O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA

MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Maktabgacha ta'lim fakulteti

Maktabgacha ta'lim nazariyasi va metodikasi kafedrasi

Ro'yxatga olindi:	SamDU o'quv ishlari bo'yicha
№ ____________________	prorektor ________ prof.A.Soleev
"____" ____________ 2019 y	"___" _______________2019 y

Bilim sohasi: 100000 - Gumanitar soha
Ta'lim sohasi: 110000 - Pedagogika
Ta'lim yo'nalishi: 5111800 - Maktabgacha ta'lim

“MATEMATIKA” FANIDAN
O’QUV-USLUBIY MAJMUA
(Moodle tizimini rejasi asosida)

TUZUVCHILAR: **SamDU Maktabgacha ta'lim fakulteti, maktabgacha ta'lim nazariyasi va metodikasi kafedrasi dotsenti E.M.Mardonov, ass.O'.I.Achilov, ass.Z.E.Ermamatova.**

KAFEDRA MUDIRI: **dots.E.M.Mardonov**

FAKULTET DEKANI: **prof.B.T.Xaydarov**

Samarqand 2019

MUNDARIJA

Mardonov E.M., Achilov O'.I., Ermamatova Z.E. «Matematika» o’quv predmeti bo’yicha: o’quv–uslubiy majmua 5111800– Maktabgacha ta`lim fakulteti talabalari uchun) Samarqand.:SamDU. 2019, b.

“Matematika” fanidan o’quv – uslubiy majmua Samarqand davlat universitetining «Maktabgacha ta`lim nazariyasi va metodikasi» kafedrasida tayyorlangan. Majmua « Matematika » fanini o’rganish jarayonida talabaning mustaqil ishlashini ta’minlovchi o’quv-uslubiy materiallarni o’z ichiga oladi hamda talaba olgan bilimining sifatini doimo nazorat qilishni ta’minlaydi.

Ushbu o’quv- uslubiy majmua «Matematika» fani o’quv rejaga kiritilgan barcha mutaxassisliklar uchun mo’ljallangan.

Mas’ul muharrir:

SamDU «Ehtimollar nazariyasi va matematika o‘qitish metodikasi» kafedrasi katta o`qit.Ostonov Q.N.

Taqrizchilar :

SamDU «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika » kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi Qurbonov H.

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi Yaxshiboyev M.U.

MUALLIFLARDAN

Hurmatli talaba!

Qo'lingizdagi o'quv-uslubiy majmua "Matematika"fanini o'rganish jarayonida sizning mustaqil ishlashingizni tashkil etishga mo'ljallangan.

Majmua ikki qismdan iborat: "O'quv predmetiga kirish" va "Reja-topshiriqlar va o'quv - uslubiy materiallar"

Birinchi bo'lim o'quv kursi bo'yicha dastlabki tushuncha beruvchi materiallar: o'quv kursining dolzarbligi, maqsad va vazifalari, fan bo'yicha zarur bo'lgan bilim darajasining Davlat ta'lim standartlari talablari, mavzu va mashg'ulot turlari bo'yicha o'quv soatlarining taqsimlanishi, tavsiya etiladigan adabiyotlar ro'yxati, mustaqil ishlar mavzulari, hamda bilimni yakuniy nazorat qilish savolaridan iborat.

Ikkinchi bo'limda har bir mashg'ulot uchun reja-topshiriq va o'quv materiallari berilgan. Topshiriqlarni o'z vaqtida bajarish o'quv predmeti bo'yicha yuqori darajada bilimga ega bo'lishni va doimo o'z-o'zini nazorat qilib borishni ta'minlaydi.

Har bir fan kabi "Matematika" fanini o'rganishda mantiqiy ketma-ketlikni ta'minlash talab etiladi. Shuning uchun mavzuni chuqur o'rgangandan so'ng yangi mavzuga o'tish mumkin bo'ladi.

Mardonov E.M., Achilov O'.I., Ermamatova Z.E. *Samarqand davlat universiteti* «Maktabgacha ta`lim nazariyasi va metodikasi» *kafedrasi o’qituvchilari*

FANNNING ANNOTATSIYASI

Oliy ta’limning Davlat ta’lim standartiga ko‘ra o‘qitiladigan "Matematika" fani dasturi tabiatshunoslik va texnik fanlar sohalarida, mavjud bo‘lgan va ommaviy xarakterga ega bo‘lgan voqeliklarga oid qonuniyatlarni o‘rganish va uni amaliyotda qo‘llashda zarur bo‘ladigan: chiziqli algebra, analitik geometriya elementlari, matematik analiz, oddiy differensial tenglamalar nazariyasi tushunchalarini o‘z ichiga olgan bo‘limlaridan tashkil topgan.

Fanni kiritishdan maqsad talabalarga umumta’lim maktablarida,akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida matematika o‘qitish dolzarb muammolari, matematik ta’lim jarayonida zamonaviy usllarni qo‘llashga o‘rgatish, matematika o‘qitishda yangi pedagogik texnologiyalardan foydalanish imkoniyatlari va amaliy xususiyatlarini bayon etish hamda ularda kelgusi faoliyatlarida nazariy va amaliy jihatdan pedagogik faoliyatda foydalana oladigan ko‘nikma va malakalarni shakllantirish qobiliyatlarni rivojlantirish hisoblanadi.

Matematika fanini o‘qitish jarayonida pedagogika, axborot texnologiyalari, yangi pedagogik texnologiyalar kabi fanlar usullari hamda matematikaning turli tarmoqlari tadqiqot metodlari va natijalaridan keng foydalaniladi.

1. Sillabus

O‘qituvchi haqida ma’lumotlar:

Predmetni olib boruvchi o‘qituvchilar:, E.M.Mardonov pedagogika fanlari nomzodi, dotsent, O'.I.Achilov assisent, Z.E.Ermamatova assisent.

O‘qituvchi bilan bog‘lanish bo‘yicha axborot:

Telefon raqamlari: ish joyi (91) 298-19-54, elektron pochtasi Mardonov@mail.ru Kafedra “«Maktabgacha ta`lim nazariyasi va metodikasi»”, Bosh korpus, 2\2-xona

Predmetning prerekvizitlari (Prerequisite):o‘rganidayotgan predmetni o‘zlashtirish uchun mo‘ljallangan bilim, ko‘nikma va malakalar

Talabalar «Matematika» fanini o‘rganish jarayonida quyidagilarni bajara olishi lozim:

- determinantning qiymatini uning ta’rifi va xossalariga ko‘ra hisoblashi;
- chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tadqiq etishi va ularni turli usullar bilan yechimlarini topishi;
- to‘g‘ri chiziq turli tenglamalarini bilishi, ular orasidagi burchaklarni hisoblay olishi, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini bilishi, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofani hisoblay olishi;
- ikkinchi tartibli egri chiziqlarni, ularning tenglamalari bo‘yicha tahlil etishi va tasniflashi;
- ketma-ketliklar va funksiyalarning limitlarini hisoblay olishi;
- differensiallash va integrallash formulalarini to‘g‘ri ishlata bilishi;
- elementar hisoblashda yaxshi tajribaga ega bo‘lishni;
- integrallarni hisoblashda, sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishda zarur usullarni osonlikcha topa bilishi;
- differensial va integral hisobning tadbiqlarini bilishi;
- ehtimollar nazariyasidagi hodisa va uning ehtimoliga doir tushunchalarni egallashi va masalalar yechishga qo‘llay olishi;
- tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini bilish va ularni masalalar yechishga qo‘llay olishi;
- matematik statistikaning asosiy tushunchalarini bilishi va ularning tadbiqlarini tushuna olishi.

Predmetning postrekvizitlari (Postprerequisite): keyingi predmetlarni o‘rganish uchun mo‘ljallangan bilim, ko‘nikma va malakalar

Talabalar «Matematika» fanini o‘rganish jarayonida quyidagilarni bajara olishi lozim:

- matritsalar va ular ustida amallar, ularning ta’rifi va xossalariga ko‘ra hisoblay olishi;
- chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tadqiq etishi va ularni turli usullar bilan yechimlarini topishi;
- to‘g‘ri chiziq turli tenglamalarini bilishi, ular orasidagi burchaklarni hisoblay olishi, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini bilishi, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofani hisoblay olishi;
- ikkinchi tartibli egri chiziqlarni, ularning tenglamalari bo‘yicha tahlil etishi va tasniflashi;
- ketma-ketliklar va funksiyalarning limitlarini hisoblay olishi;
- differensiallash va integrallash formulalarini to‘g‘ri ishlata bilishi;
- elementar hisoblashlarda yaxshi tajribaga ega bo‘lishni;
- integrallarni hisoblashda zarur usullarni osonlikcha topa bilishi;
- differensial va integral hisobning tadbiqlarini bilishi;
- ehtimollar nazariyasidagi hodisa va uning ehtimoliga doir tushunchalarni egallashi va masalalar yechishga qo‘llay olishi;
- tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalarini bilish va ularni masalalar yechishga qo‘llay olishi;
- matematik statistikaning asosiy tushunchalarini bilishi va ularning tadbiqlarini tushuna olishi.

Predmetning qisqacha tavsifi.

Predmet- Matematika.

Kursni o‘rganish jarayonida joriy, oraliq va yakuniy nazorat o‘tkaziladi.

O‘rganish semestri - 2 semestr,

Mutaxassilik shifri-5111800– Maktabgacha ta`lim yo`nalishi.

Predmet o‘qitiladigan kafedra- Maktabgacha ta`lim nazariyasi va metodikasi,

O‘qitish shakli –kunduzgi,

Tili – o‘zbek

Predmetni o‘qitishdan maqsad- maktabgacha ta`lim yo‘nalishlari talabalarda nazariy masalalarni tushunish intuitsiyani, ya’ni amalda uchraydigan statistik tajribalardagi tasodifiy hodisalarni aks ettiruvchi matematik modellarni tuzishni uddalay olish va uni tahlil eta bilish qobiliyatini rivojlantirishdan iborat.

Predmetni o‘rganish vazifalari- matematika fani klassik jarayonlarini aniq tasavvur qilish, bu jarayonlarning matematik modelini tuzish va yechimlarini topish usullarini o‘rganish, yechimlarni statistik jihatdan tahlil qilishdir.

Kompetensiyalar. Kompetensiyalar–bu o‘qish jarayonida talabalar tomonidan egallagan bilim, ko‘nikma va malakalarni amalda qo‘llanilishi.

Huquqiy kompetensiyalar:

O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risidagi” qonuni va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”;

Axborotlashtirishga bevosita taaluqli asosiy maqolalar;

Elektron axborot resruslarining turlar;

Davlat axbotrot tizimlarida elektron axborot resruslarini qayta ishlash,saqlash va zahiralik nusxa ko‘chirish vositalariga bo‘lgan majburiy talablar;

Axborot resruslari va axborot tizimlari davlat elektron registrida elektron axborot resurslari va axborot tizimlari ro‘yxatidan o‘tkazish;

Davlat axborot tizimlarida “Elektron hukumat” doirasida amal qilish tartibi;

Jismoniy va yuridik shaxslarning elektron axborot resurslari va ularni taqdim etish tartibiga kirish huquqlari

Uzluksiz o‘qish va mustaqil ta’lim kompetensiyalar:

Adabiyot bilan ishlash;

Internet resurslari bilan ishlash;

Elektron tashuvchilarda o‘quv va ilmiy materiallar bilan ishlash;

Taqdimotlar va mavzuli referatlar tayyorlash;

Ma’ruza va namoyish materiallarini tayyorlash.

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MAKTABGACHA TA`LIM FAKULTETI

Ro‘yxatga olindi	**Samarqand davlat universiteti rektori**
№________________	**_________ R.I.Xalmuradov**
2019-yil «__»______	2019-yil “__”_______________

MATEMATIKA fanining
O'QUV DASTURI

Bilim sohasi:	**100 000**	**Gumanitar**
Ta`lim sohasi:	**110000**	**Pedagogika**
Ta’lim yo`nalishi:	**5111800**	**Maktabgacha ta`lim**

Samarqand-2019

Fan dasturi Samarqand davlat universiteti Maktabgacha ta'lim fakulteti kengashida ko'rib chiqilgan va tavsiya qilingan (2019-yil “__ ”_______dagi “___”-sonli majlis bayonnoma).

Fakultet dekani: **p.f.n. prof. B.T.Haydarov**

Fan dasturi Samarqand Davlat Universitetida ishlab chiqildi

Tuzuvchilar:

E.M.Mardonov — Samarqand Davlat Universiteti “Maktabgacha ta’lim fakultetida jismoniy tarbiya nazariyasi va metodikasi” kafedrasi mudiri.dots.

Z.M.Malikov — Samarqand Davlat Universiteti “Maktabgacha ta’lim fakultetida jismoniy tarbiya nazariyasi va metodikasi” kafedrasi o`qituvchisi dots.

Q. Ostonov — Samarqand Davlat Universiteti “Maktabgacha ta’lim fakultetida jismoniy tarbiya nazariyasi va metodikasi” kafedrasi o`qituvchisi dots.

Z.E.Ermamatova — Samarqand Davlat Universiteti “Maktabgacha ta’lim fakultetida jismoniy tarbiya nazariyasi va metodikasi” kafedrasi o`qituvchisi dots.

O’.I.Achilov — Samarqand Davlat Universiteti “Maktabgacha ta’lim

Taqrizchilar:

J.S.Sultonov — Samarqand Davlat Universiteti “Ehtimollar Nazariyasi va matematik statistika” kafedrasi o`qituvchisi dots.

A.U.Arziqulov — Samarqand Davlat Universiteti “Matematik tahlil” kafedrasi o`qituvchisi dots.

Fanning dasturi Samrqand Davlat Universiteti O‘quv-uslubiy kengashining 2019-yil “__”_______dagi “___”-son majlis bayoni bilan ma'qullangan.

O'quv uslubiy Kengash raisi: prof.A.S.Soleev

Kirish

Mustaqil respublikamizda yuz berayotgan siyosiy, iqtisodiy, ilmiy-texnikaviy va madaniy o'zgarishlart Xalq ta'limi tizimida ham o'z aksini topmoqda. O'zbekistonda uzluksiz, ta'lim tarbiya tizimini takomillashtirish, shu asosda ta'lim sifatini jahon andozalari darajasiga yetkazish ta'lim sistemasining eng dolzarb vazifasiga aylandi. Bu esa, barcha mutaxassisliklarni tayyorlash sifatini oshirishni ham taqozo etadi.

Mazkur dastur 5111800-Maktabgacha ta'lim va 5112000 – Jismoniy madaniyat yo'nalishlarining malaka talablari asosida "Matematika" fanidan tuzilgan bo'lib, sonlar sistemasi, haqiqiy sonlar, kompleks sonlar, tub va murakkab sonlar, tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalari, to'plamlar nazariyasi, matematik mantiq elementlari, analitik geometriya, matematik analiz elementlari, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari qisqa kursini o'z ichiga oladi.

Fanning maqsadi va vazifalari

Fanni o'qitishdan maqsad – talabalarda Matematika kursining nazariy asoslariga oid bilim, ko'nikma va malakalarni shakllantirishdan iborat.

Fanning vazifalari:

- Talabalarga matematikaning dunyoqarashni shakllantirishdagi ahamiyati va atrof borliqni o'rganishdagi o'rnini ochib berish;

- Talabalarni matematikaning bolalar sportidagi o'rni, sonlar sistemasi, haqiqiy sonlar, kompleks sonlar, oddiy kasrlar, o'nli kasrlar, tenglamalar, trigonometrik tenglamalar, geometriya, to'plamlar nazariyasi, matematik mantiq elementlari, chiziqli tenglamalar sistemasi, uning matritsasi va determinanti, funksiya va uning berilish usullari, funksiyaning limiti, limitlar haqida teoremalar, funksiya hosilasi, hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi, boshlang'ich integrallash jadvali, aniq integral, uning geometrik ma'nosi, xossalari, ehtimollar nazariyasi va metamtik statistika elementlari, pedagogik tadqiqotlarda statistik metodlarga oid bilim, ko'nikma va malakalarni shakllantirish;

Fan bo`yicha talabalarning bilim, ko`nikma va malakasiga qo`yiladigan talablar

Maktabgacha ta'limda Matematika o'quv fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr:

- Sonlar sistemasi. Natural sonlar. Natural sonlar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirtish, bo'lish amallari. Ratsional sonlar;
- Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar ustida amallar;

- Kompleks sonlar. Kompleks sonlar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish amallari;
- Oddiy kasrlar. Oddiy kasrlar ustida amallar;
- O'nli kasrlar. O'nli kasrlar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish amallari;
- Tub va murakkab sonlar. Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish;
- Ikkita sonning EKUB (Eng katta umumiy bo'luvchi) va EKUK (Eng kichik umumiy karrali) ni topish.;
- Algebrada ayniy shakl almashtirishlar qisqa ko'paytirish formulalari;
- Tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalari;
- Trigonometrik tenglalamalar;
- Geometriya fanining rivojlanish tarixi. Geometriyaning asosiy tushunchalari;
- Uchburchaklar. Uchburchaklar turlari. Uchburchak perimetri va yuzini hisoblash;
- To'rtburchaklar. To'rtburchaklar turlari. To'rtburchak perimetri va yuzini hisoblash
- Chekli va cheksiz to'plamlar, to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi. Dekart ko'paytmasi va ular ustida amallar;
- Tekislikda va fazodagi to'g'ri burchakli va affin koordinatalar sistemalari, asosiy metrik formulalar, to'g'ri chiziq tenglamalari, tekislik tenglamasi, chiziqli tenglamalar sistemasi, uning matritsasi va determinanti;
- Funksiya va uning berilish usullari, funksiyaning limiti, limitlare haqida teoremalar, funksiya hosilasi, hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi, boshlang'ich funksiya va aniqmas integralning xossalari, integrallash jadvali, aniq integral, uning geometrik ma'nosi, xossalari;
- Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari, pedagogik tadqiqotlarda statistik metodlarni **bilishi kerak;**
- Mulohazalar ustida mantiqiy amallarni bajarish;
- Determinantlarni hisoblash, chziqli tenglamalar sistemasini yechish;
- Elementar funksiyalarning aniqlanish sohasini va xossalarini aniqlash, limitlarni hisoblash, hosila, aniqmas va aniq integralni topish, hosilani amaliy masalalarda qo'llash, aniq integralni geometrik masalalarda qo'llash;
- Hodisalarning ehtimollari topish, tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalarini hisoblay olish, pedagogik tadqiqotlarda statistik metodlarni qo'llash Ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak;
- To'plamlar orasidagi munosabatlarni aniqlash, kompleks sonlar ustida amallar bajarish;
- To'g'ri va noto'g'ri muhokamalarni farqlay olish;
- Chiziqli tenglamalar sistemasini turli usulda yechish;
- Pedagogik tadqiqot natijalariga statistik ishlov berish **malakalariga ega bo'lishi kerak.**

Fanning o`quv rejasidagi boshqa fanlar bilan o`zaro bog`liqligi va uslubiy jihatidan uzviyligi va ketma-ketligi

Matematika fani tabiiy-ilmiy fan hisoblanib, gumanitar fakultetlarda bir semestrda o’qitiladi.

Matematika fani boshqa fanlar bilan uzviy bog’lanadi. Predmetlararo bog’lanishni to’g’ri amalga oshirish uchun o’qituvchi har bir fakultet xususiyatlarini hisobga olishi juda muhimdir.

Fanning ta`limdagi o`rni

Matematika fani aniq fanlardan biri bo’lib, talabalarga matematikaning dunyoqarashni shakllantirishdagi ahamiyati va atrof borliqni o’rganishdagi o’rnini ochib beradi, matematika kursining nazariy asoslarini o’rgatadi, zarur ko’nikma va malakalarni shakllantiradi.

Fanni o`qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Talabalarning matematika fanini o’zlashtirishlari uchun o’qitishning ilg’or va zamonaviy usullaridan foydalanish, bunda axborot va pedagogik texnologiya yutuqlari va imkoniyatlaridan foydalanish ko’zda tutiladi. Ma’ruza va amaliy mashg’ulotlar turli o’quv ko’rgazma qurollari va texnik vositalar bilan jihozlanishi kerak. Fanni o’qitishda darslik, o’quv va uslubiy qo’llanmalar, ma’ruza matnlari, tarqatma materiallar, internet saytlari ma’lumotlaridan foydalaniladi.

Mazkur fan zamonaviy-ma’naviy barkamol, har jihatdan sog‘lomavlodni, komil inson shakllanishi, rivojlanishini ta’minlanishga har jihatdan yaqindan yordam bermog‘i lozim. Fanni o‘qitishda yangicha fikrlaydigan, yangicha tafakkur tarziga ega bo‘lgan, milliy g‘oya va mafkuraning asosiy tamoyillarini o‘zida mujassam etgan shaxsni tarbiyalab voyaga yetkazishga yordam berish nazarda tutiladi. Mana shu vazifalarni bajarishda bilimni talabalar ongiga singdirish, ularning amaliy faoliyatiga aylantirishda o‘qituvchi qanday pedagogik texnologiyalardan ijodiy foydalanishi muhim ahamiyatga ega.

Asosiy qism

Fanning nazariy mashg‘ulotlari mazmuni

Matematikaning umumiy masalalari

Matematika fanining predmeti. Sonlar sistemasi. Natural sonlar. Natural sonlar ustida qo’shish, ayirish, ko’paytirtish, bo’lish amallari. Ratsional sonlar. Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar ustida amallar. Kompleks sonlar. Kompleks sonlar ustida qo’shish, ayirish, ko’paytirish, bo’lish amallari. Oddiy kasrlar. Oddiy kasrlar ustida amallar. O’nli kasrlar. O’nli kasrlar ustida qo’shish, ayirish, ko’paytirish, bo’lish amallari. Tub va murakkab sonlar. Sonlarni tub ko’paytuvchilarga ajratish. Ikkita sonning EKUB (Eng katta umumiy bo’luvchi) va EKUK (Eng kichik umumiy karrali) ni topish.

Algebra va analitik geometriya elementlari

Algebrada ayniy shakl almashtirishlar qisqa ko’paytirish formulalari, Tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalari. Trigonometrik tenglalamalar. Tekislikda va fazodagi to’g’ri burchakli va affin koordinatalar sistemalari, asosiy metrik formulalar, to’g’ri chiziq tenglamalari, tekislik tenglamasi. Chziqli tenglamalar sistemalari. Matritsa haqida tushuncha. Matritsalarning tengligi. Matritsalar ustida amallar. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant, uning xossalari. Kramer formulalari.

Geometriya fanining rivojlanish tarixi. Geometriyaning asosiy tushunchalari. Uchburchaklar. Uchburchaklar turlari. Uchburchak perimetri va yuzini hisoblash. To’rtburchaklar. To’rtburchaklar turlari. To’rtburchak perimetri va yuzini hisoblash.

Matematik analiz elementlari

Funksiya va uning berilish usullari, funksiyalarning juft-toqligi, davriyligi, grafigi. Funksiyaning limiti, limitlar haqida teoremalar. Funksiya hosilasining ta’rifi,uning geometrik va mexanik ma’nosi, differensiallash qoidalari. Hosilani amaliy masalalarni yechishga tatbiqi.

Boshlang’ich funksiya. Aniqmas integral ta’rifi, xossalar. Integrallash jadvali. Integrallash usullari.

Aniq integral, uning geometrik ma’nosi, xossallari. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralning tatbiqlari.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari

Ehtimollar nazariyasining kelib chiqish, asosiy tushunchalar, ehtimollikning ta’rifi. Kombinatorika elementlari va ularning ehtimollar nazariyasi masalalarini yechishda qo’llanilishi. Shartli va shartsiz ehtimollar, to’la ehtimollik, Bayes formulasi.

Matematik statistika elementlari. Bosh va tanlanma to’plam. Gistogramma va poligon. Statistik gipotezalar va uni tekshirishning statistik usullari. Statistik gipotezalarni tekshirishda axborot texnologiyalaridan foydalanish.

Amaliy mashg‘ulotlarini tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg‘ulotlarida talabalar berilgan nazariy bilimlar asosida mavzularga oid misol va masalalar yechish yo’llarini o’rganadilar, kerakli ko’nikma va malakalarni egallaydilar.

Amaliy mashg‘ulotlari uchun tavsiya etilgan tahminiy mavzular:

Matematikaning umumiy masalalari

Matematika fanining predmeti. Sonlar sistemasi. Natural sonlar. Natural sonlar ustida qo’shish, ayirish, ko’paytirtish, bo’lish amallari. Ratsional sonlar. Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar ustida amallar. Kompleks sonlar. Kompleks sonlar ustida qo’shish, ayirish, ko’paytirish, bo’lish amallari. Oddiy kasrlar. Oddiy kasrlar ustida amallar. O’nli kasrlar. O’nli kasrlar ustida qo’shish, ayirish, ko’paytirish, bo’lish amallari. Tub va murakkab sonlar. Sonlarni tub ko’paytuvchilarga ajratish. Ikkita sonning EKUB (Eng katta umumiy bo’luvchi) va EKUK (Eng kichik umumiy karrali) ni topish.

Algebra va analitik geometriya elementlari

Algebrada ayniy shakl almashtirishlar qisqa ko’paytirish formulalari, Tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalari. Trigonometrik tenglalamalar.

Tekislikda va fazodagi to’g’ri burchakli va affin koordinatalar sistemalari, asosiy metrik formulalar, to’g’ri chiziq tenglamalari, tekislik tenglamasi. Chziqli tenglamalar sistemalari. Matritsa haqida tushuncha. Matritsalarning tengligi. Matritsalar ustida amallar. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant, uning xossalari. Kramer formulalari.

Geometriya fanining rivojlanish tarixi. Geometriyaning asosiy tushunchalari. Uchburchaklar. Uchburchaklar turlari. Uchburchak perimetri va yuzini hisoblash. To’rtburchaklar. To’rtburchaklar turlari. To’rtburchak perimetri va yuzini hisoblash.

Matematik analiz elementlari

Funksiya va uning berilish usullari, funksiyalarning juft-toqligi, davriyligi, grafigi. Funksiyaning limiti, limitlar haqida teoremalar. Funksiya hosilasining ta’rifi,uning geometrik va mexanik ma’nosi, differensiallash qoidalari. Hosilani amaliy masalalarni yechishga tatbiqi.

Boshlang’ich funksiya. Aniqmas integral ta’rifi, xossalar. Integrallash jadvali. Integrallash usullari.

Aniq integral, uning geometrik ma’nosi, xossallari. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralning tatbiqlari.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari

Ehtimollar nazariyasining kelib chiqish, asosiy tushunchalar, ehtimollikning ta’rifi. Kombinatorika elementlari va ularning ehtimollar nazariyasi masalalarini yechishda qo’llanilishi. Shartli va shartsiz ehtimollar, to’la ehtimollik, Bayes formulasi.

Matematik statistika elementlari. Bosh va tanlanma to’plam. Gistogramma va poligon. Statistik gipotezalar va uni tekshirishning statistik usullari. Statistik gipotezalarni tekshirishda axborot texnologiyalaridan foydalanish.

Mustaqil ta’limni tashkil etishning shakli va mazmuni

Bakalavr mustaqil ta’limni tayyorlashda muayyan fanning xususiyatlarini hisobga olgan holda quyidagi shakllardan foydalanish tavsiya etiladi:

- darslik va o`quv qo`llanmalar boyicha fan boblari va mavzularini o`rganish;
- keys topshiriqlarini bajarish;
- tarqatma materiallar bo`yicha ma’ruzalar qismini o`zlashtirish;
- nazariy material bo`yicha misolva masala yechish,
- avtomatlfshtirilgan o`rgatuvchi va nazorat qiluvchi tizimlar bilan ishlash;
- maxsus adabiyotlar bo`yicha fan bo`limlari yoki mavzulari ustida ishlash;
- masofaviy ta’lim.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’limning mavzulari:

To'plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari

Matematika rivojlanishining asosiy bosqichlari

Algebra fanining vujudga kelishi va rivojlanishi

Matematika fanining predmeti
To'plam va uning elementlari, to'plamlar ustida amallar va ularning xossalari
Sonli to'plamlar, kompleks sonlar to'plami, kompleks sonning moduli, xossalari va geometrik talqini
Matematik mantiq elementlari. Mulohazalar va predikatlar, ular ustida amallar
Mulohazalar va predikatlar, ular ustida amallar
Algebra va analitik geometriya elementlari
Tekislikdagi va fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemalari.
Tekislikda, fazoda ikki nuqta orasidagi masofa
Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant, uning xossalari, Kramer formulalari
Chiziqli tenglamalar sistemalari. Matritsa haqida tushuncha. Matritsalarning tengligi
Matritsalar ustida amallar. Differensial va integral hisob.
Funksiya va uning berilish usullari, asosiy elementar funksiyalar, funksiyalarning juft-toqligi, davriyligi, grafigi
Funksiyaning limiti, funksiya hosilasining ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nosi, differensiallash
Boshlang'ich funksiya
Aniqmas integral ta'rifi, xossalari. Integrallash jadvali, integrallash usullari.
Aniq integral, uning geometrik ma'nosi, xossalari. Nyuton-Leybnits formulasi
Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralning tatbiqlari. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari. Ehtimollar nazariyasining kelib chiqishi, asosiy tushunchalar, ehtimollikning ta'rifi
Kombinatorika elementlari va ularning ehtimollar nazariyasining kelib chiqishi, asosiy tushunchalar, ehtimollikning ta'rifi
Shartli va shartsiz ehtimollar, to'la ehtimollik, Bayes formulasi.
Kombinatorika elementlari va ularning ehtimollar nazariyasi masalalarini yechishda qo'llanilishi
Statistik gipotezalar va uni tekshirishning statistik usullari. Statistik gipotezalarni axborot texnologiyalaridan foydalanish.
Statistik gipotezalarni axborot texnologiyalaridan foydalanish.
Sonlar sistemasi,natural, nomanfiy butun, butun ratsional sonlar
Haqiqiy sonlar, Haqiqiy sonlar, haqiqiy sonlar ustida amallar
Kompleks sonlar, Kompleks sonlar ustida amallar
Oddiy kasrlar, oddiy kasrlar ustida amallar
O’nli kasrlar, o’nli kasrlar ustida amallar
Tub va murakkab sonlar, Sonlarni tub ko’paytuvchilarga ajratish
Ikkita sonning EKUB (Eng katta umumiy bo’luvchi) va EKUK (Eng kichik umumiy karrali)ni topish
Algebrada ayniy shakl almashtirishlar qisqa ko’paytirish formulalari
Tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalari
Progressiyani o'rganish nazariyasi.

Fan dasturining informatsion uslubiy ta'minoti

Didaktik vositalar

Jihozlar, uskunalar, moslamalar: elektron doska- Hitachi, LCD - monitor, sistemali blok, klavitura, sichqoncha, eektron ko'rsatgich (ukazka).

video - audio uskunalari: video va audiomagnitofon, mikrofon, kolonkalar.

Kompyuter va multimediali vositalar: kompyuter, Dell tipidagi proyektor, DVD-diskovod, Web - kamera, video-ko'z (glazok), planshet, plotter.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

Rahbariyat adabiyotlar

1. 2017-2021 yillarda O'zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo'nalishi bo'yicha Harakatlar strategiyasi. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947 sonli Farmoni.

2. SH.Mirziyoev Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. Toshkent - "O'zbekiston " - 2017.104B.

3. Sh.Mirziyoev Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. Toshkent - " O'zbekiston" - 2016.56 B.

4. O‘zbekiston Respublikasining «Ta’lim to‘g‘risida»gi Qonuni. , - T.:O‘zbekiston. 2015 -sentyabr

5. Maktabgacha ta’lim ni tubdan isloh qilish takomillashtirish tadbirlar to`g`risida.-2017-yil 2 fevral

Asosiy adabiyotlar

1. E.Mardonov, Q.Ostonov., O'.Achilov. Matematika. Samarqand 2018

2. Soatov Y.O. " Oliy matematika: I, II. qism, Toshkent, 1994 y.

3. E.Mardonov, Q.Ostonov,. H.Toshqulov. Oliy matematika asoslari. Samarqand 2015

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Abdullayeva B.S, Sadikova A.V.,Muxitdinova M.N,. Toshpo'latova M.I., Raximova F. Matematika. TDPU. (Boshlang'ich ta'lim va sport-tarbiyaviy ish bakalavriyat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik) Toshkent-2012, 284-bet.

2. Yunusmetov M, Jurayeva M. Geometriya - 1.1994.

3. Nazarov H.N, Ochilova X, Podgoriova E.G. Geometriyadan mashqlar to'plami.

4. Hikmatov A, Toshmetov T, Karasheva G, " Matematik analizdan mashqlar to'plami". T.:O'qituvchi 1993.

5. Незбайло Т.Г. Новая теория вычисления неопределенного интеграла. СПБ.: Корона-Век ,2007 (http://eqworld. ipmnet.ru/ru/library/ mathematics/calculus. htm)

6. Харин В.Т., Голицына М.Г., Калашникова Е.С., Новикова И.С, Математика (дифференциальное исчесление функций одной переменной. Аналитическая

7. Abdullayeva B.S, Rajabov F., Masharipov S. Oliy matematika asoslari Darslik. T.:Iqtisod-Moliya, 2011. 392b.

8. Xamedova N.A., Ibragimova Z., Tasetov T. Matematika, Darslik T. Turon-Iqbol,2007.363b.

Elektron ta'lim resurslari

1. www.tdpu.uz.

2. www.pedagog.uz

3. www.ziyonet.uz

4. www.edu.uz

5. tdpu-INTRANET.

6.www. samdu. uz

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Ro'yxatga olindi:
№ ____________________
"____" ________________ 2019 y

SamDU o'quv ishlari
bo'yicha prorektor
______________ prof.A.Soleev
"___" _________2019 y

MATEMATIKA fanining

ISHCHI O'QUV DASTURI

Bilim sohasi: 100000 - Gumanitar soha
Ta'lim sohasi: 110000 - Pedagogika
Ta'lim yo'nalishi: 5111800 - Maktabgacha ta'lim

Ma'ruza: 60 soat
Seminar: 60 soat
Mustaqil ta'lim: 128 soat
Jami: 248 soat

Samarqand-2019

Fanning ishchi o'quv dasturi o'quv, ishchi o'quv reja va fan dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

E.M.Mardanov - Samarqand davlat Universiteti maktabgacha ta'lim fakulteti "Maktabgacha ta'lim nazariyasi va metodikasi " kafedrasi dotsenti.

Z.M.Malikov- Samarqand davlat Universiteti maktabgacha ta'lim fakulteti "Maktabgacha ta'lim nazariyasi va metodikasi " kafedrasi dotsenti.

Q.Ostonov - Samarqand davlat Universiteti maktabgacha ta'lim fakulteti "Maktabgacha ta'lim nazariyasi va metodikasi " kafedrasi dotsenti.

Z.E.Ermamatova - Samarqand davlat Universiteti maktabgacha ta'lim fakulteti "Maktabgacha ta'lim nazariyasi va metodikasi " kafedrasi o'qituvchisi

O'.I.Achilov - Samarqand davlat Universiteti maktabgacha ta'lim fakulteti "Maktabgacha ta'lim nazariyasi va metodikasi " kafedrasi o'qituvchisi

Fanning ishchi o'quv dasturi "Maktabgacha ta`lim nazariyasi va metodikasi" kafedrasining 2019 yil __ - avgustdagi № __ - son yig'ilishida muhokamadan o'tgan va fakultet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: **dots.Mardonov.E.M**

Fanning ishchi o'quv dasturi "Maktabgacha ta`lim" fakultet o'quv-uslubiy kengashida muhokama etilgan va foydalanishga tavsiya qilingan (2019 yil "___" ____________ " " – sonli bayonnoma).

Fakultet ilmiy kengashi raisi: ____________ **p.f.n. prof. B.T.Haydarov**

Kelishildi:

O'quv uslubiy boshqarma boshlig'i: ____________ **dots.M.B.Aliqulov**

Kirish

Mazkur fan dasturi bakalavriat yo’nalishi: 5111800 – Maktabgacha ta`lim yo’nalishi uchun mo’ljallangan bo’lib, “Matematika” fani bakalavriantning 1-kursida o'qitilib mutaxassislik fanlarning asosiylaridan biri hisoblanadi. Bu kursda to'plamlar nazariyasi, algebra va analitik geometriya elementlari, integrallar haqida ma'lumotlar berilib, maktabgacha ta'lim talablariga matematik bilimlar berishga mo'ljallangan.

1. O’quv fani o'qitilishi bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar

Mazkur ishchi dastur maktabgacha ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr tayyorgarligi uchun mo'ljallangan bo'lib, u O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tasdiqlagan " Matematika va tabiiy - ilmiy fanlar" bloki bo'yicha bakalavrlar tayyorgarlik darajasi va zaruriy bilimlar mazmuniga qo'yilgan talablar" asosida belgilanadi.

Unda asosan nazariy (ma'ruza) va amaliy mashg'ulotlar mazmuni ularga ajratilgan soatlar miqdori, reytingballari taqsimoti, mustaqil o'rganish uchun tavsiya etilgan mavzular, oraliq va yakuniy nazorat savollar va foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.]

Fanni o'qitishdan maqsad: talabalarda matematika kursining nazariy asoslariga oid bilim, ko'nikma va malakalarni shakllantirishdan iborat.

Fanning vazifalari:

- talabalarga matematikaning dunyoqarashi shakllantirishdagi ahamiyatini atrof borliqni o'rganishdagi o'rnini ochib berish;
- talabalarni matematikaning dunyoqarashni shakllantirishdagi ahamiyatini atrof borliqni o'rganishdagi o'rnini ochib berish;
- talabalarni matematikaning musiqadagi o'rni, to'plamlar nazariyasi, matematik mantiq elementlari, chiziqli tenglamalar sistemasi, uning matritsasi va determinanti, funksiya va uning berilish usullari, funksiyaning limiti, limitlar haqida teoremalar, funksiya hosilasi, hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi, boshlang'ich funksiya va aniqmas integral, aniqmas integralning xossalari, integrallash jadvali, aniq integral, uning geometrik ma'nosi, xossalari, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari, pedagogik tadqiqotlarda statistik metodlarga oid bilim, ko'nikma va malakalarni shakllantirish;
- talabalarni o'quv, metodik va ilmiy adabiyotlar bilan mustaqil ishlashga o'rgatishdan iborat;

"Matematika" fanidan mashg'ulotlarning mavzulari va soatlar bo'yicha taqsimlanishi:

№	Mavzulari	Ma'ruza	Amaliy	Seminar
1	**I modul. Matematika.** Sonlar sistemasi,natural, nomanfiy butun, butun ratsional sonlar	2	2	
2	Haqiqiy sonlar, Haqiqiy sonlar, haqiqiy sonlar ustida amallar.	2	2	
3	Kompleks sonlar, Kompleks sonlar ustida amallar	2	2	

4	Tub va murakkab sonlar, Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish	**2**	**2**	
5	Ikkita sonning EKUB (Eng katta umumiy bo'luvchi) va EKUK (Eng kichik umumiy karrali)ni topish	**2**	**2**	
6	Oddiy kasrlar, oddiy kasrlar ustida amallar	**2**	**2**	
7	O'nli kasrlar, o'nli kasrlar ustida amallar	**2**	**2**	
8	**II modul Algebra.** Algebrada ayniy shakl almashtirishlar qisqa ko'paytirish formulalari	**2**	**2**	
9	Tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalari	**2**	**2**	
10	Progressiyani o'rganish nazariyasi.	**2**	**2**	
11	Trigonometrik tenglamalar.	**2**	**2**	
12	**III modul. Geometriya** Geometriya fanining rivojlanish tarixi.	**2**	**2**	
13	Geometriyaning asosiy tushunchalari.	**2**	**2**	
14	Uchburchaklar. Uchburchaklar turlari va yuzalarini hisoblash	**2**	**2**	
15	To'rburchaklar. To'rtburchaklar turlari va yuzalarini hisoblash	**2**	**2**	
16	**IV modul. Matematika tarixi** Matematika fanining predmeti. Matematika rivojlanishining asosiy bosqichlari. Algebra fanining vujudga kelishi va rivojlanishi.	**2**	**2**	
17	To'plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari. To'plam va uning elementlari, to'plamlar ustida amallar va ularning xossalari	**2**	**2**	
18	Kompleks sonlar to'plami, kompleks sonning moduli, uning trigonometrik shakli va xossalari.	**2**	**2**	
19	Matematik mantiq elementlari. Mulohazalar va predikatlar, ular ustida amallar	**2**	**2**	
20	**V modul. Analitik geometriya** Analitik geometriya elementlari. Tekislikdagi va fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemalari.Tekislikda, fazoda ikki nuqta orasidagi masofa. To'g'ri chiziq tenglamalari.	**2**	**2**	
21	Ikkinchi tartibli egri chiziq.	**2**	**2**	

22	**VI modul. Oliy matematika elementlari** Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant, uning xossalari. Kramer formulalari.	**2**	**2**	
23	Chiziqli tenglamalar sistemalari. Matritsa haqida tushuncha. Chiziqli tenglamalar sistemalari. Kramer formulalari	**2**	**2**	
24	Differsial va integral hisob. Funksiya haqida tushuncha.	**2**	**2**	
25	Funksiyaning limiti, Funksiya hosilasining ta’rifi, uning geometrik va mexanik ma’nosi, differinsiyalash	**2**	**2**	
26	Boshlang’ich funksiya. Aniqmas integral ta’rifi, xossalari. Integrallash jadvali, integrallash usullari.	**2**	**2**	
27	Aniq integral, uning uning xossalari. Nyuton-Leybnits formulasi.	**2**	**2**	
28	Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integrallning tadbiqlari.	**2**	**2**	
29	Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari. Ehtimollar nazariyasining kelib chiqqishi, asosiy tushunchalar, ehtimollikning ta'rifi	**2**	**2**	
30	Kombinatorika elementlari va ularning ehtimollar nazariyasi masalalarini yechishda qo'llanilishi.	**2**	**2**	
	Jami:	**60**	**60**	

Ma'ruza mashg'ulotlari multimedia qurilmalari bilan jihozlangan auditoriyada akademik guruhlar oqimi uchun o'tiladi. Funksiya va uning berilish usullari, funksiyalarning juft-toqligi, davriyligi, grafigi. Funksiyaning limiti, limitlar haqida teoremalar. Ehtimolar nazariyasining kelib chiqishi, asosiy tushunchalar, ehtimollikning ta'rifi. Shartli va shartsiz ehtimollar, to'la ehtimollik, Bayes formulasi bilan tanishadi. Amaliy mashg'ulotlari multimedia qurilmalari bilan jihozlangan auditoriyada akadem guruhlar oqimi uchun o'tiladi. Matritsalar2 ustida amallar. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant, uning xossalari. Kramer formulalari funksiya va uning berilish usullari, funksiyalarning juft-toqligi, davriyligi, grafigi. Funksiyaning limiti, limitlar haqida teoremalar. Tasodifiy hodisalar haqida tushunchalar keltirilgan.

