ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА ФАКУЛЬТЕТИ

НАЗАРИЙ ФИЗИКА КАФЕДРАСИ

Нишонов Мухторали Мадаминович

Квант механикаси

амалий машғулотлар

Тошкент, 2023

Муаллиф таҳрири. 0.003 LaTeX

Амалий машғулотлар

Мавзулар

Кириш

Ушбу қўлланма квант механикасининг асосий тушунчалари ва ундан келиб чиқадиган физикавий оқибатларни кўрсатувчи мисоллар тўпламидир. У ўнта мавзудан иборат бўлиб, Ўзбекистон Республикаси университетларида ўқитиладиган “Квант механикаси” йиллик курсининг ярмини қамраб олади.

Қўлланмада квант механикасининг физикавий асосларига, математик аппаратига, заррани бир ўлчамли ҳаракати ва марказий кучлар майдонидаги ҳаракати, чизиқли гармоник осциллятор ва квант механикасини водород атомига қўлланилишига доир мавзулар ёритилган. Ҳар бир мавзуда асосий назарий маълумотлар қисқача келтирилиб, сўнг бир нечта тегишли мисоллар батафсил қараб чиқилган, охирида мустақил ечиш учун вазифалар келтирилган.

Муаллфининг фикрича, қўлланманинг шу тарзда қурилиши талабаларга мисоллар асосида квант механикасининг тушунчаларини ўзлаштириш ва мос математик усулларни қўллаш кўникмаларини ҳосил қилишларини енгиллаштиради.

Мисол ва вазифаларнинг кўпчилиги [1] қўлланмадан олинган. Қўлланма охирида вазифалар жавоблари, топшириқни бажириш учун маслаҳатлар, баъзи математик тушунчалар ҳақида илова ва адабиётлар рўйхати келтирилган.

Диққат! Қўлланма қисқа вақт, тахминан 1-ой, мобайнида тайёрланганлиги сабабли, унда имло ва математик ифодаларда жиддий хатолар, тушунчаларни изоҳлашда мураккаб фикрлашлар учраши мумкин. Агар шундай ҳолатларга дуч келинса, улар ҳақида муаллифга хабар берасиз деган умид билан,

Нишонов М.М.
31.03.2023

1- мавзу

Қиздирилган жисм нурланиши

1.1 Иссиқликдан нурланиш

Ёруғлик нурини чиқараётган манбадан, ёруғлик, энергия олиб кетади. Ёруғлик манбаига энергияни турли йўллар билан бериш мумкин. Энергия қиздириш орқали берилса, бундай манбадан тарқалувчи нурланиш иссиқликдан нурланиш дейилади.

Иссиқликдан нурланиш – бу жисмнинг ички энергияси ҳисобига электромагнит тўлқинларни тарқатишидир. У жисм таркибидаги ионларнинг ўз мувозанат ҳолати атрофида тебраниши туфайли пайдо бўлади.

Нурланишнинг бу тури XIX- асрнинг охирида физикларнинг алоҳида қизиқишига сабаб бўлди. Чунки фақат шу нурланишгина, барча турдаги люминесенциялардан фарқли равишда, қиздирилган жисмлар билан термодинамик мувозанатда бўла олади.

Иссиқликдан нурланиш ходисасини ўрганиб, физиклар, термодинамика ва оптика орасида ўзаро боғланишни ўрнатишга умид қилган эдилар.

Физикавий тавсифлар

Энергетик ёрқинлик

$R(T)$ – жисмнинг энергетик ёрқинлиги, бирлик вақтнинг t онида жисмнинг бирлик S юзасидан барча йўналишлар бўйлаб, барча ω частоталар (λ тўлқин узунликлари) бўйича тарқалаётган электромагнит тўлқиннинг W энергияси миқдорига тенг бўлган катталик бўлиб, у T ҳароратнинг функциясидир:

$$R(T) = \frac{W(T)}{S \cdot t}.$$

Нур чиқариш қобилияти

$r(\omega, T)$ ёки $r(\lambda, T)$ – жисмнинг нур чиқариш қобилияти, бошқа номи: энергетик ёрқинликнинг спектрал зичлиги. У нурланиш энергиясини барча ω частоталар ёки λ тўлқин узунликлари спектри бўйича тақсимотини англатади. У $(\omega, \omega + d\omega)$ ёки $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ оралиққа мос келувчи $dR(T)$ энергетик ёрқинликни ўша оралиқнинг $d\omega$ ёки $d\lambda$ кенглигига нисбати орқали аниқланади:

$$r(\omega, T) = \frac{dR(T)}{d\omega} \quad \text{ёки} \quad r(\lambda, T) = \frac{dR(T)}{d\lambda}.$$

Бундан

$$R(T) = \int\limits_0^\infty r(\omega, T) d\omega \quad \text{ёки} \quad R(T) = \int\limits_0^\infty r(\lambda, T) d\lambda$$

эканлигини топамиз.

Нур ютиш қобилияти

$a(\omega, T)$ – жисмнинг нур ютиш қобилияти, жисмга тушаётган электромагнит тўлқин энергиясининг қанча қисмини ω частотанинг $d\omega$ атрофида жисм томонидан ютилишини англатади, у ҳарорат ва частотанинг функциясидир:

$$a(\omega, T) = \frac{W_{\text{ютилган}}}{W_{\text{тушган}}}.$$

Абсолют қора жисм тушаётган электромагнит нур энергиясини тўлиғича ютади ва шу сабаб нур ютиш қобилияти $a^{\star}(\omega, T) = 1$ бўлади. Агар жисм нур энергиясини умуман ютмаса, бундай жисм абсолют оқ жисм дейилади ва унинг нур ютиш қобилияти $a(\omega, T) = 0$.

Табиатда мавжуд объектларнинг нур ютиш қобилияти $0 < a(\omega, T) < 1$ оралиқда ўзгаради. Бундай жисмлар кулранг жисмлар дейилади. Агар бирор жисм учун $a(\omega, T)$ нур ютиш қобилиятининг қиймати чегаравий қийматлардан унчалик катта фарқ қилмаса, бундай жисмларни абсолют қора ёки абсолют оқ жисм деб ҳисоблаш мумкин.

Асосий қонуниятлар

XIX асрнинг охирларида абсолют қора жисм нурланиши тажрибаларда яхши ўрганилган эди.

Стефан – Больцман қонуни

1879 йилда Йозеф Стефан тажриба маълумотларини таҳлил қилиб, абсолют қора жисм энергетик ёрқинлиги T

абсолют ҳароратнинг тўртинчи даражасига пропорционал

$$R^{\star}(T) = \sigma T^4, \tag{1.1}$$

деган хулосага келди. Бир қанча вақт ўтиб, 1884 йилда Людвиг Больцман бу боғланишни, термодинамикага асосланиб, назарий келтириб чиқарди. Бу қонун Стефан – Больцман қонуни деб аталади. Замонавий ўлчашларга кўра σ доимийнинг қиймати қуйидагига тенг:

$$\sigma = 5{,}671 \cdot 10^{-8}\,\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4).$$

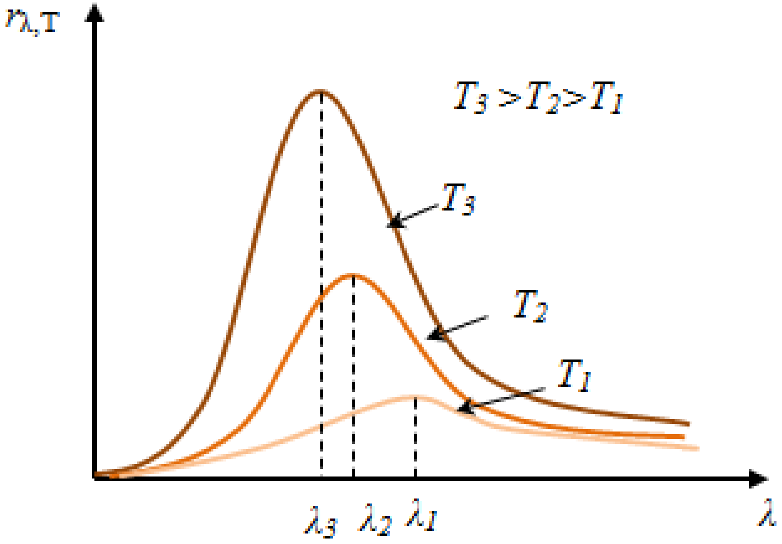
Виннинг силжиш қонуни

XIX асрнинг 90-йиллари охирида абсолют қора жисм нурланиши спектрал тақсимоти тажрибаларда диққат билан ўрганилди. Тажрибалардан маълум бўлдики, $r(\lambda, T)$ функция T ҳароратнинг ҳар бир қийматида яққол ажралиб турадиган максимумга эга экан.

Ҳарорат ортиши билан максимум қисқа тўлқинлар томонга силжийди, бунда T ҳароратни максимумга мос келувчи λ_{max} тўлқин узунлигининг қийматига кўпайтмаси ўзгармасдан қолар экан:

$$\lambda_{max} \cdot T = b \quad \text{ёки} \quad \lambda_{max} = b/T.$$

Бу муносабат аввалроқ Вин томонидан термодинамикага асосланиб олинган эди. У Виннинг силжиш қонунини ифодалайди: абсолют қора жисм нурланиши энергияси максимумига мос келувчи λ_{max} тўлқин узунлиги T асболют ҳароратга тескари пропорционал. Вин доимийсининг қиймати



1.1 - расм: Абсолют қора жисм $r(\lambda, T)$ нур чиқариш қобилиятини турли ҳароратларда λ тўлқин узунлигига боғланиши.

қуйидагига тенг:

$$b = 2,898 \cdot 10^{-3}\,\text{м} \cdot \text{К}.$$

Ушбу қонунни қўллаб, жуда узоқда жойлашган ҳамда ўта қиздирилган жисмларнинг ҳароратини ўлчаш мумкин.

Тажрибаларда эришиш мумкин бўлган ҳароратларда $r(\lambda, T)$ нур чиқариш қобилияти максимуми инфрақизил соҳада ётади. Фақат $T \geq 5 \cdot 10^3$ К бўлганда максимум спектрнинг кўринадиган соҳасига тушади. Қуёш нурланиш энергияси максимуми тахминан 470 нм (спектрнинг яшил соҳаси) тўлқин узунлигига тўғри келиб, Қуёш сиртидаги (агар Қуёшни абсолют қора жисм сифатида қарасак) 6200 К ҳароратга мос келади.

Кирҳгоф қонуни

Ҳар қандай жисмнинг нур чиқариш қобилиятини унинг нур ютиш қобилиятига нисбати берилган ҳароратда ва частотада ушбу жисмнинг шаклига ва унинг кимёвий табиатига боғлиқ эмас, яъни бу нисбат нурланиш частотасининг (тўлқин узунлигининг) ва ҳароратнинг универсал функциясидир:

$$f(\omega,T)=\frac{r(\omega,T)}{a(\omega,T)}\quad \text{ёки}\quad f(\lambda,T)=\frac{r(\lambda,T)}{a(\lambda,T)}.$$

Абсолют қора жисм учун нур ютиш қобилияти $a^{\star}(\omega,T)=1$ эканлигидан, $f(\omega,T)=r^{\star}(\omega,T)$ ва бу функция Кирхгоф функцияси дейилади.

Релей – Жинс қонуни

Стефан-Больцман ва Вин қонунларини назарий келтириб чиқаришга имкон берган термодинамиканинг ютуқлари абсолют қора жисм нурланиши спектрал тақсимоти $r(\lambda,T)$ чизиғини тўлиғича термодинамикага асосланиб келтириб чиқариш мумкин деган умидни пайдо қилди. 1900 йилда бу муаммони машҳур инглиз физиги Ж. Релей ечишга уринди. У ўзининг фикрлашларига асос қилиб классик статистик механиканинг термодинамик мувозанат ҳолатида энергияни барча эркинлик даражалари бўйлаб текис тақсимланиши хақидаги теоремани олди. Бу теорема Релей томонидан ғовакнинг мувозанат нурланишига қўлланилди. Бир қанча вақт ўтгач ушбу ғояни Жинс янада ривожлантирди. Шу йўл билан абсолют қора жисм ҳолида Кирхгофнинг универсал функцияси учун классик статистика асосида қуйидаги иккита формула олинди:

$$f(\lambda,T) = a\,\lambda^{-5}e^{-\frac{b}{\lambda T}}, \tag{1.2}$$

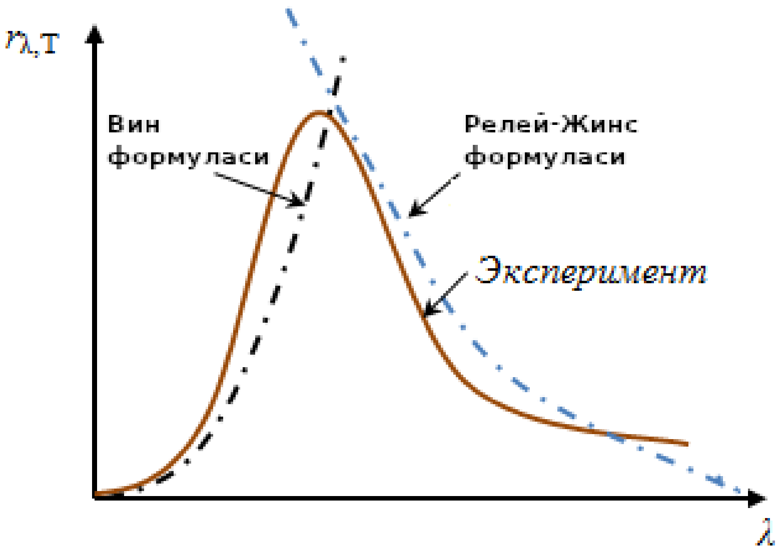
бу ерда a, b –қандайдир доимийлар; (1.2) ифода – Вин формуласи дейилади; ушбу формула нурланиш спектрини катта частоталар (кичик тўлқин узунликлар) соҳаси учун экспериментларни тўғри ифодалайди;

$$\begin{aligned} f(\lambda,T) &= kT\lambda^{-2} \\ \text{ёки} & \\ f(\omega,T) &= \tfrac{\omega^2}{4\pi^2c^2}kT,\, f(\nu,T) = \tfrac{\nu^2}{c^2}kT \end{aligned} \tag{1.3}$$

бу ерда $k = 1,380649 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Ж}}{\text{К}}$ – Больцман доимийси; (1.3) муносабат Релей – Жинс формуласи деб аталади. У кичик частотали (катта тўлқин узунликли) соҳа учун олинган тажриба натижаларини ифодалайди (1.2- расм). Бундан ташқари, ундан абсолют қора жисмнинг $R(T)$ энергетик ёрқинлигини Релей – Жинс формуласига кўра ҳисобланса,

$$R(T) = \int\limits_0^\infty r(\nu,T)d\nu = \frac{kT}{c^2}\int\limits_0^\infty \nu^2 d\nu \to \infty$$

чексизликка айланиши ва бундан ғовак ичидаги қиздирилган жисм ҳамда нурланиш орасида мувозанат фақат абсолют нол ҳароратдагина ўрнаши каби мантиқсиз хулоса келиб чиқди. Иссиқликдан нурланиш ходисасига доир тажриба натижаларини классик физика асосида назарий изоҳлаш имконини йўқлиги ултрабинафша ҳалокат деб номланди.



1.2 - расм: Релей – Жинс формуласи кичик частоталарда абсолют қора жисм нурланиш спектрини тўғри ифодалайди, ўрта частоталарда экспериментдан четланади, юқори частоталарда хато натижага олиб келади.

1.2 Квант назариясининг пайдо бўлиши

Шундай қилиб, классик физикага кўра хатосиз бўлган формула тажриба билан бутунлай қарама-қарши натижаларга олиб келди. Абсолют қора жисм нурланиши спектрал тақсимоти хақидаги масалани ўша пайтда мавжуд назария асосида ечиб бўлмаслиги маълум бўлди. Бу масала классик физикага ёт бўлган ғоя асосида немис физиги Макс Планк томонидан мувофақиятли ечилди.

Планк ғояси. Ёруғлик квантлари

Планк моддаларни “ўзининг мувозанат ҳолати атрофида тебранувчи осцилляторла тўплами”, – деб тасаввур қилди. Осцилляторлар ва нурланиш орасидаги иссиқлик мувозанати масаласига классик физика усулларига асосланиб ёндашилса яна Релей – Жинс қонуни келиб чиқиши тушунарли. Нурланиш ва осцилляторлар орасидаги энергия алмашинувида, классик тасаввурларга кўра, юқори частотали осцилляторлар асосий ўрин тутади. Аммо, тажрибаларда кузатилган натижаларга кўра, спектрал тақсимот функциясининг қиймати юқори частоталарда камайиши зарур (1.2-расмга қаранг). Шу сабаб, юқори частотали осцилляторларнинг энергия алмашинувидаги ҳиссасини камайтириш мақсадида Планк, қиздирилган жисмнинг нурланишини электромагнит тўлқин эмас, балки энергияси нурланиш частотасига пропорционал бўлган

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega, \tag{1.4}$$

зарралар (**квантлар**) оқими тарзида қараш керак деган ғояни илгари сурди. Бунда h – Планк доимийси дейилади, унинг қиймати $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Ж·с, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Ж·с – келтирилган Планк доимийси. Планк доимийси – квант физикасидаги фундаментал доимий бўлиб, у “Махсус нисбийлик назариясида” ёруғлик тезлиги c каби аҳамиятли. Нурланишнинг умумий энергияси, энди

$$E_n = n\varepsilon \tag{1.5}$$

бўлади.

Қиздирилган жисм электромагнит нурланиши жараёнида энергияни квантлаб чиқарилиши ва ютилишига доир ғоясини қўллаб, Планк, абсолют қора жисм ҳолида Кирхгофнинг универсал функцияси учун, барча частоталарда тўғри ишлайдиган, янги формулани олди. Бунда у (1.3) ифода орқали аниқланган Релей – Жинс қонунида kT ўрнига моддани ташкил қилган осцилляторлар тўпламининг ўртача кинетик энергиясини ишлатди:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \langle E \rangle. \tag{1.6}$$

1-мисол. Осцилляторлар тўпламининг $\langle E \rangle$ ўртача кинетик энергиясини топинг.

Ечими. Қисқа эластик тўқнашиб, бир-бири билан эркин энергия алмашувчи, кўп сондаги гармоник осцилляторлар тўпламига эгамиз, деб тасаввур қилайлик. Больцман тақсимотига кўра осцилляторнинг E_n энергияга эга бўлиш эҳтимоли қуйидагича аниқланади:

$$W_n = e^{-E_n/kT}.$$

У ҳолда тебранма ҳаракатнинг ўртача энергияси

$$\langle E \rangle = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} W_n E_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} W_n} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n/kT}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT}}.$$

Бунга энергиянинг (1.4) ва (1.5) ифодасини қўямиз:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \left(e^{-\hbar\omega/kT}\right)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\hbar\omega/kT}\right)^n}.$$

Чексиз геометрик прогрессияни олайлик:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}, \quad q < 1.$$

Тенгликнинг иккала тарафидан q бўйича ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 n q^{n-1} = \frac{a_0}{(1-q)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_0 n q^n = \frac{a_0 q}{(1-q)^2}.$$

Агар $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ эканлигини ҳисобга олсак

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_0 n q^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n} = \frac{a_0 q}{1-q} = \frac{a_0}{q^{-1}-1}$$

натижани оламиз. Ушбу муносабатларда $a_0 = \hbar\omega$ ва $q = e^{-\hbar\omega/kT}$ белгилашлар киритсак, энергиянинг ўртача қиймати учун

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \tag{1.7}$$

ифодага келамиз.

1-мисолда топилган (1.7) ифодани (1.6) формулага қўйиб, Кирҳгофнинг универсал функцияси учун Планк формуласини ёзамиз:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{1.8}$$

Планк формуласи абсолют қора жисм нурланишининг спектрал зичлиги тақсимотини (энергетик ёрқинликни) ихтиёрий частоталар учун тажрибаларда олинган барча натижаларни бирлаштирди. Планк формуласидан Стефан – Больцман ва Релей – Жинс қонунларини келтириб чиқариш мумкин. Планк формуласи $h\nu \ll kT$ бўлганда Релей – Жинс формуласига ўтади.

Абсолют қора жисм нурланиши муаммосини ечиш физикада янги асрни бошлаб берди.

2-мисол. Планк формуласидан Стефан – Больцман қонунини келтириб чиқаринг.

Ечими. Энергетик ёрқинлик

$$R(T) = \int_0^\infty r(\omega, T) d\omega$$

ифода билан аниқланар эди. Абсолют қора жисм учун нур чиқариш қобилияти $r^\star(\omega, T) = f(\omega, T)$ Кирхгофнинг универсал функциясига тенг. Энергетик ёрқинлик ифодасига $f(\omega, T)$ учун Планк формуласини ишлатайлик:

$$\int_0^\infty f(\omega, T) d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega.$$

Қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз:

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\hbar}{kT} d\omega;$$

$$\omega = \frac{kT}{\hbar}x \quad \Rightarrow \quad d\omega = \frac{kT}{\hbar}dx.$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} R^{\star}(T) &= \int\limits_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}d\omega = \frac{k^4T^4}{4\pi^2c^2\hbar^3}\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx \\ &= \frac{k^4T^4}{4\pi^2c^2\hbar^3}\cdot\frac{\pi^4}{15} = \left(\frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3}\right)T^4 = \sigma\cdot T^4. \end{aligned}$$

Бу ерда

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$$

эканлигини ҳисобга олдик[1]. Агар Стефан – Больцман доимийси σ ни ҳисобласак

$$\sigma = \frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3} = 5,6795987\cdot 10^{-8}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$$

қийматни оламиз. Бунда Больцман доимийси, Планкнинг келтирилган доимийси ва ёруғлик тезлиги учун қуйидаги қийматлар

$$\begin{aligned} k &= 1,38064900\cdot 10^{-23}\,\left[\frac{\text{Ж}}{\text{К}}\right] \\ \hbar &= 1,05400000\cdot 10^{-34}\,[\text{Ж}\cdot\text{с}] \\ c &= 2,99792458\cdot 10^{8}\,\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] \end{aligned}$$

ҳамда 1 Ж $=$ 1 Вт·с эканлиги ҳисобга олинди.

---

[1] Бу интегрални (10.18) муносабат ёрдамида ҳисоблаш иловада келтирилган.

3-мисол. Планк формуласидан Релей – Жинс қонунини келтириб чиқаринг

Ечими. Кичик частоталарда $\hbar\omega \ll kT$ деб фараз қилиб, $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$ функцияни Тейлор каторига ёяйлик:

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{\hbar\omega}{kT} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3 + \dots$$

Бунда

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3 + \dots \to 0$$

эканлигидан

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \approx \frac{\hbar\omega}{kT}$$

натижани оламиз. Уни (1.8) – Планк формуласига қўлласак

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{kT}{\hbar\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^2}kT$$

тенгликка келамиз. Шундай қилиб, кичик частоталарда, авваларок (1.3) формулада келтирилган

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^2}kT$$

Релей – Жинс қонуни оламиз.

4-мисол. Планк формуласидан Виннинг силжиш қонунини келтириб чиқаринг.

Ечими. Юқорида келтирилган (1.8) – Планк формуласидан Виннинг силжиш қонунини олиш учун ω ўзгарувчидан

λ ўзгарувчига ўтамиз:

$$\begin{cases} f(\omega, T) &= \frac{dW_{\text{нурланиш}}}{d\omega} \\ f(\lambda, T) &= \frac{dW_{\text{нурланиш}}}{d\lambda} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(\omega, T)d\omega = f(\lambda, T)d\lambda$$

У ҳолда

$$\left|\frac{d\omega}{d\lambda}\right| = \left|\frac{d\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)}{d\lambda}\right| = \left|\frac{-2\pi c}{\lambda^2}\right| = \frac{2\pi c}{\lambda^2}.$$

Бундан

$$\begin{aligned} f(\lambda, T) &= f(\omega, T)\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda^2}\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \\ &= \frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1}. \end{aligned}$$

Олинган функцияни экстемум қийматлари учун тадқиқ этамиз. Бу мақсадда $f(\lambda, T)$ функциянинг λ бўйича биринчи тартибли ҳосиласини нолга тенглаймиз. Аввал ҳосилани ҳисоблайлик:

$$\frac{df(\lambda, T)}{d\lambda} = -5\frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda^6}\frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} + \frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda^5}\frac{2\pi\hbar c}{\lambda^2 kT}\frac{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}}}{\left(e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1\right)^2}.$$

Энди $x = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}$ алмаштириш бажариб, қуйидаги ифодани оламиз ва уни нолга тенглаймиз:

$$\frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda^6}\left(\frac{-5}{e^x - 1} + \frac{x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}\right) = 0.$$

Бундан

$$-5(e^x - 1) + x \cdot e^x = 0 \Rightarrow (x - 5)e^x + 5 = 0 \Rightarrow e^x = -\frac{5}{x - 5}.$$

Транцендент тенглама олинди, уни график усулда ечган маъқул. Бунинг учун $\varphi(x) = e^x$ экспоненциал ва $\psi(x) = -\frac{5}{x-5}$ гиперболик функцияларни графикларини чизамиз. Ушбу функцияларнинг графиги $x \approx 4,965$ нуқтада кесишади. Унда $\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT} = 4,965$ тенгликдан $\lambda_{max} = \frac{2\pi\hbar c}{4{,}965kT} = \frac{b}{T}$ муносабатни оламиз. Бундан $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К – Вин доимийси қиймати келиб чиқади.

5-мисол. Атроф муҳит ҳарорати $17^oС$ бўлганда жисм энергиясини ютганидан кўра 100 марта кўпроқ нурлаётган бўлса, унинг ҳарорати қандай бўлиши лозим?

Ечими. Жисмнинг тўлиқ S сиртидан барча йўналишлар бўйича dt вақт мобайнида нурланган энергия миқдори қуйидагига тенг:

$$dW_{\text{жисм-нур.}} = R_{\text{жисм}} S dt,$$

бу енда $R_{\text{жисм}}$ – жисмнинг энергетик ёрқинлиги. Ушбу dt вақт мобайнида тўлиқ S сирт орқали жисм ютаётган энергия шу вақт оралиғида муҳит нурлаган энергияга тенг:

$$dW_{\text{жисм-ют.}} = dW_{\text{муҳит-нур.}} = R_{\text{муҳит}} S dt.$$

Масала шартига кўра

$$\frac{dW_{\text{жисм-нур.}}}{dW_{\text{жисм-ют.}}} = \frac{R_{\text{жисм}} S dt}{R_{\text{муҳит}} S dt} = \frac{R_{\text{жисм}}}{R_{\text{муҳит}}} = 100. \qquad (1.9)$$

Жисм ва муҳитнинг энергетик ёрқинликларини Стефан – Больцман қонуни орқали ифодалаймиз ва уларни (1.9) формулада ишлатамиз:

$$\begin{aligned} R_{\text{жисм}} &= \sigma T^4_{\text{жисм}}; \quad R_{\text{муҳит}} = \sigma T^4_{\text{муҳит}}; \\ \frac{\sigma T^4_{\text{жисм}}}{\sigma T^4_{\text{муҳит}}} &= \frac{T^4_{\text{жисм}}}{T^4_{\text{муҳит}}} = 100. \end{aligned}$$

Натижа:

$$T_{\text{жисм}} = \sqrt[4]{100} \cdot T_{\text{муҳит}} = 290 \cdot \sqrt[4]{100} = 917 \text{ K}.$$

6-мисол. $P = 1$ кВт қувват истеъмол қилаётган печда $S = 100$ см^2 тирқиш мавжуд. Агар печнинг ички сирти ҳарорати 1 кК бўлса, печ деворлари тарқатаётган қувватнинг ФИК ни аниқланг.

Ечими. Печнинг деворлари тарқатаётган қувват фойдали иш коэффициенти (ФИК) печ деворлари тарқатаётган $P_{\text{тарқ.}}$ қувватни печ истеъмол қилаётган тўлиқ қувватга нисбатига тенг:

$$\eta = \frac{P_{\text{тарқ.}}}{P} = \frac{P - P_{\text{нур.}}}{P} = \frac{P - R \cdot S}{P} = \frac{P - \sigma T^4 S}{P} = 0,433.$$

7-мисол. Ер сиртининг ўртача энергетик ёрқинлиги $R_{T(\text{Ер})} = 0,54$ Ж/(см^2·мин). Агар Ер, нурланиш коэффициенти $\varepsilon = 0,25$ бўлган кулранг жисмдек, энергияни нурлаётган бўлса, Ер сиртининг T ҳарорати қандай бўлиши керак?

Ечими. Нурланиш коэффициента ε – Стефан – Больцман қонунига кўра кулранг жисмнинг, берилган ҳароратда, иссиқликдан нурлаётган энергиясини, ўша ҳароратдаги, абсолют қора жисм нурланиш энергиясига нисбатини кўрсатади. Абсолют қора жисмнинг нурланиш коэффициенти $\varepsilon = 1$.

Ернинг энергетик ёрқинлиги

$$R_{T(\text{Ер})} = \varepsilon \cdot R_T^* = \varepsilon \sigma T^4.$$

Бундан

$$T = \sqrt[4]{\frac{R_{T(\text{Ер})}}{\varepsilon \sigma}} = 282 \text{ К} = 9^o\text{С}.$$

8-мисол. Қуёш нурланиши ўзининг спектрал таркибига кўра абсолют қора жисмникига яқин. Бунда нурланиш қобилиятининг максимуми $\lambda_{max} = 0,48$ мкм тўлқин узунлигига тўғри келади. Нурланиш туфайли ҳар бир сонияда Қуёшнинг массаси қанчага камайишини топинг. Қуёш массаси 1 % камайиши учун кетадиган вақтни баҳоланг.

Ечими. Қуёшнинг 1 сонияда йўқотаётган массасини топайлик. Эйнштейн формуласига кўра, Қуёшнинг нурланиш энергияси $W = mc^2$, бунда m – бу 1 сонияда Қуёш йўқотаётган масса. Қуёшнинг энергетик ёрқинлиги $R_T = \frac{W}{t \cdot S}$, бундан $W = R_T t \cdot S$. У ҳолда

$$m = \frac{W}{c^2} = \frac{R_T t \cdot S}{c^2} = \frac{\sigma b^4 t \cdot S}{\lambda^4 c^2}.$$

Бунда $R_T = \sigma T^4$ Стефан – Больцман ва $T = \frac{b}{\lambda}$ Вин қонунларини ҳисобга олдик. Энди $S = 4\pi R^2_{\text{Қуёш}}$ ($R_{\text{Қуёш}} = 6,95 \cdot 10^8$ м – Қуёш радиуси) эканлигидан, Қуёшни нурланиш туфайли

1 сонияда йўқотаётган массаси қуйидагига тенглигини томамиз:

$$m = 5,09 \cdot 10^9 \text{ кг.}$$

Қуёш массаси 1 % га камайиши учун кетадиган вақтни баҳолайлик:

$$\tau = \frac{\Delta mc^2}{R_T S} = \frac{0,01 M_{\text{Қуёш}} c^2}{\sigma T^4 4\pi R^2_{\text{Қуёш}}} = \frac{0,01 M_{\text{Қуёш}} c^2}{\sigma \left(\frac{b}{\lambda_{max}}\right)^4 \cdot 4\pi R^2_{\text{Қуёш}}}.$$

Бунда $M_{\text{Қуёш}} = 1,98 \cdot 10^{30}$ кг – Қуёш массаси. Шундай қилиб, Қуёш масасси 1 % га камайиши учун

$$\tau = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ йил}$$

вақт ўтиши зарур.

9-мисол. Абсолют қора жисм ҳарорати $T_1 = 2900$ К бўлган ҳолатда жойлашган. Совуш туфайли, энергетик ёрқинлик спектрал зичлигининг максимумига мос келувчи тўлқин узунлик ўзгариши $\Delta\lambda = 9$ мкм. У қандай T_2 ҳаротгача совуди?

Ечими. Виннинг силжиш қонунини T_1 ва T_2 ҳароратлар учун ёзамиз

$$b = \lambda_{1max} \cdot T_1, \quad b = \lambda_{2max} \cdot T_2.$$

Тўлқин узунлигининг ўзгариши $\Delta\lambda = \lambda_{2max} - \lambda_{1max}$ эканлигидан

$$b = (\lambda_{1max} + \Delta\lambda) T_2 \quad \Rightarrow \quad b = \left(\frac{b}{T_1} + \Delta\lambda\right) T_2.$$

Бундан

$$T_2 = \frac{b \cdot T_1}{b + \Delta\lambda \cdot T_1} = 290 \text{ К}.$$

10-мисол. Диаметри $d = 1{,}2$ см бўлган мис шарча, ҳавоси сўриб олинган ва ички деворлари ҳарорати 0 К бўлган идишга жойлаштирилди. Шарчанинг бошланғич ҳарорати $T_0 = 300$ К. Шарча сиртини абсолют қора жисм деб фараз қилиб, қанча вақт ўтгач унинг ҳарорати 2 мартага камайишини аниқланг.

Ечими. Шарча ҳарорати dT га камайишида унинг ички энергиясини камайиши $dW = -dU$. Жисмни совушида (ёки қизишида) ички энергия ўзгариши $dU = CdT$ формула билан ифодаланади, бунда C – жисмнинг иссиқлик сиғими ва у қуйидагича топилади:

$$C = c \cdot m = c \cdot \rho \cdot V = \frac{4}{3}\pi r^3 c \cdot \rho = \frac{\pi d^3}{6} c \cdot \rho,$$

бу ерда $c = 390$ Ж/(кг$cdot$К) – миснинг солиштирма иссиқлик сиғими; $\rho = 8900$ кг/м^3 – миснинг зичлиги. Демак

$$dW = \left(-\frac{\pi d^3}{6} c \cdot \rho\right) dT.$$

Вақтнинг dt оралиғида шарча сиртидан тарқалаётган нурланиш энергияси

$$dW = R_T^* S dt = \left(\sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot d^2\right) dt.$$

Энергияларни тенглаймиз:

$$\left(-\frac{\pi d^3}{6} c\cdot\rho\right) dT = \left(\pi\cdot d^2\cdot\sigma\cdot T^4\right) dt$$
$$\Rightarrow dt = -\frac{d\cdot c\cdot\rho}{6\cdot\sigma}\cdot\frac{dT}{T^4}.$$

Булардан

$$\int_0^\tau dt = -\frac{d\cdot c\cdot\rho}{6\cdot\sigma}\int_{T_0}^{T_0/2}\frac{dT}{T^4} \Rightarrow \tau = \frac{7\cdot d\cdot c\cdot\rho}{18\cdot\sigma\cdot T_0^3} \approx 2,9 \text{ соат.}$$

1.3 Мустақил ишлаш учун вазифалар

1.1. Абсолют қора жисм ҳарорати $T_1 = 500$ К. Қиздириш натижасида нурланиш оқими $n = 5$ марта кучайса, жисмнинг T_2 ҳарорати қандай бўлади?
Жавоби: 747,6 К.

1.2. Қуёш нурланиши спектрини тадқиқ этиш натижаси энергетик ёрқинлик спектрал зичлигининг максимуми $\lambda_{max} = 500$ Å эканлигини кўрсатди. Қуёшни абсолют қора жисм деб фараз қилиб, 1) Қуёшнинг энергетик ёрқинлигини; 2) Қуёш нурлаётган энергия оқимини аниқланг.
Жавоби: $R_T^* = 6,4\cdot10^7$ Вт/м^2; $\Phi = 3,9\cdot10^{26}$ Вт.

1.3. Агар нурланиш энергияси максимуми кўринадиган спектрнинг қизил чегарасидан ($\lambda_{1max} = 780$ нм) бинафша чегарасига ($\lambda_{2max} = 390$ нм) силжиса, абсолют қора жисм нурланиш оқими қандай ва неча марта ўзгаради?
Жавоби: 16 марта ортади.

1.4. Жисмнинг асл ҳарорати $3,2$ кК. Кулранг жисмнинг радиацион пирометр билан ўлчанган ҳарорати $T_{\text{рад}} = 1,4$ кК бўлса, унинг $a_{\omega,T}$ нур ютиш қобилиятини аниқланг.
Жавоби: 0,037.

1.5. Печнинг кузатув тирқишидан $\Phi = 4$ кЖ/мин. оқим нурланяпти. Агар тирқиш юзаси $S = 8$ см^2 бўлса, печнинг ҳароратини аниқланг.
Жавоби: 1049 К.

1.6. Абсолют қора жисм ҳарорати икки баробар ошганда нур чиқариш қобилияти максимумига мос тўлқин узунлик $\Delta\lambda = 400$ нм га силжиди. Бошланғич ва охирги ҳароратларни топинг.
Жавоби: $T_1 = 3625$ К; $T_2 = 7250$ К.

1.7. Агар электр чироқ симининг ҳарорати 2650 К, чироқ сирти юзаси 47 мм^2, чироқ симининг энергетик ёрқинлигини абсолют қора жисм энергетик ёрқинлигига нисбати k, айнан ўша ҳароратда, 0,31 бўлса, электр чироқ қувватини топинг.
Жавоби: 40,7 Вт.

1.8. Нур чиқариш қобилияти максимумига мос келувчи λ_{max} тўлқин узунлиги атмосферадан ташқарида 0,50 мкм, Ер сиртида эса 0,55 мкм бўлса, Қуёш энергиясининг қанча қисми атмосфера томонидан сочиб юборилади?
Жавоби: 0,32.

1.9. Кўмирнинг $T = 600$ К ҳароратдаги иссиқлик нурланиши коэффициентини $\varepsilon = 0,8$ деб ҳисоблаб: 1) кўмирнинг энергетик ёрқинлигини; 2) $t = 10$ минут мобайнида кўмирнинг $S = 5$ см^2 бўлган юзасидан нурланаётган энергия миқдорини аниқланг.

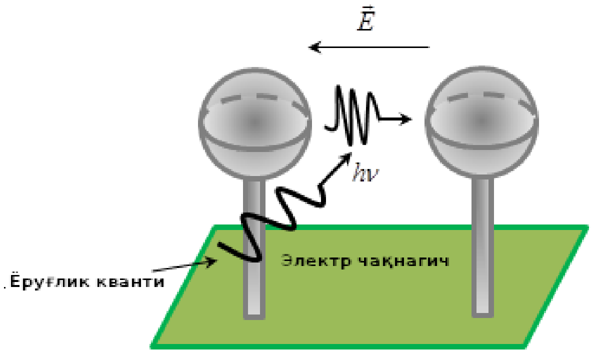
Жавоби: $R = 5,88$ кВт/м^2, $W = 1,76$ кЖ.

2- мавзу

Фотон

2.1 Фотоэффект

Ёруғликнинг, электр ходисаларини содир бўлиш жараёнига, таъсирини 1887 йилда Герц тадқиқ этган. У электр чақнагич[1] ёрдамида тажрибалар ўтказиб (2.1-расм), ультрабинафша тўлқинлар билан нурланганда электр чақнаш ўта кичик кучланишларда содир бўлишини кузатди. 1889-1895 йилларда, А.Г. Столетов қуйидаги схемани қўллаб (2.2-расм), ёруғликни металларга таъсирини тадқиқ этди: ўрганилаётган металлдан ясалган катод ва анод вакуум ҳосил қилинган идишда ўзгармас ток манбаига шундай уланганки, R қаршилик ёрдамида уларга берилаётган кучланиш қийматини ва ишорасини ўзгартириш мумкин. Рухдан ясалган катод нурланганда электр занжирида, миллиамперметр ёрдамида

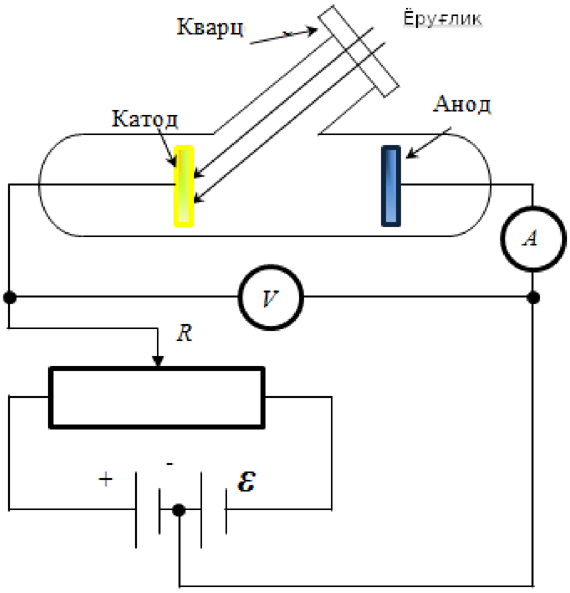


2.1 - расм: Герц тажрибасининг схемаси.

---

[1] *рус.* электрический разрядник

ўлчанадиган, электр токи оқади. Столетов катодни турли



2.2 - расм: Столетов тажрибасининг схемаси.

тўлқин узунликли ёруғлик билан нурлаб, қуйидаги қонуниятларни кузатди:

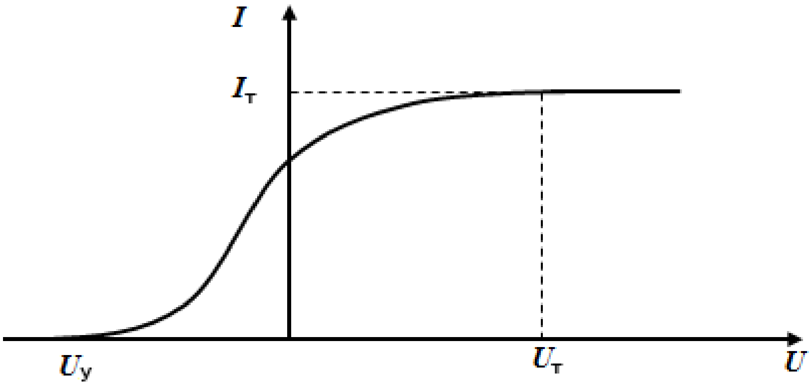
- ультрабинафша нурланиш энг кучли таъсирга эга;
- ёруғлик таъсирида катоддан манфий зарядли зарралар юлиб олинади;
- ёруғлик таъсирида ҳосил бўлган ток кучи ёруғлик интенсивлигига тўғри пропорционал.

