 1. \qquad (11.25)$$

Қайд мекунем, ки дар мавриди бефосила будани ҳосилаи функцияҳои $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ва $z = \chi(t)$ барои дифференциал (dl)-и камони хати качи фазой, ки ба таври параметрӣ бо муодилаҳои (11.5) муайян мешаванд, формулаи

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{11.26}$$

дуруст аст. Аз формулаи (11.26) натича мебарояд, ки агар ба сифати параметр камони тағьирьёбандаи l интихоб карда шавад, онгоҳ

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dl}\right)^2 = 1 \tag{11.27}$$

мешавад.

7. Мисолҳои ҳисоб кардани дарозии камон. 1°. Дарозии камони циклоида* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Дар мавриди муоинашаванда $\varphi' = a(1 - \cos t)$, $\psi' = a \sin t$. Бинобар ин мувофики формулаи (11.10)

$$l = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -4a \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

2°. Графики функцияи $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$** *хати занҷирӣ* номида мешавад. Дарозии қитъаи хати занҷириро, ки ба сегменти $[0, x]$ мувофиқ аст, меёбем. Мувофиқи формулаи (11.19)

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)}\, d\xi = \int_0^x \sqrt{1 + sh^2 \frac{\xi}{a}}\, d\xi = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{\xi}{a}\, d\xi = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

3°. Камони тағьирьёбандаи эллипси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$-ро, ки сарҳисобаш нуқтаи $M_0(0, b)$ мебошад, меёбем. Муодилаи параметрии эллипс $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$-ро муоина мекунем. Мувофиқи формулаи (11.22)

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)}\, d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2 \cos^2 \tau + b^2 \sin^2 \tau}\, d\tau =$$

$$= a \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tau}\, d\tau = aE(a, t).$$

---

* *Циклоида* хати качи ҳамворест, ки нуқтаи давраи радиусаш a, ки аз рӯи хати рост белағчидан мегелад, мекашад.

** Номи хати занҷирӣ бо он алоқаманд аст, ки хати муоинашаванда шакли занҷири вазнинеро дорад, ки аз нӯгҳояш овезон карда шудааст.

Адади $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ эксцентриситети эллипс номида мешавад.

Интеграли номуайяни $\int \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}\, dt$, ки ҳангоми $t = 0$ будан ба нуль табдил мешавад, интеграли эллипсии чинси 2-юм номида шуда, бо $E(e, t)$ ишорат карда мешавад (ба § 11 боби 7 нигар.).

§ 2. Масоҳати фигураи ҳамвор

1. Мафҳуми фигураҳои ҳамвори квадратонидашаванда. Масоҳати фигураи ҳамвори квадратонидашаванда. Мафҳуми масоҳати фигураи ҳамвор, ки бисёркунча* мебошад, аз курси математикаи элементарӣ маълум аст. Мо дар ин пункт мафҳуми масоҳати *фигураи ҳамвори* Q — қисми ҳамвориеро, ки бо хати качи сарбастаи соддаи L маҳдуд аст**, чорӣ мекунем. Дар айни ҳол хати качи L-ро ҳудуди фигураи Q меномем.

Мо бисёркунҷаро бисёркунҷаи *дар даруни* фигураи Q *кашидашуда* мегӯем, агар ҳар як нуқтаи ин бисёркунҷа ба фигураи Q ё ба ҳудуди он мутааллиқ бошад. Агар ҳама нуқтаҳои фигураи ҳамвор ва ҳудуди он ба ягон бисёркунҷа мутааллиқ бошад, онгоҳ бисёркунҷаро бисёркунҷаи *дар беруни* фигураи Q *кашидашуда* мегӯем.

Масоҳати бисёркунҷаи дилхоҳи дарун кашидашудаи фигураи Q аз масоҳати бисёркунҷаи дилхоҳи берун кашидашудаи фигураи Q калон нест.

Бигзор $\{S_i\}$ маҷмӯи ададии масоҳатҳои бисёркунҷаҳои дар даруни фигураи ҳамвори Q кашидашудаи ва $\{S_d\}$ маҷмӯи ададии масоҳатҳои бисёркунҷаҳои дар беруни фигураи Q кашидашуда бошад. Маҷмӯи $\{S_i\}$ аз боло (бо масоҳати бисёркунҷаи дар беруни фигураи Q кашидашудаи дилхоҳ) маҳдуд аст ва маҷмӯи $\{S_d\}$ аз поён (масалан, бо адади нуль) маҳдуд мебошад. Ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи $\{S_d\}$-ро бо $\underline{P}$ ва ҳудуди поёнии саҳеҳи маҷмӯи $\{S_d\}$-ро бо $\overline{P}$ ишорат менамоем. *Ададҳои* $\underline{P}$ *ва* $\overline{P}$ *мувофиқан масоҳати поёнӣ ва масоҳати болоии фигураи* Q *номида мешавад.* Қайд мекунем, ки масоҳати поёнӣ $\underline{P}$-и фигураи Q аз масоҳати болоӣ $\overline{P}$-и ин фигура калон нест, яъне $\underline{P} \leqslant \overline{P}$. Вокеан, фарз мекунем, ки нобаробарии баръакс $\underline{P} > \overline{P}$ дуруст аст. Он-

---

* Мо қисми ҳамвориеро, ки бо хатҳои шикастаи сарбастаи содда маҳдуд аст, *бисёркунча* меномем.

** Қайд мекунем, ки хати качи ҳамвори сарбастаи соддаи L хамвориро ба ду қисм — қисмҳои дарунӣ ва берунӣ тақсим мекунад. Ин тасдиқотро математики франсавӣ Жордан (1838—1922) исбот карда буд.

гох, $\frac{\underline{P}-\bar{P}}{2}=\varepsilon>0$ фарз карда ва таърифи ҳудудҳои саҳеҳро ба эътибор гирифта, мо чунин бисьёркунчаи дар даруни фигураи Q кашидашударо меёбем, ки масоҳати (S_i)-и он аз адади $P-\varepsilon=\frac{\underline{P}+\bar{P}}{2}$ калон мешавад, яъне $\frac{\underline{P}+\bar{P}}{2}<S_i$ ва чунин бисьёркунчаи дар беруни фигураи Q кашидашударо меёбем, ки масоҳат (S_d)-и он аз адади $\bar{P}+\varepsilon=\frac{\underline{P}+\bar{P}}{2}$ хурд аст, яъне $S_d<\frac{\underline{P}+\bar{P}}{2}$. Ин ду нобаробарихои ҳосилшударо муқоиса карда, меёбем, ки $S_d<S_i$, ки ин имконнопазир аст, чунки масоҳат (S_d)-и берун кашидашудаи дилхоҳ аз масоҳат (S_i)-и дарун кашидашудаи дилхоҳ *хурд нест.*

Мафҳуми квадратонидашавандагии фигураҳои ҳамворро чорӣ мекунем.

Таъриф. Фигураи ҳамвори Q фигураи квадратонидашаванда номида мешавад, агар масоҳати болой $(\bar{P})$-и ин фигура бо масоҳати поёниаш $\underline{P}$ мувофиқ ояд. Дар ин ҳолат $P=\underline{P}=\bar{P}$ масоҳати фигураи Q номида мешавад.

Қайд. Мисоли фигураҳои квадратонидашаванда дар иловаи ҳамин боб дода шудааст.

Теоремаи зерин дуруст аст.

Теорема 11.2. *Барои он ки фигураи ҳамвори Q фигураи квадратонидашаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин бисьёркунчаи дар беруни фигураи Q кашидашуда ва чунин бисьёркунчаи дар даруни фигураи Q кашидашударо нишон додан мумкин бошад, ки фарқи масоҳатҳои онҳо S_d-S_i аз ε хурд, $S_d-S_i<\varepsilon$, шавад.*

Исбот. 1) Шарти зарурӣ. Фарз мекунем, ки фигураи Q фигураи квадратонидашаванда мебошад, яъне $\underline{P}=\bar{P}=P$. Азбаски $\underline{P}$ ва $\bar{P}$ мувофиқан ҳудудҳои болой ва поёнии саҳеҳи маҷмӯаҳои $\{S_i\}$ ва $\{S_d\}$ мебошанд, пас барои адади дилхоҳи $\varepsilon>0$ чунин бисьёркунчаи дар даруни фигураи Q кашидашударо нишон додан мумкин аст, ки масоҳати он S_i аз $\underline{P}=P$ назар ба $\varepsilon/2$ камтар тафовут дорад, яъне $P-S_i<\varepsilon/2$. Барои ҳамин $\varepsilon>0$ чунин бисьёркунчаи берун кашидашударо нишон додан мумкин аст, ки масоҳати он S_d аз $\bar{P}=P$ назар ба $\varepsilon/2$ камтар тафовут дорад, яъне $S_d-P<\varepsilon/2$. Нобаробариҳои ҳосилшударо ҷамъ карда, меёбем, ки $S_d-S_i<\varepsilon$ аст.

2) Шарти кифоягӣ. Фарз мекунем, ки S_d ва S_i масоҳати бисьёркунҷаҳое мебошанд, ки барояшон $S_d - S_i < \varepsilon$ аст. Азбаски $S_i \leqslant \overline{P} \leqslant \overline{\overline{P}} \leqslant S_d$ мебошад, пас $\overline{\overline{P}} - P < \varepsilon$. Дар асоси дилхоҳ будани ε аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки $\overline{P} = \overline{\overline{P}}$ аст. Ҳамин тариқ, фигура квадратонидашаванда мебошад. Теорема исбот шуд.

Мо мегӯем, ки *сарҳади фигураи ҳамвори Q масоҳати ба нуль баробар дорад*, агар барои адади мусбати дилхоҳи $\varepsilon > 0$ чунин бисьёркунҷаи дар берунӣ фигураи Q кашидашуда ва чунин бисьёркунҷаи дар даруни фигураи Q кашидашударо нишон додан мумкин бошад, ки фарқи масоҳатҳояшон $S_d - S_i$ аз ε хурд мебошад. Теоремаи 11.2-ро ин тавр ҳам баён кардан мумкин аст.

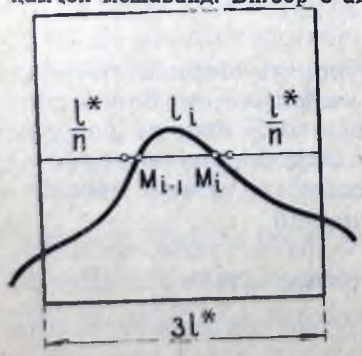
Барои он ки фигураи ҳамвори Q фигураи квадратонидашаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки сарҳади он соҳиби масоҳати ба нуль баробар бошад.

Қайд. Дар муҳокимаронихое, ки баён шуданд, ба ҷои фигураи ҳамвор маҷмӯи дилхоҳи нуқтаҳои ҳамвориро муоина кардан мумкин аст.

Аломати кифоягии квадратонидашавандагии фигураи ҳамворро муқаррар мекунем.

Теоремаи 11.3. Агар сарҳад (L)-и фигураи ҳамвори Q хати каҷи ростшаванда бошад, онгоҳ фигураи Q фигураи квадратонидашаванда мебошад.

Исбот. Фарз мекунем, ки l^* дарозии хати каҷи L мебошад. Чунин мепиндорем, ки хати каҷи L бо ёрии параметри натуралии l, $0 \leqslant l \leqslant l^*$, параметронида шудааст, илова бар ин, азбаски хати каҷи L сарбаста мебошад, пас нуқтаҳои ҳудудии он, ки ба қиматҳои 0 ва l^*-и параметри l мувофиқанд, ҳамҷоя мешаванд. Бигзор ε адади мусбати дилхоҳ бошад. Сегменти $[0, l^*]$-ро бо нуқтаҳои $0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_{n-1} = l^*$ ба n қисмҳои баробари дарозиашон аз $\varepsilon/9l^*$ хурд тақсим мекунем. Хати шикастаи $M_0M_1, \ldots, M_n$ $(M_0 = M_n)$-ро, ки дар даруни хати каҷи L кашида шудааст ва ба тақсимоти номбурдаи сегменти $[0, l^*]$ мувофиқ меояд, муоина менамоем. Нуқтаҳои $M_0, M_1, \ldots, M_n$ хати каҷи L-ро ба қисмҳои $L_1, L_2, \ldots, L_n$-и дарозиҳояшон баробар $(l^*/n) < (\varepsilon/9l^*)$ тақсим мекунанд. Маълум аст, ки дарозии звенохои $M_{i-1}M_i$-и хати шикастаи номбурдаи $M_0M_1 \ldots M_n$ аз l^*/n калон намебошанд. Ҳар як звенои $M_{i-1}M_i$-ро дар дохили квадрати тарафаш $3l^*/n$, чунон ки дар расми 11.4 нишон дода шудааст, ҷойгир мекунем. Қамони L_i, ки звенои $M_{i-1}M_i$-ро дарбар дорад, дар дохили ин квадрат ҷойгир аст, чунки масофа аз нуқтаи дилхоҳе, ки дар берун ё дар ҳудуди ин квадрат воқеъ аст, то ҳар яке аз нуқтаҳои M_{i-1} ва M_i аз l^*/n хурд нест, ва, бинобар ин, агар ягон нуқтаи M-и камони L_i дар берун ё дар ҳудуди квадрати номбурда воқеъ мебуд, онгоҳ хати шикастаи дар даруни ин камон кашидашудаи $M_{i-1}MM_i$ дарозие медошт, ки он аз $2l^*/n$ хурд намебуд, яъне дарозии он назар ба дарозии l^*/n-и камони L_i калон мешуд, ки ин имконнопазир аст. Ҷамъбасти



Расми 11.4

ҳамаи квадратҳое, ки дар ҳамаи звеноҳои хати шикастаи $M_0M_1 \dots M_n$ сохта шудаанд, фигураи бисьёркунҷае мебошад, ки хати каҷи L-ро дарбар дорад, бар замми ин маълум аст, ки ҳудудҳои ин фигура ҷамъбасти ҳудудҳои бисьёркунҷаи дар даруни фигураи Q кашидашуда ва бисьёркунҷаи дар беруни фигураи Q кашидашуда мебошанд. Инчунин маълум аст, ки фарқи масоҳатҳои ин бисьёркунҷаҳо $S_d - S_i$ ба масоҳати фигураи номбурда баробар аст ва масоҳати ин фигура аз суммаи масоҳатҳо (S)-и квадратҳои сохташуда калон намебошад. Азбаски $S = n\dfrac{9l^{*2}}{n^2} = 9l^*\dfrac{l^*}{n} < \varepsilon$ мебошад (нобаробарии охирин аз $\dfrac{l^*}{n} < \dfrac{\varepsilon}{9l^*}$ ҳосил шудааст), пас $S_d - S_i < \varepsilon$. Бинобар ин, мувофиқи теоремаи 11.2, фигураи Q фигураи квадратонидашаванда мебошад. Теорема исбот шуд.

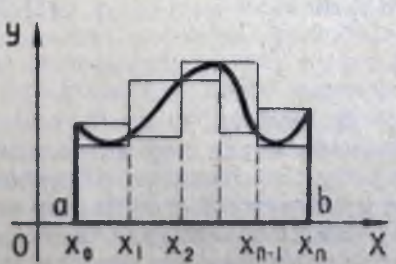
2. Масоҳати трапецияи каҷхатта. Фигураеро, ки бо графики функцияи бефосила ва ғайриманфии дар сегменти $[a, b]$ додашудаи $f(x)$, ординатаҳои аз нуқтаҳои a ва b гузаронидашуда ва порчаи тири Ox, ки дар байни нуқтаҳои a ва b воқеъ аст, маҳдуд мебошад, *трапецияи каҷхатта* меноманд (расми 11.5). Тасдиқоти зеринро исбот мекунем.

Трапецияи каҷхатта фигураи квадратонидашаванда мебошад ва масоҳати он P-ро бо формулаи

$$P = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (11.28)$$

ҳисоб кардан мумкин аст.

Исбот. Азбаски функцияи дар сегменти $[a, b]$ бефосила интегронидашаванда мебошад, пас барои ададии мусбати дилхоҳи ε чунин таксимоти T-и сегменти $[a, b]$-ро нишон додан мумкин аст, ки $S - s < \varepsilon$ мебошад, дар ин ҷо S ва s — мувофиқан суммаҳои болоӣ ва поёнии таксимоти T. Лекин S ва s мувофиқан ба S_d ва S_i баробар мебошанд, дар ин ҷо S_d ва S_i масоҳати фигураҳои (бисьёркунҷаҳои) зинашакле мебошанд, ки фигураи якум трапецияи каҷхаттаро дарбар дорад ва фигураи дуюм дарбари трапецияи каҷхатта мебошад (дар расми 11.5 фигураҳои зинашакли номбурда низ тасвир шудаанд). Азбаски $S_d - S_i < \varepsilon$ мебошад, пас, дар асоси теоремаи 11.2, трапецияи каҷхатта фигураи квадратонидашаванда мебошад. Азбаски ҳангоми $\Delta \to 0$ лимити суммаҳои болоӣ ва по-



Расми 11.5.

ёнӣ ба $\int_a^b f(x)\,dx$ баробар мебошад ва $s \leqslant P \leqslant S$ аст, пас масоҳати трапецияи каҷхатта P-ро бо формулаи (11.28) ёфтан мумкин аст.

Қайд. Агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила ва ғайримусбат бошад, онгоҳ қимати $\int_a^b f(x)\,dx$ ба масоҳати трапецияи каҷхатта (ки бо графики функцияи $f(x)$, ординатаҳои аз нуқтаҳои a ва b гузаронидашуда ва порчаи тири Ox, ки дар байни нуқтаҳои a ва b воқеъ аст, маҳдуд мебошад), ки бо аломати манфӣ гирифта шудааст, баробар мебошад. Бинобар ин, агар $f(x)$ аломаташро иваз намояд, онгоҳ $\int_a^b f(x)\,dx$ ба суммаи масоҳатҳои бо аломати муайян гирифташудаи трапецияҳои каҷхаттае, ки дар боло ва поёни тири Ox воқеъ мебошанд, баробар аст; дар айни ҳол аломати масоҳати якум + ва аломати масоҳати дуюм — гирифта мешавад.

3. Масоҳати сектори каҷхатта. Фарз мекунем, ки хати каҷи L дар системаи координатаҳои қутбӣ бо муодилаи $r = r(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, дода шудааст (расми 11.6), бар замми ин функцияи $r(\theta)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ бефосила ва ғайриманфӣ мебошад. Фигураи хамвореро, ки бо хати каҷи L ва ду нури бо тирҳои қутбӣ ташкилкунандаи кунҷҳои α ва β маҳдуданд, *сектори каҷхатта* меноманд.

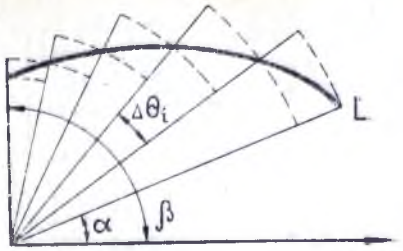
Тасдиқоти зеринро исбот мекунем. *Сектори каҷхатта фигураи квадратонидашаванда мебошад, ки масоҳати он P-ро бо формулаи*

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta \qquad (11.29)$$

ҳисоб кардан мумкин аст.

Исбот. Сегменти $[\alpha, \beta]$-ро бо нуқтаҳои $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \beta$ тақсим (T) мекунем ва барои ҳар як сегменти қисмии $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ секторҳои доиравиеро месозем, ки радиусҳояшон ба қиматҳои минимумӣ r_i ва максимумӣ R_i-и $r(\theta)$ (дар сегменти $[\theta_{i-1}, \theta_i]$) баробаранд. Дар натиҷа ду фигураи бодбезакшаклеро ҳосил мекунем, ки фигураи якум дарбари сектори каҷхатта мебошад ва фигураи дуюм сектори каҷхаттаро дарбар дорад (ин фигураҳои бодбезакшакл дар расми 11.6 тасвир шудаанд). Масоҳати фигураҳои бодбезакшакли номбурда $\bar{S}_i$ ва $\bar{S}_d$ мувофиқан ба $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2\,\Delta\theta_i$ ва $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} R_i^2\,\Delta\theta_i$ баробаранд. Қайд ме-

кунем, ки суммаи якум барои функцияи $\frac{1}{2} r^2(\theta)$ дар таксимоти (T)-и номбурдаи сегменти $[\alpha, \beta]$ суммаи поёнӣ s мебошад; суммаи дуюм барои ҳамин функция ва ҳамин таксимот суммаи болоӣ S мебошад.



Расми 11.6.

Азбаски функцияи $\frac{1}{2} r^2(\theta)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ интегронидашаванда мебошад, пас фарқи $S - s = \bar{S}_d - \bar{S}_i$ ҳар қадар хурд шуда метавонад. Масалан, барои $\varepsilon > 0$-и қайдшудаи дилхоҳ ин фаркро аз $\varepsilon/2$ хурд кардан мумкин аст. Акнун дар даруни фигураи бодбезакшакли бисьёркунҷаи Q_i-и масоҳаташ S_i-ро мекашем, ки барояш $\bar{S}_i - S_i < \frac{\varepsilon}{4}$ мебошад, ва дар атрофи берунии фигураи бодбезакшакли бисьёркунҷаи Q_d-и масоҳаташ S_d-ро мекашем, ки барояш $S_d - \bar{S}_d < \frac{\varepsilon^*}{4}$ аст. Маълум аст, ки бисьёркунҷаи якум дар даруни сектори қаҷхатта ва бисьёркунҷаи дуюм дар атрофи он кашида шудааст. Азбаски нобаробариҳои

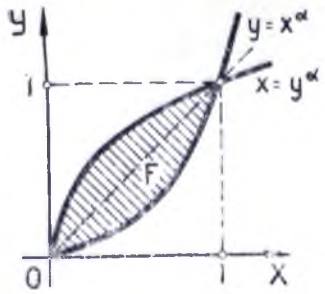
$$S_i < \bar{S}_i \leqslant \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\, d\theta < \bar{S}_d < S_d \qquad (11.30)$$

дурустанд, пас $S_d - S_i < \varepsilon$ мебошад. Дар асоси дилхоҳ будани ε, аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки сектори қаҷхатта квадратонидашаванда мебошад. Аз нобаробариҳои (11.30) натиҷа мебарояд, ки формулаи (11.29) дуруст аст.

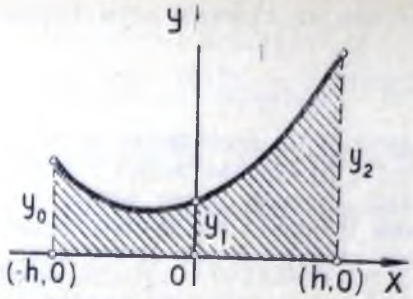
4. Мисолҳои ҳисоб кардани масоҳатҳо. 1°. Масоҳат (P)-и фигураи F, ки бо графики функцияҳои $y = x^{\alpha}$ ва $x = y^{\alpha}$ $(\alpha \geqslant 1)$ маҳдуд мебошад (расми 11.7) ёфта шавад. Азбаски фигураи F нисбат ба биссектрисаи кунҷи координатии якум симметрӣ мебошад, пас масоҳати онро дар натиҷаи аз 1 (масоҳати квадрат) тарҳ кардани масоҳати дучандаи трапецияи қаҷхаттае, ки гра-

---

* Фигураҳои бодбезакшакли муоинашаванда аз секторҳои доиравӣ ташкил шудаанд. Ҳар як сектор квадратонидашаванда мебошад ва, бинобар ин, фигураҳои бодбезакшакл ҳам квадратонидашаванда мебошанд. Бинобар ин барои ин фигураҳо бисьёркунҷаҳоеро ёфтан мумкин аст, ки масоҳатҳояшон S_i ва S_d нобаробарии мазкурро қаноат менамоянд.



Расми 11.7.



Расми 11.8.

фики функцияи $y = x^\alpha$ дар сегменти $[0, 1]$ муайян мекунад, ҳосил кардан мумкин аст. Ҳамин тариқ, мувофиқи формулаи (11.28)

$$P = 1 - 2\int_2^1 x^\alpha\,dx = 1 - 2\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{2}{\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$

2°. Аз се нуқтаи координатаҳояшон $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) фақат якто параболаи $y = Ax^2 + Bx + D$ (ё хати рост, агар ин нуқтаҳо дар як хати рост воқеъ бошанд) мегузарад. Ҳақиқатан, системаи муодилаҳои

$$\left.\begin{aligned} Ah^2 - Bh + D &= y_0,\\ D &= y_1,\\ Ah^2 + Bh + D &= y_2 \end{aligned}\right\}$$

нисбат ба A, B, D* ҳалли ягона дорад. Яъне

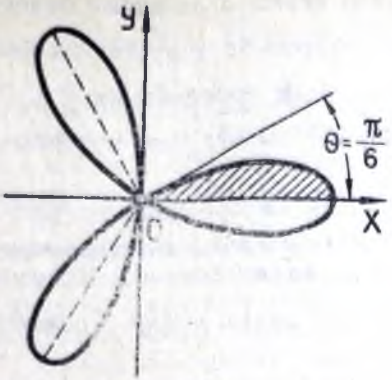
$$A = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}, \quad B = \frac{y_2 - y_0}{2h},$$

$$D = y_1.$$

Масоҳат (P)-и трапецияи каҷҳаттаеро, ки параболаи номбурда муайян мекунад, бо ординатаҳои воқеи нуқтаҳои $(-h, 0)$ ва $(h, 0)$ ва порчаи тири Ox, ки дар байни ин нуқтаҳо воқеъ аст (расми 11.8), ба воситаи ординатаҳои y_0, y_1 ва y_2 ифода мекунем. Азбаски мувофиқи формулаи (11.28)

---

* Ин муодилаҳо шарти дар параболаи $y = Ax^2 + Bx + D$ ҷойгиршавии нуқтаҳои $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ ва (h, y_2)-ро ифода менамоянд.



Расми 11.9.

$$P = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + D)\,dx =$$

$$= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Dx\right]\Bigg|_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{2Ah^3}{3} + 2Dh$$

аст, пас ифодаҳои A ва D-ро ба эътибор гирифта, меёбем, ки

$$P = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

3°. Масоҳат (P)-и себаргаи $r = a\cos 3\theta$ (расми 11.9) ёфта шавад. Аз нақша фаҳмост, ки масоҳати себарга ба масоҳати шашчандаи қисми штрихшудаи себарга, ки ба тағйирёбии θ аз 0 то $\pi/6$ мувофиқ аст, баробар мебошад. Бинобар ин мувофиқи формулаи (11.29)

$$P = 6\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6} \cos^2 3\theta\,d\theta = \frac{\pi a^2}{4}.$$

§ 3. Ҳаҷми ҷисмҳо ва масоҳати сатҳҳо

1. Мафҳуми кубонидашавандагӣ ва ҳаҷм. Фарз мекунем, ки E ягон ҷисми* охирнок мебошад. Бисьёррӯяҳои гуногунеро, ки дар даруни ҷисми E кашида шудаанд, ва бисьёррӯяҳои гуногунеро, ки дар атрофи ҷисми E кашида шудаанд, муоина мекунем. Ҳисоби ҳаҷми бисьёррӯя ба ҳисоб кардани ҳаҷми тетраэдрҳо (пирамидаҳои секунҷа) меорад. Бинобар ин мо мафҳуми ҳаҷми бисьёррӯяро маълум меҳисобем.

Фарз мекунем, ки $\{V_i\}$ маҷмӯи ададии ҳаҷмҳои бисьёррӯяҳои дар даруни ҷисми E кашидашуда ва $\{V_d\}$ маҷмӯи ададии ҳаҷмҳои бисьёррӯяҳои дар атрофи ҷисми E кашидашуда мебошад. Маҷмӯи $\{V_i\}$ аз боло (бо ҳаҷми бисьёррӯяи берун кашидашудаи дилхоҳ) ва маҷмӯи $\{V_d\}$ аз поён (масалан, бо адади нуль) маҳдуд аст. Ҳудуди болоии саҳеҳи маҷмӯи $\{V_i\}$-ро бо $\underline{V}$ ва ҳудуди поёнии саҳеҳи маҷмӯи $\{V_d\}$-ро бо $\overline{V}$ ишорат мекунем. Ададҳои $\underline{V}$ ва $\overline{V}$ мувофиқан *ҳаҷми поёнӣ* ва *ҳаҷми болоии* ҷисми E номида мешаванд.

---

* Мо қисми фазоеро, ки бо сатҳи набурандаи сарбаста маҳдуд аст, ҷисм меномем.

Қайд мекунем, ки ҳаҷми поёнӣ $\underline{V}$-и ҷисми E аз ҳаҷми болоӣ $\overline{V}$-и ин ҷисм калон нест, яъне $\underline{V} \leqslant \overline{V}$. Барои ба дурустии ин баробарӣ ҳосил кардан чунон ки барои исботи нобаробарии $\underline{P} \leqslant \overline{P}$ муҳокима ронда будем (ба п. 1 § 2 нигар.), ҳамон тавр муҳокима рондан кифоя аст.

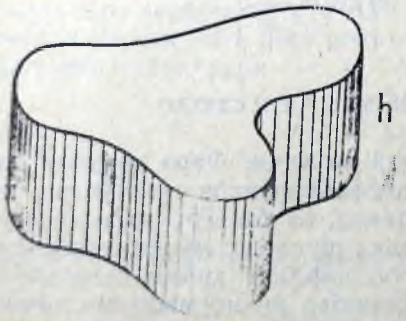
Акнун мафҳуми *кубонидашавандагии* ҷисмро ҷорӣ мекунем.

Таъриф. Ҷисми E кубонидашаванда номида мешавад, агар ҳаҷми болоӣ $\overline{V}$-и ин ҷисм бо ҳаҷми поёниаш $\underline{V}$ мувофиқ ояд. Дар ин ҳолат адади $V = \underline{V} = \overline{V}$ ҳаҷми ҷисми E номида мешавад.

Теоремаи зерин дуруст аст.

Теоремаи 11.4. *Барои он ки ҷисми E кубонидашаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин бисьёррӯяи дар атрофи ҷисми E кашидашуда ва чунин бисьёррӯяи дар даруни ҷисми E кашидашударо нишон додан мумкин аст, ки фарқи ҳаҷмҳои онҳо $V_d - V_i$ аз ε хурд бошад.*

Исботи ин теорема ба исботи теоремаи 11.2 (ба п. 1 § 2 нигар.) монанд аст.



Расми 11.10.

2. Кубонидашавандагии баъзе класси ҷисмҳо. Ҷисмеро, ки бо сатҳи силиндрии ташкилдиҳандаҳояш бо ягон тир параллель ва ду ҳамвории ба ин тир перпендикуляр маҳдуд аст, *силиндр* меномем. Ин ҳамвориҳо дар буриш бо сатҳи силиндрӣ фигураҳои ҳамвореро ташкил медиҳанд, ки онҳоро *асосҳои силиндр* меноманд ва масофа (h)-и байни асосҳои силиндр *баландии силиндр* номида мешавад (расми 11.10).

Тасдиқоти зеринро исбот мекунем. *Агар асоси силиндри E фигураи квадратонидашавандаи Q бошад, онгоҳ силиндр ҷисми кубонидашаванда мебошад, дар айни ҳол ҳаҷм (V)-и силиндри E ба Ph баробар аст, дар ин ҷо P — масоҳати асоси Q ва h — баландии силиндр.*

Азбаски фигураи Q квадратонидашаванда аст, пас барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин бисьёркунҷаҳои берун ва дарун кашидашудаи ин фигураро нишон додан мумкин аст, ки фарқи масоҳатҳои онҳо $S_d - S_i$ аз ε/h хурд мешавад. Ҳаҷмҳо $(V_d$ ва $V_i)$-и призмаҳои баландиашон h, ки бисьёркунҷаҳои номбурда асосҳои онҳо мебошанд, мувофиқан ба $S_d h$ ва $S_i h$ баробаранд.

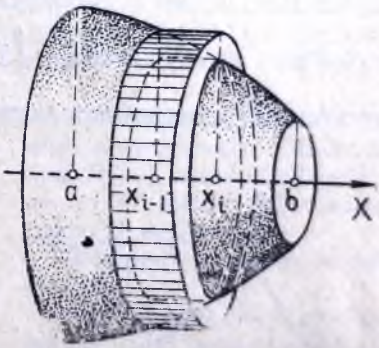
Бинобар ин $V_d - V_i = (S_d - S_i)\,h < \dfrac{\varepsilon}{h}\,h < \varepsilon$. Азбаски ин призмаҳо мувофиқан бисьёрруяҳои дар берун ва даруни ҷисми мушаванда E кашидашуда мебошанд, пас дар асоси теоремаи 11.4 ҷисми E кубонидашаванда мебошад. Азбаски $V_i \leqslant Ph \leqslant V_d$ аст, пас ҳаҷми цилиндр ба Ph баробар аст.

Аз тасдиқоти исботшуда натиҷа мебарояд, ки *ҷисмҳои зинашакл кубонидашаванда* мебошанд (ҷамъбасти цилиндрҳои шумораашон охирнокро, ки асоси болоии ҳар яки цилиндрҳои пешоянд бо асоси поёнии цилиндри пасоянд дар як ҳамворӣ воқеъ мебошанд, ҷисми зинашакл меноманд, ба расми 11.11 нигар.).

Қайд. Тасдиқоти маълуми зерин дуруст аст. *Агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин ҷисми зинашакли дар атрофи ҷисми E кашидашуда ва чунин ҷисми зинашакли дар даруни ҷисми E кашидашударо нишон додан мумкин бошад, ки фарқи ҳаҷмҳои онҳо $V_d - V_i$ аз ε хурд бошанд, онгоҳ ҷисми E кубонидашаванда мебошад.*



Расми 11.11.



Расми 11.12.

Ин қайдро барои исботи *кубонидашавандагии ҷисмҳои чархзанӣ* (расми 11.12) истифода мекунем. Ҳамчунин, тасдиқоти зеринро исбот мекунем.

Бигзор функцияи $y = f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила бошад. Онгоҳ ҷисми E, ки дар натиҷаи дар атрофи тири Ox чарх задани трапецияи каҷхатта (ки бо графики функцияи $f(x)$, ординатаҳои аз нуқтаҳои a ва b гузаронидашуда ва порчаи байни a ва b-и тири Ox маҳдуд мебошад) ташкил шудааст, кубонидашаванда мебошад ва ҳаҷми он V-ро мувофиқи формулаи

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (11.31)$$

ёфтан мумкин аст.

Исбот. Бигзор T бо нуктаҳои $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ тақсимшавии сегменти $[a, b]$ бошад ва m_i ва M_i ҳудудҳои саҳеҳи $f(x)$ дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ бошанд. Дар ҳар яки ингуна сегмент ду росткунҷаи баландиҳояшон m_i ва M_i-ро месозем (дар расми 11.12 ин росткунҷаҳо фақат дар як сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ тасвир шудаанд. Мо ду фигураи зинашаклеро ҳосил кардем, ки якеаш дарбари трапецияи каҷхатта буда, дигараш ин трапецияро дарбар мегирад. Ҳангоми чарх задани трапецияи каҷхатта ва ин фигураҳои зинашакл ҷисми E ва ду ҷисми зинашакле, ки якеаш дарбари E ва дигараш E-ро дарбар дорад, ҳосил мешаванд. Ҳаҷмҳо (V_i ва V_d)-и ин ҷисмҳои зинашакл мувофикан ба

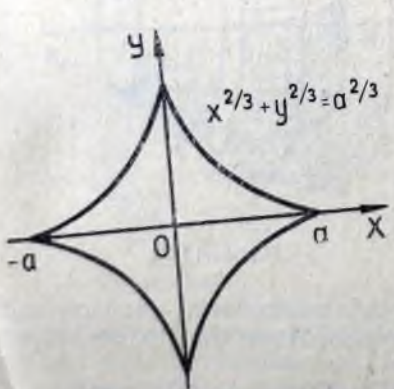
$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta x_i \quad \text{ва} \quad \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta x_i$$

баробаранд. Ин ифодаҳо барои функцияи $\pi f^2(x)$ суммаҳои болой ва поёнӣ мебошанд. Азбаски ин функция интегронидашаванда мебошад, пас фарқи суммаҳои номбурда барои ягон тақсимоти T-и сегменти $[a, b]$ аз адади мусбати додашудаи ε хурд мешавад. Пас, ҷисми E кубонидашаванда мебошад. Азбаски лимити суммаи номбурда ба $\pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ баробар аст, пас ҳаҷм (V)-и ҷисми E-ро мувофиқи формулаи (11.31) ёфтан мумкин аст.

3. Мисолҳои ҳисоб кардани ҳаҷмҳо.

1°. Ҳаҷми ҷисме, ки дар натиҷаи дар атрофи тири Ox чарх задани астроидаи $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ҳосил мешавад (расми 11.13). Азбаски $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^3\,dx$ мебошад, пас

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx = \frac{32}{105} \pi a^3.$$



Расми 11.13.

2°. Ҳаҷми ҷисме, ки дар натиҷаи дар атрофи тири Ox чарх задани синусоида (дар сегменти $[0, \pi]$) ҳосил мешавад:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

4. Масоҳати сатҳи чархзанӣ. Сатҳи П-ро, ки дар натиҷаи дар атрофи тири Ox чарх задани графики функцияи дар сегменти

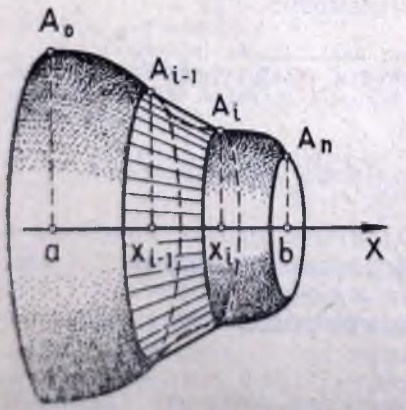
$[a, b]$ додашудаи $y = f(x)$ ташкил мешавад, дида мебароем (расми 11.14). Мафҳуми *квадратонидашавандагии* сатҳи чархзании П-ро муайян мекунем. Фарз мекунем, ки сегменти $[a, b]$ бо нуқтаҳои $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ тақсим карда мешаванд (T — тақсимот), ва бигзор $A_0, A_1, \ldots, A_n$ нуқтаҳои мувофиқи графики функцияи $f(x)$ бошанд. Хати шикастаи $A_0A_1 \ldots A_n$-ро месозем. Ҳангоми дар гирди тир чарх задани ин хати шикаста сатҳи П (A_i), ки аз сатҳҳои паҳлуии конусҳои сарбурида ташкил шудааст, ҳосил мешавад. Масоҳати сатҳи П (A_i)-ро бо $P(x_i)$ ишорат менамоем. Агар y_i ординатаҳои $f(x)$ дар нуқтаҳои x_i ва l_i дарозии звеноҳои $A_{i-1}A_i$-и хати шикастаи $A_0A_1 \ldots A_n$ бошанд, онгоҳ

$$P(x_i) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} l_i = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i)\, l_i. \qquad (11.32)$$

Таърифи зеринро баён мекунем.

1°. *Адади P лимити масоҳатҳои $P(x_i)$ номида мешавад, агар барои адади мусбати додашудаи дилхоҳи ε чунин адади мусбати δ-ро нишон додан мумкин бошад, ки барои тақсимоти дилхоҳи T-и сегменти $[a, b]$, ки дарозии максималӣ Δ-и сегментҳои қисмиаш аз δ хурд аст, нобаробарии $|P(x_i) - P| < \varepsilon$ иҷро шавад.*

2°. *Сатҳи чархзании* П *квадратонидашаванда номида мешавад, агар лимити P-и масоҳатҳои $P(x_i)$ мавҷуд бошад. Дар ин ҳолат адади P-ро масоҳати сатҳи* П *меноманд.*



Расми 11.14.

Тасдиқоти зеринро исбот мекунем.

Агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ ҳосилаи бефосилаи $f'(x)$ дошта бошад, онгоҳ сатҳи П, *ки дар натиҷаи дар атрофи тири Ox чарх задани графики ин функция ташкил мешавад, квадратонидашаванда мебошад ва масоҳати он P-ро мувофиқи формулаи*

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)}\, dx \qquad (11.33)$$

ҳисоб кардан мумкин аст.

Исбот. Дарозӣ l_i-и звенои $A_{i-1}A_i$-и хати шикастаи $A_0A_1 \ldots A_n$ ба $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ баробар аст. Мувофиқи формулаи Лагранж: $y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ фарз карда, $l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$-ро ҳосил мекунем. Бинобар ин, мувофиқи (11.32),

$$P(x_i) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i +$$

$$+ \pi\{\sum_{i=1}^{n}[(y_{i-1} - f(\xi_i)) + (y_i - f(\xi_i))]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\}. \quad (11.34)$$

Суммаи якуми қисми рости муносибати (11.34) суммаи интегралии функцияи $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$-ро ифода мекунад, ки он, дар асоси шартҳои тасдиқот, интегронидашаванда буда, соҳиби лимити $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$ мебошад. Исбот мекунем, ки ифодаи дохили қавсҳои фигуравии қисми рости муносибати (11.34) соҳиби лимити ба нуль баробар мебошад. Вокеан, бигзор ε адади мусбати дилхоҳ бошад. Азбаски функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ мунтазам бефосила мебошад, пас, барои $\varepsilon > 0$-и додашуда чунин $\delta > 0$-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $\Delta < \delta$ будан $(\Delta = \max \Delta x_i)$ нобаробариҳои $|y_{i-1} - f(\xi_i)| < \varepsilon$ ва $|y_i - f(\xi_i)| < \varepsilon$ иҷро мешаванд. Агар M қимати максимумии функцияи $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ дар сегменти $[a, b]$ бошад, онгоҳ барои ифодаи даруни қавсҳои фигуравии қисми рости муносибати (11.34) баҳодиҳии зеринро ҳосил менамоем:

$$|\{\sum_{i=1}^{n}[(y_{i-1} - f(\xi_i)) + (y_i - f(\xi_i))]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\}| <$$

$$< 2M\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 2M(b - a)\varepsilon.$$

Дар асоси дилхоҳ будани $\varepsilon > 0$ лимити ифодаи номбурда ба нуль баробар мешавад. Инак, мо мавҷудияти лимити P-и масоҳатҳои $P(x_i)$-ро исбот кардем ва мувофиқи формулаи (11.33) ҳисоб карда шудани ин лимитро муқаррар намудем. Тасдиқот исбот шуд.

Қайди 1. Квадратонидашавандагии сатҳҳои чархзаниро дар шартҳои маҳдудтар исбот кардан мумкин аст. Дар сегменти $[a, b]$ муайян ва интегронидашаванда будани функцияи $f'(x)$ кифоя аст. Аз ин фарзият интегронидашавандагии функцияи $f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$ бармеояд (ба иловаи 1-уми боби 10 нигар.). Муҳокимаронии минбаъда мисли муҳокимаронии исботи тасдиқоти ҳамин пункт мебошад.

Қайди 2. Агар сатҳи П дар натиҷаи дар атрофи тири Ox чарх задани хати қачи L, ки ба таври параметрӣ бо муодилаҳои $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha < t < \beta$, муайян мешавад, ҳосил шавад, онгоҳ тағйирёбандаҳои тахти ало

мати интеграли муайяни формулаи (11.33)-ро иваз карда, барои масоҳат (P)-и ин сатҳ ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \qquad (11.35)$$

Мисолҳои ҳисоб кардани масоҳати сатҳҳои чархзаниро муоина мекунем.

1°. Масоҳат (P)-и сатҳи эллипсоидаи чархзаниро меёбем. Фарз мекунем, ки эллипси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ дар гирди тири Ox чарх мезанад. Аввал мавриди $a > b$ будан (чархзанӣ дар гирди тири калони эллипс)-ро муоина мекунем. Азбаски дар ин маврид $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ аст, пас $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ фарз карда, меёбем, ки

$$P = 2\pi \int_{-a}^{a} f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, dx = 2\pi b \left(b + \frac{a}{e} \arcsin e\right).$$

Агар $a < b$ бошад, $e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}}$ фарз карда ва ҳисоботи мувофиқро иҷро намуда,

$$P = 2\pi b \left(b + \frac{a^2}{2b} \frac{1}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}\right)$$

-ро ҳосил менамоем.

2°. Циклоидае, ки ба таври параметрӣ бо муодилаҳои $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ муайян мешавад, дар гирди тири Ox чарх зада, сатҳеро ташкил медиҳад. Масоҳат (P)-и ҳамин сатҳро меёбем. Мувофиқи формулаи (11.35):

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_{0}^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\, dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

§ 4. Баъзе татбиқоти физикавии интеграли муайян

1. Масса ва маркази вазнинии стержени ғайриякҷинса. Стержени ғайриякҷинсаи дар сегменти $[a, b]$-и тири Ox воқеъбударо муоина мекунем. Фарз мекунем, ки $\rho(x)$ зичии хаттии стержень мебошад*. Ба воситаи нуқтаҳои $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ тақ-

---

* Агар Δm массаи як қисми стержень дар сегменти $[x, x + \Delta x]$ бошад, онгоҳ нисбати $\Delta m/\Delta x$ *зичии хаттии миёнаи* стержень дар ҳамин сегмент номида мешавад. Лимити $\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ зичии хаттӣ $\rho(x)$ номида мешавад.

сим шудани сегменти $[a, b]$-ро бо T ишорат мекунем. Дар ҳар яки сегментҳои қисмии $[x_{i-1}, x_i]$ нуқтаи ξ_i-ро интихоб мекунем ва суммаи $\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\,\Delta x_i$-ро тартиб медиҳем. Азбаски ҳар як ҷамъшавандаи ин сумма қимати тақрибии массаи як қисми стерженьро дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ ифода мекунад, пас суммаи номбурдаро ба сифати қимати тақрибии массаи ҳамаи стержень қабул кардан мумкин аст. Дар асоси ин муҳокимаронихо, мо *масса M-и ҳамаи стерженьро чун лимити суммаи* $\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\,\Delta x_i$ *ҳангоми ба нуль майл кардани* $\Delta = \max \Delta x_i$, *яъне чун* $\int_a^b \rho(x)\,dx$ *муайян менамоем.* Ҳамин тариқ,

$$M = \int_a^b \rho(x)\,dx. \tag{11.36}$$

Барои муайян кардани маркази вазнинии стержень формулаи координатаҳои маркази вазнинии системаи $\{m_i(x_i)\}$-и нуқтаҳои материалиеро, ки массаи m_i доранд ва дар нуқтаҳои x_i-и тири Ox воқеъ мебошанд, истифода мекунем. Яъне, координата x_c-и маркази вазнинии системаи $\{m_i\}$-ро бо формулаи

$$x_c = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n} = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{11.37}$$

ёфтан мумкин аст.

Сегменти $[a, b]$-ро бо нуқтаҳои $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ тақсим карда, ин тақсимоти T-ро муоина мекунем ва массаи m_i-и қисми стерженьро, ки дар сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ воқеъ аст, ҳисоб менамоем. Мувофиқи формулаи (11.36) $m_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)\,dx$. Формулаи қимати миёна (10.13)-ро татбиқ карда, инчунин $m_i = \rho(\xi_i)\,\Delta x_i$-ро ҳосил мекунем. Чунин мепиндорем, ки массаи m_i ба нуқтаи ξ_i-и сегменти $[x_{i-1}, x_i]$ гузошта шудааст ва стержени ғайриякчинсаро чун системаи нуқтаҳои материалии массаашон m_i, ки дар нуқтаҳои ξ_i-и сегменти $[a, b]$ воқеанд, муоина карда метавонем. Азбаски

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)\,dx = M$$

аст, пас мувофики формулаи (11.37) ифодаи тақрибии координатаҳо x_c-и маркази вазнинии стержени ғайриякчинсаро меёбем:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i)\,\Delta x_i}{M}. \qquad (11.38)$$

Ифодаи сурати қисми рости муносибати (11.38) суммаи интегралии функцияи $x\rho(x)$ дар сегменти $[a, b]$ мебошад. Мувофики муҳокимаронихоямон мо координата (x_c)-и маркази вазнинии стержени ғайриякчинсаро аз формулаи зерин меёбем:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx}. \qquad (11.39)$$

2. Кори қувваи тағьирьёбанда. Бигзор нуқтаи материалӣ аз нуқтаи a-и тири Ox ба нуқтаи b-и ҳамин тир дар таҳти қувваи F, ки ба тири Ox параллель аст, кӯчад. Чунин меҳисобем, ки ин қувва функцияи x-и дар сегменти $[a, b]$ муайян мебошад. Бигзор T ба воситаи нуқтаҳои $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ тақсимшавии сегменти $[a, b]$ бошад. Дар ҳар яки сегменти қисмии $[x_{i-1}, x_i]$ нуқтаи ξ_i-ро интихоб мекунем ва ифодаи $\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i$-ро қимати тақрибии кор (A)-и қувваи тағьирьёбандаи $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$ мепиндорем. Мувофиқи ин муҳокимаронихои пешакӣ, мо кор (A)-и қувваи тағьирьёбандаи $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$-ро чун $\int_a^b F(x)\,dx$ муайян мекунем. Ҳамин тариқ,

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (11.40)$$

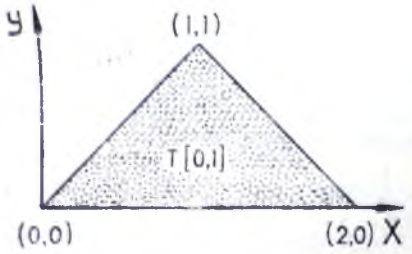
ИЛОВА

МИСОЛҲОИ ФИГУРАҲОИ КВАДРАТОНИДАШАВАНДА

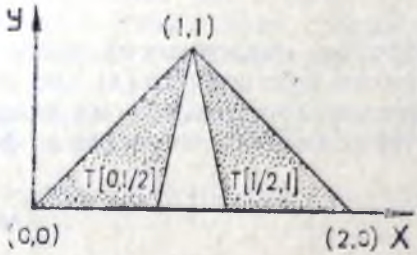
1. Маҷмӯи нуқтаҳои секунҷаеро, ки аз сарҳадаш* нуқтаҳои ду тарафи он ва ду куллаи ба ин тарафҳо ҷаспида дур (хориҷ) карда шудаанд, *секунҷаи нимкушода* меномем. Сохтани хати каҷи L-ро, ки он як қисми сарҳади фигураи квадратонидашавандаи Q мебошад, муоина мекунем. Ин сохтан бо роҳи

* Сарҳади секунҷа — маҷмӯи нуқтаҳои тараф ва куллаҳои он.

аз ягон секунчаи росткунчаи баробарпахлуи додашудаи T, ки барои бехтарии мухокимарониҳои минбаъда мо онро бо $T[0, 1]$ ишорат мекунем, пай дар пай хориҷ кардани секунчаҳои нимкушодаи муайян иҷро карда мешавад. Координатаҳои қуллаҳои ин секунча ба (0, 0), (1, 1), (2, 0) баробаранд (расми 11.15). Акнун процесси аз секунчаи $T[0, 1]$ пай дар пай хориҷ кардани секунчаҳои нимкушодаи муайянро баён мекунем:



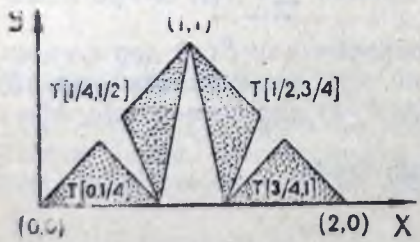
Расми 11.15.



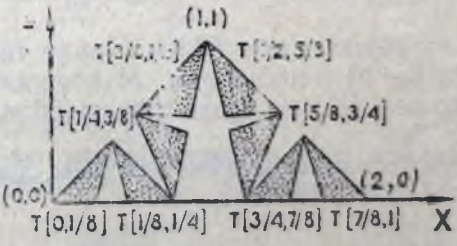
Расми 11.16.

1. Секунчаи нимкушодае хориҷ карда мешавад, ки як қуллаи он сохиби координатаҳои (1, 1) буда, ду қуллаи дигараш дар тири Ox воқеъ мебошанд. Масоҳат (S_1)-и секунчаи хориҷшуда ба 1/4 баробар аст. Фигураи ҳосилшуда дар расми 11.16 тасвир шудааст. Он аз ду секунчаи $T[0, 1/2]$ ва $T[1/2, 1]$ иборат аст, ки масоҳатҳояшон ба якдигар баробаранд.

2. Аз секунчаҳои $T[0, 1/2]$ ва $T[1/2, 1]$ яктогӣ секунчаҳое, ки суммаи масоҳатҳояшон S_2 ба 1/8 баробар аст, хориҷ карда мешаванд. Фигураи ҳосилшуда дар расми 11.17 тасвир шудааст. Он аз чор секунчаи $T[0, 1/4]$, $T[1/4, 1/2]$, $T[1/2, 3/4]$, $T[3/4, 1]$ иборат аст, ки масоҳатҳояшон ба якдигар баробаранд.



Расми 11.17.



Расми 11.18.

3. Аз ҳар як секунчаи номбурда яктогӣ секунчае, ки суммаи масоҳатҳояшон S_3 ба 1/16 баробар аст, хориҷ карда мешавад. Фигураи ҳосилшуда дар расми 11.18 тасвир шудааст. Он аз ҳашт секунча иборат аст:

$$T[0, 1/8],\ T[1/8, 1/4],\ T[1/4, 3/8],\ T[3/8, 1/2],\ T[1/2, 5/8],$$
$$T[5/8, 3/4],\ T[3/4, 7/8],\ T[7/8, 1],$$

ки масоҳатҳояшон ба якдигар баробаранд.

4. Аз ҳар як секунчаи номбурда яктогӣ секунчае, ки суммаи масоҳатҳояшон S_4 ба 1/32 баробар аст, хориҷ карда мешавад. Фигураи ҳосилшуда дар расми 11.19 тасвир шудааст. Он аз шонздах секунчаи масоҳатҳояшон баробар иборат аст. Мо ҳар яки ин секунчаҳоро бо символи

$$T\left[\frac{p}{2^4}, \frac{p+1}{2^4}\right], \quad p = 0, 1, ..., 15,$$

ишорат мекунем. Процесси минбаъдаи хориҷ кардани секунҷаҳо маълум аст. Акнун хати каҷи L-ро муайян мекунем. Секунҷаҳои $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ (p ва n — ададҳои бутуни ғайриманфии дилхоҳ, ки шарти $p < 2^n$-ро қаноат менамоянд), ки дар процессҳои тавсифшуда ҳосил шудаанд, ба хосиятҳои зерин соҳибанд: бигзор $T\left[\frac{p_1}{2^{n_1}}, \frac{p_1+1}{2^{n_1}}\right]$ ва $T\left[\frac{p_2}{2^{n_2}}, \frac{p_2+1}{2^{n_2}}\right]$ ду секунҷае бошанд, ки $\frac{p_1}{2^{n_1}} \leqslant \frac{p_2}{2^{n_2}} < \frac{p_2+1}{2^{n_2}} \leqslant \frac{p_1+1}{2^{n_1}}$ аст. Онгоҳ секунҷаи дуюм дарбари секунҷаи якум мебошад. Инчунин хосияти маълуми зерини секунҷаҳои $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$-ро қайд мекунем: ҳангоми $n \to \infty$ диаметри* онҳо ба нуль майл мекунад. Бигзор $\left\{\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]\right\}$, $k = 1, 2, ...,$ *системаи якҷояи секунҷаҳо* бошад (ин чунин маъно дорад, ки секунҷаи ба индекси k мувофиқ секунҷаи ба индекси $k+1$ мувофиқро дарбар дорад, ва ҳангоми $k \to \infty$ диамети секунҷаҳо ба нуль майл мекунанд). Ҳар яки ингуна системаҳои якҷояи секунҷаҳо *фақат якто нуқтаи умумӣ*** доранд. Системаҳои якҷояи гуногуни секунҷаҳои нобурдаро муоина мекунем. *Мо хати каҷи L-ро чун маҷмӯи нуқтаҳои гуногуни $\{M\}$, ки ҳар яки онҳо нуқтаи умумии ягон системаи якҷояи секунҷаҳои нобурда* $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$*-ро ифода мекунанд, муайян мекунем.*



Расми 11.19.

Қайд мекунем, ки маҷмӯи $\{M\}$ (хати каҷи L) ба қуллаҳои ҳама секунҷаҳои $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ тааллуқ дорад. Барои ба ин бовар кардан, қайд мекунем,

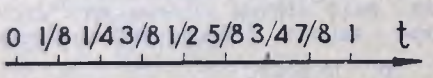
---

* *Диаметри* секунҷа гуфта дарозии тарафи калонтарини онро меноманд.

** Мо дар боби 3 (ба п. 2 § 3 ниг.) исбот карда будем, ки системаи якҷояи сегментҳо фақат якто нуқтаи умумӣ доранд. Системаи якҷояи секунҷаҳоро дар тирҳои Ox ва Oy проексия карда, мо системаи якҷояи сегментҳо дар тирҳои координатаҳоро ҳосил мекунем. Бигзор x ва y мувофикан нуқтаҳои системаи якҷояи нобурдаи сегментҳо дар тирҳои Ox ва Oy бошанд. Мо бовари ҳосил мекунем, ки нуқтаи M-и координатаҳояш x ва y нуқтаи умумии ягонаи системаи якҷояи муоинашавандаи секунҷаҳо мебошад.

ки қуллаи ҳар яки ингуна секунҷа ба системаи якҷояи секунҷаҳои $\left\{T\left[\frac{2^k p}{2^{n+k}}, \frac{2^k p+1}{2^{n+k}}\right]\right\}$ ва системаи $\left\{T\left[\frac{2^k p-1}{2^{n+k}}, \frac{2^k p}{2^{n+k}}\right]\right\}$ тааллуқ дорад. Маҷмӯи сохташудаи $\{M\}$, мувофиқи таъриф (п. 1 § 1-и ҳамин боб), хати качи содда мебошад. Барои ба ин бовар кардан, мо бояд исбот кунем, ки ҳама нуқтаҳои маҷмӯи $\{M\}$ ба таври параметрӣ бо муодилаҳои $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, муайян мешаванд, дар ин ҷо $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ — функцияҳои бефосила.*

Сегменти $[0; 1]$-и тири t-ро муоина мекунем. Ба ҳар як сегменти $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$, ки дар ин ҷо p ва n ададҳои бутуни ғайриманфии дилхоҳ мебошанд ва $p < 2^n$ аст, секунҷаи $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$**-ро дар мувофиқатӣ мегузорем. Дар расми 11.20 сегментҳо тасвир шудаанд, ки секунҷаҳои $T\left[\frac{p}{2^3}, \frac{p+1}{2^3}\right]$ ба онҳо мувофиқанд. Нуқтаи дилхоҳи t-и сегменти $[0, 1]$ ба ҳама сегментҳои ягон системаи якҷояи $\left\{\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]\right\}$-и сегментҳо*** тааллуқ дорад. Ба ҳамин нуқтаи t системаи якҷояи секунҷаҳои $\left\{T\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]\right\}$-ро дар мувофиқатӣ мегузорем. Ҳамин тариқ, ба ҳар як қимати t-и сегменти $[0, 1]$ ду ададӣ x ва y — координатаҳои нуқтаи M дар мувофиқатӣ гузошта мешавад. Пас, x ва y функцияҳои параметри t мебошанд. Ин функцияҳои $x = \varphi(t)$ ва $y = \psi(t)$ дар сегменти $[0, 1]$ бефосила мебошанд. Воқеан, бигзор ε — ададӣ мусбати додашудаи дилхоҳ, t — нуқтаи додашудаи сегменти $[0, 1]$ ва M нуқтаи хати качи L бошад, ки бо ин қимати параметри t муайян мешавад. Аз системаҳои якҷояи $\left\{\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}\right.\right.$,



Расми 11.20.

---

* Ба t-ҳои гуногун мувофиқ омадани нуқтаҳои гуногуни маҷмӯи M аз сохтани хати качи L маълум аст.

** Қайд мекунем, ки ба ҳар яки ингуна секунҷа фақат як сегменти $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ мувофиқ меояд.

*** Бигзор t нуқтаи дилхоҳи сегменти $[0, 1]$ ва n ададӣ мусбати бутуни дилхоҳ бошад. Онгоҳ нуқтаи t ба ягон сегменти $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ тааллуқ дорад, бар замми ин ҳар яки ингуна сегмент, ки ба номери $n+1$ мувофиқ аст, дар сегменте воқеъ аст, ки он ба номери n мувофиқ меояд.

$\left.\left[\frac{v_k+1}{2^{n_k}}\right]\right\}$-и секунҷаҳо, ки нуқтаи M-ро муайян мекунанд, секунҷаеро интихоб мекунем, ки диаметраш аз ε хурд аст, ва сегменти $\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]$-ро, ки соҳиби нуқтаи t-и муайянкунандаи M (ва, пас, x ва y) мебошад, муоина менамоем. Ҳамаи нуқтаҳои хати каҷи L, ки қиматҳои t-и ҳамин сегмент муайян мекунанд, дар секунҷаи номбурда ҷойгиранд, ва, бинобар ин, координатаҳои онҳо аз координатаҳои нуқтаи M на зиёда аз ε тафовут доранд. Лекин ин чунин маъно дорад, ки функцияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ дар нуқтаи номбурда бефосила мебошанд.

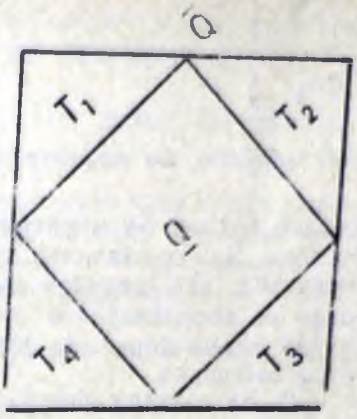
2. Ба сохтани фигураи квадратонидашавандаи Q шурӯъ мекунем. Квадрати $\underline{Q}$-ро, ки тарафаш ба 2 баробар аст, муоина мекунем. Дар ҳар як тарафи ин квадрат секунҷаҳои росткунҷаи баробартарафи T_1, T_2, T_3, T_4-ро месозем; мо дар натиҷа квадрати $\overline{Q}$-и тарафаш $2\sqrt{2}$-ро ҳосил мекунем (расми 11.21). Баъд аз ҳар яки ингуна секунҷаҳо секунҷаҳои нимкушодаро, чунон ки дар п. 1 баён шуда буд, хориҷ мекунем. Мо дар натиҷа фигураи Q-ро, ки бо хати каҷи сарбастаи аз чор хати каҷи ба хати каҷи L конгруэнтӣ* иборат (ба п. 1 ниг.) маҳдуд аст, ҳосил мекунем. Исбот мекунем, ки фигураи ҳосилшуда квадратонидашаванда мебошад. Ду пайдарпаии махсуси бисьёркунҷаҳои $\{\underline{Q}_n\}$ ва $\{\overline{Q}_n\}$-ро муоина мекунем, ки $\{\underline{Q}_n\}$ аз бисьёркунҷаҳои дар даруни фигураи Q кашидашуда ва $\{\overline{Q}_n\}$ аз бисьёркунҷаҳои дар беруни фигураи Q кашидашуда иборат аст. Пайдарпаии $\{\underline{Q}_n\}$ дар натиҷаи ба квадрати Q ҳамроҳ кардани секунҷаҳои нимкушодае, ки аз секунҷаҳои T_1, T_2, T_3, T_4 дар ҳар як даври тоқи процесси дар п. 1 баёншуда хориҷ карда мешудаанд, ҳосил карда мешавад. Пайдарпаии $\{\overline{Q}_n\}$ дар натиҷаи аз квадрати $\overline{Q}$ хориҷ кардани секунҷаҳои нимкушодае, ки аз секунҷаҳои T_1, T_2, T_3, T_4 дар ҳар як даври ҷуфти процесси дар п. 1 баёншуда хориҷ карда мешуданд, ҳосил карда мешавад. Бисьёркунҷаи дилхоҳи дар даруни фигураи Q кашидашуда дарбари ягон бисьёркунҷаи $\underline{Q}_n$ мебошад ва бисьёркунҷаи дилхоҳи дар атрофи фигураи Q кашидашуда ягон бисьёркунҷаи $\overline{Q}_n$-ро дарбар дорад. Бинобар ин лимити пайдарпаии $\{\underline{S}_n\}$-и масоҳати бисьёркунҷаҳои $\underline{Q}_n$ ба *масоҳати поёнӣ* $\underline{P}$-и фигураи Q баробар аст ва лимити пайдарпаии $\{\overline{S}_n\}$-и масоҳати бисьёркунҷаҳои $\overline{Q}_n$ *ба масоҳати болоӣ* $\overline{P}$-и фигураи Q баробар аст. Бовар кардан осон аст, ки $\underline{S}_n = 4 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-1}$ ва $\overline{S}_n = 8 - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-1}$**. Бинобар ин $\underline{P} = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 16/3$ ва $\overline{P} = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = 22/3$. Азбаски $\overline{P} \neq \underline{P}$ аст, пас *фигураи Q квадратониданашаванда мебошад*. Кайд мекунем, ки $\overline{P} - \underline{P} = 2$.

---

* Маҷмӯъҳои A ва B *конгруэнтӣ* номида мешаванд, агар онҳо дар натиҷаи ҳаракат якҷоя шаванд.

** Ин формулаҳоро ҳосил кардан осон аст, агар ба эътибор гирем, ки суммаи масоҳатҳои секунҷаҳое, ки дар даври тоқи процесс хориҷ карда мешаванд, прогрессияи геометрии 1, 1/4, ..., ва суммаи масоҳатҳои секунҷаҳое, ки дар даври ҷуфти процесс хориҷ карда мешаванд, прогрессияи геометрии 1/2, 1/8, ...-ро ташкил медиҳанд.

Ҳамин тариқ, сарҳади фигураи муоинашавандаи Q масоҳати ба 2 баробар дорад.



Расми 11.21.

3. Исбот мекунем, ки *қисми дилхоҳи хати каҷи L, ки бо ду нуқтаҳои гуногун маҳдуданд, хати ростнашаванда мебошад.* Аввал исбот мекунем, ки ингуна қисми L'-и хати каҷи L масоҳати ба нуль нобаробар дорад, яъне бисьёркунҷаи дилхоҳе, ки L'-ро мепӯшонад, масоҳати аз ягон адади мусбат калон дорад. L' қисми L''-ро, ки ба нуқтаҳои ягон сегменти $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ мувофиқ аст, дарбар дорад, ва, бинобар ин, L'' дарбари секунҷаи $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ мебошад ва онро дар натиҷаи аз ин секунҷа хориҷ кардани секунҷаҳои нимкушодаи муайян (ба п. 1-уми ҳамин илова ниг.) ҳосил кардан мумкин аст. Ҳисоб кардан осон аст, ки сумма (S)-и масоҳатҳои ҳама секунҷаҳои нимкушодаи хориҷшуда аз масоҳат (S_T)-и секунҷаи $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ хурд аст. Пас, қисми L'' масоҳате дорад, ки он ба $S_T - S > 0$ баробар аст. Дар § 2 ҳамин боб ҳангоми исбот кардани квадратонидашавандагии фигурае, ки бо хати каҷи ростшаванда махдуд аст, мо исбот кардем, ки масоҳати хати каҷи ростшаванда ба нуль баробар аст (хати каҷи ростшавандаро бо бисьёркунҷаи масоҳаташ ҳар қадар хурд пӯшидан мумкин аст). Бинобар ин қисми L''-и хати каҷи L ва, бинобар ин, қисми L', ки L''-ро дарбар дорад, хатҳои ростнашаванда мебошанд.

Қ а й д. Ҳар яки функцияҳои сохташудаи $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ *дар ҳеҷ ягон нуқтаи сегменти* $[0, 1]$ *ҳосила надоранд.*

БОБИ 12

МЕТОДҲОИ ҲИСОБИ ТАҚРИБИИ РЕШАҲОИ МУОДИЛАҲО ВА ИНТЕГРАЛҲОИ МУАЙЯН

Дар ин боб методҳои тақрибан ёфтани решаҳои муодилаҳои алгебравӣ ва трансцендентӣ ва ҳисоб кардани интегралҳои муайян муоина карда мешаванд.

§ 1. Методҳои ҳисоби тақрибии решаҳои муодилаҳо

Мо дар ин параграф ба ҳисоби тақрибии яке аз решаҳои муодилаи $f(x) = 0$, ки дар ин ҷо $y = f(x)$ ягон функцияи бефосила ё дифференсиронидашаванда мебошад, машғул мешавем. Чунин мепиндорем, ки решаи ба мо даркории c-и ин муодила дар ягон сегменти $[a, b]$ ҷудо гузошта шудааст, яъне чунин мепиндорем, ки ин реша нуқтаи дарунии сегменти $[a, b]$ мебошад (ин сегмент решаҳои дигари муодилаи мазкурро надорад). Дар амалия одатан бо роҳи тахмини дақал андозаҳои сегменти номбурдаи $[a, b]$*-ро муайян менамоянд.

1. Методи «вилка». Аввал методеро меомӯзем, ки он аксаран барои дар мошинҳои математикии тезамали ҳозиразамон тақрибан ҳисоб кардани решаҳо истифода мешавад.

Фарз мекунем, ки решаи ба мо даркории c-и муодилаи $f(x) = 0$ дар ягон сегменти $[a, b]$ ҷудо гузошта шудааст. Мо нисбат ба функцияи $f(x)$ фарз мекунем, ки он дар сегменти $[a, b]$ бефосила аст ва дар нӯқтаҳои ин сегмент қиматҳои аломаташон гуногун дорад. Минбаъд барои мухтасарӣ ҳарҷуна сегментеро, ки $f(x)$ дар нӯқтаҳои он қиматҳои гуногуналомат дорад, *«вилка»* меномем.

Акнун методи ҷустуҷӯи решаҳои муодилаи $f(x) = 0$-ро, ки *методи «вилка»* номида мешавад, баён мекунем.

Барои муайянӣ ҷунин мепиндорем, ки $f(a) < 0$ ва $f(b) > 0$ аст. Сегменти $[a, b]$-ро ба ду қисми баробар тақсим мекунем. Дар айни ҳол ду мавриди ҷой дорад: 1) қимати функция дар миёнаҷои

---

* Дар айни ҳол ахбороти иловагии ба ҷойгиршавии решаҳо оидро, ки аз мазмуни физикавии масъала бармеояд, истифода кардан мумкин аст.

сегменти $[a, b]$ ба нуль баробар аст (дар ин ҳолат решаи матлуб ёфта шудааст), 2) қимати номбурда ба нуль баробар нест. Дар ин мавриди яке аз нимаи сегменти $[a, b]$ вилка мебошад. Мо ин нимаро бо $[a_1, b_1]$ ишорат мекунем. Маълум аст, ки $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Чунон ки бо сегменти $[a, b]$ рафтор кардем, бо сегменти $[a_1, b_1]$ ҳам ҳамон тавр рафтор мекунем, яъне сегменти $[a_1, b_1]$-ро ба ду қисми баробар тақсим менамоем. Ҳамингуна муҳокимарониро давом дода, ба ду имконияти зайл соҳиб мешавем: 1) ё процесси баёншуда аз сабаби он, ки қимати функция дар миёнаҳои ягон сегмент баробари нуль мешавад (дар ин мавриди решаи матлуб ёфта шудааст), канда мешавад, 2) ё процесси баёншуда номаҳдуд давом ёфтанаш мумкин аст, ва мо системаи якҷояи сегментҳо — вилкаҳои $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...-ро ҳосил мекунем, дар айни ҳол барои номери дилхоҳи n $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Системаи якҷояи сегментҳои номбурда якто нуқтаи умумии c дорад, ки ҳар яки пайдарпаиҳои $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ ба он наздик мешаванд (ба натиҷаи теоремаи 3.15 нигар.). Исбот мекунем, ки c ҳам решаи матлуб мебошад, яъне $f(c) = 0$. Азбаски функцияи $f(x)$ дар нуқтаи c бефосила мебошад, пас ҳар яки пайдарпаиҳои $\{f(a_n)\}$ ва $\{f(b_n)\}$ ба $f(c)$ наздик мешаванд. Лекин, онҳо аз шартҳои $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$, дар асоси теоремаи 3.13 ва қайди ин теорема, дар як вақт дуруст будани нобаробариҳои $f(c) \leqslant 0$ ва $f(c) \geqslant 0$ тасдиқ мешавад, яъне $f(c) = 0$ аст.

Муҳокимарониҳои болоӣ алгоритми ҷустуҷӯи решаи матлуби c-ро ҳосил менамоянд. Нуқтаи $\dfrac{a_n + b_n}{2}$, яъне миёнаҳои сегменти $[a_n, b_n]$-ро ба сифати қимати тақрибии ин реша гирифтан мумкин аст. Азбаски дарозии сегменти $[a_n, b_n]$ ба $\dfrac{b-a}{2^n}$ баробар аст, пас адади $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ аз қимати саҳеҳи реша назар ба $\dfrac{b-a}{2^n}$ зиёдтар фарқ намекунад. Ҳамин тариқ, процесси баёншудаи ба ду қисми баробар пай дар пай тақсим кардани сегментҳо — вилкаҳо имконият медиҳад, ки решаи матлуби c-и дараҷаи саҳеҳиаш пешакӣ додашудаи дилхоҳ ҳисоб карда шавад. Азбаски процесси баёншуда **ба такрори чандикаратаи операцияҳои** ҳисоби *якхелатип* меорад, пас он махсусан барои дар мошинҳои математикии тезамал ҳисоб кардан қулай мебошад.

2. Методи расандаҳо*. Методи расандаҳо яке аз методҳои самарабахши тақрибан ҳисоб кардани решаҳои муодилаи $f(x) = 0$ мебошад.

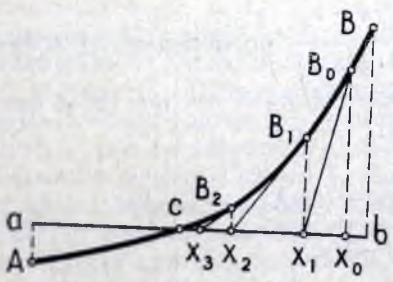
---

* Ин методро ниҷунин *методи Ньютон* ҳам меноманд.

Фарз мекунем, ки решаи матлуби c-и муодилаи $f(x) = 0$ дар сегменти $[a, b]$ чудо гузошта шудааст. Методи расандаҳоро баён мекунем (дар айни ҳол шартҳои татбиқшавии ин метод аниқ карда намешаванд).

Графики функцияи $f(x)$-ро дар сегменти $[a, b]$ муоина мекунем (расми 12.1). Ягон қимати x_0-и сегменти $[a, b]$-ро ба сифати наздикшавии нулии решаи матлуб мегирем ва нуқтаи графики функцияи абсциссааш x_0-ро бо B_0 ишорат менамоем. Аз нуқтаи B_0 ба графики функция расанда мегузаронем ва абсциссаи x_1-и нуқтаи буриши ин расандаю тири Ox*-ро ба сифати наздикшавии якуми решаи матлуб қабул мекунем. Баъд ба графики функция аз нуқтаи B_1-и абсциссааш x_1 расанда мегузаронем ва абсциссаи x_2-и нуқтаи буриши ин расандаю тири Ox-ро ба сифати наздикшавии дуюм мегирем. Ин процессро номаҳдуд давом дода, мо пайдарпаии $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$-и қиматҳои тақрибии решаи матлубро месозем.

Барои максадҳои амалӣ формулаи рекуррентиеро, ки x_{n+1}-ро ба воситаи x_n ифода мекунад, ҳосил кардан қулай мебошад. Барои ин муодилаи расанда ба графики функция (дар нуқтаи B_n), яъне $Y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$-ро мегирем ва абсциссаи нуқтаи буриши ин расандаю тири Ox, яъне x_{n+1}-ро ҳисоб мекунем. Чунин ифода ҳосил мешавад:



Расми 12.1.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (12.1)$$

Формулаи (12.1) алгоритми методи расандаҳоро муайян мекунад. Ҳамин тариқ, методи расандаҳо методи наздикшавиҳои пайдарпай (ё, чунон ки мегӯянд, методи итерацияҳо)-ро ифода мекунад, ки он бо ёрии формулаи рекуррентии (12.1) сохта мешавад. Асоснок кардани методи расандаҳо вазифаи минбаъдаи мо мебошад.

Мо дар п. 5 шартҳоеро, ки дар онҳо пайдарпаии қиматҳои x_n, ки формулаи (12.1) муайян мекунад, ба решаи матлуби c наздик мешавад, аниқ мекунем ва ба саҳв, яъне ба тамоили қимати тақрибии x_n аз қимати саҳеҳи решаи c баҳо медиҳем.

3. Методи хордаҳо. Методи хордаҳо ба қатори методҳои тақрибии маъмули ҳалли муодилаи $f(x) = 0$ тааллуқ дорад.

---

* Азбаски расандаи нуқтаи B графики дифференциали функцияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 мебошад, пас усули номбурдан чустучӯи наздикшавии якуми x_1 *ба ивази функция ба дифференциалаш* дар нуқтаи x_0 асос ёфтааст.

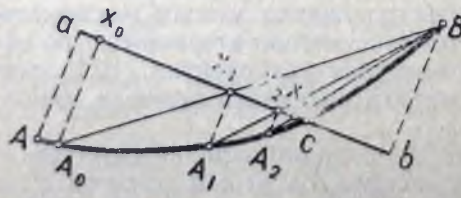
Ҳоло шартҳои татбиқшавии методи хордаҳоро аниқ накарда, фақат худи методро баён мекунем.

Фарз мекунем, ки решаи матлуби c-и муодилаи $f(x) = 0$ дар сегменти $[a, b]$ чудо гузошта шудааст, ва ба муоинаи графики функцияи $f(x)$ дар ҳамин сегмент мурочиат менамоем (расми 12.2). Ягон адади x_0-и сегменти $[a, b]$-ро ба сифати наздикшавии нулии решаи матлуб мегирем ва нуқтаҳои графики функцияро, ки абсциссаашон x_0 ва b аст, бо A_0 ва B ишорат мекунем. Аз нуқтаҳои A_0 ва B-и графики функция хордаи A_0B мегузаронем ва ба сифати наздикшавии якуми решаи матлуб абсциссаи (x_1)-и нуқтаи буриши ин хордаю тири Ox (ба расми 12.2 ниг.)-ро мегирем. Баъд аз нуқтаҳои графики функция A_1-и абсциссааш x_1 ва B хорда мегузаронем. Ба сифати наздикшавии дуюм абсциссаи x_2-и нуқтаи буриши хордаи A_1B ва тири Ox-ро мегирем. Ин процессро номаҳдуд давом дода, мо пайдарпаии $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$-и қиматҳои тақрибии решаи матлубро месозем.

Барои максадҳои амалӣ формулаи рекуррентиеро, ки x_{n+1}-ро ба воситаи x_n ифода мекунад, ҳосил кардан кулай мебошад. Барои ин муодилаи хордаи аз нуқтаҳои $A_n(x_n, f(x_n))$ ва $B(b, f(b))$ гузаранда, яъне $\dfrac{Y - f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = \dfrac{x - x_n}{b - x_n}$-ро мегирем, ва абсциссаи нуқтаи буриши ин хордаю тири Ox, яъне x_{n+1}-ро ҳисоб мекунем. Чунин ифода ҳосил мешавад:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \qquad (12.2)$$

Формулаи (12.2) алгоритми методи хордаҳоро муайян мекунад. Ҳамин тариқ, методи хордаҳо методи итерацияҳоро ифода мекунад, ки онҳо бо ёрии формулаи рекуррентии (12.2) сохта мешаванд. Асоснок кардани методи расандаҳо вазифаи минбаъдаи мо мебошад.



Расми 12.2.

Мо дар п. 2 шартҳоеро, ки дар онҳо пайдарпаии қиматҳои x_n ба решаи матлуби c наздик мешавад, аниқ мекунем ва ба сахви методи хордаҳо баҳо медиҳем.

4. Методи итерацияҳо (наздикшавиҳои пай дар пай). Аз пп. 2 ва 3 фаҳмост, ки методи расандаҳо ва методи хордаҳо ба идеяи умумии сохтани ба решаи матлуб наздикшавиҳои пай дар пай

алоқаманд мебошанд. Ин идея асоси методи дар ҳамин пункт баёншаванда мебошад.

Ин методро ба муодилаи

$$x = F(x) \tag{12.3}$$

татбиқ карда, муоина мекунем.

Мафҳуми *пайдарпаии итерационӣро* чорӣ менамоем.

Пайдарпаии $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$-ро *пайдарпаии итерационӣ* меномем, агар барои $n \geqslant 1$-и дилхоҳ элементи x_n ба воситаи элементи x_{n-1} бо формулаи рекуррентии $x_n = F(x_{n-1})$ ифода карда шавад ва ба сифати x_0 адади дилхоҳи соҳаи дода шудани функцияи $F(x)$ гирифта шавад. Мо исбот мекунем, ки дар шартҳои муайян пайдарпаии итерационӣ ба решаи муодилаи (12.3) наздик мешавад ва, бинобар ин, элементҳои онро ба сифати қиматҳои тақрибии ин реша гирифтан мумкин аст.

Тасдиқоти зерин дуруст аст.

Т а с д и қ о т и 1. *Бигзор функцияи $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила бошад, ва бигзор ҳама элементҳои пайдарпаии итерационии $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ дар ҳамин сегмент воқеъ бошад. Онгоҳ, агар ин пайдарпай ба ягон адади c наздик шавад, онгоҳ адади номбурдаи c решаи муодилаи* (12.3) *мебошад.*

И с б о т. Азбаски пайдарпаии $\{x_n\}$ ба c наздик мешавад ва ҳама элементҳои он ба сегменти $[a, b]$ мутааллиқ аст, пас лимити c ҳам ба сегменти $[a, b]$ мутааллиқ мебошад (ба натиҷаи 2-юми теоремаи 3.13 ниг.). Мувофиқи шарт функцияи $F(x)$ дар нуқтаи c бефосила мебошад, ва бинобар ин пайдарпаии $\{F(x_{n-1})\}$ ба $F(c)$ наздик мешавад. Ҳамин тариқ, лимити баробарии $x_n = F(x_{n-1})$ ҳангоми $n \to \infty$ ба баробарии $c = F(c)$ табдил мешавад, яъне c решаи муодилаи (12.3) мебошад. Мо тасдиқоти исботшударо дар пп. 5 ва 6 барои асоснок кардани методи расандаҳо ва методи хордаҳо пурра истифода мекунем.

Боз як тасдиқотеро исбот мекунем, ки он аксаран барои бо ёрии пайдарпаии итерационӣ тақрибан ҳисоб кардани решаи муодилаи (12.3) истифода мешавад.

Т а с д и қ о т и 2. *Бигзор c решаи муодилаи* (12.3) *бошад, ва бигзор ҳосилаи функцияи $F(x)$ дар ягон сегменти нисбат ба нуқтаи c симметрии $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ шарти $|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$-ро қаноат намояд. Онгоҳ пайдарпаии итерационии $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, ки дар он адади дилхоҳи сегменти $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ ба сифати x_0 гирифта шудааст, ба решаи номбурдаи c наздик мешавад.*

И с б о т. Пеш аз ҳама исбот мекунем, ки ҳама элементҳои пайдарпаии итерационии $\{x_n\}$ ба сегменти $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ тааллуқ доранд. Воқеан, мувофиқи шарт, x_0 ба ин сегмент тааллуқ дорад. Бинобар ин, фарз мекунем, ки x_{n-1} ба ҳамин сегмент тааллуқ дорад, онгоҳ исбот кардан кифоя аст, ки x_n ҳам ба он тааллуқ дорад. Барои ин ба фарқи $F(x_{n-1}) - F(c)$ формулаи Лаг-

ранжро татбиқ мекунем ва ба эътибор мегирем, ки $F(c) = c$, $x_n = F(x_{n-1})$ мебошад. Онгоҳ

$$x_n - c = F(x_{n-1}) - F(c) = F'(\xi)(x_{n-1} - c), \qquad (12.4)$$

дар ин ҷо ξ ягон нуқтаест, ки дар байни x_{n-1} ва c воқеъ мебошад, пас он ба сегменти $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ ҳам тааллуқ дорад. Азбаски $|F'(\xi)| \leqslant \alpha < 1$ мебошад, пас аз баробарии (12.4)

$$|x_n - c| \leqslant \alpha |x_{n-1} - c| \qquad (12.5)$$

мешавад. Аз (12.5), азбаски $0 < \alpha < 1$ аст, дар навбати худ

$$|x_n - c| < |x_{n-1} - c| \qquad (12.6)$$

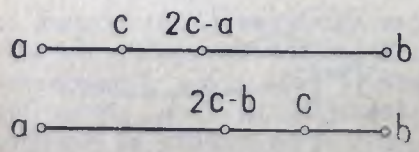
-ро ҳосил менамоем. Нобаробарии (12.6) муқаррар мекунад, ки ҳар як элементи пасоянди x_n, назар ба элементи пешоянди x_{n-1}, ба c наздиктар воқеъ аст ва, бинобар ин, азбаски x_{n-1} ба сегменти $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ тааллуқ дорад ва азбаски ин сегмент нисбат ба нуқтаи c симметрӣ мебошад, пас x_n ҳам ба ҳамин сегмент тааллуқ дорад. Акнун исбот кардан лозим аст, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ ба c наздик мешавад. Азбаски нобаробарии (12.5) барои ҳама номерҳои n дуруст аст, пас бо ёрии ин нобаробарӣ

$$|x_n - c| \leqslant \alpha^n |x_0 - c| \qquad (12.7)$$

-ро ҳосил менамоем. Аз нобаробарии охирин маълум, ки $x_n \to c$, чунки $\alpha^n \to 0$. Тасдиқоти 2 исбот шуд.

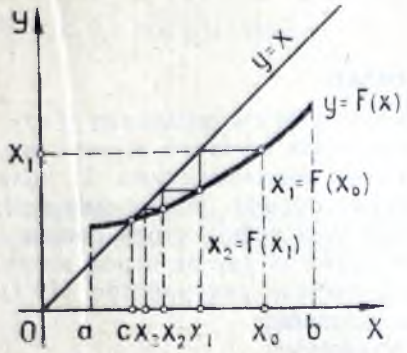
Доир ба тасдиқоти ҳозир исботкардаамон қайди амалиеро баён мекунем. Фарз мекунем, ки мо бо роҳи тахмини пешакӣ муқаррар кардем, ки решаи ба мо даркории муодилаи (12.3) дар ягон сегменти $[a, b]$ ҷудо гузошта шудааст (дар ин сегмент ҳосилаи функцияи $F(x)$ шарти $|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$-ро қаноат менамояд).

Азбаски сегменти $[a, b]$, умуман, нисбат ба решаи матлуб *симметрӣ намебошад*, пас чунин саволе пайдо шуданаш мумкин, ки наздикшавии нулии x_0-ро чӣ тавр интихоб кардан мумкин аст, ки тасдиқоти исботшудаи 2-ро татбиқ кардан имконпазир шавад. Решаи матлуби c дар кадом ҷои дохили сегменти $[a, b]$ бошад ҳам, ақаллан яке аз ду сегментҳои нисбат ба c симметрии $[a, 2c - a]$ ё $[2c - b, b]$ (расми 12.3) *ба сегменти* $[a, b]$ *пурра мутааллиқ мешавад*. Бинобар ин ақаллан яке аз нуқтаҳои a ё b ба сегменти нисбат ба c симметрӣ тааллуқ дорад, ки дар он $|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$ аст. Пас, ақаллан яке аз нуқтаҳои a ё b-ро, мувофиқи тасдиқоти исботшудаи 2, ба сифати x_0 интихоб кардан мумкин аст. Аз ду нуқтаи a ва b ҳамонашро ба сифати x_0 интихоб кардан лозим аст, ки барояш наздикшавии $x_1 = F(x_0)$ аз ҳудуди сегменти $[a, b]$ берун набарояд.

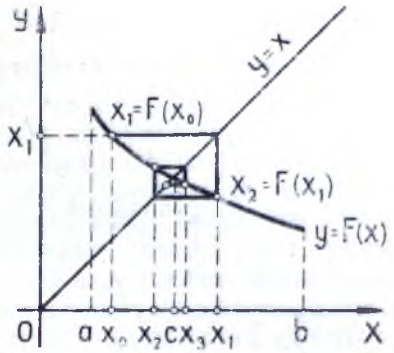


Расми 12.3.

Дар амалия аксаран мавриде дучор мешавад, ки ҳосилаи $F'(x)$ дар сегменти $[a, b]$ соҳиби аломати муайян мебошад. Агар



Расми 12.4.



Расми 12.5.

ин аломат мусбат бошад, онгоҳ аз формулаи (12.4) натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии монотонӣ мебошад. Ин маврид ба *диаграммаи зинашакл* (расми 12.4) меорад. Агар ҳосилаи $F'(x)$ дар сегменти $[a, b]$ манфӣ бошад, онгоҳ аз формулаи (12.4) маълум мешавад, ки ду элементи пайдарпаи дилхоҳи x_{n-1} ва x_n дар тарафҳои гуногуни решаи c воқеъ мешаванд. Ин маврид ба *диаграммаи спиралшакл* (расми 12.5) меорад.

Қайд. Доир ба баҳодиҳии саҳви методи итерацияҳо, яъне доир ба баҳодиҳии аз қимати саҳеҳи решаи c тамоил кардани наздикшавии n-уми x_n масъала ба миён меояд. Аз формулаи (12.7) баҳодиҳии

$$|x_n - c| \leqslant \alpha^n (b - a)$$

бевосита бармеояд, ки дар ин ҷо α — ҳудуди болоии саҳеҳи функцияи $|F'(x)|$ дар сегменти $[a, b]$, ки дар он решаи муоинашаванда ҷудо гузошта шудааст. Агар ҳосилаи $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$ манфӣ бошад, онгоҳ, чунон ки қайд кардем, x_{n-1} ва x_n дар тарафҳои гуногуни решаи c воқеъ мебошанд ва, бинобар ин, баҳодиҳии

$$|x_n - c| \leqslant |x_n - x_{n-1}|$$

дуруст аст. Агар дар мавриди мазкур ба сифати қимати тақрибии реша нимсуммаи ду наздикшавиҳои пай дар пай

$$x_n^* = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

-ро гирем, онгоҳ баҳодиҳии зерини саҳвро ҳосил мекунем:

$$|x_n^* - c| \leqslant \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2}.$$

5. Асоснок кардани методи расандаҳо.

1°. Аввал мавридеро, ки решаи матлуби c-и муодилаи $f(x) = 0$ дар ягон сегменти $[a, b]$ ҷудо гузошта шудааст, муоина мекунем (функцияи $f(x)$ дар ин сегмент *ҳосилаи якуми ба нуль нобаробар ва ҳосилаи дуюми маҳдуд дорад*). Исбот мекунем, ки дар ин маврид чунин атрофи ба қадри кифоя хурди решаи c ёфт мешавад, ки агар наздикшавии нулии x_0 дар ин атроф воқеъ бошад, онгоҳ пайдарпаии $\{x_n\}$, ки формулаи рекуррентии (12.1) муайян мекунад, ба решаи c наздик мешавад.

Пеш аз ҳама қайд мекунем, ки муодилаи

$$x = F(x) \quad \left(F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) \tag{12.8}$$

дар сегменти $[a, b]$ фақат як решаи c дорад, ки он бо решаи муодилаи $f(x) = 0$ мувофиқ меояд. Бинобар ин мо ба ҷои муодилаи $f(x) = 0$ муодилаи (12.8)-ро ҳал мекунем. Барои ин, ягон x_0-ро гирифта, пайдарпаии итерационии

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{12.9}$$

-ро месозем. Формулаи рекуррентии (12.9) дар аниқӣ бо формулаи рекуррентии (12.1) мувофиқ меояд.

Барои он ки ба решаи матлуби c наздикшавии пайдарпаии итерационии $\{x_n\}$ исбот карда шавад, исбот кардан кифоя аст, ки дар ягон ε-атрофи решаи c ҳосилаи $F'(x)$ шарти $|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$-ро қаноат менамояд ва дар ε-атрофи номбурда x_0-ро гирифтан кофист (ба тасдиқоти 2-юми п. 4 ниг.).

Дар асоси талаботе, ки ба функцияи $f(x)$ гузошта шудааст, чунин ададҳои мусбати m ва N ёфт мешаванд, ки дар ҳама ҷои сегменти $[a, b]$ нобаробариҳои

$$|f'(x)| \geqslant m > 0^*), \quad |f''(x)| \leqslant N \tag{12.10}$$

иҷро мешаванд. Азбаски

---

*) Ин нобаробариҳо аз он бармеоянд, ки ҳосилаи $f'(x)$ дар сегменти муоинашаванда бефосила ва ба нуль нобаробар мебошад.

$$F'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

аст, пас аз нобаробариҳои (12.10) баҳодиҳии зерин бармеояд:

$$|F'(x)| \leqslant \frac{|f(x)|\,N}{m^2} . \qquad (12.11)$$

Аз бефосилагии функцияи $f(x)$ натиҷа мебарояд, ки дар ягон ε-атрофи решаи c ин функция нобаробарии

$$|f(x)| \leqslant \frac{m^2}{N}\alpha \qquad (12.12)$$

-ро қаноат менамояд, дар ин ҷо α — адади қайдшудаи интервали $0 < \alpha < 1$. Нобаробариҳои (12.11) ва (12.12)-ро муқоиса карда, мебинем, ки дар ҳама ҷои ε-атрофи реша

$$|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$$

мебошад. Бо ҳамин ба решаи c наздикшавии пайдарпаии (12.9) исбот шуд.

Қ а й д и 1. Мо ба решаи c наздикшавии пайдарпаии $\{x_n\}$-ро дар ҳамон шарте исбот кардем, ки наздикшавии нулии x_0 дар ε-атрофи ба қадри кифоя хурди решаи c воқеъ аст. Интихоби x_0-и даркорӣ бо ёрии якчанд озмоиш дар мошинҳои электронии ҳисоббарори тезамали ҳозиразамон бо осонӣ иҷро карда мешавад.

Қ а й д и 2. Аз қимати саҳеҳи c тамоил кардани қимати тақрибии решаи x_{n+1}-ро баҳо медиҳем. Бо ин мақсад функцияи $f(x)$-ро дар атрофи x_n аз рӯи формулаи Тейлор бо аъзои боқимондаи шакли Лагранж ҷудо мекунем: $f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_n)^2$. Дар ин формула $x = c$ фарз карда ва $f(c) = 0$ буданашро ба инобат гирифта,

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(c - x_n)^2$$

-ро ҳосил менамоем. Аз формулаи охирин формулаи $f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$-ро, ки аз муносибати рекуррентии (12.9) бармеояд, тарҳ карда,

$$x_{n+1} - c = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)} (x_n - c)^2$$

-ро ҳосил менамоем. Аз ин ҷо, ишоратҳои қабулшудаи (12.10)-ро истифода карда, нобаробарии

$$|x_{n+1} - c| \leqslant \frac{N}{2m} |x_n - c|^2$$

-ро ҳосил мекунем. Ин баҳодиҳиро барои $n = 0, 1, 2, \ldots$ пай дар пай татбиқ намуда, баҳодиҳии зеринро ҳосил менамоем:

$$|x_{n+1} - c| \leqslant \left(\frac{N}{2m}\right)^n |x_0 - c|^{2n}.$$

2°. Методи расандаҳоро дар дигар хел фарзият асоснок мекунем.

Бигзор решаи матлуби c-и муодилаи $f(x) = 0$ дар сегменти $[a, b]$ ҷудо гузошта шуда бошад; функцияи $f(x)$ дар ҳамин сегмент *ҳосилаи якуми монотоние дорад, ки аломати муайянашро нигоҳ медорад.* Ин ҳосила албатта бефосила мебошад, чунки он соҳиби нуқтаҳои каниши ҷинси якум шуда наметавонад ва функцияи монотонӣ нуқтаҳои каниши дигар надорад.

Барои муайянӣ фарз мекунем, ки ҳосила кам намешавад ва дар сегменти $[a, b]$ *мусбат* мебошад. Исбот мекунем, ки пайдарпаии итерационии $\{x_n\}$, ки дар он $x_0 = b$ аст ва x_{n+1} бо ёрии формулаи (12.9) ба воситаи x_n муайян мешавад, ба решаи c наздик мешавад.

Агар барои ягон номери n $x_n = c$ (c — решаи матлуб) бошад, онгоҳ $f(x_n) = f(c) = 0$ мешавад ва аз формулаи (12.9) $x_{n+1} = c$-ро ҳосил мекунем. Ҳамин тавр муҳокима ронда, мо пай дар пай исбот мекунем, ки $x_{n+2} = x_{n+3} = \ldots = c$ аст, яъне дар ин маврид пайдарпаии итерационии $\{x_n\}$ ба решаи матлуби c наздик мешавад.

Акнун мувофиқи индукция исбот мекунем, ки агар x_n *муносибати* $c < x_n \leqslant b$-ро *қаноат намояд, онгоҳ* x_{n+1} *ҳам муносибати* $c \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant b$-ро *қаноат менамояд.*

Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки ҳамаи x_n-ҳо ба сегменти $[c, d]$ тааллуқ доранд (чунки $x_0 = b$ ба ҳамин сегмент тааллуқ дорад) ва пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии афзуннашаванда мебошад ва, аз ҳамин сабаб, он наздикшаванда аст. Дар асоси тасдиқоти 1-уми п. 4 наздикшавандагии пайдарпаии $\{x_n\}$ ва ба сегменти $[c, b]$ (ва, аз ҳамин сабаб, ба сегменти $[a, b]$ ҳам) мутааллиқ будани ҳама элементҳои он бо исботи ба решаи матлуби c наздикшавии ин пайдарпай ба итмом мерасад.

Инак, акнун исбот кардан лозим аст, ки агар x_n муносибати $c < x_n \leqslant b$-ро қаноат намояд, онгоҳ x_{n+1} муносибати $c \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$-ро қаноат менамояд.

Бигзор $c < x_n \leqslant b$ бошад. Онгоҳ, аз формулаи (12.9), $f(c) = 0$ буданашро ба эътибор гирифта,

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n) - f(c)}{f'(x_n)}$$

-ро ҳосил мекунем. Ба ифодаи сурати касри охирин формулаи Лагранжро татбиқ карда,

$$x_n - x_{n+1} = (x_n - c)\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

-ро ҳосил менамоем, ки дар ин ҷо $c < \xi_n < x_n$ мебошад. Дар асоси он, ки ҳосилаи функцияи $f(x)$ кам намешавад ва мусбат мебошад, пас касри $\dfrac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}$ мусбат буда, аз 1 калон нест, яъне

$$0 \leqslant x_n - x_{n+1} \leqslant x_n - c \text{ ё } c \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n.$$

Қайди 3. Мо давридеро, ки $f'(x)$ кам намешавад ва дар $[a, b]$ мусбат мебошад, муоина кардем. Боз се мавриди имконпазир аст: 1) $f'(x)$ намеафзояд ва дар $[a, b]$ манфӣ мебошад, 2) $f'(x)$ намеафзояд ва дар $[a, b]$ мусбат мебошад, 3) $f'(x)$ кам намешавад ва дар $[a, b]$ манфӣ мебошад.