Mustaqil ta’lim mavzulari

№	Berilgan topshiriqlar	Bajar. muddati	Hajmi (soatda)
1	To'plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
2	Matematika rivojlanishining asosiy bosqichlari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
3	Algebra fanining vujudga kelishi va rivojlanishi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
4	Matematika fanining predmeti	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
5	To'plam va uning elementlari, to'plamlar ustida amallar va ularning xossalari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
6	Sonli to'plamlar, kompleks sonlar to'plami, kompleks sonning moduli, xossalari va geometrik talqini	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
7	Matematik mantiq elementlari. Mulohazalar va predikatlar, ular ustida amallar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
8	Mulohazalar va predikatlar, ular ustida amallar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
9	Algebra va analitik geometriya elementlari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
10	Tekislikdagi va fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
11	Tekislikda, fazoda ikki nuqta orasidagi masofa	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
12	Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant, uning xossalari, Kramer formulalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
13	Chiziqli tenglamalar sistemalari. Matritsa haqida tushuncha. Matritsalarning tengligi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**

14	Matritsalar ustida amallar. Differensial va integral hisob.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
15	Funksiya va uning berilish usullari, asosiy elementar funksiyalar, funksiyalarning juft-toqligi, davriyligi, grafigi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
16	Funksiyaning limiti, funksiya hosilasining ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nosi, differensiallash	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
17	Boshlang'ich funksiya	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
18	Aniqmas integral ta'rifi, xossalari. Integrallash jadvali, integrallash usullari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
19	Aniq integral, uning geometrik ma'nosi, xossalari. Nyuton-Leybnits formulasi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
20	Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralning tatbiqlari. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari. Ehtimollar nazariyasining kelib chiqTishi, asosiy tushunchalar, ehtimollikning ta'rifi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
21	Kombinatorika elementlari va ularning ehtimollar nazariyasining kelib chiqishi, asosiy tushunchalar, ehtimollikning ta'rifi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
22	Kombinatorika elementlari va ularning ehtimollar nazariyasi masalalarini yechishda qo'llanilishi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**
23	Shartli va shartsiz ehtimollar, to'la ehtimollik,	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**4 soat**

	Bayes formulasi.		
24	Statistik gipotezalar va uni tekshirishning statistik usullari. Statistik gipotezalarni axborot texnologiyalaridan foydalanish.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
25	Statistik gipotezalarni axborot texnologiyalaridan foydalanish.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
26	Sonlar sistemasi,natural, nomanfiy butun, butun ratsional sonlar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
27	Haqiqiy sonlar, Haqiqiy sonlar, haqiqiy sonlar ustida amallar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
28	Kompleks sonlar, Kompleks sonlar ustida amallar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
29	Oddiy kasrlar, oddiy kasrlar ustida amallar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
30	O’nli kasrlar, o’nli kasrlar ustida amallar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
31	Tub va murakkab sonlar, Sonlarni tub ko’paytuvchilarga ajratish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
32	Ikkita sonning EKUB (Eng katta umumiy bo’luvchi) va EKUK (Eng kichik umumiy karrali)ni topish.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
33	Algebrada ayniy shakl almashtirishlar qisqa ko’paytirish formulalari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
34	Tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**
35	Progressiyani o'rganish nazariyasi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	**3 soat**

5. Fan bo'yicha talabalar bilimini baholash va nazorat qilish me'zonlari.

«Maktabgacha ta`limda jismoniy madaniyat nazariyasi va metodikasi» fani bo’yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma’lumotlar fan bo’yicha birinchi mashg’ulotda talabalarga e’lon qilinadi.

Fan bo'yicha talabalarning bilim saviyasi va o'zlashtirish darajasining Davlat ta'lim standartlariga muvofiqligini ta'minlash uchun quyidagi nazorat turlari o'tkaziladi:

- joriy nazorat (JN) – talabaning fan mavzulari bo'yicha bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg'ulotlarda og'zaki so'rov, test o'tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollekvium, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o'tkazilishi mumkin;
- oraliq nazorat (ON) – semestr davomida o'quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o'z ichiga olgan) bo'limi tugallangandan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat bir semestrda ikki marta o'tkaziladi va shakli (yozma, og'zaki, test va hokazo) o'quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;
- yakuniy nazorat (YaN) – semestr yakunida muayyan fan bo'yicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni talabalar tomonidan o'zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy na`zorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan "Yozma ish" shaklida o'tkaziladi.

ON o'tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **ON** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **ON** qayta o'tkaziladi.

Oliy ta'lim muassasasi rahbarining buyrug'i bilan ichki nazorat va monitoring bo'limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida **YaN** ni o'tkazish jarayoni muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, Ya**N** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **YaN** qayta o'tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi, ko'nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

«Maktabgacha ta`limda jismoniy tarbiya nazariyasi va metodikasi» fani bo'yicha talabalarning semestr davomidagi o'zlashtirish ko'rsatkichi baholanadi.

Ushbu baholash turlari bo'yicha quyidagicha taqsimlanadi:

Baho	**Talabalarning bilim darajalari**
A'lo	Xulosa va qaror qabul qilish. Ijodiy fikrlay olish. Mustaqil mushohada yurita olish. Olgan bilimlarini amalda qo'llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.

Yaxshi	Mustaqil mushohada qilish. Olgan bilimlarini amalda qo'llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
Qoniqarli	Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish Tasavvurga ega bo'lish.
Qoniqarsiz	Aniq tasavvurga ega bo'lmaslik. Bilmaslik.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

Rahbariyat adabiyotlar

1. 2017-2021 yillarda O'zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo'nalishi bo'yicha Harakatlar strategiyasi. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947 sonli Farmoni.

2. SH.Mirziyoev Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. Toshkent - "O'zbekiston " - 2017.104B.

3. Sh.Mirziyoev Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. Toshkent - " O'zbekiston" - 2016.56 B.

4. O'zbekiston Respublikasining «Ta'lim to'g'risida»gi Qonuni. , - T.:O'zbekiston. 2015 -sentyabr

5. Maktabgacha ta'limni tubdan isloh qilish takomillashtirish tadbirlar to`g`risida.-2017-yil 2 fevral

Asosiy adabiyotlar

1. E.Mardonov, Q.Ostonov., O'.Achilov. Matematika. Samarqand 2018

2. Soatov Y.O. " Oliy matematika: I, II. qism, Toshkent, 1994 y.

3. E.Mardonov, Q.Ostonov,. H.Toshqulov. Oliy matematika asoslari. Samarqand 2015

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Abdullayeva B.S, Sadikova A.V.,Muxitdinova M.N,. Toshpo'latova M.I., Raximova F. Matematika. TDPU. (Boshlang'ich ta'lim va sport-tarbiyaviy ish bakalavriyat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik) Toshkent-2012, 284-bet.

2. Yunusmetov M, Jurayeva M. Geometriya - 1.1994.

3. Nazarov H.N, Ochilova X, Podgoriova E.G. Geometriyadan mashqlar to'plami.

4. Hikmatov A, Toshmetov T, Karasheva G, " Matematik analizdan mashqlar to'plami". T.:O'qituvchi 1993.

5. Незбайло Т.Г. Новая теория вычисления неопределенного интеграла. СПБ.: Корона-Век ,2007 (http://eqworld. ipmnet.ru/ru/library/ mathematics/calculus. htm)

6. Харин В.Т., Голицына М.Г., Калашникова Е.С., Новикова И.С, Математика (дифференциальное исчесление функций одной переменной. Аналитическая

7. Abdullayeva B.S, Rajabov F., Masharipov S. Oliy matematika asoslari Darslik. T.:Iqtisod-Moliya, 2011. 392b.

8. Xamedova N.A., Ibragimova Z., Tasetov T. Matematika, Darslik T. Turon-Iqbol,2007.363b.

Elektron ta'lim resurslari

1. www.tdpu.uz.

2. www.pedagog.uz

3. www.ziyonet.uz

4. www.edu.uz

5. tdpu-INTRANET.

6.www. samdu. uz

I modul. Matematika.

I modul. Matematika.

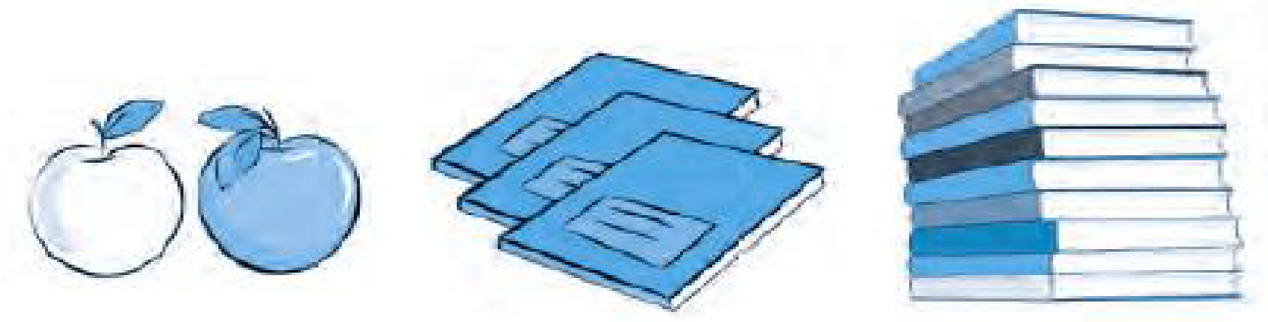
1-mavzu: Sonlar sistemasi, natural, nomanfiy butun, butun ratsional sonlar

Reja:

1. Natural sonlar. Natural sonlar ustida amallar
2. Butun sonlar. Butun sonlar ustida amallar
3. Ratsional sonlar. Ratsional sonlar ustida amallar.
4. Nomanfiy butun sonlar to`plamida «teng», «kichik» va «katta» munosabatlari.
5. Nomanfiy butun sonlarni to`plamlar nazariyasi asosida qo`shish.

Tayanch iboralar: Natural sonlar, Butun sonlar, ratsional sonlar, sonlar sistemasi,natural, nomanfiy butun, butun ratsional sonlar .

Quyidagi rasmda ikkita olma, uchta dafta va o‘nta kitob tasvirlangan. Sonlardan foydalanib bu rasmlarni quyidagicha yozish mumkin:



2 ta olma, 3 ta daftar, 10 ta kitob.

Narsalarni sanashda ishlatiladigan sonlar ***natural sonlar*** deb ataladi. Yuqorida ko‘rilgan misolda 2, 3 va 10 sonlari natural sonlardir. Har qanday natural sonni o‘nta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 raqamlari bilan yozish mumkin. Sonning faqat 0 dan 9 gacha bo‘lgan raqamlar bilan bunday yozilishiga ***sonning o‘nli yozuvi*** deyiladi. Bu holda son ***o‘nli sanoq sistemasida*** yozilgan deb ham aytiladi.
1 dan boshlab barcha natural sonlarni sanoq tartibida ketma-ket yozib

chiqsak,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, … ko‘rinishdagi ***natural sonlar qatori*** hosil bo‘ladi. Natural sonlar qatorida 1 eng kichik natural sondir.

Har qanday natural songa 1 ni qo‘shsak, natural sonlar qatorida undan keyin keluvchi natural son hosil bo‘ladi. Shuning uchun natural sonlar qatorida eng katta son yo‘q. Chunki, eng katta son bor desak, bu songa 1 ni qo‘shib undan ham katta sonni hosil qilaveramiz.

Natural sonlar qatori cheksizdir.

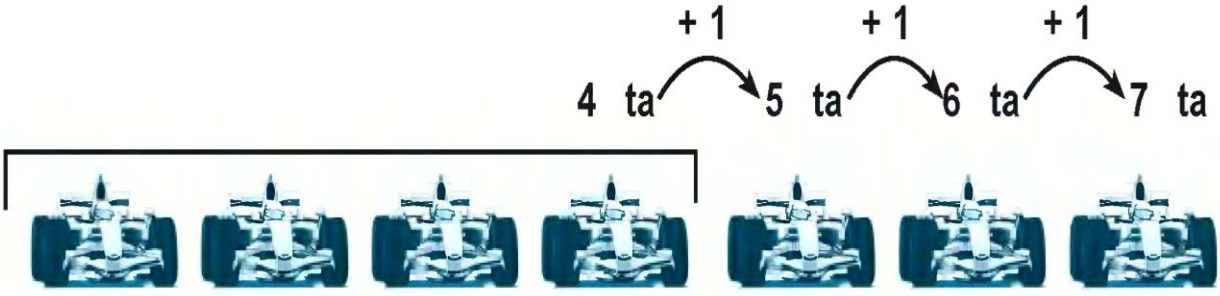
Sonning o‘nli yozuvida har bir raqam qiymati uning turgan o‘rniga bog‘liq bo‘ladi. Agar 7 raqami natural son yozuvining eng oxirida turgan bo‘lsa, 7 ta birlikni, oxiridan ikkinchi o‘rinda turgan bo‘lsa, 7 ta o‘nlikni, oxiridan uchinchi o‘rinda turgan bo‘lsa, 7 ta yuzlikni anglatadi va hokazo. Masalan, 7 soni 127 yozuvida – 7 ta birlikni, 472 yozuvida – 7 ta o‘nlikni, 780 yozuvida esa – 7 ta yuzlikni anglatadi.
0 raqami o‘zi turgan xonada birorta ham birlik yo‘qligini bildiradi. Bu belgi nol sonini ifodalashda ham ishlatiladi.

0 natural son emas.

Natural sonlarni qo‘shish

Maydonchada 4 ta poyga mashinasi turgan edi. Ularga birin-ketin yana 3 ta mashina kelib qo’shildi (1- rasm). Maydonchada jami nechta poyga mashinasi bo’ldi?

Bu masalani yechish uchun avtomobillarni sanab chiqish kifoya:



1-rasm

Demak, 4 ga 3 ni qo‘shish - 4 soniga 3 marta 1 ni qo‘shish degani:

$$4 + 3 \;=\; 4 + 1 + 1 + 1 \;=\; 5 + 1 + 1 \;=\; 6 + 1 \;=\; 7.$$

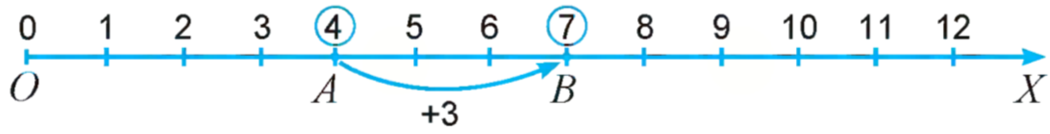
Bu qisqacha 4 + 3 = 7 tarzida yoziladi.

Bir-biriga qo‘shiluvchi sonlar – *qo‘shiluvchilar*, qo‘shish natijasi esa *yig‘indi* deb ataladi. Xususan, 4 + 3 ham *yig’indi* deb yuritiladi.

$$\overbrace{\underset{\text{1- qo‘shiluvchi}}{18} \quad + \quad \underset{\text{2- qo‘shiluvchi}}{37}}^{\text{yig‘indi}} \quad = \quad \overbrace{55}^{\text{yig‘indi}}$$

Sonlarni qo‘shishni sonlar nurida ham tasvirlash mumkin (2- rasm). $A(4)$ nuqtadan o‘ng tomonga qarab 3 ta birlik kesmani sanaymiz va $B(7)$ nuqtani topamiz.

Demak, 4 + 3 = 7.



2- rasm

NATURAL SONLARNI AYIRISH VA UNING XOSSALARI

Yig‘indi va bitta qo‘shiluvchiga ko‘ra ikkinchi qo‘shiluvchini topishga *ayirish amali* deyiladi. Ayiriladigan son – *ayiriluvchi*, ayiriluvchi ayiriladigan son – *kamayuvchi* va ayirish amali natijasi *ayirma* deb ataladi. Xususan, 72 – 48 ham ayirma deb yuritiladi.

$$\overbrace{\underset{\text{kamayuvchi}}{72} \quad - \quad \underset{\text{ayiriluvchi}}{48}}^{\text{ayirma}} \quad = \quad \overbrace{24}^{\text{ayirma}}$$

Natural sonlarni ayirishda kamayuvchi ayiriluvchidan kichik bo‘lishi mumkin emas. **!**

Ikki sonning ayirmasi – birinchi son ikkinchisidan *qanchaga ko‘p* ekanligini yoki ikkinchi son birinchisidan *qanchaga kam* ekanligini anglatadi.

Qo‘shish amalining xossalari

a) qo‘shishning o‘rin almashtirish qonuni: $a + b = b + a$,

bu tenglikda a va b ixtiyoriy natural son va 0 qiymatlarini qabul qilishi mumkin.

b) qo‘shishning guruhlash qonuni: $a + (b + c) = (a + b) + c$,

bu yerda a, b va c ixtiyoriy natural son va 0 qiymatlarini qabul qilishi mumkin.

d) qo‘shishda nolning xossasi: $a + 0 = 0 + a = a$,

bu yerda a – ixtiyoriy natural son va 0 qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

Ayirish amalining xossalari

a) sondan yig‘indini ayirish xossasi: $a - (b + c) = a - b - c$,

bu yerda a, b va c sonlar $b + c < a$ yoki $b + c = a$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural sonlar.

b) yig‘indidan sonni ayirish xossasi:

Agar a, b va c sonlar $c < b$ yoki $c = b$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural sonlar bo‘lsa, $(a + b) - c = a + (b - c)$.

Agar a, b va c sonlar $c < a$ yoki $c = a$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural sonlar bo‘lsa, $(a + b) - c = (a - c) + b$.

d) ayirishda nolning xossasi: $a - 0 = a$; $a - a = 0$,

bu yerda a – ixtiyoriy natural son va 0 qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

NATURAL SONLARNI KO‘PAYTIRISH

! a sonini b soniga ko‘paytirish deganda, har biri a soniga teng bo‘lgan b ta qo‘shiluvchilar yig‘indisini topish tushuniladi.

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ ta qo‘shiluvchi}}$$

a va b sonlari ko‘paytmasi $a \cdot b$ tarzida yoziladi. Bu yerda $a \cdot b$ – *ko‘paytma*, a va b sonlar esa *ko‘paytuvchilar* deb ataladi.

8	·	4	=	32
1-ko‘paytuvchi		2-ko‘paytuvchi		ko‘paytma

NATURAL SONLARNI BO'LISH

Umimiy holda a va b sonlarining *bo'linmasi (nisbati)* deb shunday c soniga aytiladiki,

$$c \cdot b = a \qquad \text{bo'ladi.}$$

a va b sonlarining bo'linmasi $a : b$ tarzda belgilanadi va quyidagicha yoziladi:

$$a : b = c$$

Bu yozuvda a – *bo'linuvchi*, b – *bo'luvchi* va bo'lish natijasi c – *bo'linma* deb ataladi.

$$\overbrace{\underset{\text{bo'linuvchi}}{30} \quad : \quad \underset{\text{bo'luvchi}}{6}}^{\text{bo'linma}} = \overbrace{5}^{\text{bo'linma}}$$

Bo'linma – bo'linuvchining bo'luvchidan *necha marta kattaligini*, yoki bo'luvchining bo'linuvchidan *necha marta kichikligini* bildiradi.

! Har qanday sonni nolga bo'lish mumkin emas!

$1 \cdot a = a$ bo'lgani uchun, bo'lish amalining ma'nosiga ko'ra

$$a : 1 = a \quad \text{va} \quad a : a = 1 \;\; (a \neq 0).$$

! Har qanday sonni 1 ga bo'lganda yana o'sha sonning o'zi hosil bo'ladi.

$0 \cdot a = 0$ bo'lgani uchun bo'lish amalining ma'nosiga ko'ra

$$0 : a = 0.$$

! Nolni har qanday natural songa bo'lganda yana nol hosil bo'ladi.

Butun sonlar to'plami - Uni quyidagia ta'riflash mumkin: Natural sonlar va ularga qarama qarashi sonlar hamda nol birgalikda butun sonlarni tashkil qiladi

3. Ratsional sonlar. Ratsional sonlar ustida amallar.

$\frac{m}{n}$, m $\in Z, n \in N$ ko'rinishdagi sonlar ratsional sonlar deyiladi va Q harfi bilan ifodalanadi.

$Q=\{\frac{m}{n}$, m $\in Z, n \in N\}$

Q to'plamda qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari doim bajariladi. (nolga bo'lish ma'noga ega emas). Bo'lish amalining xossasiga asosan, a:b=q bo'lsa a=b·q bo'ladi.

Agar a $\neq 0$ va b=0 bo'lsa, a=b·q tenglik bajarilmaydi.

Har qanday butun sonni kasr ko'rinishida ifodalash mumkin.

Masalan, 3=$\frac{3}{1}$, -2=$-\frac{2}{1}$, …

Ikkita $\frac{m}{n}$ va $\frac{p}{q}$ kasrning yig'indisi, ko'paytmasi, ayirmasi va bo'linmasi ushbu qoidalar bo'yicha hisoblanadi:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q+n\cdot p}{n\cdot q}, \qquad \frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$$

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q-n\cdot p}{n\cdot q}, \qquad \frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q}{n\cdot q}$$

.(Bo'linma bo'lgan holda p $\neq$ 0).

Bu tengliklarning o'ng tomonida turgan kasrlar $\frac{m}{n}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlarning mos ravishda yig'indisi, ko'paytmasi, ayirmasi va bo'linmasi deb yuritiladi.

Son matematikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Odamlar predmetlarni sanash tufayli sonlarning natural to'plamini hosil qildi. Hosil qilingan sonli to'plamlar bir-biri bilan quyidagicha bog'langan: N $\subset$ Z $\subset$ Q $\subset$ I $\subset$ R.

Cheklisiz o'nli kasrlarni 10, 100,1000 va hokazolarga ko'paytirish amalini chekli o'nli kasrlardagi kabi vergulni ko'chirib bilan bajarish mumkin. Bundan foydalanib, har qanday davriy kasrni oddiy kasrga aylantirish mumkin.

Masalan, x=0,(348)=0,348348348… davriy kasrni oddiy kasrga aylantiraylik. Davriy uch raqamli bo'lgani uchun kasrni 1000 ga ko'paytiramiz; 1000x=348,348348…=348+x. Bundan 999x=348 yoki $x=\frac{348}{999}=\frac{116}{333}$.

0,00(348) o'nli kasr esa 0,(348) dan 100 marta kichik, shunga ko'ra 0,00(348)= $\frac{348}{99900}$ bo'ladi. 0,96(348) kasrni esaa 0,96+0,00(348) yig'indi ko'rinishida yozish mumkin, u holda

$$\frac{96}{100}+\frac{348}{99900}=\frac{96\cdot 999+348}{99900}=\frac{96000+348-96}{99900}=\frac{96348-96}{99900}=\frac{96252}{99900}.$$

Oddiy kasrni o'nli kasr ko'rinishda yozishda ba'zan bir xil son takrorlanib keladi.bunday kasrlar sof davriy kasrlar deyiladi.

Shunday hollar bo'ladiki, davr verguldan keyin darhol boshlanmaydi, bunday kasrlar aralash davriy kasrlar deyiladi.

Davriy o'nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantirishning umumiy qoidasini ta'riflaymiz.

Sof davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati davrdan, maxraji esa davra nechta raqam bo'lsa, shuncha marta takrorlanadigan 9 raqami bilan ifodalanadigan sondan iborat. Masalan, $0,(5)=\frac{5}{9}$; $0,(45)=\frac{45}{99}$.

Aralash davriy kasrni oddiy kasr ko'rinishda yozish uchun maxrajga kasrning davrida nechta raqam bo'lsa, shuncha 9 va davrgacha nechta raqam bo'lsa, shuncha nol(9 dan keyin) yozish kerak; suratga esa verguldan keyingi sonlardan (davrga e'tibor qilmay) davrgacha bo'lgan sonni ajratib yozish kerak. Masalan, $0,3(45)=\frac{345-3}{990}=\frac{171}{495}$.

Mavzuga doir savollar

1. Sonlarni yozishda nechta raqam ishlatiladi? Ularni ayting.
2. Qanday sonlar natural sonlar deb ataladi?
3. Natural sonlar qatorining xossalarini ayting.
4. Ko'p xonali sonlar qay tarzda sinflarga ajratiladi?
5. Qanday sinf nomlarini bilasiz?
6. Ko'p xonali sonlar qanday o'qiladi?

2-mavzu: Haqiqiy sonlar, haqiqiy sonlar ustida amallar.

Reja:

1. Irratsional sonlar.

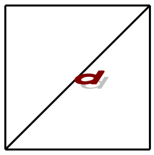
2. Haqiqiy sonlar ustida amallar bajarish

*Tayanch iboralar: H*aqiqiy son, yig'indi, ayirma, ko'paytma, daraja, xossa

Irratsional sonlar. $\frac{m}{n}$ kasr ko'rinishiga keltirib bo'lmaydigan sonlarga aytiladi.Ya'ni qisqarmaydigan kasrlar irratsional sonlar deb yuritiladi.

Barcha ratsional va irratsional sonlar birgalikda haqiqiy sonlar deyiladi. Haqiqiy son-lar to'plami R orqali belgilanadi..

1-misol. Tomoni 1 ga teng bo'lgan kbadratning d diagonali hech qanday ratsional son bilan ifodalanmasligini isbot qilamiz.



Isboti. Pifagor teoremasiga muvofiq $d^2=1^2+1^2=2$. Diagonalini $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr ko'rinishida yozish mumkin, deb faraz qilaylik. U holda $(\frac{m}{n})^2=2$ yoki $m^2=2n^2$. Bunga ko'ra m – juft son, m=2k. Shuningdek, $(2k)^2=2n^2$ yoki 2k=n, ya'ni n juft son. $\frac{m}{n}$ kasrning surat va maxraji 2 ga qisqarmoqda, bu esa qilingan farazga zid. Demak, d ning uzunligi, ya'ni $\sqrt{2}$ ratsional son emas.

Sonlarning ildiz ishorasi orqali yozilishi ularning aniq bilishga yetarli emas. Masalan, hisoblashsiz $\sqrt{2}$ va $\sqrt[3]{3}$ lardan qaysi birining kattaligini aytish qiyin. Bu holda $\sqrt[3]{3}$ =1,442…, $\sqrt{2}$ =1,4142… kabi davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr ko'rinishdagi yozuv oydinlik kiritadi, lekin hisoblashlarni qiyinlashtiradi. Shunga ko’ra irratsional sonni unga yaqin ratsional son orqali tadribiy ifodalashga harakat qilinadi.

Haqiqiy sonlarning istalagan aniqlikdagi o’nli yaqinlanishlarining kami va ortag’i bilan oilinadigan ma’lum qoidalariga ko’ra aniqlanadi.

Agar α biror haqiqiy son, a- o’sha α sonning kami bilan olingan biror qiymati, b esa α sonning ortig’I bilan olingan qiymati bo’lsa, u holda $a<\alpha<b$.

α sonning ortig’i bilan olinadigan qiymatlari shu sondagi o’nli ishora raqamining oxirgisiga 1 ni qo’shish vositasi bilan hosil bo’ladi.

1-tarif. a va b sonlarining yig’indisi deb, ularning kami bilan olingan har qanday qiymatlari yig’indisidan katta , lekin ortig’i bilan olingan har qanday taqribiy qiymatlari yig’indisidan kichik bo’lgan uchinchi bir c songa aytiladi. Ya’ni

$a_n+b_n\leq c< a_n^/ + b_n^/$ tengsizlik o’rinli bo’ladi.

Misol. a=3,3173… va b=1,1236… sonlarining yig’indisini toping.

Yechish. Berilgan sonlarning ifodasidan a_4=3,3173; $a_4^/$=3,3174; b_4=1,1236 , $b_n^/$=1,1237 bo’lishi kelib chiqadi. Shuning uchun

$a_4+ b_4=3,3173+1,1236=4,4409\leq a+b< a_4^/+ b_n^/=3.3174+1,1237=4,4411.$

Shunday qilib qilib, 0,001 aniqlikkacha a+b=4,441 natijani olamiz.

2- ta’rif. a va b manfiy bo’lmagan haqiqiy sonlarning ko’paytmasi deb, n istalgan manfiy bo’lmagan butun son bo’lganda $a_nb_n\leq c<a^/_nb^/_n$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi c songa aytiladi.

Misol. a=$\sqrt{2}$ va b=$\sqrt{3}$ sonlarining ko’paytmasini toping.

Yechilishi. 0,01 gacha yaqinlikda $\sqrt{2}$=1,41 va $\sqrt{3}$=1,73

$1,41\cdot 1,73=2,4393.$

3-ta'rif. a sonining ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi va hokazo darajasi deb, har biri a teng bo'lgan ikkita, uchta, to'rtta va hokazo ko'paytuvchilardan tuzilgan ko'paytmaga aytiladi.

2-misol. π soni kattami yoki $\sqrt{10}$ mi?

Yechilishi.Masala π=3,14159… va $\sqrt{10}$=3,16227… sonlarning mos xonalari raqamlarini (o'nli yaqinlashishlarini) taqqoslash orqali hal bo'ladi. Ularning butun qismlari va o'ndan birlar xonasi raqamlari bir xil, lekin 0,01 lar xonasi raqami $\sqrt{10}$ da katta. Demak, $\pi < \sqrt{10}$.

3-misol. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ - iratsional son ekanligini isbotlang.

Isbot. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ratsional son deb faraz qilaylik , ya'ni $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ =r, r $\in$Q.

$\sqrt{5}$ =r- $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ 5=r^2-2 $\sqrt{2}$ r+2 $\Rightarrow$ 3=r^2-2 $\sqrt{2}$ r $\Rightarrow$ r^2-3=2 $\sqrt{2}$ r $\Rightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{r^2-3}{2r} \in Q$; lekin $\sqrt{2} \notin Q$

Zidlik hosil bo'ldi. Faraz noto'g'ri. Demak, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irratsional son.

Nazorat savollar

1. Iratsional sonlar ta'rifi.

2. Haqiqiy sonlar ustida amallar bajarish qanday yaqinlashishlardan foydalaniladi.

Topshiriqlar

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ yig'indi irratsional ekanligini isbot qiling.

2. a) 1,4978; b) $\sqrt{5}$; d) $\frac{15}{7}$ sonlarining 0,001 aniqlikdagi ortig'I va kami bilan olingan yaqinlashishlarini toping.

3. Sinf xonasining eni va bo'yini o'lchash natijasida a=(8,3 $\pm$ 0,02) m, b=(12,2 $\pm$ 0,03) ekani aniqlandi. Sinf xonasining yuzini toping. Yo'l qo'yilgan xatolarni hisoblang. (Javob. S=(101,25 $\pm$ 0,5) sm^2 ; $\approx$0,49m^2)

3-mavzu: Kompleks sonlar, Kompleks sonlar ustida amallar

Reja:

1. Kompleks sonlar haqida tushuncha.
2. Kompleks sonlar ustida amallar

Tayanch iboralari: Kompleks sonlar, kompleks sonning geometrik tasviri, Muavr formulasi, darajaga oshirishm ildizdan chiqarish.

Kompleks sonlar haqida tushuncha

Kompleks son deb $a+bi$ ifodaga aytiladi, bu yerda a va b haqiqiy sonlar, i – mavhum birlik bo'lib, u $i=\sqrt{-1}$ yoki i^2= -1 tengliklar bilan aniqlanadi; a – kompleks sonning haqiqiy qismi, bi – mavhum qismi deyiladi. Faqat mavhum qismining ishorasi bilan farq qiladigan ikki kompleks son: $a+bi$ va a-bi o'zaro qo'shma deyiladi. Ko'pincha a+bi kompleks son bitta α harfi bilan belgilanadi: $\alpha=a+bi$. $a+bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi $a=Re\alpha$ bilan, mavhum qismining koeffitsientini $b=Lm\alpha$ bilan belgilaydilar. α kompleks sonning $a+bi$ ko'rinishidagi yozuviga uning algebraik shakli deyiladi.

Agar ikkita $\alpha_1=a_1+b_1i$ va $\alpha_2=a_2+b_2i$ kompleks sonda $a_1=\alpha_2$, $b_1=b_2$ bu ikki son teng deyiladi ($\alpha_1=\alpha_2$). Agar $\alpha=a+bi$ kompleks sonda $a=0$, $b=0$ bo'lsa, bu kompleks son 0 ga (α=0) teng bo'ladi. Agar $\alpha=a+bi$ kompleks sonda b=0 bo'lsa, haqiqiy son hosil bo'ladi; agar a=0 bo'lsa, $0+bi=bi$ sof mavhum son deyiladi.

2. kompleks sonlar ustida amallar.

Kompleks sonlar ustidagi amallar ko'phadlar ustidagi amallarni bajarish qoidalari bo'yicha o'tkaziladi, bunda i^2 har safar -1 ga almashtiriladi.

1. Qo'shish amali. $\alpha_1=a_1+b_1i$ va $\alpha_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning yig'indisi deb haqiqiy qismi qo'shiluvchi kompleks sonlar haqiqiy qismlarining yig'indisiga, mavhum qismi ularning mavhum qismlarining yig'indisiga teng bo'lgan α kompleks songa aytiladi va u quyidagicha yoziladi:

$\alpha=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

Misol: (5-3i) + (3+3i)=(5+3) + (3-3)i= 8

(2+5i) + (-2+5i)=(2-2) + (5+5)i= 10i

2. Ayirish amali. $\alpha_1=a_1+b_1i$ kompleks sondan $\alpha_2=a_2+b_2i$ kompleks sonning ayirmasi deb α_1 va α_2 ga qarama-qarshi bo'lgan $-\alpha_2$ sonlarning yig'indisidan iborat bo'lgan kompleks songa aytiladi:

$\alpha= \alpha_1 + (-\alpha_2)= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Misol: (10+2i) – (3-4i)= (10-3) – (2+4)i= 7+6i

(4+5i) – (3+5i)= (4-3) – (5-5)i= 1

3. Ko'paytirish amali. $\alpha_1=a_1+b_1i$ va $\alpha_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning ko'paytmasi deb

$\alpha= \alpha_1\times \alpha_2=(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

kompleks songa aytiladi. Kompleks sonlarni ko'paytirganda $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4= i^2\times i^2=1$, $i^5=i$ va hokazo, umuman k butun bo'lganda $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$ ekanligini e'tiboga olish kerak.

Misol: (5+2i)(3-4i)= 23-14i

(2+i)(2-i)=4+1=5

4. Bo'lish amali. . $\alpha_1=a_1+b_1i$ kompleks sonning $\alpha_2=a_2+b_2i$ kompleks songa bo'linmasi deb $\alpha_1= \alpha\times \alpha_2$ tenglikni qanoatlantiradigan α kompleks songa aytiladi va u quyidagi formula bilan topiladi:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\cdot i$$

Misol: $\frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7+4i}{5} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$

O'rin almashtirish, gruppalash qonuni kompleks sonlarda ham to'g'ri:

$$(a+bi) + (c+di) = (c+di) + (a+bi)$$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (c+di) \cdot (a+bi)$$

$$(a+bi) + (c+di) + (e+fi) = (a+bi) + [(c+di) + (e+fi)]$$

4-mavzu. Tub va murakkab sonlar, Sonlarni tub ko’paytuvchilarga ajratish

Reja:

1. Sonning bo'luvchilari va karralilari. Bo'linish belgilari

2. Tub va murakkab sonlar

3. Natural sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish.

Tayanch va iboralar: Sonning bo'uvchilari va karralilari, bo'linish belgilari, tub sonlar,murakkab sonlar, Natural sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish.

Sonning bo‘luvchilari va karralisi

Agar m son natural son n ga qoldiqsiz bo‘linsa, m son n ning **karralisi (bo‘linuvchisi)**, n son esa m ning **bo‘luvchisi** deyiladi.

Bunday holda, m son n ga **bo‘linadi** deyiladi.

Ma’lumki, 8 ni 1, 2, 4 va 8 sonlaridan biriga bo‘lsak, q diqda 0 chiqadi.

Masalan, $8:1=8$; $8:2=4$; $8:4=2$; $8:8=1$.

1, 2, 4 va 8 sonlarini 8 ning **bo‘luvchilari,** 8 sonini esa 1, 4 va 8 sonlarining **karralisi** deb ataymiz. U holda 8 soni 1, 2 va 8 ga **bo‘linadi** deyiladi. Shu bilan birga 3 soni 8 ning bo‘l chisi bo‘lmaydi, chunki 8 sonini 3 ga bo‘lganda qoldiqda 2 ladi. Bu holda 8 soni 3 ga **bo‘linmaydi**, deymiz.

Masala. 36 sonining barcha bo‘luvchilarini yozing.

Yechish. 1, 2, 3, 4 va h. k. sonlarni ketma-ket tekshi miz. Bunda agar ularning biror songa ko‘paytmasi 36 son bersa, buni quyidagicha yozamiz:

$36=1\cdot 36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9=6\cdot 6=9\cdot 4=12\cdot 3=18\cdot 2=36$

Demak, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 sonlari 36 ning bar bo‘luvchilaridir.

Ko'paytirish natijasi ko'paytuvchilar tartibiga bog'liq bo' magani uchun tekshirishni 6 · 6 ko'paytmada to'xtatis mumkin.

Agar son bo'luvchilar ko'paytmasi shaklida yozilsa, bu so **bo'luvchilarga yoyilgan** deyiladi.

Masalan, 10 sonini ikkita bo'luvchiga quyidagicha yoyis mumkin: $1 \cdot 10$, $10 \cdot 1$, $2 \cdot 5$, $5 \cdot 2$.

Ko'paytmalar ko'paytuvchilar tartibiga bog'liq emasligi inobatga olsak, $1 \cdot 10$ va $10 \cdot 1$ hamda $2 \cdot 5$ va $5 \cdot 2$ yoyilmalarni b xil deb hisoblaymiz. Demak, 10 soni ikkita bo'luvchiga ikl usulda yoyiladi: $1 \cdot 10$ yoki $2 \cdot 5$.

12 soni 1, 2, 3, 4, 6 va 12 bo'luvchilariga ega bo'lib, quyida uchta usulda ikkita bo'luvchiga yoyiladi: $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$ va $3 \cdot 4$.

Natural son **2** ga **bo'linsa**, u **juft** son deyiladi.

Natural son **2** ga **bo'linmasa**, u **toq** son deyiladi.

2, 4, 6, 8, 10, ... – juft sonlar qatori.

1, 3, 5, 7, 9, ... – toq sonlar qatori.

0 soni ham juft sonlar qatoriga kiritilgan.

1. Yig'indi, ayirma va ko'paytmaning bo'linishi.

1.1. Yig'indining bo'linishi (1- xossa).

Agar ikki yoki undan ortiq natural sonning har biri b songa bo'linsa, u holda bu sonlarning yig'indisi ham o' songa bo'linadi.

Agar natural sonlardan biri biror songa bo'linsa, ikkinc bo'linmasa, u holda bu sonlarning yig'indisi ham o'sha so bo'linmaydi.

1-misol. 36 + 81 yig'indi 9 ga bo'linadi, chunki har qo'shiluvchi 9 ga bo'linadi; 12 + 17 yig'indi 6 ga bo'linm chunki 12 soni 6 ga bo'linadi, 17 esa 6 ga bo'linmaydi; 13 yig'indi 6 ga bo'linadi, ammo 13 va 23 sonlari 6 ga bo'linm

1.2. Ayirmaning bo‘linishi (2- xossa).

2-misol. $63 - 49$ ayirma 7 ga bo‘linadi, chunki kamayuvchi va ayriluvchi 7 ga bo‘linadi; $56 - 48$ ayirma 6 ga bo‘linmaydi, chunki kamayuvchi 56 soni 6 ga bo‘linmaydi, ayriluvchi 48 esa 6 ga bo‘linadi.

1- xossaga o‘xshash xulosa chiqarish o‘zingizga havola qilinadi.

1.3. Ko‘paytmaning bo‘linishi (3- xossa).

Agar ko‘paytuvchilardan biri biror songa bo‘linsa, u holda bu sonlarning ko‘paytmasi ham shu songa bo‘linadi.

3-misol. $15 \cdot 17$ ko‘paytma 5 ga bo‘linadi, chunki $15 : 5 = 3$. Demak, $(15 \cdot 17) : 5 = 15 : 5 \cdot 17 = 3 \cdot 17 = 51$.

2. 10 ga, 5 ga va 2 ga bo‘linish belgilari.

2.1. 10 ga bo‘linish belgisi.