1898 йилда Ленард ва Томсон юлиб олинаётган зарраларнинг (e/m) солиштирма зарядини ўлчадилар. У электроннинг солиштирма зарядига тенг бўлиб чиқди ва шу сабаб, катоддан юлиб олинаётган зарралар – электронлар эканлиги маълум бўлди.

Ташқи фотоэффект

Ёруғлик таъсирида моддалардан электронларни ажралиб чиқиши ташқи фотоэффект дейилади. Бунда ажралиб чиқаётган электронлар – фотоэлектронлар, улар туфайли ҳосил бўлган электр токи – фототок деб аталади.

Столетов схемаси ёрдамида, $\mathbf{\Phi}$ ёруғлик оқими ўзгармас бўлганда, фототокни берилаётган кучланишга қуйидаги боғланиши (вольт-ампер характеристикаси, ВАХ) олинди: қандайдир $U_т$ кучланишда фототок $I_т$ тўйинишга эришади – катоддан чиқаётган барча электронлар анодга етиб боради, $I_т$ тўйинган ток кучи, ёруғлик таъсирида бирлик вақт мобайнида, катоддан чиқаётган электронлар миқдори билан аниқланади.



2.3 - расм: Столетов тажрибасида фототокни анoддаги кучланишга боғланиши.

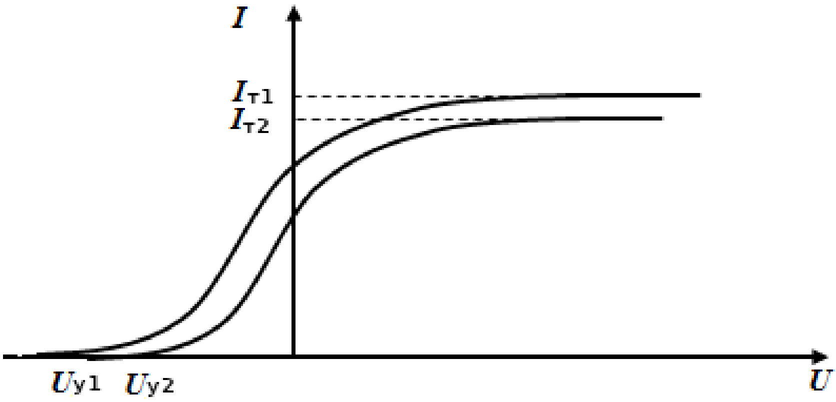
Юлиб чиқарилаётган фотоэлектронлар сони катод сиртига тушаётган ёруғлик квантлари сонига пропорционал. Ёруғлик квантлари сони катодга тушаётган $\mathbf{\Phi}$ ёруғлик оқими билан аниқланади. Катод сиртига t вақт мобайнида тушаётган N фотонлар сони

$$N = \frac{W}{\varepsilon} = \frac{\Phi \cdot t}{\varepsilon}$$

формулага кўра топилади, бу ерда W – сирт t вақт мобайнида олаётган нурланиш энергияси; $\varepsilon = h\nu$ – фотон энергияси; Φ – ёруғлик оқими (нурланиш қуввати).

Ташқи фотоэффектнинг 1-қонуни. Тушаётган ёруғликнинг танланган частотасида тўйиниш фототоки тушаётган ёруғлик оқимига пропорционал:

$$I_{\text{т}} \sim \Phi, \quad \nu = const.$$



2.4 - расм: Ташқи фотоэффектнинг 1-қонунини тасдиқловчи график.

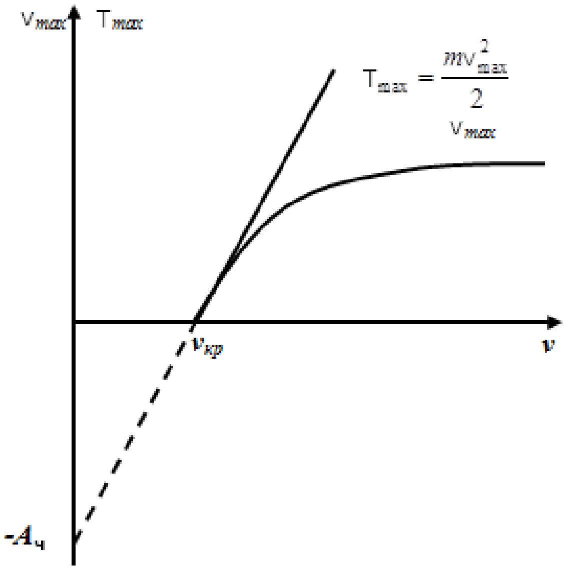
Бу ерда $U_{\text{у}}$ – ушлаб қолувчи кучланиш, унда бирорта ҳам электрон анодга етиб бормайди. Демак, бу ҳолда энергиянинг сақланиш қонунини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{mv^2}{2} = e\,U_{\text{у}}$$

учиб чиқаётган электронлар энергияси электр майдонининг ушлаб қолувчи энергиясига тенг. Бундан фотоэлектронларнинг максимал v_{max} тезлигини топиш мумкин

$$v_{max}^2 = \frac{2e\,U_у}{m}.$$

Ташқи фотоэффектнинг 2-қонуни. Фотоэлектронларнинг бошланғич максимал v_{max} тезлиги тушаётган ёруғлик интенсивлигига (Ф га) боғлиқ эмас, у ёруғликнинг ν частотаси билан аниқланади.



2.5 - расм: Максимал тезлик ва максимал кинетик энергияни тушаётган ёруғлик частотасига боғланиши.

Ташқи фотоэффектнинг 3-қонуни. Ҳар бир модда учун фотоэффектнинг қизил чегараси, яъни, модданинг кимёвий табиати ва модда сиртининг, ташқи фотоэффект содир бўлиши мумкин бўлган, ҳолатига боғлиқ $\nu_{кр}$ критик (минимал) частота мавжуд.

Фотоэффектнинг 2- ва 3-қонунларини ёруғликнинг классик электромагнит назарияси (ёки ёруғликнинг тўлқин табиати) ёрдамида изоҳлаб бўлмайди. Бу назарияга кўра электронларни металлардан юлиб олиниши уларни ёруғлик тўлқинининг электромагнит майдони томонидан “тебратилиши” натижасида содир бўлади. Ёруғлик интенсивлиги ($\mathbf{\Phi}$) ортиши билан металлдан учиб чиққан электрон томонидан берилаётган энергия, демак, v_{max} ортиши лозим. Бу ҳолат ташқи фотоэффектнинг 2-қонунига зид.

Ёруғликнинг тўлқин назариясига кўра электромагнит майдон томонидан берилаётган энергия ёруғлик интенсивлигига ($\mathbf{\Phi}$ га) пропорционал эканлигидан, етарлича катта интенсивликка эга бўлган, ихтиёрий частотали ёруғлик металлдан электронни юлиб олиши, яъни, фотоэффектнинг қизил чегараси мавжуд бўлмаслиги керак эди. Бу ҳолат ташқи фотоэффектнинг 3-қонунига зид. Ташқи фотоэффект ноинерцион ходиса (ёруғлик тушиши тўхташи билан у ҳам содир бўлмай қўяди). Бу хоссани тўлқин назария тушунтириб бера олмайди.

Ташқи фотоэффект учун Эйнштейн тенгламаси

1905 йилда Альберт Эйнштейн, ташқи фотоэффектни, квант тасаввурларга асосланиб тушунтириб берди. Эйнштейнга кўра, ёруғлик Планк ғоясига биноан квантлар кўринишида нафақат чиқарилади, балки у фазода ҳам $\varepsilon = h\nu$ энергияли алоҳида қисмлар – квантлар шаклида тарқалади ва шу тарзда моддалар томонидан ютилади. Электромагнит нурланиш кванти **фотон** деб аталади.

Фотон тавсифлари

1) Энергияси: $E = h\nu = \hbar\omega$.

2) Импульси: ёруғлик ўзини худди зарралар (фотонлар) оқимидек тутганлигидан, аммо у ҳамон вакуумда $c = 299792458\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ тезлик билан тарқаладиган электромагнит тўлқин эканлиги сабабли унинг импульси худди релятивистик зарраники каби

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

ифодадан аниқланади, бунда $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – тўлқин сони. У ҳолда фотоннинг импульс вектори $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, $\mathbf{k}$ – тўлқин вектор.

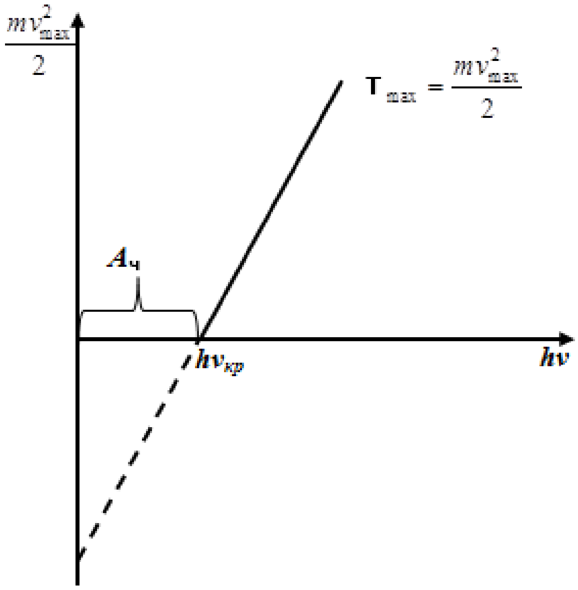
3) Фотоннинг массаси: нолга тенг. Фотон барча саноқ тизимларида фақат ёруғлик тезлигига эга бўлган ҳаракатдагина мавжуд.

Шундай қилиб, ёруғлик *зарра-тўлқин дуализми* хоссасига эга экан. У баъзи бир ҳолларда ўзини тўлқиндек, бошқа ҳолларда зарра табиатини намоён қилиб – фотонлар оқимидек тутади.

Ташқи фотоэффект учун энергиянинг сақланиш қонуни – Эйнштейн тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$h\nu = A_{\text{ч}} + \frac{mv_{\max}^2}{2}, \quad \varepsilon = A_{\text{ч}} + T_{\max}.$$

Тушаётган фотон энергияси $h\nu$ электронни металлдан юлиб олиш учун, яъни, $A_ч$ чиқиш ишига ва учиб чиққан фотоэлектронга $\frac{mv^2_{\max}}{2}$ кинетик энергия бериш учун сарфланади.



2.6 - расм: Ташқи фотоэффектда чиқиш иши.

Вакуумда электронни қаттиқ жисмдан юлиб олиш учун унга бериладиган минимал энергия чиқиш иши дейилади. E_F Ферми энергияси ҳароратга боғлиқ бўлганлигидан $A_ч$ чиқиш иши ҳам ҳароратга боғлиқ. Бундан ташқари, чиқиш иши модда сиртининг софлигига жуда сезгир.

Эйнштейн тенгламаси ташқи фотоэффектнинг барча учта қонунини тушунишга имкон беради.

1-қонун: ҳар бир квантни фақат бир дона электрон ютади. Шу сабабдан юлиб олинган фотоэлектронлар сони ёруғлик

(Φ) интенсивлигига пропорционал бўлиши лозим

$$N = \frac{\Phi \cdot t}{\varepsilon}.$$

2-қонун: $v_{\max} \sim \nu$ ва $A_ч$ чиқиш иши $\mathbf{\Phi}$ га боғлиқ эмас, бундан $v_{\max}$ ҳам $\mathbf{\Phi}$ га боғлиқ эмас

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2(h\nu - A_ч)}{m}}.$$

3-қонун: ν камайиши билан $v_{\max}$ ҳам камаяди ва $\nu = \nu_{кр}$ бўлганда $v_{\max} = 0$, демак, $h\nu_{кр} = A_ч$. Бундан

$$\nu_{кр} = \frac{A_ч}{h},$$

яъни, ташқи фотоэффект содир бўлиши бошланадиган минимал частота мавжуд.

1-мисол. Битта электроди цезий, иккинчиси мис бўлган вакуум фотоэлементга эгамиз. Цезийдан ясалган электрод $\lambda = 0,22$ мкм (1 мкм $=$ 10^{-6} м) тўлқин узунликли электромагнит тўлқин билан нурланаётган бўлса, мис электродига учиб келаётган фотоэлектронларнинг максимал тезлигини аниқланг. Электродлар ташқаридан қисқа туташтирилган, деб фараз қилинг.

Ечими. Қисқа туташув потенциаллар фарқи – бу термодинамик мувозанат шароитида ўтказгичларнинг туташув нуқтасидаги потенциаллар фарқи: $\Delta\varphi = \frac{A_{ч2} - A_{ч1}}{q_e}$, бунда $A_{ч1} = 1,89$ эВ (цезий сиртидан электронни юлиб олиш учун бажариладиган чиқиш иши), $A_{ч2} = 4,47$ эВ (мис учун чиқиш иши); $q_e = 1{,}16 \cdot 10^{-19}$ Кл – электрон заряди. Шундай қилиб, цезий электрод мусбат, мис электрд манфий зарядланиб қолади.

Фотоэффект учун Эйнштейн формуласини ёзамиз:

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{ч}} + T_{max}.$$

Бунда $A_{\text{ч}} = A_{\text{ч}1}$ – электромагнит нурланиш тушаётган цезий электроддан электронни юлиб олиш учун бажарилган чиқиш иши.

Электродлар туташганда ҳосил бўлувчи электр майдони электронларни цезий электроддан мис электрод томонга ҳаракатланишига тўсқинлик қилади. Шу сабаб, бу майдоннинг бажарган иши фотоэлектронларнинг кинетик энергиясини қисман қоплайди:

$$T_{\mathrm{max}2} = T_{\mathrm{max}1} - q_e \Delta\varphi,$$

бу ерда $T_{\mathrm{max}1}$ – цезий сиртидан чиқаётган электронларнинг максимал кинетик энергияси, $T_{\mathrm{max}2}$ – электростатик майдон туфайли анодга етиб борган электронларнинг максимал кинетик энергияси, $q_e\Delta\varphi$ – электростатик майдон бажарган иш.

Демак,

$$\begin{aligned} T_{max1} &= \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{ч}1}; \quad T_{max2} = \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{ч}1} - q_e\Delta\varphi; \\ T_{max2} &= \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{ч}1} - q_e \cdot \frac{A_{\text{ч}2} - A_{\text{ч}1}}{q_e} = \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{ч}2}. \end{aligned}$$

Электроннинг кинетик энергиясини унинг тезлиги орқали ифодаси билан солиштириб

$$\frac{m_e v_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{ч}2}$$

электронларнинг максимал тезлиги

$$v_{max} = \sqrt{2\left(\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{ч}2}\right)/m_e^2} \approx 6,4 \cdot 10^5 \text{ м/с}$$

бўлишини топамиз. Бунда 1 эВ $= 1,61 \cdot 10^{-19}$ Ж ва

$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Ж$\cdot$с; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг

қийматлар ишлатилди.

2-мисол. Тўлқин узунлиги $\lambda = 0,3$ мкм бўлган электромагнит нурланиш тўйиниш ҳолатидаги фотоэлементга тушяпти. Бу жараёнда фотоэлементнинг спектрал сезгирлиги $J = 4,8$ А/Вт. Ҳар бир фотонга тўғри келувчи электронлар сони қанча эканлигини аниқланг.

Ечими. Фотоэлементнинг спектрал сезгирлиги $J = \frac{I}{\Phi}$ формула билан аниқланади, бунда $I = \frac{q}{\Delta t} = \frac{e \cdot N_e}{\Delta t}$ – фототок қиймати (N_e – фототок ҳосил бўлишида қатнашаётган электронлар сони); $\Phi = \frac{hcN_\Phi}{\lambda \Delta t}$ – ёруғлик оқими қиймати (N_Φ – катод сиртига тушаётган фотонлар сони).

У ҳолда спектрал сезгирлик

$$J = \frac{e\,N_e}{\Delta t} \cdot \frac{\lambda \Delta t}{hcN_\Phi} = \frac{\lambda e N_e}{hcN_\Phi}$$

каби аниқланади. Тушаётган ҳар бир фотонга мос келувчи n – фотоэлектронлар сони фотоэлектронларнинг N_e – умумий миқдорини N_Φ – фотонлар миқдорига N_e/N_Φ нисбати орқали топилади

$$n = \frac{N_e}{N_\Phi} = \frac{Jhc}{e\lambda} \approx 0,02.$$

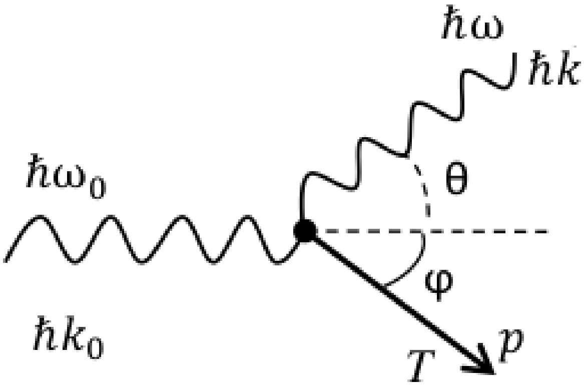
Бу ерда $J = 4,8 \cdot 10^{-3}$ А/Вт, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Ж·с, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $\lambda = 0,3 \cdot 10^{-6}$ м қийматлар ишлатилди.

2.2 Комптон эффекти

Комптон эффекти – бу фотонларни *тинч турган эркин электронларда* сочилиш (бошланғич ҳаракат йўналишини ўзгартириши) ходисасидир. 1922 – 1923 йилларда Комптон томонидан кашф этилган ва ўрганилган.

Электронлар моддалар ичида атомлар ёки ионлар билан боғланган, аммо боғланиш энергияси бир қанча электронвольт тартибида бўлади. Комптон эффекти фотонларнинг энергияси бир қанча юз электронвольт бўлганда кузатилади. Бундай ҳолда электронларнинг атомлар билан боғланганлигини ҳисобга олмаслик ва уларни эркин зарралар деб фараз қилиш мумкин. Моддага тушаётган фотонларнинг импульси ҳам электронларникидан анча катта. Шу сабабга кўра электронларнинг ҳаракатини ҳам ташлаб юбориб, уларни тинч турибди дейиш мумкин.

Худди фотоэффектдаги сингари, бу ходисада ҳам, электромагнит тўлқин зарра табиатини намоён қилади. Фотонни электрон билан тўқнашишини иккита классик шарчаларнинг тўқнашиши каби қараш мумкин (2.7-расмга қаранг). Бунда энергия ва импульснинг сақланиш қонунлари ўрин-



2.7 - расм: Фотонни электронда сочилиши.

ли:

$$\begin{cases} \hbar\omega_0 &= \hbar\omega + T, \\ \hbar\vec{k}_0 &= \hbar\mathbf{k} + \mathbf{p}, \end{cases}$$

бу ерда $\hbar\omega_0$ – тушаётган фотон энергияси; $\hbar\omega$ – сочилган фотон энергияси; T – фотон келиб урилгач, ҳаракатга келган электроннинг кинетик энергияси; $\hbar\mathbf{k}_0$ – тушаётган фотон импульси; $\hbar\mathbf{k}$ – сочилган фотон импульси; $\mathbf{p}$ – фотон билан тўқнашгач, электроннинг импульси.

Комптон эффекти юқори энергияли фотонлар иштирокида содир бўлганлигидан, фотон билан тўқнашган электрон, эҳтимол, релятивистик тезликка эга бўлади. Бу ҳолда импульс ва кинетик энергия орасидаги боғланишни аниқлашда

$$p^2c^2 = T(T + 2mc^2)$$

релятивистик муносабат ишлатилади. Сақланиш қонунларини ва релятивистик муносабатларни қўллаб, фотоннинг $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k})$ тўлқин векторлари орасидаги θ сочилиш бурчаги ва $\Delta\lambda$ тўлқин узунлиги ўзгариши орасидаги боғланишни олиш мумкин. Импульснинг сақаланиш қонунидан

$$\hbar\mathbf{k}_0 = \hbar\mathbf{k} + \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}_0 - \hbar\mathbf{k}.$$

Векторларни йўқотиш учун олинган ифодани квадратга кўтарамиз ва тенгликнинг икки тарафини c^2 кўпайтирамиз:

$$\begin{aligned} p^2 &= \hbar^2 k_0^2 + \hbar^2 k^2 - 2\hbar^2 k k_0 \cos(\theta), \\ c^2 p^2 &= \hbar^2 c^2 \left[k_0^2 + k^2 - 2kk_0 \cos(\theta)\right], \\ T(T + 2mc^2) &= \hbar^2 c^2 \left[k_0^2 + k^2 - 2kk_0 \cos(\theta)\right]. \end{aligned}$$

Тўлқин сонини циклик частота орқали ифодасини $k = \frac{\omega}{c}$ ва энергияни сақланиш қонунидан кинетик энергияни $T = \hbar(\omega_0 - \omega)$ эканлигини ҳособга олсак,

$$\begin{aligned} \hbar^2 c^2 \left[\frac{\omega_0^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - 2\frac{\omega_0\omega}{c^2}\cos(\theta)\right] &= \hbar(\omega_0 - \omega)\left[\hbar(\omega_0 - \omega) + 2mc^2\right]; \\ 2\hbar\omega\omega_0\left[1 - \cos(\theta)\right] &= 2mc^2(\omega_0 - \omega); \\ \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0\omega} &= \frac{\hbar}{mc^2}\left[1 - \cos(\theta)\right]. \end{aligned}$$

Циклик частотани тўлқин узунлиги орқали $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ ифодасини қўллаб, фотон тўлқин узунлиги $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ ўзгариши ва сочилиш бурчаги орасидаги боғланиш учун қуйидаги ифодага келамиз:

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}\left[1 - \cos(\theta)\right],$$

бу ерда

$$\lambda_K = \frac{2\pi\hbar}{mc} \tag{2.1}$$

электроннинг Комптон тўлқин узунлиги дейилади.

Комптон эффекти бошқа зарралар учун ҳам содир бўлади. Бундай ҳолларда фотон тўлқин узунлигини ўзаришини топишда ўша зарраларнинг массаси ишлатилиши зарур.

3-мисол. Монохроматик рентген нурланишининг ингичка оқими сочувчи моддага тушяпти. Бунда нурланишнинг $\theta_1 = 60^o$ ва $\theta_2 = 120^o$ бурчакларга сочилган аралашган ташкил этувчилари тўлқин узунликлари бир биридан $\eta = 2$ мартага фарқланади. Сочилиш эркин электронларда содир бўляпти деб ҳисоблаб, тушаётган нурланишнинг тўлқин узунлигини топинг.

Ечими. Комптон формуласидан фойдаланамиз: $\Delta\lambda = \lambda_K[1 - \cos(\theta)]$. Белгилаш киритамиз: λ_0 – тушаётган нурланиш тўлқин узунлиги, λ_1 ва λ_2 – нурланишни аралашган ташкил этувчилари тўлқин узунликлари. У ҳолда

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_K[1 - \cos(\theta_1)], \tag{2.2}$$

$$\lambda_2 - \lambda_0 = \lambda_K[1 - \cos(\theta_2)]. \tag{2.3}$$

$\lambda_2 = \eta\lambda_1$ эканлигини ҳисобга олиб, (2.3) ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\eta\lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_K[1 - \cos(\theta_2)].$$

(2.2) ифодадан λ_1 ни топиб, (2.3) га қўямиз:

$$\eta\left\{\lambda_K[1 - \cos(\theta_1)] + \lambda_0\right\} - \lambda_0 = \lambda_K[1 - \cos(\theta_2)].$$

Бундан

$$\lambda_0 = \lambda_K \frac{1 - \cos(\theta_2) - \eta[1 - \cos(\theta_1)]}{\eta - 1}$$

эканлигини топамиз. Ҳисоблашларни бажаришда ярим аргументнинг триганометрик формуласидан фойдаланамиз: $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2} \to 1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$\lambda_0 = \frac{2\lambda_K}{\eta - 1}\left\{\sin^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \eta\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right\}.$$

$\theta_1/2 = 60^o/2 = \pi/6$ ва $\theta_2/2 = 120^o/2 = \pi/3$ эканлигини ҳисобга олсак, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; электроннинг комптон тўлқин узунлиги $\lambda_K = \frac{h}{m_e c} \approx 2,4 \cdot 10^{-12}$ м.; $\eta = 2$; булардан

$$\lambda_0 \approx 2 \cdot 2,4 \cdot 10^{-12}\left\{\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right\} = 1,2 \cdot 10^{-12}\,\text{м}.$$

4-мисол. Агар комптон электронларининг максимал кинетик энергияси $T = 0,19$ МэВ бўлса, рентген нурланишининг тўлқин узунлигини топинг.

Ечими. Белгилаш киритамиз: $\boldsymbol{p}_0$ (λ_0) ва $\boldsymbol{p}$ (λ)– фотоннинг, мос равишда, таъсирлашувгача ва таъсирлашувдан сўнгги импульслари (тўлқин узунликлари); $\boldsymbol{p}_e$ – электроннинг таъсирлашувдан сўнгги импульси.

Қўйилган масалани ечиш учун энергия ва импульснинг сақланиш қонунларидан фойдаланамиз. Энергиянинг сақланиш қонуни:

$$mc^2 + \boldsymbol{p}_0 c = \boldsymbol{p}c + mc^2 + T, \tag{2.4}$$

бу ерда mc^2 – тинч турган электроннинг энергияси; $\boldsymbol{p}_0c$ ва $\boldsymbol{p}c$ – фотоннинг, мос равишда, таъсирлашувгача ва таъсирлашувдан сўнгги энергиялари.

Ипмульс ва энергия орасидаги релятивистик муносабатни ҳисобга олсак, энергиянинг сақланиш қонуни қуйидаги кўринишга келади:

$$mc^2 + \boldsymbol{p}_0c = \boldsymbol{p}c + \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4}. \tag{2.5}$$

(2.4) ифодадан $\boldsymbol{p}_0c - \boldsymbol{p}c = T$ ёки

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda_0} - \frac{T}{c} \tag{2.6}$$

эканлиги келиб чиқади.

Электрон, фотон “орқага” 180^o га сочилганда, максимал кинетик энергияга эришади. Шу сабаб, имульснинг сақланиш қонуни

$$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{p}_e - \boldsymbol{p}$$

кўриниш олади, бунда электрон ва фотон импульслари йўналишлари қарама-қарши (векторлар битта ўқда, масалан, x-ўқида ётибди, аммо йўналиши қарама-қарши) эканлигига эътибор беринг. Демак, электрон импульсини, векторларни x ўқига проекциялари орқали аниқлай оламиз:

$$p_e = p_0 + p = \frac{h}{\lambda_0} + \frac{h}{\lambda}.$$

Бу ерда $\frac{h}{\lambda}$ ўрнига (2.6) ифодани ишлатамиз:

$$p_e = \frac{h}{\lambda_0} + \frac{h}{\lambda_0} - \frac{T}{c} = \frac{2h}{\lambda_0} - \frac{T}{c}. \tag{2.7}$$

(2.4) ва (2.5) ифодаларнинг чап тарафларини тенглаб, қуйидагини оламиз:

$$pc + mc^2 + T = pc + \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4} \to mc^2 + T = \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4}.$$

Охирги ифодани квадратга кўтарамиз ва ўзгартиришлар бажарамиз:

$$m^2c^4 + 2mc^2T + T^2 = p_e^2c^2 + m^2c^4 \to 2mc^2T + T^2 = p_e^2c^2.$$

Электрон импульси учун (2.7) ифодани ушлатамиз:

$$2mc^2T + T^2 = \left(\frac{2h}{\lambda_0} - \frac{T}{c}\right)^2 c^2.$$

Бундан

$$2mc^2T = \frac{1}{\lambda_0^2}(4h^2c^2 - 4hTc\lambda_0)$$

ва λ_0 га нисбатан

$$mcT \cdot \lambda_0^2 + 2hT \cdot \lambda_0 - 2h^2c = 0$$

квадрат тенгламани оламиз. Уни ечиб,

$$\lambda_0 = -\frac{h}{mc} + \sqrt{\frac{h^2}{m^2c^2} + \frac{2h^2c^2m}{m^2c^2T}}$$

натижани оламиз. Бу ерда $\frac{h}{mc}$ ни илдиздан чиқарсак,

$$\lambda_0 = \frac{h}{mc}\left(\sqrt{\frac{2mc^2}{T} + 1} - 1\right)$$

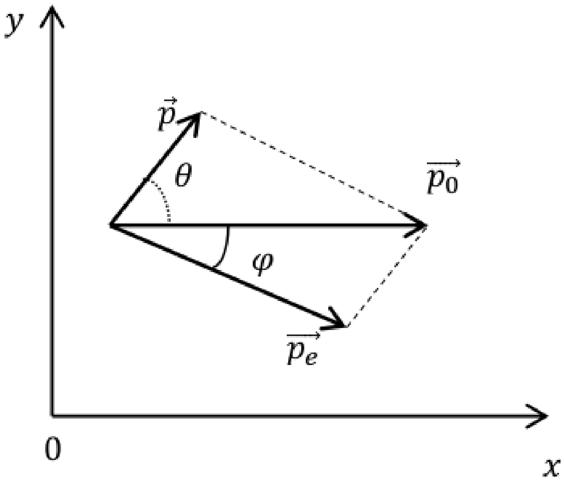
ифодага келамиз. Агар $mc^2 \approx 0,5$ МэВ, $T \approx 0,2$ МэВ, электроннинг комптон тўлқин узунлиги $\frac{h}{mc} \approx 2,4 \cdot 10^{-12}$ м. эканлигини ҳисобга олсак,

$$\lambda_0 \approx 2,4 \cdot 10^{-12}\left(\sqrt{6} - 1\right) \approx 1,5 \cdot 2,4 \cdot 10^{-12} = 3,6 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

5-мисол. Энергияси $\hbar\omega = 0,15$ МэВ бўлган фотон тинч турган эркин электронда сочилди. Натижада унинг тўлқин узунлиги $\Delta\lambda = 0,3$ пм га ўзгарди. Комптон электрони учиб чиққан йўналиш бурчагини топинг.

Ечими. Импульснинг сақланиш қонунидан фойдаланамиз:

$$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{p}_e + \boldsymbol{p}.$$



2.8 - расм: Фотонни тинч турган электронда сочилишида импульснинг сақланиш қонуни.

Координата ўқларига проекциялар (2.8-расм):

$$\begin{aligned} x: \; p_0 &= p\cos(\theta) + p_e\cos(\varphi), \\ y: \; 0 &= p\sin(\theta) - p_e\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Олинган тенгламаларни ўзгартириб, учиб чиқиш φ бурчаги тангенсини топамиз:

$$p_0 - p\cos(\theta) = p_e\cos(\varphi), \quad p\sin(\theta) = p_e\sin\varphi$$

ифодалардан

$$\tan(\varphi) = \frac{p\sin(\theta)}{p_0 - p\cos(\theta)}. \tag{2.8}$$

Фотоннинг бошланғич энергиясини $E_0 = \hbar\omega$ билган ҳолда, таъсирлашувгача фотон тўлқин узунлигини топамиз: $\lambda_0 = \frac{hc}{E_0}$.

Фотоннинг таъсирлашувдан сўнгги тўлқин узунлиги: $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$.

Фотонни электрон билан таъсирлашувигача ва таъсирлашувидан сўнгги импульслари, мос равишда

$$\begin{aligned} p_0 &= \tfrac{h}{\lambda_0} = \tfrac{E_0}{c}, \\ p &= \tfrac{h}{\lambda} = \tfrac{h}{\lambda_0+\Delta\lambda} = \tfrac{h}{\frac{hc}{E_0}+\Delta\lambda} = \tfrac{hE_0}{hc+\Delta\lambda E_0}. \end{aligned}$$

θ бурчакни Комптон формуласидан топамиз:

$$\Delta\lambda = \lambda_K\left[1 - \cos(\theta)\right] \to \cos(\theta) = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_K}.$$

У ҳолда

$$\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - \frac{\Delta\lambda^2}{\lambda_K^2}}.$$

Олинганларни (2.8) ифодага қўйиб,

$$\tan(\varphi) = \frac{\sqrt{\frac{2\lambda_K}{\Delta\lambda} - 1}}{1 + \frac{E_0}{mc^2}}$$

чиқиш бурчаги тангенсини топамиз. Бунда $\lambda_K = 2,4 \cdot 10^{-12}$ м.; $\Delta\lambda = 0,3 \cdot 10^{-12}$ м.; $mc^2 \approx 0,5$ МэВ; $E_0 = 0,15$ МэВ қийматларни қўйиб,

$$\tan(\varphi) \approx \frac{\sqrt{\frac{2\cdot 2{,}4}{0{,}3}-1}}{1+\frac{0{,}15}{0{,}5}} = \frac{\sqrt{11}}{1,3} \approx 2,6.$$

Демак, $\varphi \approx \mathrm{arctg}(2,6) = 68,6^o$.

2.3 Мустақил ишлаш учун вазифалар

2.1. Рух учун фотоэффектнинг қизил чегарасини ва тўлқин узунлиги 256 нм бўлган электромагнит нурланиш тушганда унинг сиртидан чиқаётган фотоэлектронларнинг максимал тезлигини аниқланг.
Жавоби: 332 нм; $6,6 \cdot 10^5$ м/с.

2.2. Алоҳида ажратилган, R радиусли шарча тўлқин узунлиги λ_1 бўлган ёруғлик билан ёритиляпти. Агар шарча тўлқин узунлиги λ_2 бўлган ёруғлик билан қўшимча ёритилса ($\lambda_2 > \lambda_1$), шарчани яна N та электрон тарк этади. λ_2 тўлқин узунлигини топинг.
Жавоби: $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\frac{Ne^2\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0 hcR}+1}$.

2.3. Платинадан ясалган юпқа қаватчада[1] ультрабинафша нур туфайли содир бўлаётган фотоэффектни тўхтатиш учун $U_1 = 3,7$ В ушлаб қолувчи потенциаллар фарқини бериш керак. Агар қаватчани бошқасига алмаштирилса, ушлаб қолувчи потенциални 6 В гача кучайтириш лозим. Электронларни ушбу қаватча сиртидан чиқиш ишини

---

[1] *рус.* платиновая пластинка

аниқланг.
Жавоби: 4 эВ.

2.4. Вакуумдаги фотоэлемент занжирида, рухдан ясалган электродни тўлқин узунлиги 262 нм бўлган электромагнит нурланиш билан ёритилганда ҳосил бўлаётган фототок 1,5 В ушлаб қолувчи ташқи кучланиш уланганда тўхтайди. Фотоэлементнинг ташқи потенциаллар фарқи қийматини ва қутбланганлигини[1] топинг.
Жавоби: 0,5 В; унинг қутбланганлиги ташқи кучланиш қутбланганлигига қарама-қарши.

2.5. Энергияси $h\omega = 1,0$ МэВ бўлган фотон тинч турган эркин электронда сочилди. Агар сочилиш туфайли фотон тўлқин узунлиги 25% га ўзгарса, узатилган электроннинг[2] кинетик энергиясини топинг.
Жавоби: 0,2 МэВ.

2.6. Тўлқин узунлиги $\lambda = 6,0$ пм бўлган фотон тинч турган электронда тўғри бурчак бўйлаб сочилди. а) сочилган фотон частотасини; б) узатилган электрон кинетик энергиясини топинг.
Жавоби: а) $2,2 \cdot 10^{20}$ с$^{-1}$; б) 60 кэВ.

2.7. Импульси $p = 1,02$ МэВ$/c$ (бу ерда c – ёруғлик тезлиги) бўлган фотон тинч турган эркин электронда сочилгач, унинг импульси $p_1 = 0,255$ МэВ$/c$ бўлиб қолди. Фотон қандай бурчак остида сочилган?
Жавоби: 120^o.

---

[1] *рус.* полярность

[2] *рус.* электрон отдачи

2.8. Фотон тинч турган эркин электронда $\theta = 120^o$ бурчак остида сочилгач, электрон $T = 0,45$ МэВ кинетик энергия олди. Сочилишгача фотоннинг энергиясини топинг.
Жавоби: 0,68 МэВ.

2.9. Электроннинг тинч тургандаги энергиясидан $\eta = 2$ марта катта энергияли фотон тинч турган эркин электронда сочилди. Электроннинг $B = 0,12$ Тл кучланганликка эга бўлган магнит майдонидаги траекторияси эгрилик радиусини топинг. Узатилган электрон майдон йўналишига кўндаланг равишда ҳаракатланяпти деб фараз қилинади.
Жавоби: 3,4 см.

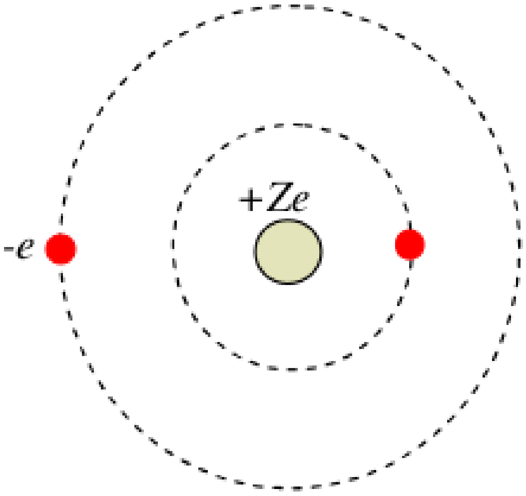
3- мавзу

Бор назарияси. Луи де Бройл ғояси

Резерфорднинг ядровий (планетар) модели

Атом мусбат зарядланган ядро ва манфий зарядланган электронлардан ташкил топган. Атом ядроси чизиқли ўлчами 10^{-15} м дан катта бўлмаган фазо қисмида мужассамланган. Атом ядросининг массаси деярли атом массасига тенг, заряди бўлса $+Z|e|$, бунда Z – элементнинг даврий жадвалдаги тартиб рақами. Чизиқли ўлчамлари 10^{-10} м бўлган фазо соҳасида Z та электронлар жойлашган.

Мувозанат ҳолатда жойлашган нуқтавий зарядлар тизими, атомдан фарқли равишда, турғун эмас. Зарядлар орасида мавжуд бўлган Кулон кучлари ва сайёралар орасидаги гравитация кучларининг таъсирлашаётган объектлар орасидаги масофага боғланиш табиати айнан бир хил, уларнинг иккаласи ҳам масофанинг квадратига тескари пропорционал. Сайёралар тизимининг турғунлик сабаби, улар Қуёш атрофида орбита бўйлаб ҳаракатланганлигидандир. Шундай фикрлашларга асосланиб, Резерфорд, электронлар, худди сайёралар Қуёш атрофида айлангани каби, атом ядроси атрофида айланма ҳаракат қилади, деб фараз қилди. Шундай қилиб, атом планетар моделга эга бўлиб қолди (3.1-расмга қаранг). Лекин, атомнинг бундай механикавий планетар модели классик электродинамика қонунларига кўра



3.1 - расм: Резерфордга кўра атомнинг ядровий (планетар) модели.

турғун бўла олмайди. Ҳақиқат шундаки, Кулон кучлари таъсири остида айланма ҳаракатланаётган электронлар

$$F_K = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m_e a_n$$

нормал тезланишган эга бўлиши лозим. Аммо, тезланиш билан ҳаракатланаётган заряд электромагнит тўлқинлар нурлайди. Нурланиш туфайли, электрон, энергиясини йўқотиб, атом ядросига спиралсимон ҳаракатланиб яқинлашиши ва охир-оқибатда ядрога қулаши лозим. Ҳисоблашларнинг кўрсатишича, бундай атомнинг яшаш вақти 10^{-10} секунддан ортмайди. Ушбу моделга кўра, атомнинг нурланиш спектри узлуксиз бўлиши керак ва бу хулоса тажриба маълумотларига зид.

Атомларнинг чизиқсимон нурланиш спектри

Қиздирилган жисмлар нурланиш спектри узлуксиз. Зарралари атомлардан иборат бўлган сийраклашган газларнинг нурланиш спектри *ўзига хос қонуният* асосида жойлашган ингичка спектрал чизиқлардан иборат. Бундай қонуниятларнинг мавжудлиги атомларда ички структура борлигини ва улар айнан шу структурани тасвирлашини англатади.

Энг содда атом – бир дона протон ва бир дона электрондан ташкил топган водород атомининг чизиқсимон нурланиш спектри содда эмпирик формулалар билан хайрон қоларли даражада аниқ ифодаланади. Бунда спектрал чизиқларнинг барчасини серияларга ажратиш мумкин.

1) Спектрнинг *кўринадиган* соҳасида ётувчи чизиқлар Бальмер сериясига мансуб ва уларнинг частотаси қуйидаги формула орқали ҳисоблаб топилади

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 3, 4, 5, \ldots \tag{3.1}$$

2) *Ультрабинафша* нурлар соҳасига таалуқли чизиқлар Лайман сериясига мансуб, уларнинг частотасини қуйидаги формула билан аниқлаш мумкин

$$\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{3.2}$$

3) Спектрал чизиқларнинг яна бир тўплами Пашен серияси дейилади, улар электромагнит нурланиш спектрининг *инфрақизил* тўлқинлар соҳасига мос келиб, частота

қуйидаги формула ёрдамида ифодаланади

$$\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 4, 5, 6, \ldots \tag{3.3}$$

(3.1), (3.2) ва (3.3) формулалардаги R – Ридберг доимийси дейилади, унинг тажрибаларда ўлчанган сон қиймати $R = 3,2898419602508(64) \cdot 10^{15}$ Гц.

Юқорида келтирилган барча формулалар умумлашган Бальмер формуласи орқали бирлаштирилиши мумкин:

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), m = 1, 2, \ldots; n = m+1, m+2, \ldots \tag{3.4}$$

Иккинчи ҳаддаги n сон ортиб бориши билан спектрал сериядаги чизиқлар серия чегарасигача зичлашиб боради ва бу $n = \infty$ қийматга мос келади дейишади. Серия чегарасидан кейин узлуксиз спектр ётади. Дискрет спектрни узлуксиз спектрга ўтиши барча атомларда кузатилади.