Методи расандаҳо дар ҳар яки ин се мавриди мисли мавриди муоинашуда асоснок карда мешавад. Фақат қайд мекунем, ки дар мавриди 1) ба сифати наздикшавии нулӣ қимати $x_0 = b$-ро гирифтан лозим аст; дар мавридҳои 2) ва 3) қимати $x_0 = a$ ба сифати наздикшавии нулӣ гирифта мешавад. Ин ба сегменти $[a, b]$ мутааллиқ будани ҳама аъзоҳои пайдарпаии итерационии $\{x_n\}$ ва ба решаи матлуби c наздикшавии ин пайдарпаиро таъмин мекунад.

Қайди 4. Аз қимати саҳеҳи решаи c тамоил кардани наздикшавии n-уми x_n-ро (дар фарзиятҳои дар ҳамин пункт баёншуда) баҳо медиҳем.

Ба ифодаи $f(x_n) = f(x_n) - f(c)$ формулаи Лангранжро татбиқ карда, $f(x_n) = (x_n - c) f'(\xi_n)$-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо ифодаи зеринро ҳосил менамоем:

$$|x_n - c| < \frac{|f(x_n)|}{m}, \qquad (12.13)$$

дар ин ҷо m қимати минималии $|f'(x)|$ дар сегменти $[a, b]$. Формулаи (12.13) имконият медиҳад, ки аз қимати саҳеҳи решаи c тамоил кардани x_n-ро ба воситаи қимати модули функцияи дар нуқтаи x_n додашудаи $y = f(x)$ баҳо диҳем.

6. Асоснок кардани методи хордаҳо. Фарз мекунем, ки решаи матлуби c-и муодилаи $f(x) = 0$ дар ягон сегменти $[a, b]$ ҷудо гузошта шудааст; функцияи $f(x)$ дар ҳамин сегмент *ҳосилаи якуми монотоние дорад, ки аломати доимиашро нигоҳ медорад.* Барои муайянӣ чунин мепиндорем, ки ин ҳосила кам намешавад ва дар сегменти $[a, b]$ мусбат мебошад. Қайд мекунем, ки муодилаи

$$x = F(x), \text{ дар ин ҷо } F(x) = x - \frac{(b-x)f(x)}{f(b)-f(x)}*, \qquad (12.14)$$

дар сегменти $[a, b]$ фақат якто решаи c дорад, ки он бо решаи муодилаи $f(x) = 0$ мувофиқ меояд. Бинобар ин мо ба ҷои муодилаи $f(x) = 0$ муодилаи (12.14)-ро ҳал мекунем. Барои ин, $x_0 = a$ гирифта, пайдарпаии итерационии

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)} \qquad (12.15)$$

-ро месозем. Қайд мекунем, ки формулаи рекуррентии (12.15) аниқан бо формулаи рекуррентии (12.2) мувофиқ меояд.

Исбот мекунем, ки пайдарпаии $\{x_n\}$ ба решаи матлуби c наздик мешавад.

Агар барои ягон номери n $x_n = c$ (c — решаи матлуб) бошад, онгоҳ $f(x_n) = f(c) = 0$ аст ва аз формулаи (12.15) $x_{n+1} = c$-ро ҳосил менамоем. Ҳамин тавр муҳокима ронда, мо пай дар пай исбот мекунем, ки $x_{n+2} = x_{n+3} = \ldots = c$ аст, яъне пайдарпаии итерационии $\{x_n\}$ ба решаи матлуби c наздик мешавад.

Акнун мувофиқи индукция исбот мекунем, ки *агар* x_n *муносибати* $a \leqslant x_n < c$*-ро қаноат намояд, онгоҳ* x_{n+1} *муносибати* $a \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant c$*-ро қаноат менамояд.*

Аз ин ҷо ва аз $x_0 = a$ натиҷа мебарояд, ки ҳамаи x_n-ҳо ба сегменти $[a, c]$ (ва хусусан ба $[a, b]$) тааллуқ доранд ва пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии камнашаванда (ва, бинобар ин, пайдарпаии наздикшаванда) мебошад.

Дар асоси тасдиқоти 1-уми п. 4 ин бо исботи ба решаи матлуби c наздик шудани пайдарпаии итерационии $\{x_n\}$ ба итмом мерасад.

---

* Дар айни ҳол чунин меҳисобем, ки $F(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ аст. Онгоҳ функцияи $F(x)$ дар сегменти $[a, b]$ бефосила мебошад.

Инак, акнун исбот кардан лозим, ки *агар* x_n *муносибати* $a \leqslant x_n < c$*-ро қаноат намояд, онгоҳ* x_{n+1} *муносибати* $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant c$*-ро қаноат менамояд.*

Фарз мекунем, ки $a \leqslant x_n < c$ аст. Аз муносибати (12.15), $f(c) = 0$ буданашро ба инобат гирифта,

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = \frac{(b - x_n)[f(c) - f(x_n)]}{[f(b) - f(c)] + [f(c) - f(x_n)]}$$

-ро ҳосил мекунем. Ба ифодаҳои даруни қавсҳои квадратӣ теоремаи Лагранжро татбиқ карда,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(b - x_n) f'(\xi_n)}{(b - c) f'(\xi_n^*) + (c - x_n) f'(\xi_n)} \cdot (c - x_n) \qquad (12.16)$$

-ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо $x_n < \xi_n < c$, $c < \xi_n^* < b$, чунки $\xi_n < \xi_n^*$ аст. Дар асоси камнашаванда ва мусбат будани ҳосилаи $f'(x)$ чунин навиштан мумкин аст: $0 < f'(\xi_n) \leqslant f'(\xi_n^*)$. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки касри қисми рости (12.16) мусбат аст ва, ғайр аз он, ва аз як калон нест (чунки $(b - c) f'(\xi_n^*) + (c - x_n) f'(\xi_n) \geqslant [(b - c) + (c - x_n)] \cdot f'(\xi_n) = (b - x_n) f'(\xi_n)$). Пас, $0 \leqslant x_{n+1} - x_n \leqslant c - x_n$, яъне $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant c$.

Қайди 1. Мо давридеро, ки $f'(x)$ кам намешавад ва дар $[a, b]$ мусбат мебошад, муоина кардем. Боз се маврид имконпазир аст: 1) $f'(x)$ намеафзояд ва дар $[a, b]$ манфӣ аст, 2) $f'(x)$ намеафзояд ва дар $[a, b]$ мусбат мебошад, 3) $f'(x)$ кам намешавад ва дар $[a, b]$ манфӣ аст.

Ин се маврид ба мавридҳои омӯхтаамон монанд аст. Дар мавриди 1) муодилаи $f(x) = 0$ бо муодилаи (12.14) иваз карда мешавад ва ба сифати наздикшавии нулӣ $x_0 = a$ гирифта мешавад (дар айни ҳол пайдарпаии $\{x_n\}$ низ пайдарпаии камнашаванда мебошад). Дар мавридҳои 2) ва 3) муодилаи $f(x) = 0$ на бо муодилаи (12.14), балки бо муодилаи

$$x = F(x),$$

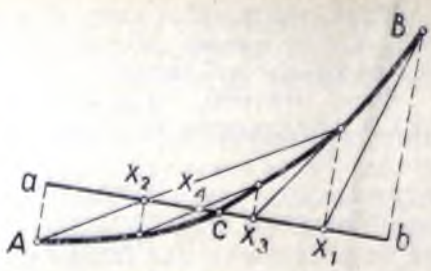
ки дар ин ҷо

$$F(x) = x - \frac{(a - x) f(x)}{f(a) - f(x)}$$

мебошад, иваз карда мешавад ва ба сифати наздикшавии нулӣ нуқтаи $x_0 = b$ гирифта мешавад (дар айни ҳол пайдарпаии $\{x_n\}$ пайдарпаии афзуннашаванда мебошад).

Қайди 2. Баҳодиҳии аз решаи c тамоил кардани x_n (12.13), ки барои методи расандаҳо муқаррар карда будем, барои методи хордаҳо ҳам дуруст мебошад.

Қайди 3. Дар амалия аксаран аз методи омехтае истифода мекунанд, ки он аз татбиқи бонавбати методи расандаҳо ва методи хордаҳо иборат аст. Барои муайянӣ фарз мекунем, ки $f'(x)$ кам намешавад ва дар сегменти $[a, b]$ мусбат мебошад (расми 12.6). Нуқтаи b-ро ба сифати наздикшавии нулӣ гирифта, x_1-ро бо методи расандаҳо муайян мекунем. Баъди ин методи хордаҳоро на ба сегменти $[a, b]$, балки ба сегменти $[a, x_1]$ татбиқ карда, x_2-ро муайян мекунем. Сонӣ, x_1-и ёфташударо ба асос гирифта, x_3-ро бо методи расандаҳо муайян мекунем ва методи хордаҳоро ба сегменти $[x_2, x_3]$ татбиқ карда, x_4-ро муайян менамоем. Ин процесс дар расми 12.6 тасвир шудааст.



Расми 12.6.

Афзалияти методи омехта ин аст: якум, он назар ба методи хордаҳо наздикшавиро метезонад ва дуюм, азбаски наздикшавиҳои пайдарпаи x_n ва x_{n+1}-и методи омехта аз ҳар ду тараф ба реша наздик мешаванд, пас фарқи $|x_{n+1} - x_n|$ баҳодиҳии саҳви ин методро ҳосил мекунад. Агар ба сифати қимати тақрибии реша $x_n^* = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$ гирифта шавад, онгоҳ барои саҳв баҳодиҳии

$$|x_n^* - c| < \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2}$$

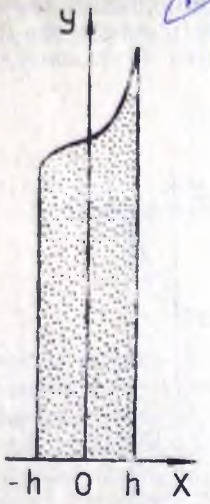
-ро ҳосил мекунем.

§ 2. Методҳои ҳисоби тақрибии интегралҳои муайян

1. Мукаддима. Ҳангоми ҳал кардани як қатор масъалаҳои физикавӣ ва техникии актуалӣ интегралҳои муайян аз функцияҳое, ки функцияҳои ибтидоиашон *ба воситаи функцияҳои элементарӣ ифода намешаванд,* дучор мешаванд. Ғайр аз он, дар татбиқот бо интегралҳои муайяне кордор мешавем, ки *функцияҳои таҳтиинтегралиашон функцияҳои элементарӣ намебошанд.* Ин ба зарурияти коркарди методҳои тақрибан ҳисоб кардани интегралҳои муайян* меорад.

---

* Методҳои тақрибиро аксар вақт барои интегралҳое, ки ба воситаи функцияҳои элементарӣ ифода мешаванд, низ истифода мекунанд.



Расми 12.7.

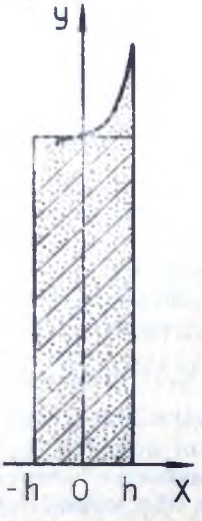
Мо дар ин параграф бо се методи маъмули тақрибан ҳисоб кардани интегралҳои муайян: *методи росткунҷаҳо, методи трапецияҳо ва методи параболаҳо* шинос мешавем.

Идеяи асосии ин методҳо ин аст: иваз кардани функцияи таҳтиинтегралии $f(x)$ бо функцияи соддатар — бисьёраъзогие, ки дар ягон нуқтаҳо бо $f(x)$ мувофиқ меояд. Барои аниқ кардани ин идея ҳангоми хурд будани h-ҳо интегрални $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$-ро муоина мекунем, ки он масоҳати трапецияи каҷхаттаи борики дар зери графики функцияи $y = f(x)$ дар сегменти $[-h, h]$ воқеъбуда (расми 12.7)-ро ифода мекунад.

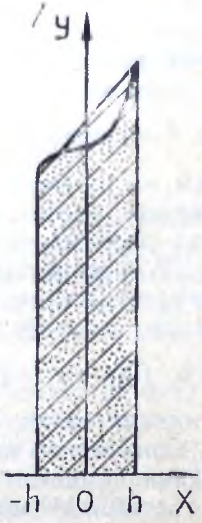
Функцияи $f(x)$-ро бо бисьёраъзогии тартиби нулӣ, яъне бо константаи $f(0)$ иваз мекунем. Дар ин ҳолат интегрални $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ тақрибан бо *масоҳати росткунҷае,* ки дар расми 12.8 штрих карда шудааст, иваз мешавад. Сонитар мо нишон медиҳем, ки ҳангоми ба $f(x)$ талаботи муайян гузоштан хатои дар ҳолати ингуна ивазкунӣ содиршуда тартиби h^3 дорад. Функцияи $f(x)$-ро бо бисьёраъзогии тартиби якум, яъне бо функцияи хаттии $y = kx + b$, ки бо $f(x)$ дар нуқтаҳои $-h$ ва h мувофиқ меояд, иваз мекунем. Дар ин ҳолат $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ тақрибан бо *масоҳати трапецияи ростхаттаи* дар расми 12.9 штрихшуда иваз мешавад. Баъдтар мо нишон медиҳем, ки ҳангоми ба $f(x)$ талаботи муайян гузоштан саҳви дар ҳолати ингуна ивазкунӣ содиршуда ҳам тартиби h^3 дорад. Ниҳоят, функцияи $f(x)$-ро бо бисьёраъзогии тартиби дуюм, яъне бо параболаи $y = Ax^2 + Bx + C$, ки бо $f(x)$ дар нуқтаҳои $-h$, 0 ва h мувофиқ меояд, иваз мекунем. Дар ин ҳолат $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ тақрибан бо *масоҳати фигурае, ки дар зери парабола воқеъ асту* дар расми 12.10 штрих шудааст, иваз мешавад.

Сонитар мо нишон медиҳем, ки ҳангоми ба функцияи $f(x)$ талаботи муайян гузоштан саҳви дар ҳолати ингуна ивазкунӣ содиршуда тартиби h^5 дорад. Агар $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$-ро дар сегменти дилхоҳи $[a, b]$ ҳисоб кардан лозим шавад, онгоҳ ин сегментро ба сегментчаҳои шумораашон ба қадри кифоя бисьёр тақсим

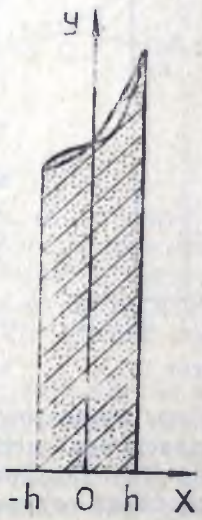
кардан ва ба ҳар яки ин сегментчаҳо муҳокимаронихои баёншударо татбиқ кардан даркор аст. Дар ҳамин ҳолатҳо мо ба методҳои росткунчаҳо, трапецияҳо ва параболаҳо (дар намуди умумиашон) меоем.



Расми 12.8.



Расми 12.9.



Расми 12.10.

Ҳар яки ин се метод дар пп. 2, 3, 4 муфассал баён шудаанд. Ҳозир дар ин ҷо як қайди барои минбаъда муҳимро баён мекунем.

Қ а й д. *Бигзор функцияи* $f(x)$ *дар сегменти* $[a, b]$ *бефосила бошад ва* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *баъзе нуқтаҳои сегменти* $[a, b]$ *бошанд. Онгоҳ дар ин сегмент чунин нуқтаи* ξ *ёфт мешавад, ки миёнаи арифметикии* $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$ *ба* $f(\xi)$ *баробар аст.*

Воқеан, ҳудудҳои саҳеҳи функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$-ро бо m ва M ишорат мекунем. Онгоҳ барои номери дилхоҳи k нобаробариҳои $m \leqslant f(x_k) \leqslant M$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ дурустанд. Ин нобаробариҳои дар ҳама номерҳои $k = 1, 2, \ldots, n$ ба сумма гирифта ва натиҷаашро ба n тақсим карда,

$$m \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \leqslant M$$

-ро ҳосил мекунем. Азбаски функцияи бефосила қиматҳои фоси-

лавии дилхоҳи воқеи байни m ва M-ро қабул мекунад, пас дар сегменти $[a, b]$ чунин нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки

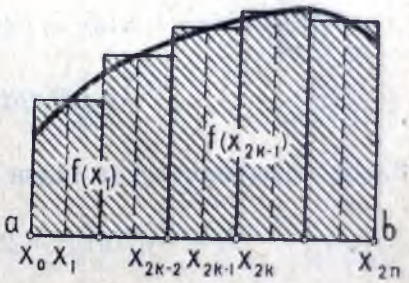
$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \qquad (12.17)$$

2. Методи росткунҷаҳо. Бигзор ҳисоб кардани

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (12.18)$$

лозим бошад. Бо ёрии нуқтаҳои $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$ сегменти $[a, b]$-ро ба n қисмҳои *баробар* тақсим мекунем. Нуқтаи мобайнии сегменти $[x_{2k-2}, x_{2k}]$-ро бо x_{2k-1} ишорат мекунем (расми 12.11). Методи росткунҷаҳо ин аст: иваз кардани интеграли (12.18) бо суммаи

$$\frac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})]$$



Расми 12.11.

-и масоҳатҳои росткунҷаҳое, ки баландиашон мувофиқан ба $f(x_{2k-1})$ ва асосашон ба $x_{2k} - x_{2k-2} = \frac{b-a}{n}$ баробар аст (ин росткунҷаҳо дар расми 12.11 штрих шудаанд). Ҳамин тариқ, формулаи

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})] + R \qquad (12.19)$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо R аъзои боқимонда мебошад. Формулаи (12.19) *формулаи росткунҷаҳо* номида мешавад.

Исбот мекунем, ки агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ ҳосилаи дуюми бефосила дошта бошад, онгоҳ дар ин сегмент чунин нуқтаи η ёфт мешавад, ки аъзои боқимондаи формулаи (12.19) ба ифодаи зерин баробар аст:

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f^{(2)}(\eta). \qquad (12.20)$$

Бо ин мақсад аввал $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$-ро баҳо медиҳем. Барои ин чунин меҳисобем, ки *функцияи* $f(x)$ *дар сегменти* $[-h, +h]$ *ҳосилаи дуюми бефосила дорад.*

Барои ин ҳар яки ин ду интегралҳоро аз рӯи ҳиссаҳо ду маротиба меинтегронем:

$$I_1 = \int_{-h}^{0} f^{(2)}(x)(x+h)^2dx, \quad I_2 = \int_{0}^{h} f^{(2)}(x)(x-h)^2dx.$$

Барои интеграли якум:

$$I_1 = \int_{-h}^{0} f^{(2)}(x)(x+h)^2dx = [(x+h)^2 f'(x)]\Big|_{-h}^{0} -$$

$$- 2\int_{-h}^{0} f'(x)(x+h)dx = f'(0)h^2 - [2(x+h)\cdot f(x)]\Big|_{-h}^{0} +$$

$$+ 2\int_{-h}^{0} f(x)dx = f'(0)h^2 - 2f(0)h + 2\int_{-h}^{0} f(x)dx.$$

Барои интеграли дуюм айнан ҳамин тавр ҳосил мекунем, ки

$$I_2 = -f'(0)h^2 - 2\cdot f(0)h + 2\int_{0}^{h} f(x)dx.$$

Нимсуммаи ифодаҳои барои I_1 ва I_2 ҳосилшуда ба формулаи зерин меорад:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = 2f(0)h + \frac{I_1 + I_2}{2}. \qquad (12.21)$$

Ба интегралҳои I_1 ва I_2 формулаи қимати миёнаро татбиқ карда ва ғайриманфӣ будани функцияҳои $(x+h)^2$ ва $(x-h)^2$-ро ба инобат гирифта, бузургии $\frac{I_1+I_2}{2}$-ро баҳо медиҳем. Дар сегменти $[-h, 0]$ чунин нуқтаи ξ_1 ва дар сегменти $[0, h]$ чунин нуқтаи ξ_2 ёфт мешавад, ки

$$\frac{I_1+I_2}{2} = \frac{1}{2}\int_{-h}^{0} f^{(2)}(x)(x+h)^2dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{h} f^{(2)}(x)(x-h)^2dx =$$

$$= \frac{1}{2} f^{(2)}(\xi_1)\int_{-h}^{0}(x+h)^2dx + \frac{1}{2} f^{(2)}(\xi_2)\int_{0}^{h}(x-h)^2dx =$$

$$= \frac{h^3}{6} f^{(2)}(\xi_1) + \frac{h^3}{6} f^{(2)}(\xi_2) = \frac{h^3}{3}\,\frac{f^{(2)}(\xi_1) + f^{(2)}(\xi_2)}{2}.$$

Дар асоси қайди охири п. 1 дар сегменти $[-h, +h]$ чунин нуқтаи η ёфт мешавад, ки

$$\frac{f^{(2)}(\xi_1) + f^{(2)}(\xi_2)}{2} = f^{(2)}(\eta).$$

Бинобар ин мо барои нимсуммаи $\frac{I_1 + I_2}{2}$ ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{h^3}{3} f^{(2)}(\eta).$$

Ин ифодаро ба (12.21) гузошта,

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = 2f(0)h + \bar{R} \qquad (12.22)$$

-ро ҳосил менамоем, ки дар ин ҷо

$$\bar{R} = \frac{1}{24} f^{(2)}(\eta)\,(2h)^3 \quad (-h \leqslant \eta \leqslant h). \qquad (12.23)$$

Азбаски бузургии $2f(0) \cdot h$ масоҳати росткунҷаи дар расми 12.8 штрихшударо ифода мекунад, пас формулаҳои (12.22) ва (12.23) исбот мекунанд, ки саҳви дар натиҷаи ба масоҳати номбурда иваз кардани $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ содиршуда тартиби h^3 дорад.

Ҳамин тарик, *ҳар қадар ки h хурд бошад, формулаи* $\int_{-h}^{h} f(x)dx = 2f(0)h$ *ҳамон қадар саҳеҳ аст.* Бинобар ин барои ҳисоб кардани $\int_a^b f(x)dx$ ин интегралро ба намуди суммаи n интегралҳои шумораашон ба қадри кифоя бисьёри

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

навиштан ва ба ҳар яки ин интегралҳо формулаи (12.22)-ро татбиқ кардан мумкин аст. Дарозии сегменти $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ба

$\frac{b-a}{n}$ баробар буданашро ба эътибор гирифта, мо формулаи росткунҷаҳо (12.19)-ро ҳосил мекунем, ки дар он

$$R = \overline{R}_1 + \overline{R}_2 + \ldots + \overline{R}_n = \frac{(b-a)^3}{24n^3}[f^{(2)}(\eta_1) + f^{(2)}(\eta_2) +$$

$$+ \ldots + f^{(2)}(\eta_n)] = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{f^{(2)}(\eta_1) + f^{(2)}(\eta^2) + \ldots + f^{(2)}(\eta_n)}{n} =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24n^2} f^{(2)}(\eta).$$

(Дар ин ҷо $a \leqslant \eta \leqslant b$. Мо формулаи (12.17)-ро барои функцияи $f^{(2)}(x)$ истифода кардем.)

3. Методи трапецияҳо. Фарз мекунем, ки

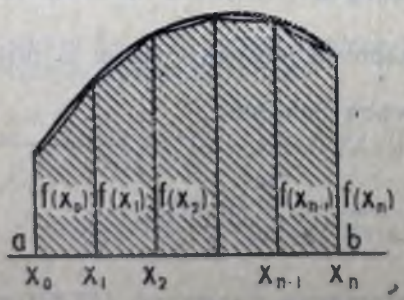
$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (12.18)$$

-ро ҳисоб кардан лозим аст. Сегменти $[a, b]$-ро бо ёрии нуқтаҳои $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ ба n қисми баробар тақсим мекунем (расми 12.12). Методи трапецияҳо аз зерин иборат аст: иваз кардани интеграли (12.18) бо суммаи

$$\frac{b-a}{2n}\{[f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \ldots +$$

$$+ [f(x_{n-1}) + f(x_n)]\} = \frac{b-a}{2n}\{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\}$$

-и масоҳатҳои трапецияҳое, ки асосҳояшон мувофиқан ба $f(x_{k-1})$ ва $f(x_k)$ ва баландиашон ба $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ баробаранд (ин трапецияҳо дар расми 12.12 штрих карда шудаанд).



Расми 12.12.

Ҳамин тариқ, формулаи зерин дуруст аст:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\} + R, \qquad (12.24)$$

дар ин ҷо R — аъзои боқимонда. Формулаи (12.24) *формулаи трапецияҳо* номида мешавад.

Исбот мекунем, ки агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ ҳосилаи дуюми бефосила дошта бошад, онгоҳ дар ҳамин сегмент чунин нуқтаи η ёфт мешавад, ки аъзои боқимондаи формулаи (12.24), яъне R чунин намуд дорад:

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f^{(2)}(\eta). \qquad (12.25)$$

Чунин меҳисобем, ки *функцияи $f(x)$ дар сегменти $[-h, +h]$ ҳосилаи дуюми бефосила дорад ва $\int_{-h}^{+h} f(x)\,dx$-ро баҳо медиҳем.*

$\int_{-h}^{+h} f^{(2)}(x)(x^2 - h^2)\,dx$-ро аз рӯи ҳиссаҳо ду маротиба меинтегронем:

$$\int_{-h}^{+h} f^{(2)}(x)(x^2-h^2)dx = [f'(x)(x^2-h^2)]\Big|_{-h}^{+h} - 2\int_{-h}^{+h} f'(x)\,x\,dx =$$

$$= -[2f(x)\,x]\Big|_{-h}^{+h} + 2\int_{-h}^{+h} f(x)\,dx = -2[f(-h) + f(+h)]h +$$

$$+ 2\int_{-h}^{+h} f(x)\,dx. \qquad (12.26)$$

Дар асоси (12.26) формулаи

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \frac{f(-h) + f(h)}{2} 2h + \bar{R} \qquad (12.27)$$

-ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо

$$\bar{R} = -\frac{1}{12} f^{(2)}(\eta)\,(2h)^3 \quad (-h \leqslant \eta \leqslant h). \qquad (12.28)$$

Азбаски бузургии $\frac{f(-h) + f(h)}{2} 2h$ масоҳати трапецияи дар расми 12.9 штрихшударо ифода мекунад, пас формулаҳои (12.27) ва (12.28) исбот мекунанд: саҳви дар натиҷаи ба масо-

ҳати номбурда иваз кардани $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ содиршуда тартиби h^5 дорад.

Барои ҳисоб кардани $\int_a^b f(x)\,dx$, чунон ки дар методи росткунҷаҳо рафтор кардем, ин интегралро ба намуди суммаи интегралҳои шумораашон ба қадри кифоя бисьёри

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

менависем. Ба ҳар яки ин интегралҳо формулаҳои (12.27) ва (12.28)-ро татбиқ карда, формулаи трапецияҳо (12.24)-ро бо ифодаи аъзои боқимонда (12.25) ҳосил мекунем.

4. Методи параболаҳо. Барои ҳисоб кардани

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{12.18}$$

сегменти $[a, b]$-ро бо ёрии нуқтаҳои $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$ боз ба n қисмҳои баробар тақсим карда, миёнаҷои сегменти $[x_{2k-2}, x_{2k}]$-ро бо x_{2k-1} ишорат менамоем. Методи параболаҳо аз зерин иборат аст: иваз кардани интеграли (12.18) бо суммаи

$$\frac{b-a}{6n}\{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \ldots + [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]\} =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\}$$

-и масоҳатҳои фигураҳои дар расми 12.13 штрихшуда, ки трапецияҳои каҷхаттаро ифода мекунанд; ин трапецияҳо дар зери параболаҳое, ки аз се нуқтаи графики функцияи $f(x)$-и абсциссаҳояшон x_{2k-2}, x_{2k-1} ва x_{2k} мегузаранд, воқеъ мебошанд*.

---

* Аз мисоли дуюми п. 4 § 2 боби 11 натиҷа мебарояд, ки ифодаи $\frac{b-a}{6n}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]$ аз сабаби $\frac{b-a}{6n} = \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6}$ буданаш, масоҳатеро ифода мекунад, ки он дар зери параболаи аз се нуқтаи графики функцияи $f(x)$-и абсциссаҳояшон x_{2k-2}, x_{2k-1} ва x_{2k} гузаранда воқеъ аст.

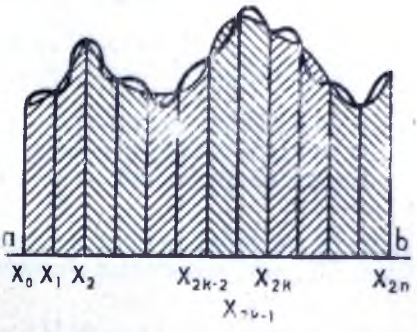
Ҳамин тариқ, формулаи зерин дуруст аст:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\right] + R, \tag{12.29}$$

дар ин ҷо R — аъзои боқимонда. Формулаи (12.29) *формулаи параболаҳо* ё *формулаи Симпсон* номида мешавад.

Исбот мекунем, ки агар функцияи $f(x)$ дар сегменти $[a, b]$ ҳосилаи чоруми бефосила дошта бошад, онгоҳ дар ҳамин сегмент чунин нуқтаи η ёфт мешавад, ки аъзои боқимонда R-и формулаи (12.29) ба ифодаи зерин баробар аст:

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta). \tag{12.30}$$



Расми 12.13.

Бо ин мақсад аввал $\int_{-h}^{+h} f(x)dx$ -ро баҳо медиҳем; барои ин чунин меҳисобем, ки *функцияи $f(x)$ дар сегменти $[-h, +h]$ ҳосилаи чоруми бефосила дорад.*

Барои ин ҳар яки ин ду интеграл:

$$I_1 = \int_{-h}^{0} f^{(4)}(x)(x+h)^3\left(x - \frac{h}{3}\right)dx,$$

$$I_2 = \int_{h}^{h} f^{(4)}(x)(x-h)^3\left(x + \frac{h}{3}\right)dx$$

-ро аз рӯи ҳиссаҳо чор маротиба меинтегронем.

Барои интеграли якум:

$$I_1 = \int_{-h}^{0} f^{(4)}(x)(x+h)^3\left(x - \frac{h}{3}\right)dx = \left[f^{(3)}(x)(x+h)^3\left(x - \frac{h}{3}\right)\right]\Big|_{-h}^{0} -$$

$$- \left\{f^{(2)}(x)\left[3(x+h)^2\left(x - \frac{h}{3}\right) + (x+h)^3\right]\right\}\Big|_{-h}^{0} +$$

$$+ \left\{6f'(x)\left[(x+h)\left(x - \frac{h}{3}\right) + (x+h)^2\right]\right\}\Big|_{-h}^{0} - \left\{6f(x)\left(4x + \frac{8}{3}h\right)\right\}\Big|_{-h}^{0} + 24\int_{-h}^{0} f(x)dx = -f^{(3)}(0)\frac{h^4}{3} + 4f'(0)h^2 -$$

$$- 8h[f(-h) + 2f(0)] + 24\int_{-h}^{0} f(x)\,dx. \tag{12.31}$$

Айнан барои интеграли дуюм

$$I_2 = f^{(3)}(0)\frac{h^4}{3} - 4f'(0)\,h^2 - 8h\,[f(h) + 2f(0)] + 24\int_0^h f(x)dx. \tag{12.32}$$

Муносибатҳои (12.31) ва (12.32)-ро ҷамъ карда, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\int_{-h}^{+h} f(x)\,dx = \frac{f(-h) + 4f(0) + f(+h)}{6}\,2h + \frac{I_1 + I_2}{24}. \tag{12.33}$$

Барои баҳо додани $\frac{I_1 + I_2}{24}$ ба интегралҳои I_1 ва I_2 формулаи қимати миёнаро татбиқ мекунем; барои ин дар сегментҳои $[-h, 0]$ ва $[0, +h]$ мувофиқан ғайримусбат будани функцияҳои $(x + h)^3(x - \frac{h}{3})$ ва $(x - h)^3(x + \frac{h}{3})$-ро ба эътибор мегирем.

Дар сегменти $[-h, 0]$ чунин нуқтаи ξ_1 ва дар сегменти $[0, +h]$ чунин нуқтаи ξ_2 ёфт мешавад, ки

$$\frac{I_1 + I_2}{24} = \frac{1}{24}\left[f^{(4)}(\xi_1)\int_{-h}^{0}(x + h)^3\left(x - \frac{h}{3}\right)dx + \right.$$

$$\left. + f^{(4)}(\xi_2)\int_0^{+h}(x - h)^3\left(x + \frac{h}{3}\right)dx\right] = \frac{-h^5}{90}\,\frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2}.$$

Қайди охири п. 1-ро боз истифода мекунем: дар сегменти $[-h, +h]$ чунин нуқтаи η ёфт мешавад, ки

$$\frac{I_1 + I_2}{24} = \frac{-h^5}{90}f^{(4)}(\eta). \tag{12.34}$$

Аз (12.33) ва (12.34) чунин ифодаро комилан ҳосил мекунем:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{[f(-h) + 4f(0) + f(h)]}{6}\,2h + \bar{R}, \tag{12.35}$$

дар ин ҷо

$$\bar{R} = -\frac{(2h)^5}{2880}f^{(4)}(\eta). \tag{12.36}$$

Азбаски бузургии $\frac{[f(-h)+4f(0)+f(h)]}{6}2h$ масоҳати фигураеро, ки дар зери парабола воқеъ асту дар расми 12.10 штрих карда шудааст, ифода мекунад, пас формулаҳои (12.35) ва (12.36) исбот мекунанд, ки саҳви дар натиҷаи ба масоҳати номбурда иваз-кунии $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ содиршуда тартиби h^5 дорад.

Барои ҳисоб кардани $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, чунон ки дар методҳои рост-кунҷаҳо ва трапецияҳо рафтор карда будем, ҳамон хел амал карда, ин интегралро ба намуди суммаи n-то интегралҳо менависем:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx.$$

Ба ҳар яки ин интегралҳо формулаҳои (12.35) ва (12.36)-ро татбиқ намуда, мо формулаи Симпсон (12.29)-ро, ки дорои аъзои боқимондаи (12.30) мебошад, ҳосил мекунем.

Аъзои боқимондаи (12.30)-ро бо аъзоҳои боқимондаи (12.20) ва (12.25) муқоиса карда, мо боварӣ ҳосил мекунем, ки формулаи Симпсон назар ба формулаҳои росткунҷаҳо ва трапецияҳо саҳеҳии калон медиҳад.

Ба сифати мисоли татбиқи формулаи Симпсон интеграли $I(x_0)=\int_0^{x_0} e^{-x^2}\,dx$*-ро ҳисоб мекунем; барои содда шудан қиматҳои x_0-ро аз сегменти $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$ мегирем. $f(x)=e^{-x^2}$ фарз карда ва ҳосилаи $f^{(4)}(x)=4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}$-ро ҳисоб карда, бо осонӣ бовар мекунем, ки дар ҳама қиматҳои x-и сегменти $0 \leqslant x \leqslant x_0 \leqslant 1$ дар ҳаргуна маврид $|f^{(4)}(x)|<20$ аст. Дар асо-си баҳодиҳии (12.30) тасдиқ карда метавонем, ки $|R|<\frac{1}{144n^4}$. Пас, сегменти $[0, x_0]$-ро ба панҷ қисми баробар тақсим карда ва интеграли муоинашавандаро бо суммаи қисми рости форму-

---

* Интеграли муоннашаванда ба воситаи функцияҳои элементарӣ ифода намешавад. Ин интеграл дар физикаи статикӣ, назарияи нақли гармӣ ва диффузия васеъ татбиқ мешавад.

лаи Симпсон иваз намуда, ин интегралро бо саҳеҳии то $\frac{1}{144 \cdot 5^4} =$

$= \frac{1}{90000}$ ҳисоб мекунем.

5. Қайди хотимавӣ. Ҳар яки методҳои дар ин боб баёншудаи ҳисоб кардани решаҳои муодилаҳо ва интегралҳои муайян барои иҷрои ҳисоббарориҳо *алгоритми формулавии аниқ* доранд. Хусусияти дигари методҳои баёншуда *стереотипии* ҳамон амалҳои ҳисоббарорие мебошад, ки дар ҳар як қисми алоҳида иҷро кардан лозим меояд. Ин ду хусусият татбиқи васеи методҳои баёншударо барои иҷрои ҳисоббарориҳо дар мошинҳои ҳисоббарори тезамали ҳозиразамон таъмин менамоянд.

Мо барои тақрибан ҳисоб кардани интеграли (12.18) аз функцияи $f(x)$ зеринҳоро ба асос гирифта будем: ба n-то сегментҳои қисмии б а р о б а р и шумораашон ба қадри кифоя зиёд тақсим кардани сегменти асосии $[a, b]$ ва дар ҳар як сегменти қисмӣ бо бисьёраъзогиҳои тартибашон мувофиқан нуль, якум ё дуюм иваз кардани функцияи $f(x)$.

Саҳве, ки дар ингуна ҳолатҳо пайдо мешавад, хосиятҳои индивидуалии функцияи $f(x)$-ро ҳеҷ ба ҳисоб намегирад. Бинобар ин дар бораи варьиацияи (варьиронии) нуқтаҳои тақсимоти сегменти асосии $[a, b]$ ва барои ҳар як функцияи қайдшудаи $f(x)$ интихоб кардани чунин тақсимоти оптималии сегменти асосии $[a, b]$ ба n-то сегментҳои қисмии ба якдигар нобаробар (ки он бузургии минималии саҳви формулаи тақрибии додашударо таъмин мекунад) идея ба вуҷуд меояд.

Мо дар Иловаи боби 14 татбиқи ин идеяро, ки ба А. Н. Тихонов ва С. С. Гайсарян тааллуқ дорад, меомӯзем.

БОБИ 13

НАЗАРИЯИ ҚАТОРҲОИ АДАДӢ

Мо ҳанӯз дар курси математикаи элементарӣ бо суммаҳое дучор шуда будем, ки шумораи ҷамъшавандаҳояшон беохир буд (масалан, суммаи элементҳои шумораашон беохири прогрессияи геометрӣ). Ингуна суммаҳоро қаторҳо меноманд ва дар ҳамин боб омӯхта мешаванд. Қаторҳо дар баъзе шартҳо хосиятҳое доранд, ки онҳо ба хосиятҳои суммаҳои охирнок монанд мебошанд. Мо инро муқаррар мекунем.

§ 1. Мафҳуми қатори ададӣ

1. Қатор ва суммаҳои хусусии он. Қаторҳои наздикшаванда ва дуршаванда. Пайдарпаии ададии беохири $u_1, u_2, ..., u_k, ...$-ро муоина мекунем ва аз элементҳои ин пайдарпай ифодаи намуди

$$u_1 + u_2 + ... + u_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \qquad (13.1)$$

-ро тартиб медиҳем. Ифодаи (13.1) *қатори ададӣ* ё *қатор* номида мешавад. Элементҳои алоҳидаи u_k, ки ифодаи (13.1) аз онҳо ташкил шудааст, *аъзоҳои қатори додашуда* номида мешаванд. Чун қоида, мо барои ишорати қатор символи сумма $\sum$-ро истифода мекунем.

Суммаи n аъзои аввалини қатори додашударо суммаи хусусии n-уми қатори додашуда меномем ва онро бо символи S_n ишорат мекунем. Инак, $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Қатори (13.1) *қатори наздикшаванда номида мешавад, агар пайдарпаии $\{S_n\}$-и суммаҳои хусусии ин қатор наздик шавад. Дар айни ҳол лимити S-и пайдарпаии суммаҳои хусусии $\{S_n\}$ суммаи қатори додашуда номида мешавад.* Ҳамин тариқ, барои қатори наздикшавандае, ки суммааш S мебошад, мо баробарии

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

-ро ба таври формалӣ навишта метавонем.

Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *вуҷуд надошта бошад, қаторро қатори дуршаванда меноманд.*

Қайд мекунем, ки мафҳуми сумма фақат барои қаторҳои наздикшаванда муайян аст ва, тафовутан аз мафҳуми суммаи охирнок, ба воситаи гузариши лимитӣ* ҷорӣ карда мешавад.

Муоинаи қаторҳои ададӣ шакли нави омӯзиши пайдарпаиҳои ададӣ мебошад, чунки: 1) ба ҳар як қатори додашуда пайдарпаии суммаҳои хусусии он якқимата мувофиқ меояд, 2) ба ҳар як пайдарпаии додашудаи $\{S_n\}$ қаторе, ки барояш ин пайдарпай пайдарпаии суммаҳои хусусии он мебошад, якқимата мувофиқ меояд (аъзоҳои қаторро баробари $u_k = S_k - S_{k-1}$ ҳангоми $k > 1$ будан ва $u_1 = S_1$ фарз кардан кифоя аст).

Муқаррар кардани аломатҳое, ки аз рӯи онҳо масъалаи наздикшавандагӣ ё дуршавандагии қатори додашударо ҳал кардан мумкин аст, яке аз масъалаҳои асосии назарияи қаторҳои ададӣ мебошад.

Мисолҳои қаторҳои ададӣ.

1. Масъалаи наздикшавандагии қатори

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \qquad (13.2)$$

-ро меомӯзем.

Азбаски пайдарпаии суммаҳои хусусии он $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, ..., $S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0$, ... лимит надорад, пас қатори (13.2) дуршаванда аст.

2. Қатореро, ки аз элементҳои прогрессияи геометрӣ ташкил шудааст, муоина мекунем:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}, \qquad (13.3)$$

суммаи хусусии n-уми S_n-и ин қатор ҳангоми $q \neq 1$ будан чунин намуд дорад:

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}. \qquad (13.4)$$

---

* Дар математикаи хозиразамон, дар баробари мафҳуми суммаи нобурда, мафҳуми суммаи қаторҳо ба маънои ҷамъбастшудаи гуногун омӯхта мешавад. Ин имконият медиҳад, ки аксари қаторҳои дуршаванда ба маънои ҷамъбастшудааш ба сумма гирифта шавад (ба Иловаи 3-юми ҳамин боб нигар.).

Маълум аст, ки ҳангоми $|q| < 1$ будан пайдарпаии суммаҳои хусусии S_n наздик мешавад ва лимити ба $\dfrac{1}{1-q}$ баробарро дорад. Ҳамин тариқ, ҳангоми $|q| < 1$ будан қатори муоинашаванда наздик мешавад ва суммаи ба $\dfrac{1}{1-q}$ баробарро дорад.

Ҳангоми $|q| > 1$ будан, аз баробарии (13.4) маълум аст, ки пайдарпаии S_n (ва, пас, қатори муоинашаванда ҳам) дур мешавад. Ҳангоми $|q| = 1$ будан дуршавандагии қатори (13.3) бевосита муқаррар мешавад. Воқеан, ҳангоми $q = +1$ будан $S_n = n$ аст, дуршавандагии пайдарпаии S_n маълум аст; ҳангоми $q = -1$ будан қатори (13.3) ба қатори омӯхташудаи (13.2) табдил мешавад.

3. Бигзор x адади қайдшудаи дилхоҳ бошад. Исбот мекунем, ки қатори

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}^{*} \qquad (13.5)$$

наздик мешавад ва суммаи ба e^x баробар дорад.

Мо дар п. 2 § 15 боби 8 **функцияи e^x-ро мувофиқи** формулаи Маклорен ба қатор ҷудо карда будем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \qquad (13.6)$$

дар ин ҷо

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1). \qquad (13.7)$$

Аз формулаҳои (13.6) ва (13.7) чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\left|\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right] - e^x\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}. \qquad (13.8)$$

Сумман хусусии n-уми қатори (13.5)-ро бо S_n ишорат карда, нобаробарии (13.8)-ро ба намуди

$$|S_n - e^x| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|} \qquad (13.9)$$

---

* Мо адади 1-ро бо символи 0! ишорат кардем.

навишта метавонем. Азбаски дар қимати қайдшудаи дилхоҳи x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0^*$$

аст, пас қисми рости нобаробарии (13.9) элементи пайдарпаии беохир хурдро ифода мекунад. Лекин ин чунин маъно дорад, ки пайдарпаии $\{S_n\}$ *ба адади* e^x *наздик мешавад.* Пас, қатори (13.5) ҳам наздик мешавад ва соҳиби суммаи e^x мебошад.

4. Ҳамин тавр, формулаи Маклоренро барои функцияҳои $\sin x$ ва $\cos x$ истифода карда, исбот кардан мумкин аст, ки қаторҳои

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

ва

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-2}}{(2k-2)!}$$

дар қимати қайдшудаи дилхоҳи x наздик мешаванд ва суммаҳои мувофиқан ба $\sin x$ ва $\cos x$ баробарро доранд.

2. Критерияи Коши доир ба наздикшавандагии қатор. Азбаски масъалаи наздикшавандагии қатор, мувофиқи таъриф, ба масъалаи наздикшавандагии пайдарпаии суммаҳои хусусии он баробаркувва мебошад, пас мо критерияи наздикшавандагии Коширо барои пайдарпаии суммаҳои хусусии он баён карда, шартҳои зарурӣ ва кифоягии наздикшавандагии қатори додашударо ҳосил мекунем. Критерияи Коширо барои пайдарпай баён мекунем. *Барои он ки пайдарпаии* $\{S_n\}$ *наздикшаванда бошад зарур ва кифоя аст, ки барои адади мусбати дилхоҳи* ε *чунин номери* N *ёфт шавад, ки барои ҳама номерҳои* n*-и қаноаткунандаи шарти* $n\geqslant N$ *ва барои ҳамаи* p*-ҳои натуралӣ* ($p=1, 2, 3, \ldots$)

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

бошад. Аз ин тасдиқот теоремаи *асосии* зеринро чун натиҷа ҳосил мекунем.

Теоремаи 13.1 *(критерияи Коши барои қатор). Барои он ки қатори* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ *наздик шавад, зарур ва кифоя*

---

* Ба мисоли 3-юми п. 3 § 3 боби 3 ниг.

аст, ки барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин номери N ёфт шавад, ки барои ҳама номерҳои n-и қаноаткунандаи шарти $n \geqslant N$ ва барои ҳама ададҳои натуралии p

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon \qquad (13.10)$$

бошад. Барои исботи ин теорема қайд кардан кифоя аст, ки бузургии таҳти аломати модули нобаробарии (13.10) ба фарқи суммаҳои хусусӣ $S_{n+p} - S_n$ баробар аст. Критерияи наздикшавандагии Коши асосан ҷиҳати назариявӣ дорад. Истифодаи он барои масъалаҳои амалии муқаррар кардани наздикшавандагӣ ё дуршавандагии ин ё он қатори конкретӣ, чун қоида, мушкилиҳо меорад. Бинобар ин мавҷудияти критерияи Коши масъалаи муқаррар кардани аломатҳои самарабахши амалии дигари наздикшавандагӣ ва дуршавандагии қаторҳоро аз байн намегирад.

Аз теореми 13.1 ду натиҷаи элементарии муҳим пайдо мешавад.

Натиҷаи 1. *Агар қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *наздик шавад, онгоҳ пайдарпаии* $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *пайдарпаии беохир хурд мебошад.*

Бузургии r_n-ро *боқимондаи* n-уми қатори $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ меноманд. Барои исбот кардани натиҷаи 1 исбот кардан кифоя аст, ки барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан $|r_n| \leqslant \varepsilon$ аст. Нобаробарии охирин аз нобаробарии (13.10), ки барои p-и дилхоҳ ($p = 1, 2, 3, \ldots$) дуруст аст, ва аз теореми 3.13 бевосита ҳосил мешавад.

Натиҷаи 2 (шарти зарурии наздикшавандагии қатор). *Барои он ки қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *наздикшаванда бошад, зарур аст, ки пайдарпаии* $u_1, u_2, u_3, \ldots$*-и аъзоҳои ин қатор пайдарпаии беохир хурд бошад.*

Исбот кардан кифоя аст, ки барои қатори наздикшавандаи додашуда ва барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $n \geqslant N_0$ будан $|u_n| < \varepsilon$ аст. Бигзор $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ дода шуда бошад. Мувофиқи теореми 13.1 чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан ва барои адади натуралии дилхоҳи p нобаробарии (13.10) иҷро мешавад. Аз ҷумла, ҳангоми $p = 1$ будан ин нобаробарӣ чунин намуд дорад:

$$|u_{n+1}| < \varepsilon \quad (\text{ҳангоми } n \geqslant N \text{ будан}). \qquad (13.11)$$

Агар акнун $N_0 = N + 1$ фарз кунем, онгоҳ ҳангоми $n \geqslant N_0$ будан дар асоси нобаробарии (13.11) $|u_n| < \varepsilon$-ро ҳосил менамоем, ки ҳаминро исбот кардан лозим буд.

Натиҷаи 2-ро ба таври дигар ин хел баён кардан мумкин аст: *барои он, ки қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *наздикшаванда бошад, зарур аст, ки* $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ *бошад.* Ҳамин тариқ, ҳангоми наздикшавандагии қатори додашударо тадқиқ кардан пеш аз ҳама донистан лозим, ки оё ҳангоми $k \to \infty$ аъзои k-уми ин қатор ба нуль майл мекунад. Агар ин тавр набошад, онгоҳ қатор дуршаванда аст. Масалан, қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5k^2 + 300k}$$

дуршаванда аст, чунки

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{5k^2 + 300k} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Ҳамин тавр, азбаски $\lim_{k\to\infty} (-1)^k$ вуҷуд надорад, пас қатори омӯхташудаи $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ дуршаванда аст.

Қайд мекунем, ки ҳангоми $k \to \infty$ ба нуль майл кардани аъзои k-уми қатор *фақат шарти зарурӣ буда, шарти кифоягии наздикшавандагии қатор намебошад.*

Ба сифати мисол қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \qquad (13.12)$$

-ро муоина мекунем. Ин қаторро одатан *қатори гармоникӣ* меноманд. Барои қатори гармоникӣ шарти зарурии наздикшавандагӣ иҷро мешавад, чунки $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ аст. Бо вуҷуди ин, исбот мекунем, ки ин қатор дуршаванда аст. Аз критерияи Коши истифода мекунем. Исбот мекунем, ки барои адади мусбати $\varepsilon = 1/2$ *чунин номери* N *вуҷуд надорад,* ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан барои адади натуралии дилхоҳи p

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right| < \varepsilon = \frac{1}{2} \qquad (13.13)$$

бошад. Воқеан, агар $p = n$ бошад, онгоҳ барои n-и ҳар қадар калон

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2}.$$

(Мо чун пиндоштем, ки дар суммаи охирин n-то ҷамъшавандаҳо ҳастанд ва ҷамъшавандаи хурдтарини онҳо ба $1/2n$ баробар аст.)

Инак, мо номери N-ро ҳар қадар калон гирем ҳам, нобаробарии (13.13) иҷро намешавад. Дар асоси критерияи Коши қатори (13.12) дуршаванда аст.

3. Ду хосияте, ки бо наздикшавандагии қатор алоқаманданд. 1°. *Партофтани аъзоҳои шумораашон охирноки қатор (ё ба қатор ҳамроҳ кардани аъзоҳои шумораашон охирнок) ба наздикшавандагӣ ё дуршавандагии ин қатор таъсир намекунад.*

Барои ба ин боварӣ ҳосил кардан, қайд намудан кифоя аст, ки дар натиҷаи партофтан (ё ҳамроҳ кардан)-и аъзоҳо ҳамаи суммаҳои хусусии ин қатор, аз ягон номер сар карда, ба як бузургии доимӣ тағьир меёбад.

2°. *Агар c доимии нобаробари нуль ва $u_k' = cu_k$ бошад, онгоҳ қатори $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ фақат дар ҳамон маврид наздик мешавад, ки агар қатори $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ наздик шавад.*

Агар суммаҳои хусусии n-уми қаторҳои муоинашавандаро мувофиқан бо S_n' ва S_n ишорат намоем, онгоҳ $S_n' = cS_n$ мешавад. Аз баробарии охирин натиҷа мебарояд, ки $\lim_{n\to\infty} S_n'$ фақат дар ҳамон маврид вуҷуд дорад, ки агар $\lim_{n\to\infty} S_n$ вуҷуд дошта бошад.

§ 2. Қаторҳои аъзоҳояшон мусбат

1. Шартҳои зарурӣ ва кифоягии наздикшавандагии қатори аъзоҳояш мусбат. Мо дар ин параграф қаторҳоеро меомӯзем, ки *ҳамаи аъзоҳояшон ғайримусбат* мебошанд. Мувофиқи анъана, мо ингуна каторҳоро *қаторҳои аъзоҳояшон мусбат* меномем (агарчи термини дурусташ ин аст: «қаторҳои аъзоҳояшон ғайриманфӣ»). Қаторҳоеро, ки ҳамаи аъзоҳояшон қатъиян аз нуль калон мебошанд, *қаторҳои қатъиян аъзоҳояшон мусбат* меномем.

Қаторҳои аъзоҳояшон мусбат аксаран дар татбиқот дучор мешаванд. Ғайр аз он, омӯзиши пешакии онҳо омӯзиши қатор-

ҳои аъзоҳояшон дорои аломати дилхоҳро осон менамоянд. Минбаъд, барои он ки сухан дар бораи қатори аъзоҳояш мусбат будан ашро қайд намоем, мо аксаран аъзоҳои ингуна қаторро бо символи p_k (ба ҷои u_k) ишорат мекунем.

Мо якбора хосияти характерноки асосии қатори аъзоҳояш мусбатро қайд мекунем: *пайдарпаии суммаҳои хусусии ингуна қатор пайдарпаии камнашаванда мебошад.*

Ин ба мо имконият медиҳад, ки тасдиқоти зеринро исбот кунем.

Теореми аи 13.2. *Барои он ки қатори аъзоҳояш мусбат наздик шавад, зарур ва кифоя аст, ки пайдарпаии суммаҳои хусусии ин қатор пайдарпаии маҳдуд бошад.*

Шарти зарурӣ аз он, ки ҳаргуна пайдарпаии наздикшаванда пайдарпаии маҳдуд мебошад (дар асоси теореми 3.8) бармеояд.

Шарти кифоягӣ аз он бармеояд, ки пайдарпаии суммаҳои хусусӣ кам намешавад ва, пас, барои наздикшаванда будани ин пайдарпай кифоя аст, ки он маҳдуд бошад (дар асоси теореми 3.15).

2. Аломатҳои муқоиса. Мо дар ин пункт якчанд аломатҳоеро муқаррар мекунем, ки ба воситаи онҳо дар бораи наздикшавандагӣ (ё дуршавандагӣ)-и қатори муоинашаванда (бо ёрии онро бо қатори дигаре, ки *наздикшавандагиаш (ё дуршавандагиаш) маълум аст, муқоиса кардан*) хулоса баровардан мумкин аст.

Теореми аи 13.3. *Бигзор* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *ва* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ *ду қатори аъзоҳояшон мусбат бошанд. Бигзор, баъд, барои ҳама номерҳои* k *нобаробарии*

$$p_k \leqslant p_k' \tag{13.14}$$

дуруст бошад. Онгоҳ наздикшавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ *наздикшавандагии қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$*-ро тасдиқ мекунад; дуршавандагии қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *дуршавандагии қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$*-ро тасдиқ мекунад.*

Исбот. Суммаҳои хусусии n-уми қаторҳои $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ва $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$-ро мувофиқан бо S_n ва S_n' ишорат мекунем. Аз нобаробарии (13.14) хулоса мебарояд, ки $S_n \leqslant S_n'$ аст. Нобаробарии охирин чунин маъно дорад, ки маҳдудиятии пайдарпаии суммаҳои хусусии $\{S_n'\}$ маҳдудиятии пайдарпаии суммаҳои хусусии $\{S_n\}$-ро тасдиқ мекунад ва, баръакс, номаҳдуд будани пайдарпаии суммаҳои хусусии $\{S_n\}$ номаҳдуд будани пайдарпаии суммаҳои ху-

сусии $\{S_n'\}$-ро тасдиқ менамояд. Дар асоси теоремаи 13.2 теоремаи 13.3 исбот шуд.

Қайди 1. Дар шарти теоремаи 13.3 талаб кардан мумкин буд, ки нобаробарии (13.14) на барои ҳама номерҳои k, балки фақат *аз ягон номери k сар карда* иҷро шавад. Воқеан, дар асоси п. 3 § 1 партофтани аъзоҳои шумораашон охирнок ба наздикшавандагии қатор таъсир намекунад.

Қайди 2. *Агар дар шарти теоремаи* 13.3 *нобаробарии* (13.14)*-ро бо нобаробарии*

$$p_k \leqslant cp_k', \tag{13.15}$$

дар ин ҷо c — доимии мусбати дилхоҳ, иваз кунем, теорема дуруст мемонад. Воқеан, дар асоси п. 3 § 1, масъалаи наздикшавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ ба масъалаи наздикшавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} (cp_k')$ баробаркувва мебошад. Дар айни ҳол, албатта, талаб кардан мумкин аст, ки нобаробарии (13.15), фақат аз ягон номери ба қадри кифоя калони k сар карда, иҷро шавад.

Натиҷаи теоремаи 13.3. *Агар $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ қатори аъзоҳояш мусбат, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ қатори аъзоҳояш қатъӣ мусбат бошад ва агар лимити охирноки*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = L$$

мавҷуд бошад, онгоҳ наздикшавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ наздикшавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$-ро тасдиқ мекунад; дуршавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ дуршавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$-ро тасдиқ мекунад.

Исбот. Азбаски $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = L$ аст, пас мувофиқи таърифи лимит, барои ягон $\varepsilon > 0$ чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $k > N$ будан

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{p_k'} < L + \varepsilon$$

мебошад. Пас, ҳангоми $k \geqslant N$ будан нобаробарии $p_k < (L + \varepsilon)\, p_k'$ дуруст аст. Нобаробарии охирин ҳангоми $c = L + \varepsilon$ будан бо нобаробарии (13.15) мувофиқ меояд. Дар асоси қайди 2-юми теоремаи 13.3 натиҷа исбот шуд.

Теоремаи 13.4. *Бигзор* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *ва* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ *ду қатори аъзоҳояшон қатъӣ мусбат бошанд. Бигзор, баъд, барои ҳама номерҳои* k *нобаробарии*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p_k'} \tag{13.16}$$

дуруст бошад. Онгоҳ наздикшавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ *наздикшавандагии қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$*-ро тасдиқ мекунад; дуршавандагии қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *дуршавандагии қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$*-ро тасдиқ мекунад.*

Исбот. Нобаробарии (13.16)-ро барои $k = 1, 2, \ldots, n-1$ (n — номери *дилхоҳ*) менависем. Чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$\frac{p_2}{p_1} \leqslant \frac{p_2'}{p_1'},$$

$$\frac{p_3}{p_2} \leqslant \frac{p_3'}{p_2'},$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \frac{p_n'}{p'_{n-1}}.$$

Нобаробариҳои навишташударо аъзо ба аъзо зарб карда,

$$\frac{p_n}{p_1} \leqslant \frac{p_n'}{p_1'} \text{ ё } p_n \leqslant \frac{p_1}{p_1'} p_n'$$

-ро ҳосил мекунем. Азбаски дар нобаробарии охирин бузургии $c = p_1/p_2'$ *доимии мусбати аз номери* n *новобастаро* ифода мекунад, пас, дар асоси қайди 2-юми теоремаи 13.3, теоремаи 13.4 исбот шуд.

Қ а й д и 3. Дар шарти теоремаи 13.4 талаб кардан мумкин аст, ки нобаробарии (13.16) на барои ҳама номерҳои k, балки фақат *аз ягон номери k сар карда* иҷро шавад (чунки партофтани аъзоҳои аввалини шумораашон охирнок ба наздикшавандагии қатор таъсир намекунад).

Ҳар ду теоремаи дар ҳамин пункт исботшуда *теоремаҳои муқоиса* ё *аломатҳои муқоиса* номида мешаванд.

Мисолҳои татбиқи аломатҳои муқоисаро меорем.

1. Масъалаи наздикшавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3+b^k}$-ро, ки дар ин ҷо $b > 0$ аст, тадқиқ мекунем. Агар $b \leqslant 1$ бошад, онгоҳ аъзои k-уми қатори муоинашаванда ҳангоми $k \to \infty$ ба нуль майл намекунад. Пас, шарти зарурии наздикшавандагии қатор вайрон шуд ва қатор *дур мешавад*. Агар $b > 1$ бошад, пас, азбаски барои номери дилхоҳи k нобаробарии

$$\frac{1}{3+b^k} < \frac{1}{b^k}$$

дуруст аст ва азбаски қатори $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k}$ наздик мешавад, теоремаи муқоиса (теоремаи 13.3) имконият медиҳад, ки наздикшавандагии қатори муоинашаванда тасдиқ карда шавад.

2. Масъалаи наздикшавандагии қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{k^\alpha} + \ldots \qquad (13.17)$$

-ро барои $\alpha \leqslant 1$-и дилхоҳ тадқиқ мекунем, ин қаторро аксаран *қатори гармоникии ҷамъбастшуда* меноманд. Азбаски ҳангоми $\alpha \leqslant 1$ будан барои номери дилхоҳи k нобаробарии

$$\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{k}$$

дуруст аст ва азбаски қатори гармоникии $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ дур мешавад*, пас теоремаи муқоиса (теоремаи 13.3) имконият медиҳад, ки дуршавандагии қатори (13.17) барои $\alpha \leqslant 1$-и дилхоҳ тасдиқ карда шавад.

---

* Дуршавандагии қатори гармоникӣ дар п. 2 § 1 муқаррар шуда буд.

3. **Аломатҳои Даламбер ва Коши.** Ду аломати маъмули наздикшавандагии қаторҳои аъзоҳояшон мусбат — аломатҳои Даламбер ва Коши ба аломатҳои муқоиса бевосита ҳамроҳ карда мешаванд. Аломатҳои Даламбер ва Коши ба муқоисаи қатори муоинашавандаю қаторе, ки аз элементҳои прогрессияи геометрӣ ташкил шудааст, яъне қатори наздикшавандаи

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + q^3 + \ldots, \quad |q| < 1, \tag{13.18}$$

ё қатори дуршавандаи

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots \tag{13.19}$$

асос ёфтаанд.

Теоремаи 13.5 *(аломати Даламбер)**. 1. *Агар барои ҳама номерҳои k, ё ақаллан аз ягон номери k сар карда, нобаробарии*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1^{**} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1\right) \tag{13.20}$$

дуруст бошад, онгоҳ қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *наздик (дур) мешавад.*

II. *Агар*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L \tag{13.21}$$

вуҷуд дошта бошад, онгоҳ қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *ҳангоми* $L < 1$ *будан наздик мешавад ва ҳангоми* $L > 1$ *будан дур мешавад.*

Теореми II-ро одатан *аломати Даламбер дар шакли лимитӣ* меноманд. Ин аломат дар ҳамин шаклаш бисьёр истифода мешавад.

Исбот. Теоремаҳои I ва II-ро алоҳида-алоҳида исбот мекунем.

---

* Жак Лерон Даламбер — математик ва философи франсавӣ (1717—1783).

** Дар айни ҳол, албатта, фарз карда мешавад, ки ҳама аъзоҳои қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ (ақаллан аз ягон номер сар карда) қатъиян мусбат мебошанд.

1) Барои исботи теоремаи I фарз мекунем, ки $p_k' = q^k (p_k' = 1)$ аст. Онгоҳ $\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = q$, дар ин ҷо $q < 1$, $(\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = 1)$, ва мо нобаробарии (13.20)-ро ба намуди

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \quad (\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k}) \tag{13.22}$$

навишта метавонем. Азбаски қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$-и бо қатори (13.18) ((13.19)) мувофиқоянда наздик (дур) мешавад, пас нобаробарии (13.22), дар асоси теоремаи муқоиса (теоремаи 13.14), ба наздикшавандагии (дуршавандагии) қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ кафолат медиҳад. Теоремаи I исбот шуд.

2) Акнун теоремаи II-ро исбот мекунем. Агар $L < 1$ бошад, онгоҳ чунин адади *мусбати* ε ёфт мешавад, ки $L = 1 - 2\varepsilon$ ва $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ аст. Мувофиқи таърифи лимити пайдарпай барои ε-и номбурда чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $k \geqslant N$ будан

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon = 1 - \varepsilon \tag{13.23}$$

мебошад. Адади $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ дар теоремаи I роли q-ро мебозад. Қатор наздик мешавад.

Агар $L > 1$ бошад, онгоҳ чунин адади *мусбати* ε ёфт мешавад, ки $L = 1 + \varepsilon$ ва $L - \varepsilon = 1$ аст. Дар ин маврид, дар асоси қисми чапи нобаробарии (13.23)

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1$$

(ҳангоми $k \geqslant N$ будан)-ро ҳосил мекунем. Қатор дар асоси теоремаи I дур мешавад. Теоремаи 13.5 пурра исбот шуд.

Қайд ба теоремаи 13.5. 1) Ба он диққат медиҳем, ки дар теоремаи 13.5 (1) нобаробарии $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1$ (барои ҳамаи k-ҳо, аз ягон k сар карда)-ро ба $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$ *иваз кардан мумкин нест.*

Воқеан, чунон ки исбот кардем, қатори гармоникии (13.12) дур мешавад, лекин барои ин қатор $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ (барои ҳама номерҳои k) аст.

2) Агар дар шарти теоремаи 13.5 (II) $L = 1$ бошад, онгоҳ дар бораи наздикшавандагии қатор ягон далели муайян овардан мумкин нест (яъне ҳангоми $L = 1$ будан аломати Даламбер «таъсир намекунад»). Воқеан, барои қатори гармоникии (13.12) $L = 1$ аст, дар айни ҳол ин қатор, чунон ки медонем, дур мешавад. Дар баробари он барои қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{13.24}$$

низ $L = 1$ мебошад, лекин ин қатор, чунон ки дар пункти оянда нишон медиҳем, наздик мешавад.

Теоремаи 13.6 (*аломати Коши*). I. *Агар барои ҳама номерҳои k, ё ақаллан аз ягон номери k сар карда, нобаробарии*

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1) \tag{13.25}$$

дуруст бошад, онгоҳ қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ наздик (дур) мешавад.

II. *Агар*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L \tag{13.26}$$

вуҷуд дошта бошад, онгоҳ қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ҳангоми $L < 1$ будан наздик ва ҳангоми $L > 1$ будан дур мешавад.

Теореми II-ро одатан *аломати Коши дар шакли лимитӣ* меноманд.

Исбот. Теоремаҳои I ва II-ро алоҳида-алоҳида таҳқиқ мекунем.

1) Барои исботи теоремаи I фарз мекунем, ки $p_k' = q^k$ ($p_k' = 1$) аст. Онгоҳ аз нобаробарии (13.25)

$$p_k \leqslant p_k' \quad (p_k \geqslant p_k') \tag{13.27}$$

-ро ҳосил мекунем. Азбаски қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$-и бо қатори (13.18) ((13.19)) мувофиқоянда наздик (дур) мешавад, пас нобароба-

рии (13.27), дар асоси теоремаи муқоиса (теоремаи 13.3), ба наздикшавандагӣ (дуршавандагӣ)-и қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ кафолат медиҳад.

Теоремаи 13.6 (1) исбот шуд.

2) Барои исботи теоремаи 13.6 (II) схемаи исботи теоремаи 13.5 (II)-ро айнан такрор кардан лозим аст (дар ҳама муҳокимаронихо $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ ба $\sqrt[k]{p_k}$ иваз карда мешавад).

Теоремаи 13.6 пурра исбот шуд.

Қайд ба теореми 13.6. 1) Мисли теоремаи гузашта, дар теоремаи 13.6 (I) ҳам нобаробарии $\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1$-ро ба $\sqrt[k]{p_k} < 1$ иваз кардан мумкин нест.

2) Ҳангоми $L = 1$ будан аломати Қоши дар шакли лимитиаш «таъсир намекунад». Ба ду мисоле, ки дар қайди мувофиқи аломати Даламбер баён шуда буд, такья кардан мумкин аст.

3) Чунин савол пайдо мешавад: кадоме аз ду аломатҳо, аломати Даламбер ё аломати Қоши, тавонотар аст? Ин саволро нисбат ба аломатҳои Даламбер ва Қоши, ки *дар шакли лимитӣ* гирифта шудаанд, таҳлил мекунем. Исбот кардан мумкин аст, ки *аз мавҷудияти лимити* (13.21) *мавҷудияти лимити* (13.26) *ва далели баробарии ин лимитҳо бармеоянд.* (Исбот дар иловаи I-уми ҳамин боб дода шудааст.) Баръаксаш нодуруст аст. Воқеан, бовар кардан осон аст, ки барои қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}} \tag{13.28}$$

лимити (13.26) вуҷуд дорад ва ба 1/2 баробар аст ва дар ин вақт лимити (13.21) умуман вуҷуд надорад. Ҳамин тариқ, аломати Қоши назар ба аломати Даламбер тавонотар аст, чунки ҳар дафъа вақте ки аломати Даламбер амал мекунад, аломати Қоши низ амал менамояд ва дар баробари ин қаторҳое (масалан, қатори (13.28)) вуҷуд доранд, ки барояшон аломати Қоши амал мекунаду аломати Даламбер не. Бо вуҷуди ин, аломати Даламбер дар амалиёт нисбат ба аломати Қоши бисьёртар истифода мешавад.

Мисолҳо. 1) Масъалаи наздикшавандагии қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!} \tag{13.29}$$

-ро тадқиқ мекунем. Аломати Даламберро дар шакли лимитиаш татбиқ менамоем. Чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$p_k = \frac{(\sqrt[k]{k})^k}{k!}, \quad \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(\sqrt[k+1]{k+1})^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{(\sqrt[k]{k})^k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/2}. \tag{13.30}$$

Дар асоси (13.30)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/2} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/2} = 0 \cdot \sqrt{e} = 0 < 1,$$

яъне қатори (13.29) наздик мешавад.

2) Масъалаи наздикшавандагии қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \tag{13.31}$$

-ро тадқиқ мекунем. Аломати Коширо дар шакли лимитиаш тадқиқ мекунем. Чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\sqrt[k]{p_k} = \frac{\sqrt[k]{k}}{2}. \tag{13.32}$$

Дар асоси (13.32) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{2} \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^*} = \frac{1}{2} < 1$. Ҳамин тариқ, аломати Коши наздикшавандагии қатори (13.31)-ро муқаррар менамояд.

4. Аломати интегралии Коши — Маклорен. Аломатҳои Даламбер ва Коши барои аниқ кардани масъалаи наздикшавандагии қаторҳои бисьёр дучоршавандаи аъзоҳояшон мусбат нобоб мебошанд. Масалан, бо ёрии ин аломатҳо масъалаи наздикшавандагии қатори гармоникии ҷамъбастшудаи

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \tag{13.33}$$

(α — адади ҳақиқии дилхоҳ)-ро аниқ кардан мумкин нест.

---

* Барои ҳисоб кардани $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$ ифодаи $x^{1/x}$-ро логарифмонидан ва қоидаи Лопиталро татбиқ намудан лозим аст.

Ҳақиқатан, мо дар охири пункти 2 муқаррар кардем, ки ҳангоми $\alpha \leqslant 1$ будан қатори (13.33) дур мешавад, лекин масъалаи наздикшавандагии ин қатор ҳангоми $\alpha > 1$ будан ҳалношуда мемонад. Мо дар ин пункт боз як аломати умумии наздикшавандагии қатори аъзоҳояш мусбатро муқаррар мекунем, ки аз он, аз ҷумла, наздикшавандагии қатори (13.33) ҳангоми $\alpha > 1$ будан бармеояд.

Теореми 13.7 (теореми Коши—Маклорен). Бигзор функцияи $f(x)$ ғайриманфӣ бошад ва дар ҳама ҷои нимхати рости $x \geqslant m$ наафзояд (дар ин ҷо m — номери қайдшудаи дилхоҳ). Онгоҳ қатори ададии

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \ldots \qquad (13.34)$$

фақат дар ҳамон маврид наздик мешавад, ки агар ҳангоми $n \to \infty$ лимити пайдарпаии

$$a_n = \int_m^n f(x)\,dx \qquad (13.35)$$

вуҷуд дошта бошад.

Исбот. Бигзор k номери дилхоҳе бошад, ки шарти $k \geqslant m+1$-ро қаноат менамояд ва x қимати дилхоҳи аргументест аз сегменти $k-1 \leqslant x \leqslant k$. Азбаски мувофиқи шарт функцияи $f(x)$ дар сегменти номбурда намеафзояд, пас барои ҳама x-ҳои сегменти номбурда нобаробарии

$$f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k-1) \qquad (13.36)$$

дуруст аст. Функцияи $f(x)$ ки функцияи маҳдуд ва монотонӣ мебошад, дар сегменти $k-1 \leqslant x \leqslant k$ интегронидашаванда мебошад (ба п. 5 § 4 боби 10 ниг.). Ба замми он, аз нобаробариҳои (13.36) ва аз хосияти 3 (ба п. 1 § 6 боби 10 ниг.) натиҷа мебарояд, ки

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx$$

ё

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant f(k-1). \qquad (13.37)$$

Мо нобаробариҳои (13.37)-ро барои $k \geqslant m+1$-и дилхоҳ муқаррар кардем. Ин нобаробариҳоро барои қиматҳои $k = m+1$,

$m + 2, \ldots, n$ (дар ин ҷо n — номери дилхоҳи аз m калон) менависем.

$$f(m+1) \leqslant \int_m^{m+1} f(x)\,dx \leqslant f(m),$$

$$f(m+2) \leqslant \int_{m+1}^{m+2} f(x)\,dx \leqslant f(m+1),$$

. . . . . .

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(n-1).$$

Ин нобаробариҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ карда,

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leqslant \int_m^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \qquad (13.38)$$

-ро ҳосил мекунем. Суммаи n-уми қатори (13.34)-ро бо символи S_n ишорат мекунем:

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} f(k).$$

Ин ишоратро қабул карда ва ишорати (13.35)-ро ба инобат гирифта, мо нобаробариҳои (13.38)-ро ин тавр навишта метавонем:

$$S_n - f(m) \leqslant a_n \leqslant S_{n-1}. \qquad (13.39)$$

Нобаробариҳои (13.39) имконият медиҳанд, ки теоремаро бо осонӣ исбот намоем. Воқеан, аз формулаи (13.35) маълум аст, ки пайдарпаии $\{a_n\}$ пайдарпаии камнашаванда мебошад. Пас, барои наздикшаванда будани ин қатор зарур ва кифоя аст, ки он пайдарпаии маҳдуд бошад. Барои наздикшаванда будани қатори (13.34), дар асоси теоремаи 13.2, зарур ва кифоя аст, ки пайдарпаии $\{S_n\}$ пайдарпаии маҳдуд бошад. Аз нобаробариҳои (13.39) натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\{S_n\}$ фақат дар ҳамон маврид пайдарпаии маҳдуд мебошад, ки агар пайдарпаии $\{a_n\}$ пайдарпаии маҳдуд бошад, яъне агар пайдарпаии $\{a_n\}$ наздик шавад. Теорема исбот шуд.

Мисолҳо. 1) Пеш аз ҳама барои аниқ кардани наздикшавандагии қатори гармоникии ҷамъбастшудаи (13.33) аломати интегралии Коши—Маклоренро татбиқ мекунем. Азбаски қатори (13.33)-ро ҳангоми $m = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ будан чун қатори на-

муди (13.34) муоина кардан мумкин аст ва функцияи $f(x)$ дар нимхати рости $x \geqslant 1$ кам мешавад ва мусбат мебошад, пас масъалаи наздикшавандагии қатори (13.33) ба масъалаи наздикшавандагии пайдарпаии $\{a_n\}$ баробаркуввa аст, дар ин ҷо

$$a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=1}^{x=n} = \dfrac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{ҳангоми } \alpha \neq 1 \text{ будан,} \\ \ln x\Big|_{x=1}^{x=n} = \ln n & \text{ҳангоми } \alpha = 1 \text{ будан.} \end{cases}$$

Аз намуди элементҳои a_n натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\{a_n\}$ ҳангоми $\alpha < 1$ будан дур мешавад ва ҳангоми $\alpha > 1$ будан наздик мешавад, ғайр аз ин дар мавриди охирин $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\alpha-1}$.

Ҳамин тариқ, *қатори* (13.33) *ҳангоми* $\alpha < 1$ *будан дур мешавад* (мо инро бо тарзи дигар муқаррар карда будем) *ва ҳангоми* $\alpha > 1$ *будан наздик мешавад.* Аз ҷумла, ҳангоми $\alpha = 2$ будан қатори (13.33) ба қатори (13.24) табдил мешавад, ки мо акнун наздикшавандагии онро тасдиқ карда метавонем.

2) Масъалаи наздикшавандагии қатори

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^\beta k} \tag{13.40}$$

-ро, ки дар ин ҷо β адади ҳақиқии мусбати қайдшуда мебошад, тадқиқ мекунем. Қатори (13.40)-ро ҳангоми $m = 2$ ва $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^\beta x}$ будан чун қатори намуди (13.34) муоина кардан мумкин аст. Азбаски функцияи $f(x)$ дар нимхати рости $x \geqslant 2$ ғайриманфӣ аст ва намеафзояд, пас масъалаи наздикшавандагии қатори (13.40) ба масъалаи наздикшавандагии пайдарпаии $\{a_n\}$ баробаркуввa мебошад, дар ин ҷо

$$a_n = \int_2^n \frac{1}{x \ln^\beta x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\ln^{1-\beta} x}{1-\beta}\Big|_{x=2}^{x=n} = \dfrac{\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta} & \text{ҳангоми } \beta \neq 1 \text{ будан,} \\ \ln\ln x\Big|_{x=2}^{x=n} = \ln\ln n - \ln\ln 2 & \text{ҳангоми } \beta = 1 \text{ будан.} \end{cases}$$

Аз намуди элементҳои a_n натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\{a_n\}$ ҳангоми $\beta > 1$ будан наздик мешавад ва ҳангоми $\beta < 1$ будан дур мешавад. Ҳамин тариқ, қатори (13.40) *ҳангоми* $\beta > 1$ *будан наздик шуда, ҳангоми* $\beta < 1$ *будан дур мешавад.*

5. Аломати Раабе. Аломатҳои Даламбер ва Коши ба муқоисаи қатори муоинашавандаю қаторе, ки суммаи прогрессияи геометриро ифода мекунад, асос ёфтаанд. Албатта, дар бораи ҳосил кардани аломатҳои нозуктарине, ки ба муқоисаи қатори муоинашавандаю қатори стандартии дигар (ки назар ба қатори ифодакунандаи суммаи прогрессияи геометрӣ «сусттар» наздик ё дур мешавад) асос ёфтаанд, идея пайдо мешавад. Мо дар ин пункт аломатеро, ки ба муқоисаи қатори муоинашавандаю қатори стандартии дар пункти гузашта омӯхташудаи

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots \tag{13.41}$$

асос ёфтааст, муқаррар мекунем.

Теореми 13.8 *(аломати Раабе)*.* I. *Агар барои ҳамаи номерҳои* k, *ё аҳаллан аз ягон номери* k *сар карда, нобаробарии***

$$k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \geqslant q > 1 \quad \left\{k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \leqslant 1\right\} \tag{13.42}$$

дуруст бошад, онгоҳ қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *наздик (дур) мешавад.*

II. *Агар*

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) = L \tag{13.43}$$

мавҷуд бошад, онгоҳ қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *ҳангоми* $L > 1$ *будан наздик мешавад ва ҳангоми* $L < 1$ *будан дур мешавад.*

Теоремаи II-ро одатан аломати Раабе *дар шакли лимитӣ* меноманд.

Исбот. Теоремаҳои I ва II-ро алоҳида-алоҳида таҳқиқ мекунем.

1) Барои исботи теореми I нобаробарии (13.42)-ро ба намуди

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant 1 - \frac{q}{k} \quad \left\{\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1 - \frac{1}{k}\right\} \tag{13.44}$$

менависем.

Азбаски $q > 1$ аст, пас ягон адади α ёфт мешавад, ки нобаробарии $q > \alpha > 1$-ро қаноат менамояд. Функцияи $(1+x)^{\alpha}$-ро мувофиқи формулаи

---

* Иозеф Людвиг Раабе — математики швейцарӣ (1801—1859).

** Албатта, дар айни ҳол фарз карда мешавад, ки қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ аҳаллан аз ягон номер сар карда, соҳиби аъзоҳои қатъӣ мусбат мебошад.

Маклорен бо аъзои боқимондаи шакли Пеано (ба п. 2 § 15 боби 8 ниг.) ба қатор ҷудо мекунем:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + g(x).$$

Дар ин формула $x = -1/k$ фарз карда,

$$(1 - \frac{1}{k})^{\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{k} + g\left(\frac{1}{k}\right) \tag{13.45}$$

-ро ҳосил мекунем. Азбаски $\dfrac{g(1/k)}{1/k}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад, пас аз ягон номери k_0 сар карда, нобаробарии

$$\frac{g(1/k)}{1/k} \leqslant q - \alpha \tag{13.46}$$

дуруст аст. (13.45) ва (13.46)-ро муқоиса карда, нобаробарии

$$(1 - \frac{1}{k})^{\alpha} \geqslant 1 - \frac{q}{k} \quad (\text{ҳангоми } k \geqslant k_0 \text{ будан})$$

-ро ҳосил менамоем. Дар натиҷаи муқоисаи нобаробариҳои (13.44) ва (13.47)

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant (1 - \frac{1}{k})^{\alpha} \left\{ \frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1 - \frac{1}{k} \right\} \quad (\text{ҳангоми } k \geqslant k_0 \text{ будан})$$

ҳосил мешавад. Нобаробарии охиринро ба намуди

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{\dfrac{1}{k^{\alpha}}}{\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha}}} \left\{ \frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{\dfrac{1}{k}}{\dfrac{1}{k-1}} \right\} \quad (\text{ҳангоми } k \geqslant k_0 \text{ будан})$$

навиштан мумкин аст. Азбаски қатори (13.41) ҳангоми $\alpha \geqslant 1$ будан наздик мешавад ва ҳангоми $\alpha = 1$ будан дур мешавад, пас нобаробарии (13.48) ва теореман муқоиса (теореман 13.4) наздикшаванда (дуршаванда) будани қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$-ро тасдиқ менамоянд. Теореман I исбот шуд.

2) Чунон ки дар аломатҳои Даламбер ва Коши рафтор кардем, теореман II-ро ба теореман I меорем. Бигзор аввал $L > 1$ бошад. Фарз мекунем, ки $\varepsilon = \dfrac{L-1}{2}$, $q = 1 + \varepsilon = L - \varepsilon$. Мувофиқи таърифи лимит (13.43) барои

ε номери k_0-ро нишон додан мумкин аст, ки аз он сар карда, $|k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)-$ $-L|<\varepsilon$ аст, ва, пас, нобаробарии чапи (13.42) дуруст аст. Агар $L<1$ бошад, мо фарз мекунем, ки $\varepsilon=1-L$ аст ва, таърифи лимит (13.43)-ро истифода карда, мебинем, ки аз ягон номери k_0 сар карда, нобаробарии рости (13.42) дуруст аст. Теоремаи 13.8 пурра исбот шуд.

Қайд. Қайд мекунем, ки дар нобаробарии чапи (13.42)-и теоремаи 13.8 (I) $q=1$ гирифтан мумкин нест (дар холати $q=1$ будан наздикшавандагии қатор чой надорад). Ҳангоми $L=1$ будан теоремаи 13.8 (II) «таъсир намекунад» (ҳам наздикшавандагӣ ва ҳам дуршавандагии қатор имкон дорад).

Мисол. Масъалаи наздикшавандагии қатори

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k$$ ин чо $[p_k=a^{-(1+1/2+1/3+\cdots+1/k-1)}\quad (a=\text{const}>0)]$

тадқиқ карда шавад. Санҷидан осон аст, ки аломатхои Даламбер ва Коши ҳангоми ба ин қатор татбиқ шуданашон «таъсир намекунанд». Аломати Раабероро татбиқ мекунем. Санҷидан осон аст, ки

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=\frac{a^{-1/k}-1}{\left(-\frac{1}{k}\right)}.$$

Санҷидан осон аст, ки касри охирин ҳангоми $k\to\infty$ ба ҳосилаи функцияи a^x дар нуқтаи $x=0$ майл мекунад, яъне он ба $\ln a$ майл менамояд. Дар асоси аломати Раабе қатори муоинашаванда ҳангоми $\ln a>1$, яъне *ҳангоми $a>e$ будан наздик мешавад*, ва ҳангоми $\ln a<1$, яъне *ҳангоми $a<e$ будан дур мешавад*. Ҳангоми $a=e$ будан масъалаи наздикшаваадагии қатор тадқиқи иловагиро металабад, чунки аломати Раабе «таъсир намекунад». Қатори (13.40) мисоли дигари қаторест, ки ҳангоми ба он татбиқ кардани аломати Раабе ин аломат «таъсир намекунад».

6. Мавҷуд набудани қатори универсалии муқоиса. Мо қайд карда будем, ки аломатхои Даламбер ва Қоши ба муқоисаи қатори муоинашавандаю қатори суммаи прогрессияи геометрӣ асос ёфтаанд ва аломати Раабе ба муқоисаи қатори муоинашавандаю қатори оҳиста наздикшаванда (оҳиста дуршаванда)-и (13.41) асос ёфтааст.

Чунин савол пайдо шуданаш табиист: *оё чунин қатори (оҳистатар!) наздикшавандаи (ё дуршавандаи) универсалие ҳаст, ки ҳангоми бо он муқоиса кардани қатори муоинашаванда дар бораи наздикшавандагии (ё дуршавандагии) қатори муоинашавандаи аъзоҳояш мусбат хулоса баровардан мумкин шавад.*

Исбот мекунем, ки чунин қатори универсалӣ вуҷуд надорад. Бигзор ду қатори наздикшавандаи $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ва $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ дода шуда бошад; аъзоҳои боқимондаи n-уми ин суммаҳоро мувофиқан бо символҳои r_n ва r_n' ишорат мекунем. *Агар* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_n'}=0$ *бошад, қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ *назар ба қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *оҳистатар наздик мешавад.* Исбот мекунем, ки *барои ҳар як қатори наздикшаванда*

қаторе вуҷуд дорад, ки он назар ба ин қатор оҳистатар наздик мешавад. Воқеан, бигзор $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ қатори наздикшавандаи дилхоҳ бошад; r_n — аъзои боқимондаи n-уми он. Исбот мекунем, ки қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ (дар ин ҷо* $p_k' = \sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}$) назар ба қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ оҳистатар наздик мешавад. Воқеан, агар r_n' аъзои боқимондаи n-уми қатори $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ бошад, онгоҳ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\sqrt{r_n}} = 0.$$

Акнун мавҷуд набудани қатори наздикшавандаи универсалиеро исбот мекунем, ки ҳангоми бо он муқоиса кардани қатори наздикшавандаи муоинашаванда дар бораи наздикшавандагии қатори муоинашаванда хулоса баровардан мумкин аст. Воқеан, агар чунин қатори наздикшавандаи универсалии $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ мавҷуд мебуд, онгоҳ барои он қатори сохташудаи $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$-ро гирифта, мо ифодаи зайлро ҳосил мекардем:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k-1} - r_k}{\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}} = \lim_{k\to\infty} (\sqrt{r_{k-1}} + \sqrt{r_k}) = 0.$$

Ҳамин тариқ, *аз муқоиса бо қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *дар бораи наздикшавандагии қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ *хулоса баровардан мумкин нест.* Ҳамин тавр мавҷуд набудани қатори дуршавандаи универсалиеро исбот кардан мумкин аст, ки ҳангоми бо он муқоиса кардани қатори дуршавандаи додашудаи дилхоҳ дар бораи дуршавандагии ин қатори додашуда хулоса баровардан имконпазир мешавад.

§ 3. Қаторҳои мутлақ ва шартӣ наздикшаванда

1. Мафҳуми қатори мутлақ ва шартӣ наздикшаванда. Акнун қаторҳоеро меомӯзем, ки аъзоҳояшон ададҳои ҳақиқии аломаташон дилхоҳ мебошанд.

---

* Ҳаман сумман $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$-ро ба сифати r_0 қабул мекунем.

Таърифи 1. *Қатори*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{13.49}$$

-ро қатори мутлақ наздикшаванда меномем, агар қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \tag{13.50}$$

наздик шавад. Дар ин таъриф дар бораи наздикшавандагии худи қатори (13.49) ҳеҷ фарзияте баён нашудааст. Эҳтимол, ингуна фарзият зиёдатӣ бошад, чунки теоремаи зерин дуруст аст.

Теоремаи 13.9. *Аз наздикшавандагии қатори* (13.50) *наздикшавандагии қатори* (13.49) *бармеояд.*

Исбот. Критерияи Коши барои қаторҳо (яъне теоремаи 13.1)-ро истифода мекунем. Исбот кардан лозим аст, ки барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери N ёфт мешавад, ки барои ҳама номерҳои n-и қаноаткунандаи шарти $n \geqslant N$ ва барои адади натуралии дилхоҳи p

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon \tag{13.51}$$

мебошад. $\varepsilon > 0$-и дилхохро қайд мекунем. Азбаски қатори (13.50) наздик мешавад, пас, дар асоси теоремаи 13.1, чунин номери N ёфт мешавад, ки барои ҳама номерҳои n-и қаноаткунандаи шарти $n \geqslant N$ ва барои адади натуралии дилхоҳи p

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon \tag{13.52}$$

мебошад. Азбаски модули суммаҳои якчанд ҷамъшавандаҳо аз суммаи модулҳои онҳо калон нест, пас ин тавр навишта метавонем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|. \tag{13.53}$$

Нобаробариҳои (13.52) ва (13.53)-ро муқоиса карда, нобаробарии (13.51)-ро ҳосил мекунем. Теорема исбот шуд.

Таърифи 2. *Қатори* (13.49) *қатори шартӣ наздикшаванда номида мешавад, агар ин қатор наздик шавад, ва дар як вақт чун қатори мувофиқи модулҳои* (13.50) *дур мешавад.*

Қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots,$$

дар ин ҷо $\alpha > 0$ аст, *мисоли* қатори мутлақ наздикшаванда мебошад. Ин қатор мутлақ наздик мешавад, чунки ҳангоми $\alpha > 1$ будан қатори (13.33) наздик мешавад. Доир ба қатори *шартӣ* наздикшаванда мисол меорем. Наздикшавандагии шартии қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \quad (13.54)$$

-ро мисол меорем. Азбаски қатори мувофиқи модулҳо (қатори гармоникӣ), чунон ки мо медонем, *дур мешавад,* пас барои исботи наздикшавандагии шартии қатори (13.54) наздик шудани ин қаторро исбот кардан кифоя аст. Исбот мекунем, ки қатори (13.54) ба адади $\ln 2$ наздик мешавад. Мо дар п. 2 § 15 боби 8 функцияи $\ln(1+x)$-ро мувофиқи формулаи Маклорен ба қатор чудо карда будем:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x). \quad (13.55)$$

Дар ҳамон ҷо барои ҳама x-ҳои сегменти $0 \leqslant x \leqslant 1$ баҳодиҳии зерини аъзои боқимондаро ҳосил карда будем:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}.$$

Дар формулаҳои (13.55) ва (13.56) $x = 1$ фарз карда,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1),$$

ки дар ин ҷо

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1}$$

аст, ё

$$\left|\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right] - \ln 2\right| < \frac{1}{n+1}$$

-ро ҳосил мекунем. Суммаи хусусии n-уми қатори (13.54)-ро бо S_n ишорат карда, нобаробарии охиринро ба намуди

$$|S_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1}$$

навишта метавонем. Ҳамин тариқ, фарқи $S_n - \ln 2$ пайдарпаии беохир хурдро ифода мекунад. Ана ҳамин ба ададн $\ln 2$ наздикшавандагии қатори (13.54)-ро исбот мекунад.

2. Дар бораи ҷойивазкунии аъзоҳои қатори шартӣ наздикшаванда. *Хосияти ҷойивазкунӣ* яке аз хосиятҳои муҳимтарини суммаи ҷамъшавандаҳои ҳақиқии шумораашон охирнок мебошад. Ин хосият тасдиқ мекунад, ки аз ҷойивазкунии ҷамъшавандаҳо сумма тағьир намеёбад. Албатта, саволе пайдо мешавад, ки оё ин хосият барои суммаи қатори наздикшаванда дуруст мемонад, яъне *оё аз ҷойивазкунии аъзоҳои қатори наздикшаванда суммаи ин қатор тағьир меёбад?* Мо дар ин пункт ин масъаларо доир ба *қатори шартӣ наздикшаванда* аниқ мекунем. Мо таҳқиқро аз омӯзиши ягон ҷойивазкунии конкретии аъзоҳои қатори (13.54) сар мекунем. Барои муносибӣ қатори (13.54)-ро ба намуди зерин менависем:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}}_{} + \ldots \qquad (13.56)$$

Мо дар охири пункти гузашта исбот кардем, ки қатори (13.54) шартӣ наздик мешавад ва суммаи $S = \ln 2$-ро дорад. Акнун аъзоҳои қатори (13.54)-ро чунон ҷойгир мекунем, ки баъди як аъзои мусбат ду аъзои манфӣ воқеъ шавад. Дар натиҷаи чунин ҷойивазкунии аъзоҳо қатори зеринро ҳосил мекунем:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{} + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \ldots \qquad (13.57)$$

Исбот мекунем, ки қатори (13.57)-и дар натиҷаи ҷойивазкунии аъзоҳои қатори (13.54) ҳосилшуда наздик мешавад ва суммае дорад, ки он аз суммаи қатори (13.54) ду маротиба хурд аст. Суммаҳои хусусии m-уми қаторҳои (13.54) ва (13.57)-ро мувофиқан бо символҳои S_m ва S_m' ишорат мекунем. Чунин навишта метавонем:

$$S'_{3m} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}S_{2m}.$$

Инак,

$$S'_{3m} = \frac{1}{2}S_{2m}. \qquad (13.58)$$

Баъд маълум мешавад, ки

$$S'_{3m-1} = \frac{1}{2} S_{2m} + \frac{1}{4m}, \tag{13.59}$$

$$S'_{3m-2} = S'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2}. \tag{13.60}$$

Азбаски $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$ аст, пас лимити формулаҳои (13.58), (13.59) ва (13.60) ҳангоми $m \to \infty$ чунинанд:

$$\lim_{m\to\infty} S'_{3m} = \frac{1}{2} S, \lim_{m\to\infty} S'_{3m-1} = \frac{1}{2} S, \lim_{m\to\infty} S'_{3m-2} = \frac{1}{2} S.$$

Бо ҳамин комилан исбот карда шуд, ки қатори (13.57) наздик мешавад ва суммаи ба $\frac{1}{2} S$ баробарро дорад. Азбаски $S = \ln 2 \neq 0$ аст, пас $\frac{1}{2} S \neq S$ мебошад. Пас, *дар натиҷаи ҷойивазкунии номбурдаи аъзоҳо суммаи қатори шартӣ наздикшавандаи* (13.54) *тағьир ёфт.* Мисоли конкретии муоинашуда нишон медиҳад, ки қатори шартӣ наздикшаванда *ба хосияти ҷойивазкунӣ соҳиб нест.* Тасдиқоти аҷоиби зерин, ки ба Риман таалуқ дорад, масъалаи ба суммаи қатори шартӣ наздикшавандаи таъсиррасонии ҷойивазкунии аъзоҳоро пурра аниқ менамояд.

Т е о р е м а и 13.10 *(теоремаи Риман). Агар қатор шартӣ наздик шавад, онгоҳ, адади пешакӣ гирифташудаи L чи хеле ки бошад, аъзоҳои ин қаторро чунон ҷой иваз кардан мумкин аст, то ки қатори табдилшуда ба адади L наздик шавад.*

И с б о т. Бигзор

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{13.61}$$

қатори шартӣ наздикшавандаи дилхоҳ бошад. Бо $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *аъзоҳои мусбати* қатори (13.61)-ро, ки бо ҳамин тартиби навишт воқеъ буданд, ишорат мекунем. Бо $q_1, q_2, q_3, \ldots$ *модули аъзоҳои манфии* қатори (13.61)-ро, ки бо ҳамин тартиби навишт воқеъ буданд, ишорат мекунем. Қатори (13.61) *ҳам аъзоҳои мусбат ва ҳам аъзоҳои манфӣ дорад, ки шумораашон беохир мебошад,* чунки агар шумораи аъзоҳои якхелааломат охирнок мебуд, онгоҳ аъзоҳои аввалини шумораашон охирнокро, ки ба

наздикшавандагӣ таъсир намекунанд, партофта, мо қатори аъзоҳояш якхелааломатро ҳосил мекардем, ки барояш наздикшавӣ наздикшавии *мутлақро* ифода мекард. Инак, ду қатори беохири аъзоҳояшон *мусбати* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ва $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ бо қатори (13.61) алоқаманданд. Қатори якумро бо символи P ва қатори дуюмро бо символи Q ишорат мекунем. Исбот мекунем, ки қаторҳои P ва Q қаторҳои дуршаванда мебошанд. Суммаи хусусии n-уми қатори (13.61)-ро бо символи S_n, суммаи ҳама аъзоҳои мусбати S_n-ро бо символи P_n ва суммаи модулҳои ҳама аъзоҳои манфии S_n-ро бо символи Q_n ишорат мекунем. Онгоҳ $S_n = P_n - Q_n$ мешавад ва азбаски мувофиқи шарт қатори (13.61) ба ягон адади S наздик мешавад, пас

$$\lim_{n\to\infty} (P_n - Q_n) = S. \tag{13.62}$$

Аз ҷиҳати дигар, азбаски қатори (13.61) *мутлақ наздик намешавад,* пас

$$\lim_{n\to\infty} (P_n + Q_n) = \infty. \tag{13.63}$$

(13.62) ва (13.63)-ро муқоиса карда, $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$-ро ҳосил менамоем, яъне исбот карда шуд, ки қаторҳои P ва Q дур мешаванд. Аз дуршавандагии қаторҳои P ва Q натиҷа мебарояд, ки ҳатто баъди партофтани аъзоҳои аввалини шумараашон охирноки дилхоҳи ин қаторҳо мо аз аъзоҳои боқимондаи ҳам қатори P ва ҳам қатори Q аъзоҳои беҳад бисьёреро гирифта метавонем, ки суммаи онҳо аз адади пешакӣ гирифташудаи дилхоҳ калон аст. Ба ин факт асос карда, исбот мекунем, ки аъзоҳои қатори ибтидоии (13.61)-ро чунон ҷой иваз кардан мумкин аст, ки дар натиҷа қатори ба адади пешакӣ гирифташудаи L наздикшаванда ҳосил мешавад. Воқеан, мо қатори даркориро ин тавр ҳосил мекунем. Аввал аз қатори ибтидоии (13.61) расо ҳамон қадар аъзоҳои мусбати $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{k_1}$-ро интихоб мекунем, ки суммаи онҳо $p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1}$ аз L калон шавад. Баъд ба аъзоҳои интихобшуда *расо ҳамон қадар* аъзоҳои манфии $-q_1, -q_2, \ldots, -q_{k_2}$-ро ҳамроҳ мекунем, ки суммаи умумӣ $p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k_2}$ аз L хурд шавад. Баъд боз *расо ҳамон қадар* аъзоҳои мусбати $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_{k_3}$-ро ҳамроҳ мекунем, ки суммаи умумӣ $p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k_3} + p_{k+1} + \ldots + p_{k_3}$ аз L калон шавад. Ҳамингуна муҳокимаронирo давом дода, мо қатори беохиреро ҳосил мекунем, ки *ҳама аъзоҳои* қатори ибтидоии (13.61) ба таркиби он дохил мешаванд, чунки ҳар дафъа ба мо лозим меояд, ки *ақаллан яктo* аъзои мусбат ё манфии қатори ибтидоиро ҳамроҳ намоем.

