O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI
O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

FIZIKA FAKULTETI
NAZARIY FIZIKA KAFEDRASI

NISHONOV M.M.

SOCHILISH NAZARIYASI

maruza matnlari

TOSHKENT – 2025

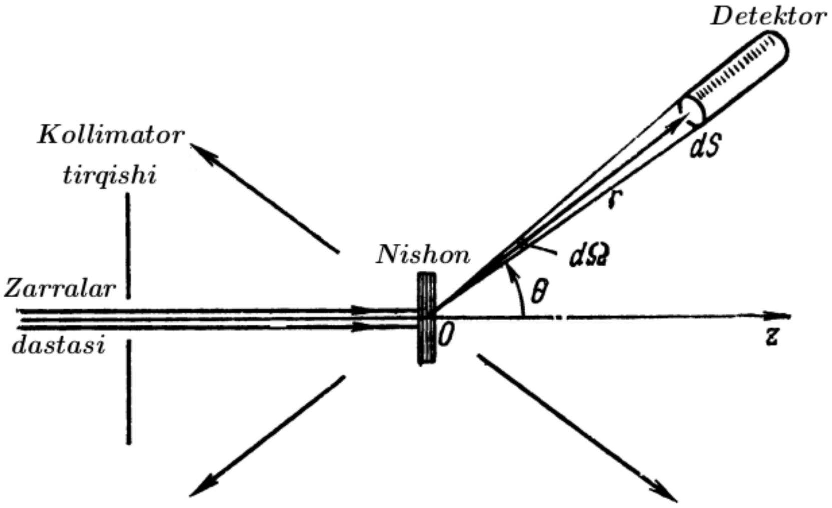
MUNDARIJA

SOCHILISHGA OID EKSPERIMENT VA SOCHILISH KESIMI

Klassik mexanikada ikkita zarraning oʻzaro taʼsiri natijasida biror zarraning harakat yoʻnalishi oʻzgarsa, bunday hodisa sochilish hodisasi deb yuritiladi va bu holda ikkala zarralarning tezliklari va nishon masofasi orqali ularning toʻqnashuvi toʻla-toʻkis aniqlanadi. Kvant mexanikasida esa sochilish hodisasi kengroq maʼnoda tushuniladi, chunki zarralarni oʻzaro taʼsiri natijasida ularning ichki holatlarining oʻzgarishi ham yuz berishi mumkin. Maʼlumki, sochilishni tadqiq qilishning eng yaxshi usullaridan biri – qoʻzgalmas atomni yoki zarrani katta tezlikka ega boʻlgan elektronlar yoki radioaktiv moddalarning α-zarralari bilan bombardimon qilish. Oʻzaro taʼsir natijasida birlamchi dastadagi zarralarning bir qismi oʻzining harakat yoʻnalishini oʻzgartiradi yoki boshqa zarralarga aylanadi. Shu tufayli kvant mexanikasida ikki xil toʻqnashuvlar haqida soʻz yuritiladi: elastik va noelastik toʻqnashuv. Birichi holda, yaʼni elastik toʻqnashuvda, zarralarning soni, energiyasi, ichki tuzilishlari oʻzgarmasdan qoladi, faqat ularning harakat yoʻnalishi oʻzgaradi. Ikkinchi holda esa, yaʼni noelastik toʻqnashuv natijasida, zarralarning energiyasi oʻzgaradi, yangi zarralar paydo boʻladi va hokazo. Haqiqatdan ham, atom yadrosining mavjudligi, α-zarralarning sochilish jarayonini tahlil qilish natijasida, Rezerford tomonidan aniqlangan.

Moddaning mikroskopik tarkibini aniqlashda oʻzaro toʻqnashuv hodisalarini har tomonlama tahlili markaziy oʻrin tutadi. Umuman olganda, zarralarning oʻzaro taʼsiri toʻgʻrisidagi barcha maʼlumotlar ularning sochilishiga doir tajribalarda aniqlangan edi. Yadrodagi neytronlarning sochilishini tahlil qilish natijasida mashxur fizik Nils Bor tomonidan yadro tuzulishining hozirgi zamon tassavurlarini ifodalab berish imkoniyati yaratildi. Umuman olganda, zarralarning oʻzaro taʼsiri toʻgʻrisidagi barcha maʼlumotlar sochilish qonunlarining oʻrganilishi natijasida kelib chiqishi ayon boʻldi.

Sochilishga oid eksperimentlarda oʻlchanadigan fizikaviy kattalikni aniqlaymiz. 1-rasmda tasvirlanganidek, klassik yoki kvant zarra nishonga urilib, unda sochilayotgan boʻlsin. Bunday eksperimentlarda, nishon markazida tanlangan



1-rasm: Zarralarni sochilishiga oid eksperiment sxemasi

koordinatalar boshidan yetarli darajada uzoq masofada turgan qandaydir joyda, sochilgan zarralarning soni oʻlchanadi. Rasmda nayzalar orqali sochilgan zarralar koʻrsatilgan. Belgilash kiritaylik: N – bu z oʻqi yoʻnalishida birlik yuzadan bir soniyada oʻtib, nishonga tushayotgan zarralar soni; ΔN – bir soniyada dS yuzadan oʻtayotgan, ya'ni markazi O koordinata boshida joylashgan r radiusli sferaning dS elementiga normal boʻylab tushayotgan, sochilgan zarralar dastasi intensivligi boʻlsin. U holda quyidagiga ega boʻlamiz:

$$\Delta N \propto N\frac{dS}{r^2}.$$

Endi dS yuza O koordinata boshidan qaraganda koʻrinadigan $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$ fazoviy burchak kiritsak,

$$\Delta N = \sigma(\theta)\, N\, d\Omega, \tag{0.0.1}$$

ifodani yozish mumkin, bu yerda proporsionallik koeffitsienti $\sigma(\theta)$ – yuqoridagi 1-rasmda koʻrsatilgan θ burchakning funksiyasi. θ burchak *sochilish burchagi* deyiladi. (0.0.1) formuladan, $\sigma(\theta)$ – bu tushayotgan dastada birlik yuzadan bir soniyada bitta zarra oʻtganda θ burchak yoʻnalishida birlik fazoviy burchakka sochilgan zarralar ulushi ekanligi, koʻrinib turibdi. $\sigma(\theta)$ kattalik yuza oʻlchov birligiga ega, chunki $[N] = sm^{-2} \cdot s^{-1}$, $[\Delta N] = s^{-1}$. Shu sababdan uni sochilishning *differensial kesimi* deb atashadi. $\sigma(\theta)$ dan fazoviy burchak boʻyicha olingan integralni esa sochilishning *to'liq kesimi* deyishadi:

$$\sigma^{\text{to'liq}} = \int \sigma(\theta) d\Omega. \tag{0.0.2}$$

To'liq kesim, birlik yuzadan bir soniyada bitta zarra o'tganda, tushayotgan zarralarning qanchasi sochilganligini anglatadi. Nishon – kichik o'lchamli disk bo'lsin. Agar unga klassik zarralar tushayotgan bo'lsa, ular sochilishining to'liq kesimi disk yuzasiga teng. Shunga o'xshab, agar atomning Bor radiusini $a_0 = 5{,}29 \times 10^{-9}\, sm$ desak, elektronlarni atomda sochilishining to'liq kesimi $\sigma^{\text{to'liq}} \sim a_0^2 = 2{,}8 \times 10^{-17}\, sm^2$ kattalik tartibiga ega bo'ladi. Agar nishon – atom yadrosi yoki elementar zarra bo'lsa, sochilish kesimi $10^{-24}\, sm^2$ kattalik tartibida bo'ladi. Shuning uchun yadro va elementar zarralar fizikasida sochilish kesimining o'lchov birligi sifatida

$$\begin{aligned} 1\,\text{b} &= 1\,\text{barn} &&\equiv 10^{-24}\, sm^2, \\ 1\,\text{mb} &= 1\,\text{millibarn} &&\equiv 10^{-27}\, sm^2 \end{aligned}$$

kattaliklar ishlatiladi.

Alohida atom yoki atom yadrolari real eksperimentda nishon vazifasini bajara olmasligi tushunarli, albatta. Nishon sifatida moddalarning, juda ko'p miqdordagi atom yoki molekulalardan iborat, yupqa plastinkalari olinadi.

$\sigma(\theta)$ differensial kesimni, turli θ burchaklarda sochilgan zarralar dastasining nisbiy zichligini o'lchab, aniqlash mumkin. Barcha fazoviy burchaklar bo'yicha differensial kesimlarning yig'indisi to'liq kesimga teng bo'lishi lozim.

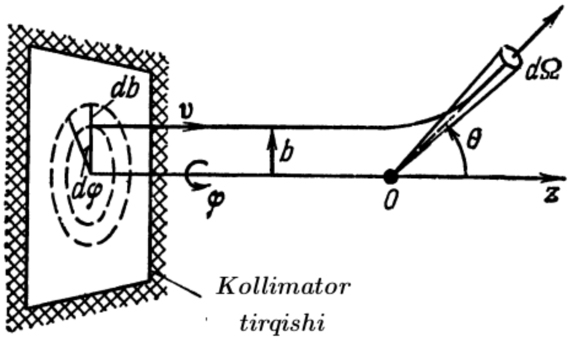
Aytilganlardan, sochilish nazariyasining maqsadi – sochilish kesimini nazariy hisoblash ekanligi, tushunarli.

1-BOB. KLASSIK SOCHILISH NAZARIYASI

Birinchi qadamda klassik mexanikada sochilsish nazariyasini o‘rganish maqsadga muvofiq. Shundan so‘ng kavant mexanikasidagi sochilish masalasining xususiyatlari tushunarli bo‘ladi.

1.1 Sochilish kesimi

Klassik zarra, O koordinata boshiga nisbatan sferik simmetrik potensialda, sochilayotgan bo‘lsin. Bu holat 1.1.1-rasmda tasvirlangan. Klassik zarra traektoriyasi, to‘g‘ri burchakli tirqishdan o‘tgach, uning tirqish tekisligidagi joyi va tezligi bilan to‘liq aniqlanadi.[1] Agar sochilishdan avval tushayotgan klassik zarraning v tezligi berilgan bo‘lsa, sochilish yo‘nalishi tushayotgan zarra traektoriyasidan z o‘qigacha bo‘lgan b masofa bilan to‘liq aniqlanadi (1.1.1-rasm). Oqibatda θ sochilish burchagi b masofaning funksiyasi bo‘lib qoladi. Va aksincha b masofani θ sochilsih burchagining $b = b(\theta)$ funksiyasi deb hisoblash mumkin. b kattalik *mo‘ljal masofasi* yoki *zarba parametri* deyiladi. Bunda θ yo‘nalishda kichik $d\Omega$ fazoviy burchakka sochilgan zarralar cheksiz kichik $b\,db\,d\varphi$ yuza elementidan sizib o‘tganligi ko‘rinib turibdi, φ – bu z o‘qiga nisbatan azimutal burchak. Agar tirqishning birlik yuzasiga bir soniyada bitta zarra tushayotgan bo‘lsa, tirqishning $b\,db\,d\varphi$ yuza elementidan birlik vaqt mobaynida o‘tish ehtimolligi ushbu elementning $b\,db\,d\varphi$ yuzasiga teng.



1.1.1 - rasm: Klassik mexanikada sochilish

---

[1] Kvant mexanikasidagi noaniqlik munosabati tufayli, agar zarraning tezligi aniq ma’lum bo‘lsa, tirqish tekisligida zarraning joyi ma’lum emas.

Shu sabab

$$d\sigma = b\,db\,d\varphi = b(\theta)\frac{db(\theta)}{d\theta}d\theta\,d\varphi$$

boʻladi. Bu ifoda cheksiz kichik $d\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ fazoviy burchakka sochilish ehtimolligini beradi. Demak, birlik fazoviy burchakka sochilish ehtimolligi, ya'ni $\sigma(\theta)$ sochilish kesimi

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db(\theta)}{d\theta}\right|, \tag{1.1.1}$$

formula bilan ifodalanar ekan. Shunday qilib, agar avvaldan $b(\theta)$ traektoriya funksiyasi ma'lum boʻlsa, klassik mexanikada differensial kesimni (1.1.1) formula yordamida hisoblab topish mumkin. Bunda $db/d\theta$ moduli olinganligini sababi, u b moʻljal masofasi va potensialga bogʻliq ravishda, musbat yoki manfiy boʻlishi mumkin. Ammo $\sigma(\theta)$ ehtimollik ma'nosida boʻlganligi sababli, u doim musbat boʻlishi kerak.

Misollar ishlash

1. **Klassik zarrani potensial oʻrada sochilishi.** Yuqorida yoritilgan nazariyani, m massali klassik zarrani markazi O koordinata boshida joylashgan r radiusli

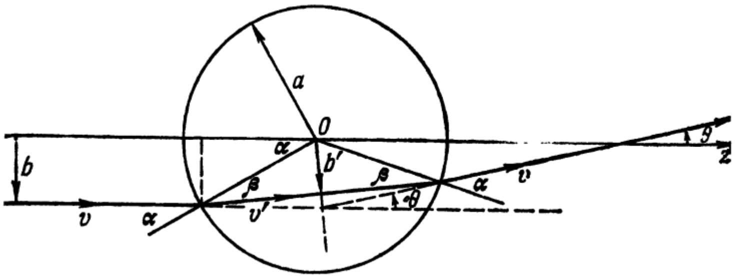
$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{agar} \quad r < a; \\ 0 & \text{agar} \quad r > a \end{cases} \tag{1.1.2}$$

sferik simmetrik potensial oʻrada, sochilishiga qoʻllaylik, bunda $V_0 > 0$. v tushayotgan zarra tezligi, b – moʻljal masofasi boʻlsin. Potensial oʻra ichida zarra tezligini v', koordinata boshidan zarra traektoriyasigacha masofani b' orqali belgilaylik (1.1.2-rasm). Energiyaning saqlanish qonunidan

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,v'^2 - V_0, \tag{1.1.3}$$

munosabat oʻrinli. Bundan tashqari, O koordinata boshiga nisbatan impuls momentining saqlanish qonuniga koʻra quyidagiga egamiz:

$$m\,v\,b = m\,v'\,b'. \tag{1.1.4}$$



1.1.2 - rasm: Klassik zarrani potensial oʻrada sochilishi

(1.1.3) tenglamadan

$$v' = \sqrt{v^2 + \frac{2V_0}{m}}$$

ifodani olamiz. α – zarraning potensial oʻra sirtiga tushish burchagi, β boʻlsa – sinish burchagi boʻlsin. 1.1.2-rasmdan,

$$b = a\,\sin\alpha, \quad b' = a\,\sin\beta \tag{1.1.5}$$

munosabatlarni yozish mumkin. Demak,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b}{b'}$$

ekan. (1.1.4) munosabatni hisobga olib, potensial oʻra chegarasida sinish qonunini olamiz:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{v^2 + \frac{2V_0}{m}}}{v} > 1. \tag{1.1.6}$$

Ushbu formulani yorugʻlikning sinish qonuni bilan taqqoslaylik. Yorugʻlikning vakuumdagi tezligini v, muhitdagisini esa v' bilan belgilaymiz. Yorugʻlikning sinish qonuni quyidagi koʻrinishga ega:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v}{v'},$$

ya'ni (1.1.6) qonunga nisbatan teskari boʻladi.[1]

1.1.2-rasmdan

$$\theta = 2(\alpha - \beta), \tag{1.1.7}$$

---

[1] Bunday nomutanosiblik, (1.1.6) formulada zarralarning guruh tezligi, yorugʻlikning sinish qonunida boʻlsa, toʻlqinlarning faza tezligi turganligidan kelib chiqadi.

ekanligi ma’lum va bu munosabat θ sochilish burchagini (1.1.5) da aniqlangan b mo‘ljal masofasi bilan bog‘lashga imkon beradi. Avval, (1.1.7) formuladan foydalanib, quydagini yozamiz:

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \beta\right).$$

$\gamma \equiv v'/v$ belgilash kiritib, (1.1.6) yordamida sinish burchagidan halos bo‘lib, quyidagini olamiz:

$$\sin^2\alpha = \frac{\gamma^2 \sin^2(\theta/2)}{\gamma^2 - 2\gamma\,\cos(\theta/2) + 1}.$$

Bu ifodani (1.1.5) dagi birinchi formulaga qo‘yib,

$$b^2(\theta) = a^2\sin^2\alpha = \frac{a^2\gamma^2 \sin^2(\theta/2)}{\gamma^2 - 2\gamma\,\cos(\theta/2) + 1} \tag{1.1.8}$$

ekanligini topamiz. (1.1.1) formulani, xususiy holda, quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}b^2(\theta). \tag{1.1.9}$$

Shu sabab, differensial kesimni topish uchun, (1.1.8) ifodani bevosita differensiallash mumkin. Bundan

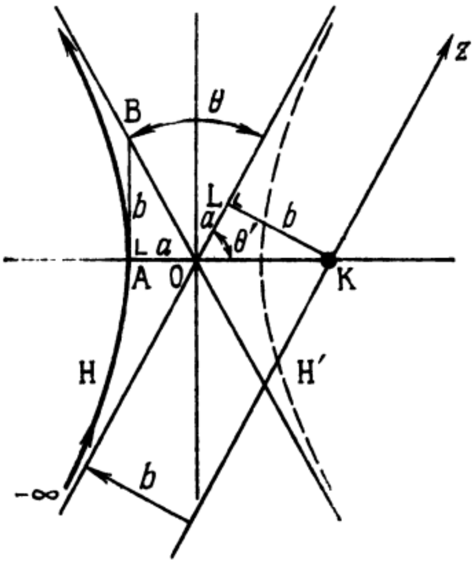
$$\sigma(\theta) = \frac{a^2\gamma^2}{4\cos(\theta/2)} = \frac{[\gamma - \cos(\theta/2)][1 - \gamma\cos(\theta/2)]}{[\gamma^2 - 2\gamma\,\cos(\theta/2) + 1]^2}, \tag{1.1.10}$$

natijaga kelamiz. Bu yerda $\gamma \equiv v'/v > 1$ va $a \geq b \geq 0$. Shuning uchun (1.1.10) formulada θ sochilish burchagi cheklangan. Ko‘rsatilgan chegaralarda (1.1.10) kattalik doim musbat. To‘liq kesimni (1.1.10) ni θ bo‘yicha integrallab topish mumkin, lekin (1.1.5) dan foydalanish natijaga osonroq olib keladi. Xaqiqatdan ham, 1.1.2-rasmdan, α tushish burchagi 0 dan $\pi/2$ oraliqda o‘zgaradi. Demak,

$$\sigma^{\text{to‘liq}} = 2\pi\int\limits_0^a b\,db = 2\pi\,a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha = \pi\,a^2 \tag{1.1.11}$$

ekan. Bu natija to‘g‘ri burchakli potensial o‘raning geometrik ko‘ndalang kesimi bilan mos tushadi.

2. **α-zarralarni og‘ir yadrolarda sochilishi.** α-zarralarni (He atomining yadrosi) og‘ir yadrolarda sochilishi Rezerford sochilishi deb ham ataladi. Bu hodisani klassik mexanika asosida qarab chiqaylik. Yadro massasi α-zarraning m massasidan ancha og‘ir deb hisoblaymiz. U holda, yadro α-zarra bilan to‘qnashguncha va to‘qnashgandan keyin tinch turadi. Ze zaryadli og‘ir yadro va zaryadi Q bo‘lgan α-zarra orasida Kulon itarilsih kuchlari mavjud. Klassik mexanikadan ma’lumki, sochilayotgan α-zarra giperbola bo‘ylab harakatlanadi. 1.1.3-rasmda bu giperbola H harfi bilan belgilangan. Chizmada K nuqta yadro joyini ko‘rsatyapti, u rasmda o‘ng tomandagi uzuq chiziqlar bilan tasvirlangan H$'$ giperbolaning fokusi. Giperbola xossalaridan $\overline{OA} = \overline{OL} = a$, $\overline{AB} = \overline{LK} = b$ ekanligini yozish mumkin. U holda



1.1.3 - rasm: Rezerford sochilishi

$$\overline{OK} \equiv \varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \overline{AK} \equiv l = a + \varepsilon.$$

Bundan tashqari, $a = \varepsilon \cos\theta'$ va $b = \varepsilon \sin\theta'$, Ushbu munosabatlardan

$$l = \varepsilon(1 + \cos\theta') = b\frac{1 + \cos\theta'}{\sin\theta'} = b \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta'}{2}\right) \tag{1.1.12}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerda b – bu α-zarraning mo‘ljal masofasi.

Tirqishlarlar nuqtasida (1.1.3-rasmda $-\infty$ nuqta) va A nuqtada yozilgan energiya va impuls momentining saqlanish qonunlaridan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m\, v^2 &= \frac{1}{2} m\, v_A^2 + \frac{Ze\,Q}{l}, && (1.1.13) \\ m\, v\, b &= m\, v_A\, l && (1.1.14) \end{aligned}$$

ifodalarni olamiz. Bu yerda v – sochilguncha tushayotgan zarra tezligi, v_A – uning A nuqtadagi tezligi. (1.1.12) – (1.1.14) formulalarda l va v_A kattaliklardan halos bo‘lib, quyidagini olamiz:

$$b = \frac{Ze\,Q}{m\, v^2}\,\mathrm{tg}\theta' = \frac{Ze\,Q}{m\, v^2}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right). \qquad (1.1.15)$$

(1.1.15) dagi tengliklarning oxirgisida $\theta' = (\pi - \theta)/2$ munosabat ishlatilgan. (1.1.15) ni (1.1.1) ga qo‘yib, sochilishning differensial kesimini topamiz:

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{Ze\,Q}{2m\, v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \qquad (1.1.16)$$

(1.1.16) differensial kesim kichik θ larda katta qiymatlarga ega, ya’ni oldinga sochilishda va $\theta = 0$ bo‘lganda u cheksizlikka aylanadi. Shu sababdan fazoviy burchak bo‘yicha (1.1.16) dan olingan integral uzoqlashadi. Ushbu uzoqlashishning sababi, Kulon itarilish kuchlari α-zarra yadrodan uzoq masofalarda bo‘lganda ham ta’sir qilaveradi. Aslida esa atom yadrolari yaqinida har doim, yadroning musbat zaryadini “to‘suvchi”, elektonlar mavjud. Natijada yadro-nishonga yaqin turgan α-zarraga Kulon kuchlari ta’sir etmaydi. Agar ushbu “to‘siq” hisobga olinsa, oldinga sochilish uchun differensial kesim chekli qiymatga ega bo‘ladi va to‘liq kesim uzoqlashmaydi.

1.2 Laboratoriya va massalar markazi sanoq tizimlari

Sochilishga doir eksperimentlarda 1-rasmda koʻrsatilgan hol koʻp uchraydi. Bunda zarralar, tinch turgan nishonga kelib, uriladi. Toʻqnashguncha nishon tinch turgan bunday sanoq tizimi *laboratoriya sanoq tizimi* deyiladi. Nazariy tadqiqodlarda boʻlsa, tushayotgan zarra va nishon massalari markazi harakatini ularning nisbiy harakatidan alohida qarash qulay hisoblanadi. Gap shundaki, ikkita zarradan iborat sistemaning oltita erkinlik darajasi, massa markazi harakati ajratib olingach bitta zarradan iborat sistemadagi kabi, uchta erkinlik darajasigacha kamayadi. Shu sababdan harakatni nazariy tadqiq etishni, massa markazi tinch turgan sanoq tizimida, bajarishga intiladilar. Bunday sanoq tizimi *massalar markazi tizimi* deb ataladi. Sochilish nazariyasining koʻpgina natijalari shu tizimda olingan. Ularni eksperiment maʼlumotlari bilan taqqoslashni, massa markazi tizimida hisoblab topilgan sochilish kesimi laboratoriya sanoq tizimiga oʻtib qayta hisoblangandan soʻnggina[1], amalga oshirilishi mumkin.

Massalari m_1 va m_2 boʻlgan zarralarning massalar markazi $(M.M.)$ sanoq tizimidagi harakati 1.2.1,a-rasmda koʻrsatilgan. Zarralar, avval, toʻliq impuls nolga teng boʻlish shartini qanoatlantiruvchi tezliklar bilan bir-biriga yaqinlashadi, toʻqnashgandan soʻng, bir-biridan uzoqlashadi va bunda ham toʻliq impuls nolga tengligi sharti bajariladi. Sochilguncha, zarralar z oʻqi boʻylab v_1^i va v_2^i tezliklar bilan harakatlanib, bir-biriga yaqinlashsin, toʻqnashgandan soʻng esa v_1^f va v_2^f tezliklar bilan z oʻqidan uzoqlashsin. U holda, impulsning saqlanish qonuniga koʻra

$$m_1 v_1^f - m_2 v_2^f = m_1 v_1^i - m_2 v_2^i = 0, \tag{1.2.1}$$

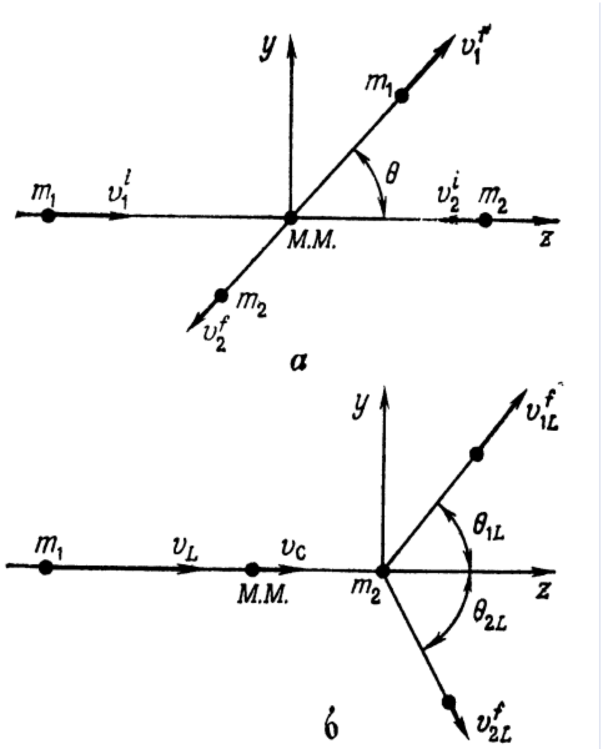
munosabat oʻrinli boʻladi. Fazoning toʻqnashish nuqtasidan uzoq masofalarda zarralar taʼsirlashmasligi tufayli, energiyaning saqlanish qonuni

$$\frac{1}{2} m_1 \left(v_1^f\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_2^f\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_1^i\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_2^i\right)^2. \tag{1.2.2}$$

koʻrinishga ega. Endi laboratoriya sanoq tizimini qaraymiz, bunda 2-zarra tinch

---

[1] Tinch turgan nishon uchun oʻlchangan maʼlumotlar haqida soʻz ketyapti. Bir xil turdagi teng energiyali zarralar dastasini qrama-qarshi toʻqnashtirish bilan oʻtkaziladigan eksperimentlarda maʼlumotlar, tabiiyki, massalar markazi sanoq tizimida olinadi.