3.1 Бор постулатлари

Классик физика Резерфорд томонидан таклиф қилинган атом моделига асосланиб атомларнинг турғунлиги ва уларнинг чизиқсимон спектрларини изоҳлай олмагач, Нильс Бор водородсимон атомларнинг назариясини таклиф этди. Бу назарияда қуйидаги постулатлар қабул қилинган:

1) Электронлар атомлар ичида турғун (стационар) орбиталарда, энергиясини нурламасдан, ҳаракатланади.

2) Атом, электронни бир стационар орбитадан бошқасига ўтганда, энергиясини нурлайди ёки ютади. Бунда нурланиш (ютилиш) частотаси қуйидаги муносабат билан аниқланади:

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}, \tag{3.5}$$

бу ерда E_2 ва E_1 – атомнинг стационар ҳолатлари энергияси, h – Планк доимийси.

Электрон чексиз оғир (қўзғалмас) ва Ze зарядли ядро атрофида айлана бўйлаб ҳаракатланяпти, деб фараз қиламиз. $Z = 1$ бўлганда водород атоми, $Z > 1$ бўлса, водородсимон ионлар хақида сўз юритилади. Атом ядроси томонидан электронга таъсир этаётган Кулон кучи ва электроннинг айланма ҳаракати (нормал тезланиш) туфайли мавжуд марказдан қочувчи (интилувчи) куч атомнинг турғун бўлиши шартидан ўзаро тенг бўлиши лозим

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{3.6}$$

Бу ерда m_e – электроннинг массаси, v – тезлиги, r – стационар орбита радиуси. Борнинг квантлаш шартига кўра, импульс моменти дискрет қийматларга эга (стационар орбиталар мавжуд). Импульс моменти Планк доимийсига каррали бўлиши лозим

$$m_e v r = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.7}$$

(3.6) ва (3.7) муносабатлардан стационар орбита радиуси учун формула оламиз

$$r_n = \left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \right) \frac{n^2}{Z}. \tag{3.8}$$

Водород атомининг биринчи стационар орбитаси радиусининг қиймати $Z = 1$ ва $n = 1$ бўлганда аниқланади

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar\, c}{m_e c^2} \frac{1}{\alpha}, \tag{3.9}$$

бу ерда $\alpha = \frac{1}{\hbar c} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ – белгилаш киритдик, сон қиймати $\alpha = \frac{1}{137}$ бўлган ушбу катталик – нозик структура доимийси дейилади. Атом ўлчамларида ҳисоблашларни бажаришда яна $\hbar c \approx 197{,}33$ эВ·нм, $m_e c^2 \approx 511 \times 10^3$ эВ, 1 эВ $=$ e·В қийматларни ишлатиш қулай.

1-мисол. Нозик структура доимийси α, $\hbar c$ ва $m_e c^2$ катталикларнинг қийматларини ишлатиб, (3.9) формула билан аниқланган r_1 радиуснинг сон қийматини топинг.

Ечими. Берилган катталикларнинг қийматларини (3.9) формулага қўйиб, қуйидаги натижани оламиз:

$$r_1 = \frac{\hbar\, c}{m_e c^2} \frac{1}{\alpha} = \frac{197{,}33 \cdot 137}{511} \cdot 10^{-3} = 0.052904521 \text{ нм}.$$

У водород атоми учун Бор радиуси дейилади. Унинг қиймати газлар кинетикаси фани миқёсида атомларнинг ўлчами билан мос келади.

Атомнинг тўлиқ энергияси электроннинг кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндисидан иборат (атом ядроси қўзғалмас деб олинади)

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Агар (3.6) ни ҳисобга олсак

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Стационар орбита радиусининг (3.8) ифодасини қўллаб, шу орбита энергиясини топамиз

$$E_n = -\frac{m_e}{2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 \frac{1}{n^2}. \tag{3.10}$$

2-мисол. (3.10) формулада $n = 1$ ва $Z = 1$ деб олиб, E_1 энергия қийматини топинг.

Ечими. Бу ерда ҳам нозик структура доимийси α ва $m_e c^2$ катталикнинг қийматларидан фойдаланиш қулай. Демак,

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 = -\frac{m_e c^2}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\right)^2 \\ &= -\frac{m_e c^2\alpha^2}{2} = -\frac{511\cdot 10^3}{2\cdot 137^2} \approx -13{,}6 \text{ эВ} \end{aligned}$$

экан.

Агар атом $n > m$ энергетик сатҳдан $m \geq 1$ сатҳга ўтаётган бўлса, $h\nu = E_n - E_m$ энергияли фотон нурланади ва унга мос частота қуйидаги формула билан топилади

$$\nu = \frac{m_e}{4\pi\hbar}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{3.11}$$

Водород атоми учун $Z = 1$, агар Ридберг димийси сифатида

$$R = \frac{m_e}{4\pi\hbar}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2, \tag{3.12}$$

ифода қабул қилинса, (3.11) муносабат (3.4) орқали аниқланган умумлашган Бальмер формуласига айланади.

3-мисол. $m_e c^2 \approx 511 \cdot 10^3$ эВ, $\hbar c \approx 197{,}33$ эВ·нм, $\alpha = \frac{1}{\hbar c}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{137}$ катталиклардан фойдаланиб, Ридберг доимийсининг қийматини топинг.

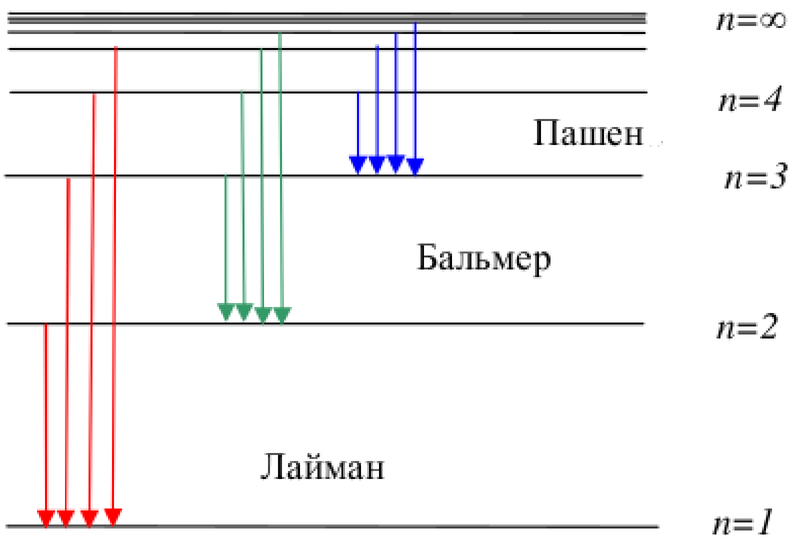
Ечими. (3.12) формулани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$R = \frac{m_e c^2}{4\pi\hbar c}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\right)^2 \cdot c.$$

Юқоридаги сонларни ишлатиб,

$$R \approx \frac{511 \cdot 10^3}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 197{,}33} \cdot \frac{3 \cdot 10^{17}}{137^2} = 3{,}2938 \cdot 10^{15}\,\text{Гц}$$

миқдорни оламиз. У тажрибаларда ўлчангани билан катта аниқликда мос тушади.



3.2 - расм: Атомларнинг энергия сатҳлари схемаси.

3.2-расмда атомларнинг энергия сатҳлари схемаси тасвирланган. Бунда водород атоми нурланганда спектрал сериялар энергия сатҳларига мослаб кўрсатилган. Атомнинг энергия сатҳини аниқловчи n бутун сон – бош квант сони дейилади. Агар $n = 1$ бўлса, атом *асосий ҳолатда*, $n > 1$ бўлса, атом *уйғонган ҳолатда* жойлашган дейилади.

Водород атомининг асосий ҳолатига мос келувчи энергия сатҳи $E_1 \approx -13,6$ эВ, уйғонган ҳолатининг энг катта энергияси $E_\infty = 0$. Агар водород атомидаги электронга $E \geq 13,6$ эВ энергия берилса, атом эркин ҳаракатланаётган алоҳида электрон ва протонга парчаланиб кетади. Атомдан электронни юлиб олиш жараёни *ионланиш*, бунга сарфланган энергия *ионланиш энергияси* дейилади.

Бор назариясининг ютуқлари

1) Водородсимон атомларнинг энергия ҳолатларини дискретлигини изоҳлади.
2) Атом ўлчамлари миқёсида содир бўлувчи жараёнларни изоҳлашда бутунлай янгича ёндашув ва атомнинг биринчи яримквант назарияси бўлди.
3) Бор назариясининг эвристик аҳамияти шундаки – унга кўра атомларда стационар ҳолатлар мавжудлиги ва улар орасидаги ўтишлар сакрашсимон табиатли эканлиги хақидаги фаразларни киритилганлиги квант механикасини яратилишида ўта муҳим ўрин тутди.

Бор назариясининг камчиликлари

1) Спектрал чизиқларнинг интенсивлигини изоҳлай олмайди.
2) Фақат водородсимон атомлар учунгина ўринли, Менделеев даврий жадвалидаги бошқа атомларни, тажрибалардан олинган маълумотларсиз (масалан, ионлашиш энергиялари), изоҳлай олмайди.
3) Мантиқий зиддиятга эга: тоза классик ёки тоза квант назария эмас. Унинг асосида ётган иккита тенгламалар тизимида, бири – электрон ҳаракатини ифодаловчи тенглама – классик, иккинчиси – орбиталарни квантлаш – квант тенгламадир.

Бор назариясининг камчиликлари ва ундаги зиддиятлар, кейинчалик, уни ҳеч қандай зиддиятларга эга бўлмаган, умумийроқ фаразларга асосланган квант механикаси билан алмаштирилишига олиб келди. Ҳозир, Бор постулатлари – квант қонуниятларининг хусусий оқибатлари эканлиги маълум. Ундаги квантлаш қоидаси бизнинг кунларда ҳам, тақрибий муносабатлар сифатида, ишлатилади: уларнинг аниқлиги кўпинча ўта юқоридир.

3.2 Зарраларнинг тўлқин хоссаси

Луи де-Бройль ғояси. Бор назариясининг камчиликлари, электрон классик шарча тарзида тасаввур қилинса тажриба маълумотларини изоҳлаб бўлмаслиги микрозарраларга янгича назар билан қарашни талаб этди.

Фотонларнинг зарра-тўлқин дуал табиатга эга эканлиги ҳақидаги кашфиёт, 1924 йилда Луи де Бройлга, "бундай дуал табиатга фақат фотонларгина эмас, балки барча микрозарралар (электронлар, протонлар, атомлар ва х.к.) ҳам эга бўлади", – деган ғояни илгари суришига сабаб бўлди. Яъни, заррага де Бройл тўлқини деб аталадиган

$$\nu = \frac{E}{h} \quad \left(\omega = \frac{E}{\hbar}\right) \tag{3.13}$$

частотали тўлқинни мос қўйиш мумкин. Бунда

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{2\pi\hbar}{mv} \tag{3.14}$$

зарранинг де Бройл тўлқин узунлиги дейилади.

Луи де Бройлнинг ушбу ғояси 1927 йилда Девиссон – Жермер тажрибаларида ўз тасдиғини топди. Бу тажрибаларда электронларнинг никел кристалларида сочилиши тадқиқ этилди ва уларда электронлар дифракцияси кузатилди, яъни электронлар тўлқин табиатга ҳам эга эканлиги кўрсатиб берилди.

1926 йилда Макс Борн де Бройл тўлқинларининг физикавий талқинини таклиф этди. Унга кўра тўлқин қонуниятларга зарранинг ҳолатини ифодаловчи – тўлқин функция (Ψ-функция) бўйсунади. Тўлқин функция модулининг квадрати вақтнинг турли онларида заррани топиш эҳтимоллигини аниқлайди. Импульси аниқ берилган эркин ҳаракатланаётган зарранинг тўлқин функцияси – бу де Бройл тўлқинининг айнан ўзидир.

Гейзенбергнинг ноаниқлик принципи

Зарраларнинг дуал "зарра-тўлқин" табиатга эга эканлиги хақидаги хулосага кўра микрозаррани ифодалаш учун баъзида "тўлқин", бошқа ҳолларда "зарра" тасаввури қўлланилиши лозим. Шу сабаб микрозарра зарраларнинг ва тўлқинларнинг *барча* хусусиятларига, бир пайтнинг ўзида, эга бўла олмайди. Масалан, классик механикада ихтиёрий зарра қандайдир маълум траектория бўйлаб ҳаракатланади ва вақтнинг ихтиёрий танланган онида у аниқ координата ва импульсга эга бўлади. Квант назариясида заррани қандайдир аниқ траектрия бўйлаб ҳаракатланяпти дейиш мумкин эмас. Атомлар сингари зарраларга "зарра" ва "тўлқин" тушунчаларини ишлатиш мумкин, аммо бу тушунчаларни бир пайтнинг ўзида аниқ қўллаб бўлмайди. Шундай фикрлар асосида 1927 йилда Вернер Гейзенберг томонидан, зарранинг координатаси ва импульсини ўлчашдаги хатоликлар учун қуйидаги муносабатлар, киритилди:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \; \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \; \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}. \qquad (3.15)$$

Ушбу (3.15) муносабатлар Гейзенбергнинг ноаниқлик принципи дейилади.

Физикавий катталикнинг ўлчашдаги хатолик деб ўша катталикнинг ўртача қийматидан ўртача квадратик четланишга айтилади:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}.$$

Гейзенбергнинг ноаниқлик принципига кўра микрозарранинг жойи ва унинг тўлқин узунлигини бир пайтда аниқ ўлчаб бўлмайди. Ноаниқлик принципи – табиатнинг қатъий қонуни, уни ўлчов асобобларидаги номукаммалликка ҳеч қандай алоқаси йўқ. Агар ноаниқлик муносабатларидан бирини

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m}$$

шаклда қарасак, зарранинг массаси қанчалик катта бўлса, $\Delta x \cdot \Delta v_x$ кўпайтма қиймати шунчалик кичик, яъни траектория тушунчасини оғир массали зарраларга катта аниқликда қўллаш мумкинлигини кўрамиз. Шу сабабдан макрозарралар учун тўлқин хоссалар аҳамиятли эмас.

4-мисол. Электроннинг де Бройл тўлқин узунлиги 0,1 дан то 0,05 нм гача камайиши учун унга қандай қўшимча энергия бериш керак?

Ечими. Релятивистик электроннинг энергияси $E_e = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Электроннинг де Бройл тўлқин узунлиги $\lambda_{\text{Б}} = \frac{2\pi\hbar}{p}$ эканлигини ҳисобга олсак

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sqrt{\frac{4\pi^2\hbar^2c^2}{\lambda_2^2} + m_e^2c^4} - \sqrt{\frac{4\pi^2\hbar^2c^2}{\lambda_1^2} + m_e^2c^4} \\ &\approx \sqrt{\frac{13,6 \cdot 197,33^2}{0,05^2} + 511^2 \cdot 10^6} - \\ &\quad - \sqrt{\frac{13,6 \cdot 197,33^2}{0,1^2} + 511^2 \cdot 10^6} = 450,46\,\text{эВ}\end{aligned}$$

натижани оламиз.

5-мисол. Электроннинг де Бройл тўлқин узунлиги унинг Комптон тўлқин узунлигига тенг бўлиши учун у қандай тезлатувчи потенциаллар фарқидан ўтиши лозим?

Ечими. Бунда электр майдонининг бажарган иши тезлатувчи потенциаллар фарқидан ўтганда электрон эришадиган кинетик энергияга тенг: $eU = T$. Релятивистик электроннинг кинетик энергиясини

$$m_ec^2 + T = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}$$

шартдан аниқлаймиз. Уни квадратга кўтариб, T кинетик энергияга нисбатан тенглама оламиз:

$$T^2 + 2m_ec^2\,T - p^2c^2 = 0.$$

Бу тенгламани ечиб, T кинетик энергия учун ифодани аниқлаймиз:

$$T = c(\sqrt{m_e^2c^2 + p^2} - m_ec).$$

Электроннинг комптон тўлқин узунлиги $\lambda_{\text{К}} = \frac{2\pi\hbar}{m_ec}$, де Бройл тўлқин узунлиги бўлса, $\lambda_{\text{Б}} = \frac{2\pi\hbar}{p}$ эди.

$$\lambda_{\text{К}} = \lambda_{\text{Б}} \to \frac{2\pi\hbar}{m_ec} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

шартдан $p = m_ec$ ва

$$T = c(\sqrt{m_e^2c^2 + p^2} - m_ec) = c(m_ec\sqrt{2} - m_ec) = m_ec^2(\sqrt{2} - 1)$$

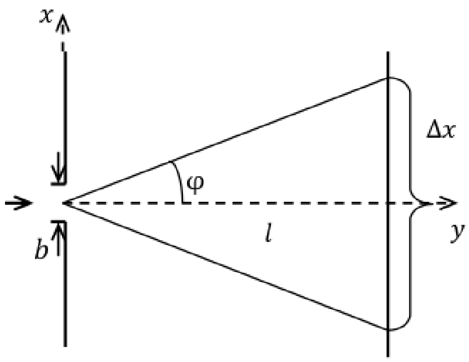
натижага келамиз. Демак, жавоб

$$eU = m_ec^2(\sqrt{2} - 1) \approx 511 \cdot 0,4 \cdot 10^3 = 211,7 \cdot 10^3\,\text{эВ}$$

экан.

6-мисол. Моноэнергетик электронларнинг параллел оқими нормал равишда $b = 1,0$ мкм кенгликдаги тўғрибурчакли тор тирқиши бўлган диафрагмага тушяпти. Агар тирқишдан $l = 50$ см масофада турган экранда марказий дифракцион максимум кенглиги $\Delta x = 36,0$ мкм бўлса, электронлар тезлигини аниқланг.

Ечими. Дифракция туфайли электрон энг катта эҳтимоллик билан 2φ бурчак миқёсида ҳаракатланади, бунда φ – биринчи дифракцион минимумга мос келувчи бурчак (3.3-расм).



3.3 - расм: Биринчи дифракцион минимумга мос келувчи φ бурчак.

Ушбу φ бурчак $b \cdot \sin(\varphi) = \lambda$ шартдан аниқланади, бу ерда $\lambda = \lambda_{\text{Б}}$ – электроннинг де Бройл тўлқин узунлиги. Кичик бурчакларда

$$\sin(\varphi) = \tan(\varphi) = \frac{\Delta x}{2l}.$$

У ҳолда

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{b\Delta x}{2l} = \frac{2\pi\hbar}{m_e v} \Rightarrow v = \frac{4\pi l\hbar}{bm_e\Delta x}.$$

Агар электронлар тезлигини

$$v = \frac{4\pi lc}{\Delta x \cdot b}\left(\frac{\hbar c}{m_e c^2}\right)$$

кўринишда ёзиб олсак, ҳисоблашларни шаффоф бажариш мумкин бўлади. Шундай қилиб,

$$v = \frac{\pi}{6}\frac{197,33}{511} \cdot 10^8 \approx 2,02 \cdot 10^7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

7-мисол. Координатаси ноаниқлиги $\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi}$ бўлган зарра тезлигининг ноаниқлигини баҳоланг, бу ерда λ – зарра де Бройл тўлқин узунлиги.

Ечими. Ноаниқлик муносабатини $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$ деб ҳисоблаймиз. Уни $\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m}$ шаклда ёзиб оламиз. У ҳолда

$$\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m}.$$

Зарра де Бройл тўлқин узунлиги $\lambda_\text{Б} = \frac{2\pi\hbar}{mv_x}$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$\frac{\hbar}{mv_x} \cdot \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m}$$

натижани оламиз. Бундан, зарра тезлигининг ноаниқлиги $\Delta v_x \sim v_x$ тартибда эканлигини аниқлаймиз.

8-мисол. Кинетик энергияси $T \approx 4$ эВ бўлган электрон $l = 1$ мкм ўлчамли соҳада қамалган (локаллашган). Ноаниқлик муносабати ёрдамида унинг тезлигини нисбий ноаниқлигини баҳоланг.

Ечими. Ноаниқлик муносабатини $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$ ёки $\Delta x \cdot m_e \Delta v_x \geq \hbar$ кўринишда ёзамиз. $\Delta x \leq l$ эканлигини ҳисобга олсак, $l m_e \Delta v_x \sim \hbar$, бундан $\Delta v_x \sim \frac{\hbar}{l m_e}$. Кинетик энергияси T бўлган электрон тезлиги $v_x = \sqrt{\frac{2T}{m_e}}$. У ҳолда

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} \sim \frac{\hbar}{l m_e}\sqrt{\frac{m_e}{2T}} = \frac{\hbar}{l\sqrt{2m_e T}} = \frac{\hbar c}{l\sqrt{2m_e c^2 T}}.$$

Демак,

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} \sim \frac{197,33}{10^3\sqrt{2 \cdot 0,511 \cdot 10^6 \cdot 4}} \approx 98,67 \cdot 10^{-6} \approx 0,99 \cdot 10^{-4}.$$

3.3 Мустақил ишлаш учун вазифалар

3.1. Хона ҳароратида термодинамик мувозанатда жойлашган водород молекуласининг де Бройл тўлқин узунлигини топинг.
Жавоби: $1,03 \cdot 10^{-10}$ м.

3.2. 15 м баландликдан тушган $m = 20$ г массали тошнинг де Бройл тўлқин узунлигини топинг.
Жавоби: $19,1 \cdot 10^{-34}$ м.

3.3. Потенциаллар фарқи 1 В бўлган майдондан ўтган электрон де Бройл тўлқини потенциаллар фарқи 1 кВ бўлган майдондан тўтган электрон де Бройл тўлқинидан неча марта фарқ қилади?
Жавоби: 31,6.

3.4. Потенциаллар фарқи $U = 25$ В бўлган майдонда тезлаштирилган электронларнинг параллел оқими бир-биридан $d = 50$ мкм масофада жойлашган иккита тирқишли диафрагмага тушяпти. Тирқишлардан $l = 100$ см узоқда жойлашган экранда ҳосил бўлган иккита қўшни дифракцион манзара максимумлари орасидаги масофани аниқланг.
Жавоби: 4,9 мкм.

3.5. Ҳаракатланаётган зарра координатасининг ноаниқлиги унинг де Бройл тўлқин узунлигига тенг деб ҳисоблаб, шу зарра ипмпульсининг $\Delta p/p$ нисбий ноаниқлигини аниқланг.

Жавоби: 0,159.

3.6. Зарра де Бройл тўлқин узунлиги λ, импульсининг 1% нисбий ноаниқлигига мос Δx координатаси ноаниқлигидан неча марта кичик?
Жавоби: 15,6.

3.7. Нуклоннинг ядродаги минимал энергияси $E = 10$ МэВ деб ҳисоблаб, ноаниқлик муносабатидан ядронинг чизиқли ўлчамини баҳоланг.
Жавоби: 3 Фм.

4- мавзу

Тўлқин функция ва операторлар

4.1 Тўлқин функция

Уч ўлчовли фазода эркин ҳаракатланаётган заррани қарайлик. Квант механикасида унинг ҳолати $\psi(x, y, z)$ тўлқин функция ёрдамида аниқланади. Макс Борн талқинига кўра, тўлқин функция модулининг квадрати $|\psi(x, y, z)|^2$, зарранинг фазодаги жойини аниқлашда уни (x, y, z) нуқтада топиш эҳтимоллиги зичлигидир. Бундан тўлқин функкия учун

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dxdydz = 1$$

нормировка шарти келиб чиқади. Декарт координаталари ўрнига эгри чизиқли координаталарни, масалан, (r, θ, φ) сферик координаталарни қўллаш мумкин. Келгусида координаталар тўпламини q билан, ҳажм элементини dq билан белгилаймиз. Масалан, Декарт координаталарида $dq = dxdydz$, сферик координаталарда $dq = r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\varphi$ ва х.к. Бу ҳолда нормировка шарти

$$\int |\psi(q)|^2 dq = 1$$

содда кўринишни олади.

Квант механикасида тўлқин функциялар узлуксиз, чексиз дифференциалланувчи ва квадратик интегралланувчи бўлиши лозим. Бундай хоссали функциялар математикада чизиқли Гильберт фазосини ташкил этади. Шу сабаб $\psi(q)$ тўлқин функцияни ушбу фазодаги вектор деб қараш мумкин. Уни Диракнинг $|\psi\rangle$ кет вектори билан белгилаб, ҳолат вектори деб атаймиз. Тўлқин функцияларни вектор деб тасаввур қилгач, уларнинг скаляр кўпайтмасини

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int \varphi^*(q)\psi(q)dq \tag{4.1}$$

кўринишда киритамиз. Бунда $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$ эканлиги тушунарли. Скаляр кўпайтманинг (4.1) аниқланишидан, унинг

$$|\varphi\rangle = A_1|\varphi_1\rangle + A_2|\varphi_2\rangle, \quad |\psi\rangle = B_1|\psi_1\rangle + B_2|\psi_2\rangle$$

векторлар бўйича чизиқли эканлиги келиб чиқади:

$$\begin{aligned} \langle A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2|B_1\psi_1 + B_2\psi_2\rangle &= \\ = A_1^*B_1\langle\varphi_1|\psi_1\rangle + A_2^*B_1\langle\varphi_2|\psi_1\rangle &+ \\ +A_2^*B_1\langle\varphi_2|\psi_1\rangle + A_2^*B_2\langle\varphi_2|\psi_2\rangle&, \end{aligned} \tag{4.2}$$

бунда A_α, B_α – қандайдир комплекс доимийлар ($\alpha = 1,2$).

Агар $\langle\varphi|\psi\rangle = 0$ бўлса, $\varphi(q)$ ва $\psi(q)$ тўлқин функциялар (ҳолат векторлари $|\varphi\rangle$ ва $|\psi\rangle$) ортогонал дейилади. Нормаровка шарти, ҳолат векторлари тилида, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ кўринишда ёзилади.

Гильберт фазосида иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси, вектор нормаси ва векторларнинг тўлиқлик шарти (чизиқли боғлиқ бўлмаган базис векторларнинг киритилиши) аниқлангач, энди биз квант механикасида зарранинг ҳолати Гильберт фазосига тегишли ҳолат вектори билан тўлиқ аниқланади дейишимиз мумкин.

Тўлқин функция (ҳолат вектори) $e^{i\phi}$ кўринишдаги фазавий кўпайтувчигача аниқликда қурилади, бу ерда ϕ – доимий. Бундай кўпайтувчини тўлқин функция $\psi \to e^{i\phi} \cdot \psi$ таркибида бўлиши нормировка шартини ўзгартирмайди ва физикавий катталикларнинг ўртача қийматини аниқлашга таъсир этмайди (бундай аниқланган тўлқин функцияни унинг комплекс қўшмасига кўпайтириб кўринг).

1-мисол. Зарранинг ҳолат вектори

$$|\psi\rangle = A(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$$

кўринишда бўлса, A доимийни топинг. Бу ерда $|\psi_1\rangle$ ва $|\psi_2\rangle$ – ўзаро ортогонал $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$ ва нормировкаси бирга тенг векторлар: $\langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1$, $\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$.

Ечими. A доимий $|\psi\rangle$ ҳолат вектори учун нормировка шартидан топилади. Скаляр кўпайтманинг (4.2) аниқланишидан

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= \langle A(\psi_1+\psi_2)|A(\psi_1+\psi_2)\rangle \\
&= A^*A(\langle\psi_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_1|\psi_2\rangle + \langle\psi_2|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\psi_2\rangle) = 1 \\
2A^*A &= 2|A|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Демак, $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ экан. Тўлқин функция фазаси аниқмаслигича қолади.

4.2 Операторлар

Қийматлари экспериментларда ўлчанадиган физикавий катталикларга, квант механикасида, Гильберт фазосида тўлқин функцияларга (ҳолат векторларига) таъсир этувчи чизиқли Эрмит операторлар мос қўйилади. Оператор ҳолат векторини, маълум қоидага асосан, бошқа векторга ўтказади. Қандайдир $\hat{F}$ операторнинг чизиқли эканлиги ихтиёрий $\psi(q)$ ва $\varphi(q)$ тўлқин функциялар учун

$$\hat{F}[A\psi(q)+B\varphi(q)] = A\hat{F}\psi(q)+B\hat{F}\varphi(q)$$

хоссани бажарилишини англатади. Бу ерда A, B – ихтиёрий комплекс сонлар. Операторга бирлик оператор $\hat{E}\psi(q) = \psi(q)$ энг содда мисол бўлади. Чизиқлимас операторга $\hat{F}\psi(q) = \sqrt{\psi(q)}$ квадрат илдиз олиш амалини мисол қилиб келтириш мумкин.

Агар ихтиёрий $\psi(q)$ функция учун $\hat{F}_1\psi(q) = \hat{F}_2\psi(q)$ бўлса, $\hat{F}_1$ ва $\hat{F}_2$ операторлар тенг дейилади. Яна, агар ихтиёрий иккита $\varphi(q)$ ва $\psi(q)$ функциялар учун қуйидаги

$$\int \varphi(q)\hat{F}_1\psi(q)dq = \int \varphi(q)\hat{F}_2\psi(q)dq, \tag{4.3}$$

муносабат бажарилса $\hat{F}_1$ ва $\hat{F}_2$ операторлар тенг дейилади. $\hat{F}$ операторга комплекс қўшма оператор $\hat{F}^*$ кўринишда белгиланади. Бунда қуйидаги хосса ўринли:

$$\hat{F}^*\psi^*(q) = \left[\hat{F}\psi(q)\right]^*. \tag{4.4}$$

2-мисол. $\left(\hat{F}^*\right)^* = \hat{F}$ эканлигини исботланг.

Ечими. Ихтиёрий $\psi(q)$ учун

$$\left(\hat{F}^*\right)^*\psi(q) = \left[\hat{F}^*\psi^*(q)\right]^* = \left\{\left[\hat{F}\psi(q)\right]^*\right\}^* = \hat{F}\psi.$$

Бундан, аниқланиши бўйича, $\left(\hat{F}^*\right)^* = \hat{F}$ келиб чиқади.

$\hat{F}$ операторга транспонирланган оператор $\hat{F}^T$ кўринишда белгиланади. Бунда қуйидаги хосса ўринли:

$$\int \varphi(q)\hat{F}^T\psi(q)dq = \int \psi(q)\hat{F}\varphi(q)dq. \qquad (4.5)$$

3-мисол. $\left(\hat{F}^T\right)^T = \hat{F}$ эканлигини исботланг.

Ечими. Ихтиёрий $\varphi(q)$ ва $\psi(q)$ учун

$$\int \varphi(q)\left(\hat{F}^T\right)^T\psi(q)dq = \int \psi(q)\hat{F}^T\varphi(q)dq = \int \varphi(q)\hat{F}\psi(q)dq.$$

Бунда (4.3) таърифдан $\left(\hat{F}^T\right)^T = \hat{F}$.

Эътибор беринг: $\int \varphi^*(q)\hat{F}\psi(q)dq$ интеграл $\langle\varphi|\hat{F}\psi\rangle$ скаляр кўпайтманинг ўзи ((4.1) га қаранг). Бу, одатда, симметрик кўринишда қўйидагича ёзилади

$$\langle\varphi|\hat{F}|\psi\rangle = \int \varphi^*(q)\hat{F}\psi(q)dq \qquad (4.6)$$

ва у $\hat{F}$ операторнинг матрик элементи дейилади.

4-мисол. Транспонирлаш ва комплекс қўшма олиш амалларини ихтиёрий тартибда бажариш, яъни, $\left(\hat{F}^*\right)^T = \left(\hat{F}^T\right)^*$ мумкинлигини кўрсатинг.

Ечими. Ихтиёрий $\varphi(q)$ ва $\psi(q)$ учун

$$\begin{aligned}
\int \varphi(q)\left(\hat{F}^*\right)^T \psi(q)dq &= \int \psi(q)\hat{F}^*\varphi(q)dq = \\
\int \psi(q)\left[\hat{F}\varphi^*(q)\right]^* dq &= \left[\int \psi^*(q)\hat{F}\varphi^*(q)dq\right]^* = \\
\left[\int \varphi^*(q)\hat{F}^T\psi^*(q)dq\right]^* &= \int \varphi(q)\left[\hat{F}^T\psi^*(q)\right]^* dq
\end{aligned}$$

$$= \int \varphi(q)\left(\hat{F}^T\right)^* \psi(q)dq.$$

Бундан $\left(\hat{F}^*\right)^T = \left(\hat{F}^T\right)^*$ келиб чиқади.

$\hat{F}$ оператор устида транспонирлаш ва комплекс қўшма олиш амалларини кетма-кет бажариш (ихтиёрий тартибда) унга Эрмит қўшма $\hat{F}^+$ операторни ҳосил қилади:

$$\hat{F}^+ = \left(\hat{F}^*\right)^T = \left(\hat{F}^T\right)^*. \tag{4.7}$$

2- ва 4-мисоллар натижаларидан фойдаланиб, $\left(\hat{F}^+\right)^+ = \hat{F}$ эканлигини осон кўрсатиш мумкин.

Агар $\hat{F} = \hat{F}^+$ муносабат бажарилса, $\hat{F}$ – Эрмит оператор дейилади. Диққат! Квант механикасида, қийматлари экспериментларда ўлчанадиган, физикавий катталикларга айнан Эрмит операторлар мос қўйилади.

Заррани x ўқи бўйлаб бир ўлчамли ҳаракатини қарайлик. Зарранинг жойини кўрсатувчи физикавий катталик – x координатага квант механикасида $\hat{x}$ координата оператори мос келади. Унинг тўлқин функцияга таъсири x координатани тўлқин функцияга кўпайтирилишига олиб келади:

$$\hat{x}\,\psi(x) = x\cdot\psi(x). \tag{4.8}$$

5-мисол. а) $\hat{x}^*$; б) $\hat{x}^T$; в) $\hat{x}^+$ операторларни топинг.

Ечими.

а) Ихтиёрий $\psi(x)$ тўлқин функция учун (4.4) аниқлашга кўра

$$\hat{x}^*\psi(x) = [\hat{x}\psi^*(x)]^* = [x\psi^*(x)]^* = x\psi(x) = \hat{x}\psi(x).$$

(4.3) га кўра $\hat{x}^* = \hat{x}$ экан.

б) Ихтиёрий $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ учун (4.5) га кўра

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\hat{x}^T\psi(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\hat{x}\varphi(x)dx = \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,x\,\varphi(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,x\,\psi(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\hat{x}\psi(x)dx\end{aligned}$$

(4.3) га кўра $\hat{x}^T = \hat{x}$ экан.

в) Бу ерда а), б) натижалари ва (4.7) аниқлашдан $\hat{x}^+ = \hat{x}$ эканлигини оламиз. Яъни, $\hat{x}$ оператор Эрмит, шундай бўлиши ҳам зарур. Чунки у экспериментда ўлчанадиган физикавий катталикка мос келувчи оператордир.

6-мисол. $\psi(x)$ тўлқин функцияга унинг $\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$ ҳосиласини мос қўювчи $\frac{\partial}{\partial x}$ дифференциаллаш операторини қараймиз.

а) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^*$; б) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^T$; в) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^+$ операторларни топинг.

Изоҳ: бир ўлчамли масалада $\frac{d}{dx}$ тўлиқ ҳосилани қараш мумкин эди. Аммо хусусий ҳосила учун натижалар бошқа масалаларда кўп учрайди. Шу сабаб хусусий ҳосилани қолдирамиз.

Ечими.

а) Ихтиёрий $\psi(x)$ функция учун (4.4) аниқлашга кўра

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^* \psi(x) = \left(\frac{\partial\psi^*(x)}{\partial x}\right)^* = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x).$$

Бундан $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^* = \frac{\partial}{\partial x}$ экан.

б) Ихтиёрий $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар учун (4.5) аниқлашга кўра

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^T \psi(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}dx = \\ &= [\psi(x)\varphi(x)]\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}dx.\end{aligned}$$

Тўлқин функциялар учун $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 = 1$ нормировка шарти бажарилиши лозим, бундан $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \psi(x) = 0$

(акс ҳолда интеграл узоқлашувчи бўлади). Шундай қилиб, юқоридаги ифодада биринчи ҳад нол, (4.3) га кўра $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^T = -\frac{\partial}{\partial x}$ экан.

в) Аввалги а), б) натижалардан ва (4.7) аниқлашдан $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^+ = -\frac{\partial}{\partial x}$ эканлиги келиб чиқади. Демак $\frac{\partial}{\partial x}$ дифференциаллаш оператори Эрмит эмас.

Эътибор беринг! Агар $\frac{\partial}{\partial x}$ оператор i мавҳум бирликка кўпайтирилса, Эрмит оператор ҳосил бўлади. Қиймати-ни экспериментда ўлчаш мумкин бўлган импульснинг x-компонентасига мос $\hat{p}_x$ оператор

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.9}$$

кўринишда аниқланади. Бу ерда $\hbar$ – Планк доимийси. 6-мисол натижаларидан кўриниб турганидек, $\hat{p}_x$ оператор – Эрмит. Уч ўлчовли фазода зарра ҳаракати учун импульснинг вектор оператори киритилади:

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{\hbar}{i}\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\hbar}{i}\nabla. \tag{4.10}$$

Операторларни қўшиш ва кўпайтириш

Тўлқин функцияларга таъсир этувчи $\hat{F}$ ва $\hat{G}$ операторларнинг $\hat{F}+\hat{G}$ йиғиндиси

$$\left(\hat{F}+\hat{G}\right)\psi(q) = \hat{F}\psi(q) + \hat{G}\psi(q) \tag{4.11}$$

хоссага кўра киритилади. Уларнинг $\hat{F}\cdot\hat{G}$ кўпайтмаси эса

$$\left(\hat{F}\cdot\hat{G}\right)\psi(q) = \hat{F}\left[\hat{G}\psi(q)\right] \tag{4.12}$$

хоссага эга. Келгусида операторларни кўпайтириш учун ёзилган нуқта белгисини тушириб қолдирамиз. Операторларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари ассоциативлик ва дистрибутивлик хоссасига эга:

$$\begin{aligned} \left(\hat{F}+\hat{G}\right)+\hat{A} &= \hat{F}+\left(\hat{G}+\hat{A}\right), && (4.13)\\ \left(\hat{F}\hat{G}\right)\hat{A} &= \hat{F}\left(\hat{G}\hat{A}\right), && (4.14)\\ \left(\hat{F}+\hat{G}\right)\hat{A} &= \hat{F}\hat{A}+\hat{G}\hat{A}. && (4.15) \end{aligned}$$

Қўшиш ва кўпайтириш амалларини комплекс қўшма олиш, транспонирлаш ва Эрмит қўшма олиш амаллари билан боғовчи қуйидаги хоссалар ҳам ўринли:

$$\begin{array}{l} \left(\alpha\hat{F}+\beta\hat{G}\right)^* = \alpha^*\hat{F}^*+\beta^*\hat{G}^*,\\ \left(\alpha\hat{F}+\beta\hat{G}\right)^T = \alpha\hat{F}^T+\beta\hat{G}^T,\\ \left(\alpha\hat{F}+\beta\hat{G}\right)^+ = \alpha^*\hat{F}^+ +\beta^*\hat{G}^+, \qquad \alpha,\beta - \text{доимийлар}\\ \left(\hat{F}\hat{G}\right)^* = \hat{F}^*\hat{G}^*,\ \left(\hat{F}\hat{G}\right)^T = \hat{G}^T\hat{F}^T,\ \left(\hat{F}\hat{G}\right)^+ = \hat{G}^+\hat{F}^+. \end{array} \qquad (4.16)$$

Охирги тенгликни ихтиёрий сондаги кўпайтувчилар учун умумлаштирайлик:

$$\left(\hat{F}_1\hat{F}_2\cdots\hat{F}_n\right)^+ = \hat{F}_n^+\hat{F}_{n-1}^+\cdots\hat{F}_1^+. \qquad (4.17)$$

Даражага кўтариш амалини аниқлаймиз:

$$\hat{F}^n = \underbrace{\hat{F}\cdot\hat{F}\cdot\hat{F}\cdots\hat{F}\cdot\hat{F}}_{\text{n та кўпайтувчи}}. \qquad (4.18)$$

$f(x)$ функцияни Маклорен қаторига ёйиш мумкин бўлсин:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

бунда $f^{(n)}(0)$ – бу $f(x)$ функциянинг $x = 0$ нуқтадаги n-тартибли ҳосиласи. У ҳолда $\hat{F}$ операторга боғлиқ $f(\hat{F})$ функция сифатида

$$f(\hat{F}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{F}^n \tag{4.19}$$

қатор назарда тутилади. $\hat{F}$ операторга тескари оператор $\hat{F}^{-1}$ кўринишда белгиланади. Бунда қуйидаги хосса ўринли:

$$\hat{F}\hat{F}^{-1} = \hat{F}^{-1}\hat{F} = \hat{E}. \tag{4.20}$$

(4.20) дан, $\left(\hat{F}^{-1}\right)^{-1} = \hat{F}$ бўлиши тушунарли.

7-мисол. $\left(\hat{F}\hat{G}\right)^{-1} = \hat{G}^{-1}\hat{F}^{-1}$ эканлигини исботланг.

Ечими. Тенгликни, уни иккала тарафини $\left(\hat{F}\hat{G}\right)$ га кўпайтириб, исботлаймиз. (4.20) га кўра, чап тарафда $\left(\hat{F}\hat{G}\right)^{-1}\left(\hat{F}\hat{G}\right) = \hat{E}$ ни оламиз. Ўнг тараф, (4.14) ассоциативлик хоссасидан

$$\left(\hat{G}^{-1}\hat{F}^{-1}\right)\left(\hat{F}\hat{G}\right) = \hat{G}^{-1}\left(\hat{F}^{-1}\hat{F}\right)\hat{G} = \hat{G}^{-1}\hat{E}\hat{G} = \hat{G}^{-1}\hat{G} = \hat{E}.$$

Агар

$$\hat{F}^{-1} = \hat{F}^{+} \tag{4.21}$$

хосса ўринли бўлса, $\hat{F}$ – унитар оператор дейилади. Унитар операторга энг содда мисол – бу $\hat{E}$ бирлик оператордир.

Диққат! Бир ортонормал базисдан бошқа ортонормал базисга ўтишда айнан унитар операторлар қўлланилади.

Агар $\hat{F}$ оператор чизиқли, Эрмит ёки унитар бўлса, $\hat{F}^{-1}$ оператор ҳам чизиқли, Эрмит ёки унитар бўлади.