Акнун исбот кардан лозим, ки қатори ҳосилшуда ба L наздик мешавад. Қайд мекунем, ки дар қатори ҳосилшуда *гурӯҳи аъзоҳои мусбат* ва *гурӯҳи аъзоҳои манфӣ* пай дар пай бадал мешаванд. Агар суммаи хусусии қатори ҳосилшуда бо *гурӯҳи пурра анҷомёфта* ба итмом расад, онгоҳ аз адади L тамоил кардани ин суммаи хусусӣ аз модули аъзои охирини он* калон намешавад. Агар суммаи хусусӣ бо *гурӯҳи нопурра анҷомёфта* ба итмом расад, онгоҳ аз адади L тамоил кардани ин суммаи хусусӣ аз модули аъзои охирини гурӯҳи пеш аз охирин калон намешавад. Барои ба L наздикшавии қаторро муқаррар кардан бовар кардан кифоя аст, ки модули аъзоҳои охирини гурӯҳ пайдарпаии беохир хурдро ташкил медиҳанд ва ин бевосита аз шарти зарурии наздикшавии қатори ибтидоии (13.61) бармеояд. Теоремаи Риман исбот шуд.

3. Дар бораи ҷойивазкунии аъзоҳои қатори мутлақ наздикшаванда. Мо дар пункти гузашта исбот кардем, ки *қатори шартӣ наздикшаванда ба хосияти ҷойивазкунӣ соҳиб нест.* Мо дар ин пункт исбот мекунем, ки *барои ҳаргуна қатори мутлақ наздикшаванда хосияти ҷойивазкунӣ дуруст аст.*

Теоремаи 13.11 *(теоремаи Коши). Агар қатори додашуда мутлақ наздик шавад, онгоҳ қатори дилхоҳе, ки аз қатори додашуда ба воситаи ягон ҷойивазкунии аъзоҳо ҳосил шудааст, низ мутлақ наздик мешавад ва суммааш ба суммаи қатори додашуда баробар мебошад.*

Исбот. Бигзор қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{13.64}$$

мутлақ наздик шавад ва суммаи ин қатор ба S баробар бошад. Бигзор

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \tag{13.65}$$

қаторе бошад, ки он аз қатори (13.64) дар натиҷаи ягон ҷойивазкунии аъзоҳо ҳосил шудааст. Исбот кардан лозим аст, ки: 1) қатори (13.65) наздик мешавад ва суммаи ба S баробарро дорад, 2) қатори (13.65) мутлақ наздик мешавад. Аввал 1)-ро исбот мекунем. Исбот кардан кифоя аст, ки барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - S\right| < \varepsilon \tag{13.66}$$

---

* Чунки мо ба гурӯҳи мазкур аъзоҳоро то он вақте ки суммаи умумӣ аз адади L «нагузарад», ҳамроҳ кардан мегирем.

мебошад. $\varepsilon > 0$-и дилхоҳро қайд мекунем. Азбаски қатори (13.64) мутлақ наздик мешавад ва суммаи ба S баробар дорад, пас барои $\varepsilon > 0$-и интихобшуда чунин номери N_0-ро нишон додан мумкин аст, ки нобаробариҳои

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (p \text{ — адади натуралии дилхоҳ}) \qquad (13.67)$$

ва

$$|\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S| < \frac{\varepsilon}{2}* \qquad (13.68)$$

дуруст мебошанд.

Акнун номери N-ро ҳамон қадар калон интихоб мекунем, ки суммаи хусусии дилхоҳи S'_n-и қатори (13.65)-и дорои номери n-и аз N калон ҳамаи N_0 *аъзоҳои аввалини қатори* (13.65)*-*ро дарбар гирад.*

Фарқи қисми чапи (13.66)-ро баҳо медиҳем ва исбот мекунем, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан барои ин фарқ нобаробарии (13.66) дуруст аст.

Воқеан, фарқи номбурдаро ба намуди

$$\sum_{k=1}^{n} u'_k - S = (\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k) + (\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S) \qquad (13.69)$$

навиштан мумкин аст. Азбаски модули суммаи ду бузургӣ аз суммаи модулҳои онҳо калон нест, пас аз (13.69) нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$|\sum_{k=1}^{n} u'_k - S| \leqslant |\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k| + |\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S|. \qquad (13.70)$$

Аз нобаробариҳои (13.68) ва (13.70) маълум мешавад, ки барои исботи нобаробарии (13.66) исбот кардан кифоя аст, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан

$$|\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (13.71)$$

---

* Дар нобаробариҳои (13.67) ва (13.68) номери N_0-ро *якхел* гирифтан мумкин аст. Воқеан, ду нобаробарии номбурдаи номерҳои N_0-ашон гуногунро пешакӣ навишта, баъд аз ду номери N_0 калонтаринашро гирифта метавонем.

** Чунин номери N-ро интихоб кардан мумкин аст, чунки қатори (13.65) аз қатори (13.64) ба воситаи ягон ҷойивазкунии аъзоҳо ҳосил мешавад.

мебошад. Барои исботи нобаробарии (13.71) қайд мекунем, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан суммаи якуми қисми чапи (13.71) дорои *ҳама* N_0 *аъзоҳои аввалини қатори* (13.64) мебошад. Дар натиҷаи ин фарқи

$$\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \tag{13.72}$$

суммаи $(n - N_0)$ аъзоҳои қатори (13.64)-и дорои номерҳоеро, ки *ҳар кадомашон аз* N_0 *калонанд*, ифода мекунад.

Агар p-и натуралиро ҳамон қадар калон интихоб намоем, ки номери $N_0 + p$ аз номери ҳама $(n - N_0)$ *аъзоҳои суммаи ҳозир номбурдаамон калон шавад*, онгоҳ барои фарқи (13.72), дар ҳаргуна маврид нобаробарии

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| \leqslant \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| \tag{13.73}$$

дуруст аст. Аз нобаробариҳои (13.73) ва (13.67) нобаробарии (13.71) бармеояд. Бо ҳамин нобаробарии (13.66) исбот шуд, яъне исбот карда шуд, ки қатори (13.65) наздик мешавад ва суммаи ба S баробар дорад. Акнун тасдиқоти 2) — *мутлақ* наздик шудани қатори (13.65)-ро исбот кардан лозим аст. Агар тасдиқоти 1)-ро ба қаторҳои

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad \text{ва} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u'_k| \tag{13.74}$$

татбиқ намоем, тасдиқоти 2) исбот мешавад. Дар айни ҳол мо наздикшавандагии қатори дуюми (13.74)-ро исбот мекунем. Яъне наздикшавии мутлақи қатори (13.65)-ро исбот мекунем. Теореми 13.11 пурра исбот шуд.

§ 4. Операцияҳои арифметикӣ бо қаторҳои наздикшаванда

Мо дар ин параграф масъалаи имконпазирии аъзо ба аъзо ҷамъ ва зарб кардани қаторҳои наздикшавандаро меомӯзем.

Теореми 13.12. *Агар қаторҳои* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *ва* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *наздик шаванд ва суммаҳои мувофиқан ба* U *ва* V *баробар дошта бошанд, онгоҳ қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ *ҳам наздик мешавад ва соҳиби суммаи ба* $U \pm V$ *баробар мебошад.*

И с б о т. Суммаҳои хусусии n-уми қаторҳои $\sum u_k$, $\sum v_k$ ва $\sum (u_k \pm v_k)$-ро мувофиқан бо U_n, V_n ва S_n ишорат мекунем. Онгоҳ $S_n = U_n \pm S_n$. Азбаски $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U$, $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$ аст, пас, мувофиқи теоремаҳои 3.9 ва 3.10, $\lim\limits_{n\to\infty} U \pm V$ вуҷуд дорад. Теорема исбот шуд.

Ҳамин тариқ, қаторҳои наздикшавандаи дилхоҳро аъзо ба аъзо ҷамъ ва тарҳ кардан мумкин аст.

Барои масъалаи имконпазирии аъзо ба аъзо зарб кардани қаторҳоро омӯхтан тасдиқоти зеринро исбот мекунем.

Т е о р е м а и 13.13. *Агар ду қатори* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ва $\sum\limits_{l=1}^{\infty} v_l$ *мутлақ наздик шаванд ва соҳиби суммаҳое бошанд, ки мувофиқан ба* U *ва* V *баробаранд, онгоҳ қаторе, ки аз ҳосили зарби намуди*

$$u_k v_l \quad (k = 1, 2, \ldots; \ l = 1, 2, \ldots)$$

-и бо тартиби дилхоҳ номернок кардашуда таркиб ёфтааст, низ мутлақ наздик мешавад ва суммааш ба UV *баробар аст.*

И с б о т. Ҳосили зарби намуди $u_k v_l$ $(k = 1, 2, \ldots; \ l = 1, 2, \ldots)$ -ро, ки бо тартиби дилхоҳ номернок карда шудааст, бо w_1, w_2, w_3, ... ишорат мекунем. Исбот мекунем, ки қатори $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |w_i|$ наздик мешавад. Бигзор S_n суммаи хусусии n-уми ин қатор бошад. Суммаи S_n аз аъзоҳои намуди $|u_k v_l|$ иборат аст. Аз байни индексҳои k ва l-и ингуна аъзоҳои ба суммаи S_n дохилшаванда индекси *калонтарине* ёфт мешавад, ки мо онро бо m ишорат менамоем.

Онгоҳ дар ҳаргуна мавриди

$$S_n \leqslant (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m|)(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_m|). \quad (13.75)$$

Дар қисми рости нобаробарии (13.75) ҳосили зарби суммаҳои хусусии m-уми қаторҳои $\sum |u_k|$ ва $\sum |v_l|$ воқеанд. Дар асоси наздикшавандагии қаторҳои номбурдаи аъзоҳояшон мусбат ҳама суммаҳои хусусии онҳо (ва, бинобар ин, ҳосили зарбашон ҳам) *маҳдуд мебошанд.* Бинобар ин пайдарпаии суммаҳои хусусии $\{S_n\}$ *низ маҳдуд мебошад* ва ин наздикшавандагии қатори $\sum |w_i|$, яъне наздикшавии *мутлақи* қатори $\sum w_i$-ро исбот мекунад.

Акнун исбот кардан лозим, ки қатори охирин соҳиби суммаи S-и ба UV баробар мебошад. Азбаски ин қатор мутлақ наздик мешавад, пас дар асоси теоремаи 13.11 суммаи он S *аз тартиби ба суммагирии он вобаста нест.* Пайдарпаии (ва, пас,

*таҳтпайдарпаии**) суммаҳои хусусии ин қаторро чи хеле ки гирем ҳам, он ба ададн S наздик мешавад. Лекин дар ингуна мавриД сумма (S)-и қатори $\sum_{i=1}^{\infty} w_i$ ба UV баробар мешавад, чунки *таҳтпайдарпаӣ* (W_m)-и суммаҳои хусусии ин қатор, ки намуди

$$W_m = (u_1 + u_2 + \ldots + u_m)(v_1 + v_2 + \ldots + v_m)$$

-ро дорад, фақат ба ҳамин адад наздик мешавад. Теореман 13.13 исбот шуд.

Қ а й д. Ҳосили зарби қаторҳои

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{ва} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

-ро барои мақсадҳои бисьёре ба намуди

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k\right) =$$

$$= u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \ldots + (u_1v_{k-1} + \ldots + u_{k-1}v_1) + \ldots$$

навиштан беҳтар аст.

Бе исбот қайд мекунем, ки қатори дар натиҷаи аъзо ба аъзо зарб кардани ду қатори махсус ҳосилшуда дар мавриди *мутлақ* наздик шудани *фақат яке* аз қаторҳои зарбшаванда (дар айни ҳол қатори дигар фақат шартӣ наздик мешавад) наздик мешавад. Агар ҳар ду қатор шартӣ наздик шаванд, онгоҳ қаторе, ки дар натиҷаи аъзо ба аъзо зарб кардани ин қаторҳо ҳосил мешавад, ҳатто мувофиқи ҳамин қоида, умуман, қатори дуршаванда хоҳад шуд.

§ 5. Аломатҳои наздикшавии қаторҳои дилхоҳ

Мо дар § 2 чандин аломатҳои наздикшавии қаторҳои *аъзоҳояшон мусбатро* муқаррар кардем. Мо дар ин параграф аломатҳои наздикшавии қаторҳоеро, ки аъзоҳояшон аломати дилхоҳ доранд, меомӯзем. Инак, бигзор

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{13.76}$$

қаторе бошад, ки аъзоҳояш аломати дилхоҳ доранд. Пеш аз

* Дар асоси п. 1 § 4 боби 3.

ҳама қайд мекунем, ки барои муқаррар кардани наздикшавии *мутлақи* ин қатор, яъне барои муқаррар намудани наздикшавии қатори аъзоҳояш мусбати

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

яке аз аломатҳои § 2 (аломати Даламбер, аломати Коши, аломати Раабе ё аломати интегралӣ)-ро татбиқ кардан мумкин аст. Аммо ҳеҷ ягон аломатҳои номбурда ба аниқ кардани *масъалаи нозуктари наздикшавии шартии қатори* (13.76)* имкон намедиҳад.

Ҳозир мо ба ҷустуҷӯи аломатҳои нозуктаре машғул мешавем, ки онҳо ба муқаррар кардани наздикшавии қатори (13.76) (дар мавриде ҳам, ки агар ин қатор мутлақ наздикшаванда набошад) имконият медиҳанд.

1. Аломати Лейбниц. Аломати Лейбниц ба намуди хусусии маъмултари қатори (13.76), ба қатори *аломатбадалкунанда* таалуқ дорад. Қатор қатори *аломатбадалкунанда* номида мешавад, агар аъзоҳои ин қатор бо навбат ё аломати мусбат ё аломати манфӣ дошта бошанд. Қатори аломатбадалкунандаро чунон навиштан даркор аст, ки аломати ҳамаи аъзоҳояш ошкор шуда бошанд, яъне онро ба намуди

$$p_1 - p_2 + p_3 - \ldots + (-1)^{k-1} p_k + \ldots \qquad (13.77)$$

навиштан беҳтар аст, дар ин ҷо $p_k \geqslant 0$.

---

* Аломатҳои Даламбер ва Қоширо барои муқаррар кардани дуршавандагии қатори аъзоҳояш дорои аломати дилхоҳ (13.76) татбиқ кардан мумкин аст. Агар аломати Даламбер ё Коши дуршавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$-ро тасдиқ намояд, аъзои k-уми қатори (13.76) u_k ҳангоми $k \to \infty$ ба нуль майл намекунад, яъне қатори (13.76) қатори дуршаванда аст. Мисол: қатори $\sum_{k=1}^{\infty} k! \left(-\frac{x}{k}\right)^k$ дар қимати қайдшудаи дилхоҳи x, ки нобаробарии $|x| > e$-ро қаноат менамояд, дур мешавад. Санҷиши он, ки аъзои k-уми ин қатор ҳангоми $k \to \infty$ ба нуль майл намекунад, мушкил аст. Аломати Даламберро татбиқ мекунем. Аъзои k-уми ин қаторро бо a_k ишорат мекунем: $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$, аз ин ҷо $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|}{e} < 1$. Дуршавандагии қатор исбот шуд.

Теореми 13.14 (*аломати Лейбниц*). *Агар аъзоҳои қатори аломатбадалкунанда, ки аз рӯи модулашон гирифта шудаанд, пайдарпаии беохир хурди афзуннашавандаро ташкил диҳанд, онгоҳ ин қатор наздикшаванда мебошад.*

Қайди 1. Қатореро, ки шарти теоремаи 13.14-ро қаноат менамояд, аксаран *қатори Лейбниц* меноманд.

Исботи теоремаи 13.14. Фарз мекунем, ки қатори (13.77) дода шудааст ва маълум аст, ки пайдарпаии $\{p_k\}$ пайдарпаии афзуннашаванда ва беохир хурд мебошад. Суммаи хусусии ин қатори тартибаш *ҷуфти* S_{2n}-ро ба намуди

$$S_{2n} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \ldots + (p_{2n-1} - p_{2n}) \qquad (13.78)$$

навиштан мумкин аст. Азбаски ҳар яки ифодаҳои даруни қавсҳои (13.78) *ғайриманфианд**, пас ҳангоми афзудани *n* пайдарпаии $\{S_{2n}\}$ *кам намешавад.*

Аз дигар ҷиҳат, S_{2n}-ро ба намуди

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n}$$

навиштан мумкин аст, аз ин ҷо барои номери дилхоҳи n $S_{2n} \leqslant p_1$ аст. Ҳамин тариқ, пайдарпаии суммаҳои хусусии *ҷуфти* S_{2n} кам намешавад ва аз боло маҳдуд мебошад. Дар асоси теоремаи 3.15 ин пайдарпай ба ягон адади S наздик мешавад, яъне $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Аз баробарии маълуми $S_{2n-1} = S_{2n} + p_{2n}$ ва аз он, ки $\lim\limits_{n\to\infty} p_{2n} = 0$ мебошад, натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии суммаҳои хусусии тоқи $\{S_{2n-1}\}$ ба ҳамон як адади S наздик мешавад, яъне $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$. Ҳамин тариқ, пайдарпаии $\{S_n\}$ ба S наздик мешавад.

Қайди 2. Мо ҳангоми исботи теоремаи 13.14 ошкор кардем, ки пайдарпаии суммаҳои хусусии *ҷуфти* $\{S_{2n}\}$ *кам нашуда* ба лимити S наздик мешавад. Ҳамин тавр аз баробарии

$$S_{2n-1} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1})$$

натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии суммаҳои хусусии тоқи $\{S_{2n-1}\}$ *афзун нашуда* ба лимити S наздик мешавад.

Ҳамин тариқ, барои номери дилхоҳи n

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}. \qquad (13.79)$$

Азбаски $S_{2n-1} - S_{2n} = p_{2n}$ мебошад, пас аз нобаробариҳои

---

* Аз сабаби он, ки $\{p_k\}$ намеафзояд, яъне $p_k \geqslant p_{k+1}$ мебошад.

(13.79) натиҷа мебарояд, ки $S - S_{2n} \leqslant p_{2n}$ ва $S_{2n-1} - S \leqslant p_{2n} \leqslant p_{2n-1}$. Ҳамин тариқ, барои номери дилхоҳи n нобаробарии

$$|S_n - S| \leqslant p_n \tag{13.80}$$

дуруст аст. Нобаробарии (13.80) барои ҳисоббарориҳои тақрибӣ (бо ёрии қаторҳо) васеъ истифода карда мешавад.

Ба сифати мисол қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \ldots \tag{13.81}$$

-ро, ки чандин маротиба баён карда будем, муоина мекунем. Қатори (13.81) қатори Лейбниц мебошад, бинобар ин наздикшавандагии он аз теоремаи 13.14 бармеояд. Масалан, фарз мекунем, ки суммаи қатори (13.81), яъне адади $\ln 2$-ро бо саҳеҳии то $\frac{1}{10^n}$ ҳисоб кардан лозим аст. Дар асоси баҳодиҳии (13.80) ин сумма бо саҳеҳии даркорӣ бо $S_{10^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{10^n}$ мувофиқ меояд.

2. Аломати Дирихле — Абель. Барои муқаррар кардани боз як аломати нозуки наздикшавандагии қаторҳо як айнияти аҷоиберо ҳосил мекунем, ки он бо формулаи интегронӣ аз рӯи ҳиссаҳо монанд аст. Бигзор $u_1, u_2, u_3, \ldots, v_1, v_2, v_3, \ldots$ ададҳои тамоман дилхоҳ, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, n ва p номерҳои дилхоҳ бошанд. Онгоҳ айнияти зерин дуруст аст:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n. \tag{13.82}$$

Айнияти (13.82)-ро одатан *айнияти Абель** меноманд.

Ҳосил кардани айнияти Абель. Ба эътибор мегирем, ки $u_k = S_k - S_{k-1}$ аст ва ин қимати u_k-ро ба қисми чапи (13.82) мегузорем. Чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k.$$

---

* Агар баробарии (13.82)-ро ба намуди

$$\sum_{k=n}^{n+p} v_k(S_k - S_{k-1}) = S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_{k+1} - v_k)$$

нависем, онгоҳ маълум мешавад, ки табдилоти Абель моҳиятан формулаи аз рӯи ҳиссаҳо суммагирӣ мебошад, ки он монандии фарқии формулаи интегронӣ аз рӯи ҳиссаҳоро ифода мекунад.

Дар суммаи охирин индекси ба суммагирӣ k-ро як воҳид кам мекунем. Чунин ифода ҳосил мешавад:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_k + S_{n+p} v_{n+p} - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} - S_{n-1} v_n =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n.$$

Мо ифодаеро ҳосил кардем, ки он бо ифодаи қисми рости (13.82) мувофиқ аст. Бо ҳамин айнияти Абель исбот шуд.

Теоремаи 13.15 (*аломати Дирихле—Абель*). *Бигзор қатори*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \tag{13.83}$$

дода шуда бошад. Агар ду шарти зерин иҷро шавад, ин қатор наздик мешавад:

1) *пайдарпаии* $\{v_k\}$ *пайдарпаии афзуннашаванда ва беохир хурд мебошад*;

2) *қатори* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *соҳиби пайдарпаии маҳдуди суммаҳои хусусӣ мебошад.*

Исбот. Суммаи хусусии n-уми қатори $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$-ро бо S_n ишорат менамоем. Мувофиқи шарт чунин адади $M > 0$ вуҷуд дорад, ки барои ҳама номерҳои n $|S_n| \leqslant M$ мебошад. Дар асоси критерияи Коши исбот кардан кифоя аст, ки барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери N ёфт мешавад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан ва барои p-и натуралии дилхоҳ

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \right| < \varepsilon \tag{13.84}$$

мебошад. Фарз мекунем, ки $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ дода шудааст. Азбаски пайдарпаии $\{v_k\}$ пайдарпаии беохир хурд мебошад ва намеафзояд, пас барои адади мусбати $\frac{\varepsilon}{2M}$ чунин номери N ёфт мешавад, ки

$$0 < v_n < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{13.85}$$

(ҳангоми $n \geqslant N$ будан) мебошад. Акнун барои баҳодиҳии бузургиҳои қисми чапи (13.84) айнияти Абель (13.82)-ро татбиқ мекунем. Азбаски модули суммаи якчанд бузургӣ аз суммаи модулҳои онҳо калон намешавад, пас модули ҳосили зарб ба ҳосили зарби модулҳо баробар аст ва $v_k \geqslant v_{k+1}$ мебошад, бинобар ин

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |S_k|(v_k - v_{k+1}) + |S_{n+p}|v_{n+p} + |S_{n-1}|v_n. \tag{13.86}$$

Нобаробарии $|S_n| \leqslant M$-ро, ки *барои ҳама номерҳои n* дуруст мебошад, дар қисми рости (13.86) истифода мекунем. Чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant M\left\{\sum_{k=n}^{n+p-1}(v_k - v_{k+1}) + v_{n+p}\right\} + Mv_n. \tag{13.87}$$

Суммаи даруни қавсҳои фигуравӣ ба v_n баробар мебошад. Дар ингуна мавриди нобаробарии (13.87) чунин намуд мегирад:

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant 2Mv_n. \tag{13.88}$$

Акнун, агар нобаробарии (13.85)-ро дар қисми рости (13.88) истифода намоем, онгоҳ, ҳангоми $n \geqslant N$ будан ва барои p-и натуралии дилхоҳ нобаробарии (13.84) дуруст мебошад. Теорема исбот шуд.

Қайд. Теоремаи 13.14 (аломати Лейбниц) мавриди хусусии теоремаи 13.15, ҳангоми* $u_k = (-1)^{k-1}$ будан, мебошад.

Мисолҳо. 1. Наздикшавандагии қатори зерин тадқиқ карда шавад:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \ldots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{3}{3n} + \ldots$$

Қатори номбурдаро чун қатори намуди (13.83) ҳангоми

$$v_k = \frac{1}{k},\ u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = -2,\ u_4 = 1,\ u_5 = 1,\ u_6 = -2,\ \ldots$$

будан муоина кардан мумкин аст. Маълум аст, ки: 1) қатори

---

* Маълум аст, ки қатори $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ соҳиби пайдарпаии маҳдуди суммаҳои хусусӣ мебошад.

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ба пайдарпаии *маҳдуди* суммаҳои хусусӣ: $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 0$, $S_4 = 1$, $S_5 = 2$, $S_6 = 0$, ... соҳиб аст; 2) пайдарпаии $\{v_k\}$ намеафзояд ва беохир хурд мебошад. Мувофиқи теоремаи 13.15 қатори муоинашаванда наздик мешавад.

2. Масъалаи наздикшавандагии қатори $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$-ро, ки дар ин ҷо x ягон адади ҳақиқии қайдшуда мебошад, аниқ мекунем. Ишоратҳои теоремаи 13.15-ро истифода карда, фарз мекунем, ки $u^k = \cos kx$, $v_k = 1/k$ аст. Пайдарпаии суммаҳои хусусӣ S_n-и қатори $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$-ро баҳо медиҳем. Азбаски барои номери дилхоҳи k

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{x}{2}\cos kx$$

мебошад, пас ин муносибатро нисбат ба k аз 1 то n ба сумма гирифта, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x = 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx = 2S_n\sin\frac{x}{2}.$$

Аз ин ҷо

$$S_n = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Ҳамин тариқ, барои x-и дилхоҳи ба 2π *каратӣ набудагӣ* пайдарпаии суммаҳои хусусии S_n маҳдуд мебошад:

$$|S_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Мувофиқи теоремаи 13.15 қатори муоинашаванда *барои қимати дилхоҳи x, ки ба 2π каратӣ нест, наздик мешавад.* Агар *x ба 2π каратӣ бошад,* онгоҳ қатори муоинашаванда ба *қатори гармоникӣ* табдил мешавад ва, чунон ки исбот кардем, *дур мешавад.*

§ 6. Ҳосилҳои зарби беохир

1. Мафҳумҳои асосӣ. Мафҳуми қатори ададӣ бо мафҳуми *ҳосили зарби ададии беохир* пайвастагии зич дорад. Фарз мекунем, ки пайдарпаии ададии беохири $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ дода шудааст. Ифодаи ба таври формалӣ навишташудаи намуди

$$v_1 v_2 v_3 \ldots v_k \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k \qquad (13.89)$$

-ро *ҳосили зарби беохир* меноманд. Элементҳои алоҳидаи v_k-ро аъзоҳои ҳосили зарби беохири додашуда меноманд. Ҳосили зарби n-то аъзоҳои аввалини ҳосили зарби беохири додашударо ҳосили зарби хусусии n-ум меноманд ва бо символи P_n ишорат менамоянд:

$$P_n = v_1 v_2 \ldots v_n = \prod_{k=1}^{n} v_k.$$

Ҳосили зарби беохири (13.89)-ро ҳосили зарби *наздикшаванда* меноманд, агар пайдарпаии ҳосилҳои зарби хусусии P_n лимити охирноки P-и *аз нуль тафовуткунанда** дошта бошад. Дар мавриди наздикшаванда будани ҳосили зарби беохири (13.89) лимити номбурдаи P-ро *қимати ин ҳосили зарби беохир* меноманд, яъне ин тавр менависанд:

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k. \qquad (13.90)$$

Қайд мекунем, ки баробарии (13.90) фақат барои ҳосили зарби беохири наздикшаванда соҳиби маъно мебошад. Фаҳмост, ки муоинаи ҳосилҳои зарби беохир моҳиятан шакли нави омӯзиши пайдарпаиҳои ададӣ мебошад, чунки ба ҳар як ҳосили зарби беохири додашуда пайдарпаии ҳосилҳои зарби хусусии он якқимата мувофиқ меояд ва ба ҳар як пайдарпаии ададии $\{P_k\}$, ки ҳама элементҳояш аз нуль тафовут доранд, ҳосили зарби беохир, ки барояш ин пайдарпаӣ пайдарпаии ҳосилҳои зарби хусусӣ мебошад, **якқимата мувофиқ меояд** (фарз кардан кифоя аст, ки аъзоҳои ҳосили зарби беохир $v_k = \dfrac{P_k}{P_{k-1}}$ ҳангоми $k > 1$ ва $v_1 = P_1$ будан) мебошанд.

---

* Ҳамон факте, ки ҳангоми $P = 0$ будан ҳосили зарби беохирро ҳосили зарби *дуршаванда* мепиндоранд, агарчи характери шартӣ дошта бошад ҳам, лекин, чунон ки мо сонитар мебинем, имконият медиҳад, ки дар байни наздикшавандагии қаторҳо ва ҳосилҳои зарби беохир монандии аниқ муқаррар карда шавад.

Теоремаи 13.16. *Ба воҳид майл кардани аъзои k-уми ҳосили зарби беохири* (13.89) *ҳангоми* $k \to \infty$ *шарти зарурии наздикшавандагии ин ҳосили зарб мебошад.*

Исбот. Фарз мекунем, ки ҳосили зарби беохири (13.89) наздик мешавад ва қимати P-и нобаробари нуль дорад. Онгоҳ $\lim\limits_{k\to\infty} P_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} P_k = P \neq 0$. Азбаски $v_k = \dfrac{P_k}{P_{k-1}}$ аст, пас $\lim\limits_{k\to\infty} v_k$ вуҷуд дорад ва ба воҳид баробар мебошад.

Қайд мекунем, ки хориҷ кардани *аъзоҳои дилхоҳи шумораашон охирноки* ҳосили зарби беохир (агар, албатта, дар байни ин аъзоҳо аъзои ба нуль баробар набошад) ба наздикшавандагии ин ҳосили зарб *таъсир намекунад.* Азбаски ҳосили зарби беохир, ки дар он *ақаллан* яке аз аъзоҳо баробари нуль аст, мувофиқи таърифи қабул кардаамон, *дуршаванда* ҳисобида мешавад, пас мо минбаъд ҳосилҳои зарби беохирро, ки *дар онҳо ақаллан як аъзо баробари нуль мебошад, умуман муоина намекунем.*

Мисолҳои ҳосилҳои зарби беохир.

1. $$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^k}\ldots \qquad (13.91)$$

(x — адади қайдшудаи дилхоҳ).

Исбот мекунем, ки ҳосили зарби беохири (13.91) наздик мешавад ва қимати $\dfrac{\sin x}{x}$-ро дорад. Ҳосили зарби хусусии n-уми

$$P_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n} \qquad (13.92)$$

-ро ҳисоб мекунем. Ҳар ду қисми (13.92)-ро ба $\sin\dfrac{x}{2^n}$ зарб карда ва формулаи синуси кунҷи дучандаи $\sin 2y = 2\sin y\cos y$-ро пай дар пай истифода карда,

$$P_n \sin\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sin x$$

-ро ҳосил мекунем. Аз формулаи охирин*

* Чунин мепиндорем, ки $x \neq 0$ аст. Агар $x = 0$ бошад, онгоҳ ҳама аъзоҳои (13.91) ва қимати он ба воҳид баробар мешавад.

$$P_n = \frac{\sin x}{x} \left\{ \frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \right\}.$$

Азбаски ифодаи даруни қавсҳои фигуравӣ ҳангоми $n \to \infty$ (дар асоси лимити аҷоиби якум) ба воҳид майл мекунад, пас $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ вуҷуд дорад ва ба $\frac{\sin x}{x}$ баробар мебошад. Бо ҳамин исбот карда шуд, ки ҳосили зарби беохири (13.91) наздик мешавад ва ба қимати $\frac{\sin x}{x}$ соҳиб аст.

$$2.\ \prod_{k=2}^{\infty}\left[1 - \frac{2}{k(k+1)}\right] = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+2)}{(k+1)}\cdots \qquad (13.93)$$

Исбот мекунем, ки ҳосили зарби беохири (13.93) наздик мешавад ва қимати $\frac{1}{3}$ дорад. Ҳосили зарби хусусии P_n-ро ҳисоб мекунем:

$$P_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}.$$

Баъд маълум мешавад, ки $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n}$ вуҷуд дорад ва ба $\frac{1}{3}$ баробар мебошад.

2. Алоқамандии байни наздикшавандагии ҳосилҳои зарби беохир ва қаторҳо. Агар ҳосили зарби беохири (13.89) наздик шавад, онгоҳ дар асоси теоремаи 13.16 ҳама аъзоҳои он v_k аз ягон номери k сар карда, мусбат мешаванд*. Азбаски шумораи охир-

* Чунки $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = 1$ аст.

ноки аъзоҳои аввалин ба наздикшавандагии ҳосили зарби беохир умуман таъсир намекунанд, пас мо ҳангоми омӯзиши масъалаи наздикшавандагии ҳосилҳои зарби беохир, ба умумият маҳдуд нашуда, фақат ҳосилҳои зарби беохиреро, ки *ҳамаи аъзоҳояшон мусбат* мебошанд, муоина мекунем.

Теоремаи 13.17. *Барои он ки ҳосили зарби беохири* (13.89) *-и аъзоҳояш мусбат наздик шавад, зарур ва кифоя аст, ки қатори*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k \tag{13.94}$$

наздик шавад. Дар мавриди наздикшавандагӣ суммаи S-и қатори (13.94) *ва қимати P-и ҳосили зарби* (13.89) *бо формулаи*

$$P = e^S \tag{13.95}$$

алоқаманданд.

Исбот. **Ҳосили зарби хусусии *n*-уми ҳосили зарби** беохири (13.89)-ро бо P_n ва суммаи хусусии n-уми қатори (13.94)-ро бо S_n ишорат карда, ин тавр навишта метавонем:

$$S_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}.$$

Дар асоси бефосила будани функцияи нишондиҳандагӣ (барои ҳама қиматҳои аргумент) ва бефосила будани функцияи логарифмӣ (барои ҳама қиматҳои мусбати аргумент) пайдарпаии P_n фақат дар мавриди наздик шудани S_n наздик мешавад, дар айни ҳол агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ бошад, онгоҳ $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^S$ аст. Теорема исбот шуд.

Ҳангоми тадқиқи наздикшавандагии ҳосили зарби беохир ин ҳосили зарби беохирро ба намуди

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k) = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_k) \dots \tag{13.96}$$

навиштан беҳтар аст. Дар айни ҳол, албатта, мувофиқи фарзияти қабул кардаамон, мо чунин меҳисобем, ки ҳамаи u_k-ҳо аз -1 калон ($u_k > -1$) мебошанд.

Теоремаи 13.17 тасдиқ мекунад, ки масъалаи наздикшавандагии ҳосили зарби (13.96) ба масъалаи наздикшавандагии қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln (1 + u_k) \tag{13.97}$$

баробаркувва мебошад. Мо акнун боз як тасдиқотро исбот карда метавонем.

Теоремаи 13.18. *Агар ҳамаи* u_k*-ҳо (ақаллан аз ягон номери* k *сар карда) як аломатро нигоҳ доранд, онгоҳ барои наздикшаванда будани ҳосили зарби беохири* (13.96) *зарур ва кифоя аст, ки қатори*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{13.98}$$

наздик шавад.

Исбот. Азбаски шарти $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ ҳам барои наздикшавандагии қатори (13.98) ва ҳам барои наздикшавандагии ҳосили зарби (13.96) шарти зарурӣ мебошад, пас мо чунин ҳисобида метавонем, ки ин шарт ҳам дар вақти исботи шарти зарурӣ ва ҳам дар вақти исботи шарти кифоягӣ иҷрошаванда мебошад. Лекин аз шарти номбурда ва аз формулаи асимптотӣ*

$$\ln(1+y) = y + 0(y)$$

натиҷа мебарояд, ки

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = 1 \tag{13.99}$$

ва

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{\ln(1+u_k)} = 1 \tag{13.100}$$

мебошад. Азбаски мувофиқи шарти теорема ҳама аъзоҳои қаторҳои (13.97) ва (13.98), аз ягон номери k сар карда, як аломатро нигоҳ медоранд, пас шартҳои (13.99) ва (13.100), дар асоси натиҷаи теоремаи 13.3 (теоремаи муқоиса), ба тасдиқи ҷумлаи зерин имконият медиҳанд: қатори (13.98) фақат дар ҳамон мавриде наздик мешавад, ки агар қатори (13.97) наздик шавад. Теорема исбот шуд.

Мисолҳо. 1) Аз дуршавандагии қатори гармоникӣ ва аз теоремаи 13.18 дуршавандагии ҳосилҳои зарби беохири зерин бармеояд:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\ldots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\ldots$$

* Ба § 7 боби 4 нигар.

Фаҳмидан осон аст, ки ҳосили зарби якум ба $+\infty$ ва ҳосили зарби дуюм ба нуль дур мешавад.

2) Аз теоремаи 13.18 ва аз наздикшавандагии қатори (13.33) ҳангоми $\alpha > 1$ будан наздикшавандагии ҳосилҳои зарби беохири зерин (ҳангоми $\alpha > 1$ будан) бармеояд:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^{\alpha}}\right)=(1+1)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{\alpha}}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\ldots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right]=\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{\alpha}}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right)\ldots$$

Чунон ки барои қаторҳо буд, барои ҳосилҳои зарби беохир ҳам мафҳумҳои наздикшавии *мутлақ* ва наздикшавии *шартӣ* ҷорӣ карда мешаванд. Ҳосили зарби беохири (13.96) фақат дар ҳамон маврид ҳосили зарби *мутлақ наздикшаванда* номида мешавад, ки агар қатори (13.97) мутлақ наздикшаванда бошад. Дар асоси теоремаҳои Коши 13.11 ва Риман 13.10 хулоса баровардан мумкин аст, ки ҳосили зарби мутлақ наздикшаванда ба хосияти *ҷойивазкунӣ* соҳиб мебошанд ва дар як вақт ҳосили зарби шартӣ наздикшаванда ба ин хосият соҳиб нест.

Тасдиқоти зерин дуруст аст.

Теоремаи 13.19. *Ҳосили зарби беохири* (13.96) *фақат дар ҳамон маврид мутлақ наздик мешавад, ки агар қатори* (13.98) *мутлақ наздик шавад.* **Барои исботи ин** теорема исбот кардан кифоя аст, ки қатори $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ фақат дар мавриди наздик шудани қатори $\sum_{k=1}^{\infty}|\ln(1+u_k)|$ наздик мешавад. Наздикшавии қатори $\sum_{k=1}^{\infty}|\ln(1+u_k)|$ аз мавҷудияти лимитҳои (13.99) ва (13.100) бо бо осонӣ бармеояд. Муҳокимаронии инро ба хонанда месупорем.

Дар хотима боз чанд мисол меорем.

1°. Ҳосили зарби беохири зеринро муоина мекунем:

$$x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots \qquad (13.101)$$

Азбаски қатори $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ наздик мешавад, пас, дар асоси теоремаҳои 13.18 ва 13.19, ҳосили зарби беохири (13.101) барои қимати кайдшудаи дилхоҳи x, ки аз $l\pi$ (дар ин ҷо $l=0,\pm1,\ldots$) тафовут дорад, мутлақ наздик мешавад. Дар иловаи 2-юми ҳамин

боб мо исбот мекунем, ки ин ҳосили зарб ба қимати $\sin x$ наздик мешавад. Бо ҳамин ба ҳосили зарби беохири

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \qquad (13.102)$$

чудо кардани функцияи $\sin x$ асоснок карда мешавад.

2°. Аз чудокунии (13.102) бо роҳи истифода кардани муносибати $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2 \sin x}$ чудокунии зерин ба таври элементарӣ ҳосил карда мешавад:

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right]. \qquad (13.103)$$

Наздикшавандагии мутлақи ҳосили зарби қисми рости (13.103) барои x-и дилхохе, ки аз $\dfrac{\pi}{2}(2l-1)$ $(l = 0, \pm 1, \ldots)$ тафовут дорад, аз теоремаҳои 13.18 ва 13.19 ва аз наздикшавандагии қатори $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k-1)^2}$ бармеояд.

3°. Дар чудокунии (13.102) $x = \pi/2$ фарз карда, ҳосили зарби зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2-1}{4k^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k^2)}.$$

Аз ин чо *формулаи Валлис** ҳосил мешавад:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdots \qquad (13.104)$$

Бо роҳи табдилоти номураккаб формулаи Валлисро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1}\left[\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right]^2. \qquad (13.104^*)$$

* Чон Валлис — математики англис (1616—1703).

Дар аввалҳо формулаи Валлисро барои тақрибан ҳисоб кардани адади π истифода мекарданд. Дар вақтҳои ҳозира барои ҳисоб кардани адади π методҳои самарабахш вуҷуд доранд. Формулаи Валлис дар чандин тадқиқотҳои назариявӣ* истифода мешаванд.

ИЛОВАИ 1

ТЕОРЕМАИ ЁРИРАСОНИ п. 3 § 2

Теоремаи 13.20. *Бигзор p_k ягон адади мусбат бошад. Онгоҳ, агар*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}=L \tag{13.105}$$

вуҷуд дошта бошад, онгоҳ $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}$ *ҳам вуҷуд дорад, дар айни ҳол формулаи*

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}=L \tag{13.106}$$

дуруст аст.

Исбот. Пеш аз ҳама тасдиқоти ёрирасони* зеринро исбот мекунем: *агар пайдарпаии ададҳои мусбати a_1, a_2, ..., a_k, ... ба ягон адади L наздик шавад, онгоҳ пайдарпаии миёнаи геометрии ин ададҳо $b_k=\sqrt[k]{a_1a_2\dots a_k}$ ҳам ба ҳамин адади L наздик мешавад.* Барои исботи тасдиқоти ёрирасон қайд мекунем, ки дар асоси бефосилагии функцияи логарифмӣ барои $L>0$ $\lim\limits_{k\to\infty}\ln a_k=$ $=\ln L$ мебошад. Баробарии охирин ҳангоми $L=0$ будан ҳам ба таври формалӣ дуруст аст, агар $\ln L=-\infty$ бошад.) Лекин онгоҳ мувофиқи теоремаи лимити миёнаи арифметикӣ (ба иловаи боби 3, мисоли 1 нигаред) лимити зерин вуҷуд дорад:

$$\lim_{k\to\infty}\ln\sqrt[k]{a_1a_2\dots a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\dots+\ln a_k}{k}=\ln L.$$

(Баробарии охирин ҳангоми $L=0$ ҳам дуруст аст, агар $\ln L=-\infty$ бошад.) Аз баробарии охирин, дар асоси бефосилагии функцияи нишондиҳандагӣ, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_1a_2\dots a_k}=\lim_{k\to\infty}e^{\ln\sqrt[k]{a_1a_2\dots a_k}}=e^{\ln L}=L.$$

---

* Аз ҷумла, онро барои муқаррар кардани формулаи Стирлинг (ба қисми 2-юми ҳамин курсниг.) истифода кардан мумкин аст. Ҷемс Стирлинг — математики англис (1692—1770).

** Бояд қайд кард, ки ин тасдиқот маънии мустақилона ҳам дорад.

(Ин мухокимарони ҳангоми $L = 0$ будан ҳам дуруст мебошад.) Тасдиқоти ёрирасон исбот шуд. Ин тасдиқотро ба ададхои $a_1 = p_1$, $a_2 = \frac{p_2}{p_1}$, $a_3 = \frac{p_3}{p_2}$, ..., $a_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}$, ... татбиқ карда, мо мавчудияти $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k}$ ва баробарии (13.106)-ро мукаррар мекунем. Теоремаи (13.20) исбот шуд.

ИЛОВАИ 2

БА ҲОСИЛИ ЗАРБИ БЕОХИР ЧУДО КАРДАНИ ФУНКЦИЯИ $\sin x$

Барои қулайии омӯзиш ҳосил кардани формулаи (13.102)-ро ба пунктхои алоҳида чудо мекунем.

1°. Бигзор m *адади чуфти мусбати дилхоҳ* бошад: $m = 2n + 1$. Пеш аз хама исбот мекунем, ки барои қимати дилхоҳи θ^*, ки аз $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) тафовут дорад, формулаи зерин дуруст аст:

$$\frac{\sin m\theta}{m \sin \theta} = \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}}\right) \ldots \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}}\right), \quad n = \frac{m-1}{2}. \tag{13.107}$$

Барои мукаррар кардани формулаи (13.107) формулаи Муавр

$$\cos m\theta + i \sin m\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^m$$

(ба § 1 боби 7 ниг.)-ро ба асос мегирем. Қисми рости ин формуларо бо ёрии биноми Ньютон навишта, қисмхои мавҳумашро муқоиса карда, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\sin m\theta = m \cos^{m-1} \theta \sin \theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} \theta \sin^3 \theta + \ldots$$

$m = 2n + 1$ буданашро ба эътибор гирифта, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\frac{\sin m\theta}{m \sin \theta} = \cos^{2n} \theta - \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{2n-2} \theta \sin^2 \theta + \ldots \tag{13.108}$$

Дар қисми рости (13.108) ҳама нишондиҳандахои косинус ва синусхо *чуфтанд* ва агар $\cos^2 \theta$-ро ба $1 - \sin^2 \theta$ иваз намоем, онгоҳ *дар қисми рости* (13.108) *бисьёраъзогии нисбат ба* $\sin^2 \theta$ *дарачаи n-ум ҳосил мешавад*. $z = \sin^2 \theta$ фарз карда, ин бисьёраъзогиро бо символи $F(z)$ ва решахои онро бо символхои $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ишорат мекунем. Азбаски ҳангоми $\theta \to 0$ $z =$

---

* Мо минбаъд қиматҳои θ-ро факат аз интервали $0 < |\theta| < \pi$ мегирем.

$= \sin^2\theta \to 0$ ва қисми чапи (13.108) ҳангоми $\theta \to 0$ ба воҳид майл мекунад, пас бисьёраъзогии $F(z)$-ро ба намуди

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = F(z) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)$$

навиштан мумкин аст. Акнун решаҳои $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ро муайян кардан лозим аст. Азбаски ин решаҳо ба нульҳои функцияи $\sin m\theta$ мувофиқ меоянд, пас

$$\alpha_1 = \sin^2\frac{\pi}{m},\quad \alpha_2 = \sin^2\frac{2\pi}{m},\ \ldots,\ \alpha_n = \sin^2\frac{n\pi}{m}.$$

Бо ҳамин формулаи (13.107) исбот шуд.

2°. Дар формулаи (13.107) $\theta = x/m$ фарз карда ва $0 < |x| < \pi m$ пиндошта, ин формуларо ба намуди зерин менависем:

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{13.109}$$

Қимати *дилхоҳи* (аз нуль тафовуткунандаи) x-ро қайд мекунем ва ду ададн натуралии дилхоҳи p ва n-ро, ки нобаробарии $2\frac{|x|}{\pi} < p < n = \frac{m-1}{2}$-ро қаноат менамоянд, мегирем. Онгоҳ формулаи (13.109)-ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right) R_p(x), \tag{13.110}$$

дар ин ҷо

$$R_p(x) = \prod_{k=p+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{13.111}$$

Пеш аз ҳама $R_p(x)$-ро баҳо медиҳем. Азбаски $2\frac{|x|}{\pi} < p < n = \frac{m-1}{2}$ аст, пас аргументи ҳамаи синусҳои формулаи (13.111) ба интервали $(-\pi/2,$

$\pi/2$) тааллуқ доранд. Ғайр аз он, фаҳмост, ки барои ҳама k-ҳои ин формула $|x| < k\pi/2$ аст ва, бинобар ин,

$$0 < \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}} < \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{2m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}} = \frac{1}{4\cos^2 \frac{k\pi}{2m}} < \frac{1}{2}$$

(чунки $\frac{k\pi}{m} < \frac{\pi}{2}$, яъне $\frac{k\pi}{2m} < \frac{\pi}{4}$ ва, бинобар ин, $\cos^2 \frac{k\pi}{2m} > \frac{1}{2}$). Азбаски барои β-и дилхоҳи интервали $0 < \beta < 1/2$ нобаробарихои $1 > 1 - \beta > e^{-2\beta}$* дурустанд, пас барои ҳама номерҳои k-и аз p калон

$$1 > 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2}} > e^{-2\frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2}}}. \qquad (13.112)$$

Нобаробарихои (13.112)-ро, ки барои қиматхои $k = p+1, p+2, \ldots, n$ навишта шудаанд, аъзо ба аъзо зарб карда, баҳодиҳиро барои $R_p(x)$ ҳосил мекунем:

$$1 > R_p(x)\, e^{-2\sin^2 \frac{x}{m} \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}} \qquad (13.113)$$

Азбаски аргументи $k\pi/m$ дар чорьяки якум воқеъ аст ва барои β-и дилхоҳи чорьяки якум $1 \geqslant \frac{\sin\beta}{\beta} \geqslant \frac{2}{\pi}$** мебошад, пас

---

* Нобаробарии қисми рост аз формулаи Маклорен ба таври элементарӣ ҳосил карда мешавад: $e^{-2\beta} = 1 - 2\beta + \frac{(2\beta)^2}{2} - \ldots < 1 - 2\beta + 2\beta^2 < 1 - \beta$, чунки $2\beta^2 < \beta$.

** Ин нобаробарихо аз он бармеоянд, ки нисбати $\frac{\sin\beta}{\beta}$ ҳангоми аз 0 то $\pi/2$ тағьир ёфтани β аз 1 то $2/\pi$ кам мешавад. Факти дар навбати худ кам шудани функцияи $\sin\beta/\beta$ аз он бармеояд, ки дар ҳамаҷои интервали $0 < \beta < \pi/2$ $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)' = \frac{\cos\beta}{\beta^2}(\beta - \operatorname{tg}\beta) < 0$ мебошад.

$$\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}} < \frac{1}{\frac{2}{\pi}\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2} = \frac{m^2}{4k^2} < \frac{m^2}{4}\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right].$$

Ҳамин тариқ,

$$e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}} > e^{-\frac{m^2}{2}\sin^2\frac{x}{m}\sum_{k=p+1}^{\infty}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right]} = e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}.$$

Нобаробарии охирин имконият медиҳад, ки баҳодиҳии (13.113)-ро ба таври зерин саҳеҳтар намоем:

$$1 > R_p(x) > e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}. \qquad (13.114)$$

3°. Акнун дар формулаи (13.110) қимати x ва номери p-ро бетағйир гузошта (қайдшуда пиндошта), адади m-ро ба беҳудуд майл мекунонем. Азбаски $\lim_{m\to\infty} m\sin\frac{x}{m} = x$ ва $\lim_{m\to\infty} m^2\sin^2\frac{k\pi}{m} = k^2\pi^2$ мебошад, пас лимити қисми чапи (13.110), ки ба $\sin x/x$ баробар аст, ва лимити ҳосили зарби охирноки $\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)$, ки ба $\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ баробар аст, вуҷуд доранд. Баъд мочунин меҳисобем, ки лимити охирин нобаробарии нуль аст, чунки агар он баробари нуль бошад, $\sin x = 0$ аст ва ҷудокунии (13.102) муқаррар мешавад. Лекин онгоҳ $\lim_{m\to\infty} R_p(x)$ низ вуҷуд дорад. Ин лимитро бо $\hat{R}_p(x)$ ишорат мекунем. Аз нобаробариҳои (13.114), ки барои номери дилхоҳи m дурустанд, ва аз теоремаи 3.13 натиҷа мебарояд, ки

$$1 \geqslant \hat{R}_p(x) \geqslant e^{-x^2/(2p)} \qquad (13.115)$$

мебошад. Агар формулаи (13.110)-ро ҳангоми $m\to\infty$ лимит гирем, ифодаи зерин ҳосил мешавад:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\hat{R}_p(x). \qquad (13.116)$$

4°. Қимати x-ро қайдшуда нигоҳ дошта, дар формулаи (13.116) номери p-ро ба беҳудуд майл мекунонем. Азбаски қисми чапи (13.116) аз p вобаста

нест ва $\lim\limits_{p\to\infty} \hat{R}_p(x)$ дар асоси нобаробарихои (13.115) ва теоремаи 3.14, вуҷуд дорад ва ба вохид баробар мебошад, пас

$$\lim_{p\to\infty} \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$$

низ вуҷуд дорад. Бо ҳамин ҷудокунии $\sin x$ (13.102) муқаррар карда шуд.

Қ а й д. Мисли ҷудокунихои $\sin x$ (13.102) ва $\cos x$ (13.103) *ҷудокуниҳои хосили зарби беохири функцияҳои гиперболии* зеринро хосил кардан мумкин аст:

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{ch} x = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right].$$

Аз ҷудокунихои $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ ҷудокунихои хосили зарби беохири функцияхои $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ ва $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$-ро хосил кардан мумкин аст.

ИЛОВАИ 3

МЕТОДҲОИ ҶАМЪБАСТИИ БАСУММАГИРИИ ҚАТОРҲОИ ДУРШАВАНДА

Мо дар боби 13 суммаи қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots \qquad (13.117)$$

-ро лимит (S)-и пайдарпаии $\{S_n\}$-и суммахои хусусии ин қатор номида будем (ба шарте ки ин лимит вуҷуд дошта бошад).

Дар як қатор масъалахои анализи математикӣ, ки ҳам манфиати назариявӣ ва ҳам манфиати амалӣ доранд, бо қаторхое, ки дар онҳо пайдарпаихои суммахои хусусӣ наздик намешаванд ва *суммаҳои дар боби* 13 *номбурда дар маънои муқаррарӣ вуҷуд надоранд,* операция (амал)-хоеро иҷро кардан лозим меояд. Дар бораи *ҷамъбаст кардани мафҳуми суммаи қатор ва бо ёрии ягон методи ҷамъбастӣ басуммагирии қатори дуршавандаи* (13.117) масъала ба миён меояд. Дар ҳамин илова мо ба омӯзиши баъзе методҳои ҷамъбастии басуммагирии қаторҳои дуршаванда таваққуф мекунем.

Пеш аз ҳама ба ҳамон методхои басуммагирӣ, ки мо бо онҳо кордор мешавем, тавсифи умумӣ медиҳем. Бехтар мешавад, ки мафҳуми ҷамъбастии сумма мафҳуми муқаррарии суммаро дарбар гирад. Аниқтараш, *қаторе, ки дар маънои муқаррарӣ наздикшаванда аст ва суммаи муқаррарии S-ро соҳиб аст, бояд суммаи ҷамъбастӣ дошта бошад ва дар айни ҳол низ ба S баробар бошад.* Методи басуммагирӣ, ки ба хосияти номбурда соҳиб аст, *методи мунтазам* номида мешавад.

Баъд мафҳуми суммаи ҷамъбастиро ба шарти зерин тобеъ кардан лозим аст: *агар қатори* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *суммаи ҷамъбастии* u *ва қатори* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *суммаи ҷамъбастии* V *дошта бошад, онгоҳ қатори* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (Au_k + Bv_k)$, *ки дар ин ҷо* A *ва* B

доимиҳои дилхоҳ мебошанд, суммаи ҷамъбастии $(AU + BV)$-ро дорад. Методи басуммагирие, ки шарти номбурдаро қаноат менамояд, *методи хаттӣ* номида мешавад. Дар анализ ва татбиқоти он, чун қоида, *фақат бо методҳои хаттии мунтазами басуммагирӣ* кордор мешаванд. Ба ду методи басуммагирии ҷамъбастӣ, ки татбиқи васеъ дорад, таваққуф менамоем.

1. **Методи Чезаро* (ё методи миёнаи арифметикӣ).** Мегӯянд, ки *қатори* (13.117)*-ро бо методи Чезаро ба сумма мегирем, агар лимити миёнаи арифметикии суммаҳои хусусии ин қатор*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n} \tag{13.118}$$

мавҷуд бошад. Дар ин ҳолат лимити (13.118) *суммаи ҷамъбастии Чезарои қатори* (13.117) *номида мешавад.*

Хаттӣ будани методи басуммагирии Чезаро маълум аст. *Мунтазам будани* методи Чезаро аз мисоли 1-уми Иловаи 1-и боби 3 бармеояд. Воқеан, аз он мисол натиҷа мебарояд, ки агар пайдарпаии $\{S_n\}$-и суммаҳои хусусии қатори (13.117) ба адади S наздик шавад, онгоҳ лимити (13.118) вуҷуд дорад ва ба S баробар мебошад.

Қаторҳоеро мисол меорем, ки онҳо дар маънои муқаррарӣ наздикшавандаанду лекин бо методи Чезаро ба сумма гирифташавандаанд.

1) Қатори дуршавандаи

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = 1-1+1-1+\ldots$$

-ро муоина мекунем. Азбаски ҳама суммаҳои хусусии *ҷуфти* S_{2n}-и ин қатор баробари нуль ва ҳама суммаҳои хусусии *тоқи* S_{2n-1} баробари як мебошанд, пас лимити (13.118) вуҷуд дорад ва ба 1/2 баробар аст. Ҳамин тариқ, қатори муоинашаванда бо методи Чезаро ба сумма гирифташаванда аст ва суммаи он (ба маънои Чезаро) ба 1/2 баробар аст.

2) x-ро адади ҳақиқии қайдшудаи дилхоҳи интервали $0 < x < 2\pi$ пиндошта, қатори дуршавандаи**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots \tag{13.119}$$

-ро муоина мекунем. Суммаи хусусии ин қатор S_n-ро дар мисоли 2-юми охири § 5 ҳисоб карда будем:

$$S_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

---

* Эрнесто Чезаро — математики итолиёӣ (1859—1906).

** Дуршавандагии қатори (13.119) аз ифодаи суммаи хусусиаш маълум аст.

Миёнаи арифметикии суммаҳои хусусиро ҳисоб мекунем:

$$\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=\frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right]-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{4n\sin^2\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}(\cos mx-\cos(m+1)x\right]-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\cos x-\cos(n+1)x}{4n\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$$

Аз ин ҷо маълум аст, ки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=-\frac{1}{2}.$$

Ҳамин тариқ, қатори (13.119) бо методи Чезаро ба сумма гирифташаванда аст ва суммаи он (ба маънои Чезаро) ба (—1/2) баробар мебошад.

2. Методи басуммагирии Пуассон* — Абель. *Ин методи басуммагирӣ аз зайл иборат аст. Аз рӯи қатори* (13.117) *қатори дараҷагии*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^{k-1}=u_1+u_2x+u_3x^2+\ldots+u_kx^{k-1}+\ldots \qquad (13.120)$$

тартиб дода мешавад. Агар ин қатори дараҷагӣ барои ҳама қиматҳои x-и интервали $0<x<1$ *наздик шавад ва агар суммаи* $S(x)$*-и ин қатор дар нуқтаи* $x=1$ *қимати лимитии чапи* $\lim\limits_{x\to1-0}S(x)$ *дошта бошад, онгоҳ мегӯянд, ки қатори* (13.117) *бо методи Пуассон—Абель ба сумма гирифташаванда аст. Дар ин ҳолат қимати лимитии номбурда суммаи қатори* (13.117) *ба маънои Пуассон—Абель номида мешавад.*

Хаттӣ будани методи басуммагирии Пуассон—Абель шубҳае намеорад. *Мунтазам будани* ин методро исбот мекунем. Бигзор қатори (13.117) дар маънои муқаррариаш наздик шавад ва соҳиби суммаи ба S баробар бошад. Исбот кардан лозим аст, ки: қатори (13.120) барои x-и дилхоҳи интервали $0<x<1$ наздик мешавад, 2) суммаи $S(x)$-и қатори (13.120) дар нуқтаи $x=1$ қимати лимитии чапи ба S баробар дорад.

Аввал тасдиқоти 1)-ро исбот мекунем. Азбаски қатори (13.117) наздик мешавад, пас пайдарпаии аъзоҳои он *пайдарпаии беохир хурд* мебошад ва, бинобар ин, **пайдарпаии маҳдуд аст, яъне чунин адади** M ёфт мешавад, ки барои ҳама номерҳои k

$$|u_k|<M \qquad (13.121)$$

---

* Симон Дени Пуассон — математики франсавӣ (1781—1840).

мебошад. Нобаробарии (13.121)-ро истифода карда ва x-ро ададн дилхоҳи интервали $0 < x < 1$ пиндошта, модули аъзои k-уми қатори (13.120)-ро баҳо медиҳем. Чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$|u_k x^{k-1}| \leqslant M |x|^{k-1}.$$

Азбаски $|x| < 1$ аст, пас қатори $\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{k-1}$ наздик мешавад. Пас, дар асоси қайди 2-юми теоремаи 13.3 (теоремаи муқоиса), қатори (13.120) низ наздик мешавад.

Акнун тасдиқоти 2)-ро исбот мекунем. Бигзор S_n суммаи хусусии n-уми қатори (13.117) ва S суммаи муқаррарии он бошад. Бо ёрии табдилоти Абель* бовар кардан осон аст, ки барои x-и дилхоҳи интервали $0 < x < 1$ айнияти

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1} \qquad (13.122)$$

дуруст аст. Аз айнияти маълуми

$$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1}$$

айнияти (13.122)-ро тарҳ мекунем. Дар айни ҳол, боқимондаи k-уми қатори (13.117)-ро бо r_k ишорат карда, чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1},$$

ё

$$S - S(x) = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}. \qquad (13.123)$$

Исбот кардан лозим аст: барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин $\delta > 0$ ёфт мешавад, ки қисми чапи (13.123) барои ҳама x-ҳои қаноаткунандаи нобаробарии $1 - \delta < x < 1$ аз ε хурд мебошад. Азбаски боқимондаи r_k-и қатори (13.117) ҳангоми $k \to \infty$ ба нуль майл мекунад, пас барои ададн мусбати $\varepsilon/2$ чунин номери k_0 ёфт мешавад, ки ҳангоми $k \geqslant k_0$ будан $r_k < \varepsilon/2$ аст. Ҳамин тариқ,

$$\left|(1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \left|(1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Исбот кардан лозим аст, ки барои x-и ба қадри кифоя ба як наздик

$$\left|(1-x) \sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

---

* Ба табдилоти Абель (13.82)-ро дар п. 2 § 5 муқаррар кардем. Дар ин маврид дар (13.82) $n = 1$, $S_{n-1} = 0$ фарз карда, баъд p-ро ба беохирӣ майл кунонидан лозим аст.

мебошад, лекин ин маълум аст, чунки суммаи нобаробарии охирин махдуд мебошад. Мунтазам будани методи Пуассон—Абель исбот шуд. Ба сифати мисол қатори дуршавандаи

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \qquad (13.124)$$

-ро боз муоина мекунем. Барои ин қатор қатори дараҷагии намуди (13.120)-ро тартиб медиҳем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Маълум аст, ки қатори охирин барои ҳама x-ҳои интервали $0 < x < 1$ наздик мешавад ва суммаи $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$-ро дорад. Азбаски

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

мебошад, пас қатори (13.124) бо методи Пуассон—Абель ба сумма гирифташаванда аст ва суммаи он (ба маънои Пуассон—Абель) ба 1/2 баробар мебошад.

Ба он диққат медиҳем, ки суммаи қатори (13.124) ба маънои Пуассон—Абель бо суммаи он ба маънои Чезаро мувофиқ меояд. Ин факт тасодуфӣ нест: исбот кардан мумкин аст, ки агар қатор бо методи Чезаро ба сумма гирифташаванда бошад, онгоҳ он бо методи Пуассон—Абель ҳам ба сумма гирифташаванда мебошад, дар айни ҳол суммаи ин қатор ба маънои Чезаро бо суммаи он ба маънои Пуассон—Абель мувофиқ меояд. Ба замми он, қаторҳое ҳастанд, ки бо методи Пуассон—Абель ба сумма гирифта мешаванду бо методи Чезаро не*. Омӯзиши муфассали методҳои гуногуни басуммагирии ҷамъбастии қаторҳои дуршаванда дар китоби Г. Хорди «Расходящиеся ряды».— М.: ИЛ, с. 1951 баён шудааст.

* Ҳамин тариқ, гуфтан мумкин аст, ки методи Пуассон—Абель назар ба методи Чезаро методи «тавоно»-и басуммагирӣ мебошад.

БОБИ 14

ФУНКЦИЯҲОИ ЯКЧАНДТАҒЬИРЬЁБАНДА

§ 1. Мафҳуми функцияи якчандтағьирьёбанда

1. Дар бораи вобастагиҳои функционалии байни якчанд бузургиҳои тағьирьёбанда. Ҳангоми омӯзиши аксар масъалаҳои табиатшиносӣ чунин вобастагиҳои байни якчанд бузургиҳои тағьирьёбанда дучор мешаванд, ки қимати яке аз бузургиҳои тағьирьёбанда бо қимати бузургиҳои тағьирьёбандаи дигар пурра муайян мешавад. Чунончӣ, ҳангоми муоинаи ягон характеристикаи физикавии ҷисм (масалан, зичӣ ρ ё ҳарорати он T) ба мо лозим меояд, ки тағьирьёбии ин характеристикаро ҳангоми аз як нуқтаи ҷисм ба дигар нуқтаи он гузаштан ба эътибор гирем. Азбаски ҳар як нуқтаи ҷисм бо се координатаи декартии x, y ва z муайян карда мешавад, пас характеристикаҳои муоинашаванда (зичӣ ρ ё ҳарорат T) бо қиматҳои се тағьирьёбандаи x, y ва z муайян мешавад.

Ҳангоми муоинаи процессҳои физикавӣ, ки бо гузашти вақт тағьир меёбанд, қимати характеристикаҳои физикавӣ бо қиматҳои *чор* тағьирьёбанда: се координатаи нуқтаҳои x, y ва z ва вақти t муайян карда мешаванд. Масалан, ҳангоми омӯзиши лаппишҳои садоии газ зичӣ ρ-и ин газ ва фишор p бо қиматҳои чор тағьирьёбандаи x, y, z ва t муайян карда мешаванд. Барои омӯзиши ингуна вобастагиҳо дар ин боб мафҳуми функцияи якчанд тағьирьёбанда ҷорӣ карда шуда, аппарати тадқиқи ингуна функцияҳо васеъ карда мешаванд.

Дар назарияи функцияҳои якчанд тағьирьёбанда аз терминологияи геометрӣ истифода кардан бехтар аст. Бевосита фаҳмост, ки ягон маҷмӯи нуқтаҳои ҳамворӣ (ё фазо) соҳаи дода шудани функцияи ду (ё се) тағьирьёбанда мебошад. Барои геометризацияи тасаввуроти мо дар бораи функцияи m-тағьирьёбанда мафҳуми фазои m-ченакаро, ки мафҳумҳои маъмули ҳамвории дученака ва фазои сеченакаро ҷамъбаст мекунад, ҷорӣ кардан бехтар аст. Баёноти минбаъдаро аз аниқ кардани мафҳумҳои геометрии ба мо зарур сар мекунем.

2. Мафҳумҳои ҳамвории евклидӣ ва фазои евклидӣ. Мафҳуми координатаҳои нуқта дар ҳамворӣ ва дар фазо ва формулаи муайян кардани масофаи байни ду нуқтаро, ки аз геометрияи аналитикӣ маълуманд, барои ба таври аналитикӣ ҷорӣ намудани мафҳумҳои ҳамворӣ ва фазо истифода кардан мумкин аст. *Маҷмӯи ҷуфти тартибноки гуногуни (x, y)-и ададҳои ҳақиқии x ва y ҳамвории координатӣ номида мешавад.*

Дар айни ҳол ҳар як ҷуфти (x, y)-ро нуқтаи ин ҳамворӣ меномем ва бо як ҳарфи M ишорат менамоем. Ададҳои x ва y координатаҳои нуқтаи M номида мешаванд. Навишти $M(x, y)$ чунин маъно дорад, ки нуқтаи M соҳиби координатаҳои x ва y мебошад.

Ҳамвории координатӣ ҳамвории евклидӣ номида мешавад, агар дар байни ду нуқтаи дилхоҳи $M'(x', y')$ ва $M''(x'', y'')$-и ҳамвории координатӣ масофаи $\rho(M', M'')$ аз рӯи формулаи

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

муайян шуда бошад. Мафҳумҳои фазои координатӣ ва фазои евклидӣ айнан ҳамин тавр ҷорӣ карда мешаванд. *Маҷмӯи сегонаи тартибноки гуногуни (x, y, z)-и ададҳои x, y ва z фазои координатӣ номида мешавад.* Дар айни ҳол ҳар як сегонаи (x, y, z)-ро нуқтаи ин фазо меномем ва бо як ҳарфи M ишорат менамоем. Ададҳои x, y ва z координатаҳои нуқтаи M номида мешаванд. Навишти $M(x, y, z)$ чунин маъно дорад, ки нуқтаи M соҳиби координатаҳои x, y ва z мебошад.

Фазои координатӣ фазои евклидӣ номида мешавад, агар дар байни ду нуқтаи дилхоҳи $M'(x', y', z')$ ва $M''(x'', y'', z'')$-и фазои координатӣ масофаи $\rho(M', M'')$ аз рӯи формулаи

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}$$

муайян шуда бошад.

Мафҳумҳои ҳамвории координатӣ ва фазои координатӣ мушобеҳати хати рости ададиро ифода мекунанд; мафҳумҳои ҳамвории евклидӣ ва фазои евклидӣ мушобеҳати *хати рости евклидиро* ифода мекунанд, ки онро чун хати рости ададие, ки дар байни ду нуқтаи дилхоҳи x' ва x''-и он масофаи $\rho(x', x'')$ бо формулаи $\rho(x', x'') = \sqrt{(x'' - x')^2} = |x'' - x'|$ муайян шудааст, муайян кардан мумкин мебошад.

Ягон маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои ҳамвории евклидӣ ва фазои евклидиро муоина мекунем.

1°. Маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои ҳамвории евклидӣ, ки координатаҳои x ва y-и онҳо нобаробарии $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant R^2$-ро қаноат менамоянд, чунон ки маълум аст, *доираи* радиусаш R

ва марказаш нуқтаи $M_0(a, b)$ номида мешавад. Агар координатаҳои x ва y нобаробарии қатъии $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2$-ро қаноат намоянд, онгоҳ маҷмӯи $\{M\}$ *доираи кушода* номида мешавад. Дар фазои евклидӣ маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳоеро, ки координатаҳои x, y ва z-и онҳо нобаробарии $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant R^2$-ро қаноат менамоянд, чунон ки маълум аст, *кураи* радиусаш R ва марказаш нуқтаи $M_0(a, b, c)$ меноманд. Агар координатаҳои x, y ва z нобаробарии қатъии мувофиқро қаноат намоянд, онгоҳ маҷмӯи $\{M\}$ *кураи кушода** номида мешавад.

2°. Маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои ҳамворӣ евклидӣ (фазои евклидӣ), ки координатаҳои x ва y (x, y ва z)-и онҳо нобаробариҳои $|x-a| \leqslant d_1$ ва $|y-b| \leqslant d_2$, ($|x-a| \leqslant d_1$, $|y-b| \leqslant d_2$ ва $|z-c| \leqslant d_3$)-ро қаноат менамоянд, *росткунҷаи координатии (параллелепипеди координатии)* марказаш нуқтаи $M_0(a, b)$ (нуқтаи $M_0(a, b, c)$ номида мешавад).

3. Мафҳуми функцияи ду ва сетағьирьёбанда. Терминологияи геометриро истифода карда, мафҳуми ба мо маълуми функцияи яктағьирьёбандаро ба таври зерин баён кардан мумкин аст.

Агар ба ҳар як нуқтаи M-и ягон маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои хати рости евклидӣ аз рӯи қоидаи муайян ягон адади u дар мувофиқатӣ гузошта шавад, онгоҳ мегӯянд, ки дар маҷмӯи $\{M\}$ функцияи $u=u(M)$ ё $u=f(M)$ дода шудааст.

Акнун мафҳуми функцияи дутағьирьёбандаро баён мекунем.

Агар ба ҳар як нуқтаи M-и ягон маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои ҳамвории евклидӣ аз рӯи қоидаи муайян ягон адади u дар мувофиқатӣ гузошта шавад, онгоҳ мегӯянд, ки дар маҷмӯи $\{M\}$ функцияи $u=u(M)$ ё $u=f(M)$ дода шудааст.

Мафҳуми функцияи дутағьирьёбанда аз мафҳуми баёншудаи функцияи яктағьирьёбанда фақат бо он фарқ мекунад, ки ба ҷои ибораи «хати рости евклидӣ» термини «ҳамвории евклидӣ» истифода карда мешавад. Мафҳуми функцияи сетағьирьёбанда айнан ҳамин тавр ҷорӣ карда мешавад. Барои ин ба ҷои маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои ҳамвории евклидӣ маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои фазои евклидиро гирифтан лозим аст.

Азбаски нуқтаи M-и ҳамвории евклидӣ бо ду координатаи x ва y ва нуқтаи M-и фазои евклидӣ бо се координатаи x, y ва z муайян карда мешавад, пас мо барои функцияҳои ду ва сетағьирьёбанда мувофиқан ишоратҳои $u=f(x, y)$ ва $u=f(x, y, z)$-ро истифода карда метавонем. Агар функцияи $u=f(M)$ дар маҷмӯи $\{M\}$ дода шуда бошад, онгоҳ ин маҷмӯъ *соҳаи дода шудани функцияи* $u=f(M)$ номида мешавад. Адади u-ро, ки ба нуқтаи додашудаи M-и маҷмӯи $\{M\}$ мувофиқ меояд, *қимати хусусии функция дар нуқтаи* M номида мешавад.

Маҷмӯи $\{u\}$-и ҳама қиматҳои хусусии функцияи $u=f(M)$ *маҷмӯи қиматҳои ҳамин функция* номида мешавад.

---

* Доира ва кура маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои ҳамворӣ ва фазоро, ки барояшон $\rho(M, M_0) \leqslant R$ мебошанд, ифода менамоянд.

Барои функцияи дутағьирьёбанда мафҳуми графикро чорӣ кардан мумкин аст, яъне: *сатҳеро, ки нуқтаҳои он координатаҳои* $(x, y, f(x, y))$ *доранд, графики функцияи* $u = f(x, y)$ *меноманд.*

Мисолҳои функцияҳои ду ва сетағьирьёбандаро муоина мекунем.

1°. $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Доираи радиусаш 2 ва марказаш ибтидои координатаҳо соҳаи дода шудани ин функция мебошад. Сегменти $0 \leqslant u \leqslant 2$ маҷмӯи қиматҳои ин функция аст.

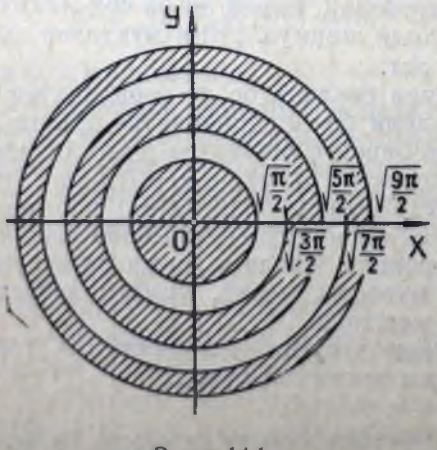
2°. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$. Маҷмӯи нуқтаҳое, ки дар беруни доираи радиусаш 2 ва марказаш ибтидои координатаҳо вокеанд, соҳаи дода шудани ин функция мебошад; нимхати рости кушодаи $u > 0$ маҷмӯи қиматҳои ин функция мебошад.

3°. $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$. Маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳое, ки координатаҳояшон нобаробарии $\cos(x^2 + y^2) \geqslant 0$-ро қаноат менамоянд, соҳаи дода шудани ин функция мебошад. Ин нобаробарӣ бо нобаробариҳои

$$0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \frac{\pi}{2},\ 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k = 1, 2, \ldots$$

баробаркувва мебошад. Ҳамин тариқ, $\{M\}$ аз доираи радиусаш $\sqrt{\pi/2}$, марказаш нуқтаи $O(0, 0)$ ва соҳаҳои ҳалқашакл иборат мебошад (расми 14.1).

4°. $u = \ln xyz$. Маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳое, ки координатаҳояшон нобаробарии $xyz > 0$-ро қаноат менамоянд, соҳаи дода шудани ин функция мебошад; хати рости адади $-\infty < u < +\infty$ маҷмӯи қиматҳои он мебошад.



Расми 14.1.

5°. $u = x^2 + y^2 + z^2$, $u = x^2 + y^2 + z^2$. Ҳамаи фазои евклидӣ соҳаи дода шудани ин функция мебошад; нимхати рости $u \geqslant 0$ маҷмӯи қиматҳои он аст.

4. Мафҳумҳои фазои координатии m-ченака ва фазои евклидии m-ченака. *Маҷмӯи ҷамъи тартибноки гуногуни* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$*-и* m*-тоададҳои* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *фазои координатии* m*-ченаки* A^m *номида мешавад.*

Дар айни замон мо ҳар як ҷамъи тартибноки $(x_1, x_2, ..., x_m)$ -ро нуқтаи ин фазо меномем ва бо як ҳарфи M ишорат менамоем. Ададҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ координатаҳои нуқтаи M номида мешаванд. Навишти $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ чунин маъно дорад, ки нуқтаи M соҳиби координатаҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ мебошад. Мафҳуми *фазои евклидии m-ченакаро* чорӣ мекунем. *Фазои координатии* A^m *фазои евклидии m-ченакаи* E^m *номида мешавад, агар дар байни ду нуқтаи дилхоҳи* $M'(x_1', x_2', ..., x_m')$ *ва* $M''(x_1'', x_2'', ..., x_m'')$*-и фазои координатии* A^m *масофаи** $\rho(M', M'')$ *бо формулаи*

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + ... + (x_m'' - x_m')^2} \tag{14.1}$$

---

* Фазои m-ченакаи евклидӣ *фазои метрӣ* номидашавандаро ифода мекунад. Маҷмӯи дилхоҳи $\{M\}$, ки эрементҳояш нуқтаҳо мебошанд, фазои метрӣ номида мешавад, агар қоидае бошад, ки бо ёрии он ба ду нуқтаи дилхоҳи M' ва M''-и маҷмӯи $\{M\}$ ягон ададии $\rho(M', M'')$, ки *масофаи* байни ин нуқтаҳо номида мешавад, дар мувофиқатӣ гузошта шавад. Дар айни замон қоидаи номбурда бояд чунон бошад, ки аксиомаҳои зерин (*аксиомаҳои фазои метрӣ*) иҷро шаванд: барои M' ва M''-и дилхоҳ $\rho(M', M'') = \rho(M'', M')$ аст (симметриягии масофаҳо); 2) барои M' ва M''-и дилхоҳ $\rho(M', M'') \geqslant 0$ аст, дар айни ҳол, агар $\rho(M', M'') = 0$ бошад, онгоҳ нуқтаҳои M' ва M'' ҳамҷоя мешаванд; 3) барои се нуқтаи дилхоҳи M', M'' ва M''' нобаробарии $\rho(M', M''') \leqslant \rho(M', M'') + \rho(M'', M''')$ иҷро мешавад (нобаробарии секунҷа).

Боварӣ ҳосил мекунем, ки фазои m-ченакаи евклидӣ ҳақиқатан фазои метрӣ мебошад. Воқеан, дурустии ду аксиомаи аввалини фазои метрӣ маълум аст (ба формулаи (14.1) нигар.). Дурустии аксиомаи сеюмро месанҷем.

Бигзор x_i', x_i'', x_i''' мувофиқан координатаҳои нуқтаҳои M', M'', M''' бошанд. Чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\rho^2(M'; M''') = \sum_{i=1}^{m} [(x_i''' - x_i'') + (x_i'' - x_i')]^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i''' - x_i'')^2 +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{m} (x_i''' - x_i'')(x_i'' - x_i') + \sum_{i=1}^{m} (x_i'' - x_i')^2.$$

$x_i''' - x_i'' = a_i$, $x_i'' - x_i' = b_i$ фарз карда ва нобаробарии Буняковскийро истифода карда (ба нобаробарии (10.30)-и Иловаи 1 боби 10 нигаред), ме ёбем, ки

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i''' - x_i'')(x_i'' - x_i') \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i''' - x_i'')^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i'' - x_i')^2}.$$

Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки

$$\rho^2(M', M''') \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i''' - x_i'')^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i'' - x_i')^2}\right)^2,$$

яъне

$$\rho(M', M''') \leqslant \rho(M', M'') + \rho(M'', M''').$$

муайян шуда бошад. Мафҳумҳои фазои координатии m-ченакаи A^m ва фазои евклидии m-ченакаи E^m ҷамъбасти мафҳумҳои номбурдаи фазои координатӣ ва фазои евклидиро ифода менамоянд.

5. Маҷмӯи нуқтаҳои фазои евклидии m-ченакаи E^m. Мо ягон маҷмӯи нуқтаҳои фазои евклидии m-ченакаи E^m-ро бо символи $\{M\}$ ишорат мекунем. Якчанд мисоли маҷмӯаҳо дар фазои евклидии m-ченакаи E^m-ро муоина мекунем.

1°. Маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои гуногун, ки координатаҳояшон $x_1, x_2, \ldots, x_m$ нобаробарии $(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_m - x_m^0)^2 \leqslant R^2$-ро қаноат менамоянд, *кураи m-ченакаи* радиусаш R ва марказаш нуқтаи $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ номида мешавад. Ҳамин тариқ, кураи m-ченака чун маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои гуногуни M, ки масофа (ρ)-и байни ҳар яки онҳо то ягон нуқтаи M_0 (маркази кура) нобаробарии $\rho(M, M_0) \leqslant R$-ро қаноат менамояд, муайян карда мешавад. Агар масофа $\rho(M, M_0)$-и байни ҳар яки нуқтаҳои маҷмӯи $\{M\}$ то нуқтаи M_0 нобаробарии қатъии $\rho(M, M_0) < R$-ро қаноат намояд, онгоҳ маҷмӯи $\{M\}$ *кураи m-ченакаи кушода* номида мешавад.

2°. Маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳо, ки масофаи байни ҳар яки онҳо то ягон нуқтаи M_0 муносибати $\rho(M, M_0) = R$-ро қаноат менамояд, *сфераи m-ченакаи* радиусаш R ва марказаш нуқтаи M_0 номида мешавад.

3°. Маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳо, ки координатаҳояшон $x_1, x_2, \ldots, x_m$ нобаробариҳои $|x_1 - x_1^0| \leqslant d_1$, $|x_2 - x_2^0| \leqslant d_2$, ..., $|x_m - x_m^0| \leqslant d_m$-ро қаноат менамоянд, *параллелепипеди координатии m-ченака* номида мешавад. Дар айни ҳол нуқтаи $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ маркази ин параллелепипеди m-ченака номида мешавад. Агар координатаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_m$-и нуқтаҳои маҷмӯи $\{M\}$ нобаробариҳои қатъии $|x_1 - x_1^0| < d_1$, $|x_2 - x_2^0| < d_2$, ..., $|x_m - x_m^0| < d_m$-ро қаноат намоянд, онгоҳ маҷмӯи $\{M\}$ *параллелепипеди координатии m-ченакаи кушода* номида мешавад.

Мафҳумҳои *ε-атрофи* нуқтаи M_0-и фазои m-ченакаи евклидӣ ва *атрофи росткунҷагии* ин нуқтаи M_0-ро ҷорӣ мекунем. *Кураи m-ченакаи кушодаи радиусаш ε ва марказаш нуқтаи M_0-ро ε-атрофи нуқтаи $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$-и фазои евклидии m-ченакаи E^m меномем. Параллелепипеди координатии m-ченакаи кушодаи дилхоҳи марказаш нуқтаи M_0 атрофи росткунҷагии нуқтаи $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$-и фазои евклидии m-ченака номида мешавад.*

Тасдиқотҳои зерин дурустанд:

ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи M_0-и фазои m-ченакаи евклидии E^m ягон атрофи росткунҷагии ин нуқтаро дарбар мегирад. Атрофи росткунҷагии дилхоҳи нуқтаи M_0 ягон ε-атрофи нуқтаи M_0-ро дарбар мегирад.

Фарз мекунем, ки $\{M\}$ ягон маҷмӯи нуқтаҳои фазои m-ченакаи евклидии E^m мебошад. Мафҳумҳои зеринро ҷорӣ мекунем.

Нуқтаи M-и маҷмӯи $\{M\}$ нуқтаи дарунии ин маҷмӯъ но-

мида мешавад, агар ягон ε-атрофи нуқтаи M, ки ҳамаи нуқтаҳояш ба маҷмӯи {M} тааллуқ доранд, вуҷуд дошта бошад.

Нуқтаи M нуқтаи сарҳадии маҷмӯи {M} номида мешавад, агар ε-атрофи дилхоҳи ин нуқта ҳам нуқтаҳои ба маҷмӯи {M} мутааллиқ ва ҳам нуқтаҳои ба ин маҷмӯъ номутааллиқро дарбар гирад.*

Маҷмӯи {M}-и фазои E^m маҷмӯи кушода ё соҳа номида мешавад, агар нуқтаи дилхоҳи ин маҷмӯъ нуқтаи дарунӣ бошад.

Агар ҳар як нуқтаи сарҳадии маҷмӯи {M} нуқтаи ин маҷмӯъ бошад, онгоҳ маҷмӯи {M} маҷмӯи сарбаста номида мешавад.

Агар маҷмӯи {M} соҳаро ифода намояд, онгоҳ маҷмӯи $\{\overline{M}\}$, ки дар натиҷаи ба {M} пайвастани ҳама нуқтаҳои сарҳадии ин маҷмӯъ ҳосил шудааст, *соҳаи сарбаста* номида мешавад.

Агар ҳама нуқтаҳои соҳаи {M} дар даруни ягон кура воқеъ бошанд, онгоҳ ин соҳа *соҳаи маҳдуд* номида мешавад.

Минбаъд ба мо мафҳуми маҷмӯи пайвасткунанда лозим мешавад. Мо пешакӣ мафҳуми *хати каҷи бефосилаи* фазои бисьёрченакаи E^m-ро ҷорӣ мекунем.

Маҷмӯи {M}-и нуқтаҳои фазои E^m-ро, ки координатаҳояшон $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функцияҳои бефосилаи параметри t:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t), \quad \alpha < t < \beta \qquad (14.2)$$

-ро ифода менамоянд, хати каҷ (L)-и бефосилаи ин фазо меномем. Нуқтаҳои $M'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ ва $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$-и фазои E^m-ро *бо хати каҷи бефосилаи L* пайвастан мумкин аст, агар чунин хати каҷи бефосилаи L, ки бо муодилаҳои параметрии (14.2) муайян мешавад, вуҷуд дошта бошад, ки

$$x_1' = \varphi_1(\alpha), \quad x_2' = \varphi_2(\alpha), \quad \ldots, \quad x_m' = \varphi_m(\alpha),$$
$$x_1'' = \varphi_1(\beta), \quad x_2'' = \varphi_2(\beta), \quad \ldots, \quad x_m'' = \varphi_m(\beta).$$

Мафҳуми маҷмӯи пайвасткунандаро баён мекунем. *Маҷмӯи {M}-и фазои E^m маҷмӯи пайвасткунанда номида мешавад, агар ду нуқтаи дилхоҳи онро бо хати каҷи бефосилае, ки ҳамаи нуқтаҳояш ба ин маҷмӯъ тааллуқ дорад, пайвастан мумкин бошад.*

Қ а й д. Баъзан соҳаро на фақат маҷмӯи кушода, балки соҳаи кушода ва пайвасткунанда меноманд.

Мисоли зеринро муоина мекунем.

Маҷмӯи {M}-и нуқтаҳои E^m, ки бо муодилаи

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_m^2}{a_m^2} = 1 \qquad (14.3)$$

---

* Дар айни ҳол нуқтаи M ба маҷмӯи {M} тааллуқ надоштанаш мумкин аст.

муайян мешаванд, *эллипсоидаи* m-ченака номида мешавад. Нуқтаҳои эллипсоидаи m-ченака нуқтаҳои сарҳадии маҷмӯи $\{M\}$-и нуқтаҳои M, ки координатаҳояшон нобаробарии

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_m^2}{a_m^2} < 1$$

-ро қаноат менамоянд, мебошанд. Ин маҷмӯъ маҷмӯи нуқтаҳои дарунии эллипсоидаи m-ченака мебошад.

Маҷмӯи нуқтаҳои дарунии эллипсоидаи m-ченака маҷмӯи кушода ва пайвасткунанда мебошад. Ба ин боварӣ ҳосил кардан осон аст. Қайд мекунем, ки эллипсоидаи m-ченака, ки бо муносибати (14.3) муайян мешавад, маҷмӯи сарбастаро ифода мекунад.

Соҳаи дода шудани функцияи

$$u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$$

маҷмӯи *пайвастнакунандаро* ифода мекунад (ба мисоли 3-юми п. 3 ва расми 14.1 нигаред).

Дар хотима маҷмӯи пайвасткунандаи кушодаи дилхоҳеро, ки M-ро дарбар дорад, *атрофи нуқтаи* M меномем.

6. Мафҳуми функцияи m-тағьирьёбанда. Мафҳуми функцияи m-тағьирьёбандаро чорӣ мекунем.

Агар ба ҳар як нуқтаи M*-и маҷмӯи* $\{M\}$*-и нуқтаҳои фазои евклидии* m*-ченакаи* E^m *аз рӯи қонуни муайян ягон адади* u *дар мувофиқатӣ гузошта шавад, онгоҳ мегӯянд, ки дар маҷмӯи* $\{M\}$ *функцияи* $u = u(M)$ *ё* $u = f(M)$ *дода шудааст.*

Маҷмӯи $\{M\}$ *соҳаи дода шудани функция* номида мешавад.

Адади u-ро, ки ба нуқтаи додашудаи M-и маҷмӯи $\{M\}$ мувофиқ меояд, *қимати хусусии функция дар нуқтаи* M меномем. Ҷамъбаст $\{u\}$-и ҳама қиматҳои хусусии функцияи $u = f(M)$ *маҷмӯи қиматҳои* ин функция номида мешавад. Азбаски нуқтаи M бо координатаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_m$ муайян карда мешавад, онгоҳ барои функцияи m-тағьирьёбандаи $u = f(M)$ ҳам ишорати $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ истифода карда мешавад.

Мисолҳои функцияи m-тағьирьёбандаро муоина мекунем.

1°. Бигзор $u = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_m^2}$ бошад. Кураи m-ченакаи радиусаш 1 ва марказаш нуқтаи O (0, 0, ..., 0) соҳаи дода шудани ин функция мебошад. Сегменти [0, 1] маҷмӯи қиматҳои ин функция аст.

2°. Бигзор $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} - \ldots - \dfrac{x_m^2}{a_m^2}}}$ бошад. Маҷмӯи $\{M\}$-и

нуқтаҳои дарунии эллипсоидаи m-ченака соҳаи дода шудани ин функция мебошад. Нимхати рости $u \geqslant 1$ маҷмӯи қиматҳои ин функция аст.

§ 2. Қимати лимитии функцияи якчандтағйирёбанда

1. Пайдарпаии наздикшавандаи нуқтаҳои фазои евклидии m-ченакаи E^m. Критерияи Кошии наздикшавандагии пайдарпаиҳо. Дар фазои евклидии m-ченакаи E^m пайдарпаии нуқтаҳои $\{M_n\}$*-ро муоина мекунем. Таърифи зеринро баён менамоем.

*Пайдарпаии $\{M_n\}$-и нуқтаҳои фазои евклидии E^m пайдарпаии наздикшаванда номида мешавад, агар чунин нуқтаи A вуҷуд дошта бошад, ки барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин номери N**-ро нишон додан мумкин шавад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $\rho(M_n, A) < \varepsilon$ иҷро мешавад. Дар айни ҳол нуқтаи A л и м и т и пайдарпаии $\{M_n\}$ номида мешавад.* Барои ишорати лимити A-и пайдарпаии $\{M_n\}$ символи зерин истифода мешавад:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = A, \text{ ё } M_n \to A \text{ ҳангоми } n \to \infty.$$

Лемmаи зеринро исбот мекунем.

Л е м м а и 1. *Бигзор пайдарпаии $\{M_n\}$-и нуқтаҳои евклидии E^m ба нуқтаи A наздик шавад. Онгоҳ пайдарпаиҳои $\{x_1^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$-и координатаҳои нуқтаҳои M_n ба координатаҳои мувофиқи $a_1, a_2, ..., a_m$-и нуқтаи A наздик мешаванд ва, баръакс, агар пайдарпаии $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$-и координатаҳои нуқтаҳои M_n мувофиқан ба ададҳои $a_1, a_2, ..., a_m$ наздик шаванд, онгоҳ пайдарпаии $\{M_n\}$ ба нуқтаи A-и координатаҳояш $a_1, a_2, ..., a_m$ наздик мешавад.*

И с б о т. Қисми якуми леммаро исбот мекунем. Агар пайдарпаии $\{M_n\}$ ба нуқтаи A наздик шавад, онгоҳ барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номери N-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $\rho(M_n, A) < \varepsilon$ иҷро мешавад. Бигзор $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)})$ координатаҳои нуқтаи M_n ва $(a_1, a_2, ..., a_m)$ координатаҳои нуқтаи A бошанд. Онгоҳ нобаробарии $\rho(M_n, A) < \varepsilon$-ро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + ... + (x_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon. \quad (14.4)$$

---

* Мафҳуми пайдарпаии нуқтаҳо дар фазои евклидии E^m ин тавр таъриф дода мешавад. Бигзор ба ҳар як адади n-и қатори ададҳои натуралии 1, 2, ..., n, ... *нуқтаи M_n*-и фазои евклидии E^m дар мувофиқатӣ гузошта шавад. Қатори дар ин ҳангом ҳосилшудаи нуқтаҳои $M_1, M_2, ..., M_n, ...$, ки бо ҳамин тартиб муоина мешаванд, *пайдарпаии* нуқтаҳои фазои евклидии E^m номида мешавад. Мо ин пайдарпаиро мухтасаран бо символи $\{M_n\}$ ишорат менамоем.

** Азбаски номери N, умуман, аз ε вобаста аст, пас баъзан ин тавр менависанд: $N = N(\varepsilon)$.

Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon, \quad |x_2^{(n)} - a_2| < \varepsilon, \quad \ldots, \quad |x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon$$

иҷро мешавад. Ба иборaи дигар, пайдарпаиҳои $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$-и координатаҳои нуқтаи M_n мувофиқан ба ададҳои a_1, a_2, ..., a_m наздик мешаванд. Акнун тасдиқоти баръаксро исбот мекунем. Фарз мекунем, ки пайдарпаии номбурдаи координатаҳои нуқтаи M_n мувофиқан ба ададҳои a_1, a_2, ..., a_m наздик мешавад. Онгоҳ барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин номерҳои N_1, N_2, ..., N_m-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $n \geqslant N_1$, $n \geqslant N_2$, ..., $n \geqslant N_m$ будан мувофиқан нобаробариҳои

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad |x_2^{(n)} - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad \ldots, \quad |x_m^{(n)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

иҷро мешаванд. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$ будан нобаробарии (14.4) иҷро мешавад. Ба иборaи дигар, ҳангоми $n \geqslant N$ будан нобаробарии $\rho(M_n, A) < \varepsilon$ иҷро мешавад, ки дар ин ҷо A нуқтаи E^m-и координатаҳояш a_1, a_2, ..., a_m мебошад. Ҳамин тариқ, пайдарпаии $\{M_n\}$ ба нуқтаи A наздик мешавад. Лемма исбот шуд.

Таърифи пайдарпаии фундаменталии нуқтаҳои фазои евклидии m-ченакаро баён мекунем. *Пайдарпаии $\{M_n\}$-и нуқтаҳои фазои евклидии m-ченака пайдарпаии фундаменталӣ ё пайдарпаии Коши номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин номери N-ро нишон додан мумкин бошад, ки ҳангоми $n \geqslant N$ будан ва барои p-и натуралии дилхоҳ нобаробарии $\rho(M_{n+p}, M_n) < \varepsilon$ иҷро мешавад.* Критерияи зерини наздикшавандагии пайдарпай (критерияи Коши) дуруст аст.

Барои он ки пайдарпаии $\{M_n\}$-и нуқтаҳои фазои евклидии m-ченака пайдарпаии наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки он пайдарпаии фундаменталӣ бошад. Барои ба дурустии критерияи баёншуда боварӣ ҳосил кардан қайд намудан кифоя аст, ки аз шарти фундаменталӣ будани пайдарпаии $\{M_n\}$ чунин натиҷа мебарояд: пайдарпаиҳои $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$-и координатаҳои нуқтаи M_n низ пайдарпаиҳои фундаменталӣ мебошанд ва, баръакс, агар пайдарпаиҳои номбурдаи координатаҳо пайдарпаиҳои фундаменталӣ бошанд, онгоҳ пайдарпаии $\{M_n\}$ ҳам пайдарпаии фундаменталӣ мебошад, ва баъд критерияи Коши пайдарпаиҳои ададиро ба пайдарпаиҳои координатаҳои нуқтаи $\{M_n\}$ ва леммаи 1-уми ҳамин пункт татбиқ кардан лозим аст.