1.2.1 - rasm: Massalar markazi (a) va laboratoriya (b) sanoq tizimlari

tursin, 1-zarra bo‘lsa, to‘qnashguncha z o‘qining musbat yo‘nalishi bo‘ylab v_L tezlik bilan harakatlanayotgan bo‘lsin. Soddalik uchun $m_2 \geq m_1$ deb faraz qilamiz. Demak, to‘qnashishdan avval sistemaning to‘liq impulsi $m_1 v_L$. Shu sabab ikkita zarra massalar markazi harakatining tezligi quyidagiga teng:

$$v_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_L.$$

Demak, ikkita zarraning, massalar markazi va laboratoriya sanoq tizimlaridagi, tezliklari orasida quyidagi munosabatlar bajariladi:

$$\begin{aligned} v_1^i = v_L - v_C &= \frac{m2}{m_1 + m_2} v_L, \\ v_2^i = -v_C &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_L. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Massalar markazi sanoq tizimida sochilish burchagini θ orqali belgilaylik. U holda tezlik vektorining y- va z-komponentalari, massalar markazi sanoq tizimida, quyidagiga teng bo‘ladi:

$$
\begin{aligned}
v^f_{1y} &= v^f_1 \sin\theta &&= \frac{m_2}{m_1+m_2} v_L \sin\theta, \\
v^f_{1z} &= v^f_1 \cos\theta &&= \frac{m_2}{m_1+m_2} v_L \cos\theta, \\
v^f_{2y} &= -v^f_2 \sin\theta &&= -\frac{m_1}{m_1+m_2} v_L \sin\theta, \\
v^f_{2z} &= -v^f_2 \cos\theta &&= -\frac{m_1}{m_1+m_2} v_L \cos\theta.
\end{aligned}
\tag{1.2.4}
$$

To‘qnashishdan so‘ng tezlik vektorining, laboratoriya sanoq tizimidagi, y- va z-komponentalarini olish uchun massalar markazi sanoq tizimidagi z-komponentaga massalar markazining v_C tezligini qo‘shish lozim. Ya’ni

$$
\begin{aligned}
v^f_{1L,y} &= \frac{m_2}{m_1+m_2} v_L \sin\theta, \quad & v^f_{1L,z} &= \frac{m_1 + m_2\cos\theta}{m_1+m_2} v_L, \\
v^f_{2L,y} &= -\frac{m_1}{m_1+m_2} v_L \sin\theta, \quad & v^f_{2L,z} &= -\frac{m_1 - m_2\cos\theta}{m_1+m_2} v_L.
\end{aligned}
\tag{1.2.5}
$$

Laboratoriya sanoq tizimida 1- va 2-zarralarning sochilish burchaklari, mos ravishda, θ_{1L} va θ_{2L} bo‘sin. U holda

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tg}\theta_{1L} &= \frac{v^f_{1L,y}}{v^f_{1L,z}} = \frac{\sin\theta}{\tau+\cos\theta}, \\
\mathrm{tg}\theta_{2L} &= \frac{v^f_{2L,y}}{v^f_{2L,z}} = -\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.
\end{aligned}
\tag{1.2.6}
$$

Bu yerda $\tau \equiv m_1/m_2 \leq 1$ belgilash kiritildi. (1.2.6) formulalar massalar markazi va laboratoriya sanoq tizimlaridagi sochilish burchaklari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Ularni, yana, quyidagi shaklda ham yozish mumkin:

$$
\cos\theta_{1L} = \frac{\tau+\cos\theta}{\sqrt{1+2\tau\cos\theta+\tau^2}}. \tag{1.2.7}
$$

Massalar markazi sanoq tizimida 1-zarraning $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ fazoviy burchakka sochilish kesimi $\sigma(\theta)d\Omega$ va aynan shu zarranining laboratoriya sanoq tizimida $d\Omega_{1L} = \sin\theta_{1L}\, d\theta_{1L}\, d\varphi_{1L}$ fazoviy burchakka sochilish kesimi esa $-\sigma(\theta_{1L})d\Omega_{1L}$ bo‘lsin. $d\Omega$ va $d\Omega_{1L}$ fazoviy burchaklar turli sanoq tizimlarida aynan bitta fazo sohasiga mos keladi. Demak, bu sohaga sochilgan zarralar soni sanoq tizimiga bog‘liq emasligidan, quyidagi munosabat o‘rinli:

$$\sigma(\theta_{1L})d\Omega_{1L} = \sigma(\theta)d\Omega. \tag{1.2.8}$$

Biz qarayotgan holda $d\varphi_{1L} = d\varphi$, bundan

$$\frac{d\Omega_{1L}}{d\Omega} = \frac{d\,\cos\theta_{1L}}{d\,\cos\theta} \tag{1.2.9}$$

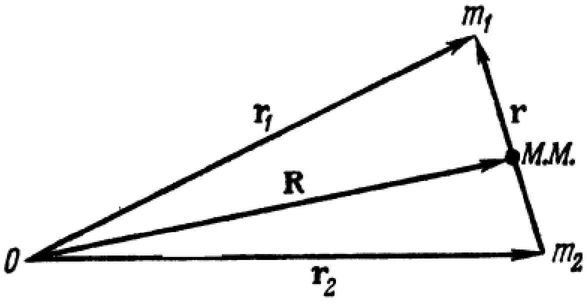
munosabatni olamiz. (1.2.7) ni (1.2.9) ga qo‘yib va differensiallab, massalar markazi va laboratoriya sanoq tizimlaridagi sochilish kesimlari orasidagi bog‘lanishga kelamiz

$$\sigma(\theta_{1L}) = \sigma(\theta)\frac{(1 + 2\tau\cos\theta + \tau^2)^{2/3}}{1 + \tau\cos\theta}. \tag{1.2.10}$$

(1.2.7) formuladan, $m_2 \gg m_1$ bo‘lganda, ya’ni $\tau \ll 1$ da $\cos\theta_{1L} \approx \cos\theta$ yoki $\theta_{1L} \approx \theta$ ekanligi ko‘rinib turibdi. Bu holda laboratoriya sanoq tizimidagi sochilsih burchagi massalar markazi sanoq tizimidagiga deyarli teng. Ushbu natija tabiiy, chunki bunda laboratoriya va massalar markazi sanoq tizimlari bir-biri bilan deyarli mos tushadi. Bir paytning o‘zida, $m_1 = m_2$ bo‘lganda $\cos\theta_{1L} = \cos(\theta/2)$, ya’ni $\theta_{1L} = \theta/2$ munosabat o‘rinli. Demak, θ burchak 0 dan π gacha oraliqda o‘zgarganda laboratoriya sanoq tizimidagi burchak 0 dan $\pi/2$ gacha o‘zgarar ekan. Shunday qilib, laboratoriya sanoq tizimida sochilish burchagining maksimal qiymati 90^o ga teng.

1.3 Ikkita zarra sistemasida massalar markazi harakatini ajratish

Laboratoriya sanoq tizimi, nishon cheksiz og'ir bo'lganda, ishlatiladi. Aks holda "sochilayotgan zarra – nishon" sistemani avvaldanoq xuddi ikki zarradan iborat sistema deb talqin qilish lozim va bunday holda massalar markazi sanoq tizimiga o'tish qulay.



1.3.1 - rasm: Massalar markazi koordinatalari va nisbiy koordinatalar

Zarralarning massalari m_1 va m_2, ular orasidagi ta'sirlashuv kuchlarining potensiali V – zarralar orasidagi masofanigina funksiyasi bo'lsin (markaziy), bunda $\boldsymbol{r}_1$ va $\boldsymbol{r}_2$ – 1.3.1-rasmda tasvirlanganidek, zarralarning radius vektorlari.

Massalar markazining $\boldsymbol{R}$ radius vektori va zarralar orasidagi $\boldsymbol{r}$ masofa vektori quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2. \tag{1.3.1}$$

Harakat tenglamalarini $\boldsymbol{R}$ va $\boldsymbol{r}$ o'zgaruvchilarda yozish uchun (1.3.1) formulalar yordamida o'zgaruvchilarni almashtirish mumkin edi. Ammo bunday almashtirishlar kutilmaganda o'ta uzun ifodalarga olib keladi, ayniqsa murakkabroq koordinata tizimlari bilan ishlaganda bu yo'l ancha noqulay hisoblanadi. Shu sabab, (1.3.1) almashtirish misolida, eng murakkab hollarda ham oson ishlatilishi mumkin bo'lgan, boshqa shafofroq usulni qarab chiqamiz.

$\dot{\boldsymbol{r}} \equiv d\boldsymbol{r}/dt$ bo'lsin. U holda zarralar tizimi harakatini tavsiflovchi lagranjian

$$L = \frac{m_1\,\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\,\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2} - V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|), \tag{1.3.2}$$

ko‘rinishga ega, $\boldsymbol{r}_1$ va $\boldsymbol{r}_2$ koordinatalarga kanonik qo‘shma impulslar bo‘lsa

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_1} = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_2} = m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{1.3.3}$$

tarzda aniqlangan. (1.3.1) ni vaqt bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2}{m_1 + m_2}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_1 - \dot{\boldsymbol{r}}_2. \tag{1.3.4}$$

(1.3.4) tenglamalar tizimini $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ va $\dot{\boldsymbol{r}}_2$ larga nisbatan yechib va natijalarni (1.3.2) ga qo‘yib, quyidagini olamiz:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(|\boldsymbol{r}|). \tag{1.3.5}$$

bunda $|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$ – ikkita zarra orasidagi masofa va $\dot{r} = |d\boldsymbol{r}/dt|$ – ularning bir-biriga nisbatan nisbiy tezligi, $M = m_1 + m_2$ – ikki zarradan iborat tizimdagi to‘liq massa, $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ – ikkita zarra tizimida keltirilgan massa, $\dot{R} = |d\boldsymbol{R}/dt|$ – ikkita zarra tizimining massa markazi tezligi. Agar biz sochilish jarayonini massa markazi koordinata sistemasida qarasak, $\dot{\boldsymbol{R}} = d\boldsymbol{R}/dt = 0$ va jarayon m massali bir dona zarrani $V(r)$ markaziy maydonda harakatiga ekvivalent bo‘lib qoladi. Umumiy holda sferik simmetriyaga ega bo‘lgan ta’sirlashuv potensiali uchun ikki zarrali tizim harakatini har doim keltirilgan massali bir dona zarrani markaziy maydon potensialida harakatiga keltirish mumkin.

Yuqorida chiqarilgan xulosaga Nyuton tenglamalariga asoslanib ham kelish mumkin

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{f}_1, \tag{1.3.6}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{f}_2, \tag{1.3.7}$$

bunda $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = d^2\boldsymbol{r}_i/dt^2$ va $\boldsymbol{f}_i = -\nabla_i V(r) = -dV(r)/d\boldsymbol{r}_i$ – mos ravishda tezlanish va kuchlar. Tezlanishni aniqlashda joy vektori ustida ikkita nuqtani ishlatganimizga e’tibor bering. Bunday belgilash nazariy fizikada vaqt bo‘yicha hosilani shtrix bilan emas mos belgi ustida nuqta bilan belgilash keng tarqalganligi bilan bog‘liq. Birinchi tartibli hosila bitta nuqta bilan, ikkinchi tartibli hosila esa ikkita nuqta bilan aniqlanadi. Ushbu belgilash usuli kelgusida ko‘p ishlatiladi. Yuqoridagi ikkita tenglamani qo'shib va Nyutonning uchinchi $\boldsymbol{f}_1 = -\boldsymbol{f}_2$ qonunini ishlatib, yoki mos tenglamani m_i ga bo'lib va ularni ayrib quyidagini olamiz

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}), \tag{1.3.8}$$

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = 0, \tag{1.3.9}$$

bunda $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(r) = -dV(r)/d\boldsymbol{r}$. Shunday qilib, izotropik potensial bilan ta'sirlashayotgan ikkita zarra tizimidagi harakat o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan massa markazi harakati va tashqi $V(r)$ maydonda joylashgan effektiv m massali ikkita zarra nisbiy harakati yig'indisidan iborat ekan.

Kelgusida "kvant sochilish" masalasida muhim Hamilton operatorini yozishda zarur bo'lgan impulslar fazosiga o'taylik. Buning uchun $\boldsymbol{R}$ va $\boldsymbol{r}$ koordinatalarga kanonik qo'shma impulslar kiritamiz:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = M\dot{\boldsymbol{R}}, \quad \boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}. \tag{1.3.10}$$

Bu yerda $M = m_1 + m_2$. (1.3.4) ni (1.3.10) ning o'ng tarafidagi ifodalarga qo'yib va (1.3.3) formulalarni hisobga olib, kanonik impulslar orasidagi munosabatlarni olamiz

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, \quad \boldsymbol{p} = \frac{m_2\boldsymbol{p}_1 - m_1\boldsymbol{p}_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.3.11}$$

(1.3.2) lagranjian $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{r}_1$ va $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{r}_2$ o'zgaruvchilarda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$L = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m_2} - V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|). \tag{1.3.12}$$

(1.3.11) munosabatlar asosida almashtirsak,

$$L = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - V(|\boldsymbol{r}|), \tag{1.3.13}$$

natijani olamiz. Bunda $\boldsymbol{P}$ impuls massalar markazining harakatiga mos keladi. Shunday qilib, massalar markazi harakati nisbiy harakatdan ajratib olindi. Ushbu lagranjian V tashqi potensial maydonda joylashgan, bitta zarraning harakatini ifodalovchi harakat tenglamalariga olib keladi.

1.4 Ko‘ndalang kesimni sonli hisoblash

Ikkita zarra orasidagi ta’sirlashuv sferik simmetriyaga ega bo‘lgan potensial bilan ifodalanayotganligidan, tizimning to‘liq burchak momenti va energiyasi sochilish mobaynida saqlanadi. Quyidagilar

$$\ell = mbv_0 = mr^2\dot{\phi} \tag{1.4.1}$$

va

$$E = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r), \tag{1.4.2}$$

mos ravishda to‘liq burchak momenti va to‘liq energiya, ular vaqt mobaynida o‘zgarmaydi (doimiylar). Bu yerda r radial koordinata, ϕ qutb burchak, v_0 tushayotgan zarra tezligi. (1.4.1) va (1.4.2) tenglamalar va

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{dr}, \tag{1.4.3}$$

munosabatdan quyidagini olamiz

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm\frac{b}{r^2\sqrt{1 - b^2/r^2 - V(r)/E}}. \tag{1.4.4}$$

Bu ifoda berilgan E, b va $V(r)$ lar uchun ϕ qutb burchakni r koordinataga bog‘lanishini anglatadi. Undagi $+$ va $-$ ishoralar ikkita turli simmetrik traektoriyalarga mos keladi. Yuqoridagi tenglama

$$\theta = \pi - 2\Delta\phi, \tag{1.4.5}$$

munosabat orqali θ sochilish burchagini hisoblash uchun ishlatilishi mumkin. Bu yerda $\Delta\phi$ kattalik r masofa cheksizlikdan o‘zining r_m minimum qiymatigacha o‘zgarganda qutb burchagini o‘zgarishi. (1.4.4) tenglamdan quyidagini olamiz

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= b\int_{r_m}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{1 - b^2/r^2 - V(r)/E}} \\ &= -b\int_{\infty}^{r_m}\frac{dr}{r^2\sqrt{1 - b^2/r^2 - V(r)/E}}. \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Agar (1.4.1) va (1.4.2) tenglamalar oraqli aniqlangan energiya va burchak momentining saqlanishini ishlatsak, $\dot{r} = 0$ bo'ladigan r_m qiymatni quyidagi munosabatdan aniqlash mumkinligini ko'rsatish mumkin

$$1 - \frac{b^2}{r_m^2} - \frac{V(r_m)}{E} = 0. \tag{1.4.7}$$

Bunda $V(r) = 0$ uchun qutb burchagi o'zgarishi $\Delta\phi = \pi/2$ bo'lishidan, (1.4.5) ifodani quyidagicha yoza olamiz

$$\theta = 2b \left[\int_b^\infty \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - b^2/r^2}} - \int_{r_m}^\infty \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - b^2/r^2 - V(r)/E}} \right]. \tag{1.4.8}$$

Yuqoridagi ifodada π doimiyni integral orqali yozish sababi θ qiymatlari uchun ikkinchi integral chegaralaridan kelishi mumkin bo'lgan xatoliklarni sonli kamaytirish strategiyasidir. Birinchi integral $r \to b$ bo'lganda ikkinchi integral $r \to r_m$ bo'lgandagi kabi bir xil uzoqlashadi. Birinchi va ikkinchi integrallardan keluvchi xatoliklar, hech bo'lmaganda, bir-birini qisman qisqartiradi, chunki ular turli ishogara ega.

Endi berilgan potensial uchun sochilish ko'ndalang kesimini hisoblashni qaraylik. Misol sifatida Yukava potensialini olamiz

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-r/a}}{r}. \tag{1.4.9}$$

Bunda V_0 va a – musbat parametrlar, ular mos ravishda potensial quvvati va ta'sir radiusini anglatadi. Ularni o'zgartirib, moslash mumkin. Berilgan E va b qiymatlarda (1.4.7) tenglamadan r_m qiymatini topish uchun yuqorida so'z yuritilgan sekant usulini ishlatamiz. Shundan so'ng, (1.4.8) tenglamadagi integrallarni Simpson qoidasiga ko'ra sonli hisoblaymiz. Keyin $d\theta/db$ birinchi tartibli hosilani topish uchun uch-nuqtali formulani qo'llaymiz. Oxirida (1.1.1) formuladan differensial kesimni hisoblab topamiz.

Soddalik uchun $E = m = V_0 = 1$ qiymatlarni tanlaymiz. Quyidagi dastur yuqorida yoritilgan sxemani amalga oshiradi.

```
module cb; real :: b,e,a; end module cb
```

```
program scattering
!=======================================================!
! this is the main program for the scattering problem. !
! copyright (c) tao pang 1997.                          !
!=======================================================!
use cb
implicit none
character(len=*),parameter    :: g='(*(g0,1x))'
integer ::  lun
integer, parameter :: m=21,n=10001
integer i,j,step
real :: tol,b0,db,dx,x0,x,dx0,f,fb,g1,g2
real, dimension (n) :: fi
real, dimension (m) :: theta,sig,sig1,ruth
!----------------------------------------------------------------------
! Natijalarni grafik ravishda tasvirlash uchun gnuplot dasturini chaqirish
!----------------------------------------------------------------------
call execute_command_line('mkfifo GNUPLOT.in')
call execute_command_line('gnuplot --persist < GNUPLOT.in',wait=.false.)
open(file='GNUPLOT.in',newunit=lun)
write(lun,'(a)')&
'set terminal X11',&
'set nokey',&
'set autoscale',&
'set xrange [0:1.1]',&
'set yrange [-1.2:10]',&
'set title "Differential cross section"'
!----------------------------------------------------------------------
tol=1.e-06; b0=0.01; db=0.5; dx=0.01; e=1.0; a=100.0
do i = 1, m
b  = b0+(i-1)*db
! calculate the first term of theta
do j = 1, n
x = b+dx*j; fi(j) = 1.0/(x*x*sqrt(fb(x)))
end do
call simp(n,dx,fi,g1)
! find r_m from 1-b*b/(r*r)-u/e=0
x0  = b; dx0 = dx
call secant (tol,x0,dx0,step)
! calculate the second term of theta
```

```
do j = 1, n
x = x0+dx*j; fi(j) = 1.0/(x*x*sqrt(f(x)))
end do
call simp (n,dx,fi,g2)
theta(i) = 2.0*b*(g1-g2)
end do
! calculate d_theta/d_b
call three (m,db,theta,sig,sig1)
! put the cross section in log form with the exact result of
! the coulomb scattering (ruth)
do i = m, 1, -1
b=b0+(i-1)*db
sig(i)=b/abs(sig(i))/sin(theta(i))
ruth(i)=1.0/sin(theta(i)/2.0)**4/16.0
end do
call plotit()
write (*,*) ' returned to main program'
close(unit=lun,status='delete')
contains
subroutine plotit()
write(lun,g)'$set1 <<eod'
do i = m, 1, -1
write (lun,g)' ',theta(i), alog(sig(i)), alog(ruth(i))
enddo
write(lun,'(a)')'eod', 'plot $set1 using 1:2 with points,&
$set1 using 1:3 with lines'
end subroutine plotit
end program scattering
subroutine simp (n,h,fi,s)
!==========================================================================!
! subroutine for integration over f(x) with the simpson rule.  fi:       !
! integrand f(x); h: interval; s: integral.  copyright (c) tao pang 1997.!
!==========================================================================!
implicit none
integer, intent (in) :: n
integer :: i
real, intent (in) :: h
real :: s0,s1,s2
real, intent (out) :: s
real, intent (in), dimension (n) :: fi
```

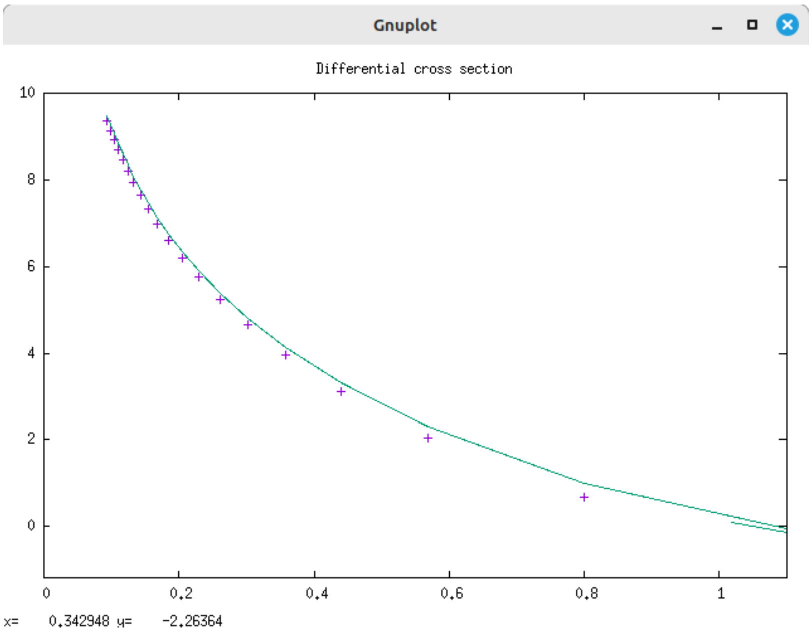
```
s=0.0; s0=0.0; s1=0.0; s2=0.0
do i = 2, n-1, 2
s1 = s1+fi(i-1); s0 = s0+fi(i); s2 = s2+fi(i+1)
end do
s = h*(s1+4.0*s0+s2)/3.0
! if n is even, add the last slice separately
if (mod(n,2).eq.0) s = s &
+h*(5.0*fi(n)+8.0*fi(n-1)-fi(n-2))/12.0
end subroutine simp
subroutine secant (tol,x0,dx,step)
!===========================================================!
! subroutine for the root of f(x)=0 with the secant method. !
! copyright (c) tao pang 1997.                              !
!===========================================================!
implicit none
integer, intent (inout) :: step
real, intent (inout) :: x0,dx
real :: x1,x2,d,f
real, intent (in) :: tol
step = 0; x1 = x0+dx
do while (abs(dx)>tol)
d  = f(x1)-f(x0); x2 = x1-f(x1)*(x1-x0)/d
x0 = x1; x1 = x2; dx = x1-x0; step = step+1
end do
end subroutine secant
subroutine three (n,h,fi,f1,f2)
!======================================================================!
! subroutine for 1st and 2nd order derivatives with the three-point    !
! formulas. extrapolations are made at the boundaries.  fi: input      !
! f(x); h: interval; f1: f'; and f2: f".  copyright (c) tao pang 1997. !
!======================================================================!
implicit none
integer, intent (in) :: n
integer :: i
real, intent (in) :: h
real, intent (in), dimension (n) :: fi
real, intent (out), dimension (n) :: f1,f2
! f' and f" from three-point formulas
do i = 2, n-1
f1(i) = (fi(i+1)-fi(i-1))/(2.*h)
```

```
f2(i) = (fi(i+1)-2.0*fi(i)+fi(i-1))/(h*h)
end do
! linear extrapolation for the boundary points
f1(1) = 2.0*f1(2)-f1(3); f1(n) = 2.0*f1(n-1)-f1(n-2)
f2(1) = 2.0*f2(2)-f2(3); f2(n) = 2.0*f2(n-1)-f2(n-2)
end subroutine three
real function f(x) result (fres)
use cb
implicit none
real :: x,u
fres = 1.0-b*b/(x*x)-u(x)/e
end function f
real function fb(x) result (fbres)
use cb
implicit none
real :: x
fbres = 1.0-b*b/(x*x)
end function fb
real function u(x) result (ures)
use cb
implicit none
real :: x
ures = 1.0/x*exp(-x/a)
end function u
```

Bu yerda biz yana Kulon sochilishi uchun analitik natijani ham qo'shdik. Kulon sochilishi Yukava potensialida $a \to \infty$ limitdagi xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Kulon sochilishi uchun differensial kesim

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{V_0}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \tag{1.4.10}$$

formula bilan aniqlanadi va u Rezerford formulasi nomi bilan yaxshi ma'lum. Dastur hisoblagan natijalar $a = 100$ bo'lganda 1.4.1-rasmda keltirilgan. Ko'rinib turganidek, a parametr qiymati ortishi bilan Yukava potensialidagi sochilish differensial kesimi, kutilganidek, Kulon sochilishidagi natijaga yaqinlashadi.



1.4.1 - rasm: Yukava potensialida sochilishning differensial kesimi: $a = 100$, $E = m = V_0 = 1$ ($+$ belgilar). Kulon maydonida sochilish (yaxlit chiziq).

2-BOB. KVANT SOCHILISH NAZARIYASI

2.1 Shredinger tenglamasi

Kvant sochilish nazariyasi asosi – Shredinger tenglamasidir. Zarralarning massalari m_1 va m_2, ular orasidagi ta'sirlashuv kuchlarining potensiali V – zarralar orasidagi masofaning funksiyasi boʻlsin. Shredinger tenglamasi quyidagi koʻrinishga ega:

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)}{\partial t} = \hat{H}\,\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t), \tag{2.1.1}$$

bu yerda

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2 + V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|), \tag{2.1.2}$$

gamiltonian, $\boldsymbol{r}_1$ va $\boldsymbol{r}_2$ – 1.3.1-rasmda tasvirlanganidek, zarralarning radius vektorlari.

Shu paytgacha biz barcha kattaliklarni c-kattaliklar, ya'ni klassik kattaliklar deb faraz qilib, ular ustida amallar bajardik. Endi ularning kvant xususiyatlarini (ular q-kattaliklar ekanligini), ya'ni kommutatorlarini hisobga olaylik. $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{p}_1$ va $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{p}_2$ oʻzgaruvchilar uchun ular quyidagi koʻrinishga ega:

$$[\hat{\boldsymbol{r}}_1, \hat{\boldsymbol{p}}_1] = [\hat{\boldsymbol{r}}_2, \hat{\boldsymbol{p}}_2] = \mathrm{i}\hbar. \tag{2.1.3}$$

Bulardan foydalanib (1.3.1) va (1.3.11) formulalar yordamida yangi $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$ va $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ oʻzgaruvchilar juftligi uchun kommutatorlarni keltirib chiqaramiz

$$[\hat{\boldsymbol{R}}, \hat{\boldsymbol{P}}] = [\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{p}}] = \mathrm{i}\hbar. \tag{2.1.4}$$

Shunday qilib, (1.3.1) va (1.3.11) almashtirishlar kommutatorlarni oʻzgartirmaydi, ya'ni ular – kanonik almashtirishlardir.

(2.1.2) gamiltonian $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{r}_1$ va $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{r}_2$ oʻzgaruvchilarda quyidagi koʻrinishda yoziladi:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_2^2}{2m_2} + V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|). \tag{2.1.5}$$

Uni (1.3.1) va (1.3.11) munosabatlar asosida almashtirsak,

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(|\boldsymbol{r}|), \tag{2.1.6}$$

natijani olamiz, bu yerda m – *keltirilgam massa* deyiladi va

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{2.1.7}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

(2.1.6) gamiltonianli sistemaga

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\boldsymbol{R}} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\boldsymbol{r}} + V(|\boldsymbol{r}|)\right]\Psi(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r},t) \tag{2.1.8}$$

ko'rinishdagi Shredinger tenglamasi mos keladi. Ushbu tenglama masslar markazi koordinatasi va nisbiy koordinatada yozilgan – biz qidirgan tenglamadir.