4.3 Мустақил ишлаш учун вазифалар

4.1. Қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $|i+1|^2$; б) $|1-i|^3$ в) $|3i-\sqrt{2}|^2$
г) $|e^{2i}|$; д) $|e^{-i}|^3$ е) $|e^{i-1}|$.

4.2. $|\psi_1\rangle$ ва $|\psi_1\rangle$ ҳолат векторлари нормировкаси $\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$, аммо $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \alpha$ ноортогонал бўлсин. Бунда α – қандайдир комплекс сон. Қуйидаги

$$|\varphi_2\rangle = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}|\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}|\psi_2\rangle$$

функцияни киритамиз. Бунда $|\psi_1\rangle$ ва $|\varphi_2\rangle$ ҳолат векторлари ўзаро ортонормал эканлигини кўрсатинг.

4.3. (4.16) хоссаларни исботланг.

4.4. $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ операторга Эрмит қўшма операторни топинг. Бунда n – ихтиёрий натурал сон.

4.5. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2$ ва $\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)^2$ операторларни а) $\sin(x)$ ва б) e^{2x} функцияларга таъсири натижасини топинг.

4.6. Иккита Эрмит операторларнинг $\hat{A}\hat{B}$ кўпайтмаси ҳам Эрмит оператор бўлиши учун, $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар орасида қандай муносабат ўринли бўлиши лозим?

4.7. Қуйидаги операторлар Эрмитми?

а) $\hat{x}^2$; б) $\hat{p}_x^2$; в) $i(\hat{p}_x^2\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x^2)$; г) $\hat{x}\hat{p}_x$;
д) $\hat{\alpha}\psi(q) = \alpha\psi(q)$ сонга кўпайтириш оператори;
е) $\hat{I}\psi(x) = \psi(-x)$ инверция оператори;
ж) $\hat{C}\psi(q) = \psi^*(q)$ комплекс қўшма олиш оператори.

4.8. $\hat{\sigma}^2 = \hat{E}$ хоссали ихтиёрий $\hat{\sigma}$ оператор учун

$$e^{i\theta\hat{\sigma}} = \cos(\theta) + i\hat{\sigma}\sin(\theta)$$

муносабат ўринли эканлигини кўрсатинг. Бу ерда θ – қандайдир ҳақиқий сон.

4.9. Агар $\hat{F}$ унитар оператор бўлса, $\hat{F}^{-1}$ ҳам унитар бўлишини кўрсатинг.

4.10. Агар $\hat{F}$ Эрмит оператор бўлса, $\hat{G} = e^{i\hat{F}}$ оператор ҳам унитар бўлишини кўрсатинг.

4.11. Агар $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ Эрмит операторлар бўлса, ихтиёрий $\hat{F}$ операторни $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$ кўринишда тасвирлаш мумкинлигини кўрсатинг.

4.12. Агар $\hat{F}$ оператор Эрмит бўлса, $\hat{A}\hat{F}\hat{A}^+$ ҳам Эрмит оператор бўлишини кўрсатинг.

4.13. $\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x+a)$ силжитиш оператори кўриниши $\hat{T}_a = e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{p}_x}$ эканлигини исботланг.

4.14. $e^{-\hat{I}^{-1}}$ операторни қандайдир $\psi(x)$ тўлқин функцияга таъсири натижасини $\psi(x)$ ва $\psi(-x)$ функциялар орқали ифодаланг. Бу ерда $\hat{I}$ – инверция оператори: $\hat{I}\psi(x) = \psi(-x)$.

4.15. Қуйидаги операторларни топинг:

а) $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{+}$; б) $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^{+}$; в) $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^{+}$; $\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{+}$.

Бу ерда r, θ, φ – сферик координаталар, ρ – цилиндрик координата. Изоҳ: қисқалик учун тўлқин функцияларнинг, фақат битта координатага боғлиқ, абстракт фазосини қаранг.

4.16. *Агар аввалги мисолдаги г) банди $\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{+} = -\frac{1}{\rho} - \frac{\partial}{\partial \rho}$ натижасини $\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right)^{+} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{+}\right]^2$ тенгликка қўлласак, $\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right)^{+}$ оператор учун тўғри натижани оламизми? Изоҳ: аввалги масаланинг кўрсатилган банди натижаси қандай функциялар синфи учун ўринли эканлигини аниқланг.

4.17. *Қандайдир $\hat{F}$ – Эрмит оператор берилган ва $\psi(q)$ тўлқин функция учун $\hat{F}^n\psi(q) = 0$ хосса ўринли бўлсин. Бу ерда n – натурал сон, $n > 1$. $\hat{F}\psi(q) = 0$ эканлигини кўрсатинг.

Диққат! Вазифа шартида * белгиси – у билан ажратилган вазифаларни бажариш оғирроқ эканлигини англатади.

5- мавзу

Коммутаторлар

5.1 Умумий ҳол

Операторларнинг (4.12) кўпайтириш амали коммутатив эмас: умумий ҳолда $\hat{F}\hat{G}$ кўпайтма $\hat{G}\hat{F}$ га тенг эмас. Иккита $\hat{F}$ ва $\hat{G}$ операторларнинг коммутатори $\left[\hat{F},\hat{G}\right]$ кўринишда белгиланади ва

$$\left[\hat{F},\hat{G}\right] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} \tag{5.1}$$

муносабат билан аниқланади.

Агар $\left[\hat{F},\hat{G}\right] = 0$ бўлса, $\hat{F}$ ва $\hat{G}$ операторлар коммутатив дейилади. Бунда $\hat{F}\hat{G} = \hat{G}\hat{F}$. Масалан, ихтиёрий оператор ўзи ва ўзининг ихтиёрий даражаси билан коммутатив: $\left[\hat{F},\hat{F}\right] = 0$, $\left[\hat{F},\hat{F}^n\right] = 0$ (n – натурал сон). Агар $\hat{F}$ оператор $\hat{H}$ билан коммутатив ва $\hat{G}$ оператор $\hat{H}$ билан коммутатив бўлса, $\hat{F}$ ва $\hat{G}$ коммутатив бўлмаслиги мумкин. Яъни $\left[\hat{F},\hat{H}\right] = 0$ ва $\left[\hat{G},\hat{H}\right] = 0$ эканлигидан $\left[\hat{F},\hat{G}\right] = 0$ эканлиги келиб чиқмайди.

(5.1) аниқлашдан қуйидаги хоссалар ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин:

а) антисимметриклик

$$\left[\hat{F},\hat{G}\right] = -\left[\hat{G},\hat{F}\right]$$

б) чизиқлилик

$$\left[\alpha_1\hat{F}_1 + \alpha_2\hat{F}_2,\hat{G}\right] = \alpha_1\left[\hat{F}_1,\hat{G}\right] + \alpha_2\left[\hat{F}_2,\hat{G}\right],$$

бу ерда α_1, α_2 – ихтиёрий комплекс сонлар.

Коммутатордаги операторлардан бири (масалан, биринчиси) бошқа иккита операторларнинг кўпайтмаси бўлса, баъзида бундай коммутаторни қуйидаги муносабат билан алмаштириш қулай:

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}. \tag{5.2}$$

Буни исботлаш учун (5.2) муносабатнинг ўнг томонини, коммутатор аниқланишига кўра, очиб ёзайлик:

$$\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B} = \hat{A}\left(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}\right) + \left(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\right)\hat{B} =$$
$$\hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \left(\hat{A}\hat{B}\right)\hat{C} - \hat{C}\left(\hat{A}\hat{B}\right) = \left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]$$

(5.2) муносабатни иккинчи оператор бошқа иккита оператор кўпайтмаси бўлган ҳол учун ёзамиз:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]. \tag{5.3}$$

1-мисол. Қуйидагилар берилган:

$$\hat{F}\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}), \quad \hat{G}\psi(\boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}).$$

Бу ерда $f(\boldsymbol{r})$ ва $g(\boldsymbol{r})$ – қандайдир функциялар. $\left[\hat{F},\hat{G}\right]$ коммутаторни ҳисобланг.

Ечими. Қандайдир $\psi(\boldsymbol{r})$ тўлқин функцияга қидирилаётган коммутатор билан таъсир этамиз:

$$\begin{aligned}\left[\hat{F},\hat{G}\right]\psi(\boldsymbol{r}) &= \left(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}\right)\psi(\boldsymbol{r}) \\ &= \hat{F}\left[\hat{G}\psi(\boldsymbol{r})\right] - \hat{G}\left[\hat{F}\psi(\boldsymbol{r})\right] \\ &= \left[f(\boldsymbol{r})g(\boldsymbol{r}) - g(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r}) = 0.\end{aligned}$$

Бундан, $\psi(\boldsymbol{r})$ ихтиёрий эканлигидан $\left[\hat{F},\hat{G}\right]=0$ бўлишини топамиз.

5.2 Координата, импульс ва импульс моменти

Координата ва импульс операторлари мос равишда (4.8) ва (4.9) муносабатлар орқали киритилган эди.

2-мисол. $[\hat{p}_x,\hat{x}]$ коммутаторни ҳисобланг.

Ечими. Қидирилаётган коммутаторни қандайдир $\psi(x)$ тўлқин функцияга таъсир этказайлик:

$$\begin{aligned}
[\hat{p}_x,\hat{x}]\,\psi(x) &= (\hat{p}_x\hat{x}-\hat{x}\hat{p}_x)\,\psi(x)=\hat{p}_x\,[\hat{x}\psi(x)]-\hat{x}\,[\hat{p}_x\psi(x)]\\
&= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,[x\psi(x)]-\frac{\hbar}{i}x\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\\
&= \frac{\hbar}{i}\left[\psi(x)+x\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right]-\frac{\hbar}{i}x\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}=\frac{\hbar}{i}\psi(x).
\end{aligned}$$

Демак, $[\hat{p}_x,\hat{x}]=\frac{\hbar}{i}=-i\hbar$ экан.

Қолган Декарт ўқлари учун шунга ўхшаш натижалар олиниши тушунарли: $\left[\hat{p}_y,\hat{y}\right]=-i\hbar$, $\left[\hat{p}_z,\hat{z}\right]=-i\hbar$. Агар импульс проекцияси оператори учун битта ўқни, координата оператори учун иккинчи ўқни олсак, у ҳолда коммутатор нол бўлади, масалан, $\left[\hat{p}_x,\hat{y}\right]=0$. Олинган натижани умумлаштириб, ихтиёрий координата ўқлари учун қуйидаги муносабатни ёзишимиз мумкин:

$$\left[\hat{p}_\alpha,\hat{x}_\beta\right]=-i\hbar\delta_{\alpha\beta}, \tag{5.4}$$

бу ерда α,β – Декарт координата ўқлари индекси, $\delta_{\alpha\beta}$ – Кронекер белгиси.

Квант механикасида, қийматини экспериментда ўлчаса бўладиган физикавий катталик, импульс моменти $\boldsymbol{L}$ орқали белгиланади. У $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ муносабат билан аниқланар эди. Унга $\hat{\boldsymbol{L}}$ – импульс моменти оператори мос қўйилади. Иккита векторни вектор кўпайтмаси туфайли ҳосил бўладиган янги вектор компоненталари

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_\alpha a_\beta b_\gamma = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

формула билан топилар эди. Бу ерда (α, β, γ) – Декарт координата ўқлари рақамлари, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ – Декарт координаталари тизимидаги ортонормал базис векторлар ва $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – Леви-Чивита белгиси, у қуйидаги хоссага эга

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & (\alpha, \beta, \gamma) \text{ циклик ўрин алмашганда;} \\ -1, & (\alpha, \beta, \gamma) \text{ цикликмас ўрин алмашганда;} \\ 0, & \text{ихтиёрий иккита индекс тенг бўлганда.} \end{cases}$$

Ушбу маълумотлардан

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_\alpha \hat{r}_\beta \hat{p}_\gamma = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix}$$

эканлигини англаш қийин эмас. Шундай қилиб,

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x. \quad (5.5)$$

3-мисол. $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right]$ коммутаторни ҳисобланг.

Ечими. (5.5) аниқлашдан фойдаланамиз ва коммутаторни чизиқли эканлигини ҳисобга оламиз:

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] &= \left[\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z\right] \\ &= \left[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x\right] - \left[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z\right] - \left[\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x\right] + \left[\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z\right].\end{aligned}$$

Олинган ифодада тенгликнинг ўнг тарафидаги биринчи коммутаторни қараймиз:

$$\left[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x\right] = \hat{y}\hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_x - \hat{z}\hat{p}_x\hat{y}\hat{p}_z.$$

Бунда $\hat{p}_x$ оператор бошқа барча операторлар билан коммутатив эканлигига эътибор қаратамиз. Ушбу хоссадан, $\hat{p}_x$ ни, унинг ўрнини бир неча марта алмаштириб, иккала ҳаднинг чап четки қисмида ёзиб оламиз. Сўнг, уни қавсдан ташқирига чиқариб, қуйидагини ёзамиз:

$$\begin{aligned}\left[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x\right] &= \hat{y}\hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_x - z\hat{p}_x\hat{y}\hat{p}_z = \hat{p}_x\hat{y}\hat{p}_z z - \hat{p}_x\hat{z}\hat{y}\hat{p}_z \\ &= \hat{p}_x\left\{(\hat{y}\hat{p}_z)\hat{z} - \hat{z}(\hat{y}\hat{p}_z)\right\} = \hat{p}_x\left[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\right].\end{aligned}$$

Бу фикрлашлардан сўнг бир муҳим жиҳатни аниқладик. Коммутаторда, бошқа барча операторлар билан коммутатив операторни, коммутатор белгисидан ташқирига чиқариб ёзиш мумкин эканлигини билиб олдик. Натижада олинган $\left[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\right]$ коммутаторда, $\hat{y}$ ҳам у ерда турган бошқа барча операторлар билан коммутатив. Шу сабаб, $\left[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\right] = \hat{y}\left[\hat{p}_z, \hat{z}\right]$ хосса ўринли. Шундай қилиб,

$$\left[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x\right] = \hat{p}_x\hat{y}\left[\hat{p}_z, \hat{z}\right]$$

экан. Қидирилаётган коммутатор ифодасидаги бошқа коммутаторлар ҳақида ҳам ўхшаш фикрлар асосида қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = \hat{p}_x\hat{y}\left[\hat{p}_z, \hat{z}\right] - \hat{y}\hat{x}\left[\hat{p}_z, \hat{p}_z\right] - \hat{p}_y\hat{p}_x\left[\hat{z}, \hat{z}\right] + \hat{p}_y\hat{x}\left[\hat{z}, \hat{p}_z\right].$$

Бу ерда $[\hat{p}_z, \hat{p}_z] = [\hat{z}, \hat{z}] = 0$, $[\hat{p}_z, \hat{z}] = -i\hbar$, $[\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ ва $\hat{L}_z = \hat{p}_y\hat{x} - \hat{p}_x\hat{y}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_z \tag{5.6}$$

натижани оламиз. Коммутаторнинг антисимметрик эканлигидан, $\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right] = -i\hbar\hat{L}_z$. Шу йўл билан $\left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = -\left[\hat{L}_z, \hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_x$, $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = -\left[\hat{L}_x, \hat{L}_z\right] = i\hbar\hat{L}_y$ эканлигини кўрсатиш мумкин. Ушбу натижаларни

$$\left[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta\right] = i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{L}_\gamma, \tag{5.7}$$

формула орқали умумлаштириб ёза оламиз.

Импульс моменти квадрати оператори

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \tag{5.8}$$

кўринишда аниқланади.

4-мисол. $\left[\hat{L}_x, \hat{\boldsymbol{L}}^2\right]$, $\left[\hat{L}_y, \hat{\boldsymbol{L}}^2\right]$, $\left[\hat{L}_z, \hat{\boldsymbol{L}}^2\right]$ коммутаторларни ҳисобланг.

Ечими. мисолни бажаришнинг энг осон йўли – уни бизга маълум (5.7) коммутаторларга келтиришдир. Бу мақсадга эришиш учун (5.7) аниқлашдан ва (5.3) хоссадан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_x, \hat{\boldsymbol{L}}^2\right] &= \left[\hat{L}_x, \hat{L}_x^2\right] + \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y^2\right] + \left[\hat{L}_x, \hat{L}_z^2\right] \\
&= \left[\hat{L}_x, \hat{L}_x\right]\hat{L}_x + \hat{L}_x\left[\hat{L}_x, \hat{L}_x\right] \\
&\quad + \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right]\hat{L}_y + \hat{L}_y\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] \\
&\quad + \left[\hat{L}_x, \hat{L}_z\right]\hat{L}_z + \hat{L}_z\left[\hat{L}_x, \hat{L}_z\right] \\
&= i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y + i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z - i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z - i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y \\
&= i\hbar\left(\left[\hat{L}_z, \hat{L}_y\right] + \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right]\right) = 0.
\end{aligned}$$

Шунга ўхшаш, $\left[\hat{L}_y, \hat{\boldsymbol{L}}^2\right] = 0$, $\left[\hat{L}_z, \hat{\boldsymbol{L}}^2\right] = 0$ натижаларни оламиз. Уларни битта формулага умумлаштириш мумкин:

$$\left[\hat{L}_\alpha, \hat{\boldsymbol{L}}^2\right] = \left[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_\alpha\right] = 0, \tag{5.9}$$

бунда α – Декарт координата тизими ўқлари индекси.

Кўпинча импульс моментининг ўлчамсиз операторлари ишлатилади:

$$\hat{l}_x = \hat{L}_x/\hbar, \quad \hat{l}_y = \hat{L}_y/\hbar, \quad \hat{l}_z = \hat{L}_z/\hbar. \tag{5.10}$$

(5.7) ва (5.9) муносабатлар, импульс моментининг ўлчамсиз операторлари ҳолида, қуйидаги кўринишни олади:

$$\left[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta\right] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{l}_\gamma, \quad \left[\hat{l}_\alpha, \hat{\boldsymbol{l}}^2\right] = \left[\hat{\boldsymbol{l}}^2, \hat{l}_\alpha\right] = 0. \tag{5.11}$$

Бир қатор ҳолларда

$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y, \quad \hat{l}_- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y. \tag{5.12}$$

операторларни киритиш қулай. Улар қуйидаги коммутацион муносабатларни қаноатлантиради:

$$\left[\hat{l}_-,\hat{l}_z\right]=\hat{l}_-,\quad \left[\hat{l}_+,\hat{l}_z\right]=-\hat{l}_+,\quad \left[\hat{l}_+,\hat{l}_-\right]=2\hat{l}_z. \qquad (5.13)$$

Импульс моментининг Декарт координата ўқларига проекциялари ўлчамсиз операторлари

$$\begin{aligned}\hat{l}_x &= i\left(z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}\right),\\ \hat{l}_y &= i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-z\frac{\partial}{\partial x}\right),\\ \hat{l}_z &= i\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned} \qquad (5.14)$$

кўринишга эга. Улар тўлқин функция $\psi(x,y,z)$ Декарт координаталарига боғлиқ деб қаралганда қулай. Аммо, баъзи ҳолларда тўлқин функция сферик координаталарга боғлиқ бўлиши мумкин: $\psi(r,\theta,\varphi)$. Бунда импульс моменти проекциялари операторларини сферик координаталар учун ёзишга эҳтиёж туғилади. Улар

$$\begin{aligned}\hat{l}_x &= i\left(\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathrm{ctg}(\theta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\ \hat{l}_y &= -i\left(\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}-\mathrm{ctg}(\theta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\ \hat{l}_z &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned} \qquad (5.15)$$

кўринишда аниқланади. Бу операторларни r координатага боғлиқмаслиги эътиборни тортади. Шу хосса туфайли қуйидаги коммутацион муносабатлар ўринли:

$$\left[f(r), \hat{l}_\alpha\right] = 0, \quad \left[f\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \hat{l}_\alpha\right] = 0, \tag{5.16}$$

бу ерда $f(x)$ – Маклорен қаторига ёйса бўладиган ихтиёрий функция, α – Декарт координата тизимидаги ўқлар индекси.

Импульс моменти квадратининг ўлчамсиз операторини сферик координаталардаги ошкор кўринишини ҳам ёзамиз:

$$\hat{\boldsymbol{l}}^2 = -\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]. \tag{5.17}$$

Бу оператор ҳам r га боғлиқ эмас, шу сабаб, (5.16) га ўхшаш муносабат бажарилади:

$$\left[f(r), \hat{\boldsymbol{l}}^2\right] = 0, \quad \left[f\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \hat{\boldsymbol{l}}^2\right] = 0. \tag{5.18}$$

Ва ниҳоят,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Лаплас операторининг сферик координаталардаги ифодасини ёзайлик:

$$\begin{aligned}\Delta \; = \; & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right.\\ & \left.+ \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{l}}^2\end{aligned} \tag{5.19}$$

Бундан

$$\left[\Delta, \hat{l}_\alpha\right] = 0, \quad \left[\Delta, \hat{\boldsymbol{l}}^2\right] = 0 \tag{5.20}$$

коммутацион муносабатлар келиб чиқади.

5-мисол. $\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda\hat{F}}$ ни ҳисобланг, бунда λ – сон параметр.

Ечими. Операторга боғлиқ функциянинг (4.19) аниқланишидан

$$e^{\lambda\hat{F}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\lambda^n\hat{F}^n.$$

Бу ифоданинг ҳар бир ҳадидан λ бўйича ҳосила оламиз, умумий кўпайтувчи $\hat{F}$ операторни қавсдан ташқарига чиқарамиз ва йиғинди индексида алмаштириш бажарамиз:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda\hat{F}} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{d\lambda}\lambda^n\right)\hat{F}^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}n\lambda^{n-1}\hat{F}^n \\ &= \hat{F}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\lambda^{n-1}\hat{F}^{n-1}\right) = \hat{F}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda^k\hat{F}^k = \hat{F}e^{\lambda\hat{F}}.\end{aligned}$$

Умумий кўпайтувчи бўлган $\hat{F}$ операторни қаторнинг ўнг томонида ҳам ёзиш мумкин. Ихтиёрий оператор ўзига боғлиқ бўлган ихтиёрий функция билан коммутатив эканлигини таъкидлаймиз:

$$\left[\hat{F}, f(\hat{F})\right] = 0. \tag{5.21}$$

Шундай қилиб, мисол жавобини иккита кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda\hat{F}} = \hat{F}e^{\lambda\hat{F}} = e^{\lambda\hat{F}}\hat{F}. \tag{5.22}$$

5.3 Мустақил ишлаш учун вазифалар

5.1. (5.5) ифодалар билан аниқланган $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ операторлар Эрмит эканлигини исботланг.

5.2. $\left[ie^{ix}\frac{\partial}{\partial x}, e^{-ix}\right]$ коммутаторни ҳисобланг.

5.3. $\left[\hat{p}_x, \hat{F}\right]$ коммутаторни ҳисобланг. Бу ерда $\hat{F}$ – 1-мисолдаги оператор.

5.4. $\left[\hat{x}_\alpha, \hat{L}_\beta\right]$ коммутаторларни ҳисобланг. Бу ерда α, β – Декарт координаталар тизимидаги ўқлар индекслари.

5.5. $\left[\hat{p}_\alpha, \hat{L}_\beta\right]$ коммутаторларни ҳисобланг. Бу ерда α, β – Декарт координаталар тизимидаги ўқлар индекслари.

5.6. $\left(\hat{l}_+\right)^+ = \hat{l}_-$, $\left(\hat{l}_-\right)^+ = \hat{l}_+$ эканлигини исботланг.

5.7. (5.13) муносабатларни исботланг.

5.8. (5.12) да киритилган $\hat{l}_+$ ва $\hat{l}_-$ операторларни сферик координаталарда ёзинг.

5.9. Қуйидагиларни исботланг:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{l}}^2 &= \hat{l}_+\hat{l}_- + \hat{l}_z^2 - \hat{l}_z, \\
\hat{\mathbf{l}}^2 &= \hat{l}_-\hat{l}_+ + \hat{l}_z^2 + \hat{l}_z, \\
\hat{\mathbf{l}}^2 &= \frac{1}{2}\left(\hat{l}_+\hat{l}_- + \hat{l}_-\hat{l}_+\right) + \hat{l}_z^2.
\end{aligned}$$

5.10. Қуйидагини исботланг:

$$e^{\hat{G}}\hat{F}e^{-\hat{G}} = \hat{F} + [\hat{G}, \hat{F}] + \frac{1}{2!}[\hat{G}, [\hat{G}, \hat{F}]] + \cdots +$$

5.11. $e^{-i\hat{l}_x\theta}\hat{l}_z e^{i\hat{l}_x\theta} = \hat{l}_z\cos(\theta) - \hat{l}_y\sin(\theta)$ тенгликни исботланг.

5.12. Қуйидаги коммутаторлар нолга тенгми?

а) $[\hat{I}, \hat{p}_x]$, б) $\left[\hat{I}, \frac{d^2}{dx^2}\right]$.

Бу ерда $\hat{I}$ – инверсия оператори; бир ўлчамли ҳолда $\hat{I}\psi(x) = \psi(-x)$.

5.13. $\hat{F}$ ва $\hat{G}$ операторлар учун $\left[\hat{F}, \hat{G}\right] = 1$ ўринли бўлса, $\left[\hat{F}^n, \hat{G}\right] = n\hat{F}^{n-1}$ эканлигини исботланг.

5.14. Якоби айниятини исботланг:

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{B}, \hat{C}\right]\right] + \left[\hat{B}, \left[\hat{C}, \hat{A}\right]\right] + \left[\hat{C}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0.$$

5.15. *$\left[\hat{F}, \left[\hat{F}, \hat{G}\right]\right] = 0$ ва $\left[\hat{G}, \left[\hat{F}, \hat{G}\right]\right] = 0$ шартларни қаноатлантирувчи операторлар учун $e^{\hat{F}+\hat{G}} = e^{\hat{G}}e^{\hat{F}}e^{-\frac{1}{2}\left[\hat{G}, \hat{F}\right]}$ Вейл айниятини исботланг.

Диққат! Вазифа шартида * белгиси – у билан ажратилган вазифаларни бажариш оғирроқ эканлигини англатади.

6- мавзу

Хусусий қийматлар ва хусусий функциялар

$\hat{F}$ оператор $\psi(q)$ тўлқин функцияга таъсир этгач, натижада яна шу $\psi(q)$ тўлқин функциянинг ўзи, қандайдир λ сонга кўпайтирилган ҳолда пайдо бўлса,

$$\hat{F}\psi(q) = \lambda\psi(q) \tag{6.1}$$

ушбу $\psi(q)$ функция $\hat{F}$ операторнинг хусусий функцияси дейилади. Кўпайтувчи сифатида пайдо бўлган λ сон эса $\hat{F}$ операторнинг, $\psi(q)$ хусусий функциясига мос, хусусий қиймати дейилади. Агар $\hat{F}$ операторнинг λ хусусий қийматига шу $\hat{F}$ операторнинг фақат бир дона ёлғиз хусусий функцияси мос келса, бундай ҳолат – айнимаган ҳолат дейилади. Агар бир дона хусусий қийматга бир нечта (биттадан кўп) хусусий функциялар мос келса,

$$\hat{F}\psi_1(q) = \lambda\psi_1(q), \hat{F}\psi_2(q) = \lambda\psi_2(q), \hat{F}\psi_3(q) = \lambda\psi_3(q), \ldots \tag{6.2}$$

бундай ҳолат – айниган ҳолат дейилади. $\hat{F}$ операторнинг чизиқли эканлигидан, $\psi_1(q), \psi_2(q), \psi_3(q), \ldots$ функцияларнинг ихтиёрий комбинацияси $\hat{F}$ операторнинг, λ хусусий қийматига мос, хусусий функцияси бўлади. Шундай қилиб, $\hat{F}$ операторнинг айниган хусусий қиймати λ га мос келувчи барча хусусий функциялари чизиқли қисм фазони ташкил этади. Ушбу қисм фазони L_λ орқали белгилаймиз. Агар айниган ҳолатда хусусий функциялар сони n та бўлса, $\hat{F}$ операторнинг

λ хусусий қиймати n-каррали айниган дейилади, L_λ қисм фазонинг ўлчами n га тенг бўлади.

$\hat{F}$ Эрмит оператор учун қуйидаги хоссалар ўринли:

а) $\hat{F}$ операторнинг барча хусусий қийматлари – ҳақиқий сонлар;

б) $\hat{F}$ операторнинг, турли хусусий қийматларга мос, хусусий функциялари ортогонал;

в) $\hat{F}$ операторнинг хусусий функцияларидан, тўлқин функциялар фазосида, ортогонал базис қуриш мумкин. Бунда барча айниган λ хусусий қийматлар учун ортогонал базислар уларга мос L_λ қисм фазоларда танланиши керак (бу амални чексиз кўп йўллар билан бажариш мумкин).

$\hat{F}$ Эрмит операторнинг, F физикавий катталикка мос келувчи, хусусий қийматлари оддий физикавий моҳиятга эга – улар F физикавий катталикни экспериментларда ўлчаганда олинадиган қийматларидир. Бу, агар зарра (6.1) тенгламани қаноатлантирувчи $\psi(q)$ тўлқин функция билан ифодаланадиган ҳолатда жойлашган бўлса, заррани тавсифловчи F физикавий катталик экспериментда ўлчанганда λ қиймат олинади, деганидир. Шу сабаб, физикавий катталикларга квант механикасида айнан Эрмит операторлари мос қўйилади: физикавий катталикларнинг экспериментларда ўлчанадиган қийматлари ҳақиқий сонлардир.

6.1 Дискрет, узлуксиз ва аралаш спектрлар

Дискрет спектр

Операторнинг барча хусусий қийматлари тўплами унинг спектри дейилади. Агар $\hat{F}$ операторнинг хусусий қийматларини рақамлаш мумкин бўлса, яъни, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ бу оператор дискрет спектрга эга дейилади. Бундай операторнинг хусусий функцияларидан, тўлқин функциялар фазосида, ортогонал базис қуриш мумкин. Бунда $\{\psi_1(q), \psi_2(q), \psi_3(q), \ldots\}$ функциялар тўплами

$$\hat{F}\psi_n(q) = \lambda_n \psi_n(q), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.3}$$

тенгламани қаноатлантиради ва қуйидаги хоссалар ўринли

1) ушбу функциялар

$n \neq k$ бўлганда $\langle \psi_k | \psi_n \rangle = \int \psi_k^*(q) \psi_n(q) dq = 0$ ортогонал.

Нормировка шартига кўра

$$\langle \psi_k | \psi_n \rangle = \delta_{nk} \tag{6.4}$$

бу ерда δ_{nk} – Кронекер белгиси.

2) ихтиёрий $\psi(q)$ функцияни базис бўйича

$$\psi(q) = \sum_n C_n \psi_n(q) \tag{6.5}$$

қаторга ёйиш мумкин, бунда C_n – комплекс доимийлар. Базис функция $\psi_k(q)$ ва (6.5) ёйилмада аниқланган $\psi(q)$ функцияни скаляр кўпайтириб,

$$\langle \psi_k | \psi \rangle = \sum_n C_n \langle \psi_k | \psi_n \rangle = \sum_n C_n \delta_{kn} = C_k \tag{6.6}$$

номаълум C_k коэффициентларни топа оламиз.

Узлуксиз спектр

Агар операторнинг хусусий қийматларини рақамлаб бўлмаса, яъни, улар узлуксиз қийматлар қабул қилса, бундай оператор узлуксиз спектрга эга дейилади. Бундай ҳолда хусусий қийматлар ва хусусий функциялар тенгламаси

$$\hat{F}\psi_f(q) = \lambda_f \psi_f(q) \tag{6.7}$$

кўринишда ёзилади. Узлуксиз спектрга тегишли хусусий функциялар учун нормировка шарти бажарилмайди, яъни, $\int |\psi_f(q)|^2 dq$ интеграл узоқлашувчидир. Бу ҳолда тўлқин функция модулининг $|\psi_f(x,y,z)|^2$ квадрати заррани (x,y,z) нуқтада топиш эҳтимоллиги зичлигини англатмайди. Аммо, иккита нуқтада топилган тўлқин функциялар модуллари квадрати нисбати турли иккита нуқталарга мос координаталарни топиш учун нисбий эҳтимолликни беради. Қатъий айтганда, узлуксиз спектрли операторнинг хусусий функциялари оддий Гильберт фазосига эмас, умумлашган Гильберт фазосига тегишлидир.

Узлуксиз спектрли оператор хусусий функцияларидан ҳам тўлқин функциялар фазосида ортогонал базис қуриш мумкин:

а) хусусий функциялар тўпламига тегишли функиялар ўзаро отрогонал; аммо, (6.4) ўрнига

$$\langle \psi_{f'} | \psi_f \rangle = \int \psi^*_{f'}(q)\psi_f(q)dq = \delta(f - f'), \tag{6.8}$$

муносабат ўринли, бу ерда $\delta(f - f')$ – Диракнинг дельта функцияси;

б) ихтиёрий $\psi(q)$ тўлқин функцияни

$$\psi(q) = \int C(f)\psi_f(q)df \tag{6.9}$$

интеграл орқали тасвирлаш мумкин. Бу ерда $C(f)$ – комплекс функциялар.

δ-функция

$\delta(x)$ функцияни, қиймати $x = 0$ нуқтадан бошқа барча нуқталарда нол, $x = 0$ нуқтада эса $+\infty$ бўлган, функция сифатида тасаввур қилиш мумкин. У учун $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$ хосса ўринли. Булардан δ-функция одатда қабул қилинган маънодаги функция эмаслигини пайқаса бўлади. Уни таърифи сифатида қуйидагини қабул қиламиз:

$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0), \tag{6.10}$$

бу ерда $a < 0$, $b > 0$, $f(x)$ – ихтиёрий функция. Бундан дельта-функция моҳияти жиҳатидан $f(x)$ функцияга $f(0)$ сонни мос қўювчи функционал эканлигини билиб оламиз[1].

Дельта-функциянинг баъзи хоссаларини ёзиб чиқамиз:

1) $\delta(a\,x) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, бу ерда a – сон; хусусий ҳолда: $\delta(-x) = \delta(x)$ – дельта-функция жуфт;

2) $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk$ – дельта-функциянинг Фурье-тасвири;

---

[1] Функционал таҳлилда дельта-функцияга ўхшаш объектларни белгилаш учун умумлашган функция ва сингуляр функция каби иборалар киритилади.

3) $\int\limits_a^b \delta(x-x_0)f(x)dx = f(x_0)$, бу ерда $a < x_0 < b$ – (6.10) таърифнинг умумлашгани.

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ радиус-векторга боғлиқ дельта-функция деганда $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ ни тушунамиз.

Энди, узлуксиз спектрда тўлқин функцияни базис ҳолат векторлари орқали ёйилмаси (6.9) га қайтамиз. $\psi_{f'}(q)$ базис ҳолат ва $\psi(q)$ функциянинг скаляр кўпайтмасидан

$$\langle\psi_{f'}|\psi\rangle = \int C(f)\langle\psi_{f'}|\psi_f\rangle df = \int C(f)\delta(f'-f)df = C(f') \tag{6.11}$$

кўринишдаги, $C(f)$ функцияларни топиш учун, формула оламиз.

Аралаш спектр

Агар қандайдир оператор хусусий қийматларининг бир қисми дискрет, иккинчи қисми узлуксиз бўлса, у ҳолда бундай оператор аралаш спектрга эга дейилади.

1-мисол. Зарра x ўқи бўйлаб ҳаракатланаётган бўлсин (бир ўлчамли ҳол). Импульснинг x-компонентасига мос $\hat{p}_x$ операторнинг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини топинг.

Ечими. Импульс операторининг $\hat{p}_x$-компонентаси учун (4.9) аниқлашдан фойдаланиб, хусусий қиймат ва хусусий функция тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} = \lambda\psi(x). \tag{6.12}$$

Ушбу (6.12) тенгламанинг ечими $\psi(x) = C\,e^{\frac{i}{\hbar}\lambda\,x}$ кўринишга эга. Бунда λ – комплекс сон бўлсин $\lambda = \mathrm{Re}(\lambda) + i\mathrm{Im}(\lambda)$, деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$\psi(x) = C\,e^{\frac{i}{\hbar}\mathrm{Re}(\lambda)\,x}e^{-\frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{\hbar}\,x}$$

бўлади. Бунда, агар $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to-\infty}|\psi(x)| \to +\infty$, агар $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to+\infty}|\psi(x)| \to -\infty$. Демак, $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$ ва шу сабаб, λ ҳақиқий қиймат қабул қилувчи сон (Эрмит оператори хусусий қиймати учун шундай бўлиши керак). Импульс оператори $\hat{p}_x$ компонентасининг хусусий қийматини p билан белгилайлик. У ҳолда

$$\psi_p(x) = C\,e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot x}, \tag{6.13}$$

бунда p – ихтиёрий ҳақиқий сон. Шундай қилиб, $\hat{p}_x$ операторнинг спектри узлуксиз эканлигини билиб олдик. Хусусий қийматлар айнимаганлигига эътибор қаратамиз.

Агар зарра $\psi_p(x)$ тўлқин функция билан ифодаланаётган ҳолатда жойлашган бўлса, унинг импульси p_x проекцияси қиймати ўлчанганда p қиймат олинади. Бу ерда $|\psi_p(x)|^2$ катталик энди заррани x нуқтада топиш эҳтимоллиги зичлигини англатмаслигини таъкидлаймиз.

(6.13) ифодадаги C доимий хусусий функцияларни дельта-функциясига нормировкасидан аниқланади: $\langle\psi_{p'}|\psi_p\rangle = \delta(p' - p)$. Дельта-функциянинг юқорида санаб ўтилган хоссаларидан фойдаланиб, скаляр кўпайтмани ҳисоблайлик:

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_{p'} | \psi_p \rangle &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_{p'}^{*}(x)\psi_p(x)dx = |C|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')x} dx \\
&= |C|^2 2\pi\delta\left(\frac{p-p'}{\hbar}\right) = |C|^2 2\pi\hbar\delta(p-p').
\end{aligned}
$$

Бундан $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\alpha}$, α – ихтиёрий ҳақиқий сон. Тўлқин функция фазавий кўпайтувчигача аниқликда топилганлиги туфайли бу натижа тўғри. Фазавий кўпайтувчини бирга тенг деб олиш қулай. Якуний натижада, $\hat{p}_x$ операторнинг хусусий функцияси

$$
\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot x}, \tag{6.14}
$$

кўринишда бўлади, хусусий қиймат p – ихтиёрий ҳақиқий сон.

2-мисол. Зарра x ўқи бўйлаб ҳаракатланаётган бўлсин (бир ўлчамли ҳол). Координата операторининг ($\hat{x}$) хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини топинг.

Ечими. Координата оператори учун хусусий қиймат ва хусусий функция тенгламасини ёзамиз

$$
\hat{x}\psi(x) = a\,\psi(x). \tag{6.15}
$$

$\hat{x}$ операторнинг (4.8) таърифини ҳисобга олсак, (6.15) тенглама $x\,\psi(x) = a\,\psi(x)$ кўринишда ёзилади. Бундан $(x -$

$a)\psi(x) = 0$ натижага келамиз. Демак, $x = a$ нуқтадан бошқа барча нуқталарда $\psi(x) = 0$ экан. Акс ҳолда у барча нуқталарда нол бўлиши керак эди ва бу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 0$ каби маъносиз натижага олиб келган бўлар эди. Координата қиймати x ҳақиқий сон бўлганлигидан, a ҳам ҳақиқий эканлиги келиб чиқади. Яна, агар $\psi(x)$ функция $x = a$ нуқтада қандайдир чекли қийматга эга бўлса, аввалгидек $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 0$ маъносиз натижага келамиз. Бу фикрлашлардан сўнг $\psi(x)$ функция $x = a$ нуқтада чексиз бўлиши керак деган хулосага келамиз. Кўриб турганимиздек, $\psi(x)$ функция дельта-функциянинг аломатларига эга ва хусусий функцияни

$$\psi_a(x) = C\,\delta(x - a)$$

кўринишда аниқлаш мумкин.

$\hat{x}$ операторнинг спектри узлуксиз, барча хусусий қийматлар айнимаган эканлигини билиб олдик. Агар зарра $\psi_a(x)$ тўлқин функция билан ифодаланаётган ҳолатда жойлашган бўлса, унинг координатаси экспериментда ўлчанганда a қиймат олинади.

Топилган хусусий функциялар нормировкаси дельта-функция эканлигидан C доимийни ҳисоблаб топамиз:

$$\langle \psi_{a'} | \psi_a \rangle = |C|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a')\delta(x - a) dx = |C|^2 \delta(a - a').$$

Бундан, $C = 1$ эканлигини билиб олдик ва координата операторининг хусусий функцияси

$$\psi_a(x) = \delta(x-a), \tag{6.16}$$

кўринишда ёзилади, хусусий қиймат a – ихтиёрий ҳақиқий сон.

Изоҳ: 1- ва 2-мисолларда қаралган операторларнинг хусусий қийматлари ихтиёрий ҳақиқий сон бўлиб чиқди. Операторлар хусусий қийматларининг квант механикасидаги физикавий моҳиятини ҳисобга олсак, турли ҳолларда зарра импульсининг p_x проекциясини ва x координатасини экспериментларда ўлчаганимизда ихтиёрий ҳақиқий қийматларни олишимиз мумкин. Классик механикада бу таъкид ўз-ўзидан тушунарли, аммо квант механикасида баъзи физикавий катталикларнинг қийматлари ўлчанганда дискрет қийматлар олиниши мумкин. Шундай ҳолга навбатдаги мисол гувоҳлик беради.

3-мисол. $\hat{l}_z$ операторнинг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини топинг (ясси ротатор).

Ечими. Ҳолати бир дона координата – φ қутб бурчак билан бир қийматли аниқланадиган тизимни қарайлик. Бундай тизим ясси ротатор деб аталади[1]. Бундай модел тизим ҳолати $\psi(\varphi)$ тўлқин функциялар билан тавсифланади. $\hat{l}_z$

---

[1] Классик механикада, унга, қотирилган ўқ атрофида айланма ҳаракатланаётган каттиқ жисм, ўхшайди.