2. Баъзе хосиятҳои пайдарпаиҳои маҳдуди нуқтаҳои фазои евклидии m-ченака. Мафҳуми пайдарпаии маҳдуди нуқтаҳои фазои евклидии m-ченакаро ҷорӣ мекунем. *Пайдарпаии $\{M_n\}$-и*

нуқтаҳои фазои евклидии m-ченака пайдарпаии маҳдуд номида мешавад, агар чунин адади $a > 0$ мавҷуд бошад, ки барои ҳамаи n-ҳо нобаробарии $\rho(O, M_n) \leqslant a$ ичро мешавад, дар ин ҷо O нуқтаест, ки ҳама координатаҳояш баробари нуль мебошанд. Ба ибораи дигар, пайдарпаии $\{M_n\}$ пайдарпаии маҳдуд мебошад, агар ҳама нуқтаҳои M_n-и ин пайдарпай дар дарун ё дар сарҳади ягон кураи марказаш ибтидои координатаҳо воқеъ бошанд.

Теоремаи асосии зерин дуруст аст.

Теоремаи 14.1 *(теоремаи Больцано-Вейерштрасс). Аз пайдарпаии маҳдуди дилхоҳи $\{M_n\}$-и нуқтаҳои фазои евклидии m-ченака таҳтпайдарпаии наздикшавандаро ҷудо кардан мумкин аст.*

Исбот. Аввалан, боварӣ ҳосил мекунем, ки пайдарпаиҳои $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$-и координатаҳои нуқтаҳои M_n пайдарпаии маҳдуд мебошанд. Ҳақиқатан, азбаски пайдарпаии $\{M_n\}$ пайдарпаии маҳдуд мебошад, пас барои ҳамаи n-ҳо нобаробарии $\rho(O, M_n) \leqslant a$ ичро мешавад. Азбаски

$$\rho(O, M_n) = \sqrt{x_1^{(n)^2} + x_2^{(n)^2} + \ldots + x_m^{(n)^2}}$$

аст, пас аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки барои ҳамаи n-ҳо нобаробариҳои $|x_1^{(n)}| \leqslant a$, $|x_2^{(n)}| \leqslant a$, ..., $|x_m^{(n)}| \leqslant a$ ичро мешаванд. Ба ибораи дигар, пайдарпаиҳои $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$-и координатаҳои нуқтаҳои M_n пайдарпаиҳои маҳдуд мебошанд. Дар асоси теоремаи Больцано — Вейерштрасс, ки барои пайдарпаиҳои ададӣ исбот карда будем (ба п. 4 § 4 боби 3 ниг.), аз пайдарпаии $\{x_1^{(n)}\}$ таҳтпайдарпаии $\{x_1^{(n_{k1})}\}$-и ба ягон адади a_1 наздикшавандаро ҷудо кардан мумкин аст. Таҳтпайдарпаии мувофиқи $\{x_2^{(n_{k1})}\}$-и пайдарпаии координатаҳои дуюми нуқтаҳои M_n-ро муоина мекунем. Дар асоси ҳамон теорема аз таҳтпайдарпаии $\{x_2^{(n_{k1})}\}$ таҳтпайдарпаии $\{x_2^{(n_{k2})}\}$-и ба ягон адади a_2 наздикшавандаро ҷудо кардан мумкин аст. Қайд мекунем, ки таҳтпайдарпаии $\{x_1^{(n_{k2})}\}$-и пайдарпаии $\{x_1^{(n_{k2})}\}$ ба адади a_1 наздик мешавад. Инак, таҳтпайдарпаиҳои $\{x_1^{(n_{k2})}\}$ ва $\{x_2^{(n_{k2})}\}$ мувофиқан ба ададҳои a_1 ва a_2 наздик мешаванд. Агар мо аз таҳтпайдарпаии $\{x_3^{(n_{k2})}\}$-и пайдарпаии координатаҳои сеюми нуқтаҳои M_n таҳтпайдарпаии ба ягон адади a_3 наздикшавандаи $\{x_3^{(n_{k3})}\}$-ро ҷудо намоем, онгоҳ таҳтпайдарпаиҳои $\{x_1^{(n_{k3})}\}$, $\{x_2^{(n_{k3})}\}$, $\{x_3^{(n_{k3})}\}$ мувофиқан ба ададҳои a_1, a_2, a_3 наздик мешаванд. Ин муҳокимарониҳоро давом дода, мо, ниҳоят, таҳтпайдарпаии $\{x_n^{(n_{km})}\}$-и ба ягон адади a_m наздикшавандаи пайдарпаии координатаҳои m-уми нуқтаҳои M_n-ро ҳосил менамоем, дар айни замон таҳтпайдарпаиҳои $\{x_1^{(n_{km})}\}$, $\{x_2^{(n_{km})}\}$, ..., $\{x_m^{(n_{km})}\}$ мувофиқан ба ададҳои a_1, a_2, ..., a_m наздик мешаванд. Лекин онгоҳ, дар асоси леммаи 1, таҳтпайдарпаии $\{M_{n_{km}}\}$-и пайдарпаии нуқтаҳои

$\{M_n\}$ ба нуқтаи A-и координатаҳояш $a_1, a_2, ..., a_m$ наздик мешавад. Теорема исбот шуд.

Қ а й д. Лимити A-и пайдарпаии $\{M_n\}$-и нуқтаҳое, ки ба маҷмӯи сарбастаи $\{M\}$ тааллуқ доранд, ба ҳамин маҷмӯъ низ тааллуқ дорад. Барои ба ин боварӣ ҳосил кардан қайд намудан кифоя аст, ки дар ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи A нуқтаҳои M_n, яъне нуқтаҳои маҷмӯи $\{M\}$ вуҷуд доранд, ва бинобар ин, нуқтаи A ё нуқтаи дарунӣ ё нуқтаи сарҳадии $\{M\}$ мебошад ва, аз ҳамин сабаб, ба $\{M\}$ тааллуқ дорад.

2. Мафҳуми қимати лимитии функцияи якчандтағьирьёбанда. Функцияи $u = f(M)$-ро муоина мекунем. Ин функция дар маҷмӯи $\{M\}$-и фазои евклидии m-ченака муайян аст. Ва нуқтаи A-и ин маҷмӯъро муоина менамоем, ки он ба маҷмӯи $\{M\}$ мутааллиқ нест, лекин ба чунин хосият соҳиб аст: дар ε-атрофи дилхоҳи ин нуқта ақаллан якто нуқтаи маҷмӯи $\{M\}$, ки аз A тафовут дорад, мавҷуд хаст.

Таърифи 1. Адади b қимати лимитии функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи A (ё лимити функция ҳангоми $M \to A$) номида мешавад, агар барои пайдарпаии ба A наздикшавандаи $M_1, M_2, ..., M_n, ...$-и нуқтаҳои маҷмӯи $\{M\}$, ки элементҳои M_n-и он аз A тафовут доранд, пайдарпаии мувофиқи $f(M_1), f(M_2), ..., f(M_n), ...$-и қиматҳои функция ба b наздик шавад.*

Ин таъриф таърифи қимати лимитии функция бо ёрии пайдарпаиҳо мебошад. «ε—δ»-терминологияро истифода карда, таърифи дигари қимати лимитии функцияро баён мекунем.

Таърифи 2. Адади b қимати лимитии функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи A номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати δ-ро нишон додан мумкин бошад, ки барои ҳамаи нуқтаҳои M-и соҳаи дода шудани функция, ки шарти $0 < \rho(M, A) < \delta$-ро қаноат менамоянд, нобаробарии $|f(M) - b| < \varepsilon$ иҷро мешавад.

Қ а й д. Таърифҳои 1 ва 2-юми қимати лимитии функция баробарқувва мебошанд. Дурустии ин тасдиқотро мисли баробарқуввагии ду таърифи қимати лимитии функцияи яктағьирьёбанда исбот кардан мумкин аст. Барои ишорати қимати лимитӣ b-и функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи A символикаи зерин истифода карда мешавад:

$$\lim_{M \to A} f(M) = b, \text{ ё } \lim_{\substack{x_1 \to a_1, \\ x_2 \to a_2, \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = b,$$

дар ин ҷо $a_1, a_2, ..., a_m$ — координатаҳои нуқтаи A.

* Ин талабот, аз ҷумла, бо он шарҳ дода мешавад, ки функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи A эҳтимол муайян ношуда бошад.

Таърифи қимати лимитии функция ҳангоми ба беҳудуд майл кардани нуқтаи M-ро баён мекунем.

Таърифи 3. Адади b қимати лимитии функцияи $u = f(M)$ ҳангоми $M \to \infty$ (ё лимити функция ҳангоми $M \to \infty$) номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати a-ро нишон додан мумкин бошад, ки барои ҳамаи M-ҳои соҳаи дода шудани функция, ки шарти $\rho(O, M) > a$-ро қаноат менамоянд, нобаробарии $|f(M) - b| < \varepsilon$ иҷро мешавад.

Амалҳои арифметикӣ бо функцияҳои m-тағьирьёбанда, ки дар нуқтаи A қимати лимитӣ доранд, ба функцияҳое меоранд, ки онҳо ҳам дар нуқтаи A қимати лимитӣ доранд. Яъне, тасдиқоти зерин дуруст аст.

Бигзор функцияҳои $f(M)$ ва $g(M)$ дар нуқтаи A соҳиби қиматҳои лимитии b ва c бошанд. Онгоҳ функцияҳои $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ ва $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ дар нуқтаи A (ҳосили тақсим ҳангоми $c \neq 0$ будан) мувофиқан ба қиматҳои лимитии $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$, $\dfrac{b}{c}$ соҳиб мебошанд.

Исботи ин тасдиқот мисли исботи теореми 4.1 мебошад.

4. Функцияҳои беохир хурд. *Функцияи $u = f(M)$ функцияи дар нуқтаи A (ҳангоми $M \to A$) беохир хурд номида мешавад, агар $\lim\limits_{M \to A} f(M) = 0$ бошад.*

Функцияи $f(M) = (x_1 - a_1)^{n_1} + \ldots + (x_m - a_m)^{n_m}$, ки дар ин ҷо $n_1, \ldots, n_m$ ададҳои мусбат мебошанд, функцияи дар нуқтаи $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ беохир хурд мебошад.*

Ба ин боварӣ ҳосил кардан осон аст.

Агар функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи A ба қимати лимитии b баробар соҳиб бошад, онгоҳ функцияи $\alpha(M) = f(M) - b$ функцияи дар нуқтаи A беохир хурд мебошад. **Ҳақиқатан,** $\lim\limits_{M \to A} \alpha(M) = \lim\limits_{M \to A} f(M) - b) = \lim\limits_{M \to A} f(M) - \lim\limits_{M \to A} b = 0$. Ин натиҷаро истифода карда, мо барои функцияе, ки дар нуқтаи A ба қимати лимитии b баробар соҳиб мебошад, чунин ифодаи махсусро ҳосил мекунем:

$$f(M) = b + \alpha(M), \text{ дар ин ҷо } \lim_{M \to A} \alpha(M) = 0.$$

---

* Ба инобат гирифтан кофист, ки ҳар яке аз функцияҳои яктағьирьёбандаи $f(x_k) = (x_k - a_k)^{n_k}$ функцияи дар нуқтаи $x_k = a_k$ беохир хурд мебошад.

Функцияҳои беохир хурди якчандтағьирьёбанда мисли функцияҳои беохир хурди яктағьирьёбанда (п. 3 § 2 боби 4) муқоиса карда мешаванд. Мисли мавриди функцияи яктағьирьёбанда, функцияи дар нуқтаи додашудаи A беохир хурди дилхоҳи тартибаш нисбат ба тартиби функцияи дар нуқтаи додашудаи A беохир хурди $\beta(M)$ баландро бо символи $o(\beta)$ ишорат менамоем.

5. Шарти зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти қимати лимитии функция (критерияи Коши). Функцияи $f(M)$ *дар нуқтаи* $M = A$ *шарти Коширо қаноат менамояд,* агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати δ ёфт шавад, ки ду нуқтаи M' ва M''-и соҳаи дода шудани функцияи $f(M)$, ки нобаробариҳои $0 < \rho(M', A) < \delta$, $0 < \rho(M'', A) < \delta$-ро қаноат менамоянд, чи хеле ки бошанд, барои қиматҳои мувофиқи функция нобаробарии

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$$

дуруст аст. Теоремаи асосии зерин дуруст мебошад.

Теоремаи 14.2 *(критерияи Коши). Барои он ки функцияи* $f(M)$ *дар нуқтаи* $M = A$ *қимати лимитии охирнок дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки функцияи* $f(M)$ *дар ҳамин нуқта шарти Коширо қаноат намояд.* Исботи ин теорема ба исботи теоремаи 8.2 айнан монанд аст ва аз он бо роҳи ба ҳарфҳои M ва A иваз кардани ҳарфҳои x ва a ва ба символи (M, A) иваз намудани ифодаи намуди $|x - a|$ ҳосил мешавад.

6. Қиматҳои лимитии такрорӣ. Барои функцияи $u = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$-и якчандтағьирьёбанда мафҳуми қимати лимитиро аз рӯи яке аз тағьирьёбандаҳои x_k дар қиматҳои қайдшудаи тағьирьёбандаҳои боқимонда муайян кардан мумкин аст. Ба ҳамин муносибат мафҳуми *қимати лимитии такрорӣ* пайдо мешавад. Иа мафҳумро дар мисоли функцияи $u = f(x, y)$-и ду тағьирьёбандаи x ва y аниқ мекунем. Бигзор функцияи $u = f(x, y)$ дар ягон атрофи росткунҷагии $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$-и нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$, ба ғайр аз худи нуқтаи M_0 дода шуда бошад. Бигзор ба ҳар яки y-и қайдшуда, ки шарти $0 < |y - y_0| < d_2$-ро қаноат менамояд, дар нуқтаи $x = x_0$ қимати лимитии функцияи $u = f(x, y)$-и як тағьирьёбандаи x мавҷуд бошад:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y - \text{фикс}}} f(x, y) = \varphi(y),$$

ва бигзор, ғайр аз он, дар нуқтаи $y = y_0$ қимати лимитӣ b-и функцияи $\varphi(y)$ вуҷуд дошта бошад:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = b.$$

Дар ин ҳолат мегӯянд, ки барои функцияи $u = f(x, y)$ дар нуқтаи M_0 қимати лимитии *такрории* b вуҷуд дорад, ки онро ин тавр ишорат менамоянд:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b.$$

Қимати лимитии такрории

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y)$$

низ айнан ҳамин тавр муайян карда мешавад.

Шарти кифоягии баробарии ду қимати лимитии такрории баёншударо муқаррар мекунем.

Теореми а 14.3. *Бигзор функцияи* $u = f(x, y)$ *дар ягон атрофи росткунҷагии* $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$-*и нуқтаи* $M_0(x_0, y_0)$ *муайян бошад ва дар ин нуқта соҳиби қимати лимитии* b *бошад. Бигзор, ғайр аз он, барои* x-*и қайдшудаи дилхоҳ* $0 < |x - x_0| < d_1$, *қимати лимитии* $\psi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ *мавҷуд бошад ва барои* y-*и қайдшудаи дилхоҳ,* $0 < |y - y_0| < d_2$, *қимати лимитии* $\varphi(y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ *вуҷуд дошта бошад. Онгоҳ қиматҳои лимитии такрори* $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ *ва* $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ *вуҷуд доранд ва ба* b *баробар мебошанд.*

Исбот. Азбаски функцияи $u = f(x, y)$ дар $M_0(x_0, y_0)$ қимати лимитии b дорад, пас барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ чунин $\delta > 0$-ро нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми $|x - x_0| < \delta$ ва $|y - y_0| < \delta$ будан нобаробарии $|f(x, y) - b| < \varepsilon$ иҷро мешавад. Ҳамин тариқ, дар атрофи росткунҷагии $|x - x_0| < \delta$ ва $|y - y_0| < \delta$-и нуқтаи M_0 қимати функцияи $f(x, y)$ аз b на зиёда ба ε тафовут дорад. Лекин онгоҳ қиматҳои лимитии $\psi(x)$ ва $\varphi(x)$ ки дар шарти теорема ҳангоми нобаробариҳои $|x - x_0| < \delta$ ва $|y - y_0| < \delta$-ро қаноат кардани x ва y баён шудаанд, низ аз b на зиёда ба ε тафовут доранд. Пас, қиматҳои лимитии ин функцияҳо мувофиқан дар нуқтаҳои x_0 ва y_0 вуҷуд доранд ва ба b баробар мебошанд. Теорема исбот шуд.

Мафҳуми лимити такрориро барои пайдарпаиҳои дучандаи $\{a_{mn}\}$, ки элементҳои a_{mn}-и онҳо бо ду индекси m ва n муайян мешаванд, муайян кардан мумкин аст. Яъне, символи $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$ чунин маъно дорад, ки аввал пайдарпаии $\{b_n\}$ $b_n = \lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$, муайян карда мешавад ва баъди лимити ин пайдарпай $\{b_n\}$ ёфта мешавад.

Масалан, пайдарпаии дучандаи $\{a_{mn}\}$-ро муоина мекунем, ки дар ин ҷо $a_{mn} = \cos^m 2\pi n!\, x$ ва x — адади қайдшуда. Исбот мекунем, ки

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n!\, x = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ адади рационалӣ бошад,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ адади иррационалӣ бошад.} \end{cases}$$

Воқеан, агар $x = p/q$ бошад, ки дар ин ҷо p ва q ададҳои бутун мебошанд, онгоҳ ҳангоми $n \geqslant q$ будан $\cos 2\pi n!\, x = 1$ аст, ва, бинобар ин, $\lim\limits_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n! x = 1$. Ба ибораи дигар, агар x адади рационалӣ бошад, онгоҳ

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n!\, x = 1.$$

Агар x адади иррационалӣ бошад, онгоҳ дар қимати дилхоҳи n нобаробарии $|\cos 2\pi n! x| < 1$ дуруст аст ва, бинобар ин, $\lim\limits_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n! x = 0$ аст, яъне $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n! x = 0$.

Қайд. Натиҷаи ҳосилшударо истифода карда, мо функцияи Дирихле (ба п. 1 § 1 боби 4 ниг.)-ро бо тарзи аналитикӣ чун лимити такрории $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n! x$ ифода карда метавонем.

§ 3. Функцияҳои бефосилаи якчандтағьирьёбанда

1. Таърифи бефосилагии функцияҳои якчандтағьирьёбанда. Бигзор нуқтаи A ба соҳаи дода шудани функцияи якчандтағьирьёбандаи $u = f(M)$ мутааллиқ бошад ва ε-атрофи дилхоҳи нуқтаи A нуқтаҳои аз A тафовутдори соҳаи дода шудани ин функцияро дарбар гирад.

Таърифи 1. Функцияи $u = f(M)$ функцияи дар нуқтаи A бефосила номида мешавад, агар қимати лимитии ин функция дар нуқтаи A мавуд бошад ва ба қимати хусусии $f(A)$ баробар бошад.

Азбаски $A = \lim\limits_{M \to A} M$ мебошад, пас шарти бефосилагии функцияро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$\lim_{M \to A} f(M) = f\left(\lim_{M \to A} M\right).$$

Нуқтаҳое, ки дар онҳо функция ба хосияти бефосилагӣ соҳиб нест, *нуқтаҳои каниши* ин функция номида мешаванд.

Таърифи қимати лимитии функция бо ёрии ε ва δ-ро истифода карда, таърифи бефосилагии функцияро баён мекунем.

Таърифи 2. Функцияи $u = f(M)$ функцияи дар нуқтаи A бефосила номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин адади мусбати δ-ро нишон додан мумкин бошад, ки барои ҳама нуқтаҳои M-и соҳаи дода шудани функция, ки шарти $\rho(M, A) < \delta$-ро қаноат менамояд, нобаробарии $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$ иҷро мешавад.

Таърифи 3. Функцияи $u = f(M)$ функцияи дар маҷмӯи $\{M\}$ бефосила номида мешавад, агар он дар ҳар як нуқтаи ин маҷмӯъ бефосила бошад.

Функцияи Δu-ро, ки бо формулаи

$$\Delta u = f(M) - f(A) \tag{14.5}$$

муайян мешавад (дар ин ҷо M — нуқтаи дилхоҳи соҳаи дода шудани функция), афзоиш ё афзоиши пурраи функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи A номида мешавад. Бигзор нуқтаҳои A ва M мувофиқан координатаҳои $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ва $x_1, x_2, \ldots, x_m$ дошта бошанд. Ишорат мекунем: $x_1 - a_1 = \Delta x_1$, $x_2 - a_2 = \Delta x_2$, ..., $x_m - a_m = \Delta x_m$. Ин ишоратҳоро истифода карда, барои афзоиши функция Δu, ки ба афзоишҳои аргументҳо $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ мувофиқ аст, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m). \tag{14.6}$$

Барои бефосилагии функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи A зарур ва кифоя аст, ки афзоиши он Δu функцияи дар нуқтаи A беохир хурдро ифода намояд:

$$\lim_{M \to A} \Delta u = \lim_{M \to A} (f(M) - f(A)) = 0 \text{ ё } \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0, \\ \Delta x_2 \to 0, \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0 \qquad (14.7)$$

Ин шарти (14.7)-ро *шакли фарқиятии шарти дар нуқтаи A бефосила будани функцияи $u = f(M)$ меномем.*

Барои функцияи якчандтағьирьёбандаи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ мафҳуми бефосилагиро аз рӯи яке аз тағьирьёбандаҳо дар қиматҳои қайдшудаи тағьирьёбандаҳои боқимонда муайян кардан мумкин аст. Барои муайян кардани ин мафҳум *афзоишҳои хусусии* функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-ро дар нуқтаи $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ки ба соҳаи муайянии функция тааллуқ дорад, муоина менамоем. Ғайр аз аргументи якум, ҳамаи аргументҳоро ба қайд мегирем ва ба аргументи якум чунин афзоиши дилхоҳи Δx_1 медиҳем, ки нуқтаи координатаҳояш $x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_m$ дар соҳаи дода шудани функция воқеъ шавад. Афзоиши мувофиқи функция *афзоиши хусусии** функция дар нуқтаи $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ номида мешавад, ки он ба афзоиши Δx_1-и аргументи x_1 мувофиқ меояд ва бо Δx_1 ишорат карда мешавад. Ҳамин тариқ,

$$\Delta_{x1} u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \qquad (14.8)$$

Афзоишҳои хусусии функция, ки ба афзоишҳои аргументҳои дигар мувофиқ меоянд, айнан ҳамин тавр муайян карда мешаванд:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{x2} u &= f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{xm} u &= f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{aligned}\right\} \qquad (14.9)$$

Акнун мафҳуми бефосилагии функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-ро аз рӯи яке аз тағьирьёбандаҳо таъриф медиҳем.

Функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функцияи дар нуқтаи $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ аз рӯи тағьирьёбандаи x_k бефосила номида мешавад, агар афзоиши хусусии Δx_k-и ин функция дар нуқтаи M функцияи беохир хурди Δx_k-ро ифода намояд, яъне

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} u = 0. \qquad (14.10)$$

---

* Термини «афзоиши хусусӣ» барои он истифода мешавад, ки ин афзоиш аз афзоиши пурраи (14.6), ки ба афзоишҳои дилхоҳи $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$-и ҳама аргументҳои $x_1, x_2, \ldots, x_m$ мувофиқ аст, фарқ карда шавад.

Дар қиматҳои қайдшудаи ҳамаи тағьирьёбандаҳо, ғайр аз тағьирьёбандаи x_k, функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ функцияи яке аз ин тағьирьёбандаҳоро ифода мекунад. Бефосилагии функция аз рӯи тағьирьёбандаи x_k бефосилагии функцияи яктағьирьёбандаи номбурдаро ифода мекунад. Аз шарти бефосилагии функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (дар нуқтаи додашудаи M) бефосилагии ин функция (дар нуқтаи M) аз рӯи ҳар яки тағьирьёбандаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_m$ бармеояд. Аммо аз бефосилагии функция (дар нуқтаи M) аз рӯи ҳар яки тағьирьёбандаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_m$ бефосилагии функция дар ин нуқта, умуман, барнамеояд. Барои ба ин боварӣ ҳосил кардан мисолҳои зеринро муоина мекунем:

1°. Функцияи $u = f(M) = f(x, y)$ дар ягон хати рости аз нуқтаи M гузаранда дар ҳамин нуқта бефосила мебошад, агар барои пайдарпаии дилхоҳи нуқтаҳои $\{M_n\}$-и ин хати рост, ки ба нуқтаи M наздик мешавад, пайдарпаии мувофиқи $\{f(M_n)\}$-и қиматҳои функция ба лимити қимати хусусии $f(M)$-и функция дар нуқтаи M соҳиб мебошад. Азбаски функцияи $u = f(x, y)$ дар хати рост функцияи яктағьирьёбандаро ифода мекунад, пас мафҳуми бефосилагии функция дар хати рост бо мафҳуми бефосилагии функцияи яктағьирьёбандаи номбурда мувофиқ меояд. Аз ҷумла, бефосилагии функция дар нуқтаи M аз рӯи тағьирьёбандаҳои алоҳидаи x ва y бефосилагии онро дар хатҳои росте, ки аз нуқтаи M мегузаранд ва ба тирҳои координатаҳо параллель мебошанд, ифода менамояд. Исбот мекунем, ки функцияи

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \text{ ҳангоми } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ будан,} \\ 0 \text{ ҳангоми } x^2 + y^2 = 0 \text{ будан} \end{cases}$$

дар нуқтаи $O(0, 0)$ аз рӯи ҳар яке аз тағьирьёбандаҳои x ва y бефосила мебошад, яъне дар ҳар яки тирҳои координатаҳо бефосила мебошад, лекин дар ҳама хатҳои рости боқимонда, ки аз ин нуқта мегузаранд, бефосила намебошад ва, бинобар ин, дар нуқтаи O бефосила намебошад. Ҳар яки хати ростеро, ки аз тирҳои координатаҳо тафовут дорад ва аз нуқтаи $O(0, 0)$ мегузарад, бо муодилаи $y = kx$ (дар ин ҷо $k \neq 0$) ифода кардан мумкин аст. Дар ингуна хати рост ҳама қиматҳои функция доимианд ва ба $\dfrac{k}{1 + k^2}$ баробар мебошанд. Бинобар ин, агар пайдарпаии нуқтаҳои $\{M_n\}$-и аз O тафовутдори ингуна хати рост ба нуқтаи O наздик шавад, онгоҳ пайдарпаии мувофиқи қиматҳои функция ба лимити $\dfrac{k}{1 + k^2}$ соҳиб мебошад. Азбаски ҳангоми $k \neq 0$

будан ин лимит аз нуль тафовут дорад ва бо қимати хусусии функция дар нуқтаи O мувофиқ намеояд, пас функция дар ҳамин нуқтаи хати рости муоинашаванда каниш дорад. Дар тирҳои координатаҳо бефосила будани функция аз он бармеояд, ки қиматҳои он дар ин тирҳо баробари нуль мебошанд.

Чунин таассурот гирифтан мумкин, ки агар функцияи дутағьирьёбанда дар хати рости дилхоҳи аз нуқтаи додашуда гузаранда бефосила бошад, онгоҳ ин функция дар нуқтаи номбурда бефосила мебошад. Мисоли зерин нишон медиҳад, ки ин, умуман, ин тавр нест.

2°. Функцияи

$$u = f(M) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{ҳангоми } x^4 + y^2 \neq 0 \text{ будан,} \\ 0 & \text{ҳангоми } x^4 + y^2 = 0 \text{ будан} \end{cases}$$

-ро муоина мекунем. Исбот мекунем, ки агарчи функцияи номбурда дар хати рости дилхоҳи аз нуқтаи $O(0, 0)$ гузаранда бефосила бошад ҳам, он дар ин нуқта бефосила нест. Воқеан, қимати функция дар хати рости $y = kx$ ба $\dfrac{kx}{x^2 + k^2}$ баробар аст ва, бинобар ин, ҳангоми $x \to 0$ $u \to 0$. Дар тири Oy бефосила будани ин функция аз он бармеояд, ки қимати он дар ҳамин тир баробари нуль аст. Аз дигар ҷиҳат, қимати функция дар параболаи $y = px^2$ доимӣ аст ва ба $\dfrac{p}{1 + p^2}$ баробар мебошад ва, бинобар ин, қимати лимитии функция ҳангоми ба нуқтаи O майл кардани нуқтаи M дар ҳамин парабола низ ба $\dfrac{p}{1 + p^2}$ баробар аст. Азбаски ҳангоми $p \neq 0$ будан ин лимит аз нуль тафовут дорад ва бо қимати хусусии функция дар нуқтаи O мувофиқ намеояд, пас функция дар ҳамин нуқта каниш дорад.

2. Хосиятҳои асосии функцияҳои бефосилаи якчандтағьирьёбанда. Мо дар ин пункт хосиятҳои асосии функцияҳои бефосилаи якчандтағьирьёбандаро номбар мекунем. Азбаски исботи ин хосиятҳо асосан бо исботи хосиятҳои мувофиқи функцияҳои якчандтағьирьёбанда монанданд, пас, чун қоида, ба онҳо фақат шарҳи мухтасар дода, иҷрои қисмҳои исботро ба хонанда месупорем.

1°. Амалҳои арифметикӣ бо функцияҳои бефосила. Тасдиқоти зерин дуруст аст.

Бигзор функцияҳои $f(M)$ ва $g(M)$ дар нуқтаи A бефосила бошанд. Онгоҳ функцияҳои $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \times g(M)$ ва $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ дар нуқтаи A (ҳосили тақсим дар мавриди

$g(A) \neq 0$ *будан*) *бефосила мебошанд.* Исботи ин тасдикот ба исботи теоремаи 4.2 монанд аст.

2°. Бефосилагии функцияи мураккаб. Мафҳуми функцияи мураккаби якчандтағьирьёбандаро меомӯзем. Бигзор функцияи

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k) \end{aligned}\right\} \qquad (14.11)$$

дар маҷмӯи $\{N\}$-и фазои евклидии E^k дода шудааст ($t_1, t_2, \ldots, t_k$ — координатаҳои нуқтаҳо дар ин фазо). Онгоҳ ба ҳар як нуқтаи $N(t_1, t_2, \ldots, t_k)$-и маҷмӯи $\{N\}$ бо ёрии формулаҳои (14.11) нуқтаи $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-и фазои евклидии E^m дар мувофиқатӣ гузошта мешавад. Маҷмӯи ҳамаи ингуна нуқтаҳоро бо $\{M\}$ ишорат мекунем. Бигзор $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функцияи m-тағьирьёбандаи дар маҷмӯи $\{M\}$ додашуда бошад. Дар ин маврид мо меғӯем, ки *функцияи мураккаби* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар маҷмӯи $\{N\}$-и фазои евклидии E^k муайян аст, дар ин ҷо $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функцияҳои тағьирьёбандаҳои $t_1, t_2, \ldots, t_k$ мебошанд; дар айни ҳол ин функцияҳо бо муносибати (14.11) муайян мешаванд. Тасдиқоти зерин дуруст аст.

Бигзор функцияҳои $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $\ldots$, $x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ *дар нуқтаи* $A(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *бефосила бошанд ва функцияи* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *дар нуқтаи* $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *бефосила бошад, дар ин ҷо* $b_i = \varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Онгоҳ функцияи мураккаби* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *ки дар ин ҷо* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *функцияҳои муайяншудаи аргументҳои* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *мебошанд, дар нуқтаи* $A(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *бефосила мебошад.* Даврҳои асосии исботи ин тасдиқотро қайд мекунем. Бигзор $\{N_n\}$, $N_n \neq A$, пайдарпаии нуқтаҳои ба A наздикшавандаи дилхоҳи соҳаи $\{N\}$-и дода шудани функцияи $\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ бошад ва $\{M_n\}$ пайдарпаии мувофиқи нуқтаҳое, ки координатаҳо $x_i^{(n)}$-и онҳо ба $\varphi_i(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)})$ баробаранд. Дар асоси дар нуқтаи A бефосила будани функцияи φ_i пайдарпаии $\{M_n\}$ ба нуқтаи $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ наздик мешавад (имконияти бо нуқтаи B мувофиқ омадани нуқтаҳои M_n истисно нест). Дар асоси дар нуқтаи B бефосила будани функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ пайдарпаии $\{f(M_n)\}$ ба $f(B)$ наздик мешавад. Лекин ин пайдарпай пайдарпаии қиматҳои функцияи мураккаберо ифода мекунад, ки он ба пайдарпаии $\{N_n\}$-и нуқтаҳои ба A наздикшавандаи соҳаи дода шудани он мувофиқ аст. Мо боварӣ ҳосил кардем, ки пайдарпаии $\{f(M_n)\}$ ба қимати хусусии $f(B)$ наздик мешавад, бинобар ин бо ҳамин бефосилагии функцияи мураккаб исбот шуд.

Қайд. Ин исбот ҷамъбасти мавриди якчандтағьирьёбандаи исботи теоремаи 4.5 (доир ба бефосилагии функцияи мураккаби яктағьирьёбанда) мебошад.

3°. Теорема дар бораи устувории аломати функцияи бефосила.

Теоремаи 14.4. *Агар функцияи* $u = f(M)$ *дар нуқтаи* A-*и фазои евклидии* E^m *бефосила бошад ва агар* $f(A) \neq 0$ *бошад, онгоҳ чунин* δ-*атрофи нуқтаи* A *вуҷуд дорад, ки ҳангоми лимитгирии он дар ҳама нуқтаҳои соҳаи дода шуданаш* $f(M)$ *ба нуль табдил намешавад ва аломате дорад, ки он бо аломати* $f(M)$ *мувофиқ меояд.* Дурустии ин теорема бевосита аз таърифи бефосилагии функция дар термини «ε — δ» бармеояд.

4°. Теорема дар бораи гузаштани функцияи бефосила аз қимати фосилавии дилхох.

Теоремаи 14.5 *Бигзор функцияи* $u = f(M)$ *дар ҳама нуқтаҳои маҷмӯи пайвастунандаи* $\{M\}$-*и фазои евклидии* E^m *бефосила бошад, дар айни ҳол* $f(A)$ *ва* $f(B)$ — *қиматҳои ин функция дар нуқтаҳои* A *ва* B-*и ин маҷмӯъ. Ва бигзор* C *адади дилхоҳе бошад, ки дар байни* $f(A)$ *ва* $f(B)$ *воқеъ аст. Онгоҳ дар хати каҷи бефосилаи дилхоҳи* L, *ки нуқтаҳои* A *ва* B-*ро пайваст мекунад ва пурра дар* $\{M\}$ *воқеъ мебошад, чунин нуқтаи* N *ёфт мешавад, ки* $f(N) = C$ *аст.*

Исбот. Бигзор

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_m = \varphi_m(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

муодилаҳои хати каҷи бефосилаи L, ки нуқтаҳои A ва B-и маҷмӯи $\{M\}$-ро пайваст мекунад ва пурра дар $\{M\}$ воқеъ мебошад, бошад (ба п. 5 § 1 ниг.). Функцияи мураккаби $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар сегменти $[\alpha, \beta]$ муайян аст, ки дар ин ҷо $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Маълум аст, ки қимати ин функция дар сегменти $[\alpha, \beta]$ бо қиматҳои функцияи $u = f(M)$ дар хати каҷи L мувофиқ меояд. Функцияи мураккаби номбурдаи дорои як тағьирьёбандаи t, дар асоси тасдиқоти фасли 2-юми ҳамин пункт, дар сегменти $[\alpha, \beta]$ бефосила мебошад ва, мувофиқи теоремаи 8.6, дар ягон нуқтаи ξ-и сегменти $[\alpha, \beta]$ қимати C-ро қабул мекунад. Бинобар ин, баробарии $f(N) = C$ дар нуқтаи N-и хати каҷи L-и координатаҳояш $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$, ..., $\varphi_m(\xi)$ дуруст аст. Теорема исбот шуд.

5°. Маҳдудиятии функцияе, ки дар маҷмӯи маҳдуди сарбаста бефосила мебошад.

Теоремаи 14.6 (*теоремаи якуми Вейерштрасс*). *Агар функцияи* $u = f(M)$ *дар маҷмӯи маҳдуди сарбастаи* $\{M\}$ *бефосила бошад, онгоҳ он дар ҳамин маҷмӯъ маҳдуд мебошад.* Ба исботи аз боло маҳдуд будани $u = f(M)$ таваккуф мекунем. Фарз мекунем, ки $u = f(M)$ дар $\{M\}$ аз боло маҳдуд намебошад. Пайдарпаии $\{M_n\}$-и нуқтаҳои маҷмӯи $\{M\}$-ро, ки барояшон $f(M_n) > n$ аст (чунон ки дар исботи теоремаи монанди 8.7 буд), ҷудо мекунем. Дар асоси теоремаи Больцано—Вейерштрасс (ба п. 2 § 2 ниг.) аз $\{M\}$ пайдарпаии наздикшавандаи $\{M_k\}$-ро, ки

лимити M-и он, дар асоси қайди теоремаи Больцано — Вейерштрасс, ба маҷмӯи $\{M\}$ тааллуқ дорад, ҷудо кардан мумкин аст. Маълум аст, ки пайдарпаии $\{f(M_k)\}$ пайдарпаии беохир калон мебошад. Аз дигар ҷиҳат, дар асоси дар нуқтаи M бефосила будани функция, ин пайдарпаии $\{f(M_k)\}$ бояд ба $f(M)$ наздик шавад. Мухолифоти ҳосилшуда теоремаро исбот мекунад.

6°. Ба ҳудудҳои саҳеҳи ҳуд ноил шудани функцияе, ки дар маҷмӯи маҳдуди сарбаста бефосила мебошад.

Теоремаи 14.7 (теоремаи дуюми Вейерштрасс). Агар функцияи $u = f(M)$ дар маҷмӯи маҳдуди сарбастаи $\{M\}$ бефосила бошад, онгоҳ он дар ҳамин маҷмӯъ ба ҳудудҳои болоии саҳеҳ ва поёнии саҳеҳи ҳуд ноил мешавад. Исботи ин теорема ба исботи теоремаи 8.8 (теоремаи дуюми Вейерштрасс барои функцияи якмутағьирьёбанда) монанд аст.

7°. Мафҳуми маҳдудиятии мунтазами функцияи якчандмутағьирьёбанда. *Функцияи $u = f(M)$ дар маҷмӯи $\{M\}$*-и фазои евклидии E^m функцияи мунтазам бефосила номида мешавад, агар барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин δ-и мусбати фақат аз ε вобастаро нишон додан мумкин бошад, ки барои ду нуқтаи дилхоҳи M' ва M''-и маҷмӯи $\{M\}$, ки шарти $\rho(M', M'') < \delta$-ро қаноат менамоянд, нобаробарии $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon$ иҷро мешавад.*

Теореми зерин ҷой дорад.

Теоремаи 14.8 (теорема дар бораи бефосилагии мунтазам). Функцияи дар маҷмӯи маҳдуди сарбастаи $\{M\}$ бефосила дар ҳамин маҷмӯъ мунтазам бефосила мебошад. Исботи ин теорема бо исботи теоремаи 10.2 айнан монанд аст ва аз он бо роҳи ба термини «маҷмӯи $\{M\}$» иваз кардани «сегменти $[a, b]$», ба ҳарфи M иваз кардани ҳарфи x ва ба символи $\rho(M', M'')$ иваз кардани ифодаи намуди $|x'' - x'|$ ҳосил карда мешавад.

Қайд. Ҳудуди болоии саҳеҳи ададҳои $\rho'(M', M'')$-ро, ки дар ин ҷо M' ва M'' нуқтаҳои гуногуни маҷмӯи $\{M\}$ мебошанд, диаметри маҷмӯи маҳдуди $\{M\}$ меномем. Мафҳуми диаметри маҷмӯъро истифода карда, хосияти зерини функцияҳои дар маҷмӯъҳои маҳдуди сарбаста бефосиларо қайд мекунем. *Бигзор функцияи $u = f(M)$ дар маҷмӯи маҳдуди сарбастаи $\{M\}$ бефосила бошад. Онгоҳ барои адади мусбати дилхоҳи ε чунин $\delta > 0$-ро нишон додан мумкин аст, ки дар ҳар яки таҳтмаҷмӯи сарбастаи ба маҷмӯи $\{M\}$ мутааллиқи $\{\overline{M}\}$, ки диаметраш аз δ хурд аст,*

---

* Дар айни ҳол фарз карда мешавад, ки маҷмӯи $\{M\}$ ба худаш зич мебошад, яъне дар ε-атрофи дилхоҳи ҳар як нуқтаи M-и ин маҷмӯъ нуқтаҳои аз M тафовутдори маҷмӯи $\{M\}$ вуҷуд доранд.

лаппиш ω-*и** *функцияи* $f(M)$ *аз* ε *хурд мебошад.* Исботи ин хосият ба исботи натиҷаи теоремаи 10.2 айнан монанд аст.

§ 4. Ҳосила ва дифференциали функцияҳои якчандтағйирёбанда

1. Ҳосилаҳои хусусии функцияҳои якчандтағйирёбанда. Бигзор нуқтаи $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ нуқтаи дарунии соҳаи дода шудани функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ бошад. Дар нуқтаи қайдшудаи додашудаи $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ нисбати афзоиши хусусии $\Delta_{x_k} u$ (ба п. 1 § 3, формулаҳои (14.8) ва (14.9) ниг.) ба афзоиши мувофиқи Δx_k-и аргументи x_k-ро муоина мекунем:

$$\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_m) - f(x_1, ..., x_m)}{\Delta x_k} \tag{14.12}$$

Нисбати (14.12) функция аз Δx_k-ро ифода мекунад, ки он барои ҳама қиматҳои аз нуль тафовутдори Δx_k, ки барои онҳо нуқтаи $M(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_m)$ ба соҳаи дода шудани функцияи u тааллуқ дорад, муайян мебошад.

Таъриф. Агар лимити нисбати (14.12) *афзоиши хусусии* $\Delta_{x_k} u$-*и функция дар нуқтаи* $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ *ба афзоиши мувофиқи* Δx_k-*и аргументи* x_k *ҳангоми* $\Delta x_k \to 0$ *вуҷуд дошта бошад, онгоҳ ин лимит ҳосилаи хусусии функцияи* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дар нуқтаи* M *аз рӯи аргументи* x_k *номида мешавад ва бо яке аз символҳои*

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad u'_{x_k}, \quad f'_{x_k}$$

ишорат карда мешавад. Ҳамин тариқ,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}. \tag{14.13}$$

---

* Фарқи байни худудҳои болоии саҳеҳ ва поёнии саҳеҳи функцияи $f(M)$ дар маҷмӯи $\{M\}$-ро ламинш ω-и функцияи $f(M)$ дар ҳамин маҷмӯъ меноманд.

Қайд мекунем, ки ҳосилаи хусусии функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ аз рӯи аргументи x_k ҳосилаи оддии функцияи дорои як тағьирьёбандаи x_k дар қиматҳои қайдшудаи тағьирьёбандаҳои боқимондаро ифода мекунад. Бинобар ин ҳосилаи хусусӣ бо қоидаи муқаррарии ҳисоби ҳосилаи функцияи яктағьирьёбанда ҳисоб карда мешавад.

Мисолҳо.

1°. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$.

2°. $u = xe^{yz} + \ln(x - y + z)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{yz} + \dfrac{1}{x-y+z}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xze^{yz} - \frac{1}{x-y+z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xye^{yz} + \frac{1}{x-y+z}.$$

3°. $u = \operatorname{tg}\sqrt{x^2 - yz}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-yz}\cos^2\sqrt{x^2-yz}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{2\sqrt{x^2-yz}\cos^2\sqrt{x^2-yz}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{2\sqrt{x^2-yz}\cos^2\sqrt{x^2-yz}}.$$

Қайди 1. Дар нуқтаи додашуда вуҷуд доштани ҳосилаҳои хусусии функция, умуман, сабаби дар ҳамин нуқта бефосила будани функция намешавад. Мо боварӣ ҳосил карда будем, ки функцияи

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ҳангоми } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ будан,} \\ 0 & \text{ҳангоми } x^2 + y^2 = 0 \text{ будан} \end{cases}$$

дар нуқтаи $O(0, 0)$ бефосила намебошад (ба мисоли 1-и п. 1 § 3 нигаред). Аммо функцияи номбурда дар ин нуқта соҳиби ҳосилаҳои хусусӣ аз рӯи x ва y мебошад. Ин натиҷаи он аст, ки $f(x, 0) \equiv 0$ ва $f(0, y) \equiv 0$ ва, бинобар ин,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\,0)} = 0 \quad \text{ва} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,\,0)} = 0.$$

Қайди 2. Мо мафҳуми ҳосилаҳои хусусиро барои нуқтаҳои дарунии соҳаи дода шудани функция муайян кардем. Таърифи ҳосилаҳои хусусӣ, ки мо баён кардем, барои нуқтаҳои сарҳадии соҳаи дода шудани функция, умуман, нодаркор мебошад. Аз ҷумла, ин ба он алоқаманд аст, ки афзоишҳои хусусии ин функ-

ҳияро дар нуқтаҳои сарҳадии соҳаи дода шудани функция на ҳама вақт ҳисоб кардан мумкин аст (масалан, масъала бо нуқтаи сарҳадии M_0-и соҳаи дар расми 14.2 тасвиршуда ҳамин тавр аст). Бинобар ин, одатан ҳосилаҳои хусусӣ дар нуқтаҳои сарҳадии соҳаи дода шудани функция чун қиматҳои лимитии ин ҳосилаҳо муайян карда мешаванд.

2. Мафҳуми дифференсиронидашавандагии функцияи якчандтағйирёбанда. Ба хотир меорем, ки ифодаи

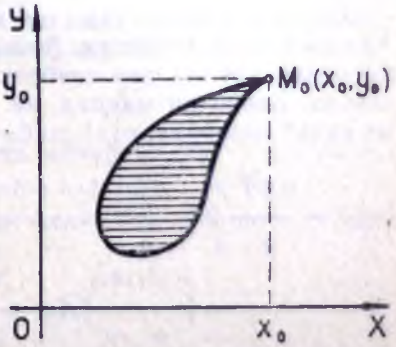
$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

афзоиши (ё афзоиши пурраи) функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар нуқтаи $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ номида мешавад, ки он ба афзоиши Δx_1, Δx_2, ..., Δx_m-и аргументҳо мувофиқ аст.

Таъриф. Функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар нуқтаи додашудаи $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дифференсиронидашаванда номида мешавад, агар афзоиши пурраи он дар ин нуқтаро ба намуди

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m$$

навиштан мумкин бошад, ки дар ин ҷо $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — баъзе ададҳои аз $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ новобаста, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — функцияҳои дар вақти $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$ беохир хурд, ки ҳангоми $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_m = 0$ будан ба нуль баробаранд. Муносибати (14.14) *шарти* дар нуқтаи додашудаи *M дифференсиронидашавандагии* функция номида мешавад. Шарти (14.14)-и дифференсиронидашавандагии функцияро ба шакли дигар ҳам навиштан мумкин аст. Барои ин функцияи ҳангоми $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$ беохир хурди $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_m^2}$*-ро муоина мекунем ва қайд менамоем, ки ин функция фақат дар ҳангоми $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_m = 0$ будан ба нуль баробар мешавад. Акнун бовар мекунем, ки суммаи қисми рости муносибати (14.14), яъне $\alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m$ функцияи беохир хурди нисбат ба ρ тартибаш баландтарро ифода мекунад. Ба ибораи дигар, боварӣ ҳосил мекунем, ки ин сумма ифодаи



Расми 14.2.

---

* Ин функция ба таври геометрӣ масофаи байни нуқтаҳои $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ва $M'(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m)$-ро ифода мекунад.

$o(\rho)$-ро ифода менамояд. Вокеан, ҳангоми $\rho \neq 0$ будан $\frac{|\Delta x_i|}{\rho} \leqslant$ $\leqslant 1$ дуруст аст ва, бинобар ин,

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m| \leqslant$$
$$\leqslant \{|\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + |\alpha_2| \frac{|\Delta x_2|}{\rho} + \ldots + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho}\} \rho \leqslant$$
$$\leqslant \{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_m|\} \rho = o(\rho).$$

Ҳамин тариқ, шарти (14.14)-и дифференцирониданашавандагии функцияро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_m \Delta x_m + o(\rho). \qquad (14.15)$$

Дар айни ҳол мо бузургии $o(\rho)$-ро ҳангоми $\rho = 0$ будан баробари нуль меҳисобем.

Барои исбот кардани он, ки шарти (14.15) ба шарти (14.14) баробаркувва мебошад, боварӣ ҳосил кардан лозим, ки аз муносибати (14.15) дар навбати худ муносибати (14.14) ҳосил мешавад. Барои ин мақсад, на ҳамаи Δx_1, Δx_2, ..., Δx_m-ро баробари нуль* ҳисобида, $o(\rho)$-ро ба намуди зерин менависем:

$$o(\rho) = \frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\rho^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_m^2}{\rho} =$$
$$= \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_1}{\rho}\right] \Delta x_1 + \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_2}{\rho}\right] \Delta x_2 + \ldots + \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_m}{\rho}\right] \Delta x_m$$

$\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_i}{\rho} = \alpha_i$ фарз карда ва α_i-ро функцияи ҳангоми $\rho \to 0$ (ва, пас, ҳангоми $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ..., $\Delta x_m \to 0$ ҳам) беохир хурд будани-ашро ба эътибор гирифта, мо муносибати (14.14)-ро ҳосил менамоем.

Инак, шарти дифференцирониданашавандагии функцияро ҳам ба намуди (14.14) ва ҳам ба намуди (14.15) навиштан мумкин аст.

Агар ақаллан яке аз ададҳои A_1, A_2, ..., A_m аз нуль тафовут дошта бошад, онгоҳ суммаи $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_{m-1} \Delta x_{m-1} + A_m \Delta x_m$ *қисми нисбат ба афзоиши аргументҳо асосию хаттии*

---

* Агар ҳамаи Δx_i-ҳо баробари нуль бошанд, онгоҳ ҳама аъзоҳои қисмҳои рости формулаҳои (14.14) ва (14.15) баробари нуль мебошанд.

афзоиши функцияи дифференцирониданашавандаро ифода мекунад. Ҳангоми муайян кардани мафҳуми дифференцирониданашавандагии функция мо имконияти ба нуль баробар шудани ҳама ададҳои $A_1, A_2, ..., A_m$-ро истисно накарда будем ва, бинобар ин, агар афзоиши функция Δy-ро ҳангоми $A_1 = A_2 = ... = A_m = 0$ будан ба намуди (14.14) ё (14.15) навиштан мумкин бошад, онгоҳ функция дар нуқтаи додашуда дифференцирониданашаванда мебошад.

Теоремаи зерин дуруст аст.

Теоремаи 14.9. *Агар функцияи* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дар нуқтаи* $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дифференцирониданашаванда бошад, онгоҳ дар ин нуқта ҳосилаҳои хусусӣ аз рӯи ҳамаи аргументҳо вуҷуд доранд, дар айни ҳол* $\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$, *дар ин ҷо* A_i *аз шарти* (14.14) *ё* (14.15)*-и дифференцирониданашавандагии функция муайян карда мешавад.*

Исбот. Аз шарти (14.14)-и дар нуқтаи $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференцирониданашаванда будани функция натиҷа мебарояд, ки афзоиши хусусии он $\Delta_{x_i} u$ дар ин нуқта ба $\Delta_{x_i} u = A_i \Delta x_i +$ $+ \alpha_i \Delta x_i$ баробар аст. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки $\frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i +$ $+ \alpha_i$ ва, бинобар ин, азбаски ҳангоми $\Delta x_i \to 0$ $\alpha_i \to 0$, пас

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i.$$

Натиҷаи 1. *Шарти* (14.15)*-и дар нуқтаи додашудаи* M *дифференцирониданашавандагии функцияро ба намуди зерин навиштан мумкин аст*:

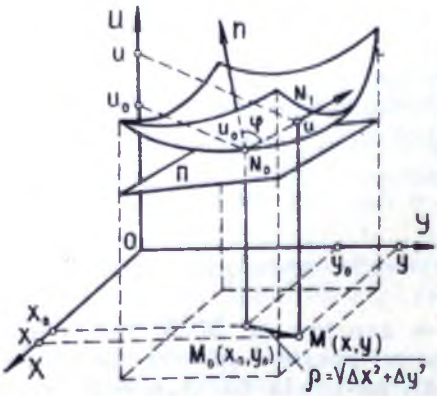
$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho)^*. \qquad (14.16)$$

Натиҷаи 2. *Агар функцияи* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дар нуқтаи* $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дифференцирониданашаванда бошад, онгоҳ ба шакли* (14.14) *ё* (14.15) *навиштани афзоиши он* (Δu) *ягона*

---

* Дар ин ҷо ҳама ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дар нуқтаи додашудаи M гирифта мешаванд.

мебошад. Вокеан, коэффициентхои A_i-и ин ифодаҳо ба хосилаҳои хусусии $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (*дар нуқтаи додашудаи* M) баробаранд ва бо тарзи ягона муайян карда мешаванд.



Расми 14.3.

Ба дурустии хосияти мухимми зерини функцияҳои дифференцирониданашаванда боварӣ хосил мекунем.

Агар функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дар нуқтаи* $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дифференцирониданашаванда бошад, онгоҳ он дар ҳамин нуқта низ бефосила мебошад.* Вокеан, аз шарти (14.14)-и дар нукта дифференцирониданашавандагии функция натиҷа мебарояд, ки $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1\to 0,\\ \Delta x_2\to 0,\\ \dots\dots\\ \Delta x_m\to 0}} \Delta u = 0$ аст ва ин чунин маъно дорад, ки функция дар нуқтаи M бефосила мебошад (ба п. 1 § 3, формулаи (14.7) нигаред).

Шарти дифференцирониданашавандагии функцияи дутағьирёбандаи $u = f(x, y)$-ро ба таври геометрӣ тасвир кардан мумкин аст. Мафҳуми дар нуқтаи N_0 ба сатҳ расанда будани ҳамвориро меомӯзем. *Ҳамвории* π, *ки аз нуқтаи* N_0-*и сатҳ мегузарад, ҳамвории дар ҳамин нуқта расанда номида мешавад, агар кунҷи байни ин ҳамворию бурандае, ки аз нуқтаи* N_0 *ва нуқтаи дилхоҳи* N_1-*и сатҳ мегузарад, дар вақти ба* N_0 *майл кардани нуқтаи* N_1 *ба нуль майл намояд* (расми 14.3).

Агар дар нуқтаи N_0 ҳамвории расанда мавҷуд бошад, онгоҳ расандаи (дар нуқтаи N_0) **хати кҷи дилхоҳе, ки дар** сатҳ воқеъ аст ва аз N_0 мегузарад, дар ҳамвории номбурда воқеъ мешавад.

Аз шарти дар нуқтаи додашудаи $M_0(x_0, y_0)$ дифференцирониданашаванда будани функцияи $u = f(x, y)$ мавҷудиятии ҳамвории расандаи графики S-и ин функция (дар нуқтаи $N_0(x_0, y_0, z_0)$) бармеояд. Фарз мекунем, ки $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta u = u - u_0$ аст, дар ин ҷо $u_0 = f(x_0, y_0)$, $u = f(x, y)$. Шарти (14.14)-и дифференцирониданашавандагиро дар ин маврид ин тавр навиштан мумкин аст:

$$u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho),$$

дар ин ҷо A ва B доимиҳое мебошанд, ки ба ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}$ (дар нуқтаи M_0) баробаранд, α ва β функцияҳои ҳангоми $\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ беохир хурд мебошанд, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Муодилаи зеринро муоина мекунем:

$$U - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Аз геометрияи аналитикӣ маълум аст, ки ин муодила дар системаи координатаҳои декартии (x, y, U) ягон ҳамвории π-ро, ки аз нуқтаи $N_0(x_0, y_0, u_0)$ мегузарад ва вектори нормалии $n = \{A, B, -1\}$* дорад, муайян мекунад.

Исбот мекунем, ки ин ҳамвории π дар нуқтаи N_0 ба сатҳи S расида мегузарад, яъне ҳамвории расанда мебошад. Барои ин боварӣ ҳосил кардан лозим аст, ки: 1) ҳамвории π аз нуқтаи N_0-и сатҳи S мегузарад ва 2) кунҷи байни нормали n (ба ин ҳамворӣ) ва бурандаи дилхоҳи N_0N_1, яъне кунҷи φ ба $\pi/2$ майл мекунад (ҳангоми нуқтаи N_1-и сатҳи S ба нуқтаи N_0 майл кардан). Тасдиқоти 1) маълум аст. Тасдиқоти 2)-ро исбот мекунем. Формулаи маълуми косинуси кунҷи байни ду векторро истифода карда, косинуси кунҷи φ-ро ҳисоб мекунем. Азбаски координатаҳои вектори n ба $A, B, -1$ баробаранд ва координатаҳои вектори $\overline{N_0N_1}$-и буранда ба $x - x_0$, $y - y_0$, $u - u_0$ баробар мебошанд (ба расми 14.3 ниг.), пас

$$\cos\varphi = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) - (u - u_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (u - u_0)^2}}.$$

Аз шарти дифференсиронидашавандагии функцияи $u = f(x, y)$ натиҷа мебарояд, ки

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - (u - u_0) = o(\rho).$$

Бинобар ин

$$|\cos\varphi| \leqslant \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{|o(\rho)|}{\rho}.$$

Аз ин формула натиҷа мебарояд, ки $\lim\limits_{\rho \to 0} \cos\varphi = 0$ аст, яъне $\lim\limits_{\rho \to 0} \varphi = \pi/2$. Тасдиқоти 2) исбот шуд.

* Вектори ғайринулии дилхоҳи n, ки ба ҳамворӣ перпендикуляр мебошад, вектори нормалии ҳамин ҳамворӣ номида мешавад.

Ҳамин тариқ, дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ дифференцирониданашаванда будани функцияи $u = f(x, y)$ аз нуқтаи назари геометрӣ чунин маъно дорад, ки ҳамворӣ дар нуқтаи $N_0(x_0, y_0, u_0)$ ба графики функцияи $u = f(x, y)$ расанда мебошад, яъне ҳамвории расанда вучуд дорад.

Азбаски коэффициентҳои A ва B мувофиқан ба ҳосилаҳои хусусии дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ ҳисоб кардашуда баробаранд, пас муодилаи ҳамвории расандаро ба намуди

$$U - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0) \qquad (14.17)$$

навиштан мумкин аст. Вектори нормалии $n = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\}$-и ҳамвории расандаро *нормали* сатҳи $u = f(x, y)$ дар нуқтаи $N_0(x_0, y_0, u_0)$ меноманд.

Шарти кифоягии дифференцирониданашавандагии функцияи якчандтағьирьёбандаро аниқ мекунем.

Теоремаи 14.10. *Агар функцияи* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дар ягон атрофи нуқтаи* $M_0(x_1, x_2, ..., x_m)$ *ҳосилаҳои хусусии ҳамаи аргументҳоро соҳиб бошад, дар айни ҳол ҳамаи ин ҳосилаҳои хусусӣ дар худи нуқтаи* M_0 *бефосила мебошанд, онгоҳ функцияи номбурда дар нуқтаи* M_0 *дифференцирониданашаванда мебошад.*

Исбот. Барои мухтасарии навишт теоремаро барои функцияи дутағьирьёбандаи $u = f(x, y)$ исбот мекунем. Инак, бигзор ҳар ду ҳосилаҳои хусусии f_x' ва f_y' дар атрофи нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ мавҷуд бошанд ва дар ҳамин нуқта бефосила бошанд. Ба аргументҳои x ва y афзоишҳои хурдтари Δx ва Δy медиҳем, то ки нуқтаи $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ аз ҳудуди атрофи номбурдаи нуқтаи M_0 берун набарояд. Афзоиши пурраи $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$-ро ба намуди

$$\Delta u = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

навиштан мумкин аст. Ифодаи $[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)]$-ро чун афзоиши функцияи $f(x, y_0 + \Delta y)$-и яктағьирьёбандаи x дар сегменти $[x_0, x_0 + \Delta x]$ муоина кардан мумкин аст. Азбаски функцияи $u = f(x, y)$ соҳиби ҳосилаҳои хусусӣ мебошад, пас функцияи номбурдаи $f(x, y_0 + \Delta y)$ дифференцирониданашаванда мебошад ва ҳосилаи он аз рӯи x ҳосилаи хусусии f_x'-ро ифода мекунад. Ба афзоиши номбурда формулаи Лагранжро татбиқ карда, аз интервали $0 < \theta_1 < 1$ чунин θ_1-ро меёбем, ки

$$[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] = f_x'(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x$$

мебошад. Ҳамин тавр муҳокима ронда, аз интервали $0 < \theta_2 < 1$ чунин θ_2-ро меёбем, ки

$$[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = f_y'(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y$$

мебошад. Азбаски ҳосилаҳои f_x' ва f_y' дар нуқтаи M_0 бефосила мебошанд, пас

$$f_x'(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x'(x_0, y_0) + \alpha,$$
$$f_y'(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_y'(x_0, y_0) + \beta,$$

дар ин ҷо α ва β функцияҳои ҳангоми $\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ беохир хурд мебошанд. Аз ин ҷо, ифодаҳои барои

$$[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)], \quad [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

ва ифодаи барои Δu ҳосилкардаамонро ба эътибор гирифта, меёбем, ки

$$\Delta u = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

Пас, функцияи $u = f(x, y)$ дар нуқтаи M_0 дифференсиронидашаванда мебошад. Дар мавриди функцияи m-тағьирьёбандаи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ҳамин тавр муҳокима ронда, фақат афзоиши пурраи Δu-и ин функцияро ба намуди зерин навиштан лозим аст:

$$\Delta u = f(\overset{\circ}{x}_1 + \Delta x_1, ..., \overset{\circ}{x}_m + \Delta x_m) - f(\overset{\circ}{x}_1, ..., \overset{\circ}{x}_m) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} [f(\overset{\circ}{x}_1, ..., \overset{\circ}{x}_{k-1}, \overset{\circ}{x}_k + \Delta x_k, \overset{\circ}{x}_{k+1} + \Delta x_{k+1}, ..., \overset{\circ}{x}_m +$$
$$+ \Delta x_m) - f(\overset{\circ}{x}_1, ..., \overset{\circ}{x}_{k-1}, \overset{\circ}{x}_k, \overset{\circ}{x}_{k+1} + \Delta x_{k+1}, ..., \overset{\circ}{x}_m + \Delta x_m)].$$

Теорема исбот шуд.

3. Мафҳуми дифференциали функцияи якчандтағьирьёбанда.

Таъриф. Дифференциал (du)-и функцияи дар нуқтаи $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференсиронидашавандаи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ гуфта қисми афзоиши ин функция дар нуқтаи M-ро меноманд, ки он нисбат ба афзоиши аргументҳо хаттию асосӣ мебошад. Агар дар ифодаи (14.14) ҳама коэффициентҳои A_i-и афзоиши функцияи дифференсиронидашаванда баробари нуль бошанд, онгоҳ дифференциал (du)-и функция дар нуқтаи M баробари нуль ҳисобида мешавад.

Ҳамин тариқ, ифодаи

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m \qquad (14.18)$$

дифференциал (du)-и функцияи дар нуқтаи M дифференцирониданашавандаи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ номида мешавад. Мо теоремаи 14.9-ро истифода карда, ифодаи (14.18)-и дифференциали du-ро ба таври зерин навишта метавонем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m. \qquad (14.19)$$

Мафҳуми *дифференциал (dx_i)-и тағьирьёбандаи новобастаи x_i*-ро чорӣ мекунем. Адади дилхоҳ (аз $x_1, x_2, ..., x_m$ новобаста)-ро чун дифференциал (dx_i)-и тағьирьёбандаи новобастаи x_i пиндоштан мумкин аст. Минбаъд ин ададро ба афзоиш (Δx_i)-и тағьирьёбандаи новобастаи x_i баробар қабул мекунем. Ин шарт имконият медиҳад, ки формулаи (14.19)-ро ба намуди зерин нависем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m. \qquad (14.20)$$

Формулаи (14.20)-ро фақат барои мавриде, ки аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ тағьирьёбандаҳои новобаста мебошанд, муқаррар кардем. Аммо сонитар, дар п. 5-уми ҳамин параграф, исбот мекунем, ки формулаи (14.20) барои мавриде ҳам, ки аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ тағьирьёбандаҳои новобаста намебошанд ва худашон функцияҳои дифференцирониданашавандаи ягон тағьирьёбандаҳои навро ифода менамоянд, дуруст мебошад.

4. Дифференцирониданӣ функцияи мураккаб. Мо дар ин пункт масъалаи дифференцирониданӣ функцияҳои мураккаби намуди $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$-ро, ки дар ин ҷо

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k),\\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_k),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, ..., t_k) \end{aligned}\right\} \qquad (14.21)$$

мебошад, меомӯзем.

Мо исбот мекунем, ки ин функцияи мураккаб дар шартҳои муайян функцияи дифференцирониданашавандаи аргументҳояш $t_1, t_2, ..., t_k$ мебошад. Бар замми ин ҳосилаҳои хусусии функцияи мураккаби номбурда аз рӯи аргументҳои $t_1, t_2, ..., t_k$ ба воситаи ҳосилаҳои хусусии функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ва ба воситаи ҳосилаҳои хусусии функцияҳои (14.21) бо формулаҳои зерин ифода карда мешаванд:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt_1} &= \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dt_1} + \frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{dt_1} + \ldots + \frac{du}{dx_m}\frac{dx_m}{dt_1},\\
\frac{du}{dt_2} &= \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dt_2} + \frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{dt_2} + \ldots + \frac{du}{dx_m}\frac{dx_m}{dt_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{du}{dt_k} &= \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dt_k} + \frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{dt_k} + \ldots + \frac{du}{dx_m}\frac{dx_m}{dt_k}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.22)$$

Теореман асосии зеринро исбот мекунем.

Т е о р е м а и 14.11. *Бигзор функцияҳои* (14.21) *дар ягон нуқтаи* $M(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$ *ва функцияи* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *дар нуқтаи мувофиқи* $N(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ *дифференсиронидашаванда бошанд, дар ин ҷо* $\overset{\circ}{x}_i = \varphi_i(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Онгоҳ функцияи мураккаби* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *ки дар ин ҷо* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *бо муносибатҳои* (14.21) *муайян мешаванд, дар нуқтаи* M *дифференсиронидашаванда мебошад. Дар айни замон ҳосилаҳои хусусии ин функцияи мураккаб дар нуқтаи* M *бо формулаҳои* (14.22) *муайян карда мешаванд, ки дар онҳо ҳама ҳосилаҳои хусусии* $\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \ldots, \frac{du}{dx_m}$ *дар нуқтаи* N *ва ҳама ҳосилаҳои хусусии* $\frac{dx_i}{dt_l}$*-и функцияҳои* (14.21) *нисбат ба аргументҳои* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *дар нуқтаи* M *гирифта мешаванд.*

И с б о т. Ба аргументҳои $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *дар нуқтаи* $M(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$ афзоишҳои дилхоҳи $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_k$, ки дар як вақт баробари нуль нестанд, медиҳем. Афзоишҳои $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$-и функцияҳои (14.21) дар нуқтаи M ба ин афзоишҳо мувофиқ меоянд. Афзоиши Δu-и функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар нуқтаи N дар навбати худ, ба афзоишҳои $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ мувофиқ меояд. Азбаски функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар нуқтаи N дифференсиронидашаванда мебошад, пас афзоиши Δu-и ин функцияро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\Delta u = \frac{du}{dx_1}\Delta x_1 + \frac{du}{dx_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{du}{dx_m}\Delta x_m + \\ + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m, \qquad (14.23)$$

дар ин ҷо ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ дар нуқтаи N ги-

рифта мешаванд ва $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ функцияҳои ҳангоми $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$ беохир хурд мебошанд, ки ҳангоми $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_m = 0$ будан баробари нуль мебошанд. Дар муносибати (14.23) $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ афзоиши функцияҳои (14.21) -ро, ки ба афзоишҳои интихобшудаи $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_k$-и аргументи ин функцияҳо мувофиқанд, ифода менамоянд. Дар асоси дар нуқтаи $M(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ дифференсиронидашаванда будани функцияҳои (14.21) афзоишҳои номбурдаи Δx_i-ро ба шакли зерин навиштан мумкин аст:

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial x_i}{\partial t_2}\Delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial t_k}\Delta t_k + o(\rho) \qquad (14.24)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

дар ин ҷо ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial x_i}{\partial t_1}, \frac{\partial x_i}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ дар нуқтаи M ги-

рифта мешаванд ва $\rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2 + \ldots + (\Delta t_k)^2}$.

Мо бояд боварӣ ҳосил намоем, ки баъди ба қисми рости (14.23) гузоштани ифодаи (14.24) афзоиши Δu-ро ба намуди

$$\Delta u = A_1\Delta t_1 + A_2\Delta t_2 + \ldots + A_k\Delta t_k + o(\rho) \qquad (14.25)$$

овардан мумкин аст, ки дар ин ҷо

$$A_i = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (14.26)$$

Бо ҳамин исботи теорема ба итмом мерасад, чунки формулаи (14.25) факти дифференсиронидашаванда будани функцияи мураккабро муқаррар мекунад ва ифодаи (14.26) ҳосилаи хусусии функцияи мураккаби номбурдаро ифода мекунад (ба теоремаи 14.9 ниг.).

Ҳангоми ба қисми рости (14.23) гузоштани ифодаи (14.24), ғайр аз гурӯҳи ҷамъшавандаҳои $A_1\Delta t_1 + A_2\Delta t_2 + \ldots + A_k\Delta t_k$, мо гурӯҳҳои дигари ҷамъшавандаҳоро низ ҳосил мекунем. Мо бояд боварӣ ҳосил кунем, ки ҳамаи гурӯҳҳои дигари ҷамъшавандаҳо бузургии $o(\rho)$-ро ифода менамоянд. Ин аз тасдиқоти зерин бармеояд:

1°. *Ҳама ҳосилаҳои хусусии* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$*-и формулаи* (14.23) *дар нуқтаи* N *гирифта мешаванд, яъне ададӣ доимиеро ифода менамоянд, ки ҳангоми онро ба* $o(\rho)$ *зарб кардан боз бузургии* $o(\rho)$ *ҳосил мешавад.*

2°. *Ҳамаи* Δx_i*-ҳо* ($i = 1, 2, \ldots, m$) *нобаробарии* $|\Delta x_i| \leqslant \leqslant \text{const}\,\rho$*-ро қаноат менамоянд. Ин аз формулаи* (14.24) *бармеояд.*

3°. *Ҳамаи* α_i*-ҳои формулаи* (14.23) *функцияҳои ҳангоми* $\rho \to 0$ *беохир хурдро ифода менамоянд.* Воқеан, ҳамаи α_i-ҳо ҳангоми $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ..., $\Delta x_m \to 0$ функцияҳои беохир хурд мебошанд. Лекин ҳама функцияҳои (14.21) дифференсиронидашаванда мебошанд ва, бинобар ин, онҳо дар нуқтаи M бефосиланд ва, аз ҳамин сабаб, Δx_1, Δx_2, ..., Δx_m ҳангоми $\rho \to 0$ ба нуль майл мекунанд.

4°. *Ҳар яки ҳосили зарбҳои* $\alpha_i \Delta x_i$ *бузургии* $o(\rho)$*-ро ифода менамоянд.* Ин бевосита аз пп. 2 ва 3 бармеояд. Теорема исбот шуд.

Қ а й д. Мавриди хусусии муҳимеро, ки функцияҳои (14.21) аз як аргументи t вобаста мебошанд, муоина мекунем. Онгоҳ мо функцияи мураккаби дорои як тағьирьёбандаи t: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-ро ҳосил менамоем, ки дар ин ҷо $x_i = \varphi_i(t)$. Ҳосила $\frac{du}{dt}$-и ин функцияи мураккаб бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt}. \qquad (14.27)$$

Формулаи (14.27)-ро барои исботи *теоремаи Эйлер оид ба функцияҳои якҷинса* татбиқ мекунем.

Функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ки дар маҷмӯи $\{M\}$ дода шудааст, функцияи дар ҳамин маҷмӯъ якҷинсаи дараҷаи p номида мешавад, агар барои ҳар яки нуқтаҳои $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-и маҷмӯи $\{M\}$ ва барои ҳаряк ададӣ t, ки барояш нуқтаи $N(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)$ ба маҷмӯи $\{M\}$ тааллуқ дорад, баробарии

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^p f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (14.28)$$

иҷро шавад.

Т е о р е м а и 14.12 (*т е о р е м а и Э й л е р о и д б а ф у н к ц и я ҳ о и я к ҷ и н с а*). *Агар* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *дар ягон соҳаи* $\{M\}$ *функцияи якҷинсаи дифференсиронидашавандаи дараҷаи* p *бошад, онгоҳ дар ҳар як нуқтаи* $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$*-и соҳаи*

М баробарии

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} x_m = pu \qquad (14.29)$$

дуруст аст.

И с б о т. Бигзор $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ нуқтаи дилхоҳи соҳаи $\{M\}$ бошад. Функцияи мураккаби $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ки дар ин ҷо $x_i = tx_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ аст, яъне функцияи $u = f(t\overset{\circ}{x}_1, t\overset{\circ}{x}_2, \ldots, t\overset{\circ}{x}_m)$-ро муоина мекунем. Азбаски ҳангоми $t = 1$ будан функцияи $x_i = \overset{\circ}{tx}_i$ дифференсиронидашаванда мебошад ва функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар нуқтаи мувофиқи M_0 дифференсиронидашаванда аст, пас, мувофиқи теоремаи 14.11 ва қайди ҳамин теорема, мо мувофиқи формулаи (14.27) ҳосила $\frac{du}{dt}$-и функцияи мураккаби номбурдаро дар нуқтаи $t = 1$ ҳисоб карда метавонем. Азбаски $\frac{dx_i}{dt} = \overset{\circ}{x}_i$ аст, пас

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\overset{\circ}{x}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\overset{\circ}{x}_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\overset{\circ}{x}_m \qquad (14.30)$$

дар ин ҷо ҳосилаи $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дар нуқтаи M_0 гирифта мешавад. Аз дигар ҷиҳат, дар асоси (14.28) функцияи мураккаби муоинашавандаро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$u = f(t\overset{\circ}{x}_1, t\overset{\circ}{x}_2, \ldots, t\overset{\circ}{x}_m) = t^p f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m). \qquad (14.31)$$

Аз (14.31) натиҷа мебарояд, ки $\frac{du}{dt} = pt^{p-1} f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, яъне

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = pf(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) = pu. \qquad (14.32)$$

Ифодаҳои (14.30) ва (14.32)-ро муқоиса карда, мо барои нуқтаи M_0 муносибати (14.29)-ро ҳосил мекунем. Азбаски нуқтаи M_0 нуқтаи дилхоҳи соҳаи $\{M\}$ мебошад, пас теорема исбот шуд.

5. Инвариантии шакли дифференциали якум. Мо дар п. 3 мафҳуми дифференциали якум du-и функцияи якчандтағирьёбандаро ҷорӣ кардем ва муқаррар намудем, ки агар аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ тағирьёбандаҳои новобаста бошанд, онгоҳ дифференциал du-ро ба намуди

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m \qquad (14.20)$$

навиштан мумкин аст. Мо дар ин пункт исбот мекунем, ки формулаи (14.20) формулаи универсалӣ мебошад ва он дар мавриде, ки аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ худашон функцияҳои дифференсиронидашавандаи тағирьёбандаҳои нави $t_1, t_2, ..., t_k$ мебошанд, низ дуруст аст. Хосияти номбурдаи дифференциали якумро одатан хосияти *инвариантии шакли он* меноманд.

Бигзор аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$-и функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияҳои дар нуқтаи $A(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, ..., \overset{\circ}{t}_k)$ дифференсиронидашавандаи $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$-ро ифода намоянд ва худи функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дар нуқтаи $B(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$, ки дар ин ҷо $\overset{\circ}{x}_i = \varphi_i(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, ..., \overset{\circ}{t}_k)$ аст, дифференсиронидашаванда бошад. Мо дар ингуна мавриди u-ро чун функцияи мураккаби аргументҳои $t_1, t_2, ..., t_k$ муоина карда метавонем, ки он, дар асоси теоремаи 14.11, дар нуқтаи A дифференсиронидашаванда мебошад. Бинобар ин дифференциал (du)-и ин функцияи мураккабро ба намуди

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k \qquad (14.33)$$

навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ аз муносибати (14.22) муайян карда мешавад. $\frac{\partial u}{\partial t_i}$-ро аз (14.22) ба (14.33) гузошта ва коэффициентҳои назди $\frac{\partial u}{\partial x_i}$-ро ҷамъ карда, дифференциали зеринро ҳосил менамоем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + ... + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k\right) + ...$$

$$... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + ... + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k\right).$$

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}. \qquad (14.36)$$

Мафҳуми градиенти функцияро истифода карда ва вектори a, ки бо самти тири 1 муайян мешавад, соҳиби координатаҳои $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ буданашро ба эътибор гирифта, ифодаи (14.35)-ро, ки ба ҳосилаи $\frac{\partial u}{\partial l}$ аз рӯи самти 1 оид аст, ба намуди ҳосили зарби скалярии векторҳои $\operatorname{grad} u$ ва a менависем:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathrm{a} \operatorname{grad} u^*. \qquad (14.37)$$

Градиенти функцияи $u = f(x, y, z)$ дар нуқтаи M_0 самт ва бузургии афзоиши максималии ин функция дар нуқтаи M_0-ро тавсиф медиҳад. Инро нишон медиҳем. Яъне, боварӣ ҳосил мекунем, ки функцияи u дар нуқтаи M_0 аз рӯи самте, ки градиенти ин функция дар нуқтаи номбурдаро муайян мекунад, нисбат ба ҳосила аз рӯи самти дигари дилхоҳ дар нуқтаи M_0 ба қимати максималӣ соҳиб мебошад ва қимати ҳосилаи номбурда ба $|\operatorname{grad} u|$, яъне ба дарозии вектори $\operatorname{grad} u$ баробар аст. Формулаи (14.37)-ро ба намуди

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\mathrm{a}|\,|\operatorname{grad} u| \cos\varphi$$

менависем, ки дар ин ҷо φ кунҷи байни векторҳои a ва $\operatorname{grad} u$ мебошад. Азбаски $|\mathrm{a}| = 1$ аст, пас

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi.$$

Аз формулаи охирин натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $\cos\varphi = 1$ будан, яъне агар самти вектори a бо самти $\operatorname{grad} u$ мувофиқ ояд, ҳосила аз рӯи самт ба қимати максималӣ $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max}$ соҳиб мешавад, дар айни ҳол $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u|$.

---

* Ба хотир меорем: ҳосили зарби скалярии ду вектор, ки чун ҳосили зарби модули (дарозии) векторҳо ба косинуси кунҷи байни онҳо муайян карда мешавад, дар мавриди бо координатаҳо дода шудани векторҳо, ба суммаи ҳосилҳои зарби координатаҳои якномаи ин векторҳо баробар аст.

Барои аниқ кардани маънои геометрии вектори grad u мафҳуми *сатҳи дараҷаи* функцияи $u = f(x, y, z)$-ро ҷорӣ мекунем.

Ҳар як сатҳеро, ки дар он функцияи $u = f(x, y, z)$ қимати доимиашро нигоҳ медорад, $f(x, y, z) = c = \text{const}$ сатҳи дараҷаи функцияи $u = f(x, y, z)$ меномем.

Вектори grad u дар нуқтаи додашуда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ба ҳамон сатҳи дараҷаи функцияи $u = f(x, y, z)$, ки он аз нуқтаи додашудаи M_0 мегузарад, ортогоналӣ мебошад. Ба ин бовар кардан осон аст.

Қ а й д. Дар мавриди функцияи дорои ду тағйирёбандаи x ва y-и $u = f(x, y)$ вектори воҳидии $\mathbf{a}$, ки самтро дар нуқтаи M_0 муайян мекунад, соҳиби координатаҳои $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$ мебошад. Бинобар ин дар мавриди номбурда формулаи (14.35) намуди зеринро мегирад:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

Дар мавриди функцияи дутағйирёбанда градиенти функцияи дифференсиронидашавандаи $u(x, y)$ чун векторе, ки координатаҳои $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}$ дорад, муайян карда мешавад. Формулаи (14.37) барои мавриди ду тағйирёбанда низ дуруст аст. Барои функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ки m-то тағйирёбандаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_m$ дорад, ҳосила аз рӯи самт ва градиент айнан ҳамин тавр муайян карда мешаванд. Яъне ҳосилаи $\frac{\partial u}{\partial l}$ дар нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ аз рӯи самти 1, ки бо вектори воҳидии $\mathbf{a} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m\}$* дода мешавад, чун ҳосилаи функцияи мураккаби $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ аз рӯи l муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо $x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + l\cos\alpha_1$, $x_2 = \overset{\circ}{x}_2 + l\cos\alpha_2$, ..., $x_m = \overset{\circ}{x}_m + l\cos\alpha_m$. Агар $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функцияи дифференсиронидашаванда бошад, барои ҳосила аз рӯи самт формулаи зерин ҷой дорад:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\cos\alpha_m.$$

Векторе, ки бо символи grad u ишорат мешавад ва координатаҳои $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ дорад (илова бар ин ҳосилаҳои номбурда дар

---

* Дар фазои евклидии m-ченакаи геометрияи аналитикӣ вектори воҳидии $\mathbf{a}$ чун вектори дорои координатаҳои $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m$, ки дар ин ҷо $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_m = 1$ аст, муайян карда мешавад.

нуқтаи додашудаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ гирифта мешаванд), градиенти функция дар нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ номида мешавад. Барои ҳосилаи функцияи дифференсиронидашавандаи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ аз рӯи самт формулаи (14.37) дуруст аст.

§ 5. Ҳосилаҳои хусусӣ ва дифференциалҳои тартиби олӣ

1. Ҳосилаҳои хусусии тартиби олӣ. Бигзор $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ҳосилаи хусусии аз рӯи аргументи x_i-и функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ки дар соҳаи $\{M\}$ муайян аст, дар ҳар як нуқтаи соҳаи $\{M\}$ мавҷуд бошад. Дар ин маврид ҳосилаи хусусии номбурда функцияи тағйирёбандаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_m$-ро, ки низ дар соҳаи $\{M\}$ муайян аст, ифода менамояд. Ин функцияи $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ дар ягон нуқтаи M-и соҳаи $\{M\}$ аз рӯи аргументи x_k соҳиби ҳосилаи хусусӣ шуда метавонад. Онгоҳ ҳосилаи хусусии номбурда аз рӯи аргументи x_k-ро ҳосилаи хусусии дуюм ё ҳосилаи хусусии тартиби дуюми функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар нуқтаи M аввал аз рӯи аргументи x_i ва баъд аз рӯи аргументи x_k меноманд ва бо яке аз символҳои зерин ишорат менамоянд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, \quad f^{(2)}_{x_i x_k}, \quad u^{(2)}_{x_i x_k}.$$

Дар айни ҳол, агар $i \neq k$ бошад, онгоҳ ҳосилаи хусусии $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$ ҳосилаи хусусии омехтаи тартиби дуюм номида мешавад. Баъди он, ки мафҳуми ҳосилаи хусусии дуюм ҷорӣ карда шуд, мафҳуми ҳосилаи хусусии сеюм, баъд мафҳуми ҳосилаи хусусии чорум ва ғайраро пай дар пай ҷорӣ кардан мумкин аст. Агар фарз кунем, ки мо мафҳуми ҳосилаи хусусии $(n-1)$-уми функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (номерҳои алоҳида ё ҳатто ҳама номерҳои онҳо мувофиқ омаданашон мумкин аст)-ро ҷорӣ кардаем ва ин ҳосилаи хусусии $(n-1)$-ум дар нуқтаи M аз рӯи аргументи x_{i_n} ҳосилаи хусусӣ дорад, онгоҳ ҳосилаи хусусии номбурдаро ҳосилаи хусусии n-ум (ё ҳосилаи хусусии тартиби n-ум)-и функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар нуқтаи M аз рӯи аргументҳои $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$ меноманд. Ҳамин тариқ, мо мафҳуми ҳосилаи хусусии

n-умро ба таври *индуктивӣ* ҷорӣ мекунем. Муносибате, ки ҳосилаи хусусии n-умро аз рӯи аргументҳои $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$ муайян мекунад, чунин намуд дорад:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n}\, \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2}\, \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2}\, \partial x_{i_1}} \right).$$

Агар на ҳама индексҳои $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ба якдигар мувофиқ бошанд, онгоҳ ҳосилаи хусусии $\dfrac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \ldots \partial x_{i_2}\, \partial x_{i_1}}$ ҳосилаи хусусии *омехтаи* т а р т и б и n-ум номида мешавад. Азбаски ҳосилаи хусусии функция аз рӯи аргументи x_i чун ҳосилаи оддии функцияи дорои як тағьирёбандаи x_i (дар қиматҳои қайдшудаи тағьирёбандаҳои дигар) муайян карда мешавад, пас барои ҳисоб кардани ҳосилаҳои хусусии тартиби олӣ фақат ҳосилаҳои оддии тартиби якумро ҳисоб карда тавонистан лозим аст. Ба сифати мисол ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюми функцияи $u = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$ -ро ҳисоб мекунем. Чунин ифодаҳо ҳосил мешаванд:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Дар ин мисол ҳосилаҳои хусусии омехтаи $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ ва $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ ба якдигар баробар мебошанд. Умуман, қимати ҳосилаҳои омехта аз тартиби дифференсиронии пай дар пай вобаста аст. Масалан, боварӣ ҳосил мекунем, ки ҳосилаҳои хусусии омехтаи $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ ва $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ -и функцияи

$$u = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ ҳангоми } x^2+y^2 \neq 0 \text{ будан,} \\ 0 \text{ ҳангоми } x^2+y^2=0 \text{ будан} \end{cases}$$

дар нуқтаи (0, 0) вуҷуд доранд, лекин онҳо ба якдигар баробар нестанд. Ҳақиқатан,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \text{ ҳангоми } k^2+y^2 \neq 0 \text{ будан,} \\ 0 \text{ ҳангоми } x^2+y^2=0 \text{ будан.} \end{cases}$$

Бинобар ин

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right|_{x=0,\ y=0} = \lim_{y\to 0} \frac{\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0,\ y\neq 0} - \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0,\ y=0}}{y} = -1.$$

Ҳамин тавр ҳисоб карда, $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{x=0,\ y=0}$ = 1-ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тариқ, дар нуқтаи (0, 0) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \neq \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$. Шарти кифоягии аз тартиби дифференсиронии пай дар пай новобаста будани қимати ҳосилаҳои хусусиро аниқ менамоем. Мафҳуми n маротиба дифференсиронидашавандагии функцияи якчандтағьирьёбандаро пешакӣ чорӣ мекунем. *Функцияи* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *функцияи дар нуқтаи* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ *n маротиба дифференсиронидашаванда номида мешавад, агар ҳама ҳосилаҳои хусусии тартиби* $(n-1)$*-уми ин функция функцияҳои дар нуқтаи* M_0 *дифференсиронидашаванда бошанд.* Тасдиқоти зеринро баён мекунем. *Барои он ки* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *дар* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ *n маротиба дифференсиронидашаванда бошад, кифоя аст, ки ҳама ҳосилаҳои хусусии тартиби n-уми он дар нуқтаи* M_0 *бефосила бошанд.* Дурустии ин тасдиқот аз таърифи дифференсиронидашавандагии функцияҳо ва теоремаи 14.1[0] (доир ба шартҳои кифоягии дифференсиронидашавандагӣ) бармеояд.

Теоремаи 14.13. *Бигзор функцияи* $u = f(x, y)$ *дар нуқтаи* $M_0(x_0, y_0)$ *ду маротиба дифференсиронидашаванда бошад. Он-*

гоҳ дар ин нуқта ҳосилаҳои хусусии $f_{xy}^{(2)}$ *ва* $f_{yx}^{(2)}$ *ба якдигар баробаранд.*

И с б о т. Азбаски функцияи $u = f(x, y)$ дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ дифференсиронидашаванда мебошад, пас ҳосилаҳои хусусии f_x' ва f_y' дар ягон атрофи нуқтаи M_0 муайян мебошанд ва дар ин нуқта функцияҳои дифференсиронидашавандаро ифода менамоянд. Ифодаи

$$\Phi = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \tag{14.38}$$

-ро муоина мекунем, ки дар ин ҷо h адади ҳар қадар хурдест, ки нуқтаи $M(x_0 + h, y_0 + h)$ дар атрофи номбурдаи нуқтаи M_0 воқеъ мебошад. Ифодаи Ф-ро чун афзоиши $\Delta\varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$-и функцияи яктағьирьёбанда (x)-и дар сегменти $[x_0, x_0 + h]$ дифференсиронидашавандаи $\varphi(x) = f(x_0, y_0 + h) - f(x, y_0)$ муоина кардан мумкин аст. Бинобар ин мувофиқи формулаи Лагранж, ягон адади интервали $0 < \theta < 1$-ро бо θ ишорат карда, ин тавр навишта метавонем:

$$\Phi = \Delta\varphi = \varphi'(x_0 + \theta h)h = [f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f_x'(x_0 + \theta h, y_0)]h = \{[f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f_x'(x_0, y_0)] - [f_x'(x_0 + \theta h, y_0) - f_x'(x_0, y_0)]\}h. \tag{14.39}$$

Азбаски ҳосилаи хусусии f_x' функцияи дар нуқтаи M_0 дифференсиронидашаванда мебошад, пас

$$[f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f_x'(x_0, y_0)] = f_{xx}^{(2)}(x_0, y_0)\theta h + f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0)h + \alpha_1\theta h + \beta_1 h,$$

$$[f_x'(x_0 + \theta h, y_0) - f_x'(x_0, y_0)] = f_{xx}^{(2)}(x_0, y_0)\theta h + \alpha_2\theta h,$$

дар ин ҷо α_1, β_1 ва α_2 функцияҳои ҳангоми $h \to 0$ беохир хурд мебошанд. Ифодаҳои барои $[f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f_x'(x_0, y_0)]$ ва $[f_x'(x_0 + \theta h, y_0) - f_x'(x_0, y_0)]$ ёфташударо ба формулаи (14.39) гузошта,

$$\Phi = [f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) + \alpha]h^2 \tag{14.40}$$

-ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо $\alpha = \alpha_1\theta + \beta_1 - \alpha_2\theta$ функцияи ҳангоми $h \to 0$ беохир хурд мебошад. Аз дигар ҷиҳат, ифодаи Ф-ро, ки (14.38) муайян мекунад, чун афзоиши $\Delta\psi = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0)$-и функцияи дар сегменти $[y_0, y_0 + h]$ дифференсиронидашавандаи $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$ муоина кардан мумкин аст. Формулаи Лагранжро татбиқ намуда ва дар нуқтаи M_0 дифференсиронидашаванда будани ҳосилаи хусусии f_y'-ро ба эътибор гирифта, мо ифодаи Ф-и ба ифодаи гузашта айнан монандро ҳосил мекунем:

$$\Phi = [f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0) + \beta]h^2, \qquad (14.41)$$

дар ин ҷо β функцияи ҳангоми $h \to 0$ беохир хурд мебошад. Қисмҳои рости муносибатҳои (14.40) ва (14.41)-ро ба якдигар баробар карда ва ҳар ду қисми баробарии ҳосилшударо ба h^2 ихтисор карда, меёбем, ки $f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) + \alpha = f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0) + \beta$. Азбаски α ва β функцияҳои ҳангоми $h \to 0$ беохир хурд мебошанд, пас аз баробарии охирин натиҷа мебарояд, ки $f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) = f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0)$. Теорема исбот шуд.

Қайд. Теоремаи 14.13 тасдиқ мекунад, ки агар f_x' ва f_y' дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ дифференсиронидашаванда бошанд, онгоҳ баробарии $f_{xy}^{(2)} = f_{yx}^{(2)}$ дар нуқтаи номбурда мавқеъ дорад. Аз дифференсиронидашавандагии f_x' ва f_y' (дар нуқтаи M_0) натиҷа мебарояд, ки дар ҳамин нуқта ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм вуҷуд доранд. Аммо баробарии $f_{xy}^{(2)} = f_{yx}^{(2)}$ дар мавриди мавҷудияти фақат ҳосилаҳои $f_{xy}^{(2)}$ ва $f_{yx}^{(2)}$ ва дар мавриди, илова бар он, дар нуқтаи муоинашаванда бефосила будани ин ҳосилаҳо низ мавқеъ дорад. Яъне, тасдиқоти зерин дуруст аст.

Бигзор функцияи $u = f(x, y)$ дар ягон атрофи нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ соҳиби ҳосилаҳои хусусии f_x', f_y', $f_{xy}^{(2)}$, $f_{yx}^{(2)}$ бошад. Бигзор, ғайр аз он, ҳосилаҳои $f_{xy}^{(2)}$ ва $f_{yx}^{(2)}$ дар нуқтаи M_0 бефосила бошанд. Онгоҳ дар ин нуқта $f_{xy}^{(2)} = f_{yx}^{(2)}$ аст.

Барои исбот аз ифодаи Φ, ки бо муносибати (14.38) муайян аст, истифода мекунем. Аз (14.39) натиҷа мебарояд, ки Φ фарқи ба h зарбшудаи қиматҳои функцияи $f_x'(x, y)$ дар нуқтаҳои $(x_0 + \theta h, y_0 + h)$ ва $(x_0 + \theta h, y_0)$-ро ифода менамояд. Ба ин фарқ формулаи Лагранж оид ба афзоишҳои охирнок аз рӯи тағьирьёбандаи y дар сегменти $[y_0, y_0 + h]$-ро татбиқ карда, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\Phi = f_{xy}^{(2)}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h)h^2, \quad \text{дар ин ҷо } 0 < \theta_1 < 1.$$

Дар асоси дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ бефосила будани $f_{xy}^{(2)}$ аз баробарии охирин

$$\Phi = [f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) + \alpha(h)]h^2$$

-ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо ҳангоми $h \to 0$ $\alpha(h) \to 0$.

Аз дигар ҷиҳат, ин бузургии Φ фарқи ба h зарбшудаи қиматҳои функцияи $f_u'(x, y)$ дар нуқтаҳои $(x_0 + h, y_0 + \theta_2 h)$ ва $(x_0, y_0 + \theta h)$-ро ифода менамояд. Ба ин фарқ формулаи Лагранж оид ба афзоишҳои охирнок аз рӯи тағьирьёбандаи x дар сегменти $[x_0, x_0 + h]$-ро татбиқ карда ва дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ бефосила будани $f_{yx}^{(2)}$-ро ба эътибор гирифта,

$$\Phi = [f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0) + \beta(h)]h^2$$

-ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо ҳангоми $h \to 0$ $\beta(h) \to 0$.

Ду ифодаи охирини Φ-ро ба якдигар баробар карда ва мисли муҳокимаронии охири исботи теоремаи 14.13 муҳокима ронда, ба дурустии баро-

барии ба мо даркории

$$f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) = f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0)$$

боварӣ ҳосил мекунем.

Акнун теорема дар бораи ба тартиби дифференсиронии пай дар пай вобаста набудани қимати ҳосилаи хусусии омехтаи дилхоҳи тартиби n-умро исбот менамоем.

Теоремаи 14.14. *Бигзор функцияи* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дар нуқтаи* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$ n *маротиба дифференсиронидашаванда бошад. Онгоҳ дар ин нуқта қимати ҳосилаи хусусии омехтаи дилхоҳи тартиби* n*-ум аз тартиби дифференсиронии пай дар пай вобаста нест.*

Исбот. Аз тартиби ду маротиба дифференсиронии пай дар пай вобаста набудани қимати ҳосилаи омехтаи n-умро исбот кардан кифоя аст. Ба иборае дигар, баробарии зеринро исбот кардан кифоя аст:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}. \qquad (14.42)$$

Функцияи $\dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$-ро муоина мекунем. Ин функция функцияи ду маротиба дифференсиронидашавандаи тағьирьёбандаҳои x_{i_k} ва $x_{i_{k+1}}$-ро ифода менамояд. Бинобар ин, дар асоси теоремаи 14.13,

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Аз ин ҷо дурустии баробарии (14.42) бармеояд. Теорема исбот шуд.

Дар мавриди дар нуқтаи M_0 n маротиба дифференсиронидашаванда будани функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ҳосилаи хусусии тартиби n-уми дилхоҳи онро ба намуди

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

навиштан мумкин аст; дар ин ҷо $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ ададҳои бутуне мебошанд, ки шартҳои $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n$, $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m = n$-ро қаноат менамоянд.

2. Дифференциалҳои тартиби олӣ. Мо барои ишорати дифференциали аргументҳои функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ва барои ишорати дифференциали худи ин функция мувофиқан символҳои $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ ва du-ро истифода кардем.

Акнун ба мо лозим меояд, ки барои ишорати дифференциали аргументҳои функцияи номбурда ва дифференциали худи

ин функция символҳои дигарро ҳам истифода намоем. Аз ҷумла, мо дифференциали аргументҳои функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ва дифференциали худи ин функцияро мувофиқан бо символҳои $\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_m$ ва δu ишорат мекунем. Дар ин ишоратҳо ифодаи шакли инвариантии дифференциали якуми ин функция (14.20) (ба п. 5 § 4 ниг.) чунин мешавад:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\delta x_m.$$

Ба ишоратҳои пешина баргашта, ифодаи дифференциали якуми функцияи дар нуқтаи додашудаи $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференсиронидашавандаи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, яъне ифодаи (14.20)-ро муоина менамоем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m. \qquad (14.20)$$

Фарз мекунем, ки бузургии қисми рости (14.20) функцияи аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$-ро ифода мекунад, ки он дар нуқтаи додашудаи $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференсиронидашаванда мебошад. Барои ин бояд функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дар нуқтаи додашудаи $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ ду маротиба дифференсиронидашаванда бошад ва аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ ё тағьирьёбандаҳои новобаста, ё функцияҳои ду маротиба дифференсиронидашавандаи баъзе тағьирьёбандаҳои новобаста бошанд.

Дар ин фарзият мо дифференциали

$$\delta(du) = \delta\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]$$

аз бузургии (14.20)-ро муоина карда метавонем.