Agar (2.1.8) tenglamaga

$$\Psi(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\frac{\boldsymbol{P}^2}{2M}+E\right)t}e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}}\psi(\boldsymbol{r}), \tag{2.1.9}$$

ifodani qo'ysak, $\psi(\boldsymbol{r})$ uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\boldsymbol{r}} + V(r)\right]\psi(\boldsymbol{r}) = E\,\psi(\boldsymbol{r}). \tag{2.1.10}$$

Bu yerda $\boldsymbol{P}$ kattalik – $\hat{\boldsymbol{P}}$ impuls operatorining xususiy qiymatlari, $e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}}$ – impulsi $\boldsymbol{P}$ bo'lgan massalar markazining harakatiga mos yassi to'lqin. (2.1.10) tenglama faqat $\boldsymbol{r}$ nisbiy koordinatagagina bog'liq. Shunday qilib, massalar markazi harakati nisbiy harakatdan ajratib olindi. (2.1.10) tenglama shakl jihatdan, faqat fazoviy koordinatalarga bog'liq bo'lgan V tashqi potensial maydonda joylashgan, bitta zarraning harakatini ifodalovchi Shredinger tenglamasi bilan to'liq mos tushadi.

2.2 Sochilish uchun integral tenglama

Massalar markazi sanoq tizimida ikkita zarraing bir-birida sochilishini (bir-biriga to'qnashishini) qarashga o'tamiz. Boshlang'ich nuqta – bu (2.1.10) Shredinger tenglamasi. E energiya eksperimentda beriladi, tabiiyki, u musbat. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

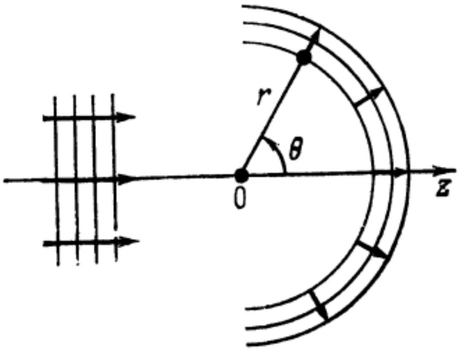
$$k^2 = \frac{2m\,E}{\hbar^2}, \quad U = \frac{2m\,V}{\hbar^2}, \tag{2.2.1}$$

bu yerda $k = |\boldsymbol{k}|$ – to‘lqin soni. Bu belgilashlarda (2.1.10) tenglama

$$(\Delta + k^2)\psi_k(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r})\psi_k(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.2}$$

ko‘rinishni oladi. Agar o‘ng tarafda $U = 0$ deb olsak, klassik fizikada yaxshi ma’lum bo‘lgan *Helmholz tenglamasiga* kelamiz. $V(r)$ – potensial faqat $r = |\boldsymbol{r}|$ masofagagina bog‘liq va u yetarlicha katta r masofalarda nolga tez intiladi deb hisoblaymiz. Cheksizlikda nolga sekin intiladigan Kulon potensialiga o‘xshash potensiallarni qaramaymiz. Kulon potensiali uchun (2.2.2) tenglama qat’iy analitik yechiladi, ammo bunda ishlatilgan usullar Kulon potensialidan boshqa potensiallar uchun ishlamaydi.

(2.2.2) differensial tenglamani yechish uchun, sochilishga mos keluvchi, chegaraviy shartni aniqlash lozim. Sochilish tasviri 2.2.1-rasmda keltirilgan. Potensial markazi O dan yetarlicha uzoq joylarda to‘lqin funksiya, z o‘qining musbat yo‘nalishida O nuqtaga tushayotgan yassi to‘lqindan va O nuqtadan xuddi markazdan uzoqlashayotgandek tarqalayotgan sferik to‘lqindan iborat. Demak, markazdan cheksiz uzoq masofalarda to‘lqin funksiya asimptotikasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:



2.2.1 - rasm: Sochilish masalasi uchun cheksizlikdagi chegaraviy shartlar. Chapda – tushayotgan zarralarni ifodalovchi yassi to‘lqin, o‘ngda – uzoqlashayotgan sferik to‘lqin

$$\psi_k(\boldsymbol{r}) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} (2\pi)^{-3/2}\left[e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right]. \tag{2.2.3}$$

Bu – sochilsih masalasi uchun chegaraviy shartning aynan o‘zi. (2.2.2) tenglamani (2.2.3) shart uchun yechishimiz lozim. Bu yerda $f(\theta)$ – sochilgan to‘lqinning amplitudasi, u odatda θ sochilish burchagining funksiyasi bo'ladi. Uni *sochilish amplitudasi* deb atashadi. Yassi to'lqinning [(2.2.3) da birinchi had] va uzoqlashayotgan sferik to'lqinning [(2.2.3) da ikkinchi had] ma'nosini, (1.3.4) ifodadagi $e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}$ ko'paytuvchiga qarab, anglash mumkin. (2.2.3) shartdagi $(2\pi)^{-3/2}$ koeffisient tushayotgan yassi to'lqinni δ-funksiyaga

$$(2\pi)^{-3}\int e^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{2.2.4}$$

normirovka shartidan kelib chiqadi, bunda $(2\pi)^3\,sm^3$ hajmda

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{\mathrm{i}kz}\right|^2dxdydz=1, \tag{2.2.5}$$

bitta zarra joylashgan deb faraz qilinyapti.

(2.2.2) differensial tenglamaga qaytamiz. Uning o'ng tarafi noldan farqli deb hisoblaymiz. U holda tenglama yechimi

$$(\Delta+k^2)\phi_k(\boldsymbol{r})=0, \tag{2.2.6}$$

Helmholz tenglamasining $\phi_k(\boldsymbol{r})$ yechimi va

$$(\Delta+k^2)\chi_k(\boldsymbol{r})=U(\boldsymbol{r})\psi_k(\boldsymbol{r}), \tag{2.2.7}$$

birjinslimas tenglamaning $\chi_k(\boldsymbol{r})$ xususiy yechimi

$$\psi_k(\boldsymbol{r})=\phi_k(\boldsymbol{r})+\chi_k(\boldsymbol{r})$$

yig'indisidan iborat bo'ladi. (2.2.7) tenglamani yechish uchun quyidagi differensial tenglamani qaraylik:

$$(\Delta+k^2)G_0(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r}). \tag{2.2.8}$$

Uning yechimi $G_0(\boldsymbol{r})$ bo'lsin. U holda (2.2.7) tenglamaning yechimini

$$\chi_k(\boldsymbol{r})=\int G_0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}')\psi_k(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{2.2.9}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda kiritilgan $G_0(\boldsymbol{r})$ kattalik – *Green funksiyasi* deb ataladi.

(2.2.8) tenglamani yechish uchun uning ikki tarafidagi funksiyalarni Furye integrali koʻrinishida tasvirab olamiz

$$\begin{aligned} G_0(\boldsymbol{r}) &= \int G_0(\boldsymbol{k}')e^{i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k}', \\ \delta(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k}'. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Bularni (2.2.8) ga qoʻyib,

$$(k^2 - k'^2)G_0(\boldsymbol{k}') = (2\pi)^{-3}$$

natijani olamiz, (2.2.10) ifodalardan birinchisini hisobga olsak,

$$G_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2 - k'^2}d\boldsymbol{k}' \tag{2.2.11}$$

ifodani topamiz. Agar ushbu integralni chegirmalar nazariyasini qoʻllab hisoblasak, Green funksiyasi

$$G_0^{(\pm)}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2 - k'^2 \pm \varepsilon}d\boldsymbol{k}' = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm\mathrm{i}kr}}{r} \tag{2.2.12}$$

koʻrinishda boʻlishini aniqlaymiz. Agar (2.2.6) birjinsli tenglamaning yechimini z oʻqi boʻylab tarqalayotgan

$$\phi_k(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{\mathrm{i}kz}$$

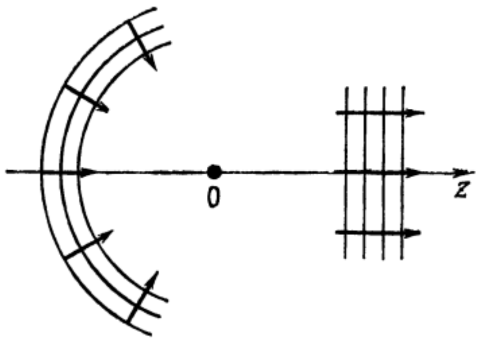
yassi toʻlqin deb tanlab olsak, u holda (2.2.2) tenglamaning uzoqlashayotgan sferik toʻlqinga mos yechimi quyidagi koʻrinishda yoziladi

$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{\mathrm{i}kz} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(r')\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'. \tag{2.2.13}$$

Green funksiyasining yuqori qismidagi ikkinchi $(-)$ indeks yaqinlashayotgan sferik toʻlqinga mos keladi va bunda (2.2.2) tenglama yechimi

$$\psi_k^{(-)}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{\mathrm{i}kz} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(r')\psi_k^{(-)}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'. \tag{2.2.14}$$

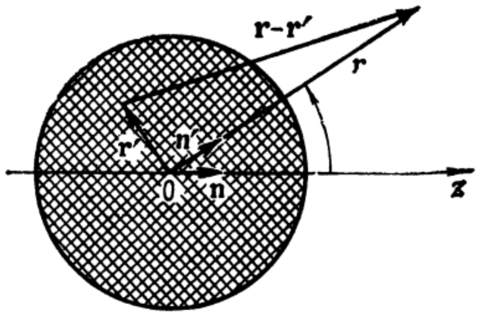
koʻrinishga ega boʻladi.



2.2.2 - rasm: (2.2.14) integral tenglama qanoatlantiruvchi chegaraviy shartlar. Chapda – tushayotgan sferik to'lqin, o'ngda – uzoqlashayotgan yassi to'lqin

Biz (2.2.13) va (2.2.14) ifodalarni (2.2.2) tenglamaning yechimlari deb atadik. Ammo ular noma'lum $\psi_k^{(\pm)}(\boldsymbol{r})$ funksiyalarni o'z ichiga oladi va shu sababdan ular aslida hali yechim emas. Ushbu ifodalar – berilgan chegaraviy shartlar bilan birga (2.2.2) differensial tenglamaga ekvivalent bo'lgan – integral tenglamalardir. Ularni sochilish nazariyasining asosiy tenglamalari deb hisoblaydilar. (2.2.14) tenglamaga mos keluvchi chegaraviy shart 2.2.2-rasmda tasvirlangan.

(2.2.13) tenglamani (2.2.3) chegaraviy shartga mosligi quyidagicha o'rnatiladi. 2.2.3-rasmda V potensial noldan farqli bo'lgan soha sfera shaklida tasvirlangan. Integrallash o'zgaruvchisi $\boldsymbol{r}'$ ning o'zgarish sohasi shu sfera bilan chegaralanganligi



2.2.3 - rasm: Green funksiyasining asimptotikasi

tushunarli. Demak, $r \to \infty$ bo'lganda quyidagi taqribiy munosabat o'rinli

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{r^2 - r'^2 - (2\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{r}')r} \approx r - (\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{r}'),$$

bu yerda $\boldsymbol{n}'$ kattalik – $\boldsymbol{r}$ yo'nalishidagi birlik vektor. U holda

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1} \approx r^{-1}\left\{1+\frac{(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{r}')}{r}\right\} \approx r^{-1}$$

natijani yozishimiz mumkin. Uni (2.2.13) ga qo'yib,

$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})_{\overrightarrow{r\to\infty}}\frac{1}{(2\pi)^3}\left[e^{\mathrm{i}kz}+\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\left\{-\frac{(2\pi)^{3/2}}{4\pi}\int e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}U(r')\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\right\}\right] \tag{2.2.15}$$

formulaga kelamiz. Bu yerda $\boldsymbol{k}' \equiv k\boldsymbol{n}'$ – sochilish yo'nalishidagi to'lqin vektor. (2.2.15) ifoda asimptotik ravishda (2.2.3) shartni qanoatlantirishi ayon. (2.2.14) integral tenglama 2.2.2-rasmdagi chegaraviy shartga mos kelishini shu yo'l bilan ko'rsatish mumkin. (2.2.15) va (2.2.3) larni taqqoslab, sochilish amplitudasi uchun

$$f(\theta) = -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4\pi}\int e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}U(r')\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}', \tag{2.2.16}$$

formulani yozamiz. U, (2.2.13) tenglama bilan bir qatorda, sochilish nazariyasining eng muhim munosabatlaridan biridir.

2.3 Sochilish amplitudasi va differensial kesim

To'lqin funksiyaning cheksizlikdagi asimptotikasi (2.2.3) formula bilan aniqlanadi. Undan foydalanib, sochilish amplitudasi va differensial kesim orasidagi munosabatni keltirib chiqarish mumkin.

z o'qining musbat yo'nalishida tushayotgan zarralar dastasining j_z zichligi, ya'ni bir soniyada shu yo'nalishda birlik yuzaga tushayotgan N zarralar soni tushayotgan to'lqinning

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{\mathrm{i}kz} \tag{2.3.1}$$

to'lqin funksiyasi bilan aniqlanadi. Bundan,

$$N = j_z = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left(\phi_k^*\frac{\partial\phi_k}{\partial z}-\phi_k\frac{\partial\phi_k^*}{\partial z}\right) = \frac{\hbar k}{(2\pi)^3 m} = \frac{v}{(2\pi)^3}, \tag{2.3.2}$$

ya'ni $1\,s$ mobaynida birlik yuzaga $v/(2\pi)^3$ ta zarra tushyapti.

$\boldsymbol{r}$ vektor yo'nalishida sochilgan j_r zarralar oqimi zichligi

$$j_r = \frac{\hbar}{2\mu \mathrm{i}} \left(\chi_k^* \frac{\partial \chi_k}{\partial r} - \chi_k \frac{\partial \chi_k^*}{\partial r} \right) \approx \frac{v}{(2\pi)^3 r^2} \left| f(\theta) \right|^2, \tag{2.3.3}$$

ifoda bilan beriladi, bunda χ_r – sferik to'lqinning uzoqlashuvchi qismi, ya'ni

$$\chi_r = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta).$$

(2.3.3) formulada cheksizlikda $1/r^2$ dan tezroq so'nuvchi hadlar tashlab yuborilgan.

(2.3.3) formulaga ko'ra, potensial markazi O dan uzoq r masofalarda joylashgan dS yuza elementidan $1\,s$ da normal bo'yicha o'tayotgan zarralar soni quyidagiga teng:

$$\Delta N = j_r dS = \frac{v}{(2\pi)^3} \left| f(\theta) \right|^2 d\Omega.$$

Bu yerda $d\Omega$ – O nuqtadan qaraganda dS yuza ko'rinadigan fazoviy burchak. Demak, $\sigma(\theta)$ differensial kesim

$$\sigma(\theta) d\Omega = \frac{\Delta N}{N} = \left| f(\theta) \right|^2 d\Omega \tag{2.3.4}$$

ifoda bilan aniqlanar ekan. Sochilish amplitudasi va differensial kesim orasidagi ushbu bog'lanish – sochilish nazariyasida eng muhim va poydevor munosabat hisoblanadi. Lekin $f(\theta)$ sochilish amplitudasi (2.2.16) formula bilan beriladi. Demak, agar (2.2.13) integral tenglamaning $\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})$ yechimi topilgan bo'lsa, uni (2.2.16) ga qo'yib va integrallab, (2.3.4) formuladan differensial kesimni aniqlash mumkin bo'lar edi.

Dirakning "bra-ket" belgilashlaridan foydalansak, (2.2.16) formulani

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{(2\pi)^3}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \int \phi_k^*(\boldsymbol{r}') V(\boldsymbol{r}') \psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' \\ &= -\frac{(2\pi)^3}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \langle \phi_k | V | \psi_k^{(+)} \rangle, \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

ko'rinishda yozish mumkin. (2.3.5) formuladan foydalanib, differensial kesimni

$$\sigma(\theta) = \left[\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \right]^2 \left| \langle \phi_k | V | \psi_k^{(+)} \rangle \right|^2 \tag{2.3.6}$$

ko'rinishda tasvirlaymiz.

2.4 Born yaqinlashishi

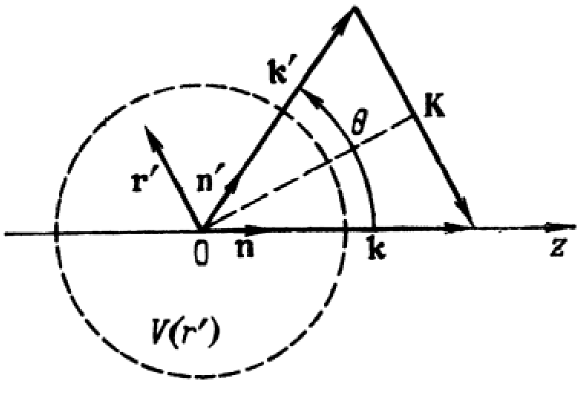
Zarrani $V(r)$ potensialda sochilishi masalasi, avval sochilishning (2.2.13) integral tenglamasini yechib $\psi_k^{(+)}$ toʻlqin funsiyani topish, soʻng $\psi_k^{(+)}$ ni (2.2.16) formulaga qoʻyib sochilish amplitudasini hisoblash, va nihoyat sochilish amplitudasini (2.3.6) formulada ishlatib differensial kesimni aniqlashga keltiriladi. Ammo (2.2.13) integral tenglamani hech qachon deyarli aniq yechib boʻlmaydi. Shu sababdan uni taqribiy yechish usullarini qarab chiqamiz.

Eng sodda yaqinlashish sochilish amplitudasining (2.2.16) ifodasida, U potensial noldan farqli sohada [ya'ni (2.2.16) formula boʻyicha integrallash sohasida], uzoqlashayotgan sferik toʻlqin tushayotgan yassi toʻlqinga nisbatan juda kichik deb faraz qilib, (2.2.13) tenglamada $\psi_k^{(+)}$ sifatida faqat birinchi hadnigina qoldirishda olinadi. Bunday yondashuv *birinchi Born yaqinlashishi* deyiladi. U holda sochilish amplitudasi

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}')e^{\mathrm{i}kz}d\boldsymbol{r}', \tag{2.4.1}$$

koʻrinishga keladi. z oʻqi yoʻnalishida $\boldsymbol{n}$ birlik vektorni va sochilish yoʻnalishida $\boldsymbol{n}'$ birlik vektorni kiritamiz (2.4.1-rasm):

$$kz = k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}', \quad \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}' = k\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{r}'. \tag{2.4.2}$$



2.4.1 - rasm: Sochilishda uzatilgan impuls

Uzatilgan $\hbar\boldsymbol{K} = \hbar\boldsymbol{k} - \hbar\boldsymbol{k}'$ impulsning absolyut qiymati quyidagicha boʻladi

(2.4.1-rasm):

$$\hbar K = \hbar|\boldsymbol{K}| = 2\hbar k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{2.4.3}$$

(2.4.2) va (2.4.3) munosabatlarni hisobga olib, (2.4.1) formulani

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}U(r')d\boldsymbol{r}', \tag{2.4.4}$$

ko'rinishda yozamiz. (2.4.4) formulada burchaklar bo'yicha integrallashda z o'qi $\boldsymbol{K}$ bo'ylab yo'nalgan sferik koordinatalar tizimidan foydalanamiz. U holda

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\theta) &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty r'^{\,2}dr'\int_0^\pi \sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi} d\varphi' e^{\mathrm{i}Kr'\cos\theta'}U(r') \\ &= -\frac{1}{K}\int_0^\infty r'\sin(Kr')U(r')dr' \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

ifodani olamiz. Bundan, sochilishning differensial kesimi

$$\sigma^{(1)}(\theta) = \frac{1}{K^2}\left[\int_0^\infty r'\sin(Kr')U(r')dr'\right]^2 \tag{2.4.6}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Sochilishning to'liq kesimi (2.4.6) ifodani to'liq fazoviy burchak bo'yicha integrallab olinadi. (2.4.3) tenglikdan kelib chiquvchi quyidagi

$$\sin\theta d\theta = \frac{1}{k^2}KdK$$

munosabatdan foydalanib, hisoblashlarni K bo'yicha integralga keltirish mumkin:

$$\sigma^{(1)\text{to'liq}} = 2\pi\int_0^\pi \sigma^{(1)}(\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k}\sigma^{(1)}(K)KdK. \tag{2.4.7}$$

3-BOB. PARSIAL TO‘LQINLAR TAHLILI

3.1 Parsial amplituda

Sochilish masalasi uchun

$$\hat{H}\,\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}) = E_k\,\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}), \tag{3.1.1}$$

Shredinger tenglamasining $\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})$ yechimini burchak momenti xususiy $Y_{\ell m}$ funksiyalari bo‘yicha qatorga yoyaylik:

$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell m} R_\ell^{(+)}(r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi). \tag{3.1.2}$$

Bu qatorni (3.1.1) tenglamaga qo‘yib, $R_\ell^{(+)}(r)$ radial funksiyalar uchun tenglamaga kelamiz

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] R_\ell^{(+)}(r) + V(r) R_\ell^{(+)}(r) = E_k\, R_\ell^{(+)}(r). \tag{3.1.3}$$

Yetarlicha katta r masofalardagi sohada $V(r)$ potensial nolga teng, shu sabab (3.1.3) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] R_\ell^{(+)}(r) = 0, \tag{3.1.4}$$

bu yerda $k^2 = \frac{2\mu\, E_k}{\hbar^2}$. Ushbu 2-tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi, uning o‘zaro bog‘liqmas, ikkita yechimlari – $j_\ell(kr)$ Bessel va $n_\ell(kr)$ Neyman funksiyalarining chiziqli kombinatsiyasiga teng:

$$R_\ell^{(+)}(r) = A_\ell\, j_\ell(kr) + B_\ell\, n_\ell(kr). \tag{3.1.5}$$

Agar

$$\begin{aligned} h_\ell^{(1)} &= j_\ell(kr) + \mathrm{i} n_\ell(kr), \\ h_\ell^{(2)} &= j_\ell(kr) - \mathrm{i} n_\ell(kr) \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

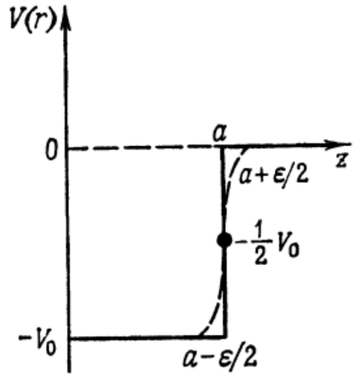
tarzda aniqlanuvchi *Hankel funksiyalaridan* foydalansak, umumiy yechimni

$$R_\ell^{(+)}(r) = A'_\ell\, h_\ell^{(1)}(kr) + B'_\ell\, h_\ell^{(2)}(kr) \tag{3.1.7}$$

koʻrinishda ham yozish mumkin. (3.1.5) va (3.1.7) formulalardagi A_ℓ, B_ℓ, A'_ℓ va B'_ℓ kattaliklar – integrallash doimiylari boʻlib, ular $\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})$ toʻlqin funksiyaning (2.2.3) asimptotikasi va

$$\begin{aligned} R^{(+)\text{ichki}}(a) &= R^{(+)\text{tashqi}}(a), \\ \frac{dR^{(+)\text{ichki}}}{dr}(a) &= \frac{dR^{(+)\text{tashqi}}}{dr}(a) \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

uzluksizlik shartlaridan aniqlanadi, bu yerda $r = a$, potensial uzluksizligi buziladigan qandaydir nuqta (3.1.1-rasm). Sochilish nazariyasida $\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})$ toʻlqin funksiyani



3.1.1 - rasm: Uzluksizlik sharti

topishni (3.1.2) qatordagi $C_{\ell m}$ koeffisientlar va $R^{(+)}$ radial funksiyalarni aniqlashga keltirish usuli *parsial toʻlqinlar tahlili* deb nom olgan.

Sochilish masalasining umumiy hossalarini, toʻlqin funksiyaning (2.2.3) formulada aniqlangan asimptotikasini parsial toʻlqinlar boʻyicha yoyib, qarab chiqaylik. (2.2.3) dagi yassi toʻlqinning yoyilmasi *Reley formulasi* bilan beriladi

$$e^{\mathrm{i}kz} = e^{\mathrm{i}kr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\mathrm{i}^\ell j_\ell(kr)P_\ell(\cos\theta). \tag{3.1.9}$$

Bu yerda $(2\ell+1)$ koʻpaytuvchi m kvant sonlari boʻyicha yigʻindi natijasida paydo boʻldi (toʻliq toʻlqin z oʻqi atrofida φ aylanish burchagiga bogʻliq emas). $j_\ell(kr)$ funksiyaning

$$j_\ell(kr)\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\sin(kr-\ell\pi/2)}{kr}, \tag{3.1.10}$$

asimptotikasidan foydalanib, (3.1.9) formulani

$$e^{\mathrm{i}kz} \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathrm{i}^{\ell}\frac{(2\ell+1)}{kr}\sin\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{2\mathrm{i}kr}\left[e^{\mathrm{i}kr}-(-1)^{\ell}e^{-\mathrm{i}kr}\right]P_\ell(\cos\theta) \qquad (3.1.11)$$

ko'rinishga keltiramiz. Endi $f(\theta)$ sochilish amplitudasini $P_\ell(\cos\theta)$ funksiyalarning to'liq sistemasi bo'yicha qatorga yoyib, quyidagini olamiz:

$$f(\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{2\mathrm{i}k}\left[S_\ell(k)-1\right]P_\ell(\cos\theta). \qquad (3.1.12)$$

Agar

$$f_\ell(k)=\frac{S_\ell(k)-1}{2ik} \qquad (3.1.13)$$

belgilash kiritsak (3.1.12) ifoda quyidagicha yoziladi:

$$f(\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)f_\ell(k)P_\ell(\cos\theta), \qquad (3.1.14)$$

bunda f_ℓ – partsial amplitudalar deyiladi. Hozircha, $f(\theta)$ – noma'lum kattalik. Bu tasdiq (3.1.12) ifodada S_ℓ noma'lumlarni borligi bilan asoslanadi. (3.1.11) va (3.1.12) larni (2.2.3) ga qo'yib, $\psi_k^{(+)}$ sochilish to'lqin funksiyasi asimptotikasini parsial to'lqinlar bo'yicha yoyilmasiga kelamiz:

$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})\xrightarrow[r\to\infty]{}(2\pi)^{-3/2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{2\mathrm{i}kr}\left[S_\ell(k)e^{\mathrm{i}kr}-(-1)^{\ell}e^{-\mathrm{i}kr}\right]P_\ell(\cos\theta). \qquad (3.1.15)$$

Fazoning $V(r)$ potensail nolga teng bo'lgan sohalarida (3.1.3) differensial tenglamaning yechimi bizga ma'lum – u (3.1.5) va (3.1.7) formulalar bilan berilgan. Shu sabab (3.1.7) ni (3.1.2) ga qo'yib, $V(r)$ potensialni sferik simmetriyasi tufayli $\psi_k^{(+)}$ to'lqin funksiyani φ burchakka bog'liqmasligini hisobga olib, doimiylarni qayta belgilab [qatorga yoyilganda paydo bo'lgan $C_{\ell m}$ doimiylarni A'_ℓ, B'_ℓ larga almashtirib, (3.1.7) da yana A'_ℓ, B'_ℓ belgilarni ishlatamiz] $V(r)$ potensial ta'sir sohasidan tashqarida aniq to'lqin funksiyani parsial to'lqinlar bo'yicha quyidagi yoyilmasini yozamiz:

$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A'_\ell h_\ell^{(1)}(kr)+B'_\ell h_\ell^{(2)}(kr)\right]P_\ell(\cos\theta). \qquad (3.1.16)$$

A'_ℓ va B'_ℓ noma'lumlarni, (3.1.16) asimptotikani (3.1.15) asimptotika bilan taqqoslab, aniqlaymiz.