оператор учун хусусий қиймат ва хусусий функция тенгламасини ёзамиз:

$$-i\frac{\partial\psi(\varphi)}{\partial\varphi} = \lambda\psi(\varphi). \tag{6.17}$$

Бунда $\hat{l}_z$ операторнинг сферик координаталар тизимидаги кўриниши, (5.15), қўлланилди. Ушбу (6.17) дифференциал тенглама ечими $\psi(\varphi) = C\,e^{i\lambda\varphi}$ кўринишга эга. Тўлқин функция фазода бир қийматли бўлиши кераклигидан $\psi(0) = \psi(2\pi)$ шарт бажарилиши лозим. Бундан $e^{2\pi i\lambda} = 1$ келиб чиқади. Бу λ қийматларига чеклашлар қўяди. Масалан, λ – комплекс сон бўлсин: $\lambda = \mathrm{Re}(\lambda) + i\mathrm{Im}(\lambda)$. У ҳолда $e^{2\pi i\mathrm{Re}(\lambda)}e^{-2\pi\mathrm{Im}(\lambda)} = 1$. Бу тенглик фақат $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$ (яъни, λ – бу ҳақиқий сон) ва $\mathrm{Re}(\lambda) = \lambda = m$, m – бутун сон бўлса, бажарилиши мумкин. Шундай қилиб, $\hat{l}_z$ операторнинг хусусий функциялари

$$\psi_m(\varphi) = C\,e^{im\varphi}, \tag{6.18}$$

экан, бу ерда m – бутун сон. Булардан, $\hat{l}_z$ операторнинг спектри дискрет эканлиги келиб чиқяпти. Ушбу натижанинг физикавий моҳияти шундаки, импульс моментини ажратилган ўққа проекцияси экспериментда ўлчанганда фақат дискрет қийматлар тўплами олинади. Агар тизим $\psi_m(\varphi)$ тўлқин функция билан ифодаланаётган ҳолатда жойлашган бўлса, унинг импульс моменти l_z проекцияси экспериментда ўлчанганда m қиймат олинади. Бу ерда ҳам, $\hat{l}_z$ операторнинг хусусий қийматлари айнимаган эканлигини таъкидлаймиз.

(6.18) тўлқин функциялар дискрет спектрни ифодалаётганлиги туфайли, уларнинг нормировкаси бир бўлиши керак

$\langle\psi_m|\psi_m\rangle = 1$. Бу шартдан C доимийни аниқлаймиз:

$$\langle\psi_m|\psi_m\rangle = |C^2|\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}e^{im\varphi}d\varphi = |C^2|\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi|C|^2 = 1.$$

Демак, $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ва $\hat{l}_z$ операторнинг хусусий функциялари

$$\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}, \tag{6.19}$$

кўринишда экан. Бунда m – хусусий қийматлар – бутун сонлар.

4-мисол. Уч ўлчамли фазодаги ҳаракат учун $\hat{l}_z$ операторнинг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини топинг.

Ечими. Бу мисолни 3-мисолдан фарқи шундаки, тизим ҳолати энди учта координатага боғлиқ $\psi(r,\theta,\varphi)$ тўлқин функция билан ифодаланади. Хусусий қиймат ва хусусий функция тенгламасини ёзайлик

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r,\theta,\varphi) = \lambda\psi(r,\theta,\varphi). \tag{6.20}$$

Ушбу (6.20) тенглама тўлқин функциянинг (r,θ) ўзгарувчиларга боғлиқ қисмига ҳеч қандай чеклашлар қўймайди, φ ўзгарувчига боғлиқ қисми 3-мисолдаги билан бир хил. Шундай қилиб, қўйилган масала жавобини дарров ёзиш мумкин ((6.19) га қаранг):

$$\psi_m(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(r,\theta)e^{im\varphi}, \tag{6.21}$$

бу ерда m – хусусий қиймат, бутун сонлар; $f(r,\theta)$ – тўлқин функцияга қўйилган талабларни қаноатлантирувчи ихтиёрий функция (яъни, у узлуксиз ва нормировка шартини қаноатлантиради).

Бир пайтда ўлчанувчи физикавий катталиклар

Қийматларини экспериментда ўлчаса бўладиган иккита A ва B физикавий катталикларга квант механикасида $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар мос қўйилган бўлсин. Улар учун қуйидаги тенгликлар бажарилсин

$$\hat{A}\psi_{\lambda\mu}(q) = \lambda\psi_{\lambda\mu}(q), \quad \hat{B}\psi_{\lambda\mu}(q) = \mu\psi_{\lambda\mu}(q),$$

яъни, $\psi_{\lambda\mu}(q)$ – $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторларнинг умумий хусусий функцияси. Ушбу $\psi_{\lambda\mu}(q)$ ҳолатда A ва B физикавий катталикларнинг қийматлари экспериментда ўлчанса, мос ҳолда, λ ва μ қийматлар олинади.

Агар $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторларнинг умумий хусусий функцияларидан тўлқин функциялар фазосида базис қуриш мумкин бўлса, A ва B физикавий катталиклар бир пайтда ўлчанувчи дейилади. Эътибор беринг! Бунда $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторларнинг шундай умумий хусусий функцияларини танлаш имкони бўлсинки, улар базисни ташкил қилсин. Аммо, умумий ҳолда ушбу иккита операторлар ҳар бирининг алоҳида ўз хусусий функциялари мавжуд бўлиб, биринчи оператор хусусий функциялари иккинчисининг хусусий функциялари бўлмаслиги мумкин.

Коммутатив операторлар ҳақидаги қуйидаги теоремани исботлаш мумкин: $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$ коммутатив бўлганда ва фақат шунда тўлқин функциялар фазосида $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторларнинг умумий хусусий функцияларидан базис қуриш мумкин [(5.1) га қаранг].

5-мисол. Массаси m бўлган зарра x ўқи бўйлаб ҳаракатланяпти (бир ўлчамли ҳаракат). Кинетик энергия оператори $\hat{T} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$ учун хусусий қийматлар ва хусусий функцияларни топинг. Импульс проекцияси $\hat{p}_x$ оператори билан умумий хусусий функцияларни, агар шундай функциялар мавжуд бўлса, кўрсатинг.

Ечими. Импульс проекцияси $\hat{p}_x$ операторининг (4.9) аниқланишидан фойдаланиб, $\hat{T}$ оператор учун хусусий қиймат ва хусусий функция тенгламасини ёзамиз

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = \lambda\psi(x). \tag{6.22}$$

Чизиқли, биржинсли (6.22) дифференциал тенгламанинг ечимини $\psi(x) = Ce^{\gamma x}$ кўринишда қидирамиз. Бунда γ учун $\gamma = \pm\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{-\lambda}$ тенглама оламиз. $x \to \pm\infty$ бўлганда тўлқин функция модул бўйича $+\infty$ га интилмаслиги зурур, шу сабаб γ соф мавҳум сон бўлиши лозим. Демак, λ ҳақиқий ва мусбат бўлиши керак экан. Хусусий қийматларни, масала моҳиятидан келиб чиқиб, зарра кинетик энергиясининг мумкин бўлган қийматларини, E орқали белгилаймиз. Биз $\hat{T}$ оператор узлуксиз спектрга эга, хусусий қийматлар ($E = 0$ қийматдан ташқари) икки карра айниган эканлигини аниқладик. Чунки берилган $E > 0$ учун (6.22) тенгламанинг

$\gamma = \pm i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ қийматларга мос иккита ечимларини оламиз:

$$\psi_E^{(1)}(x) = C\,e^{-i\sqrt{2mE}\cdot x/\hbar},\ \psi_E^{(2)}(x) = C\,e^{i\sqrt{2mE}\cdot x/\hbar}. \qquad (6.23)$$

Бу тўлқин функциялар икки ўлчамли L_E қисм фазодаги базис функциялар бўлиб, улар икки карра айниган $E > 0$ хусусий қийматга мос хусусий функциялардир. Турли E қийматли (6.23) кўринишдаги барча функциялар тўлқин функциялар фазосида тўлиқ базисни ташкил этади.

(6.23) ва (6.13) функцияларни таққослаб, (6.23) функциялар импульс проекцияси $\hat{p}_x$ операторининг ҳам хусусий функциялари эканлигини пайқаш мумкин:

$$\psi_E^{(1)}(x) \equiv \psi_{p=\sqrt{2mE}}(x),\ \psi_E^{(2)}(x) \equiv \psi_{p=-\sqrt{2mE}}(x). \qquad (6.24)$$

Бу билан, $\hat{T}$ ва $\hat{p}_x$ операторлар умумий хусусий функцияларга эга эканлигини, улар тўлқин функциялар фазосида, (6.23) кўринишдаги, тўлиқ базисни ҳосил қилишини кўрсатдик. Ушбу натижа коммутатив операторлар ҳақидаги теорема билан мос келади: $\hat{T}$ ва $\hat{p}_x$ операторлар коммутатив, чунки $\hat{T}$ оператор сонли кўпайтувчигача аниқликда $\hat{p}_x$ операторнинг иккинчи даражасидир. Ҳар қандай оператор ўзининг даражасидан иборат оператор билан коммутатив эканлигини яхши биламиз. Шундай қилиб, T кинетик энергия ва импульснинг p_x проекцияси бир пайтда ўлчаса бўладиган физикавий катталиклардир.

6-мисол. Массаси m бўлган зарра x ўқи бўйлаб ҳаракатланмоқда. Кинетик энергия оператори $\hat{T} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$ учун $\hat{I}$ инверсия оператори хусусий функциялари билан умумий бўлган хусусий функцияларни кўрсатинг.

Ечими. 5-мисолни ечиш жараёнида олинган натижалардан фойдаланамиз. Икки ўлчамли L_E чизиқли қисм фазода, $\hat{T}$ операторнинг икки карра айниган $E > 0$ хусусий қийматига мос хусусий функцияларидан фақат (6.23) кўринишдаги функцияларнигина эмас, уларнинг комбинациясидан иборат ихтиёрий базисни танлаш мумкинлигини таъкидлаймиз. Масалан, базис сифатида қуйидаги функцияларни олиш мумкин:

$$\begin{aligned}
\varphi_E^{(1)}(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_E^{(1)}(x) + \psi_E^{(2)}(x)\right\} &= \sqrt{2}C\cos\left(\tfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right), \\
\varphi_E^{(2)}(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_E^{(1)}(x) - \psi_E^{(2)}(x)\right\} &= \sqrt{2}iC\sin\left(\tfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right).
\end{aligned} \tag{6.25}$$

$\hat{I}$ инверсия операторининг таърифидан [1.7 вазифа е) банди], (6.25) функциялар $\hat{I}$ операторнинг хусусий функциялари эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$\hat{I}\varphi_E^{(1)}(x) = \varphi_E^{(1)}(x),\ \hat{I}\varphi_E^{(2)}(x) = -\varphi_E^{(2)}(x). \tag{6.26}$$

Шу билан, $\hat{T}$ ва $\hat{I}$ операторлар умумий хусусий функциялар тизимига эга эканлигини кўрсатдик. Бу хусусий функциялар тўлқин функциялар фазосида, E энергиянинг турли ҳақиқий қийматларига мос (6.25) кўринишдаги, тўлиқ базисни ҳолсил қилади. Ушбу натижа коммутатив операторлар ҳақидаги теорема билан мос: $\hat{T}$ ва $\hat{I}$ операторлар коммутатив [2.12 вазифа, б) банди].

Изоҳ: $\hat{T}$ оператор учун $\hat{p}_x$ оператор билан умумий хусусий функцияларни (6.23) кўринишда танлаш мумкин. Бу функциялар $\hat{I}$ инверсия операторининг хусусий функциялари эмас. $\hat{T}$ оператор учун $\hat{I}$ оператор билан умумий хусусий функцияларни (6.25) кўринишда танлаш мумкин. Бу функциялар, ўз навбатида, $\hat{p}_x$ операторнинг хусусий функциялари эмас. Лекин бир пайтнинг ўзида учта $\hat{T}$, $\hat{p}_x$ ва $\hat{I}$ операторлар учун умумий бўлган хусусий функцияларни танлашни имкони йўқ. Бунга сабаб, $\hat{p}_x$ ва $\hat{I}$ операторлар коммутатив эмаслигидир [2.12 вазифа, а) банди].

7-мисол. $\hat{\boldsymbol{p}}$ импульс операторининг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини топинг.

Ечими. $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ вектор операторнинг хусусий функциялари сифатида $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ операторларнинг умумий хусусий функцияларини оламиз; ушбу операторлар бирбири билан коммутатив, демак, умумий хусусий функциялар тўплами мавжуд:

$$\hat{\boldsymbol{p}}\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}). \tag{6.27}$$

Декарт координаталари ажралади; ҳар бир координата учун (6.13) кўринишдаги боғланиш келиб чиқади. Шу сабаб

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = C\, e^{ip_x\cdot x/\hbar} e^{ip_y\cdot y/\hbar} e^{ip_z\cdot z/\hbar} = C\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}. \tag{6.28}$$

$\langle\psi_{\boldsymbol{p}'}|\psi_{\boldsymbol{p}}\rangle = \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$ нормировка шартидан

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{6.29}$$

хусусий функцияни топамиз.

$\hat{l}^2$ операторнинг хусусий функциялари

Иккинчи мавзунинг 4-мисолида импульс моменти квадрати оператори $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ ва $\hat{l}_z$ оператор коммутатив эканлигини кўрган эдик. Коммутатив операторлар ҳақидаги теоремага кўра уларнинг умумий хусусий функцияларини топиш мумкин. Бу функциялар сферик функциялар номи билан маълум ва $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ кўринишда белгиланади. Қуйидаги муносабатлар бажарилади:

$$\hat{\boldsymbol{l}}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi), \qquad (6.30)$$

$$\hat{l}_z Y_{lm}(\theta,\varphi) = mY_{lm}(\theta,\varphi). \qquad (6.31)$$

l индекс бутун мусбат қийматлар қабул қилади. Берилган l учун m индекс $-l,-l+1,\ldots,0,\ldots,l-1,l$, демак, $2l+1$ та қийматларга эга. Дискрет спектр учун хусусий функция сифатида, сферик функциялар ортонормаллик хоссасига эга [(6.4) га қаранг]:

$$\langle Y_{lm}|Y_{l'm'}\rangle = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin(\theta)d\theta Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \qquad (6.32)$$

Сферик функцияларнинг баъзиларини ошкор кўриниши иловада келтирилган. Сферик функциялар ($0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$) бурчаклар функциялари фазосида базисни ҳосил қилади. Шу сабаб ихтиёрий $\psi(\theta,\varphi)$ тўлқин функцияни

$$\psi(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi), \qquad (6.33)$$

$$C_{lm} = \langle Y_{lm}|\psi\rangle, \qquad (6.34)$$

кўринишдаги қаторга ёйиш мумкин [(6.5), (6.6) га қаранг]. $|Y_{lm}\rangle$ ҳолат вектори учун, келгусида, кўпинча $|lm\rangle$ белгилашни қўллаймиз.

6.2 Квант механикасининг матрицалар формализми

Дискрет спектрли операторлар учун кўп ҳолларда матрицалар ёндашувини қўллаш қулай. Бунда ҳар бир операторга, қандайдир дискрет тўлқин функциялар базисида ёзилган, матрица мос қўйилади. $\{\psi_1(q), \psi_2(q), \psi_3(q), \ldots\}$ шундай базис бўлсин. У ҳолда $\hat{F}$ операторга мос қўйилган матрицанинг элементлари $(\hat{F})_{nm}$ ёки соддароқ кўринишда F_{nm} қуйидаги формуладан топилади [(4.6) га қаранг]:

$$F_{nm} = \langle\psi_n|\hat{F}|\psi_m\rangle = \int \psi_n^*(q)\hat{F}\psi_m(q)dq. \tag{6.35}$$

Эрмит операторнинг матрицаси Эрмит бўлишини кўрсатамиз:

$$\left(\hat{F}^+\right)_{nm} = (F_{mn})^*. \tag{6.36}$$

Эрмит операторнинг (4.7) аниқланишидан

$$\begin{aligned}
\left(\hat{F}^+\right)_{nm} &= \langle\psi_n|\hat{F}^+|\psi_m\rangle = \int \psi_n^*(q)\hat{F}^+\psi_m(q)dq \\
&= \int \psi_m(q)\hat{F}^*\psi_n^*(q)dq = \int \psi_m(q)\left(\hat{F}\psi_n(q)\right)^* dq \\
&= \int \left(\psi_m^*(q)\hat{F}\psi_n(q)\right)^* dq = (F_{mn})^*.
\end{aligned}$$

Операторлар йиғиндиси ва кўпайтмасининг матрик элементлари қуйидаги формулалар ёрдамида топилади:

$$\left(\hat{F}+\hat{G}\right)_{nm} = F_{nm}+G_{nm}, \tag{6.37}$$

$$\left(\hat{F}\hat{G}\right)_{nm} = \sum_k F_{nk}G_{km}. \tag{6.38}$$

(6.38) формула чизиқли алгебрадаги матрицаларни кўпайтириш қоидасига мос келади. Ихтиёрий $\psi(q)$ тўлқин функцияни, танланган базис бўйича, $\psi(q)=\sum\limits_n C_n\psi_n(q)$ қаторга ёйиш мумкин бўлсин. Матрицалар ёндашувида $\psi(q)$ тўлқин функцияга ($|\psi\rangle$ ҳолат векторига) $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ устун мос қўйилади. Бунда $\hat{F}\psi(q)$ – бу операторга мос матрицани устунга кўпайтириш натижасида ҳосил бўладиган устун. $\psi^*(q)$ тўлқин функцияга ($\langle\psi|$ ҳолат векторига) $(C_1^*\,C_2^*\,\ldots)$ сатр мос қўйилади. Бундай аниқлашлардан сўнг, $\langle\psi|\psi\rangle$ скаляр кўпайтма матрицаларни кўпайтириш қоидасига кўра ҳисоблаб топлида

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= (C_1^*\,C_2^*\,\ldots)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = C_1^*C_1+C_2^*C_2+\cdots \\ &= \sum_n |C_n|^2 = 1.\end{aligned}$$

8-мисол. $\hat{F}$ оператор

$$\hat{F}\psi_n(q)=\lambda_n\psi_n(q)$$

дисктер спектрга эга бўлсин. Шу оператор матрицасини унинг хусусий функцияларидан қурилган базисда топинг.

Ечими. F_{nm} матрик элементни (6.35) формулага кўра топамиз:

$$F_{nm} = \langle\psi_n|\hat{F}|\psi_m\rangle = \langle\psi_n|\lambda_n|\psi_m\rangle = \lambda_n\delta_{nm}.$$

Шундай қилиб, операторга мос келувчи матрица шу операторнинг хусусий функцияларидан иборат базисда диагонал, диагонал бўйлаб операторнинг хусусий қийматлари турар экан. Шу сабабдан матрицалар формализмида операторнинг хусусий қийматларини ва хусусий функцияларини топиш масаласи шу операторга мос матрицани диагонал кўринишга келтириш масаласига келтирилади.

$\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_+$ ва $\hat{l}_-$ операторларнинг сферик функциялар базисидаги матрицалари

Сферик функциялар $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ ва $\hat{l}_z$ операторларнинг хусусий функциялари, аммо $\hat{l}_x$ ва $\hat{l}_y$ операторларники эмас. $\hat{l}_x$ ва $\hat{l}_y$ операторларнинг матрик элементларини $|Y_{lm}\rangle = |lm\rangle$ ҳолатла базисида олиш учун аввал $\hat{l}_+$ ва $\hat{l}_-$ операторларнинг матрик элементларини топиб олган маъқул [(5.12) га қаранг]. Қуйида шу операторларнинг нолдан фарқли матрик элементлари келтирилган:

$$\begin{aligned} \langle l,m+1|\hat{l}_+|lm\rangle &= \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}, \\ \langle l,m|\hat{l}_-|l,m+1\rangle &= \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}. \end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned} \langle l,m+1|\hat{l}_x|lm\rangle &= \langle lm|\hat{l}_x|l,m+1\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}, \\ \langle l,m+1|\hat{l}_y|lm\rangle &= \langle lm|\hat{l}_y|l,m+1\rangle \\ &= -\tfrac{i}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}. \end{aligned} \tag{6.40}$$

6.3 Мустақил ишлаш учун вазифалар

6.1. Қуйидаги операторларнинг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини топинг:

а) α сонига кўпайтириш; г) $\sin\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$

б) $-ie^{i\alpha x}\frac{\partial}{\partial x}$, α – доимий; д) $\cos\left(i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$, $0\le\varphi\le 2\pi$;

в) $x+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}$, a – доимий; е) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}$.

6.2. $\psi(\boldsymbol{r}) = C\frac{x-iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ функция $\hat{l}_z$ операторининг хусусий функциясими? Агар шундай бўлса, унга қандай хусусий қиймат мос келади?

6.3. $\psi(q)$ функция $\hat{A}$ операторнинг хусусий функцияси, яъни, $\hat{A}\psi(q)=\lambda\psi(q)$. Агар $\hat{B}$ оператор $\hat{A}$ билан $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$ коммутатив бўлса, $\psi(q)$ функция $\hat{B}$ операторнинг хусусий функцияси бўладими?

6.4. $\psi(q)$ функция $\hat{A}$ операторнинг хусусий функцияси, яъни, $\hat{A}\psi(q)=\lambda\psi(q)$. $\hat{B}$ оператор $\hat{A}$ билан $\left[\hat{A},\hat{B}\right]\neq 0$ коммутатив эмас. $\psi(q)$ функция $\hat{B}$ операторнинг хусусий функцияси бўладими?

6.5. Зарра уч ўлчовли фазода ҳаракатланмоқда. $\hat{p}_z$ ва $\hat{l}_z$ операторлар учун умумий хусусий функцияларни топинг.

6.6. $\hat{F}$ оператор $\{\psi_1(q), \psi_2(q)\}$ ортонормал базисда $\begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ матрицага эга. Ушбу $\hat{F}$ операторнинг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини топинг.

6.7. $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$ ва $\hat{l}_z$ операторларнинг матрицаларини

а) $l = 1$ бўлганда сферик функциялар;

б) $l = 2$ бўлганда сферик функциялар

базисида топинг.

6.8. $\langle lm|\hat{l}_x|lm\rangle$, $\langle lm|\hat{l}_y|lm\rangle$, $\langle lm|\hat{l}_z|lm\rangle$, $\langle lm|\hat{l}_x^2|lm\rangle$, $\langle lm|\hat{l}_y^2|lm\rangle$, $\langle lm|\hat{l}_z^2|lm\rangle$ диагонал матрик элементларни топинг.

6.9. $\hat{F}$ оператор чекли сондаги $F_1, F_2, \ldots, F_n$ хусусий қийматларга эга бўлсин. Бу ҳолда қуйидаги тенглик бажарилишини кўрсатинг:

$$\left(\hat{F} - F_1\right) \cdot \left(\hat{F} - F_2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\hat{F} - F_n\right) = 0.$$

6.10. $\psi_{\lambda\mu}(q)$ – бу $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторларнинг умумий хусусий функцияси, бунда λ – $\hat{A}$ операторнинг, μ – $\hat{B}$ операторнинг хусусий қиймати. $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар антикоммутатив бўлсин: $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0$. Бу ҳолда λ ва μ лар ҳақида нима дейиш мумкин? Мисол сифатида $\hat{p}_x$ ва $\hat{I}$ инверсия операторини қаранг.

6.11. $\hat{A}$, $\hat{B}$ ва $\hat{C}$ операторлар Эрмит ва қуйидаги муносабатларни қаноатлантиради:

$$\left[\hat{A},\hat{C}\right]=0,\ \left[\hat{B},\hat{C}\right]=0,\ \left[\hat{A},\hat{B}\right]\neq 0.$$

Бу ҳолда $\hat{C}$ операторнинг хусусий қийматлари орасида айниганлари мавжудлигини кўрсатинг.

6.12. $\frac{d}{dx}-x$ операторнинг хусусий функцияларини топинг.

7- мавзу

Квант механикасида ўлчаш жараёни

Агар микрообъект ҳолатини ифодалайдиган $\psi(q)$ тўлқин функция $\hat{F}$ Эрмит операторнинг хусусий функцияси бўлса, шу микрообъектни тавсифловчи F физикавий катталик қийматини экспериментда ўлчаганда $\hat{F}$ операторнинг, хусусий функциясига мос, хусусий қиймати олинади; бу ҳолатда, ўлчанаётган F катталик аниқ маълум қийматга эга бўлади, дейиш мумкин. Агар микрообъект ҳолатини ифодалаётган $\psi(q)$ тўлқин функция $\hat{F}$ операторнинг хусусий функцияси бўлмаса, ўша ҳолатда қиймати ўлчанаётган F физикавий катталик учун олинадиган натижани олдиндан, бир қийматли, аниқ айтиб беришнинг имкони йўқ; бу ноаниқлик – микродунёнинг фундаментал хусусиятидир. Бу ҳолда F катталикнинг қийматини экспериментда ўлчаганда олинадиган турли натижалар эҳтимолликларини ҳисоблаб топиш мумкин холос. Узлуксиз спектрга эга бўлган физикавий катталикнинг қийматини ўлчашда эҳтимолликлар зичлиги ҳақида сўз боради. Ушбу эҳтимолликлар, квант механикасида физикавий тизимни тавсифловчи, физикавий катталикнинг қийматини ўлчаш натижалари ҳақида мумкин бўлган энг батафсил маълумотни беради.

7.1 Ўртача қийматларни ҳисоблаш

Унчалик батафсилмас маълумотни берадиган амал – бу F катталикнинг қиймати учун жуда кўп сондаги (ўлчашлар сони чексиз кўп бўлган лимитда) алоҳида ўлчашларда олинадиган натижалар учун ўртача арифметик қийматни ҳисоблашдир. Бунда квант механикаси қонунларига кўра ўрганилаётган физикавий тизим ҳолати, турли ўлчашларнинг ҳар бири учун айнан бир хил $\psi(q)$ ҳолат, деб фараз қилинади. Бундай катталик $\langle F\rangle_\psi$ кўринишда белгиланади ва “F физикавий катталикнинг $\psi(q)$ ҳолатдаги ўртача қиймати” деб аталади. У қуйидаги формулага кўра ҳисоблаб топилади:

$$\langle F\rangle_\psi = \int \psi^*(q)\hat{F}\psi(q)dq = \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle. \tag{7.1}$$

(7.1) формуланинг ўнг тарфида $\hat{F}$ операторнинг $\psi(q)$ функциядаги диагонал матрик элементи турганлигини пайқаш мумкин [(4.6) га қаранг]. Шундай қилиб, Эрмит оператор диагонал матрик элементларининг физикавий моҳияти шу оператор мос қўйилган физикавий катталикнинг, қаралаётган ҳолатга мос, ўртача қийматини англатар экан.

Агар $\psi(q)$ тўлқин функция $\hat{F}$ операторнинг хусусий функцияси, яъни, $\hat{F}\psi(q) = \lambda\psi(q)$ бўлса, у ҳолда ўртача қиймат $\langle F\rangle_\psi = \lambda$ бўлиши тушунарли; ва ихтиёрий n натурал сон учун $\langle F^n\rangle_\psi = \lambda^n$ ўринли. Бундан дисперция $\langle(F - \langle F\rangle_\psi)^2\rangle = \langle F^2\rangle - \langle F\rangle_\psi^2 = 0$, шундай бўлиши ҳам керак, чунки берилган $\psi(q)$ ҳолатда ўлчаш бажарилса, F физикавий катталик учун аниқ λ қиймат олинади.

1-мисол. x координата ва p_x импульс проекцияси ўртача қийматини

$$\psi(x) = A\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx}$$

тўлқин функция билан ифодаланаётган холат учун ҳисоблаб топинг. Бу ерда a, k – ҳақиқий турдаги доимийлар, A – нормировка кўпайтувчиси.

Ечими. $\langle x\rangle$ ва $\langle p_x\rangle$ ўртача қийматларни топиш учун (7.1) формулани қўллаймиз.

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,\hat{x}\,\psi(x)dx \\
&= |A|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}-ikx} e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx} x dx \\
&= |A|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} x dx = |A|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} d\left(\frac{x^2}{a^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle p_x\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,\hat{p}_x\,\psi(x)dx \\
&= |A|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}-ikx} \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right) e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx} dx \\
&= \hbar k |A|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx + \frac{i\hbar}{a^2}|A|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} x dx
\end{aligned}$$

$$= \hbar k|A|^2 a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \hbar k.$$

Бу ерда қуйидаги муносабатлар ҳисобга олинди:

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx} &= \frac{\hbar}{i}\left(-\frac{x}{a^2}+ik\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx} \\ &= \left(\hbar k - \frac{\hbar x}{ia^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx}\end{aligned}$$

$$|A|^2 a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1.$$

Охирги тенглик тўлқин функциянинг нормировкаси бирга тенглиги оқибатидир. Ундан нормировка кўпайтувчисини ҳам аниқлаб қўямиз: $A = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}$. Бунда Пуассон-Эйлер (хатолик) интеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}$$

эканлигини назарда тутдик.

2-мисол. $|\psi\rangle$ ҳолат вектори матрицалар ёндашуви миқёсида берилган:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Агар $\hat{F}$ операторга, ушбу ёндашувда

$$\begin{pmatrix} 5 & 1-2i \\ 1+2i & -4 \end{pmatrix}$$

матрица мос қўйилган бўлса, қийматини экспериментда ўлчаса бўладиган F физикавий катталикни шу ҳолатдаги ўртача қийматини ҳисоблаб топинг.

Ечими. (7.1) диагонал матрик элементни матрицаларни кўпайтириш қоидасига кўра ҳисоблаб топамиз:

$$\begin{aligned} \langle F\rangle &= \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1-2i \\ 1+2i & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{4+2i}{2} - \frac{5+2i}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Гейзенбергнинг ноаниқлик муносабати

Қийматларини бир пайтда ўлчаб бўлмайдиган A ва B физикавий катталикларни қарайлик. Бу ҳолда уларга мос $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар коммутатив эмас ва бунда $\hat{C} = -i\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ оператор киритиш мумкин ($\hat{C}$ Эрмит эканлигини осон текширса бўлади). Ихтиёрий $\psi(q)$ ҳолат учун қуйидаги муносабат бажарилишини кўрсатиш мумкин:

$$\left(\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2\right)\left(\langle B^2\rangle_\psi - \langle B\rangle_\psi^2\right) \geq \frac{\langle C\rangle_\psi^2}{4}. \tag{7.2}$$

(7.2) тенгсизлик Гейзенбергнинг ноаниқлик муносабати деб аталади. Қийматларини эксперментда ўлчаса бўладиган

x ва p_x катталиклар учун у, ихтиёрий $\psi(\boldsymbol{r})$ ҳолатда

$$\left(\langle x^2\rangle_\psi - \langle x\rangle_\psi^2\right)\left(\langle p_x^2\rangle_\psi - \langle p_x\rangle_\psi^2\right) \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{7.3}$$

кўринишни олади. Бунда $[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$ эканлигини ҳисобга олдик. (7.3) муносабатдан, x ва p_x қийматлари, ҳеч қандай ҳолатда, бир пайтнинг ўзида аниқ қийматларга эга бўла олмаслиги келиб чиқади.

7.2 Ўлчаш натижалари эҳтимолликларини ҳисоблаш

Дискрет спектр

F физикавий катталикка мос $\hat{F}$ оператор дискрет спектрга эга бўлганда,

$$\hat{F}\psi_n(q) = F_n\psi_n(q) \tag{7.4}$$

ўлчашда олинадиган турли натижаларнинг эҳтимолликларини ҳисоблаш масаласини қараймиз. Бунда n – бутун сон. Физикавий тизим $\psi(q)$ тўлқин функция билан ифодаланадиган ҳолатда жойлашган бўлсин. Уни $\hat{F}$ операторнинг хусусий функцияларидан иборат базис бўйича ёйиш мумкин [(6.5) га қаранг]:

$$\psi(q) = \sum_n C_n\psi_n(q), \quad C_n = \langle\psi_n|\psi\rangle. \tag{7.5}$$

F_n – айнимаган хусусий қиймат бўлсин. У ҳолда F қийматини ўлчаганда F_n қийматни олиш эҳтимоллиги қуйидагига тенг:

$$P_\psi(F = F_n) = |C_n|^2 = |\langle\psi|\psi\rangle|^2. \tag{7.6}$$

Энди F_n – айниган хусусий қиймат бўлсин ва унга $\psi_{n1}(q), \psi_{n2}(q), \psi_{n3}(q), \ldots$ хусусий функциялар мос келсин. Ушбу хусусий функциялар, $\hat{F}$ операторнинг F_n хусусий қийматли, L_{F_n} чизиқли қисм фазодаги базисни ташкил этади: $\hat{F}\psi_{ni} = F_n\psi_{ni}(q)$. Бу ҳолда F физикавий катталикни ўлчаганда F_n қийматни олиш эҳтимоллиги қуйидагига тенг:

$$\begin{aligned} P_\psi(F = F_n) &= |C_{n1}|^2 + |C_{n2}|^2 + |C_{n3}|^2 + \cdots \qquad (7.7) \\ &= |\langle\psi_{n1}|\psi\rangle|^2 + |\langle\psi_{n2}|\psi\rangle|^2 + |\langle\psi_{n3}|\psi\rangle|^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Агар барча F_n қийматлар учун эҳтимолликлар маълум бўлса, $\langle F\rangle_\psi$ ўртача қийматни (7.1) формулага кўра эмас, ушбу эҳтимолликлар орқали

$$\langle F\rangle_\psi = \sum_{F_n} F_n \cdot P_\psi(F = F_n) \qquad (7.8)$$

кўринишда, осон ҳисоблаб топиш мумкин.

3-мисол. Ясси ротатор ҳолати $\psi(\varphi) = A\cos(\varphi)$ тўлқин функция билан ифодаланади, бунда A – нормировка кўпайтувчиси. Барча бутун m лар учун $P_\psi(l_z = m)$ эҳтимолликларни топинг. $\langle l_z\rangle_\psi$ ва $\langle l_z^2\rangle_\psi$ ўртача қийматларни топинг.

Ечими. (7.4) кўринишдаги тенгламани, $\hat{l}_z$ операторнинг хусусий қиймати ва хусусий функцияси учун, 3-мавзунинг 3-мисолида ечган эдик:

$$\hat{l}_z\psi_m(\varphi) = m\psi_m(\varphi), \quad \psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Мисол шартида берилган тўлқин функцияни $\psi_m(\varphi)$ функциялардан ташкил топган базис бўйича қаторга ёйиш лозим [(7.5) га қаранг]:

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi) &= \sum_m C_m \psi_m(\varphi) \Rightarrow A\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_m C_m e^{im\varphi}, \\
C_m &= \langle \psi_m | \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \psi_m^*(\varphi)\psi(\varphi)d\varphi = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}\cos(\varphi)d\varphi,
\end{aligned}$$

бунда интегрални барча бутун m қийматлар учун ҳисоблаш керак. Аммо, ушбу мисолда C_m коэффициентларни дарров аниқлаш мумкин – бунда $\psi(\varphi) = A\cos(\varphi)$ функцияни бевосита $\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$ экспоненталарнинг чизиқли комбинициясига ёйсак бўлади. Бунинг учун Эйлер формуласидан фойдаланамиз:

$$\psi(\varphi) = A\cos(\varphi) = \frac{A}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\left[\psi_1(\varphi) + \psi_{-1}(\varphi)\right].$$

Шундай қилиб,

$$C_1 = C_{-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A, \quad \text{агар } m \neq \pm 1 \text{ бўлса, } C_m = 0.$$

Ва ниҳоят, l_z импульс моментини ўлчаш натижалари эҳтимоллигини (7.6) формулага кўра топамиз:

$$\begin{aligned}
P_\psi(l_z = 1) = |C_1|^2 &= \frac{\pi}{2}|A|^2, \\
P_\psi(l_z = -1) = |C_{-1}|^2 &= \frac{\pi}{2}|A|^2, \\
P_\psi(l_z = m, m \neq \pm 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Жавобни сон қийматини олиш учун A коээфициентни ротатор тўлқин функциясининг

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int\limits_0^{2\pi} \psi^*(\varphi)\psi(\varphi)d\varphi = |A|^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)d\varphi = 1$$

нормировкасидан топиб, эҳтимолликлар учун аниқланган ифодаларда қўллаш мумкин эди. Аммо, ўлчанаётган катталик қийматлари учун турли натижалар эҳтимолликларини нормировка шартидан фойдаланиш осонроқ: мумкин бўлган барча натижалар эҳтимолликлари йиғиндиси бирга тенг. Бизнинг ҳолда, $P_\psi(l_z = m, m \neq \pm 1) = 0$ эканлигидан $P_\psi(l_z = 1) + P_\psi(l_z = -1) = 1$. Ҳисоблаб топилган эҳтимолликлар учун $P_\psi(l_z = 1) = P_\psi(l_z = -1)$ тенглик бажарилганлигидан, $P_\psi(l_z = 1) = \frac{1}{2}$ ва $P_\psi(l_z = -1) = \frac{1}{2}$. Демак,

$$P_\psi(l_z = 1) = \frac{1}{2}, \quad P_\psi(l_z = -1) = \frac{1}{2}, \quad P_\psi(l_z = m, m \neq \pm 1) = 0$$

экан. Энди (7.8) формуладан $\langle l_z\rangle_\psi$ ўртача қийматни ҳисоблаб топамиз:

$$\langle l_z\rangle_\psi = \sum_m m \cdot P_\psi(l_z = m) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Ўхшаш амаллар ёрдамида l_z^2 каттилик учун $\langle l_z^2\rangle_\psi$ ўртача қийматни топиш мумкин. Умумий ҳолда

$$\langle l_z^2\rangle_\psi = \sum_K K \cdot P_\psi(l_z^2 = K),$$

бу ерда $K = 0, 1, 4, 9, \ldots$ бутун сонлар квадрати. Биз қараган мисолда

$$\langle l_z^2\rangle_\psi = 1 \cdot P_\psi(l_z^2 = 1) = 1.$$

Яна дискрет спектрли $\hat{F}$ операторни қарайлик: $\hat{F}\psi_n(q) = F_n\psi_n(q)$. Лекин энди физикавий тизим ҳолати q ўзгарувчидан ташқари яна η ўзгарувчига ҳам боғлиқ бўлган $\psi(q,\eta)$ тўлқин функция билан ифодалансин. Бу ҳолда η ўзгарувчининг ҳар бир қиймати учун $\psi(q,\eta)$ функцияни $\psi_n(q)$ базис функциялар бўйича қаторга ёйиш мумкин; ёйилма коэффициентлари энди η ўзгарувчининг функцияси бўлиши тушунарли:

$$\psi(q,\eta) = \sum_n \chi_n(\eta)\psi_n(q). \tag{7.9}$$

F_n – бу $\hat{F}$ операторнинг айнимаган хусусий қиймати бўлсин. У ҳолда F катталикни ўлчаганда F_n қийматни олиш эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P_\psi(F = F_n) = \int |\chi_n(\eta)|^2 d\eta. \tag{7.10}$$

(7.10) формулани айниган хусусий қийматлар учун умумлаштириш оғир масала эмас, у худди (7.7) га ўхшаш бўлади.

4-мисол. Зарра $\psi(\boldsymbol{r}) = A\frac{yz}{r^2}$ тўлқин функция билан ифодаланаётган ҳолатда жойлашган, бунда A – нормировка кўпайтувчиси. Шу ҳолат учун $P_\psi(l_z = m)$ эҳтимолликни барча бутун m сонлар учун топинг.

Ечими. Орбитал моментнинг l_z компонентаси ҳақида сўз борганлигидан, фазода айланиш назарда тутиляпти ва шу сабаб сферик координаталарда ишлаганимиз муъқул. Бунда $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $z = r\cos(\theta)$ эканлигидан тўлқин функция $\psi(\theta,\varphi) = A\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)$ кўриниш олади. Қўйилган муммони ҳал этишда (7.9) формулани қўллаш лозим, бу ҳолда ξ ўзгарувчи ўрнида φ ни, η ўрнида θ ни фараз қиламиз. Биз (7.9) кўринишга ўхшаш

$$\psi(\theta,\varphi) = A\,\sin(\theta)\cos(\theta)\sin\varphi = \sum_m \chi_m(\theta)\psi_m(\varphi)$$

ёйилмани топишимиз керак. Бу ерда

$$\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Эйлер формуласидан

$$\begin{aligned}\psi(\theta,\varphi) &= \frac{A}{2i}\sin(\theta)\cos(\theta)\left[e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right]\\ &= \frac{A}{2i}\sin(\theta)\cos(\theta)\sqrt{2\pi}\left[\psi_1(\varphi) - \psi_{-1}(\varphi)\right].\end{aligned}$$

Шундай қилиб, нолдан фарқли иккита

$$\begin{aligned}\chi_1(\theta) &= \frac{\sqrt{2\pi}A}{2i}\sin(\theta)\cos(\theta),\\ \chi_{-1}(\theta) &= -\frac{\sqrt{2\pi}A}{2i}\sin(\theta)\cos(\theta)\end{aligned}$$

функцияларни топдик. Энди (7.10) формулага кўра импульс моментининг l_z проекциясини ўлчаш натижалари эҳтимоллигини ёзамиз:

$$\begin{aligned}
P_\psi(l_z = 1) &= \int\limits_0^\pi |\chi_1(\theta)|^2 \sin(\theta) d\theta, \\
P_\psi(l_z = -1) &= \int\limits_0^\pi |\chi_{-1}(\theta)|^2 \sin(\theta) d\theta, \\
P_\psi(l_z = m) &= 0, \quad m \neq \pm 1.
\end{aligned}$$

Булардан, $P_\psi(l_z = 1) = P_\psi(l_z = -1)$ эканлигини кўриш мумкин. Эҳтимолликлар $P_\psi(l_z = 1) + P_\psi(l_z = -1) = 1$ бўлганлигидан

$$P_\psi(l_z = 1) = \frac{1}{2}, \quad P_\psi(l_z = -1) = \frac{1}{2}$$

натижага келамиз.