Таърифи 1. *Қимати* $\delta(du)$*-и дифференциал аз дифференциали якуми* (14.20), *ки ҳангоми* $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2$, ..., $\delta x_m = dx_m$ *гирифта шудааст, дифференциали дуюми функцияи* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *(дар нуқтаи додашудаи* $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ *номида мешавад ва бо символи* d^2u *ишорат карда мешавад.*

Инак, мувофиқи таъриф*

$$d^2u = \delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \delta x_2 = dx_2,\\ \cdots\cdots\\ \delta x_m = dx_m}} = \left\{\delta\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]\right\}\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \delta x_2 = dx_2\\ \cdots\cdots\\ \delta x_m = dx_m}}$$

---

* Символи $\{\ \}\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \delta x_2 = dx_2,\\ \cdots\cdots\\ \delta x_m = dx_m}}$ чунин маъно дорад, ки дар ифодаи дарунии кавсҳои фигуравӣ $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2$, ..., $\delta x_m = dx_m$ фарз кардан лозим аст.

Дифференциали $d^n u$-и тартиби n-умро б о м е т о д и и н д у к ц и я ҷорӣ мекунем.

Фарз мекунем, ки дифференциали $d^{n-1}u$-и тартиби $(n-1)$-ум ҷорӣ карда шудааст ва функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дар нуқтаи додашудаи $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ n-маротиба дифференцирониданашаванда аст ва аргументҳои он $x_1, x_2, ..., x_m$ ё тағьирьёбандаҳои новобаста, ё функцияҳои n-маротиба дифференцирониданашавандаи тағьирьёбандаҳои новобастаи $t_1, t_2, ..., t_k$ мебошанд.

Т а ъ р и ф и 2. *Қимати* $\delta(d^{n-1}u)$*-и дифференциал аз дифференциали* $(n-1)$*-уми* $d^{n-1}u$*, ки ҳангоми* $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2$, ..., $\delta x_m = dx_m$ *гирифта шудааст. дифференциали n-уми функцияи* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *(дар нуқтаи додашудаи* $M(x_1, x_2, ..., x_m)$*) номида мешавад ва бо символи* $d^n u$ *ишорат карда мешавад.*

Инак, мувофиқи таъриф

$$d^n u = \delta(d^{n-1}u)\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \delta x_2 = dx_2,\\ \cdots\cdots\\ \delta x_m = dx_m.}}$$

Ҳангоми ҳисоб кардани дифференциалҳои дуюм ва минбаъда ду мавриди зеринро моҳиятан фарқ кардан лозим меояд: 1) мавриде, ки аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ тағьирьёбандаҳои новобаста мебошанд, 2) мавриде, ки аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ функцияҳои мувофиқ маротиба дифференцирониданашавандаи баъзе тағьирьёбандаҳои новобастаи $t_1, t_2, ..., t_k$ мебошанд.

Аввал мавриди якумро муоина мекунем. Агар $x_1, x_2, ..., x_m$ тағьирьёбандаҳои н о в о б а с т а бошанд, онгоҳ мо чунин ҳисобида метавонем, ки $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ аз $x_1, x_2, ..., x_m$ вобаста намебошанд.

Мо ҳар як дифференциали dx_k-ро барои ҳама нуқтаҳои $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ ба ҳамон як афзоиши Δx_k баробар карда гирифта метавонем. Дар айни ҳол чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\delta(dx_k) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(dx_k)}{\partial x_i}\,\delta x_i = 0.$$

Ифодаи охирин ва қоидаи дифференциронӣ, ки дар интиҳои п. 5 § 4 муқаррар шуд, имконият медиҳанд, ки барои функцияи дар нуқтаи додашудаи M ду маротиба дифференцирониданашавандаи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ силсилаи баробариҳои зеринро нависем:

$$d^2u = \delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \dots\dots \\ \delta x_m = dx_m}} = \delta\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k\right]\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \dots\dots \\ \delta x_m = dx_m}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \delta\left[\frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k\right]\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \dots\dots \\ \delta x_m = dx_m}} = \sum_{k=1}^{m} \left\{dx_k \cdot \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta(dx_k)\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \dots\dots \\ \delta x_m = dx_m}} = \sum_{k=1}^{m} \left\{dx_k \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \delta x_i\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \dots\dots \\ \delta x_m = dx_m}} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \delta x_i \cdot dx_k\right]\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \dots\dots \\ \delta x_m = dx_m}} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i \cdot dx_k. \tag{14.43}$$

(Мо боз аз он истифода кардем, ки барои функцияи ду маротиба дифференцирониданашаванда ҳосилаҳои омехтаи тартиби дуюм аз тартиби пайдарпаи дифференсиронӣ вобаста нестанд.)

Инак, агар аргументҳои $x_1, x_2, \dots, x_m$ тағьирьёбандаҳои новобаста бошанд, онгоҳ барои дифференциали дуюми функцияи дар нуқтаи додашуда ду маротиба дифференцирониданашавандаи $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ифодаи зерин дуруст аст:

$$d^2u = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i\, dx_k. \tag{14.44}$$

Қайди 1. Функцияи дорои m-то тағьирьёбандаҳои $t_1, t_2, \dots, t_m$-и намуди $\Phi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} t_i t_k$, ки дар ин ҷо a_{ik} ададҳои ҳақиқии доимӣ мебошанд, **шакли квадратии** тағьирьёбандаҳои $t_1, t_2, \dots, t_m$ номида мешавад ва ададҳои a_{ik} коэффициентҳои он мебошад.

Шакли квадратӣ симметрӣ номида мешавад, агар коэффициентҳои он шарти $a_{ik} = a_{ki}$ (барои ҳама i-ҳои баробари $1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, m$)-ро қаноат намоянд.

Ифодаи ҳосилшудаи (14.44) барои тасдиқоти ҷумлаи зерин имконият медиҳад: агар аргументҳои $x_1, x_2, \dots, x_m$ тағьирьёбандаҳои новобаста бошанд, онгоҳ дифференциали дуюми функцияи дар нуқтаи додашудаи M ду маротиба дифференцирониданашаванда ҳосилаҳои омехтаи тартиби дуюм аз тартиби пайдарпаи дифференсиронӣ вобаста нестанд.)

шавандаи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ шакли ба шакли квадратии тағьирьёбандаҳои $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ симметриро* ифода менамояд; коэффициентҳои он ба ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюми мувофиқи функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, ки дар нуқтаи додашудаи M гирифта шудаанд, баробар мебошанд.

Символи формалии

$$d = dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \qquad (14.45)$$

-ро истифода карда, ифодаи ҳосилшудаи дифференциали тартиби дуюм (14.44)-ро ба намуди дигар ҳам навиштан мумкин аст.

Бо ёрии ин символ ифодаи (14.44)-ро ба намуди

$$d^2u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 u \qquad (14.46)$$

навиштан мумкин аст.

Бо методи индукция бовар кардан осон аст, ки агар аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$-и функцияи дар нуқтаи додашудаи $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ n-маротиба дифференцирониданашаванда тағьирьёбандаҳои новобаста бошанд, онгоҳ барои дифференциали n-уми ин функция ифодаи зерин дуруст аст:

$$\mathrm{d}^n u = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} ... \sum_{i_n=1}^{m} \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_n}} dx_{i_1} dx_{i_2} ... dx_{i_n}.$$

Ин ифодаро бо ёрии символи формалии (14.45) ба намуди

$$d^n u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n u \qquad (14.47)$$

навиштан мумкин аст.

Агар аргументҳои $x_1, x_2, ..., x_m$-и функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияҳои мувофиқ маротиба дифференцирониданашавандаи тағьирьёбандаҳои новобастаи $t_1, t_2, ..., t_k$ бошанд, онгоҳ ифодаи дифференциалҳои дуюм ва минбаъда тамоман дигар хел мешавад.

---

* Симметрӣ будани ин шакли квадратӣ аз баробарии $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(M) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(M)$ бармеояд.

Муҳокимаронии силсилаи (14.43)-ро такрор карда, мо ин дафъа ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$d^2u = \delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1,\\ \dots\dots\\ \delta x_m=dx_m}} = \sum_{k=1}^{m}\{dx_k\,\delta(\frac{\partial u}{\partial x_k}) + \frac{\partial u}{\partial x_k}\,\delta\,(dx_k)\}\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1,\\ \dots\dots\\ \delta x_m=dx_m}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\{dx_k \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_k})\,\delta x_i\}\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1,\\ \dots\dots\\ \delta x_m=dx_m}} + \sum_{k=1}^{m}\{\frac{\partial u}{\partial x_k}\,\delta(dx_k)\}\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1,\\ \dots\dots\\ \delta x_m=dx_m}}.$$

Дар асоси таърифи дифференциали дуюми функцияи $u = x_k$ (дар ин ҷо k — номери дилхоҳи 1, 2, ..., m)

$$[\delta(dx_k)]\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1,\\ \dots\dots\\ \delta x_m=dx_m}} = d^2x_k.$$

Ин муносибатро ба эътибор гирифта, ифодаи зерини дифференциали дуюмро ҳосил мекунем:

$$d^2u = \sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\,dx_i\,dx_k + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d^2x_k$$

ё (агар символи (14,45)-ро истифода намоем)

$$d^2u = (dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m\frac{\partial}{\partial x_m})^2 u +$$

$$+ (\frac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}d^2x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}d^2x_m). \qquad (14.48)$$

Ифодаҳои ҳосилшудаи (14.48) ва (14.46)-ро муқоиса карда, мо боварӣ ҳосил мекунем, ки дифференциали дуюм (тафовутан аз дифференциали якум) ба хосиятҳои инвариантии шакл соҳиб нест.

Хусусан ҳама дифференциалҳои минбаъда ба хосияти инвариантии шакл соҳиб нестанд.

Қайди 2. Мавриди хусусии муҳимеро нишон медиҳем, ки дифференциалҳои дуюм ва минбаъдаи функцияи m-тағйирёбандаи $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ба хосиятҳои инвариантии шакл соҳибанд ва бо худи ҳамон формулаи (14.47), мисли мавриди тағйирёбандаҳои новобастаи $x_1, x_2, \dots, x_m$ муайян карда мешаванд.

Тағьирьёбандаҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ функцияҳои хаттии тағьирьёбандаҳои новобастаи $t_1, t_2, ..., t_k$ мебошанд, агар онҳо бо баробариҳои

$$x_i = a_{i0} + a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + ... + a_{ik}t_k \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

муайян шаванд; дар онҳо $a_{i0}, a_{i1}, ..., a_{ik}$ баъзе доимиҳоро ифода менамоянд.

Агар функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дар нуқтаи додашудаи* $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ n *маротиба дифференсиронидашаванда бошад ва аргументҳои он* $x_1, x_2, ..., x_m$ *функцияҳои хаттии тағьирьёбандаҳои новобастаи* $t_1, t_2, ..., t_k$ *бошанд, онгоҳ дифференциали* n*-уми функцияи* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *бо ҳамон формулаи* (14.47) *муайян карда мешавад.*

Азбаски $t_1, t_2, ..., t_k$ тағьирьёбандаҳои новобаста мебошанд, пас дифференциали n-уми x_i чун функцияи аргументҳои $t_1, t_2, ..., t_k$ бо баробарии типи (14.47), аниқтараш бо баробарии

$$d^n x_i = (dt_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + dt_2 \frac{\partial}{\partial t_2} + ... + dt_k \frac{\partial}{\partial t_k})^n x_i$$

муайян карда мешавад.

Лекин ҳосилаи хусусии дилхоҳи аз тартиби якум баландтари функцияи хаттии x_i ба нуль баробар аст.

Пас, $d^2x_i = 0, d^3x_i = 0, ..., d^n x_i = 0$.

Баробарии $d^2x_i = 0$ (дар ҳама қиматҳои $i = 1, 2, ..., m$) ва ифодаи (14.48) барои хулоса баровардани он, ки d^2u бо баробарии (14.46) муайян карда мешавад, имконият медиҳанд. Айнан ҳамин тавр, муносибатҳои $d^3x_i = 0, ..., d^n x_i = 0$-ро истифода карда, мо бо методи индукция исбот мекунем, ки $d^3u, d^4u, ..., d^n u$ бо баробарии (14.47) муайян карда мешаванд.

Қайди 3. Ҳангоми ҳисоббарориҳо баъзан шарҳдиҳии баробарии (14.47) ва, дар ин баробарӣ мавҷуд будани аъзоҳои мувофиқро ба эътибор гирифта, навиштани ҳама аъзоҳои гуногуни ин баробарӣ (бо коэффициентҳои наздашон) талаб карда мешавад.

Барои ин мақсад формулаи полиноми Ньютонро, ки чунин намуд дорад, истифода кардан мумкин аст:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m=n \\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant n}} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m)!}{\alpha_1!\alpha_2! ... \alpha_m!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_m^{\alpha_m} \tag{14.49}$$

(қисми рости ин формула аз рӯи индексҳои бутуни $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, ки ба ҳар яки онҳо нобаробарии $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n$-ро ҳангоми ба n баробар будани ҳамаи индексҳо $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ қаноат менамоянд, ба сумма гирифта шудаанд).

Формулаи (14.49)-ро бо методи индукция мукаррар кардан осон аст. Воқеан, ин формула ҳангоми $m = 2$ будан ва дар қиматҳои натуралии дил-

хохи n дуруст аст, чунки он ба формулаи маълуми биноми Ньютон бадал мешавад.

Фарз мекунем, ки ин формула барои ягон номери $m \geqslant 2$ ва қимати натуралии дилхохи n дуруст аст, ва месанҷем, ки он дар ингуна маврид барои номери $m+1$ ва қимати натуралии дилхохи n дуруст мебошад. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1})^n$-ро ба намуди

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{m+1})^n = [(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + a_{m+1}]^n$$

навишта, коэффициенти назди $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m} a_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$-ро бо ёрии биноми Ньютон ҳисоб мекунем. Дар асоси баробарии $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m+1} = n$, формулаи биноми Ньютон ва фарзияти барои номери n ва қимати натуралии дилхохи n дуруст будани формулаи (14.49) ин коэффициент ба ифодаи зерин баробар мешавад:*

$$C_n^{\alpha_{m+1}} \cdot \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)!}{(\alpha_1)!\,(\alpha_2)! \ldots (\alpha_m)!} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \alpha_{m+1})!}{(\alpha_{m+1})!\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)!} \cdot \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)!}{(\alpha_1)!\,(\alpha_2)! \ldots (\alpha_m)!} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \alpha_{m+1})!}{(\alpha_1)!\,(\alpha_2)! \ldots (\alpha_m)!\,(\alpha_{m+1})!}.$$

Ифодае, ки барои коэффициенти назди $a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m} \cdot a_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$ хосил кардем, бо ифодае, ки аз формулаи (14.49) ҳосил мешавад (агар дар ин формула номери m-ро ба $m+1$ иваз намоем), саҳеҳан мувофиқ меояд. Индукция ба итмом расид ва формулаи (14.49) исбот шуд.

Формулаи (14.49) имконият медиҳад, ки ифодаи (14.47)-ро барои дифференциали n-ум ба намуди зерин нависем:

$$d^n u(M) = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=n \\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant n}} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2} \ldots \partial x^{\alpha_m}}(M) \cdot (dx_1)^{\alpha_1} \cdot (dx_2)^{\alpha_2} \ldots$$

$$\ldots (dx_m)^{d_m}.$$

3. Формулаи Тейлор барои функцияи m-тағьирьёбандаи аъзои боқимондааш ба шакли Лагранж. Мо дифференциали тартиби k-уми функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар нуқтаи M-ро бо символи $d^x u\big|_M$ менависем. Теоремаи зеринро исбот мекунем.

---

* Мо ба инобат мегирем, ки $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ аст ва, бинобар ин,

$$C_n^{\alpha_{m+1}} = C_{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m+1}}^{\alpha_{m+1}} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \alpha_{m+1})!}{(\alpha_{m+1})!\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)!}.$$

Теорема и 14.15. *Бигзор функцияи* $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дар ягон* ε*-атрофи** *нуқтаи* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$ *дода шудааст ва дар* ε*-атрофи номбурда* $n+1$ *маротиба дифференсиронидашаванда бошад. Онгоҳ афзоиши пурраи* $\Delta u = f(M) - f(M_0)$*-и ин функция дар нуқтаи* M_0*-ро барои нуқтаи дилхоҳи* M*-и ин* ε*-атроф ба намуди зерин навиштан мумкин аст:*

$$\Delta u = du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u\Big|_{M_0} + ... + \frac{1}{n!}d^nu\Big|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u|_N, \tag{14.50}$$

дар айни ҳол N *ягон нуқтаи* ε*-атрофи номбурдаест, ки, умуман, аз* $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ *вобаста намебошад ва дифференциали* dx_i*-и тағьирьёбандаҳои* x_i*, ки ба ифодаҳои* $d^nu\Big|_{M_0}$ *ва* $d^{n+1}u|_N$ *дохил мешаванд, ба* $\Delta x_i = x_i - \overset{\circ}{x}_i$ *баробар аст.* Формулаи (14.50) формулаи Тейлор (барои функцияи $u = f(M)$-и маркази чудокуниаш нуқтаи M_0) номида мешавад.

Исбот. Барои мухтасарии навишт таҳқиқро барои функцияи $u = f(x, y)$-и дорои ду тағьирьёбандаи x ва y иҷро менамоем. Пешакӣ формулаи Тейлор барои функцияи $u = F(t)$-и дорои як тағьирьёбандаи t-и дар ягон атрофи нуқтаи t_0 $(n+1)$ маротиба дифференсиронидашавандаро ба намуди махсус менависем. Ба хотир меорем: формулаи Тейлор барои функцияи яктағьирьёбандаи $u = F(t)$, ки маркази чудокуниаш дар t_0 воқеъ аст, чунин намуд дорад (аъзои боқимонда дар шакли Лагранж аст):

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}F^{(2)}(t_0)(t - t_0)^2 + ...$$

$$... + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0 - \theta)(t - t_0)(t - t_0)^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1. \tag{14.51}$$

Азбаски аргументи t тағьирьёбандаи новобаста мебошад, пас афзоиши $\Delta t = t - t_0$ дифференциал (dt)-и тағьирьёбандаи новобастаи t-ро ифода менамояд. Бинобар ин

$$F^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k = F^{(k)}(t_0)dt^k = d^kF(t_0) = d^ku\Big|_{t_0}$$

ва

---

* Ба чои ε-атрофи нуқтаи M_0 чунин атрофи ситорагӣ номидашавандаи ин нуқтаро гирифтан мумкин аст, ки он ба мисли чунин атрофи нуқтаи M_0 (ки он бо ҳамроҳи ҳар як нуқтааш M пурра ба порчаи M_0M тааллуқ дорад) муайян карда мешавад.

$$F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))(t - t_0)^{n+1} = d^{n+1}u\Big|_{t_0 + \theta(t - t_0)}. \qquad (14.52)$$

Агар мо фарқи $F(t) - F(t_0)$-ро бо Δu ишорат намоем, онгоҳ, мувофиқи (14.52), формулаи Тейлор (14.51)-ро ба шакли махсуси зерин навиштан мумкин аст:

$$\Delta u = du\Big|_{t_0} + \frac{1}{2!} d^2u\Big|_{t_0} + \ldots + \frac{1}{n!} d^nu\Big|_{t_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)}u\Big|_{t_0 + \theta(t - t_0)}. \qquad (14.53)$$

Акнун дар ε-атрофи нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ нуқтаи дилхоҳи $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$-ро муоина мекунем ва нуқтаҳои M_0 ва M-ро бо хати рост пайваст менамоем. Координатаҳои x ва y-и нуқтаҳои хати рости номбурда *функцияҳои хаттии* тағьиръёбандаи нави t-ро ифода менамоянд:

$$x = x_0 + t\,\Delta x, \quad y = y_0 + t\,\Delta y; \qquad (14.54)$$

дар айни ҳол координатаҳои нуқтаҳои порчаи M_0M ба қиматҳои тағьиръёбандаи t (аз сегменти $[0, 1]$) мувофиқ меоянд. Қайд мекунем, ки ба қимати $t = 0$ нуқтаи M_0 ва ба қимати $t = 1$ нуқтаи M мувофиқ меояд. Азбаски мувофиқи шарт функцияи $u = f(x, y)$-и дорои ду тағьиръёбандаи x ва y дар атрофи муоинашавандаи нуқтаи M_0 $(n + 1)$ маротиба дифференсиронидашаванда мебошад, пас аз формулаҳои (14.54) натиҷа мебарояд, ки ин функция дар хати рости M_0M функцияи мураккаби тағьиръёбандаи t ва ақаллан дар ҳама қиматҳои t-и сегменти $[0, 1]$ $(n + 1)$ маротиба дифференсиронидашаванда мебошад. Ин функцияи мураккабро бо $F(t)$ ишорат мекунем ва барои он формулаи Тейлори маркази ҷудокуниаш нуқтаи $t_0 = 0$-ро дар шакли махсуси (14.53) ҳангоми

$$\Delta u = F(1) - F(0) = f(M) - f(M_0)$$

будан менависем. Дифференциалҳои тартибҳои гуногуни формулаи (14.53) дифференциалҳои функцияи мураккаби $u = f(x, y)$-ро, ки x ва y функцияҳои хаттии (14.54) мебошанд, ифода менамоянд. Мувофиқи қайди пункти гузашта, дар ин шартҳо дифференциалҳои тартиби дилхоҳи функцияи $u = f(x, y)$-ро дар шакли (14.47) навиштан мумкин аст. Бинобар ин

$$\left.\begin{aligned} d^ku\Big|_{t_0=0} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^k u\Big|_{M_0(x_0,\ y_0)} = d^ku\Big|_{M_0}, \\ d^{n+1}u\Big|_{t_0+\theta(t-t_0)} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^{n+1} u\Big|_{N(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)} = \\ &= d^{n+1}u\big|_N, \end{aligned}\right\} \qquad (14.55)$$

дар айни ҳол dx ва dy-и формулаҳои (14.55) аз ифодаҳои (14.54) ҳангоми $dt = \Delta t = 1 - 0 = 1$ будан ёфта мешаванд. Ҳамин тариқ, дар формулаҳои (14.55)

$$dx = dt\,\Delta x = \Delta x, \quad dy = dt\,\Delta y = \Delta y. \tag{14.56}$$

$d^k u\big|_{t_0}$ ва $d^{n+1}u\big|_{t+\theta(t-t_0)}$-и (14.55)-ро ба формулаи (14.53) гузошта ва муносибатҳои (14.56)-ро ба эътибор гирифта, формулаи Тейлор (14.50)-ро ҳосил менамоем. Теорема исбот шуд.

Ифодаи муфассали формулаи Тейлор (14.50)-ро барои функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ менависем:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - \overset{\circ}{x}_2) + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m - \overset{\circ}{x}_m)\Big]^k f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) + \frac{1}{(n+1)!}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - \overset{\circ}{x}_2) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m - \overset{\circ}{x}_m)\Big]^{n+1} f\big[\overset{\circ}{x}_1 +$$

$$+ \theta(x_1 - \overset{\circ}{x}_1), \overset{\circ}{x}_2 + \theta(x_2 - \overset{\circ}{x}_2), \ldots, \overset{\circ}{x}_m + \theta(x_m - \overset{\circ}{x}_m)\big]. \tag{14.57}$$

4. Формулаи Тейлор бо аъзои боқимондаи шакли Пеано.

Т е о р е м а и 14.15.* *Бигзор $n \geqslant 1$ адади бутун бошад, функцияи $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дода шуда бошад ва он дар ε-атрофи нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ $(n-1)$* ***маротиба ва дар худи*** *нуқтаи M_0 n маротиба дифференсиронидашаванда бошад. Онгоҳ барои нуқтаи дилхоҳи M-и ε-атрофи нуқтаи M_0 формулаи зерин дуруст аст:*

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u\Big|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^nu\Big|_{M_0} + o(\rho^n), \tag{14.58}$$

дар ин ҷо масофаи $\rho(M_0, M)$ бо ρ ишорат шудааст ва символи $o(\rho^n)$ функцияи ҳангоми $\rho \to 0$ (ё ҳангоми $M \to M_0$) беохир хурди назар ба ρ^n тартиби хурдиаш баландтарро ифода менамояд.

---

* Ҳангоми $n = 1$ будан бояд функцияи $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ фақат дар ε-атрофи нуқтаи M_0 дода шуда бошад ва дар худи нуқтаи M_0 дифференсиронидашаванда бошад.

Формулаи (14.58) формулаи Тейлор (марказаш нуқтаи M_0) бо аъзои боқимондаи шакли Пеано номида мешавад.

Қайд. Навишти муфассали формулаи Тейлор (14.58):

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + (x_m - \overset{\circ}{x}_m) \frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m) +$$

$$+ o(\rho^n). \qquad (14.59)$$

Дар қисми рости (14.59) суммаи бисьёраъзогии дараҷаи n-ум аз m-то тағьирьёбандаҳои $x_1, x_2, ..., x_m$ ва аъзои боқимондаи $o(\rho^n)$ ҳастанд.

Фарқи байни $f(M)$ ва бисьёраъзогии номбурдаро бо $R_{n+1}(M)$ ишорат менамоем, яъне фарз мекунем, ки

$$R_{n+1}(M) = f(M) - f(M_0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + (x_m - \overset{\circ}{x}_m) \frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f(M_0). \qquad (14.60)$$

Агар ҳангоми иҷро шудани шарти теоремаи 14.15* $R_{n+1}(M) = o(\rho^n)$ шуданашро муқаррар намоем, теоремаи номбурда исбот мешавад.

Пеш аз исботи теоремаи 14.15* ду леммаро исбот мекунем.

Леммаи 1. Агар функцияи $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дар нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$ n маротиба дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ ҳам худи функцияи $R_{n+1}(M)$, ки бо баробарии (14.60) муайян мешавад, ва ҳам ҳама ҳосилаҳои хусусии он (аз рӯи тағьирьёбандаҳои дилхоҳи $x_1, x_2, ..., x_m$ то худи тартиби n) дар нуқтаи M_0 ба нуль баробар мешаванд.

Исбот. Функцияи (14.60) ҳангоми $n = 1$ будан чунин намуд мегирад:

$$R_2(M) = f(M) - f(M_0) - (x_1 - \overset{\circ}{x}_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) - ... -$$

$$- (x_m - \overset{\circ}{x}_m) \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0),$$

ва баробарихои $R_2(M_0) = 0$, $\frac{\partial R_2}{\partial x_i}(M_0) = 0$ (дар ҳама қиматҳои $i = 1, 2, ..., m$) ба таври элементарӣ санҷида мешаванд.

Бо методи индукция фарз мекунем, ки лемма барои ягон номери $n \geqslant 1$ дуруст аст, ва исбот менамоем, ки дар ингуна маврид он барои номери $n + 1$ ҳам дуруст мебошад.

Бигзор функцияи $f(M)$ дар нуқтаи M $(n + 1)$ маротиба дифференсиронидашаванда бошад ва

$$R_{n+2}(M) = f(M) - f(M_0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m) \frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f(M_0). \quad (14.61)$$

Баробарии $R_{n+2}(M_0) = 0$ ба таври элементарӣ санҷида мешавад (бояд ба эътибор гирифт, ки ҳар яки қавсҳои мудаввари $(x_i - \overset{\circ}{x}_i)$-и (14.61) дар нуқтаи M_0 ба нуль баробар мешаванд).

Акнун исбот кардан лозим, ки барои қиматҳои дилхоҳи $i = 1, 2, \ldots, m$ худи функцияи $\dfrac{\partial R_{n+2}}{\partial x_i}(M)$ ва ҳама ҳосилаҳои хусусии ин функция то худи тартиби n дар нуқтаи M_0 ба нуль баробар мешаванд ва барои ин, дар асоси фарзияти дурустии лемма барои номери n, исбот кардан кифоя аст, ки функцияи $\dfrac{\partial R_{n+2}}{\partial x_i}(M)$ бо баробарии намуди (14.60), аниқтараш бо баробарии

$$\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(M) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m) \frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0). \quad (14.62)$$

муайян карда мешавад.

Азбаски ҳама тағйирёбандаҳои x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ баробарҳуқуқ мебошанд ва ба ифодаи $R_{n+2}(M)$ симметрӣ дохиланд, пас баробарии (14.62)-ро барои $i = 1$, яъне баробарии зеринро исбот кардан кифоя аст:

$$\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_1}(M) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m) \frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0). \quad (14.63)$$

Аз (14.61) маълум аст, ки барои исботи (14.63) бовар кардан кифоя аст, ки барои ҳар як номери $k = 1, 2, \ldots, n+1$ дар қиматҳои қайдшудаи $x_2, x_3, \ldots, x_m$

$$\frac{d}{dx_1}\left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f(M_0) =$$

$$= k\left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0). \tag{14.64}$$

Азбаски ҳангоми аз рӯи x_1 дифференсиронӣ тағьирьёбандаҳои $x_2, x_3, \ldots, x_m$ қайдшуда мебошанд, пас бузургии

$$D = (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}$$

-ро ҳангоми аз рӯи x_1 дифференсиронидан чун доимӣ муоина кардан мумкин аст. Ва азбаски символҳои $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ барои дар нуқтаи қайдшудаи M_0 ҳосил кардани ҳосилаҳои хусусии функцияи f истифода мешаванд, пас ҳангоми аз рӯи x_1 дифференсиронидан символҳои номбурдаро ҳам чун бузургиҳои доимӣ муоина кардан лозим аст.

Дар асоси исботи баробарии (14.64) ба дурустии баробарии

$$\frac{d}{dx_1}\left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + D\right]^k = k\left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + D\right]^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{14.65}$$

боварӣ ҳосил кардан кифоя аст.

Функцияи $\left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + D\right]^n$-ро аз рӯи x_1 чун функцияи мураккаб дифференсиронида ва аз x_1 вобаста набудани символҳои D ва $\frac{\partial}{\partial x_1}$-ро ба эътибор гирифта, баробарии (14.65)-ро ҳосил менамоем. Индукция ба итмом расид.

Лемманы 1 исбот шуд.

Лемманы 2. Бигзор $R(M) = R(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функцияи дилхоҳест, ки ду талаботро қаноат менамояд:

1) *$R(M)$ дар нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ n-маротиба дифференцирониданашаванда мебошад,*

2) *худи функцияи $R(M)$ ва ҳама ҳосилаҳои хусусии он аз рӯи тағьирьёбандаҳои дилхоҳи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ то худи тартиби n дар нуқтаи номбурдаи M_0 ба нуль баробар мешавад. Онгоҳ барои функцияи $R(M)$ баҳодиҳии*

$$R(M) = o(\rho^n) \tag{14.66}$$

дуруст аст, дар ин ҷо масофаи байни нуқтаҳои M_0 ва M, яъне $\rho(M_0, M)$ бо ҳарфи ρ ишорат шудааст.

Исбот. Ҳангоми $n = 1$ будан тасдиқоти лемма аз шарти дар нуқтаи M_0 дифференцирониданашаванда* будани функцияи $R(M)$ бармеояд, ки он чунин намуд дорад:

$$R(M) - R(M_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial x_k}(M_0)(x_k - \overset{\circ}{x}_k) + o(\rho).$$

$R(M_0) = 0$ ва дар ҳама қиматҳои $k = 1, 2, \ldots, m$ $\dfrac{\partial R}{\partial x_k}(M_0) = 0$ будаанашро ба эътибор гирифта, $R(M) = o(\rho)$-ро ҳосил менамоем.

Бо методи индукция фарз мекунем, ки леммаи 2 барои ягон номери $n \geqslant 1$ дуруст аст, ва исбот мекунем, ки дар ин мавриди он барои номери $n + 1$ ҳам дуруст аст.

Фарз мекунем, ки функцияи $R(M)$ ду талаботи леммаи 2 барои номери $n + 1$-ро қаноат менамояд. Онгоҳ, ҳосилаи хусусии дилхоҳи ин функцияи тартиби якум $\dfrac{\partial R}{\partial x_k}(M)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ ду талаботи леммаи 2 барои номери n-ро қаноат менамояд, бинобар ин (дар асоси фарзияти дурустии леммаи 2 барои номери n) баҳодиҳии

$$\frac{\partial R}{\partial x_k}(M) = o(\rho^n) \tag{14.66*}$$

дуруст мебошад.

Акнун қайд мекунем, ки азбаски $n \geqslant 1$ аст, пас $n + 1 \geqslant 2$ мебошад ва функцияи $R(M)$, ки ду талаботи леммаи 2 барои номери $(n + 1)$-ро қаноат менамояд, ба ҳар ҳолат дар атрофи нуктаи M_0 як маротиба дифференцирониданашаванда аст. Бино-

* Ба муносибати (14.16)-и п. 2 § 4 ҳамин боб нигр.

бар ин барои ин функция шарти теоремаи 14.15 барои номери $n = 0$ иҷрошаванда аст. Мувофиқи теоремаи номбурда барои нуқтаи дилхоҳи M-и ε-атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи M_0 дар порчаи M_0M чунин нуқтаи N ёфт мешавад, ки формулаи зерин дуруст аст:

$$R(M) = R(M_0) + \frac{1}{1!}\sum_{k=1}^{m}(x_k - \overset{\circ}{x}_k)\frac{\partial R}{\partial x_k}(N). \qquad (14.67)$$

Акнун қайд мекунем, ки азбаски нуқтаи N дар байни нуқтаҳои M_0 ва M воқеъ аст ва ρ масофаи байни нуқтаҳои M_0 ва M мебошад, пас $\rho(N, M_0) \leqslant \rho$ ва, бинобар ин, аз (14.66)* натиҷа мебарояд, ки

$$\frac{\partial R}{\partial x_k}(N) = o(\rho^n)$$

аст. Баҳодиҳии охиринро ба (14.67) гузошта ва $R(M_0) = 0$ будаланашро ба эътибор гирифта,

$$R(M) = o(\rho^n)\sum_{k=1}^{m}|x_k - \overset{\circ}{x}_k|$$

-ро ҳосил мекунем. Азбаски $|x_k - \overset{\circ}{x}_k| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overset{\circ}{x}_i)^2} = \rho$ аст, пас $R(M) = o(\rho^n)$-ро комилан ҳосил мекунем.

Индукция ба итмом расид. Лемманы 2 исбот шуд.

Теоремаи 14.15* бо ёрии леммаҳои 1 ва 2 бо осонӣ исбот карда мешавад.

Воқеан, қайд карда будем, ки барои исботи теоремаи 14.15* ҷумлаи зеринро муқаррар кардан кифоя аст: ҳангоми иҷро шудани шарти ин теорема барои функцияи (14.60) баҳодиҳии

$$R_{n+1}(M) = o(\rho^n)$$

дуруст аст.

Дар асоси леммаи 1 худи функцияи (14.60) ва ҳама ҳосилаҳои хусусии он аз рӯи тағьирьёбандаҳои дилхоҳи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ то худи тартиби n дар нуқтаи M_0 ба нуль баробар мешаванд. Лекин онгоҳ дар асоси леммаи 2 барои функцияи (14.60) баҳодиҳии $R_{n+1}(M) = o(\rho^n)$ дуруст аст.

Теоремаи 14.15* исбот шуд.

§ 6. Экстремуми локалии функцияи m-тағьирьёбанда

1. Мафҳуми экстремуми функцияи m-тағьирьёбанда. Шарти зарурии экстремуми локалӣ. Фарз мекунем, ки функцияи m-

тағьирьёбандаи $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дар ягон атрофи нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$-и фазои E^m муайян аст.

Таърифи 1. Функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 максимуми локалӣ (минимуми локалӣ) дорад, агар чунин δ-атрофи нуқтаи M_0 ёфт шавад, ки дар ҳудудҳои он қимати $f(M_0)$ аз байни ҳама қиматҳои $f(M)$-и ин функция қимати калонтарин (хурдтарин) мебошад.

Таърифи 2. Функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 экстремуми локалӣ дорад, агар он дар ин нуқта ё максимуми локалӣ, ё минимуми локалӣ дошта бошад.

Шарти зарурии экстремуми локалии функцияи $u = f(M)$-ро, ки дар нуқтаи додашудаи M_0 ҳосилаҳои хусусии тартиби якум (аз руи ҳама тағьирьёбандаҳо) дорад, муқаррар менамоем.

Тасдиқоти зеринро исбот мекунем: *агар функцияи $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дар нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$ соҳиби ҳосилаҳои хусусии тартиби якум (аз рӯи ҳама тағьирьёбандаҳои $x_1, x_2, ..., x_m$) бошад ва дар ин нуқта экстремуми локалӣ дошта бошад, онгоҳ ҳама ҳосилаҳои хусусии тартиби якум дар нуқтаи M_0 ба нуль баробар мешаванд, яъне баробариҳои зерин дурустанд*:

$$\frac{du}{dx_1}(M_0) = 0, \quad \frac{du}{dx_1}(M_0) = 0, \quad ..., \quad \frac{du}{dx_m}(M_0) = 0. \qquad (14.68)$$

Исбот. Дурустии баробарии якуми (14.68)-ро муқаррар мекунем. Дар функцияи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ аргументҳои $x_2, x_3, ..., x_m$-ро ба қайд мегирем; аввал онҳоро ба координатаҳои мувофиқи нуқтаи M_0 баробар мепиндорем, яъне фарз мекунем, ки $x_2 = \overset{\circ}{x}_2$, $x_3 = \overset{\circ}{x}_3$, ..., $x_m = \overset{\circ}{x}_m$. Дар айни ҳол мо функцияи $u = f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$-и дорои як тағьирьёбандаи x_1-ро ҳосил менамоем. Ҳосилаи ин функцияи яктағьирьёбанда дар нуқтаи $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$ бо ҳосилаҳои хусусии $\frac{du}{dx_1}(M_0)$ мувофиқ меояд.

Азбаски функцияи m-тағьирьёбандаи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 экстремуми локалӣ дорад, пас функцияи яктағьирьёбандаи $u = f(x_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$ дар нуқтаи $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$ соҳиби экстремуми локалӣ мебошад ва, бинобар ин, (дар асоси натиҷаҳои п. 2 § 8 боби 8) ҳосилаи ин функцияи яктағьирьёбанда дар нуқтаи $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$,

ки бо ҳосилаи хусусии $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$ мувофиқ меояд, ба нуль баробар аст.

Баробарии якуми (14.68) исбот шуд. Баробариҳои боқимондаи (14.68) айнан ҳамин тавр исбот карда мешаванд.

Баробариҳои (14.68) (яъне дар нуқтаи додашудаи M_0 ба нуль баробар шудани ҳама ҳосилаҳои хусусии тартиби якум) фақат шарти зарурӣ мебошанд ва шарти кифоягии экстремуми локалии функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 намешаванд.

Масалан, ҳар ду ҳосилаи хусусии функцияи дутағьирьёбандаи $u = xy$, яъне $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}$ дар нуқтаи $M_0(0, 0)$ ба нуль баробар мешаванд, лекин функцияи номбурда дар ин нуқтаи $M_0(0, 0)$ ҳеҷгуна экстремум надорад, чунки ин функцияи $u = xy$ дар худи нуқтаи $M_0(0, 0)$ ба нуль баробар аст ва он дар δ-атрофи ҳар қадар хурди ин нуқта ҳам қиматҳои мусбат ва ҳам қиматҳои манфӣ қабул мекунад.

Нуқтаҳое, ки дар онҳо ҳама ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми функцияи $u = f(M)$ ба нуль баробар мешаванд, нуқтаҳои экстремуми имконпазири ин функция номида мешаванд.

Функцияи $u = f(M)$ дар ҳар як нуқтаи экстремуми имконпазир ба экстремуми локалӣ соҳиб шуда метавонад, аммо мавҷудияти ин экстремуми локалиро, ки дар пункти оянда меомӯзем, муқаррар кардан мумкин аст.

Аз тасдиқоти исботшуда шакли дигари шарти зарурии экстремуми локалӣ бармеояд:

агар функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 дифференсиронидашаванда бошад ва дар ин нуқта соҳиби экстремуми локалӣ бошад, онгоҳ дифференциал $du|_M$-и ин функция дар нуқтаи M_0 нисбат ба дифференциалҳои тағьирьёбандаҳои новобастаи dx_1, dx_2, ..., dx_m айниятан ба нуль баробар аст.

Воқеан, азбаски

$$du\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m$$

аст, пас аз баробариҳои (14.68) натиҷа мебарояд, ки ҳангоми *дилхоҳ* будани dx_1, dx_2, ..., dx_m баробарии $du|_M = 0$ дуруст аст.

2. Шарти кифоягии экстремуми локалӣ. Ҳангоми баёни шарти кифоягии экстремуми локалии функцияи m-тағьирьёбандаи $u = f(M)$ дифференциали дуюми ин функция дар нуқтаи муоинашавандаи M_0 роли калон мебозад.

Мо дар п. 2 § 5-и ҳамин боб ба тасдиқоти зерин боварӣ ҳосил карда будем: дар мавриде, ки аргументҳои x_1, x_2 ..., x_m-и функцияи ду маротиба дифференсиронидашавандаи $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ё тағьирьёбандаҳои новобаста, ё функцияҳои хаттии ягон тағьирьёбандаҳои новобаста мебошанд, дифференциали дуюми ин функция дар нуқтаи додашудаи M_0 нисбат ба дифференциали аргументҳо $(dx_1, dx_2, ..., dx_m)$ шакли квадратии намуди

$$d^2u\Big|_{M_0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,dx_i\,dx_k \tag{14.69}$$

-ро ифода менамояд, дар ин ҷо

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}(M_0). \tag{14.70}$$

Барои баёни шарти кифоягии экстремуми локалӣ ба мо лозим меояд, ки аз назарияи шаклҳои квадратӣ баъзе маълумот диҳем*.

Шакли квадратии нисбат ба тағьирьёбандаҳои h_1, h_2, ..., h_m-и

$$\Phi(h_1, h_2, ..., h_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,h_i\,h_k \tag{14.71}$$

шакли ба таври мусбат муайяншуда (ба таври манфӣ муайяншуда) номида мешавад, агар барои қиматҳои дилхоҳи h_1, h_2, ..., h_m, ки дар як вақт баробари нуль нестанд, ин шакл қиматҳои қатъиян мусбат (қатъиян манфӣ)-ро қабул намояд.

Шакли квадратии (14.71) шакли аломатҳояш муайян номида мешавад, агар он ё ба таври мусбат, ё ба таври манфӣ муайян бошад.

Шакли квадратии (14.71) шакли аломатҳояш тағьирьёбанда номида мешавад, агар он ҳам қиматҳои қатъиян мусбат ва ҳам қиматҳои қатъиян манфӣ қабул намояд.

Шакли квадратии (14.71) шакли аломатҳояш муайяни квазӣ номида мешавад, агар он ё фақат қиматҳои ғайриманфӣ ё фақат қиматҳои ғайримусбат қабул намояд, лекин дар айни ҳол дар қиматҳои h_1, h_2, ..., h_m, ки дар як вақт баробари нуль нестанд, ба нуль баробар мешавад.

Аломатмуайянии шакли квадратиро, ки *критерияи Сильвестр** меноманд, баён мекунем.

---

* Ҳама таъриф ва тасдиқотҳои дар ин ҷо баёншударо, масалан, аз китоби Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1978, ёфтан мумкин аст.

* Ч. Сильвестр — математики англис (1814—1897).

Матрицаи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (14.72)$$

-ро матрицаи шакли квадратии (14.71) меномем.

Агар ҳама элементҳои матрицаи A шарти $a_{ik} = a_{ki}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, m)$-ро қаноат намоянд, онгоҳ матрицаи номбурдаро **матрицаи симметрӣ меноманд.**

Детерминантҳои зеринро **минорҳои асосии** матрицаи симметрии (14.72) меномем:

$$A_1 = a_{11},\quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \dots$$

$$\dots,\ A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Критерияи Сильвестр ба намуди ду тасдиқоти зерин баён карда мешавад:

1°. *Барои он, ки шакли квадратии* (14.71) *бо матрицаи симметрии* (14.72) *ба таври мусбат муайян бошанд, зарур ва кифоя аст, ки ҳама минорҳои асосии матрицаи* (14.72) *мусбат бошанд, яъне бояд нобаробариҳои*

$$A_1 > 0,\quad A_2 > 0,\quad \dots,\quad A_m > 0$$

дуруст бошанд.

2°. *Барои он, ки шакли квадратии* (14.71) *бо матрицаи симметрии* (14.72) *ба таври манфӣ муайян бошанд, зарур ва кифоя аст, ки аломати минорҳои асосии матрицаи* (14.72) *бадал шаванд (дар айни ҳол аломати A_1 манфӣ аст), яъне бояд нобаробариҳои*

$$A_1 < 0,\quad A_2 > 0,\quad A_3 < 0,\quad A_4 > 0,\quad \dots$$

дуруст бошанд.

Акнун мо барои баён кардан ва исбот намудани теоремае, ки шарти кифоягии экстремуми локалиро муқаррар мекунад, замина пайдо кардем.

Теоремаи 14.16. *Бигзор функцияи m-тағьирьёбандаи $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ дар ягон атрофи нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$ як маротиба дифференсиронидашаванда ва дар худи нуқтаи M_0 ду маротиба дифференсиронидашаванда бошад. Бигзор, ғайр*

аз он, нуқтаи M_0 нуқтаи экстремуми имконпазири функцияи $u = f(M)$ бошад, яъне $du\big|_{M_0} = 0$. Онгоҳ, агар дифференциали дуюми (14.69)—(14.70) *шакли квадратии ба таври мусбат муайян (ба таври манфӣ муайян) аз тағьирьёбандаҳои dx_1, dx_2, ..., dx_m-ро ифода намояд, онгоҳ функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 соҳиби минимуми локалӣ (максимуми локалӣ) мебошад. Агар дифференциали дуюми* (14.69)—(14.70) *шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбандаро ифода намояд, онгоҳ функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 экстремуми локалӣ надорад.*

И с б о т. Аввал қисми якуми теоремаро исбот мекунем. Барои муайянӣ, фарз мекунем, ки дифференциали дуюми (14.69)—(14.70) шакли квадратии ба таври мусбат муайян аз тағьирьёбандаҳои dx_1, dx_2, ..., dx_m-ро ифода намояд. Исбот мекунем, ки дар ин маврид функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 соҳиби минимуми локалӣ мебошад.

Функцияи $u = f(M)$-ро дар атрофи нуқтаи M_0 мувофиқи формулаи Тейлор бо аъзои боқимондааш ба шакли Пеано (дар ин формула $n = 2$* мегирем) ҷудо мекунем.

Дар ин ҳолат ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$f(M) - f(M_0) = du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u\Big|_{M_0} + o(\rho^2) \qquad (14.73)$$

дар баробарии (14.73) дифференциалҳои dx_k-и тағьирьёбандаҳои x_k, ки дар ифодаҳои $du\big|_{M_0}$ ва $d^2u\big|_{M_0}$ ҳастанд, ба афзоишҳои мувофиқи $(x_k - \overset{\circ}{x}_k)$-и ин тағьирьёбандаҳо баробаранд ва бузургии

$$\rho = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \ldots + (dx_m)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)^2 + (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)^2 + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)^2}. \qquad (14.74)$$

Мувофиқи шарти теорема нуқтаи M_0 нуқтаи экстремуми имконпазир мебошад. Бинобар ин дар асоси натиҷаҳои пункти гузашта $du\big|_{M_0} = 0$ аст. Ин баробариро ба эътибор гирифта ва дар ифодаҳои (14.69)—(14.70) барои дифференциали дуюм $dx_k = x_k - \overset{\circ}{x}_k$ фарз карда, формулаи Тейлорро ба намуди зерин менависем:

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(x_i - \overset{\circ}{x}_i)(x_k - \overset{\circ}{x}_k) + o(\rho^2). \quad (14.75)$$

* Ҳама шартҳои теоремаи 14.15* ҳангоми $n = 2$ будан барои функцияи $u = f(M)$ иҷро мешавад (ба п. 4 § 5-и ҳамин боб нигаред).

Исбот кардан кифоя аст, ки барои ҳама ρ-ҳои ба қадри кифоя хурд қисми рости (14.75) мусбат аст. (Ин чунин маъно дорад, ки фарқи $f(M) - f(M_0)$ дар атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи M_0 мусбат мебошад, яъне функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 соҳиби минимуми локалӣ мебошад.)

Фарз мекунем, ки $h_i = \dfrac{x_i - \overset{\circ}{x}_i}{\rho}$ аст, дар ин ҷо $i = 1, 2, \ldots, m$.

Онгоҳ аз ифодаи ρ-и (14.74) муносибати

$$|h_i| \leqslant 1, \quad h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2 = 1 \tag{14.76}$$

бармеояд. Баробарии (14.75)-ро бо ёрии ишоратҳои қабулшуда ин тавр навиштан мумкин аст:

$$f(M) - f(M_0) = \frac{\rho^2}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k + o(\rho^2). \tag{14.75*}$$

Нисбати $\dfrac{o(\rho^2)}{\rho^2}$ функцияи ҳангоми $\rho \to 0$ ё ҳангоми $M \to M_0$ бе-

охир хурдро ифода мекунад, ки онро бо $\alpha(\rho)$ ишорат менамоем. Ин функция имконият медиҳад, ки баробарии $o(\rho^2) = \rho^2 \cdot \alpha(\rho)$-ро нависем ва бо ёрии он муносибати (14.75*)-ро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$f(M) - f(M_0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k + \alpha(\rho)\right]. \tag{14.75**}$$

Қисми рости (14.75**) барои ҳама ρ-ҳои ба қадри кифоя хурд мусбат мебошад. Инро исбот кардан осон аст. Шакли квадратии $\Phi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k$ функцияеро ифода мекунад, ки он дар сатҳи сфераи воҳидӣ (14.76) муайян ва бефосила мебошад; ин сатҳ маҷмӯи сарбаста ва маҳдудро ифода менамояд. Мувофиқи теоремаи дуюми Вейерштрасс (ба теоремаи 14.7-и п. 2 § 3 боби 14 нигаред) ин функция дар маҷмӯи номбурда ба ҳудуди поёнии саҳеҳаш μ соҳиб мешавад; дар айни ҳол азбаски шакли квадратии (14.71) ба таври мусбат муайян аст ва $h_1, h_2, \ldots, h_m$, ки муносибати (14.76)-ро қаноат менамоянд, дар як вақт баробари нуль нестанд, пас натиҷа мебарояд, ки ҳудуди поёнии саҳеҳи μ к а т ъ и я н м у с б а т мебошад.

Азбаски функцияи $\alpha(\rho)$-и ҳангоми $\rho \to 0$ беохир хурд дар ҳама қиматҳои ба қадри кифоя хурди ρ нобаробарии $|\alpha(\rho)| < \mu$-ро қаноат менамояд, пас қисми рости (14.75) дар ҳама қимат-

ҳои ба қадри кифоя хурди ρ, яъне дар ҳама қиматҳои M-и ба M_0 кифоя наздик мусбат мебошад.

Ин чунин маъно дорад, ки функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 соҳиби минимуми локалӣ мебошад.

Айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад, ки агар дифференциали дуюми (14.69)—(14.70) шакли квадратии ба таври манфӣ муайянро ифода намояд, онгоҳ функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 соҳиби максимуми локалӣ мешавад.

Акнун қисми дуюми теоремаро исбот мекунем, яъне исбот менамоем, ки агар дифференциали дуюми (14.69)—(14.70) шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбандаро ифода намояд, онгоҳ функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 соҳиби экстремуми локалӣ намешавад.

Пеш аз ҳама хосияти ёрирасони зерини шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбандаи (14.71)-ро муқаррар мекунем.

Агар шакли квадратии $\Phi(h_1, h_2, ..., h_m)$ шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбанда бошад, онгоҳ чунин ду маҷмӯаи тағьирьёбандаҳои $(h_1', h_2', ..., h_m')$ ва $(h_1'', h_2'', ..., h_m'')$ ёфт мешаванд, ки

$$(h_1')^2 + (h_2')^2 + ... + (h_m')^2 = 1, \quad (h_1'')^2 + (h_2'')^2 + ... + (h_m'')^2 = 1 \tag{14.77}$$

аст, бар замми ин

$$\Phi(h_1', h_2', ..., h_m') > 0, \quad \Phi(h_1'', h_2'', ..., h_m)'' < 0. \tag{14.78}$$

Вокеан, дар асоси таърифи шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбанда ду маҷмӯаи аргументҳои $(t_1', t_2', ..., t_m')$ ва $(t_1'', t_2'', ..., t_m'')$, ки аз ададҳои дар як вақт нобаробари нуль иборатанд, ёфт мешаванд, ки

$$\Phi(t_1', t_2', ..., t_m') > 0, \quad \Phi(t_1'', t_2'', ..., t_m'') < 0. \tag{14.79}$$

$$h_i' = \frac{t_i'}{\sqrt{(t_1')^2 + (t_2')^2 + ... + (t_m')^2}},$$

$$h_i'' = \frac{t_i''}{\sqrt{(t_1'')^2 + (t_2'')^2 + ... + (t_m'')^2}} \tag{14.80}$$

фарз карда ва аз таърифи (14.71)-и шакли квадратӣ якбора ҳосил шудани

$$\Phi(h_1', h_2', ..., h_m') = \frac{1}{(t_1')^2 + (t_2')^2 + ... + (t_m')^2} \cdot \Phi(t_1', t_2', ..., t_m'),$$

$$\Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'') = \frac{1}{(t_1'')^2 + (t_2'')^2 + \ldots + (t_m'')^2} \cdot \Phi(t_1'', t_2'', \ldots, t_m'')$$

-ро ба эътибор гирифта, дар асоси (14.79) нобаробарии (14.78)-ро ҳосил менамоем, дар айни ҳол аз муносибати (14.80) баробариҳои (14.77) якбора бармеоянд.

Хосияти ёрирасони шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбанда исбот шуд.

Акнун ба исботи қисми дуюми теорема бармегардем.

Ду маҷмӯаи тағьирьёбандаҳои $(h_1', h_2', \ldots, h_m')$ ва $(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'')$-ро, ки муносибатҳои (14.77) ва (14.78)-ро қаноат менамоянд, ба қайд мегирем ва исбот менамоем, ки барои $\rho > 0$-и дилхоҳ ду нуқтаи $M'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ ва $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$-и фазои E^m ёфт мешаванд, ки $\rho(M', M_0) = \rho(M'', M_0) = \rho$ аст, дар айни ҳол

$$\frac{x_i' - \overset{\circ}{x}_i}{\rho} = h_i', \quad \frac{x_i'' - \overset{\circ}{x}_i}{\rho} = h_i'' \tag{14.81}$$

барои ҳамаи i-ҳои баробари $1, 2, \ldots, m$.

Воқеан, барои $\rho > 0$-и дилхоҳ ва барои ҳар як номери i $(i = 1, 2, \ldots, m)$

$$x_i' = \overset{\circ}{x}_i + \rho h_i', \quad x_i'' = \overset{\circ}{x}_i + \rho h_i''$$

фарз карда, мо муносибати (14.81)-ро қаноат мекунонем, дар айни ҳол дар асоси баробариҳои (14.77) баробариҳои зерин дуруст мебошанд:

$$\rho(M', M_0) = \sqrt{(x_1' - \overset{\circ}{x}_1)^2 + (x_2' - \overset{\circ}{x}_2)^2 + \ldots + (x_m' - \overset{\circ}{x}_m)^2} =$$

$$= \rho \sqrt{(h_1')^2 + (h_2')^2 + \ldots + (h_m')^2} = \rho,$$

$$\rho(M'', M_0) = \sqrt{(x_1'' - \overset{\circ}{x}_1)^2 + (x_2'' - \overset{\circ}{x}_2)^2 + \ldots + (x_m'' - \overset{\circ}{x}_m)^2} =$$

$$= \rho \sqrt{(h_1'')^2 + (h_2'')^2 + \ldots + (h_m'')^2} = \rho.$$

Дар мавриде, ки дифференциали дуюми (14.69)—(14.70) шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбандаро ифода менамояд, функцияи $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 ба экстремум соҳиб намешавад. Ба ин боварӣ ҳосил кардан осон аст.

Функцияи $u = f(M)$-ро дар атрофи нуқтаи M_0 мувофиқи формулаи Тейлор бо аъзои боқимондаи шакли Пеано чудо карда,

аниқтараш ин ҷудокуниро навишта ва ин ҷудокуниро дар нуқтаҳои номбурдаи M' ва M'' гирифта, мо ба ҷои (14.75) ду ҷудокунии зеринро ҳосил мекунем:

$$f(M')-f(M_0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(x_i'-\overset{\circ}{x}_i)(x_k'-\overset{\circ}{x}_k)+o(\rho^2), \quad (14.82)$$

$$f(M'')-f(M_0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(x_i''-\overset{\circ}{x}_i)(x_k''-\overset{\circ}{x}_k)+o(\rho^2), \quad (14.83)$$

ки барои ҳама $\rho > 0$-хоҷ ба қадри кифоя хурд дуруст мебошанд.

Қиматҳои $(x_i'-\overset{\circ}{x}_i)$ ва $(x_i''-\overset{\circ}{x}_i)$-ро аз баробариҳои (14.81) ба ин ҷудокуниҳо гузошта ва $o(\rho^2)=\rho^2\cdot\alpha(\rho)$ (дар ин ҷо ҳангоми $\rho\to 0$ $\alpha(\rho)\to 0$)-ро ба эътибор гирифта, ҷудокуниҳои (14.82) ва (14.83)-ро ба намуди зерин менависем:

$$f(M')-f(M_0)=\rho^2\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}h_i'h_k'+\alpha(\rho)\right],$$

$$f(M'')-f(M_0)=\rho^2\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}h_i''h_k''+\alpha(\rho)\right].$$

Ду муносибати охиринро ин тавр ҳам навиштан мумкин аст:

$$f(M')-f(M_0)=\rho^2\left[\frac{1}{2}\Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m')+\alpha(\rho)\right], \quad (14.82^*)$$

$$f(M'')-f(M_0)=\rho^2\left[\frac{1}{2}\Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'')+\alpha(\rho)\right]. \quad (14.83^*)$$

Муносибати (14.78) ва бузургиҳои $\Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m')>0$ ва $\Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'')<0$ аз ρ вобаста набуданашонро ба эътибор гирифта ва $\rho=\rho(M', M_0)=\rho(M'', M_0)$ буданашро ба хотир оварда, аз муносибатҳои (14.82*) (ва (14.83*) чунин ифодаро ҳосил мекунем: нобаробариҳои $f(M')>f(M_0)$ ва $f(M'')<f(M_0)$ барои $\rho>0$-и ҳар чи қадар хурд дуруст мебошанд, ки инҳо дар нуқтаи M_0 мавҷуд набудани экстремумро исбот менамоянд.

Теоремаи 14.16 пурра исбот шуд.

Қайди 1. Агар дифференциали дуюми функцияи дар нуқтаи додашудаи экстремуми имконпазири M_0 ду маротиба дифференсиронидашавандаи $u=f(M)$ дар ҳамин нуқта шакли квадратии аломатҳояш муайяни квазиро ифода намояд, онгоҳ дар бораи дар ҳамин нуқта мавҷуд будан ё мавҷуд набудани экстремуми локалӣ ягон сухани муайян гуфтан номумкин аст.

Масалан, дифференциалҳои дуюми ҳар яки ду функцияи $u_1 = x^3 + y^3$ ва $u_2 = x^4 + y^4$ дар нуқтаи экстремуми имконпазири $M_0(0, 0)$ айниятан баробар мебошанд (яъне шакли квадратии аломатҳояш муайяни квазиро ифода менамоянд), лекин як функция — функцияи дуюм дар ин нуқта соҳиби экстремуми локалӣ мебошад.

Барои ҳал кардани масъалаи экстремуми локалӣ дар мавриде, ки дифференциали дуюм шакли квадратии аломатҳояш муайяни квазиро ифода менамояд, дифференциалҳои тартибашон баландтарро таҳқиқ намудан лозим меояд, лекин ин аз доираи ин курс берун аст.

Қ а й д и 2. *Талаботи* $d^2u\Big|_{M_0} \geqslant 0$ (*мувофиқан* $d^2u\Big|_{M_0} \leqslant 0$) *шарти зарурии дар нуқтаи* M_0 *минимум (максимум)-и локалӣ будани функцияи дар ҳамин нуқта ду маротиба дифференсиронидашавандаи* $u = f(M)$ *мебошад.*

Вокеан, бигзор, барои муайянӣ, $u = f(M)$ дар нуқтаи M_0 соҳиби минимуми локалӣ бошад, лекин шарти $d^2u\Big|_{M_0} \geqslant 0$ иҷро намешавад. Онгоҳ чунин $h_1, h_2, \ldots, h_m$ ёфт мешаванд, ки

$$d^2u\Big|_{M_0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(M_0)h_i h_k < 0.$$

Функцияи $F(t) = f(\overset{\circ}{x}_1 + th_1, \overset{\circ}{x}_2 + th_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m + th_m)$-ро, ки дар ҳама қиматҳои t-и аз рӯи модуль ба қадри кифоя хурд муайян аст, муоина мекунем. Функцияи $F(t)$ дар нуқтаи $t = 0$ соҳиби минимуми локалӣ буданаш ҳатмист, ки ин ба шарти

$$F''(0) = d^2u\Big|_{M_0} < 0$$

мухолиф аст.

3. Мавриди функцияҳои дутағирьёбанда. Дар амалиёт аксаран масъалаҳои экстремуми функцияҳои дутағирьёбандаи $u = f(x, y)$ дучор мешаванд. Мо дар ин пункт натиҷаҳоеро меорем, ки ба ҳамин маврид тааллуқ доранд.

Ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ дар ягон нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$-ро мувофиқан бо символҳои a_{11}, a_{12}, a_{22} ишорат мекунем. Т а с д и қ о т и зерин дуруст аст.

Бигзор функцияи дутағирьёбандаи $u = f(x, y)$ *дар атрофи нуқтаи* $M_0(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ *як маротиба ва дар худи нуқтаи* M_0 *ду маротиба дифференсиронидашаванда бошад ва бигзор* M_0 *нуқтаи экстремуми имконпазир бошад. Онгоҳ, агар дар нуқтаи* M_0 *шарти* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ *иҷро шавад, онгоҳ функцияи* $u = f(x, y)$ *дар*

ҳамин нуқта соҳиби экстремуми локалӣ (ҳангоми $a_{11} < 0$ будан максимум ва ҳангоми $a_{11} > 0$ будан минимум) мешавад. Агар дар нуқтаи M_0 $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ бошад, онгоҳ функцияи $u = f(x, y)$ дар ҳамин нуқта экстремуми локалӣ надорад.*

Исбот. Дурустии қисми якуми тасдиқоти баёншуда бевосита аз теоремаи 14.16 ва критерияи Сильвестр (шакли квадратии аломатҳояш муайян) бармеояд, чунки

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Қисми дуюми тасдиқотро исбот мекунем. Инак, бигзор дар нуқтаи M_0 нобаробарии $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ дуруст бошад. Исбот мекунем, ки дар ин маврид дифференциали дуюми d^2u дар нуқтаи M_0 шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбандаро ифода мекунад. Аввал мавриди $a_{11} \neq 0$-ро муоина мекунем. Ишоратҳои қабулшуда:

$$\rho = \sqrt{(x - \overset{\circ}{x})^2 + (y - \overset{\circ}{y})^2},\quad h_1 = \frac{x - \overset{\circ}{x}}{\rho},\ h_2 = \frac{y - \overset{\circ}{y}}{\rho}$$

-ро истифода карда, барои дифференциали дуюм ифодаи зеринро ҳосил менамоем:

$$d^2u\Big|_{\overset{\circ}{M}} = \rho^2 \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{ik}h_ih_k = \rho^2(a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2) =$$

$$= \frac{\rho^2}{a_{11}}[(a_{11}h_1 + a_{12}h_2)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)h_2^2].$$

Санҷидан осон аст, ки ҳангоми $h_1 = 1$, $h_2 = 0$ ва ҳангоми $h_1 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}$, $h_2 = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}$** будан дифференциали $d^2u\Big|_{\overset{\circ}{M}}$ ба аломатҳои гуногун соҳиб аст, яъне шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбанда мебошад ва, бинобар ин, мувофиқи теоремаи 14.16, функция дар нуқтаи M_0 экстремуми локалӣ надорад.

Акнун мавриди $a_{11} = 0$-ро муоина мекунем. Онгоҳ аз шарти $a_{11}a_{12} - a_{12}^2 < 0$ натиҷа мебарояд, ки $a_{12} \neq 0$ аст. Пас, аз ифо-

---

* Мавриди $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ тадқиқи иловагиро металабад.

** Дар айни замон ρ бузургии ҳар қадар хурд шуда метавонад. Шарти $h_1^2 + h_2^2 = 1$ иҷро шуд.

даи барои $d^2u\big|_{M_0}$ навишташуда

$$d^2u\big|_{M_0} = \rho^2 h_2(2a_{12}h_1 + a_{22}h_2) \qquad (14.84)$$

ҳосил мешавад.

Бигзор $h_1 \neq 0$ ва бузургии h_2 чунон хурд бошад (аз шарти ${h_1}^2 + {h_2}^2 = 1$ натиҷа мебарояд, ки чунин интихоб кардани h_1 ва h_2 имконпазир аст), ки ифодаи $(2a_{12}h_1 + a_{22}h_2)$ аломати бузургии $2a_{12}h_1$-ро нигоҳ медорад. Онгоҳ аз формулаи (14.84) натиҷа мебарояд, ки $d^2u\big|_{M_0}$ ҳангоми $h_2 > 0$ ва $h_2 < 0$ будан аломатҳои гуногун дорад, яъне функцияи $u = f(x, y)$ дар нуқтаи M_0 экстремуми локалӣ надорад. Тасдиқот пурра исбот шуд.

4. Мисолҳои тадқиқи функция доир ба экстремум. 1) Нуқтаи экстремуми локалии функцияи m-тағйирьёбандаи

$$u = \lambda {x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_m}^2 + 2x_2 + \ldots + 2x_m, \qquad (14.85)$$

ки дар ин ҷо λ адади ҳақиқии нобаробари нуль мебошад, ёфта шавад.

Барои ҷустуҷӯи нуқтаҳои экстремум муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2\lambda x_1 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_2 + 2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_m} = 2x_m + 2 = 0. \qquad (14.86)$$

Аз муодилаҳои (14.86) хулоса мебарояд, ки нуқтаи $M_0(0, -1, \ldots, -1)$ нуқтаи ягонаи экстремуми локалӣ мебошад.

Барои функцияи (14.85)-ро дар нуқтаи M_0 бо ёрии шарти кифоягии экстремум тадқиқ кардан дифференциали дуюмро ҳисоб мекунем:

$$d^2u\big|_{M_0} = 2\lambda(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2 + \ldots + 2(dx_m)^2. \qquad (14.87)$$

Ҳангоми $\lambda > 0$ будан ҳама қиматҳои дифференциали дуюми (14.87) дар қиматҳои $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, ки дар як вақт баробари нуль нестанд, қатъиян мусбат мебошанд, яъне ҳангоми $\lambda > 0$ будан дифференциали дуюми (14.87) шакли квадратии ба таври мусбат муайянро ифода мекунад. Бинобар ин ҳангоми $\lambda > 0$ будан функцияи (14.85) дар нуқтаи $M_0(0, -1, \ldots, -1)$ соҳиби минимуми локалӣ мебошад.

Ҳангоми $\lambda < 0$ будан дифференциали дуюми (14.87) дар вақти $dx_1 = 0, \ldots, dx_{m-1} = 0, dx_m = 1$ будан мусбат ва дар вақти $dx_1 = 1, dx_2 = 0, \ldots, dx_m = 0$ будан манфӣ мебошад. Ин чунин

маъно дорад, ки ҳангоми $\lambda < 0$ будан дифференциали дуюми (14.87) шакли квадратии аломатҳояш тағьирьёбандаро ифода мекунад. Бинобар ин функцияи (14.85) ҳангоми $\lambda < 0$ будан дар нуқтаи $M_0(0, -1, \ldots, -1)$ экстремуми локалӣ надорад.

2) Дар ҳамворӣ n-то нуқтаҳои $M_k(a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, дода шудаанд; ба ин нуқтаҳо массаҳои $m_k > 0$ гузошта шудаанд. Дар ин ҳамворӣ нуқтаеро ёфтан лозим, ки нисбат ба он моменти инерцияи системаи нобурдаи нуқтаҳои материалӣ минималӣ аст.

Азбаски моменти инерцияи системаи нобурдаи нуқтаҳои материалӣ нисбат ба нуқтаи $M(x, y)$ ба

$$I(x, y) = \sum_{k=1}^{n} m_k [(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2] \qquad (14.88)$$

баробар аст, пас масъала ба ҷустуҷӯи нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ меорад, ки дар он функцияи (14.88) ба қимати минималиаш соҳиб мешавад.

Барои ҷустуҷӯи нуқтаҳои экстремуми имконпазири функцияи (14.88) муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 2\sum_{k=1}^{n} m_k(x - a_k) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial y} = 2\sum_{k=1}^{n} m_k(y - b_k) = 0. \qquad (14.89)$$

Аз муодилаҳои (14.89) **чунин хулоса мебарояд:** нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ ки координатаҳояш ба

$$x_0 = \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y_0 = \frac{m_1b_1 + m_2b_2 + \ldots + m_nb_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (14.90)$$

баробаранд, нуқтаи ягонаи экстремуми имконпазири функцияи (14.88) мебошад.

Азбаски

$$a_{11} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 2\sum_{k=1}^{n} m_k > 0, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = 2\sum_{k=1}^{n} m_k > 0$$

мебошанд, пас $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ аст ва, мувофиқи тасдиқоте, ки дар п. 3 исбот шуд, функцияи (14.88) дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$-и координатаҳояш (14.90) соҳиби минимуми локалӣ мешавад. $I(x, y)$ дар ин нуқта қимати минималӣ дорад. Ба ин бовар кардан осон аст. Дар хотима қайд мекунем, ки формулаҳои (14.90) координатаҳои маркази вазнинии системаи муоинашавандаи нуқтаҳои материалиро муайян менамоянд.

§ 7. Методи градиентии ҷустуҷӯи экстремуми функцияҳои хеле барҷаста

Дар ин параграф назарияи дар амалия васеъ татбиқшавандаи методи градиентии ҷустуҷӯи экстремуми функцияҳои хеле барҷаста баён карда мешавад.

Идеяи ин метод аз ҳад зиёд содда мебошад. Барои тақрибан ҷустуҷӯ кардани нуқтаҳои минимуми функцияи m-тағйирёбанда аз чунин далел истифода карда мешавад: градиенти ин функция самте дорад, ки он ба самти афзуншавии калонтарини ин функция мувофиқ аст. Пас, вектор $-\operatorname{grad} f(x_0)$ дар ҳар як нуқтаи $x_0 = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ ба самти камшавии калонтарини функцияи $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ равон аст. Ин ба ҷумлаи зерин асос мешавад: агар мо аз ягон наздикшавии нулии $x_0 = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ сар карда, мувофиқи формулаи рекуррентии

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \operatorname{grad} f(x_k)$$

наздикшавии k-уми $x_k = (\overset{k}{x}_1, \overset{k}{x}_2, \ldots, \overset{k}{x}_m)$-ро созем, онгоҳ ҳангоми ба қадри кифоя хурд будани α-и мусбат пайдарпаии нуқтаҳои $\{x_k\}$ ба нуқтаи минимуми функцияи $f(x)$ дучор меоянд.

Ин параграф ба татбиқи ҳамин идеяи содда бахшида шудааст.

1. Маҷмӯъҳои барҷаста ва функцияҳои барҷаста. Бигзор $x_1 = (\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \ldots, \overset{1}{x}_m)$ ва $x_2 = (\overset{2}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{2}{x}_m)$ ду нуқтаи фазои евклидии m-ченакаи E^m бошанд, ки мо онҳоро чун векторҳо дар E^m бо координатаҳои мувофиқ муоина карда метавонем.

Маҷмӯи нуқтаҳои фазои E^m-и намудаш $x_1 + t(x_2 - x_1)$-ро, ки дар ин ҷо t адади дилхоҳи сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ мебошад, п о р ч а и пайвасткунандаи нуқтаҳои x_1 ва x_2 меномем.

Порчаи пайвасткунандаи нуқтаҳои x_1 ва x_2-ро бо символи $\overline{x_1 x_2}$ ишорат менамоем.

Т а ъ р и ф и 1. *Маҷмӯи Q-и нуқтаҳои фазои E^m маҷмӯи барҷаста номида мешавад, агар он ба хосияти зерин соҳиб бошад: ду нуқтаи x_1 ва x_2-и мутааллиқи маҷмӯи Q чи хеле ки бошанд, порчаи пайвасткунандаи онҳо $\overline{x_1 x_2}$ ҳам ба ҳамин маҷмӯъ мутааллиқ аст.*

Кураи m-ченака (кушода ё сарбаста) ё нимфазои $x_m \geqslant 0$ (яъне маҷмӯи ҳама нуқтаҳои $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-и фазои E^m, ки координатаҳои m-умаш шарти $x_m \geqslant 0$-ро қаноат менамоянд) мисолҳои маҷмӯи барҷастаи фазои E^m мебошанд.

Пуркунандаи кураи m-ченака ё кураи m-ченака, ки аз он ақаллан як нуқта хориҷ карда шудааст, мисоли маҷмӯи ғайрибарҷастаи Q мебошад.

Фарз мекунем, ки Q ягон маҷмӯи нуқтаҳои фазои E^m ва x нуқтаи қайдшудаи дилхоҳи ин фазо мебошад.

Ҳудуди поёнии сарҳади масофаи байни нуқтаи x ва нуқтаҳои гуногуни ин маҷмӯъро масофаи байни нуқтаи x ва маҷмӯи Q меномем.

Масофаи байни нуқтаи x ва маҷмӯи Q-ро бо символи $\rho(x, Q)$ ишорат менамоем.

Инак, мувофиқи таъриф

$$\rho(x, Q) = \inf_{y \in Q} \rho(x, y).$$

Барои маҷмӯи дилхоҳи Q-и фазои E^m ва нуқтаи дилхоҳи x-и ин фазо масофаи $\rho(x, Q)$* вуҷуд дорад. Аз ҷумла, агар нуқтаи x ба маҷмӯи Q мутааллиқ бошад, онгоҳ $\rho(x, Q) = 0$ аст.

Аммо дар маҷмӯи Q на ҳама вақт чунин нуқтаи y вуҷуд дорад, ки $\rho(x, y) = \rho(x, Q)$ бошад.

Масалан, агар маҷмӯи Q кураи m-ченакаи кушода ва x нуқтаи E^m-ро, ки дар беруни ин кура воқеъ аст, ифода намояд, онгоҳ дар чунин маҷмӯи Q чунин нуқтаи y вуҷуд надорад, ки $\rho(x, y) = \rho(x, Q)$ шавад (чунки барои ҳама нуқтаҳои y-и кураи кушодаи Q нобаробарии $\rho(x, y) > \rho(x, Q)$ дуруст аст).

Агар дар маҷмӯи Q чунин нуқтаи y мавҷуд бошад, ки $\rho(x, y) = \rho(x, Q)$ шавад, онгоҳ ин нуқтаи y проексияи нуқтаи x ба маҷмӯи Q номида мешавад.

Проексияи нуқтаи x ба маҷмӯи Q-ро бо символи $P_Q(x)$ ишорат менамоем.

Агар нуқтаи x ба маҷмӯи Q мутааллиқ бошад, онгоҳ $P_Q(x) = x$ аст.

Инак, проексияи $P_Q(x)$-и нуқтаи x ба маҷмӯи Q бо муносибати

$$\rho(x, P_Q(x)) = \rho(x, Q) = \inf_{y \in Q} \rho(x, y)$$

муайян карда мешавад.

Якчанд проексияи нуқтаи x ба маҷмӯи Q вуҷуд доштанаш мумкин аст. Масалан, агар Q сфераи m-ченакаи марказаш нуқтаи x бошад, онгоҳ нуқтаи дилхоҳи Q проексияи нуқтаи x ба маҷмӯи Q мебошад.

Бо вуҷуди он, леммаи зерин дуруст аст.

Леммаи 1. *Агар маҷмӯи Q-и фазои E^m маҷмӯи барҷаста ва сарбаста бошад ва x нуқтаи дилхоҳи E^m бошад, онгоҳ проексияи нуқтаи x ба маҷмӯи Q вуҷуд дорад ва он ягона мебошад.*

Исбот. Аввал мавҷуд будани ақаллан якто проексияи нуқтаи x ба маҷмӯи Q-ро исбот мекунем. Масофаи байни нуқ-

---

* Чунки маҷмӯи $\rho(x, y)$ барои y-ҳои гуногуни мутааллиқи Q доимо аз поён (масалан, бо адади нуль) маҳдуд аст.

таи x ва маҷмӯи Q-ро бо $\rho(x, Q)$ ишорат мекунем. Мувофиқи таърифи $\rho(x, Q)$ чун ҳудуди поёнии саҳеҳи $\inf\limits_{y \in Q} \rho(x, y)$ чунин пайдарпани $\{y_n\}$-и нуқтаҳои маҷмӯи Q ёфт мешавад, ки $\rho(x, y_n) \to \rho(x, Q)$.

Мувофиқи таърифи лимити пайдарпаии ададӣ барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ ҳама элементҳои y_n, аз ягон номер сар карда, муносибати

$$\rho(x, Q) - \varepsilon < \rho(x, y_n) < \rho(x, Q) + \varepsilon$$

-ро қаноат менамоянд. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\{y_n\}$-и нуқтаҳои фазои E^m ба ҳар ҳолат пайдарпаии маҳдуд мебошад ва, бинобар ин, дар асоси теоремаи Больцано-Вейерштрасс (ба п. 2 § 2 боби 14 ниг.), аз ин пайдарпай тахтпайдарпаии наздикшавандаи $\{y_k\}_n$-ро (дар ин ҷо $n = 1, 2, \ldots$) чудо кардан мумкин аст. Лимити пайдарпаии $\{y_k\}_n$-ро бо y ишорат менамоем. Дар асоси сарбаста будани маҷмӯи Q нуқтаи y ба ин маҷмӯъ тааллуқ дорад. Акнун исбот кардан лозим аст, ки

$$\rho(x, y) = \rho(x, Q) = \lim_{n \to \infty} \rho(x, y_k)_n.$$

Дар асоси нобаробариҳои секунҷа $\rho(x, y_k)_n \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, y_k)_n$ ва $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, y_k)_n + \rho(y_k, y)_n$ муносибати $|\rho(x, y_k)_n - \rho(x, y)| \leqslant \rho(y, y_k)_n$ дуруст аст. Аз ин муносибат ва аз наздикшавандагии тахтпайдарпаии $\{y_k\}_n$ ба y натиҷа мебарояд, ки $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, y_k)_n = \rho(x, y)$ яъне $\rho(x, Q) = \rho(x, y)$.

Бо ҳамин исботи мавҷуд будани ақаллан якто проексияи нуқтаи x ба маҷмӯи Q ба итмом расид.

Акнун исбот мекунем, ки ф а қ а т я к т о проексияи нуқтаи x ба маҷмӯи Q вуҷуд дорад. Фарз мекунем, ки дуто проексияи гуногуни y_1 ва y_2-и нуқтаи x ба маҷмӯи Q вуҷуд дорад. Азбаски маҷмӯи Q маҷмӯи барҷаста мебошад, пас порчаи $\overline{y_1 y_2}$, ки нуқтаҳои y_1 ва y_2-ро пайваст мекунад, ба маҷмӯи Q тааллуқ дорад. Аз ҷумла, миёнаҷои порчаи номбурда $\dfrac{y_1 + y_2}{2}$ ба маҷмӯи Q таалуқ дорад. *Масофаи* $\rho\left(x, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$*-и байни нуқтаи* x *ва миёнаҷои номбурдаи порчаи* $\overline{y_1 y_2}$ *аз масофаи* $\rho(x, y_1) = \rho(x, y_2)$ *қатъиян хурд мебошад.*

Муоинаи мавриди тривиалиро, ки $\frac{y_1+y_2}{2}=x$ аст, қатъи назар мекунем. Дар ин маврид $\rho(x, \frac{y_1+y_2}{2})=0$ аст, ва дар он ҳангом $\rho(x, y_1)=\rho(x, y_2)>0$ аст, чунки дар мавриди баръакс (яъне дар мавриди $\rho(x, y_1)=\rho(x, y_2)=0$ будан) ҳар ду нуктаи y_1 ва y_2 бо x ҳамчоя мешуданд ва гуногун шуда наметавонистанд. Инак, дар мавриди тривиалии $\frac{y_1+y_2}{2}=x$ нобаробарии

$$\rho(x, \frac{y_1+y_2}{2})<\rho(x, y_1)=\rho(x, y_2) \qquad (14.91)$$

маълум аст.

Акнун нобаробарии (14.91)-ро дар мавриди $\frac{y_1+y_2}{2}\neq x$ будан исбот мекунем.

Хосияти ҳосили зарби скалярии ду вектори фазои E^m*-ро истифода карда, муносибати зеринро ҳосил менамоем:

$$\rho^2(x, \frac{y_1+y_2}{2})=(\frac{y_1+y_2}{2}-x, \frac{y_1+y_2}{2}-x)=$$

$$=(\frac{y_1-x}{2}+\frac{y_2-x}{2}, \frac{y_1-x}{2}+\frac{y_2-x}{2})=$$

$$=\frac{1}{4}[(y_1-x, y_1-x)+2(y_1-x, y_2-x)+(y_2-x, y_2-x)]. \qquad (14.92)$$

Акнун ба дурустии нобаробарии қатъии

$$|(y_1-x, y_2-x|<\sqrt{(y_1-x, y_1-x)}\cdot\sqrt{(y_2-x, y_2-x} \qquad (14.93)$$

боварӣ ҳосил мекунем. Барои ин аз ҷумлаи зерин истифода мекунем: барои векторҳои дилхоҳи $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$-и фазои E^m, ки ба якдигар коллинеарӣ нестанд (яъне чунинанд, ки $\mathbf{a}\neq\lambda\mathbf{b}$ на барои якто λ-и ҳақиқӣ), нобаробарии қатъии Коши—Буняковский**

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|<\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}, \mathbf{b})}$$

---

* Ба, масалан, § 1 боби 4-уми китоби В. А. Ильин ва Э. Г. Позняк «Линейная алгебра», «Наука», 1978, нигаред.

** Вокеан, ҳангоми $\mathbf{a}\neq\lambda\mathbf{b}$ будан вектори $(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b})$ вектори нулӣ намебошад. Бинобар ин сеаъзогии квадратии $(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}, \mathbf{a}-\lambda\mathbf{b})=(\mathbf{a}, \mathbf{a})-2\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})+\lambda^2(\mathbf{b}, \mathbf{b})$ қатъиян мусбат аст ва дискриминанташ $4[(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2-(\mathbf{a}, \mathbf{a})\times(\mathbf{b}, \mathbf{b})]$ қатъиян манфӣ мебошад.

дуруст аст. Ин чунин маъно дорад, ки барои исботи нобаробарии (14.93) ба коллинеарӣ набудани векторҳои $y_1 - x$ ва $y_2 - x$ боварӣ ҳосил кардан кифоя аст, яъне бояд бовар кунем, ки барои якто λ-и ҳақиқӣ баробарии

$$y_1 - x = \lambda(y_2 - x) \tag{14.94}$$

дуруст буда наметавонад.

Агар баробарии (14.94) барои чунин λ, ки барояш $|\lambda| \neq 1$ аст, дуруст мебуд, онгоҳ баробарии $\rho(y_1, x) = \rho(y_2, x)$ имконпазир мебуд.

Барои $\lambda = +1$ дуруст будани баробарии (14.94) ба мавриди гуногун будани нуқтаҳои y_1 ва y_2 мухолиф мешуд.

Ниҳоят, барои $\lambda = -1$ дуруст будани баробарии (14.94) чунин маъно медошт, ки $\frac{y_1 + y_2}{2} = x$ аст, ки мо ин мавридро қатъи назар карда будем.

Инак, баробарии (14.94) барои ҳеҷ ягон λ-и ҳақиқӣ дуруст нест, бинобар ин исботи нобаробарии (14.93) ба итмом расид.

Баробарии (14.92)-ро бо нобаробарии (14.93) муқоиса карда, ифодаи зеринро ҳосил менамоем:

$$\rho^2\left(x, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) <$$

$$< \frac{1}{4}[(y_1 - x, y_1 - x) + 2\sqrt{(y_1 - x, y_1 - x)(y_2 - x, y_2 - x)} +$$

$$+ (y_2 - x, y_2 - x)] = \frac{1}{4}[\sqrt{(y_1 - x, y_1 - x)} + \sqrt{(y_2 - x, y_2 - x)}]^2 =$$

$$= \frac{1}{4}[\rho(x, y_1) + \rho(x, y_2)]^2 = \rho^2(x, y_1) = \rho^2(x, y_2).$$

Бо ҳамин исботи нобаробарии (14.91) ба итмом расид. Лекин ин нобаробарӣ чунин маъно дорад, ки дар маҷмӯи Q нуқтаи $\frac{y_1 + y_2}{2}$ ёфт шудааст, ки он назар ба нуқтаҳои y_1 ва y_2 ба x наздиктар аст ва ин ба ҷумлаи зерин мухолиф аст: ҳар яки нуқтаҳои y_1 ва y_2 проексияи нуқтаи x ба маҷмӯи Q мебошанд, яъне ҳудуди поёнии сарҳади масофаи $\rho(x, y)$ барои y-ҳои гуногуни мутааллиқи Q мебошад.

Мухолифоти пайдошуда тасдиқ мекунад, ки фарзияти мавҷуд будани ду проексияи гуногуни y_1 ва y_2-и нуқтаи x ба маҷмӯи Q хато мебошад.

Исботи леммаи 1 пурра ба итмом расид.

Акнун таърифи функцияи барҷастаро баён мекунем.

Таърифи 2. *Функцияи* $f(x)$, *ки дар маҷмӯи барҷастаи* Q-*и фазои* E^m *дода шудааст, функцияи дар ҳамин маҷмӯъ аз поён барҷаста ё функцияи фақат барҷаста номида мешавад, агар барои ду нуқтаи дилхоҳи* x_1 *ва* x_2-*и маҷмӯи* Q *ва барои адади ҳақиқии дилхоҳи* t-*и сегменти* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *нобаробарии*

$$f[x_2 = t(x_2 - x_1)] \leqslant f(x_1) + t[f(x_2) - f(x_1)] \qquad (14.95)$$

дуруст бошад.

Таърифи 3. *Функцияи* $f(x)$, *ки дар маҷмӯи барҷастаи* Q-*и фазои* E^m *дода шудааст, функцияи дар ҳамин маҷмӯъ қатъиян барҷаста номида мешавад, агар барои ду нуқтаи дилхоҳи* x_1 *ва* x_2-*и маҷмӯи* Q *ва барои адади ҳақиқии дилхоҳи* t-*и интервали* $0 < t < 1$ *нобаробарии қатъии*

$$f[x_2 + t(x_2 - x_1)] < f(x_1) + t[f(x_2) - f(x_1)] \qquad (14.96)$$

дуруст бошад.

Фаҳмост, ки ҳаргуна функцияи дар маҷмӯи Q қатъиян барҷастаи $f(x)$ дар ҳамин маҷмӯъ барҷаста мебошад.

Шарти кифоягии барҷаста (мувофиқан қатъиян барҷаста) будани функцияи дар маҷмӯи барҷастаи Q ду маротиба дифференсиронидашавандаи $f(x)$-ро муқаррар кардан осон аст.

Минбаъд фарз мекунем, ки маҷмӯи Q *ақаллан якто нуқтаи дарунӣ дорад.*

Лемма 2. *Бигзор функцияи* $f(x)$ *дар маҷмӯи барҷастаи* Q *дода шудааст ва ду маротиба дифференсиронидашаванда мебошад. Онгоҳ барои он, ки ин функция дар маҷмӯи* Q *барҷаста (қатъиян барҷаста) бошад, кифоя аст, ки дифференциали дуюм* d^2f-*и ин функция дар ҳама нуқтаҳои* Q *шакли квадратии ба таври мусбат муайяни квазӣ (қатъиян ба таври мусбат муайян) бошад.*

Исбот. Бигзор x_1 ва x_2 ду нуқтаи қайдшудаи дилхоҳи маҷмӯи Q бошанд. Функцияи зерини дорои якто тағьирьёбандаи новобастаи t-ро дар сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ муоина мекунем:

$$F(t) = f[x_1 + t(x_2 - x_1)] - f(x_1) - t[f(x_2) - f(x_1)]. \qquad (14.97)$$

Ба хотир меорем: дифференциали дуюм d^2f-и функцияи $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-и дорои m-то тағьирьёбандаҳои новобастаи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ дар нуқтаи додашудаи $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ба ифодаи зерин баробар аст:*

$$d^2f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_k. \qquad (14.98)$$

* Ба п. 2 § 5 боби 14 ниг.

Функцияи (14.97)-ро мувофиқи қоидаи дифференцирони функцияи мураккаб аз рӯи t ду маротиба дифференцронида, чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} [x_1 + t(x_2 - x_1)](\overset{2}{x_i} - \overset{1}{x_i})(\overset{2}{x_k} - \overset{1}{x_k}), \quad (14.99)$$

дар ин ҷо $(\overset{1}{x_1}, \overset{1}{x_2}, \ldots, \overset{1}{x_m})$ ва $(\overset{2}{x_1}, \overset{2}{x_2}, \ldots, \overset{2}{x_m})$ мувофикан координатаҳои нуқтаҳои x_1 ва x_2.

Ифодаҳои (14.98) ва (14.99)-ро муқоиса карда, мо ба дурустии баробарии

$$F''(t) = d^2 f [x_1 + t(x_2 - x_1)] \quad (14.100)$$

боварӣ ҳосил мекунем (дар ифодаи $d^2 f$ афзоиши Δx_i ба $\overset{2}{x_i} - \overset{1}{x_i}$ баробар карда гирифта шудааст).

Барои муайянӣ, муҳокимаронии минбаъдаро барои мавриде, ки дифференциали дуюми $d^2 f$ дар ҳама нуқтаҳои Q шакли квадратии ба таври мусбат муайяни квазӣ мебошад, идома медиҳем. Дар ин мавриди барои ҳама қиматҳои t-и сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ қисми рости (14.100) (ва, бинобар ин, қисми чапаш ҳам) ғайриманфист, яъне барои ҳама қиматҳои t-и сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$F''(t) \geqslant 0 \quad (14.101)$$

мебошад. Дар асоси таърифи 2 ва муносибати (14.97) исбот кардан кифоя аст, ки барои ҳама қиматҳои t-и сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ нобаробарии

$$F(t) \leqslant 0 \quad (14.102)$$

дуруст аст.

Барои исботи нобаробарии (14.102) муносибати (14.101) ва баробариҳои бо осонӣ санҷидашавандаи

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 0$$

-ро истифода мекунем.

Фарз мекунем, ки дар дохили сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ ақаллан якто нуқтаи t вуҷуд дорад, ки дар он $F(t) > 0$ мебошад. Онгоҳ функцияи $F(t)$ дар ягон нуқтаи дарунии t_0-и сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ ба қимати дар ҳамин сегмент максималиаш соҳиб мешавад, дар айни ҳол $F(t_0) > 0$. Функцияи $F(t)$ дар ҳамин нуқтаи t_0 соҳиби максимуми локалӣ мебошад ва, бинобар ин, $F'(t_0) = 0$ аст. Лекин аз нобаробарии (14.101) натиҷа мебарояд, ки ҳосилаи $F'(t)$ дар ҳамаи сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ ва, бинобар ин, дар сегменти $t_0 \leqslant t \leqslant 1$ кам намешавад. Аз ин ҷо ва аз шарти $F'(t_0) = 0$ натиҷа мебарояд, ки ҳосилаи $F'(t)$ дар ҳама ҷои сегменти $t_0 \leqslant t \leqslant 1$

ғайриманфист ва, аз ҳамин сабаб, функцияи $F(t)$ дар ҳамин сегмент кам намешавад. Ин моро ба нобаробарии

$$F(1) \geqslant F(t_0) > 0$$

меорад, ки он ба муносибати дуюми (14.103) мухолиф аст.

Мухолифоти пайдошуда исбот мекунад, ки фарзияти дар сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ мавҷуд будани ақаллан якто нуқтаи t, ки дар он $F(t) > 0$ аст, хато мебошад, яъне он дар ҳама ҷои сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ дуруст будани нобаробарии (14.102)-ро исбот мекунад.

Бо ҳамин қисми якуми лемма (доир ба барҷастагии $f(x)$ ҳангоми d^2f шакли квадратии ба таври мусбат муайяни квазӣ будан) исбот шуд.

Қисми дуюми лемма (доир ба қатъиян барҷаста будани $f(x)$ дар мавриди d^2f шакли квадратии ба таври қатъиян мусбат муайян будан) ҳамин тавр исбот карда мешавад. Дар асоси нобаробарии (14.101), ки ин дафъа бо аломати $>$ дуруст аст, ва баробариҳои (14.103) ва фарзияти: дар дохили сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ ақаллан якто нуқтаи t вуҷуд дорад, ки дар он $F(t) \geqslant 0$ мебошад, мо ба хулосае меоем, ки $F(t)$ дар дохили сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ нуқтаи максимуми локалии t_0 дорад, дар айни ҳол $F(t_0) \geqslant 0$. Лекин, онгоҳ, азбаски $F'(t_0) = 0$ аст, аз (14.101) чунин ифодаро ҳосил мекунем: дар ҳама ҷои ниминтервали $t_0 < t \leqslant 1$ $F'(t) > 0$ аст ва ин чунин маъно дорад, ки $F(1) > F(t_0) \geqslant 0$ аст.

Мо боз доир ба муносибати дуюми (14.103) мухолифот пайдо кардем; он исбот мекунад, ки дар ҳама ҷои интервали $0 < t < 1$ $F(t) < 0$ аст, яъне дар маҷмӯи Q қатъиян барҷаста будани $f(x)$-ро исбот мекунад.

Леммаи 2 пурра исбот шуд.

Леммаи исботшуда ба ақидаи муоинаи класси махдуди функцияҳои дар маҷмӯи барҷастаи Q барҷаста ва дар ҳамин маҷмӯъ ду маротиба дифференсиронидашаванда меорад.

Таърифи 4. Функцияи дар маҷмӯи барҷастаи Q ду маротиба дифференсиронидашавандаи $f(x)$ функцияи дар ҳамин маҷмӯъ хеле барҷаста номида мешавад, агар чунин ду доимии мусбати k_1 ва k_2 мавҷуд бошанд, ки дифференциали дуюм d^2f-и ин функция, ки бо муносибати (14.98) *муайян мешавад, дар ҳама нуқтаҳои x-и маҷмӯи Q нобаробариҳои*

$$k_1 \cdot (\Delta x)^2 \leqslant d^2f \leqslant k_2 \cdot (\Delta x)^2 \qquad (14.104)$$

-ро қаноат намояд. (Дар ин нобаробариҳо вектори координатаҳояш $(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$ бо Δx ишорат шудааст ва символи $(\Delta x)^2$ квадрати скалярии ин векторро ифода мекунад.)

Аз нобаробарии чапи (14.104) якбора натиҷа мебарояд, ки дифференциали дуюми функцияи хеле барҷаста функцияи дар ҳама нуқтаҳои маҷмӯи Q ба таври қатъиян мусбат муайяншу-

даро ифода менамояд ва, бинобар ин, (дар асоси леммаи 2) *функцияи дар маҷмӯи Q хеле барҷаста дар ҳамин маҷмӯъ қатъиян барҷаста мебошад.*

Дар баробари он класси функцияҳои хеле барҷаста ба қадри кифоя васеъ мебошанд ва дар масъалаҳои амалӣ татбиқи васеъ доранд ва мо ҳангоми баёни назарияи методи градиентии ҷустуҷӯи минимум ба ин класс маҳдуд мешавем.

2. Мавҷудияти минимуми функцияҳои хеле барҷаста ва ягонагии минимуми функцияҳои қатъиян барҷаста. Бигзор функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи барҷастаи Q муайян бошад. Ин функция дар нуқтаи x_0-и маҷмӯи Q минимуми локалӣ дорад, агар чунин δ-атрофи ин нуқтаи x_0 мавҷуд бошад, ки қимати $f(x_0)$ (дар ҳама нуқтаҳои буриши δ-атрофи x_0 ва маҷмӯи Q) аз байни қиматҳои $f(x)$-и ин функция қимати хурдтарин бошад.

Дар ин таъриф мафҳуми минимуми локалӣ нуқтаҳои минимуми қаторӣ функцияи $f(x)$ дар сарҳади маҷмӯи Q-ро дарбар мегирад.

Ҳамин тариқ, дар ин ҳангом нуқтаҳои минимумро ба нуқтаҳои минимуми локалии дарунӣ (дар мавриде, ки ин нуқтаҳо нуқтаҳои дарунии Q мебошанд) ва нуқтаҳои минимуми локалии қаторӣ (дар мавриде, ки ин нуқтаҳо нуқтаҳои сарҳадии Q мебошанд) ҷудо кардан мумкин аст.

Барои омӯзиши масъалаи мавҷудият ва ягонагии нуқтаҳои минимуми локалӣ ба мо теоремаи ёрирасони зерин лозим мешавад.

Л е м м а и 3. *Бигзор дар маҷмӯи барҷастаи Q функцияи барҷастаи дифференсиронидашавандаи $f(x)$ дода шуда бошад. Барои он, ки ин функция дар нуқтаи x_0-и маҷмӯи Q соҳиби минимуми локалӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои вектори дилхоҳи Δx, ки барояш нуқтаи $x_0 + \Delta x$ ба маҷмӯи Q тааллуқ дорад, нобаробарии**

$$(\operatorname{grad} f(x_0),\ \Delta x) \geqslant 0 \qquad (14.105)$$

дуруст бошад.

И с б о т. 1) Ш а р т и з а р у р ӣ. Дар асоси тасдиқоти дар п. 6 § 4 боби 14 исботшуда қисми чапи (14.105) ба ҳосили зарби ҳосилаи функцияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 (ба самти вектори Δx) бар дарозӣ $|\Delta x|$-и ин вектор баробар аст:

$$(\operatorname{grad} f(x_0),\ \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial e}(x_0)\,|\Delta x|, \qquad (14.106)$$

дар ин ҷо $e = \dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}$ — вектори воҳидӣ ба самти Δx.

---

* Дар нобаробарии (14.105) ҳосили зарби скалярии векторҳои $\operatorname{grad} f(x_0)$ ва Δx гирифта мешавад. Таърифи $\operatorname{grad} f(x_0)$ дар п. 6 § 4 боби 14 дода шудааст.