$h_\ell^{(1)}$ va $h_\ell^{(2)}$ Hankel funksiyalarining asimptotikasi

$$\begin{aligned} h_\ell^{(1)}(kr) &\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} (-\mathrm{i})^{\ell+1}\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{kr}, \\ h_\ell^{(2)}(kr) &\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{i}^{\ell+1}\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{kr} \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

ko'rinishga ega. Ularni (3.1.16) ga qo'yib, $\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})$ funksiyaning asimptotikasini topamiz:

$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[(-\mathrm{i})^{\ell+1}A'_\ell\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{kr} + \mathrm{i}^{\ell+1}B'_\ell\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{kr}\right]. \tag{3.1.18}$$

(3.1.18) ni (3.1.15) bilan solishtirib,

$$A'_\ell = \frac{2\ell+1}{2\mathrm{i}}\mathrm{i}^{2\ell+1}S_\ell(k), \quad B'_\ell = \frac{2\ell+1}{2\mathrm{i}}\mathrm{i}^{2\ell+1}$$

ekanligini ko'rish mumkin. Ushbu ifodalarni (3.1.16) da hisobga olsak, potensial ta'sir sohasidan tashqarida (3.1.15) shartni qanoatlantiruvchi aniq yechimni olamiz:

$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{i}^\ell\frac{2\ell+1}{2}\left[S_\ell(k)h^{(1)}(kr) + h^{(2)}(kr)\right]P_\ell(\cos\theta). \tag{3.1.19}$$

(3.1.19) ifodada S_ℓ hozircha aniqlanmagan. Aynan ularni aniqlash sochilish masalasining mohiyatidir. Ushbu tasdiqni izohlaylik.

Avval, $f(\theta)$ sochilish amplitudasining (3.1.12) yoyilmasini (1.2.4) formulaga qo'yib, differensial kesim uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+1}{2}(S_\ell-1)P_\ell(\cos\theta)\right|^2. \tag{3.1.20}$$

(3.1.20) ni fazoviy burchak bo'yicha integrallab, to'liq kesimni olamiz:

$$\sigma^{\text{to'liq}} = 2\pi\int_0^\pi \sigma(\theta)\sin\theta d\theta = \frac{\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)|1-S_\ell|^2. \tag{3.1.21}$$

Integralni hisoblashda *Legandr polinomlarining* ortogonallik hossasidan foydalanish lozim:

$$\int_0^{\pi} P_\ell(\cos\theta)P_{\ell'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}.$$

Shunday qilib, S_ℓ kattalikni aniqlab, sochilish kesimini olish mumkin ekan.

$\psi_k^{(+)}$ toʻlqin funksiyaning (3.1.15) asimptotikasiga qaytamiz. (3.1.15) ifodaning oʻng tomonidagi birinchi had ketayotgan, ikkinchisi esa – kelayotgan sferik toʻlqinni ifodalaydi. Yetarlicha katta radiusli sferani qaraylik. Agar uning ichida zarralar yigʻilmayotgan boʻlsa (kelayotgan barcha zarralar chiqib ketmoqda), ehtimollik oqimining saqlanish qonuniga koʻra, ushbu ikkita sferik toʻlqinlarning amplitudalari absolyut qiymati bir-biriga teng boʻlishi lozim, ya'ni

$$|S_\ell| = 1, \tag{3.1.22}$$

shart bajarilishi kerak. U holda (3.1.12) ifodaga koʻra

$$\begin{aligned} f(0) - f^*(0) &= 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, f(0) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2\mathrm{i}k}(S_\ell + S_\ell^* - 2) \\ &= -\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2\mathrm{i}k}|S_\ell - 1|^2. \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Buni (3.1.21) bilan taqqoslab, quyidagini olamiz:

$$\sigma^{\text{toʻliq}} = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\, f(0). \tag{3.1.24}$$

Bu munosabat *optik teorema* deb ataladi. Uning ma'nosi: turli tomonga sochilish tushayotgan zarralar dastasidan zarralarni urib chiqarish hisobiga sodir boʻladi.

Oʻlchamsiz S_ℓ kattalikni quyidagicha aniqlaymiz. Sochilish nazariyasida bu kattalik *S*-**matritsa** yoki sochilish matritsasi deyiladi. Uning f_ℓ partsial amplitudalar bilan bogʻlanishi (3.1.13) ifoda orqali kiritilgan edi. (3.1.22) shartni

$$S_\ell = e^{2\mathrm{i}\,\delta_\ell}. \tag{3.1.25}$$

koʻrinishda yozamiz. Bu yerda δ_ℓ kattaliklar *sochilish fazalari* yoki sochilishning *faza siljishlari* deb ataladi. Fazalarni ishlatib,

$$S_\ell - 1 = 2\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\delta_\ell}\cdot\sin\delta_\ell, \quad |S_\ell - 1|^2 = 4\sin^2\delta_\ell$$

ifodalarni olamiz. U holda (3.1.12) sochilish amplitudasi, (3.1.20) differensial kesim va (3.1.21) toʻliq kesimni quyidagi koʻrinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \tfrac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{\mathrm{i}\delta_\ell}\sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta), \\ \sigma(\theta) &= \tfrac{1}{k^2}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{\mathrm{i}\delta_\ell}\sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta)\right|^2, \\ \sigma^{\text{toʻliq}} &= \tfrac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Toʻliq kesimning

$$\sigma^{\text{toʻliq}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sigma_\ell^{\text{toʻliq}}, \quad \sigma_\ell^{\text{toʻliq}} = \frac{4\pi(2\ell+1)}{k^2}\sin^2\delta_\ell \tag{3.1.27}$$

yoyilmasidan foydalanib, alohida parsial toʻlqinlar uchun $\sigma_\ell^{\text{toʻliq}}$ sochilishning parsial kesimlari maksimal qiymatini baholash mumkin

$$\sigma_\ell^{\text{maks}} = \frac{4\pi(2\ell+1)}{k^2}. \tag{3.1.28}$$

Bunda

$$\delta_\ell = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{3.1.29}$$

Fazalar (3.1.29) qiymatlar qabul qilganda *rezonans sochilish* haqida soʻz ketadi. Agar $\delta_\ell = n\,\pi$ boʻlsa, $\sigma^{\text{toʻliq}} = 0$ (sochilish sodir boʻlmaydi).

3.2 Integral tenglamaning parsial yoyilmasi

(2.2.13) integral tenglamadagi $\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})$ toʻlqin funksiyani qatorga yoyaylik:

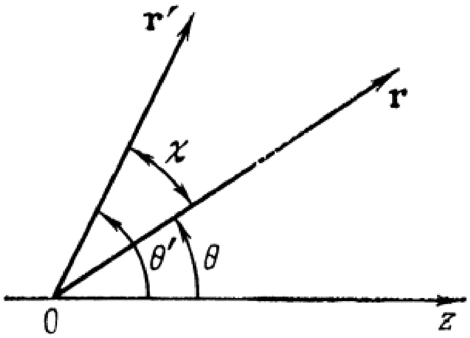
$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\mathrm{i}^\ell C_\ell R_\ell^{(+)}(r)P_\ell(\cos\theta). \tag{3.2.1}$$

Bu yerda C_ℓ – noma'lum koeffisientlar, $R_\ell^{(+)}(r)$ – (3.1.3) tenglamaning yechimi. Shu funksiya qanoatlantirishi zarur boʻlgan integral tenglamani aniqlaymiz.

(2.2.13) integral tenglamaning oʻng qismidagi Green funksiyasini parsial toʻlqinlar boʻyicha yoyilmasi

$$\frac{e^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \mathrm{i}k\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)j_\ell(kr_<)h_\ell^{(1)}(kr_>)P_\ell(\cos\chi) \tag{3.2.2}$$

ko'rinishda yoziladi. Bunda $r_<$ – bu r, r' larning kichigi, $r_>$ esa – r, r' larning kattasi, χ bo'lsa – $\boldsymbol{r}$ va $\boldsymbol{r}'$ vektorlar orasidagi burchak (3.2.1-rasm). Quyidagi munosabat



3.2.1 - rasm: Green funksiyasini parsial to'lqinlar bo'yicha yoyilmasi

o'rinli

$$\begin{aligned} P_\ell(\cos\chi) &= P_\ell(\cos\theta)P_\ell(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{\ell}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\times \\ &\times P_\ell^m(\cos\theta)P_\ell^m(\cos\theta')\cos(m[\varphi-\varphi']). \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

(2.2.13) integral tenglamaga (3.1.9) Reley formulasini, $\psi_k^{(+)}$ to'lqin funksiyaning (3.2.1) yoyilmasini va (3.2.2) yoyilmani qo'yamiz. (3.2.3) ning o'ng qismida φ' bo'yicha integral nol berishini hisobga olib, radial funksiya uchun quyidagi integral tenglamaga kelamiz:

$$C_\ell R_\ell^{(+)}(r) = j_\ell(r) - \mathrm{i}C_\ell\int\limits_0^\infty j_\ell(kr_<)h_\ell^{(1)}(kr_>)U(r')R_\ell^{(+)}(r')r'^2dr'. \qquad (3.2.4)$$

(3.1.6) shartlarni hisobga olib

$$C_\ell = 1 - \mathrm{i}kC_\ell\int\limits_0^\infty j_\ell(kr')U(r')R_\ell^{(+)}(r')r'^2dr' \qquad (3.2.5)$$

munosabatni olish mumkin. U holda $R_\ell^{(+)}(r)$ quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$R_\ell^{(+)}(r) = j_\ell(kr) + k\int\limits_0^\infty j_\ell(kr_<)n_\ell(kr_>)U(r')R_\ell^{(+)}(r')r'^2dr'. \qquad (3.2.6)$$

(3.2.5) tenglamani yechib, C_ℓ larni topamiz:

$$C_\ell = \frac{1}{1 + \mathrm{i}k\int\limits_0^\infty j_\ell(kr')U(r')R_\ell^{(+)}(r')r'^{\,2}dr'}. \tag{3.2.7}$$

Agar $R_\ell^{(+)}$ radial funksiya uchun tenlamani potensialning ta'sir radusidan tashqari sohalarda qarasak, bunda potensial faqat radiusi a bo'lgan sfera ichidagina noldan farqli bo'lganda (3.2.6) tenglama quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$R_\ell^{(+)}(r > a) = j_\ell(kr) + kn_\ell(kr)\int\limits_0^\infty j_\ell(kr')U(r')R_\ell^{(+)}(r')r'^{\,2}dr'. \tag{3.2.8}$$

Agar

$$\operatorname{tg}\delta_\ell = -k\int\limits_0^\infty j_\ell(kr')U(r')R_\ell^{(+)}(r')r'^{\,2}dr' \tag{3.2.9}$$

belgilash kiritilsa, (3.2.8) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$R_\ell^{(+)}(r > a) = j_\ell(kr) - \operatorname{tg}\delta_\ell\, n_\ell(kr). \tag{3.2.10}$$

U holda C_ℓ doimiylar uchun, (3.2.7) va (3.2.9) larga binoan

$$C_\ell = \frac{1}{1 - \mathrm{i}\operatorname{tg}\delta_\ell} = e^{\mathrm{i}\delta_\ell}\cos\delta_\ell \tag{3.2.11}$$

ifodani olamiz.

(3.2.10) va (3.2.11) larni (3.2.1) yoyilmaga qo'yib, (3.1.6) ni hisobga olib, potensialning ta'sir doirasidan tashqarsida $\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})$ to'lqin funksiya uchun quyidagi ifodaga kelamiz:

$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{2}\mathrm{i}^\ell\left[e^{2\mathrm{i}\delta_\ell}h_\ell^{(1)}(kr) + h_\ell^{(2)}(kr)\right]P_\ell(\cos\theta),\; r > a. \tag{3.2.12}$$

Buni (3.1.19) va (3.1.25) lar bilan taqqoslasak, (3.2.9) da aniqlangan δ_ℓ – bu (3.1.25) formuladagi sochilish fazasi ekanligini ko'rishimiz mumkin. Shunday qilib, sochilish masalasini yechish – bu $R_\ell^{(+)}(r)$ uchun yozilgan (3.2.6) integral tenglamani yechib, olingan radial funksiyalarni (3.2.9) ga qo'yib, δ_ℓ sochilish fazalarini topish kerakligini anglatadi.

Endi δ_ℓ kattalik ba'zida faza siljishi deb atalishini izohlaylik. (3.1.17) asimptotikani (3.2.12) ga qo'ysak, to'lqin funksiya asimptotikasini olamiz

$$\psi_k^{(+)}(\boldsymbol{r})\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{kr}\mathrm{i}^\ell e^{\mathrm{i}\delta_\ell}\sin\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell\right)P_\ell(\cos\theta). \tag{3.2.13}$$

Tushayotgan yassi to'lqin asimptotikasi esa

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{\mathrm{i}kz}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{kr}\mathrm{i}^\ell\sin\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}\right)P_\ell(\cos\theta). \tag{3.2.14}$$

ko'rinishga ega. Bu ikkita asimptotikani solishtirsak, sochilish holatlari yassi to'lqinda faqat faza siljishi bilangina farqlanayotganligini ko'ramiz. Aynan shu sababdan δ_ℓ kattaliklar faza siljishi degan nom olgan.

3.3 Parsial to'lqinlar uchun Born yaqinlashishi

Odatda (3.2.6) tenglamani yechish ancha og'ir masaladir. Shu sababdan uni taqribiy yechish usullarini qarash zarur. Ulardan eng soddasi – bu (3.2.6) tenglamani U potensialning darajalari bo'yicha yoyib va ushbu yoyilmani (3.2.9) ga qo'yishdan iborat. Bu usul – parsial to'lqinlarga Born yaqinlashishini qo'llashni anglatadi. Birinchi Born yaqinlashishi, $R_\ell^{(+)}(r)$ funksiya o'rniga (3.2.6) dagi birinchi hadni qo'yganda, olinadi. Uni (3.2.9) ga qo'yamiz. U holda

$$\operatorname{tg}\delta_\ell^{(1)}=-k\int_0^\infty\left[j_\ell(kr')\right]^2U(r')r'^{\,2}dr' \tag{3.3.1}$$

ifodani olamiz. Agar bu ifoda bilan olingan fazalar qiymatlari kichik bo'lsa, ushbu yaqinlashish yuqorida, 2.4-paragrafda, qaralgan birinchi Born yaqinlashishiga nisbatan ko'p hollarda ancha yaxshi hisoblanadi.

Ushbu tasdiqni asoslash uchun

$$U(r)=\begin{cases}-U_0 & \text{agar}\quad r<a,\\ 0 & \text{agar}\quad r>a\end{cases} \tag{3.3.2}$$

to'gri burchakli potensial o'rada sochilishda S-tolqinning ($\ell=0$) fazasini qaraymiz. Bu yerda $U_0>0$. (3.3.2) ni (3.3.1) ga qo'yib, $\ell=0$ deb faraz qilib, quyidagini olamiz:

$$\operatorname{tg}\delta_0^{(1)} = kU_0\int\limits_0^a \left[\frac{\sin(kr')}{kr'}\right]^2 r'^{\,2}dr' = \frac{U_0}{2k^2}\left[ak - \frac{\sin(2ak)}{2}\right]. \tag{3.3.3}$$

Kichik energiyalarda sochilishni qaraylik ($ak < 1$). (3.3.3) ifodani ak darajalari boʻyicha qatorga yoyamiz va $\operatorname{tg}\delta_0^{(1)} \approx \delta_0^{(1)}$ deb qabul qilamiz. U holda quyidagi kelib chiqadi:

$$\delta_0^{(1)} \approx \frac{1}{3}U_0 a^2(ak). \tag{3.3.4}$$

Bu natija tenglamalarni qat'iy yechib olingan natija bilan mos tushadi. Toʻgʻri burchakli sferik simmetriyali potensial oʻra uchun S-toʻlqin fazasi, qat'iy yechimda

$$\delta_0 = -ka\left[1 - \frac{\operatorname{tg}\left(a\sqrt{U_0}\right)}{a\sqrt{U_0}}\right] \approx \frac{1}{3}U_0 a^2(ak) \tag{3.3.5}$$

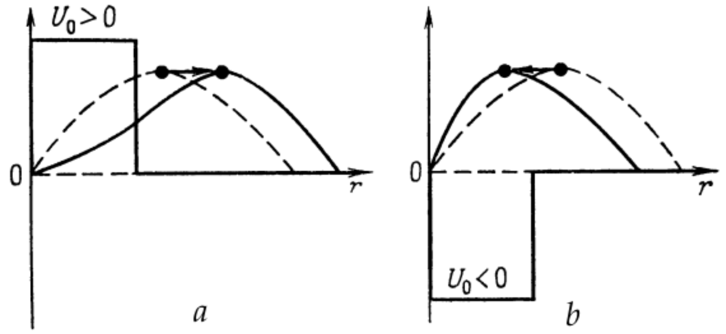
formula bilan aniqlanadi.

3.4 Sochilish fazalarining ishorasi

(3.2.13) va (3.2.14) formulalarni taqqoslasak, sochilish fazalari 2π ga butun karrali son aniqligida topilayotganini koʻrishimiz mumkin. Ushbu noaniqlikni bartaraf etish uchun (3.2.9) munosabatdan foydalanamiz. Bunda, agar (3.2.9) da potensial nol boʻlsa, δ_ℓ faza ham nol boʻladi deb qabul qilamiz. Shu yoʻl bilan koʻrsatilgan noaniqlik bartaraf etiladi. Shu nuqtada sochilish fazasining eng muhim jiahtini aytib oʻtamiz: **sochlish fazalari bizga zarralar orasidagi ta'sirlashuv kuchlari haqida ma'lumot beradi.** Ular ta'sirlashuv potensialining izidir!

"δ_ℓ fazalarning ishorasi va potensial orasida qanday aloqa bor?", – degan savolga javob beramiz. δ_ℓ fazalarning kichik qiymatlarida (3.2.9) ifodani Born yaqinlashishi uchun olingan (3.3.1) formula bilan almashtirish mumkin ekanligidan foydalanamiz. U holda $U(r')$ potensial ishorasi musbat boʻlganda (itarilish kuchlari potensiali) δ_ℓ faza ishorasi manfiy, potensial ishorasi manfiy boʻlganda (tortilish kuchlari potensiali) esa faza ishorasi – musbat boʻlar ekan.

Aytilganlarni quyidagicha talqin etish mumkin. 3.4.1,a-rasmda itarilish ta'sirlashuvi uchun sochilsih toʻlqin funksiyasi, potensial boʻlmagandagi toʻlqin



3.4.1 - rasm: Sochilish fazalarining ishorasi. a – itarilish, $\delta_\ell < 0$; b – tortilish, $\delta_\ell > 0$.

funksiyaga nisbatan tashqi sohaga siljiydi (potensial ta'sir doirasidan tashqariga chiqib ketadi). Potensial yo'q bo'lgandagi to'lqin funksiya, 3.4.1,a-rasmda, uzuq chiziqlar bilan, sochilgan zarraning to'lqin funksiyasi esa – yaxlit chiziq bilan tasvirlangan. Sochilish uchun to'lqin funksiyaning potensial ta'sir doirasidan chiqib ketishining ma'nosi shuki, u potensial yo'q bo'lgandagi to'lqin funksiyaga nisbatan faza bo'yicha kech qoladi (δ_ℓ faza manfiy). Tortilish kuchlari bo'lganda esa (3.4.1,b-rasm) to'lqin funksiya potensail ta'sir doirasi sohasiga tortiladi va erkin yassi to'lqindan faza bo'yicha ilgarilab ketadi (δ_ℓ faza musbat).

4-BOB. LIPPMAN – SHWINGER TENGLAMASI

4.1 T-operator (matritsa) uchun Lippman – Shwinger tenglamasi

Avvalgi bobda olingan (2.2.13) va (2.2.14) tenglamalarni, umumiyroq sochilish jarayonlarida qoʻllaniladigan, shaklda yozish mumkin. Bu maqsadda (2.1.6) ifoda bilan aniqlangan $\hat{H}$ gamiltonianni, massa markazi harakatini ifodalovchi hadsiz qismini, qaraylik:

$$\hat{H} \;=\; \hat{H}_0 + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r). \tag{4.1.1}$$

Bunda

$$\hat{H}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = E e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{4.1.2}$$

U holda (2.2.13) va (2.2.14) tenglamalarni quyidagi shaklda yozish mumkin

$$\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{ikz} + \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} V(r)\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}).$$

Bu formulada, umuman olganda, $\hat{H}_0$ va $\hat{V}$ kattaliklarning oʻrnini almashtirib boʻlmaydi. Chunki mahrajdagi $\hat{H}_0$ – differensial operator, oxirgi tenglik aslida integral tenglamadir. Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{ikz}; \quad G_0(E \pm i\varepsilon) \equiv \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} \tag{4.1.3}$$

u holda quyidagi tenlamani yozish mumkin

$$\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}) \;=\; \phi(\boldsymbol{r}) + G_0(E \pm i\varepsilon)V(r)\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}). \tag{4.1.4}$$

Bu shaklda yozilgan integral tenglama **Lippman – Shwinger tenglamasi** deyiladi.

Sochilish amplitudasi uchun quyidagi formula oʻrinli edi:

$$f(\theta) \;=\; -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'} U(r')\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}\,')d\boldsymbol{r}\,'. \tag{4.1.5}$$

Bu munosabat, (2.2.13) integral tenlama bilan bir qatorda, sochilish nazariyasidagi eng muhim ifodalardan biridir.

Biz bundan buyon impuls tasavvurida ishlaymiz, shu sabab qulaylik uchun (4.1.4) tenglamani Dirakning bra-ket belgilashlaridan foydalanib, operator shaklida qayta yozamiz

$$|\psi^{(\pm)}\rangle \;=\; |\phi\rangle + G_0 V|\psi^{(\pm)}\rangle. \tag{4.1.6}$$

Bu holda amplituda uchun (4.1.5) ifoda yanada ixchamroq koʻrinishga ega boʻladi

$$f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) \;=\; -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2m}{\hbar^2}\langle\boldsymbol{k}'|V|\psi^{(+)}(\boldsymbol{k})\rangle, \tag{4.1.7}$$

bu yerda $\boldsymbol{k}'$ ($\boldsymbol{k}$) - oxirgi (boshlangʻich) holatning toʻlqin vektori. Endi (0.0.1) da kiritilgan sochilishning differensial kesimi amplituda orqali quyidagicha topiladi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \;=\; \Big|f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})\Big|^2,$$

ya'ni, differensial kesim – bu energetik sirtda ($\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}$) sochilish amplitudasi moduli kvadratining qiymatidir.

Oʻtish operatori[1] deb nomlangan T-**operatorni** kiritish juda foydali, u $|\psi^{(+)}\rangle$ toʻlqin funksiya bilan quyidagicha bogʻlangan

$$V|\psi^{(+)}\rangle \;=\; T|\phi\rangle.$$

(4.1.6) Lippman-Shwinger tenglamasini oʻng tomondan V ga koʻpaytirib, T uchun quyidagi ifodani olamiz

$$T|\phi\rangle \;=\; V|\phi\rangle + VG_0T|\phi\rangle.$$

Har qanday $|\phi\rangle$ uchun bu toʻgʻri boʻlgani sababli, unga mos quyidagi operator tenglama ham oʻrinli boʻlishi lozim

$$T \;=\; V + VG_0T. \tag{4.1.8}$$

Bu bizga sochilish amplitudasini topish uchun zarur, chunki (4.1.7) dan

$$f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2m}{\hbar^2}\langle\boldsymbol{k}'|T|\boldsymbol{k}\rangle$$

---

[1] Oʻtish operatorini yana T-matritsa (ingl. `Transition matrix`) deyishadi.

yoki $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ ekanligini hisobga olsak,

$$f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) = -2m\sqrt{\frac{\pi}{2}}\langle \boldsymbol{p}'|T|\boldsymbol{p}\rangle, \tag{4.1.9}$$

tenglamani olamiz. Shunday qilib, bizning asosiy vazifamiz impuls tasavvurida T-operator uchun (4.1.8) Lippman-Shwinger tenglamasini yechishdan iborat.

4.2 Lippman – Shwinger tenglamasini yechish usullari

Parsial to'lqinlar bo'yicha yoyish usuli

Yassi to'lqinlarning

$$\int \frac{d^3p''}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}''\rangle\langle \boldsymbol{p}''| = 1 = \int \frac{d^3p'''}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}'''\rangle\langle \boldsymbol{p}'''|$$

normirovka shartidan foydalanib (4.1.8) operator tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}'|T(E)|\boldsymbol{p}\rangle &= \langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle + \int \frac{d^3p''}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'''}{(2\pi)^3}\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}''\rangle\langle \boldsymbol{p}''|G_0(E)|\boldsymbol{p}'''\rangle \\ &\quad \times\langle \boldsymbol{p}'''|T(E)|\boldsymbol{p}\rangle.\end{aligned}$$

Agar resolventaning (Green funksiyasining)

$$\langle \boldsymbol{p}''|G_0(E)|\boldsymbol{p}'''\rangle = \frac{(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}''')}{E - p''^2/2m + i\varepsilon}$$

xossasini hisobga olsak yuqoridagi tenglama

$$\langle \boldsymbol{p}'|T(E)|\boldsymbol{p}\rangle = \langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle + \int \frac{d^3p''}{(2\pi)^3}\frac{\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}''\rangle\langle \boldsymbol{p}''|T(E)|\boldsymbol{p}\rangle}{E - p''^2/2m + i\varepsilon} \tag{4.2.1}$$

ko'rinishni oladi. Bu T-matritsa uchun impuls tasavvuridagi Lippman – Shwinger tenglamsidir.

Parsial yoyish usulining g'oyasi vektorlarning absolyut qiymatini ularning burchak qismlaridan ajratishdan iborat. Shu sababli, (4.2.1) tenglamada burchakka bog'liqlikni ajratib ko'rsatamiz. Bu maqsadda T-matritsani va V – o'zaro ta'sir potensialini parsial to‘lqinlar bo‘yicha yoyamiz:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle &= 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{\ell_z=-\ell}^{+\ell}\sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{\ell'_z=-\ell'}^{+\ell'} Y^*_{\ell'\ell'_z}(\hat{p}')V_{\ell'\ell}(p',p)Y_{\ell\ell_z}(\hat{p}),\\ \langle \boldsymbol{p}'|T(E)|\boldsymbol{p}\rangle &= 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{\ell_z=-\ell}^{+\ell}\sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{\ell'_z=-\ell'}^{+\ell'} Y^*_{\ell'\ell'_z}(\hat{p}')T_{\ell'\ell}(p',p,E)Y_{\ell\ell_z}(\hat{p}),\end{aligned}$$

bu yerda $Y_{\ell\ell_z}$ sferik funksiya, z indeksi z o‘qiga proyeksiyani anglatadi, $\hat{p}$ esa $\boldsymbol{p}$ vektorining burchak qismini ifodalaydi. Natijada o‘tish operatorining parsial komponentlari uchun quyidagi tenglamani olamiz

$$T_{\ell'\ell}(p',p,E) = V_{\ell'\ell}(p',p) + \frac{2}{\pi}\sum_{\mathcal{L}}\int_0^{\infty}\frac{V_{\ell'\mathcal{L}}(p',p'')T_{\mathcal{L}\ell}(p'',p,E)}{E-p''^2/2m}p''^2dp''.$$

Bu yerda biz sferik funksiyalarning ortogonallik xususiyatlaridan foydalandik. Hisob-kitoblarni, soddalashtirishni ko‘zlab, faqat juft bo‘lmagan to‘lqinlar uchun olib boramiz. Shunda yuqoridagi tenglamani quyidagi ko‘rinishda qayta yozishimiz mumkin

$$T_\ell(p',p) = V_\ell(p',p) + \frac{4m}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_\ell(p',p'')T_\ell(p'',p)}{p_0^2-p''^2}p''^2dp'', \qquad (4.2.2)$$

bu yerda $p_0^2 = 2mE$ belgilash kiritilgan, bunda E – massalar markazi tizimidagi to‘liq energiya.

R – matritsa

(4.2.2) tenglamani sonli usullar bilan yechishda kompleks elementli matritsalardan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Faqat haqiqiy sonlar bilan ishlash uchun T-matritsa o‘rniga uning haqiqiy qismi bo‘lgan R-reaksiya matritsasidan foydalanish qulay. R-matritsa uchun tenglama quyidagi ko‘rinishga ega [**?**]

$$R_\ell(p',p) = V_\ell(p',p) + \frac{4m}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{\infty}\frac{V_\ell(p',p'')R_\ell(p'',p)}{p_0^2-p''^2}p''^2dp'', \qquad (4.2.3)$$

bu yerda $\mathcal{P}$ - Kauchining bosh qiymat belgisi, u $p'' = p_0$ bo‘lganda integral ostidagi ifodada paydo bo‘ladigan singulyarlikni ajratish uchun zarur.