10 ga karrali natural sonlar ⇨ 10, 20, 30, ...

Agar natural sonning yozuvi **0** raqami bilan tugasa, u so **10** ga bo‘linadi. Agar natural sonning yozuvi **0** dan farq **(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)** raqam bilan tugasa, u son **10** g bo‘linmaydi.

4-misol. 1 230 soni **10** ga bo‘linadi, **31** esa **10** ga bo‘li maydi.

2.2. 5 ga bo‘linish belgisi.

5 ga karrali natural sonlar ⇨ 5, 10, 15, 20, ...

Agar natural sonning yozuvi **5** yoki **0** raqami bilan tugasa u son **5** ga bo‘linadi. Agar natural sonning yozuvi **5** yok **0** dan farqli raqam bilan tugasa, u son **5 ga** bo‘linmaydi.

10 ga bo‘linadigan barcha sonlar **5** ga ham bo‘linadi.

Agar natural sonning yozuvi **juft raqam** bilan tugasa, u son **2** ga **bo'linadi.** Agar natural sonning yozuvi **toq raqam** bilan tugasa, u son **2** ga **bo'linmaydi**.

2 ga bo'linadigan natural sonlar **juft sonlar**, qolgan natural sonlar esa **toq sonlar** deyiladi.

6-misol. 5**0**, 10**2**, 16**4**, 56**6**, 2 00**8**, ... – **juft sonlar**, chunki **2** ga bo'linadi; **1**, **3**, 1**5**, 2**7**, 3**9**, 2 01**7**, ... – **toq sonlar**, chunki **2** ga bo'linmaydi.

10 ga bo'linadigan barcha natural sonlar **2** ga ham, **5** ga ham bo'linadi.

7-misol. 1) 50 346 soni 2 ga bo'linadimi? 50 343 soni-chi?

2) 17 325 soni 5 ga bo'linadimi? 17 324 soni-chi?

3) 7 380 soni 10 ga bo'linadimi? 7 384 soni-chi?

Yechish. 1) 50 346 sonining oxirgi 6 raqami juft bo'lgani uchun bu son 2 ga bo'linadi.

Agar natural sonning raqamlari yig'indisi **9** ga bo'linsa, u son **9** ga bo'linadi. Agar berilgan natural sonning raqamlari yig'indisi **9** ga bo'linmasa, u sonning o'zi ham **9** ga bo'linmaydi.

Agar natural sonning raqamlari yig'indisi **3** ga bo'linsa, u son **3** ga bo'linadi. Agar natural sonning raqamlari yig'indisi **3** ga bo'linmasa, u sonning o'zi ham **3** ga bo'linmaydi.

1 dan boshqa har bir natural sonning kamida ikkita bo‘luvchisi bo‘ladi. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 – sonlarining har biri 2 ta bo‘luvchiga ega: 1 va shu sonning o‘zi (*tekshirib ko‘ring!*). Xuddi shuningdek, 4, 6, 12, 25, 28 sonlaridan har birining ikkitadan ko‘p bo‘luvchisi bor (*tekshirib ko‘ring!*).

Agar natural son faqat ikkita bo‘luvchiga (sonning o‘zi va 1) ega bo‘lsa, u **tub son** deyiladi.

Shu ta’rifga asosan, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sonlari **tub** bo‘ladi. Tub sonlar ta’rifiga asosan, **1** soni tub bo‘ladimi?

Agar natural son ikkitadan ortiq bo‘luvchiga ega bo‘lsa, bunday son **murakkab son** deyiladi.

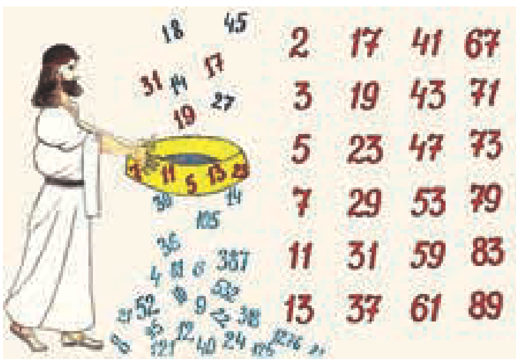
Shu ta’rifga asosan, 4, 6, 12, 25, 28 sonlari **murakkab** bo‘ladi. Shu ta’rifga asosan, **1** soni murakkab bo‘ladimi?

Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi *xulosaga* kelamiz:

1 – tub son ham emas, murakkab son ham emas.

Tub sonlar jadvalini tuzish usullaridan eng soddasi va shu bilan birga eng qadimiysini yunon matematigi **Eratosfen** taklif qilgan. Bu usul sondan katta bo‘lmagan barcha tub sonlarni topish usulidir. Bu usul bo‘yicha biror natural songacha bo‘lgan barcha natural sonlar ketma-ketligini yozib chiqamiz va ular orasidan *murakkab* sonlarni *o‘chiramiz*, natijada *o‘chirilmay* qolgan *sonlar* **tub sonlar** bo‘ladi.

Bunday usul bilan tuzilgan tub sonlar jadvali «**Eratosfen g‘alviri**» nomi bilan ma’lumdir. Eratosfen natural sonlarni ***mum*** bilan qoplangan taxtachaga yozib, **murakkab sonlarni** igna bilan teshgan, natijada teshiklar hosil bo‘lgan. Taxtacha xuddi g‘alvirni eslatadi, undan murakkab sonlar elanib tushib ketib, **tub** sonlargina qolgan. Eratosfen **tub sonlar** jadvalini faqat **1000** gacha natural sonlar uchun keltirgan.



Masalan, bu usulni 25 dan katta bo‘lmagan tub sonlarni topishda qo‘llaymiz:

1. 2 dan 25 gacha natural sonlarni quyidagicha yozamiz:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

2. 2 dan boshqa uning barcha karralilarini o‘chiramiz:

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13
~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~	25

3. 3 dan boshqa uning barcha karralilarini o‘chiramiz:

2	3	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13
14	~~15~~	16	17	~~18~~	19	20	~~21~~	22	23	~~24~~	25

4. 5 dan boshqa uning barcha karralilarini o‘chiramiz:

2	3	4	5	6	7	8	9	~~10~~	11	12	13
14	~~15~~	16	17	18	19	~~20~~	21	22	23	24	~~25~~

5. 7, 11, 13, 17, 19 va 23 sonlaridan boshqa ularga karrali sonlar mavjud emas. Demak, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 va 23 sonlari 25 dan katta bo‘lmagan **tub** sonlardir.

Birinchi — eng kichik tub son **2** ga teng. **2** — juft tub son. Qolgan barcha tub sonlar toq sonlardir. Tub sonlar cheksiz ko‘p.

Natural sonlarni tub ko' paytuvchilarga ajratish

Natural sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratish — uni tub sonlarning ko‘paytmasi shaklida tasvirlash demakdir.

12 sonining bo‘luvchilari: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Bu bo‘luvchilar orasida **2** va **3** — tub sonlar. Ular 12 sonining **tub bo‘luvchilari** deyiladi.

Agar murakkab son o‘zining faqat tub sondan iborat ko‘paytuvchilari ko‘paytmasi shaklida ifodalangan bo‘lsa, bu murakkab son **tub ko‘paytuvchilarga ajratilgan (yoyilgan)** deyiladi.

Natural sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratishda quyidagi usuldan foydalanish mumkin.

Misol. 315 sonini tub ko‘paytuvchilarga ajrating.

Tushuntirish:

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

315 sonini yozamiz va o‘ng tomoniga vertikal chiziq chizamiz. Shu sonning eng kichik tub bo‘luvchisi **3** ni vertikal chiziqning o‘ng tomoniga yozamiz. $315 : \mathbf{3} = \mathbf{105}$ bo‘linmani 315 ning tagiga yozamiz. 105 soni uchun ham yuqoridagidek yondashamiz: $105 : \mathbf{3} = \mathbf{35}$. So‘ngra $35 : \mathbf{5} = \mathbf{7}$, $7 : \mathbf{7} = \mathbf{1}$ ni hosil qilamiz. Navbatdagi har bir tub bo‘luvchini avvalgi bo‘luvchi tagiga va har bir bo‘linmani esa avvalgi bo‘linma tagiga yozamiz. Chap ustundagi bo‘linmada **1** hosil bo‘lgandagina, sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratish tugaydi. Vertikal chiziqchaning o‘ng tomonidagi ustunda yozilgan sonlar 315 ning tub ko‘paytuvchilarini tashkil qiladi va ularning ko‘paytmasi 315 ga teng, ya’ni:

$$\mathbf{315} = \mathbf{3} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7}.$$

Agar yoyilmadagi ko‘paytuvchilar orasida teng sonlar bo‘lsa, daraja tushunchasidan foydalanib, yozuvni soddalashtirish mumkin. Masalan, yuqorida keltirilgan yoyilma quyidagicha yoziladi:

$$\mathbf{315} = \mathbf{3}^2 \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7}.$$

Savollar

1. Bo'linish belgilarini ayting?

2. Tub son deb nimaga aytiladi?

3. Murakkab son deb nimaga aytiladi?

4. Sonlarni tub ko'paytuvchilarga qanday ajratamiz?

5-mavzu: Ikkita sonning EKUB (Eng katta umumiy bo'luvchi) va EKUK (Eng kichik umumiy karrali)ni topish

Reja:

1. **Ikkita sonning EKUB (Eng katta umumiy bo'luvchi)ini topish**
2. **Ikkita sonning EKUK (Eng kichik umumiy karrali)ni topish**

Tayanch iboralar: Eng katta umumiy bo'luvchi, eng kichik umumiy karralisi.

Ikkita natural sonning **eng katta umumiy bo'luvchisi (EKUB)** deb, shu sonlarning har biri bo'linadigan eng katta songa aytiladi.

Ikkita natural sonning eng katta umumiy bo'luvchisi shu sonlarning umumiy tub bo'luvchilari ko'paytmasiga teng.

Demak, **EKUB (24, 90) = $2 \cdot 3 = 6$.**

1-misol. EKUB (36, 84) ni toping.

Yechish. 1- usul (tub ko'paytuvchilarga ajratish usuli).

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$\Rightarrow$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$\Rightarrow$ $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

EKUB (36, 84) $= 2^2 \cdot 3 = 12$. Javob: 12.

m va n natural sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi quyidagicha belgilanadi: **EKUB (m, n).**

Yuqoridagi misoldan shunday xulosaga kelish mumkin.

EKUB (m, n) ni topish uchun:

1. m va n sonlar tub ko'paytuvchilarga ajratiladi.
2. m va n sonlardagi umumiy tub ko'paytuvchilarning eng kichik darajalari olinib, ulardan ko'paytma tuziladi.
3. Tuzilgan ko'paytmaning qiymati EKUB (m, n) bo'ladi.

$m > n$ soni n ga bo‘linsa, u holda EKUB $(m,\ n) = n$ bo‘ladi.

5-misol. EKUB (15, 46) topilsin.

Yechish. Berilgan sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

15	3
5	5
1	

$$15 = 3 \cdot 5$$

46	2
23	23
1	

$$46 = 2 \cdot 23$$

15 va 46 sonlarining umumiy tub bo‘luvchilari yo‘q. Bunday hollarda berilgan sonlarning eng katta umumiy bo‘livchisi 1 ga teng bo‘ladi. Demak, 15 va 46 sonlari uchun EKUB (15, 46) = 1.

Umumiy tub bo‘luvchiga ega bo‘lmagan sonlar *o‘zaro tub sonlar* deyiladi: EKUB $(m,\ n) = 1$, m va n — natural sonlar.

20 va 21, 14 va 15 sonlari *o‘zaro tub* sonlar. Shuning uchun EKUB (20, 21) = EKUB (14, 15) = **1**.

Ikkita ketma-ket kelgan natural sonlar doimo o‘zaro tub bo‘ladi.

36 va 48 sonlariga karrali sonlarni yozib chiqaylik:

36 ning karralilari	36	72	108	**144**	180	216	252	**288**	...
48 ning karralilari	48	96	**144**	192	240	**288**	336	384	...

Bu sonlar orasida ikkala qator uchun umumiy bo‘lgan sonlar bor:

144, **288**, **432**, ...

Ular 36 va 48 sonlarining umumiy karralisidir.

144 soni 36 va 48 ga karrali barcha natural sonlar ichida eng kichigidir. **144** sonini 36 va 48 sonlarining **eng kichik umumiy karralisi (bo‘linuvchisi)** deymiz.

Bir nechta natural sonning har biriga bo‘linadigan eng kichik natural son ularning **eng kichik umumiy karralisi (EKUK)** deyiladi.

1-misol. EKUK (30, 36) ni toping.

Yechish. 1-usul (tub ko‘paytuvchilarga ajratish usuli).

30	2
15	3
5	5
1	

$\Rightarrow$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$\Rightarrow$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$

EKUK (30, 36) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. Javob: 180.

Yuqoridagi misoldan shunday xulosaga kelish mumkin.

EKUK (m, n) ni topish uchun:

1. m va n sonlar tub ko‘paytuvchilarga ajratiladi.
2. m va n sonlardagi umumiy tub ko‘paytuvchilarning eng katta darajalari va umumiy bo‘lmagan tub ko‘paytuvchilardan ko‘paytma tuziladi.
3. Tuzilgan ko‘paytmaning qiymati topiladi.

Bu qiymat EKUK (m, n) bo‘ladi (m, n — natural sonlar).

Ikkita o‘zaro tub sonning **eng kichik umumiy karralisi** shu sonlarning ko‘paytmasiga teng.

Agar bir son ikkinchisiga bo‘linsa, u holda katta son shu sonlarning eng kichik umumiy karralisi bo‘ladi.

Savollar.

1) Ikki sonning umumiy karralisi nima? Eng kichik umumiy karralisi-chi? U qanday belgilanadi?
2) Ikkita o‘zaro tub sonning EKUK i nimaga teng?
3) Qanday holda ikki sondan biri ular uchun EKUK bo‘ladi?

6-mavzu: Oddiy kasrlar, oddiy kasrlar ustida amallar

Reja:

1. **Kasr asosiy xossasi. Kasrlarni qisqartirish.**
2. **Kasrlarni umumiy maxrajga keltirish**
3. **Kasrlarni taqqoslash**
4. **Kasrlar ustida amallar**
5. **O'zaro teskari sonlar**

Tayanch iboralar va tushunchalar: Oddiy kasrlar, Oddiy kasrlarni qo'shish, ayirish, ko'paytitish, bo'lish.

1. Oddiy kasrlar

KASR ASOSIY XOSSASI. KASRLARNI QISQARTIRISH

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$

Shakllarning bo'yalgan qismlari o'zaro tengmi?

Mos ravishda ularning $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ va $\frac{4}{8}$ qismi bo'yalgan.

Rasmlardan to'g'ri to'rtburchaklarning $\frac{1}{2}$ qismi uning $\frac{2}{4}$ qismiga tengligi ravshan: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Shuningdek, to’g’ri to’rtburchaklarning $\frac{2}{4}$ qismi uning $\frac{4}{8}$ qismiga tengligi ham ko’rinib turibdi: $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$. Demak, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$ va $\frac{4}{8}$ kasrlar **ayni bir sonning turlicha yozilishidir.**

Agar kasrning surat va maxrajini ayni bir natural songa ko’paytirilsa, kasrning qiymati o’zgarmaydi, avvalgisiga teng kasr hosil bo’ladi.

Bu xossa **kasrning asosiy xossasi** deyiladi.

Berilgan ixtiyoriy kasrga teng kasrlarni shu xossa yordamida hosil qilish mumkin.

$\frac{8}{12}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{2}{3}$

$\frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tengliklarni tushuntirishga harakat qiling

$\frac{2}{3}$ kasr uchun kasrning asosiy xossasiga ko’ra $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24}$ tengliklarni yozish mumkin. Bu tengliklarni quyidagicha yozib olaylik:

Demak, $\frac{16}{24}, \frac{8}{16}$ va $\frac{4}{6}$ kasrlarni ularga teng, lekin surat va maxraji kichikroq bo’lgan $\frac{2}{3}$ kasr bilan almashtirish mumkin ekan.

$\frac{16}{24}$ kasrning surat va maxraji umumiy ko'paytuvchi 8 ga ega: $\frac{16}{24} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8}$; shunga o'xshash: $\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4}$; $\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$.

$\frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{2}{3}$ tenglikni hosil qilish uchun $\frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8}$ kasrning surat va maxrajini umumiy ko'paytuvchi 8 ga bo'lish kerak. Buni $\frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8}$ kasrni qisqartirish deyiladi.

Kasrlarni umumiy maxrajga keltirish

$\frac{5}{12}$ va $\frac{7}{12}$ kasrlarning maxrajlari bir xil. Bunday kasrlar umumiy maxrajga ega deyiladi. Ammo $\frac{14}{15}$ va $\frac{11}{12}$ kasrlarning maxrajlari har xil.

Kasrning asosiy xossasidan foydalanib, har xil maxrajli kasrlarni hamma vaqt bir xil maxrajga – umumiy maxrajga keltirish mumkin.

Berilgan kasrlarning umumiy maxraji – har bir kasr maxrajiga bo'linadigan eng kichik son, ya'ni kasrlar maxrajlarining EKUK dir.

Kasrlarni umumiy maxrajga keltirish bu kasrlarni bir xil ulushlarda ifodalashdir.

Misol. $\frac{29}{100}$ va $\frac{4}{25}$ kasrlarni umumiy maxrajga keltirish.

Birinchi kasrning maxraji ikkinchisining maxrajiga bo'linadi: 100 : 25 = 4.

Bunday holda maxrajlarning kattasi umumiy maxraj bo'laveradi. Ikkinchi kasr uchun qo'shimcha ko'paytuvchi maxrajlar bo'linmasi 4 ga teng.

Javob: $\frac{29}{100}, \frac{16}{100}$.

Kasrlarni taqqoslash

1. Bir xil maxraji kasrlarni taqqoslash.

Masala. Uzunligi 5 sm bo'lgan kesma chizing. Uning $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ qismining uzunligi necha santimetr bo'ladi?

Yechish. Berilgan kesmani birlik kesma deb hisoblaymiz. BU kesma 5 ta teng bo'lakka bo'lingan. Har bir bo'lagining uzunligi 1 sm dan. Bo'laklardan 1 tasi 1 sm, 2 tasi 2 sm, 3 tasi 3 sm, 4 tasi 4 sm bo'ladi.

Bir xil maxrajli kasrlardan qaysi birining surati katta bo'lsa, o'sha kasr kattadir.

Bir xil maxrajli kasrlardan qaysi birining surati kichik bo'lsa, o'sha kasr kichikdir.

Bir xil maxrajli kasrlarni taqqoslash uchun ularning suratlarini taqqoslash kifoya.

2. **Turli maxrajli kasrlarni taqqoslash.**

Turli maxrajli kasrlarni taqqoslash uchun uarni umumiy maxrajga keltirish va yuqoridagi qoidadan foydalanish kerak.

Suratlari teng kasrlardan qaysi birining maxraji kichik bo'lsa, o'sha kasr kattadir.

Suratlari teng kasrlardan qaysi birining maxraji katta bo'lsa, o'sha kasr kichikdir.
Suratlari teng kasrlarni taqqoslash uchun ularning maxrajlarini taqqoslash kifoya.

Bir xil maxrajli kasrlarni qo'shish qoidasi

1. Kasrlarning suratlari qo'shiladi.
2. Natija yig'indining suratiga yoziladi.
3. Yigindining maxrajiga kasrlar maxraji o'zgarishsiz o'zi yoziladi.

Umuman, *k*, *m*, *n* natural sonlar uchun $\frac{k}{n}+\frac{m}{n}=\frac{k+m}{n}$.

Misollar:

1. $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{3+4}{10}=\frac{7}{10}$; 2. $\frac{11}{30}+\frac{7}{30}=\frac{11+7}{30}=\frac{18}{30}$;

Surat va maxraji o'zaro teng kasr 1 ga tengdir: $\frac{n}{n}=1$

Misollar:

1. $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$ 2. $\frac{6}{17}+\frac{11}{17}=\frac{6+11}{17}=\frac{17}{17}=1$

Kasr sonlarni qoshishda ham natural sonlardagi kabi o'rin almashtirish va guruhlash qoidalari bajariladi.

Misollar:

1. $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{4}{10}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$; 2. $\frac{200}{2008}+\frac{46}{2008}=\frac{46}{2008}+\frac{200}{2008}=\frac{200+46}{2008}=\frac{246}{2008}$

Bir xil maxrajli kasrlarni ayirish qoidasi

1. Kasrlarning suratlari ayriiladi.
2. Natija ayirmaning suratiga yoziladi.
3. Ayirmaning maxrajiga kasrlar maxraji o'zgarishsiz o'zi yoziladi.

Umuman, k, m, n natural sonlar uchun $\frac{k}{n}-\frac{m}{n}=\frac{k-m}{n}$, bunda $k \geq m$.

Misollar:

O'zaro teng (bir xil) kasrlar

Har xil maxrajli kasrlarni qo'shish va ayirish

1-masala. Sayyoh birinchi kuni yo'lning $\frac{3}{10}$ qismini, ikkinchi kuni esa $\frac{1}{4}$ qismini bosib o'tdi. Sayyoh ikki kunda yo'lning qancha qismini yurdi?

Masalani yechish uchun $\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$ yig'indini topish kerak.

Yechish. Sayyoh ikki kunda yo'lning $\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$ qismini o'tdi. $\frac{3}{10}$ va $\frac{1}{4}$ har xil maxrajli kasrlar. Ularni bir xil maxrajga keltiramiz.

Umumiy maxraj berilgan kasrlar maxrajlarining eng kichik umumiy karralisi – EKUK ekanini eslatib o'tamiz.

$10 = 2 \cdot 5$; $4 = 2 \cdot 2$, u holda, EKUK $(10, 4) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

Demak, $\frac{3}{10}$ va $\frac{1}{4}$ kasrlarningumumiy maxraji 20 ga teng.

10 uchun qo'shimcha ko'paytuvchi $20 : 10 = 2$;

4 uchun qo'shimcha ko'paytuvchi $20 : 4 = 5$.

Shunday qilib, $\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 2}{20}+\frac{1\cdot 5}{20}=\frac{6}{20}+\frac{5}{20}=\frac{6+5}{20}=\frac{11}{20}.$

Javob: sayyoh ikki kunda yo'lning $\frac{11}{20}$ qismini bosib o'tdi.

Har xil maxrajli kasrlarni qo'shish uchun:

1-qadam. Ular bir xil (umumiy) maxrajga keltiriladi.

2-qadam. Bir xil maxrajli kasrlarni qo'shish qoidasidan foydalaniladi.

Aralash sonlarni qo'shish.

M**isol.** Aralash sonlar yig'indisini toping: $2\frac{1}{8}+4\frac{3}{8}.$

Yechish. Bu yig'indisi hisoblashda:

- aralash son = butun qism (natural son) + kasr qism ekanligidan;
- sonlarni qo'shish qonunlaridan foydalaniladi.

$$2\frac{1}{8}+4\frac{3}{8}=\left(2+\frac{1}{8}\right)+\left(4+\frac{3}{8}\right)=(2+4)+\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)=6+\frac{4}{8}=6+\frac{1}{2}=6\frac{1}{2}.$$

Qisqacha bunday yoziladi: $2\frac{1}{8}+4\frac{3}{8}=6\frac{4}{8}=6\frac{1}{2}.$ J a v o b : $6\frac{1}{2}.$

Aralash sonlarni qo'shish uchun :

1-qadam. Ularning butun qismlari qo'shiladi.

2-qadam. Kasr qismlari qo'shiladi.

3-qadam. 1- va 2- qadamda olingan natijalar qo'shiladi.

Aralash sonlarning kasr qismlari qo'shilganda noto'g'ri kasr hosil bo'lsa, u holda bu noto'g'ri kasrdan uning butun qismi ajratiladi va u yig'indining butun qismiga qo'shiladi.

Aralash sonlarning kasr qismlari har xil maxrajli bo'lsa, ularni qo'shish uchun:

1-qadam. Avval kasr qismlari umumiy maxrajga keltiriladi.

2-qadam. Aralash sonlarni qo'shishning yuqorida keltirilgan qoidalaridan foydalaniladi.

Aralash sonlar, ba'zan, quyidagicha ham qo'shiladi:

1-qadam. Avval aralash sonlar noto'g'ri kasrga aylantiriladi.

2-qadam. Hosil bo'lgan noto'g'ri kasrlar qo'shiladi.

3-qadam. Natija aralash songa aylantiriladi.

2. Aralash sonlarni ayirish.

M**isol.** Aralash sonlar yig'indisini toping: $5\frac{4}{7}-2\frac{1}{7}$.

Yechish. Bu yig'indisi hisoblashda:

- aralash son = butun qism (natural son) + kasr qism ekanligidan;
- sonlarni qo'shish qonunlaridan foydalaniladi.

$$5\frac{4}{7}-2\frac{1}{7}=\left(5+\frac{4}{7}\right)-\left(2+\frac{1}{7}\right)=(5-2)+\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{7}\right)=3+\frac{3}{7}=3\frac{3}{7}.$$

Qisqacha bunday yoziladi: $5\frac{4}{7}-2\frac{1}{7}=3\frac{3}{7}$. J a v o b : $3\frac{3}{7}$.

Kasrlarni ko'paytirish

Ikkita kasrning ko'paytmasi kasr bo'ladi. Bu kasrning:

- **surati berilgan kasrlar suratlarining ko'paytmasiga;**
- **maxraji berilgan kasrlar maxrajlarining ko'paytmasiga tengdir.**

$$\frac{k}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{k\cdot p}{n\cdot q}.$$

1-misol. $2\cdot\frac{2}{5}$ ko'paytmani hisoblang.

Yechish. Har qanday natural sonni maxraji 1 ga teng bo'lgan kasr ko'rinishida yozish mumkinligini bilasiz. Masalan, $2=\frac{2}{1};\ 5=\frac{5}{1};\ n=\frac{n}{1}$.

Demak, $2\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 5}=\frac{4}{5}$. Javob: $\frac{4}{5}$.

Natural sonni kasrga ko'paytirish uchun:

1-qadam. Kasr suratini shu natural songa ko'paytirish. $m\cdot\frac{k}{n}=\frac{m\cdot k}{n}$

2-qadam. Maxrajning o'zini o'zgarishsiz qoldirish kerak.

Aralash sonlarni ko'paytirish

Misol. Aralash sonlarni ko'paytiring: $3\frac{1}{4}\cdot 2\frac{2}{5}$.

Yechish. $3\frac{1}{4}\cdot 2\frac{2}{5}=\frac{13}{4}\cdot\frac{12}{5}=\frac{13}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{39}{5}=7\frac{4}{5}$. *Javob:* $7\frac{4}{5}$.

Aralash sonlarni ko'paytirish uchun:

1 - qadam. Ularni noto'g'ri kasrga aylantirish kerak.

2 - qadam. Hosil bo'lgan kasrlarni ko'paytirish kerak.

Aralash sonni kasrga ko'paytirish uchun:

1 - qadam. Aralash sonni noto'g'ri kasrga aylantirish kerak..

2 - qadam. Hosil bo'lgan kasrni berilgan kasrga ko'paytirish kerak.

Aralash sonni natural songa ko'paytirish uchun:

1 - qadam. Aralash sonni noto'g'ri kasrga aylantirish kerak.

2 - qadam. Hosil bo'lgan kasr suratini berilgan natural songa ko'paytirish lozim.

3 - qadam. Maxrajning o'zini o'zgarishsiz qoldirish kerak.

O'zaro teskari sonlar

Ko'paytmasi 1 ga teng bo'lgan ikkita son o'zaro teskari sonlar deyiladi.

1-misol. 1) $\frac{5}{7}$ va $\frac{7}{5}$ sonlar o'zaro teskari sonlardir, chunki ularning ko'paytmasi 1 ga teng:

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}=\frac{5\cdot 7}{7\cdot 5}=1.$$

2) $2\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 1}{2}=1,$ demak, 2 va $\frac{1}{2}$ o'zaro teskari sonlar.

3) $1\cdot\frac{1}{1}=\frac{1\cdot 1}{1}=1,$ ya'ni 1 ga teskari son 1 ning o'zidir.

4) $n\cdot\frac{1}{n}=\frac{n\cdot 1}{n}=1,$ bunda, n – natural son.

Har qanday natral songa teskari son mavjud.

0 ga teskari son yo'q.

$\frac{k}{n}$ kasrga teskari son $\frac{n}{k}$ ga teng, chunki bu kasrlarning ko'paytmasi 1 ga teng:

$$\frac{k}{n}\cdot\frac{n}{k}=\frac{k\cdot n}{n\cdot k}=1$$**, bunda, k va n – natural sonlar.**

Yechish. Izlanayotgan teskari sonni x deb belgilaylik. U holda,

$$\frac{9}{10}\cdot x=1,\ \text{bundan,}\ x=\frac{10}{9}.$$

Javob: $\frac{9}{10}$ kasrga teskari son $\frac{10}{9}$ ga teng.

Oddiy kasrlarni bo'lish

Masala. To'g'ri to'rtburchakning yuzi $\frac{3}{4}$ m^2 ga, eni esa $\frac{5}{8}$ m ga teng. Shu to'g'ri to'rtburchakning bo'yini toping.

Yechish. To'g'ri to'rtburchakning bo'yini x deylik. U holda masala mazmuniga mos ushbu $\frac{5}{8}\cdot x=\frac{3}{4}$ tenglamani tuza olamiz.

Tenglamaning ikkala qismini x oldida turgan $\frac{5}{8}$ kasrga teskari bo'lgan $\frac{8}{5}$ kasrga ko'paytiramiz: $\frac{5}{8}\cdot x\cdot\frac{8}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}$, bundan $x=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}(m)$.

Javob: to'g'ri to'rtburchakning bo'yi $1\frac{1}{5}$ m.

Kasr kasrga bo’lish uchun bo’linuvchini bo’luvchining teskarisiga ko’paytirish kerak:

$$\frac{k}{n}:\frac{p}{q}=\frac{k\cdot q}{n\cdot p}.$$

Agar bo’linuvchi (yoki bo’luvchi) natural son bo’lsa, u holda:

1-qadam. Natural son maxraji 1 bo’lgan kasr shaklida yoziladi.

2-qadam. Kasrlarni bo’lish qoidasidan foydalanish kerak.

Aralash sonlarni bo’lish uchun:

1-qadam.Ularni noto’g’ri kasrga aylantirish kerak..

2-qadam. Kasrlarni bo’lish qoidasidan foydalanish kerak.

7-mavzu: O’nli kasrlar, o’nli kasrlar ustida amallar

Reja:

1. O'nli kasrlarni yozilishi va o'qilishi

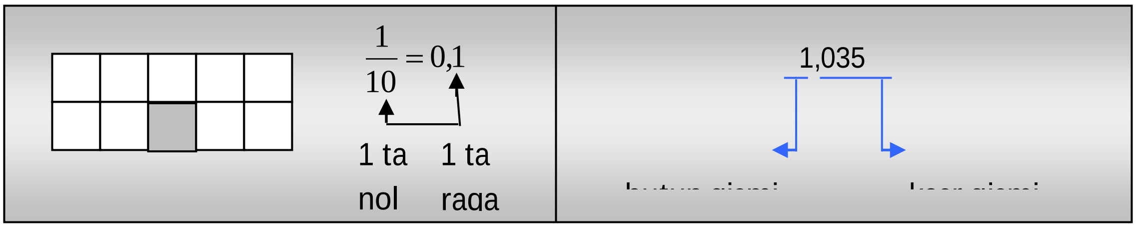
2. O'nli kasrlarni xona birliklari

3. Qo'shish qonunlari

4. O'nli kasrlar ustida amallar

5. Oddiy kasrni o'nli kasrga ayantirish

O'nli kasrlarni yozilishi va o'qilishi



$$10=10^1;\quad 100=10^2;\quad 1000=10^3;\ \ldots..$$

Maxraji 10 ning darajasidan iborat bo’lgan kasr **o’nli kasr** deyiladi.

Maxraji 10 ning darajasidan iborat oddiy kasrlarni o’nli kasr shaklida yozish qoidalari:

1-qoida. To’g’ri kasrning maxrajidagi nollar soni suratidagi raqamlar soniga teng bo’lsa, u holda verguldan o’ng tomanga kasrning surati yoziladi.

$$\frac{7}{10}=0{,}7;\quad \frac{12}{100}=0{,}12;\quad \frac{173}{1000}=0{,}173;$$

2-qoida. To’g’ri kasrning maxrajidagi nollar soni suratidagi raqamlar sonidan ko’p bo’lsa, u holda suratning chap tomoniga nollar yozish bilan suratdagi raqamlar soni maxrajidagi nollar soniga tenglashtiriladi va 1-qoidadan foydalaniladi.

$$\frac{7}{100}=\frac{07}{100}=0{,}07;\quad \frac{12}{1000}=\frac{012}{1000}=0{,}012;$$

3-qoida. Aralash sonning butun qismidan so’ng vergul qo’yiladi, kasr qismini yozishda 1-yoki 2-qoidadan foydalaniladi.

$$7\frac{8}{10}=7{,}8;\quad 3\frac{5}{100}=3\frac{05}{100}=3{,}05;\quad 1\frac{7}{1000}=1\frac{007}{1000}=1{,}007.$$

4-qoida. Noto’g’ri kasrni aralash son kabi yozib olinadi va 3-qoida tadbiq qilinadi:

$$\frac{18}{10}=1\frac{8}{10}=1{,}8; \quad \frac{119}{100}=1\frac{19}{100}=1{,}19; \quad \frac{2004}{1000}=2\frac{4}{1000}=2\frac{004}{1000}=2{,}004$$

O’nli kasrda verguldan keyingi raqamlar soni unga mos oddiy kasr maxrajidagi soniga teng bo’ladi.

O'nli kasrlarni xona birliklari

O’nli kasrda verguldan keyingi birinchi xona **o’ndan birlar** xonasi deyiladi.

Masalan: 3,7 soni 3 ta bir va 7 ta o’ndan birlardan tashkil topgan.

O’nli kasrda verguldan keyingi ikkinchi xona **yuzdan birlar** xonasi, uchinchi xona **mingdan birlar** xonasi deyiladi va hakazo.

Bu xonalardagi raqamlar, mos ravishda, o’ndan bir, yuzdan bir, mingdan bir ulushlar sonini bildiradi.

1-misol. 3,745 o’nli kasrda o’ndab birlar xonasida 7, yuzdan bir xonasida 4, mingdan bir xonasida 5 turibdi. Bu 3,745 o’nli kasrda yettita o’ndan bir ulush, 4 ta yuzdan bir ulush, 5 ta mingdan bir ulush borligini bildiradi, ya’ni

$$3{,}745=3\frac{745}{1000}=3+\frac{700+40+5}{1000}=3+\frac{700}{1000}+\frac{40}{1000}+\frac{5}{1000}=3+\frac{7}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}$$

2-misol. $2{,}71=2+\frac{71}{100}=2+\frac{70+1}{100}=2+\frac{70}{100}+\frac{1}{100}=2+\frac{7}{10}+\frac{1}{100}.$

Bunday yozuv o’nli kasrni xona birliklari bo’yicha yoyilmasi deyiladi. O’nli kasrning kasr qismidagi har bir xonaning martabasi o’zidan bevosita keyin keladigan xona martabasidan 10 marta katta bo’ladi.

O'nli kasrlarni taqqoslash

Ikkita o’nli kasrdan qaysi birining butun qismi katta bo’lsa, o’sha kasr kattadir.

1-misol. 5,7 va 4,9 o’nli kasrlarni taqqoslang. ***Yechish.*** 5>4 va, demak, 5,7>4,9.

Butun qismlari o’zaro teng bo’lgan ikkita o’nli kasrdan qaysi birining o’ndan birlar xonasidagi raqami katta bo’lsa, o’sha kasr kattadir.

Butun qismlari, o’ndan bir ulushlari ham teng ikkita o’nli kasrdan qaysi birining yuzdan birlar xonasidagi raqami katta bo’lsa, o’sha kasr kattadir.

2-misol. 0,8=0,80=0,800=…,chunki 0,8=$\frac{8}{10}=\frac{80}{100}=\frac{800}{1000}=\ldots$.

O'nli kasrning kasr qismi oxiriga nollar yozib qo'yilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, avvalgisiga teng kasr hosil bo'laveradi.

3-misol. 4,7300=4,73, chunki 4,7300=$4\frac{7300}{10000}=4\frac{73}{100}=4{,}73.$

O'nli kasrning kasr qismi oxirida nollar bo'lsa, ularni tashlab yuborish mumkin, bu bilan kasrning qiymati o'zgarmaydi.

4-misol.9=9,0=9,00=9,000=…,chunki 9=$9\frac{0}{10}=9\frac{0}{100}=\ldots$.

Har qanday natural sonni unga teng bo'lgan o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin.

O'NLI KASRLARNI QO'SHISH

1-misol. 2,65 va 6,32 o'nli kasrlar yig'indisini toping.

Yechish: 2,65+6,32=$2\frac{65}{100}+6\frac{32}{100}=8\frac{65+32}{100}=8\frac{97}{100}=8{,}97$

$$\begin{array}{r} 2{,}65 \\ +\,6{,}32 \\ \hline 8{,}97 \end{array}$$

Tushuntirish: 1) yuzdan 5+yuzdan 2=yuzdan 7

2) O'ndan 6+o'ndan 3=o'ndan 9;

Yig'indining o'ndan birlar xonasiga 9 ni yozamiz. Sonlarning kasr qismlarini qo'shib bo'ldik. Yig'indida 9 ning oldiga vergul (,) qo'yamiz, vergul qo'shiluvchilardagi vergullar tagiga mos kelishi kerak.

Endi kasrlarning butun qismlarini qo'shamiz.

1) 2 birlik +6 birlik=8 birlik. Birlar xonasiga sakkizni yozamiz va javobni olamiz: 8,97

Demak, o'nli kasrlarni "ustun" usulida qo'shish amali natural sonlarni "ustun" usulida qo'shish kabi bajariladi.

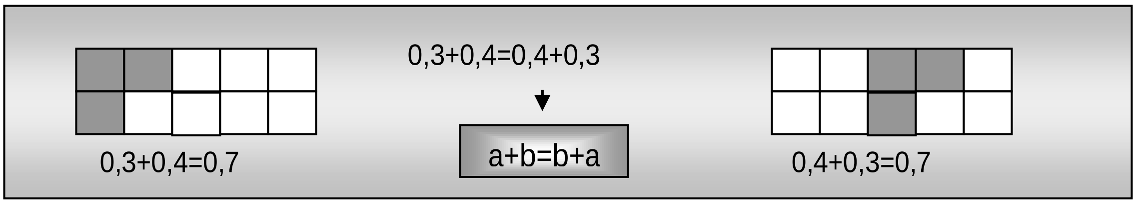
2-misol. Yig'indini hisoblang.

$$\begin{array}{r} 25{,}120 \\ +\,47{,}238 \\ \hline 72{,}358 \end{array}$$

20,08+25=20+0,08+25=(20+25)+0,08=45+0,08=45,08

O'nli kasrga natural sonni qo'shish uchun o'nli kasrning butun qismiga shu sonni qo'shish kerak, kasr qismi esa o'zgarishsiz yoziladi.

QO’SHISH QONUNLARI



1. Qo’shishning o’rin almashtirish qonuni.

O’nli kasrlarni qo’shishda qo’shiluvchilarning o’rni almashgani bilan yig’indi o’zgarmaydi.

2. Qo’shishning guruhlash qonuni.

Qo’shishning guruhlash qonuni natural sonlar va oddiy kasrlarda bo’lgani kabi o’nli kasrlar uchun ham o’rinlidir.

1-misol. Yig’indini hisoblang: 4,46+2,7+5,54.

Yechish. **1-usul.** 4,46+2,7+5,54=(4,46+5,54)+2,7=10+2,7=12,7;

2-usul. 4,46+2,7+5,54=(4,46+2,7)+5,54=7,16+5,54=12,7;

3-usul. 4,46+2,7+5,54=4,46+(2,7+5,54)=4,46+8,24=12,7.

Demak, (4,46+5,54)+2,7=(4,46+2,7)+5,54=4,46+(2,7+5,54)=12,7.

Ixtiyoriy a, b va c o’nli kasrlar uchun qo’shishning guruhlash qonuni

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b}$$

kabi yoziladi.

Qo’shishning guruhlash qonuni bir necha qo’shiluvchilar yig’indisini hisoblashda ularning o’rinlarini ixtiyoriy tarzda almashtirish, qavslarga olish, qavslarni tashlab yozishga imkon beradi.