Энди бир пайтда ўлчаш мумкин бўлган иккита A ва B катталикларни қарайлик. Бу ҳолда уларга мос $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар учун умумий $\psi_{nk}(q)$ хусусий функцияларнинг тўлиқ тизими мавжуд ($n, k \in \mathbb{Z}$):

$$\hat{A}\,\psi_{nk}(q) = A_{nk}\psi_{nk}(q), \quad \hat{B}\,\psi_{nk}(q) = B_{nk}\psi_{nk}(q). \tag{7.11}$$

Ҳозир хусусий қийматларнинг (A_{nk}, B_{nk}) жуфтлигига бир дона $\psi_{nk}(q)$ мос келади деб фараз қилмаиз (лекин алоҳида қаралганда A_{nk} ва B_{nk} хусусий қийматлар айниган бўлиши мумкин). Ўрганилаётган микрообъект ҳолати $\psi(q)$ тўлқин функция билан аниқланган бўлсин. Уни $\psi_{nk}(q)$ функциялардан қурилган базис орқали ёйиш мумкин:

$$\psi(q) = \sum_{n,k} C_{nk}\psi_{nk}(q), \quad C_{nk} = \langle \psi_{nk} | \psi \rangle. \tag{7.12}$$

A ва B қийматлари бир пайтда ўлчаниши мумкинлигидан, қўшалоқ ходиса содир бўлиши эҳтимоллиги ҳақида гапириш мумкин: A ўлчанганда A_{nk} қиймат, B ўлчанганда B_{nk} қиймат олинади. Ушбу эҳтимоллик

$$P_\psi(A = A_{nk}, B = B_{nk}) = |C_{nk}|^2 \tag{7.13}$$

кўринишда аниқланади.

5-мисол. Зарра $\psi(\theta, \varphi) = A\left[\cos(\theta) + 2\sin(\theta)\cos(\varphi)\right]$ тўлқин функция билан аниқланаётган ҳолатда жойлашган. Мумкин бўлган барча l ва m индекслар учун $P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = l(l+1),\, l_z = m)$ эҳтимолликларни топинг.

Ечими. $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ ва $\hat{l}_z$ операторларнинг умумий хусусий фукнциялари – бу $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ сферик функциялардир. Бу ерда индекслар $l = 0, 1, 2, \ldots$ ва $m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$ қийматлар қабул қилади. (7.11) муносабатлар энди (6.30) ва (6.31) кўринишга эга бўлади. Ихтиёрий $\psi(\theta, \varphi)$ тўлқин функцияни сферик функциялар орқали

$$\psi(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad C_{lm} = \langle Y_{lm} | \psi \rangle$$

ёйиш мумкин. У ҳолда (7.13) формулага кўра

$$P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = l(l+1),\, l_z = m) = |C_{lm}|^2.$$

Шундай қилиб, масала ечими $\psi(\theta, \varphi) = A\left[\cos(\theta) + 2\sin(\theta)\cos(\varphi)\right]$ тўлқин функцияни сферик функциялар бўйича қаторга ёйгандаги C_{lm} коэффициентларни топишда туради. Бу мақсадда, сферик фунцияларнинг иловада келтирилган ошкор кўринишидан фойдаланамиз. Эйлер формуласи орқали $\cos(\varphi)$ функцияни ёямиз ва қисқалик учун сферик функциялар аргументларини ёзмаймиз:

$$\begin{aligned}\psi(\theta,\varphi) &= A\left[\cos(\theta)+2\sin(\theta)\cos(\varphi)\right]\\ &= A\left(-i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}+i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{11}-i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1-1}\right).\end{aligned}$$

Демак, фақат

$$C_{10}=-Ai\sqrt{\frac{4\pi}{3}},\quad C_{11}=Ai\sqrt{\frac{8\pi}{3}},\quad C_{1-1}=-Ai\sqrt{\frac{8\pi}{3}}$$

коэффицентларгина нолдан фарқли экан. Қўшалоқ ходисларнинг уларга мос эҳтимолликлари

$$\begin{aligned}P_\psi(\boldsymbol{l}^2=2,\, l_z=0) &= \left|-Ai\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\right|^2,\\ P_\psi(\boldsymbol{l}^2=2,\, l_z=1) &= \left|Ai\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right|^2,\\ P_\psi(\boldsymbol{l}^2=2,\, l_z=-1) &= \left|-Ai\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right|^2\end{aligned}$$

бўлади. Эҳтимолликлар йиғиндиси 1 бўлиши зарурлигидан фойдаланамиз. Бунда $P_\psi(\boldsymbol{l}^2=2,\, l_z=0)=\gamma$ белгилаш киритсак, $P_\psi(\boldsymbol{l}^2=2,\, l_z=1)=2\gamma$ ва $P_\psi(\boldsymbol{l}^2=2,\, l_z=-1)=2\gamma$ эканлигини кўришимиз мумкин. Эҳтимоллик нормировакаси $\gamma + 2\gamma + 2\gamma = 1$ бўлганлигидан,

$$\begin{aligned} P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = 2,\, l_z = 0) &= \frac{1}{5}, \\ P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = 2,\, l_z = 1) &= \frac{2}{5}, \\ P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = 2,\, l_z = -1) &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

натижаларни оламиз; (lm) индекслар жуфтлигининг бошқа қийматлари учун эҳтимолликлар нолга тенг.

Изоҳ. Қўшалоқ ходисаларнинг $P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = l(l+1),\, l_z = m)$ эҳтимоллиги маълум бўлса, $\boldsymbol{l}^2$ ва l_z катталиклар учун ўлчаш натижалари эҳтимолликларини алоҳида топиш мумкин. Эҳтимолликларни қўшиш қоидасига мос равишда қуйидагиларни ёзамиз:

$$\begin{aligned} P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = l(l+1)) &= \sum_{m=-l}^{l} P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = l(l+1),\, l_z = m), \\ P_\psi(l_z = m) &= \sum_{l=|m|}^{\infty} P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = l(l+1),\, l_z = m). \end{aligned}$$

Охирги ифодада l индекснинг m индекс билан жуфтлигида мумкин бўлган энг кичик қиймати $|m|$ га тенг.

Узлуксиз спектрли катталик учун эҳтимоллик зичлиги

Спектри узлуксиз бўлган $\hat{F}$ оператор мос қўйилган F катталикни қарайлик:

$$\hat{F}\psi_F(q) = F\psi_F(q). \tag{7.14}$$

Хусусий қиймат ва хусусий функцияни белгиловчи индекс сифатида хусусий қиймат белгисини ишлатдик.

Микрообъект ҳолати $\psi(q)$ тўлқин функция билан аниқланаётган бўлсин. Уни $\hat{F}$ Эрмит операторнинг хусусий функцияларидан ташкил топган базис бўйича ёйиш мумкин:

$$\psi(q) = \int C(F)\psi_F(q)dF, \quad C(F) = \langle \psi_F | \psi \rangle. \tag{7.15}$$

(7.15) интеграл – аниқ интеграл эканлигини таъкидлаймиз. Интеграллаш ўзгарувчиси маълум ораликда ўзгаради.

F – айнимаган хусусий қиймат бўлсин. Ўлчашда бирор аниқ F қийматни олиш эҳтимоллиги нолга тенг. Катталикни қийматини ўлчагандан унинг ўта кичик $(F, F + dF)$ оралиқда ётувчи қийматини олиш учун кичик дифференциал эҳтимоллик

$$dP_\psi(F, F + dF) = |C(F)|^2 dF, \tag{7.16}$$

кўринишда аниқланади. Бунда

$$\rho_\psi(F) = \frac{dP_\psi(F, F + dF)}{dF}$$

катталик ўлчаш бажарилганда F қиймат олишнинг эҳтимоллиги зичлиги дейилади. (7.16) дан

$$\rho_\psi(F) = |C(F)|^2 \tag{7.17}$$

экан. Ўлчаганда (F_1, F_2) оралиқдаги қийматни олиш эҳтимоллиги қуйидагига тенг:

$$P_\psi(F_1, F_2) = \int_{F_1}^{F_2} dP_\psi(F, F + dF) = \int_{F_1}^{F_2} \rho_\psi(F)dF. \tag{7.18}$$

6-мисол. Зарра $\psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ тўлқин функция билан аниқланаётган ҳолатда жойлашган. Бу ерда a – ҳақиқий турдаги доимий, A – нормировка кўпайтувчиси. Барча p ҳақиқий сонлар учун $\rho_\psi(p_x = p)$ эҳтимоллик зичлигини ва импульснинг p_x проекцияси ўлчанганда мусбат қиймат олинадиган $P_\psi(p_x > 0)$ эҳтимолликни топинг.

Ечими. $\hat{p}_x$ оператор учун хусусий қиймат ва хусусий функция тенгламаси $\hat{p}_x\psi_p(x) = p\psi_p(x)$ аввалги машғулотларда ечилган эди, унда

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot x}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Энди берилган $\psi(x)$ функцияни $\psi_p(x)$ функциялар базиси бўйича ёйиш керак:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(p)\psi_p(x)dp, \quad C(p) = \langle\psi_p|\psi\rangle = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_p^*(x)\psi(x)dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx.\end{aligned}$$

Охирги интегрални

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}d\eta = \sqrt{\pi}$$

Пуассон-Эйлер интегралидан фойдаланиб ҳисоблаймиз. Бу мақсадда экспонента даражасини тўлиқ квадратга келтирамиз:

$$\frac{1}{2a^2}x^2 + \frac{ip}{\hbar}x = (\alpha \cdot x + \beta)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2$$

Ушбу тенглик бажарилиши учун

$$\alpha^2 = \frac{1}{2a^2}, \quad 2\alpha\beta = \frac{ip}{\hbar}$$

бўлиши керак. Булардан $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}a}$, $\beta = \frac{iap}{\sqrt{2}\hbar}$ эканлигини топамиз. Демак

$$\frac{x^2}{2a^2} + \frac{i}{\hbar}p \cdot x = \left(\frac{x}{\sqrt{2}a} + \frac{i}{\sqrt{2}\hbar}ap\right)^2 - \left(\frac{iap}{\sqrt{2}\hbar}\right)^2$$

экан. Булардан

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{i}{\hbar}p \cdot x} dx = e^{-\frac{p^2a^2}{2\hbar^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}a} + \frac{i}{\sqrt{2}\hbar}ap\right)^2} dx.$$

Ушбу интегралда $\eta = \frac{x}{\sqrt{2}a} + \frac{i}{\sqrt{2}\hbar}ap$ алмаштириш бажарсак, $dx = \sqrt{2}ad\eta$ ва

$$\sqrt{2}a\, e^{-\frac{p^2a^2}{2\hbar^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = a\sqrt{2\pi} e^{-\frac{p^2a^2}{2\hbar^2}}.$$

Шундай қилиб,

$$C(p) = \frac{aA}{\sqrt{\hbar}} e^{-\frac{p^2a^2}{2\hbar^2}}$$

натижани оламиз. Қидирилаётган $\rho_\psi(p_x = p)$ эҳтимоллик зичлиги, (7.17) формулага кўра қуйидагига тенг:

$$\rho_\psi(p_x = p) = |C(p)|^2 = |A|^2 \frac{a^2}{\hbar} e^{-\frac{a^2p^2}{\hbar^2}}.$$

Нормировка кўпайтувчисини

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = |A|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = 1$$

шартдан аниқлаймиз. Бундан

$$|A|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = |A^2| a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = |A|^2 a\sqrt{\pi} = 1.$$

Демак, $|A|^2 = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}$ ва

$$\rho_\psi(p_x = p) = \frac{a}{\hbar\sqrt{\pi}} e^{-\frac{a^2p^2}{\hbar^2}}$$

бўлар экан.

Ва ниҳоят, мусбат p_x импульс проекциясининг эҳтимоллигини топамиз:

$$P_\psi(p_x > 0) = \int\limits_{0}^{+\infty} \rho_\psi(p_x = p) dp = \frac{a}{\hbar\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{a^2p^2}{\hbar^2}} dp.$$

Бу ерда $\eta = \frac{ap}{\hbar}$ алмаштириш бажариб, $dp = \frac{\hbar}{a} d\eta$ эканлигидан

$$\frac{a}{\hbar\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{a^2p^2}{\hbar^2}} dp = \frac{a}{\hbar\sqrt{\pi}} \frac{\hbar}{a} \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{2}.$$

Натижа

$$P_\psi(p_x > 0) = \frac{1}{2}$$

экан.

Эҳтимоллик оқими зичлиги

Массаси m бўлган зарра $\psi(\boldsymbol{r})$ тўлқин функция билан ифодаланаётган ҳолатда жойлашган бўлсин. Эҳтимоллик оқими зичлиги (ёки оқим зичлиги) – бу вектор катталик бўлиб, у қуйидагича аниқланади:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi(\boldsymbol{r}) \cdot \operatorname{grad}\psi^*(\boldsymbol{r}) - \psi^*(\boldsymbol{r}) \cdot \operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r})\right]. \qquad (7.19)$$

Ушбу вектордан берк сирт бўйича олинган интеграл – бу бирлик вақт мобайнида зарра шу сирт орқали ўтганлигининг эҳтимоллиги маъносига эга. Агар оқим зичлиги ва тўлқин функцияни вақтнинг функцияси сифатида қарасак, у ҳолда

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 + \operatorname{div}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad (7.20)$$

муносабат ўринли. У электродинамикадаги заряднинг сақланиш қонунини англатувчи узлуксизлик тенгламаси аналогидир. Агар q – зарранинг заряди бўлса, $q \cdot |\psi(\boldsymbol{r},t)|^2$ катталикни заряд зичлиги деб, $q \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ катталикни эса – ток зичлиги деб талқин этиш мумкин.

7-мисол. Зарра ҳолатини ифолаловчи тўлқин функцияда модул ва комплекс фазани ажратиб олиш мумкин: $\psi(\boldsymbol{r}) = |\psi(\boldsymbol{r})|e^{i\alpha(\boldsymbol{r})}$. Эҳтимоллик оқими зичлигини $|\psi(\boldsymbol{r})|$ ва $\alpha(\boldsymbol{r})$ орқали ифодаланг.

Ечими. (7.19) формулага кўра

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) &= \frac{i\hbar}{2m}\left[|\psi(\boldsymbol{r})|e^{i\alpha(\boldsymbol{r})}\cdot \mathrm{grad}\left(|\psi(\boldsymbol{r})|e^{-i\alpha(\boldsymbol{r})}\right) - \right. \\ &\left. -|\psi(\boldsymbol{r})|e^{-i\alpha(\boldsymbol{r})}\cdot \mathrm{grad}\left(|\psi(\boldsymbol{r})|e^{i\alpha(\boldsymbol{r})}\right)\right] \\ &= \frac{\hbar}{m}|\psi(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{grad}\,\alpha(\boldsymbol{r}). \end{aligned}$$

Бундан, агар тўлқин функциянинг комплекс фазаси декарт координатасига боғлиқ бўлмаса, шу координатага мос оқим зичлиги нолга тенг эканлигини пайқаш мумкин.

8-мисол. Зарра импульснинг маълум $\boldsymbol{p}$ қиймати билан аниқланган ҳолатда жойлашган бўлсин. Эҳтимоллик оқими зичлигини топинг.

Ечими. Бундай ҳолат учун тўлқин функция (6.28) ифода билан аниқланган кўринишга эга:

$$\psi_p(\boldsymbol{r}) = C\,e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

Нормировка кўпайтувчиси учун аниқ қийматни кўрсатмаймиз; 3-мавзуда таъкидланганидек, узлуксиз спектрли операторнинг хусусий функциялари нормировкаси бир қийматли аниқланмаган. 7-мисол натижасидан фойдаланамиз:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{m}|\psi_p(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{grad}\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar}\right) = |\mathrm{C}|^2\frac{\boldsymbol{p}}{m}. \qquad (7.21)$$

Агар бир ўлчамли масала қаралаётган бўлса, зарра ҳолати импульс p_x проекциясининг маълум p қиймати билан аниқланган $\psi_p(x) = C\,e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot x}$ тўлқин функция билан ифодаланади ва оқим зичлиги фақат x ўқи бўйича компонентагагина эга бўлади:

$$j_x(x) = |C|^2\frac{p}{m}. \tag{7.22}$$

7.3 Мустақил ишлаш учун вазифалар

7.1. (7.3) ноаниқлик муносабатини

$$\psi(x) = A\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx}$$

тўлқин функция учун бажарилишини текширинг.

7.2. $\psi(x)$ тўлқин функция билан аниқланаётган ҳолатда x координатанинг ва p_x импульс проекциясининг ўртача қийматлари мос равишда x_0 ва p_0 бўлсин. $\psi(x+x_0)e^{-\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x}$ тўлқин функция билан аниқланаётган ҳолатда x ва p_x катталикларнинг ўртача қийматини топинг.

7.3. $\hat{F}$ – Эрмит оператор бўлсин. Ихтиёрий $\psi(q)$ ҳолат учун $\langle F^2\rangle$ ўртача қиймат манфий бўлмаслигини кўрсатинг.

7.4. Уч ўлчамли фазода зарра l_z импульс моменти проекцияси қиймати аниқ m бўлган ҳолатда жойлашган бўлсин. Бу ҳолда зарра тўлқин функцияси сферик координаталар тизимида қуйидаги кўринишга эга:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = f(r,\theta)e^{im\varphi}.$$

$\langle l_x\rangle_\psi$, $\langle l_y\rangle_\psi$, $\langle l_z\rangle_\psi$ ўртача қийматларни топинг.

7.5. Ясси ротатор тўлқин функцияси

$$\psi(\varphi) = A\,\cos^3(\varphi)$$

тўлқин функция билан аниқланган. Бунда A – нормировка кўпайтувчиси. Барча бутун m сонлар учун $P_\psi(l_z = m)$ эҳтимолликларни топинг. $\langle l_z\rangle_\psi$ ва $\langle l_z^2\rangle_\psi$ ўртача қийматларни топинг.

7.6. Зарра ҳолати

$$\psi(\boldsymbol{r}) = A\frac{yz^2}{r^3}$$

тўлқин функция билан аниқланган. Бунда A – нормировка кўпайтувчиси. $P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = 12)$ ва $P_\psi(l_z = 1)$ эҳтимолликларни топинг.

7.7. Зарра ҳолати

$$\psi(\theta,\varphi) = A\left[Y_{11} + Y_{10} + i(Y_{11} - Y_{10}) + (1 + i\sqrt{3})Y_{21}\right]$$

тўлқин функция билан берилган. Бунда A – нормировка кўпайтувчиси. $\boldsymbol{l}^2$ катталикнинг турли қийматлари эҳтимолликларини ва унинг ўртача қийматини топинг.

7.8. Ҳолатнинг $\psi(x)$ тўлқин функцияси маълум. $\rho_\psi(x = a)$ эҳтимоллик зичлигини топинг, бунда a – ихтиёрий ҳақиқий сон.

7.9. Қуйидаги

$$\psi(x) = A\,e^{-\frac{x^2}{2a^2} + ikx}$$

тўлқин функция учун эҳтимоллик оқими зичлигини топинг.

8- мавзу

Потенциал майдонда бир ўлчамли ҳаракат

8.1 Шредингер тенгламаси

Квант механикасида зарранинг $\psi(q,t)$ тўлқин функцияси t вақт мобайнида ностационар Шредингер тенгламасига кўра ўзгаради:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(q,t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(q,t), \tag{8.1}$$

бу ерда $\hat{H}$ – зарра Гамильтониани деб аталади. У классик физикадаги Гамильтон функциясининг квант механикасидаги аналоги. Гамильтониан – бу зарранинг энергиясига мос қўйилган Эрмит оператордир. Гамильтониан ошкор вақтга боғлиқ бўлмаса, $\hat{H}$ операторнинг хусусий қиймат ва хусусий функциялари масаласини ечиш муҳим аҳамиятга эга. Бу масала стационар Шредингер тенгламаси орқали берилади:

$$\hat{H}\psi_n(q) = E_n\psi_n(q). \tag{8.2}$$

Гамильтониан дискрет спектрга эга бўлганда унинг E_n хусусий қийматларини (зарра энергиясини), $n = 1,2,3,\ldots$ натурал сонлар орқали, ўсиб бориш тартибида, $E_1 \leq E_2 \leq E_3 \leq \ldots$ рақамлаш қабул қилинган. Биринчи $n = 1$ рақамли энергия зарранинг энг кичик E_1 энергияли $\psi_1(q)$ асосий ҳолатига мос қўйилади. Энергияси маълум қийматга эга бўлган ва Гамильтонианнинг хусусий функциялари билан ифодаланадиган ҳолатлар стационар ҳолатлар дейилади. (8.1) ва (8.2) тенгламаларни биргаликда ечиб, стационар ҳолатлар тўлқин функциясининг

$$\psi_n(q,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\psi_n(q)$$

вақтга боғлиқлигини оламиз. Бундан вақтнинг барча онларида тўлқин функция зарранинг айнан битта ҳолатини ифодалаётганлиги кўриниб турибди. Чунки квант механикасида тўлқин функция фазавий кўпайтувчигача аниқликда топилади. Демак, квант механикасига кўра зарра чексиз узоқ вақт стационар ҳолатда туриши мумкин.

Вақтнинг бошланғич $t = 0$ онида ихтиёрий ҳолатни ифодаловчи $\psi(q,0)$ тўлқин функция берилган бўлсин. Уни Гамильтонианнинг $\{\psi_n(q)\}$ хусусий фукнциялари базиси орқали ёйиб

$$\psi(q,0) = \sum_n C_n \psi_n(q),$$

бу ерда C_n – қандайдир ўзгармаслар ((6.5) га қаранг), (8.1) тенгламанинг ечимини оламиз

$$\psi(q,t) = \sum_n C_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\psi_n(q). \tag{8.3}$$

Квант механикасида зарра ҳолати бир қийматли аниқланган эканлигини таъкидлаймиз: зарранинг (8.3) тўлқин функцияси, вақтнинг бошланғич онида берилган ҳолат тўлқин функция орқали, вақтнинг барча келгуси онлари учун бир қийматли аниқланган. Ўлчаш натижаларидаги бир қийматлиликнинг бузилиши ўлчаш жараёни билан боғлиқ, яъни классик объект – макроскопик ўлчаш ускунаси билан таъсирлашув туфайлидир.

Зарранинг E энергияли ва $\boldsymbol{p}$ импульс векторининг маълум аниқ қийматига эга координатага боғлиқ қисми бўлган

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = C\, e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)}$$

тўлқин функция билан ифодаланувчи стационар ҳолатини қарайлик [(6.8) га қаранг]. Бунда вақтга боғлиқ тўлқин функция $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}/\hbar$ тўлқин векторли ясси тўлқин эканлигини кўришимиз мумкин. Бу ҳолат учун эҳтимоллик оқими зичлиги коорданатага боғлиқ эмас ва у (7.21) формулада аниқланган

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = |\mathsf{C}|^2 \frac{\hbar \boldsymbol{k}}{m}.$$

У эркин зарра “ҳаракати” ясси тўлқин билан ифодаланади деган тасаввурга мос келади.

8.2 Зарранинг потенциал майдондаги ҳаракати

Классик механикада, бир ўлчамли фазода, зарранинг Гамильтон функцияси

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + U(x)$$

кўринишда аниқланади. Бу ерда m – зарранинг массаси, $U(x)$ – потенциал майдонни аниқловчи функция. Гамильтон функциясидаги барча катталикларни операторлар билан алмаштириб Гамильтонианни оламиз

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + U(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \qquad (8.4)$$

Потенциал майдонни аниқловчи $U(x)$ функциянинг содда кўринишларини қараймиз.

1-мисол. Эркин зарра учун гамильтонианнинг энергия спектри ва хусусий функцияларини топинг.

Ечими. Бу ҳолда потенциал майдонни аниқловчи функция нолга тенг: $U(x) = 0$. Бунда (8.4) орқали аниқланган гамильтониан кинетик энергия оператори билан мос тушади ва $\hat{p}_x$ оператор билан коммутатив. Демак, $\hat{H}$ ва $\hat{p}_x$ омераторлар умумий хусусий функциялар тўпламига эга (3-мавзунинг 5-мисолига қаранг). Энергиянинг ҳар бир E_p қийматига ва $\psi_{E_p}(x)$ хусусий функцияга зарранинг p импульси модулини мос қўйиш мумкин:

$$E_p = \frac{p^2}{2m}, \quad \psi_{E_p}(x) = A\, e^{\frac{i}{\hbar}px} + B\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}, \quad (p \geq 0,\, A, B = const). \tag{8.5}$$

Ҳар бир $\psi_{E_p}(x)$ хусусий функция $\hat{p}_x$ операторнинг, импульс проекциялари $p_x = \pm p$ бўлган ҳолатларга мос келувчи, иккита хусусий функциялари суперпозициясидан иборат. Яъни, ҳар бир E_p хусусий қиймат ($E_p = 0$ дан бошқа) икки каррали айниган.

Бу ҳолда p катталик узлуксиз ўзгаради ва шу сабаб энергиянинг E_p узлуксиз спектрини оламиз. Агар ҳаракат инфинит бўлса (ҳаракат потенциал тўсиқ билан чекланмаган, яъни E энергия чексизликда потенциал тўсиқ баландлигидан катта бўлса), доим энергия спектри узлуксиз бўлишини кўрсатиш мумкин. Аксинча, финит ҳаракат содир бўлганда зарра энергияси дискрет бўлади.

Зарранинг импульси модули билан $p = \hbar k$ тарзда боғлиқ бўлган k тўлқин сонини киритайлик. У ҳолда (8.5) орқали аниқланган хусусий қиймат ва хусусий функцияларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \psi_k(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}. \tag{8.6}$$

Агар зарра уч ўлчамли фазода ҳаракатланаётган бўлса, ушбу зарра гамильтониани

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

шаклга эга бўлади, бунда Δ – лапласиан, гамильтонианнинг хусусий қийматлари қуйидагича аниқланади:

$$E_p = \frac{p^2}{2m}, \quad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2,$$

хусусий функциялари бўлса, импульс модули бир хил p бўлгандаги (6.28) кўринишдаги функцияларнинг суперпозициясидан иборат бўлади

$$\psi_p(\boldsymbol{r}) = C\,e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

2-мисол. Қуйидаги

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le a, \\ +\infty, & x < 0, x > a \end{cases}$$

потенциал ўрада ҳаракатланаётган зарра гамильтонианининг энергия спектри ва хусусий функцияларини топинг.

Ечими. Зарра кенглиги a бўлган чексиз чуқур тўғрибурчакли потенциал ўрада ҳаракатланяпти. Ўрадан ташқарида

($x < 0$ ва $x > a$ бўлганда) $U(x) \to +\infty$, зарра жойлаша олмайди, бунинг учун у чексиз катта энергияга эга бўлиши лозим. Демак, $\psi(x < 0) = \psi(x > a) = 0$. Ўра ичида $U(x) = 0$ ва эркин зарра сингари (8.2) кўринишдаги Шредингер тенгламасини оламиз. Бу тенгламанинг ечими (8.6) кўринишга эга. Энди ушбу иккита ечимларни $x = 0$ ва $x = a$ чегаравий нуқталарда "улаш" керак, яъни чегаравий шартларни аниқлаш лозим. Чегаравий шартлар сифатида тўлқин функцияни шу нуқталарда узлуксиз бўлишини қўллаймиз ($x \to a - 0$ чап томондан, $x \to a + 0$ ўнг томондан лимитларни англатади):

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -0} \psi(x) = \lim\limits_{x\to +0} \psi(x) \\ \lim\limits_{x\to a-0} \psi(x) = \lim\limits_{x\to a+0} \psi(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = A\,e^{0} + B\,e^{0} \\ A\,e^{ika} + B\,e^{-ika} = 0. \end{cases}$$

Булардан

$$\begin{cases} B = -A \\ 2iA\,\sin(ka) = 0 \end{cases} \tag{8.7}$$

натижани оламиз. Тўлқин функцияни узлуксизлиги заррани топиш эҳтимоллиги зичлиги бир нуқтадан қўшни нуқтага ўтишида ўзгармас бўлиши зарурлигининг оқибатидир. Акс ҳолда ўша нуқтада зарраларнинг манбаи бўлар эди ёки уларни ютилиши содир бўлар эди. Ҳақиқий ўқда физикавий маънога эга бўлмаган ($A = B = 0$, $\psi(x) = 0$ – тўлқин функциянинг нормировка шарти бажарилмайдиган) тривиал ечимни ташлаб юбориб, тўлқин сонига нисбатан шартни оламиз:

$$\sin(ka) = 0, \quad k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Бунда финит ҳаракат учун ўринли бўлган ҳулқни кўриш мумкин, яъни энергия спектри дискрет ва айнимаган. Шундай қилиб, хусусий қиймат ва хусусий функциялар учун қуйидагиларни топамиз:

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2},\ \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), 0 \le x \le a, \\ 0, \quad x < 0, x > a. \end{cases} \tag{8.8}$$

$2iA = \sqrt{\frac{2}{a}}$ – нормировка кўпайтувчиси тўлқин функциянинг

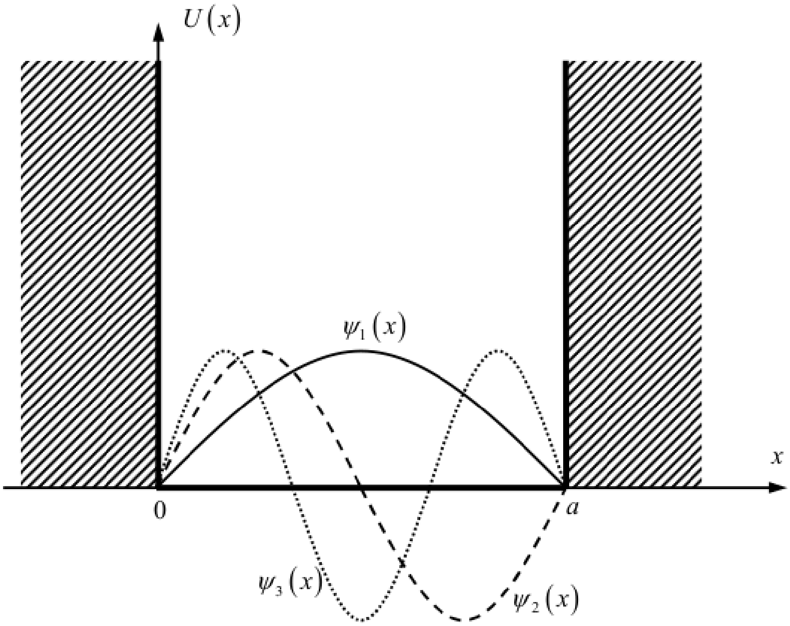
$$\int\limits_0^a |\psi_n(x)|^2 = 1$$

нормировка шартидан аниқланади. 8.1-расмда $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ хусусий функциялар тасвирланган.

Изоҳ. Деворлари чекли бўлган потенциал ўра учун қўшимча чегаравий шарт пайдо бўлади – бу иккита соҳа чегарасида тўлқин функция $\frac{d\psi}{dx}$ ҳосиласининг узлуксизлик шарти. Аслида ҳам, (8.4) гамильтониан учун Шредингер тенгламсидан, $\frac{d\psi}{dx}$ ҳосила $-\frac{2m}{\hbar^2}\left[E - U(x)\right]\psi(x)$ кўринишдаги қисмий-узлуксиз функциядан олинган ноаниқ интегралга тенглиги келиб чиқади, демак, у ҳам узлуксиз функциядир.

3-мисол. Энергияси $E > 0$ бўлган зарра $x = -\infty$ тарафдан x ўқи бўйлаб мусбат йўналишда

$$U(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ +\infty, \quad x > 0 \end{cases}$$



8.1 - расм: Кенглиги a бўлган чексиз чуқур тўғрибурчакли потенциал ўра $U(x)$ ва гамильтонианнинг дастлабки учта $\psi_n(x)$ хусусий функциялари (ихтиёрий масштаб). Штрихлар билан зарра жойлаша олмайдиган $x < 0$ ва $x > a$ соҳалар ажратиб кўрсатилган.

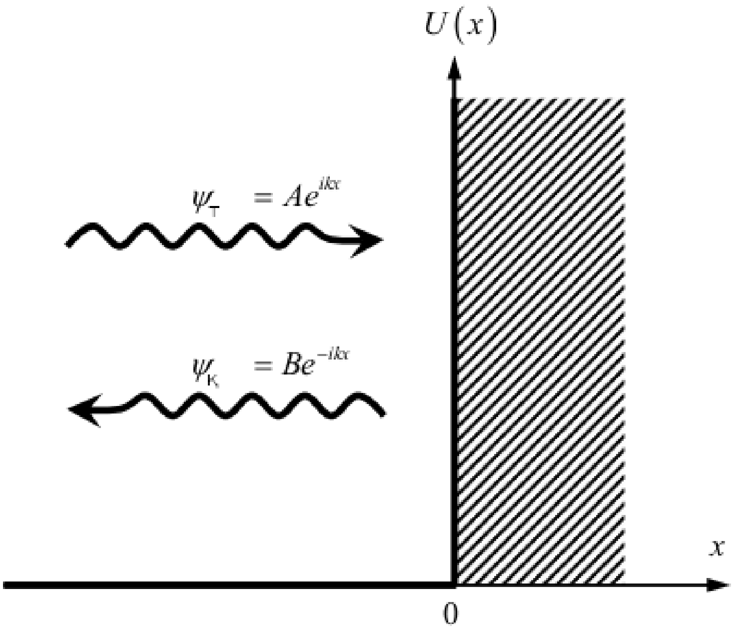
кўринишда аниқланган потенциал девор томонга ҳаракатланяпти. Зарранинг тўлқин функциясини ёзинг ва уни "девордан" қайтиш коэффициентини топинг.

Ечими. Потенциал майдон $U(x) = +\infty$ бўлган $x > 0$ соҳада тўлқин функция нолга тенг. Зарра $x \leq 0$ манфий ярим ўқ бўйлаб ҳаракатланиши мумкин. Бу соҳада Шредингер тенгмасининг ечими (8.6) билан мос келади:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \; \psi(x) = A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx} = \psi_{\text{т}} + \psi_{\text{қ}}, \qquad (8.9)$$

бунда $k \geq 0$, $A, B = const$, $\psi_{\text{т}}$ – тушаётган, $\psi_{\text{қ}}$ – қайтган тўлқинлар (8.2-расм).

Шартга кўра бизга зарранинг E энергияси берилган. Барча катталикларни k тўлқин сони орқали ифодалаймиз.



8.2 - расм: Вертикал потенциал “девор”. Тушаётган $(A\,e^{ikx})$ ва қайтган $(B\,e^{-ikx})$ тўлқинлар схематик равишда тасвирланган. Бу ерда $x < 0$ соҳада $\psi(x)$ тўлқин функция ушбу иккита тўлқинларнинг суперпозициясидан иборатдир.

(8.9) формуладан

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar \tag{8.10}$$

эканлиги келиб чиқади. $\psi(x)$ тўлқин функцияда биринчи $\psi_т = A\,e^{ikx}$ ҳадни шаклан x ўқи бўйлаб мусбат йўналишда ҳаракатланаётган $p_x = +\hbar k$ импульсли зарра деб қараш мумкин (“деворга” тушаётган тўлқин). Шунга ўхшаш, иккинчи $\psi_қ = B\,e^{-ikx}$ ҳадни тескари йўналишда ҳаракатланаётган (“деворга” урилиб қайтган) $p_x = -\hbar k$ импульсли зарра дейиш мумкин. Тўлқин функциянинг ўзи $x < 0$ соҳада ушбу тўлқинларнинг суперпозициясидан иборат бўлади.

Потенциал тўсиқдан қайтиш коэффициентини қуйидаги тарзда аниқлаймиз:

$$R = \frac{|j_{\text{қ}}|}{j_{\text{т}}}, \tag{8.11}$$

бу ерда $j_{\text{т}}$ ва $j_{\text{қ}}$ – мос ҳолда тушаётган ва қайтган тўлқинлар эҳтимоллик оқими зичликлари. Улар (7.19) формулага кўра

$$\begin{aligned} j_{\text{т}} &= \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_{\text{т}}\frac{d\psi^*_{\text{т}}}{dx} - \psi^*_{\text{т}}\frac{d\psi_{\text{т}}}{dx}\right), \\ j_{\text{қ}} &= \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_{\text{қ}}\frac{d\psi^*_{\text{қ}}}{dx} - \psi^*_{\text{қ}}\frac{d\psi_{\text{қ}}}{dx}\right) \end{aligned} \tag{8.12}$$

ифодалардан топилади. Уларга $\psi_{\text{т}} = A\,e^{ikx}$ ва $\psi_{\text{қ}} = B\,e^{-ikx}$ ларни қўйиб,

$$j_{\text{т}} = |A|^2\frac{\hbar k}{m}, \quad j_{\text{қ}} = -|B|^2\frac{\hbar k}{m}, \quad R = \left|\frac{B}{A}\right|^2$$

натижага келамиз. Тўлқин функцияга $x = 0$ нуқтада қўйилган чегаравий шартни ёзайлик:

$$\lim_{x\to-0}\psi(x) = \lim_{x\to+0}\psi(x), \quad Ae^0 + Be^0 = 0, \quad B = -A.$$

Кутилганидек, бундай “девордан” қайтиш коэффициенти $R = 1$. (8.11) формуладагига ўхшаб, потенциал тўсиқдан ўтиш коэффициентини аниқлаймиз:

$$D = j_{\text{ў}}/j_{\text{т}}, \quad j_{\text{ў}} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_{\text{ў}}\frac{d\psi^*_{\text{ў}}}{dx} - \psi^*_{\text{ў}}\frac{d\psi_{\text{ў}}}{dx}\right), \tag{8.13}$$

бу ерда $\psi_{\text{ў}}$ – потенциал тўсиқдан сизиб ўтган тўлқин (тўсиқдан ўнг тарафда жойлашган зарра тўлқин функцияси). Биз қараётган ҳолда $\psi_{\text{ў}} = 0$ ва шу сабаб $D = 0$.

8.3 Мустақил ишлаш учун вазифалар

8.1. (8.3) ни (8.1) га қўйиб, (8.3) ёйилма ностационар Шредингер тенгламасининг ечими эканлигига ишонч ҳосил қилинг.

8.2. Ихтиёрий тўлқин функциялар учун уларнинг скаляр кўпайтмаси вақт мобайнида ўзгармаслигини кўрсатинг:

$$\langle \varphi(q,t)|\psi(q,t)\rangle = \langle \varphi(q,0)|\psi(q,0)\rangle.$$

Ушбу натижадан фойдаланиб, агар

$$\{\psi_1(q,0), \psi_2(q,0), \psi_3(q,0), \ldots\}$$

тўплам – тўлқин функциялар фазосида ортонормал базис бўлса,

$$\{\psi_1(q,t), \psi_2(q,t), \psi_3(q,t), \ldots\}$$

тўплам ҳам – ортонормал базис бўлишини кўрсатинг.

8.3. Қиймати экспериментда ўлчанадиган F катталикка $\hat{F}$ Эрмит оператор мос қўйилган бўлсин. Стационар ҳолатда F ўртача қиймат ва $P_\psi(F = F_n)$ эҳтимоллик (агар $\hat{F}$ оператор узлуксиз спектрга эга бўлса, $\rho_\psi(F)$ эҳтимоллик зичлиги) вақтга боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

8.4. Ихтиёрий ностационар ҳолатда энергиянинг ўртача қиймати вақтга боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

8.5. x ўқининг мусбат йўналишида ҳаракатланаётган эркин зарра p импульсга эга. Вақтнинг ихтиёрий t онида, доимий фазавий кўпайтувчигача аниқликда, зарранинг $\psi(x,t)$ тўлқин функциясини ёзинг.

8.6. Вақтнинг бошланғич онида зарра

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x) + \psi_2(x)\right]$$

тўлқин функция билан аниқланган ҳолатда жойлашган. Бу ерда $\psi_1(x)$ ва $\psi_2(x)$ – зарра $\hat{H}$ гамильтонианининг E_1 ва E_2 хусусий қийматларига мос хусусий функциялари. Вақтнинг ихтиёрий t онида $\psi(x,t)$ тўлқин функцияни ва зарра энергиясининг $\langle E\rangle$ ўртача қийматини топинг.

8.7. Потенциал ўрада жойлашган зарранинг $\psi_n(x)$ тўлқин функцияси нормировкасидан фойдаланиб (2-мисолга қаранг), (8.7) тенгламадаги $2iA$ доимийни, фазавий кўпайтувчигача аниқликда, ҳисоблаб топинг.

8.8. Потенциал ўрада зарра: а) $\psi_1(x)$; б) $\psi_2(x)$ ҳолатда жойлашган. Барча ҳақиқий p сонлар учун $\rho_\psi(p_x = p)$ эҳтимоллик зичликларини топинг.

8.9. Вақтнинг берилган онида зарра потенциал ўрада (2-мисолга қаранг)

$$\psi(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{3}{a}}\cdot\frac{x}{a}, & 0 \le x \le \frac{a}{2}, \\ 2\sqrt{\frac{3}{a}}\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right), & \frac{a}{2} \le x \le a \end{cases}$$

тўлқин функция билан аниқланган ностационар ҳолатда жойлашган бўлсин. Зарра энергияси ўлчанганда $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ қиймат олиниши эҳтимоллигини топинг.

8.10. Энергияси E бўлган зарра

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ U_0, & x > 0 \end{cases}$$

потенциал майдонда[1] $x = -\infty$ тарафдан x ўқи бўйлаб мусбат йўналишда ҳаракатланяпти. $E > U_0 > 0$ деб қабул қилинган. Зарранинг тўлқин функциясини ёзинг; R – тўсиқдан қайтиш ва D – тўсиқдан ўтиш коэффициентини топинг.

8.11. Энергияси E бўлган зарра

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ U_0, & x > 0 \end{cases}$$

потенциал майдонда $x = -\infty$ тарафдан x ўқи бўйлаб мусбат йўналишда ҳаракатланяпти. $E < U_0$ бўлса, зарранинг тўлқин функциясини ёзинг; R – тўсиқдан қайтиш ва D – тўсиқдан ўтиш коэффициентини топинг. Тўсиқости ўтишга хос δ чуқурликни ҳам аниқланг.