Азбаски x_0 нуқтаи минимуми локалии функцияи $f(x)$ мебошад, пас ҳосилаи $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ ба самти дилхоҳи $e = \frac{\Delta x}{|\Delta x|}$ ғайриманфист (аниқтараш, агар x_0 нуқтаи экстремуми локалии дарунӣ бошад, ба нуль баробар аст, ва агар x_0 нуқтаи экстремуми локалии канорӣ бошад, ғайриманфӣ аст).

Инак, қисми рости (14.106) (ва, бинобар ин, қисми чапи (14.105) ҳам) ғайриманфист. Шарти зарурӣ исбот шуд.

2) Ш а р т и к и ф о я г ӣ. Бигзор барои вектори дилхоҳи Δx, ки барояш $x_0 + \Delta x$ ба Q тааллуқ дорад, нобаробарии (14.105) дуруст бошад. Исбот мекунем, ки нуқтаи x_0 нуқтаи минимуми локалии функцияи $f(x)$ мебошад.

Азбаски функцияи $f(x)$, мувофиқи шарт, дар маҷмӯи Q функцияи барҷаста мебошад, пас барои ду нуқтаи дилхоҳи x_1 ва x_2-и ин маҷмӯъ ва адади дилхоҳи t-и сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ нобаробарии (14.95) дуруст аст. Дар ин нобаробарӣ $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + \Delta x$ фарз карда, ин нобаробариро ба намуди

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant \frac{f(x_0 + t\,\Delta x) - f(x_0)}{t} \qquad (14.107)$$

навиштан мумкин аст. x_0 ва Δx-ро қайдшуда пиндошта, нобаробарии (14.107)-ро ҳангоми $t \to 0 + 0$ лимит мегирем. Мувофиқи таърифи ҳосила ба самт (ба п. 6 § 4 боби 14 ниг.) лимити қисми рости (14.107) ҳангоми $t \to 0 + 0$ саҳеҳан ба ҳосили зарби ифодаи қисми рости (14.106) баробар аст. Бинобар ин дар асоси муносибатҳои (14.105) ва (14.106) ин лимит ғайриманфист. Қисми чапи (14.107) аз t вобаста набуданашро ба эътибор гирифта, аз лимити нобаробарии (14.107) ҳангоми $t \to 0 + 0$.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant 0$$

-ро ҳосил менамоем. Нобаробарии охирин барои вектори дилхоҳи Δx, ки барояш нуқтаи $x_0 + \Delta x$ ба Q тааллуқ дорад, дуруст мебошад. Ҳамин нобаробарӣ исбот мекунад, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 соҳиби минимуми локалӣ мебошад. Шарти кифоягӣ исбот шуд.

Леммаи 3 пурра исбот шуд.

Қ а й д и 1. Аз ин исбот маълум мешавад, ки агар нуқтаи x_0 нуқтаи д а р у н и и маҷмӯи Q бошад, яъне агар сухан дар бораи минимуми локалии дарунӣ равад, дар баёни леммаи 3 аломати $\geqslant$-и нобаробарии (14.105)-ро ба аломати $=$ иваз кардан мумкин аст.

Қ а й д и 2. Ҳангоми исботи шарти зарурии леммаи 3 мо аз талаботи барҷастагии функцияи $f(x)$ истифода накардем. Бинобар ин исботи шарти зарурӣ бе талаботи барҷастагии функцияи

$f(x)$ иҷро мешавад. Ба ибораи дигар, т а с д и қ о т и зерин дуруст аст: *агар функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи барҷастаи Q дифференсиронидашаванда бошад ва дар нуқтаи дарунӣ (сарҳадӣ) x_0-и ин маҷмӯъ соҳиби минимуми локалӣ бошад, онгоҳ барои вектори дилхоҳи Δx, ки барояш нуқтаи $x_0 + \Delta x$ ба Q мутааллиқ аст, нобаробарии*

$$(\operatorname{grad} f(x_0), \Delta x) = 0 \quad [(\operatorname{grad} f(x_0), \Delta x) \geqslant 0]$$

дуруст мебошад.

Акнун масъалаи ягонагӣ ва маҳдудияти нуқтаҳои минимуми локалиро меомӯзем.

Т е о р е м а (д а р б о р а и я г о н а г и и м и н и м у м и л о к а л и и ф у н к ц и я и қ а т ъ и я н б а р ҷ а с т а). Агар функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи барҷастаи Q дифференсиронидашаванда ва қатъиян барҷаста бошад, онгоҳ он фақат дар як нуқтаи ин маҷмӯъ соҳиби минимуми локалӣ мешавад.

И с б о т. Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар ду нуқтаҳои г у н о г у н и x_1 ва x_2-и маҷмӯи Q соҳиби минимуми локалӣ мебошад. Онгоҳ шарти барҷастагӣ (14.95) барои нуқтаҳои x_1 ва x_2-ро ба намуди

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant \frac{f[x_1 + t(x_2 - x_1)] - f(x_1)}{t} \tag{14.108}$$

навиштан мумкин аст (дар ин ҷо t — адади дилхоҳи сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$).

Мо дар муносибати (14.108) роли нуқтаҳои x_1 ва x_2-ро иваз карда, нобаробарии

$$f(x_1) - f(x_2) \geqslant \frac{f[x_2 + t(x_1 - x_2)] - f(x_2)}{t} \tag{14.109}$$

-ро ҳосил менамоем.

Лимити қисми рости (14.108) (мувофиқан лимити қисми рости (14.109)) ҳангоми $t \to 0 + 0$ ҳосилаи функцияи $f(x)$ ба самти вектори $x_2 - x_1$ (мувофиқан вектори $x_1 - x_2$)-ро, ки дар нуқтаи x_1 (мувофиқан дар нуқтаи x_2)-и ба $|x_2 - x_1|$ зарб кардашуда гирифта шудааст, ифода мекунад. Азбаски ҳар ду нуқтаҳои x_1 ва x_2 нуқтаҳои минимуми локалӣ мебошанд, пас ҳар ду ҳосилаҳои номбурда (ба самти векторҳо) ғайриманфӣ мебошанд, яъне лимитҳои қисмҳои рости (14.108) ва (14.109) ҳангоми $t \to 0 + 0$ ғайриманфианд.

Ҳамин тариқ, нобаробариҳои (14.108) ва (14.109)-ро ҳангоми $t \to 0 + 0$ лимит гирифта,

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0, \quad f(x_1) - f(x_2) \geqslant 0$$

-ро ҳосил менамоем. Муқоисаи нобаробариҳои охирин моро ба хулосае меоранд, ки $f(x_1) = f(x_2)$ аст.

Баробарии $f(x_1) = f(x_2)$-ро истифода карда, мо аз шарти қатъиян барҷаста будани (14.96) барои ҳ а м а t-ҳои интервали $0 < t < 1$ нобаробарии

$$f[x_1 + t(x_2 - x_1)] < f(x_1) \qquad (14.110)$$

-ро ҳосил менамоем.

Нобаробарии (14.110) ба ҷумлаи зерин мухолиф аст: функцияи $f(x)$ дар нуқтаи x_1 ба минимуми локалӣ соҳиб аст (функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x_1 + t(x_2 - x_1)$-и ҳангоми хурд будани t ба нуқтаи x_1 ҳар қадар наздик қимати аз қимати $f(x_1)$ хурдро соҳиб аст).

Мухолифоти пайдошуда исбот мекунад, ки фарзияти функцияи $f(x)$ дар ду нуқтаи гуногуни маҷмӯи Q минимуми локалӣ дорад, хато мебошад. Теорема исбот шуд.

*Т е о р е м а (д а р б о р а и м а в ҷ у д и я т и м и н и м у м и л о к а л и и ф у н к ц и я ҳ о и х е л е б а р ҷ а с т а). Агар функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи барҷастаи сарбастаи Q функцияи хеле барҷаста бошад, онгоҳ дар ин функция дар маҷмӯи Q нуқтаи x_0-и минимуми локалӣ вуҷуд дорад.**

И с б о т. Аввал қайд мекунем, ки теорема барои мавриде, ки маҷмӯи сарбастаи барҷастаи Q, ғайр аз он, маҳдуд мебошад, дуруст аст. Онгоҳ мувофиқи теоремаи дуюми Вейерштрасс (ба теоремаи 14.7 ниг.) функцияи $f(x)$, ки дар ҳар ҳолат дар маҷмӯи Q бефосила мебошад, дар ягон нуқтаи x_0-и ин маҷмӯъ ба қимати дар Q минималии худ соҳиб мешавад. Нуқтаи номбурдаи x_0 нуқтаи минимуми локалӣ мебошад.

Акнун теоремаро барои мавриде, ки маҷмӯи сарбастаи барҷастаи Q маҳдуд намебошад, исбот кардан лозим аст. Ягон нуқтаи дарунии x_1-и маҷмӯи Q-ро қайд мекунем ва функцияи $f(x)$-ро мувофиқи формулаи Тейлори марказаш нуқтаи x_1 (аъзои боқимонда $R_2(x)$-ро дар шакли Лагранж мегирем**) ҷудо менамоем (ба п. 3 § 5 боби 14 ниг.). Ҷудокунии номбурда ин тавр мешавад:

$$f(x) = f(x_1) + df(x_1) + \frac{1}{2} d^2 f[x_1 + \theta(x - x_1)], \qquad (14.111)$$

дар ин ҷо θ ададест аз интервали $0 < \theta < 1$, чунки нуқтаи

---

* Азбаски функцияи дар маҷмӯи барҷастаи Q хеле барҷастаи $f(x)$ функцияи дар ҳамин маҷмӯъ қатъиян барҷаста мебошад, пас мувофиқи теоремаи пешина нуқтаи x_0 нуқтаи ягонаи минимуми локалӣ хоҳад шуд.

** Мо ба эътибор мегирем, ки функцияи дар маҷмӯи Q хеле барҷастаи $f(x)$ дар ҳамин маҷмӯъ ду маротиба дифференсиронидашаванда мебошад.

$x_1 + \theta(x - x_1)$ ба порчаи пайвасткунандаи нуқтаҳои x_1 ва x мутааллиқ аст.*

Агар вектори $x - x_1$ бо Δx ишорат карда шавад, онгоҳ баробарии

$$df(x_1) = (\operatorname{grad} f(x_1), \Delta x)$$

барои $df(x_1)$ дуруст мешавад. Аз ин баробарӣ натиҷа мебарояд, ки

$$|df(x_1)| \leqslant |\operatorname{grad} f(x_1)| \cdot |\Delta x|. \qquad (14.112)$$

Баъд, нобаробарии чапи таърифи функцияи хеле барҷаста (14.104)-ро истифода карда, мо нобаробарии

$$d^2 f[x_1 + \theta(x - x_1)] \geqslant k_1 \cdot (\Delta x)^2 \qquad (14.113)$$

-ро ҳосил менамоем.

Аз муносибатҳои (14.111) — (14.113) хулоса мебарорем, ки

$$f(x) - f(x_1) \geqslant -|df(x_1)| + \frac{1}{2} d^2 f[x_1 + \theta(x - x_1)] \geqslant$$

$$\geqslant -|\operatorname{grad} f(x_1)| \cdot |\Delta x| + \frac{k_1}{2} |\Delta x|^2,$$

чунки

$$f(x) - f(x_1) \geqslant |\Delta x| \cdot [\frac{k_1}{2} |\Delta x| - |\operatorname{grad} f(x_1)|]. \qquad (14.114)$$

Азбаски нуқтаи x_1 нуқтаи қайдшуда аст ва бузургии $|\operatorname{grad} f(x_1)|$ ягон адади қайдшударо ифода мекунад, пас мо адади мусбати R-ро чунон калон интихоб мекунем, ки ҳангоми $|\Delta x| > R$ будан ифодаи дохили қавсҳои квадратии (14.114) мусбат бошанд.

Ин чунин маъно дорад, ки ҳангоми $|\Delta x| > R$ будан нобаробарии $f(x) > f(x_1)$ дуруст аст, яъне дар ҳама ҷои беруни кураи сарбастаи C_R-и радиусаш R ва марказаш нуқтаи x_1 қимати $f(x)$ аз қимати $f(x_1)$ (дар маркази кураи номбурда) калон мешавад.

Буриши маҷмӯи Q ва кураи номбурдаи C_R-ро бо Q_R ишорат мекунем. Азбаски ҳардуи маҷмӯаҳои Q ва C_R маҷмӯаҳои барҷаста ва сарбаста мебошанд, пас буриши онҳо Q_R ҳам маҷмӯи барҷаста ва сарбаст мебошад. Азбаски, ғайр аз он, маҷмӯи Q_R

---

* Нуқтаи x-и маҷмӯи Q чи хеле ки бошад, порчаи пайвасткунандаи нуқтаҳои x_1 ва x_2 дар асоси барҷастагии маҷмӯи Q ба ҳамин маҷмӯъ тааллуқ дорад. Дар поварақи теоремаи Тейлор (теоремаи 14.15) қайд шуда буд, ки ба сифати атрофи маркази ҷудокунӣ атрофи ситорагии дилхоҳи ин марказ, яъне ҳамаи маҷмӯи Q-ро гирифтан мумкин аст.

маҷмӯи маҳдуд мебошад, пас мувофиқи исботи пешина функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи Q_R соҳиби нуқтаи ягонаи x_0-и минимуми локалӣ мебошад.

Азбаски дар ҳама нуқтаҳои Q, ки дар берунӣ Q_R воқеанд, қимати $f(x)$ аз қимати $f(x_1)$ калон аст (мо инро исбот кардем!), пас ин қиматҳо аз қимати $f(x_0)$ калон мебошанд, яъне нуқтаи x_0 нуқтаи минимуми локалии $f(x)$ ва нуқтаи маҷмӯи Q мебошад. Теорема пурра исбот шуд.

3. Ҷустуҷӯи минимуми функцияи хеле барҷаста. Мо исбот кардем, ки функцияи хеле барҷастаи $f(x)$, ки дар маҷмӯи барҷастаи сарбастаи Q дода шудааст, дар ҳамин маҷмӯъ нуқтаи ягонаи x_0-и минимуми локалиро соҳиб аст.

Ба тартибдиҳӣ ва асосноккунии алгоритме муроҷиат мекунем, ки бо ёрии он ин нуқтаи x_0 ҷустуҷӯ карда мешавад.

Нуқтаи дилхоҳи x_1-и маҷмӯи Q ва адади дилхоҳи α-ро, ки нобаробарии

$$0 < \alpha < 2/k_2 \qquad (14.115)$$

-ро қаноат менамояд, ба қайд мегирем (дар ин ҷо k_2 доимиест аз нобаробарии (14.104), ки хеле барҷаста будани функцияи $f(x)$-ро муайян мекунад.

x_1-ро чун наздикшавии якум асос карда, бо ёрии муносибати рекуррентии

$$x_{k+1} = P_Q(x_k - \alpha \operatorname{grad} f(x_k)), \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (14.116)$$

пайдарпаии итерационии $\{x_k\}$-ро тартиб медиҳем.

Мо дар ҳамин пункт тасдиқоти зеринро исбот мекунем.

Теоремаи асосӣ. Бигзор функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи барҷастаи сарбастаи Q функцияи хеле барҷаста бошад ва бигзор x_1 нуқтаи дилхоҳи маҷмӯи Q бошад. Онгоҳ пайдарпаии итерационии $\{x_k\}$, ки дар қиматҳои дилхоҳи α-и қаноаткунандаи нобаробарии (14.115) *бо муносибати рекуррентии* (14.116) *муайян мешавад, ба нуқтаи x_0-и минимуми локалии функцияи $f(x)$ наздик мешавад.*

Ин теорема алгоритми ҷустуҷӯи минимуми локалии (дарунӣ ё сарҳадии) дилхоҳи функцияи $f(x)$, ки дар маҷмӯи барҷастаи сарбастаи дилхоҳи Q (маҳдуд буданаш ҳатмӣ нест!) функцияи хеле барҷаста мебошад, ифода менамояд.

Пеш аз исботи теоремаи асосӣ чор леммаи зеринро исбот мекунем.

Лемма 4. Агар Q маҷмӯи сарбастаи барҷастаи нуқтаҳои E^m, x нуқтаи қайдшудаи дилхоҳи E^m ва y нуқтаи дилхоҳи Q бошад, онгоҳ

$$(x - P_Q(x), \quad y - P_Q(x)) \leqslant 0 \qquad (14.117)$$

мебошад.

И с б о т. Фарз мекунем, ки нобаробарии (14.117) нодуруст аст. Онгоҳ чунин нуқтаи y-и маҷмӯи Q вуҷуд дорад, ки

$$(x - P_Q(x),\quad y - P_Q(x)) > 0 \tag{14.118}$$

мебошад. Аз (14.118) якбора натиҷа мебарояд, ки нуқтаи y бо $P_Q(x)$ мувофиқ намеояд.

Дар асоси барҷастагии маҷмӯи Q нуқтаи дилхоҳи $z = P_Q(x) + t(y - P_Q(x))$-и порчае, ки нуқтаҳои $P_Q(x)$ ва y-ро пайваст мекунад, ба маҷмӯи Q мутааллиқ аст. Масофаи байни чунин нуқтаи дилхоҳи z ва нуқтаи x-ро ҳисоб мекунем:

$$\rho^2(z, x) = (x - P_Q(x) - t(y - P_Q(x)),\ x - P_Q(x) - t(y - P_Q(x))) = \rho^2(x, P_Q(x)) - 2t(x - P_Q(x),\ y - P_Q(x)) + t^2\rho^2(y, P_Q(x)). \tag{14.119}$$

Азбаски x ва y нуқтаҳои қайдшуда мебошанд ва t адади дилхоҳи сегменти $0 \leqslant t \leqslant 1$ мебошад, пас дар асоси нобаробарии (14.118) чунин t-ро, ки нобаробарии

$$0 < t < \frac{2(x - P_Q(x),\ y - P_Q(x))}{\rho^2(y, P_Q(x))}$$

-ро қаноат менамояд, интихоб кардан мумкин аст. Дар ингуна интихоби t

$$-2t(x - P_Q(x),\ y - P_Q(x)) + t^2\rho^2(y, P_Q(x)) < 0$$

аст ва мо аз (14.119) $\rho^2(z, x) < \rho^2(x, P_Q(x))$-ро ҳосил мекунем. Нобаробарии охирин ба он, ки нуқтаи $P_Q(x)$ проексияи нуқтаи x дар маҷмӯи Q мебошад, мухолиф аст: дар маҷмӯи Q нуқтаи z-е ёфт шуд, ки аз x назар ба $P_Q(x)$ аз x камтар дур воқеъ мебошад. Муҳолифоти пайдошуда исботи леммаро ба итмом мерасонад.

Л е м м а и 5. Бигзор $f(x)$ дар маҷмӯи барҷастаи сарбастаи Q дифференсиронидашаванда ва барҷаста бошад. Агар дар ягон қимати мусбати α проексияи $P_Q(x_0 - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_0))$-и нуқтаи $x_0 - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_0)$ дар маҷмӯи Q бо нуқтаи x_0-и ҳамин маҷмӯъ мувофиқ ояд, онгоҳ функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 соҳиби минимуми локалӣ мебошад.

И с б о т. Леммаи 4-ро истифода карда, нобаробарии (14.117)-ро барои нуқтаҳои $x = x_0 - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_0)$ ва $y = x_0 + \Delta x$ (дар ин ҷо Δx вектори дилхоҳест, ки барояш нуқтаи $y = x_0 + \Delta x$ ба Q мутааллиқ аст) менависем. Дар натиҷа чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$(x_0 - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_0) - P_Q(x_0 - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_0)),$$
$$x_0 + \Delta x - P_Q(x_0 - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_0))) \leqslant 0.$$

$P_Q(x_0 - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_0)) = x_0$ буданашро ба эътибор гирифта, аз нобаробарии охирин муносибати

$$(\operatorname{grad} f(x_0),\ \Delta x) \geqslant 0$$

-ро ҳосил менамоем. Ин муносибат, ки барои вектори дилхоҳи Δx (ки барояш нуқтаи $x_0 + \Delta x$ ба Q мутааллиқ аст) дуруст аст, муқаррар мекунад, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 соҳиби минимуми локалӣ мебошад. Леммаи 5 исбот шуд.

Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи барҷастаи сарбастаи маҳдуди Q функцияи хеле барҷаста мебошад. Қимати минималии $f(x)$ дар маҷмӯи Q-ро бо m ишорат мекунем ва μ адади аз m қатъиян калонест, ки

$$\mu > m = \min_{x \in Q} f(x)$$

мебошад.

Адади ν-и аз μ қатъиян калонро қайд мекунем ва таҳтмаҷмӯи ҳамон нуқтаҳои x-и маҷмӯи Q-ро, ки барояшон

$$\mu \leqslant f(x) \leqslant \nu \qquad (14.120)$$

мебошад, бо $\hat{Q}$ ишорат менамоем.

Маҷмӯи $\hat{Q}$ чун таҳтмаҷмӯи маҷмӯи маҳдуди Q худаш маҷмӯи маҳдуд мебошад.

Боварӣ ҳосил мекунем, ки маҷмӯи $\hat{Q}$ маҷмӯи с а р б а с т а мебошад. Бигзор $\{x_k\}$ пайдарпаии наздикшавандаи дилхоҳи нуқтаҳои маҷмӯи $\hat{Q}$ бошад. Исбот кардан лозим аст, ки лимити x_0*-и ин пайдарпай ҳам ба маҷмӯи $\hat{Q}$ мутааллиқ аст. Азбаски ҳар як нуқтаи x_k ба маҷмӯи $\hat{Q}$ мутааллиқ аст, пас барои ҳар як номери k

$$\mu \leqslant f(x_k) \leqslant \nu \qquad (14.121)$$

мебошад. Функцияи қатъиян барҷастаи $f(x)$ ба ҳар ҳолат дар Q бефосила мебошад, бинобар ин азбаски пайдарпаии $\{x_k\}$ ба x_0 наздик мешавад, пас дар асоси таърифи бефосилагии функция пайдарпаии $\{f(x_k)\}$ ба адади $f(x_0)$ наздик мешавад. Азбаски ҳама элементҳои пайдарпаии ададии наздикшавандаи $\{f(x_k)\}$ но-

---

* Азбаски маҷмӯи ибтидоии Q маҷмӯи сарбаста мебошад, пас лимити x_0 ба ҳар ҳолат ба Q тааллуқ дорад.

баробарихои (14.121)-ро қаноат менамоянд, пас лимити $f(x_0)$-и ин пайдарпай ҳам нобаробариҳои $\mu \leqslant f(x_0) \leqslant \nu$-ро қаноат менамоянд (ба боби 3, натиҷаи 2-юми теоремаи 3.13 нигаред) ва ин чунин маъно дорад, ки нуқтаи x_0 ба маҷмӯи $\hat{Q}$ тааллуқ дорад. Исботи сарбастагии маҷмӯи $\hat{Q}$ ба итмом расид.

Инак, маҷмӯи $\hat{Q}$-и ҳама нуқтаҳои x-и маҷмӯи Q, ки барояшон нобаробариҳои (14.120) дуруст мебошанд, маҷмӯи сарбаста ва маҳдуд мебошанд.

Акнун леммаи зеринро исбот мекунем.

Л е м м а и 6. Бигзор функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи сарбастаи барҷастаи Q функцияи хеле барҷаста, x нуқтаи дилхоҳи Q, α адади мусбати дилхоҳ бошад ва символи Δx фарқи

$$\Delta x = P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x)) - x \tag{14.122}$$

-ро ифода намояд. Онгоҳ нобаробарии

$$(\operatorname{grad} f(x), \Delta x) \leqslant \frac{1}{\alpha} |\Delta x| \tag{14.123}$$

дуруст аст.

Агар, ғайр аз он, маҷмӯи Q маҳдуд бошад ва нуқтаи x ба таҳтмаҷмӯи $\hat{Q}$-и ҳамон нуқтаҳои Q, ки барояшон нобаробариҳои (14.120) ҳаагоми $\mu > \min\limits_{x \in Q} f(x)$ будан дурустанд, тааллуқ дошта бошад, онгоҳ чунин адади қатъиян мусбати γ ёфт мешавад, ки нобаробарии

$$|\Delta x| \geqslant \gamma \tag{14.124}$$

аст.

И с б о т. Аввал нобаробарии (14.123)-ро исбот мекунем. Нуқтаи x-и маҷмӯи Q-ро қайд менамоем. Дар асоси леммаи 4, нобаробарии (14.117)-ро менависем (дар он ба ҷои x нуқтаи $x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x)$ ва ба ҷои y нуқтаи x-ро мегирем). Дар айни ҳол нобаробарии

$$(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x) - P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x)), \\ x - P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x))) \leqslant 0$$

-ро ҳосил мекунем ва ишорати $\Delta x = P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x)) - x$-ро ба эътибор гирифта, онро ба намуди

$$(-\alpha \cdot \operatorname{grad} f(x) - \Delta x, -\Delta x) \leqslant 0$$

менависем.

Аз нобаробарии охирин ва аз хосияти ҳосили зарби скалярӣ натиҷа мебарояд, ки

$$\alpha(\operatorname{grad} f(x), \Delta x) + |\Delta x|^2 \leqslant 0$$

аст ва ин ба нобаробарии (14.123) меорад.

Ҳангоми ба таври илова фарз кардани он, ки Q маҳдуд аст ва x ба таҳтмаҷмӯи $\hat{Q}$ тааллуқ дорад, чунин $\gamma > 0$ вуҷуд хоҳад дошт, ки нобаробарии (14.124) иҷро мешавад; инро исбот кардан лозим аст.

Функцияи гайриманфии нуқтаи x-ро намуди

$$|\Delta x| = |P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x)) - x| \qquad (14.125)$$

-ро муоина мекунем.

Боварӣ ҳосил мекунем, ки ин функция дар маҷмӯи Q функцияи бефосилаи нуқтаи x мебошад.

Аввал исбот мекунем, ки функцияи вектори $P_Q(x)$ функцияи бефосилаи нуқтаи x мебошад. Барои ин нобаробарии

$$|P_Q(x + \Delta x) - P(x)| \leqslant |\Delta x| \qquad (14.126)$$

-ро, ки барои векторҳои дилхоҳи x ва Δx дуруст аст, исбот кардан кифоя мебошад.

Нобаробариҳои зерин дар асоси леммаи 4 дурустанд:

$$(x - P_Q(x), P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) \leqslant 0,$$
$$(x + \Delta x - P_Q(x + \Delta x), P_Q(x) - P_Q(x + \Delta x)) \leqslant 0.$$

Ин нобаробариҳо ва нобаробарии Қоши—Буняковскийро истифода карда, ифодаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
&|P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)|^2 = \\
&\quad = (P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x), P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) = \\
&\quad\quad = (P_Q(x + \Delta x) - x, P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) + \\
&\quad\quad\quad + (x - P_Q(x), P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) \leqslant \\
&\quad\quad \leqslant (P_Q(x + \Delta x) - x, P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) = \\
&\quad = (P_Q(x + \Delta x) - x - \Delta x, P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) + \\
&+ (\Delta x, P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) \leqslant (\Delta x, P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant |\Delta x| \cdot |P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)|,
\end{aligned}$$

ки аз ин нобаробарии (14.126) бармеояд.

Инак, исбот карда шуд, ки $P_Q(x)$ функцияи вектори бефосилаи нуқтаи x мебошад. Аз хеле барҷастагии $f(x)$ дар Q натиҷа мебарояд, ки функцияи $\alpha \cdot \operatorname{grad} f(x)$ ҳам дар Q функцияи вектории бефосилаи нуқтаи x мебошад. Лекин онгоҳ аз теоремаҳои

бефосилагии функцияи мураккаб ва бефосилагии фарқи функцияҳои бефосила натиҷа мебарояд, ки функцияи

$$P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x)) - x$$

низ дар маҷмӯи Q функцияи вектории бефосилаи нуқтаи x мебошад.

Модули функцияи вектории номбурда, яъне функцияи скалярии (14.125) дар маҷмӯи Q азбаски бефосила мебошад, пас дар тахтмаҷмӯи он $\hat{Q}$ низ бефосила аст.

Инак, функцияи (14.125) дар маҷмӯи маҳдуди сарбастаи $\hat{Q}$ бефосила ва ғайриманфӣ мебошад. Дар ингуна мавриди ин функция, мувофиқи теоремаи дуюми Вейерштрасс (ба теоремаи 14.7 нигар.), дар маҷмӯи Q ба қимати минималии ғайриманфиаш γ соҳиб мешавад. Қимати минималии номбурдаи γ катъиян мусбат мебошад, чунки агар γ ба нуль баробар мешуд, онгоҳ дар маҷмӯи $\hat{Q}$ чунин нуқтаи x_0 ёфт мешуд, ки $P_Q(x_0 - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_0)) - x_0 = 0$ мешуд ва ин чунин маъно дорад, ки, дар асоси леммаи 5, функцияи $f(x)$ дар ҳамин нуқтаи x_0-и маҷмӯи Q минимуми локалии дар маҷмӯи Q ягона дорад (ин минимум мувофиқи таърифи $\hat{Q}$ берун аз $\hat{Q}$ воқеъ аст).

Леммаи 6 пурра исбот шуд.

Л е м м а и 7. Бигзор функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи сарбастаи барҷастаи Q хеле барҷаста, x нуқтаи дилхоҳи Q, α адади дилхоҳе, ки нобаробарии (14.115)*-ро қаноат менамояд, Δx фарқи намуди* (14.122) *бошад. Онгоҳ ҳангоми аз нуқтаи x ба нуқтаи $x^* = P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x))$ гузаштан қимати функцияи $f(x)$ намеафзояд, дар айни ҳол*[1]

$$f(x) - f(x^*) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) |\Delta x|^2. \qquad (14.127)$$

Агар, ғайр аз он, маҷмӯи Q маҳдуд бошад ва нуқтаи x ба тахтмаҷмӯи $\hat{Q}$-и ҳамон нуқтаи Q, ки барояшон нобаробарии (14.120) *ҳангоми $\mu > \min\limits_{x \in Q} f(x)$ будан дуруст аст, мутааллиқ бошад, онгоҳ нобаробарии* (14.127) *ба нобаробарии*

$$f(x) - f(x^*) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) \gamma^2 \qquad (14.128)$$

бадал мешавад, дар ин ҷо $\gamma > 0$ — доимӣ аз леммаи 6.

---

[1] Аз (14.115) натиҷа мебарояд, ки $\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) > 0$ аст.

И с б о т. Барои нуқтаи дилхоҳи x-и маҷмӯи Q мукаррар кардани нобаробарии (14.127) кифоя аст, чунки аз ин нобаробарӣ ва аз нобаробарии (14.124) якбора нобаробарии (14.128) (барои нуқтаҳои x-и мутааллиқи $\hat{Q}$, ҳангоми Q маҳдуд будан) бармеояд.

Аввал нобаробарии (14.127)-ро барои мавриде, ки нуқтаи x нуқтаи д а р у н и и маҷмӯи Q мебошад, исбот мекунем. Нуқтаи $x^* = P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x))$ ба маҷмӯи Q, ки дар он функцияи $f(x)$ хеле барҷаста аст, мутааллиқ буданашро ба эътибор гирифта, қимати $f(x^*)$-ро мувофиқи формулаи Тейлори марказаш нуқтаи x (аъзои боқимондаи $R_2(x)$-ро дар шакли Лагранж мегирем) ифода мекунем. Чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$f(x^*) = f(x) + (\operatorname{grad} f(x), \Delta x) + \frac{1}{2} d^2 f(x + \theta \Delta x), \quad (14.129)$$

дар ин ҷо $\Delta x = x^* - x = P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x)) - x$, $0 < \theta < 1$.

Нобаробарии (14.123) ва нобаробарии рости (14.104)-ро истифода карда, мо аз формулаи Тейлор (14.129)

$$f(x^*) - f(x) \leqslant -\frac{1}{\alpha} |\Delta x|^2 + \frac{k_2}{2} \cdot |\Delta x|^2$$

-ро ҳосил мекунем; нобаробарии (14.127) барои мавриди нуқтаи дарунии x исбот шуд.

Бигзор акнун x нуқтаи с а р ҳ а д и и маҷмӯи Q бошад. Мувофиқи таърифи нуқтаҳои сарҳадӣ пайдарпаии $\{x_n\}$-и нуқтаҳои дарунии маҷмӯи Q ёфт мешаванд, ки онҳо ба x наздик мешаванд.

Мувофиқи формулаи Тейлори марказаш нуқтаи x_n барои ҳар яки ин нуқтаҳо формулаи зеринро ҳосил менамоем:

$$f(x^*) = f(x_n) + (\operatorname{grad} f(x_n), x^* - x_n) + \frac{1}{2} d^2 f[x_n + \theta_n(x^* - x_n)], \quad (14.130)$$

дар ин ҷо $0 < \theta_n < 1$ аст.

Нобаробарии рости (14.104) дар нуқтаи дилхоҳи маҷмӯи Q барои $d^2 f$ дуруст буданаш ва $\operatorname{grad} f(x)$ дар маҷмӯи Q функцияи вектории бефосилаи нуқтаи x буданашро ба инобат гирифта, тасдиқ мекунем, ки ҳангоми $n \to \infty$ аз лимити муносибати (14.130) дурустии нобаробарии (14.127) (барои нуқтаҳои сарҳадии x-и маҷмӯи Q) бармеояд.

Леммаи 7 исбот шуд.

Акнун ба исботи теоремаи асосӣ шурӯъ мекунем.

Аввал теоремаи асосиро дар фарзияти иловагие, ки маҷмӯи барҷастаи сарбастаи Q низ маҷмӯи м а х д у д мебошад, исбот мекунем.

Нуқтаи дилхоҳи x_1-и маҷмӯи Q-ро мегирем ва пайдарпаии итерационии $\{x_n\}$-и нуқтаҳоеро, ки бо муносибати рекуррентии (14.116) муайян мешаванд (ҳангоме, ки адади α нобаробарии (14.115)-ро қаноат менамояд), тартиб медиҳем.

Аз лемманы 7, аниқтараш аз нобаробарии (14.127) якбора бармеояд, ки

$$f(x_n) - f(x_{k+1}) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) \cdot |x_k - x_{k+1}|^2 \geqslant 0.$$

Ҳамин тариқ, пайдарпаии $\{f(x_k)\}$ пайдарпаии афзуннашаванда мебошад. Азбаски, ғайр аз он, ин пайдарпаӣ аз поён маҳдуд аст (қимати m-и функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи Q минималӣ аст), пас он пайдарпаии наздикшаванда мебошад (ба теоремаи 3.15-и боби 3 ниг.). Лимити пайдарпаии $\{f(x_n)\}$-ро бо μ ишорат менамоем. Фаҳмост, ки $\mu \geqslant m$, дар ин ҷо m — қимати минималии $f(x)$ дар маҷмӯи Q.

Ғайр аз он, азбаски ҳама аъзоҳои пайдарпаии наздикшавандаи афзуннашаванда аз лимити он хурд нест (ба қайди 3-юми теоремаи 3.15-и боби 3 ниг.), пас б а р о и ҳ а м а номерҳои k нобаробарии

$$f(x_k) \geqslant \mu \tag{14.131}$$

дуруст аст.

Исбот мекунем, ки нобаробарии $\mu = m = \min\limits_{x \in Q} f(x)$ барои лимити μ дуруст аст.

Фарз мекунем, ки ин баробарӣ нодуруст аст, яъне фарз мекунем, ки $\mu > m$ мебошад. Онгоҳ, агар қимати максималии $f(x)$ дар маҷмӯи Q-ро бо ν ва тахтмаҷмӯи нуқтаҳои Q-ро, ки барояшон нобаробарии (14.120) дуруст аст, бо $\hat{Q}$ ишорат намоем, онгоҳ дар асоси леммаи 7 чунин доимии қатъиян мусбати ν ёфт мешавад, ки нобаробарии (14.128) дуруст мешавад, ки он ба нобаробарии

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) \gamma^2 > 0 \tag{14.132}$$

меорад; ин нобаробарӣ барои номери дилхоҳи k дуруст мебошад.

Нобаробарии (14.132)-ро, ки барои номерҳои $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ навишта шудааст, ба сумма гирифта, барои номери дилхоҳи n

$$f(x_1) - f(x_n) \geqslant (n-1)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) \gamma^2$$

$$f(x_n) \leqslant f(x_1) - (n-1)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right)\gamma^2 \qquad (14.132')$$

-ро ҳосил мекунем. Нобаробарии (14.132′), ки барои номери дилхоҳи n дуруст аст, ба нобаробарии (14.131) мухолиф аст, чунки бузургии қисми рости (14.132) ҳангоми ба қадри кифоя калон будани n аз адади μ хурд мешавад.

Мухолифоти пайдошуда хато будани фарзияти $\mu > m$-ро исбот мекунад, яъне исбот мекунад, ки $\mu = m$ аст. Инак, исбот карда шуд, ки пайдарпаии $\{f(x_k)\}$ ба қимати минималии m-и функцияи $f(x)$ дар маҷмӯи Q наздик мешавад*.

Акнун исбот кардан лозим аст, ки худи пайдарпаии итерационии $\{x_n\}$ ба ҳамон нуқтаи x_0, ки дар он ин қимати минималӣ ҷой дорад, наздик мешавад.

Адади мусбати дилхоҳи ε-ро қайд мекунем ва кураи m-ченакаи кушодаи радиусаш ε ва марказаш нуқтаи x_0-ро бо C_ε ишорат менамоем. Баъд ҳамон қисми маҷмӯи Q-ро, ки нуқтаҳои кураи C_ε-ро дарбар надорад, бо $\hat{Q}_\varepsilon$ ишорат мекунем. Фаҳмост, ки $\hat{Q}_\varepsilon$ маҷмӯи маҳдуди сарбаста мебошад, чунки функцияи $f(x)$ (дар асоси теоремаи дуюми Вейерштрасс) дар ҳамин маҷмӯъ ба қимати максималиаш соҳиб мешавад, ки мо онро бо m_ε ишорат менамоем.

Тасдиқ кардан мумкин аст, ки $m_\varepsilon > m$ мебошад, чунки дар мавриди баръакс шарти дар маҷмӯи Q нуқтаи ягонаи минимуми локалӣ доштани функцияи $f(x)$ вайрон мешуд.

Баъд тасдиқ кардан мумкин аст, ки дар маҷмӯи $\hat{Q}_\varepsilon$ фақат нуқтаҳои шумораашон охирноки пайдарпаии $\{x_n\}$ вуҷуд доранд (чунки пайдарпаии $\{f(x_k)\}$, ки элементҳои шумораашон беохири қаноаткунандаи нобаробарии $f(x_k) \geqslant m_\varepsilon > m$ дорад, ба адади m наздик шуда наметавонад).

Мо исбот кардем, ки барои $\varepsilon > 0$-и дилхоҳ номери N-е ёфт мешавад, ки аз он сар карда ҳама элементҳои пайдарпаии $\{x_k\}$ дар кураи C_ε-и радиусаш ε ва марказаш нуқтаи x_0 воқеъ аст. Ин чунин маъно дорад, ки пайдарпаии $\{x_k\}$ ба нуқтаи x_0 наздик мешавад.

Бо ҳамин, теоремаи асосӣ барои мавриди маҷмӯи барҷастаи сарбастаи маҳдуди Q исбот шуд.

Бигзор акнун Q маҷмӯи барҷастаи сарбастаи номаҳдуд бошад. Нуқтаи дилхоҳи x_1-и ин маҷмӯъро аз сари нав ба қайд мегирем ва пайдарпаии итерационии (14.116)-ро дар мавриде, ки адади α нобаробариҳои (14.115)-ро қаноат менамояд, тартиб медиҳем.

---

* Мо исбот карда будем, ки функцияи $f(x)$ *дар нуқтаи ягонаи маҷмӯи* Q ба қимати минималӣ соҳиб мешавад.

Ҳангоми исботи теоремаи мавҷудияти минимуми локалии функцияи хеле барҷаста (ба п. 2 ниг.) мо муқаррар кардем, ки нуқтаи x_0-и минимуми локалии функцияи хеле барҷастаи $f(x)$ дар маҷмӯи барҷастаи сарбастаи номаҳдуди Q дар ҳамон қисми Q_R-и маҷмӯи O воқеъ аст, ки он (қисми Q_R) дар кураи C_R-и марказаш нуқтаи x_1 ва радиусаш R аз шарти

$$\frac{k_1}{2} R - |\operatorname{grad} f(x_1)| > 0$$

интихобшуда ҷой дорад. Инчунин муқаррар карда шуд, ки тахтмаҷмӯи Q_R-и маҷмӯи Q маҷмӯи сарбастаи барҷастаи маҳдуд мебошад ва дар ҳама ҷои беруни Q_R қимати $f(x)$ аз қимати $f(x_1)$ калон аст.

Азбаски дар асоси леммаи 7 (аниқтараш дар асоси нобаробарии (14.127)) пайдарпаии $\{f(x_k)\}$ пайдарпаии афзуннашаванда мебошад ва дар беруни Q_R ҳама қиматҳои $f(x)$ аз қиматҳои $f(x_1)$ калон мешаванд, пас *ҳама нуқтаҳои пайдарпаии итерационии* $\{x_k\}$ *дар* Q_R *воқеъ мешаванд,* бинобар ин барои номери дилхоҳи k

$$P_Q(x_k - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_k)) = P_{Q_R}(x_k - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_k)).$$

Пас, пайдарпаии итерационии (14.116)-ро ба

$$x_{k+1} = P_{Q_R}(x_k - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_k))$$

иваз кардан мумкин аст, баъди ин ҳама муҳокимарониҳои минбаъда ба маҷмӯи барҷастаи сарбастаи м а ҳ д у д, яъне ба мавриди омӯхташуда меоранд.

Теоремаи асосӣ пурра исбот шуд.

Қ а й д и 1. Пайдарпаии (14.116) барои мавриде, ки маҷмӯи Q бо ҳамаи фазои E^m мувофиқ меояд, махсусан содда менамояд. Дар ин маврид баробарии $P_Q(x) = x$ барои нуқтаи дилхоҳи x дуруст аст ва, бинобар ин, формулаи рекуррентии (14.116) чунин намуд мегирад:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x_k).$$

Қ а й д и 2. Методи баёнкардаамон имконият медиҳад, ки ҳангоми иҷро шудани шартҳои мувофиқ ҳалли $x_0 = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$-и системаи m-то муодилаҳои функционалии

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1(x_1, x_2, \ldots x_m) = 0, \\ f_2(x) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x) = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \end{cases}$$

ҷустуҷӯ карда шавад.

Қайд кардан кофист, ки ҳалли системаи номбурда бо нуқтаи минимуми локалии функцияи $f(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x) + \ldots + f_m^2(x)$ мувофиқ меояд.

Қ а й д и 3. Назарияи баёншудаи ҷустуҷӯи минимуми локалии функцияи (ба поён) хеле барҷаста бе ҳеҷ мушкилӣ ба ҷустуҷӯи максимуми локалии функцияи (ба боло) хеле барҷаста татбиқ карда мешавад.

ИЛОВА

ДАР БОРАИ ИНТИХОБИ ТАҚСИМОТИ ОПТИМАЛИИ СЕГМЕНТ БАРОИ ҲИСОБИ ТАҚРИБИИ ИНТЕГРАЛ

Мо дар боби 12 барои тақрибан ҳисоб кардани интеграли

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{14.133}$$

сегменти $[a, b]$-ро ба n-то сегментҳои қисмии баробар тақсим кардем ва дар ҳар яки ин сегментҳо функцияи $f(x)$-ро ба бисёраъзогиҳои тартиби нульум, якум ё дуюм иваз намудем. Саҳви дар ин ҳангом ҳосилшуда хосиятҳои индивидуалии $f(x)$-ро ба эътибор нагирифтааст. Бинобар ин, албатта, дар бораи тағьир додани нуқтаҳои тақсимоти сегменти асосии $[a, b]$ ва барои ҳар як функцияи қайдшудаи $f(x)$ интихоб кардани ба n-то сегментҳои қисмии ба якдигар нобаробар ба таври оптималӣ тақсим намудани сегменти асосӣ (ки бузургии минималии саҳви формулаи тақрибии додашударо таъмин мекунад) масъала ба миён меояд.

Мо дар ин ҷо ба ҳалли масъалаи номбурда, ки ба А. Н. Тихонов ва С. С. Гайсарян* тааллуқ дорад, таваққуф мекунем.

Барои тақрибан ҳисоб кардани интеграли (14.133) сегменти $[a, b]$-ро бо ёрии нуқтаҳои

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

ба n-то сегментҳои қисмӣ тақсим мекунем.

Дарозии сегменти қисмии k-уми $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$-ро бо символи h_k ишорат менамоем, яъне $h_k = x_k - x_{k-1}$ аст.

Интеграли (14.113)-ро ба намуди сумман интегралҳои

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \tag{14.134}$$

навишта, ҳар яки интегралҳоро бо ёрии яке аз се формулаҳои тақрибӣ (-и росткунчаҳо, трапецияҳо ё параболаҳо) ба қисми рости (14.134) наздик меорем. Аз се формулаҳои номбурда дилхоҳашро ба намуди

* Ба мақолаи А. Н. Тихонов ва С. С. Гайсарян «О выборе оптимальных сеток при приближенном вычислении квадратур» (Журнал вычислительной математики и математической физики, ч. 9, № 5, 1969) нигаред.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = h_k \sum_{i=0}^{m-1} q_i f(x_k + t_i h_k) + R_{s,\ m,\ k}(f) \qquad (14.135)$$

навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо қисмҳои t_i ва вазн q_i $(i = 0, 1, ..., m-1)$ чунон интихоб карда мешаванд, ки аъзои бақимондаи $R_{s,\ m,\ k}(f)$ хангоми $s > 1$* будан тартиби h_k^s-ум дошта бошад.

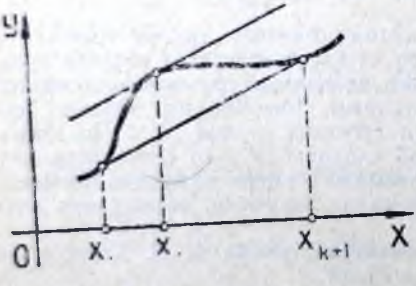
(14.135)-ро ба (14.134) гузошта,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} h_k \sum_{i=0}^{m-1} q_i f(x_k + t_i h_k) + R_{s,\ m}(f) \qquad (14.136)$$

-ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо

$$R_{s,\ m}(f) = \sum_{k=1}^{n} R_{s,\ m,\ k}(f). \qquad (14.137)$$

Доир ба интихоби чунин тақсимоти $\{x_k\}$-и сегменти $[a, b]$ масъала мегузорем, ки дар он квадрати саҳви (13.137) дар нуқтаҳои шумораашон қайдшудаи тақсимот n, функцияи қайдшудаи $f(x)$ ва формулаи тақрибии қайдшудаи (14.135) ба минимум расад. Ҳангоми ин тавр гузоштани масъала квадрати саҳви $R^2_{s,\ m}(f)$ фақат аз интихоби нуқтаҳои фосилавии тақсимот вобаста аст, яъне аз функцияи дорои $(n-1)$-то тағьирьёбандаҳои $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, ки дар тетраэдри $a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$ муайян мебошанд, иборат аст. Азбаски тетраэдри номбурда соҳаи кушода мебошад, пас функцияи $R^2_{s,\ m}(f)$ дар ҳамин тетраэдр ба минимум, умуман, соҳиб намешавад (яъне тақсимоти оптималии сегменти $[a, b]$ умуман, вуҷуд надоштанаш мумкин аст).



Расми 14.4.

Бо вуҷуди он, исбот кардан мумкин аст, ки *агар ҳосилаи* $f^{(s)}(k)$ *аломатаашро дар сегменти* $[a, b]$ *нигоҳ дорад, онгоҳ квадрати саҳви* $R^2_{s,\ m}(f)$ *дар чунин тақсимоти сегменти* $[a, b]$, *ки қисмҳои* $\overline{x}_k$-*и он* $(n-1)$-*то муодилаҳои*

$$\frac{\partial R^2_{s,\ m}(f)}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n-1) \qquad (14.138)$$

ва шартҳои иловагии $x_0 = a$, $x_n = b$**-*ро қаноат менамоянд, ба минимум мерасад.*

Ба мавриди формулаи трапеция муфассал таваққуф менамоем. Дар ин маврид дар формулаи (14.136) $s = 2$, $m = 2, t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $q_0 = q_1 = 1/2$ фарз кардан лозим аст, дар натиҷаи ин формулаи (14.136) чунин намуд мегирад:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{2} [f(x_k) + f(x_k + h_k)] + R_{2,\ 2}(f). \qquad (14.139)$$

---

* Аз ҷумла, барои формулаи трапеция дар (14.135) $m = 2$, $s = 2$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $q_0 = q_1 = 1/2$ фарз кардан лозим аст.

** Исботи ин тасдиқотро аз мақолаи А. Н. Тихонов ва С. С. Гайсарян, ки дар поварақи сах. 605 қайд шудааст, ёфтан мумкин аст.

Муодилаи (14.138), дар асоси (14.139) ва (14.134), барои ин маврид ба намуди

$$f(x_{k+1}) - f(x_{k-1}) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_{k-1}) \quad (k = 1, 2, ..., n-1) \qquad (14.140)$$

оварда мешавад.

Мавҷудияти ҳалли системаи муодилаҳои (14.140) бо нигоҳ доштани аломати ҳосилаи дуюми $f''(x)$ дар сегменти $[a, b]$, яъне бо нигоҳ доштани самти барҷастагии хати каҷи $y = f(x)$ (ҳангоми $a \leqslant x \leqslant b$ будан) таъмин карда мешавад. Қисмҳои $\{\bar{x}_k\}$-и тақсимоти оптималии сегменти $[a, b]$, ки бо муодилаҳои (14.140) муайян мешаванд, ба хосияти геометрии зерин сохиб мебошанд: *бурандае, ки аз нуқтаҳои графики функцияи $y = f(x)$-и абсциссаҳояш $\bar{x}_{k+1}$ ва $\bar{x}_{k-1}$ гузаронида шудааст, ба расандаи графики нумбурдае, ки аз нуқтаи абсциссааш $\bar{x}_k$-и он гузаронида шудааст, параллель мебошад.*

Ин ҳосият натиҷаи бевоситаи баробариҳои (14.140) мебошад ва дар расми 14.4 тасвир шудааст (мухокимаронӣ ба мисли мухокимаронии § 7 боби 8 мебошад).

Исбот кардан мумкин аст, ки қисмҳои «тақсимоти тақрибии» $\{\tilde{x}_k\}$ $(k = 0, 1, ..., n)$, ки бо баробариҳои рекуррентии

$$\tilde{x}_0 = a, \ \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \lambda \left| f''(\tilde{x}_k) \right|^{-1/3} \quad (k = 0, 1, ..., n-1) \qquad (14.141)$$

муайян мешаванд, ҳангоми $\lambda = (b-a)/n$ будан муодилаҳои (14.140)-и хатогиашон (ё, чунон ки мегӯянд, нобандишашон) тартиби λ^2-ро қаноат менамоянд. Ин чунин маъно дорад, ки ҳангоми калон будани n-ҳо тақсимоти $\{\tilde{x}_n\}$ ба тақсимоти оптималии $\{\bar{x}_k\}$ наздик аст. Ҳамин тариқ, ҳангоми калон будани n-ҳо мувофиқи формулаи трапецияҳо (бо тақсимоти $\{\tilde{x}_k\}$, ки қисмҳояш бо муносибати рекуррентии (14.141) пай дар пай муайян мешавад) ҳисоб кардани интеграли (14.133) саҳви ба саҳви минималӣ наздикро таъмин мекунад.

БОБИ 15

НАЗАРИЯИ ФУНКЦИЯҲОИ НООШКОР ВА ТАТБИҚОТИ ОН

§ 1. Мафҳуми функцияи ноошкор

Дар математика ва дар татбиқоти он бо чунин масъалаҳое дучор мешавем, ки тағьирьёбандаи u, ки мувофиқи маънои масъала функцияи аргументҳои $x, y, \ldots$ мебошад, ба воситаи муодилаи функционалии

$$F(u, x, y, \ldots) = 0 \qquad (15.1)$$

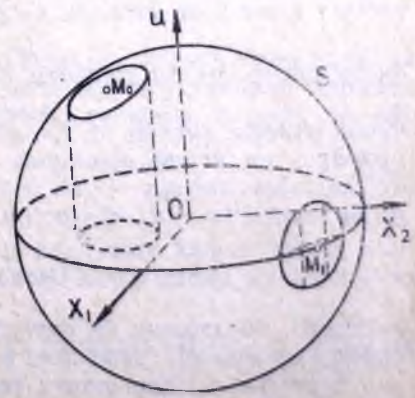
дода мешавад. Дар ин маврид мегӯянд, ки u чун функцияи аргументҳои $x, y, \ldots$ ба таври *ноошкор* дода шудааст. Масалан, функцияи $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$-ро, ки дар доираи $x^2 + y^2 \leqslant 1$ муоина мешавад, ба воситаи муодилаи функционалии

$$F(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (15.2)$$

ба таври ноошкор дода шуданаш мумкин аст. Албатта, чунин саволе ба миён меояд, ки муодилаи функционалии (15.1) дар қадом шартҳо нисбат ба u *якқимата* ҳалшаванда аст, яъне функцияи ошкори $u = f(x, y, \ldots)$-ро якқимата муайян мекунад ва чунин саволи нозуке пайдо мешавад, ки ин функцияи ошкор дар кадом шартҳо *функцияи бефосила ва дифференсиронидашаванда* мебошад. Ин саволҳо содда нестанд. Пас, муодилаи дифференциалии (15.2), умуман, дар доираи $x^2 + y^2 \leqslant 1$, ғайр аз функцияи ошкори номбурдаи $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, функцияҳои беҳад бисьёри дигарро муайян мекунад. Масалан, функцияи $u = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, инчунин функцияи дилхоҳи u, ки барои баъзе нуқтаҳои (x, y)-и доираи $x^2 + y^2 \leqslant 1$ ба $+\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ баробар аст ва барои нуқтаҳои боқимондаи ин доира ба

$-\sqrt{1-x^2-y^2}$ баробар аст, аз ҷумлаи он функцияҳо мебошанд. Барои аниқ кардани шартҳое, ки нисбат ба u якқимата ҳалшавандагии муодилаи (15.2)-ро таъмин менамоянд, ба тасвири геометрӣ муроҷиат мекунем. Муодилаи (15.2) дар фазои (x, y, z) сфераи S-и радиусаш 1 ва марказаш ибтидои координатаҳоро муайян менамояд (расми 15.1). Дар сфераи S чунин нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$-и дар ҳамвории Oxy воқеъшабуда, ясне чунин нуқтаеро, ки дар он $\overset{\circ}{u} \neq 0$ аст, мегирем. Қисми сфераи S, ки дар атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи M_0 воқеъ аст, *ба ҳамвории Oxy якқимата проекция карда мешавад.* Ин ба таври аналитикӣ чунин маъно дорад, ки агар функцияи $F(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1$ фақат дар атрофи номбурдаи нуқтаи M_0 муоина карда шавад, онгоҳ муодилаи (15.2) нисбат ба u якқимата ҳалшаванда аст ва ҳангоми $\overset{\circ}{u} > 0$ будан функцияи ошкори ягонаи $u = +\sqrt{1-x^2-y^2}$ ва ҳангоми $\overset{\circ}{u} < 0$ будан функцияи ошкори ягонаи $u = -\sqrt{1-x^2-y^2}$-ро муайян мекунад.

Агар дар сфераи S нуқтаи $M_1(O, x, y)$-ро, ки дар ҳамвории Oxy воқеъ аст (расми 15.1), гирем, онгоҳ ҳамон қисми сфераи S, ки *дар атрофи дилхоҳи M_1 воқеъ аст, дар ҳамвории Oxy якқимата проекция карда мешавад.* Ин ба таври аналитикӣ чунин маъно дорад, ки агар функцияи $F(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1$-ро дар атрофи дилхоҳи нуқтаи M_1 муоина намоем, онгоҳ муодилаи (15.2) нисбат ба u якқимата ҳалшаванда нест. Ба он диққат медиҳем, ки ҳосилаи хусусии $\frac{\partial F}{\partial u} = 2u$-и функцияи $F(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1$ *дар нуқтаи M_0 ба нуль табдил намешавад* ва дар нуқтаи M_1 ба нуль табдил мешавад. Мо сонитар муқаррар мекунем, ки барои дар атрофи нуқтаи M_0 нисбат ба u якқимата ҳалшаванда будани муодилаи функционалии умумии (15.1) *дар нуқтаи M_0 ба нуль табдил наёшудани ҳосилаи хусусии* $\frac{\partial F}{\partial u}$ роли калон мебозад. Мо дар як вақт муқаррар мекунем, ки функцияи ошкоре, ки ҳалли ягонаи



Расми 15.1.

муодилаи (15.1)-ро ифода менамояд, функцияи *бефосила ва дифференцирониданшаванда* мебошад.

Минбаъд мо фазои тағьирьёбандаҳои $(u, x, y, \ldots)$-ро бо символи R ва фазои тағьирьёбандаҳои $(x, y, \ldots)$-ро бо символи R' ишорат менамоем. Барои мухтасарии навишт ва муносибии тасвири геометрӣ ду тағьирьёбандаи x, y-ро муоина менамоем.

§ 2. Теорема дар бораи мавҷуд будан ва дифференцирониданшаванда будани функцияи ноошкор ва баъзе татбиқоти он

1. Теорема дар бораи мавҷуд будан ва дифференцирониданшаванда будани функцияи ноошкор.

Теоремаи 15.1. *Бигзор функцияи* $F(u, x, y)$ *дар ягон атрофи нуқтаи* $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$*-и фазои* R *дифференцирониданшаванда бошад, дар айни ҳол ҳосилаи хусусии* $\frac{\partial F}{\partial u}$ *дар нуқтаи* M_0 *бефосила мебошад. Онгоҳ, агар функцияи* F *дар нуқтаи* M_0 *ба нуль табдил шавад ва ҳосилаи хусусии* $\frac{\partial F}{\partial u}$ *ба нуль табдил нашавад, онгоҳ барои адади мусбати ба қадри кифоя хурди дилхоҳи* ε *чунин атрофи нуқтаи* $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$*-и фазои* R' *ёфт мешавад, ки дар ҳудудҳои ин атроф функцияи ягонаи* $u = \varphi(x, y)$ *вуҷуд дорад, ки он шарти* $|u - \overset{\circ}{u}| < \varepsilon$*-ро қаноат менамояд ва ҳалли муодилаи*

$$F(u, x, y) = 0 \qquad (15.3)$$

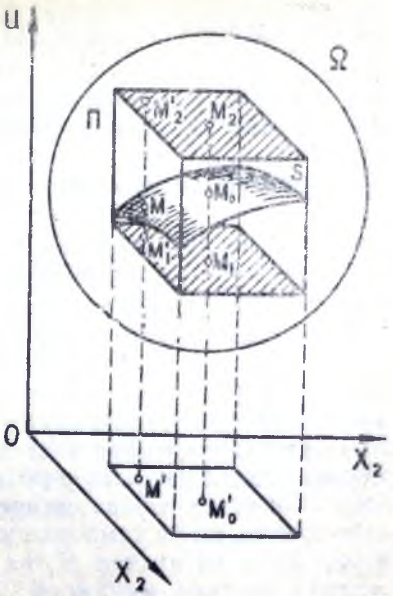
мебошад, бар замми ин функцияи $u = \varphi(x, y)$ *дар атрофи нобурдаи нуқтаи* M_0' *бефосила ва дифференцирониданшаванда аст.*

Қайди 1. Дар шарти теоремаи 15.1 талаботи дар нуқтаи M_0 бефосила будани ҳосилаи хусусии $\frac{\partial F}{\partial u}$-ро қатъи назар кардан мумкин аст, лекин онгоҳ ба таври илова талаб кардан лозим меояд, ки ин ҳосила на фақат дар худи нуқтаи M_0, балки дар ягон атрофи ин нуқта ҳам ба нуль табдил шавад ва дар ин атроф аломати муайянро нигоҳ дорад.

Исботи теоремаи 15.1.

1. Пеш аз ҳама исбот мекунем, ки *барои* $\varepsilon > 0$*-и ба қадри кифоя хурди атрофи нуқтаи* $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ *функцияи ягонаи* $u =$

$= \varphi(x, y)$, *ки шарти* $|u - \overset{\circ}{u}| < \varepsilon$-*ро қаноат менамояд ва ҳалли муодилаи* (15.3) *мебошад, вуҷуд дорад.* Барои исботро аёнитар кардан онро ба таври геометрӣ тасвир мекунем. Аз геометрияи аналитикӣ маълум аст, ки муодилаи (15.3) дар фазои R ягон сатҳи S -ро муайян мекунад (расми 15.2), дар айни замон, дар асоси шарти $F(M_0) = 0$, нуқтаи M_0 дар ҳамин сатҳ воқеъ аст. Аз нуқтаи назари геометрӣ нисбат ба u якқимата ҳалшавандагии муодилаи (15.3) чунин маъно дорад, ки ҳамон қисми сатҳи S-ро, ки ба нуқтаи M_0 бевосита наздик аст, дар ҳамвории координатии Oxy якқимата проекция кардан мумкин аст.



Расми 15.2.

Барои муайянӣ чунин мепиндорем, ки ҳосилаи хусусии $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ дар нуқтаи M_0 *мусбат* мебошад. Онгоҳ аз бефосилагии ҳосилаи номбурда дар M_0 ва аз теорема дар бораи устувории аломати функцияи бефосила натиҷа мебарояд, ки *чунин атрофи* M_0 *ёфт мешавад, ки дар ҳама ҷои ҳудудҳои он* $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ *мусбат мебошад.* Мо ин атрофро ба намуди кураи Ω-и радиусаш кифоя хурду марказаш нуқтаи M_0 гирифта метавонем. Баъд адади мусбати ε-ро чунон хурд мегирем, ки ҳар яке аз нуқтаҳои $M_1(\overset{\circ}{u} - \varepsilon, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ ва $M_2(\overset{\circ}{u} + \varepsilon, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ дар дохили кураи Ω воқеъ шаванд (барои ин ε-ро аз радиуси кураи Ω хурд гирифтан кифоя аст). Дар айни замон ε аз поён бо нуль маҳдуд мешавад ва мо онро ҳар қадар хурд гирифта метавонем — инро сонитар истифода мекунем.

Функцияи яктағьирьёбандаи $F(u, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$-ро дар сегменти $\overset{\circ}{u} - \varepsilon \leqslant u \leqslant \overset{\circ}{u} + \varepsilon$ муоина мекунем. Ин аз нуқтаи назари геометрӣ чунин маъно дорад, ки мо функцияи сетағьирьёбандаи $F(u, x, y)$-ро дар қад-қади порчаи M_1M_2 муоина мекунем (ба

расми 15.2 ниг.). Азбаски ҳосилаи $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x, y)$ дар сегменти $u - \varepsilon \leqslant u \leqslant \overset{\circ}{u} + \varepsilon$ мусбат аст, пас функцияи $F(u, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ дар ҳамин сегмент меафзояд. Лекин, онгоҳ, азбаски ин функция дар миёнаҷои сегменти номбурда (яъне ҳангоми $u = \overset{\circ}{u}$ будан) баробари нуль аст, онгоҳ $F(u, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ *дар нӯги чапи сегменти номбурда соҳиби қимати манфӣ ва дар нӯги росташ соҳиби қимати мусбат мешавад, яъне*

$$F(M_1) < 0, \quad F(M_2) > 0.$$

Баъд функцияҳои $F(\overset{\circ}{u} - \varepsilon, x, y)$ ва $F(\overset{\circ}{u} + \varepsilon, x, y)$-и дорои ду тағьирьёбандаҳои x ва y-ро муоина мекунем. Яъне, агар ба забони геометрия ифода намоем, функцияи $F(u, x, y)$-ро дар ду ҳамвориҳое, ки ба ҳамвории координатии Oxy параллеланду ҳамвории якум аз нуқтаи M_1 ва ҳамвории дуюм аз нуқтаи M_2 мегузарад, муоина менамоем. Азбаски $F(M_1) < 0$, $F(M_2) > 0$ ва функцияи $F(u, x, y)$ дар ҳама ҷои кураи Ω бефосила мебошад, пас мувофиқи теоремаи устувории аломати функцияи бефосила дар ҳамвориҳои номбурда *чунин атрофи* нуқтаҳои M_1 ва M_2 ёфт мешаванд, ки функцияи F дар ҳудудҳои онҳо ҳамон аломатҳоеро, ки дар нуқтаҳои M_1 ва M_2 дошт, нигоҳ медорад. Мо ин атрофҳоро ба намуди квадратҳои кушодаи марказҳояшон нуқтаҳои M_1 ва M_2 ва тарафашон 2δ (ба қадри кифоя хурд) гирифта метавонем (дар расми 15.2 квадратҳои номбурда штрих карда шудаанд). Функцияи $F(u, x, y)$ дар квадратҳои номбурда аломати доимиашро нигоҳ медорад, ҳаминро ба таври аналитикӣ бо нобаробариҳои зерин ифода мекунем:

$$\left.\begin{aligned} F(\overset{\circ}{u} - \varepsilon, x, y) < 0, \\ F(\overset{\circ}{u} + \varepsilon, x, y) > 0 \end{aligned}\right\} \text{ ҳангоми } |x - \overset{\circ}{x}| < \delta, \ |y - \overset{\circ}{y}| < \delta \text{ будан.} \tag{15.4}$$

Интихоби тарафҳои квадратҳои номбурдаро боз ба як шарти зерин итоат мекунонем: δ*-ро ҳар қадар хурд мегирем, то ки ҳар ду квадрати номбурда дар дохили кураи* Ω *воқеъ шаванд* (инро иҷро кардан мумкин аст, чунки маркази квадратҳои M_1 ва M_2 нуқтаҳои дарунии кураи Ω мебошанд). Ҳангоми ин тавр интихоб кардани δ нуқтаи дилхоҳи фазои (u, x, y), ки координатаҳояш нобаробариҳои

$$|x - \overset{\circ}{x}| < \delta, \ |y - \overset{\circ}{y}| < \delta, \ |u - \overset{\circ}{u}| < \varepsilon \tag{15.5}$$

-ро қаноат менамоянд, дар дохили кураи Ω воқеъ мешавад. Нобаробариҳои (15.5) аз нуқтаи назари геометрӣ параллелепипеди росткунҷаи кушодаеро муайян мекунад (маркази ин параллелепипед дар нуқтаи M_0 воқеъ буда, тарафҳояш ба тирҳои координатаҳои u, x, y параллель ва мувофиқан ба 2ε, 2δ, 2δ баробар мебошанд). Мо ин параллелепипедро бо символи П ишорат мекунем. Азбаски параллелепипеди П дар дохили кураи Ω воқеъ аст,

пас ҳосилаи $\frac{\partial F}{\partial u}$ *дар ҳама ҷои параллелепипеди* П* *мусбат мебошад.* Ғайр аз он, дар асоси нобаробариҳои (15.4), функцияи $F(u, x, y)$ *дар асоси поёнии* П *манфӣ буда, дар асоси болоиаш мусбат мебошад.*

Акнун исбот мекунем, ки агар функцияи $F(u, x, y)$ фақат барои қиматҳои u, x, y-и воқеи дохили параллелепипеди П муоина шавад, онгоҳ муодилаи (15.3) нисбат ба u якқимата ҳалшаванда мешавад. Исбот мекунем. Бигзор $M'(x, y)$ нуқтаи дилхоҳи фазои R', ки координатаҳояш нобаробариҳои

$$|x - \overset{\circ}{x}| < \delta, \quad |y - \overset{\circ}{y}| < \delta \tag{15.6}$$

-ро қаноат менамоянд, бошад. Ба ибораи дигар, бигзор $M'(x, y)$ нуқтаи дилхоҳест дар ҳамвории Oxy, ки дар дохили квадрати марказаш нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ ва тарафаш 2δ воқеъ мебошад. Исбот кардан лозим аст: барои координатаҳои x, y-и нуқтаи M' аз интервали $\overset{\circ}{u} - \varepsilon < u < \overset{\circ}{u} + \varepsilon$ чунин адади *ягонаи* u ёфт мешавад, ки $F(u, x, y) = 0$ аст. (Ин аз нуқтаи назари геометрӣ чунин маъно дорад: хати рости дилхоҳе, ки ба тири u параллель асту параллелепипеди П-ро мебурад, сатҳи S-и дохили параллелепипеди П-ро фақат дар як нуқта мебурад.)

Қиматҳои x ва y-ро, ки нобаробариҳои (15.6)-ро қаноат менамоянд, қайд карда, функцияи $F(u, x, y)$-и аргументи u-ро дар сегменти $\overset{\circ}{u} - \varepsilon \leqslant u \leqslant \overset{\circ}{u} + \varepsilon$ муоина мекунем, яъне функцияи $F(u, x, y)$-ро дар порчаи $M_1'M_2'$ муоина менамоем (дар ин ҷо M_1' ва M_2' — нуқтаҳои буриши хати рост, ки аз нуқтаи $M'(x, y)$ мегузарад ва ба тири Ou параллель аст, бо асосҳои параллелепипеди П (ба расми 15.2 ниг.)). Азбаски ҳосилаи $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x, y)$ дар сегменти $\overset{\circ}{u} - \varepsilon \leqslant u \leqslant \overset{\circ}{u} + \varepsilon$ мусбат аст, пас функцияи $F(u, x, y)$ дар ҳамин семгент меафзояд (ё ки, ҳамин хел, дар порчаи $M_1'M_2'$

---

* Квадратҳои кушодае, ки дар асосҳои он воқеанд, низ дохиланд.

меафзояд). Лекин онгоҳ аз шартҳои $F(M_1') < 0$, $F(M_2') > 0$ на-

тиҷа мебарояд, ки дар дохили сегменти $\overset{\circ}{u} - \varepsilon \leqslant u \leqslant \overset{\circ}{u} + \varepsilon$ чунин як қимати ягонаи u ёфт мешавад, ки $F(u, x, y) = 0$ аст (ё, агар ба таври геометрӣ ифода намоем, дар дохили порчаи $M_1'M_2'$ нуқтаи ягонаи M, ки дар сатҳи S воқеъ аст, ёфт мешавад.)

Бигзор акнун функцияи $u = \varphi(x, y)$ қоидаеро ифода намояд, ки ба воситаи он ба ҳар як нуқтаи $M'(x, y)$-и атрофи (15.6) ада-

ди ягонаи u-и интервали $\overset{\circ}{u} - \varepsilon < u < \overset{\circ}{u} + \varepsilon$ дар мувофиқатӣ гузошта шавад, ки барояш $F(u, x, y) = 0$ аст. Мо исбот кардем, ки дар атрофи (15.6) функцияи ягонаи $u = \varphi(x, y)$, ки шарти

$|u - \overset{\circ}{u}| < \varepsilon$-ро қаноат менамояд ва ҳалли муодилаи (15.3) мебошад, вуҷуд дорад.

2. Акнун исбот мекунем, ки *функцияи* $u = \varphi(x, y)$ *дар нуқтаи дилхоҳи* $M'(x, y)$*-и атрофи* (15.6) *бефосила мебошад.* Азбаски барои нуқтаи дилхоҳи $M'(x, y)$-и атрофи (15.6) *ҳамон*

шартҳое, ки барои нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ буд, *иҷро мешавад**, пас *фақат дар нуқтаи* $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ бефосила будани функцияи $u = \varphi(x, y)$-ро исбот кардан кифоя аст. Чунин ҷумларо исбот кардан лозим аст: барои ададди мусбати ба қадри кифоя хурди дилхоҳи ε чунин ададди мусбати δ вуҷуд дорад, ки барои x ва y-и дилхоҳи

қаноаткунандаи нобаробариҳои $|x - \overset{\circ}{x}| < \delta$, $|y - \overset{\circ}{y}| < \delta$ нобаро-

барии $|u - \overset{\circ}{u}| < \varepsilon$ дуруст аст, дар ин ҷо $u = \varphi(x, y)$, $\overset{\circ}{u} = \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$. Агар ба сифати ε ҳамон ададеро, ки ҳангоми омӯзиши п. 1 интихоб шуда буд, гирифта шавад, онгоҳ мавҷудияти δ бо нобаробариҳои (15.5) таъмин мешавад. Бояд қайд кард, ки дар муҳокимаронии п. 1 ададди мусбати ε-ро *ҳар қадар хурд* гирифтан мумкин буд (ин дар п. 1 қайд шудааст).

Бо ҳамин бефосилагии функцияи $u = \varphi(x, y)$ муқаррар кар-

да шуд. *Шарти* дар нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ *бефосила будани* функцияи $u = \varphi(x, y)$-ро *дар шакли фарқиятӣ* менависем. Афзоиши пур-

раи функцияи $u = \varphi(x, y)$ дар нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$-ро, ки ба афзо-

---

* Яъне, чунин нуқтаи $M(u, x, y)$-и фазои R ба нуқтаи дилхоҳи $M'(x, y)$-и атрофи (15.6) мувофиқ меояд, ки функцияи $F(u, x, y)$ дар нуқтаи M ба нуль табдил мешавад, дар ягон атрофи нуқтаи M дифференсиронидашаванда мебо-

шад ва дар ин атроф ҳосилаи ба нуль нобаробари $\dfrac{\partial F}{\partial u}$-ро дорад.

иши аргументҳои Δx ва Δy мувофиқ аст, бо Δu ишорат менамоем, онгоҳ ҳангоми $\begin{cases}\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0\end{cases}$ $\Delta u \to 0$.

3. Дар нуқтаи дилхоҳи $M'(x, y)$-и атрофи (15.6) *дифференцирониданшаванда будани* функцияи $u = \varphi(x, y)$-ро исбот кардан лозим аст. Дар асоси қайди п. 2 дар худи нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ дифференцирониданшаванда будани функцияи $u = \varphi(x, y)$-ро исбот кардан кифоя аст. Барои инро иҷро кардан афзоиши пурра (Δu)-и функцияи $u = \varphi(x, y)$ дар нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$-ро ки ба афзоиши аргументҳои Δx ва Δy мувофиқ аст, ҳисоб мекунем. Азбаски $F(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) = 0$ ва $F(\overset{\circ}{u} + \Delta u, \overset{\circ}{x} + \Delta x, \overset{\circ}{y} + \Delta y) = 0$ аст, пас *афзоиши* пурра (ΔF)-и функцияи $F(u, x, y)$ дар нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$, ки ба афзоиши аргументҳои Δu, Δx ва Δy мувофиқ аст, *ба нуль баробар мебошад*. Лекин дар асоси шарти дар нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ дифференцирониданшаванда будани функцияи $F(u, x, y)$ ин афзоиши пурра чунин намуд дорад:

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma\right)\Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta\right)\Delta y.$$

Дар ин ҷо *ҳама ҳосилаҳои хусусии* $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ *ва* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *дар нуқтаи* $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ *гирифта мешаванд*; *ҳангоми* $\begin{cases}\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0,\\ \Delta u \to 0\end{cases}$ α, β ва $\gamma \to 0$.

Инак, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma\right)\Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta\right)\Delta y. \qquad (15.7)$$

Мувофиқи шакли фарқиятии шарти нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ бефосила будани функцияи $u = \varphi(x, y)$ ҳангоми $\begin{cases}\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0\end{cases}$ $\Delta u \to 0$. Ҳамин тариқ, тасдиқ кардан мумкин аст, ки аз шарти $\begin{cases}\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0\end{cases}$ натиҷа мебарояд, ки α, β ва $\gamma \to 0$.

Мувофиқи шарти теорема ҳосилаи хусусии $\frac{\partial F}{\partial u}$ дар нуқтаи M_0

аз нуль тафовут дорад. Азбаски ҳангоми $\begin{cases}\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0\end{cases}$ $\gamma \to 0$, пас ҳангоми ба қадри кифоя хурд будани Δx ва Δy ифодаи $\dfrac{\partial F}{\partial u} + \gamma$ *ба нуль табдил намешавад.* Дар ингуна мавриди формулаи (15.7)-ро ба $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u} + \gamma\right)$ тақсим кардан мумкин аст, дар натиҷа чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\Delta u = \left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\dfrac{\partial F}{\partial u} + \gamma}\right)\Delta x + \left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \beta}{\dfrac{\partial F}{\partial u} + \gamma}\right)\Delta y. \qquad (15.8)$$

Мувофиқи теоремаи қимати лимитии ҳосили тақсими ду функция тасдиқ карда метавонем, ки

$$-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\dfrac{\partial F}{\partial u} + \gamma} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}} + \mu, \quad -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \beta}{\dfrac{\partial F}{\partial u} + \gamma} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}} + \gamma, \qquad (15.9)$$

дар ин ҷо ҳангоми $\begin{cases}\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 20\end{cases}$ μ ва $\nu \to 0$.

Формулаҳои (15.8) ва (15.9)-ро муқоиса карда, комилан чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$\Delta u = \left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}\right)\Delta x + \left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}\right)\Delta y + \mu\Delta x + \nu\Delta y. \qquad (15.10)$$

Формулаи (15.10) дар нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ дифференсиронидашаванда будани функцияи $u = \varphi(x, y)$-ро исбот мекунад. Бо ҳамин теоремаи 15.1 пурра исбот шуд.

Қайди 2. Ин исботро ба мавриди функцияҳои ноошкоре, ки на аз ду, балки аз шумораи охирноки дилхоҳи аргументҳои $x_1, x_2, \ldots, x_m$ вобастаанд,* бе ҳеҷ мушкилӣ татбиқ кардан мумкин аст. Мавриди ду аргументи x ва y фақат он афзалиятеро соҳиб аст, ки дар фазои (u, x, y) ба таври геометрии аёнӣ тасвир карда мешавад.

* Ва, аз ҷумла, аз як аргумент.

2. Ҳисоб кардани ҳосилаҳои хусусии функцияи ба таври ноошкор додашуда. Ба ҳисоб кардани ҳосилаҳои хусусии функцияе, ки ба воситаи муодилаи (15.3) ба таври ноошкор дода шудааст, таваққуф мекунем. Бигзор шарти теоремаи 15.1 иҷрошаванда бошад. Онгоҳ барои афзоиши пурраи функцияи $u = \varphi(x, y)$ ифодаи (15.10) дуруст аст. Ин ифода ва теоремаи 14.9 барои тасдиқ кардани он, ки ҳосилаҳои хусусии функцияи $u = \varphi(x, y)$ бо формулаҳои

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}} \tag{15.11}$$

муайян карда мешаванд, имконият медиҳанд. Ингуна формулаҳо барои мавриде, ки функцияи ба таври ноошкор додашуда на аз ду, балки аз шумораи охирноки дилхоҳи аргументҳои $x_1, x_2, \ldots, x_m$ вобаста аст, низ дуруст мебошанд. Дар ин маврид

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Агар мо хоҳем, ки дар функцияи ба таври ноошкор додашудаи $u = \varphi(x, y)$ мавҷуд будани ҳосилаҳои хусусии тартиби *дуюмро таъмин намоем*, онгоҳ талаботеро, ки ба функцияи $F(u, x, y)$-и теоремаи 15.1 гузошта шудааст, пуркунанда кардан лозим меояд, яъне ба таври илова талаб кардан лозим, ки функцияи $F(u, x, y)$ дар нуқтаи муоинашаванда ду маротиба дифференсиронидашаванда бошад. Дар ҳамин фарзиятҳо ба ҳисоб кардани *ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм* таваққуф менамоем.

Мафҳуми ҳосилаи хусусии пурраи функцияро, ки минбаъд ба аҳамияте соҳиб мешавад, чорӣ мекунем. Фарз мекунем, ки функцияи дифференсиронидашавандаи сеаргументаи $\Phi(u, x, y)$ дода шудааст, дар айни ҳол яке аз аргументҳо u худаш функцияи дифференсиронидашавандаи ду аргументи дигари x ва y мебошад. Онгоҳ функцияи $\Phi(u, x, y)$-ро чун функцияи мураккаби ду аргументи x, y муоина кардан мумкин аст. Ҳосилаҳои хусусии ин функцияи мураккаб аз рӯи x ва y-ро *ҳосилаҳои хусусии пурраи функцияи* $\Phi(u, x, y)$ аз рӯи x ва y меномем ва бо символҳои $\dfrac{D\Phi}{Dx}$ ва $\dfrac{D\Phi}{Dy}$ ишорат менамоем. Мувофиқи қоидаи дифференсиро-

нидани функцияҳои мураккаб мо барои ҳосилаҳои хусусии пурраи номбурда формулаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{D\Phi}{Dx}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{du}{dx},\quad \frac{D\Phi}{Dy}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{du}{dy}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Ба ҳисоб кардани ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюми функцияи ба таври ноошкор додашуда шурӯъ мекунем. Барои муайянӣ ҳосилаи $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$-ро ҳисоб мекунем. Формулаи якуми (15.11)-ро аз рӯи y дифференсиронида ва ба эътибор мегирем, ки ҳар яке аз ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial F}{\partial x}$ ва $\frac{\partial F}{\partial u}$ аз се аргументҳои u, x, y вобастаанд ва якуми онҳо худаш функцияи x ва y мебошад, онгоҳ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=D\left[-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\right]_{Dy}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial u}D\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]+\frac{\partial F}{\partial x}D\left[\frac{\partial F}{\partial u}\right]}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{du}{dy}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{du}{dy}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2}.$$

Ба формулаи ҳосилшуда ифодаи $\frac{du}{dy}$-ро, ки формулаи дуюми (15.11) муайян мекунад, гузошта, комилан ифодаи зеринро ҳосил менамоем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial u}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^3}.$$

(15.12)

Ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ айнан ҳамин тавр ҳисоб карда мешаванд. Ҳосилаҳои хусусии тартибҳои сеюм ва минбаъдаро бо ҳамин метод ҳисоб кардан мумкин аст*.

Мисолҳо. 1) Ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$-и функцияи $u = \varphi(x, y)$, ки ба воситаи муодилаи

$$x + y + u - e^{-(x+y+u)} = 0$$

дода шудааст, ҳисоб карда шавад. Пеш аз ҳама, формулаҳои (15.11)-ро истифода карда, ҳосилаҳои хусусии тартиби якумиро ҳисоб мекунем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1 + e^{-(x+y+u)}}{1 + e^{-(x+y+u)}} = -1.$$

Баъд маълум мешавад, ки $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 0$ аст.

2) Ҳосилаи хусусии $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$-и функцияи $u = \varphi(x, y)$, ки ба воситаи муодилаи

$$u^2 + x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

дода шудааст, ҳисоб карда шавад.

Формулаҳои (15.11)-ро истифода карда, ҳосилаҳои хусусии тартиби якумро ҳисоб мекунем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{u}.$$

Баъд, ҳосилаи $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$-ро ҳисоб мекунем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{Dy} = \frac{D\left(-\frac{x}{u}\right)}{Dy} = \frac{x\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2} = -\frac{xy}{u^3}.$$

---

* Дар мавриде, ки функцияи $F(u, x, y)$ дар нуқтаи додашуда мувофиқ маротиба дифференсиронидашаванда аст.

3. **Нуқтаҳои махсуси сатҳ ва хати каҷи ҳамвор.** Ягон сатҳи S (хати каҷи ҳамвори L)-ро, ки бо муодилаи $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$) дар системаи координатаҳои росткунҷагии декартии додашуда муайян мешавад, муоина мекунем. Нисбат ба функцияи $F(x, y, z)$($F(x, y)$) фарз мекунем, ки он дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи дилхоҳи сатҳи S (хати каҷи L) аз рӯи ҳамаи аргументҳо ба ҳосилаҳои хусусии бефосилаи тартиби якум соҳиб аст. Нуқтаи додашудаи сатҳи S (хати каҷи L)-ро нуқтаи махсус меномем, агар ҳама ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми функцияи

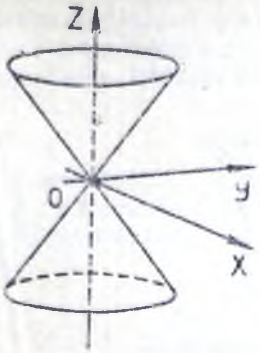
$$F(x, y, z)\ (F(x, y))$$

дар ин нуқта баробари нуль шаванд. Теоремаи 15.1-ро дар атрофи нуқтаи махсус ба муодилаи $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$) татбиқ кардан мумкин нест, яъне тасдиқ кардан мумкин нест, ки ин муодила ақаллан нисбат ба яке аз тағьирьёбандаҳои x, y, z (x, y) ҳалшаванда аст. Ҳамин тариқ, қитъаи сатҳи S (хати каҷи L), ки ба нуқтаи махсус часпидааст, дар ҳеҷ ягон ҳамвориҳои координатӣ (дар ҳеҷ ягон тирҳои координатаҳо) якқимата проекция нашуданаш мумкин аст. Сохти сатҳи S (хати каҷи L) дар атрофи нуқтаи махсус хеле мураккаб буданаш мумкин аст ва тадқиқи иловагиро металабад.

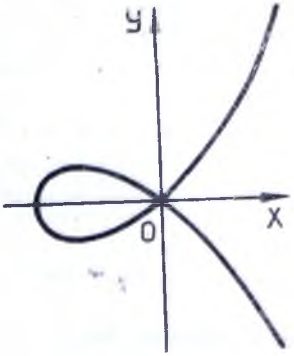
Нуқтаҳои сатҳи S (хати каҷи L)-ро, ки нуқтаҳои махсус намебошанд, *нуқтаҳои оддӣ* меноманд. Теоремаи 15.1 дар атрофи нуқтаҳои оддӣ амал мекунад, чунки қитъаи сатҳи S (хати каҷи L), ки ба нуқтаи оддӣ часпидааст, ақаллан дар яке аз ҳамвориҳои координатӣ (ақаллан дар яке аз тирҳои координтаҳо) якқимата проекция мешавад, ки ин тадқиқи ин қитъаро хеле осон менамояд.

М и с о л ҳ о. 1) Нуқтаҳои махсуси конуси доиравии $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ёфта шаванд. Азбаски $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ аст, пас $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -2z$ аст. Ибтидои координатаҳо нуқтаи махсуси ягона мебошад. Нағз маълум аст, ки дар атрофи ин нуқта сатҳи конус дар ҳеҷ ягон ҳамвориҳои координатӣ якқимата проекция намешавад (расми 15.3).

2) Нуқтаҳои махсуси хати каҷи ҳамвори $x^2 - y^2 + x^3 = 0$ ёфта шаванд. Ҳосилаҳои хусусӣ чунинанд: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$. Ҳар ду ҳосилаҳои хусусӣ дар ду нуқтаи ҳамворӣ (0, 0) ва (—2/3, 0) ба нуль баробар мешаванд. Хати каҷи $x^2 - y^2 + x^3 = 0$-ро дар атрофи нуқтаи (0, 0) сохта, бо-



Расми 15.3



Расми 15.4

варӣ ҳосил мекунем, ки ин нуқта нуқтаи худбуриши график мебошад (расми 15.4). Хати качро дар атрофи ин нуқта дар тири Ox ва дар тири Oy якқимата проекция кардан мумкин нест.

4. Шартҳое, ки барои функцияи $y = f(x)$ мавҷуд будани функцияи чаппаро таъмин мекунад. Барои аниқ кардани шартҳое, ки ҳангоми иҷро шудани онҳо функцияи $y = f(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи x_0 соҳиби *функцияи чаппаи* $x = f^{-1}(y)$ (ки дар ягон атрофи нуқтаи y_0 муайян аст, дар ин ҷо $y_0 = f(x_0)$ мебошад, теоремаи 15.1-ро татбиқ мекунем. $y = f(x)$-ро чун функцияе, ки бо муодилаи функционалии намуди $F(x, y) = f(x) - y = 0$ муайян мешавад, муоина мекунем.

Онгоҳ масъалаи мавҷудияти функцияи чаппа бо масъалаи нисбат ба x ҳалшавандагии муодилаи функционалӣ мувофиқ меояд. Тасдиқоти зеринро чун натиҷаи теоремаи 15.1 ва қайди 1-уми пеш аз исботи ин теорема ҳосил мекунем: *агар функцияи $y = f(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи x_0 ҳосилаи нобаробари нуль дошта бошад, онгоҳ дар атрофи x_0 барои ин функция функцияи чаппаи $x = f^{-1}(y)$, ки дар ягон атрофи нуқтаи y_0 (дар ин ҷо $y = f(x_0)$) муайян ва дифференсиронидашаванда мебошад, вуҷуд дорад. Ҳосилаи функцияи чаппаи номбурда дар нуқтаи y_0, дар асоси формулаи дуюми* (15.11), *ба* $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ *баробар аст.*

§ 3. Функцияҳои ноошкоре, ки бо системаи муодилаҳои дифференциалӣ муайян мешаванд

1. Теорема дар бораи ҳалшавандагии системаи муодилаҳои функционалӣ. Мо дар параграфи гузашта масъалаи мавҷудият ва дифференсиронидашавандагии функцияи ноошкореро, ки ба

воситаи *якто* муодилаи функционалӣ муайян мешавад, омӯхтем. Мо дар ин параграф ҳамингуна масъаларо *барои маҷмӯаи m-то* (m — адади натуралии дилхоҳ) *функцияҳои ноошкоре, ки ба воситаи системаи муодилаҳои функционалӣ муайян мешаванд,* меомӯзем.

Инак, фарз мекунем, ки m-то функцияҳои

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (15.13)$$

чун ҳалли системаи m-муодилаҳои функционалии

$$\left.\begin{aligned} F_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_m(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (15.14)$$

ҷустуҷӯ карда мешаванд. Масъалаи нисбат ба $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ҳалшавандагии системаи муодилаҳои функционалии (15.14)-ро меомӯзем. Мо минбаъд термини «ҳалли системаи (15.14)»-ро ба маънои маҷмӯаи m-то функцияҳои (15.13) мефаҳмем, ки ҳангоми ин функцияҳоро ба системаи (15.14) гузоштан ҳамаи муодилаҳои ин система ба айният табдил мешаванд. Мо ин ҳалро дар ягон соҳаи D-и тағьирьёбии тағьирьёбандаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_n$ бефосила ва дифференцирониданашаванда меномем, агар ҳар яке аз функцияҳои (15.13) дар соҳаи D бефосила ва дифференцирониданашаванда бошанд. Фазои $(m+n)$-то тағьирьёбандаҳои $u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$-ро бо символи R ва фазои n-то тағьирьёбандаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ро бо символи R' ишорат менамоем.

m-то функцияҳои $F_1, F_2, \ldots, F_m$-и қисмҳои чапи системаи (15.14)-ро муоина мекунем ва аз ҳосилаҳои хусусии ин функцияҳо детерминанти зеринро тартиб медиҳем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \qquad (15.15)$$

Детерминанти намуди (15.15)-ро *детерминанти Якоби** (ё мухтасаран *якобиан*)-и функцияҳои $F_1, F_2, \ldots, F_m$ нисбат ба тағьирьёбандаҳои $u_1, u_2, \ldots, u_m$ меноманд ва мухтасаран бо символи

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$$

ишорат менамоянд. Тасдиқоти ачиби зерин дуруст аст.

Теореми 15.2 (*ҷамъбасти теореми* 15.1). *Бигзор* m*-то функцияҳои*

$$\left.\begin{aligned} &F_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n),\\ &F_2(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &F_m(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (15.16)$$

дар ягон атрофи нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \ldots, \overset{\bullet}{u}_m, \overset{\bullet}{x}_1, \ldots, \overset{\bullet}{x}_n)$*-и фазои* R *дифференсиронидашаванда бошанд, илова бар ин ҳосилаҳои хусусии ин функцияҳо аз рӯи тағьирьёбандаҳои* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *дар нуқтаи* M_0 *бефосила мебошанд. Онгоҳ агар дар нуқтаи* M_0 *ҳама функцияҳои* (15.16) *ба нуль баробар шаванд ва якобиани* $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$ *аз нуль тафовут дошта бошад, онгоҳ барои адади ҳои мусбати ба қадри кифоя хурди* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *чунин атрофи нуқтаи* $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$*-и фазои* R' *ёфт мешавад, ки дар ҳудудҳои ин атроф* m*-то функцияҳои ягонаи* (15.13) *вуҷуд доранд, ки шартҳои* $|u_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1$, $|u_2 - \overset{\circ}{u}_2| < \varepsilon_2$, ..., $|u_m - \overset{\bullet}{u}_m| < \varepsilon_m$*-ро қаноат менамоянд ва ҳалли системаи муодилаҳои* (15.14) *мебошанд, дар айни ҳол ин ҳал дар атрофи номбурдаи нуқтаи* M_0' *бефосила ва дифференсиронидашаванда аст.*

Қайд. Ҳангоми $m = 1$ будан теоремаи 15.2 ба теоремаи исботшудаи** 15.1 табдил мешавад, чунки дар ин маврид якобиани (15.15) ба ҳосилаи хусусии dF_1/du_1 табдил мешавад.

Теоремаи 15.2-ро бо методи индукцияи математикӣ исбот мекунем. Ҳангоми $m = 1$ будан теорема исбот шуд. Бинобар ин, фарз мекунем, ки теоремаи 15.2 барои системаи $(n - 1)$-то муодилаҳои функционалӣ дуруст аст ва дурустии ин теоремаро барои системаи m-то муодилаҳои функционалӣ исбот кардан кифоя мебошад. Азбаски, мувофиқи фарзият, якобиани

---

* Карл Густав Яков Якоби — математики немис (1804—1851).

** Дар айни ҳол қайди 2-юми теоремаи 15.1-ро ба эътибор гирифтан лозим аст.

$$\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \qquad (15.17)$$

дар нуқтаи M_0 аз нуль тафовут дорад, пас *ақаллан яке аз минорҳои* тартиби $(m-1)$-уми* ин якобиан дар нуқтаи M_0 аз нуль тафовут дорад. Ба мавриди умумӣ маҳдуд нашуда, чунин мепиндорем, ки дар нуқтаи M_0 минори дар пунктир гирифташудаи қисми болоии чап аз нуль тафовут дорад. Онгоҳ, дар асоси фарзияти индукция, $(m-1)$-то муодилаҳои аввалини системаи (15.14) нисбат ба $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ ҳалшавандаанд. Аниқтараш, барои ададҳои мусбати ба қадри кифоя хурди $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ чунин атрофи нуқтаи $M_0''(\overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$-и фазои R''-и тағьирьёбандаҳои $(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ёфт мешавад, ки дар ҳудудҳои ин атроф $(m-1)$-то функцияҳои

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{m-1} &= \Phi_{m-1}(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (15.18)$$

муайян мебошанд, ки онҳо шартҳои $|u_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |u_{m-1} - \overset{\circ}{u}_{m-1}| < \varepsilon_{m-1}$-ро қаноат менамоянд ва дар ҳолати вуҷуд доштани ин шартҳо ҳалли бефосилаи ягона ва дифференцирониданашавандаи системаи $(m-1)$-то муодилаҳои аввалини (15.14) мебошанд.

Функцияҳои ёфташудаи (15.18)-ро ба қисми чапи муодилаи охирини (15.14) мегузорем. Дар ин ҳангом қисми чапи муодилаи охирини (15.14) ба функцияе табдил мешавад, ки он фақат аз $u_m, x_1, \ldots, x_n$ вобаста мебошад:

---

* Ба хотир меорем: *минори* тартиби $(n-1)$-уми детерминанти додашудаи тартиби m-ум гуфта детерминанти тартиби $(m-1)$-умеро меноманд, ки он аз детерминанти додашудаи тартиби m-ум дар натиҷаи хат задани як сатр ва як сутуни он ҳосил мешавад.

$$F_m(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m, x_1, \ldots, x_n) = F_m[\Phi_1(u_m, x_1, \ldots, x_n) \ldots,$$
$$\Phi_{m-1}(u_m, x_1, \ldots, x_n), u_m, x_1, \ldots, x_n] = \Psi(u_m, x_1, \ldots, x_n) \quad (15.19)$$

(мо ин функцияро бо символи Ψ ишорат менамоем). Ҳамин тарик, муодилаи охирини системаи (15.14) ба муодилаи

$$\Psi(u_m, x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (15.20)$$

меорад. Дар асоси баробарии (15.19) $\Psi(u_m, x_1, \ldots, x_n)$-ро чун функцияи мураккаби аргументҳояш муоина кардан мумкин аст. Онгоҳ, теорема дар бораи дифференцированидашавандагии функцияи мураккабро татбиқ намуда, мо тасдиқ карда метавонем, ки *функцияи* $\Psi(u_m, x_1, \ldots, x_n)$ *дар ягон атрофи нуқтаи* $M_1''(\overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$*-и фазои* R'' *дифференцированидашаванда мебошад.* Баробарии (15.19) ва муодилаи охирини (15.14) барои тасдиқ кардани $\Psi(\overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n) = 0$ имконият медиҳад. Бинобар ин, барои исбот кардани он, ки теоремаи 15.1 ба муодилаи (15.20) татбиқшаванда аст ва ин муодила нисбат ба u_m ҳалшаванда мебошад, муқаррар кардан кифоя мебошад, ки ҳосилаи хусусии $\dfrac{\partial \Psi}{\partial u_m}$ бефосила мебошад ва дар нуқтаи M_0'' аз нуль тафовут дорад. Барои инро иҷро кардан ҳосилаи хусусии номбурдаро ҳисоб мекунем. Функцияҳои (15.18)-ро ба $(m-1)$-муодилаҳои системаи (15.14) мегузорем (ин функцияҳо ҳалли ин муодилаҳо мебошанд) ва айниятҳои дар натиҷаи ин ҳосилшуда (нисбат ба u_m)-ро медифференцированем. Чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial F_1}{\partial u_m} = 0, \quad (15.21^1)$$

. . . . . .

$$\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} + \ldots + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} = 0. \quad (15.12^{m-1})$$

Баъд баробарии (15.19)-ро нисбат ба u_m медифференцированем. Чунин ифода ҳосил мешавад:

$$\frac{\partial F_m}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial F_m}{\partial u_m} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_m}. \quad (15.21^m)$$

Акнун баробариҳои (15.21^1)—(15.21^m)-ро ба пуркунандаҳои алгебравии мувофиқи $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$-и элементҳои сутуни охирини

якобиани (15.17) зарб мекунем ва баъд ин баробариҳоро ҷамъ менамоем. Чунин ифода ҳосил мешавад:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_m} \left[\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_k} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_k} + \ldots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_k}\right] +$$

$$+ \left(\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_m} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_m} + \ldots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_m}\right) = \Delta_m \frac{\partial u_m}{\partial \psi}.$$

Азбаски суммаи ҳосили зарби элементҳои сутуни додашудаи детерминант бар пуркунандаи алгебравии мувофиқи элементҳои ин сутун (сутуни дигар) ба детерминант (ба нуль) баробар аст, пас ҳар яки қавсҳои квадратӣ ба нуль ва қавсҳои мудаввар ба якобиани (15.17) баробаранд.