O’NLI KASRLARNI AYIRISH

Misol. Ayirmani toping:

12,47-2,26:12,47-2,26=$12\frac{47}{100}$-$2\frac{26}{100}=10\frac{47-26}{100}=10\frac{21}{100}=10{,}21$

O’nli kasrlarni ayirishni, natural sonlardagi kabi, ”ustun” usulida ham bajarish mumkin:

Tushuntirish: 1) yuzdan 7-yuzdan 6=yuzdan 1; 1 ni ayirmaning yuzdan birlar xonasiga yozamiz;

2) o’ndan 4-o’ndan 2=o’ndan 2; 2 raqamini ayirmaning o’ndan birlar xonasiga yozamiz. Sonlarning kasr qismini ayirib bordik;

3) vergullar tagiga – ayirmaning o’ndan birlar xonasi oldiga – vergul qo’yamiz;

4) kasrlarning butun qismlarini ayiramiz:

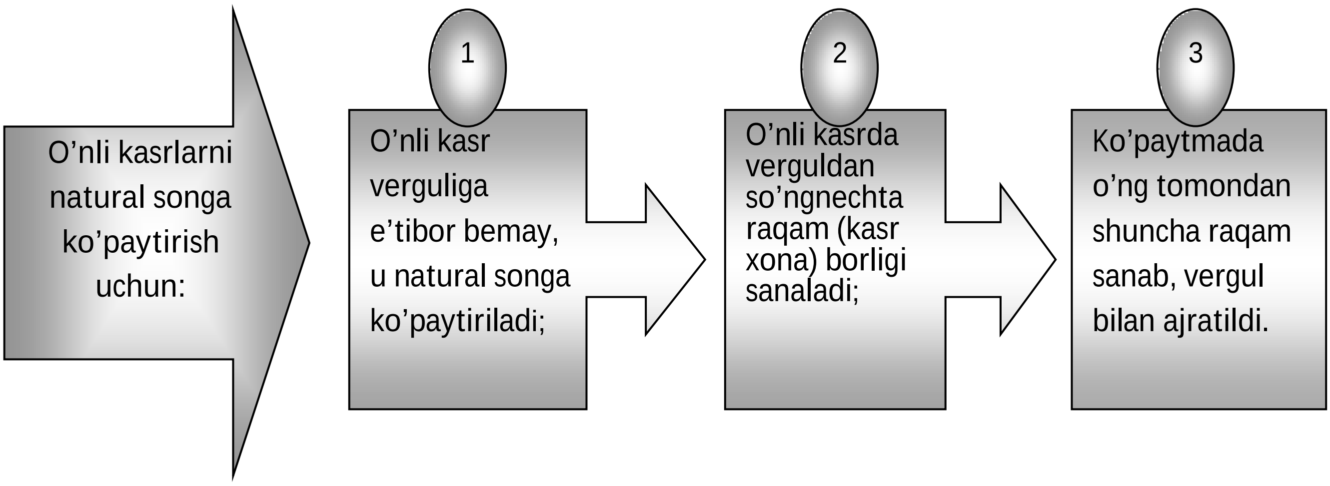
2 birlik-2 birlik=0 birlik, ayirmaning birlar xonasiga 0 raqamini yozamiz;

5) 1 o’nlik-0 o’nlik, ayirmaning o’nlar xonasiga 1 raqamini yozamiz va ayirmada 10,21 sonni olamiz.

a-b=c
ayirish amali to’g’ri bajarilganligini tekshirish usullari

Ayiriluvchi+ayirma=kamayuvchi **b+c=a**	**Kamayuvchi-ayirma=ayiriluvchi** **a-c=b**

O’NLI KASRLARNI NATURAL SONGA KO’PAYTIRISH



O’NLI KASRLARNI 10 ga, 100 ga, 1000 ga, ...

KO’PAYTIRISH VA BO’LISH

1. O’nli kasrlarni 10 ga, 100 ga, 1000 ga, ... ko’paytirish.

O’nli kasrlarni 10 ga, 100 g a, 1000 ga, ... ko’paytirish uchun: **1-qadam:** ko’paytuvchi: 10,100, 1000, ... dagi nollar soni sanaladi. **2-qadam:** o’nli kasrdagi vergul nollar soni nechta bo’lsa, shuncha xona o’ngga suriladi.
Agar o’nli kasrda verguldan keyingi raqamlar soni ko’paytuvchidagi nollar sonidan kam bo’lsa, u holda o’nli kasrni 10 ga, 100 ga, 1000 ga, ... ko’paytirish uchun: **1-qadam:** o’nli kasrda verguldan keyingi raqamlar soni ko’paytuvchidagi nollar sonidan nechta kamligi hisoblanadi. **2-qadam:** berilgan o’nli kasrni vergulsiz yozib, uning davomidan o’shancha nol yozib qo’yiladi.

2. O’nli kasrlarni 10 ga, 100 ga, 1000 ga, ... bo’lish.

O’nli kasrni 10 ga, 100 ga, 1000 ga, ... bo’lish uchun:
1-qadam: bo’luvchi (10,100,1000,...)dagi nollar soni sanaladi.
2-qadam: o’nli kasrdagi vergul bo’luvchidagi nollar soni nechta bo’lsa, shuncha xona chapga suriladi.

Sonni 0,1 ga (0,01 ga; 0,001 ga; ...) ko’paytirish uni 10 ga bo’lish demaktir.

Sonni 0,1 ga (0,01 ga; 0,001 ga; ...) bo’lish uni 10 ga (100 ga; 1000 ga; …) ko’paytirish demaktir.

O’NLI KASRNI O’NLI KASRGA KO’PAYTIRISH

O’nli kasrni o’nli kasrga ko’paytirish qoidasi:
1-qadam: vergulga e’tibor bermay, ularni natural sonlar kabi ko’paytirish.
2-qadam: ko’paytuvchilarda birgalikda verguldan keyin nechta raqam (kasr qismidagi raqamlar soni) borligini sanash.
3-qadam: ko’paytmada o’ngdan chapga shuncha raqamni sanab, so’ngra vergul qo’yish kerak.

Mavzu: O’NLI KASRLARNI KO’PAYTIRISH QONUNLARI

Ko’pytuvchilarning o’rni almashgani bilan ko’paytma o’zgarmaydi.

$$a\cdot b=b\cdot a$$

Birinchi va ikkinchi o’nli kasrlar ko’paytmasini uchinchi o’nli kasrga ko’paytirish natijasi bilan birinchi o’nli kasrni ikkinchi va uchinchi o’nli kasrlar ko’paytmasiga ko’paytirish natijasi o’zaro tengdir.

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=b\cdot(a\cdot c)$$

$$(a+b)\cdot c=ac+bc$$

$(a-b)\cdot c=ac-bc$, bunda $a>b$ yoki $a=b$.

$$ac+bc=(a+b)\cdot c,$$
$$ac-bc=(a-b)\cdot c.$$

O’NLI KASRLARNI NATURAL SONGA BO’LISH

O’nli kasrni natural songa bo’lish natural sonlarni bo’lish kabi bajariladi. O’nli kasrning butun qismini bo’lish tugagich, bo’linmaning butun qismidan keyin vergul qo’yiladi. Qoldiqlar o’ndan bir, yuzdan bir, … ulushlarga maydalanib, ularga berilgan o’nli kasrning o’ndan bir, yuzdan bir, .. ulushlari qo’shiladi va bo’lish jarayoni natural sonlari bo’lish kabi davom ettiriladi.

O’nli kasrning butun qismi bo’luvchidan kichik bo’lsa:

1) **bo’linmada 0 butun yoziladi;**
2) **undan keyin vergul qo’yiladi;**
3) **so’ngra bo’lish natural sonlarni bo’lish kabi davom ettiriladi.**

O’NLI KASRLARNI O’NLI KASRGA BO’LISH

O’nli kasrni o’nli kasrga bo’lish uchun:

1-qadam: bo’luvchidagi vergulni natural son hosil bo’lgunch o’ngga surish.

2-qadam: buning natijasida bo’luvchi necha marta ortganini aniqlash.

3-qadam: bo’luvchini ham undagi vergulni o’ngga surish bilan shuncha marta orttirish.

4-qadam: so’ngra bo’lishni o’nli kasrni natural songa bo’lish kabi bajarish kerak.

O’nli kasrni 0,1 ga; 0,01 ga; … bo’lish uchun uni 10 ga, 100 ga, 1000 ga, … ko’paytirish kerak.

Sonni 0,5 ga; 0,25 ga; 0,125 ga ko’paytirish uchun sonni 2 ga; 4 ga; 8 ga bo’lish kerak.

O’nli kasrlarni yaxlitlash

1-qoida. Agar tashlab yuboriladigan raqam 5 dan kichik bo’lsa, undan chapda turgan raqamlar saqlanadi, ya’ni o’zgarishsiz qoldiriladi.

2-qoida. Agar tashlanadigan raqam 5 ga teng yoki 5 dan katta bo’lsa, undan chapga turgan saqlanadigan xonadagi raqamga 1 qo’shiladi.

ODDIY KASRNI O’NLI KASRGA AYLANTIRISH.

DAVRIY KASR HAQIDA TUSHUNCHA

Oddiy kasrni o’nli kasrga aylantirish:

1-qadam. ***Oddiy kasrning maxraji faqat 2 larning (yoki faqat 5 larning) ko’paytmasidan iborat bo’lsa, 2 (yoki 5) necha marta taktorlansa,kasrning surat va maxrajini shuncha dona 5 ga (yoki 2 ga) ko’paytiramiz, ya’ni maxrajda 10 ning darajasini hosil qilamiz.***

2-qadam. ***Oddiy kasrning maxraji bir necha 2 va 5 larga ajralsa, ularning sonini tenglab, 10 ning darajasi bo’lishiga erishamiz. Kasrning qiymati o’zgarmasligi uchun suratni ham maxraj nechaga ko’paytirilsa, o’sha songa ko’paytiramiz.***

Davriy o’nli kasr haqida tushuncha

Bir yoki bir necha raqami ma’lum bir tartibda takrorlanadigan cheksiz o’nli kasr *davriy o’nli kasr* deyiladi.

Taktorlanadigan raqamlar guruhi kasrning *davri* deyiladi va u qaqvsga olib yoziladi.

Agar davriy kasrning davri verguldan keyin darhol boshlansa, u *sof davriy kasr* deyiladi.

Agar davriy kasrga vergul bilan davr orasida bitta yoki bir nechta raqam bo’lsa, bunday kasr *aralash davriy kasr* deyiladi.

Mavzu bo'yicha savollar

1) O’nli kasrda qaysi xona birliklari orasida vergul qo’yiladi?

2) O’nli kasrning kasr qismidagi xona birliklarinomini ayting.

II modul Algebra.

8-mavzu: Algebrada ayniy shakl almashtirishlar, qisqa ko'paytirish formulalari

Reja:

1. Sonli ifodalar. Algebraik ifodalar

2. Algebraik amallarning xossalari

3. Birhad va ko'phadlar.

4. Qisqa ko'paytirish formulalari

Tayanch iboralar va tushunchalar: Sonli ifodalar, algebraik ifodalar, arifmetik amallarning xossalari, birhad, ko'phad, qisqa ko'pytirish formulalari.

Sonli ifodalar

Algebra so'zi buyuk o'zbek matematigi va astronomi, vatandoshimiz Abu abdulloh Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning "Kitob al-muxtasar fi hisob al-jabr val-muqobala" ("Al-jabr val-muqobala") asaridagi *al-jabr* (lotinchasiga algebra) so'zidan olingan. Bu asarda al-Xorazmiy dunyoda birinchi marta algebra fanini izchillik bilan bayon qilgan.

Sonli ifodaning qiymati deb, shu sonli ifodada ko'rsatilgan amallarni bajarish natijasida hosil bo'lgan sonni aytiladi.

Sonli ifoda bitta sondan iborat bo'lishi ham mumkin. Uning qiymati shu sonning o'zi bo'ladi.

"=" belgisi bilan birlashtirilgan ikkita sonli ifoda sonli tenglikni tashkil qiladi.

Agar tenglikning chap va o'ng qismlarining qiymatlari bir xil son bo'lsa, u holda tenglik to'g'ri tenglik deyiladi.

Sonli ifodaning son qiymatini topishda amallar bajarilishining quyidagi tartibi qabul qilingan:

1) Agar ifodada qavslar bo'lmasa, u holda avval uchinchi bosqich amallar, keyin ikkinchi bosqich amallar va nihoyat, birinchi bosqich amallar

bajariladi, shu bilan birga, bir xil bosqich amallar ular qanday tartibda yozilgan bo'lsa, xuddi shu tartibda bajariladi.

2) Agar ifodada qavslar bo'lsa, u holda avval qavslar ichidagi sonlar ustida barcha amallar, so'ngra esa qolgan barcha amallar bajariladi, bunda qavs ichidagi va undan tashqaridagi barcha amallar 1-bandda ko'rsatilgan tartibda bajariladi.

3) Agar kasrning iymati hisoblanadigan bo'lsa, u holda kasrning suratidagi va maxrajidagi amallar bajariladi, so'ngra birinchi natija ikkinchisiga bo'linadi.

4) Agar ifodada qavslar ichida boshqa qavslar bo'lsa, u holda avval eng ichkaridagi qavslar ichidagi amallar bajariladi.

Algebraik ifodalar

Algebraik ifoda sonlar va harflardan tuzilib, amallar belgilari bilan birashtirilgan ifodadir.

Agar algebraik ifodaga kirgan harflar o'rniga biror sonni qo'yilsa va ko'rsatilgan amallar bajarilsa, u holda natijada hosil qilingan sonni berilgan algebraik ifodaning son qiymati deyiladi.

Masala. $\frac{(3a+7)b}{a-b}$ ifodaning qiymatini $a=10,\ b=5$ bo'lganda toping.

Algebraik tengliklar, formulalar

Harflar bilan arifmetik amallar qonunlari va xossalarini yozish ham qulaydir. Masalan:

$$a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c,$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,$$
$$(a+b):c=a:c+b:c.$$

Agar a juft son bo'lsa, u holda bu son 2 ga bo'linadi va uni bunday yozish mumkin:

$$a=2n,$$

bu yerda n – natural son.

Agar b toq son bo'lsa, u holda uni 2 ga bo'lgandagi qoldiq 1 ga teng, binobarin, b sonni bunday yozish mumkin:

$$b = 2n + 1,$$

bu yerda n – natural son yoki nol.

Ba'zan, toq natural sonlar formulasini quyidagicha ham yozishadi:

$$b = 2k - 1,$$

bu yerda k – natural son.

Arifmetik amallarning xossalari

Algebrni puxta o'rganish uchun arifmetik amallarning xossalarini yaxshi bilish lozim. Eslatib o'taylik, arifmetik amallar deb qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallarini aytiladi. Sonlar ustidagi bu amallarning xossalarini qisqacha formulalar ko'rinishida yozamiz. Amallarning asosiy xossalari odatda *qonunlar* deb ataladi. Qonunlardan foydalanib, amallarning boshqa xossalarini ham asoslash mumkin.

1. Qo'shish va ko'paytirish

Qo'shish va ko'paytirishning asosiy qonunlarini sanab o'tamiz:

1. O'rin almashtirish qonuni:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba$$

2. Guruhlash qonuni:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$

3. Taqsimot qonuni:

$$a(b + c) = ab + ac$$

2. Ayirish

Ayirishni qarama qarshi sonni qo'shish bilan almashtirish mumkin:

$$\boxed{a-b=a+(-b).}$$

Shunday qilib, amallarning xossalaridan foydalanish algebraik ifodani avval soddalashtirib, so'ngra uning qiymatini oson yo'l bilan hisoblash imkonini beradi.

3. Bo'lish.

Bo'lish bo'luvchiga teskari bo'lgan songa ko'paytirish bilan almashtirilishi mumkin: $\boxed{\dfrac{a}{b}=a\cdot\dfrac{1}{b}.}$ $\boxed{\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}.}$

Qavslarni ochish qoidalari

Agar algebraik ifodaga qavs ishiga olingan algebraik yig'indi qo'shiladigan bo'lsa, u holda shu algebraik yig'indidagi har bir qo'shiluvchining ishorasini saqlagan holda qavslarni tushirib qoldirish mumkin.

$$\boxed{\begin{gathered}-(-a)=a,\ -(a+b)=-a-b,\\ a-(b+c)=a-b-c,\\ a-(b-c)=a-b+c.\end{gathered}}$$

Bu tengliklardan *qavslarni ochishning* quyidagi *ikkinchi qoidasi* kelib chiqadi:

Agar algebraik ifodadan qavs ichiga olingan algebraik yig'indi ayirilsa, u holda shu algebraik yig'indidagi har bir qo'shiluvchining ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartirib, qavslarni tushirib qoldirish mumkin.

2) $\boxed{a+b-c+d=a+(b-c+d).}$

$$a-b-c+d=a-(b+c-d).$$

Bu yerda qavs oldiga “+” belgisi qo’yilgan, shuning uchun qavs ichidagi barcha qo’shiluvchilarning ishoralari saqlanib qoladi.

Bu yerda qavs oldiga “–” belgisi qo’yilgan, shuning uchun qavs ichiga olingan barcha qo’shiluvchilarning ishoralari qarama-qarshisiga o’zgartiriladi.

Natural ko’rsatkichli daraja

$$5 \cdot 5 = 5^2, \quad 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3.$$

Xuddi shu kabi, ko’paytuvchilari bir xil sonlardan iborat ko’paytmani yangi amal – *darajaga ko’tarish* amali bilan almashtirish mumkin:

$$\underbrace{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}_{5\,marta}=3^5, \qquad \underbrace{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{7}}_{9\,marta}=\left(\frac{1}{7}\right)^9,$$

$$0{,}4=(0{,}4)^1.$$

a sonning n natural ko’rsatkichli darajasi deb, har biri a ga teng bo’lgan n ta ko’paytuvchining ko’paytmasiga aytiladi.

a sonni (takrorlanuvchi ko’paytuvchini) darajaning asosi, n sonni (ko’paytuvchi necha marta takrorlanishini ko’rsatuvchi sonni daraja ko’rsatkichik deyiladi.)

10 dan katta bo’lgan har bir sonni $a \cdot 10^n$ shaklida yozish mumkin, bunda $1 \le a < 10$ va n – natural son. Bunday yozuv sonning standrt shakli deyiladi.

Natural ko’rsatkichli darajaning xossalari

Darajaga ko’tarish bir nechta muhim xossalarga ega.

1-xossa.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Bir xil asosli darajalarni ko’paytirishda asos o’zgarmasdan qoladi, daraja ko’rsatkichlari esa qo’shiladi.

2-xossa.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \; m>n, \; a \ne 0.$$

Bir xil asosli darajalarni bo'lishda asos o'zgarmasdan qoladi, daraja ko'rsatkichlari esa ayriladi.

3-xossa.

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}.$$

Darajani darajaga ko'tarishda asos o'zgarmasdan qoladi, daraja ko'rsatkichlar esa o'zaro ko'paytiriladi.

4-xossa.

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Ko'paytmani darajaga ko'tarishda har bir ko'paytuvchi shu darajaga ko'tariladi.

5-xossa.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};\ b \neq 0.$$

Kasrni darajaga ko'tarishda uning surat va maxraji xuddi shu darajaga ko'tariladi.

Birhad va uning standart shakli

Raqamlar bilan yozilgan ko'paytuvchilar sonli ko'paytuvchilar, harflar bilan belgilangan ko'paytuvchilar esa harfiy ko'paytuvchilar deyiladi. Sonli va harfiy ko'paytuvchilar ko'paytmasidan iborat algebraic ifoda birhad deyiladi

Umuman, birinchi, o'rinda turgan faqat bitta son ko'paytuvchidan va har xil asosli harfiy darajalardan tuzilgan birhadni standart shakldagi birhad deyiladi.

Har qanday birhadni standart shaklda yozish mumkin. Buning uchun barcha son ko'paytuvchilarni o'zaro ko'paytirish va ularning ko'paytmasini birinchi o'ringa yozish kerak. So'ngra bir xil harfiy ko'paytuvchilar ko'paytmasini daraja shaklida yozish kerak. Harfiy ko'paytuvchilar ko'pincha, shart bo'lmasa ham, alifbo tartibida joylashtiriladi.

Birhadning standart shaklida bir xil harflar yo'qligini eslatib o'tamiz.

Standart shaklda yozilgan birhadning son ko'paytuvchisini shu birhadning koeffitsiyenti deyiladi.

Birhadlarni ko'paytirish

Quyidagi masalani yechaylik.

Masala. To'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi V = *abc* formula bo'yicha hisoblanadi, bu yerda *a* – parallelepipedning bo'yi, *b* – eni va va *c* – balandligi. Agar shu parallelepipedning bo'yini 5 marta, enini 2*n* marta, balandligini 3*n* marta uzaytirilsa, yangi parallelepipedning hajmi qanday bo'ladi?

Yangi parallelepipedning o'lchamlarini topamiz: bo'yi 5*a*, eni 2*nb*, balandligi 3*ns*. Bu holda uning hajmi

$$V_1 = (5a)\cdot(2nb)\cdot(3ns)$$

bo'ladi.

Ko'phadlar

Bir nechta birhadning algebraik yig'indisi ko'phad deyiladi.

Ko'phadni tashkil qiluvchi birhadlar shu ko'phadning hadlari deyiladi.

Masalan, $5nm^2 - 3m^2k - 7nk^2 + 4nm$ ko'phadning hadlari $5nm^2$, $-3m^2k,\ -7nk^2,\ 4nm$ bo'ladi.

Ikkita haddan tuzilgan ko'phad *ikkihad* deyiladi, uchta haddan tuzilgan ko'phad *uchhad* deyiladi va hakozo.

Ikkihadga misollar: $a^2 - b^2$, $5ab + 4c$.

Uchhadga misollar: $a + 2b - 3c$, $\frac{1}{2} - bc + 3ab$.

Birhadni ham ko'phad deb hisoblaymiz.

Agar ko'phadning ba'zi hadlari standart shaklda yozilmagan bo'lsa, u holda shu ko'phadning barcha hadlarini standart shaklda yozib, uni soddalashtirish mumkin.

Masalan. $2a4b-5abac+9bc\frac{1}{3}c$ ko'phadni soddalashtiring.

Berilgan ko'phadning barcha hadlarini standart shaklda yozamiz:

$$2a4b=8ab;\ -5abac=-5a^2bc;\ 9bc\frac{1}{3}c=3bc^2.$$

Demak, $2a4b-5abac+9bc\frac{1}{3}c=8ab-5a^2bc+3bc^2$.

O'xshash hadlarni ixchamlash

Ushbu masalani yechaylik.

1-masala. Har bir sahifasida bir xil sondagi harflar bo'lgan ikkita kitob bor; bir sahifada n ta satr joylasgan va har bir satr m ta harf bor. Birinchi kitob 300 sahifalik, ikkinchisi 500 sahifalik. Ikkala kitobda hammasi bo'lib nechta harf bor?

1 – usul. Har bir sahifadagi harflar soni mn ta. Birinchi kitobda 300 nm ta harf, ikkinchisida 500 nm ta harf, ikkalasida esa

$$300nm + 500nm = 800nm$$

ta harf bor.

2 – usul. Har bir sahifadagi harfla soni mn ga teng. Ikkala kitobdagi sahifalar soni 300 + 500 = 800 ga, ulardagi harflar soni $800nm$ ga teng.

Ikkala javob ham to'g'riligi ko'rinib turibdi, shuning uchun

$$300nm + 500nm = 800nm.$$

Ko’phadlarni o’xshash birhadlar algebraic yig’indisi bitta birhad bilan almashtiriladigan bunday soddalashtirish o’xshash hadlarni ixchamlash deyiladi.

6ab + bc + 4ac ko’phadda har bir had standart shaklda yozilgan va ular orasida o’xshash hadlar yo’q. Ko’phadning bunday shakli standart shakl deyiladi.

Har qanday ko’phadni standart shaklda yozish mumkin. Buning uchun avval ko’phadning har bir hadini standart shaklda yozish va so’ngra o’xshash hadlarni ixchamlash kerak.

Ko’phadlarni qo’shish va ayirish

Bir nechta ko’phadning algebraik yig’indisini standart shakldagi ko’phad ko’rinishida yozish uchun qavslarni ochish va o’xshash hadlarni ixchamlash kerak.

Ba’zi ko’phadlarning yig’indisi yoki ayirmasini sonlarni qo’shish va ayirishga o’xshash «ustun» usulida topish qulay bo’ladi. Bunda o’xshash hadlar birining ostiga ikkinchisi turadigan qilib yoziladi, masalan,

$$+\begin{array}{r} 5a-4bc+3ac \\ 3bc-7ac \\ \hline 5a-bc-4ac \end{array}$$

Ko’phadni birhadga ko’paytirish

Ko’phadni birhadga ko’paytirish uchun ko’phadning har bir hadini shu birhadga ko’paytirish va hosil bo’lgan ko’paytmalarni qo’shish kerak.

Ko’phadni birhadga ko’paytirish natijasida yana ko’phad hosil bo’ladi. Hosil bo’lgan ko’phadni uning barcha hadlarini standart shaklda yozib, soddalashtirish kerak. Oraliqdagi natijalarni yozmasdan, birhadlarni og’zaki ko’paytirib, birdaniga javob yozish ham mumkin, masalan,

$$\left(-3ab+2a^2-4b^2\right)\left(-\frac{1}{2}ab\right)=\frac{3}{2}a^2b^2-a^3b+2ab^3.$$

Birhadni ko'phadga ko'paytirish ham shunga o'xshash bajariladi, chunki ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirish bilan ko'paytma o'zgarmaydi, masalan,

$$4pq\left(3p^2-q+2\right)=12p^3q-4pq^2+8pq.$$

Ko'phadni ko'phadga ko'paytirish

Masala. O'lchamlari 10 rasmda ko'rsatilgan shkaflar bilan band devor sirtining yuzini toping.

Shkaflar bilan band bo'lgan devorning sirti tomonlari

$$2a+c+2a=4a+c \ va \ a+b+a=2a+b$$

bo'lgan to'g'ri to'rtburchakdan iborat. Bu to'g'ri to'rtburchakning yuzi $S=(4a+c)(2a+b)$ ga teng.

Ko'phadni ko'phadga ko'paytirish uchun birinchi ko'phadning har bir hadini ikkinchi ko'phadning har bir hadiga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish kerak.

Birhad va ko'phadni birhadga bo'lish

Ko'phadni birhadga bo'lish

Masala. $2a^2b+4ab^2+8abc$ ko'phadni $2ab$ birhadga bo'ling.

Ushbu qoidadan foydalanamiz: *yig'indini songa bo'lishda har bir qo'shiluvchini shu songa bo'lish kerak,* ya'ni

$$\left(2a^2b+4ab^2+8abc\right):(2ab)=\left(2a^2b\right):(2ab)+$$
$$+\left(4ab^2\right):(2ab)+(8abc):(2ab)=a:2b+4c$$

Ko’phadni birhadga boshqa hollarda ham xuddi shunday bo’linadi, masalan,

$$\left(9a^3b^2 - 3a^2b^3 + a^2b^2\right):\left(3a^2b^2\right) =$$
$$= \left(9a^3b^2\right):\left(3a^2b^2\right) + \left(-3a^2b^3\right):\left(3a^2b^2\right) + \left(a^2b^2\right):\left(3a^2b^2\right) = 3a - b + \frac{1}{3}.$$

Ko’phadni birhadga bo’lish uchun ko’phadning har bir hadini shu birhadga bo’lish va hosil bo’lgan natijalarni qo’shish kerak.

Umumiy ko’paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish

Ko’phadni ikkita yoki bir nechta ko’phadlar ko’paytmasi shaklida ifodalash ko’phadni ko’paytuvchilarga ajratish (yoyish) deyiladi.

1-masala. ab + ac – ad ifodaning a = 43, b = 26, c = 17, d = 23 bo’lganda son qiymatini toping.

Hisoblashlarni quyidagicha olib boramiz:

43 · 26 + 43 · 17 - 43 · 23 = 43 · (26 + 17 - 23) = 43 · 20 = 860.

Agar ko’phadning barcha (son yoki harfiy) hadlari umumiy ko’paytuvchiga ega bo’lsa, u holda shu ko’paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish mumkin.

Qavs ichida berilgan ko’phadni shu umumiy ko’paytuvchiga bo’lish natijasida hosil qilingan ko’phad qoladi.

Shunday qilib, ***ko’phadni umumiy ko’paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish yo’li bilan ko’paytuvchilarga ajratish uchun:***

1) shu umumiy ko’paytuvchini topish;

2) uni qavsdan tashqariga chiqarish kerak.

Guruhlash usuli

Guruhlash usuli hamma hadlari uchun umumiy ko’paytuvchi mavjud bo’lmagan ko’phadlarga qo’llaniladi.

Ba’zan, berilgan ko’phadning bir necha hadlarini qavs ichiga olib, umumiy ko’paytuvchini aniqlash mumkin. Ko’phadni guruhlash usuli qo’shish va ko’paytirishning guruhlash, o’rin almashtirish va taqsimot qonunlariga asoslangan.

Misollar qaraymiz:

1) $a(b+c)+b+c=a(b+c)+(b+c)=(b+c)(a+1)$;

2) $a(b-c)-b+c=a(b-c)-(b-c)=(b-c)(a-1)$.

Birinchi misolda ko’phadning oxirgi ikkita hadini «+» ishorasi bilan, ikkinchi misolda ko’phadning oxirgi ikkita hadini «-» ishorasi bilan qavs ichiga olish yetarli bo’ldi.

3) $m(3x-y)+3nx-ny=m(3x-y)+(3nx-ny)=$

$=m(3x-y)+n(3x-y)=(3x-y)(m+n)$;

4) $-mx^2-my^2+n(x^2+y^2)=(-mx^2-my^2)+n(x^2+y^2)=$

$=-m(x^2+y^2)+n(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(n-m)$

Uchinchi va to’rtinchi misollarda ko’phadni9ng ikkita hadini qavs ichiga olishdan tashqari hosil qilingan har bir guruhda umumiy ko’paytuvchi qavsdan tashqariga: birinchi holda «+» ishorasi bilan, ikkinchisida esa «-» ishorasi bilan chiqarildi.

Ba’zan ko’phad hadlarini turli usullar bilan guruhlash mumkin. Masalan, $2am + 2an - 3bm - 3bn$ ko’phadni ko’paytuvchilarga ikki usul bilan ajratish mumkin:

I usul	II usul
$2am+2an-3bm-3bn=$ $=(2am+2an)-(3bm+3bn)=$ $=2a(m+n)-3b(m+n)=$ $=(m+n)(2a-3b).$	$2am+2an-3bm-3bn=$ $=(2am-3bm)+(2an-3bn)=$ $=m(2a-3b)+n(2a-3b)=$ $=(2a-3b)(m+n).$

Ko'phadni guruhlash usuli bilan ko'paytuvchilarga ajratish uchun:

1) ko'phadning hadlarini, ular ko'phad shaklidagi umumiy ko'paytuvchiga ega bo'ladigan qilib, guruhlarga birlashtiriladi;

2) bu umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqariladi.

Yig'indining kvadrati. Ayirmaning kvadrati

O'rta Osiyo xalqlari madaniyatini o'rta asrlarda dunyo madaniyatining oldingi qatoriga olib chiqqan buyuk mutafakkirlardan biri Abu Ali ibn Sinoning matematikaga oid ishlarida sonlarni kvadrat va kubga ko'tarish amallari o'rganilgan.

Ikkita son yig'indisining kvadrati $(a+b)^2$ ni qaraymiz. Ko'phadni ko'phadga ko'paytirish qoidasidan foydalanib, hosil qilamiz:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

ya'ni

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.} \qquad (1)$$

Ikki son yig'indisining kvadrati birinchi son kvadrati, qo'shuv birinchi son bilan ikkinchi son ko'paytmasining ikkilangani qo'shuv ikkinchi son kvadratiga teng.

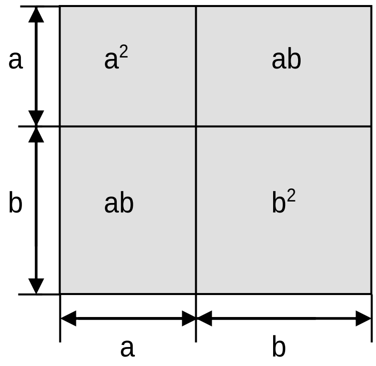
(1) formulani 13-rasmda tasvirlangan kvadratning yuzini ko'zdan kechirib, osongina hosil qilish mumkinligini aytib o'tamiz.

Endi ikki son ayirmasining kvadratini qaraymiz:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

ya’ni

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.} \qquad (2)$$



13-rasm.

Ikki son ayirmasining kvadrati birinchi son kvadrati, ayiruv birinchi son bilan ikkinchi son ko’paytmasining ikkilangani, qo’shuv ikkinchi son kvadratiga teng.

(1) va (2) tengliklarda *a* va *b* istalgan sonlar yoki algebraik ifodalardir.

Formula:

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.} \qquad (3)$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.} \qquad (4)$$

(3) va (4) formulalar mos ravishda yig’indining kubi va ayirmaning kubi deb ataladi.

(3) va (4) formulalar ham qisqa ko’paytirish formulalari hisoblanadi.

Kvadratlar ayirmasi formulasi

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \qquad (1)$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).} \qquad (2)$$

Ikki son kvadratlarining ayirmasi shu sonlar ayirmasi bilan ular yig’indisining ko’paytmasiga teng.

(1) formulani ham qisqa ko’paytirish formulasi deyiladi. Uni hisoblashlarni soddalashtirish uchun qo’llaniladi.

(2) tenglikni kvadratlar ayirmasi formulasi deyiladi. U ko’phadlarni ko’paytuvchilarga ajratishda qo’llaniladi.

AYIRMANING KUBI

Formulani isbotlang:

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Isbot:

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) =$$

$$= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

YIG'INDINING KUBI

Formulani isbotlang:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

Isbot:

$$\triangle\ (a+b)^3 = (a+b)\,(a+b)^2 = (a+b)\,(a^2+2ab+b^2) =$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\ \blacktriangle$$

Ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratishning bir necha usullarini qo'llash

Ko'rib chiqilgan bu misollar ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratishga doir topshiriqlarni bajarishda quyidagi tartibga rioya qilish foydali ekanligini ko'rsatadi:

1) ***umumiy ko'paytuvchini (agar u bor bo'lsa) qavsdan tashqariga chiqarish;***
2) ***ko'phadni qisqa ko'paytirish formulalari bo'yicha ko'paytuvchilarga ajratishga urinib ko'rish;***
3) ***agar oldingi usullar maqsadga olib kelmasa, guruhlash usulini qo'llashga harakat qilish.***

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad (1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad (2)$$

(1) va (2) tengliklar mos ravishda kublar yig'indisi va ayirmasi deb ataladi. Bu formulalar ham ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish qo'llaniladi.

Algebraik kasr. Kasrlarni qisqartirisi

1-masala. Katerning turg'un suvdagi tezligi soatiga *a* kilometrga, daryo oqimining tezligi soatiga *b* kilometrga teng. Katerning daryo oqimi bo'yicha harakat tezligi uning daryo oqimiga qarshi harakat tezligidan necha marta ortiq?

Katerning daryo oqimi bo'yicha tezligi soatiga (*a* + *b*) kilometrga teng; oqimga qarshi tezligi soatiga (*a* – *b*) kilometrga teng. Shuning uchun daryo oqimi bo'yicha harakat tezligi oqimga qarshi harakat tezligidan

$$\frac{a+b}{a-b}$$

marta ortiq bo'ladi.

$\frac{a+b}{a-b}$ ifoda *algebraik kasr* deyiladi. Bu kasrning surati *a* + *b*, maxraji esa *a* – *b*.

Umuman, *surat va maxraji algebraik ifodalar bo'lgan kasr algebraik kasr deyiladi*.

Kasrning asosiy xossasini bunday yozish mumkin:

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb},$$

bu yerda $b \neq 0$, $m \neq 0$.

Shunday qilib, kasrlarni qisqartirish uchun bu kasrlarning surat va maxrajini ularning umumiy ko'paytuvchisiga bo'lish kerak.

Agar $\frac{a}{b}$ kasrning surat yoki maxrajidagi ishorani qarama-qarshisiga o’zgartirilsa, u holda berilgan kasrga qarama-qarshi kasr hosil bo’lishini ta’kidlab o’tamiz:

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{b}; \quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

Kasrlarni umumiy maxrajga keltirish

Oddiy kasrlarni qo’shishda avval kasrlarni umumiy maxrajga keltirib olinadi. Masalan, $\frac{1}{4}, \frac{3}{25}, \frac{7}{10}$ kasrlar uchun umumiy maxraj 100 soni bo’ladi, bu son 4, 25, 10 sonlarining eng kichik umumiy karralisidir.

Algebraik kasrlarni qo’shish va ayirishda ham xuddi shunday almashtirishlarni bajarishga to’g’ri keladi, uni ham kasrlarni umumiy maxrajga keltirish deyiladi.

Algebraik kasrlarni umumiy maxrajga keltirish uchun:

1) ***berilgan kasrlarning umumiy maxrajini topish;***
2) ***har bir kasr uchun qo’shimcha ko’paytuvchini topish;***
3) ***har bir kasrning suratini uning qo’shimcha ko’paytuvchisiga ko’paytirish;***
4) ***har bir kasrni topilgan surat va umumiy maxraj bilan yozish kerak.***

ALGEBRAIK KASRLARNI KO’PAYTIRISH VA BO’LISH

Algebraik kasrlarni ko’paytirish va bo’lish ham oddiy kasrlarni ko’paytirish va bo’lish qoidalari bo’yicha bajariladi:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}; \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

9-mavzu: Tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalari

Reja:

1. Tenglama va uning yechimlari

2. Tengsizliklar.

Tayanch iboralar va tushunchalar: Tenglama va uning yechimlari, tengsizlik va ularning sistemalari.

Tenglama va uning yechimlari

Harf bilan belgilangan noma'lum son qatnashgan tenglik tenglama deyiladi.

Tenglik belgisidan chap va o'ngda turgan ifodalar tenglamaning chap va o'ng qismlari deyiladi. Tenglamaning chap yoki o'ng qismidagi har bir qo'shiluvchi tenglamaning hadi deyiladi.

$2x - 90 = 370$ tenglamada chap qismi $2x – 90$, o'ng qism esa 370. So'ngra

$x = 230$ bo'lganda shu tenglamaning chap qismi 370 ga teng, chunki

$2\cdot230 – 90=370$; o'ng qismi ham 370 ga teng. Demak, $x = 230$ bo'lganda bu tenglama to'g'ri tenglikka aylanadi: $2\cdot230 – 90 = 370$. Shu 230 soni berilgan *tenglamaning ildizi* deyiladi.

Tenglamaning ildizi deb, noma'lumning shu tenglamani to'g'ri tenglikka aylantiradigan qiymatiga aytiladi.

Tenglamani yechish – uning barcha ildizlarini topish ularning yo'qligini ko'rsatish demakdir.

Ko'pgina amaliy masalalarni yechish

$$\boxed{ax = b} \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga keltiriladi, bunda a va b – berilgan sonlar. x – noma'lum son. (1) tenglama *chiziqli tenglama* deb ataladi.

Bir noma’lumli birinchi darajali tenglamalarni yechish

Al-Xorazmiyning “Kitob al-muxtasar fi hisob al jabr val-muqobala” asaridagi al-jabr musbat hadlarni tiklash, ya’ni manfiy hadlarni tenglamaning bir qismidan ikkinchi qismiga musbat qilib o’tkazishni, val-muqobala esa tenglamaning ikkala qismidan teng hadlarni tashlab yuborishni bildirgan.

1-masala. $9x - 23 = 5x - 11$ tenglamani yeching

Yechish. x son berilgan tenglamaning ildizi, ya’ni x shunday sonki, uni tenglamaga qo’yilganda tenglama to’g’ri tenglikka aylanadi, deb faraz qilamiz.

Noma’lum qatnashgan $5x$ hadni “ – ” ishora bilan tenglikning chap qismiga, –23 hadni “+” ishora bilan o’ng qismiga olib o’tamiz.

Natijada yana tog’ri tenglik hosil bo’ladi:

$$9x - 5x = 23 - 11.$$

Tenglamaning ikkala qismidagi o’xshash hadlarni ixchamlab,

$$4x = 12$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning ikkala qismini 4 ga bo’lib, $x = 3$ ekanini topamiz.

Shunday qilib, tenglama ildizga ega deb faraz qilib, bu ildiz faqat 3 soniga teng bo’lishi mumkinligini ko’rdik. $x = 3$ haqiqatan ham berilgan tenglamaning ildizi bo’lishini tekshiramiz: $9 \cdot 3 - 23 = 5 \cdot 3 - 11$. Bu to’g’ri tenglik, chunki uning chap va o’ng qismlari birgina 4 soniga teng.

Demak, berilgan tenglama faqat bitta ildizga ega: $x = 3$.

Tenglamani yechishda tenglamaning quyidagi *asosiy xossalaridan* foydalaniladi.

1-xossa. ***Tenglamaning istalgan hadi ishorasini qarama-qarshisiga o’zgartirib, uning bir qismidan ikkinchi qismiga o’tkazish mumkin.***

2-xossa. ***Tenglamaning ikkala qismini nolga teng bo’lmagan bir xil songa ko’paytirish yoki bo’lish mumkin.***

Bu xossalar bir noma’lumli istalgan tenglamani yechish imkonini beradi. Buning uchun:

1) noma'lum qatnashgan hadlarni tenglikning chap qismiga noma'lum qatnashmagan hadlarni esa o'ng qismiga o'tkazish lozim (1-xossa);

2) o'xshash hadlarni ixchamlash kerak;

3) tenglamaning ikkala qismini noma'lum oldida turgan koeffitsiyentga (agar u nolga teng bo'lmasa) bo'lish (2-xossa) kerak.

Musbat va manfiy sonlar

Siz VI—VII sinf matematika kursida ratsional sonlar va ular ustida amallar bilan tanishgansiz. Ratsional son musbat son, manfiy son yoki nol soni bolishi mumkin.

Musbat ratsional son — bu $\frac{k}{n}$ ko'rinishdagi sondir, bunda k va n — natural sonlar. Masalan, $\frac{2}{3}, \frac{8}{5}, \frac{4}{8}$ — musbat ratsional sonlar.

Manfiy ratsional son — bu $-\frac{k}{n}$ ko'rinishdagi sondir, bunda k va n — natural sonlar. Masalan, $-\frac{2}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{4}{8}$ — manfiy ratsional sonlar. Manfiy

ratsional sonni $\frac{-k}{n}$ ko'rinishda yozish mumkin. Masalan, $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$

Ratsional sonlar deb $\frac{m}{n}$ ko'rinishdagi sonlarga aytiladi, bunda

m — butun son, n — natural son.