8.12. Энергияси E бўлган зарра

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, x \ge a \\ U_0, & 0 < x < a \end{cases}$$

потенциал майдонда[2] $x = -\infty$ тарафдан x ўқи бўйлаб мусбат йўналишда ҳаракатланяпти. $E > U_0 > 0$ бўлса, D – тўсиқдан ўтиш коэффициентини топинг.

8.13. Энергияси E бўлган зарра

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, x \ge a \\ U_0, & 0 < x < a \end{cases}$$

---

[1] потенциал “зина”

[2] тўғрибурчакли потенциал тўсиқ

потенциал майдонда $x = -\infty$ тарафдан x ўқи бўйлаб мусбат йўналишда ҳаракатланяпти. $E < U_0$ бўлса, D – тўсиқдан ўтиш коэффициентини топинг[1].

8.14. *Бир ўлчамли потенциал майдонда Томас – Рейх – Кун йиғиш қоидаси[2] деб аталувчи қуйидаги муносабатни исботланг:

$$\sum_n |\langle\psi_n(x)|x|\psi_k(x)\rangle|^2 (E_n - E_k) = \frac{\hbar^2}{2m},$$

бу ерда $\psi_k(x)$ – зарранинг қандайдир стационар ҳолатини ифодалаётган тўлқин функция, n индексга кўра йиғинди барча стационар ҳолатлар бўйича бажарилади. Кўрсатма: $\psi_k(x)$ ҳолатда $\left[\hat{x}, \left[\hat{H}, \hat{x}\right]\right]$ операторнинг ўртача қийматини ҳисобланг.

---

[1] туннел эффекти

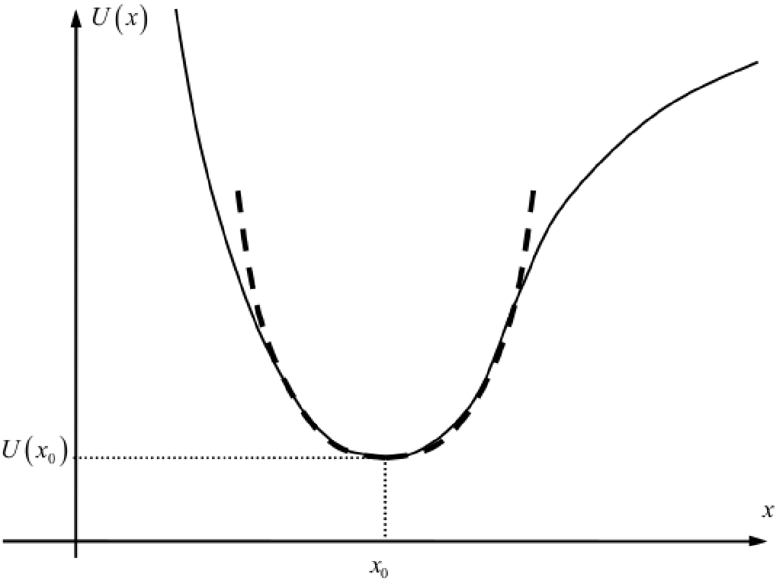
[2] *рус.* правило сумм Томаса-Рейха-Куна

9- мавзу

Чизиқли гармоник осциллятор

9.1 Потенциал

Зарра, $x = x_0$ нуқтада минимумга эга бўлган, қандайдир $U(x)$ потенциал ўрада жойлашган бўлсин (9.1-расм).



9.1 - расм: Зарра жойлашган, $x = x_0$ нуқтада минимумга эга бўлган, потенциал (узлуксиз чизиқ). Узуқ чизиқ билан шу потенциални, $|x - x_0|$ катталик қийматларидан кичик четланишларда, $U(x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}(x - x_0)^2$ парабола орқали апроксимацияси тасвирланган.

$U(x)$ функцияни $x = x_0$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйилик:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{dU}{dx}\Big|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + O\left[(x - x_0)^3\right], \quad (9.1)$$

бу ерда $O\left[(x-x_0)^3\right]$ орқали $(x-x_0)^n$, $n \geq 3$ тартибли ҳадлар белгиланган. Ёйилмадаги нолинчи ҳад энергиянинг барча сатҳларини $U(x_0)$ қийматли доимийга бир хил силжитади ва у хусусий функцияларда акс этмайди. Шу сабаб $U(x_0)=0$ деб олиш натижаларга таъсир қилмайди. Шу билан бирга $x=x_0$ нуқта локал экстремум бўлганлигидан, $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}=0$, ва ёйилманинг биринчи ҳади нолга айланади. Зарра энергияси кичик бўлганда унинг тўлқин функцияси, ва демак заррани топиш эҳтимоллиги зичлиги $x=x_0$ нуқта атрофидагина сезиларли нолдан фарқ қилади. Шунинг учун (9.1) ёйилмада $O\left[(x-x_0)^3\right]$ ҳадни ҳам ҳисобга олмаслик мумкин. Координата бошини минимум нуқтасига силжитиб, қуйидаги кўринишдаги потенциални оламиз

$$U(x)=\alpha\,x^2, \quad \alpha>0. \tag{9.2}$$

Агар тебраниш учун ω бурчак частотасини $\alpha=m\omega^2/2$ тарзда киритсак, (9.2) ифода классик механикадаги чизиқли гармоник осциллятор потенциали билан бир хил бўлиб қолади. Ушбу потенциални (8.4) ифодага қўйиб, осцилляторнинг гамильтонианини оламиз:

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}. \tag{9.3}$$

Бу гамильтониан учун (8.2) стационар Шредингер тенгламаси

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\psi_n(x)=E_n\psi_n(x) \tag{9.4}$$

кўринишни олади. Энди $x=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\xi$ алмаштириш бажариб, (9.4) тенгламадаги коэффициентларни ўлчамсиз қилиш мумкин ва тенгламанинг кўриниши соддалашади:

$$-\frac{d^2\psi_n(\xi)}{d\xi^2}+\xi^2\psi_n(\xi)=\varepsilon_n\psi_n(\xi), \tag{9.5}$$

бу ерда $\varepsilon_n=\frac{2E_n}{\hbar\omega}$ – ўлчамсиз энергия, ξ – ўлчамсиз координата.

Зарра потенциал ўрада жойлашганлигидан, унинг ҳаракати финит бўлиши лозим, яъни $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}\psi_n(\xi)=0$. Бундай хоссага кўп сондаги силлиқ функциялар эга, масалан, $A\,e^{-\beta\xi^2}$ – Гаусс функцияси, $\beta>0$. Ушбу $\psi_0(\xi)=A\,e^{-\beta\xi^2}$ функцияни (9.5) тенгламага бевосита қўйиб, $\beta=1/2$ бўлганда у $\varepsilon_0=1$ энергияли ечим эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин (6.2-вазифа). Бошқа ечимлар, $n\geq 1$ бўлганда, $\psi_n(\xi)=Q_n(\xi)e^{-\xi^2/2}$ кўринишда танланади, $Q_n(\xi)$ – бу ξ ўзгарувчи бўйича n-тартибли полином. Ҳисоблашлар ҳақида батафсил маълумот олиш учун квант механикасига бағишланган маълум адабиётларга мурожат қилиш мумкин. Шундай қилиб, (9.5) тенгламанинг ечимлари қуйидаги хусусий функциялар ва хусусий қийматлар бўлади:

$$\psi_n(\xi)=C_nH_n(\xi)e^{-\xi^2/2},\quad \varepsilon_n=2n+1,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{9.6}$$

Бу ерда

$$H_n(\xi)=(-1)^ne^{-\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right)$$

n-тартибли Эрмит полиномлари,

$$C_n=\left(\sqrt{\pi}2^nn!\right)^{-1/2}$$

доимий

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(\xi)\psi_{n'}(\xi)d\xi = \delta_{nn'} \tag{9.7}$$

ортогоналлик хоссасидан аниқланади.

Бошланғич ўзгарувчиларда (9.4) тенгламанинг ечимлари қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \tilde{C}_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}},\ E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \\ \tilde{C}_n &= \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar}}C_n,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\psi_{n'}(x)d\xi = \delta_{nn'}, \end{aligned} \tag{9.8}$$

бу ерда $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Мисоллар ишлашда $\psi_n(\xi)$ функциялари учун, Эрмит полиномлари хоссаларидан олинадиган, реккурент муносабатлар керак бўлади:

$$\xi\psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi), \tag{9.9}$$

$$\frac{d}{d\xi}\psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi). \tag{9.10}$$

Изоҳ: қисқалик учун $\psi_n(\xi)$ тўлқин функциялар ўрнига баъзида $|n\rangle$ ҳолат векторларини қўллаймиз.

1-мисол. Чизиқли гармоник осциллятор $|n\rangle$ стационар ҳолатда жойлашган. Координатанинг $\langle\Delta x^2\rangle_n$ ва импульснинг $\langle\Delta p_x^2\rangle_n$ дисперсиясини топинг. Гейзенбергнинг (7.3) ноаниқлик муносабати бажарилишини текширинг.

Ечими. Координата дисперсиясини

$$\langle \Delta x^2 \rangle_n = \langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2$$

ифодага кўра ҳисоблаймиз. Кўриниб турганидек, дастлаб координатанинг $\langle x \rangle_n$ ўртача қийматини топишимиз зарур:

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle_n &= \langle n|\hat{x}|n\rangle = \left\{ \hat{x} = \hat{\xi}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right\} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\langle n|\hat{\xi}|n\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(\xi)\xi\psi_n(\xi)d\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(\xi) \times \\
&\quad \times \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi) \right) d\xi \\
&= \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(\xi)\psi_{n-1}(\xi)d\xi + \\
&\quad + \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2m\omega}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(\xi)\psi_{n+1}(\xi)d\xi = 0.
\end{aligned}$$

Ҳисоблашларни бажаришда ξ ўзгарувчига ўтдик, (9.9) реккурент муносабат ва гамильтониан хусусий функцияларининг (9.7) ортогоналлик хоссасидан фойдаландик. Импульснинг $\langle p_x \rangle_n$ ўртача қиймати ҳам шунга ўхшаш, (9.10) реккурент муносабатдан фойдаланиб, топилади:

$$\begin{aligned}
\langle p_x\rangle_n &= \langle n|\hat{p}_x|n\rangle = \left\{\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} = -i\sqrt{\hbar m\omega}\frac{d}{d\xi}\right\}\\
&= -i\sqrt{\hbar m\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\frac{d\psi_n(\xi)}{d\xi}d\xi = -i\sqrt{\hbar m\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\times\\
&\times\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi)\right)d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i\sqrt{\frac{n\hbar m\omega}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\psi_{n-1}(\xi)d\xi +\\
&+i\sqrt{\frac{(n+1)\hbar m\omega}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\psi_{n+1}(\xi)d\xi = 0.
\end{aligned}$$

Координата квадрати ўртача қийматини ҳисоблаш учун

(9.9) реккурент муносабатни икки марта қўллаш зарур:

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle_n &= \langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\langle n|\hat{\xi}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\xi\left\{\xi\psi_n(\xi)\right\}d\xi \\
&= \frac{\hbar}{m\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\xi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi)\right)d\xi \\
&= \frac{\hbar}{m\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\xi\psi_{n-1}(\xi)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\xi\psi_{n+1}(\xi)\right)d\xi \\
&= \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\hbar}{m\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\left(\sqrt{\frac{n-1}{2}}\psi_{n-2}(\xi)+\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_n(\xi)\right)d\xi \\
&\quad+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\frac{\hbar}{m\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_n(\xi)+\right. \\
&\quad\left.+\sqrt{\frac{n+2}{2}}\psi_{n+2}(\xi)\right)d\xi = \frac{\hbar}{m\omega}\left(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}\right) \\
&= \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Импульс квадрати ўртача қиймати ҳам шу йўл билан ҳисоблаб топилади:

$$\begin{aligned}
\langle p_x^2\rangle_n &= -\hbar m\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{d}{d\xi}\psi_n(\xi)\right\}d\xi\\
&= -\hbar m\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi)-\right.\\
&\quad\left.-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi)\right)d\xi\\
&= -\sqrt{\frac{n}{2}}\hbar m\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\frac{d}{d\xi}\psi_{n-1}(\xi)d\xi+\\
&\quad+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\hbar m\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\frac{d}{d\xi}\psi_{n+1}(\xi)d\xi\\
&= -\sqrt{\frac{n}{2}}\hbar m\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\left(\sqrt{\frac{n-1}{2}}\psi_{n-2}(\xi)-\right.\\
&\quad\left.-\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_n(\xi)\right)d\xi+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\hbar m\omega\times\\
&\quad\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_n(\xi)-\sqrt{\frac{n+2}{2}}\psi_{n+2}(\xi)\right)d\xi\\
&= \hbar m\omega\left(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}\right)=\hbar m\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\langle\Delta x^2\rangle_n\cdot\langle\Delta p_x^2\rangle_n=\hbar^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{\hbar^2}{4}$.

2-мисол. Чизиқли гармоник осциллятор гамильтонианининг $|n\rangle$ хусусий функцияларидан иборат базисда $\hat{x}$ координата ва $\hat{p}_x$ импульс операторларининг матрицаларини қуринг.

Ечими. Ихтиёрий иккита n ва n' индекслар учун $x_{nn'} = \langle n|\hat{x}|n'\rangle$ матрик элементни топамиз:

$$\begin{aligned}
x_{nn'} &= \langle n|\hat{x}|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\xi\psi_{n'}(\xi)d\xi \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\left(\sqrt{\frac{n'}{2}}\psi_{n'-1}(\xi)+\sqrt{\frac{n'+1}{2}}\psi_{n'+1}(\xi)\right)d\xi \\
&= \sqrt{\frac{n'\hbar}{2m\omega}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\psi_{n'-1}(\xi)d\xi+\sqrt{\frac{(n'+1)\hbar}{2m\omega}}\times \qquad (9.11)\\
&\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(\xi)\psi_{n'+1}(\xi)d\xi = \sqrt{\frac{n'\hbar}{2m\omega}}\delta_{n,n'-1}+ \\
&+\sqrt{\frac{(n'+1)\hbar}{2m\omega}}\delta_{n,n'+1}.
\end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\hat{x}$ оператор матрицасининг қуйидаги элементларигина нолдан фарқли экан:

$$x_{n,n-1} = \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}, \quad x_{n,n+1} = \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2m\omega}}. \qquad (9.12)$$

Координата оператори матрицаси Эрмит эканлиги кўриниб турибди: $x_{n,n+1} = x^*_{n+1,n}$. Импульс оператори матрицаси матрик элементларини ҳисоблаб топишни ўқувчига қолдирамиз. Натижада Эрмит матрица олинади:

$$(p_x)_{n,n-1} = -i\sqrt{\frac{n\hbar m\omega}{2}}, \quad (p_x)_{n,n+1} = i\sqrt{\frac{(n+1)\hbar m\omega}{2}}. \tag{9.13}$$

3-мисол. Чизиқли гармоник осцилляторнинг стационар ҳолати тўлқин функцияларида $\langle n|\hat{x}^3|n\rangle$ матрик элементни ҳисоблаб топинг.

Ечими. Қўйилган вазифани, юқоридагидек, (9.9) реккурент муносабат ёрдамида бажариш мумкин. Аммо жавобни тезроқ олиш учун 2-мисол натижаларини қўллаш ва қуйидаги фикрлашлардан фойдаланган маъқул. $\hat{x}^3$ операторни учта оператор кўпайтмаси шаклида қараш мумкин: $\hat{x}^3 = \hat{x}\cdot\hat{x}\cdot\hat{x}$. Бундай операторнинг матрицаси, чизиқли алгебрада маълум (6.38) "сатр-устун" қоида бўйича, учта алоҳида $\hat{x}$ операторлар матрицалари кўпайтмасдан иборат:

$$(\hat{x}^3)_{nn'} = \sum_{l,m=0}^{\infty} x_{nl}\cdot x_{lm}\cdot x_{mn'}.$$

Бу ерда йиғиндининг баъзи ҳадларигина нолдан фарқли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, (9.12) хоссага кўра $l = n\pm 1$, $m = l\pm 1$, $n' = m\pm 1$ ва l, m индексларни мумкин бўлган барча қийматлари учун қуйидагини оламиз:

$$\begin{aligned}(\hat{x}^3)_{nn'} &= x_{n,n+1}\cdot x_{n+1,n+2}\cdot x_{n+2,n'} + x_{n,n+1}\cdot x_{n+1,n}\cdot x_{n,n'} + \\ &\quad + x_{n,n-1}\cdot x_{n-1,n}\cdot x_{n,n'} + x_{n,n-1}\cdot x_{n-1,n-2}\cdot x_{n-2,n'}.\end{aligned}$$

Демак, $\hat{x}^3$ операторнинг фақат қуйидаги матрик элементларигина нолдан фарқли:

$$\begin{aligned}
(\hat{x}^3)_{n,n+3} &= x_{n,n+1}\cdot x_{n+1,n+2}\cdot x_{n+2,n+3}\\
&= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)},\\
(\hat{x}^3)_{n,n+1} &= x_{n,n+1}\cdot x_{n+1,n+2}\cdot x_{n+2,n+1}+x_{n,n+1}\cdot x_{n+1,n}\cdot x_{n,n+1}\\
&\quad +x_{n,n-1}\cdot x_{n-1,n-2}\cdot x_{n-2,n+1}=3\left(\frac{\hbar(n+1)}{2m\omega}\right)^{3/2}\\
(\hat{x}^3)_{n,n-1} &= x_{n,n+1}\cdot x_{n+1,n}\cdot x_{n,n-1}+x_{n,n-1}\cdot x_{n-1,n}\cdot x_{n,n-1}\\
&\quad +x_{n,n-1}\cdot x_{n-1,n-2}\cdot x_{n-2,n-1}=3\left(\frac{\hbar n}{2m\omega}\right)^{3/2}\\
(\hat{x}^3)_{n,n-3} &= x_{n,n-1}\cdot x_{n-1,n-2}\cdot x_{n-2,n-3}\\
&= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\sqrt{n(n-1)(n-2)}.
\end{aligned}$$

$\hat{x}^3$ операторнинг қолган барча матрик элементлари нолга тенг.

9.2 Тўлдирувчи сонлар формализми

Қуйидаги операторларни киритамиз:

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi+\frac{d}{d\xi}\right),\quad \hat{a}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi-\frac{d}{d\xi}\right). \tag{9.14}$$

Бошқа томондан:

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}+\hat{a}^{+}),\quad \frac{d}{d\xi}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}-\hat{a}^{+}). \tag{9.15}$$

Гармоник осциллятор гамильтонианинг $\psi_n(\xi)$ хусусий функциясига $\hat{a}$ операторни таъсир этказайлик:

$$\begin{aligned}\hat{a}\psi_n(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi\psi_n(\xi)+\frac{d\psi_n(\xi)}{d\xi}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi)\right)+\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi)-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi)\right)\\ &= \sqrt{n}\,\psi_{n-1}(\xi).\end{aligned}\tag{9.16}$$

Юқорида (9.9) реккурент муносабатни қўлладик. Демак, $\hat{a}$ оператор хусусий функцияга таъсир этиб унинг индексини 1 га камайтирар экан. Иккинчи $\hat{a}^+$ оператор бўлса, хусусий функция индексини 1 га оширади:

$$\begin{aligned}\hat{a}^+\psi_{n-1}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi\psi_{n-1}(\xi)-\frac{d\psi_{n-1}(\xi)}{d\xi}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{n-1}{2}}\psi_{n-2}(\xi)+\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_n(\xi)\right)-\\ &\quad-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{n-1}{2}}\psi_{n-2}(\xi)-\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_n(\xi)\right)\\ &= \sqrt{n}\,\psi_n(\xi).\end{aligned}\tag{9.17}$$

(9.16) ва (9.17) муносабатлардан, $\hat{a}$ ва $\hat{a}^+$ операторларнинг, қуйидаги нолдан фарқли матрик элементларини оламиз:

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^+|n-1\rangle = \sqrt{n}.\tag{9.18}$$

Гармоник осциллятор гамильтонианида (9.15) ёрдамида ўзгарувчиларни алмаштириб

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \tag{9.19}$$

ифодага келамиз (6.7-вазифа). Бу ифодадаги $\hat{n} = \hat{a}^{+}\hat{a}$ оператор – тўлдирувчи сонлар оператори[1] дейилади. У хусусий функцияга таъсир этиб, уни n индексга кўпайтириб қўяди:

$$\hat{n}\,\psi_n(\xi) = n\,\psi_n(\xi). \tag{9.20}$$

Шартли равишда, гармоник осцилляторнинг n-ҳолатига ҳар бири $\hbar\omega$ энергияли n та квазизарралар мос келади деб қабул қилиш мумкин. У ҳолда (9.8) формулада аниқланган $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ тўлиқ энергия квазизарралар энергиялари ва $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ вакуум энергияси йиғиндисига тенг. Ушбу формализмдаги $\hat{a}$ ва $\hat{a}^{+}$ операторлар, (9.16) ва (9.17) хоссасига кўра, мос равишда йўқотувчи[2] ва яратувчи[3] оператор деб аталади. Улар гармоник осцилляторнинг стационар ҳолатига таъсир этганда ўша ҳолат энергиясини $\hbar\omega$ катталикка камайтиради (оширади).

4-мисол. 3-мисолдаги топшириқни $\hat{a}$ ва $\hat{a}^{+}$ операторлардан фойдаланиб бажаринг.

Ечими. Матрик элементда (9.15) ёрдамида йўқотувчи ва

---

[1] *рус.* оператор чисел заполнения

[2] *рус.* оператор уничтожения

[3] *рус.* оператор рождения

яратувчи операторларга ўтамиз:

$$\langle n|\hat{x}^3|n'\rangle \ = \ \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2}\langle n|\hat{\xi}^3|n'\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\langle n|(\hat{a}+\hat{a}^+)^3|n'\rangle$$

$$= \ \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\langle n|\hat{a}^3+\hat{a}^2\hat{a}^+ +\hat{a}\hat{a}^+\hat{a}+\left(\hat{a}^+\right)^2\hat{a}+\hat{a}^+\hat{a}^2|n'\rangle +$$

$$+\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\langle n|\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+ +\hat{a}\left(\hat{a}^+\right)^2+\left(\hat{a}^+\right)^3|n'\rangle$$

Бу ерда куб ифодани очиш тартибига эътибор қаратамиз: $\hat{a}$ ва $\hat{a}^+$ операторлар коммутативмаслигидан, юқоридаги ифоданинг ҳар бир ҳади алоҳида ёзилиши зурур. Демак,

$$\langle n|\hat{a}^3|n'\rangle + \langle n|\hat{a}^2\hat{a}^+|n'\rangle + \langle n|\hat{a}\hat{a}^+\hat{a}|n'\rangle + \langle n|\left(\hat{a}^+\right)^2\hat{a}|n'\rangle +$$

$$\langle n|\hat{a}^+\hat{a}^2|n'\rangle + \langle n|\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+|n'\rangle + \langle n|\hat{a}\left(\hat{a}^+\right)^2|n'\rangle + \langle n|\left(\hat{a}^+\right)^3|n'\rangle$$

Энди n ва n' орасида қандай муносабат бўлганда ушбу саккизта матрик элементлардан қайси бири нолдан фарқли эканлигини аниқлаш керак. Масалан, $\langle n|\hat{a}^3|n'\rangle$ фақат $n' = n+3$ бўлгандагина нолга тенг эмас, чунки учта $\hat{a}$ оператор $|n'\rangle$ ҳолатга навбат билан таъсир этганда, унинг тўлдирувчи сонларини $n'-3$ гача камайтиради. Шундай қилиб,

$$\langle n|\hat{a}\hat{a}\hat{a}|n+3\rangle\delta_{n',n+3} + \langle n|\hat{a}\hat{a}\hat{a}^+|n+1\rangle\delta_{n',n+1} +$$

$$\langle n|\hat{a}\hat{a}^+\hat{a}|n+1\rangle\delta_{n',n+1} + \langle n|\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}|n+1\rangle\delta_{n',n+1} +$$

$$\langle n|\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}|n-1\rangle\delta_{n',n-1} + \langle n|\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+|n-1\rangle\delta_{n',n-1} +$$

$$\langle n|\hat{a}\hat{a}^+\hat{a}^+|n-1\rangle\delta_{n',n-1} + \langle n|\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}^+|n-3\rangle\delta_{n',n-3}.$$

Кронекер белгиси ёрдамида фақат нолдан фарқли матрик элементлар ҳисобга олинмоқда. Ушбу матрик элементларни, (9.16) ва (9.17) муносабатларни қўллаб, ҳисоблаб топамиз:

$$
\begin{aligned}
\langle n|\hat{a}\hat{a}\hat{a}|n+3\rangle &= \sqrt{n+3}\,\langle n|\hat{a}\hat{a}|n+2\rangle \\
&= \sqrt{(n+3)(n+2)}\,\langle n|\hat{a}|n+1\rangle \\
&= \sqrt{(n+3)(n+2)(n+1)}, \\
\langle n|\hat{a}\hat{a}\hat{a}^{+}|n+1\rangle &= \sqrt{(n+2)(n+2)(n+1)}, \\
\langle n|\hat{a}\hat{a}^{+}\hat{a}|n+1\rangle &= \sqrt{(n+1)(n+1)(n+1)}, \\
\langle n|\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}|n+1\rangle &= \sqrt{(n+1)n\cdot n}, \\
\langle n|\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}\hat{a}|n-1\rangle &= \sqrt{(n-1)(n-1)n}, \\
\langle n|\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}^{+}|n-1\rangle &= \sqrt{n\cdot n\cdot n}, \\
\langle n|\hat{a}\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}|n-1\rangle &= \sqrt{n(n+1)(n+1)}, \\
\langle n|\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}|n-3\rangle &= \sqrt{(n-2)(n-1)n}.
\end{aligned}
$$

Шу йўл билан $\hat{x}^3$ операторнинг нолдан фарқли қуйидаги матрик элементларини оламиз:

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{x}^3|n+3\rangle &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\\
\langle n|\hat{x}^3|n+1\rangle &= 3\left(\frac{\hbar(n+1)}{2m\omega}\right)^{3/2}\\
\langle n|\hat{x}^3|n-1\rangle &= 3\left(\frac{\hbar n}{2m\omega}\right)^{3/2}\\
\langle n|\hat{x}^3|n-3\rangle &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\sqrt{n(n-1)(n-2)}.
\end{aligned}$$

5-мисол. Морз потенциали

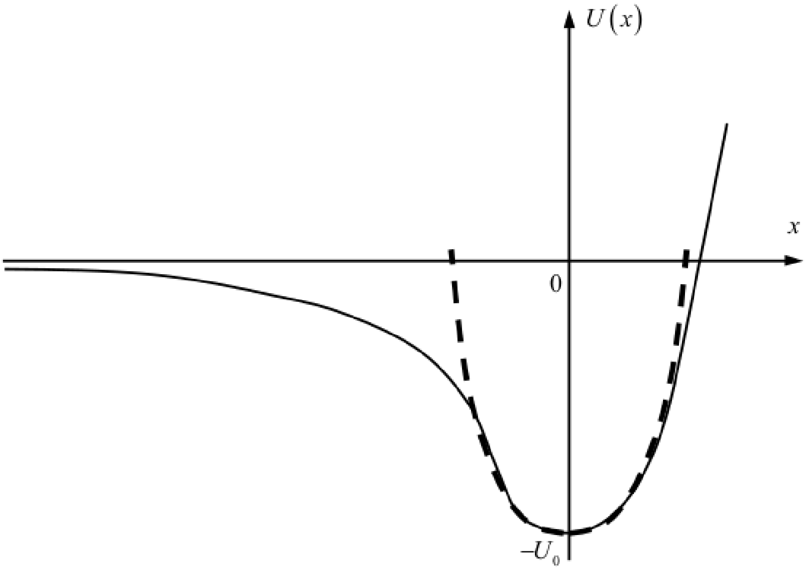
$$U(x) = U_0\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2e^{\frac{x}{a}}\right), \quad U_0, a > 0$$

майдонида жойлашган зарранинг тўлқин функцияси ва энергия спектрини топинг.

Ечими. Қўйилган масалани тақрибий ечимини топамиз. Бу мақсадда $U(x)$ функцияни Маклорен қаторига ёйиб, x ўзгарувчининг квадратигача бўлган ҳадларни қолдирамиз:

$$\begin{aligned}
U(x) &= U_0\left\{1+\frac{2x}{a}+\frac{1}{2!}\left(\frac{2x}{a}\right)^2+\ldots\right.\\
&\quad\left.-2\left[1+\frac{x}{a}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots\right]\right\}\\
&\approx -U_0+\frac{U_0x^2}{a^2}. \qquad (9.21)
\end{aligned}$$

Агар $\frac{m\omega^2}{2} = \frac{U_0}{a}$ муносабат билан ω частота киритилса, $U(x)$ функция, энергия сатҳлари $-U_0$ доимийга силжиган,



9.2 - расм: $U(x) = U_0\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2e^{\frac{x}{a}}\right)$ – Морз потенциали (узлуксиз чизиқ). Узуқ чизиқ билан $|x|$ нинг кичик қийматларида потенциални $-U_0 + \frac{U_0 x^2}{a^2}$ парабола орқали аппроксимацияси кўрсатилган.

чизиқли гармоник осциллятор потенциали билан тақрибан мос тушади (9.2-расм). Тўлқин функциялар ва энергия спектри (9.8) ифодалардан, $\omega = \sqrt{\frac{2U_0}{ma^2}}$ алмаштириш билан, олинади:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \frac{\sqrt[4]{2mU_0/\pi}}{\sqrt{2^n n!\hbar a}} H_n\left(\frac{\sqrt[4]{2mU_0}}{\sqrt{a\hbar}}x\right) e^{-\frac{\sqrt{2mU_0}}{2a\hbar}x^2}, \\ E_n &= \frac{\hbar}{a}\sqrt{\frac{2U_0}{m}}\left(n+\frac{1}{2}\right) - U_0, \quad n = 0,1,2,.. \end{aligned} \quad (9.22)$$

(9.21) аппроксимация, потенциал минимумидан кичик четланишларда, $|x| \ll a$ бўлганда, яъни E_n энергиянинг кичик қийматларидагина, қўлланилиши мумкин. Бошқача айтганда, ифодаси 1-мисол ечимидан маълум бўлган, координатанинг ўртача квадратик четланиши a катталикдан анча кичик бўлиши лозим:

$$\sqrt{\langle\Delta x^2\rangle} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{a\hbar}{2mU_0}\left(n+\frac{1}{2}\right)} \ll a,$$

бундан

$$n \ll \frac{\sqrt{2mU_0}\,a}{\hbar} - \frac{1}{2}.$$

Ҳолат индекси n нинг фақат шундай қийматларидагина (9.22) тақрибий ечим ўринли.

9.3 Мустақил ечиш учун вазифалар

9.1. (9.4) тенгламада $x = \xi\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ алмаштириш бажариб, (9.5) тенгламани олинг.

9.2. $\psi_0(\xi) = A\,e^{-\beta\xi^2}$ тўлқин функция (9.5) тенгламани ечими бўладиган $\beta > 0$ доимий қийматини топинг. Ушбу ечимга мос ε_0 энергияни топинг.

9.3. Чизиқли гармоник осциллятро $\psi(x) = C\left[\psi_n(x) + i\psi_{n+1}(x)\right]$ ҳолатда жойлашган. Ушбу тўлқин функциянинг нормировка шартидан C нормировка кўпайтувчисини фазавий кўпайтувчигача аниқликда топинг. Шу ҳолатда $\langle x\rangle$ координата ва $\langle p_x\rangle$ импульснинг ўртача қийматларини топинг.

9.4. Чизиқли гармоник осциллятор $|n\rangle$ стационар ҳолатда жойлашган. Шу ҳолатда $\langle x^4\rangle$ $\langle p_x^4\rangle$ ўртача қийматларни ҳисоблаб топинг.

9.5. (9.14) аниқлашдан фойдаланиб $\hat{a}$ операторнинг Эрмит қўшмаси $\hat{a}^+$ эканлигини кўрсатинг: $(\hat{a})^+ = \hat{a}^+$.

9.6. (9.14) аниқлашдан фойдаланиб $[\hat{a}, \hat{a}^+]$ коммутаторни ҳисобланг.

9.7. (9.3) гармоник осциллятор гамильтонианида (9.15) алмаштириш ёрдамида йўқотувчи ва яратувчи операторларга ўтиб, (9.19) муносабатни келтириб чиқаринг.

9.8. 1-мисолдаги топшириқни, $\hat{a}$ ва $\hat{a}^+$ операторларга ўтиб, бажаринг.

9.9. Доимий F куч таъсир этаётган чизиқли гармоник осциллятор тўлқин функциялари ва энергия спектрини топинг.

9.10. Қандай шартларда $\langle n|x^k|m\rangle$ матрик элемент гармоник осцилляторнинг стационар ҳолатларида нолга тенг?

9.11. *Гармоник осцилляторнинг $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\psi_0 + \psi_1)$ ҳолатида координата ва кинетик энергия учун Гейзенбергнинг ноаниқлик муносабати (7.2) бажарилишини текширинг.

10- мавзу

Водород атоми

10.1 Заррани марказий майдондаги ҳаракати

Агар потенциал майдон фақат масофагагина боғлиқ бўлса, у марказий майдон дейилади. Бу ҳолда гамильтониан

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r)$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда Δ – Лаплас оператори, $U(r)$ – сферик симметрияга эга бўлган потенциал майдон функцияси. Айтганимиздек у фақат $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – майдон марказидан заррагача бўлган масофага боғлиқ холос.

Зарранинг марказий майдондаги ҳаракати сферик координаталар тизимида қаралади ва бу ҳолда стационар Шредингер тенгламаси

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r)\right]\psi(r,\theta,\varphi) = E\,\psi(r,\theta,\varphi) \tag{10.1}$$

кўринишда ёзилади. (5.19) ифодада Лаплас операторини импульс моменти оператори квадрати орқали аниқлаган эдик:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\hat{l}^2.$$

Ушбу ифодани (10.1) тенгламага қўйиб, баъзи содда ўзгартиришлардан сўнг

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[U(r) - E\right]\right\}\psi(r,\theta,\varphi) = \hat{l}^2\psi(r,\theta,\varphi) \tag{10.2}$$

тенгламани оламиз.

(10.2) тенгламанинг чап томонидаги шаклли қавс ичида, θ ва φ бурчак ўзгарувчиларга боғлиқ бўлмаган, фақат r ўзгарувчига таъсир этувчи оператор турибди. Ўнг томонда эса, аксинча, $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ оператор r ўзгарувчига боғлиқ эмас, у фақат θ ва φ бурчак ўзгарувчиларга таъсир этади. Бундай ҳолларда дифференциал тенглама ечими ўзгарувчиларни ажратиш усули асосида қидирилади. Бу усулда ечим кўриниши

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi), \tag{10.3}$$

шаклда танланади. Бунда $R(r)$, $Y(\theta,\varphi)$ – қандайдир функциялар. (10.3) ни (10.2) га қўйиб, тенгламанинг иккала тарафини $R(r)Y(\theta,\varphi)$ га бўламиз:

$$\frac{1}{R(r)}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[U(r) - E\right]\right\}R(r) = \frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\hat{\boldsymbol{l}}^2 Y(\theta,\varphi) \tag{10.4}$$

Тенгламанинг чап томони фақат r га, ўнг томони эса фақат θ ва φ ўзгарувчиларга боғлиқ эканлиги кўриниб турибди. Ушбу иккала функциялар мустақил r, θ, φ аргументларнинг ихтиёрий қийматларида тенг бўлиши учун уларнинг иккиси ҳам қандайдир λ доимийга айнан тенг бўлгандагина ўринли:

$$\begin{cases} \frac{1}{R(r)}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[U(r) - E\right]\right\}R(r) = \lambda, \\ \frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\hat{\boldsymbol{l}}^2 Y(\theta,\varphi) = \lambda. \end{cases}$$

Олинган тенгламалар системасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[U(r) - E\right]\right\}R(r) = \lambda\, R(r), \\ \hat{\boldsymbol{l}}^2 Y(\theta,\varphi) = \lambda\, Y(\theta,\varphi) \end{cases} \tag{10.5}$$

(10.5) тенгламалар системасида $R(r)$ ва $Y(\theta,\varphi)$ функциялар, мос равишда, $\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[U(r)-E\right]\right\}$ ва $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ операторларнинг, бир хил λ хусусий қийматлар тўпламига тўғри келувчи, хусусий функциялари эканлиги кўриниб турибди. $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ операторнинг $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ хусусий функциялари ва хусусий қийматлари (6.30) тенгламада киритилган эди:

$$Y(\theta,\varphi)=Y_{lm}(\theta,\varphi),\,\lambda=l(l+1),\,l=0,1,\ldots;\,m=-l,\ldots,l.$$

(10.5) тенгламалар системасидаги биринчи тенгламани ечими бўлган $R(r)$ радиал функцияларни топиш учун $U(r)$ функциянинг аниқ кўриниши берилиши лозим.

10.2 Водород атоми тўлқин функцияси

Водород атомида $-e$ зарядли электрон $+e$ зарядли протоннинг электростатик майдонида жойлашган. Шу сабаб $U(r)$ потенциал – бу

$$U(r)=-\frac{e^2}{r}$$

Кулон потенциалининг ўзи. Водород атомини ушбу потенциал ёрдамида Шредингер тенгламаси асосида тадқиқ этишда унинг ядроси массаси чексиз катта деб фараз қилинади ва икки жисм масаласидан электронни марказий майдондаги ҳаракатини ифодаловчи (10.1) тенгламага, бир жисм масаласига, ўтилади.

Кулон потенциали учун (10.1) тенгламанинг $E<0$ бўлгандаги умумий ечими

$$\begin{aligned} \psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) &= R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi), \\ R_{nl}(r) &= Q^{(l)}_{n-1}(r)e^{-\frac{r}{n\,a}}, \quad E_n = -\frac{e^2}{2n^2a}, \end{aligned} \tag{10.6}$$

эканлигини кўрсатиш мумкин. Бу ерда $n = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ва $m = -l, -l+1, \ldots, l$; $Q^{(l)}_{n-1}(r)$ – аргументи r бўйича $(n-1)$-тартибли ҳақиқий турдаги полином; $a = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0,53$ Å– водород атомининг Бор радиуси. $n = 1, 2, 3$ бўлганда $R_{nl}(r)$ радиал функциялар иловада келтирилган. Бунда n – бош, l – орбитал, m – магнит квант сонлари дейилади. (10.6) формуладан, манфий энергияларда водород атоми спектри дискрет, хусусий қиймат E_n фақат n – бош квант сонигагина боғлиқ бўлиши кўриниб турибди. Мусбат энергияларда водород атоми спектри узлуксиз, электрон энергиясининг ҳар бир қиймати чексиз каррали айниган.

Радиал функцияларнинг

$$\int_0^\infty R_{nl}(r)R_{n'l}(r)r^2dr = \delta_{nn'} \tag{10.7}$$

нормировкаси ва сферик функцияларнинг (6.32) нормировкасидан водород атоми тўлқин функцияси $\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)$ учун нормировка шарти келиб чиқади:

$$\int_0^\infty r^2dr \int_0^\pi \sin(\theta)d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \psi^*_{nlm}(r,\theta,\varphi)\psi_{n'l'm'}(r,\theta,\varphi) = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{10.8}$$

Кўпинча орбитал квант сонини белгилашда $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ қийматлар учун, мос равишда, лотин алифбосининг $s, p, d, f, \ldots$ ҳарфлари ишлатилади. Масалан, $n = 2$ ва $l = 1$ квант сонлари билан аниқланган ҳолатлар тўплами атомнинг $2p$-қобиғи, $n = 3$ ва $l = 0$ – $3s$-қобиғи деб аталади ва х.к.

Изоҳ: ψ_{nlm} тўлқин функциялар учун кўпинча $|nlm\rangle$ белгилашни қўллаймиз.

1-мисол. Водород атомининг асосий ҳолати учун

$$\sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta p_x^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}$$

ноаниқлик муносабатини бажарилишини текширинг.