Reaksiya matritsasining parsial komponentlari parsial fazaviy siljish bilan quyidagicha bog‘langan

$$R_\ell(p_0, p_0) = \frac{\tan\delta_\ell}{2m \cdot p_0}. \tag{4.2.4}$$

Bundan faza siljishini hisoblash uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz

$$\delta_\ell = \arctan\left[-2m \cdot p_0 \cdot R_\ell(p_0, p_0)\right] + n \cdot \pi. \tag{4.2.5}$$

Ushbu kattalik qiymatlarini tajribalarda o‘lchash mumkin. (0.0.2) da aniqlangan to‘liq differensial sochilish kesimining qiymatlarini endi quyidagi ifodadan foydalanib hisoblash mumkin

$$\sigma = \frac{4\pi}{p_0^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell.$$

Parsial yoymasdan yechish usuli

Tushunarli bo‘lishi uchun (4.2.1) tenglamani quyidagi ko‘rinishda qayta yozamiz:

$$\langle \boldsymbol{p}'|T(E)|\boldsymbol{p}\rangle = \langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle + \int \frac{d^3p''}{(2\pi)^3}\frac{\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}''\rangle\langle \boldsymbol{p}''|T(E)|\boldsymbol{p}\rangle}{p^2/2m - p''^2/2m + i\epsilon}, \tag{4.2.6}$$

bu yerda $\boldsymbol{p}$ - boshlang‘ich impuls, $\boldsymbol{p}''$ - energetik sirtdan tashqaridagi impuls (off-the-energy-shell), $\boldsymbol{p}'$ - oxirgi holatdagi impuls, $p^2/2m = E$ - tizimning to‘liq energiyasi, m - keltirilgan massa, V - o‘zaro ta‘sir potensiali.

Sferik koordinatalar sistemasida $\boldsymbol{p} = \{p, \theta, \varphi\}$ edi, shu hol uchun V potensial va T-matritsani quyidagicha aniqlaymiz

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle &= V(p', \theta', \varphi'; p, \theta, \varphi),\\ \langle \boldsymbol{p}'|T(E)|\boldsymbol{p}\rangle &= T(p', \theta', \varphi'; p, \theta, \varphi).\end{aligned}$$

bu yerda energiyaga bog‘liqlik oshkor ko‘rsatilmagan. Tajribaga muvofiq, tushayotgan zarra z o‘qi bo‘ylab harakatlanadi deb faraz qilamiz. Shunda tushayotgan zarraning impulsi quyidagicha aniqlanadi: $\boldsymbol{p} = \{p, 0, 0\}$. Belgilash kiritamiz:

$$T(p', \theta', \varphi') = T(p', \theta', \varphi'; p, 0, 0)$$

va (4.2.6) tenglamani quyidagi koʻrinishda yozamiz

$$\begin{aligned} T(p',\theta',\varphi') &= V(p',\theta',\varphi';p,0,0) + \frac{2m}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty p''^2 dp'' \int\limits_0^\pi \sin\theta'' d\theta'' \int\limits_0^{2\pi} d\varphi'' \\ &\times \frac{V(p',\theta',\varphi';p'',\theta'',\varphi'')T(p'',\theta'',\varphi'')}{p^2 - p''^2 + i\epsilon}. \end{aligned}$$

Endi R-matritsa uchun bu tenglama

$$\begin{aligned} R(p',\theta',\varphi') &= V(p',\theta',\varphi';p,0,0) + \frac{2m}{(2\pi)^3}\mathcal{P}\int\limits_0^\infty p''^2 dp'' \int\limits_0^\pi \sin\theta'' d\theta'' \int\limits_0^{2\pi} d\varphi'' \\ &\times \frac{V(p',\theta',\varphi';p'',\theta'',\varphi'')R(p'',\theta'',\varphi'')}{p^2 - p''^2}. \end{aligned}$$

koʻrinishga ega boʻladi. Agar

$$K(p',\theta',\varphi';p'',\theta'',\varphi'') = \frac{2m\, p''^2 \sin\theta''}{(2\pi)^3}\frac{V(p',\theta',\varphi';p'',\theta'',\varphi'')}{p^2 - p''^2}$$

deb olsak, R-matritsa uchun tenglama

$$\begin{aligned} R(p',\theta',\varphi') &= V(p',\theta',\varphi';p,0,0;) + \mathcal{P}\int\limits_0^\infty dp'' \int\limits_0^\pi d\theta'' \int\limits_0^{2\pi} d\varphi'' \\ &\times K(p',\theta',\varphi';p'',\theta'',\varphi'')R(p'',\theta'',\varphi'') \qquad (4.2.7) \end{aligned}$$

koʻrinishda yoziladi. Energetik sirtda[1] (4.2.3) va (4.2.7) tenglamalar quyidagicha bogʻlangan:

$$R(p_0,p_0,x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} R_\ell(p_0,p_0)P_\ell(x),$$

bu yerda $x = \cos\theta$, θ- massalar markazi sistemasidagi sochilish burchagi. $\ell = 0$ boʻlganda ($^1S_0$-parsial toʻlqinda)

$$R(p_0,p_0,x) = \frac{1}{4\pi}R_0(p_0,p_0),$$

oʻrinli, chunki $P_0(x) = 1$.

---

[1] Energetik sirt (*рус.* Массовая поверхность; *ingl.* On-the-energy-shell) – bu energiya saqalanish qonuni bajariladigan sirt, yaʻni: $p'^2/2\mu = p^2/2\mu = p_0^2/2\mu = E$.

4.3 O‘zaro ta’sir potensialining impulslar fazosidagi ko‘rinishi

Impulslar fazosidagi o‘zaro ta’sir potensiali koordinatalar fazosidagisi orqali quyidagicha aniqlanadi

$$V_\ell(p',p) = \int\limits_0^\infty j_\ell(p'r)V(r)j_\ell(pr)r^2dr,$$

bu yerda $j_\ell(x)$ - kuchli tebranishga ega bo‘lgan Bessel funksiyalaridir. Shu sababli ushbu integralni topish juda murakkab, bunday holda Lejandr ko‘phadlaridan foydalanish maqsadga muvofiqdir

$$\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+1}{4\pi}V_\ell(p',p)P_\ell(\cos\theta);\ \cos\theta=\widehat{p'p}. \qquad (4.3.1)$$

Oxirgi tenglikni quyidagilardan foydalansak hosil qilamiz

$$\sum_{\ell_z=-\ell}^{+\ell} Y^*_{\ell\ell_z}(\hat{p}')Y_{\ell\ell_z}(\hat{p}) = \frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\theta). \qquad (4.3.2)$$

(4.3.1) ni har ikki tomonidan $P_\mathcal{L}(\cos\theta)$ ga ko‘paytiramiz va $\cos\theta$ bo‘yicha -1 dan $+1$ gacha bo‘lgan oraliqda integrallaymiz. Shunda quyidagicha yozishimiz mumkin

$$V_\ell(p',p) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}P_\ell(\cos\theta)\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle d(\cos\theta). \qquad (4.3.3)$$

Oxirgisini olishda Lejandr ko‘phadlarining ortogonallik xossasidan foydalanildi

$$\int\limits_{-1}^{+1}P_\mathcal{L}(\cos\theta)P_\ell(\cos\theta)d(\cos\theta) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\mathcal{L}\ell}.$$

Quyidagini hisobga olib

$$\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle = \int e^{i(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{r}}V(\boldsymbol{r})d^3r \qquad (4.3.4)$$

va (4.3.4) ifodada potensialni

$$V(\boldsymbol{r}) \equiv V(r)$$

sferik simmetrik (markaziy) deb faraz qilsak (4.3.4) ni quyidagi koʻrinishda yozishimiz mumkin:

$$\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle = \int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} V(r) d^3r, \tag{4.3.5}$$

bu yerda $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$ belgilash kiritdik (uzatilgan impuls). Fazoviy element $d^3r = r^2 dr \sin\theta' d\theta' d\varphi$ ekanligini bilgan holda

$$\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} V(r) \int\limits_0^{\pi} e^{iq\cdot r\cdot\cos\theta'} \sin\theta' d\theta' r^2 dr.$$

munosabatni olamiz. Agar $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ boʻlishini hisobga olsak va $\sin\theta' d\theta' =$ -$d(\cos\theta')$ = -dx ($x = \cos\theta'$) ($\theta' = 0$ boʻlganda $x = 1$; $\theta' = \pi$ boʻlganda esa x = -1) belgilashlar kiritsak quyidagiga kelamiz:

$$\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle = 2\pi \int\limits_0^{\infty} V(r) \left\{ \int\limits_{-1}^{+1} e^{iq\cdot r\cdot x} dx \right\} r^2 dr.$$

Shaklli qavslar ichidagi integralni analitik olish mumkin

$$\int\limits_{-1}^{+1} e^{iq\cdot r\cdot x} dx = \frac{1}{iq\cdot r}\left(e^{iq\cdot r} - e^{-iq\cdot r}\right).$$

Bundan

$$\langle \boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle = -\frac{2\pi i}{q} \int\limits_0^{\infty} V(r)\left(e^{iq\cdot r} - e^{-iq\cdot r}\right) r dr \tag{4.3.6}$$

kelib chiqadi. Oʻzaro taʼsir potensialining parsial yoyilmasi (4.3.6) ni (4.3.3) ga qoʻyish orqali aniqlanadi

$$V_\ell(p', p) = -\pi i \int\limits_{-1}^{+1} \frac{P_\ell(y)}{q} \left\{ \int\limits_0^{\infty} V(r)\left(e^{iq\cdot r} - e^{-iq\cdot r}\right) r dr \right\} dy, \tag{4.3.7}$$

bu yerda $y = \cos\theta$ va $q^2 = p'^2 + p^2 - 2p'p\cdot y$.

4.4 Yukawa potensiali impulslar fazosida

Misol sifatida, atom va yadro fizikasida ko‘p ishlatiladigan, Yukawa potensialini qaraymiz:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\lambda \cdot r}}{r}, \tag{4.4.1}$$

u $\lambda = 0$ bo‘lganda Kulon potensialiga o‘tadi. Bu potensial uchun (4.3.7) ifoda quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$V_\ell(p', p) = -\pi i V_0 \int\limits_{-1}^{+1} \frac{P_\ell(y)}{q} \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-\lambda \cdot r} \left(e^{iq \cdot r} - e^{-iq \cdot r} \right) dr \right\} dy.$$

Agar $e^{iq\cdot r} - e^{-iq\cdot r} = 2i \sin(q \cdot r)$ ekanligini hisobga olsak,

$$V_\ell(p', p) = 2\pi V_0 \int\limits_{-1}^{+1} \frac{P_\ell(y)}{q} \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-\lambda \cdot r} \sin(q \cdot r) dr \right\} dy$$

natijaga kelamiz. $r \to \infty$ limitda

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda \cdot r} \sin(q \cdot r) dr \ \approx \ \frac{q}{\lambda^2 + q^2}.$$

xossa o‘rinli. Bundan

$$V_\ell(p', p) = 2\pi V_0 \int\limits_{-1}^{+1} \frac{P_\ell(y)}{\lambda^2 + q^2} dy,$$

ifodani olamiz, bu yerda $q^2 = p'^2 + p^2 - 2p'p \cdot y$. Orbital moment $\ell = 0$ bo‘lganda S-parsial to‘lqinda $P_0(y) = 1$ va quyidagi

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{1}{\lambda^2 + p'^2 + p^2 - 2p'p \cdot y} dy = -\frac{1}{2p'p} \ln \left(\frac{\lambda^2 + (p' - p)^2}{\lambda^2 + (p' + p)^2} \right)$$

o‘rinli. U holda, koordinatalar fazosida aniqlangan (4.4.1) Yukawa potensialining S-parsial to‘lqinlar uchun impulslar fazosidagi ko‘rinishi

$$V_0(p', p) = -\frac{V_0}{p'p} \ln \left(\frac{\lambda^2 + (p' - p)^2}{\lambda^2 + (p' + p)^2} \right) \tag{4.4.2}$$

ekanligini topamiz.

5-BOB. SOCHILISH MATRITSASI

5.1 Sochilish fazalar farqini hisoblash

Kvant mexanikasining nazariyasi va tenglamalari ham koordinatalar, ham impulslar fazosida bir xil yaxshi tavsiflanadi. Hisoblashlarda normallashgan to'lqin funksiyalarni aniqlashni talab qiluvchi bog'langan holatlar masalasi ikkala fazoda ham baravar ravishda oson yechilishi mukin. Lekin sochilish holatlarida to'lqin funksiyani normallab bo'lmasligi bilan bog'liq muammolar tug'iladi va bu holda impulslar fazosida ishlagan ma'qul. Sochilish holatlarini tavsiflashda uchraydigan qiyinchiliklar normallashmagan holatlar uchun Fur'e almashtirishlarini bajarib bo'lmasligi bilan bog'liq. Shunga qaramasdan, impuls fazosida ishlash ko'p jism masalasini hal qilishda juda muhim. Chunki bu holda nolokal o'zaro ta'sir potensiallari bilan ishlash hech qanday qiyinchilik tug'dirmaydi.

Impulslar fazosida zarralarning sochilishini ifodalaydigan f – `sochilish amplitudasi` T- matritsa orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$f(\theta, E) \;=\; -\frac{2\mu}{4\pi}\langle\, \mathbf{p}|T(E)|\mathbf{p}'\rangle. \tag{5.1.1}$$

Bu yerda $\mathbf{p}$ va $\mathbf{p}'$ lar boshlang'ich va oxirgi holatda sistema impulsi. Tajribalarda kuzatiladigan fizikaviy kattaliklarni topishda ularning energetik sathdagi (`on-shell`, energiya saqlanadigan tekislik) $p = p' = \sqrt{\frac{2\mu \cdot E}{\hbar^2}}$ qiymatlari ishlatiladi.

Nazariy tadqiqodlarda foydali tushuncha, `uzatilgan impuls` $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ munosabat orqali aniqlanadi. Yoyib yozsak:

$$q^2 = 2p^2 - 2p^2\cos\theta \;=\; 2p^2(1-\cos\theta) = p^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

bunda θ – boshlang'ich va oxirgi holat impulslari orasidagi burchak yoki `sochilish burchagi` deyiladi. `Sochilishning differensial kesimi` sochilish amplitudasi orqali quyidagicha topiladi:

$$\frac{d\sigma(\theta, E)}{d\Omega} \;=\; |f(\theta, E)|^2. \tag{5.1.2}$$

Sochilish amplitudasini parsial yoyilmasini qaraylik

$$f(\theta, E) = \frac{1}{2ip}\sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)(S_L-1)P_L(\cos\theta),$$

bu yerda P_L– Lejandr ko'phadlari, L – orbital moment (harakat miqdori momenti). Ushbu ifodada

$$f_L = \frac{S_L-1}{2ip} \tag{5.1.3}$$

belgilash kiritsak, sochilish amplitudasining parsial yoyilmasini

$$f(\theta, E) = \sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)f_L(\theta, E)P_L(\cos\theta)$$

ko'rinishda qayta yozish mumkin, bunda f_L – parsial amplituda. Bu yerda (5.1.3) dagi S_L kattalik – `sochilish matritsasi` deb ataladi. Juftlashmagan to'lqinlar holida bu kattalik matritsa emas, u `sochilishning fazalar farqi` δ_L orqali sodda

$$S_L = e^{2i\delta_L} \tag{5.1.4}$$

ifoda ko'rinishida aniqlanadi, bu yerda i – mavhum birlik. Juftlashgan to'lqinlar (masalan, deytrondagi ${}^3S_1$-${}^3D_1$ to'lqin) uchun esa u (2×2) o'lchamli matritsadir. O'tish va sochilish matritsalarining parsial komponentalari orasida quyidagicha bog'lanishni (5.1.1) va (5.1.3) munosabatlardan aniqlash mumkin:

$$S_L = 1 - i\frac{\mu \cdot p}{\pi}T_L. \tag{5.1.5}$$

Sochilishning to'liq kesimini topish uchun (5.1.2) ni integrallash zarur:

$$\sigma = \int d\Omega |f(\theta, E)|^2.$$

Bundan to'liq kesimni sochilishning fazalar farqi orqali ifodasi

$$\sigma = \frac{\pi}{p^2}\sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)|S_L-1|^2 = \frac{4\pi}{p^2}\sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)\sin^2\delta_L. \tag{5.1.6}$$

ko'rinishda bo'lishi kelib chiqadi.

Yuqoridagi mulohazalar shuni koʻrsatib turibdiki, zarralarning sochilishini tadqiq etish sochilishning fazalar farqini hisoblashga keltirilar ekan. Sochilish fazalar farqining fizikaviy mohiyatini tushunishga, (2.1.10) orqali aniqlangan Shredinger tenglamasining yechimini oʻzaro ta'sir potensiali $V = 0$ va $V \neq 0$ boʻlgan hollardagi hulqini tahlil qilish, yordam beradi. Oʻzaro ta'sir potensiali $V = 0$ boʻlganda (2.1.10) yechimi yassi toʻlqin koʻrinishida boʻladi, ya'ni (2.2.6) tenglamaning yechimi kabi:

$$\Psi_p^{\pm}(\mathbf{r}) \;=\; e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}.$$

Bunda '+' ishorali yechim $+\infty$ ga, '–' ishoralisi esa $-\infty$ ga ketayotgan yassi toʻlqinni anglatadi. Keling, uzoq fikrlamaslik uchun, faqat '+' ishorali yechim haqida gaplashaylik (quyida keltiriladigan mulohazalar '–' ishorali yechimga ham oʻrinli). Yassi toʻlqin uchun parsial yoyilma quyidagi koʻrinishga ega:

$$\Psi_p^{+}(\mathbf{r}) \;=\; \sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)j_L(pr)P_L(\cos\theta).$$

Bunda $r \to \infty$ boʻlgan holda ikkita mustaqil yechimlar boʻlishi mumkin:

$$\begin{aligned} j_L(pr) &\overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{pr}\sin\left(pr - \frac{L\pi}{2}\right), \\ n_L(pr) &\overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{pr}\cos\left(pr - \frac{L\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

bu yerda j_L – Bessel, n_L – Hankel funksiyalari. Potensial $V \neq 0$ boʻlganda, qisqa ta'sir qiluvchi[1] oʻzaro ta'sir potensiali uchun Shredinger tenglamasi yechimining sochilgan toʻlqinga mos keladigan parsial yoyilmasi quyidagi koʻrinishga ega boʻladi:

$$\Psi_p(\mathbf{r}) \;=\; \sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)\psi_L(pr)P_L(\cos\theta)e^{i\delta_L}.$$

Bu holda ψ_L parsial yechimning $r \to \infty$ boʻlgandagi hulqi quyidagicha tasvirlanadi:

$$\begin{aligned} \psi_L(pr) &\overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{pr}\left[\sin\left(pr - \frac{L\pi}{2}\right) + \tan\delta_L\cos\left(pr - \frac{L\pi}{2}\right)\right] \\ &\Rightarrow \frac{1}{pr}\sin\left(pr - \frac{L\pi}{2} + \delta_L\right) \end{aligned}$$

---

[1] Qisqa ta'sir qiluvchi deb $r \to \infty$ da $1/r^2$ dan tezroq nolga intiladigan potensiallar tavsiflanadi. Masalan, yadroviy kuchlar qisqa ta'sir qiluvchi, lekin zaryadli zarralar oʻzaro ta'sirini ifodalovchi Kulon kuchlari $1/r$ kabi hulqqa ega va shuning uchun ular qisqa ta'sir qiluvchi emas.

Agar $V = 0$ va $V \neq 0$ hollardagi yechimlarning o‘zaro ta’sir sodir bo‘lgan nuqtadan uzoq masofalardagi hulqini solishtirsak, ularni tavsiflovchi $\sin$ funksiya argumenti, $V \neq 0$ bo‘lganda, δ_L qo‘shimcha hadga ega. Buning ma’nosi shuki, δ_L zarralarni ta’sirlashuviga sabab bo‘lgan kuch haqida ma’lumot beradi. Ya’ni, u o‘zaro ta’sir potensialini tavsiflovchi fizikaviy kattalikdir.

Juftlashmagan to‘lqinlar holida uni S- matritsa yordamida oddiygina hisoblash mumkin (${}^1S_0$, ${}^1P_1$, … kabi singlet, ${}^3P_0$, ${}^3P_1$, ${}^3D_2$, … singari triplet to‘lqinlar uchun). Agar sochilish fazalar farqi va S – matritsa orasidagi (5.1.4) bog‘lanishni esga olsak, δ_L – parsial sochilish fazalar farqini Eyler formulasini[1] qo‘llab topamiz:

$$\delta_L = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(S_L)}{\mathrm{Re}(S_L)}\right) + \frac{\pi}{2}n, \tag{5.1.7}$$

bu yerda $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ $\mathrm{Im}(S_L)$ - S- matritsaning mavhum, $\mathrm{Re}(S_L)$ esa haqiqiy qismi. Umumiy holda $\delta_L(E)$ turli L lar holida E ning uzluksiz funksiyasi bo‘lishi uchun $n = n(E)$. Quyi energiyalar sohasida, to‘liq momentning kichkina qiymatlarida $\delta_L \sim p^{2L+1}$ ekanligini ko‘rsatish mumkin.

5.2 Juftlashgan to‘lqinlar

Juftlashgan to‘lqinga deytronni bog‘langan holatini hisoblaganda uchraydi (deytronda triplet ${}^3S_1$–${}^3D_1$, va yana ${}^3P_2$–${}^3F_2$, … kabi to‘lqinlar). To‘liq spini $\mathcal{S}$, to‘liq izospini $\mathcal{T}$ bo‘lgan ikkita nuklonli sistemada massalar markazi sistemasida fiksirlangan $E = p^2/2\mu_{np}$ energiya uchun $\hat{p}, \mathcal{S}_z \to \hat{p}', \mathcal{S}'_z$ o‘tishning sochilish amplitudasi

$$f^{\mathcal{S}\mathcal{T}}_{\mathcal{S}_z\mathcal{S}'_z}(\hat{p},\hat{p}') = \sum_{JLL'} C^{\mathcal{S}J}_{LL'}(\hat{p},\hat{p}')\left[1 + (-1)^{L+\mathcal{S}+\mathcal{T}}\right] f^{\mathcal{S}J}_{LL'}$$

ko‘rinishda tasvirlanadi, bu yerda

$$C^{\mathcal{S}J}_{LL'}(\hat{p},\hat{p}') = \sum_{J_z} i^{L-L'} C^{JJ_z}_{LL_z\mathcal{S}\mathcal{S}_z} Y_{LL_z}(\hat{p}) \cdot C^{JJ_z}_{L'L'_z\mathcal{S}\mathcal{S}'_z} Y^*_{L'L'_z}(\hat{p}').$$

Ushbu ifodalarda $\hat{p}$ belgilash mos o‘zgaruvchining burchak qismini, z indeksli belgilar mos o‘zgaruvchining z o‘qiga proeksiyasini bildiradi (magnit kvant sonlar), $L_z =$

---

[1] Eyler formulasi, esingizda bo‘lsa, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ko‘rinishda edi.

J_z - $\mathcal{S}_z$ va $L'_z = J_z$ - $\mathcal{S}'_z$, $C^{cc_z}_{aa_zbb_z}$ – Klebsh- Gordon koeffitsientlari, Y_{xx_z} – sferik funksiya, $f^{\mathcal{S}J}_{LL'}$ – to'liq burchak momenti J, to'liq spini $\mathcal{S}$ va to'liq orbital momenti L bo'lgan holat uchun ${}^{2\mathcal{S}+1}L_J$ to'lqinda sochilish amplitudasi. Endi bu holda sochilish amplitudasining S- matritsa orqali aniqlanishi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f^{\mathcal{S}J}_{LL'} = \frac{1}{2ip}\left(S^{\mathcal{S}J}_{LL'} - \delta_{LL'}\right),$$

bu yerda $\delta_{LL'}$ – Kroneker belgisi (sochilishning fazalar farqi emas). S- matritsaning simmetrikligidan $S^{\mathcal{S}J}_{LL'} = S^{\mathcal{S}J}_{L'L}$ va unitarligidan $\sum\limits_{L''} S^{\mathcal{S}J}_{LL''}\left(S^{\mathcal{S}J}_{L''L'}\right)^* = \delta_{LL'}$. Juftlikni saqlanishidan $j > 0$ hol uchun $L = J$ bo'lgan holatlar $L = J \pm 1$ bo'lgan holatlarga juftlasha olmaydi. Shunday qilib, $\mathcal{S} = 0$ bo'lgan singlet holat uchun $L = J$ bo'lganda bu to'lqin juftlashmagan

$$S^{0J}_{JJ} = e^{2i\delta^0_J},$$

va $\mathcal{S} = 1$ triplet bo'lganda esa $L = J$ bo'lgan juftlashmagan to'lqin

$$S^{1J}_{JJ} = e^{2i\delta^1_J},$$

hamda $L, L' = J \pm 1$ holatlarda juftlashgan to'lqinlar mavjud:

$$S^{1J} = \begin{pmatrix} S^{1J}_{J-1J-1} & S^{1J}_{J-1J+1} \\ S^{1J}_{J+1J-1} & S^{1J}_{J+1J+1} \end{pmatrix} \tag{5.2.1}$$

5.3 Blatt – Bidenharn usuli

Juftlashgan (aralash) to'lqinlar[1] uchun, yuqoridagi (5.2.1) ifodadan ko'rinib turganidek, sochilish hodisasi (2×2) o'lchamli S- matritsa bilan tavsiflanadi. Sochilishning fazalar farqini $L = J \pm 1$ aralash holatlar uchun S- matritsani ishlatib hisoblashni Blatt va Bidenharn taklif qilishgan edi (Blatt- Bidenharn (BB) usuli[2], ushbu usul yana *hususiy fazalar*[3] usuli deb ham ataladi). Ular aralash holatlarni

---

[1] Juftlashgan to'lqinlar – inglizchada *two channel coupled states* deb yuritiladi.

[2] Aslida, bu usul ing. *Blatt- Biedenharn parametrization* deb yuritiladi.

[3] ing. *Eigen phase*

tavsiflovchi to‘lqin funksiya sochilish nuqtasidan uzoq masofalarda

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\psi_{J,L=J-1}(r) &= A_-\varphi^{(-)}_{-,k}(r) - B_-\varphi^{(+)}_{-,k}(r),\\ \lim_{r\to\infty}\psi_{J,L=J+1}(r) &= A_+\varphi^{(-)}_{+,k}(r) - B_+\varphi^{(+)}_{+,k}(r),\end{aligned}$$

kabi hulqqa ega deb faraz qilishdi, bu yerda $\varphi^{(-)}_{-,k}$ $(\varphi^{(-)}_{+,k})$ – sochilish nuqtasidan $-\infty$ ga, $\varphi^{(+)}_{-,k}$ $(\varphi^{(+)}_{+,k})$ esa $+\infty$ ga ketayotgan yassi to‘lqin[1]. Endi S- matritsa A va B lar orqali

$$\begin{pmatrix} B_- \\ B_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{--} & S_{-+} \\ S_{+-} & S_{++} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_- \\ A_+ \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda aniqlanadi, bu yerda $S_{\pm\pm} = S_{L=J\pm1,L'=J\pm1}$ (ifodalarni tushunishni yengillashtirish maqsadida S- matritsadagi yuqori indekslarni yozmadik). Nuklonlarni o‘zaro sochilishida pion hosil bo‘lish ostonasidagi energiyadan kichik energiyalar sohasida $|S| = 1$ bo‘lishi lozim, chunki sochilishda qatnashayotgan zarralar miqdori saqlanadi[2]. Shu bilan birga, bu holda Shredinger tenglamasining barcha hadlari haqiqiy bo‘lganligidan, S- matritsa simmetrik bo‘lishi ham lozim.