Agar ratsional sonni maxraji 10 sonining natural darajasidan iborat kasr shaklida yozish mumkin bo'lsa, u holda bunday ratsional sonni o'nli kasr ko'rinishida tasvirlash qulay. Masalan,

$$\frac{25}{100} = 0,25; \quad \frac{257}{1000} = 0,257; \quad \frac{-324}{10} = -32,4.$$

Musbat sonlar *noldan katta,* manfiy sonlar esa *noldan kichik* deyiladi. Sonning noldan katta yoki kichikligini qisqacha yozish uchun > (katta) va < (kichik) tengsizlik ishoralaridan foydalaniladi. Jumladan, $a > 0$ yozuvi a sonning noldan kattaligini, ya'ni a musbat son ekanini anglatadi; $b < 0$ yozuvi b sonning noldan kichikligini, ya'ni b manfiy son ekanini anglatadi.

Harflar yordamida ifodalanishi	So'zlar yordamida ifodalanishi
1. Agar $a > 0$ va $b > 0$ bo'lsa, u holda $a+b>0$, $ab>0$, $\frac{a}{b} > 0$ bo'ladi.	Ikkita musbat sonning yig'indisi. ko'paytmasi va bo'linmasi musbat sonlar bo'ladi.
2. Agar $a < 0$ va $b < 0$ bo'lsa, u holda $a + b < 0$, $ab > 0$, $\frac{a}{b} > 0$ bo'ladi.	Manfiy sonlarning yig'indisi mafiy son, ikkita manfiy sonning ko'paytmasi va bo'linmasi esa musbat sonlar bo'ladi.
3. Agar $a > 0$ va $b < 0$ bo'lsa, u holda $ab<0$, $\frac{a}{b} <0$, $\frac{a}{b}<0$ bo'ladi..	Musbat son bilan manfiy sonning ko'paytmasi va bo'linmasi manfiy sonlar bo'ladi.
. 4. Agar $ab > 0$ bo'lsa, u holda yoki $a > 0$ va $b > 0$, yoki $a < 0$ va $b < 0$ bo'ladi. Agar $\frac{a}{b} > 0$ bo'lsa, u holda yoki $a > 0$ va $b > 0$, yoki $a < 0$ va $b < 0$ bo'ladi.	Agar ikkita sonning ko'paytmasi yoki bo'linmasi musbat boisa, u holda bu sonlar bir xil ishoraga ega boiadi (ya'ni ikkala son musbat yoki ikkalasi manfiy bo'ladi).
5. Agar $ab < 0$ boisa, u holda yoki $a > 0$ va $b < 0$, yoki $a < 0$ va $b > 0$ bo'ladi. Agar $\frac{a}{b} < 0$ bo'lsa, u holda yoki $a > 0$ va $b < 0$, yoki $a < 0$ va $6 > 0$ bo'ladi.	Agar ikkita sonning ko'paytmasi yoki bo'linmasi manfiy boisa, u holda bu sonlar har xil ishoraga ega bo'ladi (ya'ni ulardan biri musbat, ikkinchisi esa manfiy bo'ladi).
6. Agar $ab = 0$ bo'lsa, u holda yoki $a = 0$ va $b = 0$, yoki $a \neq 0$ va $b = 0$, yoki $a = 0$ va $b \neq 0$ bo'ladi.	Agar ikkita sonning ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u holda shu sonlardan aqalli bittasi nolga teng bo'ladi.

7. Agar $\frac{a}{b} = 0$ bo'lsa, u holda $a = 0$ va b $\neq 0$ bo'ladi.	Agar kasr nolga teng bo'lsa, u holda uning surati nolga teng bo'ladi, maxraji esa nolga teng bo'lmaydi.

Sonli tengsizliklar

Ta'rif. Agar a-b ayirma musbat bo'lsa, u holda a son b sondan katta bo'ladi. Agar a-b ayirma manfiy bo'lsa, u holda a son b sondan kichik bo'ladi.

Agar a son b sondan katta bo'lsa bu a>b kabi; agar a son b sondan kichik bo'lsa, bu a<b kabi yoziladi.

Shunday qilib, a>b tengsizlik a – b ayirma musbat, ya'ni a – b>0 ekanini bildiradi, a<b tengsizlik esa a – b<0 ekanini bildiradi.

1-masala. Agar a>b bo'lsa, u holda b<a bo'lishini isbotlang.

a>b tengsizlik a-b musbat son ekanini bildiradi. U holda b-a=-(a-b)-manfiy son, ya'ni b<a.

Ixtiyoriy ikkita a va b son uchun quydagi uchta munosabatdan faqat bittasi to'g'ri bo'ladi:

$$a > b, a = b, a < b.$$

Masalan, -5 va -3 sonlari uchun -5<-3 tengsizlik to'g'ri bo'ladi, -5=-3 va -5>-3 muosabatlar esa to'g'ri bo'lmaydi.

a va *b sonlarni taqqoslash,* ular orasiga >, = yoki < ishoralaridan qaysinisi qo'yilsa to'g'ri munosabar hosil bo'lishini topish demakdir. Buni a-b ayirmaning ishorasini aniqlash bilan bajarish mumkin.

2-masala. 0,79 va $\frac{4}{5}$ sonlarni taqqoslang.

Ularning ayirmasini topamiz:

$$0{,}79-\frac{4}{5}=0{,}79-0{,}8=-0{,}01.$$

$0{,}79-\frac{4}{5}<0$ bo'lgani uchun $0{,}79<\frac{4}{5}$.

Sonli tengsizliklarning asosiy xossalari

Bu paragrafda sonli tengsizliklarning odatda asosiy deb taladigan xossalari qaraladi, chunki ulardan tengsizliklarning boshqa xossalarini isbotlashda va ko'pgina masalalarni yechishda foydalaniladi.

1-teorema. ***Agar a > b va b > c bo'lsa, u holda a > c bo'ladi.***

2-teorema. ***Agar tengsizlikning ikkala qismiga ayni bir son qo'shilsa, u holda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.***

Natija. ***Istalgan qo'shiluvchini tengsizlikning bir qismidan ikkinchi qismiga shu qo'shiluvchining ishorasini qarama-qarshisiga almashtirgan holda ko'chirish mumkin.***

3-teorema. ***Agar tengsizlikning ikkala qismi ayni bir musbat songa ko'paytirilsa, u holda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi. Agar tengsizlikning ikkala qismi bir manfiy songa ko'paytirilsa, u holda tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi.***

Natija. ***Agar tengsizlikning ikkala qismi ayni bir musbat songa bo'linsa, u holda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi. Agar tengsizlikning ikkala qismi bir manfiy songa bo'linsa, u holda tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi.***

Tengsizliklarni qo'shish va ko'paytirish

Turli masalalarni yechish davomida ko'pincha tengsizliklarni q'shish yoki ko'paytirishga, ya'ni tengsizliklarning chap qismlarini alohida va o'ng qismlarini alohida qo'shish yoki ko'paytirishga to'g'ri keladi. Bunday hollarda ba'zan tengsizliklar hadlab qo'shilyapti yoki hadlab ko'paytirilyapti, deyiladi.

1-teorema. ***Bir xil ishorali tengsizliklarni qo'shishda xuddi shu ishorali tengsizlik hosil bo'ladi: agar a > b va c > d bo'lsa, u holda a + c > b + d bo'ladi.***

2-teorema. ***Chap va o'ng qismlari musbat bo'lgan bir xil ishorali tengsizliklarni ko'paytirish natijasida xuddi shu ishorali tengsizlik hosil bo'ladi: agar a > b, c > d va a, b, c, d – musbat sonlar bo'lsa, u holda ac > bd bo'ladi.***

Qat'iy va noqat'iy tengsizliklar

> (katta) va < (kichik) ishorali tengsizliklar *qat'iy tengsizliklar* deyiladi. Masalan, $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, a > b, c < d$ — *qat'iy tengsizliklar*.

Qat'iy tengsizliklarning > va < ishoralari bilan bir qatorda ≥ (katta yoki teng) va ≤ (kichik yoki teng) ishorali tengsizliklardan ham foydalaniladi. Ular *noqat'iy tengsizliklar* deyiladi.

$a \leq b$ tengsizlik $a < b$ yoki $a = b$ ekanini, ya'ni *a* son *b* dan katta emasligini bildiradi.

Masalan, agar samolyotdagi joylar soni 134 ta bo'lsa, u holda *a* yo'lovchilar soni 134 tadan kam yoki unga teng bo'lishi mumkin. Bu holda $a < 134$ kabi yoziladi.

Shunga o'xshash, $a \geq b$ tengsizlik *a* son *b* dan katta yoki unga teng ekanini, ya'ni *a* son *b* dan kichik emasligini bildiradi.

≥ ishorasi yoki ≤ ishorasi qatnashgan tengsizliklar *noqat'iy tengsizliklar* deyiladi. Masalan, $18 \geq 12$, $11 \leq 12$, $7 \geq 7$, $4 \leq 4$, $a \geq b$, $c \leq d$ — noqat'iy tengsizliklar.

Qat'iy tengsizliklarning barcha xossalari noqat'iy tengsizliklar uchun ham o'rinli. Bunda, agar qat'iy tengsizliklar uchun > va < ishoralar qarama-qarshi ishoralar deb hisoblangan bo'lsa, noqat'iy tengsizliklar uchun ≥ va ≤ ishoralari qarama-qarshi ishoralar deb hisoblanadi.

Masalan, teoremani noqat'iy tengsizliklar uchun bunday ifodalash mumkin: agar $a \geq b$ bo'lsa, u holda istalgan c son uchun $a + c \geq b + c$ bo'ladi. Haqiqatan ham, $a > b$ bo'lgan hol uchun bu teorema isbotlangan, $a = b$ uchun esa bu tasdiq tenglikning bizga ma'lum bo'lgan xossasini ifodalaydi.

Bir noma'lumli tengsizliklar

M a s a 1 a . Ikki shahardan bir vaqtda bir-birlariga qarab ikki poyezd bir xil o'zgarmas tezlik bilan jo'nadi. Harakat boshlanganidan 2 soat keyin ular bosib o'tgan masofalar yig'indisi 200 km dan kam bo'lmasligi uchun poyezdlar qanday tezlik bilan harakat qilishlari kerak?

Soatiga x km — poyezdlar harakatining izlanayotgan tezligi bo'lsin. Ikki soatda poyezdlardan har biri $2x$ kilometr yo'l o'tadi. Masalaning shartiga ko'ra poyezdlarning 2 soatda bosib o'tgan masofalari yig'indisi 200 km dan kam bo'lmasligi kerak:

$$2x + 2x \geq 200.$$

Bundan $4x \geq 200$, $x \geq 50$.

J a v o b . Har bir poyezdning harakatlanish tezligi 50 km/soatdan kam bo'lmasligi kerak. ▲

$4x \geq 200$ tengsizlikda x harfi bilan noma'lum son belgilangan. Bu *bir noma 'lumli chiziqli tengsizlikka misoldir.*

Ushbu

$$ax \geq b,\ ax < b,\ ax \geq b,\ ax \leq b$$

tengsizliklar bir noma'lumli chiziqli tengsizliklar deyiladi, bunda a va b — berilgan sonlar, x esa noma'lum. Ko'pgina, masalan,

$$4(3 - x) > 5 + 2x,\quad \frac{x-3}{2} \leq \frac{x-2}{3},\quad 1 - \frac{x}{2} < 3(x+4)$$

kabi tengsizliklar bir noma'lumli chiziqli tengsizliklarga keltiriladi.

Tengsizlik ishorasining chap va o'ng tomonlarida turgan ifodalar *tengsizlikning chap va o'ng qismlari* deyiladi. Tengsizlikning chap va o'ng qismlaridagi har bir qo'shiluvchi *tengsizlikning hadi* deyiladi.

Bir noma'lumli ***tengsizlikning yechimi*** *deb, noma'lumning shu tengsizlikni to'g'ri sonli tengsizlikka aylantiradigan qiymatiga aytiladi.*

Tengsizlikni yechish *– uning hamma yechimlarini topish yoki ularning yo'qligini aniqlash demakdir.*

Tengsizliklarni yechish

1 - x o s s a**. *Tengsizlikning istalgan hadini uning bir qismidan ikkinchi qismiga, shu hadning ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartirgan holda o'tkazish mumkin, bunda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.***

2- x o s s a**. *Tengsizlikning ikkala qismini nolga teng bo 'Imagan ayni bir songa ko'paytirish yoki bo'lish mumkin; agar bu son musbat bo'lsa, u holda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi, agar bu son manfiy bo'lsa, u holda tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi.***

Bu xossalar berilgan tengsizlikni boshqa, xuddi shunday yechimlarga ega bo'lgan tengsizlik bilan almashtirishga imkon beradi.

Chiziqli tengsizlikka keltiriladigan bir noma'lumli tengsizliklarni yechish uchun:

1) noma'lum qatnashgan hadlarni chap tomonga, noma'lum qatnashmagan hadlarni esa o'ng tomonga o'tkazish (1- xossa);

2) o'xshash hadlarni ixchamlab, tengsizlikning ikkala qismini noma'lum oldidagi koeffitsiyentga (agar u nolga teng bo'lmasa) bo'lish (2- xossa) kerak.

2- m a s a 1 a. Tengsizlikni yeching:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2.$$

Tengsizlikning chap va o'ng qismlarini soddalashtiramiz. Qavslarni ochamiz:

$$3x-6-4x-4<2x-6-2.$$

Noma'lum qatnashgan hadlarni tengsizlikning chap qismiga, noma'lum qatnashmagan (ozod) hadlarni esa o'ng qismiga olib o'tamiz (1- xossa):

$$3x-4x-2x<6+4-6-2$$

O'xshash hadlarni ixchamlaymiz:

$-3x<2$

va tengsizlikning ikkala qismini - 3 ga bo'lamiz (2- xossa):

$$x>-\frac{2}{3}.$$

J a v o b. $x>-\frac{2}{3}.$

Bir noma’lumli tengsizliklar sistemasi. Sonli oraliqlar

Bir noma’lumli tengsizliklar sistemasining yechimi *deb noma’lumning sistema tengsizliklarining barchasini to’g’ri sonli tengsizliklarga aylantiruvchi qiymatiga aytiladi.*

Tengsizliklar sistemasini yechish – uning barcha yechimlarini topish yoki ularning yo’qligini aniqlash demakdir.

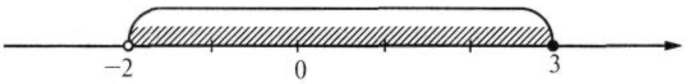
Agar a<b bo'lsa, u holda $a\le\ge x\le<b$ *tengsizlikni qano-atlantiruvchi x sonlar to'plami kesma deyiladi va [a; b] kabi belgilanadi.*

Masalan, [4; 7] kesma — ushbu $4\le x\le 7$ tengsizlikni qanoat-lantiruvchi *x* sonlar to'plami.

$2 < x < 7$, $-1 \le x < 2$, $4 < x \le 7$ ko'rinishdagi tengsizliklarni qano atlantiruvchi sonlar to'plami uchun ham alohida atamalar kiritiladi.

Agar $a<b$ bo'lsa, u holda $a < x < b$ tengsizlikni qano-atlantiruvchi x sonlar to'plami interval deyiladi va $(a; b)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $(-2; 3)$ interval — ushbu $-2 < x < 3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plami (33- rasm).



$a \le x < b$ yoki $a < x \le b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x sonlar to 'plami yarim intervallar deyiladi va mos ravishda $[a; b)$ va $(a; b]$ kabi belgilanadi.

Masalan, $[-1; 2)$ yarim interval — ushbu $-1 \le x < 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plami; $(4; 7]$ yarim interval - ushbu $4 < x \le 7$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plami

Tengsizliklar sistemalarini yechish

Tengsizliklar sistemalarini yechishga doir misollar qaraymiz.

1- m a s a 1 a. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 5x - 1 > 3(x+1), \\ 2(x+4) > x + 5. \end{cases} \quad (1)$$

Birinchi tengsizlikni yechamiz:

$$5x - 1 > 3x + 3,$$
$$2x > 4, \quad x > 2.$$

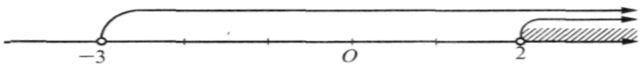
Shunday qilib, birinchi tengsizlik $x > 2$ bo'lganda bajariladi. Ikkinchi tengsizlikni yechamiz:

$$2x + 8 > x + 5, \quad x > -3.$$

Shunday qilib, (1) sistemaning ikkinchi tengsizligi x >-3 bo'lganda bajariladi.

Son o'qida (1) sistemaning birinchi va ikkinchi tengsizliklarining yechimlari to'plamlarini tasvirlaymiz.

Birinchi tengsizlikning yechimlari $x > 2$ nurning barcha nuqtalari, ikkinchi tengsizlikning yechimlari x >-3 nurning barcha nuqtalari bo'ladi (rasm).



(1) sistemaning yechimlari x ning ikkala nurga bir vaqtda tegishli boigan qiymatlari bo'ladi. Rasmdan ko'rinib turibdiki, bu nurlarning barcha umumiy nuqtalari to'plami $x > 2$ nur bo'ladi.

J a v o b . x > 2.

2- m a s a 1 a. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 3(x-1) \le 2x+4, \\ 4x-3 \ge 13. \end{cases} \qquad (2)$$

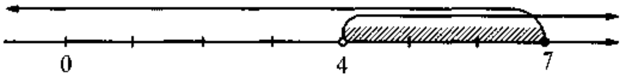
Birinchi tengsizlikni yechamiz:

$$3x - 3 \le 2x + 4,$$
$$x \le 7.$$

(2) sistemaning ikkinchi tengsizligini yechamiz:

$$4x \ge 16,$$
$$x \ge 4.$$

Son o'qida (2) sistemaning birinchi va ikkinchi tengsizliklarining yechimlari to'plamlarini tasvirlaymiz. Birinchi tengsizlikning yechimlari $x \le 7$ nur, ikkinchi tengsizlikning yechimlari $x \ge 4$ nur bo'ladi (rasm).



Rasmdan ko'rinib turibdiki, bu nurlarning umumiy nuqtalari to'plami [4; 7] kesma bo'ladi.

J a v o b . $4 \le x \le 7$.

Sonning moduli. Modul qatnashgan soda tenglama va tengsizliklar

1. Sonning moduli.

1) Musbat sonning moduli shu sonning o'ziga teng.

2) Manfiy sonning moduli unga qarama-qarshi songa teng.

3) Nolning moduli nolga teng: $|0| = 0$.

Shunday qilib, son modulining ta'rifi quyidagicha bo'ladi :

$|a| = a$, agar $a \geq 0$ bo'lsa;

$|a| = -a$, agar $a < 0$ bo'lsa.

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, \text{ agar } a \ge 0 \text{ bo‘lsa;} \\ -a, \text{ agar } a < 0 \text{ bo‘lsa.} \end{cases}}$$

Son modulining geometrik ma 'nosini qaraymiz-

Son o'qida, masalan, 3 va —2 nuqtalarni tasvirlaymiz (41- rasm).

Rasmdan ko'rinib turibdiki, $|3| = 3$ — bu 0 nuqtadan 3 nuqtagacha bo'lgan masofa, $|-2| = 2$ — bu 0 nuqtadan -2 nuqtagacha bo'lgan masofa.

41- rasm.

Shunday qilib, |a| geometrik nuqtayi nazardan 0 *nuqtadan a sonni tasvirlovchi nuqtagacha bo'lgan masofadir.*

2. Noma'lum modul belgisi ostida qatnashgan tenglamalar.

1 - m a s a 1 a. Tenglamani yeching:

$$|x| = 7.$$

1) $x > 0$ bo'lsin. U holda modulning ta'rifiga ko'ra $| x | = x$ va tenglama bunday ko'rinishni oladi:

$$x=7,$$

ya'ni $x = 7$ — berilgan tenglamaning ildizi;

2) $x < 0$ bo'lsin. U holda modulning ta'rifiga ko'ra $| x | = -x$ va tenglama bunday ko'rinishni oladi:

$$-x= 7,$$

bundan $x = -7$ — berilgan tenglamaning ildizi.

J a v o b . $x_1 = 7$, $x_2 =-7$. ▲

10-MAVZU: Progressiyani o'rganish nazariyasi

Reja:

1. **Arifmetik progressiya**
2. **Geometrik progressiya.**

Tayanch iboralar va tushunchalar: Arifmetik progressiya, Arifmetik progressiya dastlabki n ta hadining yig'indisi. Geometrik progressiya. Cheksiz kamayuvchi geometrik prograssiya

Arifmetik progressiya

Ta'rif. ***Agar a_1, a_2, …, a_n, … sonli ketma-ketlikda barcha natural n lar uchun***

$$a_{n+1}=a_n+d$$

(bunda d – biror son) tenglik bajarilsa, bunday ketma-ketlik arifmetik progressiya deyiladi.

Arifmetik progressiyaning ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi unga qo'shni bo'lgan ikkita hadning o'rta arifmetigiga teng. «Arifmetik» progressiya degan nom shu bilan izohlanadi.

Masala. 99 soni 3, 5, 7, 9, … arifmetik progressiyaning hadi. Shu hadning nometrini toping.

Aytaylik, n – izlangan nomer bo'lsin. $a_1=3$ va d=2 bo'lgani uchun $a_n=a_1+(n-1)d$ formulaga ko'ra: 99=3+(n-1)2. Shuning uchun 99=3+2n-2; 98=2n, n=49

Javob: n=49.

Arifmetik progressiyaning n-hadi formulasi

Arifmetik progressiyaning ta'rifiga ko'ra

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ va h.k.}$$

Umuman,

! $$a_n = a_1 + (n - 1)d, \qquad (1)$$

chunki arifmetik progressiyaning n- hadi uning birinchi hadiga d sonini $(n - 1)$ marta qo'shish natijasida hosil qilinadi.

(1) formula *arifmetik progressiyaning n-hadi formulasi* deyiladi.

Arifmetik progressiya dastlabki n ta hadining yig'indisi

Teorema. **Arifmetik progressiya dastlabki n ta hadining yig'indisi quyidagiga teng:**

$$\mathbf{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.}$$

Masala. Dastlabki n ta natural son yig'indisini toping.

Natural sonlarning

1, 2, 3, 4, 5, 6, …, n, …

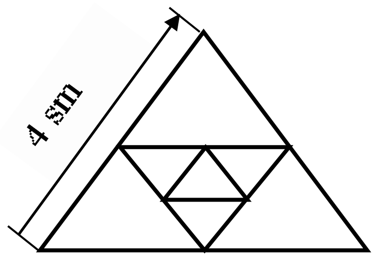
ketma-ketligi ayirmasi d=1 bo'lgan arifmetik progressiyadir. $a_1=1$ va $a_n=n$ bo'lgani uchun quydagi formula bo'yicha topamiz:

$$\mathbf{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.}$$

$$S_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Shunday qilib, $$1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Geometrik progressiya



76-rasm

Tomoni 4 sm bo'lgan teng tomonli muntazam uchburchakni qaraymiz. Uchlari berilgan uchburchak tomonlarining o'rtalaridan iborat bo'lgan uchburchak yasaymiz (76-rasm). Uchburchak o'rta chizig'ining xossasiga ko'ra ikkinchi uchburchakning tomoni 2 sm ga teng. Shunga o'xshash yasashlarni davom ettirib, tomonlari $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ sm va hokazo bo'lgan uchburchaklarni hosil qilamiz. Shu uchburchaklar tomonlarining uzunliklari ketma – ketligini yozamiz:

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$$

Bu ketma-ketlikda, ikkinchisidan boshlab, uning har bir hadi avvalgi hadni ayni bir xil $\frac{1}{2}$ songa ko'paytirilganiga teng. Bunday ketma-ketliklar *geometrik progressiyalar* deyiladi.

Ta'rif. ***Agar***

$$\boldsymbol{b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...}$$

sonli ketma-ketlikda barcha natural n uchun

$$\boldsymbol{b_{n+1}=b_n q}$$

Tenglik bajarilsa, bunday ketma-ketlik geometrik progressiya deyiladi, bunda $\boldsymbol{b_n \neq 0}$***, q – nolga teng bo'lmagan biror son.***

Bu formuladan $\frac{b_{n+1}}{b_n}=q$ ekanligi kelib chiqadi. q son *geometrik progressiyaning maxraji* deyiladi.

Agar progressiyaning barcha hadlari musbat bo'lsa, u holda $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$ bo'ladi, ya'ni geometrik progressiyaning ikkinchisidan boshlab har bir hadi unga qo'shni bo'lgan ikkita hadning o'rta geometrigiga teng. «Geometrik» progressiya degan nom shu bilan izohlanadi.

Geometrik progressiyaning *n*-hadini topishformulasi

Geometrik progressiyaning ta'rifiga ko'ra

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3 \text{ va h.k.}$$

Umuman,

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1},} \qquad \textbf{(1)}$$

chunki geometrik progressiyaning n- hadi uning birinchi hadini q songa $(n-1)$ marta ko'paytirish bilan hosil qilinadi.

(1) formula geometrik progressiya *n-hadi formulasi* deyiladi.

Geometrik progressiya dastlabki *n* ta hadining yig'indisi

Teorema. ***Maxraji q≠1 bo'lgan geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadining yig'indisi quyidagiga teng:***

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}.$$

1 – masala. 6, 2, $\frac{2}{3}, \ldots$ geometrik progressiya dastlabki beshta hadining yig'indisini toping.

Bu progressiyada b_1=6, $q = \frac{1}{3}$.

$$S_5 = \frac{6 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27}.$$

Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya

n nomerning ortishi bilan bu progressiyaning hadlari nolga yaqinlashadi. (3) progressiya ham cheksiz kamayuvchi progressiya deyiladi. Uning maxrajining moduli birdan kichik ekanligini ta'kidlab o'tamiz: $|q|<1$.

Maxrajining moduli birdan kichik bo'lgan geometrik progressiya *cheksiz kamayuvchi* geometrik progressiya deyiladi.

Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi deb n $\to\infty$ da uning dastlabki n ta hadi yig'indisi intiladigan songa aytiladi.

$$\boxed{S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n.}$$

Shunday qilib, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning *S* yig'indisi quyidagiga teng: $\boxed{\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}.}}$

Xususiy holda, b_1=1 bo'lganda, $\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}}$ ni olamiz. Bu tenglik odatda ushbu ko'rinishda yoziladi:

$$\boldsymbol{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}.}$$

Mavzuga doir misollar.

1. Arifmetik progressiyaning n-chi hadi va dastlabki n ta hadi yig'indisi formulalarini yozing.

2. Arifmetik progressiyaning n-hadi formulasini yozing

1) 25, 21, 17, 13, …;

2) 1, -4, -9, -14, … .

3. Agar arifmetik progressiyada: $a_8 = -64,\ a_{10} = -50;$

bo'lsa, uning to'qqizinchi hadini va ayirmasini toping.

11-mavzu: Trigonometrik tenglamalar

Reja:

1. Burchakning radian o'lchovi

2. Nuqtani koordinata atrofida burish

3. Burchakning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi ta'riflari

4. Eng sodda trigonometrik tenglamalar

Tayanch iboralar va tushunchalar: Burchakning radian o'lchovi, Nuqtani koordinatalar boshi atrofida burish, burchakning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi ta'riflari, sinus, kosinus va tangensning ishoralari, trigonometrik ayniyatlar, trigonometrik tenglamalar.

Burchakning radian o'lchovi

Uzunligi aylana radiusiga teng bo'lgan yoyga tiralgan markaziy burchak *1 radian* burchak deyiladi.

1 rad burchakning gradus o'lchovini topaylik. Uzunligi πR (yarim aylana) bo'lgan yoy 180° li markaziy burchakni tortib turgani uchun uzunligi R bo'lgan yoy π marta kichik bo'lgan burchakni tortib turadi, ya'ni

$$1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0.$$

π ≈ 3,14 bo'gani uchun 1 rad ≈ 58,3° bo'ladi.

Agar burchak α radiandan iborat bo'lsa, u holda uning gradus o'lchovi quydagiga teng bo'ladi:

$$\alpha\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^0.$$

Agar burchak α gradusdan iborat bo’lsa, u holda uning radian o’lchovi

$$\boxed{\alpha^0 = \frac{\pi}{180}\alpha\, rad.}$$

ga teng bo’ladi.

Burchakning radian o’lchovi aylana yoylarining uzunliklarini hisoblash uchun qulay. 1 radian burchak uzunligi R radisusga teng yoyni tortib turgani uchun radian α burchak

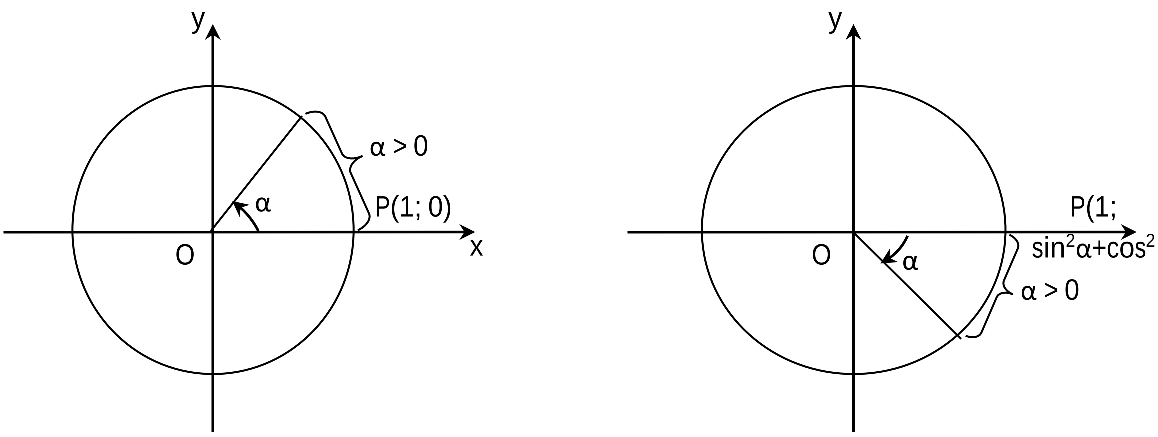
$$\boxed{l = \alpha R}$$

uzunlikdagi yoyni tortib turadi.

Nuqtani koordinatalar boshi atrofida burish

Koordinata tekisligida radiusi 1 ga teng va markazi koordinata boshida bo’lgan aylanani qaraymiz. U birlik aylana deyiladi. Birlik aylananing nuqtasini koordinata boshi atrofida α radian burchakka burish tushunchasini kiritamiz (bu yerda α-istalgan haqiqiy son).

1. Aytaylik, α > 0 bo’lsin. Nuqta birlik aylana bo’ylab P nuqtadan soat mili yo’nalishiga qarama-qarshi harakat qilib, α uzunlikdagi yo’lni bosib o’tdi, deylik (1-rasm). Yo’lning oxirgi nuqtasini M bilan belgilaymiz.



1-rasm. 2-rasm.

2. Aytaylik, α > 0 bo’lsin. Bu holda α radian burchakka burish harakat soat mili yo’nalishida sodir bo’lganligini va nuqta | α | uzunlikdagi yo’lni bosib o’tganligini bildiradi (2-rasm).

Burchakning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi ta'riflari

1-tarif. **α** ***burchakning sinusi deb (1; 0) nuqtani koordinatalar boshi atrofida*** **α** ***burchakka burish natijasida hosil bo'lgan nuqtaning ordinatasiga aytiladi*** **(sinα kabi belgilanadi).**

2-ta'rif. **α** ***burchakning kosinusi deb (1; 0) nuqtani koordinatalar boshi atrofida*** **α** ***burchakka burish natijasida hosil bo'lgan nuqtaning abssissasiga aytiladi*** **(cosα kabi belgilanadi).**

3-ta'rif. **α** ***burchakning tangensi deb*** **α** ***burchak sinusining uning kosinusiga nisbatiga aytiladi*** **(tgα kabi belgilanadi).**

Ba'zan α ***burchakning kotangensidan*** **foydalaniladi (ctgα kabi belgilanadi).**

A	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
Sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Mavjud emas	0	Mavjud emas	0
Ctgα	Mavjud emas	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Mavjud emas	0	Mavjud emas

Agar har bir haqiqiy x songa sinx son mos keltirilsa, u holda haqiqiy sonlar to'plamida y=sinx funksiya berilgan bo'ladi. Shunga o'xshash, y=cosx, y=tgx va y=ctgx funksiyalar beriladi. y=cosx funksiya barcha $x\in R$ da aniqlangan, y=tgx funksiya $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$, y=ctgx esa $x\neq\pi k,\ k\in Z$ bo'lganda aniqlangan.

y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx funksiyalar trigonometrik funksiyalar deyiladi.

ENG SODDA TRIGONOMETRIK TENGLAMALAR

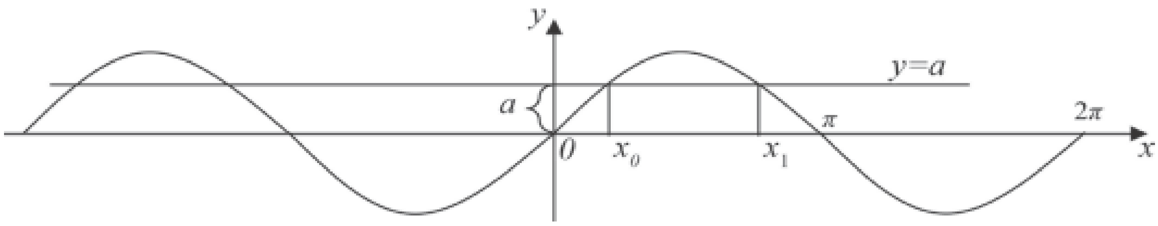
sin x=a tenglama

Bizga ma'lumki, $-1\leq \sin x \leq 1$, shuning uchun bu tenglama |a|>1 bo'lganida

yechimga ega emas. $-1\leq\ a\ \leq 1$ oraliqda tenglamaning yechimini topish uchun quyidagi ta’rifni kiritamiz.

$a \in [-1;\ 1]$ sonning *arksinusi* deb sinusi a ga teng bo‘lgan $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ songa aytiladi: agar $\sin x = a$ va $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ bo‘lsa, $\arcsin a = x$.

Tenglamani yechish uchun rasmdagi y=sinx funksiya grafigidan foydalanamiz.



Grafikdan ko‘rinadiki, $a \in [-1;\ 1]$ bo‘lganda $y=a$ funksiya $[0;\ 2\pi]$ oraliqda $y=\sin x$ funksiya grafigini abssissalari x_0 va $x_1 = \pi - x_0$ bo‘lgan nuqtalarda kesadi. Bu ikki nuqtani bitta formula orqali yozish mumkin:

$$x = (-1)^n \arcsin a,\ n = 0,\ 1.$$

$y=\sin x$ funksiyaning davriyligidan foydalanib, tenglamani yechish uchun ushbu formulani hosil qilamiz:

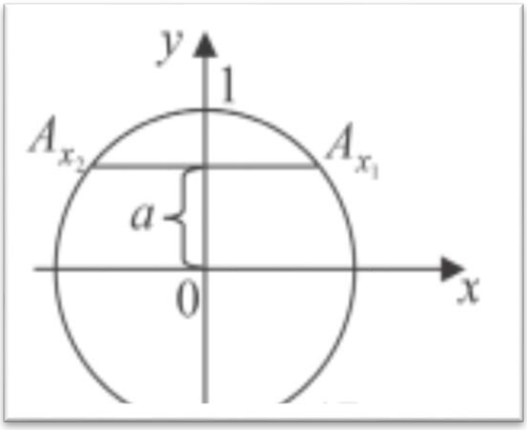
$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z. \qquad (1)$$

$\sin x = a$ tenglamaning muhim hollardagi yechimlarini keltiramiz:

$a=1$ bo‘lganda $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; $a=-1$ bo‘lganda $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k,\ k \in Z$;

$a=0$ bo‘lganda $x = \pi k,\ k \in Z$.

$\sin x = a$ tenglamani yechishni birlik doirada tushuntirish oson. $\sin x$ ning ta'rifiga ko'ra, uning qiymati birlik doiradagi A_x nuqtaning ordinatasidir. $|a|<1$ bo'lganda bunday nuqtalar 2 ta, ya'ni A_{x_1} va A_{x_2}. $a=\pm 1$ bo'lganda esa 1 ta



$\cos x = a$ tenglama

$-1 \le \cos x \le 1$ bo'lgani uchun bu tenglama $|a|>1$ bo'lganda yechimga ega emas. $-1 \le a \le 1$ oraliqda tenglama yechimini topish uchun quyidagi ta'rifni kiritamiz.

$a \in [-1;\ 1]$ sonning ***arkkosinusi*** deb kosinusi a ga teng bo'lgan $x \in [0;\ \pi]$ songa aytiladi: agar $\cos x = a$ va $x \in [0;\ \pi]$ bo'lsa, $\arccos a = x$.

Ta'rifga ko'ra, $[0;\ \pi]$ oraliqda $\cos x = a$ tenglama bitta $x = \arccos a$ ildizga ega. $y = \cos x$ funksiya juft bo'lganligi uchun $[-\pi;0]$ oraliqda ham bitta $x = -\arccos a$ yechimga ega. Funksiyaning davri 2π. U holda $\cos x = a$ tenglamani yechish uchun $x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$ (2) formulani hosil qilamiz.

$\cos x = a$ tenglamaning muhim hollardagi yechimlarini keltiramiz:

$a=1$ bo'lganda $x=2\pi k,\ k\in Z;$ $a=-1$ bo'lganda $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z;$

$a=0$ bo'lganda $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

Tenglamani yeching: $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

△ $\cos x=0$ tenglamaning yechimi formulasidan $3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ni hosil qilamiz. Bundan, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. ▲

$\mathrm{tg}x=a$ tenglama

Bu tenglamani yechish uchun quyidagi ta'rifni kiritamiz. $a\in R$ sonning *arktangensi* deb, tangensi a songa teng bo'lgan $x\in(-\pi/2;\pi/2)$ songa aytiladi: agar $\mathrm{tg}x=a$ va $x\in(-\pi/2;\pi/2)$ bo'lsa, $\mathrm{arctg}\, a=x$.

$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ bo'lgani uchun tg$x$ birlik doiradagi $B\ (x;\ y)$ nuqta ordinatasining

absissasiga nisbatiga teng.

Eng sodda trigonometrik tenglamalar

Eng sodda trigonometrik tenglamalar uchun jadvalni keltramiz:

Tenglama	Yechimlari	Ba'zi xossalar
$\sin x=a$	$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z.$	$\arcsin(-a)=-\arcsin a,\ \lvert a\rvert\leqslant 1.$
$\cos x=a$	$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z.$	$\arccos(-a)=\pi-\arccos a,\ \lvert a\rvert\leqslant 1.$
$\mathrm{tg}x=a$	$x=\mathrm{arctg}\, a+\pi k,\ k\in Z.$	$\mathrm{arctg}(-a)=-\mathrm{arctg}\, a,\ a\in R.$

Savol va topshiriqlar

1. $\sin x=a$ tenglama qanday yechiladi? Misolda tushuntiring.
2. $\cos x=a$ tenglama qanday yechiladi? Misol keltiring.
3. $\mathrm{tg}x=a$ tenglama qanday yechiladi? Misol yordamida tushuntiring.
4. arcsin a soniga ta'rif bering. Misolda tushuntiring.
5. arccos a soniga ta'rif bering. Misolda tushuntiring.
6. arctg a soniga ta'rif bering. Misolda tushuntiring.

III modul. Geometriya. 12-mavzu: Geometriya fanining rivojlanish tarixi

Reja:

1. Geometriyaning rivojlanish tarixidan.

2. Geometriyaning rivojlanishiga ulkan hissa qo`shgan Olimlar.

Tayanch ibora va tushunchalar

*Geometriya rivojlanish tarixi, g*eometriyaning rivojlanishiga ulkan hissa qo`shgan Olimlar, aylana va aylana uzunligi, geometrik shakllar haqida ertak.

1.Geometriyaning rivojlanish tarixidan. Geometriya fani qadimiy tarixga ega bo‘lib, unga oid boshlang‘ich tushunchalar bundan 4000 yil muqaddam Misr va Bobilda vujudga kelgan. Geometrik bilimlarning vujudga kelishi odamlarning amaliy faoliyati bilan bog‘liq. Bu ko‘pgina geometrik figuralarning nomlarida o‘z aksini topgan. Masalan, trapesiya nomi yunoncha trapezion - so‘zidan olingan bo‘lib, «stolcha» ni bildiradi. «Chiziq» termini lotincha «limem» - «zig‘ir ip» so‘zidan hosil bo‘lgan.

Qadimdayoq geometriya aksiomalar sistemasiga asosan tuzilgan qat’iy mantiqiy fanga aylangan. U uzluksiz rivojlanib yangi teoremalar, g‘oyalar va usullar bilan boyib borgan.

Eramizdan avvalgi III asrda yunon olimi Yevklid «Negizlar» nomli asarini yozadi. Yevklid shu davrgacha bo‘lgan g5 eometrik bilimlarni jamladi va bu fanning tugallangan aksiomatik bayonini berishga harakat qildi. Yevkliddan so‘ng yashagan olimlar uning «Negizlar»iga ba’zi mavzularni qo‘shdilar, aniqliklar kiritdilar.