Ҳамин тариқ, мо ифодаи

$$\Delta = \Delta_m \frac{\partial \Psi}{\partial u_m} \tag{15.22}$$

-ро ҳосил мекунем. Дар ин ҷо якобиани (15.17) бо символи Δ ишорат шудааст. Пуркунандаи алгебравии элементи охирини сутуни охирин бо символи Δ_m ишорат шудааст, ки он бо минори пунктиршуда ва, мувофиқи фарзият, дар нуқтаи M_0 *нобаробари нуль* мувофиқ меояд. Баробарии (15.22)-ро ба Δ_m тақсим карда, комилан меёбем, ки

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_m} = \frac{\Delta}{\Delta_m}. \tag{15.23}$$

Формулаи (15.23), ки дар нуқтаи M_0'' дуруст аст, дар нуқтаи M_0'' бефосила будани ҳосилаи хусусии $\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}$-ро исбот мекунад (чунки Δ ва Δ_m аз ҳосилаҳои хусусии функцияҳои (15.16) нисбат ба $u_1, u_2, \ldots, u_m$, ки дар нуқтаи M_0 бефосила мебошанд, иборатанд). Ғайр аз он, аз формулаи (15.23) натиҷа мебарояд, ки $\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}$ дар нуқтаи M_0'' аз нуль тафовут дорад (чунки якобиани Δ дар нуқтаи M_0 аз нуль тафовут дорад). Бо ҳамин мо исбот кардем, ки теоремаи 15.1-ро ба муодилаи (15.20) татбиқ кардан мумкин аст.

Мувофиқи ҳамин теорема барои адади мусбати ба қадри кифоя хурди ε_m чунин атрофи нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$-и фазои R' ёфт

мешавад, ки дар ҳама ҷои ҳудудҳои ин атроф функцияи

$$u_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{15.24}$$

муайян мебошад, ки он шарти $|u_m - \overset{\circ}{u}_m| < \varepsilon_m$-ро қаноат менамояд ва дар ҳолати вуҷуд доштани ин шарт ҳалли бефосилаи ягона ва дифференсиронидашавандаи муодилаи (15.20) мебошад. Азбаски функцияҳои (15.18) ҳалҳои $m - 1$ муодилаҳои аввалини (15.14) (*дар қиматҳои дилхоҳи* $u_m, x_1, \ldots, x_n$ аз атрофи нуқтаи M_0'') мебошанд ва функцияи ёфташудаи (15.24)-ро ба (15.18) гузошта, мо функцияҳои фақат аз тағйирёбандаҳои $x_1, \ldots, x_n$ вобастаро ҳосил мекунем, яъне

$$u_1 = \Phi_1[\varphi_m(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n] = \varphi_1, \quad (x_1, \ldots, x_n),$$

. . . . . .

$$u_{m-1} = \Phi_{m-1}[\varphi_m(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n] = \varphi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

(Мо ин функцияҳоро бо символҳои $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ ишорат кардем.) Теоремаи дифференсиронидашавандагии функцияи мураккаб барои тасдиқ кардани он, ки ҳар яке аз функцияҳои $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ дар атрофи нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ дифференсиронидашаванда мебошанд, имконият медиҳад. Ҳамин тариқ, мо комилан исбот кардем, ки m-то функцияҳои

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{15.25}$$

дар атрофи нуқтаи M_0' шартҳои $|u_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |u_m - \overset{\circ}{u}_m| < \varepsilon_m$-ро қаноат менамоянд ва дар ҳолати вуҷуд доштани ин шартҳо ҳалли бефосилаи ягона ва дар ягон атрофи нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ дифференсиронидашавандаи системаи (15.14)-ро ифода мекунанд.

Акнун исбот кардан лозим аст, ки функцияҳои (15.25) ҳалли ягонаи системаи (15.14) мебошанд, ки онҳо шартҳои $|u_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |u_m - \overset{\circ}{u}_m| < \varepsilon_m$-ро (ҳангоми ба қадри кифоя хурд будани ададҳои мусбати $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$) қаноат менамоянд.

Фарз мекунем, ки, ғайр аз функцияҳои (15.25), боз m-то функцияҳои

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \overset{\wedge}{\varphi}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \hat{u}_2 &= \overset{\wedge}{\varphi}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{u}_m &= \overset{\wedge}{\varphi}_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (15.25')$$

вучуд доранд, ки онхо ҳам ҳалли системаи (15.14) мебошанд ва шартҳои $|\hat{u}_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1, \ \ldots, \ |\hat{u}_m - \overset{\circ}{u}_m| < \varepsilon_m$-ро қаноат менамоянд.

Онгоҳ, дар асоси фарзияти индукция, $(m-1)$-то функцияҳои аввалини (15.25) ҳангоми маълум будани $\hat{u}_m = \hat{u}_m$ ҳалли ягона ва дифференсиронидашавандаи системаи $(m-1)$-то муодилаҳои аввалини (15.14) мебошанд. Лекин ҳангоми маълум будани u_m ҳалли ягонаи системаи $(m-1)$-то муодилаҳои аввалини (15.14) бо баробариҳои (15.18) ифода мешаванд. Ҳамин тариқ, муносибати

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \Phi_1(\hat{u}_m, x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{u}_{m-1} &= \Phi_{m-1}(\hat{u}_m, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (15.18')$$

дуруст мебошад, ки дар он $\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1}$ функцияҳо мебошанд.

Дар ингуна маврид муодилаи охирини (15.14) ва муносибати (15.19) барои тасдиқ кардани он, ки $\hat{u}_m$ ҳалли ягонаи муодилаи (15.20), яъне $\hat{u}_m = u_m$ мебошад, имконият медиҳанд.

Ҳангоми мавҷуд будани баробарии $\hat{u}_m = u_m$ (аз муносибатҳои (15.18′) ва (15.18)) якбора натиҷа мебарояд, ки $\hat{u}_1 = u_1, \ \ldots, \ \hat{u}_{m-1} = u_{m-1}$ мебошанд.

Теоремаи 15.2 пурра исбот шуд.

2. Ҳисоб кардани ҳосилаҳои хусусии функцияҳое, ки ба воситаи системаи муодилаҳои функционалӣ ба таври ноошкор муайян мебошанд. Мо дар ин пункт фарз мекунем, ки шарти теоремаи 15.2 иҷро шуд ва ба ҳисоб кардани ҳосилаҳои хусусии функцияҳои (15.25) машғул мешавем. Функцияҳои (15.25)-ро ба системаи муодилаҳои (15.14) мегузорем, ки ин функцияҳо ҳалли он мебошанд ва айниятҳои нисбат ба x_l $(l = 1, 2, \ldots, n)$ ҳосилшударо медифференсиронем. Чунин системаро ҳосил мекунем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_l} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_1}{\partial x_l} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial F_m}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_l} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_m}{\partial x_l} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15.26)$$

Баробариҳои (15.26) нисбат ба m-то номаълумҳои $\frac{du_1}{dx_l}, \ldots, \frac{du_m}{dx_l}$ систе-

маи муодилаҳои хаттиро ифода менамоянд. Детерминанти ин система — якобиани (15.17) дар атрофи нуқтаи M_0 аз нуль тафовут дорад. Пас, системаи (15.26) соҳиби ҳалли ягона мебошад, ки он бо формулаи Крамер:

$$\frac{du_k}{dx_l} = \frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_l, u_{k+1}, \ldots, u_m)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}}$$

муайян мешавад. Ифодаи ҳосилаҳои хусуси тартибҳои дуюм ва минбаъдаро* ба воситаи дифференцирониданн ин функцияҳо ҳосил кардан мумкин аст.

3. Инъикоси байни якдигар якқиматаи ду маҷмӯи фазои m**-ченака.** m-то функцияҳои

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned} \tag{15.27}$$

-ро дар ягон атрофи нуқтаи $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ муоина мекунем. Муоинаи m-то функцияҳо ба воситаи ба ягон маҷмӯи $\{N\}$-и фазои m-ченакаи тағьирьёбандаҳои $u_1, u_2, \ldots, u_m$ инъикос кардани атрофи номбурдаи нуқтаи M_0 амалӣ гардонда мешавад. Ин инъикос инъикоси *байни якдигар якқимата* номида мешавад, агар ба ҳар як нуқтаи атрофи номбурдаи нуқтаи M_0 фақат якто нуқтаи маҷмӯи $\{N\}$ мувофиқ ояд, чунки дар ин ҳолат ба ҳар як нуқтаи маҷмӯи $\{N\}$ фақат якто нуқтаи атрофи номбурдаи нуқтаи M_0 мувофиқ меояд.

Аз теореми 15.2 тасдиқоти зерин бевосита бармеояд:

Агар функцияҳои (15.27) *дар атрофи нуқтаи* M_0 *дифференцирониданшаванда бошанд, дар айни ҳол ҳама ҳосилаҳои хусусии тартиби якум дар худи нуқтаи* M_0 *ва якобиани* $\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$ *дар ҳамин нуқта аз нуль тафовут доштa бошад, он гоҳ функцияҳои* (15.27) *ягон атрофи нуқтаи* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$-

-ро ба ягон атрофи нуқтаи $N_0(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_m)$ *(дар ин ҷо* $\overset{\circ}{u}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$*) байни якдигар якқимата инъикос менамоянд.*

Вокеан, муносибати (15.27)-ро нисбат ба $x_1, x_2, \ldots, x_m$ чун системаи муодилаҳои функционалӣ, ки барояш шарти теореми 15.2 иҷро мешавад, муоина кардан мумкин аст. Лекин, онгоҳ, ин система дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи $N_0(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_m)$ ба ҳалли ягонаи

---

* Маҷмӯаи ин ҳосилаҳои хусусӣ дар натиҷаи маҳдудияти иловагӣ ба функцияҳои (15.16) таъмин карда мешавад.

$$x_1 = \psi_1(u_1, \ldots, u_m),$$
$$x_m = \psi_m(u_1, \ldots, u_m) \qquad (15.27')$$

соҳиб мебошад. Функцияҳои (15.27′) инъикоси чаппаро амалӣ мегардонанд.

Дар ҳамин шарти тасдиқоти баёншуда ҳам функцияҳои (15.27), ки инъикоси ростаро амалӣ мегардонанд ва ҳам функцияҳои (15.27′), ки инъикоси чаппаро амалӣ мегардонанд, *функцияҳои бефосила* мебошанд. Инъикоси байни якдигар якқиматә, ки ба ҳамин хосиятҳо соҳиб аст, *инъикоси гомеоморфӣ* номида мешавад.

§ 4. Вобастагии функцияҳо

1. Мафҳуми вобастагии функцияҳо. Шарти кифоягии новобастагӣ. Бигзор m-то функцияҳои n-тағьирьёбандаи

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (15.28)$$

дар ягон соҳаи* n-ченакаи кушодаи D муайян ва дифференцирониданашаванда бошанд.

Яке аз ин функцияҳо, масалан u_k, *дар соҳаи D аз функцияҳои боқимонда вобаста мебошад, агар якбора барои ҳама нуқтаҳои $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-и соҳаи D*

$$u_k = \Phi(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m) \qquad (15.29)$$

бошад, дар ин ҷо Φ функцияест, ки дар соҳаи мувофиқи тағьирьёбии аргументҳояш муайян ва дифференцирониданашаванда мебошад. Функцияҳои $u_1, u_2, \ldots, u_m$-ро функцияҳои дар соҳаи D вобаста меномем, агар яке аз ин функцияҳо дар соҳаи D аз функцияҳои боқимонда вобаста бошад.

Агар чунин функцияи дифференцирониданашавандаи Φ вуҷуд надошта бошад, ки якбора барои ҳама нуқтаҳои соҳаи D айният намуди (15.29) дуруст бошад, онгоҳ мо функцияҳои $u_1, u_2, \ldots, u_m$-ро функцияҳои дар соҳаи D новобаста меномем.

М и с о л ҳ о. 1. Бовар кардан осон аст, ки се функцияи чортағьирьёбандаи

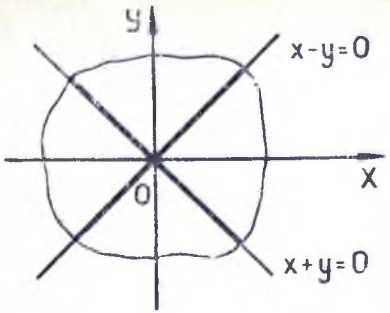
$$u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$u_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

дар соҳаи дилхоҳи D-и фазои чорченака функцияҳои вобаста мебошанд, чунки барои ҳама нуқтаҳои (x_1, x_2, x_3, x_4)-и ин соҳа $u_1 = u_2^2 - u_3$ мебошад.

---

* Аз ҷумла, ба сифати соҳаи D ягон атрофи нуқтаи кайдшудаи M_0 и фазои n-ченакаро гирифтан мумкин аст.

2. Акнун нишон медиҳем, ки ду функцияи дутағьирьёбандаи $u_1 = x + y$ ва $u_2 = x - y$ дар соҳаи дилхоҳи D-и ҳамвориҳои x ва y-и дорои ибтидои координатаҳо новобаста мебошанд. Фаҳмост, ки функцияи u_1 дар хати рости $x + y = 0$-и аз ибтидои координатаҳо мегузаштагӣ (расми 15.5) қимати доимии нульро нигоҳ медорад. Лекин функцияи u_2 дар ин хати рост ба қимати тағьирьёбандаи $u_2 = 2x$ соҳиб аст. Бинобар ин дар ҳамон қитъаи ин хати рост, ки дар дохили D воқеъ аст, u_2 аз u_1 вобаста намебошад. Айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад, ки дар қитъаи хати рости $x - y = 0$, ки дар дохили соҳаи D воқеъ мебошад, $u_2 = 0$, $u_1 = 2x$ аст ва, бинобар ин, u_1 аз u_2 вобаста намебошад.



Расми 15.5

Қайд. Дар курси алгебраи хаттӣ мафҳуми вобастагии хаттии функцияҳо омӯхта мешавад: m-то функцияҳои $u_1, u_2, \ldots, u_m$ дар соҳаи D функцияҳои *ба таври хаттӣ вобаста* номида мешаванд, агар барои ҳама нуқтаҳои соҳаи D яке аз ин функцияҳо ба намуди функцияи хаттии функцияҳои боқимонда ифода шавад. Фаҳмост, ки вобастагии хаттии функцияҳо ҳолати хусусии вобастагии ин функцияҳо мебошад, чунки, агар функцияҳои $u_1, u_2, \ldots, u_m$ дар соҳаи D ба таври хаттӣ вобаста бошанд, онгоҳ онҳо дар ҳамин соҳа вобаста мебошанд, лекин функцияҳое мавҷуд ҳастанд (масалан, функцияҳои дар мисоли 1-ум навишташуда), ки онҳо дар соҳаи D вобаста мебошанду аммо дар D ба таври хаттӣ вобаста намебошанд.

Теоремаи 15.3 *(шарти кифоягии новобастагии функцияҳо). Бигзор m-то функцияҳои $n \geqslant m$ тағьирьёбандаи*

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

дар атрофи нуқтаи $M_0(x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ, x_{m+1}^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ муайян ва дифференсиронидашаванда бошанд. Онгоҳ агар якобиани ин функцияҳо нисбат ба ягон m-тағьирьёбандаҳо дар нуқтаи M_0 аз нуль тафовут дошта бошанд, онгоҳ ин функцияҳо дар ягон атрофи нуқтаи M_0 новобаста мебошанд.

Исбот. Ба мавриди умумӣ маҳдуд нашуда, чунин мепиндорем, ки якобиани

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)} \qquad (15.30)$$

дар нуқтаи M_0 аз нуль тафовут дорад. Теоремаро аз баръаксаш исбот мекунем. Фарз мекунем, ки функцияҳои $u_1, u_2, ..., u_m$ дар ягон атрофи нуқтаи M_0 вобаста мебошанд, яъне яке аз ин функцияҳо, масалан u_k, барои ҳама нуқтаҳои ин атроф ба намуди

$$u_k = \Phi(u_1, ..., u_{k-1}, u_{k+1}, ..., u_m)$$

ифода карда мешавад, дар ин ҷо Φ — ягон функцияи дифференсиронидашаванда. Қоидаи дифференсиронидани функцияи мураккабро истифода карда, ҳосилаи функцияи u_k-ро нисбат ба тағйирёбандаи дилхоҳи x_l $(l = 1, 2, ..., m)$ ҳисоб мекунем. Формулаҳои зеринро ҳосил менамоем:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_l} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_l} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}}\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_l} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \quad (l = 1, 2, ..., m) \quad (15.31)$$

Формулаҳои (15.31), агар онҳоро барои ҳар як қимати $l = 1, 2, ..., m$ дар нуқтаи M_0 гирем, чунин маъно доранд, ки сатри k-уми якобиани (15.30) комбинацияи хаттии сатрҳои боқимондаи коэффициентҳояшон мувофиқан ба $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}}, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}$- баробарро ифода менамояд. Лекин дар ин маврид якобиани (15.30) дар нуқтаи M_0 ба нуль баробар аст, ки ин ба шарти теорема мухолиф мебошад.

Мисол. Ду функцияи муоинашудаи $u_1 = x + y$ ва $u_2 = x - y$ дар атрофи нуқтаи дилхоҳи $M(x, y)$ функцияҳои новобаста мебошанд, чунки якобиани $\frac{D(u_1, u_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ (дар ҳама ҷо нобаробари нуль) аст.

2. Матрицаҳои функционалӣ ва татбиқи онҳо. m-то функцияҳои n-тағйирёбандаи (15.28):

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}\right\} \quad (15.28)$$

-ро боз муоина мекунем. Ин дафъа фарз мекунем, ки ***функцияҳои*** (15.28) ***дар ягон атрофи нуқтаи*** $M_0(\overset{\circ}{x}_1, ..., \overset{\circ}{x}_n)$ ***муайян ва диф-***

ференциронидашаванда мебошанд, дар айни ҳол ҳама ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми ин функцияҳо дар худи нуқтаи M_0 бефосила мебошанд.

Аз ҳосилаҳои хусусии функцияҳои (15.28) матрицаи функционалии зеринро, ки m-то сатр ва n-то сутун дорад, тартиб медиҳем:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix} \tag{15.32}$$

Тасдиқоти зерин мавқеъ дорад.

Т е о р е м а и 15.4. *Бигзор у матрицаи функционалии* (15.32) *бошад*: 1) *ягон минори тартиби r-ум* дар нуқтаи* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ *аз нуль тафовут дорад*, 2) *ҳама минорҳои тартиби* $(r+1)$*-ум дар ягон атрофи нуқтаи* M_0** *ба нуль баробаранд. Онгоҳ r-то функцияҳое, ки дар минори номбурдаи тартиби r-ум дода шудаанд, дар атрофи нуқтаи* M_0 *функцияҳои вобаста мебошанд ва ҳар яки функцияҳои боқимонда дар ҳамин атроф аз r-то функцияҳои номбурда вобастаанд.*

И с б о т. Ба мавриди умумӣ маҳдуд нашуда, чунин мепиндорем, ки минори кунҷи болоии тарафи чапи матрицаи (15.32) дар нуқтаи M_0 аз нуль тафовут дорад, яъне детерминанти

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} \tag{15.33}$$

ба нуль баробар нест. Онгоҳ аз теоремаи 15.3 якбора бармеояд, ки функцияҳои $u_1, u_2, \dots, u_r$ дар атрофи нуқтаи M_0 новобаста ме-

* Ба хотир меорем: *минори* тартиби r-уми матрицаи додашуда гуфта детерминантеро меноманд, ки он аз элементҳои дар буриши ягон r сутун ва r сатри матрица воқеъбуда ташкил шудааст.

** Дар мавриди $r = \min(m, n)$ будан талаботи 2) қатъи назар карда мешавад.

бошанд. Акнун исбот кардан лозим аст, ки функцияи дилхоҳи $u_{r+1}, \ldots, u_m$* дар атрофи M_0 аз $u_1, u_2, \ldots, u_r$ вобаста аст. Масалан, исбот мекунем, ки u_{r+1} *дар атрофи нуқтаи* M_0 *аз* $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *вобаста аст*. Мо диққатамонро ба r-то функцияҳои аввалини (15.28) ҷалб менамоем. Агар ададҳои намуди $\overset{\circ}{u}_1 = \varphi_1(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n), \ldots, \overset{\circ}{u}_r = \varphi_r(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$-ро бо $\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_r$ ишорат намоем, онгоҳ дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи $N_0(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_r, \overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$-и фазои $(n+r)$-ченака r-то функцияҳои аввалини (15.28) ҳалли ягона ва дифференцирониданшавандаи системаи муодилаҳои зеринро** ифода менамоянд:

$$\left.\begin{aligned} F_1(u_1, \ldots, u_r, x_1, \ldots, x_n) &\equiv \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) - u_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_r(u_1, \ldots, u_r, x_1, \ldots, x_n) &\equiv \varphi_r(x_1, \ldots, x_n) - u_r = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15{,}34)$$

Аз ҷиҳати дигар, азбаски якобиани

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)},$$

ки бо минори (15.33) мувофиқ меояд, дар нуқтаи N_0 аз нуль тафовут дорад, пас системаи (15.34)-ро дар атрофи ин нуқта нисбат ба $x_1, \ldots, x_r$ *якқимата ҳал кардан* мумкин аст. Ба ибораи дигар, дар ҳама ҷои атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи N_0 системаи (15.34) ба ҳалли ягона ва дифференцирониданшавандаи

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= \psi_r(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (15.35)$$

соҳиб аст. Баробариҳои (15.35) ва r-то баробариҳои аввалини (15.28) дар атрофи нуқтаи N_0 пурра баробарқуввa мебошанд. Аз ҷумла, агар $x_1, x_2, \ldots, x_r$-ро, ки бо муодилаҳои (15.35) муайян мешаванд, ба r-то баробариҳои аввалини (15.28) гузорем, онгоҳ баробариҳои номбурда нисбат ба $x_{r+1}, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r$ ба айният табдил мешаванд. Ин айниятҳоро нисбат ба тағьирьёбандаи x_l $(l = r+1, \ldots, n)$ дифференцирониданд ва $u_1, \ldots, u_r$ аз x_{r+1},

---

* Албатта, дар айни ҳол фарз карда мешавад, ки $m > r$ аст.

** Воқеан, дар нуқтаи номбурдаи N_0 ҳама функцияҳои $F_1, \ldots, F_r$ ба нуль баробар мешаванд ва якобиани $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_r)}{D(u_1, \ldots, u_r)} = (-1)^r \neq 0$ аст, яъне шарти теореман 15.2 иҷро мешавад.

..., x_n вобаста набуданашро ба эътибор гирифта, ифодаҳои зеринро ҳосил менамоем:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} = 0, \qquad (15.36^1)$$

. . . . . .

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial x_r}{\partial x_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} = 0. \qquad (15.36^r)$$

Қайд мекунем, ки баробариҳои (15.36′)—(15.36^r) барои ҳама қиматҳои тағьирьёбандаҳои x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n-и ягон атрофи нуқтаи M_0 дурустанд.

Барои бовар кардани он, ки функцияи u_{r+1} дар ягон атрофи нуқтаи M_0 аз u_1, ..., u_r вобаста аст, қиматҳои x_1, ..., x_r-ро, ки муодилаҳои (15.35) муайян мекунанд, ба баробарии $(r+1)$-уми (15.28) мегузорем. Дар ин ҳолат u_{r+1} ба функцияи аргументҳояш u_1, ..., u_k, u_{r+1}, ..., x_n табдил мешавад, чунки

$$u_{r+1} = \varphi_{r+1}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = \varphi_{r+1}[\psi_1(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \ldots, \psi_r(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), x_{r+1}, \ldots, x_n] = \Phi(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

(мо ин функцияро бо символи Ф ишорат кардем). Акнун исбот кардан лозим аст, ки барои ҳама қиматҳои тағьирьёбандаҳои x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n, ки дар атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи M_0 воқеанд, функцияи Ф аз x_{r+1}, ..., x_n вобаста нест. Барои ин исбот кардан кифоя аст, ки барои ҳама қиматҳои x_1, ..., x_n-и атрофи ба қадри кифоя хурди нуқтаи M_0 баробариҳои

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0 \quad (l = r+1, \ldots, n) \qquad (15.37)$$

дуруст мебошанд. Функцияи Ф-ро нисбат ба тағьирьёбандаи x_l $(l = r+1, \ldots, n)$ чун функцияи мураккаб медифференсиронем. Дар айни ҳол чунин ифодаро ҳосил менамоем:

$$\frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}. \qquad (15.36^{r+1})$$

Акнун минори зерини тартиби $(r+1)$-уми матрицаи (15.32)-ро муоина мекунем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_l} \\ \frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial x_r} & \frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial x_l} \end{vmatrix} \qquad (15.38)$$

Мувофиқи шарти масъала ин минор *дар ҳама ҷои атрофи нуқтаи* M_0 *ба нуль баробар мебошад.* Баробариҳои (15.36^1)—(15.36^{r+1})-ро ба пуркунандаҳои алгебравии мувофиқи Δ_1, ..., Δ_r, Δ_{r+1}-и элементҳои сутуни охирини минори (15.38) зарб мекунем ва баъди ин ҳамаи ин баробариҳоро ҷамъ менамоем. Дар асоси теорема дар бораи он, ки суммаи ҳосилҳои зарби элементҳои сутуни додашуда ба пуркунандаҳои алгебравии мувофиқи элементҳои ин (дигар) сутун ба детерминант (ба нуль) баробар аст, ифодаи

$$\Delta = \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \Delta_{r+1} \qquad (15.39)$$

-ро ҳосил мекунем*. Дар баробарии (15.39) символи Δ минори (15.38)-ро, ки дар ҳама ҷои атрофи нуқтаи M_0 ба нуль баробар аст, ифода мекунад ва пуркунандаи алгебравии Δ_{r+1} бо минори (15.33), ки дар нуқтаи M_0 ва, бинобар ин, дар ягон атрофи ин нуқта** ҳам аз нуль тафовут дорад, мувофиқ меояд. Аз баробарии (15.39) хулоса мебарорем, ки баробариҳои (15.37) дар ҳама ҷои ягон атрофи нуқтаи M_0 дуруст мебошанд. Теорема исбот шуд.

Мисол. Ба тадқиқи вобастагии функцияҳои зерин бармегардем:

$$u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$u_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

---

* Дар айни ҳол муҳокимароннеро, ки дар сах. 626 муфассал баён шуда буд, такрор мекунем.

** Азбаски ҳама ҳосилаҳои хусусии дар минори (15.33) дохилбуда дар нуқтаи M_0 бефосила мебошанд, пас худи минори (15.33) ҳам дар нуқтаи M_0 бефосила мебошад. Лекин онгоҳ мувофиқи теоремаи устувории аломати функцияи бефосила ин минор на фақат дар худи нуқтаи M_0, балки дар ягон атрофи он ҳам аз нуль тафовут дорад.

Матрицаи функционалии (15.32) чунин намуд дорад:

$$\begin{Vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2(x_2+x_3+x_4) & 2(x_1+x_3+x_4) & 2(x_1+x_2+x_4) & 2(x_1+x_2+x_3) \end{Vmatrix}.$$

Бовар кардан осон аст, ки ҳама детерминантҳои тартиби сеюм айниятан ба нуль баробар мебошанд, дар айни замон дар нуқтаи дилхоҳи фазои (x_1, x_2, x_3, x_4), ки дар он на ҳаман чор координатаи x_1, x_2, x_3, x_4 мувофиқ меоянд, ақаллан яке аз детерминантҳои тартиби дуюми

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

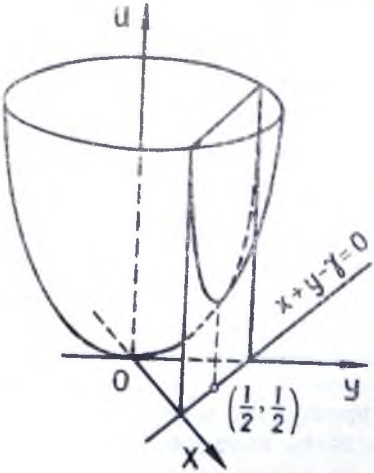
аз нуль тафовут дорад. Пас, дар атрофи нуқтаи номбурдаи дилхоҳ u_1 ва u_2 новобаста буда, u_3 аз u_1 ва u_2 вобаста мебошад.

§ 5. Экстремуми шартӣ

1. Мафҳуми экстремуми шартӣ. Мо дар § 6-уми боби 14 ба ҷустуҷӯи экстремумҳои локалии функцияҳое, ки аргументҳояшон бо ҳеҷ ягон шартҳои иловагӣ алоқаманд нестанд, машғул шудем. Дар баробари ин дар математика ва татбиқоти он аксаран *доир ба ҷустуҷӯи экстремуми функцияҳо масъалаҳое дучор мешаванд, ки аргументҳояшон шартҳои иловагии алоқамандиро қаноат менамоянд.* Ингуна экстремумҳоро барои аз экстремумҳои (ғайришартии) дар § 6-уми боби 14 омӯхташуда фарқ кардан *экстремумҳои шартӣ* меномем.

Масъалаи ҷустуҷӯи экстремуми шартиро мисол меорем. Экстремуми функцияи $u = x^2 + y^2$-ро дар мавриде ёфтан лозим аст, ки аргументҳои ин функция шарти алоқамандии $x + y - 1 = 0$-ро қаноат менамоянд. Ҳамин тариқ, экстремуми функцияи $u = x^2 + y^2$ *на дар ҳамаи ҳамвории Oxy, балки фақат дар хати рости* $x + y - 1 = 0$ ҷустуҷӯ карда мешавад. Барои ҳал кардани ин масъала қимати y-ро, ки аз шарти алоқамандии $x + y - 1 = 0$ муайян карда мешавад, ба муодилаи функцияи $u = x^2 + y^2$ мегузорем. Мо бо ҳамин роҳ масъалаи мазкурро ба масъалаи ҷустуҷӯи экстремуми ғайришартии функцияи $u = 2x^2 - 2x + 1$ меорем.

Экстремуми $u = 2x^2 - 2x + 1$ бо осонӣ ёфта мешавад: азбаски $u' = 4(x - 1/2)$, $u^{(2)} = 4$ мебошад, пас функцияи $u = 2x^2 - 2x + 1$ ҳангоми $x = 1/2$ будан ба минимуми $u = 1/2$ соҳиб аст. Ҳамин тариқ, функцияи $u = x^2 + y^2$ бо шарти алоқамандии $x + y - 1 = 0$ дар нуқтаи $(1/2, 1/2)$ ба минимуми шартии $u = 1/2$ соҳиб аст. Қайд мекунем, ки функцияи $u = x^2 + y^2$ дар нуқтаи $(0, 0)$ ба минимуми ғайришартии $u = 0$ соҳиб мешавад.



Расми 15.6

Бо вуҷуди он, ҳатто аз тасвири аёнӣ (расми 15.6) маълум мешавад, ки минимуми функцияи $u = x^2 + y^2$ (графикаш аз параболоиди чархзанӣ иборат аст) дар ҳамаи ҳамвории Oxy бо минимуми он дар хати рости $x + y - 1 = 0$ мувофиқ намеояд.

Масъалаи ҷустуҷӯи экстремуми шартиро ба таври умумӣ ҳал мекунем. Фарз мекунем, ки экстремуми функцияи дорои $m + n$ тағьирьёбандаи

$$u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \quad (15.40)$$

-ро ҳангоми вуҷудияти m-то шартҳои алоқамандии

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (15.41)$$

ёфтан лозим аст. Пеш аз ҳама худи мафҳуми экстремуми шартии функцияи (15.40)-ро ҳангоми мавҷудияти алоқамандии (15.41) аниқ мекунем. *Функцияи* (15.40) *ҳангоми вуҷудияти алоқамандии* (15.41) *дар нуқтаи* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_1, \ldots, \overset{\circ}{y}_m)$, *ки координатаҳояш шартҳои алоқамандии* (15.41)*-ро қаноат менамоянд, ба масксимум (минимум)-и шартӣ соҳиб аст, агар чунин атрофи нуқтаи* M_0 *ёфт шавад, ки дар ҳудудҳои он қимати функцияи* (15.40) *дар нуқтаи* M_0 *аз байни қиматҳои он дар ҳамаи нуқтаҳое, ки координатаҳояшон шартҳои алоқамандии* (15.41)*-ро қаноат менамоянд, калонтарин (хурдтарин) бошад.*

Ҳангоми вуҷудияти алоқамандии (15.41) барои ёфтани экстремуми шартии функцияи (15.40) фарз мекунем, ки функцияҳои қисми чапи баробариҳои (15.41) дар ягон атрофи нуқтаи муоинашавандаи M_0 дифференсиронидашаванда мебошанд, дар айни замон дар худи нуқтаи M_0 ҳосилаҳои хусусии функцияҳои номбурда нисбат ба $y_1, \ldots, y_n$ бефосила мебошанд ва якобиани

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \quad (15.42)$$

аз нуль тафовут дорад.

Дар ингуна маврид, дар асоси теоремаи 15.2, барои ададҳои мусбати ба қадри кифоя хурди $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ чунин атрофи нуқтаи $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$-и фазои тағьирьёбандаҳои $(x_1, \ldots, x_n)$ ёфт мешавад, ки дар ҳама ҷои ҳудудҳои ин атроф m-то функцияҳои

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (15.43)$$

муайян мебошанд, ки онҳо шартҳои $|y_1 - \overset{\circ}{y}_1| < \varepsilon_1, \ \ldots, \ |y_m - \overset{\circ}{y}_m| < \varepsilon_m$-ро қаноат менамоянд ва ҳангоми мавҷуд будани ин шартҳо ҳалҳои ягона ва дифференсиронидашавандаи системаи муодилаҳои (15.41) мебошанд. Мо функцияҳои ёфташудаи (15.43)-ро ба (15.40) гузошта, масъалаи дар нуқтаи M_0 мавҷуд будани экстремуми шартии функцияи (15.40) (ҳангоми вуҷудияти алоқамандии (15.41))-ро ба масъалаи дар нуқтаи M_0' мавҷуд будани экстремуми ғайришартии функцияи мураккаби аргументҳояш $x_1, \ldots, x_n$

$$u = f[x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi(x_1, \ldots, x_n)] = \\ = \Phi(x_1, \ldots, x_n) \qquad (15.44)$$

меорем. Масъалаи мавҷудияти экстремуми ғайришартии функцияи (15.44)-ро бо методҳои дар § 6-уми боби 14 баёншуда ҳал кардан мумкин аст*. Схемаи умумии баёншудаи ба экстремуми ғайришартӣ овардани экстремуми шартиро дар мисоли ҳал кардаамон татбиқ кардем. Акнун *ба ҳалли системаи* (15.41) *мурочиат накарда,* кӯшиш мекунем, ки шарти зарурии дар нуқтаи M_0 мавҷуд будани экстремуми шартиро муқаррар намоем. Инак, бигзор функцияи (15.40) дар нуқтаи M_0 дифференсиронидашаванда бошад ва ҳангоми вуҷудияти алоқамандии (15.41) дар ҳамин нуқта ба экстремуми шартӣ соҳиб аст ё (ҳамон тавр) функцияи (15.44) дар нуқтаи M_0' экстремуми ғайришартӣ дорад. Мувофиқи дар § 6-уми боби 14 муқаррар кардаамон, дар нуқтаи M_0' баробари нуль будани дифференциали функцияи $u = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$

$$du = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0, \qquad (15.45)$$

ки нисбат ба $dx_1, \ldots, dx_n$ айният мебошад, шарти зарурии (дар ҳамин нуқта) экстремуми ғайришартии ҳамин функция мебошад. Дар асоси инвариантии шакли дифференциали якум ва баробарии (15.44) формулаи (15.45)-ро ба намуди

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_m} dy_m = 0 \qquad (15.46)$$

---

* Дар айни ҳол, албатта, функцияи (15.40)-ро ба ягон шарт тобеъ кунонидан лозим меояд.

навиштан мумкин аст. (Дар ин формула ҳама ҳосилаҳои хусусӣ дар нуқтаи M_0 гирифта мешаванд.) Лекин, бояд қайд кард, ки дар баробарии (15.46) $dy_1, \ldots, dy_m$ дифференциалҳои функцияҳои (15.43)-ро ифода менамоянд, чунки баробарии (15.46) нисбат ба $dy_1, \ldots, dy_m$ айният намебошад. Фарз мекунем, ки мо дар муодилаҳои алоқамандии (15.41) функцияҳои (15.43)-ро, ки ҳалли системаи (15.41) мебошанд, гузоштаем. Дар ин ҳангом муодилаҳои (15.41) ба айният табдил мешаванд ва мо ин айниятҳоро дифференсиронида, ифодаҳои зеринро ҳосил менамоем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m=0,\\
&\qquad\qquad\qquad

мондаро чун функцияҳои ин тағьирьёбандаҳо муоина кардем. Дар як қатор мавридҳо ин ба мураккабшавии ҳисобукитоб меорад. Лагранж методеро пешниҳод кард, ки он роли тағьирьёбандаҳоро симметрӣ менамояд. Ин пункт ба баёни ҳамин метод бахшида шудааст. Баробариҳои (15.47)-ро мувофиқан ба зарбкунандаҳои доимии дилхоҳи (ва ҳолоҳ номуайяни) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ зарб мекунем. Баробариҳои баъди зарб ҳосилшударо аъзо ба аъзо бо баробарии (15.46) ҷамъ мекунем. Дар натиҷа баробарии зеринро ҳосил менамоем:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} dy_m = 0 \quad (15.50)$$

ки дар ин ҷо функцияи

$$\Psi = f + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m \quad (15.51)$$

бо символи $\Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ ишорат шудааст. Мо минбаъд ин функцияро *функцияи Лагранж* меномем. Чунин мепиндорем, ки шартҳои дар пункти гузошта баёншуда барои функцияҳои (15.41) иҷро мешаванд ва функцияи (15.40) дифференсиронидашаванда мебошад ва, бинобар ин, зарбкунандаҳои $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$-ро чунон интихоб мекунем, ки баробариҳои

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0 \quad (15.52)$$

иҷро шаванд. Инро иҷро кардан мумкин аст, чунки баробариҳои (15.52) ба системаи хаттии

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0 \end{aligned}\right\}$$

меоранд, ки детерминанти он (якобиани (15.42)) аз нуль тафовут дорад. Дар асоси баробариҳои (15.52) баробарии (15.50) чунин намуд мегирад:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n = 0, \quad (15.53)$$

Азбаски мувофиқи фарзиятҳои пешин тағьирьёбандаҳои $x_1, \ldots, x_n$ *бузургиҳои новобаста* мебошанд, пас аз баробарии (15.53) хулоса мебарояд, ки

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} = 0. \tag{15.64}$$

Ба муодилаҳои (15.52) ва (15.54) шартҳои алоқамандии (15.41)-ро ҳамроҳ карда, мо барои муайян кардани $(n + m)$-то координатаҳои нуқтаҳои экстремуми шартии имконпазир ва m-то зарбкунандаҳои $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ системаи $n + 2n$ муодилаҳои

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0, F_1 = 0, \ldots, F_m = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15.55}$$

-ро ҳосил менамоем. Барои амалӣ гардонидани ин метод чунин рафтор менамоянд. Функцияи Лагранж (15.51)-ро тартиб медиҳанд ва барои ин функция *нуқтаҳои экстремуми ғайришартии имконпазирро* меёбанд. Барои хориҷ кардани зарбкунандаҳои $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ шартҳои алоқамандии (15.41)-ро истифода менамоянд. Чунин усули ҷустуҷӯи нуқтаҳои экстремуми шартии имконпазир қонунӣ мебошад, чунки он моро ба системаи $n + 2m$ муодилаҳои (15.55) меорад. Мисоли татбиқи методи зарбкунандаҳои Лагранж дар п. 4 омӯхта мешавад.

3. Шарти кифоягӣ. Мо дар ин пункт яке аз усулҳои тадқиқи иловагии нуқтаҳои экстремуми шартии имконпазирро меомӯзем. Фарз мекунем, ки дар нуқтаи M_0 шарти зарурии экстремум (15.55) иҷро мешавад. Ғайр аз он, дар атрофи нуқтаи M_0 дифференсиронидашавандагии дукаратаи функцияҳои (15.40) ва (15.41) ва дар худи нуқтаи M_0 бефосила будани ҳама ҳосилаҳои хусусии тартиби 2-юмро ба таври иловагӣ талаб мекунем. Аз сохти функцияи Лагранж (15.51) маълум аст, ки ҳангоми *мавҷудияти алоқамандиҳои* (15.41) экстремуми функцияи (15.40) бо экстремуми функцияи Лагранж мувофиқ меоянд*. Лекин онгоҳ аз натиҷаҳои § 6 боби 14 чунин хулоса мебарояд, *ки барои ҳосил кардани шарти кифоягии экстремуми функцияи* (15.40) *дар нуқтаи* M_0 *ҳангоми мавҷуд будани алоқамандиҳои* (15.41) *ба шарти* (15.55) *талаботи аломатмуайянӣ дар ҳамин нуқта* $d^2\Psi$*-ро ҳамроҳ кардан лозим аст*. Дар айни ҳол мувофиқи натиҷаҳои § 6 боби 14 мо дар нуқтаи M_0 мавҷуд будани минимум (агар ҳангоми вуҷуд доштани алоқамандиҳои (15.41) $d^2\Psi|_{M_0} > 0$

* Ин аз он бармеояд, ки ҳангоми мавҷуд будани алоқамандиҳои (15.41) фарқи $f(M) - f(M_0)$ бо фарқи $\Psi(M) - \Psi(M_0)$ мувофиқ меояд.

бошад) ва максимум (агар $d^2\Psi\big|_{M_0} < 0$ бошад)-ро муқаррар карда метавонем. Боз чанд қайди характери амалӣ доштаро баён мекунем. Дифференциали дуюм $d^2\Psi$-ро дар нуқтаи додашудаи M_0-и экстремуми имконпазир ҳисоб кардан мумкин аст, агар ҳама тағьирьёбандаҳои $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ бузургиҳои новобаста бошанд. Воқеан, дар мавриди умумӣ дифференциали дуюм $d^2\Psi$-и функцияи Ψ ба хосияти инвариантии шакл соҳиб нест ва бояд дар асоси аз $x_1, \ldots, x_n$ вобаста будани $y_1, \ldots, y_m$ бо баробарии зерин муайян карда шавад:

$$d^2\Psi = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + dy_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}d^2y_1 + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial y_m}d^2y_m.$$

Лекин баробариҳои

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial\Psi}{\partial y_m} = 0$$

дар нуқтаи экстремуми имконпазири M_0 дуруст мебошанд, чунки $d^2\Psi$ мисли мавриде, ки тағьирьёбандаҳои $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ бузургиҳои новобаста мебошанд, бо ҳамон формула

$$d^2\Psi = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + dy_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2\Psi \tag{15.56}$$

муайян карда мешавад. Азбаски муқаррар кардани аломатмуайянии $d^2\Psi$ *фақат ҳангоми мавҷудияти алоқамандиҳои* (15.41) талаб карда мешавад, пас ҳангоми ҳисоб дар формулаи $d^2\Psi$ (15.55) ба ҷои $dy_1, \ldots, dy_m$ қиматҳояшонро, ки аз системаи (15.47) муайян мешаванд, гузоштан лозим аст. Баъди ин масъалаи аломатмуайянии $d^2\Psi$-ро дар нуқтаи додашудаи M_0 омӯхтан лозим аст. Акнун мисолеро муоина мекунем.

4. Мисол. Фарз мекунем, ки қиматҳои максималӣ ва минималии бузургиҳои детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & \ldots & z_n \end{vmatrix} \tag{15.57}$$

-ро ёфтан лозим аст; дар айни ҳол суммаи квадрати элементҳои ҳар як сатри ин детерминант маълум аст. Масъала ба ҷустуҷӯи

қиматҳои экстремумии функцияи n^2 тағьирьёбандаҳои (15.57) ҳангоми мавҷудияти n-то шартҳои алоқамандии*

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + \ldots + z_1^2 &= h_1, \\ x_2^2 + y_2^2 + \ldots + z_2^2 &= h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^2 + y_n^2 + \ldots + z_n^2 &= h_n \end{aligned}\right\} \tag{15.58}$$

меорад, ки дар ин система $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ададҳои мусбати додашуда мебошанд.** Барои ҳал кардани ин масъала масъалаи соддатареро муоина ва ҳал мекунем. *Детерминанти* (15.57)-*ро муоина мекунем. Дар нуқтаи экстремумӣ элементҳои ҳама сатрҳоро, ғайр аз як сатри k-ум, қайд менамоем.* Дар ингуна мавриди детерминанти (15.57)-ро чун функцияи дорои n-то тағьирьёбандаҳои $x_k, y_k, \ldots, z_k$ муоина кардан мумкин аст. Детерминантро аз рӯи элементҳои сатри k-ум ҷудо карда

$$\Delta = x_k X_k + y_k Y_k + \ldots + z_k Z_k \tag{15.59}$$

ифодаи ошкори ин функцияро ҳосил кардан мумкин аст. Дар ин ҷо пуркунандаҳои алгебравии элементҳои мувофиқи $x_k, y_k, \ldots, z_k$ бо $X_k, Y_k, \ldots, Z_k$ ишорат карда шудаанд. Азбаски элементҳои ҳама сатрҳои детерминант, ғайр аз элементҳои сатри k-ум, дар нуқтаи экстремумӣ қайдшуда мебошанд, пас $X_k, Y_k, \ldots, Z_k$-ро чун ададҳои доимӣ муоина кардан мумкин аст. *Ҳангоми мавҷудияти як шарти алоқамандии****

$$x_k^2 + y_k^2 + \ldots + z_k^2 = h_k \tag{15.60}$$

масъалаи ҷустуҷӯи *экстремумҳои функцияи* (15.59)-ро ба миён мегузорем.

Барои ҳалли ин масъала функцияи Лагранж:

$$\Psi = x_k X_k + y_k Y_k + \ldots + z_k Z_k + \lambda(x_k^2 + y_k^2 + \ldots + z_k^2 - h_k^2) \tag{15.61}$$

-ро тартиб медиҳем ва барои ин функция масъалаи экстремуми қатъиро ҳал менамоем. Аз шартҳои

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = X_k + 2\lambda x_k = 0,$$

---

* Масъалаи *мавҷудияти* қиматҳои экстремумӣ шубҳае намеорад, чунки функцияи (15.57) дар маҷмӯи сарбастаи (15.58) функцияи бефосилаи n^2 тағьирьёбандаҳои худаш мебошад.

** Гарчи ақаллан яке аз ададҳои $h_1, \ldots, h_n$ ба нуль баробар бошанд ҳам, мо мавриди тривиалиро қатъи назар мекунем. Дар ин мавриди детерминанти (15.57) айниятан ба нуль баробар аст.

*** Мо аз шартҳои (15.58) шарти k-умро ба сифати ин шарт мегирем.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_k} = Y_k + 2\lambda y_k = 0, \ ..., \ \frac{\partial \Psi}{\partial z_k} = Z_k + 2\lambda z_k = 0$$

координатаҳои нуқтаҳои экстремуми имконпазирро меёбем:

$$x_k = -\frac{X_k}{2\lambda}, \quad y_k = -\frac{Y_k}{2\lambda}, \ ..., \ z_k = -\frac{Z_k}{2\lambda}. \tag{15.62}$$

Аз шарти алоқамандии (15.60) зарбкунандаи доимии λ-ро бо осонӣ хориҷ кардан мумкин аст. Аз ин шарт ду қиматро меёбем:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{X_k^2 + Y_k^2 + ... + Z_k^2}{4h_k}} > 0, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{X_k^2 + Y_k^2 + ... + Z_k^2}{4h_k}} < 0.$$

(Дар айни ҳол ҳангоме ки ҳамаи X_k, Y_k, ..., Z_k-ҳо баробари нуль мебошанд, мо мавриди тривиалиро қатъи назар мекунем, чунки дар ин маврид детерминанти (15.59) айниятан ба нуль баробар аст.)

Ҳамин тариқ, мо ду нуқтаи экстремуми имконпазирро ҳосил мекунем:

$$M_1 \left(-\frac{X_k}{2\lambda_1}, -\frac{Y_k}{2\lambda_1}, ..., -\frac{Z_k}{2\lambda_1}\right) \text{ ва } M_2 \left(-\frac{X_k}{2\lambda_2}, -\frac{Y_k}{2\lambda_2}, ..., -\frac{Z_k}{2\lambda_2}\right).$$

Исбот мекунем, ки дар нуқтаи M_1 минимуми шартӣ ва дар нуқтаи M_2 максимуми шартӣ иҷро мешавад. Барои ин дифференциали дуюм $d^2\Psi$-и функцияи Лагранж (15.51)-ро ҳисоб мекунем. Яъне

$$d^2\Psi = 2\lambda[(dx_k)^2 + (dy_k)^2 + ... + (dz_k)^2].$$

Аз ин формула натиҷа мебарояд, ки $d^2\Psi$ ҳангоми $\lambda = \lambda_1 > 0$ будан (яъне дар нуқтаи M_1) шакли квадратии муайяни мусбат ва ҳангоми $\lambda = \lambda_2 < 0$ будан (яъне дар нуқтаи M_2) шакли квадратии муайяни манфиро ифода мекунад. Инак, функцияи (15.59) ҳангоми мавҷудияти алоқамандии (15.60) дар нуқтаи M_1 минимуми шартӣ ва дар нуқтаи M_2 максимуми шартӣ дорад. Ҳангоми мавҷудияти шарти (15.60) қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функцияи (15.59)-ро ҳисоб накарда, мебинем, ки дар ҳамон нуқтаҳое, ки дар онҳо ин қиматҳо соҳибанд, баробариҳои (15.62) дуруст мебошанд, пас баробариҳои

$$\frac{x_k}{X_k} = \frac{y_k}{Y_k} = ... = \frac{z_k}{Z_k} \tag{15.63}$$

дурустанд. Акнун ҳангоми мавҷудияти n-то алоқамандиҳои (15.58) қиматҳои экстремуми детерминанти (15.57)-ро ҳисоб мекунем. Маънои ишоратҳои қабулшудаи X_k, Y_k, ..., Z_k-ро нигоҳ дошта, мувофиқи хосияти маълуми детерминант (барои i-и дилхоҳи нобаробари k)

$$x_iX_k + y_iY_k + \ldots + z_iZ_k = 0 \quad (i \neq k) \tag{15.34}$$

-ро навишта метавонем. Аз баробариҳои (15.63) ва (15.64) меёбем, ки

$$x_ix_k + y_iy_k + \ldots + z_iz_k = 0 \text{ (ҳангоми } i \neq k \text{ будан)}. \tag{15.65}$$

Баробариҳои (15.58) ва (15.65) ва қоидаи зарби детерминантҳо имконият медиҳанд, ки чунин хулоса барорем: ҳангоми детерминанти Δ-ро ба худаш зарб кардан детерминанте ҳосил мешавад, ки ҳама элементҳои он, ба ғайр аз элементҳои диагонали асосӣ, ки мувофиқан ба $h_1, h_2, \ldots, h_n$ баробаранд, ба нуль баробар мебошанд. Ҳамин тариқ,

$$\Delta \cdot \Delta = \Delta^2 = h_1h_2 \ldots h_n.$$

Пас, ҳангоми мавҷудияти алоқамандиҳои (15.58) қиматҳои максимум ва минимуми бузургиҳои детерминанти (15.57) мувофиқан ба $+\sqrt{h_1h_2 \ldots h_n}$ ва $-\sqrt{h_1h_2 \ldots h_n}$ баробар мешаванд. Ҳамин тариқ

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{h_1h_2 \ldots h_n}$$

ё

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{(x_1^2 + \ldots + z_1^2)(x_2^2 + \ldots + z_2^2) \ldots (x_n^2 + \ldots + z_n^2)}. \tag{15.66}$$

Нобаробарии охирин, ки барои детерминанти дилхоҳи (15.57) дуруст аст, *нобаробарии Адамар** номида мешавад.

Қ а й д. Нобаробарии Адамар (15.66) ҳангоми $n = 3$ будан соҳиби тасвири геометрии содда мебошад. Дар ин маврид $|\Delta|$ ҳаҷми параллелепипедеро, ки дар порчаҳои OA_1, OA_2 ва OA_3 сохта шудааст, ифода менамояд (ин порчаҳо ибтидои координатаҳо O-ро бо нуқтаҳои $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ пайваст мекунанд). Нобаробарии (15.56) чунин ҷумларо тасдиқ мекунад: аз ҳамаи параллелепипедҳое, ки соҳиби теғаҳои дарозиашон додашуда мебошанд, параллелепипеди росткунҷа ҳаҷми калонтарин дорад.

---

* Жак Адамар — математики франсавӣ (1865—1963).

ИВАЗ КАРДАНИ ТАҒЬИРЬЁБАНДАҲО

Дар якқатор масъалаҳои анализ ва фаслҳои дигари математика масъалаҳое дучор мешаванд, ки ба иваз кардани тағьирьёбандаҳо оид мебошанд. Ин масъаларо баён мекунем. Фарз мекунем, ки ягон ифодаи

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots\right) \tag{15.67}$$

дода шудааст. Дар ин ифода тағьирьёбандаҳои новобастаи x, y, функцияи $z = z(x, y)$ ва ҳосилаи хусусии он ҳастанд. Ба ҷои тағьирьёбандаҳои новобастаи x, y ва функцияи $z = z(x, y)$ тағьирьёбандаҳои новобастаи нави u, v ва функцияи нави $w = w(u, v)$ ҷорӣ карда мешаванд, дар айни ҳол муносибате ҳаст, ки ба воситаи онҳо u, v ва w бо x, y ва z ифода мешаванд:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, z), \\ v &= \psi(x, y, z), \\ w &= \chi(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{15.68}$$

Акнун ифодаи (15.67)-ро ба ифодаи дорои тағьирьёбандаҳои нави u, v ва w табдил додан лозим аст. Дар айни ҳол, мо фарз мекунем, ки функцияҳои (15.68) кифоя маротиба дифференсиронидашаванда мебошанд ва системаи (15.68)-ро нисбат ба x, y ва z ва ду муодилаи аввалини (15.68)-ро нисбат ба x ва y ҳал кардан мумкин аст.

Барои ҳал кардани ин масъала ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ...-ро ба воситаи u, v, w, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, ... ифода кардан кифоя аст. Чи тавр иҷро кардани инро нишон медиҳем.

Азбаски $z = z(x, y)$ ва $w = w(x, y)$ мебошад, пас дифференциалҳои якуми функцияҳои (15.68)-ро менависем:

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right), \tag{15.69}$$

$$dv = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}dz = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right), \tag{15.70}$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = \frac{\partial \chi}{\partial x}dx + \frac{\partial \chi}{\partial y}dy + \frac{\partial \chi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right). \tag{15.71}$$

du ва dv-ро, ки бо формулаҳои (15.69) ва (15.70) муайян мешаванд, ба ифодаи (15.71) гузошта, системаи ду муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right] + \frac{\partial w}{\partial v}\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right] &= \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial u}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right] + \frac{\partial w}{\partial v}\left[\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right] &= \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}, \end{aligned}\right\}$$

аз ин система $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$-ро бо осонӣ ифода кардан мумкин аст:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}}.$$

Агар ифодаи (15.67) низ аз ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм вобаста бошад, онгоҳ барои муайян кардани ин ҳосилаҳо (ба воситаи ҳосилаҳои хусусии w аз рӯи u ва v) дифференциалҳои якуми ҳосилаҳои тартиби якуми ҳисоб кардашударо навиштан лозим аст.

Қайди 1. Дар мавриде, ки тағйирёбандаҳои кӯҳна на бо муносибати (15.68), балки бо муносибати ноошкори намуди

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(u, v, w, x, y, z) &= 0, \\ \Phi_2(u, v, w, x, y, z) &= 0, \\ \Phi_3(u, v, w, x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{15.72}$$

алоқаманданд, тағйирёбандаҳоро ҳамин тавр иваз кардан мумкин аст.

Қайди 2. Мо фақат барои мухтасарии навишт ба мавриди ду тағйирёбандаи новобаста маҳдуд шудем. Усули мазкур барои мавриди тағйирёбандаҳои новобастаи шумораашон дилхох (ва, аз ҷумла, барои мавриди як тағйирёбандаи новобаста) татбиқшаванда аст.

Мисол. Бигзор z функцияи тағйирёбандаҳои x ва y бошад. Ифодаи*

$$F = \Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ба координатаҳои кутбии u ва v

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v \tag{15.73}$$

табдил дода шавад.

Дар ин мисол фақат тағйирёбандаҳои новобаста иваз карда мешаванд. Дар айни ҳол функцияи z бетағйир мемонад. Аз (15.73) натиҷа мебарояд, ки

$$dx = \cos v\, du - u\sin v\, dv, \quad dy = \sin v\, du + u\cos v\, dv,$$

бинобар ин, аз муносибати

---

* Ин ифода *оператори Лаплас* номида мешавад. Он дар математика ва татбиқоти он роли калон мебозад. Пьер Симон Лаплас — астроном, математик ва физики франсавӣ (1749—1827).

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\cos v\, du - u \sin v\, dv) + \frac{\partial z}{\partial y}(\sin v\, du + u \cos v\, dv) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Коэффициентҳои назди du ва dv-ро баробар карда, меёбем, ки

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos v + \frac{\partial z}{\partial y}\sin v = \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$-\frac{\partial z}{\partial x}u \sin v + \frac{\partial z}{\partial y}u \cos v = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Аз ин ҷо

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos v \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{u}\sin v \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \sin v \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{u}\cos v \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.74)$$

Акнун $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$-ро меёбем. Азбаски $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}$ мебошад, пас аз формулаи (15.74) меёбем, ки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \cos v \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial u} - \frac{1}{u}\sin v \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial v} =$$

$$= \cos v \frac{\partial}{\partial u}\left[\cos v \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{u}\sin v \frac{\partial z}{\partial v}\right] - \frac{1}{u}\sin v \frac{\partial}{\partial v}\left[\cos v \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{u}\sin v \frac{\partial z}{\partial v}\right].$$

Баъди ҳисоб

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2}{u}\sin v \cos v \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{u^2}\sin^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} +$$

$$+ \frac{1}{u}\sin^2 v \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{2}{u^2}\sin v \cos v \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Ҳамин тавр, аз формулаи дуюми (15.74) меёбем, ки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \sin v \frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial u} + \frac{1}{u}\cos v \frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial v} =$$

$$= \sin^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{2}{u}\sin v \cos v \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{u^2}\cos^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} +$$

$$+ \frac{1}{u}\cos^2 v \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{2}{u^2}\sin v \cos v \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Ҳамин тариқ, оператори Лаплас $\Delta z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ дар координатаҳои кутбии u ва v чунин намуд дорад:

$$\Delta z = \frac{\partial z^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

БОБИ 16

БАЪЗЕ ТАТБИҚОТИ ГЕОМЕТРИИ ҲИСОБИ ДИФФЕРЕНЦИАЛӢ

§ 1. Хатҳои каҷи гирдгард ва дискриминантии оилаи якпараметраи хатҳои каҷи ҳамвор

1. Қайди пешакӣ. Мо хатҳои каҷи ҳамворро ё бо ёрии муодилаҳои параметрии

$$x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha), \tag{16.1}$$

дар ин ҷо α — ягон параметр, ё бо ёрии муодилаҳои намуди

$$F(x, y) = 0 \tag{16.2}$$

ифода мекунем. Минбаъд ба мо мафҳумҳои *нуқтаҳои оддӣ* ва *махсуси* хати каҷ лозим мешаванд.

Бигзор хати каҷи L бо муодилаҳои параметрии (16.1) муайян шавад, дар айни ҳол функцияҳои $x = \varphi(\alpha)$ ва $y = \psi(\alpha)$ ҳангоми $\alpha = \alpha_0$ будан ҳосилаҳои бефосила доранд. Нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$-и хати каҷи L-ро, ки координатаҳояш x_0 ва y_0 мувофиқан ба $\varphi(\alpha_0)$ ва $\psi(\alpha_0)$ баробаранд, *нуқтаи оддӣ* меномем, агар

$$\varphi'^2(\alpha_0) + \psi'^2(\alpha_0) \neq 0 \tag{16.3}$$

бошад. Агар ҳангоми $\alpha = \alpha_0$ будан муносибати

$$\varphi'^2(\alpha_0) + \psi'^2(\alpha_0) = 0 \tag{16.4}$$

иҷро шавад, нуқтаи M_0-ро *нуқтаи махсуси* хати каҷи L меномем.

Бигзор хати каҷи L бо муодилаи (16.2) муайян шавад, дар айни ҳол функцияи $F(x, y)$ дар ягон атрофи нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$-и ин хати каҷ дифференсиронидашаванда мебошад ва дар нуқтаи номбурда нисбат ба x ва y ҳосилаҳои хусусии бефосила дорад.

Нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$-ро нуқтаи оддии хати каҷи L меномем, агар дар ин нуқта муносибати*

$$F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0 \tag{16.5}$$

иҷро шавад. Агар дар нуқтаи M_0 муносибати

$$F_x'^2 + F_y'^2 = 0 \tag{16.3}$$

иҷро шавад, онгоҳ мо ин нуқтаро нуқтаи махсуси хати каҷи L меномем. *Агар нуқтаи M_0-и хати каҷи L нуқтаи оддӣ бошад, онгоҳ хати каҷи L дар ягон атрофи ин нуқта графики ягон функцияи дифференсиронидашавандаи $y = f(x)$, ё графики ягон функцияи дифференсиронидашавандаи $x = g(y)$-ро тасвир мекунад.*

Воқеан, бигзор хати каҷи L бо муодилаҳои параметрии (16.1) муайян шавад ва, ғайр аз он, шарти (16.3) иҷрошаванда бошад. Аз бефосилагии ҳосилаҳои $\varphi'(\alpha)$ ва $\psi'(\alpha)$ (ҳангоми $\alpha = \alpha_0$ будан) ва аз шарти (16.3) натиҷа мебарояд, ки дар ягон атрофи α_0 ақаллан яке аз ҳосилаҳо, масалан $\varphi'(\alpha)$, ба нуль баробар нест. Онгоҳ функцияи $x = \varphi(\alpha)$ дар атрофи қайдшуда функцияи қатъиян монотонии дифференсиронидашаванда мебошад. Дар ин мавридҳо функцияи чаппаи монотонии дифференсиронидашавандаи $\alpha = \varphi^{-1}(x)$ вуҷуд дорад. Ин функцияро ба ифодаи $y = \psi(\alpha)$ гузошта, мо бовар мекунем, ки хати каҷи L дар ягон атрофи нуқтаи M_0 графики функцияи дифференсиронидашавандаи $y = f(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$-ро тасвир мекунад. Дурустии тасдиқоти баёншуда барои мавриде, ки хати каҷ бо ёрии муодилаи (16.2) тасвир мешавад, аз он бармеояд, ки дар атрофи нуқтаи оддӣ теоремаи 15.1 (оид ба функцияҳои ноошкор) амал мекунад ва, бинобар ин, қитъаи ба нуқтаи оддӣ ҳамшафати хати каҷ графики функцияи дифференсиронидашавандаи $y = f(x)$ ё функцияи $x = g(y)$-ро тасвир менамояд.

Қайди 1. Дар геометрия, агар дар ягон атрофи нуқтаи M_0-и хати каҷи L ин хати каҷ графики ягон функцияи дифференсиронидашавандаро тасвир намояд, онгоҳ ин нуқтаро нуқтаи оддӣ меноманд ва агар дар атрофи дилхоҳи ин нуқта хати каҷи L графики функцияи дифференсиронидашавандаро тасвир накунад, он нуқтаро нуқтаи махсус меноманд. Мо дидем, ки нуқтаи хати каҷи L, ки мувофиқи таъриф нуқтаи оддӣ мебошад, аз нуқтаи назари геометрӣ низ нуқтаи оддӣ мешавад. Мисолҳое овардан мумкин аст, ки нуқтаи хати каҷ, ки мувофиқи таъриф нуқтаи махсус мебошад, аз нуқтаи назари геометрӣ нуқтаи оддӣ мешавад. Ҳамин тариқ, таърифи нуқтаҳои оддӣ назар ба таърифи геометриашон маҳдудтар мебошад, лекин дар татбиқот қулайтар аст.

Акнун мафҳуми *расиши* хатҳои каҷи L_1 ва L_2 (дар нуқтаи умумии M_0-ашон)-ро ҷорӣ мекунем. Чунин мегӯем: хатҳои каҷи

---

* Мафҳуми нуқтаҳои оддӣ ва махсуси хати каҷи (16.2) ҳанӯз дар п. 3 § 2 боби 15 ҷорӣ шуда буд.

L_1 ва L_2 дар нуқтаи умумиашон M_0 ба якдигар мерасанд, агар ҳар ду хатҳои каҷ дар нуқтаи M_0 расандаҳо дошта бошанд ва ин расандаҳо воқеи якдигар бошанд.

Минбаъд ба мо *шарти расиши* ду хатҳои каҷи L_1 ва L_2 лозим мешавад.

Бигзор хати каҷи L_1 бо муодилаҳои (16.1) ва хати каҷи L_2 бо муодилаи (16.2) муайян карда шаванд ва $M_0(x_0, y_0)$ нуқтаи умумии ин хатҳои каҷ бошад (дар айни ҳол координатаҳои x_0 ва y_0 ба қимати $\alpha = \alpha_0$-и параметри α мувофиқ меоянд). Чунин меҳисобем, ки нуқтаи M_0 *нуқтаи оддии* хатҳои каҷи L_1 ва L_2 мебошад ва ин хатҳои каҷ дар нуқтаи M_0 ба якдигар мерасанд. Онгоҳ ин хатҳои каҷ дар атрофи M_0 графики функцияҳои дифференцирониданашавандаро тасвир менамоянд. Барои муайянӣ чунин меҳисобем, ки L_1 ва L_2 графики функцияҳои $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ мебошанд. Азбаски мувофиқи шарт хатҳои каҷи L_1 ва L_2 дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ ба якдигар мерасанд, пас коэффитсиентҳои кунҷии расандаҳои графики функцияҳои $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ (дар M_0) баробаранд, яъне

$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0). \tag{16.7}$$

Формулаҳои дифференсирониии функцияҳое, ки ба намуди параметрӣ дода шудаанд (ба § 11 боби 5 ниг.), ва формулаҳои дифференсирониии функцияҳои ноошкор (ба п. 2 § 2 боби 15 ниг.)-ро истифода карда, ифодаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$f_1'(x_0) = \frac{\psi'(\alpha_0)}{\varphi'(\alpha_0)}. \quad f_2'(x_0) = -\frac{F_x'(M_0)}{F_y'(M_0)}. \tag{16.8}$$

Формулаҳои (16.8) имконият медиҳанд, ки баробарии (16.7)-ро ин тавр нависем:

$$\frac{\psi'(\alpha_0)}{\varphi'(\alpha_0)} = -\frac{F_x'(M_0)}{F_y'(M_0)} \tag{16.9}$$

ё ки

$$F_x'(M_0)\,\varphi'(\alpha_0) + F_y'(M_0)\,\psi'(\alpha_0) = 0. \tag{16.10}$$

Мо минбаъд муносибати охиринро *шарти дар нуқтаи M_0 ба якдигар расидани хатҳои каҷи L_1 ва L_2*, ки мувофиқан бо муодилаҳои (16.1) ва (16.2) дода шудаанд, меномем. Аргументи функцияҳоро ба эътибор нагирифта ва ишоратҳои $\varphi' = \frac{dx}{d\alpha}$ ва $\psi' =$

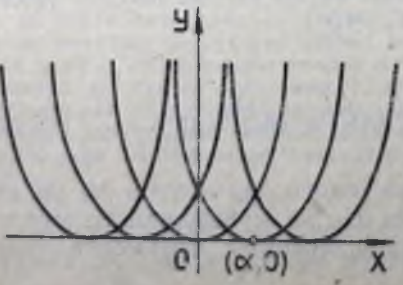
$= \frac{dy}{d\alpha}$-ро истифода карда, мо шарти расишро ин тавр менависем:

$$F_x' \frac{dx}{d\alpha} + F_y' \frac{dy}{d\alpha} = 0. \qquad (16.11)$$

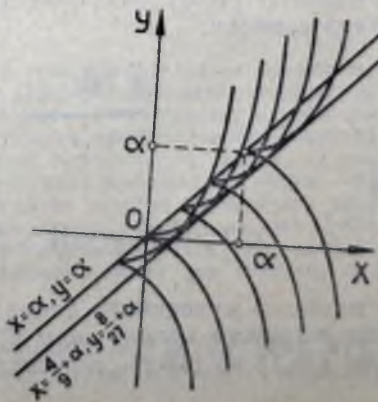
Қайди 2. Агар дар нуқтаи умумии M_0-и хатҳои қаҷи L_1 ва L_2, ки мувофиқан бо муодилаҳои (16.1) ва (16.2) дода шудаанд, шарти расиш (16.10) (ё, (16.11)) иҷро шавад ва агар дар ин ҳангом нуқтаи M_0 нуқтаи оддии хатҳои қаҷи L_1 ва L_2 бошад, онгоҳ хатҳои қаҷи L_1 ва L_2 дар нуқтаи M_0 ба якдигар мерасанд. Воқеан, аз муносибатҳои (16.3) ва (16.5) ва аз шарти (16.10) ё шарти (16.9), ё шарти $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi'(\alpha_0)} = -\frac{F_y'(M_0)}{F_x'(M_0)}$, яъне баробарии коэффициентҳои кунҷии расандаҳои хатҳои қаҷи L_1 ва L_2 (дар нуқтаи умумии M_0) бармеояд. Ин чунин маъно дорад, ки хатҳои қаҷи L_1 ва L_2 дар M_0 ба якдигар мерасанд. Агар M_0 нуқтаи махсуси ақаллан яке аз хатҳои қаҷи L_1 ва L_2 бошад ҳам, шарти расиш иҷро мешавад.

Инак, шарти расиш (16.10) ҳам дар мавриде, ки хатҳои қаҷи L_1 ва L_2 дар нуқтаи M_0 ба якдигар мерасанд ва ҳам дар мавриде, ки M_0 нуқтаи махсуси ақаллан яке аз ин хатҳои қаҷ мебошад, иҷро мешавад.

2. Оилаи якпараметраи хатҳои қаҷи ҳамвор. Нуқтаҳои характеристикии оилаи хатҳои қаҷ. Дар масъалаҳои геометрӣ ва физикавии гуногун аксар вақт оилаи хатҳои қаҷи ҳамвор дучор мешаванд. Дар оптикаи геометрӣ даста (оила)-и нурҳои инъикосшуда ва шикаста, дар механика оилаи траекторияҳои имконпазири зарраҳои материалӣ дар майдони дода-



Расми 16.1.



Расми 16.2.

шудаи қувваҳо, дар геометрия оилаи расандаҳои хатҳои кач муоина карда мешаванд. Яке аз тарзҳои имконпазири дода шудани ингуна оилаи хатҳо аз зерин иборат аст. Функцияи $F(x, y, \alpha)$-и дорои се тағьирьёбандаҳои x, y, α муоина карда мешавад ва барои ҳар як қимати параметри α-и маҷмӯи додашудаи $\{\alpha\}^*$ оилаи хатҳои кач бо ёрии муодлаи

$$F(x, y, \alpha) = 0 \qquad (16.12)$$

муайян карда мешавад.

Муносибати (16.12) *оилаи якпараметраи хатҳои каҷи ҳамворро* муайян мекунад. Параметри α-ро параметри оилаи ин хатҳои кач меномем.

Мисолҳои оилаи якпараметраи хатҳои каҷи ҳамворро муоина мекунем.

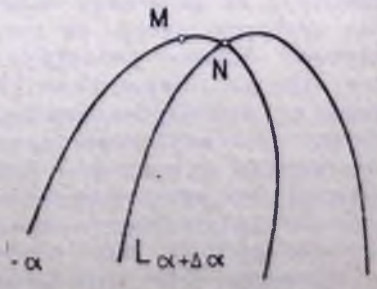
1°. Муодилаи $y - (x - \alpha)^2 = 0$ оилаи параболаҳоеро муайян мекунад, ки онҳо дар натиҷаи дар тири Ox кӯчонидани параболаи $y - x^2 = 0$ ҳосил мешаванд (расми 16.1).

2°. Муодилаи $(y - \alpha)^2 - (x - \alpha)^2 = 0$ оилаи параболаҳои нимкубиро муайян мекунад, ки онҳо дар натиҷаи ба қади биссектрисаи кунҷи координатии якум параллель кӯчонидани параболаи нимкубии $y^2 = x^3$ ҳосил мешаванд (расми 16.2).

Бигзор функцияи $F(x, y, \alpha)$ дар соҳаи дода шудани қиматҳояш функцияи дифференсиронидашаванда бошад. Дар ин маврид мафҳуми *нуқтаи характеристикии* хати каҷи оилаи хатҳои качеро, ки бо муносибати (16.12) муайян мебошанд, ҷорӣ кардан мумкин аст. Нуқтаи $M(x, y)$ *нуқтаи характеристикии* хати каҷи оилаи хатҳои каҷи (16.12) (ки ба қимати додашудаи α-и параметри оилаи хатҳои кач мувофиқ аст) номида мешавад, агар координатаҳои ин нуқта (x ва y) системаи муодилаҳои

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, \alpha) &= 0, \\ F_\alpha'(x, y, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16.13)$$

-ро қаноат намоянд. Тасвир (интерпретация)-и геометрии нуқтаи характеристикии хати каҷи оилаи хатҳои каҷи (16.12)-ро муоина мекунем. Барои содда шуданаш ба мавриде, ки ду хати каҷи оилаи хатҳои кач якдигарро мебуранд,** махдуд мешавем. Бигзор L_α ва $L_{\alpha+\Delta\alpha}$ ду хати каҷи оилаи хатҳои каҷи (16.12) бошанд, ки онҳо дар қиматҳои параметрҳои



Расми 16.3

* Одатан маҷмӯи $\{\alpha\}$ ягон интервалро ифода менамояд.

** Чунин оилаи хатҳои каҷе ҳастанд, ки ду хати каҷи дилхоҳи онҳо якдигарро намебуранд. Оилаи параболаҳое, ки бо муодилаи $y - (x - \alpha)^3 = 0$ муайян мешаванд, мисоли чунин оилаи хатҳои кач мебошанд.

α ва $\alpha + \Delta\alpha$ дурустанд (расми 16.3). Координатаҳои нуқтаи буриш (N)-и онҳо системаи муодилаҳои

$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

ё системаи баробарқувваи

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$
$$\frac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

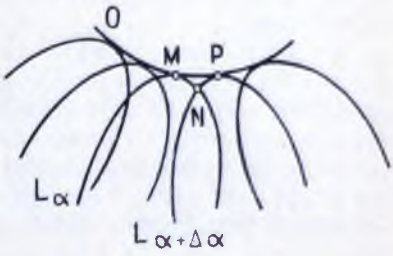
-ро қаноат менамоянд. Агар $\Delta\alpha \to 0$, онгоҳ N, ки дар хати қаҷи $F(x, y, \alpha) = 0$ воқеъ аст, умуман, ба ягон нуқтаи M-и ин хати қаҷ майл менамояд. Азбаски $\lim\limits_{\Delta\alpha \to 0} \dfrac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = F_\alpha'(x, y, \alpha)$ мебошад, пас координатаҳои нуқтаи M муодилаҳои (16.13)-ро қаноат менамоянд, ва, бинобар ин, нуқтаи M нуқтаи характеристикии хати қаҷи оилаи хатҳои қаҷ мебошад. Инак, нуқтаи характеристикии хати қаҷи додашуда — ин ҳамон нуқтаест, ки ҳангоми $\Delta\alpha \to 0$ лимити нуқтаи буриши хати қаҷи додашудаи L_α ва хати қаҷи ба он наздики $L_{\alpha+\Delta\alpha}$ мебошад.

3. Хатҳои қаҷи гирдгард ва дискриминантии оилаи якпараметраи хатҳои қаҷи ҳамвор. Бигзор оилаи якпараметраи хатҳои қаҷи ҳамвор бо муносибати (16.12) муайян шаванд. Дар ин ҳангом мо чунин меҳисобем, ки функцияи $F(x, y, \alpha)$ дар соҳаи дода шуданаш функцияи дифференсиронидашаванда мебошад. Мафҳуми оилаи *гирдгарди* хатҳои қаҷи (16.12)-ро чорӣ менамоем.

Хати қаҷи гирдгарди оилаи якпараметраи хатҳои қаҷи (16.12) *гуфта хати қаҷи О-ро меноманд, ки он* 1) *дар ҳар як нуқтааш фақат ба як хати қаҷи оилаи хатҳои қаҷи* (16.12) *мерасад,* 2) *дар нуқтаҳои гуногун ба хатҳои қаҷи гуногуни оилаи номбурда мерасад.* Маънои геометрии аёниаш: хати қаҷи гирдгард дар нуқтаҳои характеристикии хатҳои қаҷ ба ҳамин хатҳои қаҷ мерасад ва, бинобар ин, дар шароити муайян онро чун ҷои геометрии нуқтаҳои характеристикии хатҳои қаҷи оилаи хатҳои қаҷ муоина кардан мумкин аст. Воқеан, фарз мекунем, ки M нуқтаи расиши хати қаҷи гирдгарди O ва хати қаҷи L_α-и оилаи хатҳои қаҷ, ки дар қиматҳои α-и параметри оилаи хатҳои қаҷ дуруст аст (расми 16.4). Фарз мекунем, ки P нуқтаи расиши хати қаҷи гирдгарди O ва хати қаҷи $L_{\alpha+\Delta\alpha}$-и оилаи хатҳои қаҷ, ки дар қиматҳои $\alpha + \Delta\alpha$-и параметр дуруст аст ва N нуқтаи буриши хатҳои қаҷи L_α ва $L_{\alpha+\Delta\alpha}$ мебошад. Аз тасвири аёнӣ фаҳмост, ки ҳангоми $\Delta\alpha \to 0$ нуқтаҳои P ва N ба нуқтаи M майл мекунанд, яъне хати қаҷи гирдгарди O фақат дар нуқтаи характеристикии M-и хати қаҷи L_α ба ҳамин хати қаҷ мерасад.

Ҷои геометрии нуқтаҳои характеристикии хатҳои каҷи оилаи хатҳои каҷи (16.12)-ро *хати каҷи дискриминантии* оилаи ҳамин хатҳои каҷ меномем. Дар кадом ҳолат хати каҷи дискриминантӣ хати каҷи гирдгард мешавад? Инро аниқ мекунем. Леммаи зеринро пешакӣ исбот мекунем.

Л е м м а. Бигзор $M_0(x_0, y_0)$ нуқтаи характеристикии оилаи $F(x, y, \alpha) = 0$, ки дар қиматҳои α_0-и параметри оила дуруст аст, бошад. Бигзор, баъд, функцияҳои $F(x, y, \alpha)$ ва $F_\alpha'(x, y, \alpha)$ дар ягон атрофи нуқтаи (x_0, y_0, α_0) дифференсиронидашаванда бошад ва ҳосилаҳои хусусии ин функцияҳо нисбат ба x ва y дар худи нуқтаи (x_0, y_0, α_0) бефосила бошанд. Он-



Расми 16.4.

гоҳ, агар якобиани $\dfrac{D(F, F_\alpha)}{D(x, y)}$ *дар нуқтаи (x_0, y_0, α_0) аз нуль тафовут дошта бошад, пас хати каҷи дискриминантӣ, ки аз нуқтаи M_0 мегузарад, дар ягон атрофи ин нуқта бо муодилаҳои параметрии $x = \varphi(\alpha)$ ва $y = \psi(\alpha)$ [дар ин ҷо $\varphi(\alpha)$ ва $\psi(\alpha)$ — функцияҳои дар ягон атрофи α_0 дифференсиронидашаванда] дода шуданаш мумкин аст.*

И с б о т. Азбаски нуқтаи $M_0(x, y_0)$ нуқтаи характеристикии хати каҷи оилаи хатҳои каҷ, ки дар қиматҳои α_0-и параметри оилаи хатҳои каҷ дуруст аст, пас $F(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$ ва $F_\alpha'(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$ мебошад ва, бинобар ин, дар асоси шарти лемма, системаи муодилаҳои (15.13), ки нуқтаҳои характеристикии хатҳои каҷи оиларо муайян мекунад, ҳама талаботи теоремаи 15.2 (оид ба ҳалшавандагии системаи муодилаҳо нисбат ба x ва y)-ро қаноат менамояд. Пас, дар ягон атрофи нуқтаи α_0 ду функцияи

$$x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha), \tag{16.14}$$

ки ҳалли ягонаи (16.13) буда, функцияҳои бефосила ва дифференсиронидашаванда мебошанд, муайянанд. Хати каҷе, ки муодилаҳои параметрии (16.14) муайян мекунанд, аз нуқтаҳои характеристикӣ иборат аст ва, аз ҳамин сабаб, нуқтаи дискриминантии оилаи хатҳои каҷ, ки аз нуқтаи M_0 мегузаранд, мебошад. Дар асоси ягонагии ҳалли системаи (16.13) нуқтаҳои гуногуни хати каҷи дискриминантӣ, ки бо муодилаҳои параметрии (16.14) муайян мешаванд, нуқтаҳои характеристикии хатҳои каҷи гуногуни оилаи (16.12) мебошанд. Акнун шартҳои иловагиеро нишон медиҳем, ки ҳангоми иҷро шудани онҳо хати каҷи дискриминантие, ки аз нуқтаи M_0 мегузарад, дар ягон атрофи ин нуқта хати каҷи гирдгардро тасвир менамояд.

Теорема и 16.1. *Бигзор ғайр аз шартҳои дар лемма баёншуда шартҳои зерин иҷро шаванд*: 1) *ҳосилаҳои* F_x', F_y', $F_{\alpha x}''$, $F_{\alpha y}''$, $F_{\alpha\alpha}''$ *дар ягон атрофи нуқтаи* (x_0, y_0, α_0) *бефосила мебошанд*; 2) *муносибати* $F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0$, $F_{\alpha\alpha}'' \neq 0$ *дар нуқтаи* (x_0, y_0, α_0) *иҷро мешаванд. Онгоҳ хати каҷи дискриминантие, ки аз нуқтаи характеристикии* $M_0(x_0, y_0)$ *мегузарад, дар ягон атрофи ин нуқта хати каҷи гирдгарди оилаи хатҳои каҷи муоинашаванда мебошад.*

Исбот. Ягон қитъаи хати каҷи дискриминантиеро, ки аз нуқтаи M_0 мегузарад, дар шартҳои баёншуда бо муодилаҳои параметрии (16.14), ки ҳалли системаи (16.13) мебошанд, ифода кардан мумкин аст. Мо аллакай ба ин боварӣ ҳосил кардем. Ин ҳалҳоро ба муодилаҳои (16.13) мегузорем ва айниятҳои ҳосилшудаи $F(x, y, \alpha) \equiv 0$ ва $F_\alpha'(x, y, \alpha) \equiv 0$-ро нисбат ба α медифференсиронем. Чунин ифодаҳоро ҳосил менамоем:

$$\left.\begin{aligned} F_x' \frac{dx}{d\alpha} + F_y' \frac{dy}{d\alpha} + F_\alpha' &\equiv 0, \\ F_{\alpha x}'' \frac{dx}{d\alpha} + F_{\alpha y}'' \frac{dy}{d\alpha} + F_{\alpha\alpha}'' &\equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{16.15}$$

Азбаски $F_\alpha' \equiv 0$ мебошад, пас муносибати якуми (16.15) чунин намудро қабул мекунад:

$$F_x' \frac{dx}{d\alpha} + F_y' \frac{dy}{d\alpha} \equiv 0.$$

Мо мебинем, ки шарти расиш (13.11)-и хати каҷи дискриминантӣ ва хати каҷи мувофиқи оилаи хатҳои каҷ дар ҳар як нуқтаи ин хати каҷи дискриминантӣ иҷро мешавад. Бинобар ин, дар асоси қайди 2-юми п. 1, барои ба итмом расонидани исботи теорема муқаррар кардан кифоя аст, ки ҳар як нуқтаи характеристикии хати каҷи оилаи хатҳои каҷе, ки дар ягон атрофи нуқтаи M_0 воқеанд, ва ҳар як нуқтаи хати каҷи дискриминантии ин атроф нуқтаҳои оддӣ мебошанд. Мувофиқи шарти теорема, муносибати $F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0$ дар нуқтаи (x_0, y_0, α_0) иҷро мешавад, ки он, дар асоси бефосилагии ҳосилаҳои хусусии F_x' ва F_y' дар ягон атрофи нуқтаи номбурда ҳам иҷро хоҳад шуд. Пас, ҳама нуқтаҳои характеристикии хатҳои каҷи оилаи хатҳои каҷ дар ин атроф нуқтаҳои оддӣ мебошанд. Аз муносибати $F_{\alpha\alpha}'' \neq 0$ (ки, дар асоси бефосилагии ин ҳосила, дар ягон атрофи нуқтаи (x_0, y_0, α_0) дуруст мебошад) ва аз айнияти дуюми (16.15) натиҷа мебарояд, ки ҳосилаҳои $\frac{dx}{d\alpha}$ ва $\frac{dy}{d\alpha}$ дар атрофи номбурда дар як

вакт ба нуль баробар намешаванд*. Ҳамин тариқ, ҳама нуқтаҳои хати каҷи дискриминантӣ дар ягон атрофи M_0 нуқтаҳои оддӣ мебошанд. Аз леммаи ҳозир исботшуда натиҷа мебарояд, ки нуқтаҳои гуногуни хати каҷи дискриминантӣ нуқтаҳои характеристикии хатҳои каҷи гуногуни оилаи хатҳои каҷ мебошанд. Теорема исбот шуд.

Қайди 1. Муҳокимаронихои исботи теорема нишон медиҳанд, ки дар мавриди иҷро шудани фақат шарти лемма дар ҳар як нуқтаи хати каҷи дискриминантӣ шарти расиши ин хати каҷ ва хати каҷи оила иҷро мешавад. Мо қайд карда будем (ба қайди 2-юми п. 1 ниг.), ки шарти расиш дар мавриде, ки нуқтаи умумии ду хати каҷ нуқтаи махсуси ақаллан яке аз онҳо мебошад, низ иҷро мешавад. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки хати каҷи дискриминантӣ ҷои геометрии нуқтаҳои махсуси хатҳои каҷи оиларо ифода карда метавонанд (агар дар ҳар як нуқтаи характеристикӣ шарти $F_x'^2 + F_y'^2 = 0$ иҷро шавад). Қайд мекунем, ки худи хати каҷи дискриминантӣ ҳам дорои нуқтаҳои махсус шуда метавонад (агар $\frac{dx}{d\alpha}$ ва $\frac{dy}{d\alpha}$ дар як вақт баробари нуль бошанд).

Қайди 2. Теореми 16.1-ро ба таври геометрӣ ин тавр баён кардан мумкин аст. *Агар ҳама хатҳои каҷи оилаи хатҳои каҷ ва хати каҷи дискриминантӣ нуқтаҳои махсус надошта бошанд, онгоҳ хати каҷи дискриминантии номбурда хати каҷи гирдгард мебошад.*

Мисолҳо меорем.

1°. Хати каҷи дискриминантии оилаи хатҳои каҷи $y - (x - \alpha)^2 = 0$ ёфта шавад.

Чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем: $F(x, y, \alpha) = y - (x - \alpha)^2$, $F_\alpha'(x, y, \alpha) = 2(x - \alpha)$. Ҳамин тариқ, системаи (16.13) чунин намуд мегирад:

$$y - (x - \alpha)^2 = 0, \quad 2(x - \alpha) = 0.$$

Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки нуқтаҳои характеристикӣ координатаҳои $(\alpha, 0)$ доранд (ба расми 16.1 ниг.). Бинобар ин хати каҷи дискриминантӣ бо муодилаҳои параметрии

$$x = \alpha, \quad y = 0$$

ифода мешаванд. Баъд чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем: $F_x' = 2(x - \alpha)$, $F_y' = 1$. Дар нуқтаҳои хати каҷи дискриминантӣ

---

* Бефосилагии ин ҳосилаҳо бевосита аз бефосилагии ҳосилаҳои F_x', F_y', $F_{\alpha x}''$, $F_{\alpha y}''$, $F_{\alpha\alpha}''$ ва аз муносибати (16.15) бармеояд (аз (16.15) ҳосилаҳои $\frac{dx}{d\alpha}$ ва $\frac{dy}{d\alpha}$-ро бо тарзи алгебравӣ ёфтан мумкин аст).

$F_x'^2 + F_y'^2 = 1$. Ғайр аз он, $F_{\alpha\alpha}'' = -2 \neq 0$. Ҳамин тариқ, хати качи дискриминанти — тири Ox хати качи гирдгард мебошад.

2°. Хати качи дискриминантии оилаи $(y-\alpha)^2 - (x-\alpha)^3 = 0$ ёфта шавад. Чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем: $F(x, y, \alpha) = (y-\alpha)^2 - (x-\alpha)^3$, $F_\alpha'(x, y, \alpha) = -2(y-\alpha) + 3(x-\alpha)^2$. Системаи (16.13) чунин намуд мегирад:

$$(y-\alpha)^2 - (x-\alpha)^3 = 0, \quad -2(y-\alpha) + 3(x-\alpha)^2 = 0.$$

Аз ин чо натича мебарояд, ки хати качи дискриминанти ду хати ростест, ки бо муодилаҳои параметрии

$$x = \alpha,\ y = \alpha \quad \text{ва} \quad x = \frac{4}{9} + \alpha,\ y = \frac{8}{27} + \alpha$$

муайян мешаванд (ба расми 16.2 ниг.). Бовар кардан осон аст, ки дар нуқтаҳои хати рости $x = \alpha$, $y = \alpha$ шарти $F_x'^2 + F_y'^2 = 0$ иҷро мешавад, яъне ин қисми хати качи дискриминанти чои геометрии нуқтаҳои махсуси хатҳои качи оилаи хатҳои кач мебошанд. Хати качи $x = \frac{4}{9} + \alpha$, $y = \frac{8}{27} + \alpha$ хати качи гирдгарди оилаи хатҳои муоинашуда мебошад. Ба ин бовар кардан осон аст.

4. Сатҳҳои гирдгард ва дискриминантии оилаи сатҳҳои якпараметра. Оилаи сатҳҳои якпараметраеро, ки бо муодилаи

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{16.16}$$

муайян мешаванд, муоина мекунем. Фарз мекунем, ки функцияи $F(x, y, z, \alpha)$ дар соҳаи дода шудани қиматҳояш функцияи дифференсиронидашаванда мебошад. Хати L-и сатҳи оилаи (16.16), ки дар қиматҳои α-и параметри оила дуруст аст, *хати характеристики (ё характеристика)* номида мешавад, агар координатаҳои нуқтаҳои ин хат системаи муодилаҳои

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, \alpha) &= 0, \\ F_\alpha'(x, y, z, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{16.17}$$

-ро қаноат намоянд. Чои геометрии характеристикаҳо *сатҳи дискриминантии* оилаи (16.17) номида мешаванд. *Сатҳи О, ки ба ҳама сатҳҳои оила мерасад, оилаи сатҳҳои якпараметраи гирдгарди* (16.16) *номида мешавад.*



Расми 16.5.

Тасдиқоти зеринро исбот кардан мумкин аст.

Агар ҳама сатҳҳои оила ва сатҳи дискриминанти нуқтаҳои махсус надошта бошанд, онгоҳ сатҳи дискриминантии ҳомбурда сатҳи гирдгард мебошад.

Сатҳи дискриминантӣ ҷои геометрии нуқтаҳои махсуси сатҳҳои оила мебошад ва худаш соҳиби нуқтаҳои махсус буда метавонад.

Мисоли зеринро мебинем. Оилаи сфераҳои гирдгарди радиусашон доимии R ёфта шаванд, ки маркази онҳо дар нуқтаҳои хати каҷи додашудаи L* (дар расми 16.5 яке аз ингуна сфераҳои марказаш нуқтаи M-и хати каҷи L тасвир шудааст) воқеъ буда, бо муодилаҳои

$$x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha), \quad z = \chi(\alpha)$$

муайян мешаванд.

Оилаи сфераҳои якпараметраи муоинашаванда бо муодилаи зерин муайян мешаванд:

$$[x - \varphi(\alpha)]^2 + [y - \psi(\alpha)]^2 + [z - \chi(\alpha)]^2 - R^2 = 0. \qquad (16.18)$$

Характеристикаҳои оилаи сфераҳои номбурда аз муодилаи (16.18) ва муодилаи

$$[x - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) + [y - \psi(\alpha)]\psi'(\alpha) + [z - \chi(\alpha)]\chi'(\alpha) = 0 \qquad (16.19)$$

муайян карда мешаванд.

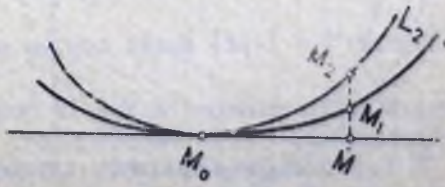
Муодилаи (16.19) ҳамвориеро ифода мекунад, ки он аз маркази сфера (M) гузашта, ба расандаи хати каҷи L перпендикуляр аст. Бинобар ин, давраҳое, ки хатҳои буриши сфераҳои муоинашавандаю ҳамвории (16.19)-ро тасвир менамоянд, характеристикаҳо мебошанд (ба расми 16.5 ниг.). Агар L давра бошад, онгоҳ сфераҳои гирдгард тор (ғӯла)-ро тасвир менамоянд.

§ 2. Баҳамрасиши хатҳои каҷи ҳамвор

1. Мафҳуми тартиби баҳамрасиши хатҳои каҷи ҳамвор. Бигзор ду хатҳои каҷи L_1 ва L_2 дар ягон нуқтаи M_0** ба якдигар расанд (расми 16.6). Фарз мекунем, ки M нуқтаи дилхоҳи расандаи умумии хатҳои каҷи L_1 ва L_2, M_1 ва M_2 нуқтаҳои буриши перпендикуляри аз нуқтаи M***-и расанда ба хатҳои каҷи L_1 ва L_2 гузаронидашуда мебошанд (ба расми 16.6 ниг.). Чунин мегӯем: *ду хати каҷи L_1 ва L_2 дар нуқтаи M_0 тартиби баҳамрасиши n доранд, агар лимити аз нуль тафовутдори*

$$\lim_{M \to M_0} \frac{|M_1M_2|}{|MM_0|^{n+1}} \qquad (16.20)$$

мавҷуд бошад. (Дар айни хол $|M_1M_2|$ дарозии порчаи M_1M_2 ва $|MM_0|$ дарозии порчаи MM_0-ро ифода мекунад.)



Расми 16.6.

---

* Ингуна оилаи сфераҳои гирдгард *сатҳҳои каналмонанд* номида мешаванд.

** Яъне аз M_0 мегузаранд ва дар ин нуқта расандаҳои ҳамроҳшуда доранд.

*** Дар айни ҳол фарз карда мешавад, ки агар нуқтаи M ба M_0 ба қадри кифоя наздик бошад, онгоҳ перпендикуляре, ки аз нуқтаи M ба расанда гузаронида шудааст, ҳар яки хатҳои каҷи L_1 ва L_2-ро фақат дар як нуқта мебурад.

Қайди 1. Агар лимити (16.20) ба нуль баробар бошад, онгоҳ мегӯянд, ки хатҳои качи L_1 ва L_2 тартиби баҳамрасиши аз n баланд доранд.

Қайди 2. Агар ду хати качи L_1 ва L_2 дар нуктаи M_0 тартиби баҳамрасиши аз *n-и дилхоҳ* баланд дошта бошанд, онгоҳ мегӯянд, ки онҳо дар ин нукта *тартиби беохири баҳамрасиш* доранд.

Мисолҳо. 1°. Хатҳои каче, ки графики функцияҳои $y = x^2$ ва $y = 3x^2$ мебошанд, дар ибтидои координатаҳо O ба якдигар мерасанд, дар айни ҳол тири Ox расандаи умумии онҳо мебошад. Дар тири Ox нуктаи M-и абсциссааш x-ро қайд карда, мо $|OM| = |x|$-ро ҳосил мекунем ва $|M_1M_2| = |3x^2 - x^2| = 2x^2$ мешавад.

Азбаски

$$\lim_{M\to 0} \frac{|M_1M_2|}{|OM|^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{|x|^2} = 2 \neq 0$$

мебошад, пас хатҳои качи муоинашаванда дар нуктаи O тартиби баҳамрасиши як доранд.

2°. Баъд, ду хати качи L_1 ва L_2-ро, ки хати якумаш бо тири Ox ҳамчоя аст ва хати дуюмаш графики функцияи

$$y = \begin{cases} e^{-1/|x|} \text{ ҳангоми } x \neq 0 \text{ будан,} \\ 0 \text{ ҳангоми } x = 0 \text{ будан} \end{cases}$$

мебошад, муоина мекунем. Хатҳои качи номбурда дар ибтидои координатаҳо O тартиби беохири баҳамрасиш доранд. Азбаски дар нуктаи O тири Ox расандаи умумӣ мебошад, пас дар ин тир нуктаи M-и абсциссааш x-ро қайд карда, $|OM| = |x|$-ро ҳосил мекунем ва $|M_1M_2| = e^{-1/|x|}$ мебошад. Исбот кардан кифоя аст, ки барои n-и дилхоҳ $\lim\limits_{M\to 0} \dfrac{|M_1M_2|}{|OM|^{n+1}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/|x|}}{|x|^{n+1}}$ баробари нуль мешавад. $t = 1/|x|$ фарз карда, мо ин лимитро ба $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{n+1}}{e^t}$ меорем. Дар интиҳои п. 2 § 12 боби 8 исбот карда будем, ки лимити охирин ба нуль баробар аст.

2. Тартиби баҳамрасиши хатҳои каче, ки графики функцияҳо мебошанд. Фарз мекунем, ки ду хати качи L_1 ва L_2 мувофиқан графики функцияҳои $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ мебошанд. Боз фарз мекунем, ки ин хатҳои кач дар ягон нуктаи $M_0(x_0, f_1(x_0))$ ба якдигар мерасанд, дар айни ҳол нуктаи M_0 барои ҳар яки ин хатҳои кач* нуктаи оддӣ мебошад. Мо исбот мекунем, ки дар ин

---

* Таърифи нуктаи оддии хати качи бо муодилаи $F(x, y) = 0$ ифодашуда дар п. 1 § 1 баён шуда буд. Аз ҷумла, барои хати каче, ки бо муодилаи $y = f(x)$ дода шудааст, нуктаи $M_0(x_0, f(x_0))$ нуктаи оддӣ мебошад, агар ҳосилаи $f'(x)$ фақат дар нуктаи x_0 бефосила бошад.