Blatt va Bidenharn ϵ– aralashish parametriga bog‘liq (2×2) o‘lchamli, unitar

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos\epsilon_J & \sin\epsilon_J \\ -\sin\epsilon_J & \cos\epsilon_J \end{pmatrix} \tag{5.3.1}$$

matritsa yordamida S- matritsani diagonal ko‘rinishga keltirish mumkinligini ko‘rsatib berishdi. Diagonal matritsa elementlarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$S' = \Omega^{-1}S\Omega = \begin{pmatrix} \cos\epsilon_J & -\sin\epsilon_J \\ \sin\epsilon_J & \cos\epsilon_J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{--} & S_{-+} \\ S_{+-} & S_{++} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\epsilon_J & \sin\epsilon_J \\ -\sin\epsilon_J & \cos\epsilon_J \end{pmatrix}.$$

Oxirgi ifodadan, $\xi = \frac{S_{++}-S_{--}}{2S_{+-}}$ belgilash kiritib

$$\begin{aligned} S'_{--} &= S_{--} - \tan\epsilon_J\cdot S_{+-} = e^{2i\delta_{--}},\\ S'_{++} &= S_{++} + \tan\epsilon_J\cdot S_{+-} = e^{2i\delta_{++}},\\ S'_{+-} &= S'_{-+} = 0,\\ \tan\epsilon_J &= \sqrt{\xi^2+1} - \xi \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

---

[1] Bu yerda $\varphi^{(\pm)}_{-,k}(r) = e^{\pm i(k\cdot r-(J-1)\pi/2)}$, va $\varphi^{(\pm)}_{+,k}(r) = e^{\pm i(k\cdot r-(J+1)\pi/2)}$

[2] Yangi zarra paydo bo‘lmaydi, yoki bori yo‘qolmaydi.

ekanligini ko'rsatish mumkin, bu yerda $\delta_{--} = \delta_{L=J-1,L'=J-1}$, $\delta_{++} = \delta_{L=J+1,L'=J+1}$, va

$$S' = \begin{pmatrix} S'_{--} & 0 \\ 0 & S'_{++} \end{pmatrix}.$$

Bundan tashqari, bu yerda yana S- matritsani simmetrikligidan $S_{+-} = S_{-+}$ ekanligi hisobga olingan.

Natijada, (5.3.2) va (5.1.7) ifodalardan juftlashgan to'lqinlar holida aralashish parametri va parsial sochilish fazalarini quyidagicha topamiz:

$$\begin{aligned} \epsilon_J &= \arctan\left(\sqrt{\xi^2+1}-\xi\right) + \pi \cdot n, \\ \delta_{--} &= \tfrac{1}{2}\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(S'_{--})}{\mathrm{Re}(S'_{--})}\right) + \tfrac{\pi}{2} \cdot n, \\ \delta_{++} &= \tfrac{1}{2}\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(S'_{++})}{\mathrm{Re}(S'_{++})}\right) + \tfrac{\pi}{2} \cdot n, \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

bu yerda $n = 0,1,\ldots$; ushbu parametrlar energiyaning uzluksiz funksiyasi bo'lishi uchun, umumiy holda $n = n(E)$.

5.4 Stapp – Ipsilantis – Metropolis usuli

Juftlashgan to'lqinlarda sochilish fazalar farqini hisoblashning yana bir usuli Stapp, Ipsilantis va Metropolislar (SIM)[1] tomonidan taklif etilgan. Bu usul yana *yadroviy tayoqcha*[2] usuli deb ham ataladi. Ushbu usulda sochilish matritsasi quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi:

$$S = \begin{pmatrix} \cos(2\bar{\epsilon}_J) \cdot e^{2i\bar{\delta}_-} & i\sin(2\bar{\epsilon}_J) \cdot e^{2i(\bar{\delta}_- + \bar{\delta}_+)} \\ i\sin(2\bar{\epsilon}_J) \cdot e^{2i(\bar{\delta}_- + \bar{\delta}_+)} & \cos(2\bar{\epsilon}_J) \cdot e^{2i\bar{\delta}_+} \end{pmatrix}, \tag{5.4.1}$$

bu yerda $\bar{\delta}_{\pm} = \bar{\delta}_{J\pm1}$ – sochilishning fazalar farqi, $\bar{\epsilon}_J$ – aralashish parametri. Bu kattaliklar BB usulda topilganlari bilan quyidagicha bog'langan:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_+ + \bar{\delta}_- &= \delta_{++} + \delta_{--}, \\ \sin\left(\bar{\delta}_- - \bar{\delta}_+\right) &= \frac{\tan(2\bar{\epsilon}_J)}{\tan(2\epsilon_J)}. \end{aligned}$$

---

[1] ing. *Stapp parametrization*

[2] ing. *Nuclear bar*

SIM usulida aralashish parametri va sochilish fazalar farqini hisoblash $SS^* = 1$ unitarlik hususiyatini qo'llab bajarilishi mumkin.

BB va SIM usullarini solishtiradigan bo'lsak, to'liq momentning kichik qiymatlari uchun BB usulda

$$\delta_{--} \sim p^{2J-1}, \;\; \delta_{++} \sim p^{2J+3}, \;\; \epsilon_J \sim p^2$$

va SIM usulda

$$\overline{\delta}_- \sim p^{2J-1}, \;\; \overline{\delta}_+ \sim p^{2J+3}, \;\; \overline{\epsilon}_J \sim p^{2J+1}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin. Ularni tahlil qilaylik. BB usulda, pion paydo bo'lish ostonasi energiyasidan kichik energiyalar holida (p lar o'ta kichik qiymat qabul qilganda), $J > 1$ bo'lganda hususiy fazalar farqi deyarli nol bo'lsa ham, aralashish parametri sezilarli katta qiymatlar qabul qilar ekan. Shunga qaramasdan, fazalar farqlari yaxshi analitik hulqqa ega. SIM usulida esa, aksincha, aralashish parametri, kichik orbital momentlar holida, ostona energiyasidan kichik energiyalar uchun yaxshi analitik hulqqa ega, lekin tayoqcha fazalar farqlarining analitik xususiyatlari unchalik yaxshi emas.

5.5 Effektiv – radius yoyilmasi

S- matritsaning elementlari kompleks E energiya yoki kompleks p^2 impulsning analitik funksiyalaridir[1]. Neytron va protondan iborat ikki zarrali sistemada sochilish holatlari uchun ular E ning haqiqiy qiymatlari o'qida $E = 0$ dan ∞ gacha oraliqda `unitarlik qirqimiga`[2] ega. Ya'ni, S- matritsa elementlari uchun pion-paydo bo'lishi ostonasi $E_{\text{mm}} \simeq 135$ MeV dan boshlab `o‘ng-qo‘l qirqim` va mezon almashinuvi bilan bog'liq `chap-qo‘l qirqim` kabi qo'shimcha unitarlik qirqimlari mavjud. Bitta pion almashinuviga (ing. *one pion exchange* – OPE) mos qirqim $E = -\frac{m_\pi^2}{4m_N} = -5$ MeV dan, ikkita pion almashinuviga (ing. *two pion exchange* – TPE)

---

[1] Analitik funksiyalarni yana – regulyar funksiyalar deyishadi. Bunday funksiyalar umumiy holda kompleks o'zgaruvchining funksiyalari bo'lib, ular differensiallanuvchi, uzluksiz va ularni argumentining qandaydir atrofida Teylor qatoriga yoyish mumkin. Ularning moduli kvadratidan argumenti bo'yicha olingan integral mavjud. Regulyar funksiyalardan tashkil topgan fazoni *Hilbert fazosi* deb atashadi.

[2] ing. **unitarity cut**

mos qirqim $E =$ -$\frac{m_\pi^2}{m_N}$ = -20 MeV dan boshlanadi, bu yerda m_π – pionning, m_N esa nuklonning massasi. Agar bog‘langan holat mavjud bo‘lsa, S- matritsa elementlari energiyaning ushbu qiymatida qutbga ega. Masalan, $^3S_1 - {}^3D_1$ juft kanalda, $E =$ -2.224575(9) MeV bo‘lganda, deytronga to‘g‘ri keluvchi qutb bor.

Sochilish hodisalarini tadqiq qilishda S- matritsa bilan quyidagicha bog‘langan

$$S = \frac{1+iK}{1-iK}$$

K- matritsasini kiritish juda qulay. Sochilishni tavsiflashda muhim bo‘lgan `sochilish uzunligi`, `effektiv radius` va o‘zaro ta’sir potensialining shaklini tavsiflovchi `shakl parametrlari` qiymatlarini K- matritsa orqali aniqlanadigan

$$M(p^2) = p^{L+1}K^{-1}p^L$$

`effektiv-radius funksiyasini` qo‘llab hisoblash mumkin. Bu funksiya ham huddi S- matritsa singari, o‘ng- va chap-qo‘l qirqimli, E yoki p^2 ning analitik funksiyasidir. Lekin, unitarlik qirqimi uning aniqlanishida olib tashlangan va shu sababli u deytronga mos qutbga ega emas. Shuning uchun $M(p^2)$ effektiv-radius funksiyasi radiusi 5 MeV bo‘lgan aylana ichida regulyar, chunki 5 MeV dan keyin OPE ga mos keluvchi chap-qo‘l qirqimga yetib kelinadi. Effektiv-radius funksiyasini to‘yinish radiusi 5 MeV bo‘lgan darajali ko‘phadga yoyish mumkin. Natijada

$$M = M_0 + M_1 \cdot p^2 + M_2 \cdot p^4 + M_3 \cdot p^6 + \dots$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan `effektiv-radius yoyilmasini` olamiz. Amaliy hisoblashlar uchun bu yoyilmaning to‘yinish radiusi kichiklik qiladi (faqat 5 MeV). Agar OPE ga to‘g‘ri keluvchi chap-qo‘l qirqim olib tashlansa, **o‘zgartirilgan effektiv-radius funksiyasini** olish mumkin. Bu holda yoyilmaning to‘yinish radiusi 20 MeV bo‘lib qoladi.

Agar hususiy fazalarni va aralashish parametrini BB usul yordamida hisoblashlamoqchi bo‘lsak, quyidagi effektiv-radius funksiyalarni aniqlashimiz mumkin:

$$\begin{aligned} &F_{J-1}(p^2) = p^{2J-1} \cdot \cot\delta_{--}, \;\; F_{J+1}(p^2) = p^{2J+3} \cdot \cot\delta_{++}, \\ &F_\epsilon(p^2) = 2p^2 \cdot \cot 2\epsilon_J. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Bu funksiyalar $p^2 = 0$ yoki $p^2 = -\alpha^2$ deytron qutbi atrofida yaxshi analitik hulqqa ega.

SIM usuli uchun esa

$$\begin{aligned}&\overline{F}_{J-1}(p^2) = 2p^{2J-1} \cdot \cot 2\overline{\delta}_-, \ \ \overline{F}_{J+1}(p^2) = 2p^{2J+3} \cdot \cot 2\overline{\delta}_+, \\ &\overline{F}_\epsilon(p^2) = 2p^{2J+1} \cdot \cot 2\overline{\epsilon}_J.\end{aligned} \tag{5.5.2}$$

Yuqoridagi tahlildagidek, ushbu funksiyalarning analitik hulqi unchalik yaxshi emas.

BB usul uchun effektiv-radius funksiyasini to'liq moment J bilan emas, orbital moment bilan yozsak:

$$F_L(p^2) \ = \ p^{2L+1} \cot \delta_L, \tag{5.5.3}$$

umumiy ko'rinishdagi ifodani olish mumkin, bunda $\delta_L = \delta_L(p^2)$. O'ta kichik energiyalar sohasida, $L = 0$ holda (5.5.3) ni $p_0^2 = 0$ qiymat atrofida Teylor qatoriga yoyib,

$$p \cdot \cot \delta_0 \ = \ -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 \cdot p^2 + \mathcal{O}(p^4), \tag{5.5.4}$$

ifodani[1] yozishimiz mumkin. Bu yoyilmada, energiya o'ta kichik bo'lganligi sababli qiymatini hisobga olmasa ham bo'ladigan, impulsning p^4 va undan yuqori darajasi qatnashgan hadlar tashlab yuborilgan, ya'ni $\mathcal{O}(p^4) \sim 0$. Ushbu yoyilmani 1944 yilda Landau va Smorodinskiylar S- parsial to'lqinni massalar markazi sistemasida tavsiflash uchun empirik formula sifatida kiritishgan edi. Yuqorida keltirilgan (5.5.4) formuladagi a_0 koeffitsient keyinchalik `sochilishning Fermi uzunligi`, r_0 esa `effektiv radius` deb nomlandi. Kichik energiyalar sohasida effektiv radiusning mohiyati yadroviy kuchlar ta'sir qiluvchi masofani bildiradi. Sochilish uzunligini kvadrati esa $E = 0$ da sochilishning shu to'lqindagi parsial kesimiga proporsional, ya'ni $\sigma_0 \sim a_0^2$.

Effektiv-radius yoyilmasining ixtiyoriy $L > 0$ hol uchun umumlashgani

$$p^{2L+1} \cdot \cot \delta_L \ = \ -\frac{1}{a_L} + \frac{1}{2} r_L \cdot p^2 + \sum_{n=2}^{\infty} v_n^{(L)} \cdot p^{2n}, \tag{5.5.5}$$

ko'rinishga ega, bu yerda $v_n^{(L)}$ lar o'zaro ta'sir `shaklining o'lchamli parametrlari` deb ataladi. Bu yoyilma nuklon-nuklon sochilishga doir tajribalarda

---

[1] bu ifoda ing. `effective-range expansion` deb yuritiladi.

olingan ma'lumotlarni tahlil qilishda[1] juda qulay vositadir va undagi paramterlar, deytron parametrlari bilan birga, nuklon-nuklon o‘zaro ta'sirni tadqiq etishda o‘ta muhim bo‘lgan fundamental kattaliklar hisoblanishadi. Ushbu kattaliklar realistik yadro kuchlarining turli modellarini qurishda markaziy ahamiyatga ega bo‘lib, yadrolarning tarkibini va turli xil yadroviy jarayonlarni o‘rganish uchun asos sifatida qo‘llaniladi.

---

[1] ing. *Partial wave analysis* (PAW)

Oraliq nazorat

1. Sochilishga doir eksperiment sxemasi (izohlang)
2. Sochilishga doir eksmerimentlarda oʻlchanadigan fizikaviy kattalik
3. Zarralarni sochilish turlarini sanab oʻting
4. Klassik mexanikada sochilish kesimi
5. Klassik zarrani potesial oʻrada sochilishi. Potensialga qoʻyilgan talablar
6. α-zarrani ogʻir yadrolarda sochilishi
7. Laboratoriya va massalar markazi sanoq tizimlari
8. Ikkita zarra tizimida massalar markazi harakatini ajratish
9. Ikkita zarra tizimi uchun Shredinger tenglamasini massalar markazi sanoq tizimi harakati uchun yozish
10. Sochilish markazidan uzoq masofalarda toʻlqin funksiya asimptotikasi
11. Sochilish jarayonida tushayotgan yassi toʻlqin normirovkasi. δ-funksiyaning Furye tasviri
12. Grin funksiyasi va uning asimptotikasi. Grin funksiyasining Furye tasviri
13. $(\Delta + k^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$ tenglamadan Grin funksiyasini koʻrinishini aniqlang
14. Sochilish uchun integral tenglama
15. Sochilish amplitudasini toʻlqin funksiya yordamida aniqlanishi
16. Sochilishning differensial kesimini toʻlqin funksiyasi yordamida aniqlanishi
17. Sochilsh amplitudasi uchun Born yaqinlashishi

A-ILOVA. Aniq integralni taqribiy hisoblash

Gauss kvadratur formulasi

Ma'lum integrallarni taqribiy hisoblash uchun Gauss eng yuqori algebraik aniqlikka ega bo'lgan kvadratur formulani qurdi. U quyidagi ko'rinishga ega:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Bu yerda $x_1, x_2, ..., x_n$ va $w_1, w_2, ..., w_n$ kattaliklar shunday tanlanadiki, bu formula 2n-1 darajali ko'phadlar uchun aniq natija beradi. x_i miqdorlar tugunlar deyiladi va Gauss kvadratur formulasining og'irliklari. Agar n - tugunlar soni bo'lsa, u holda yuqoridagi formulaning algebraik aniqligi 2n-1 dan katta emasligini ko'rsatish mumkin. Integralni `[a,b]` kesmada hisoblash uchun $t = (b+a)/2 + (b-a)x/2$ ni almashtirish kerak. U holda bu formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i),$$

bu yerda i = (b+a) /2+ (b-a) x i/2, $i = 1, 2, ..., n$.

Gaussning kvadratur formulasida tugunlar sifatida Lejandr polinomlarining nollari olinadi. Masalan, n = 2 bo'lganda tugunlar $x_1 = -1/\sqrt{3}$, $x_2 = 1/\sqrt{3}$ va og'irlik $w_1 = w_2 = 1$. Bu holda Gauss formulasining algebraik aniqligi Simpson formulasining algebraik aniqligiga teng:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Agar integral ostidagi funksiya yetarlicha silliq bo'lsa, u holda Gauss formulasi yig'indidagi qo'shiluvchilarning kichik sonidan foydalanib yuqori aniqlikda natija olish imkonini beradi. Gauss formulasining xatoligi tengligini ko'rsatish mumkin

$$\mid \Delta_n \mid \cong \frac{b-a}{2.5\sqrt{n}} \left(\frac{b-a}{3n}\right)^{2n} \max_{x\in[a,b]} \mid f^{(2n)}(x) \mid .$$

Gauss formulasida taqribiy hisoblashda integral chegaralariga mos tugunlardan foydalanilmaydi. Agar integral osti funksiyaning qutblari chegaralarda yotsa, u holda Gauss formulasi cheksiz funksiyalardan ham xosmas integrallarni topishga imkon beradi. Masalan, Gauss formulasi yordamida ko'rinishdagi ma'lum bir integralni hisoblash mumkin $\int_0^1 \frac{cosx}{\sqrt{x}}dx$.

Quyida istalgan n uchun tugunlar va vaznlar qiymatlariga ega bo'lgan gauss () nomli protsedura kichik dasturining matnini keltiramiz:

```
SUBROUTINE gauss (a,b,n,w,x,isize)
=========================================================!
! ** O‘zgardi 29.04.2017 **!
! Tugunlar (x (i)) va og‘irlik (w (i))!
! Gaussning kvadratur formulasi uchun!
! NUMERICAL RECIPES, muallif: W.PRESS va boshqalar!
=========================================================!
IMPLICIT NONE
INTEGER i, j, n, m, isize
REAL (8), DIMENSION (isize):: x,w
REAL (8), PARAMETER:: eps = 3.D-14
REAL (8) pi, xm, xx, a, b
REAL (8) z, z1, p1, p2, p3, pp
pi = 4.0D0 * ATAN (1.0D0)
m = (n+1) /2
xm = 0.50D0* (b+a)
xx = 0.50D0 * (b-a)
DO 12 i = 1,m
z = COS (pi* (i-0.25D0) / (n+0.50D0))
1 CONTINUE
p1 = 1.0D0
p2 = 0.0D0
DO 11 j = 1,n
p3 = p2
p2 = p1
p1 = ((2.0D0*j-1.0D0) *z*p2- (j-1.0D0) *p3) /DBLE (FLOAT (j))
11 CONTINUE
pp = DBLE (FLOAT (n)) * (z*p1-p2) / (z*z-1.0D0)
```

```
z1 = z
z = z1-p1/pp
IF (ABS (z-z1).GT. eps) GOTO 1
x (i) = xm-xx*z
x (n+1-i) = xm+xx*z
w (i) = 2.0D0 * (xx/ ((1-z*z) *pp*pp))
w (n+1-i) = w (i)
12 CONTINUE
QAYTISH
END SUBROUTINE gauss
```

Ushbu kichik dasturda

```
REAL (8) a - integralning quyi chegarasi, kirish parametri
REAL (8) b - integralning yuqori chegarasi, kirish parametri
REAL (8) x - massiv, tugunlar, chiqish parametri
REAL (8) w - massiv, vazn, chiqish parametri
INTEGER isize - massivlarning maksimal o‘lchami
INTEGER n - uzellar va tarozilar soni, n =< isize
```

Ma'lum bir integralni hisoblash uchun kichik dastur `gauss ()` ni chaqirish uchun quyidagi bosh dasturni tuzish mumkin:

```
PROGRAM integral_gauss
INTEGER, PARAMETER:: n = 8
REAL (8), PARAMETR:: a = 0, b = 1.!3.14159
REAL (8):: f
REAL (8):: s, rezultat
REAL (8), DIMENSION (n): x,w

CALL gauss (a,b,n,w,x,n)
s = 0.d0
DO i = 1, n
s = s + f (x (i)) *w (i)
END DO

natija = s
PRINT *, 'Integral (F (x) dx) = ', rezultat

END PROGRAM integral_gauss
```

Integral ostidagi funksiyaning qiymatlarini hisoblovchi funksiya qism dasturining tuzilishi taxminan quyidagicha boʻlishi mumkin

```
REAL (8) FUNCTION f (x)
REAL (8), INTENT (IN):: x
f = 4. (1+x**2)! Noaniq integralni olib
bu funksiyadan At (x) ni hosil qilamiz.
QAYTISH
END FUNCTION f
```

Yaratilgan dasturlar asosida hisoblash quyidagi natijani beradi:

```
Integral (F (x) dx) = 3.1415927410125732
```

B-ILOVA. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan sonli yechish

Noma'lumlarni ketma-ket chiqarib tashlaydigan algebraik tenglamalar sistemasini yechish metodi Gauss metodi deb ataladi. Bu usulda quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasi keltirilgan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ \ i = 1, 2, ..., n$$

unga teng kuchli uchburchakli matritsali sistema bilan almashtiriladi:

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n &= d_1, \\ x_2 + ... + c_{2n}x_n &= d_2, \\ ....&, \\ x_n &= d_n, \end{aligned}$$

Ushbu tizim quyidagi rekurrent formula yordamida yechiladi:

$$x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k, \ \ i = n-1, n-2, ..., 1.$$

Bu usulning bir necha turlari mavjud. Ulardan biri bu asosiy elementni tanlash usulidir. Tenglamalar sistemasi quyidagi koʻrinishga ega boʻlsin:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= b_1, \\ ....&, \\ a_{n1}x_n + ... + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Koeffitsiyent $a_{11} \neq 0$ deb faraz qilamiz va tenglamaning ikkala tomonini unga boʻlamiz. U holda quyidagi natijaga ega boʻlamiz:

$$x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \tag{2}$$

bu yerda $b_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j = 1, 2, ..., n$, $b_1^{(1)} = b_1/a_{11}$. (2) ni qoʻllab, sistemadagi (1) ikkinchi tenglamadan boshlab ketma-ket x_1 ni chiqarib tashlaymiz. Buning uchun ikkala tomonni (2) navbatma-navbat $a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1}$ ga ko'paytiramiz va mos ravishda birinchisidan, ikkinchisidan ..., n ayiramiz. Natijada darajasi boshlang'ich darajadan bir birlik kichik bo'lgan sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} x_1 + ... + a_{2n}^{(1)} x_n &= b_2^{(1)}, \\ ....&, \\ a_{n2}^{(1)} x_n + ... + a_{nn}^{(1)} x_n &= b_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Bu yerda $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}$, $i,\ j = 2, 3, ..., n$, $b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}b_1$, $i = 2, 3, ..., n$. Yangi sistema uchun yuqoridagi amalni n marta takrorlaymiz. U holda quyidagi sistemaga kelamiz

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n &= d_1, \\ x_2 + ... + c_{2n}x_n &= d_2, \\ ....&, \\ x_n &= d_n, \end{aligned} \tag{3}$$

Bu sistema (1) sistemaga teng kuchli va uni yechish oson. Haqiqatan ham, oxirgi tenglamadagi x_n ni oldingi tenglamaga qo'yib, x_{n-1} ni topamiz. Topilgan x_{n-1} va x_n ni keyingiga qo'yamiz va x_{n-2} ni topamiz va hokazo.

Shunday qilib, Gauss usulida algebraik tenglamalar sistemasining yechimi ikki qismdan iborat:

1) `to‘g‘ri yurish`: sistemani uchburchakli matritsali sistemaga keltirish;
2) `teskari yurish`: boshlang'ich sistemaga teng kuchli tenglamalar sistemasini yechish (3).

a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(1)}$, ... koeffitsiyentlar Gauss metodining bosh elementlari deyiladi.

Bu yerda har bir qadamda $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ shart bajarilishi kerak. Agar bu shart bajarilmasa, bosh element sifatida noldan farqli istalgan boshqa koeffitsiyentni tanlash mumkin. Ammo agar $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ bo'lsa va u juda kichik bo'lsa, uni tenglamaga bo'lish natijasida va tegishli ayirish amallaridan keyin hosil bo'lgan tenglamalarda hisoblash aniqligi yo'qolishi mumkin. Bu holni hisobga olish uchun tenglamalarni shunday o‘rin almashtirish kerakki, asosiy diagonalda k ustunning eng katta elementi bo‘lsin. Agar tenglamalar sistemasini tavsiflovchi matritsa yaxshi aniqlangan bo‘lsa, u holda Gauss metodida xatoliklar yig‘indisining bosh elementini tanlash jarayonida sezilarli bo‘lmaydi. Tenglamalarni yechish bilan bir qatorda ularni tavsiflovchi matritsaning determinantini hisoblash mumkin. Matritsaning determinantini shu matritsaning bosh elementlarini ko‘paytirib topish mumkin $a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(1)}$.

Gauss usulini amalga oshirish uchun Fortran protsedurasining quyidagi kichik dasturini yaratamiz:

```
SUBROUTINE LU_expand (A, AF, T, Det, Error, N)

!-----------------------------------------------------!
! A matritsani yoyish!
! va uning asosiy elementlarini tanlash bilan!
! uchburchakli L va U matritsalar bo‘yicha!
!-----------------------------------------------------!

INTEGER i, j, k, p, max_i, N
REAL, INTENT (IN), DIMENSION (N,N):: A
REAL, DIMENSION (N,N):: AF
REAL:: Det
INTEGER, DIMENSION (N): T
INTEGER:: Error
REAL:: AA, WW, RN
DUBL PRECISION Summa

RN = FLOAT (N)
Det = 1,0; Error = 0

IF (LOC (A) /= LOC (AF)) AF = A

c0: DO p = 1, N-1

IF (p > 1) THEN
c2: DO i = p, N
```

```
Summa = DBLE (AF (i,p))
c1: DO k = 1, p-1
Summa = Summa - AF (i,k) * DBLE (AF (k,p))
END DO c1
AF (i,p) = SNGL (Summa)
END DO c2
END IF

AA = ABS (AF (p,p)); max_i = p

c3: DO i = p+1, N
IF (AA < ABS (AF (i,p))) THEN
AA = ABS (AF (i, p)); max_i = i
END IF
END DO c3

IF (RN+AA=RN) THEN
Det = 0,0; Error=65; RETURN;
END IF

IF (max_i /= p) THEN
c4: DO k = 1, N
AA = AF (max_i,k); AF (max,k) = AF (p,k); AF (p,k) = AA
END DO c4
Det=-Det
END IF

Det = Det * AF (p,p); T (p) = max_i

c5: DO i = p + 1, N
AF (i,p) = AF (i,p) /AF (p,p)
END DO c5

IF (p > 1) THEN
c7: DO j = p + 1, N
Summa = DBLE (AF (p,j))
c6: DO k = 1, p - 1
Summa = Summa - AF (p,k) * DBLE (AF (k,j))
```

```
END DO c6
AF (p,j) = SNGL (Summa)
END DO c7
END IF

END DO c0

Summa = DBLE (AF (N,N))

c8: DO k = 1, N - 1
Summa = Summa - AF (N,k) * DBLE (AF (k,N))
END DO c8

AF (N,N) = SNGL (Summa)
Det = Det * SNGL (Summa); T (N) = N

QAYTISH
END SUBROUTINE LU_expand
```

Ushbu kichik dastur chiziqli tenglamalar sistemasini tavsiflovchi `A` xarakteristik matritsani uchburchakli `L` va `U` matritsalar boʻyicha ularning Gauss usuli boʻyicha koʻpaytmasi koʻrinishida yoyadi. Bunday yoyish tegishli matritsaning ustunlari boʻyicha bosh elementlarni tanlash orqali amalga oshiriladi.

$$TA = LU,$$

bu yerda `L` - diagonallarida birliklar turgan pastki uchburchakli matritsa, `U` - yuqori qismida nollar turgan yuqori uchburchakli matritsa, `T` - oʻrin almashtirishlar matritsasi. `TA` - bu matritsa satrlarini oʻrin almashtirish natijasida hosil boʻlgan matritsa `A`. Matritsaning har bir satri va `N` tartibli ustunida bitta birlik turadi va qolgan `N-1` matritsalarda faqat nollar mavjud. Shuning uchun dasturda faqat matritsaning almashtirilgan satrlari `A` haqidagi ma'lumotlarni oʻz ichiga olgan bir oʻlchovli massiv saqlanadi.