Geometriyaning hozirgi zamon fizikasi bilan bog‘lanishini kuzatish g‘oyat qiziqarli. Ko‘pincha matematikani boyitgan yangi tushunchalar fizika hamda ximiya va tabiatshunoslikning boshqa bo‘limlaridan keladi. Masalan, vektor mexanikadan olinganligi misol bo‘la oladi. Geometriyaning kelgusi rivojlanishida esa matematikaning ichki talabi va o‘ziga xos mantiqiy rivojlanishi natijasida uning ichida vujudga kelgan, yangi geometrik tushunchalar yangi zamonaviy fizikani yaratishga yo‘l ochdi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasi nisbiylik nazariyasini ochishga asos bo‘lib xizmat qildi.

Hozirgi zamon geometriyasi juda ko‘p yo‘nalishlarga ega. Ulardan biri geometriyani sonlar nazariyasi bilan, ikkinchisi kvant fizikasi bilan, uchinchisi esa matematik tahlil bilan yaqinlashtiradi. Hozirgi zamon matematikasi bo‘limlari shundayki unda geometriya ko‘proqmi, algebrami yoki tahlil (analiz) aytish qiyin.

Geometriyaning rivojlanishida Markaziy Osiyodan chiqqan matematiklar Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy, Abu Ali ibn Sino, Abdurahmon al-Xaziniy, Abul Vafo Buzjoniy, Umar Xayyom, Mirzo Ulug‘bek, G‘iyosiddin al-Koshiy va boshqalarning xizmati kattadir.

XVII asrda fransuz matematigi va filosofi Rene Dekart ishlari tufayli, butun matematikani, xususan geometriyani inqilobiy qayta qurgan koordinatlar usuli (metodi) vujudga keldi. Algebraik tenglik (tengsizlik) larni geometrik obraz (grafik) lar orqali talqin qilish va aksincha geometrik masalalarni yechishni analitik, formulalar, tenglamalar sistemalari yordamida izlash imkoniyatini paydo qildi. Matematika fanining yangi tarmog‘i ***analitik geometriya*** **vujudga keldi.** Analitik geometriyaning mohiyati, geometrik obyektlarga uning algebraik (analitik) ifodasini mos qo‘yib, ularning xususiyatlarini o‘rganishni, unga mos algebraik ifodalarni tekshirish orqali amalga oshiriladi.

1. Yevklid

(taxminan, eramizdan avvalgi 365-300 yillar)

Bu olim hayoti haqida deyarli aniq ma’lumotlar mavjud emas. Bizga u haqidagi ayrim uzuq-yuluq afsona tarzidagi xabarlar yetib kelgan xolos. Uning eng mashhur asari «Boshlang‘ichlar» ga birinchi bo‘lib sharh yozga Prokl (V asr), Yevklidning qachon va qayerda tug‘ilganligini yoki vafot etganligini aniq aytib bera olmagan. Proklning qayd etishicha «bu arbob alloma» Ptolomey I zamonasida yashagan ekan. Ba’zi biografik ma’lumotlar XII-asrga oid arab qo‘lyozmasida saqlanib qolgan: «Yevklid, Naukratning o‘g‘li «Geometr» nomi bilan mashhur, qadimgi zamon allomasi, kelib chiqishiga ko‘ra yunon, yashagan joyi Suriya, Tir o‘lkasida tavallud topgan».

Afsonalardan birida aytilishicha, podsho Ptolomey geometriyani o‘rganishni istab qoladi. Lekin bu oson emasligini bilib, u Yevklidni o‘z huzuriga chorlaydi va matematikani o‘rganish uchun oson yo‘llarni ko‘rsatishini so‘raydi. «Geometriya uchun shohona yo‘l yoq» - deb aytadi Yevklid, va bu jumla bizning davrimizga qanotli ibora ko‘rinishida yetib kelgan.

Podsho Ptolomey I, o‘zining davlatining shon shuhratini oshirish niyatida mamlakatga olimlar va shoirlarni jalb etgan va ular uchun Muza san’at saroylari – Museyonlar barpo etgan. Bu saroyda mashg‘ulot xonalari, botanika va hayvonot bog‘lari, rasadxona va munajjimlar ishlovchi idora, yolg‘iz holda ishlash uchun yakkalik xonalar va eng asosiysi katta va boy kutubxona mavjud edi. Saroyga taklif qilingan olimlar orasida Yevklid ham bo‘lib, u bungacha Misr poytaxti –

Iskandariyada matematika maktabi ochgan va uning o‘quvchilari uchun o‘zining fundamental ilmiy ishlarini darslik sifatida yozib bergan edi. Aynan Iskandariyada Yevklid o‘zining geometriyaga oid eng katta va mashhur asari – «Boshlang‘ichlar» ni yozib tugatadi. Taxminlarga ko‘ra bu asar eramizgacha bo‘lgan 325-yilda tugallangan ekan.

Yevklidning soha bo‘yicha avvalgi hamkasblari – Fales, Pifagor, Aristotel va boshqalar geometriyaning rivoji uchun katta ko‘lamdagi ishlarni amalga oshirishgan edi. Lekin, ularning barcha ilmiy ishlari geometriyaning alohida qism va yo‘nalishlariga taalluqli bo‘lib, yaxlit mantiqiy izchillikka ega bo‘lmagan.

Yevklidning zamondoshlarini ham va undan keyingilarni ham «Boshlang‘ichlar»dagi keltirilgan ma’lumotlar va ilmiy asoslarning mantiqiy izchilligi va tizimlashganligi lol qoldirib kelgan. «Boshlang‘ichlar» 13 ta kitobdan iborat yagona ilmiy asarni o‘zida namoyon qiladi. 13 kitobdan har biri, shu kitobda qo‘llaniladigan tushunchalarning (masalan, nuqta, to‘g‘ri chiziq, kesma va ho kazo) aniq ta’rifini keltirish bilan muqaddimalanadi. Keyin esa, isbotsiz ravishda qabul qilinadigan asosiy qoidalar (5 ta aksioma va 5 ta postulat) keltiriladi va butun Geometriya ular asosiga quriladi. Fanning taraqqiyot darajasi hali amaliy matematikaning maydonga chiqishini taqozo etmagan o‘sha davrlarda, «Boshlang‘ichlar»ning I-IV kitoblarida keltirilgan ilmiy tushunchalar geometriyaning deyarli barcha boshlang‘ich tamoyillarini qamrab olgan va Pifagorchilar maktabining darajasidan ancha o‘zib ketgan edi. V kitobda proporsiyalar haqida so‘z borib, u Knidlik Yevdoksning ta’limotlariga tutashib ketadi. VII-IX kitoblarda streometriyaga doir bilimlar bayon qilinadi, xususan, tekislikning yuzasi, irratsionallik nazariyasi, (ayniqsa X kitobda) haqida batafsil to‘xtalib o‘tiladi. XIII kitobda olim Teetetdan kelib chiquvchi «to‘g‘ri jismlar» bo‘yicha tadqiqotlar keltirilgan.

Yevklidning «Boshlang‘ichlar» asari hozirda Yevklid geometriyasi nomi bilan ma’lum bo‘lgan geometriya fanining asosi hisoblanadi. «Boshlangichlar»ning geometriyaga doir bo‘limlari o‘zining mazmuni jihatidan va material bayon etishdagi qat’iyligi jihatidan geometriyaning hozirgi maktab darsliklariga mos keladi. U fazoning metrik xususiyatlarini bayon qiladi va hozirgi zamon fanida Yevklid fazosi deb ataladi.

Yevklid fazosi, Galiley hamda Nyutonlar tomonidan asos solingan mumtoz fizika hodisalarining namoyon bo‘lish arenasi hisoblanadi. Bu fazo bo‘sh, cheksiz va izotrop bo‘lib uch o‘lchamga ega. Yevklid fazoda atomlar harakatini ilgari suruvchi g‘oyalariga asoslangan o‘ziga xos fazo geometriyasini yaratdi. Undagi eng soda geometrik obyekt bu – nuqta bo‘lib, Yevklidga ko‘ra nuqta tomonlarga ega emas va bo‘linmas hisoblanadi.

Fazoning cheksizligi uchta postulatlar bilan ifodalanadi:

- «Har qanday ikki nuqta orasidan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin»;
- «Kesmani har ikki tarafga cheksiz davom ettirish mumkin»;
- «Har qanday markaz orqali aylana chizish mumkin»

«Boshlang‘ichlar» haqida gapirilganda uning, Injildan so‘ng ikkinchi mashhur qadimgi yodgorlik asar deb baholanadi. Kitob o‘ziga xos, jozibador tarixga ega. Ikki ming yillik davomida u maktab o‘quvchilarining asosiy darsligi, geometriyaning kirish kursi sifatida Benazir manba bo‘lib xizmat qildi. «Boshlang‘ichlar» o‘z mazmun mohiyatiga ko‘ra soda va ravon tilda yozilganligi, o‘quvchi uchun o‘zlashtirishga qulayligi kabi ajoyib jihatlari tufayli, qadimda ham, yaqin o‘tmishda ham favqulodda mashhurlikka ega edi. Noshirlik ishi hali yo‘lga qo‘yilmagan Gutenberggacha bo‘lgan davrlarda, «Boshlang‘ichlar» turli mamlakatlar va shaharlarda ko‘plab tillardagi qo‘lyozmalar shaklida xattotlar tomonidan minglab nusxalarda ko‘chirib tarqatilgan. «Boshlang‘ichlar»ning qadimgi Misr papiruslariga yozilgan nusxasi, teriga yozilgan bitiklar ko‘rinishidagi namunasi, va qog‘ozga xattotlik usulida yozilgan nusxalari ma’lum. Mazkur asarning amaliy ahamiyati shunda ediki, geometrik bilimlar, kundalik turmushda, uylar, bino va inshootlarni loyihalashda, dastgoh, asbob uskunalarni yasashda va ayniqsa harbiy sohalarda eng zaruriy bilimlar hisoblanardi. XX asrgacha bo‘lgan so‘nggi to‘rt asr ichida «Boshlang‘ichlar» 2500 marotaba nashr etilgan: o‘rtacha bir yilda 6 – 7 nashrda chop etilgan. XX asrgacha mazkur kitob Geometriya fanidan nafaqat maktablarda, balki, universitetlarda ham asosiy darslik bo‘lib hisoblangan.

Yevklidning «Boshlang‘ichlar» asarini to‘liq o‘rganib va mukammal sharhlab chiqqan eng birinchi olimlar – o‘rta asr musulmon sharqi matematik allomalari edi. Musulmonlardan «Boshlang‘ichlar»ning arab tilidagi nusxalari italyan matematiklari orqali Yevropa uyg‘onish davri matematiklari e’tiboriga yetib bordi va lotin tili hamda boshqa Yevropa tillariga muttasil o‘girildi. Dastlabki bosma nashri 1533-yilda Bazelda paydo bo‘ldi. Shunisi qiziqki, «Boshlang‘ichlar»ning ingliz tilidagi eng birinchi tarjima nusxasi, olim yoki tarjimon tomonidan emas, balki, Londonlik savdogar Genri Billingveem tomonidan 1570-yilda amalga oshirilgan va chop ettirilgan.

Yevklidning yana bir qisman saqlanib qolgan matematikaga oid asari ma’lum bo‘lib, unda olim Eng katta umumiy bo‘luvchi – EKUBni topish usullarini yoritib bergan. Mazkur usul tarixda «Eratosfen hisobi» nomi bilan mashhur bo‘lgan va berilgan sonda tub sonlarni keltirib chiqarish masalalarini ko‘radi.

Shuningdek Yevklid Geometrik Optikaning ilk asoslarini ham qo‘ygan va bu boradagi o‘z g‘oyalarini «Optika» va «Katoptrika» asarlarida bayon qilgan. Geometrik Optikaning asosiy tushunchasi bu – to‘g‘ri chiziq bo‘yicha tarqalayotgan nur. Yevklidning fikricha, yorug‘lik nuri inson ko‘zidan chiqib keladi (ko‘rish nurlari nazariyasi), va bu geometrik yashashlar uchun muhim ahamiyat kasb etadi. U qabariq ko‘zguning fokuslovchi va akslantirish qonuniyatlarini aniq ifodalaydi. Lekin fokusning aniq masofasini topish usullarini keltirib chiqara olmagan. Har qanday holatda ham fizika tarixida Yevklidning geometrik optika bo‘yicha tutgan o‘rni juda katta.

Albatta, Yevklid fazosining barcha xususiyatlari birdaniga kashf etilgan emas. Uning ko‘plab jihatlari asrlar davomida, ilmiy tafakkurning uzoq izlanishlari natijasida maydonga chiqqan. Lekin, o‘sha barcha ilmiy ishlarga «Boshlang‘ichlar» asari, o‘z nomiga munosib ravishda ilmiy qanot bergan. Hozirda ham Yevklid geometriyasining asoslarini bilish butun dunyo bo‘yicha ta’lim jarayonlarining muhim shartlaridan biri hisoblanadi.

Geometriya fani qadimiy fanlardan bo`lib, unga oid dastlabki tushunchalar bundan 3500 – 4000 yil avval Misr, Bobil va O`rta Osiyoda vujudga kela boshlagan. Qadimda yer maydonlarini o`lchash, idishlar, savatlar va don omborlarini hajmini topish bilan shug`ullanganlar. Geometrik ma’lumotlar va dalillar ham yuza va hajmlarni topish usullaridan iborat bo`lgan.

Miloddan avvalgi VII asrda geometrik ma’lumotlar bilan shug`ullanish Yunonistonga ko`chdi. Yunon faylasuflari yangi dalillar topdilar va geometrik bilimlarni izchil sistemaga soldilar. Yunonlarning bu harakatlari miloddan avvalgi III asrda ***Yevklid*** tomonidan yaratilgan “Negizlar” nomli asari bilan yakunlandi. Bu asar 13 tomdan iborat bo`lib, uning geometriyaga bag`ish-

langan tomlari hozirgi davrda o`rta maktablardagi geometriya kursiga yaqin. Shuning uchun maktab geometriyasini ***Yevklid geometriyasi*** deb ham yuritiladi.

Yevkliddan so`ng Yunonistonda ***Arximed, Apolloniy, Eratosfen*** singari buyuk olimlar geometriyani yangi ma’lumotlar bilan boyitdilar. Ko`p jismlar-ning hajmi va og`irlik markazini aniqlash usullarini, turli sohadagi suzuvchi sohalarning muvozanatda bo`lish masalasini ham Arximed aniqlab bergan.

Quldorlik tuzumi inqirozga uchrashi bilan Yunonistonda geometruyaga kiritilayotgan yangliklar sustlashib, geometriyaning rivojlanishi arab mamlakatlari, O`rta Osiyo, Hindiston va Xitoyga ko`chdi. Ayniqsa, O`rta asrlarda tabiyot, matematikaning turli sohalari kabi geometriyaning taraqqiyoti uchun ham O`rta Osiyo markaziga aylandi. Biz O`rta asrlarda geometriyaning rivojlanishiga ulkan hissa qo`shgan buyuk bobokolonlarimizning geometriya sohasidagi ijodi bilan qisqacha tanishamiz.

Muhammad Xorazimiy (783 – 850) o`zining “Hind hisobi haqida”, “Al-jabr va al-muqobala amallaridan qisqacha kitob” kabi asarlarida ko`plab geometrik masalalar va ularni yechish usullari keltirilgan. Xususan, yer maydonlarini hisoblashda, suv inshootlarini qurishda zarur bo`ladigan masalalarni yechish yo`llarini ko`rsatgan.

Xorazimiy farg`onalik do`sti Ahmad Farg`oniy bilan Bag`dodda rasadxona qurishga boshchilik qilgan. Xorazimiy boshchiligida olimlar rasadxonadagi asboblar yordamida koinot sirlarini o`rgandilar, mingdan ortiq yilduzni tekshirdilar, ularning joylashish xaritasini tuzdilar, Yer sharining aylana uzunligini aniqladilar, ko`plab xaritalar tuzdilar.

Abu Rayhon Beruniy (973 – 1048) "Munajjimlik san'atidan boshlang`ich tushunchalar" degan asarida va Abu Ali Ibn Sino bilan bo`lgan yozishmalarida geometriyaning asosiy tushunchalari haqida qimmatli fikrlar bergan. Berunuyning "Aylanaga ichki chizilgan siniq chiziq xossasi yordamida uning vatarini aniqlash" degan mashhur risolasi geometriyaning turli muammolariga bag`ishlangan bo`lib, bunda Arximed teoremasiga turli isbotlar keltiriladi, bir qancha masalalar shu teorema yordamida yechilishi ko`rsatiladi va o`zining ko`pgina tadqiqotlarida shu teoremaga suyanadi.

Beruniy "Qonuni Mas'udiy" va "Hindiston" nomli asarlarida hisoblash geometriyasi bilan shug`ullanib, aylanaga ichki chizilgan muntazam ko`pburchak tomonlarini hisoblagan. Bu asarlarda geometrik yasashga doir masalalar yechish bayon etilgan. Masalan, burchakni teng uchga bo`lish haqidagi mashhur qadimiy masalani yechishning 12 xil usuli keltiriladi. "Yulduzlarni proyeksiyalash haqida" va "Osori boqiya" asarlarida Yer va osmon sferasining kartografik proyeksiyalashning eng yaxshi usulini ko`rsatgan.

Beruniy "Munajjimlik san'atidan boshlang`ich tushunchalar" degan asarining geometriya bo`limida asosiy geometrik shakllar, ularning tariflari

va xossalari, tekislikdagi shakllarning yuzlarini topish qoidalari berilgan. Jumladan, aylana, uning ta'rifi, uzunligi va doira yuzini topish qoidalari bayon qilingan. Geometrik jismlar, ular sirtlarining yuzlari va hajmlarini topish uchun qoidalar ko`rsatilgan. Konus kesimlaridan iborat ikkinchi tar- tibli egri chiziqlarning hosil qilinishi, ya'ni to`g`ri doiraviy konusni turli vaziyatdagi tekisliklar bilan kesilishi natijasida kesimda aylana, ellips, giperbola, parabola va bir juft to`g`ri chiziq hosil bo`lishi haqida ma'lumotlar bergan. Bu asarda sharga ichki chizilgan besh xil muntazam ko`pyoqlilar yasash mumkinligi aytiladi va ularga ta'riflar beriladi. Beruniyning bu kitobi sharq mamlakatlarida uzoq vaqt darslik bo`lib xizmat qilgan.

Abu Ali Ibn Sino (980 – 1037) jahonga mashhur tabib, tibbiyot sohasidagi olim bo`lib tanilgan bo`lsa-da, uning falsafa, astranomiya, matematika, tabiiyot va boshqa sohalardagi kashfiyotlari ham mashhurdir. Ibn Sino qadimgi – Aristotel , Yevklid, Ptolemey, Pifagor kabi mutafakkirlarning asarlarini o`rgandi va tahlil qildi. Allomaning boy ilmiy merosidan o`rin olgan "Kitob un-Najot" kitobi to`rtta qism – mantiq, fizika, matematika va metafizikadan iborat. Kitobning matematika qismida geometriyaga oid bilimlar ham rivojlantirilgan.

Umar Xayyom (1044 – 1131) juda ko`p xalqlar tiliga tarjima qilingan sermazmun, falsafiy teran, hayotiy ruboiylari bilan mashhur shoir sifatida tanilgan bo`lsa-da, aslida u astranomiya, matematika, xususan, geometriya fani taraqqiyotiga katta hissa qo`shgan taniqli olimdir. Umar Xayyom o`zining “Al-jabr va al-muqobala, asarlarining isboti haqida” asarida uchinchi darajali har qanday tenglamani geometrik metod bilan yechish mimkinligini isbotlab bergan.

Umar Xayyom parallellar nazariyasi bo`yicha chuqur izlanishlar olib borgan. Geometriyaga oid “Yevklid prinspining qiyin joylari haqida risola”
si parallellar nazariyasining rivojlanishida, noyevklid geometriyaning vujud-
ga kelishida muhim o`rin tutgan.
***Mirzo Ulug`bek*** (1394 – 1449) O`zining barcha astronomiyaga oid kashfiyotlarini geometriyaga oid hisob-kitoblar zaminida amalga oshirgan. U “Yangi astronomiya jadvallari” kitobida keltirilgan 1019 ta yulduzning fazoviy vaziyatlarini aniqlashda son-sanoqsiz hisob-kitob va geometrik yasash ishlarini bajargan.

Ulug`bekning “Astronomiya maktabi” namoyondalaridan biri – ***Jamshid G`iyisiddin Ali Qushchi*** (1404 – 1474) arab va G`arb mamlakatlarida al-Koshi nomi bilan matematik olim sifatida mashhur bo`lgan. Uning “Aylana uzunligi haqida kitob” asarida aylanaga ichki va tashqi chizilgan muntazam ko`pburchak tomonlari sonini cheksiz ikkilantirish yo`li bilan aylana uzunligini nisbati 3,1415826535891932… ekanligini hisoblagan. Hozirgi paytda elektron hisoblash mashinasi yordamida π ning butun sondan keyingi 2000 dan ortiq raqami aniqlangan. Ali Qushchi tomonidan hisoblangan butun sondan keyingi dastlabki 16 raqami hozirgi zamondagi

π ning shu dastlabki qiymatlariga aniq mos keladi.

Biz matematika fanining, xususan, geometriya fanining shakllanshiga va taraqqiyotiga O`rta osiyolik mutafakkirlarning hissasi ulkan ekanligidan faxrlanamiz.

Geometriya eng qadimgi fanlardan biri bo`lib, yunonchadan ***geo – yer, metero – o`lchash,*** **ya’ni** ***yer o`lchash*** degan ma’noni bildiradi.

Biz geometriya fanini ikkiga – planimetriya va stereometriya bo`limiga bo`lib o`ganganamiz. Lotincha planum – tekis, tekislik, stereo – fazo demakdir.

Planimetriya bo`limida barcha nuqtalari bilan bir tekislikka joylashgan tekis (yassi) shakllar va ularning xossalari, ***stereometriya*** bo`limida fazoviy, ya’ni barcha nuqtalari bir tekislikka joylashmagan geometrik shakllar (jismlar) va ularning xossalari o`rganiladi.

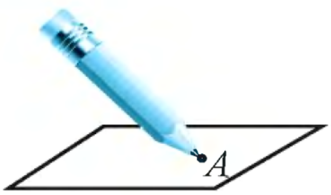
13-mavzu: Geometriyaning asosiy tushunchalari

Reja:

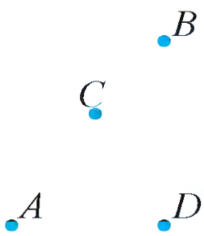
1. Asosiy geometrik shakllar
2. Kesma.
3. Tekilik, to'g'ri chiziq, nur

Tayanch iboralar va tushunchalar: Asosiy geoemerik hakllar, kesma, tekislik to'g'ri chiziq, nur.

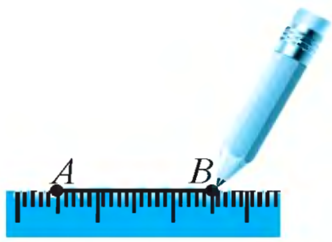
Nuqta eng sodda geometrik shakldir. Uni tasvirlash uchun daftarga uchli qalamni tekizish kifoya (1- rasm). Nuqtalar katta lotin harflari bilan belgilanadi. 2- rasmda A, B, C, D nuqtalari tasvirlangan.



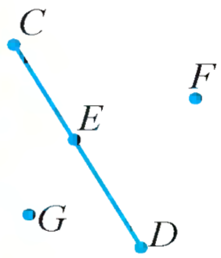
1- rasm



2- rasm



3- rasm



4- rasm

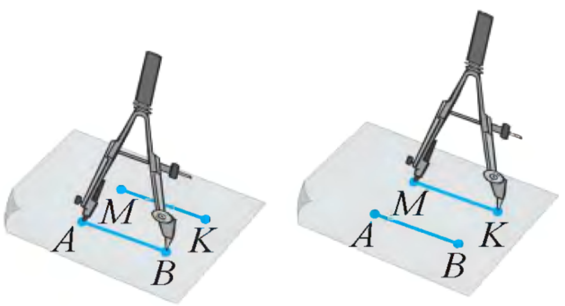
Daftaringizda A va B nuqtalarni belgilang. Ularni chizg'ich yordamida tutashtirsangiz *AB kesma* hosil bo'ladi (3-rasm). Uni «*BA kesma*» deb belgilash ham mumkin. A va B nuqtalar *AB kesmaning uchlari* deb ataladi.

Istalgan ikki nuqtani faqat bitta kesma bilan tutashtirish mumkin.

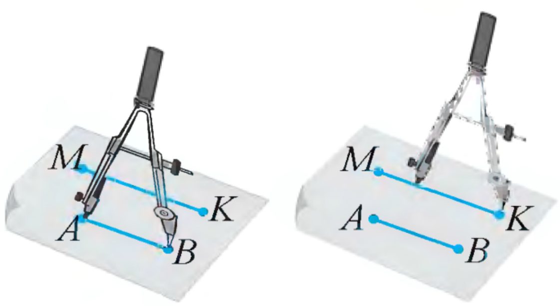
4-rasmda CD kesma tasvirlangan. E nuqta bu kesmaga tegishli va u C va D nuqtalar orasida yotadi. F va G nuqtalar esa bu kesmaga tegishli emas, chunki ular bu kesmada yotmaydi.

Kesmalarni sirkul yordamida 5–6-rasmlardagidek taqqoslash mumkin. 5-rasmda AB va MK kesmalar *teng* bo'ladi. Bu $AB = MK$ tarzda yoziladi.

6-rasmda tasvirlangan AB kesma MK kesmaning bo'lagidan iborat. Shuning uchun AB kesma MK kesmadan *qisqa*, MK kesma esa AB kesmadan *uzun*.



5- rasm

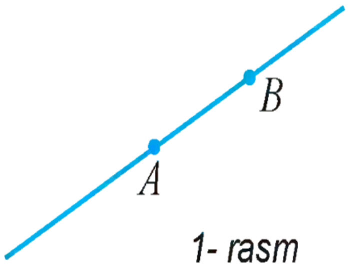


6- rasm

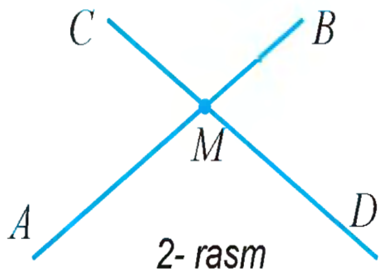
TEKISLIK, TO‘G‘RI CHIZIQ VA NUR

Keling, chizg‘ich yordamida tekislikda berilgan AB kesmani uning har ikki uchi tomonga istalgancha davom ettiraylik (1-rasm). Natijada, *to‘g‘ri chiziq* hosil qilamiz. U «AB *to‘g‘ri chiziq*» yoki «BA *to‘g‘ri chiziq*» tarzda ifodalanadi.

To‘g‘ri chiziqning cheki (oxiri) yo‘q. U har ikki uchi tomonga cheksiz davom etgan.



1- rasm



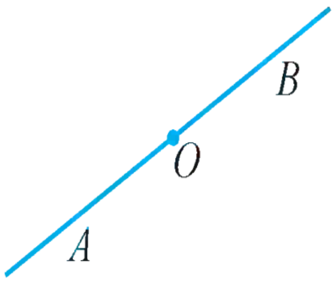
2- rasm

Tekislikda A va B nuqtalar berilgan bo‘lsin (1-rasm). Chizg‘ich yordamida bu nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu nuqtalardan yana bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazishning iloji yo‘q.

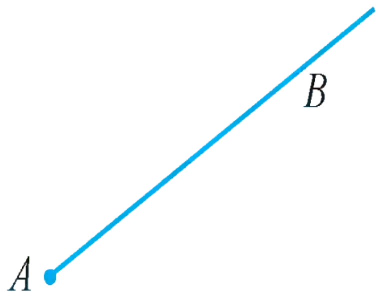
Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Agar ikki to‘g‘ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular bu nuqtada *kesishadi* deyiladi (2-rasm). M nuqta AB va CD to‘g‘ri chiziqlarning *kesishish nuqtasi* boladi.

AB to‘g‘ri chiziqda olingan O nuqta uni ikki bo‘lakka ajratadi (3- rasm). Bu bo‘laklarning har biri, O nuqta bilan birgalikda *nur* deb ataladi. O nuqta *nurning uchi (boshi)* deb ataladi.



3- rasm



4- rasm

Nurning oxiri (cheki) yo‘q.

Savollarga javob bering!

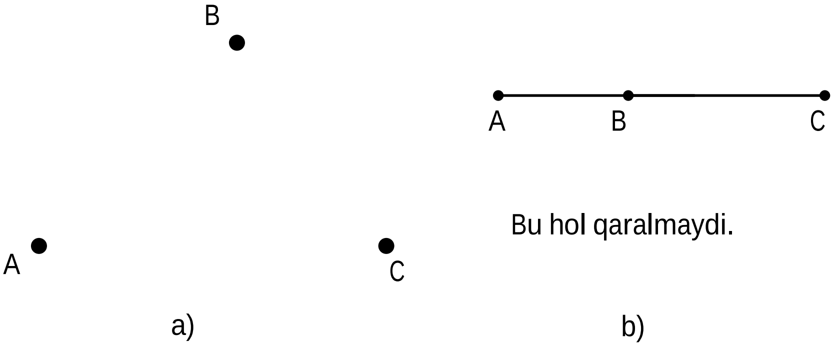
1. Tekislik haqida tasavvur beradigan bir necha narsalarni ayting?
2. To‘g‘ri chiziqning cheki (oxiri) bormi?
3. Ikki nuqtadan nechta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?
4. Ikki to‘g‘ri chiziq qachon bir-biri bilan kesishadi?
5. CD to‘g‘ri chiziqda olingan O nuqta uni qanday nurlarga ajratadi?

14-Mavzu: Uchburchaklar. Uchburchaklar turlari va yuzalarini hisoblash

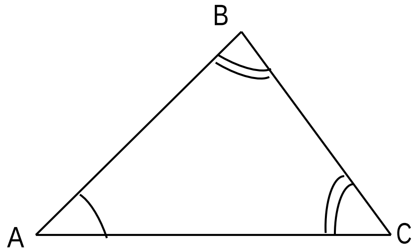
Reja:

1. Uchburchaklar.
2. Uchburchaklarning turlari.
3. Uchburchaklarning perimetri va yuzlarini hisoblash.

Uchburchaklar. Uchburchak, uning perimetri tushunchasi bilan quyi sinflardan tanishasiz. Tekislikda A, B, C nuqtalarni belgilaylik (2-a, b rasmlar).



2-rasm.



3-rasm.

A, B, C nuqtalarni AB, AC, BC kesmalar yordamida tutashtiramiz (3-rasm).

Tekislikning AB, BC, AC kesmalar bilan chgaralangan qismi ABC uchburchak deyiladi va ΔABC kabi belgilanadi.

A, B va C nuqtalar uchburchakning uchlari, AB, BC, AC kesmalar uchburchakning tomonlari deyiladi (3-rasm).

Uchburchakning ixtiyoriy bir tomoni qolgan ikki tomoni yig'indisidan kichik, ammo ular ayirmasidan katta bo'ladi.

$AC-BC<AB<AC+BC.$

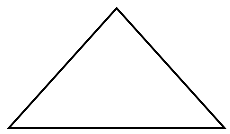
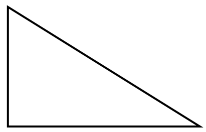
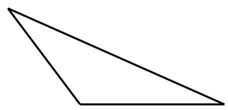
$AB-BC<AC<AB+BC.$

2. Uchburchak turlari. Uchburchakda uchta burchak bor. Ularning gradus o'lchovlari yig'indisi 180^0 ga teng bo'ladi (3-rasm):

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^0.$$

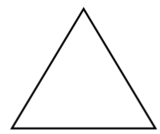
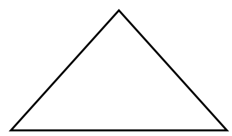
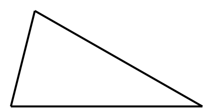
Burchaklariga ko'ra, uchburchaklar: *o'tkir burchakli, to'g'ri burchakli, o'tmas burchakli* bo'lishi mumkin (1-jadvalga qarang).

1-jadval

Uchburchakning burchaklari	Uchburchakning atalishi	Ko'rinishi (rasmi)
hamma burchaklari o'tkir burchak	o'tkir burchak uchburchak	
Burchaklaridan biri to'g'ri burchak	to'g'ri burchakli uchburchak	
Burchaklaridan biri o'tmas	o'tmas burchakli uchburchak	

Tomonlariga ko'ra, uchburchaklar: *teng tomonli* (*muntazam*), *teng yonli, turli tomonli* bo'lishi mumkin (2-jadval).

2-jadval

Uchburchakning tomonlari	Uchburchakning atalishi	Ko'rinishi (rasmi)
Uchala tomoni o'zaro teng: AB=BC=AC	Teng tomonli (muntazam) uchburchak	
ikkita tomoni o'zaro teng: AB=BC	teng yonli uchburchak	
uchala tomonining uzinliklari har xil: $AB \neq BC \neq AC$	turli tomonli uchburchak	

ΔABC teng yonli, ya'ni AB=BC bo'lsa, odatda, AC tomon uchburchakning asosi deyiladi.

Uchburchakning perimetri. Uchburchakning uchala tomoni uzunliklari yig'indisi uning perimetri deyilishini eslatib o'tamiz. Rasmdagi ΔABC ning perimetri P=AB+BC+AC ga tengdir.

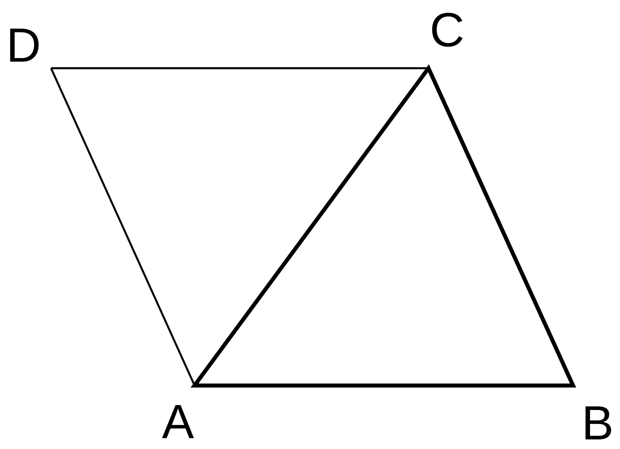
Uchburchakning yuzi.

ABC berilgan uchburchak bo'lsin. Bu uchburchakni rasmda ko'rsatilganidek ABCD parallelogramgacha to'ldiramiz. Parallelogrammning yuzi ABC va SDA uchburchak yuzlarining yig'indisiga teng. Bu u chburchaklar teng bo'lgani uchun parallelogramning yuzi ABC uchburchak yuzining ikkilanganiga teng.

Parallelogramning AB tomoniga mos balandligi ABC uchburchakning AB tomoniga utkazilgan balandligiga teng.

Bundan uchburchakning yuzi uning tomoni bilan shu tomoniga tushirilgan balandligi ko'paytmasining yarimga teng.

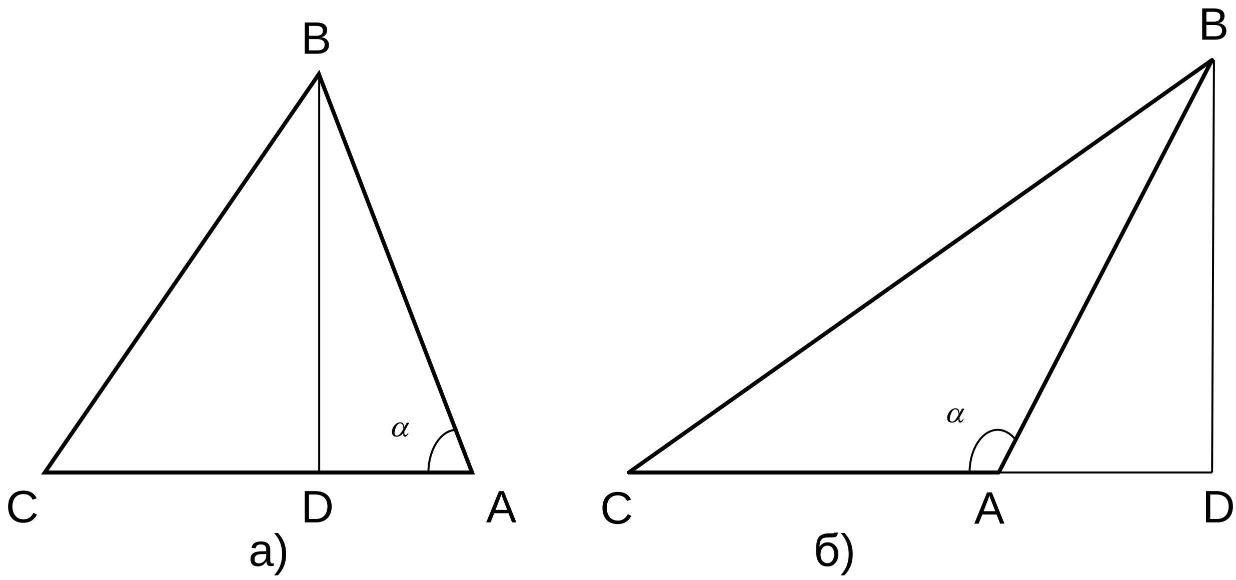
$$S = \frac{1}{2}ah$$



5-rasm

Endi uchburchakning yuzi uni istalgan ikki tomoni ko'paytmasini shu tomonlar orasidagi burchak sinusiga ko'paytirilganing yarmiga teng ekinini ko'rsatamiz.

ABC – berilgan uchburchak bo'lsin



6-rasm

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

ABC uchburchakning BD balandligini o'tkazamiz. Ushbu tenglikga egamiz:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

ABD to'g'ri burchakli uchburchakdan, agar α o'tkir burchak bo'lsa, $BD = AB \sin \alpha$, agar α o'tmas burchak bo'lsa, $BD = AB \sin(180^\circ - \alpha)$. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ shu sababli har qanday holda $BD = AB \sin \alpha$. Shunday qilib **uchburchakning yuzi** $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Uchburchakning yuzi uchun Geron formulasi.

Uchburchakning yuzi uchun $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **Geron formulasidir**. Bunda a,b,c - uchburchak tomonlarining uzunliklari, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ - yarim perimetr.

Uchburchak yuzasini hisoblash formulalari:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)} \text{ (Geron formulasi);}$$

$$S_\Delta=\frac{abc}{4R},$$

$$S_\Delta=pr.$$

Bu yerda va bundan keyin *a,b,c* – uchburchakning tomonlari h_a,h_b,h_c uchburchakni mos tomoni balandliklari; α,β,γ - uchburchakni mos ravishda *a, в*, *c* tomonlari qarshisidagi ichki burchaklari;

$r=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ - yarim perimetr; *R* – uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi; r-uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi, S_Δ – uchburchak yuzi.

Uchburchak medianasi ta'rifi va xossalari:

Uchburchakni medianasi deb, uchburchakni uchi bilan qarshisidagi tomon o'rtasini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

Mediananing asosiy xossalari:

a) uchburchakni o'rta chizig'i deb ataluvchi tomonlari o'rtasini tutashtiruvchi kesmalar, tomonlarga parallel va mos tomon yarmiga teng;

b) uchburchakning medianalari bir nuqtada kesishadi va uchidan boshlab hisoblaganda 2:1 nisbatda bo‘linadi;

s) mediana uchburchakni ikkita tengdosh uchburchakka ajratadi;

d) O nuqta ΔABC ni medianalari kesishgan nuqtasi bo‘lsin, $\Delta ABO, \Delta BCO$, ΔACO uchburchaklarni yuzlari teng va ularning yig‘indisi ΔABC yuzasiga teng bo‘ladi.

Mediana va tomon uzunliklarini bog‘lovchi formulalarni esda tutish lozim:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}\ ;$$

$$m_a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2 - ac\cos\beta}\ ;$$

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}\ .$$

Bu yerda m_a, m_b, m_c - ΔABC uchburchakning mos ravishda a, b, c tomonlariga o‘tkazilgan medianalar uzunliklari (xuddi shu kabi formulalarni qolgan tomon va medianalar uchun ham hosil qilish mumkin).

Uchburchak balandligi ta’rifi va hisoblash formulalari:

Uchburchakning berilgan uchidan tushirilgan balandligi deb, shu uchidan uning qarshisidagi tomoni yotgan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarga aytiladi.

Ixtiyoriy uchburchak balandliklari, tomonlari, burchaklari va ichki chizilgan aylana radiusini bog‘lovchi formulalar:

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta, \qquad h_b = c\sin\alpha = a\sin\gamma, \qquad h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha\ ,$$

$$h_a = \frac{2S_\Delta}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}\ ,$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r};$$

Uchburchak bissektrisasi ta'rifi va xossalari:

Uchburchakni berilgan uchidan o'tkazilgan bissektirsasi deb, uchburchak burchagi bissektirsasining shu uchni uning qarshi tomondagi nuqta bilan tutashtiruvchi kesmasiga aytiladi.

Uchburchak bissektrisasi asosiy xossalari:

a) uchburchak uchta bissektrisasi bir nuqtada kesishadi, bu nuqta uchburchakni ichki nuqtasi bo'lish bilan birga ichki chizilgan aylana markazi bo'ladi;

b) uchburchak bissektrisasi tomonlaridan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rnidir;

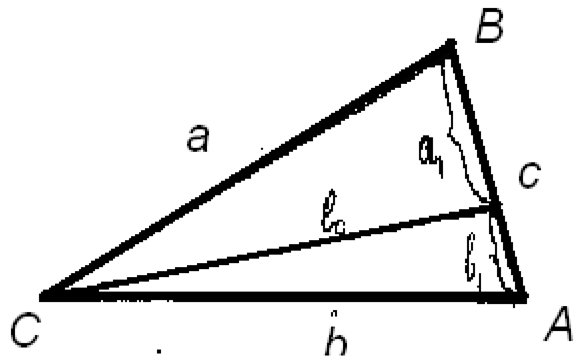
s) uchburchak bissektrisasi qarshisidagi tomonni shu burchakka yopishgan tomonlariga proporsional qismlarga ajratadi.