Ечими. Водород атоми асосий ҳолати тўлқин функцияси $|100\rangle = R_{10}(r) Y_{00}(\theta, \varphi)$ ифодасини радиал ва сферик функцияларнинг иловада келтирилган кўринишларидан аниқлаймиз:

$$|100\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2}{\sqrt{a^3}} e^{-\frac{r}{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}.$$

Сферик координаталарга ўтиб, $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$ координатанинг ўртача қийматини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \langle 100|\hat{x}|100\rangle = \frac{1}{\pi a^3} \int\limits_0^\infty r^2 dr \int\limits_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi e^{-\frac{2r}{a}} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ &= \frac{1}{\pi a^3} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}} r^3 dr \int\limits_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Юқоридаги учта интегралда охиргиси нолга тенг. Ушбу натижани аввалдан айтиш мумкин эди: асосий ҳолат тўлқин функцияси сферик симметрик бўлганлигидан, (x, y, z) координаталардан ихтиёрийсининг ўртача қиймати нолга тенг бўлади. Шунга ўхшаб, p_x учун

$$\langle p_x \rangle = \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta e^{-\frac{r}{a}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{r}{a}} \right).$$

x бўйича ҳосилани, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ эканлигини ҳисобга олиб, мураккаб функциядан ҳосиладек олиш мумкин:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{r}{a}} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-\frac{r}{a}} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{ar} e^{-\frac{r}{a}} = -\frac{\sin(\theta)\cos(\varphi)}{a} e^{-\frac{r}{a}}$$

Демак,

$$\langle p_x \rangle = \frac{i\hbar}{\pi a^4} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr \int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = 0.$$

Координата квадрати ўртача қиймати:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\frac{2r}{a}} r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) \\ &= \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}} r^4 dr \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{J_1 J_2 J_3}{\pi a^3}. \end{aligned}$$

Бунда

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}} r^4 dr,\ J_2 = \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta,\ J_3 = \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi$$

белгилашлар киритилди. Биринчи интегралда $\xi = \frac{2r}{a}$ алмаштириш бажариб, J_1 ни Эйлернинг натурал аргументли $\Gamma(k) = (k-1)!$ гамма функциясига келтирилади, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int\limits_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}} r^4 dr = \left(\frac{a}{2}\right)^5 \int\limits_0^\infty \xi^4 e^{-\xi} d\xi \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^5 \Gamma(5) = \left(\frac{a}{2}\right)^5 \cdot 4! = \frac{3}{4} a^5. \end{aligned}$$

J_1 ва J_2 интегралларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int\limits_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = -\int\limits_0^\pi \left[1 - \cos^2(\theta)\right] d[\cos(\theta)] \\ &= \int\limits_{-1}^{+1} (1 - x^2) dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \\ J_3 &= \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left[1 + \cos(2\varphi)\right] d\varphi = \pi. \end{aligned}$$

Булардан,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\pi a^3} \cdot \frac{3}{4} a^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = a^2.$$

$\langle p_x^2 \rangle$ ўртача қийматни топиш учун қуйидаги усулдан фойдаланамиз. $|\psi\rangle$ ҳолатда қандайдир $\hat{F}$ Эрмит оператор квадратининг ўртача қийматини ҳисоблаш талаб этилаётган бўлсин. Айний алмаштиришлар йўли билан қуйидаги қоида-ни олиш мумкин:

$$\begin{aligned}
\langle F^2\rangle &= \int \psi^* \hat{F}^2 \psi dq = \int \psi^* \hat{F}\left(\hat{F}\psi\right) dq \int \left(\hat{F}\psi\right) \hat{F}^T \psi^* dq \\
&= \int \left(\hat{F}\psi\right) \left(\left[\hat{F}^T\right]^* \psi\right)^* dq = \int \left(\hat{F}\psi\right) \left(\hat{F}^+\psi\right)^* dq \\
&= \int \left(\hat{F}\psi\right) \left(\hat{F}\psi\right)^* dq = \int \left|\hat{F}\psi\right|^2 dq,
\end{aligned}$$

яъни ушбу ўртача қийматни $\hat{F}$ операторни тўлқин функцияга бир марта тъсири орқали ифодаласа бўлади. Бизнинг ҳолда

$$\begin{aligned}
\langle p_x^2\rangle &= \frac{\hbar^2}{\pi a^3}\int\limits_0^\infty r^2 dr \int\limits_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left| -\frac{\sin(\theta)\cos(\varphi)}{a} e^{-\frac{r}{a}}\right|^2 \\
&= \frac{\hbar^2}{\pi a^5}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr \int\limits_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi \\
&= \frac{\hbar^2}{\pi a^5}\cdot J_1' \cdot J_2 \cdot J_3.
\end{aligned}$$

Бу ердаги J_2 ва J_3 интегралларни юқорида ҳисоблаб топган эдик. J_1' бўлса,

$$\begin{aligned}
J_1' &= \int\limits_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr = \left(\frac{a}{2}\right)^3 \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-\xi} d\xi \\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^3 \Gamma(3) = \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot 2! = \frac{1}{4}a^3.
\end{aligned}$$

Демак,

$$\langle p_x^2\rangle = \frac{\hbar^2}{\pi a^5}\cdot\frac{1}{4}a^3\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{\hbar^2}{3a^2}.$$

Координата ва импульс дисперцияларининг x-проекциялари

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = a^2, \quad \langle \Delta p_x^2 \rangle = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{3a^2}$$

экан. Бунда ноаниқлик муносабати бажарилади:

$$\sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta p_x^2 \rangle} = \frac{\hbar}{\sqrt{3}} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Изоҳ: ушбу мисолдаги топшириқни тезроқ бажариш усули мавжуд – 7.3-вазифани бажариш учун кўрсатмага қаранг!

2-мисол. Водород атоми асосий ҳолатда жойлашган. Электр майдони потенциалининг, водород атоми ядросидан R масофадаги, ўртача қийматини топинг (чексиз узоқ нуқтада потенциал нолга тенг деб қабул қилинади).

Ечими. Фазода электр майдонини атомнинг $+e$ зарядли ядроси ва $-e$ зарядли электрон ҳосил қилади. Атом ядросини, координата бошида жойлашган, нуқтавий заряд деб ҳисоблаш мумкин. Электрон заряди бўлса, фазода $\rho(r) = -e|\psi_{100}(r)|^2$ ҳажмий зичлик билан “шувалган”. Асосий ҳолат тўлқин функцияси

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{a}{r}}$$

сферик симметрияга эга бўлганлигидан, заряд зичлиги фақат r ўзгарувчигагина боғлиқ. Бу жиҳат атомнинг $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

электростатик майдонини Остроградский – Гаусс теоремасидан фойдаланиб топишга имкон беради:

$$\iint\limits_{S_R} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{S} = 4\pi Q_R = 4\pi \left(e - e \iiint\limits_{V_R} |\psi_{100}(r)|^2 dV \right), \quad (10.9)$$

бу ерда чапдаги интеграл радиуси R бўлган ва маркази координата бошида жойлашган сферанинг S_R сирти бўйича олинади, Q_R – сфера ичида жойлашган тўлиқ заряд, V_R – сфера ҳажми. Сферик симметрияга кўра $\boldsymbol{E} d\boldsymbol{S} = E dS$ ва

$$\iint\limits_{S_R} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{S} = 4\pi R^2 E.$$

(10.9) тенгликнинг ўнг тарафидаги V_R бўйича интеграл икки марта қисмлаб олинади:

$$\iiint\limits_{V_R} |\psi_{100}(r)|^2 dV = \frac{4\pi}{\pi a^3} \int\limits_0^R e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr = 1 - \left(\frac{2R^2}{a^2} + \frac{2R}{a} + 1 \right) e^{-\frac{2R}{a}}.$$

Атом ядросидан R масофада электр майдони кучланганлиги модулини топамиз:

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 E &= 4\pi e \left(\frac{2R^2}{a^2} + \frac{2R}{a} + 1 \right) e^{-\frac{2R}{a}}, \\ E(R) &= e \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{aR} + \frac{1}{R^2} \right) e^{-\frac{2R}{a}}. \end{aligned}$$

Электр майдони потенциали кучланганлик билан

$$\varphi(R) = \int_R^{+\infty} E(r)dr = \int_R^{+\infty} e\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{ar}+\frac{1}{r^2}\right)e^{-\frac{2r}{a}}dr$$
$$= e\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{a}\right)e^{-\frac{2R}{a}}$$

тарзда боғланган.

Масофа R катта бўлганда потенциал $\sim e^{-\frac{2R}{a}}$ экспоненциал қонунга кўра камайиши кўриниб турибди. Бу хосса электрон майдони атом ядроси майдонини тўсиши билан изоҳланади. Узоқ масофаларда $(R \gg a)$ атомнинг электрон қобиғи ўлчамини ҳисобга олмаса ҳам бўлади, атом умумий ҳолда нейтрал, майдон нолга интилади. Яқин масофаларда $(R \ll a)$ электрон қобиқ томонидан ҳосил қилинаётган майдонни ҳисобга олмаса бўлади ва $\varphi(R) \approx \frac{e}{R}$.

10.3 Мустақил ишлаш учун вазифалар

10.1. Водород атомининг n бош квант сони билан тавсифланувчи энергия сатҳлари айниш карралигини топинг (энергия сатҳи айниш карралиги – бу шу энергияли ўзаро ортогонал ҳолатлар миқдорига тенглигини ёдга оламиз, 3-мавзуга қаранг).

10.2. Электрон а) $1s$; б) $2s$; в) $2p$; г) $3d$ қобиқда жойлашган бўлса, водород атомида электрон орбитаси радиуси $\langle r\rangle$ ўртача қийматини топинг.

10.3. 1-мисолдаги топшириқни, аввал $\langle r^2\rangle$ ва $\langle p^2\rangle$ ўртача қийматларни сферик координаталарда ҳисоблаб, сўнг $\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle z^2\rangle$, $\langle p^2\rangle = \langle p_x^2\rangle + \langle p_y^2\rangle + \langle p_z^2\rangle$ муносабатлардан ва $\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle$, $\langle p_x^2\rangle = \langle p_y^2\rangle = \langle p_z^2\rangle$ эканлигидан фойдаланиб, бажаринг.

10.4. Водород атомида электрон а) $2s$; б) $2p$ қобиқда жойлашган деб ҳисоблаб, 1-мисолдаги топшириқни бажаринг.

10.5. Водород атомида электрон $2s$ қобиқда жойлашган деб ҳисоблаб, 2-мисолдаги топшириқни бажаринг.

10.6. Водород атомининг $|nlm\rangle$ ҳолатида электрон токи зичлигини ҳисобланг. Шу ҳолатда водород атоми магнит моментини классик электродинамикадаги ифодасидан фойдаланиб ҳисоблаб топинг.

10.7. *Водород атоми асосий ҳолати учун $\rho(\boldsymbol{p})$ эҳтимоллик зичлигини топинг ((7.17) га қаранг).

Вазифаларнинг жавоблари ва маслаҳатлар

4.1. а) 2; б) $2\sqrt{2}$; в) 11; г) 1; д) $\frac{1}{e}$

4.4. $(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}$

4.5. а) мос равишда

$$2\sin(x) + 4x\cos(x) - x^2$$

ва

$$\sin(x) + 3x\cos(x) - x^2;$$

б) мос равишда

$$\left(2 + 8x + 4x^2\right) e^{2x}$$

ва

$$\left(1 + 6x + 4x^2\right) e^{2x}$$

4.6. $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$

4.7. а) ҳа; б) ҳа; в) ҳа; г) йўқ; д) агар α ҳақиқий бўлса, ҳа; е) ҳа; ж) йўқ

4.8. Маслаҳат: $e^{i\theta\hat{\sigma}}$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг

4.14. $\psi(x)\cosh(x) - \psi(-x)\sinh(x)$

4.15. Маслаҳат: транспонирлаш амалининг (4.5) аниқланишида dq – ҳажм элементини англатиб, унда декарт координаталаридан эгри чизиқли координаталарга ўтиш якобиани борлигини ҳособга олинг.

а) $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^+ = -\frac{2}{r} - \frac{\partial}{\partial r}$; б) $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^+ = -\frac{\partial}{\partial \varphi}$

в) $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^+ = -\mathrm{ctg}(\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}$ г) $\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^+ = -\frac{1}{\rho} - \frac{\partial}{\partial \rho}$

4.16. Агар $\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^+$ учун аввалги вазифанинг г) шартини бажаришда олинган натижа қўйилса

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right)^+ = \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \qquad (10.10)$$

ифодага келинади. Аммо бу натижа аниқ эмас. Ихтиёрий $\varphi(\rho)$ ва $\psi(\rho)$ функциялар учун, қисқалик учун тўлқин функциялар ρ аргументини тушириб қолдириб, ёзамиз:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \rho\psi \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right)^+ \varphi d\rho &= \int_0^{+\infty} \rho\varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right) \psi d\rho = \\ \int_0^{+\infty} \rho\varphi d\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) &= \rho\varphi\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} d\psi\left(\varphi + \rho\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) \\ &= \rho\varphi\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\bigg|_0^{+\infty} - \rho\psi\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\bigg|_0^{+\infty} - \varphi\psi\bigg|_0^{+\infty} + \\ &+ \int_0^{+\infty} \rho\psi\left(\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right)\varphi d\rho. (10.11)\end{aligned}$$

Тўлқин функциялар учун $\int_0^{+\infty} \rho|\psi(\rho)|^2 d\rho = 1$ нормировка шартидан $\lim_{\rho\to+\infty} \rho|\psi(\rho)|^2 = 0$ келиб чиқади. Шу сабабдан, (10.11) натижа қуйидаги кўринишга келади

$$-\varphi(0)\psi(0)+\int\limits_0^{+\infty}\rho\psi\left(\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)\varphi d\rho$$

Бу ердаги биринчи ҳад нолдан сезиларли фарқ қилиши мумкин ва тўғри жавобни (10.10) жавобдан фарқини аниқлайди. (10.10) ифоданинг хато эканлигига сабаб шуки, уни олишда $\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^+=-\frac{1}{\rho}-\frac{\partial}{\partial\rho}$ тенглик ишлатилди. Бу тенглик $\rho=0$ бўлганда, нормаровкаси чексизликка айланмайдиган ва демак $\rho\varphi\psi\Big|_0^{+\infty}=0$ хоссали тўлқин функциялар синфи учун ўринли. Лекин $\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^+\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^+$ оператор қаралганда чапда турган оператор, умумий ҳолда $\rho=0$ бўлганда чексизликка айланадиган тўлқин функцияга таъсир этади. Бундай функциялар эса $\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^+=-\frac{1}{\rho}-\frac{\partial}{\partial\rho}$ тенглик ўринли бўлган функциялар синфига кирмайди.

Ушбу вазифадаги фикрлашларни $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)^+$ ва $\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^+$ операторлар учун мустақил қўллаб кўринг.

4.17. Ихтиёрий $\varphi(q)$ тўлқин функция учун $\int\varphi\hat{F}^n\psi dq=0$ бажарилади (тўлқин функциялар аргументини ёзмаймиз). Интегрални ўзгартириб ёзайлик:

$$\begin{aligned}\int\varphi\hat{F}^n\psi dq &= \int\left(\hat{F}^{n-1}\psi\right)\hat{F}^T\varphi dq\\ &= \int\left(\hat{F}^{n-1}\psi\right)\left(\hat{F}\varphi^*\right)^*dq=0.\end{aligned}$$

Олинган тенгликни, энди, $\varphi(q)=\left[\hat{F}^{n-2}\psi(q)\right]^*$ бўлган тўлқин функцияга қўллаймиз:

$$\int \left(\hat{F}^{n-1}\psi\right)\left(\hat{F}\hat{F}^{n-2}\psi\right)^{*} dq = \int \left|\hat{F}^{n-1}\psi\right|^{2} dq = 0.$$

Бундан $\hat{F}^{n-1}\psi(q) = 0$ эканлиги келиб чиқади. Юқорида бажарилган фикарлашларни $n > 2$ учун қўллаб, оператор даражасини тушириб бориш мумкин; оқибатда қидирилган $\hat{F}\psi(q) = 0$ натижани оламиз.

5.2. 1

5.3. $-i\hbar\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$

5.4. $i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{x}_{\gamma}$, бу ерда $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – Леви – Чивита белгиси

5.5. $i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{p}_{\gamma}$

5.8. $\hat{l}_{+} = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\text{ctg}(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$, $\hat{l}_{-} = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\text{ctg}(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$

5.10. Маслаҳат: $\hat{f}(\lambda) = e^{\lambda\hat{G}}\hat{F}e^{-\lambda\hat{G}}$ операторни қаранг, бунда λ – сон параметр. $\hat{f}(\lambda)$ функцияни λ бўйича, (5.22) ни ҳисобга олган ҳолда, Маклорен қаторини қаранг ва $\hat{f}(1)$ ни ҳисобланг.

5.11. Маслаҳат: аввалги вазифада олинган натижадан фойдаланинг

5.12. а) йўқ; б) ҳа

5.15. $\hat{f}(\lambda) = e^{\lambda\hat{G}}e^{\lambda\hat{F}}$ операторни қарайлик, бунда λ – сон параметр. 5.10 вазифа натижасини қўллаб, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{f}(\lambda)}{d\lambda} &= \left(\hat{G}+e^{\lambda\hat{G}}\hat{F}e^{-\lambda\hat{G}}\right)\hat{f}(\lambda)\\ &= \left(\hat{G}+\hat{F}+\left[\hat{G},\hat{F}\right]\lambda\right)\hat{f}(\lambda).\end{aligned}$$

$\hat{f}(0)=\hat{E}$ – бирлик оператор эканлигини ҳисобга олиб, ушбу дифференциал тенглама ечимини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\hat{f}(\lambda)=e^{(\hat{G}+\hat{F})\lambda}e^{\frac{1}{2}[\hat{G},\hat{F}]\lambda^2}.$$

$\lambda=1$ деб олиб, Вейл айниятига келамиз.

6.1. б) Хусусий функциялар $\psi_\lambda(x)=Ce^{-\frac{\lambda}{\alpha}e^{-i\alpha x}}$, хусусий қиймат λ – ихтиёрий комплекс сон;

в) Хусусий функциялар $\psi_\lambda(x)=Ce^{a\lambda x-\frac{ax^2}{2}}$, хусусий қиймат λ – ихтиёрий комплекс сон;

г) Хусусий функциялар $\psi_k(x)=Ce^{ikx}$, хусусий қийматлар $\lambda_k=i\sinh(l)$, k – ихтиёрий ҳақиқий сон. Маслаҳат: ечимни $\psi(x)=Ce^{\gamma x}$ кўринишда қидиринг; оператордан функцияни (4.19) аниқланиш асосида қуйидаги хоссани исботланг: агар

$$\hat{F}\psi(q)=\lambda\psi(q)$$

бўлса,

$$f(\hat{F})\psi(q)=f(\lambda)\psi(q)$$

ўринли, бу ерда $f(\hat{F})$ – оператордан қандайдир функция. Бошқача ечим:

$$\sin\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=i\sinh\left(\frac{\hat{p}_x}{\hbar}\right)$$

эканлигини қўллаш.

д) Хусусий функциялар $\psi_m(\varphi) = Ce^{im\varphi}$, хусусий қийматлар $\lambda_m = \cos(m)$, m – ихтиёрий сонлар;

е) Хусусий функциялар $\psi_\lambda(x) = C\frac{\sin(\sqrt{-\lambda}x)}{x}$, хусусий қийматлар λ – манфий ҳақиқий сонлар. Маслаҳат: ечимни $\psi_\lambda(x) = \frac{\chi_\lambda(x)}{x}$ кўринишда қидириб, $\lim\limits_{x\to0}\psi_\lambda(x) = 0$ бўлишини талаб қилинг.

6.2. Ҳа, хусусий функция бўлади; унга -1 хусусий қиймат мос келади. Маслаҳат: цилиндрик ёки сферик координаталарга ўтинг

6.3. Агар λ – $\hat{A}$ операторнинг айнимаган хусусий қиймати бўлса, ҳа. Ага у айниган бўлса, бир қийматли жавоб бериб бўлмайди.

6.4. Бир қийматли жавоб бериб бўлмайди: коммутатив бўлмаган операторлар ўзларининг алоҳида хусусий қийматларига эга бўлиши мумкинлиги тақиқланмаган. Аммо бундай функциялар тўплами тўлқин функциялар фазосида базис ҳосил қилмайди.

6.5. Цилиндрик координаталарга ўтиб, (6.13) ва (6.18) ларни бирлаштириб қуйидаги жавобни оламиз:

$$\psi_{m,p}(\rho,\varphi,z) = e^{\frac{i}{\hbar}pz}e^{im\varphi}f(\rho),$$

бу ерда $f(\rho)$ – тўлқин функцияларга қўйилган барча талабларни қаноатлантирувчи ихтиёрий функция.

6.6. Хусусий қийматлар: $\lambda = \sqrt{2}$ ва $\lambda = -\sqrt{2}$. Хусусий функциялар

$$\psi_{\sqrt{2}}(q) = \frac{1-i}{2}\psi_1(q) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(q)$$

ва

$$\psi_{\sqrt{2}}(q) = \frac{1-i}{2}\psi_1(q)\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(q)$$

ёки матрицалар формализмида

$$|\psi_{\sqrt{2}}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad |\psi_{-\sqrt{2}}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Изоҳ: квант механикасида ҳолат векторлари фаза кўпайтувчигача аниқликда топилади, хусусан, ишорагача аниқликда. Масалан,

$$|\psi_{\sqrt{2}}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{i-1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

натижа ҳосил бўлиши мумкин эди.

6.7. а) $\{Y_{11}, Y_{10}, Y_{1,-1}\}$ базисда $\hat{l}_x$ ва $\hat{l}_y$ операторлар матрицалари, мос равишда, қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

6.8.

$$\begin{aligned} \langle lm|\hat{l}_x|lm\rangle &= \langle lm|\hat{l}_y|lm\rangle = 0, \quad \langle lm|\hat{l}_z|lm\rangle = m, \\ \langle lm|\hat{l}_x^2|lm\rangle &= \langle lm|\hat{l}_y^2|lm\rangle = \frac{l(l+1)-m^2}{2}, \\ \langle lm|\hat{l}_z^2|lm\rangle &= m^2. \end{aligned}$$

6.9. *Изоҳ:* олинган натижа маъноси шуки, топшириқ шартини қаноатлантирувчи $\hat{F}$ оператор учун $\hat{F}^n$ даража $\hat{E}, \hat{F}, \ldots, \hat{F}^{n-1}$ операторлар орқали чизиқли ифодаланади.

6.10. $\lambda\mu = 0$. Мисол сифатида $\hat{p}_x$ ва $\hat{I}$ инверсия операторларини қарайлик. Улар антикоммутатив, 6-мисолда $\hat{I}$ инверсия операторининг хусусий қийматлари $+1$ ва -1 эканлиги кўрсатилган эди [(6.26) га қаранг]. Ҳозир олинган натижадан $\hat{p}_x$ ва $\hat{I}$ операторларнинг умумий хусусий функцияси $\hat{p}_x$ операторнинг 0 хусусий қийматли хусусий функцияси бўлиши кераклиги келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, (6.14) тўлқин функциялар орасидан фақат $p = 0$ бўлган функциягина инверсия операторининг хусусий функцияси бўлади. Шунга ўхшаш фикрлашларни $\hat{x}$ ва $\hat{I}$ операторлар учун мустақил бажаринг.

6.11. $\hat{C}$ операторнинг, айнимаган хусусий қийматга мос, хусусий функцияси $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторларнинг ҳам хусусий функцияси бўлишини осон кўрстиш мумкин. Агар $\hat{C}$ оператор фақат айнимаган хусусий қийматларгагина эга бўлганда эди, уларга мос хусусий функциялар тўлиқ тўпламни ташкил қилган ва $\hat{A}$ ҳамда $\hat{B}$ операторлар коммутатив бўлар эди (“Бир пайтда ўлчаса бўладиган катталиклар” бандига қаранг). *Изоҳ:* баъзида, бу ҳолда $\hat{C}$ операторнинг барча хусусий қийматлари айниган бўлиши лозим, акс ҳолда $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар қандайдир умумий хусусий функцияларга эга бўлади, аммо буни бўлиши мумкин эмас, деган хато таъкидлар учрайди ([2] га қаранг). Лекин $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ коммутатив операторлар иккаласи учун умумий бўлмаган алоҳида хусусий функцияларга эга бўлиши ҳам мумкин (6.4-вазифани қаранг).

6.12. Кўрсатилган оператор чизиқли, аммо Эрмит эмаслигига эътибор бериш керак. $\hat{F}\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x)$ тенгламани ечиб, $\psi_\lambda(x) = Ce^{\lambda x + \frac{x^2}{2}}$ кўринишдаги ечимни оламиз. У λ нинг ихтиёрий қийматида $x \to \pm\infty$ бўлганда чексизликка интилади. Шундай қилиб, кўрсатилган оператор физикавий аҳамиятга эга бўлган хусусий функцияларга эга эмас.

7.2. Ўртача қийматларнинг иккиси ҳам нолга тенг.

7.3. 10-мавзунинг 1-мисолига қаранг.

7.4. $\langle l_x \rangle = 0$, $\langle l_y \rangle = 0$, $\langle l_z \rangle = m$. Масалан,

$$\langle l_x \rangle_\psi = \int\limits_0^{+\infty} r^2 dr \int\limits_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi f^*(r,\theta) e^{-im\varphi} \hat{l}_x f(r,\theta) e^{im\varphi}.$$

Сферик координаталарда $\hat{l}_x$ учун ифодани (5.15) дан олиб,

$$\begin{aligned} \langle l_x \rangle_\psi &= \int\limits_0^{+\infty} r^2 dr \int\limits_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi f^*(r,\theta) \times \\ &\times i \left(\sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial\theta} + im \mathrm{ctg}(\theta) \cos(\varphi) \right) f(r,\theta) \end{aligned}$$

натижани оламиз. У $\sin(\varphi)$ ва $\cos(\varphi)$ функциялардан φ бўйича интеграл туфайли нолга тенг.

(5.11) орқали берилган $[\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hat{l}_x$ коммутацион муносабатга ва Эрмит операторнинг (6.36) матрик элементлари хоссаларига асосланган, яна бир ечиш усулига тўхталамиз:

$$\begin{aligned}
\langle l_x \rangle_\psi &= \langle \psi | \hat{l}_x | \psi \rangle = -i \Big(\langle \psi | \hat{l}_y \hat{l}_z | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{l}_z \hat{l}_y | \psi \rangle \Big) \\
&= -i \Big(\langle \psi | \hat{l}_y m | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{l}_z | \hat{l}_y \psi \rangle \Big) \\
&= -i \Big(m \langle \psi | \hat{l}_y | \psi \rangle - \langle \hat{l}_y \psi | \hat{l}_z | \psi \rangle^* \Big) \\
&= -i \Big(m \langle \psi | \hat{l}_y | \psi \rangle - \langle \hat{l}_y \psi | m | \psi \rangle^* \Big) \\
&= -i \Big(m \langle \psi | \hat{l}_y | \psi \rangle - m \langle \psi | \hat{l}_y | \psi \rangle \Big) = 0.
\end{aligned}$$

Бу усулда интегралларни ҳисоблаш шарт эмаслигига эътибор беринг.

7.5. $P_\psi(l_z = 1) = P_\psi(l_z = -1) = \frac{9}{20}$, $P_\psi(l_z = 3) = P_\psi(l_z = -3) = \frac{1}{20}$, $\langle l_z \rangle_\psi = 0$, $\langle l_z^2 \rangle_\psi = \frac{9}{5}$.

7.6. $P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = 12) = \frac{8}{15}$, $P_\psi(l_z = 1) = \frac{1}{2}$.

7.7. $P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = 2) = \frac{1}{2}$, $P_\psi(\boldsymbol{l}^2 = 6) = \frac{1}{2}$, $\langle \boldsymbol{l}^2 \rangle = 4$.

7.9. $j_x(x) = |A|^2 \frac{\hbar k}{m} e^{-\frac{2x^2}{a^2}}$.

8.5. $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)}$.

8.6. $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_1(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + \psi_2(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \right]$. Физикавий катталикнинг (7.1) ўртача қийматини аниқланишини қўллаб, қуйидагини оламиз:

$$\langle E \rangle (t) = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \frac{1}{2}(E_1 + E_2).$$

8.7. $2iA = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

8.8. а) $\rho_{\psi_1}(p_x = p) = \frac{2a}{\pi^3\hbar}\left[1 + \cos\left(\frac{pa}{\hbar}\right)\right]\frac{1}{\left[1-\left(\frac{pa}{\pi\hbar}\right)^2\right]^2}$;

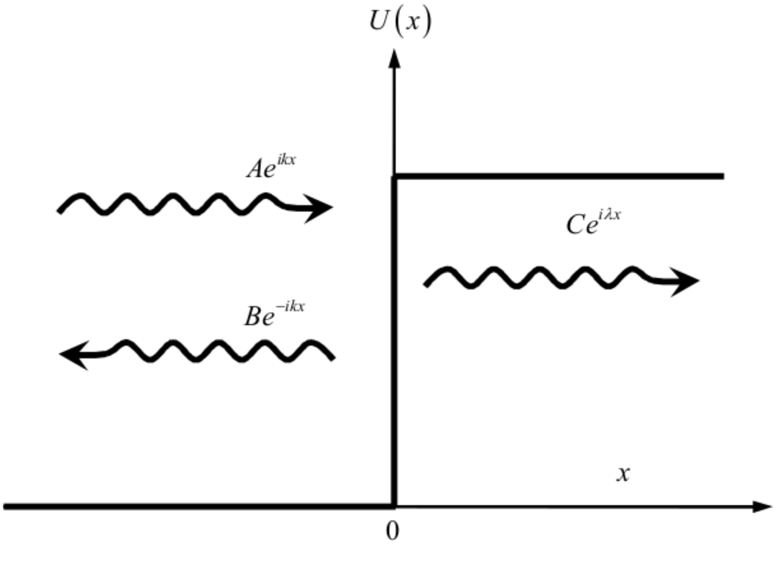
б) $\rho_{\psi_2}(p_x = p) = \frac{a}{2\pi^3\hbar}\left[1 - \cos\left(\frac{pa}{\hbar}\right)\right]\frac{1}{\left[1-\left(\frac{pa}{\pi\hbar}\right)^2\right]^2}$.

8.9. $P_\psi(E = E_1) = \frac{96}{\pi^4}$.

8.10. Зарранинг тўлқин функцияси

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x \leq 0, \\ Ce^{i\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

бу ерда $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\lambda = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$ (10.1-расм).



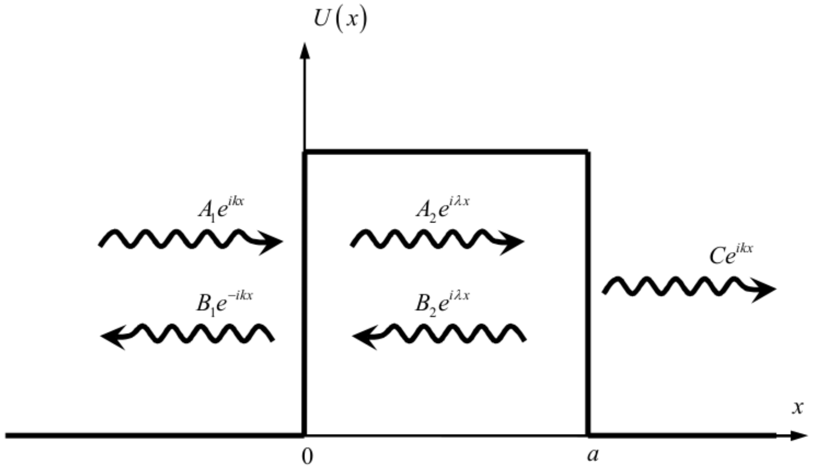
10.1 - расм: Потенциал “тўсиқ”. Тушаётган $\left(Ae^{ikx}\right)$, қайтган $\left(Be^{-ikx}\right)$ ва ўтган $\left(Ce^{i\lambda x}\right)$ тўлқинлар схемтик равишда кўрсатилган.

Коэффицентлар $B = \frac{k-\lambda}{k+\lambda}A$ ва $C = \frac{2k}{k+\lambda}A$ тўлқин функция ва унинг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласи узлуксизлиги шартидан топилади. $R = \left(\frac{k-\lambda}{k+\lambda}\right)^2$, $D = \frac{4k\lambda}{(k+\lambda)^2}$. Бунда $R + D = 1$ бўлиши тушунарли. Шундай қилиб, классик механикадан фарқли равишда, энергияси тўсиқ баландлигидан катта бўлишига қарамасдан, заррани тўсиқдан қайтиши учун нолдан фарқли эҳтимоллик мавжуд.

8.11. Аввалги вазифа топшириғидан фарқ, зарра энергияси E тўсиқ баландлиги U_0 дан кичик. Тўсиқдан орқадаги соҳада тўлқин сони мавҳум бўлиб қолади: $\lambda = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar = \pm i\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar = \pm i|\lambda|$. Бунда "$-$" ишорали ечимни ташлаб юборамиз, чунки $x \to +\infty$ да у $Ce^{|\lambda|x}$ чексиз ортиб борадиган, физикавий маънога эга бўлмаган ечим. "$+$" ишорали $Ce^{-|\lambda|x}$ ечим тўсиқдан ўнг тарафда $\delta = 1/\lambda$ масофада сўниб борувчи тўлқинга мос келади. Шундай қилиб, классик механикадан фарқли равишда, заррани тўсиқдан ўнгда топиш эҳтимоли мавжуд; классик лимитда ($\hbar \to 0$) тўсиқости ўтиш чуқурлиги $\delta = 0$. Яна, $j = 0$, $D = 0$ ва демак, $R = 1$.

8.12. $D = \left|\frac{C}{A_1}\right|^2 = \frac{4E(E-U_0)}{4E(E-U_0)+U_0^2\sin^2\left(\sqrt{2m(E-U_0)a/\hbar}\right)}$ (10.2-расмга қаранг).

8.13. $D = \frac{4E(E-U_0)}{4E(E-U_0)+U_0^2\sinh^2\left(\sqrt{2m(E-U_0)a}/\hbar\right)}$. Шундай қилиб, классик механикадан фарқли равишда, тўсиқ баландлигидан кичик энергияли заррани чекли кенгликдаги тўсиқдан сизиб ўтиши – туннел эффекти содир бўлиши мумкин.



10.2 - расм: Тўғри бурчакли потенциал ўра.

8.14. Операторлар кўпайтмаси (6.38) матрик элементини ҳисоблаш қоидасидан фойдаланиб, кўрсатилган ўртача қийматни ёзамиз:

$$\left\langle \psi_k \left| \left[\hat{x}, \left[\hat{H}, \hat{x}\right]\right] \right| \psi_k \right\rangle \;=\; \left\langle \psi_k \left| 2\hat{x}\hat{H}\hat{x} - \hat{x}^2\hat{H} - \hat{H}\hat{x}^2 \right| \psi_k \right\rangle$$
$$2\sum_n \langle\psi_k|x|\psi_k\rangle E_n \langle\psi_k|x|\psi_k\rangle \;-\; 2\sum_n \langle\psi_k|x|\psi_k\rangle\langle\psi_k|x|\psi_k\rangle E_k.$$

(8.4) гамильтониан учун $\left[\hat{x}, \left[\hat{H}, \hat{x}\right]\right]$ коммутатор $\frac{\hbar^2}{m}$ доимийга тенглигини ҳисобга олсак, талаб қилинган тенгликни оламиз.

9.2. (9.5) тенгламага $\psi_0(\xi) = Ae^{-\beta\xi^2}$ функцияни қўйиш ва тенглама айний жиҳатдан нол бўлиши учун $e^{-\beta\xi^2}$ ҳамда $\xi^2 e^{-\beta\xi^2}$ ҳадлар олдида турган коэффициентларни нолга тенглаш $\beta = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_0 = 1$ натижага олиб келади.

9.3. $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ бўлганлигидан $C = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}$. Қуйидаги

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}|C|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\psi_n + i\psi_{n+1})^*(\psi_n + i\psi_{n+1})d\xi$$

интегрални ҳисоблаш $\langle x\rangle = 0$ ни беради. Шунга ўхшаш, $\langle p_x\rangle = 0$.

9.4.

$$\begin{aligned}\langle x^4\rangle &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 (6n^2 + 6n + 3),\\ \langle p_x^4\rangle &= \left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^2 (6n^2 + 6n + 3).\end{aligned}$$

9.6. 1.

9.9. Куч $F = const.$ ўзгармас бўлганда осциллятор потенциали: $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} - F\cdot x$. Бу ерда x бўйича тўлиқ квадратни ажратиб, $\tilde{x} = x - \frac{F}{m\omega^2}$ янги ўзгарувчи киритинг. Хусусий функциялар чизиқли осцилляторнинг, мувозанат маркази силжиган, $\psi_n(\tilde{x}) = \psi_n\left(x - \frac{F}{m\omega^2}\right)$ хусусий функциялари билан мос тушади. Энергия сатҳлари бўлса, осциллятор энергия сатҳларидан $-\frac{F^2}{2m\omega^2}$ га силжиган:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{F^2}{2m\omega^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

9.10. Қуйидаги шартлардан ҳеч бўлмаганда бири бажарилганда:

а) $k < |n - m|$; б) $n + k + m$ – тоқ сон.

10.1. $\sum\limits_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2$.

10.2. а) $\frac{3}{2}a$; б) $6a$; в) $5a$; г) $\frac{21}{2}a$.

10.3. Кўрсатмадан фойдаланиб, қуйидагиларни оламиз:

$$\begin{aligned} \langle x^2\rangle &= \frac{1}{3}\langle r^2\rangle = \frac{4\pi}{3\pi a^3}\int\limits_0^{+\infty} r^4 e^{-\frac{2r}{a}}dr = a^2. \\ \langle p_x^2\rangle &= \frac{1}{3}\langle p^2\rangle = \frac{4\pi\hbar^2}{3\pi a^3}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{r}{a}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial e^{-\frac{r}{a}}}{\partial r}\right)dr = \frac{\hbar^2}{3a^2}. \end{aligned}$$

Оқибатда, 1-мисолдаги натижани оламиз.

10.5. Атомда электрон токи зичлиги электрон зарядини (7.19) эҳтимоллик оқими зичлигига кўпайтириб аниқланади:

$$\boldsymbol{j}_{nlm} = -\frac{ie\hbar}{2m_e}\left(\psi_{nlm}\nabla\psi_{nlm}^* - \psi_{nlm}^*\nabla\psi_{nlm}\right),$$

бу ерда e – электрон заряди, m_e – электрон массаси. ∇ операторининг сферик координаталардаги (10.13) ифодасини қўллаб, қуйидагини оламиз:

$$\boldsymbol{j}_{nlm} = -\frac{me\hbar}{m_e r\sin(\theta)}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

бу ерда m – магнит квант сони, $\boldsymbol{e}_\varphi$ – сферик координаталар тизимидаги базис вектор. Электрон спини ҳисобга олинмаганда, атомнинг магнит моменти қуйидагига тенг бўлиб чиқади:

$$\boldsymbol{M}_{nlm} = \frac{1}{2c}\iiint\limits_\infty [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{j}_{nlm}]\,dV = -m\mu_B\boldsymbol{e}_z,$$

бу ерда $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$ – Бор магнетони.

10.7. $\rho_\psi(\boldsymbol{p}) = \frac{8\hbar^5}{\pi^2 a^5}\left(p^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}\right)^{-4}$.

Илова

Комплекс сонлар

Комплекс сон модули қуйидагича топилади:

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Бунда

$$(x + iy)(x + iy)^* = (x + iy)(x - iy) = |x + iy|^2$$

эканлигини таъкидлаймиз.

Эйлер формуласи қуйидаги кўринишга эга:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

Сферик координаталар

Декарт координаталар системасидаги (x, y, z) координаталарнинг (r, θ, φ) сферик координаталар орқали ифодалари:

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \\ z = r\cos(\theta). \end{cases} \tag{10.12}$$

Қандайдир $f(\boldsymbol{r})$ скаляр функциянинг градиенти ва унга лаплас операторининг таъсирини декарт ва сферик координаталардаги ифодаларини келтирамиз:

$$\nabla f(\boldsymbol{r}) \;=\; \boldsymbol{e}_x\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial f}{\partial z} \tag{10.13}$$

$$= \boldsymbol{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \boldsymbol{e}_\varphi \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right),$$

$$\begin{aligned} \Delta f(\boldsymbol{r}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (10.14) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Цилиндрик координаталар

Декарт координаталар системасидаги (x, y, z) координаталарнинг (ρ, φ, z) цилиндрик координаталар орқали ифодалари:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi), \\ y = \rho \sin(\varphi), \\ z = z. \end{cases} \qquad (10.15)$$

Баъзи аниқ интеграллар

$\Gamma(k)$ – Эйлернинг гамма-функцияси:

$$\int\limits_0^{+\infty} \xi^{k-1} e^{-\xi} d\xi = \Gamma(k). \qquad (10.16)$$

Аргументининг натурал қийматлари учун $\Gamma(k) = (k-1)!$.

Эйлер – Пуассон (хатолик) интеграли:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}. \tag{10.17}$$

Риманнинг $\zeta(s)$ зета-функцияси орқали ҳисобланадиган

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

интегрални қарайлик. Бунда

$$\frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n, \quad |\xi| < 1$$

геометрик прогрессия қоторидан фойдаланамиз. Демак,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1-e^{-x}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^3 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x} dx. \end{aligned}$$

Қисмлаб интеграллаб, қуйидаги натижага келамиз:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+1)^3} \int_0^{\infty} e^{-(n+1)x} dx \\ &= 3! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = 3! \zeta(4). \end{aligned} \tag{10.18}$$

Бу ерда Риман $\zeta(s)$ зета-функциясининг

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

аниқланишини қўлладик. Хусусий ҳолда, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Шундай қилиб, қуйидагини оламиз:

$$I = 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Водород атоми учун радиал фунциялар

Қуйидаги жадвалда бош квант сонининг $n = 1,2,3$ қийматлари учун $R_{nl}(r)$ радиал функциялар кўриниши келтирилган.

n	l	$R_{nl}(r)$
1	0	$\frac{2}{\sqrt{a^3}}e^{-\frac{r}{a}}$
2	0	$\frac{1}{\sqrt{2a^3}}\left(1-\frac{r}{2a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}$
2	1	$\frac{1}{2\sqrt{6a^3}}\frac{r}{a}e^{-\frac{r}{2a}}$
3	0	$\frac{2}{3\sqrt{3a^3}}\left(1-\frac{2r}{3a}+\frac{2r^2}{27a^2}\right)e^{-\frac{r}{3a}}$
3	1	$\frac{8}{27\sqrt{6a^3}}\frac{r}{a}\left(1-\frac{r}{6a}\right)e^{-\frac{r}{3a}}$

3	2	$\frac{4}{81\sqrt{30a^3}}\frac{r^2}{a^2}e^{-\frac{r}{3a}}$

Сферик функциялар

Қуйидаги жадвалда орбитал квант сонининг $l = 0, 1, 2$ қийматлари учун $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ сферик функциялар кўриниши келтирилган. Изоҳ: адабиётларда сферик функциялар турли комплекс фаза билан аниқланади. Бу ерда [2] китобда танланган фазалар қабул қилинган.

l	m	$Y_{lm}(\theta, \varphi)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta)$
1	±1	$\pm i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{\pm i\varphi}$
2	0	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(1 - 3\cos^2(\theta)\right)$

l	m	$Y_{lm}(\theta,\varphi)$
2	±1	$\pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin(\theta)\cos(\theta)e^{\pm i\varphi}$
2	±2	$-\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2(\theta)e^{\pm 2i\varphi}$
3	0	$-i\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\cos(\theta)\left(5\cos^2(\theta)-3\right)$
3	±1	$\pm i\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\sin(\theta)\left(5\cos^2(\theta)-1\right)e^{\pm i\varphi}$
3	±2	$-\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\sin^2(\theta)\cos(\theta)e^{\pm 2i\varphi}$
3	±3	$\pm i\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3(\theta)e^{\pm 3i\varphi}$

Адабиётлар рўйхати

1. Соловьев О.В. и др. Квантовая теория (практический курс). Институт физики, КФУ. Казань, 2020. 110 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.3, Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматлит, 2008. 800 с.