Matritsani yoyish jarayoni `N-1` qadamdan iborat. Har bir `p` qadamda a^{*}_{ip} oraliq qiymatlarning qiymatlari hisoblanadi:

$$a_{ip}^{*} = a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik}u_{kj}, \quad (i = p, p+1, \ldots, N),$$

bu yerda a_{ip}, l_{ik}, u_{kj} - mos ravishda `A, L, U` matritsa elementlari. So'ngra `m` satrida absolyut qiymati bo'yicha eng katta bo'lgan $|a_{ip}^{*}|$ element qidiriladi $(p \leq i \leq N)$. Agar $m \neq p$ bo'lsa, u holda `m` va `p` raqamli satrlar o'rin almashadi. Agar $a*_{mp} = 0$ bo'lsa, hisoblash jarayoni to'xtaydi.

Matritsaning raqami `p` bo'lgan ustuni `L` va matritsaning raqami `p` bo'lgan satri `U` quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$\begin{aligned} l_{ip} = & \quad a_{ip}^{*}/a_{pp}, \qquad (i = p+1, p+2, \ldots, N), \\ u_{pp} = & \quad a_{pp}^{*}, \\ u_{pj} = & \quad a_{pj} - \sum_{k=1}^{N-1} l_{pk}u_{kj}, \quad (j = p+1, p+2, \ldots, N). \end{aligned}$$

Oxirgi qadamda u_{NN} qiymati hisoblanadi:

$$u_{NN} = a_{NN} - \sum_{k=1}^{N-1} l_{Nk}u_{kN}.$$

Shunday qilib, dastlabki matritsani uchburchakli martisalar `L` va `U` bo'yicha yoyish tugallanadi.

Matritsani uchburchaklarga ajratadigan kichik dasturga murojaat quyidagi ko'rinishga ega:

```
CALL LU_expand (A, AF, T, Det, Error, N)
```

Kichik dastur parametrlari:

```
A - kirish parametri;
AF, T, Det, Error - chiqish parametrlari;
REAL A (1:N, 1:N) - dastlabki matritsa elementlaridan
tashkil topgan massiv;
REAL AF (1:N, 1:N) - trigulli matritsa elementlaridan
tashkil topgan massiv,
pastki uchburchakning diagonalida turgan birliklar
```

```
matritsalar saqlanmaydi;
INTEGER T (1:N) - o‘rin almashtirish haqidagi
ma’lumotlarni o‘z ichiga olgan massiv
A matritsa satrlari;
REAL Det - A matritsa determinantining qiymati;
INTEGER Error - hisoblashda xato haqida
xabar beruvchi parametr,
agar Error = 0 bo‘lsa, u holda xatolar yo‘q va
Error = 65 yoki 66,
u holda matritsani yoyish bajarilmagan,
shuning uchun shilinma tufayli dastur to‘xtaydi.
```

Determinantni hisoblash A boshlang‘ich matritsaning yaxshi aniqlangan yoki singulyar ekanligini aniqlash uchun zarur. Singulyarlikni matritsalar (nol determinantli matritsalar) bilan ifodalanuvchi sistemalar bir qiymatli yechimga ega emas.

Yuqorida yaratilgan kichik dastur natijasidan foydalanib algebraik tenglamalar sistemasini yechadigan boshqa kichik dastur yoki protsedura yaratamiz. Uning matni quyida keltirilgan:

```
SUBROUTINE SLAU_gauss (AF, T, B, X, N)
!-----------------------------------------------!
! Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish!
A*x = B tenglamaning A matritsasi bo‘lib, unda!
! ’LU_expand ()’yordamida yozildi!
!-----------------------------------------------!
INTEGER:: i, j, m, N
REAL, INTENT (IN):: AF (N,N), B (N)
INTEGER, INTENT (IN): T (N)
REAL:: X (N)
DUBL PRECISION Summa

IF (LOC (B) /= LOC (X)) X = B

t1s: DO i = 1, N
m = T (i)
Summa = DBLE (X (m)); X (m) = X (i)
```

```
i1s: DO j = 1, i-1
Summa = Summa - AF (i,j) * DBLE (X (j))
END DO i1s

X (i) = SNGL (Summa)
END DO t1s

t2s: DO i = N, 1, -1
Summa = DBLE (X (i))

i2s: DO j = i + 1, N
Summa = Summa - AF (i,j) * DBLE (X (j))
END DO i2s

X (i) = SNGL (Summa/AF (i,i))
END DO t2s

QAYTISH
END SUBROUTINE SLAU_gauss
```

Ushbu kichik dastur $A \cdot x = B$ koʻrinishdagi algebraik tenglamalar sistemasini yechadi. Bunda `LU_expand ()` dan `Error = 0` olingan `A` matritsani yoyish natijasidan foydalaniladi.

$A \cdot x = B$ tenglamalar sistemasini yechish uchburchak matritsali ikkita $L \cdot y = B$ va $U \cdot x = y$ tenglamalarni yechishga keltiriladi. Qaror quyidagi formulalar yordamida qabul qilinadi:

$$y_i = \ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \ \ (i = 1, 2, \ldots, N)$$

(`'to‘g‘ri yurish'`) birinchi va

$$x_i = \ (y_i - \sum_{j=i+1}^{N} u_{ij} x_j)/u_{jj}, \ \ (i = N, N-1, \ldots, 1)$$

(`'teskari yurish'`) ikkinchisi uchun.

Birinchi sistemada tenglamalarning oʻng tomoniga mos keluvchi `B` massiv quyidagicha toʻldiriladi `A` matritsaning almashtirilgan satrlari haqidagi maʼlumotlarni oʻz ichiga olgan `T`, dastur ishlagandan soʻng `LU_expand ()` .

Unga murojaat quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

```
CALL LU_expand (AF, T, B, X, N)
```

Dastur parametrlari:

```
AF, T, B - kirish parametrlari;
X - chiqish parametri.

REAL AF (1:N,1:N) - elementlari bo‘lgan massiv
L va U uchburchakli matritsalar;
INTEGER T (1:N) - ma’lumotlarni o‘z ichiga olgan massiv
A matritsaning almashtirilgan satrlari;
REAL B (1:N) - o‘ngga mos massiv
tenglamalarning tomoniga;
REAL X (1:N) - yechimlar qiymatlarini o‘z ichiga olgan massiv
algebraik tenglamalar sistemasi.
```

Yuqorida yaratilgan kichik dasturlardan foydalanuvchi bosh dastur quyidagi tuzilishga ega:

```
PROGRAM SLAU
!-----------------------------------!
! SLAU ni Gauss usuli bilan yechish!
!-----------------------------------!
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER:: n = 4! sistemadagi tenglamalar soni
REAL, DIMENSION (n,n): A, AF, A1
REAL, DIMENSION (n): B, X, B1
REAL:: D
INTEGER, DIMENSION (n): T
INTEGER:: Er, i, j, k

A1 (i,j) elementlarini xotirada saqlagan holda
! oldin ikkinchi indeks j ortadi
DATA A1/1.0, 1.1, 1.2, 1.4, &
1.1, 1.1, 1.2, 1.3, &
1.2, 1.2, 1.2, 1.3, &
1.4, 1.3, 1.3, 1.3 /
```

```
DATA B1/11.1,11.4,12.1,13.4 /

DO i = 1, n
B (i) = B1 (i)
DO j = 1, n
A (i,j) = A1 (i,j)
END DO
END DO

! Dastlabki A matritsani uchburchaklar bo‘yicha yoyish

CALL LU_expand (A, AF, T, D, Er, n)

IF (Er > 0) THEN
PRINT *, ’Singulyar matritsa. Dastur to‘xtatildi."
STOP
END IF

! Yoyiq matritsadan foydalanib
! SLAU ni yechamiz:

CALL SLAU_gauss (AF, T, B, X, n)

! Natijani ekranga chiqaramiz:

PRINT 10
PRINT 11, ((A (i,j), j=1,n), i, B (i), i=1,n)
PRINT 12
PRINT 13, (i, X (i), i=1,n)
PRINT 14, D

FORMAT (/’ Tenglamalar sistemasi:’/)
FORMAT (’ |’,4F5.1,’ | X’,I1,’ |’,F5.1,’ |’)
12 FORMAT (/’ Yechimlar:’/)
FORMAT (’X’,I1,’ = ’,F11.8)
FORMAT (/’ Determinant =’,E15.7)

END PROGRAM SLAU
```

Yaratilgan dasturlarning ish natijasi:

```
Tenglamalar sistemasi:

1.0 1.1 1.2 1.4 | X1 | 11.1 |
1.1 1.1 1.2 1.3 | X2 | 11.4 |
| 1.2 1.2 1.3 | X3 | 12.1
| 1.4 1.3 1.3 X4 | 13.4

Yechim:

X1 = 3.99987936
X2 = 3.00012612
X3 = 2.00011635
X4 = 0.99988753

Determinant = -0.9999890E-04
```

C-ILOVA. Parsial komponentlar uchun tenglamani sonli yechish

Parsial komponentlar uchun tenglamani sonli yechish

Sochilishning fazalar farqini R- matritsa uchun yozilgan (4.2.3) tenglamani sonli yechish orqali hisoblaylik. Bunda sochilish fazalar farqi va R- matritsa diagonal elementlari quyidagicha bogʻlangan:

$$R_L(x_0, x_0) \;=\; -\frac{\tan \delta_L}{2\mu \cdot x_0}, \tag{4}$$

bu yerda μ – neytron va proton sistemasida keltirilgan massa. Fazalar farqini

$$\delta_L \;=\; \arctan\left(-2\mu \cdot x_0 R_L(x_0, x_0)\right) + \pi n \tag{5}$$

formula orqali hisoblash mumkin. Yana, (4) ifodadan $L = 0$ (S- toʻlqin) boʻlganda, effektiv – radius yoyilmasi uchun quyidagini olamiz:

$$x_0 \cdot \cot \delta_0 \;=\; -\frac{1}{2\mu \cdot R_0(x_0, x_0)} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 \cdot x_0^2. \tag{6}$$

LSHT ni (4.2.3) taqribiy yechish uchun ularni Gaussning kvadratur formulasi yordamida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga almashtiramiz

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \;\approx\; \sum_{j=1}^{N} \omega_j f(x_j), \tag{7}$$

bu yerda x_j - vaznlar va ω_j - tugunlar boʻlib, ularning qiymatlarini Fortranda yozilgan `gauss()` dasturi yordamida hisoblash mumkin. Bu dastur ilovada keltirilgan.

Gaussning kvadratur formulasida (7) x_j va ω_j qiymatlarini hisoblashda $[-1, 1]$ chegarali aniq integral uchun Lejandr koʻphadlaridan foydalaniladi. x_j va ω_j qiymatlarini aniqlaydigan kichik dasturga `CALL` buyrugʻi orqali murojaat quyidagi koʻrinishda boʻlishi kerak: `gauss(a,b,N,w,x,N)`, bu yerda `a = -1`, `b = 1`. Ammo integral tenglamalarda integrallarning chegaralari $[0, \infty)$ boʻladi. Shuning uchun $[-1, 1]$ uchun topilgan tugunlar x_j va vaznlar ω_j ning qiymatlari $[0, \infty)$ uchun almashtirilishi kerak. Buni amalga oshirishning koʻplab usullari mavjud. Ulardan biri quyidagi almashtirish usulidir

$$\begin{aligned} x_{0,\infty}^{(j)} &= const \times \tan\left(\frac{\pi}{4}(1+x_j)\right), \\ \omega_{0,\infty}^{(j)} &= const \times \frac{\pi}{4}\frac{\omega_j}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}(1+x_j)\right)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Formulalarda tugunlar impuls xususiyatiga ega boʻlgani uchun ular oʻlchamli boʻladi. Agar oʻlcham sifatida Fm^{-1} ishlatilsa, u holda $const = 1$, agar MeV boʻlsa, $const \sim 200$ ($\hbar c = 197.327$ MeV·Fm).

(8) da aniqlangan vaznlar va tugunlarning (7) da zarur boʻlgan qiymatlarini hisoblash dasturida e'lon qilish uchun Fortranning modul imkoniyatidan foydalanamiz:

```
MODULE uzli_vesa
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER            :: N = 40 ! tugun va vaznlar soni
DOUBLE PRECISION, ALLOCATABLE :: x(:), w(:)
END MODULE uzli_vesa
```

Tugunlar va vaznlarning qiymatlarini `gauss()` va (8) formuladan foydalanib hisoblaydigan protsedura kichik dasturining matni quyida keltirilgan

```
SUBROUTINE gauss_uzli_vesa
USE constanti, ONLY: pi
USE uzli_vesa
IMPLICIT NONE
INTEGER i
DOUBLE PRECISION u,s,const,arg
PARAMETER(const = 200.)
DIMENSION u(N), s(N)
CALL gauss(-1.D0,1.D0,N,s,u,N)
DO i = 1, N
arg = pi*(1.D0 + u(i))/4.D0
x(i) = const * DTAN(arg)
```

```
  w(i) = const * pi * s(i) / (4.D0 * DCOS(arg)**2)
  END DO
  END SUBROUTINE gauss_uzli_vesa
```

Dastur matnida uchraydigan `constanti` nomli modul nuklon massasi m_N, $\hbar c$ va π soni kabi fundamental fizik konstantalarning qiymatlarini o'z ichiga oladi. Ushbu modul quyidagi tuzilishga ega:

```
 Ushbu modul quyidagi tuzilishga ega:
  MODULE constanti
  IMPLICIT NONE
  DOUBLE PRECISION, PARAMETER ::     pi = 4.D0 * ATAN(1.D0)
  DOUBLE PRECISION, PARAMETER ::  hbarc = 197.327D0 ! [MeV*Fm]
  DOUBLE PRECISION, PARAMETER :: n_mass = 938.926D0 ! [MeV]
  END MODULE constanti [MeV]
```

Endi impuls fazosida o'zaro ta'sir potensiali qiymatlarini hisoblovchi funksiyaning kichik dasturini tayyorlaymiz. Biz tanlagan potensial protonning neytrondan elastik sochilishidagi ${}^1S_0$ to'lqini (L=0 bo'lganda) uchun qurilgan. Bu potensialning parametrlari tajribalarda o'lchangan faza siljishi qiymatlariga moslashtirilgan. Koordinata ko'rinishida u quyidagi ko'rinishga ega:

Biz tanlagan potensial protonning neytronda sochilishidagi elastik to'lqin ($L = 0$ bo'lganda) uchun $1S_0$ qurilgan. Zarralarning to'qnashish jarayoni, buning natijasida faqat ularning impulslari o'zgaradi, ichki holatlari esa o'zgarmaydi. Ushbu potensial parametrlari tajribalarda o'lchangan fazaviy siljish qiymatlariga moslashtirildi. Koordinata ko'rinishida u quyidagi ko'rinishga ega:

$$V(r) \;=\; V_1\frac{e^{-a_1x}}{x}+V_2\frac{e^{-a_2x}}{x}+V_3\frac{e^{-a_3x}}{x}, \qquad (9)$$

bu yerda $x = \lambda \cdot r$, λ = 0.7 Fm^{-1} (pion massasiga teskari kattalik), V_1 = -10.463 MeV, a_1 = 1; V_2 = -1650.6 MeV, a_2 = 4; V_3 = 6484.3 MeV, a_3 = 7. $V(r) = V_0 \cdot e^{-\lambda r}/r$ ko'rinishdagi potensialning Furye tasvirini $V3$ = 6484.3 MeV, $a3$ = 7. $j_0(pr) = \sin(pr)/pr$ bo'lganda oldingi boblarda keltirib chiqargan edik (ifoda

(4.4.2)) va u quyidagi ko‘rinishga ega:

$$V_0(p,p') \;=\; -\frac{V_0}{pp'}\ln\left(\frac{\lambda^2+(p-p')^2}{\lambda^2+(p+p')^2}\right). \tag{10}$$

Bu potensial energiyaning nolga yaqin qiymatlarida, ya'ni $p, p' \to 0$ da o‘zini quyidagicha tutishini ko‘rsatish mumkin:

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0}\frac{1}{pp'}\ln\left(\frac{\lambda^2+(p-p')^2}{\lambda^2+(p+p')^2}\right) &= -\frac{4}{\lambda^2+p'^2}\\
\lim_{p'\to 0}\frac{1}{pp'}\ln\left(\frac{\lambda^2+(p-p')^2}{\lambda^2+(p+p')^2}\right) &= -\frac{4}{\lambda^2+p^2}\\
\lim_{p,p'\to 0}\frac{1}{pp'}\ln\left(\frac{\lambda^2+(p-p')^2}{\lambda^2+(p+p')^2}\right) &= -\frac{4}{\lambda^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Quyida (9) va (11) ifodalaridan foydalangan holda impuls fazosida (9) da aniqlangan potensial qiymatlarini hisoblaydigan Fortran dasturi matnini keltiramiz:

```
FUNCTION vnn(p1,p2) RESULT(vpot)
USE doimiylar, ONLY: pi, hbarc
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION vpot
DOUBLE PRECISION p1, p2
DOUBLE PRECISION v1, v2, v3, lambda1, lambda2, lambda3
DOUBLE PRECISION a, b, c
PARAMETER(v1=-3.7368/hbarc,lambda1=0.49D0*hbarc*hbarc)
PARAMETER(v2=-589.5/hbarc,lambda2=7.84D0*hbarc*hbarc)
PARAMETER(v3= 2315.8214/hbarc,lambda3=24.01D0*hbarc*hbarc)

IF(p1 < 1.0D-9 .AND. p2 > p1) THEN
vpot = v1 / (lambda1 + p2**2) +                 &
v2 / (lambda2 + p2**2) +                        &
v3 / (lambda3 + p2**2)
vpot = -vpot
ELSE IF(p2 < 1.0D-9 .AND. p1 > p2) THEN
vpot = v1 / (lambda1 + p1**2) +                 &
v2 / (lambda2 + p1**2) +                        &
v3 / (lambda3 + p1**2)
vpot = -vpot
```

```
ELSE IF(p1*p2 < 1.0D-9) THEN
vpot = v1 / lambda1 +                          &
v2 / lambda2 +                                 &
v3 / lambda3
vpot = -vpot
ELSE
a = (p1 - p2)**2
b = (p1 + p2)**2
c = 1./(p1 * p2)
vpot = v1 * DLOG((lambda1 + a)/(lambda1 + b)) + &
v2 * DLOG((lambda2 + a)/(lambda2 + b)) +        &
v3 * DLOG((lambda3 + a)/(lambda3 + b))
vpot =  c * vpot
END IF
vpot = -vpot
RETURN
END FUNCTION vnn
```

R-matritsa uchun (4.2.3) tenglamalarda integralning bosh qiymatini sonli usulda ajratish kompyuterning cheklangan aniqligi tufayli muammolidir. Shuning uchun integrallardagi singulyarliklarni sonli hisoblashlarda ajratish uchun bunday hollarda koʻp qoʻllaniladigan usulni tatbiq etamiz. Dastlab quyidagi munosabatni kiritamiz:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x_0 - x} \;=\; 0. \tag{12}$$

Bu munosabat $1/(x_0 - x)$ egri chizigʻining x_0 singulyar nuqtaning har ikki tomonida bir xil yuzaga ega ekanligini anglatadi. Agar ushbu integralni quyidagicha yozsak:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x_0 - x} \;+\; \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x_0 - x}$$

va $x \to -x$ almashtirish qilsak, u holda (12) quyidagi koʻrinishga keladi:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x_0^2 - x^2} \;=\; 0.$$

Integralning bosh qiymatini ajratish uchun bu xossani quyidagicha qoʻllaymiz:

$$\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{f(x)}{x_0^2-x^2}\mathrm{d}x \;=\; \int_0^\infty \frac{f(x)-f(x_0)}{x_0^2-x^2}\mathrm{d}x, \tag{13}$$

bu yerda tenglikning oʻng tomonidagi ifoda $x = x_0$ nuqtada endi singulyarlikka ega emas. Agar uni quyidagi koʻrinishda ifodalasak:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(x_0)}{x_0^2-x^2}\mathrm{d}x \;=\; \int_0^\infty \frac{f(x)-f(x_0)}{x_0-x}\frac{1}{x_0+x}\mathrm{d}x$$

va quyidagini aniqlasak:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x_0-x} \;=\; -\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$$

u holda (13) dagi integral qiymati $f'(x)$ birinchi tartibli hosilaga proporsional ekanligini koʻrish mumkin.

Bu bilimlarni endi (4.2.3) tenglamani sonli usullar bilan yechishda qoʻllaymiz. (13) munosabatini hisobga olgan holda, (4.2.3) tenglamani soddalik uchun ℓ indeksisiz quyidagi koʻrinishda yozamiz:

$$\begin{aligned} R(p',p) \;&=\; V(p',p)+\frac{4\mu}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}p'' \\ &\times\frac{p''^{\,2}V(p',p'')R(p'',p)-p_0^2V(p',p_0)R(p_0,p)}{p_0^2-p''^{\,2}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Bu tenglamani yechib, elastik sochilish fazalari siljishi qiymatlarini (4.2.5) formula boʻyicha hisoblash uchun zarur boʻlgan $R(p_0,p_0)$ kattalik qiymatlarini topamiz.

Ushbu tenglamani sonli yechish algoritmi quyidagicha:

1. Gaussning kvadratur formulasidan foydalanib, (14) tenglamasini quyidagi koʻrinishda qayta yozamiz:

$$\begin{aligned} R(p',p) \;&=\; V(p',p)+\frac{4m}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{\omega_j x_j^2 V(p',x_j)R(x_j,p)}{p_0^2-x_j^2} \\ &-\; \frac{4m}{\pi}p_0^2V(p',p_0)R(p_0,p)\sum_{j=1}^{N}\frac{\omega_j}{p_0^2-x_j^2} \end{aligned} \tag{15}$$

Shunday qilib, biz $R(x_i, x_j)$ noma'lumlarining $(N \times N)$ oʻlchamli va $R(p_0, p_0)$ noma'lumli tenglamasini hosil qildik.

2. (15) tenglamani eksperimental berilgan energiyaga mos keladigan $j = 1, N$ uchun x_j nuqtalar va $j = N + 1$ uchun p_0 nuqta boʻyicha $(N + 1) \times (N + 1)$ oʻlchamli algebraik tenglamalar sistemasiga almashtiramiz. Bunda x_j Gauss tugunlari gauss qism dasturi yordamida $j = 1, N$ uchun hisoblanadi, $x_{N+1} = p_0$ boʻladi.

3. Quyidagi matritsani tuzamiz:

$$A_{ij} \;=\; \delta_{ij} - V(x_i, x_j)u_j, \tag{16}$$

bu yerda δ_{ij} - Kroneker belgisi, $i, j =$ 1, 2, ..., $N + 1$ va

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{4m}{\pi}\frac{\omega_j x_j^2}{p_0^2 - x^2}, \text{ agar } j = 1, N \\ u_{N+1} &= -\frac{4m}{\pi}p_0^2\sum_{n=1}^{N}\frac{\omega_n}{p_0^2 - x_n^2}, \text{ agar } j = N + 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Birinchi vazifa, demak, (16) da aniqlangan A matritsani p_0 nuqtani hisobga olgan holda tuzishdir. Shunda A va $V(x_i, x_j)$ bir xil $(N + 1) \times (N + 1)$ oʻlchamga ega boʻladi.

4. Shunday qilib, (15) tenglamani yechish vazifasi $(N + 1) \times (N + 1)$ oʻlchamli A matritsa bilan ifodalanuvchi algebraik tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Endi barcha A, R va V kattaliklar bir xil $(N + 1) \times (N + 1)$ oʻlchamli matritsalar boʻlib, ular uchun quyidagi matritsaviy tenglamani yozishimiz mumkin:

$$AR \;=\; V. \tag{18}$$

5. Endi A va V bizga ma'lum. Demak, (18) tenglama R noma'lum uchun tenglama boʻlib, uning yechimi quyidagi koʻrinishga ega:

$$R \;=\; A^{-1}V \tag{19}$$

Shunday qilib, R qiymatlarini aniqlash uchun A va V matritsalarni tuzish, A^{-1} teskari matritsani topish va oxirida A^{-1} ni V ga koʻpaytirish kerak boʻladi.

LU yoyilmasidan foydalanib, (16)da aniqlangan A matritsasiga teskari A^{-1} matritsani topish vazifasini amalga oshiruvchi protseduraning qism dasturi quyidagi tuzilishga ega boʻlishi mumkin:

```
SUBROUTINE inverse_matrix(A,N)
IMPLICIT NONE
INTEGER, INTENT(IN)                             :: N
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(N,N), INTENT(INOUT) :: A
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(:,:), ALLOCATABLE   :: A_LU
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(:,:), ALLOCATABLE   :: AT
INTEGER,          DIMENSION(:  ), ALLOCATABLE   :: T
DOUBLE PRECISION                                :: Det
INTEGER :: i, j, Error
! Massivlar uchun xotirada joy ajratamiz
ALLOCATE(A_LU(N,N))
ALLOCATE(AT(N,N)); ALLOCATE(T(N))
! Birlik matritsani oʻrnatamiz
AT = 0.
DO i = 1,N
AT(i,i) = 1.
END DO
! A matritsani uchburchakli matritsalarga ajratamiz
! va bu ajratmani A_LU sifatida topamiz
CALL LU_expand(A, A_LU, T, Det, Error, N)
! A ga teskari AT matritsani ustunlar boʻyicha topamiz
DO j = 1,N
CALL SLAU_gauss(A_LU, T, AT(:,j), AT(:,j), N)
END DO
! Boshlangʻich A matritsasi oʻzgargan,
! shuning uchun teskari matritsani uning oʻziga
! berishimiz mumkin
A = AT
! Xotirani boʻshatamiz
DEALLOCATE(A_LU); DEALLOCATE(AT); DEALLOCATE(T)
END SUBROUTINE inverse_matrix
```

Yuqorida foydalanilgan `LU_expand()` va `SLAU_gauss()` Fortran qism dasturlarining matnlari 5.5 ilovasida keltirilgan.