Uchburchakning tomonlari va bissektrisalarini bog'lovchi formulalarni esda tutish foydali:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b};$$

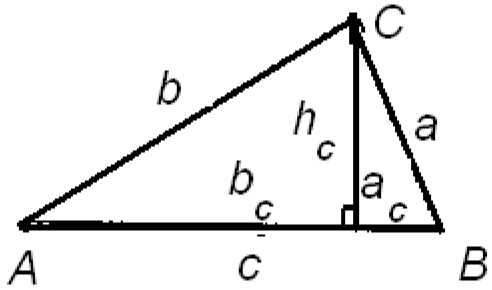
$$l_c = \frac{\sin\beta}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{ac}{b+a} = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+c}$$



l_c - ΔABC uchburchakni C uchidan chiqqan bissektrisasi uzunligi;

Uchburchakning maxsus hollardagi medianasi, bissektrisasi, balandligi va tomonining ba’zi bir xossalari:

a) teng yonli uchburchakning balandligi, bissektrisasi medianasi ustma-ust tushadi;



b) teng tomonli uchburchakning har bir uchidan tushirilgan medianasi, bissektrisasi, balandligi ustma-ust tushadi;

s) to‘g‘ri tomonli uchburchakda $a, в$ - katetlari va c- gipotenuzasi quyidagi tenglik bilan bog‘langan (Pifagor teoremasi)

$a^2 + b^2 = c^2$;

d) to‘g‘ri burchakli uchburchakning kateti gipotenuzasi va shu katetining gipotenuzadagi proyeksiyasiga o‘rta proporsional;

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}; \qquad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c};$$

d) to‘g‘ri burchakli uchburchakning to‘g‘ri burchagidan tushirilgan balandligi, katetlarning gipotenuzadagi proyeksiyalariga o‘rta proporsional:

$$\frac{b_c}{h_c} = \frac{h_c}{a_c};$$

e) to‘g‘ri burchakli uchburchakda tomonlar va burchaklarni bog‘lovchi tengliklar:

$$a = c\sin\alpha, \quad b = c\cos\alpha.$$

<u>1-masala.</u> To‘g‘ri burchakli uchburchakning perimetrlari 132 ga teng, tomonlari kvadratlari yig‘indisi 6050. Katta va kichik katetlari orasidagi farqini toping.

Yechish:

a, b - katetlar; c - gipotenuza va $a > b$ bo‘lsin. Masala shartidan quyidagi tengliklar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} a+b+c=132 \\ a^2+b^2+c^2=6050 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamaga uchinchi tenglamani qo‘ysak, $c^2=3025$ yoki $c=55$. U holda a va b larni quyidagi sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} a+b=77 \\ a^2+b^2=3025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=77-a \\ a^2+(77-a)^2=3025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=77-a \\ a^2-77a+1452=0 \end{cases}$$

bu yerdan a ni ikkita qiymatini hosil qilamiz: $a_1=44,\ a_2=33$, xuddi shuningdek b ni ham mos ikkita qiymatini hosil qilamiz: $b_1=33,\ b_2=44$ $в_1$=33, $в_2$=44.

$a > b$ shartga ko‘ra $a=44, b=33$. Bundan $a-b=11$.

Javob: 11.

Savollarga javob bering.

1. Uchburchak deb nimaga aytiladi?

2. Uchburchakning perimetri deb nimaga aytiladi?

3. Uchuburchak medianasini topish formulasini ayting?

4. Uchburchak balandligini topish formulasini ayting?

5. Uchburchak yuzini topish formulasini ayting?

15-mavzu: To’rburchaklar. To’rtburchaklar turlari va yuzalarini hisoblash

Reja:

1. To'rtburchaklar.

2. Trapetsiya va uning xossalari

3. Paralellogrammning xossalari

3. To'g'ri to'rtburchak.

4. Romb va uning xossalari

5. Kvadratning xossalari

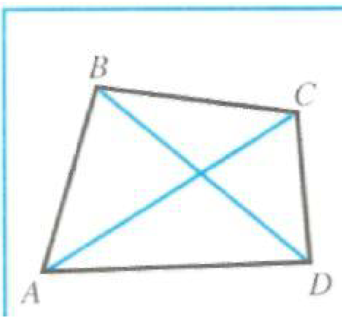
Tayanch iboralar va tushunchalar: To'rtburchaklar, Paralellogrammning xossalari, To'g'ri to'rtburchakning xossalar, Romb va uning xossalari, Kvadratning xossalari, Trapetsiya va uning xossalari.

1. To'rtburchaklar. To'rtta nuqta va bu nuqtalarni ketma-ket tutashtiruvchi to'rtta kesmadan iborat shakl ***to'rtburchak*** deyiladi. Bunda nuqtalardan hech qanday uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmasligi, ularni tutashtiruvchi kesmalar esa kesishmasligi kerak. Berilgan nuqtalar to'rtburchakning *uchlari,* ularni tutashtiruvchi kesmalar esa *tomonlari* deyiladi. To'rtburchakning umumiy uchga ega bo'lgan tomonlari *qo'shni tomonlari* deb, umumiy uchga ega bo'lmagan tomonlari esa *qarama-qarshi tomonlari* deb ataladi. Bir tomonga tegishli bo'lgan uchlari *qo'shni uchlar* deb, qolgani esa *qarana-qarshi uchlar* deb ataladi. Qarama-qarshi uchlarni tutashtiruvchi kesmalar to'rtburchakning *diagonallari* deyiladi.

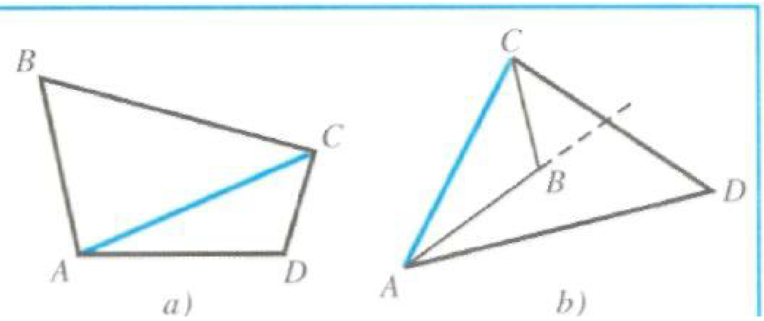
To'rtburchakni belgilashda yonma-yon turgan uchlar ketma-ket kelish tartibida aytib chiqiladi. Masalan, 1-rasmda tasvirlangan to'rtburchak bunday belgilanishi mimkin: *ABCD, BCDA, CDAB* va hokazo. Ammo *ABDC* deb belgilash mumkin emas *(B* va *D* — qo'shni bo'lmagan uchlar).

Masalan, 1- rasmda *AB* va *AD* — qo'shni tomonlar, *AB* va *CD* — qarama-qarshi tomonlar; *A* ga *B* va *D* uchlar — qo'shni uchlar, C esa qarama-qarshi uch bo'ladi; *AC va BD* kesmalar diagonallardir.

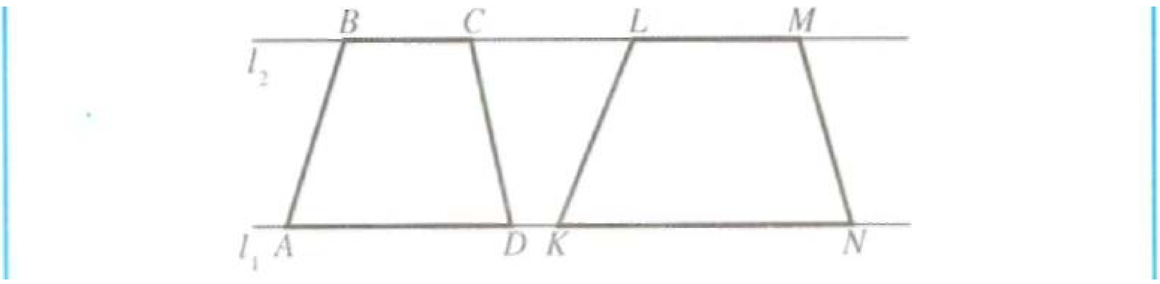
2-*a* rasmda qavariq to'rtburchak, 2-*b* rasmda esa botiq to'rtburchak tasvirlangan. Botiq to'rtburchaklarda diagonallardan biri, ya'ni *AC* to'rtburchak ichki qismiga tegishli emasligiga ahamiyat bering.



1-rasm



2-rasm



2. Trapetsiya. To'rtburchaklarning burchaklari yoki qarama-qarshi tomonlarining o'zaro joylanishiga qarab ular turli sinflarga ajtratiladi. Shu sinflardan eng soddasi — trapetsiya bilan tanishamiz.

To'rtburchakda ikki juft qarama-qarshi tomonlari bor. Shunday to'rtburchaklar mavjudki, ularda bir juft qarama-qarshi tomonlari parallel to'g'ri chiziqlarda yotishi mumkin. Masalan, l_1, l_2 parallel to'g'ri chiziqlar-ning har biridan ikkitadan nuqta olib, ularni o'zaro tutashtirsak (3-rasm), *ABCD* yoki *KLMN* to'rtburchaklarning bir juft qarama-qarshi tomonlari parallel bo'ladi.

T **a** ' **r** **i** f . *Ikkita tomoni parallel, qolgan ikki tomoni parallel bo’lmagan to'rtburchak* ***trapetsiya*** *deb ataladi.*

Trapetsiyaning parallel tomonlari uning *asoslari*, parallel bo'lmagan tomonlari esa *yon tomonlari* deb ataladi. Trapetsiyaning asoslari yotgan to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa *trapetsiyaning balandligi* deyiladi (4-rasm). Trapetsiya asoslariga perpendikular bo'lgan har qanday kesma, uning balandligi sifatida olinishi mumkin, chunki parallel to'g'ri chiziqlar nuq-talari orasidagi masofalar o'zaro teng.

Teorema: Agar to'rtburchak biror qo'shni ikki burchagining yig'indisi 180º bo'lsa, bunday to'rtburchak trapetsiya bo'ladi.

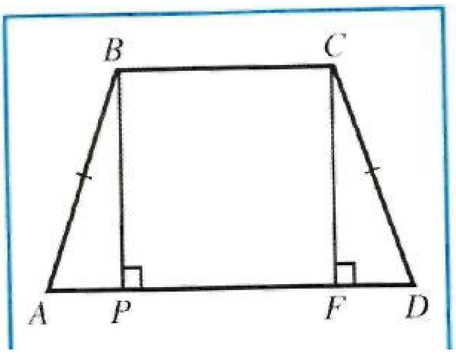
Teng yonli trapetsiyaning xossasi

ABCD teng yonli trapetsiyani qaraylik. Bunda *AD* = *a* – katta asosi, *BC* = *b* – kichik asosi bo'lsin. Kichik asosining *B* uchidan *BP* balandlik o'tkazaylik (5-rasm). Balandlikning *P* asosi *AD* asosni *AP* va *PD* kesmalarga ajratsin.

Teorema: Teng yonli trapetsiyaning o'tmas burchagi uchidan o'tkazilgan balandlik katta asosini uzunliklari **asoslari ayirmasining yarmiga va asoslari yig'indisining yarmiga teng bo'laklarga ajratadi**, **ya'ni:**

$$AP = \frac{a-b}{2}, \qquad PD = \frac{a+b}{2}.$$

I s b o t. C uchidan $CF \perp AD$ ni o'tka-zamiz. To'g'ri burchakli *ABP* va *DCF* uchburchaklar teng: *AB* = *DC* — shartga ko'ra, *BP* = *CF* - *BC* va *AD* parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa bo'lgani uchun. Uchburchaklar tengligidan, *AP*= *FD* kelib chiqadi.



5-rasm

To'g'ri chiziqqa perpendikular ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladi. Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa teng bo'lgani uchun *BC*= *PF*= *b*.

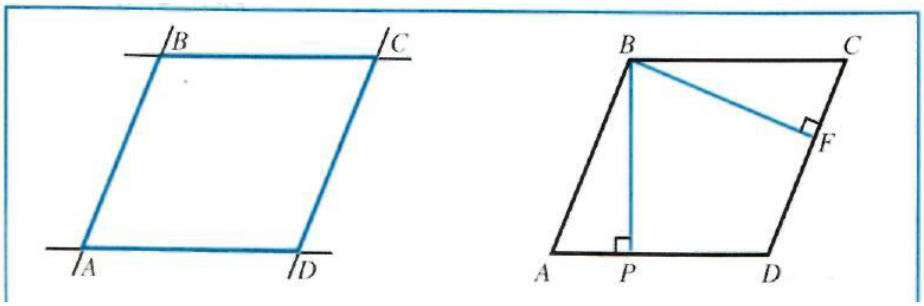
Parallelogramm va uning xossalari

1. Parallelogramm.

T a ' r i f . *Qarama-qarshi tomonlari o'zaro parallel bo'lgan to'rt-burchak **parallelogramm** deb ataladi.*

Agar *ABCD* parallelogramm bo'lsa, $AB \parallel DC$ va $AD \parallel BC$ bo'ladi (6- rasm).

Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlariga perpendikular bo'lgan kesmalar parallelogrammning *balandliklari* deyiladi. Parallelogrammning, umuman aytganda, bir-biridan farq qiladigan ikkita balandligi bo'ladi. Masalan, 7- rasmda *BP* va *BF* balandliklardir.



6-rasm 7-rasm

Ma'lumki, to'rtburchak trapetsiya bo'lishi uchun uning bir juft qarama-qarshi tomoni parallel bo'lishi kerak edi. Parallelogrammda ikkinchi juft ham parallel bo'lishi kerak ekan. Bu, to'rtburchak parallelogramm bo'lishi uchun uning tomonlari, trapetsiyaning tomonlaridan ko'proq shartni qanoatlantirishi zarur ekanini ko'rsatadi. Bundan parallelogramm trapetsiyalar sinfiga tegishli bo'lgan to'rtburchaklar ichidan olingan ekanligi kelib chiqadi. Demak, parallelogramm trapetsiyalar sinfiga kiradi, u esa o'z navbatida to'rtburchaklar sinfining vakilidir. Bundan parallelogramm trapetsiya xossalariga ega bo'lishini bildiradi.

Parallelogrammning xossalari.

1-Teorema: Parallelogrammning diagonali uni ikkita teng uchburchakka bo'ladi.

I s b o t . *ABCD* parallelogramm berilgan bo'lsin, unda $AB \parallel CD$ va $BC \parallel AD$. Uning *AC* diagonalini o'tkazamiz (8- rasm). Bunda *ABCD* parallelogramm *ADC* va *CBA* uchburchaklarga ajraladi. $\Delta ADC = \Delta CBA$ ekanini isbotlaymiz.

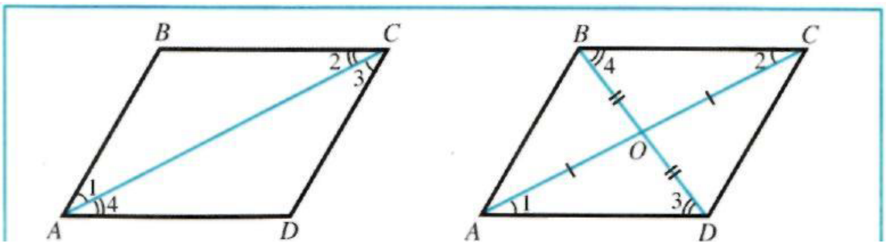
Bu uchburchaklarda *AC* — umumiy tomon va unga yopishgan mos burchaklar teng, ya'ni $\angle 1 = \angle 3$ (*AB* va *DC* parallel to'g'ri chiziqlar hamda *AC* kesuvchi bilan kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun) va $\angle 2 = \angle 4$ (*AD* va *BC* parallel to'g'ri chiziqlar hamda *AC* kesuvchi bilan kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun). Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko'ra: $\Delta ADC = \Delta CBA$.

Bu teoremadan ushbu natijalar kelib chiqadi:

1-natija. Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari teng.

2-natija. Parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari teng.

Natijalarning to'g'ri ekanini isbotlashni o'zingizga havola qilamiz.



8-rasm

2-Teorema: Parallelogrammning diagonallari kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

Parallelogrammning alomatlari

Parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari va tomonlari teng. Shuningdek, parallelogramm trapetsiya xossalariga ega bo'lgani uchun uning ikki qo'shni burchagi yig'indisi 180° bo'ladi. Trapetsiyadan farqli, parallelogrammda ixtiyoriy ikki qo'shni burchak yig'indisi 180° bo'ladi.

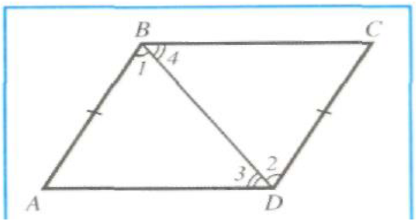
Parallelogrammning diagonali uni ikkita teng uchburchakka ajratishini isbotladik. Bunda parallelogramm burchaklari yig'indisi uni tashkil qilgan uchburchaklar ichki burchaklari yig'indisiga teng bo'ladi. Demak, parallelogramm ichki burchaklari yig'indisi 360° ga teng ekan.

Parallelogrammning alomatlari bilan tanishamiz.

1-teorema:

(1-alomat.) **Agar to'rtburchakning ikkita tomoni teng va parallel bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.**

I s b o t. *ABCD* to'rtburchakda *AB* = *DC* va *AB* || *DC* bo'lsin (1- rasm). Uning *BD* diagonalini o'tkazamiz. Natijada ikkita teng *ABD* va *CDB* uchburchaklarga ega bo'lamiz (ikki tomoni va ular



1-rasm

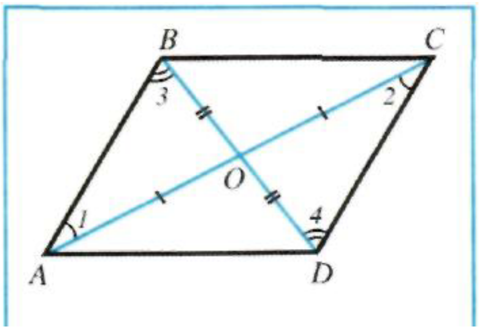
orasidagi burchagiga ko'ra), chunki ularda *AB*=*DC* (shartga ko'ra), *BD* tomon — umumiy, ∠1= ∠2 (*AB* va *DC* parallel to'g'ri chiziqlar hamda *BD* kesuvchi bilan kesishishidan hosil bo'lgan ichki

almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun). Uchburchaklarning tengli-gidan, ∠3 = ∠4 ekani kelib chiqadi. Bu burchaklar *AD* va *BC* to'g'ri chiziqlar hamda *BD* kesuvchi bilan kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar, va demak, *AD* || *BC*.

Shunday qilib, *ABCD* to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari jufti-jufti bilan parallel. Shuning uchun parallelogramm ta'rifiga ko'ra *ABCD* to'rtburchak - parallelogrammdir.

2-teorema:

(2-alomat.) **Agar to'rtburchakning diagonallari keshishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.**



Isbot. *ABCD* to'rtburchakda O nuqta *AC* va *BD* diagonallarining kesishish nuqtasi hamda *AO*= *OC* va *BO* = *OC* tengliklar bajariladi Uchburchaklar tengligining 1-aloma-tiga ko'ra *AOB* va *COD* uchburchaklar teng (*AO*=*OC*, *B0*= *OD* - shartga ko'ra, ∠ *AOB*= ∠ *COD* - vertikal burchaklar), shuning uchun *AB*= *CD* va ∠1= ∠2. 1 va 2 burchaklarning teng- ligidan, *AB*|| *CD* (to'g'ri chiziqlarning parallellik alomatiga ko'ra) kelib chiqadi.

Shunday qilib, *ABCD* to'rtburchakda *AB* va *CD* tomonlar teng hamda parallel, demak, parallelogrammning 1-alomatiga ko'ra *ABCD* to'rtburchak- parallelogrammdir.

Parallelogrammning yana quyidagi alomatlari bor:

3. Agar to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari jufti-jufti bilan teng bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.

4. Agar to'rtburchakning qarama-qarshi burchaklari jufti-jufti bilan teng bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.

5. Agar to'rtburchakning ixtiyoriy bir tomoniga yopishgan burchaklari yig'indisi 180° ga teng bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.

To’g’ri to’rtburchak

T a ' r i f . *Hamma burchaklari to'g'ri bo'lgan parallelogramm* ***to'g'ri to'rtburchak*** *deb ataladi* (31-*a* rasm).

To'g'ri to'rtburchak parallelogrammning xususiy holi bo'lgani uchun, u parallelogrammning barcha xossalariga ega bo'ladi: to'g'ri to'rtburchakning qarama-qarsi tomonlari teng; diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi; to'g'ri to'rtburchakning diagonali uni ikkita teng to'g'ri burchakli uchburchakka ajratadi.

To'g'ri to'rtburchakning o'ziga xos xossasini ko'rib chiqamiz.

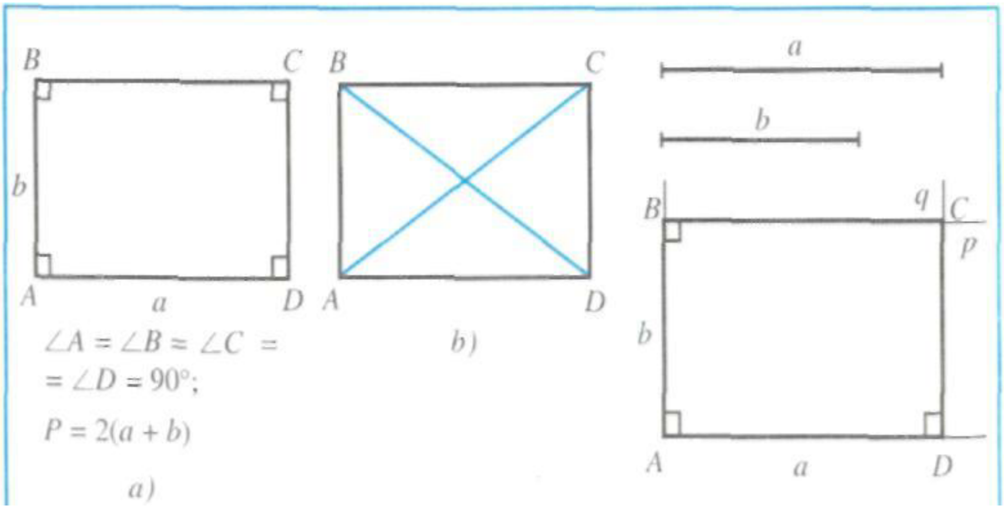
Teorema:

To'g'ri to'rtburchakning diagonallari o'zaro teng.

Isbot. *ABCD* to'g'ri to'rtburchak berilgan bo'lsin. *AC=BD* bo'li-shini isbot qilamiz

To'g'ri burchakli *ACD* va *DBA* uchburchaklar ikki katetiga *(AD* - umumiy tomon, *AB=CD)* ko'ra teng. Bundan, bu uchburchaklar gipo-tenuzalarining tengligi, ya'ni *AC=BD* kelib chiqadi.

Bu teoremadan quyidagi teskari teorema kelib chiqadi.



Agar parallelogrammning diagonallari teng bo'lsa, u to'g'ri to'rtburchakdir.

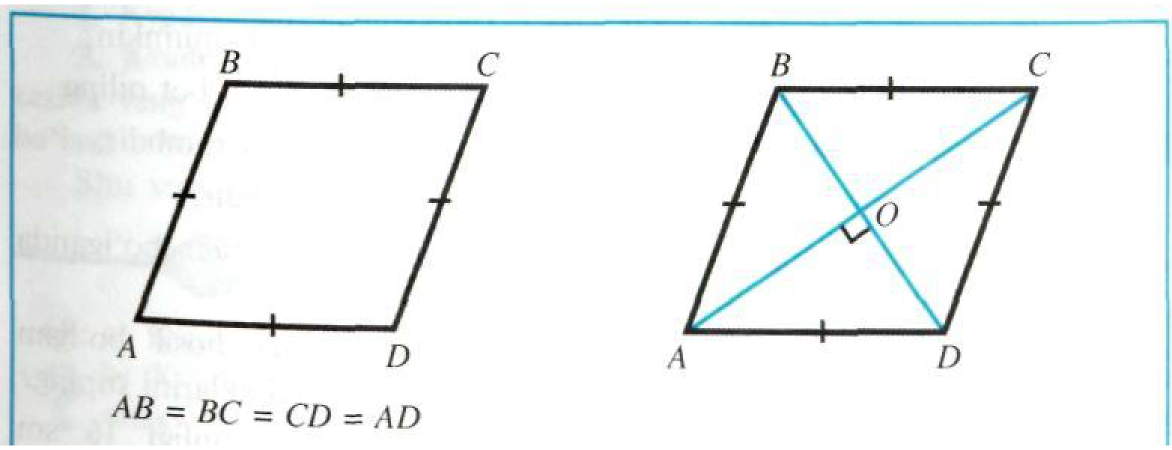
Romb

T **a** ' **r i** f . *Tomonlari teng bo'Igan parallelogramm* ***romb*** *deyiladi* (36- rasm).

Romb parallelogrammning umumiy xossalaridan tashqari quyidagi xossaga ega.

Rombning diagonallari o'zaro perpendikular va rombning burchaklarini teng ikkiga boiadi.

Isbot. *ABCD* romb berilgan bo'lsin (rasm). *AC* ⊥ *BD* va har bir diagonal rombning mos burchaklarini teng ikkiga bo'lishini (masalan, ∠*BAC* = ∠*DAC)* isbotlaymiz.

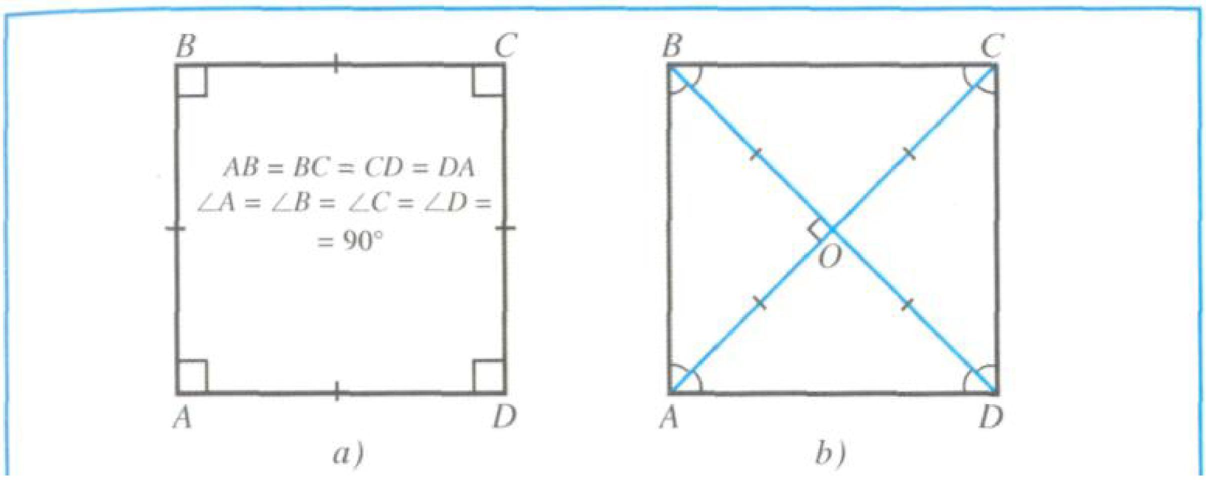


Rombning ta'rifiga ko'ra $AB = AD$, shuning uchun BAD uchburchak teng yonli. Romb parallelogramm bo'lgani uchun, uning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi, ya'ni $BO=OD$. Demak, AO -teng yonli BAD uchburchakning medianasi. Teng yonli uchburchakning xossasiga ko'ra uning asosiga o'tkazilgan mediana ham bissektrisa, ham balandlik bo'ladi. Shuning uchun $AC \perp BD$ va $\angle BAC = \angle DAC$. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Kvadrat

T a ' r i f . *Tomonlari teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak* ***kvadrat*** *deb ataladi.*

Kvadrat va rombning ta'riflaridan kvadrat burchaklari to'g'ri bo'lgan rombdan iborat ekanligi kelib chiqadi (rasm). Kvadrat ham parallelogramm, ham to'g'ri to'rtburchak, ham romb bo'lgani uchun bularning barcha xossalariga egadir. Kvadratning asosiy xossalarini keltiramiz.



1. **Kvadratning hamma burchaklari to'g'ri.**
2. **Kvadratning diagonallari o'zaro teng.**
3. **Kvadratning diagonallari o'zaro perpendikular va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi hamda kvadratning burchaklarini teng ikkiga bo'ladi** (39- *b* rasm).

Mavzuga doir savollar.

1.To'rtburchak edb nimaga aytiladi?

2. Trapetsiya va uning xossalarini ayting?

3. Paralellogramm deb nimaga aytiladi?

3. To'g'ri to'rtburchak deb nimaga aytiladi?

4. Romb va uning xossalari haqida ma'lumot bering.

5. Kvadrat deb nimaga aytiladi?

IV modul. Matematika tarixi

16-mavzu. Matematika fanining predmeti. Matematika rivojlanishining asosiy bosqichlari.Algebra fanining vujudga kelishi va riuvojlanishi.

Reja:

1. Matematika fanining rivojlanish tarixi va bosqichlari.
2. Matematikaning aksiomatik qurilishi va uning usullarini jamiyat taraq-qiyotidagi, husussan, tarix, arxivshunoslik va arxeologiyada tutgan o‘rni.
3. Matematik belgilar va amallar.

Nazariy ma’lumotlar

Matematika - fan va o‘quv predmeti sifatida. “Matematika” so‘zi grekcha “bilish, fan” so‘zidan olingan bo‘lib, bizga qadimgi Yunonistondan yetib kelgan.

Matematika fan sifatida: moddiy borliqning fazoviy va miqdoriy munosabatlarini aks ettiruvchi qonunlarni to‘la va chuqur o‘rganish, targ‘ib etishni talab etadi, o‘rganilayotgan qonuniyatlarning qanday mazmunga egaligi va ularning qanday usul bilan asoslanganligi rivojlanish darajasi bilan hisoblashmaydi, unda tadqiqotchining shaxsiy fazilatlari, u yoki bu matematik qonunning qanday kashf etilganligi muhim emas; matematika fani ma’lum tizimda yaratiladi va rivojlanadi, u bir –biriga bog‘liq qat’iy ketma–ket keluvchi qonunlarni ochib beradi.

Bu fan o‘z rivojlanish davri mobaynida quyidagi davrlarni bosib o‘tgan.

1. **Matematikaning paydo bo‘lish davri** - amaliy hisoblashlar va o‘lchashlar, son va figura tushunchalari shakllanishi bilan belgilanadi. Bu davrda arifmetika va geometriya kabi matematikaning bo‘limlari o‘z boshlang‘ich asoslariga ega bo‘ldi.

Matematika fani birinchi darg‘alari erishgan muvaffaqiyatlarni baholar ekanmiz, bizlar uchun 2x2=4 kabi o‘z-o‘zidan ayon natija abstrakt tafakkurning eng katta yutug‘i bo‘lganligini takidlash joyizdir .

Eramizgacha XXX yuz yilliklarda Gizada piramidalar dastasi quriladi. Mana necha asrdirki bu piramidalar insonlarni hayratga solib sukut saqlab turadi. Eramizgacha III asrda greklar olamning etti mo‘jizasi qatoriga birinchi navbatda Misr piramidalarni kiritishgan edi.

Ularni o‘ziga xos astronomiya va geometriyadan qo‘llanma deb qarashar edi. Bu piramidalardan juda ko‘p narsalarni aniqlash mumkin.

2. **O‘zgarmas miqdorlar davri** – eramizgacha VI-V asrlardan boshlanib, bu davrda matematika fani tadqiqot tushunchalariga (son va shakl), usullariga ega bo‘lgan mustaqil fan sifatida shakllandi Bu davrda matematikaning yangi sohasi – algebra fani paydo bo‘ldi va rivojlandi. Bunda buyuk vatandoshlarimiz Muhammad Al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy, Umar Hayyom, Abu Ali Ibn Sino, Ulug‘bek, Al-Farg‘oniylarning xizmati katta bo‘lgan.

3. **O‘zgaruvchi miqdorlar davri** XVII asrdan boshlanib XIX asr birinchi yarmigacha bo‘lgan davrni o‘z ichiga olib, matematikaning tatbiq qilish sohalari ko‘paydi, funksiya va u bilan bog‘liq, uzluksizlik va harakat g‘oyalari asosiy o‘rinni egalladi. Matematik analiz tarkib topdi va takomillashtirildi.

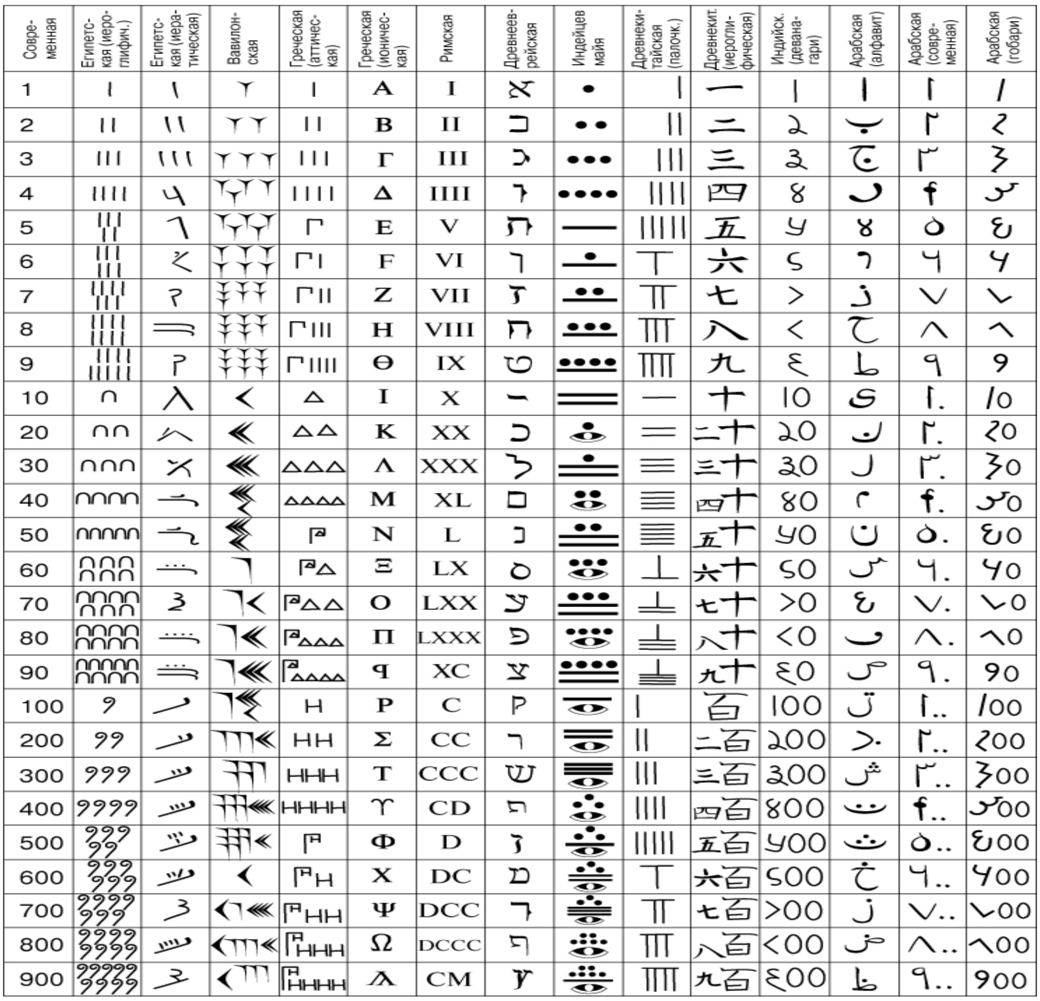
4. **O‘zgaruvchi munosabatlar davrida** abstrakt nazariyalar, matematik tuzilmalarning roli oshdi va modellashtirish usuli keng qo‘llanila boshlandi. Bu davr XIX asr ikkinchi yarmidan boshlanib to hozirgacha bo‘lgan davrni qamrab olib, fanda algebraik strukturalar, yangi nazariya va yo‘nalishlarning paydo

bo‘lishi va rivojlantirilishi bilan xarakterlanadi. Hozirgi paytda matematika yanada taraqqiy etib, turli nazariy kashfiyotlar bilan birgalikda uning amaliy tatbiqlari ham ko‘payib bormoqda.

Matematik belgilashlar. Qadimgi misrliklarning sanoq sistemalari uch ming yillar davomida o‘zgarmay kelgan, faqat sonlarni belgilash shakllari o‘zgarib turgan. Misrliklarning ieroglif yozuvida rasmlar mavjud bo‘lib, shunga mos sonlarni belgilashlar rasmlar shaklida berilgan, bunda ba’zilari konkret narsalarga o‘xshab ketar edi.

Rus pedagogi va matematika tarixchisi **I. Ya. Depman (1885-1970) «Arifmetika tarixi» (1959-1965)** asarida raqamlar bir manbada bir vaqtning o‘zida vujudga kelganligini ta’kidlab, raqamlar rivojini jadval shaklida aks ettiradi.

ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧИСЕЛ



Matematik belgilashlarni takomillashtirish Aristotel davridan boshlangan deb hisoblash mumkin. Masalan, u har bir matematik mulohazadagi parametrlar uchun alohida belgilash kiritgan. Noma'lumlar va ularning darajalari uchun doimiy, hapfiy belgilashlarni qadimgi yunon matematigi Diofant (taxminan IX asr) kiritgan. Harfiy belgilashlarning ahamiyati faqat fransuz matematigi **Fransua Viyet (1540-1603)** ularni ma'lum miqdorlar va tenglamalar koeffitsiyentlariga qo'llagandan so'ng ma'lum bo'ldi. Harfiy koeffitsiyentlarning kiritilishi bilan algebraik tenglamalarni tekshirish va ildizlarini topish umumiy formulalarini tuzish mumkin bo'ldi.

Viyet koeffitsiyentlarni katta undosh harflar *B, D, ..,* bilan, noma'lumlarni katta unli A, E, I,… harflar bilan belgilagan. Dekart esa koeffitsiyentlarni belgilashda dastlabki lotin harflari *a, b, c,...* ni ishlatgan bo'lsa, noma'lumlar uchun oxirgi *x, y, z* harflaridan foydalangan.

Diofantda ayirish uchun maxsus belgi bor edi, lekin qo'shishda qator yozilgan sonlar hadlar deb tushunilib, qo'shilar edi.

Noma'lum va parametrlar uchun harfiy belgilashlarni Evropada XVI asrda dastlab Parij universiteti professori, matematik va mexanik **I. Nemorariy** (Jordan) (1236 yilda vafot etgan) qo'lyozmalarida uchratish mumkin, lekin unda amallar ishoralari yo'q edi, bu harfiy formulalarni keltirib chiqarishga halaqit berar edi. Nemorariy «Arifmetika» asarida arab raqamlaridan foydalangan.

Amallarni belgilash uchun maxsus belgilarning paydo bo'lishi bilan matematika vujudga keldi. XIV- XV asrlarda qo'shish amali avvalo «P» (plus-ko'p), ayirish esa «m» (minus -- kam, ayirish) harflari bilan belgilangan. «-» va «+» belgilari esa savdodan kelib chiqqan degan faraz bor, unga ko'ra, tovarning kamayishi gorizontal chiziqchalar (-) bilan belgilangan bo'lsa, uning to'ldirilishi esa zarur sondagi chiziqchalarni o'chirish + bilan belgilangan.

XV-XVI asrlarda kitob bosishning ixtiro qilinishi bilan matematik yozuvlar yanada takomillasha bordi. Nemis matematigi **Yan Vidman (1460- taxminan 1498)** ning, Leypsigda 1489 yilda bosmadan chiqqan «Barcha savdogarlar uchun tez va chiroyli hisob» asarida birinchi marta bosmada «-» va «+» ishoralari va ko'paytirish jadvali chop etildi. Nemis astronomi va matematigi **Regiomontan** (taxallusi Iogann Myuller) (1436-1476) matematika bo‘yicha birinchi kitob noshiri hisoblanadi, u ko‘paytirish belgisi sifatida (.) nuqtadan foydalandi.

Fransuz matematigi **Nikola Orem** natural ko‘rsatkichli darajalarni yozish usulini kashf etgan bo‘lsa, bo‘lish belgisi (-) gorizontal chiziq arab olimlari ishlaridan olingan.

1557 yilda ingliz tabibi va matematigi **Robert Rekord (1510-1558),** ingliz tilidagi birinchi arifmetika va algebra bo‘yicha o‘quv qo‘llanmalari muallifi, (=) tenglik belgisini ishlatdi, u buning sababini tushuntirib, ikki narsa o‘zaro ikkita parallel kesmalar tengligidan ortiqroq teng bo‘la olmasligini ta’kidlagan edi. Tenglik belgisi faqat XVIII asrda Leybnits va uning izdoshlari tomonidan boshlab qo‘llanila boshlandi.