фарзиятҳо таърифи дар пункти гузашта баёншудаи тартиби баҳамрасиши хатҳои кағи L_1 ва L_2-ро ба таърифи дигари ба он баробарқувва, ки барои татбиқот беҳтар мебошад, иваз кардан мумкин аст.

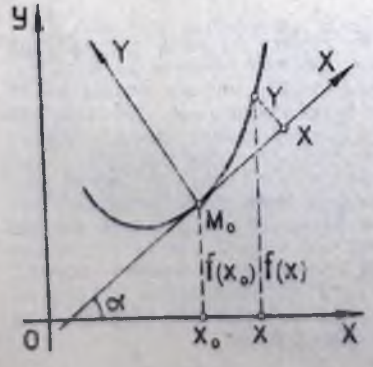
Бигзор Δx афзоиши дилхоҳи аргумент дар нуқтаи x_0 ва $x = x_0 + \Delta x$ бошад. *Хатҳои кағи L_1 ва L_2 дар нуқтаи $M_0(x_0, f_1(x_0))$ тартиби баҳамрасиши n доранд, агар лимити аз нуль тафовутдори зерин мавҷуд бошад*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|f_2(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0 + \Delta x)|}{|\Delta x|^{n+1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{|f_2(x) - f_1(x)|}{|x - x_0|^{n+1}}. \qquad (13.21)$$

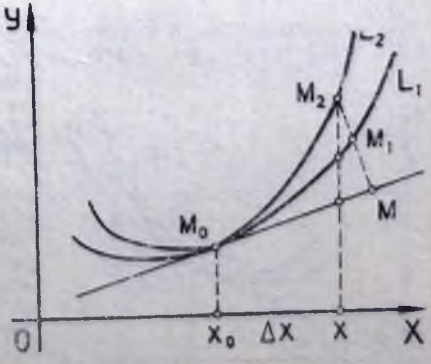
Барои он ки дар бораи тартиби баҳамрасиши хатҳои кағи L_1 ва L_2 (ба маънои таърифи дар пункти гузашта баёншуда) сухан гӯем, пеш аз ҳама исбот кардан лозим аст, ки ин хатҳои кағ дар ягон атрофи M_0 ба расандаи умумиашон якқимата проекция мешаванд. Леммаи зерини 1 ба ҳамин масъала бахшида шудааст. Қисми боқимондаи ҳамин пункт ба исботи боз ду леммаи дигар бахшида шудааст, ки аз исботи онҳо баробарқуввагии ду таърифи тартиби баҳамрасиши хатҳои L_1 ва L_2 бармеояд.

Л е м м а и 1. Агар нуқтаи $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтаи оддии хати кағи L, ки графики функцияи $y = f(x)$ мебошад, бошад, онгоҳ хати кағи L дар ягон атрофи M_0 ба расандаи худ якқимата проекция мешавад.

И с б о т. Пеш аз ҳама қайд мекунем, ки мавҷудияти расандаи хати кағи L (дар нуқтаи M_0) аз мавҷудияти ҳосилаи $f'(x_0)$ бармеояд. Акнун ба системаи нави координатаҳои росткунҷагии декартии XY мегузарем (барои ин ибтидои навро ба нуқтаи расиши M_0 гузошта, тири X-ро қад-қади расанда ба M_0 равона мекунем, расми 16.7). Агар кунҷи байни тири x ва тири X-ро бо α ишорат намоем, онгоҳ системаи нави координатаҳо аз системаи кӯҳна



Расми 16.7.



Расми 16.8.

ба воситаи ба нуқтаи $M_0(x_0, f(x_0))$ кӯчонидани ибтидои система ва ба кунҷи α гардиш додани тирҳо ҳосил мешавад. Формулаҳои маълуми табдилдиҳии координатаҳо (ҳангоми кӯчонидани ибтидо ва гардиш додани тирҳо)-ро

истифода карда (ба барориши 8 ниг.), ифодаҳои зерини координатаҳои нави X, Y-и нуқтаҳои хати качи L (ба воситаи координатаҳои кӯҳнаи x ва $y = f(x)$)-ро ҳосил менамоем:

$$\left.\begin{aligned} X &= (x - x_0)\cos\alpha + [f(x) - f(x_0)]\sin\alpha, \\ Y &= -(x - x_0)\sin\alpha + [f(x) - f(x_0)]\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (16.22)$$

Агар мо нишон диҳем, ки аз муодилаҳои (16.22) Y-ро чун функцияи X ифода кардан мумкин бошад (ин чунин маъно дорад, ки қитъаи хати качи L, ки ба M_0 ҳамшафат аст, ба тири X, яъне ба расанда якқимата проекция карда мешавад), онгоҳ мақсади мо иҷро мешавад. Барои ин исбот кардан кифоя аст, ки дар атрофи нуқтаи M_0 муодилаи якуми (16.22) нисбат ба x якқимата ҳалшаванда аст. (Вокеан, дар муодилаи якуми (16.22) x-ро ба воситаи X ифода карда ва ифодаи ҳосилшударо ба муодилаи дуюми (16.22) гузошта, мо Y-ро чун функцияи X муайян менамоем.) Мувофиқи теоремаи 15.1 исбот кардан кифоя аст, ки ҳосила нисбат ба x-и қисми рости муодилаи якуми (16.22) дар нуқтаи x_0 аз нуль тафовут дорад ва дар ин нуқта бефосила мебошад. Лекин ин маълум аст, чунки ҳосилаи номбурда намуди $\cos\alpha + f'(x)\sin\alpha$-ро дорад ва дар нуқтаи x_0, ки дар он $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ аст, ба $1/\cos\alpha$ баробар мебошад. Азбаски $\alpha \neq \pi/2$ аст, пас $\cos\alpha \neq 0$ мебошад. Лемма исбот шуд.

Бигзор хатҳои L_1 ва L_2, ки графики функцияҳои $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ мебошанд, дар нуқтаи $M_0(x_0, f_1(x_0))$, ки барои ҳар яки ин хатҳои каҷ нуқтаи оддӣ мебошад ва $x = x_0 + \Delta x$ аст, ба якдигар расанд. Фарз мекунем, ки аз нуқтаи $M_2(x, f_2(x))$ ба расанда (дар M_0) перпендикуляр гузаронида шудааст (расми 16.8) ва M_1 нуқтаи буриши ин перпендикуляру хати качи L_1* ва M нуқтаи буриши ин перпендикуляру расанда мебошад. Онгоҳ тасдиқоти зерин дуруст аст.

Л е м м а и 2. *Лимити аз нуль тафовутдори*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|f_2(x) - f_1(x)|}{|M_1M_2|}. \qquad (16.23)$$

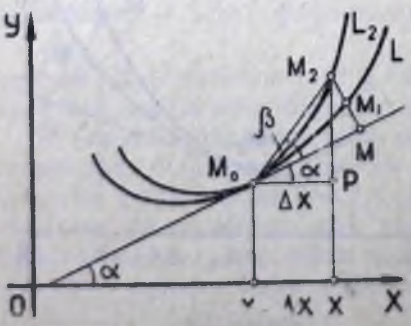
мавҷуд ҳаст.

Л е м м а и 3. *Лимити аз нуль тафовутдори*

$$\lim_{x \to 0} \frac{|M_0M|}{|\Delta x|} \qquad (16.24)$$

мавҷуд ҳаст.

Аз леммаҳои 2 ва 3 натиҷа мебарояд, ки лимити аз нуль тафовутдори (16.21) фақат дар ҳамон мавриде вуҷуд дорад, ки агар лимити аз нуль тафовутдори (16.20) мавҷуд бошад ва ин маънои баробарқуввагии ду таърифи тартиби баҳамрасишро дорад. Акнун леммаҳои 2 ва 3-ро исбот мекунем.



Расми 16.9.

И с б о т и л е м м а и 2. Барои соддагӣ масофаи M_1M_2-ро бо ρ ишорат мекунем ва барои муайянӣ чунин меҳисобем, ки хатҳои каҷи L_1 ва L_2 мисли дар расми 16.8 қайдшуда мавқеъ доранд. Агар X ва Y координатаҳои нуқтаи M_1 ва α кунҷи моили расанда (дар M_0) ва тири Ox бошад, онгоҳ

$$X = x + \rho\sin\alpha,$$
$$Y = f_2(x) - \rho\cos\alpha$$

---

* Дар асоси лемmаи 1 ҳангоми ба қадри кифоя хурд будани Δx ингуна нуқтаҳо фақат якто мешаванд.

мешавад. Азбаски нуқтаи M_1 дар хати каҷи L_1 воқеъ аст, пас $Y = f_1(X)$ ё $f_2(x) - \rho\cos\alpha = f_1(x + \rho\sin\alpha)$. Формулаи Лагранжро ба қисми рости баробарии охирин нисбат ба сегменти $[x,\ x + \rho\sin\alpha]$ татбиқ карда, ифодаи

$$f_2(x) - \rho\cos\alpha = f_1(x) + \rho\sin\alpha f'(\xi)$$

-ро ҳосил мекунем, дар ин ҷо ξ нуқтаест, ки дар дохили сегменти номбурда воқеъ мебошад. Азбаски ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\rho \to 0$ ва ҳосилаи $f'(x)$ дар нуқтаи x_0 бефосила мебошад, пас баробарии охиринро ба намуди

$$f_2(x) - \rho\cos\alpha = f_1(x) + \rho\sin\alpha\,[f'(x_0) + \varepsilon] \qquad (16.25)$$

навиштан мумкин аст, дар ин ҷо ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\varepsilon \to 0$. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ будаанашро ба эътибор гирифта, аз (16.25)

$$\frac{f_2(x) - f_1(x)}{\rho} = \frac{1}{\cos\alpha} + \varepsilon\sin\alpha$$

-ро ҳосил мекунем. Леммаи 2 исбот шуд.

Исботи леммаи 3. Кунҷи байни хордаи M_0M_2 ва расандаи M_0M-ро бо β ишорат менамоем (расми 16.9). Ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\beta \to 0$. Аз секунҷаҳои росткунҷаи M_0M_2P ва M_0M_2M (дар ин ҷо M_0P ба тири Ox параллель аст) меёбем, ки

$$|M_0M_2| = \frac{|\Delta x|}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{|M_0M|}{\cos\beta}.$$

Аз формулаи охирин маълум аст, ки

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{|M_0M|}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Леммаи 3 исбот шуд.

3. Шарти кифоягии баҳамрасиши тартиби n. Бигзор ду хати каҷи L_1 ва L_2, ки графики функцияҳои $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ мебошанд, дар нуқтаи $M_0(x_0,\ f_1(x_0))$ ба якдигар расанд. Тасдиқоти зерин дуруст аст.

Теорема 16.2. *Бигзор функцияҳои $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи x_0 $n + 1$ маротиба дифференсиронидашаванда бошанд, дар айни ҳол ҳосилаи $(n + 1)$-ум дар худи нуқтаи x_0 бефосила мебошад. Онгоҳ, агар дар нуқтаи x_0 муносибатҳои*

$$f_1(x_0) = f_2(x_0),\quad f_1'(x_0) = f_2'(x_0),\quad \ldots,\quad f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0),$$
$$f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0) \qquad (16.26)$$

иҷро шаванд, онгоҳ хатҳои каҷи L_1 ва L_2 дар нуқтаи $M_0(x_0,\ f_1(x_0))$ тартиби баҳамрасиши n доранд.

Исбот. Бигзор $F(x) = f_2(x) - f_1(x)$ бошад. Исбот кардан кифоя аст, ки лимити аз нуль тафовутдори

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|F(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}$$

вуҷуд дорад. Азбаски, дар асоси (16.23), $F(x_0)=F'(x_0)=\ldots=F^{(n)}(x_0)=0$, $F^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ аст, пас, барои функцияи $F(x)$ формулаи Тейлори аъзои боқимондааш шакли Лагранжро навишта, чунин ифодаро ҳосил мекунем:

$$F(x)=\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1. \tag{16.27}$$

Дар асоси дар нуқтаи x_0 бефосила будани ҳосилаи $(n+1)$-ум

$$F^{(n+1)}(x^0+\theta(x-x_0))=F^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon, \tag{16.28}$$

дар ин ҷо ҳангоми $x\to x_0$ $\varepsilon\to 0$. Аз муносибатҳои (16.27) ва (16.28):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|F(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}|F^{n+1}(x_0)|\neq 0.$$

Теорема исбот шуд.

Қайди 1. Агар ҳама шартҳои теоремаи 16.2, ба ғайр аз шарти $f_1^{(n+1)}(x_0)\neq f_2^{(n+1)}(x_0)$, иҷро шаванд, онгоҳ тасдиқ кардан мумкин аст, ки хатҳои каҷи L_1 ва L_2 дар нуқтаи M_0 тартиби баҳамрасиши *на пасттар аз n* доранд.

Қайди 2. Тартиби баҳамрасиши хати каҷи L-ро, ки графики функцияи $y=f(x)$-и дорои расандаи T дар нуқтаи $M_0(x_0, f(x_0))$ мебошад, аниқ мекунем. Дар айни ҳол чунин меҳисобем, ки функцияи $f(x)$ дар атрофи нуқтаи x_0 се маротиба дифференсиронидашаванда мебошад ва ҳосилаи сеюми он дар нуқтаи x_0 бефосила аст. Ба хотир меорем: расандаи T графики функцияи хаттии $y=\varphi(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ мебошад. Азбаски $\varphi(x_0)=f(x_0)$, $\varphi'(x_0)=f'(x_0)$ ва $\varphi''(x_0)=0$ мебошад, пас дар мавриди $f''(x_0)\neq 0$ будан хати каҷи L бо расандааш T тартиби баҳамрасиши $n=1$ дорад ва дар мавриди $f''(x_0)=0$ будан тартиби баҳамрасиш аз ду паст нест.

4. Давраи расанда. Бигзор $M_0(x_0, y_0)$ нуқтаи хати каҷи L, ки графики функцияи $y=f(x)$ аст, бошад ($y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 ҳосилаи сеюми бефосила дорад). Аз нуқтаи M_0 даврахои беҳад бисьёре гузаронидан мумкин аст, ки онҳо дар ин нуқта ба хати каҷи L мерасанд. Қисми ҳар яки ингуна даврахо, ки дар ягон атрофи нуқтаи M_0 воқеъ аст, графики функцияҳои намуди $y=f(x)$-ро тасвир менамоянд. Ба ин бовар кардан осон аст. Бинобар ин, мо дар бораи тартиби баҳамрасиши хати каҷи L ва

ягонтои ин даврахо (дар нуқтаи умумии онхо — M_0) сухан гуфта метавонем. Ҳамон аз ин даврахое, ки бо хати каҷи L *тартиби баҳамрасиши на аз ду пастро доранд, барои хати каҷи* L *(дар нуқтаи* M_0*) давраи расанда номида мешавад.* Тасдиқоти зерин шарти кифоягии дар хати каҷи L (дар нуқтаи M_0) мавҷуд будани даврахои расандаро муқаррар мекунад.

Теорема и 13.3. *Бигзор хати каҷи* L *графики функцияи* $y = f(x)$ *бошад, дар айни ҳол* $f(x)$ *дар нуқтаи* x_0 *ҳосилаи дуюми нобаробари нуль ва ҳосилаи сеюми бефосила дорад. Онгоҳ барои хати каҷи* L *дар нуқтаи* $M_0(x_0, f(x_0))$ *давраи расанда вуҷуд дорад.*

Исбот. Муодилаи давраи расандаро дар намуди

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2 \qquad (16.29)$$

ҷустуҷӯ мекунем; дар ин ҷо a, b ва ρ ададҳои доимие мебошанд, ки муайян кардани онхо матлуб аст. Муодилаи (16.29)-ро нисбат ба y ҳал мекунем ва ҳалли ёфташудаи $y = f(x)$-ро ба қисми чапи (16.29) мегузорем. Онгоҳ мо (16.29)-ро чун айният нисбат ба x (дар ин ҳангом, албатта, $y = y(x)$ мепиндорем) муоина карда метавонем. Айнияти (16.29)-ро нисбат ба x ду маротиба дифференсиронида, талаб мекунем, ки дар ифодаҳои ҳосилшуда ва дар худи ифодаи (13.29) қиматҳои y_0, y_0', y''-и функцияи $y = y(x)$ ва ду ҳосилаи якуми он дар нуқтаи x_0 мувофиқан ба $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ баробар шаванд:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_0' = f'(x_0), \quad y_0'' = f''(x_0).$$

Ҳамин тариқ, мо системаи зерини муодилаҳоро нисбат ба a, b ва ρ ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 &= \rho^2, \\ (x_0 - a) + (y_0 - b)\, y_0' &= 0, \\ 1 + (y_0')^2 + (y_0 - b)\, y_0'' &= 0. \end{aligned}$$

Дар мавриди $y'' = f''(x_0) \neq 0$, $\rho > 0$ будан ин система ҳалли ягона дорад:

$$a = x_0 - \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}\, y_0', \quad b = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \quad \rho = \frac{(1 + y_0'^2)^{3/2}}{|y_0''|}. \qquad (16.30)$$

Аз ин муҳокимаронихо натиҷа мебарояд, ки барои даврае, ки координатахо (a, b)-и марказ ва радиус ρ-и он бо формулаҳои (16.30) муайян карда мешаванд, ва хати каҷи L ҳама шартҳои қайди 1-уми теоремаи 16.2 иҷро мешаванд. Бинобар ин давраи номбурда давраи расанда мебошад.

Қ а й д. Агар дар шарти теореми 16.3 талаботи $f''(x_0) \neq 0$ бо талаботи муқобили $f''(x_0) = 0$ иваз карда шавад, онгоҳ дар хати каҷи L (дар нуқтаи M_0) давраи расанда вуҷуд надорад.

Аммо, дар асоси қайди 2-юми теореми 16.2, дар ин маврид хати каҷи L ва расандаи он (дар нуқтаи M_0) дар ин нуқта тартиби баҳамрасиши на аз ду паст доранд. Ҳамин тариқ, чунин ҳисобидан мумкин аст, ки дар мавриди номбурда давраи расанда дар нуқтаи M_0 ба хати рост табдил мешавад.

§ 3. Каҷии хати каҷи ҳамвор

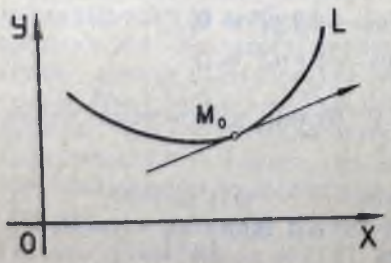
1. Мафҳуми каҷии хати каҷи ҳамвор. Бигзор хати каҷи L ба воситаи муодилаҳои параметрии $x = x(t)$, $y = y(t)$ дода шуда бошад. Фарз мекунем, ки шартҳои дар § 1 боби 11* баёншуда барои хати каҷи L иҷро мешаванд. Дар ингуна маврид дар нуқтаи дилхоҳи M-и хати каҷи L самти мусбатро интихоб кардан мумкин аст. Ҳамон самтеро, ки дар он нуқтаи M ҳангоми афзудани параметри t ҷой иваз мекунад, самти мусбати нуқтаи M-и хати каҷи t меномем.

Акнун дар хати каҷи L ягон нуқтаи M_0-ро, ки дар қиматҳои параметри t_0 дуруст аст, қайд мекунем, ва фарз менамоем, ки ин нуқта *нуқтаи оддии* хати каҷи L мебошад.

Онгоҳ қитъаи хати каҷи L, ки ба нуқтаи M_0 ҳамшафат аст, графики функцияҳои намуди $y = f(x)$ ё $x = f_1(y)$-ро тасвир мекунад, дар айни ҳол дар нуқтаи M_0 расандаи хати каҷи L вуҷуд дорад. Мо дар ин расанда самти мусбтеро, ки ба самти мусбати нуқтаи M_0-и хати каҷи L** мувофиқ аст, қайд менамоем.

Минбаъд дар ҳама ҷо мо фақат расандаҳои самтдорро муоина мекунем. Дар расми 13.10 самти расанда бо тирча қайд шудааст.

Акнун фарз мекунем, ки *ҳама нуқтаҳои хати каҷи* L, ки дар ягон атрофи нуқтаи қайдшудаи M_0 воқеанд, *нуқтаҳои оддӣ* мебошанд. Бигзор M яке аз ингуна нуқтаҳо бошад. Мафҳуми *кунҷи ҳамсоягии* қитъаи хати каҷи M_0M-ро ҷорӣ менамоем. Барои муайянӣ фарз мекунем, ки нуқтаи M назар ба M_0 ба қимати калони параметр мувофиқ меояд.



Расми 16.10

Кунҷи байни расандаҳои самтдори хати каҷи L (дар нуқтаҳои M ва M_0)-ро *кунҷи ҳамсоягии*

---

* Яъне чунин меҳисобем, ки хати каҷи L нуқтаи худбуриш ва қитъаҳои худтакья надорад.

** Яъне ҳамон сатҳеро, ки дар он нуқтае, ки проексияи нуқтаҳои хати каҷи L ба расанда мебошад, ҳангоми афзудани параметр ҷой иваз мекунад, самти мусбат меномем.

$$F_{tt}'' = \frac{\varphi'\psi''' - \varphi'''\psi'}{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'} (\varphi'^2 + \psi'^2) - 3(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''). \quad (16.50)$$

Акнун ба ифодаи қаҷӣ k-и хати қаҷи L (16.40) мурочиат мекунем. Дар асоси ишоратҳои (16.41) аз формулаи (16.40) бо роҳи дифференсиронӣ ифодаи зеринро ҳосил менамоем:

$$k' = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{[\varphi'^2 + \psi'^2]^{5/2}} \left\{ \frac{\varphi'\psi''' - \varphi'''\psi'}{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'} (\varphi'^2 + \psi'^2) - 3(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'') \right\}.$$

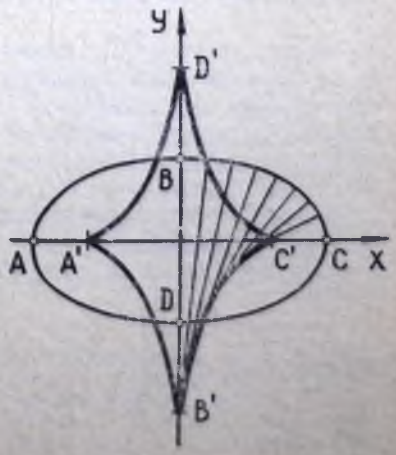
Бо ёрии ин муносибат ва ифодаи қаҷӣ (16.40) ифодаи (16.50)-ро ба шакли зерин менависем:

$$F_{tt}'' = \frac{k'}{k} (\varphi'^2 + \psi'^2).$$

Азбаски мувофиқи шарти теорема k ва k' нобаробари нуль мебошанд ва, ғайр аз он, $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$ аст, пас аз ифодаи охирини F_{tt}'' натиҷа мебарояд, ки барои ҳама қиматҳои t-и интервали $(0, 1)$ ва барои нуқтаҳои характеристикии нормалҳои хати қаҷи L $F_{tt}'' \neq 0$ мебошад. Ҳамин тариқ, шарти теоремаи 16.1 ҳам иҷро шуд.

Акнун муодилаи параметрии эволютаро меёбем. Азбаски эволюта дар шартҳои баёншуда ҷои геометрии нуқтаҳои характеристикии оилаи нормалҳо мебошад, пас координатаҳои X ва Y-и нуқтаҳои эволюта аз муносибатҳои (16.49) муайян карда мешаванд. Дар асоси муносибатҳои X ва Y муодилаҳои параметрии (16.43)-ро ҳосил менамоем. Теорема исбот шуд.

Қайд. Дар геометрия аксаран мафҳумҳои радиуси қаҷӣ ва маркази қаҷиро истифода мекунанд. Бузургии $1/k$ (k — қаҷии хати қаҷи L)-ро *радиус R-и қаҷии* хати қаҷи L меноманд. Ҳамон нуқтаи нормали хати қаҷ, ки аз нуқтаи додашудаи хати қаҷи L ба самти фурӯҳамидагӣ дар масофаи R воқеъ аст, *маркази қаҷӣ* номида мешавад.



Расми 16.16.

Радиуси қаҷии хати қаҷ ба радиуси ҳамрасиши давраҳо баробар аст. Маркази қаҷӣ бо маркази давраҳои баҳамрасанда ҳамҷоя аст.

Эволюта ҷои геометрии марказҳои қаҷиҳои хати қаҷ мебо-

шад. Воқеан, аз муносибатҳои (16.46):

$$(X - \varphi)^2 + (Y - \psi)^2 = 1/k^2 = R^2,$$

яъне нуқтаи эволюта, ки координатаҳояш (X, Y) аст, аз нуқтаҳои хати каҷи L, ки координатаҳояшон (φ, ψ) аст, дар масофаи R воқеъ мебошад. Аз маънои геометрии эволюта (ба расми 16.15 ниг.) фаҳмост, ки нуқтаи (X, Y) дар нормаль (дар тарафи фурӯҳамидагии хати каҷи L) воқеъ аст.

М и с о л. Муодилаҳои эволютаи эллипси $ABCD$ (расми 16.16) -ро, ки бо муодилаҳои

$$x = \varphi(t) = a\cos t, \quad y = \psi(t) = b\sin t$$

муайян мешаванд, меёбем. Азбаски $\varphi' = -a\sin t$, $\psi' = b\cos t$, $\varphi'' = -a\cos t$, $\psi'' = -b\sin t$ аст, пас $\varphi'^2 + \psi'^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$ ва $\varphi'\psi'' - \varphi''\psi' = ab$ мебошад. Бинобар ин, мувофиқи (16.46), муодилаҳои параметрии эволютаи эллипс инҳоянд:

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad Y = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

Ҳамин тариқ, *эволютаи эллипс астроидаи дароз кардашуда* мебошад (ба расми 16.16 ниг.).

Қайд мекунем, ки ҳосилаи каҷӣ дар нуқтаҳои A, B, C, D-и эллипс (яъне дар қуллаҳои он) ба нуль баробар мебошад. Бинобар ин, шарти теоремаи 16.4 дар ин нуқтаҳо иҷро намешавад. Эволютаи эллипс дар нуқтаҳои мувофиқи A', B', C', D' соҳиби хусусияте мебошад, ки онро нуқтаҳои бозгашт меноманд.

ИЛОВА

ИНКИШОФИ МИНБАЪДАИ НАЗАРИЯИ АДАДҲОИ ҲАҚИҚӢ

Мо дар боби 2 барои ҷорӣ кардани ададҳои ҳақиқӣ маҷмӯи касрҳои даҳии беохирро истифода кардем. Мо қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарбро барои маҷмӯи ин касрҳо муайян карда, муқаррар кардем, ки элементҳои ин маҷмӯъ соҳиби 13-то *хосиятҳои асосӣ* (ки дар п. 1 § 1 боби 2 барои ададҳои рационалӣ номбар шуда буданд) мебошанд. Методи баёншудаи ҷорӣ кардани ададҳои ҳақиқӣ, гарчӣ афзалияти бешубҳаи эвристикӣ ва методӣ дошта бошад ҳам, имконияти ягона надорад. Ададҳои ҳақиқиро бо ёрии касрҳои дуии беохир, бо ёрии буришҳои дедекиндӣ (дар соҳаи ададҳои рационалӣ*), бо ёрии пайдарпаии ададҳои рационалӣ** ва бо ёрии методҳои дигар ҷорӣ кардан мумкин буд. Барои аниқ кардани алоқамандии байни методҳои гуногуни ҷорӣ намудани ададҳои ҳақиқӣ баъзе мафҳумҳои навро истифода мекунем ва боз як хосияти муҳими маҷмӯи ададҳои ҳақиқии омӯхташударо муқаррар менамоем.

1. Пуррагии маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ. Ду маҷмӯе, ки барои элементҳои ҳар яки онҳо қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб муайян мебошанд, *нисбат ба ин қоидаҳо* маҷмӯъҳои *ба якдигар изоморфӣ* номида мешаванд, агар дар байни элементҳои ин маҷмӯъҳо мувофиқати байни якдигар якқиматаро*** муқаррар кардан мумкин бошад, ки агар ба элементҳои a ва b-и маҷмӯи якум элементҳои a' ва b'-и маҷмӯи дуюм мувофиқ ояд, онгоҳ: 1) элементҳои a' ва b' бо ҳамон аломате ($>$, $<$ ё $=$) алоқаманд, ки элементҳои a ва b бо онҳо алоқаманд буданд; 2) ба элементи $a + b$

---

* Тарзи бо ёрии буришҳо ҷорӣ кардани ададҳои ҳақиқӣ ба математики немис Р. Дедекинд (1831—1916) тааллуқ дорад. Ин тарз, масалан, дар боби 1-уми китоби Ф. Франклин «Математический анализ» баён шудааст.

** Ин тарзи ҷорӣ кардани ададҳои ҳақиқӣ ба Г. Кантор тааллуқ дорад. Ин тарз дар китоби В. В. Немыцкий, М. И. Слудская ва А. Н. Черкасов «Курс математического анализа», ҷилди 1, боби 2 баён шудааст.

*** Доир ба мувофиқати ба якдигар якқиматаи байни элементҳои ду маҷмӯъ ба поварақи якуми сах. 82 ниг.

элементи $a' + b'$ мувофиқ меояд; 3) ба элементи $a \cdot b$ элементи $a' \cdot b'$ мувофиқ меояд.

Ҳамин тавр на дар бораи қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб, балки дар бораи ягон қоидаҳои дигар, ки муносибати байни элементҳоро тавсиф медиҳанд, сухан рондан ва мафҳуми маҷмӯъҳои нисбат ба ин қоидаҳо ба якдигар изоморфиро низ ҷорӣ кардан мумкин буд.

Мисолҳои ду маҷмӯи нисбат ба қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб ба якдигар изоморфӣ: маҷмӯи ададҳои рационалӣ, ки бо қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб (ба поварақи сах. 26 ниг.) ба намуди нисбати ададҳои бутун навишта шудаанд; маҷмӯи ададҳои рационалӣ, ки бо қоидаҳои муқаррарии муқоиса, ҷамъ ва зарби ададҳои ҳақиқӣ ба намуди касрҳои даҳии беохир навишта шудаанд.

Ду маҷмӯъ: маҷмӯи ҳама ададҳои рационалӣ ва маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқиро бо диққат муоина мекунем. Барои ҳар яки ин маҷмӯъҳо қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб муайян мебошанд ва 13-то хосиятҳои асосӣ дуруст мебошанд. Дар баробари ин фаҳмост, ки маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ, назар ба маҷмӯи ҳама ададҳои рационалӣ, «васеътар» мебошанд, чунки *маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ нисбат ба қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарби маҷмӯи ҳама ададҳои рационалӣ* умуман изоморфӣ намебошанд, лекин дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ як қисмеро ҷудо кардан мумкин аст, ки он нисбат ба қоидаҳои номбурдаи маҷмӯи ҳама ададҳои рационалӣ изоморфӣ мебошад.*

Албатта, саволе пайдо мешавад, ки оё барои маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ маҷмӯи «васеътар»-и объектеро тартиб додан мумкин аст, ки он ба хосиятҳои зерин соҳиб бошад: 1) дар ин маҷмӯи «васеътар» қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб муайян мебошанд ва 13-то хосиятҳои асосӣ дурустанд; 2) маҷмӯи «васеътар» нисбат ба қоидаҳои номбурдаи маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ умуман изоморфӣ намебошад; 3) дар маҷмӯи «васеътар» қисмеро ҷудо кардан мумкин аст, ки он нисбат ба қоидаҳои номбурдаи маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ изоморфӣ мебошад.

Мо исбот мекунем, ки чунин маҷмӯи «васеътар» *вуҷуд надорад*, яъне чунон ки дар математика ин тавр гуфтан қабул шудааст, *маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ нисбат ба қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб* 13 *хосиятҳои асосӣ п у р р а мебошанд.*

Умуман, *маҷмӯи дилхоҳи объектҳоеро, ки барояшон ягон қоидаҳо муайян мебошанд ва ягон хосиятҳо дурустанд, нисбат ба ин қоида ва хосиятҳо маҷмӯи пурра номида мешавад, агар чунин маҷмӯи «васеътар»-и объектҳоро тартиб додан мумкин набошад, ки*: 1) *дар ин маҷмӯи «васеътар» ҳамон қоидаҳо муайян ва ҳамон хосиятҳо дуруст бошанд*; 2) *ин маҷмӯи «васеътар» нисбат ба*

---

* Ин аз он бармеояд, ки дар байни маҷмӯи ҳама ададҳои рационалӣ ва ҳама ададҳои ҳақиқӣ мувофиқатн байни якдигар якқиматаро муқаррар кардан мумкин нест (ба п. 6 § 4 боби 3 ниг.).

қоидаҳои номбурда ба маҷмӯи додашуда умуман изоморфӣ набошад; 3) *дар ин маҷмӯи «васеътар» қисме вуҷуд дорад, ки он нисбат ба қоидаҳои номбурда ба маҷмӯи додашуда изоморфӣ мебошад.*

Тасдиқ кардан мумкин аст, ки маҷмӯи ҳама ададҳои рационалӣ *нисбат ба қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб ва* 13-*то хосиятҳои асосӣ пурра намебошанд,* чунки маҷмӯи «васеътар»-е (маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ) вуҷуд дорад, ки он талаботи 1), 2) ва 3)-и таърифи ҳозир баёншударо қаноат менамояд.

Исбот мекунем, ки *маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ нисбат ба қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб ва* 13-*то хосиятҳои асосӣ пурра мебошанд.*

Баръаксашро фарз мекунем, яъне фарз мекунем, ки маҷмӯи «васеътар»-и объектҳои $\{x'\}$ вуҷуд доранд, ки: 1) барои элементҳои маҷмӯи $\{x'\}$ қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб муайян мебошанд ва 13-то хосиятҳои асосӣ дурустанд, 2) маҷмӯи $\{x'\}$ нисбат ба қоидаҳои номбурда ба маҷмӯи $\{x\}$-и ҳама ададҳои ҳақиқӣ умуман изоморфӣ намебошад, 3) қисми маҷмӯи $\{x'\}$ вуҷуд дорад (онро бо символи $\{\bar{x}'\}$ ишорат мекунем), ки он нисбат ба қоидаҳои номбурда ба маҷмӯи $\{x\}$-и ҳама ададҳои ҳақиқӣ изоморфӣ мебошад.

Пеш аз ҳама, қайд мекунем, ки дар маҷмӯи $\{x'\}$ *ҷуфти ягонаи* элементҳои $0'$ ва $1'$, ки роли махсуси нуль ва воҳидро* мебозанд, вуҷуд доранд. Баъд, тасдиқ кардан мумкин аст, ки элементҳои $0'$ ва $1'$ ба таркиби маҷмӯи $\{x'\}$ дохил мешаванд ва бо ададҳои ҳақиқии 0 ва 1** дар мувофиқати ба якдигар якқимата мебошанд. Бигзор α' ягон элементи маҷмӯи $\{\bar{x}'\}$-и *номутааллиқи* маҷмӯи $\{\bar{x}'\}$ бошад.

Мо дар асоси қоидаи муқоиса ҳама элементҳои $\bar{x}'$-и маҷмӯи $\{\bar{x}'\}$-и ба *ду класс — классҳои болоӣ ва поёнӣ* тақсим менамоем; ҳама элементҳои $\bar{x}'$-ро, ки нобаробарии $\bar{x}' > \alpha'$-ро қаноат менамоянд, ба класси болоӣ ва ҳама элементҳоеро, ки нобаробарии $\bar{x}' < \alpha'$-ро қаноат менамоянд, ба класси поёнӣ оид меҳисобем. Ҳардуи ин классҳо холӣ намебошанд. Воқеан, исбот мекунем, ки, масалан, класси болоӣ холӣ намебошад. Элементи 1-ро чун ҷамъшаванда кифоя маротиба такрор карда, мо, дар асоси хосияти 13°, элементи n'-и маҷмӯи $\{\bar{x}'\}$-ро ҳосил мекунем, ки он но-

---

* Агар ду элементи $0_1'$ ва $0_2'$ ки онҳо роли махсуси нульро мебозанд, ёфт мешуд, он гоҳ дар асоси хосиятҳои сумма $0_1' = 0_1' + 0_2' = 0_2' + 0_1' = 0_2'$, яъне $0_1' = 0_2'$-ро ҳосил мекардем. Ҳамин тавр ягонагии элементи $1'$, ки роли махсуси воҳидро мебозад, исбот карда мешавад.

** Масалан, исбот мекунем, ки элементи $0'$ ба таркиби маҷмӯи $\{\bar{x}'\}$ дохил аст ва бо адади ҳақиқии 0 дар мувофиқатии ба якдигар якқимата мебошад. Фарз мекунем, ки ягон элементи θ'-и маҷмӯи $\{\bar{x}'\}$ ба адади ҳақиқии θ мувофиқ аст, ва бигзор a' элементи дилхоҳи ин маҷмӯъ бошад. Дар асоси изоморфии нисбат ба ҷамъ ба элементи $a' + \theta'$ адади ҳақиқии $a + 0 = a$ мувофиқ меояд, яъне элементи $a' + \theta'$ бо элементи a' мувофиқ меояд, лекин ин чунин маъно дорад, ки $0'$ элементи нулӣ аст, яъне $\theta' \equiv 0'$. Барои элементи воҳидӣ ҳам ҳамин тавр муҳокима ронда мешавад.

баробарии $n' > \alpha'$-ро қаноат менамояд, яъне он ба класси болой тааллуқ дорад. Аз хосияти 1° натича мебарояд, ки *ҳар як элементи класси поёнӣ аз элементи дилхоҳи класси болой хурд* аст. Дар асоси изоморфизми маҷмӯи $\{\bar{x}'\}$ ва маҷмӯи $\{x\}$-и ҳама ададҳои ҳақиқӣ тасдиқ кардан мумкин аст, ки маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ низ ба ду класс тақсим мешаванд, дар айни ҳол ҳар як адади класси поёнӣ аз адади дилхоҳи класси болой хурд мебошад. Лекин ин чунин маъно дорад, ки *класси поёнии ададҳои ҳақиқӣ аз боло маҳдуд аст* ва (дар асоси теореми 2.1) ҳудуди болоии саҳеҳи m дорад ва класси болой соҳиби ҳудуди поёнии саҳеҳи M мебошад. Аз таърифи ҳудудҳои саҳеҳ натича мебарояд, ки ҳардуи ҳудудҳои m ва M дар байни ададҳои ҳақиқии ба якдигар ҳар қадар наздик воқеъ мебошанд ва, бинобар ин, $m = M$ аст. Азбаски адади $m = M$ яке аз ададҳои ҳақиқӣ мебошад, пас он ба яке аз классҳо тааллуқ дорад, яъне *ё элементи хурдтарини класси болой ё элементи калонтарини класси поёнӣ мавҷуд ҳаст*. Исбот мекунем, ки ҳардуи ин тасдиқот маънӣ надоранд. Бигзор (барои муайянӣ) элементи хурдтарини класси болоии ададҳои ҳақиқӣ мавҷуд бошад. Онгоҳ дар класси болой ҳам элементи хурдтарини m' вуҷуд дорад, ки он дар тақсимоти маҷмӯи $\{\bar{x}'\}$ дуруст аст. Мувофиқи таърифи класси болой $m' > \alpha'$ аст. Мувофиқи хосиятҳои сумма фарқи $m' - \alpha' > 0'$ аст. Лекин онгоҳ, дар асоси хосияти 9°, барои элементи $m' - \alpha'$ элементи баръаксе вуҷуд дорад, ки он, дар асоси хосиятҳои ҳосили зарб, ба ҳосили тақсими $\dfrac{1}{m' - \alpha'}$ баробар аст. Мувофиқи хосияти 13° элементи $1'$-ро чун ҷамъшаванда ҳамон қадар такрор кардан мумкин аст, ки элементи «бутун»-и n'-и дар ин ҳангом ҳосилшуда ба $\{\bar{x}'\}$ мутааллиқ мешавад ва нобаробарии $n' > \dfrac{1}{m' - \alpha}$-ро қаноат менамояд. Аз нобаробарии охирин, дар асоси хосиятҳои ҳосили зарб ва сумма, ифодаи

$$m' - 1'/n' > \alpha' \qquad (\text{П. } 1)$$

-ро ҳосил мекунем*. Азбаски элементҳои m', $1'$ ва n' ба маҷмӯи $\{\bar{x}'\}$ тааллуқ доранд, пас элементи $(m' - 1'/n')$ ҳам ба ҳамин маҷмӯъ тааллуқ дорад ва нобаробарии $m' - 1'/n' < m'$-ро қаноат менамояд. Лекин онгоҳ нобаробарии (П. 1) чунин маъно дорад, ки *дар класси болой элементи аз m' хурд вуҷуд дорад, яъне m' элементи хурдтарин намебошад*. Мухолифоти пайдошуда пуррагии маҷмӯи ададҳои ҳақиқиро исбот мекунад.

---

* Ин хоснятхо татбиқшавандагии ҳама қоидаҳои алгебраро таъмин мекунанд.

2. Ба таври аксиома ҷорӣ кардани маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ. Ин метод аз зайл иборат аст.

Маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ чун маҷмӯаи объектҳои ягон табиат, ки 17-то аксиомаро қаноат менамоянд, ҷорӣ карда мешаванд, ки ба сифати онҳо қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб, 13-то хосиятҳои асосӣ ва аксиомаи пуррагӣ нисбат ба қоида ва хосиятҳои номбурда гирифта мешаванд.*

17-то аксиомаҳои номбурдаро одатан *аксиомаҳои ададҳои ҳақиқӣ* меноманд. Ба таври конкретӣ амалӣ шудани маҷмӯаи объектҳо, ки 17-то аксиомаҳои ададҳои ҳақиқиро қаноат менамоянд, маҷмӯи касрҳои даҳии беохире мебошанд, ки мо онҳоро дар боби 2 омӯхта будем. Маҷмӯаи номбурдаи объектҳоро ба таври дигар ҳам амалӣ кардан мумкин аст**. Тасдиқоти ачоиби зерин масъалаи алоқамандии байни ин амалишуданҳоро пурра аниқ менамояд.

Амалӣ шудани дилхоҳи $\{x'\}$-и маҷмӯаи объектҳое, ки 17-то аксиомаҳои ададҳои ҳақиқиро қаноат менамоянд, нисбат ба қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарби маҷмӯи омӯхташудаи $\{x\}$-и касрҳои даҳии беохир изоморфӣ мебошанд.

И с б о т. Барои беҳбудии кор исботро ба пунктҳои алоҳида ҷудо мекунем.

1°. Аксиомаҳо кафолат медиҳанд, ки дар маҷмӯи $\{x'\}$ элементҳои $0'$ ва $1'$, ки роли махсуси нуль ва воҳидро мебозанд, вуҷуд доранд. Дар асоси аксиоман Архимед $1' > 0'$***. Дар маҷмӯи $\{x'\}$ маҷмӯаи «объектҳои рационалӣ»-ро ҷудо мекунем. Барои ин қайд мекунем, ки ададии рационалии дилхоҳро аз ададҳои 0 ва 1 ба воситаи амалҳои ҷамъ, тарҳ ва тақсим ҳосил кардан мумкин аст. Воқеан, ададии 1- ро чун ҷамъшаванда ба қадри даркорӣ маротиба такрор карда, ададии бутуни мусбати дилхоҳи n-ро ҳосил мекунем; аз ададии 0 ададии 1-ро ба қадри даркорӣ маротиба тарҳ карда, мо ададии бутуни манфии дилхоҳро ҳосил менамоем; мо дар натиҷаи тақсими ду ададии бутун ададии рационалии дилхоҳро ҳосил мекунем. Азбаски дар маҷмӯи $\{x'\}$, мувофиқи аксиомаҳо, амалҳои ҷамъ, тарҳ ва тақсим муайян мебошанд, пас бо ёрии ин амалҳо аз $0'$ ва $1'$ ҳама «объектҳои рационалӣ»-ро ҳосил менамоем. Мо ин объектҳоро бо ҳамон символҳое, ки ададҳои рационалиро ишорат карда будем, ишорат мекунем ва фақат дар онҳо штрих мегузорем.

---

* Фақат факти мавҷуд будани қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб ҳамчун постулат баён карда мешавад. Дар айни ҳол намуди конкретии ин қоидаҳо нишон дода намешавад.

** Мо дар ибтидои ҳамин илова қайд кардем, ки ададҳои ҳақиқиро бо тарзҳои гуногун (бо ёрии касрҳои дуии беохир, бо ёрии буришҳои дедекиндӣ ва бо ёрии тарзҳои дигар) ҷорӣ кардан мумкин аст.

*** Воқеан, агар нобаробарии муқобили $1' \leqslant 0'$ дуруст мебуд, онгоҳ мо аз он, дар асоси аксиома, $1' + 1' + \ldots + 1' \leqslant 0' + 0' + \ldots + 0' = 0'$-ро ҳосил мекардем, ки ин ба аксиоман Архимед мухолиф аст.

ванда баробаранд. Тасдиқоти исботшуда ба намуди «касри даҳии беохир» навишта шудани ягон объекти маҷмӯи $\{x'\}$-ро тасдиқ мекунад.

5°. Мувофиқи се аксиомаи аввалин барои объектҳои маҷмӯи $\{x'\}$ қоидаҳои муқоиса, ҷамъ ва зарб муайян мебошанд. Исбот мекунем, ки *агар ҳама объектҳои маҷмӯи $\{x'\}$ ба намуди «касрҳои даҳии беохир» навишта шавад, онгоҳ қоидаи муқоиса ва таърифҳои сумма ва ҳосили зарби ин «касрҳо» мисли қоидаи муқоиса ва таърифҳои сумма ва ҳосили зарби касрҳои даҳии беохири муқаррарии омӯхташуда баён карда мешаванд.*

Бигзор a' ва b' ду объекти дилхоҳи маҷмӯи $\{x'\}$ бошад, ва фарз мекунем, ки «касрҳои даҳии беохир»-и*

$$a_0', a_1' \dots a_n' \dots \text{ ва } b_0', b_1' \dots b_n' \dots \qquad (\text{П. 6})$$

ба ин объектҳо мувофиқ меояд. Пеш аз ҳама қоидаи муқоисаи объектҳои a' ва b'-ро, ки ба намуди «касрҳои даҳии беохир»-и (П. 6) навишта шудаанд, аниқ мекунем. Ду тасдиқоти зеринро исбот кардан кифоя аст: 1) агар касрҳои (П. 6) мувофиқ оянд, яъне агар

$$a_0' = b_0', \ a_1' = b_1', \ \dots, \ a_n' = b_n', \ \dots$$

бошанд, онгоҳ объектҳои a' ва b' баробаранд; 2) агар чунин номери n ёфт шавад, ки муносибати

$$a_0' = b_0', \ a_1' = b_1', \dots, a'_{n-1} = b'_{n-1}, \ a_n' < b_n' \qquad (\text{П. 7})$$

дуруст бошад, онгоҳ объектҳои a' ва b' бо нобаробарии $a' < b'$ алоқаманд мешаванд.

Тасдиқоти 1) дар п. 4 исбот шуда буд. Тасдиқоти 2)-ро исбот мекунем. Ифодаи охирини муносибати (П. 7)-ро ба намуди

$$a_n' + 1 \leqslant b_n'$$

навиштан мумкин аст. Ин муносибат ва муносибатҳои боқимондаи (П. 7)-ро истифода карда, қисми рости нобаробариҳои (П. 4)-ро барои a' ва қисми чапи нобаробариҳои (П. 4)-ро барои b' навишта чунин ифодаҳоро ҳосил мекунем:

$$a' \leqslant a_0', a_1' \dots a'_{n-1}a_n' + 1'/(10^n)' = a_0', a_1' \dots a'_{n-1}(a_n' + 1') \leqslant$$
$$\leqslant a_0', a_1' \dots a'_{n-1}b_n' < b', \text{ яъне } a' < b'.$$

Акнун исбот мекунем, ки ҳамон таърифҳои сумма ва ҳосили зарби ададҳои ҳақиқии муқаррарӣ барои объектҳои a' ва b' низ

---

* Ҳангоми муқаррар кардани қоидаи муқоиса ба мавриди объектҳои «мусбат»-и a' ва b' маҳдуд шудан мумкин аст, чунки мавриди умумӣ бо ёрии қоидаи аломатҳо ба ин маврид оварда мешавад.

дурустанд. Ба мавриди сумма махдуд мешавем. Бигзор α_1', α_2', β_1', β_2' «объектҳои рационалӣ»-и гуногуне бошанд, ки онҳо нобаробариҳои

$$\alpha_1' + \beta_1' \leqslant a' + b' \leqslant \alpha_2' + \beta_2' \qquad (\text{П. } 9)$$

-ро қаноат менамоянд. Онгоҳ суммаи $a' + b'$-и объектҳои a' ва b' объекти ягонаеро ифода мекунад, ки он нобаробарии

$$\alpha_1' + \beta_1' \leqslant a' + b' \leqslant \alpha_2' + \beta_2' \qquad (\text{П. } 9)$$

-ро қаноат менамояд. Воқеан, аз аксиома имконияти аъзо ба аъзо ҷамъ кардани нобаробариҳо бармеояд ва аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки суммаи $a' + b'$ нобаробарии (П. 9)-ро қаноат менамояд. Ғайр аз он, ин сумма объекти ягонае мебошад, ки нобаробарии (П. 9)-ро қаноат менамояд, чунки ҳар яки фарқҳои

$$\alpha_2' - \alpha_1' \quad \text{ва} \quad \beta_2' - \beta_1'$$

ва, пас, фарқи

$$(\alpha_2' + \beta_2') - (\alpha_1' + \beta_1')$$

-ро ҳам аз ягон объекти «мусбат»-и пешакӣ гирифташуда (дар асоси п. 2) хурд кардан мумкин аст. Мавриди ҳосили зарб ҳамин тавр муоина карда мешавад.

6°. Ниҳоят, исбот мекунем, ки маҷмӯи $\{x'\}$ ба маҷмӯи ададҳои ҳақиқии ба намуди касрҳои даҳии беохир навишташаванда изоморфӣ мебошад. Фарз мекунем, ки маҷмӯи $\{x'\}$ ба маҷмӯи $\{x\}$ изоморфӣ нест. Адади ҳақиқии $a = a_0, a_1a_2 \ldots$-ро ба объекти a', ки ба намуди «касри даҳии беохир»-и a_0', a_1', a_2' ... навиштан мумкин аст, дар мувофиқатӣ мегузорем. Бигзор ададҳои ҳақиқии a ва b ба ду объекти a' ва b' мувофиқ бошанд.

Аз натиҷаҳои п. 5 хулоса мебарояд, ки 1) a' ва b' бо ҳамон аломатҳое, ки ададҳои a ва b алоқаманд буданд, алоқаманд мебошанд; 2) суммаи $a' + b'$ ба суммаи $a + b$ мувофиқ аст; 3) ҳосили зарби $a' \cdot b'$ ба ҳосили зарби $a \cdot b$ мувофиқ аст*.

Азбаски мувофиқи фарзият $\{x'\}$ ба $\{x\}$ изоморфӣ нест, пас дар мувофиқати номбурда на ба ҳар як адади ҳақиқӣ ягон элементи маҷмӯи $\{x'\}$ дуруст меояд. Ин чунин маъно дорад: маҷмӯи $\{x'\}$, ки мувофиқи фарзият ба маҷмӯи $\{x\}$ изоморфӣ набуд, ба як қисми маҷмӯи $\{x\}$ изоморфӣ мебошад, ки ин ба пуррагии маҷмӯи $\{x'\}$ мухолиф аст.

Мухолифоти пайдошуда исботи тасдиқотро ба итмом мерасонад.

3. Қайди хотимавӣ. Дар хотима қайд мекунем, ки методи аксиома ва мафҳуми маҷмӯаи объектҳои (нисбат ба қоидаҳои гу-

---

* Чунки муқоиса, ҷамъ ва зарби объектҳои a' ва b' ва ададҳои ҳақиқии a ва b бо як қоида муайян карда мешаванд.

ногун) изоморфӣ дар фаслҳои гуногуни математика ва физикаи ҳозиразамон (геометрия, назарияи эҳтимолият, механикаи классикӣ, физикаи статикӣ, механикаи квантӣ* ва ғайра) васеъ истифода мешавад.

Масалан, дар геометрия маҷмӯи нуқтаҳои хати рост чун маҷмӯаи объектҳое, ки ягон аксиомаҳоеро (дар байни ин аксиомаҳо аксиомаи пуррагии ин маҷмӯа нисбат ба аксиомаҳои боқимонда роли асосиро мебозад) қаноат менамоянд, ҷорӣ карда мешавад. Аксиомаҳои номбурда имконият медиҳанд, ки дар байни маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои хати рост ва маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ мувофиқати баҳам якқимата муқаррар карда шавад**. Ин мувофиқат имконият медиҳад, ки ададҳои ҳақиқӣ дар хати рост (тири ададӣ) бо нуқтаҳо тасвир карда шаванд; ин дар курси анализ васеъ истифода мешавад.

---

* Масалан, механикаи квантӣ аввалин маротиба ба намуди ду назарияи зоҳиран гуногун («Механикаи метрӣ»-и Гейзенберг ва «Механикаи мавҷӣ»-и Шредингер) пайдо шуд. Баъдтар исбот карда шуд, ки ин ду назария ду амалишуданиҳои як маҷмӯаи умумии объектҳои ба якдигар изоморфӣ (ки ба тарзи аксиома ҷорӣ карда шудаасту фазои гильбертии абстрактӣ номида мешавад)-ро истифода мекунад (доир ба ин ба қисми 2-юми ҳамин курс ниг.).

** Ниг. ба Иловаи бароришии 5-уми ҳамин серияи «Аналитическая геометрия» ва муфассал ба китоби Н. В. Ефимов «Высшая геометрия», нашри соли 1961, §§ 20—23.

ФЕҲРИСТ

Абель 385
Адади *е* 68
— иррационалӣ 31
— комплексӣ 209
— рационалӣ 25
— ҳақиқӣ 25, 30
Адамар 646
Алгоритм 24
Алгоритми Евклид 221
Аломати Абель—Дирихле 486
— Даламбер 462
— Коши—Маклорен 466
— Лейбниц 484
— Раабе 470
Аломатҳои муқоисаи қаторҳо 458
Аксиомаи Архимед 43
Аргумент 7, 94
Аргументи фосилавӣ 8
Асимптотаи график 336
— вертикалӣ 336
— моил 337
Астроида 414
Атрофи нуқта 45, 512, 514
Афзоиши функция 156
— пурраи функция 522
— хусусии функця 523
Аъзои боқимондаи формулаи Тейлор 287
— — — — дар шакли интегралӣ 377
— — — — — — Коши 290
— — — — — — Лагранж 290
— — — — — — Пеано 291
— — — — — — Шлемильх—Рош 287

Бефосилагии функция 126
— мунтазам 356

— — дар нуқта 104, 105
— — — маҷмӯъ 106
— — — хати рост 525
Биноми Ньютон 10
Бисьёраъзогии алгебравӣ 214
Больцано 76
Бонне 371
Борель 358
Боқимондаи қатор 455
Бузургӣ 6
Буняковский 381

Валлис 496
Вейерштрасс 76

Гейне 358
Гёльдер 380
Градиент 544
Гузориши Эйлер 244

Даламбер 462
Дарбу 344
Дарозии камони хати каҷ 393
Диаметри маҷмӯъ 528
Дирихле 95
Дифференциал 164, 537
Дифференциали тартиби олӣ 190, 553
— инвариантии шакл 543
— камон 402
Дифференциронӣ 162
Дифференцирониии функцияи мураккаб 538
— сӯмма, фарқ, ҳосили зарб, ҳосили тақсим 167

Жордан 404

Инвариантии шакли дифференциал 182, 543
Интеграли Дарбу 351
— номуайян 18, 194
— муайян 20, 345
— Пуассон 200
— эллиптикӣ 253
Интегралҳои Френель 200
Интегронидани дифференциалҳои биномӣ 242
Интегронидан аз рӯи ҳиссаҳо 204
— бо ёрии иваз кардани тағьирёбандаҳо 201
Интегронидашавандагии функцияҳо 346
Интервал 45
Итерация 89

Инъикоси байни якдигар якқимата 629
— гомеоморфӣ 629

Қамшавии функция дар нуқта 269
Қаниши ҷинси якум 141
— — дуюм 143
— бартарафшаванда 141
Қасри рационалии нодуруст 222
— — дуруст 223
— даҳии беохир 30
— рационалӣ 222
Классификацияи нуқтаҳои каниши функция 141
Қоши 79
Қосинуси интегралӣ 200
Коэффициенти кунҷии хати рост 17
Критерияи Қоши 80, 258

Лагранж 271
Лаплас 648
Лаппиши гармоникӣ 9
— функцияҳо 355
Лебег 359
Лежандр 254
Лейбниц 22
Лемmаи Дарбу 352
— Борель—Гейне 358
Лимити аҷиби якум 12
— — дуюм 12
— пайдарпай 49
— такрорӣ 520
Лиувилль 254
Логарифми интегралӣ 200
— натуралӣ 119

Маклорен 293
Максимуми локалии функция 269
Маркази қаҷӣ 677
Масоҳати болой 404
— поёнӣ 404
— сатҳи чархзанӣ 414
— сектори қаҷхатта 408
— трапецияи қаҷхатта 407
Маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ 34
— ба худаш зич 45
— диаметрҳо 528
— маҳдуд 82
— охирнок, беохир 82
— сарбаста 513

Маҷмӯъҳои изоморфӣ 679
Методи басуммагирӣ 502
— басуммагирии Абель—Пуассон 504
— — Чезаро 503
— градиентии чустучӯи экстремум 582
— зарбкунандаҳои номуайяни Лагранж 640
— итерация 428
— коэффициентҳои номуайян 230
— Лагранж 640
— Остроградский 235
— параболаҳо (формулаи Симпсон) 446
— хордаҳо 427
— расандаҳо (методи Ньютон) 426
— росткунҷаҳо 441
Минковский 381
Минимуми локалии функция 269
Модули адади ҳақиқӣ 32
Муавр 213
Нобаробарии Буняковский—Коши (барои интегралҳо) 384
— Буняковский (барои сумма) 381
— Гёльдер 380
— Минковский барои интегралҳо 384
Нормали сатҳ 536
Нуқтаи ҳудудии маҷмӯъ 513
— оддии хати каҷ 651
— махсуси хати каҷ 651
— каниши функция 106
— характеристикӣ 654
Ньютон 7
Нимхати рости кушода 45
Нимхати рости кушода 45
— рост 45
Нимсегмент 45
Операторӣ Лаплас 648
Оилаи хатҳои каҷи гирдгард 655
— сатҳҳои гирдгард 657
Остроградский 235
Пайдарпаии беохир калон 51, 55
— — хурд 51, 52, 53
— ададӣ 49, 70
— итерационӣ 429
— Коши
— монотонӣ 63
— маҳдуд 50

— номаҳдуд 50
— наздикшаванда 56
— фундаменталӣ 82
— Пеано 291
Прогрессияи геометрӣ 452
Проекцияи нуқта дар маҷмӯъ 583
Пуассон 504
Пуррагии маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ 679

Раабе 470
Радиуси каҷӣ 677
Расандаи графики функция 17
— ҳамворӣ 534
Расиши хатҳои каҷ 653
Риман 346
Решаи бисьёраъзогӣ 214
Ролль 270

Сатҳи дараҷа 547
— дискриминантӣ 660
Сегмент 64
Сильвестр 571
Симпсон 447
Синуси интегралӣ 200
Соҳа 513
Соҳаи дода шудани функция 94
— сарбаста 513
— маҳдуд 513
Строфоида 389
Суммаи ададҳои ҳақиқӣ 38
— болоӣ 348
— интегралӣ 345
— поёнӣ 348
— қатор 451
Суръати лаҳзагӣ 9
— миёна 9

Табдилоти Абель 386
Тарзи дода шудани функция 8, 96
— аналитикии дода шудани функция 8, 96
— графикии дода шудани функция 8, 96
— ҷадвалии дода шудани функция 8, 96
Тахтпайдарпай 70
Тейлор 286
Теоремаи Больцано—Вейерштрасс 76
— Дарбу 344
— дуюми Вейерштрасс 267
— Риман (доир ба ҷойивазкунии қаторҳо) 477

— Ролль 270
— Штольц 84
— Эйлер 541
— якуми Вейерштрасс 264
Трапецияи қаҷхатта 21, 346

Фазои евклидӣ 512
— координатӣ 510
— метрӣ 511
Формулаи Валлис 496
— Коши 278
— Лейбниц 189
— Лейбниц—Ньютон 22
— Маклорен 293, 298
— Муавр 498
— Симпсон (методи параболаҳо) 447
— Тейлор 286
— трапеция 444
Функция 7, 93

Функцияи барҷаста 587
— векторӣ 161
— гиперболӣ 120
— дараҷагӣ 120
— Дирихле 95
— дифференсиронидашаванда 162
— ибтидой 18
— Лагранж 261
— логарифмӣ 118
— маҳдуд 154
— монотонӣ 108
— мураккаб 9, 106
— нишондиҳандагӣ 114
— ноошкор 608
— тригонометрии чаппа 127
— чаппа 108
— элементарӣ 140, 199
— якҷинса 541

Функцияҳои тригонометрӣ 124
— тригонометрии чаппа 127

Характеристика 94
Хатҷаҳои дискриминантӣ 657
— занҷирӣ 403
— рости ададӣ 45
— — содда 388

Циклонда 193, 403

Чебишѐв 243
Чезаро 503

Шакли аъзои боқимондаи Лагранж 290
— — — Пеано 291
— — — Рош—Шлемильх 287
Шарти Қоши 258

Эвольвента 673
Эволюта 673
Эйлер 12
Экстремуми локалӣ 568
— канорӣ 344
Эллипс 403

Қатори ададӣ 451
— гармоникӣ 456
— дуршаванда 452
— муттақ наздикшаванда 473
— Лейбниц 485
— наздикшаванда 451
— шартан наздикшаванда 473
Қоидаи Лопиталь 279
— муқоиса 26, 30, 31
Қонуни Кулон 6

Якоби 623
Якобиан 623

Ҳамвории координатӣ 508
Ҳаҷми ҷисм 412
Ҳосила 10, 156
Ҳосилаи тартиби олӣ 186
— рост, чап 160
— хусусӣ 548
— хусусии тартиби олӣ 187, 548

Ҷисми кубонидашуда 412

Библиотека политехнического
А ... 1

МУНДАРИҶА

Сарсухан ба нашри чоруми русӣ 3

Сарсухан ба нашри якуми русӣ 4

Боби 1. **Маълумоти пешакӣ доир ба мафҳумҳои асосии анализи математикӣ** 6

§ 1. Мафҳумҳои математикие, ки ҳангоми баёни ҳаракат дучор мешаванд 6

§ 2. Суръати лаҳзавӣ ва мафҳумҳои математикии нави ба он алоқаманд 9

§ 3. Масъалаи аз рӯи суръат барқарор кардани қонуни ҳаракат ва проблемаи математикии ба он алоқаманд . . . 17

§ 4. Проблемаҳое, ки ҳангоми ҳал кардани масъалаҳои ҳисоби роҳ пайдо мешаванд 20

§ 5. Қайди хотимавӣ 24

Боби 2. **Назарияи ададҳои ҳақиқӣ** 25

§ 1. Ададҳои ҳақиқӣ 25

§ 2. Амалҳои арифметикӣ бо ададҳои ҳақиқӣ. Хосиятҳои асосии ададҳои ҳақиқӣ 38

§ 3. Баъзе маҷмӯаҳои конкретии ададҳои ҳақиқӣ . . . 45

Иловаи 1. Дар бораи аз системаи даҳии ҳисоб ба системаи дӯи ва аз системаи дуӣ ба системаи даҳӣ гузаронидани ададҳо. 46

Иловаи 2. Доир ба саҳв дар яклухткунии ададҳо дар системаи ҳисоби асосашон ҷуфт ва тоқ 47

Боби 3. **Лимити пайдарпаиҳо** 49

§ 1. Пайдарпаиҳои ададӣ 49
§ 2. Пайдарпаиҳои наздикшаванда ва хосиятҳои асоси онҳо . 56
§ 3. Пайдарпаиҳои монотонӣ 63
§ 4. Баъзе хосиятҳои пайдарпаиҳои дилхоҳ ва мачмӯъҳои ададӣ. 70

Иловаи 1. Теоремаи Штольц 84

Иловаи 2. Доир ба суръати наздикшавии пайдарпаие, ки ба $\sqrt{a}$ наздик мешавад 89

Боби 4. **Мафҳуми функция. Қимати лимитии функция. Бефосилагӣ** . 93

§ 1. Мафҳуми функция 93
§ 2. Мафҳуми қимати лимитии функция 96
§ 3. Мафҳуми бефосилагии функцияҳо 104
§ 4. Баъзе хосиятҳои функцияҳои монотонӣ 107
§ 5. Функцияҳои элементарии соддатарин 112
§ 6. Қиматҳои лимитии баъзе функцияҳо 129
§ 7. Бефосилагӣ ва қиматҳои лимитии баъзе функцияҳои мураккаб 135
§ 8. Қлассификацияи нуқтаҳои каниши функция 141

Илова. Исботи тасдиқоти п. 6 § 5 144

Боби 5. **Асосҳои ҳисоби дифференциалӣ** 156

§ 1. Ҳосила. Интерпретацияи физикавӣ ва геометрии он . . 156
§ 2. Мафҳуми дифференсиронии функцияҳо 162
§ 3. Қоидаҳои дифференсиронидани сумма, фарқ, ҳосили зарб ва ҳосили тақсим 167
§ 4. Ҳисоб кардани ҳосилаҳои функцияи дараҷагӣ, функцияҳои тригонометрӣ ва функцияи логарифмӣ 169
§ 5. Теорема дар бораи ҳосилаи функцияи чаппа 173
§ 6. Ҳисоб кардани ҳосилаҳои функцияи нишондиҳандагӣ ва функцияҳои тригонометрии чаппа 175
§ 7. Қоидаи дифференсиронидани функцияи мураккаб . . 178

§ 8. Ҳосилаи функцияи логарифмӣ. Ҳосилаи функцияи дараҷагии нишондиҳандааш адади ҳақиқии дилхоҳ. Ҷадвали хосилаҳои функцияҳои элементарии соддатарин . . . 180

§ 9. Инвариантии шакли дифференциали якум. Баъзе татбиқоти дифференциал 182

§ 10. Ҳосила ва дифференциалҳои тартиби олӣ 186

§ 11. Дифференцированидани функцияҳое, ки ба таври параметрӣ дода шудаанд 192

Боби 6. **Интегрални номуайян** 194

§ 1. Мафҳуми функцияи ибтидоӣ ва интегрални номуайян . . 194

§ 2. Методҳои асосии интегронӣ 200

Боби 7. **Ададҳои комплексӣ. Алгебраи бисёраъзогиҳо. Интегронидани функцияҳое, ки дар натиҷа функцияҳои элементарӣ ҳосил мешаванд** 209

§ 1. Маълумоти мухтасар дар бораи ададҳои комплексӣ . . 209

§ 2. Бисёраъзогиҳои алгебравӣ 214

§ 3. Решаҳои каратии бисёраъзогӣ. Аломатҳои каратии реша. 217

§ 4. Принципи ҷудокунии решаҳои каратӣ. Алгоритми Евклид. 218

§ 5. Ба суммаи касрҳои соддатарин ҷудо кардани касри рационалии дурусти коэффициентҳояш ададҳои комплексӣ. 222

§ 6. Ба ҳосили зарби зарбкунандаҳои ададҳои ҳақиқии мувофиқ оварданашаванда ҷудо кардани бисёраъзогии алгебравии коэффициентҳояш ададҳои ҳақиқӣ 224

§ 7. Ба суммаи касрҳои соддатарини коэффициентҳояшон ададҳои ҳақиқӣ ҷудо кардани касри рационалии дурусти коэффициентҳояшон ададҳои комплексӣ 227

§ 8. Проблемаи интегронидани касрҳои рационалӣ . . . 232

§ 9. Методи Остроградский 235

§ 10. Интегронидани баъзе ифодаҳои иррационалӣ ва трансценденӣ 239

§ 11. Интегралҳои эллиптикӣ 253

Боби 8. **Теоремаҳои асосӣ дар бораи функцияҳои бефосила ва дифференцированидашаванда** 255

§ 1. Таърифи нави қимати лимитии функция 255

§ 2. Маҳдудияти локалии функцияҳое, ки қиматҳои лимитӣ доранд 260
§ 3. Теорема дар бораи устувории аломати функцияи бефосила. 262
§ 4. Аз қимати фосилавии дилхоҳ гузаштани функцияи бефосила. 263
§ 5. Маҳдудияти функцияе, ки дар сегмент бефосила аст . 264
§ 6. Ҳудудҳои саҳехи функция ва ба онҳо ноил шудани функцияҳое, ки дар сегмент бефосила мебошанд 265
§ 7. Афзуншавии (камшавии) функция дар нуқта. Максимуми (минимуми) локалӣ 268
§ 8. Теорема дар бораи нули ҳосила 270
§ 9. Формулаи афзоишҳои охирнок (формулаи Лагранж) . 271
§ 10. Баъзе натиҷаҳо аз формулаи Лагранж 273
§ 11. Формулаи ҷамъбастии афзоишҳои охирнок (формулаи Қоши) 278
§ 12. Қушодани номуайяниҳо (қоидаи Лопиталь) . . . 279
§ 13. Формулаи Тейлор 286
§ 14. Шаклҳои гуногуни аъзои боқимонда. Формулаи Маклорен. 290
§ 15. Баҳодиҳии аъзои боқимонда. Ҷудокунии баъзе функцияҳои элементарӣ 293
§ 16. Мисолҳои татбиқоти формулаи Маклорен 298
Илова. Ҳисоб кардани функцияҳои элементарӣ 304

Боби 9. Тадқиқи геометрии графики функция. Ёфтани қиматҳои максимум ва минимуми функция 317

§ 1. Қитъаи монотонии функция. Ҷустуҷӯи нуқтаҳои экстремум. 317
§ 2. Самти барҷастагии графики функция 326
§ 3. Нуқтаҳои хамии графики функция 328
§ 4. Шарти кифоягии сеюми экстремум ва хамӣ 333
§ 5. Асимптотаҳои графики функция 336
§ 6. Схемаи тадқиқи графики функция 338
§ 7. Ҷустуҷӯи қиматҳои максимум ва минимуми функция. Экстремуми қаторӣ 341

Боби 10. Интеграли муайян 345

§ 1. Суммаҳои интегралӣ. Интегронидашавандагӣ 345
§ 2. Суммаҳои болой ва поёнӣ 348

§ 3. Шарти зарурӣ ва кифоягии интегронидашавандагӣ . . 353
§ 4. Баъзе классҳои функцияҳои интегронидашаванда . . 355
§ 5. Хосиятҳои асосии интеграли муайян 363
§ 6. Баҳодиҳии интегралҳо. Формулаҳои қимати миёна . . 366
§ 7. Мавҷудияти функцияи ибтидоии функцияи бефосила. Қоидаҳои асосии интегронидан 371

Иловаи 1. Баъзе нобаробариҳои муҳимтарин барои сумма ва интегралҳо 379

Иловаи 2. Исботи тасдиқоти п. 4 § 6 384

Боби 11. **Татбиқоти геометрӣ ва физикавии интеграли муайян** . . 388

§ 1. Дарозии камони хати каҷ 388
§ 2. Масоҳати фигураи ҳамвор 404
§ 3. Ҳаҷми ҷисмҳо ва масоҳати сатҳҳо 411
§ 4. Баъзе татбиқоти физикавии интеграли муайян 417

Илова. Мисолҳои фигураҳои квадратонидашаванда 419

Боби 12. **Методҳои ҳисоби тақрибии решаҳои муодилаҳо ва интегралҳои муайян** 425

§ 1. Методҳои ҳисоби тақрибии решаҳои муодилаҳо . . . 425
§ 2. Методҳои ҳисоби тақрибии интегралҳои муайян . . . 438

Боби 13. **Назарияи қаторҳои ададӣ** 451

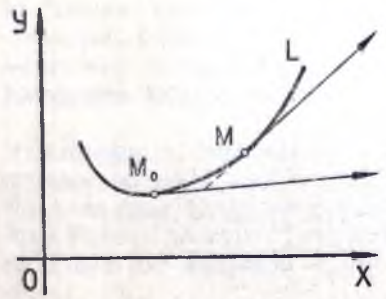
§ 1. Мафҳуми қатори ададӣ 451
§ 2. Қаторҳои аъзоҳояшон мусбат 457
§ 3. Қаторҳои мутлақ ва шартӣ наздикшаванда 473
§ 4. Операцияҳои арифметикӣ бо қаторҳои наздикшаванда . 481
§ 5. Аломатҳои наздикшавии қаторҳои дилхоҳ 483
§ 6. Ҳосилҳои зарби беохир 490

Иловаи 1. Теоремаи ёрирасони п. 3, § 2 497

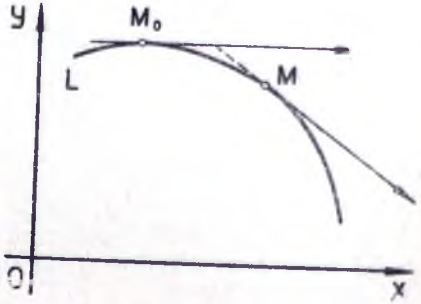
Иловаи 2. Ба ҳосили зарби беохир чудо кардани функцияи $\sin x$ 498

қитъаи хати каҷи M_0M меноманд (агар расандаи аз нуқтаи M_0 гузаштагиро бо роҳи кутоҳтарин бо расандаи аз нуқтаи M гузаштагӣ ҳамҷоя кардан онро ба муқобили ҳаракати акрабаки соат чарх занондан лозим бошад, аломат плюс ва дар мавриди баръакс аломат минус мешавад).

Дар расми 16.11 қитъаи M_0M, ки кунҷи ҳамсоягии мусбат дорад, ва дар расми 16.12 қитъаи M_0M, ки кунҷи ҳамсоягии манфӣ дорад, тасвир шудааст.



Расми 16.11.



Расми 16.12.

Мафҳуми *каҷии миёнаи қитъаи хати каҷи M_0M-ро ҷорӣ мекунем. Нисбати кунҷи ҳамсоягии қитъаи хати каҷи M_0M ба дарозии ин қитъаро каҷии миёнаи ин қитъа меномем.*

Азбаски мо нуқтаи M_0-и хати каҷи L-ро нуқтаи қайдшуда меҳисобем, пас каҷии миёнаи қитъаи M_0M функцияи нуқтаи M ё функцияи параметри t мебошад. Мо ин функцияро бо символи $\varkappa_{M0}(M)$ ё $\varkappa_{M0}(t)$ ишорат менамоем.

Масъалаи лимити ин функция ҳангоми қад-қади хати каҷи L ба нуқтаи M_0 майл кардани нуқтаи M (ё ҳангоми ба t_0 майл кардани параметри t)-ро меомӯзем.

Таъриф. Қимати лимитии каҷии миёнаи қитъаи хати каҷи M_0M ҳангоми қад-қади хати каҷ ба нуқтаи M_0 майл кардани нуқтаи M-ро каҷии хати каҷи L дар нуқтаи додашудаи M_0 меноманд ва бо символи $k(M_0)$ ишорат менамоянд.

Ҳамин тариқ, мувофиқи таъриф

$$k(M_0) = \lim_{M \to M_0} \varkappa_{M0}(M) = \lim_{t \to t_0} \varkappa_{M0}(t).$$

1. Ҳам каҷии миёнаи қитъаи дилхоҳи хати рост ва ҳам каҷии ин хат дар нуқтаи дилхоҳи он ба нуль баробар аст.

2. Ҳам каҷии миёнаи қитъаи дилхоҳи давраи радиусаш R ва ҳам каҷии ин давра дар нуқтаи дилхоҳи он ба $1/R$ баробар аст.

Формулаи ҳисоб кардани каҷии хати каҷи L дар нуқтаи дилхоҳашро муқаррар мекунем.

2. Формулаи ҳисоб кардани каҷӣ. Бигзор хати каҷи L бо муодилаҳои параметрии $x = x(t)$, $y = y(t)$ дода шуда бошад, M_0 — ягон нуқтаи қайдшудаи ин хати каҷ, ки дар қиматҳои параметри t_0 дуруст аст. Фарз мекунем, ки хама нуқтаҳои ягон атрофи M_0-и хати каҷи L нуқтаҳои одди мебошанд ва функцияҳои $x(t)$ ва $y(t)$ дар нуқтаи t_0 ҳосилаҳои дуюм доранд. Мо бо ин фарзиятҳо формулаи умумии ҳисоб кардани каҷии хати каҷи L (дар нуқтаи M_0-и он)-ро муқаррар мекунем.

Бигзор $\dot{x}$ ва $\ddot{x}$ қимати ҳосилаҳои якум ва дуюми функцияи $x = x(t)$ дар нуқтаи t_0 ва $\dot{x} + \Delta\dot{x}$ қимати ҳосилаи якуми ин функция дар нуқтаи $t_0 + \Delta t$ (Δt — афзоиши дилхоҳи параметри t) бошад. Ҳамин тариқ, $\Delta\dot{x}$ афзоиши ҳосилаи якуми функцияи $x = x(t)$ мебошад. Бигзор $\dot{y}$, $\ddot{y}$ ва $\dot{y} + \Delta\dot{y}$ қиматҳои мувофиқи ҳосилаҳои функцияи $y = y(t)$ бошанд.

Агар нуқтаи M_0, ки дар қиматҳои параметри t_0 дуруст аст, нуқтаи қайдшуда бошад ва нуқтаи M дар қиматҳои параметри $t = t_0 + \Delta t$ дуруст бошад, онгоҳ кунҷи ҳамсоягии қитъаи M_0M ва дарозии ин қитъаро чун функцияҳои аргументи Δt муоина кардан мумкин аст. Мо ин функцияҳоро мувофиқан бо $\alpha(\Delta t)$ ва $l(\Delta t)$ ишорат мекунем.

Мувофиқи таъриф каҷии $k(M_0)$ дар нуқтаи M_0-и хати каҷ ба қимати лимитии

$$k(M_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{l(\Delta t)} \tag{16.31}$$

баробар аст. Исбот мекунем, ки қимати лимитии (16.31) вуҷуд дорад ва ин қимати лимитиро ҳисоб мекунем.

Кунҷҳои моили тири Ox ва расандаҳои хати каҷи мувофиқан аз нуқтаҳои M_0 ва M гузаронидашударо бо φ_0 ва φ ишорат мекунем (расми 16.13). Онгоҳ, ҳангоми мавқеи дилхоҳ доштани нуқтаҳои M_0 ва M барои кунҷи ҳамсоягии $\alpha(\Delta t)$ муносибати

$$\alpha(\Delta t) = \varphi - \varphi_0$$

дуруст аст. Аз муносибати охирин натиҷа мебарояд, ки

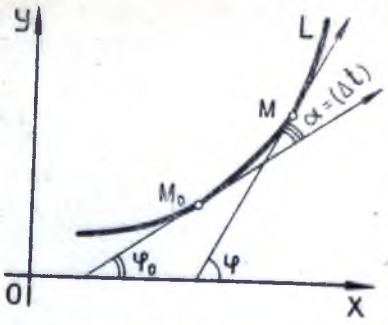
$$\operatorname{tg}\alpha(\Delta t) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_0}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_0}. \tag{16.32}$$

Дар асоси маънои геометрии ҳосила (ба п. 4 § 1 боби 5 ниг.) ва ифодаи ҳосилаи функцияҳое, ки ба намуди параметрӣ дода шудаанд (ба § 11 боби 5 ниг.), мо чунин ифодаҳоро навишта метавонем:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\dot{y} + \Delta\dot{y}}{\dot{x} + \Delta\dot{x}}.$$

Ҳамин тариқ, формулаи (16.32)-ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\operatorname{tg}\alpha(\Delta t) = \frac{\dfrac{\dot y + \Delta\dot y}{\dot x + \Delta\dot x} - \dfrac{\dot y}{\dot x}}{1 + \dfrac{\dot y\,(\dot y + \Delta\dot y)}{\dot x\,(\dot x + \Delta\dot x)}} = \frac{\dot x \cdot \Delta\dot y - \dot y \cdot \Delta\dot x}{\dot x(\dot x + \Delta\dot x) + \dot y(\dot y + \Delta\dot y)}. \quad (16.33)$$



Расми 16.13.

Азбаски функцияҳои $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ дар нуқтаи t_0 ҳосилаҳои дуюм доранд, пас ҳосилаҳои якуми ин функцияҳо дар нуқтаи t_0 бефосила мебошанд ва, бинобар ин,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta\dot y = 0, \quad \lim_{\Delta t\to 0} \Delta\dot x = 0.$$

Лекин, онгоҳ, дар асоси баробарии (16.33),

$$\lim_{\Delta t\to 0} \operatorname{tg}\alpha(\Delta t) = 0.$$

Аз баробарии охирин ва аз бефосилагии арктангенс натиҷа мебарояд, ки

$$\lim_{\Delta t\to 0} \alpha(\Delta t) = 0.$$

Бинобар ин баробарии зерин дуруст аст:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)} = \lim_{\Delta t\to 0} \left[\cos\alpha(\Delta t)\,\frac{\alpha(\Delta t)}{\sin\alpha(\Delta t)}\right] = 1. \quad (16.34)$$

Баробарии (16.34) ва теоремаи қимати лимитии ҳосили зарб масъалаи ҳисоб кардани қимати лимитии (16.31)-ро ба масъалаи ҳисоб кардани қимати лимитии зерин меорад:

$$k(M_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)}{l(\Delta t)}. \quad (16.35)$$

Барои ҳисоб кардани ин қимати лимитӣ қайд мекунем, ки дарозӣ $l(\Delta t)$-и қитъаи хатти каҷи M_0M бо формулаи

$$l(\Delta t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \sqrt{\dot x^2(\tau) + \dot y^2(\tau)}\,d\tau$$

муайян карда мешавад. Ба интеграли қисми рости баробарии охирин формулаи қимати миёнаро татбиқ карда,

$$l(\Delta t) = \Delta t \sqrt{\dot{x}^2(t^*) + \dot{y}^2(t^*)} \tag{16.36}$$

(дар ин ҷо $t_0 \leqslant t^* \leqslant t_0 + \Delta t$)-ро ҳосил мекунем.

Муносибатҳои (16.35), (16.33) ва (16.36) ба хулоса кардани ҷумлаи зерин имконият медиҳанд: ҳисоб кардани каҷӣ ба ҳисоб кардани қимати лимитии

$$k(M_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dot{x}\dfrac{\Delta \dot{x}}{\Delta t} - \dot{y}\dfrac{\Delta \dot{x}}{\Delta t}}{[\dot{x}(\dot{x} + \Delta \dot{x}) + \dot{y}(\dot{y} + \Delta \dot{y})]\sqrt{\dot{x}^2(t^*) + \dot{y}^2(t^*)}} \tag{16.37}$$

меорад. Азбаски функцияҳои $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ дар нуқтаи t_0 ҳосилаҳои дуюм доранд, пас қиматҳои лимитии зерин мавҷуд ҳастанд:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta t} = \ddot{x} \quad \text{ва} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \dot{y}}{\Delta t} = \ddot{y}. \tag{16.38}$$

Баъд, аз бефосилагии ҳосилаҳои якуми функцияҳои $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ хулоса мебарояд, ки

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta \dot{x} = 0, \ \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \dot{y} = 0, \ \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\dot{x}^2(t^*) + \dot{y}^2(t^*)} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \tag{16.39}$$

Аз мавҷудияти қиматҳои лимитии (16.38) ва (16.39) натиҷа мебарояд, ки қимати лимитии воқеи қисми рости (16.37) вуҷуд дорад ва ба

$$\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

баробар мебошад. Ҳамин тариқ, мо исбот кардем, ки каҷии хати каҷи L дар нуқтаи M_0 вуҷуд дорад ва бо формулаи

$$k(M_0) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}} \tag{16.40}$$

муайян карда мешавад.

Қ а й д. Фарз мекунем, ки *хати каҷи L графики функцияи ду маротиба дифференсиронидашавандаи $y = f(x)$ мебошад* ва *каҷӣ $k(M_0)$-и ин хат дар нуқтаи M_0 ҳисоб карда шавад.*

Мо $x = t$ ва $y = f(t)$-ро ба формулаи (16.40) гузошта, барои каҷии матлуб формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$k(M_0) = \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}.$$

Ниҳоят, агар хати каҷ бо муодилаи қутбии $r = r(\theta)$ (дар ин ҷо $r(\theta)$ — функцияи ду маротиба дифференсиронидашавандаи кунҷи қутбии θ) дода шуда бошад, онгоҳ кунҷи қутбии θ-ро ба сифати параметр t қабул карда ва $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$ буданашро ба эътибор гирифта, мо барои каҷӣ ифодаи зеринро ҳосил менамоем:

$$k = \frac{r^2(\theta) + 2[r'(\theta)]^2 - r(\theta)\,r''(\theta)}{\{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2\}^{3/2}}.$$

Ба сифати мисол каҷии хати **занҷирии** $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ **дар нуқ**таи дилхоҳро ҳисоб мекунем.

Азбаски

$$1 + [f'(x)]^2 = \mathrm{ch}^2\frac{x}{a} = \frac{y^2}{a^2}, \quad f''(x) = \frac{1}{a}\,\mathrm{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}$$

аст, пас каҷӣ ба

$$k = \frac{a}{y^2} = \frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\,x/a}$$

баробар мешавад.

§ 4. Эволюта ва эвольвента

1. Нормали хати каҷи ҳамвор. Фарз мекунем, ки хати каҷи ҳамвори L ба воситаи муодилаҳои параметрии

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{16.41}$$

дода шудааст. Чунин меҳисобем, ки хати каҷи L нуқтаҳои худбуриш ва қитъаҳои худтакья надорад. Ғайр аз он, чунин меҳисобем, ки ҳар як нуқтаи хати каҷи L нуқтаи оддӣ* мебошад.

Мафҳуми нормали хати каҷ дар нуқтаи додашудаи он M-ро чорӣ мекунем.

---

* Дар ингуна мавридҳо ҳар як нуқтаи хати каҷи L расанда дорад.

Хати росте, ки дар ҳамвории хати каҷи L воқеъ аст ва аз нуқтаи M-и хати каҷ ба L (дар нуқтаи M) перпендикуляр шуда мегузарад, нормали хати каҷи L (дар нуқтаи M) номида мешавад (расми 16.14).

Муодилаи нормали хати каҷро меёбем. Фарз мекунем, ки x ва y координатаҳои нуқтаи M-и хати каҷи L, X ва Y координатаҳои нуқтаи дилхоҳи N-и нормали хати каҷ мебошанд. Мувофиқи таъриф, нормаль ба расанда перпендикуляр мебошад ва, бинобар ин, коэффициенти кунҷӣ k_n-и нормаль бо коэффициенти кунҷӣ k_t-и расанда бо муносибати*

$$k_n k_t = -1 \qquad (16.42)$$

алоқаманд мебошанд. Азбаски коэффициенти кунҷӣ k_t-и расанда дар мавриди ба намуди параметрӣ дода шудани хати каҷи (16.41) ба ψ'/φ' баробар аст, пас аз (16.42) ифодаи

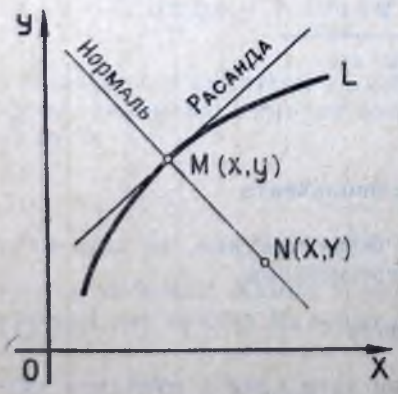
$$k_n = -\varphi'/\psi' \qquad (16.43)$$

-ро ҳосил мекунем. Муодилаи хати рости коэффициенти кунҷиаш k_n-и додашударо, ки аз курси геометрияи аналитикӣ маълум аст, истифода карда, муодилаи нормали хати каҷи L-ро ҳосил мекунем:

$$Y - y = -\varphi'/\psi' \,((X - x). \qquad (16.44)$$

$x = \varphi(t)$ ва $y = \psi(t)$ буданашро ба эътибор гирифта, муодилаи (16.44)-ро ин тавр менависем:

$$\varphi'(X - \varphi) + \psi'(Y - \psi) = 0. \qquad (13.45)$$



Расми 16.14.

Қ а й д. Агар расанда (дар нуқтаи M) ба тири абсцисса параллель бошад, онгоҳ коэффициенти кунҷии он (k_t) ба нуль баробар аст ва, бинобар ин, муносибатҳои (16.42), (16.43) ва (16.44) маъно надоранд. Аммо дар ин мавриди муодилаи (16.45) муодилаи нормальро ифода мекунад. Ҳақиқатан, агар $k_t = 0$ бошад (расанда ба тири абсцисса параллель аст), онгоҳ $\psi' = 0$ ва $\varphi' \neq 0$** аст ва, аз ҳамин сабаб, муносибати (16.44) намуди $X - \varphi = 0$-ро қабул мекунад. Ин муодилаи хати ростест, ки ба ти-

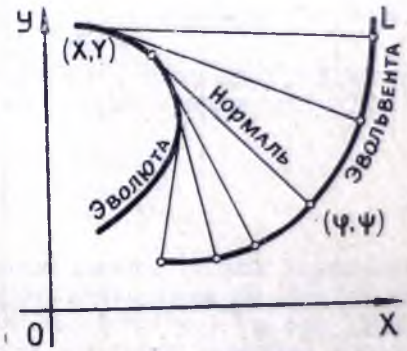
* Ин муносибат ба курси геометрияи **аналитикӣ (ба, масалан,** барориши «Геометрияи аналитикӣ»-и ҳамин курс ниг.) маълум аст.

** Ба хотир меорем, ки $k_t = \psi'/\varphi'$ ва барои нуқтаҳои оддӣ $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$ аст.

ри Ox перпендикуляр аст ва дар тири Ox порчаи ба φ баробарро бурида чудо мекунад. Дар ин маврид ин хати рост бо нормаль ҳамҷоя аст, ки ин фаҳмост.

2. Эволюта ва эвольвентаи хати каҷи ҳамвор. Бигзор хати каҷи L ҳамон шартҳоеро, ки дар пункти гузашта муоина шуданд, қаноат намояд. Ба муодилаи (16.5) муроҷиат менамоем. Агар дар ин муодила t чун параметр муоина шавад, онгоҳ он *муодилаи оилаи ҳама нормалҳои якпараметраи* хати каҷи ҳамвори L-ро ифода менамояд. Расми 13.15 дар бораи оилаи нормальҳои хати каҷи ҳамвор тасаввурот медиҳад.

Дар шартҳои муайян оилаи нормальҳои якпараметра ба хати гирдгард соҳиб аст, ки онро *эволютаи* хати каҷи L меноманд. Инак, *оилаи нормальҳои якпараметраи гирдгарди хати каҷи ҳамвори L эволютаи ин хати каҷ номида мешавад. Хати каҷи L нисбат ба эволютааш эвольвента номида мешавад.*



Расми 16.15.

Шарти мавҷудияти эволютаи хати каҷи ҳамвори L-ро аниқ мекунем ва муодилаи параметрии онро меёбем.

Чунин меҳисобем, ки хати каҷи L бе нуқтаҳои махсус ба воситаи муодилаҳои параметрии (16.1) дода шудааст. Барои соддагӣ фарз мекунем, ки параметри t дар интервали (0, 1) тағьир меёбад. Инчунин фарз мекунем, ки функцияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$, ки дар муодилаҳои (16.41) иштирок доранд, дар интервали (0, 1) соҳиби ҳосилаҳои сеюми бефосила мебошанд. Теоремаи зерин дар ин фарзиятҳо дуруст аст.

Теоремаи 16.4. *Бигзор дар ҳама нуқтаҳои хати каҷи L каҷии он k ва ҳосилаи каҷӣ* ба нуль баробар набошад. Онгоҳ эволютаи хати каҷи L вуҷуд дорад, дар айни ҳол муодилаҳои параметрии эволюта чунин намуд доранд*:

$$\left.\begin{aligned} X &= \varphi - \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}\psi', \\ Y &= \psi + \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}\varphi'. \end{aligned}\right\} \qquad (16.46)$$

Исбот. Мо эволютаро чун оилаи нормалҳои якпараметраи гирдгарди хати каҷи L муайян кардем. Ин оила бо муодилаи

* Дар шартҳое, ки ба функцияҳои φ ва ψ мансубанд, каҷии k функцияи дифференсиронидашавандаи параметри t-ро ифода менамояд.

(13.45) ифода мешавад. Ҳамин тариқ, функцияи $F(X, Y, t)$, ки оилаи нормалҳоро ифода менамояд, бо муносибати

$$F(X, Y, t) = \varphi'(X - \varphi) + \psi'(Y - \psi) \qquad (16.47)$$

муайян мешавад, дар айни ҳол t роли параметрро мебозад.

Акнун хулосаҳои § 1-уми ҳамин боб (дар бораи мавҷудияти хати гирдгард)-ро барои аниқ кардани масъалаи мавҷудияти эволюта (яъне оилаи (16.45)) татбиқ менамоем. Мо бояд иҷро шудани шарти лемман п. 3 § 1-уми ҳамин боб ва шарти теоремаи 16.1-ро санҷем. Шартҳои номбурдаро месанҷем. Аввал шарти леммаро месанҷем. Дар шартҳои баёншудае, ки ба функцияҳои φ ва ψ мансубанд, функцияҳои $F(X, Y, t)$ ва $F_t'(X, Y, t)$ дифференсиронидашаванда мебошанд. Акнун боварӣ ҳосил мекунем, ки якобиани $\dfrac{D(F, F_t')}{D(X, Y)}$ аз нуль тафовут дорад. Ифодаи каҷии k-и хати каҷи L (16.40)-ро истифода карда, ин якобианро ба шакли зерин навиштан мумкин аст:

$$\frac{D(F, F_t')}{D(X, Y)} = k\left[\varphi'^2 + \psi'^2\right]^{3/2}.$$

Мувофиқи шарти теорема каҷии k аз нуль тафовут дорад. Ғайр аз он, азбаски ҳама нуқтаҳои хати каҷи L нуқтаҳои оддӣ мебошанд, пас $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$ аст. Ҳамин тариқ, якобиани номбурда аз нуль тафовут дорад ва, аз ҳамин сабаб, шарти лемма иҷро мешавад.

Акнун шарти теоремаи 16.1-ро месанҷем. Дар шартҳои баёншудае, ки ба функцияҳои φ ва ψ мансубанд, ҳосилаҳои F_x', F_y', F_{tx}'', F_{ty}'', F_{tt}'' бефосила мебошанд. Акнун ба дурустии муносибати $F_{tt}'' \neq 0$ (барои ҳама қиматҳои t-и интервали (0, 1) ва барои нуқтаҳои характеристикии нормалҳои хати каҷи L) боварӣ ҳосил кардан лозим аст.

Азбаски

$$F_{tt}'' = \varphi'''(X - \varphi) + \psi'''(Y - \psi) - 3(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'') \qquad (16.48)$$

мебошад ва мувофиқи п. 1 § 1-уми ҳамин боб ва формулаҳои (13.13) нуқтаҳои характеристикӣ барои мавриди муоинашаванда бо формулаҳои

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(X - \varphi) + \psi'(Y - \psi) &= 0, \\ \varphi''(X - \varphi) + \psi''(Y - \psi) - (\varphi'^2 + \psi'^2) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16.49)$$

муайян мешаванд, пас қимати ҳосилаи F_{tt}'' (дар нуқтаҳои характеристикӣ) дар асоси (16.48) ва (16.49) ба ифодаи зерин баробар аст:

Иловаи 3. Методҳои ҷамъбастии басуммагирии қаторҳои дуршаванда 502

Боби 14. **Функцияҳои якчандтағьирьёбанда** 507

§ 1. Мафҳуми функцияи якчандтағьирьёбанда 507
§ 2. Қимати лимитии функцияи якчандтағьирьёбанда . . . 515
§ 3. Функцияҳои бефосилаи якчандтағьирьёбанда . . . 522
§ 4. Ҳосила ва дифференциали функцияҳои якчандтағьирьёбанда 529
§ 5. Ҳосилаҳои хусусӣ ва дифференциалҳои тартиби олӣ . . 548
§ 6. Экстремуми локалии функцияи m-тағьирьёбанда . . 568
§ 7. Методи градиентии ҷустуҷӯи экстремуми функцияҳои хеле барчаста 582

Илова. Дар бораи интихоби тақсимоти оптималии сегмент барои ҳисоби тақрибии интеграл 605

Боби 15. **Назарияи функцияҳои ноошкор ва татбиқоти он** . . . 608

§ 1. Мафҳуми функцияи ноошкор 608
§ 2. Теорема дар бораи мавҷуд будан ва дифференцирониданашаванда будани функцияи ноошкор ва баъзе татбиқоти он. 610
§ 3. Функцияҳои ноошкоре, ки бо системаи муодилаҳои дифференциалӣ муайян мешаванд 621
§ 4. Вобастагии функцияҳо 630
§ 5. Экстремуми шартӣ 637

Илова. Иваз кардани тағьирьёбандаҳо 647

Боби 16. **Баъзе татбиқоти геометрии ҳисоби дифференциалӣ** . . 651

§ 1. Хатҳои каҷи гирдгард ва дискриминантии оилаи якпараметраи хатҳои каҷи ҳамвор 651

§ 2. Баҳамрасиши хатҳои каҷи ҳамвор 661
§ 3. Каҷии хати каҷи ҳамвор 668
§ 4. Эволюта ва эвольвента 673

Илова. Инкишофи минбаъдаи назарияи ададҳои ҳақиқӣ . . 679

Феҳрист 689

Владимир Александрович Ильин,
Эдуард Генрихович Позняк

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть I

(На таджикском языке)

Мудири редакция *К. Олимов*
Муҳаррир *Саодат Орифова*
Муҳаррири ороиш *Ғ. Шукуров*
Муҳаррирони техникӣ *Н. Письменская* ва *Т. Любицкая*
Мусаҳҳеҳ *Г. Мусаввирова*