Shunday qilib, biz R-matritsadan foydalanib, ikkita nuklonning elastik sochilishini oʻrganish uchun barcha zarur narsalarni tayyorladik. Keyingi asosiy vazifa yuqorida tayyorlangan kichik dasturlarga murojaat qilish uchun bosh dasturni tayyorlashdir. Uning tuzilishi quyidagi koʻrinishga ega:

```
PROGRAM faza
USE constanti
USE uzli_vesa
IMPLICIT NONE
INTEGER i,j,Eloop,info
DOUBLE PRECISION, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: V,R,A,I_matrix
DOUBLE PRECISION, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: u, p
DOUBLE PRECISION :: x0, delta, vnn, mu,c
mu = n_mass * 0.5
c = 4. * mu / pi
! Birlik matritsa uchun xotirani ajratamiz
ALLOCATE(I_matrix(N+1,N+1))
! Gauss tugunlari va og‘irliklarini hisoblaymiz
! Avval ular uchun xotirani ajratamiz
ALLOCATE(x(N),w(N))
! Keyin ularning qiymatlarini hisoblaymiz
CALL gauss_uzli_vasa
! Birlik matritsani yasaymiz
I_matrix = 0.
DO i = 1, N+1
I_matrix(i,i) = 1.
END DO
! Tushayotgan zarrachaning massa markazi
! tizimidagi energiya bo‘yicha sikl
! [MeV] birliklarida
DO Eloop = 0, 400, 25
ALLOCATE(p(N+1),u(N+1))
p = 0.
```

```
x0 = Eloop; p(1:N) = x(1:N); p(N+1) = x0
ALLOCATE(V(N+1,N+1),R(N+1,N+1),A(N+1,N+1))
V = 0.; R=0.; A=0.
! Impuls fazosidagi potensial qiymatini
! V massiviga joylaymiz
DO i = 1,N+1
DO j = 1,i
V(j,i) = vnn(p(j),p(i))
V(i,j) = V(j,i)
END DO
END DO
! u ning qiymatlarini aniqlaymiz
u = 0.
DO i = 1,N
u(i) = c*w(i)*x(i)*x(i)/(x(i)*x(i)-x0*x0)
u(N+1) = u(N+1)-c*w(i)*x0*x0/(x(i)*x(i)-x0*x0)
END DO
! Teskarisini topish zarur bo‘lgan A matritsaning
! qiymatini aniqlaymiz
A = 0.
DO i = 1,N+1
DO j = 1,N+1
A(i,j) = V(i,j)*u(j)
END DO
END DO
A = I_matrix + A
! Teskari matritsani topamiz
CALL inverse_matrix(A,N+1)
! R reaksiya matritsasining qiymatlarini topamiz
R = MATMUL(A,V)
! Fazalar siljishini hisoblaymiz
delta = ATAN(-2.*mu*x0*R(N+1,N+1))
! Ekranga energiya ([MeV]) va fazalar siljishini
! (graduslarda) saqlaymiz
WRITE(6,'(F12.6,2X,F12.6)') 2.*x0*x0/(2.*mu), delta*180./pi
! V, R, A, p, u massivlar uchun ajratilgan xotirani bo‘shatamiz
DEALLOCATE(V,R,A)
DEALLOCATE(p,u)
```

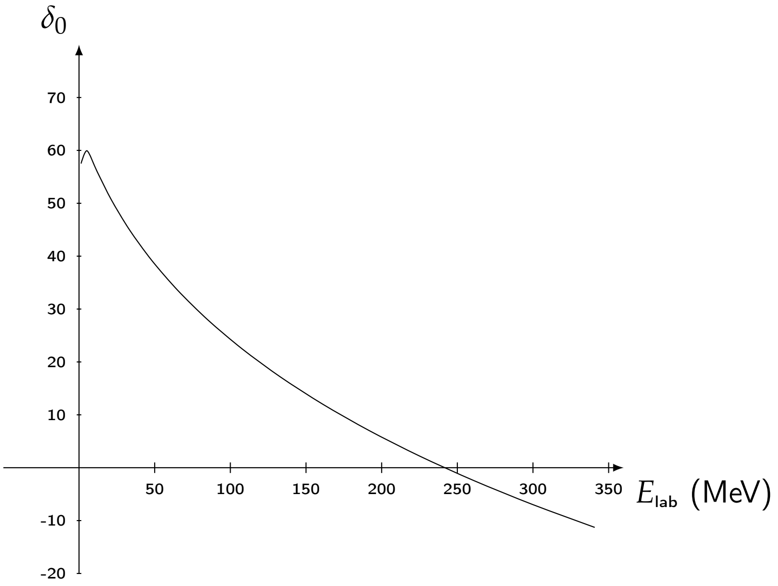
```
END DO
! Tugunlar, og‘irliklar va birlik matritsa uchun
! ajratilgan xotirani bo‘shatamiz
DEALLOCATE(x,w); DEALLOCATE(I_matrix)
END PROGRAM faza
```

Bu yerda yaratilgan `gauss()`, `LU_expand()`, `SLAU_gauss()` dasturlari va Fortrandagi `SLAU` asosiy dastur yordamida (14) tenglamaning sonli yechimi natijalarini keltiramiz.

Hisoblashlar $^1S_0$-to‘lqinda protonning neytrondan elastik sochilishidagi faza siljishi δ_0 qiymatlari uchun quyidagi natijalarni beradi:

E_{lab} (MeV)	δ_0
1.331308	57.501319
5.325233	59.924382
11.981775	55.986968
21.300933	50.687091
33.282708	45.008157
47.927100	39.249860
65.234108	33.535922
85.203733	27.928255
107.835974	22.460364
133.130832	17.149960
161.088307	12.005038
191.708399	7.027366
224.991107	2.214725
260.936432	-2.437597
299.544373	-6.935782
340.814931	-11.286789

Ko‘rgazmali bo‘lishi uchun laboratoriya tizimida tushayotgan zarra energiyasiga bog‘liq holda faza siljishining o‘zgarishini grafik ko‘rinishda keltiramiz (0.0.1-rasm).



0.0.1 - rasm: $^1S_0$-to‘lqinda protonning neytrondan elastik sochilishidagi δ_0-faza siljishini energiyaga bog‘liqligi.

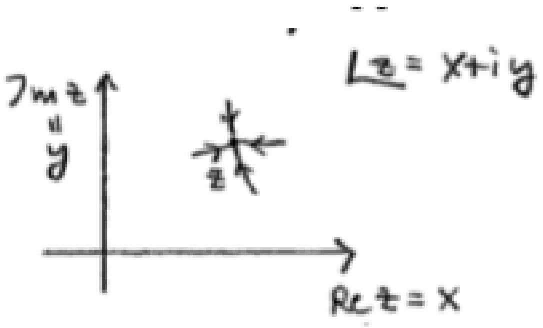
D-ILOVA. Grin funksiyasini hisoblash

Kompleks o‘zgaruvchi funksiyalari va ularning integrali

Kompleks o‘zgaruvchi bo‘yicha hosilani aniqlaylik

$$\boxed{f'(z) \equiv \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}; f, z, h \in \mathbb{C}}$$

U “izotropik” bo‘lishi, ya’ni, h yo‘nalishigi bog‘liq bo‘lmasligi lozim:



Boshqacha aytganda,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(z+\Delta x)-f(z)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \lim_{i\Delta y\to 0} \frac{f(z+i\Delta y)-f(z)}{i\Delta y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Xaqiqiy va mavhum qismlarini ajratamiz $f(z) = u(z) + iv(z)$, bunda $u, v \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$. U holda

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

va

$$f'(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

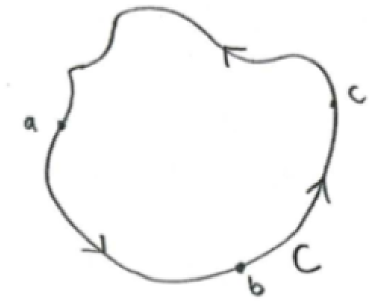
Xaqiqiy va mavhum qismlarini mos holda tenglash quyidagi natijaga olib keladi:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ va } \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0}$$

Ular **Koshi – Riman shartlari** nomi bilan bizga ma’lum.

Kontur integrallar

Kompleks tekislikda C egri chiziqni qaraymiz:



Bundan tashqari egri chiziq bo‘ylab musbat yo‘nalishni soat ko‘rsatgichiga qarshi deb tanlaymiz (rasmdagi nayzalar). C kontur bo‘ylab integralni qismlab aniqlash mumkin:

$$\oint\limits_{C^+} dz f(z) = \int\limits_{C(a\to b)} f(z) + \int\limits_{C(b\to c)} f(z) + \int\limits_{C(c\to a)} f(z) = -\oint\limits_{C^-} dz f(z).$$

$f(z)$ funksiya C da va u o‘rab turgan soha ichida **analitik** bo‘lsin. C bo‘ylab kontur integralni qaraylik:

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{C^+} dz f(z) &= \oint\limits_{C^+} (dx + idy)(u + iv) = \oint\limits_{C^+} (udx - vdy) + i \oint\limits_{C^+} (vdx + udy) \\
&= \oint\limits_{C^+} \underbrace{(u\hat{e}_x - v\hat{e}_y)}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{dx} + i \oint\limits_{C^+} \underbrace{(v\hat{e}_x + u\hat{e}_y)}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{dx} \\
&\overset{\text{Stoks teoremasi}}{=} \int\limits_{S_C} da\, \underbrace{\hat{e}_3 \cdot (\nabla \times \mathbf{A})}_{(\nabla\times\mathbf{A})_3} + i \int\limits_{S_C} da\, \underbrace{\hat{e}_3 \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}_{(\nabla\times\mathbf{B})_3} \\
&= \int\limits_{S_C} da(-\partial_x v - \partial_y u) + i \int\limits_{S_C} da(\partial_x u - \partial_y v) = 0.
\end{aligned}$$

Oxirgi natija Koshi – Riman shartlarini qo‘llab olindi: ikkala integral ham nolga teng. Demak,

$$\boxed{\oint\limits_{C^+} dz f(z) = 0}$$

Ushbu natijalar **Koshining integral teoremasini** ta’riflashga imkon beradi:

> Agar $f(z)$ funksiya C egri chiziqda va u o‘rab turgan bir bog‘lamli sohada (teshiklar mavjud emas) analitik bo‘lsa, C kontur bo‘ylab $f(z)$ funsiyadan olingan integral nolga teng. Ya'ni, $f(z)$ funksiya C da va u o‘rab turgan sohada maxsus nuqtalarga ega bo‘lmasa.

Endi konturni <u>deformatsiyalaylik</u>. Masalan, 0.0.2-rasmdagidek $C = C_1 + C_3 + C_2 + C_4$. C o‘rab turgan, ya'ni rasmdagi shtrixlangan sohada maxsus nuqtalar yo‘q deb faraz qilamiz. U holda, Koshining integral teoremasiga ko‘ra

$$0 = \oint_{C^+} dz f(z) = \left(\oint_{C_1^+} + \oint_{C_2^-} + \underbrace{\int_{C_3} + \int_{C_4}}_{\substack{\text{qisqaradi,}\\ \text{o‘zaro qarama-}\\ \text{qarshi yo‘na-}\\ \text{lishlar}}} \right) dz f(z) = \oint_{C_1^+} dz f(z) + \oint_{C_2^-} dz f(z).$$

C_2 ni yo‘nalishini almashtirish quyidagiga olib keladi:

$$\oint_{C_1^+} dz f(z) = \oint_{C_2^+} dz f(z).$$

0.0.2 - rasm

Shu yoʻl bilan, konturlarni “siqishimiz” mumkin. Bunda C_2 bilan oʻralgan soha C_1 bilan oʻralgan sohada kichikroq. Ammo, ular boʻyicha integrallar bir xil – ular nol boʻlishi shart emas!

Bu natijani, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nuqtalarda maxsus nuqtalar joylashgan, koʻplab konturlar uchun umumlashtirish mumkin:

$$\boxed{\oint\limits_{C^+} dz f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \oint\limits_{C_n^+} dz f(z)}$$

Bunda barcha konturlar boʻylab yoʻnalish soat koʻrsatgichiga qarshi tanlanganiga e'tibor bering (soha doim yoʻnalishga nisbatan chapda joylashgan, musbat yoʻnalishning tanlanish sharti).

Endi, $z = z_0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning ajratilgan maxsus nuqtasi boʻlsin, deb faraz qilamiz. Buning ma'nosi, $f(z)$ funksiya oʻzining aniqlanish sohasida z_0 nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda analitik. Analitiklikni aniqlanishiga koʻra $f(z)$ funksiyaning Teylor qatoridan foydalana olmaymiz. Shu sabab uning Loran qatorini ishlatishimiz kerak.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Faraz qilaylik, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ uchun $a_{n<-m} = 0$ boʻlsin. U holda

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m+1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{\text{singulyar hadlar}}$$

$$+ \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots}_{\text{analitik}}.$$

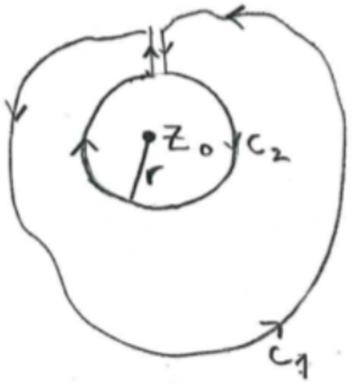
Yuqoridagi ifodada, z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning m-tartibli qutbi, a_{-1} koeffitsent $f(z)$ funksiyaning $z = z_0$ nuqtadagi chegirmasi deb ataladi:

$$\boxed{a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)}$$

$z = z_0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m-tartibli qutbi boʻlsin,

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

C_2 egri chiziq z_0 nuqta joylashgan sohani oʻrab turgan kontur boʻlsin:

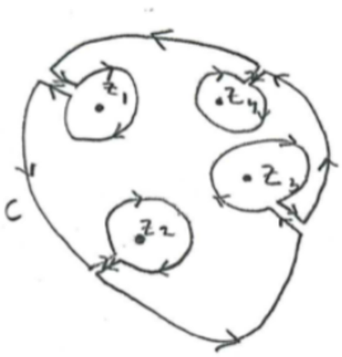


$$\boxed{z - z_0 = re^{i\varphi}}$$

ya'ni, $dz = ire^{i\varphi}d\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Kontur integral quyidagi koʻrinishni oladi:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1^+} dz f(z) = \oint_{C_2^+} dz f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n \oint_{C_2^+} dz \underbrace{(z - z_0)^n}_{r^n e^{in\phi}} \\
&= i \sum_{n=-m}^{\infty} a_n r^{n+1} \qquad \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n+1)\varphi}}_{2\pi\delta_{n,-1}:\ \text{faqat } n=-1 \text{ qoladi!}} \\
&= 2\pi i\, a_{-1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).
\end{aligned}$$

Bu natija koʻpgina $z_1, z_2, \ldots$ nuqtalardagi singulyarliklar boʻlganda quyidagicha umumlashtiriladi:



$$\boxed{\oint\limits_{C_1^+} dz f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)}$$

Bu yerda, juda muhim natija: chegirmalar teoremasini keltirib chiqardik.

Chegirmalar quyidagilardan aniqlanishi mumkin

1) $f(z)$ funksiyaning Loran qatoridagi a_{-1} koeffitsentni topib, yoki osonroq,

2) n-tartibli qutb uchun quyidagi formuladan (oson isbotlash mumkin)

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \left[(z-z_0)^n f(z)\right]}$$

Ko‘pgina xususiy hollarda uchraydigan, $z = z_0$ nuqtada $m = 1$ bo‘lgandagi, oddiy qutb uchun

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + \cdots$$

va

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z).$$

Endi, ushbu natijalarni Grin funksiyasining ko‘rinishini aniqlash uchun qo‘llaymiz.

Grin funksiyasini aniqlash

Bu yerda biz boshlang‘ich masala: Grin funksiyasini ko‘rinishini aniqlash masalasiga qaytib keldik. Buning uchun quyidagi integralni hisoblash zarur edi:

$$I_k(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq \, \underbrace{\frac{qe^{iqr}}{(k+i\epsilon)^2 - q^2}}_{f(q)}.$$

$(k+i\epsilon)^2 - q^2 = (k+i\epsilon-q)(k+i\epsilon+q)$ ekanligidan $f(q)$ funksiyaning qutblari $k+i\epsilon-q=0$ va $k+i\epsilon+q=0$ nuqtalarda joylashgan. Ularni quyidagicha belgilab olaylik:

$$\boxed{q = k+i\epsilon \equiv q_+} \text{ va } \boxed{q = -k-i\epsilon \equiv q_- = -q_+}$$

bundan tashqari

$$f(q) = \frac{-qe^{iqr}}{(q-q_+)(q-q_-)} = -\frac{qe^{iqr}}{q_+ - q_-}\left(\frac{1}{q-q_+} - \frac{1}{q-q_-}\right),$$

ekanligidan $q = q_\pm$ qutblar 1-tartibli oddiy qutblardir. Chegirmalarni hisoblaylik:

$$\operatorname*{Res}_{q=q_\pm} f(q) = \lim_{q\to q_\pm} \frac{(-q)e^{iqr}}{(q-q_+)(q-q_-)} = \frac{-q_\pm e^{iq_\pm r}}{\underbrace{q_\pm - q_\mp}_{=2q_\pm}}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{iq_\pm r}.$$

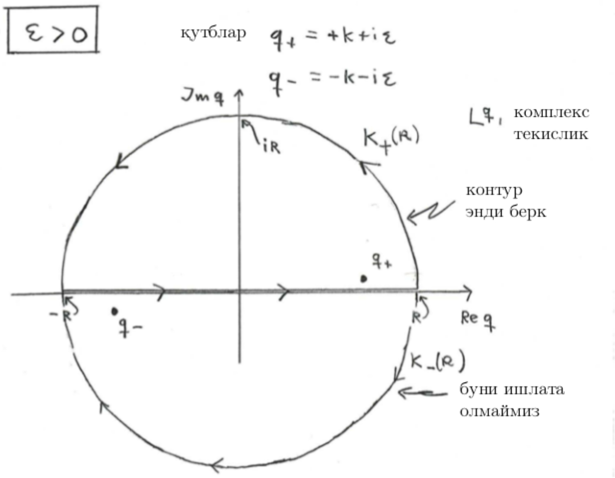
Bular $f(q)$ funsiyaning $q = q_\pm$ nuqtalardagi chegirmalari.

Diqqat! Biz haqiqiy turdagi q oʻzgaruvchi qiymatlari boʻyicha integralni qarayapmaz. Kontur qani? Bu yerda ayyorlik shundaki, haqiqiy oʻq boʻylab integralni kompleks tekislikda joylashgan berk konturning bir qismi deb olmoqchimiz. Ushbu amalni bajarish yoʻli 0.0.3-rasmda koʻrsatilgan (bunda $\epsilon > 0$ deb tanlangan).

Demak, konturni kompleks tekislikning yuqori yoki quyi yarim qismidan “yopishimiz” zarur. Ammo ularning qaysi birini olamiz? Bu haqida keyinroq gaplashamiz. Ikkala holda ham, qutblardan biri C kontur ichida, ikkinchisi undan tashqarida joylashgan.

Nima boʻlganda ham, chegirmalar haqidagi teoremaga koʻra

$$2\pi i \underbrace{\operatorname*{Res}_{q=q_k}}_{\text{qutblar } C \text{ ichida}} f(q) = \oint\limits_{C^+} dq f(q)$$



0.0.3 - rasm

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} dqf(q) + \int\limits_{\substack{K_+(R) \text{ yoki } K_-(R)\\ \\ |q|=R \text{ bo‘lgandagi yarim aylana}}} dqf(q)\right].$$

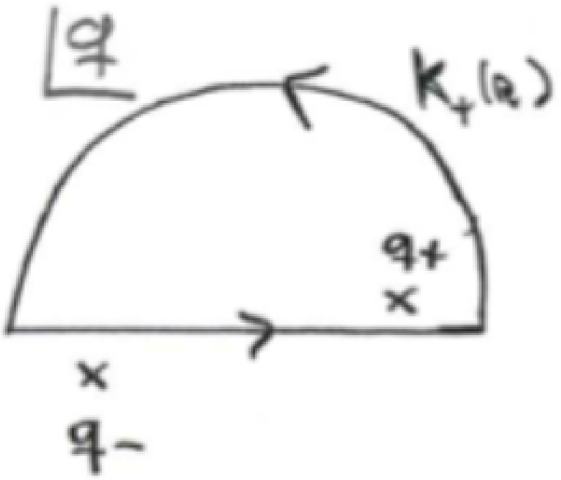
Kvadrat qavslar ichidagi birinchi had – biz hisoblamoqchi bo‘layotgan integral. Maqsadimiz, $K_+(R)$ yoki $K_-(R)$ konturni shunday tanlashimiz lozimki, kvadrat qavslar ichidagi ikkinchi integral nolga aylansin. Avval $K_+(R)$ konturni tanlaylik, ya'ni konturni kompleks tekislikning yuqori yarmidan yopamiz (0.0.4-rasm). Bu holda q_+ qutb C kontur ichida, q_- qutb bo‘lsa, uning tashqarisida joylashgan. Boshqacharoq aytsak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dqf(q) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{q=q_+} f(q) - \lim_{R\to\infty} \int\limits_{K_+(R)} dqf(q).$$

$q \in K_+(R)$ uchun $q = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$ deb olishimiz mumkin.

Kontur integral $R \to \infty$ bo‘lganda $K_+(R)$ kontur bo‘yicha nolga tengligini ko‘rsataylik. Quyidagini yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} f(q \in K_+(R)) &= \frac{-Re^{i\varphi}e^{iRr\cos(\varphi)}e^{-Rr\sin(\varphi)}}{R^2e^{i2\varphi} - (k+i\epsilon)^2} \\ &= \frac{-e^{i(-\varphi+Rr\cos\varphi)}}{R(1-(q_+/R)^2e^{-i2\varphi})}e^{-Rr\sin(\varphi)}. \end{aligned}$$



0.0.4 - rasm

Endi $R \to \infty$ limitga oʻtaylik. Bunda $f(q = Re^{i\varphi})$ funksiyaning absolyut qiymati

$$\left|f\left(q = Re^{i\varphi}\right)\right| \xrightarrow{R\to\infty} \frac{1}{R}\exp\left[-\underbrace{Rr\sin\varphi}_{\substack{\geq \quad 0 \\ \text{chunki} \\ \varphi\in[0,\pi]}}\right] \to 0.$$

Shunday qilib, yuqori yarim tekislikdan oʻtuvchi $K_+(q)$ kontur boʻyicha integral nolga aylanar ekan: bunda kontur uzunligi πR ga teng, va demak R ortishi bilan chiziqli uzayib boradi. Lekin integral ostidagi funksiya R ortishi bilan eksponensial oʻzgaradi. Eksponenta chiziqli funksiyaga nisbatan tezroq oʻzgarganligi tufayli, natija nolga teng. Nega C konturni yuqori yarim tekislikda yopishimiz kerakligini, quyidagi fikrlardan, tushunishimiz mumkin. Agar $K_-(R)$ konturni tanlaganimizda

$q = Re^{-i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$ larga ega boʻlar edik va

$$e^{iqr} \overset{q=Re^{-i\varphi}}{=} e^{iRr\cos\varphi} \exp\left[+ \underbrace{Rr\sin\varphi}_{\substack{\geq \quad 0 \\ \text{chunki} \\ \varphi \in [0,\pi]}} \right] \xrightarrow{R\to\infty} \infty!$$

Bundan, quyi yarim tekislik boʻyicha integral $R \to \infty$ boʻlganda nolga teng emas ekanligini bilib olamiz.

Umuman olganda, konturni qaysi yarim tekislikda yopish qaralayotgan masalaga bogʻliq. Yuqori yarim tekislikda qutblari boʻlgan koʻrsatgichli funksiyalar uchun Jordan lemmasini isbotlash mumkin.

> **Jordan lemmasi**: Agar $|z| = R$, $\mathrm{Im} z > 0$ (yuqori yarim tekislik) $|g(z)| \leq M(R)$ boʻlsa, va $M(R) \overset{R\to\infty}{\to} 0$, u holda
>
> $$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{K_+(R)} g(z) e^{ikz} dz = 0.$$

Jordan lemmasining isboti. $z = Re^{i\varphi}$ va berilgan R uchun $dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$ ekanligidan:

$$\int_{K_+(R)} g(z) e^{ikz} dz = \int_0^{\varphi} d\varphi i R e^{i\varphi} g(Re^{i\varphi}) e^{+ikR\cos\varphi} e^{-kR\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow |\int_{K_+(R)} g(z)e^{ikz}| \leq \int_0^{\pi} d\varphi |iRe^{i\varphi} g(Re^{i\varphi}) \underbrace{e^{-ikR\cos\varphi}}_{\text{faza, } |.|=1} e^{-kR\sin(\varphi)}|$$

$$= R\int_0^{\varphi} |g(Re^{i\varphi})| e^{-kR\sin(\varphi)}$$

$$\overset{|g(z)|\leq M(R)}{\leq} RM(R) \int_0^{\varphi} d\varphi e^{-kR\sin\varphi} = 2RM(R) \int_0^{\pi/2} d\varphi e^{-kR\sin\varphi}$$

$$\overset{\sin\varphi\geq 2\varphi/\pi}{\leq} 2RM(R)\int_0^{\pi/2} d\varphi e^{-kR2\varphi/\pi}$$

$$= 2RM(R)\frac{\pi}{2kR}(1-e^{-kR}) = \frac{\pi M(R)}{k}(1-e^{-kR}) \xrightarrow[M(R)\to 0]{R\to\infty} 0.$$

Endi, Jordan lemmasini bizning masalaga qo‘llaymiz:

$$f(q) = \underbrace{\frac{-q}{q^2-(k+i\epsilon)^2}}_{g(q)} e^{iqr},$$

va bundan $|g(Re^{i\varphi})| = R^{-1}|1-(q/R)^2e^{-i2\varphi}|^{-1} \leq 1/R = M(R) \to 0$, shunday qilib, bizning faraz qanoatlantirildi.

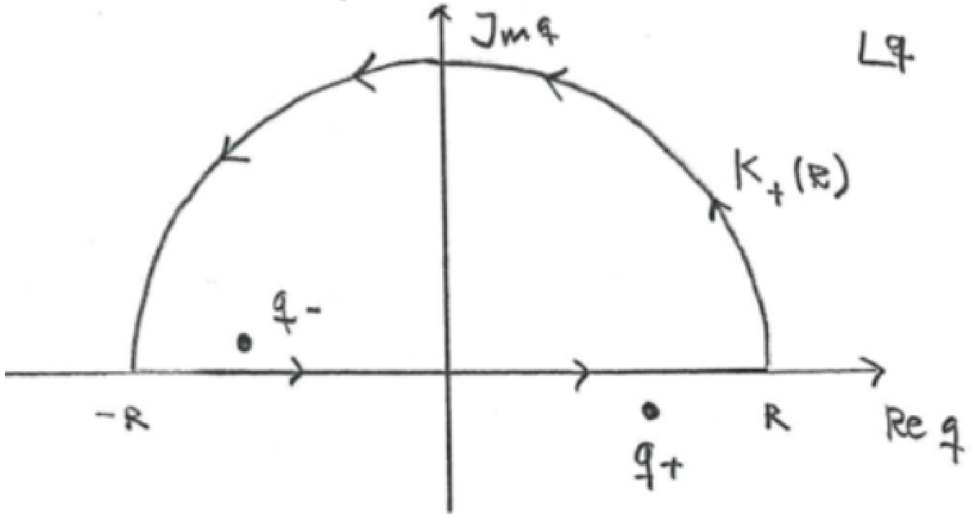
Buning ma’nosi, $R\to\infty$ bo‘lganda $f(q)$ funksiyadan yuqori yarim tekislikdagi $K_+(R)$ kontur bo‘yicha integral nolga teng. Bundan tashqari, Grin funksiyasi uchun formuladan $\epsilon > 0$ hol uchun quyidagini olamiz:

$$I_k^{\epsilon>0}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dqf(q) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{q=q_+} f(q) = 2\pi i(-\frac{1}{2}e^{iq_+r}) = -\pi i e^{i(k+i\epsilon)r}.$$

Demak, Grin funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega ekan:

$$\boxed{G_{\mathbf{k}}^{\epsilon>0}(\mathbf{r}) = \frac{I_k^{\epsilon>0}}{4\pi^2 ri} = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i(k+i\epsilon)r}}{r} \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}}$$

Keling, $\epsilon < 0$ bo‘lganda nima bo‘lishini qaraylik. Bu holda $q_+ = k + i\epsilon = k - i|\epsilon|$ nuqtadagi qutb C kontur bilan o‘ralgan sohadan tashqaridi, q_- qutb bo‘lsa, uning ichida joylashgan bo‘ladi:



Endi quyidagi natijani:

$$I_{\mathbf{k}}^{\epsilon<0} = 2\pi i(-\frac{1}{2}e^{iq_-r}) = -\pi i e^{-i(k+i\epsilon)r}$$

va bunga mos Grin funksiyasi

$$G_{\mathbf{k}}^{\epsilon<0}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}$$

ko‘rinishda bo‘lishini o‘zingiz tekshirib ko‘ring. Demak, umumiy holda Grin funksiyasi

$$G_{\mathbf{k}}^{\epsilon\to 0\pm}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ikr}}{r} \tag{20}$$

ko‘rinishga ega bo‘lar ekan.