Boshqa bir ingliz matematigi **Garriot Tomas (1560-1621)** birinchi bo‘lib, katta, kichik belgilarini kiritdi. Bu belgilar birinchi marta uning «Analitik san’at tajribasi» nomli kitobida uchraydi. Uning fikricha, agar ikkita narsa teng bo‘lmasa, tenglik belgisidagi kesmalar parallel emas, ular kesishadi: kesishish o‘ngdan (>) yoki chapdan (<) bo‘lishi mumkin. Birinchi holda tengsizlik «katta», ikkinchisida esa «kichik»ni belgilaydi. Shuningdek, Garriot sonlarni belgilash uchun alifboning kichik harflaridan foydalangan, tenglamalarni hozirgiga yaqin shaklda yozgan.

Qat’iy bo‘lmagan tengsizliklar belgilarini $\geq, \leq$ 1734- yilda fransuz matematigi **Per Buge (1698-1758)** tomonidan $>=$, $<=$ shakllarda kiritilgan.

Matematik belgilashlarning rivojlanishi matematika fani taraqqiyotida muhim ahamiyatga ega. Ixcham va qulay tanlab olingan simvolika olimning aqliy mehnati mahsuli katta qismini o‘z ichiga oladi, ijodiy mehnatni osonlashtirishga yordam beradi. Leybnisning fikricha «Belgilashlar kashfiyotlar uchun qulay bo‘lishiga erishish lozim. Shundagina hayron qolarli darajada fikr ishi qisqaradi».

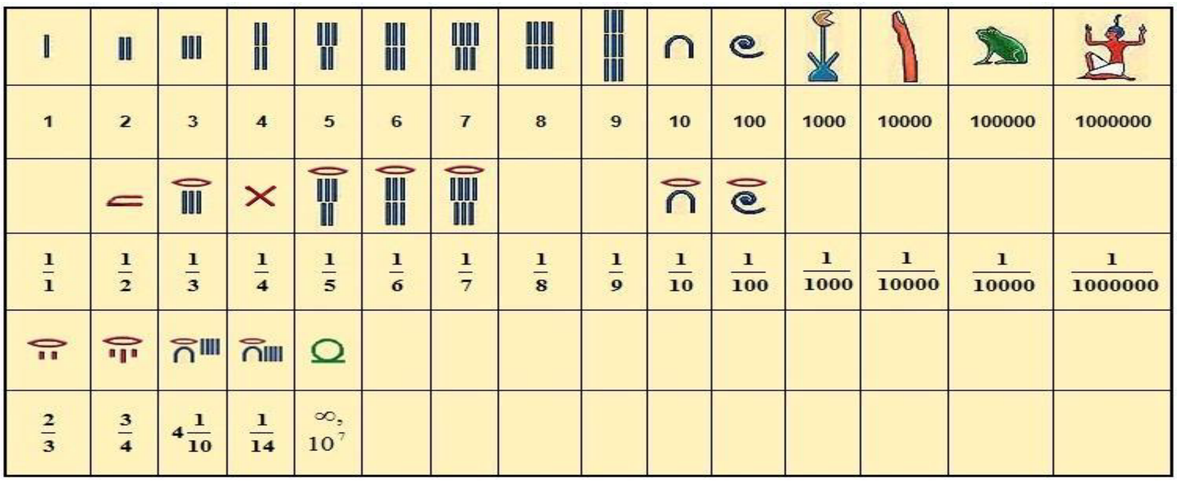
Eramizgacha bo‘lgan ming yillik davrida bir qator sanoq sistemalari paydo bo‘lgan.

1. **Pozitsion sanoq sistemalari**. O’nli sanoq sitemasidagi sonlarni yozish uchun o’nta belgidan foydalasniladi. Bular 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dir. Bu belgilar *raqamlar* deyiladi. O’nlik sanoq sistemasi pozitsion sanoq sistemasi bo’ladi,

chunki har bir pozitsiyada turgan raqam eggallagan joyiga qarab har xil qiymatlarni qabul qilish mumkin. Bunday sistemalarda «asosiy sonlar» tanlanib, ular maxsus belgilar bilan belgilangan. Masalan, Rim sanoq sistemasida 1, 5, 10, 50, 100, 500 va 1000 asosiy sonlar sifatida tanlangan va mos ravishda I («i»), V («ve»), X («iks»), L («el»), S («se»), D («de») va M («em») harflari bilan belgilangan. Belgilashlar mos tartib sonlarni kishi barmoqlari va panjalari orqali ifodalash tasvirlaridan (I-- barmoq, V- besh barmoqli panja, X- ikkita panja) hamda lotin so‘zlari qisqartmalaridan (*centum* -- yuz, *demimille*-- besh yuz, *mille* -- ming so‘zlarining bosh harflari) kelib chiqqan.

Qadimgi nopozitsion sanoq sistemalari(Gretsiya: attik va ionik)

Qadimgi Misr sanoq sistemasi



2. A l i f b o s a n o q s i s t e m a l a r i. Bunda sonlar maxsus alifbo harflari bilan belgilangan. Masalan, Ionik alifbo sanoq sistemasida sonlar quyidagicha yozilgan:

$\alpha = 1$ $\qquad$ $i = 10$ $\qquad$ $\rho = 100$

$\beta=2$	$x=20$	$v=200$
$\gamma=3$	$\lambda=30$	$r=300$
$\delta=4$	$\mu=40$	$u=400$
$f=5$	$\nu=50$	$\varphi=500$
$g=6$	$\varepsilon=60$	$\chi=600$
$z=7$	$o=70$	$\psi=700$
$\eta=8$	$\pi=80$	$w=800$
$\theta=9$	$\xi=90$	$\tau=900$

Sonlarning yozilishiga misollar: $i\alpha=11$, $\varepsilon\theta=69$, $\rho xf=125$

Arab hisobi (abjad hisobi).

Alif	Be	Jim	Dol	He	Vov	Ze	Xe	Itqi	
ا	ب	ج	د	۲	و	ز	ه	ط	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Yo	Kof	Lom	Mim	Nun	Sin	A’in	Fe	Sod	
ى	ك	ل	ح	ن	س	غ	ف	ص	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
Qof	Re	Shin	Te	Se	Xe	Zol	Zod	Izki	G‘a’in
ق	ر	ش	ت	ث	ح	ذ	ض	ظ	ع
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

Masalan, 12 = ب ى avval 10, keyin o‘ng tomoniga 2 yoziladi:

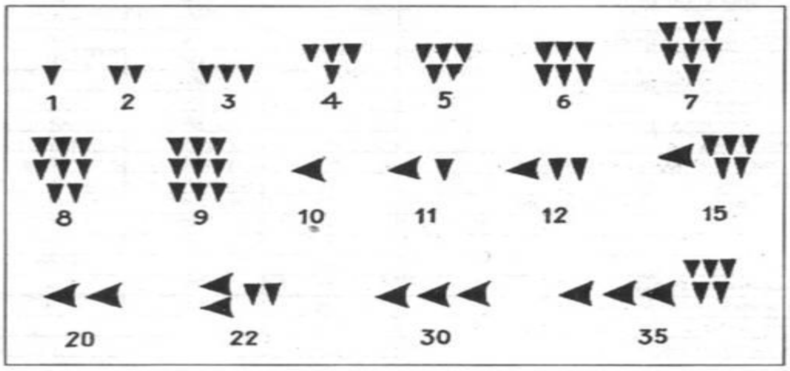
539 = ط ل ث   4000 = ع د   50000 = ع ن

(4 va 1000 ko‘rinishda)   (50 va 1000 ko‘rinishda)

Ko‘rinib turibdiki, bu usulda alfavit 9 ta harfdan qilib ajratiladi. Bulardan birinchi 9 tasiga birliklar, ikkinchi 9 tasiga o‘nlar, uchinchi 9 tasiga yuzlar mos qo‘yiladi. Bunda har bir harf son ko‘rinishini olishi uchun ma’lum belgi qo‘yiladi.

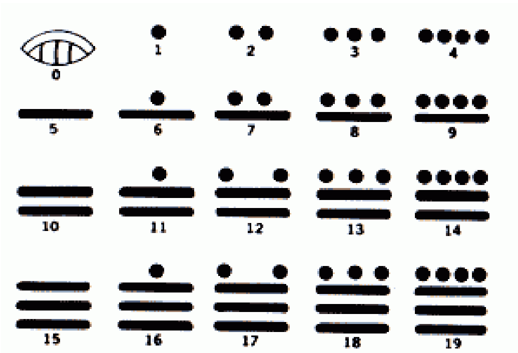
Bobil oltmishlik sistemasida sonlar 1 dan 59 gacha bo‘lgan o‘nlik sistemasida yozilgan. Lekin bobil matematikasida oltmishlik sistema ba’zisi 60, 60^2, ... ,60^n, ... sonlaridan iborat bo‘lgan.

Bobil (Vavilon) sanoq sistemalari



Xuddi shunga o‘xshash sanoq sistemasi Janubiy Amerika hindularining qadimgi mayya qabilasida ham yuritilgan. Agar bobil sanoq sistemasi o‘nlik - oltmishlik sistemasi bo‘lsa, mayya sistemasi beshlik-yigirmalik sistemasidan iborat edi.

Mayya sanoq sistemasi



1 va 20 dan so‘ng uchinchi asosiy son $18 \cdot 20 = 360$ bo‘lib, qolgan asosiy sonlar $18 \cdot 20^2$, $18 \cdot 20^3$ va h.k. Nol soni uchun maxsus belgi ishlatilgan.

Mayya sanoq sistemasida sonlarning yozilishiga misollar:

$$1\cdot 20+0=20, \qquad 19\cdot 360+13\cdot 20+13=7113, \qquad 10\cdot 360+7=3607.$$

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar:

1.1. Matematika rivojlanishining qanday davrlari bor?

1.2. Birinchi davr qanday ataladi va unda matematika rivojlanishi qanday xususiyatlarga ega?

1.3. Ikkinchi davr qanday ataladi?

1.4. Uchinchi davrning qanday xususiyatlari mavjud?

1.5. To‘rtinchi davrda matematika fani qanday rivojlanmoqda?

1.6. Qanday sanoq sistemalari mavjud?

1.7. Alifbo va mayya sanoq sistemalari qanday qo‘llaniladi?

1.8. Quyidagi sonlarni Rim, abjad, mayya, misr, alifbo, bobil sanoq sistemalarida yozing:

2016, 48, 269, 1492, 1991, 312 405, 180, 1336, 980.

1.9. Quyidagi sonlarni o‘nli sanoq sistemasiga o‘tkazing:

a) MCIX, DCXII, MMCCXXXVI.

b) αδε, γγλλθθ, στττταββχ, ϖππξξξ, قطنزويي .

17-MAVZU.TO`PLAMLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI. TO‘PLAM VA UNING ELEMENTLARI, TO‘PLAMLAR USTIDA AMALLAR VA ULARNING XOSSALARI.

Reja:

1. To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar.

2. To‘plamlar ustida amallar.

Tayanch iboralar: to‘plamlar, chekli to‘plam, cheksiz to‘plam, chegaralangan to‘plam. Yopiq va ochiq to‘plamlar, to‘plamlarning birlashmasi, to‘plamlarning kesishmasi

1. To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar. ***To‘plam*** tushunchasi matematikaning boshlang‘ich va muhim tushunchalardan biridir. Masalan: Natural sonlar to‘plami, auditoriyadagi talabalar to‘plami, bibleotekadagi kitoblar to‘plami, bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami biror xildagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar to‘plami va boshqalar.

To‘plamni tashkil etgan narsalar to‘plamning elementlari deyiladi. Matematikada to‘plamlar bosh harflar bilan, masalan: $A, B, X, Y, \ldots\ldots$ uning elementlari esa kichik harflar, masalan: $a,\ b,\ x,\ y, \ldots\ldots$ bilan belgilanadi.

To‘plam chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, unga ***chekli to‘plam*** deb ataladi. Masalan, bibleotekadagi kitoblar soni yoki guruhdagi talabalar soni chekli bo‘ladi. Cheksiz elementlardan tashkil topgan to‘plam ***cheksiz to‘plam*** deb ataladi. Masalan, natural sonlar to‘plami, bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami va boshqalar.

x element X to‘plamga tegishli bo‘lsa, $x \in X$ deb belgilanadi, aks holda $x \notin X$ yoziladi. $\{x \in X / P(x)\}$ belgi P xossaga ega bo‘lgan $x \in X$ lar to‘plamini bildiradi. Bo‘sh to‘plamni

$\varnothing = \{x \in \varnothing / x \neq x\}$ deb yozish mumkin.

1-misol. Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan to‘plamlar elementlarini aniqlang.

1) $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$; 2) $B = \{x \in N \mid x \leq 0\}$; 3) $C = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\}$

Yechish. 1) To‘plam 5 dan kichik va teng bo‘lgan natural sonlardan iboratligini bildiradi, ya’ni $A = \{1,2,3,4,5\}$.

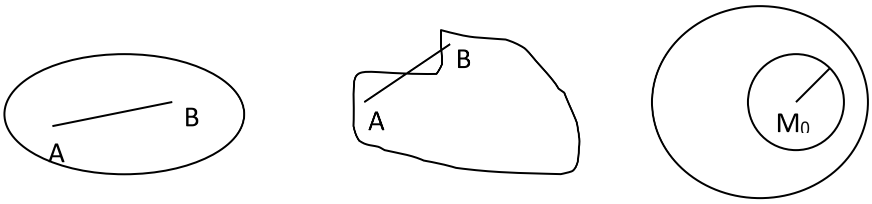
2) manfiy natural son yo‘q shuning uchun $B = \varnothing$;

3) bu holda $|x| \le 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi faqat butun sonlar olinadi, bu $[-2;\ 2]$ kesmada bo‘ladi. Shunday qilib, $C = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

Qavariq to‘plam. 1-ta’rif. Istalgan ikki nuqta shu to‘plamga tegishli bo‘lganda, bu nuqtalarni tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi ham shu to‘plamga tegishli bo‘lsa, bunday to‘plamga ***qavariq to‘plam*** deyiladi(1,2-chizma).

Nuqtaning atrofi. 2-ta’rif. r biror musbat son bo‘lsin. $M_0 \in R^n$ fazoning nuqtasi uchun $p(M,\ M_0) < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma $M \in R^n$ nuqtalar to‘plamiga M_0 ***nuqtaning*** r **-*atrofi*** deyiladi va $S_r(M_0)$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$S_r(M_0) = \{M \in R^n \mid \rho(M,\ M_0) < r\}.\ \text{(3-chizma)}$$



1-chizma 2-chizma 3-chizma

Masalan, $M_1(2;\ 3;\ -1;\ 3) \in S_2(M_0), M_0(1;\ 2;\ -1;\ 2)$ nuqtaning

$S_r(M_0)$ atrofiga tegishli, chunki

$$\rho(M_1, M_0) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$$

bo‘lib, $\sqrt{3} < 2$ bo‘ladi. $M_2(3;\ 3;\ -1;\ 3)$ nuqta $S_2(M_0)$ atrofga tegishli emas,

chunki $\rho(M_2,\ M_0) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{6}$ bo‘lib,

$\sqrt{6}$ bo‘lib, $\sqrt{6} > 2$ bo‘ladi.

R^1(sonlar o‘qi) fazoda $M_0(a)$ nuqtaning r atrofi

$(a - r,\ a + r)$ intervaldan iborat.

R^2 (tekislik) fazoda $M_0(a,b)$ nuqtaning r atrofi, radiusi r, markazi $M_0(a,b)$ nuqtada bo‘lgan doiraning ichki nuqtalaridan iborat bo‘ladi. R^3 fazoda esa, $M_0(a,b,c)$ nuqtaning r atrofi, radiusi, r, markazi. $M_0(a,b,c)$ nuqtada bo‘lgan sharning ichki qismidan iborat bo‘ladi.

To‘plamning chegaralanganligi. 3-ta’rif. R^n fazoning V to‘plamning istalgan $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in V$ nuqtasi uchun shunday $A > 0$ son mavjud bo‘lib,

$$|x_1| \le A, \quad |x_2| \le A, ..., |x_n| \le A$$

munosabatlar bajarilsa, V to‘plamga ***chegaralangan to‘plam*** deyiladi. Masalan, n o‘lchovli fazoda istalgan nuqtaning r atrofi chegaralangan to‘plamdir.

To‘plamning ichki va chegaraviy nuqtalari. 4-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta V to‘plamga o‘zining biror r atrofi bilan kirsa, unga V ***to‘plamning ichki nuqtasi*** deyiladi .

5-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta o‘zining har bir atrofida V to‘plamga tegishli bo‘lgan hamda tegishli bo‘lmagan nuqtalar bilan kirsa, M_0 nuqtaga V to‘plamning ***chegaraviy nuqtasi*** deyiladi .

To‘plamning quyuqlanish nuqtasi. 6-ta’rif. M_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi V to‘plamning M_0 nuqtadan farqli cheksiz ko‘p nuqtalari (M_0 nuqtadan farqli)ni o‘z ichiga olsa, M_0 nuqta V to‘plamning ***quyuqlanish nuqtasi*** deyiladi. Quyuqlanish nuqtasi to‘plamning o‘ziga qarashli bo‘lishi ham, qarashli bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $V = [a,b]$ yoki $V = (a,b]$ bo‘lsa, ikkala holda ham a nuqta V uchun quyuqlanish nuqtasi bo‘ladi, lekin birinchi holda bu nuqta V to‘plamda yotadi, ikkinchi holda esa u V to‘plamda yotmaydi.

Yopiq va ochiq to‘plamlar. 7-ta’rif. V to‘plam o‘zining hamma quyuqlanish nuqtalarini o‘zida saqlasa, unga ***yopiq to‘plam*** deyiladi. Masalan, $[a,b]$ *кесма* R^1 sonlar њљida, $\{M(x,y) \in R^2 |\ x^2 + y^2 \le r^2\}$ R^2 doira tekislikda yopiq to‘plamlardir.

8-ta’rif. V to‘plamning hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo‘lsa, bunday to‘plamga ***ochiq to‘plam*** deyiladi. Masalan, (a,b) R^1 da, $\{M(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2<r^2\}$ R^2 da ochiq to‘plamlardir. R^n fazoda istalgan nuqtaning r atrofi ochiq to‘plamdir.

R^n fazoda chegaralangan yopiq to‘plamga ***kompakt*** deb ataladi.

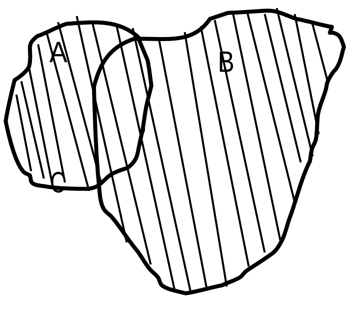
2. To‘plamlar ustida amallar. B to‘plamning har bir elementi A to‘plamning ham elementi bo‘lsa, B to‘plamga A to‘plamning ***qism to‘plami*** deyiladi va $B\subset A$ yoki $A\supset B$ bilan belgilanadi. $A\subset B$ va $B\subset A$ bo‘lsa, A va B to‘plamlar teng deyiladi va $A=B$ bilan belgilanadi.

1) A va B ***to‘plamlarning birlashmasi*** **(yig‘indisi)** deb uchinchi bir C to‘plamga aytiladiki, bu to‘plamning istalgan elementi A yoki B to‘plamga,yoki ikkalasiga ham tegishli bo‘ladi va $A\cup B$ bilan belgilanadi, ya’ni

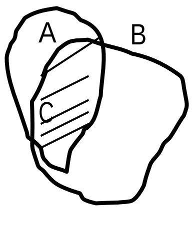
$$C=A\cup B=\{x \mid x\in A \quad ёки \quad x\in B\}$$ (4 -chizma).

2) A va B ***to‘plamlarning kesishmasi*** **(ko‘paytmasi)** deb, uchunchi bir C to‘plamga aytiladiki, uning har bir elementi A to‘plamga ham, B to‘plamga ham tegishli bo‘ladi va $A\cap B$ bilan belgilanadi, ya’ni $C=A\cap B=\{x \mid x\in A \quad ва \quad x\in B\}$ (5 -chizma).

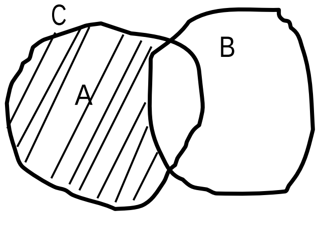
3) A to‘plamdan B to‘plamning **farqi (ayirmasi)** deb shunday uchinchi bir C to‘plamga aytiladiki, uning har bir elementi A ga tegishli bo‘lsa, B ga tegishli bo‘lmaydi, va uni $A/B=\{x \mid x\in A \quad ва \quad x\notin B\}$ (6-chizma).



4-chizma



5-chizma



6-chizma

2-misol. $A=\{1,\ 2\}$ to‘plamning hamma qism to‘plamlaridan iborat bo‘lgan B to‘plamni tuzing.

Yechish. Qism to‘plam ta’rifiga asosan,

$\varnothing \in A, \quad \{1\} \in A, \quad \{2\} \in A, \quad \{1,\ 2\} \in A$, Demak, $B = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,\ 2\}\}$.

3-misol. $A = (4,\ 8)$ va $B = (1,\ 4]$ bo‘lsa, ularning birlashmasini va kesishmasini toping.

Yechish. Birlashmaning ta’rifidan $A \cup B = (1,8)$ bњlib kesishmaning ta’rifidan $A \cap B = \varnothing$ bњladi.

4-misol. $A = (-3,\ 7]$ va $B[5,\ 6]$ bo‘lsa, ularning birlashmasi va kesishmasini toping.

Yechish. Ta’rifga asosan $A \cup B = (-3,\ 7]$, $A \cap B = [5,6]$ bњladi.

5- m i s o l. Ushbu

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad B = \{2,4,6,8\}, \ C = \{1,3\}$$

to‘plamlarni qaraylik. Bu to‘plamlar uchun

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}, A \cap B = \{2,4,6\}, \quad A \setminus B = \{1,3,5\}, B \setminus A = \{8\},$$

$$A \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad A \cap C = \{1,3\}, \quad B \cap C = \varnothing,$$

$$B \times C = \{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(6,3)(8,1),(8,3)\}.$$

bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan ta’riflardan $E \cup E = E$, $E \cap E = E$, $E \setminus E = \varnothing$, shuningdek $E \subset F$ bo‘lganda $E \cup F = F$, $E \cap F = E$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Barcha 1, 2, 3, …., n, … - natural sonlardan iborat to‘plam natural sonlar to‘plami deyiladi va u N harfi bilan belgilanadi: $N = \{1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n,\ldots\}$.

Barcha …, -2, -1, 0, 1, 2, … - butun sonlardan iborat to‘plam ***butun sonlar to‘plami*** deyiladi va u Z harfi bilan belgilanadi: $Z = \{\ldots,-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ 2,\ldots\}$

Ravshanki, $N \subset Z$ bo‘ladi.

M a t e m a t i k b e l g i l a r h a q i d a . Matematikada tez-tez uchraydigan so‘z va so‘z birikmalari o‘rniga maxsus belgilar ishlatiladi. Ulardan eng muhimlarini keltiramiz:

1) «Agar …. bo‘lsa, u holda ….. bo‘ladi» iborasi «$\Rightarrow$» belgisi orqali yoziladi;

2) ikki iboraning ekvivalentligi «$\Leftrightarrow$» belgisi orqali yoziladi;

3) «Har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so‘zlari o‘rniga «$\forall$» umumiylik belgisi ishlabitadi;

4) «Mavjudki», «topiladiki» so‘zlari o‘rniga «$\exists$» mavjudlik belgisi ishlatiladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chekli va cheksiz to‘plamlar qanday to‘plamlar?
2. Qavariq to‘plam qanday to‘plam?
3. Nuqtaning atrofi deb nimaga aytiladi?
4. To‘plamning ichki nuqtasi nima?
5. To‘plamning chegaraviy nuqtasi qanday bo‘ladi?
6. Ochiq to‘plam deb nimaga aytiladi?
7. Yopiq to‘plam deb qanday to‘plamga aytiladi?
8. Ochiq va yopiq to‘plamlar qanday xossalarga ega?
9. Qanday to‘plamga chegaralangan deyiladi?
10. To‘plamning quyuqlanish nuqtasi deb nimaga aytiladi?
11. Qism to‘plam deb qanday to‘plamga aytiladi?
12. Qanday to‘plamlar teng deyiladi?
13. Birlashma (yig‘indi) to‘plam qanday to‘plam?
14. To‘plamlarning kesishmasi nima va u qanday belgilanadi?
15. To‘plamlarning farqi (ayirmasi) nima?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. N natural sonlar to‘plami va Z butun sonlar to‘plami birlashmasini toping.
2. G rasional sonlar to‘plami, R haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsa, $G \cap R$ ni toping.
3. Rasional va irrasional sonlar to‘plami birlashmasini toping.
4. A to‘g‘ri to‘rtburchaklar to‘plami, B romblar to‘plami bo‘lsa, $A \cap B$ ni toping.
5. A juft sonlar to‘plami Z butun sonlar to‘plami bo‘lsa, ularning kesishmasini

toping.

6. A juft sonlar to‘plami B toq sonlar to‘plami bo‘lsa, A va B larning kesishmasini toping.

7. $\{0; \ 1{,}2\}$ bo‘lsa hamma qism to‘plamlar to‘plamini toping.

18-MAVZU: KOMPLEKS SONLAR TO’PLAMI, KOMPLEKS SONNING MODULI, UNING TRIGONOMETRIK SHAKLI VA XOSSALARI.

Reja:

1.Kompleks sonning geometrik tasviri va kompleks tekslik.

2. Kompleks sonning trigonometrik va ko‘rsatkichli shakli.

3. Algebraik shakldа berilgan kompleks sonlarni darajaga ko‘tarish va ildizdan chiqarish

Tayanch iboralar:kompleks son, argument,moduli, trigonometrik shakli

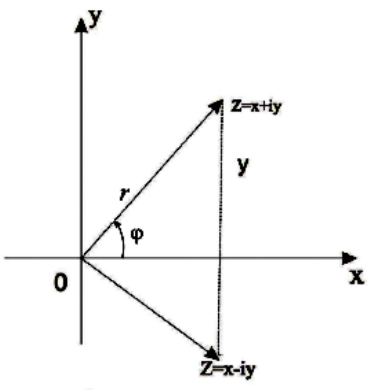
1. Kompleks sonning geometrik tasviri va kompleks tekislik

To‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi $x0y$ ni tanlab, uning abssissalar o‘qiga $z = x + iy$ ning haqiqiy qismi **x** ni, ordinatalar o‘qiga esa mavhum qismining koeffitsienti y ni joylashtirsak, tekislikda (x, y) nuqtaga ega bo‘lamiz.

Ana shu nuqta $z = x + iy$ kompleks sonning geometrik tasviri deb qabul qilingan.

Shunday qilib, har bir kompleks songa tekislikda birgina nuqta va aksincha, tekislikdagi har bir nuqta uchun bitta kompleks son mos keladi.

$0x$ o‘q – haqiqiy o‘q, 0y – mavhum o‘q, $x0y$ tekislik esa kompleks tekislik deyiladi.



3-chizma

Ko‘pincha z kompleks sonning geometrik tasviri sifatida koordinatalar boshini tekislikdagi z nuqta bilan tutashtiruvchi vektor ham qabul qilinadi. Bu vektorning moduli yoki uzunligi: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (3.1)

2. Kompleks sonning trigonometrik va ko‘rsatkichli shakli

1–chizmadan ko‘rinadiki: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ (4.1). Bundagi r kompleks z sonni tasvirlagan vektorning uzunligini ifodalaydi, uni z sonning moduli, φ burchakni esa z ning argumenti deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$r = |z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\arg Z = \varphi$ (4.2)

z kompleks songa mos bo‘lgan vektorga birgina uzunlik va cheksiz ko‘p burchaklar mos kelishi chizmadan ko‘rinadi: $\varphi, \varphi + 2\pi, ...$ Shu sababli odatda burchakning umumiy ko‘rinishi $Argz = \arg z + 2\pi k$ (4.3) kabi belgilanib $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, $\varphi = \arg Z$ ni argumentning bosh qiymati deyiladi.

Chizmadan: $tg\varphi = \frac{y}{x}$. Bunda
$$\varphi = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, agar..x \geq 0, y \geq 0 \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, agar..x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + arctg\frac{y}{x}, agar..x < 0, y < 0 \\ 2\pi + arctg\frac{y}{x}, agar..x \geq 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, agar..x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, agar..x = 0, y < 0 \end{cases} \quad (4.4\ \ )$$

Endi (4.1) ga asosan $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (4.5) bo‘lib, o‘ng tomon z kompleks sonning trigonometrik shakli (formasi) deyiladi. ($0 \leq$ r $< \infty$ va $0 \leq \varphi < 2\pi$).

Matematik tahlildan Eylerning quyidagi mashhur formulasi ma’lum: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ bunda φ-haqiqiy son. U holda (4.5) dan Z kompleks sonning ushbu ko‘rsatkichli formasi $z = re^{i\varphi}$ (4.6) kelib chiqadi, bunda $e = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$, $2 < e < 3$, e=2.718281828459045…

Misol. $z = i$ sonni trigonometrik va ko‘rsatkichli shaklga keltiring.

Yechish. $x = 0, y = 1 > 0, r = |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}$. (4.5)ga asosan $z = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ yoki (4.6) ga asosan: $z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

3. Algebraik shaklda berilgan kompleks sonlarni darajaga ko‘tarish va ildizdan chiqarish

Algebraik shaklda berilgan kompleks sonni n-darajaga ko‘tarish uchun, uni avval trigonometrik shaklga keltirilib uning modulini shu darajaga ko‘tarib, argumentini n ga ko‘paytirish kerak:

$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (5.1) ga Muavr formulasi deyiladi.

Misol $(1+i)^7$ ni hisoblang

Yechish. Dastlab qavslar ichidagi sonni trigonometrik shaklga keltirib olamiz: $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Endi (5.1) formulaga asosan, buni darajada ko‘tarib soddalashtiramiz:

$$(1+i)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8(1-i)$$

$z = x + iy$ kompleks son berilgan bo‘lsa, uning istalgan darajali ildizlarini topish bilan shug‘ullanamiz.

Agar $z = \beta^n$ bo‘lsa, β soni z ning n-darajali ildizi deyilib $\beta = \sqrt[n]{z}$ (5.2) ko‘rinishda yoziladi.

Biz mana shu β sonni topish uchun dastlab berilgan z sonni trigonometrik shaklga keltiramiz: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Kompleks sonlar ustida to‘rt amalni bajargan vaqtimizda yana kompleks sonlar hosil bo‘lishini ko‘rgan edik. Kompleks sonning ildizi ham kompleks son bo‘ladi,ya`ni $\beta_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ (5.3), bunda k=0,1,2,3…, qiymatlarni qabul qilish mumkin.

Demak, algebraik formada berilgan kompleks sondan ildiz chiqarish uchun, avval uni trigonometrik shaklga keltirib, moduldan shu darajali ildiz chiqariladi, argumenti esa ildiz ko‘rsatkichiga bo‘linadi.

Misol. $\sqrt[3]{1-i}$ ning qiymatlarini toping.

Yechish. Dastlab $1-i$ ni trigonometrik shaklga keltiramiz: $r = \sqrt{2}$ va $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ bo‘lgani uchun $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\beta_k = \sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3}\right), k = \overline{0,2}.$$

k=0 *da* $\beta_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right),$

k=1 *da* $\beta_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$

k=2 *da* $\beta_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} - i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

1.Tenglamani eching.

1. $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i,$ j: $x = \frac{20}{17},$ $y = -\frac{36}{17}.$

2. $(4x - 3y) + (3x + 5y)i = 10 - (3x - 2y - 30)i,$ j: $x = 4,$ $y = 2.$

3. $(2 - 7i)x + (8 + 6i)y = (-6 + 5i)x - 8,$ j: $x = -\frac{1}{3},$ $y = -\frac{2}{3}.$

2. Quyidagi kompleks sonlarning moduli va argumentini toping.

5. $z = 4 + 3i;$ j: $|z| = 5,$ $\varphi = arctg\,\frac{3}{4}.$

6. $z = -2 + 2\sqrt{3}i;$ j: $|z| = 4,$ $\varphi = \frac{2}{3}\pi.$

7. $z=-7-i;$ j: $|z|=5\sqrt{2}, \quad \varphi = arctg\frac{1}{7}-\pi.$

8. $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5};$ j: $|z|=1, \quad \varphi=\frac{4}{5}\pi.$

19-MAVZU. MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI. MULOHAZALAR VA PREDIKATLAR ,ULAR USTIDA AMALLAR.

REJA:

1. **Sodda va murakkab jumlalar**
2. **Mulohazalar. Chin va yolg‘on mulohazalar.**
3. **Mulohazalar ustida amallar**

1. *Sodda va murakkab jumlalar*. Matematik obyektlar orasidagi turli o‘zaro bog‘lanishlar tushunchalardan tashkil topgan jumlalar(gaplar) yordamida ifodalanadi.Masalan «Kvadratning hamma tomonlari teng», «10 soni 5ga bo‘linadi» va h.k.

Har bir matematik jumla mazmuni va mantiqiy strukturasi bilan xarakterlanadi. Matematikada sodda va murakkab jumlalar farq qilinadi. Masalan «15 toqson» sodda jumla, quyidagilar esa murakkab jumlalardir.

1. 50 soni 7 ga bo‘linmaydi

2. 96 juft son va 4 ga bo‘linadi

3. x soni 10 dan kichik yoki 10 ga teng

4. Agar uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lsa, u holda gippotenuza uzunligining kvadrati katetlar uz o‘nliklari kvadratlarining yig‘indisiga teng

5.129 soni 3 ga bo‘linadi faqat va faqat uning raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linsa.

Murakkab jumla sodda jumladan «emas» (maydi) «va», «yoki», «Agar x bo‘lsa, u bo‘ladi», «x o‘rinli faqat va faqat u o‘rinli bo‘lsa» kabilar bilan hosil qilinadi. Bu so‘zlar matematikada mantiqiy bog‘lovchilar deb ataladi.

2. *Mulohazalar. Chin va yolg‘on mulohazalar*. Agar jumlaga nisbatan u chinmi yoki yolg‘on savoli ma’noga ega bo‘lsa, u holda bu jumla mulohaza deyiladi.

So‘roq gaplar, undov gaplar mulohaza bo‘la olmaydi. Chunki bular uchun chin yoki yolg‘onligi haqida savol q o‘yish ma’noga ega emas.

Masalan, «10 juft son» jumla chin mulohaza, «5+7=10» jumla yolg‘on mulohaza, «Soat necha?» va «Yashasin quyosh»lar mulohaza bo‘lmaydi.

Mulohazalarni almashtirish qoidalari huddi algebraik ifodalarni almashtirishga o‘xshab ketadi. Mulohazalarni almashtirish qoidalari matematik mantiqning bir bo‘lagi hisoblanadi.

Kelajakda mulohazalarni lotin alifbosining bosh harflari A,B,S va hakozalar bilan belgilaymiz va faqat ularning chin yoki yolg‘onligi bilan qiziqamiz.

Har bir mulohazaga, agar u chin bo‘lsa Ch (chin) va agar yolg‘on bo‘lsa Yo (yolg‘on) qiymatlardan biri beriladi. Agar mulohaza sodda bo‘lsa, u holda uning chinlik qiymati mazmuniga qarab aniqlanadi. Bizning birinchi vazifamiz murakkab mulohazalarning mazmunini akniqlash, ya’ni A va B sodda mulohazalar qanday bo‘lganda murakkab mulohazalarning chin yoki yolg‘onligini aniqlash kelajakda bizning asosiy vazifamiz bo‘ladi.

3.Mulohazalar ustida amallar. Endi sodda A va B mulohazalardan tashkil topgan murakkab mulohazalarning chinlik qiymatini aniqlash bilan shu g‘ullanamiz. Sodda mulohazalardan murakkab mulohaza tuzish va uning chinlik qiymatini topish mulohazalar ustida amal deyiladi.

1) *Mulohazalar inkori.* Agar A qandaydir mulohaza bo‘lsa, uni yolg‘on deb tasdiqlash natijasida yangi mulohaza hosil bo‘ladi. A mulohazaning inkori deb A mulohaza chin bo‘lganda yolg‘on, A mulohaza yolg‘on bo‘lganda chin bo‘luvchi $\overline{A}$ mulohazaga aytiladi, $\overline{A}$ «belgisi bunday o‘qiladi*:* A emas (maydi)» yoki «A ekani yolg‘on»

Misol. 1) A («132 soni 9 ga bo‘linadi») mulohazalarning inkori $\overline{A}$ («132 soni 9ga bo‘linmaydi»)dan iborat bo‘lib,A yolg‘on $\overline{A}$ esa chin bo‘ladi.

2. A («Toshkent O‘zbekiston Respublikasining poytaxti») mulohazaning inkori $\overline{A}$ («Toshkent O‘zbekiston Respublikasining poytaxti emas») bo‘ladi Bu yerda A chin $\overline{A}$ esa yolg‘on mulohazadir.

Faraz qiliylik A biror mulohaza bo‘lsin. Uning inkori $\overline{A}$ ham mulohaza bo‘ladi. Shuninig uchun uning inkorini ham tuzish mumkin. $\overline{A}$ ning inkori $\overline{\overline{A}}$ deb belgilanadi va u qo‘sh inkor deb aytiladi. Masalan, A («15 tub son»), $\overline{A}$ («15 tub son emas») bo‘lib $\overline{\overline{A}}$ («15 tub son»)

Umuman, har qanday A mulohaza $\overline{\overline{A}}$ ga teng kuchli bo‘ladi. $\overline{A}$ va $\overline{\overline{A}}$ mulohazalarning chinlik jadvali q o‘ydagicha bo‘ladi.

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
Ch	*Yo*	*Ch*
Yo	*Ch*	*Yo*

2) *Mulohazalar konyunksiyasi*. A va B ikkita sodda mulohazalar bo‘lsin. Ularni «va» bog‘lovchisi bilan birlashtirib «A va B» murakkab mulohazaga ega bo‘lamiz. Bu mulohaza A va B sodda mulohazalarning kon’yunksiyasi deyiladi va $A \wedge B$ kabi belgilanadi.

Ta’rifga ko‘ra agar ikkala *A* va *B* mulohaza chin bo‘lsa, u holda «*A* va *V*» ko‘rinishdagi mulohaza (kon’yunksiya) chin hisoblanadi. Agar mulohazalardan bittasi yolg‘on bo‘lsa u holda «*A* va *B*» ko‘rinishdagi mulohaza (kon’yunksiya) yolg‘on hisoblanadi.

Misol. 1. *A* («10-5=5»), *B* («5 toq son») mulohazalarni qaraymiz. Bulardan «va» bog‘lovchisi yordamida *S* mulohaza ham chin bo‘ladi.

2. Endi *A* («12 tub son»), *B* («12 soni 3 ga bo‘linadi») mulohazalaridan *S* («12 tub son va 12 soni 3 ga bo‘linadi») murakkab mulohazani tuzamiz. Bu mulohaza yolg‘on, chunki *A* yolg‘on *B* esa chin mulohazalardir

Kon’yunksiya ta’rifini q o‘yidagi chinlik jadvali orqali yozish mumkin.

A	*B*	$A \wedge B$
Ch	*Ch*	*Ch*
Ch	*Yo*	*Yo*
Yo	*Ch*	*Yo*
Yo	*Yo*	*Yo*

Agar $A \wedge B$ kon’yunksiyada *A* va *B* larning o‘rinlarini almashtirsak $B \wedge A$ kon’yunksiya xosil bo‘ladi. Bunda $A \wedge B$ va $B \wedge A$ lar bir vaqtda yolg‘on bo‘ladi. Demak,ular teng kuchli,ya’ni

$A \wedge B = B \wedge A$

Bu tenglik kon’yunksiyaning kommutativlik xossasi deyiladi.

Chinlik jadvalini tuzish yordamida $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge S)$

Tenglikning to‘g‘riligini ham ko‘rsatish mumkin. Bu tenglik kon’yunksiyaning assosiativlik xossasi deyiladi.

Agar A va $\overline{A}$ larning kon’yunksiyasi $A\wedge\overline{A}$ ni qaraydigan bo‘lsak, u hamma vaqt yolg‘on mulohazadan iborat bo‘ladi.Masalan, $A\wedge\overline{A}$ (5 tub son va 5 tub son emas) yolg‘on mulohazadan iborat.$A\wedge\overline{A}=Yo$ deb yozish mumkin.

3) *Dizyunksiya amali*. Ikkita sodda *A* va *B* mulohazalarni «yoki» bog‘lovchisi bilan birlashtirib ya’ni «*A* yoki *B*»

Murakkab mulohazaga ega bo‘lamiz. Bu mulohaza *A* va *B* mulohazalarning diz’yunksiyasi deyiladi va $A\cup B$ kabi belgilanadi .

A va *B* mulohazalardan aqalli bittasi chin bo‘lsa, u holda «*A* yoki *B*» ko‘rinishdagi mulohaza (diz’yunksiya) chin hisoblanadi .*A* va *B* mulohazalarning ikkalasi ham yolg‘on bo‘lsa, u holda «*A* yoki *B*» mulohaza(diz’yunksiya) yolg‘on hisoblanadi. Misol. 1.A(«12>9») va B(«12=9») mulohazalarning diz’yunksiyasi $A\vee B$(«12>9 yoki 12=9»)dan iborat bo‘lib uni *S*(«12 ≥ 9») ko‘rinishida yozish mumkin.Bu chin mulohaza hisoblanadi.

2.*A*(«12 tub son»), *B*(«12 soni 5ga bo‘linadi») mulohazalar diz’yunksiyasi $A\vee B$ («12 tub son yoki 12 soni 5ga bo‘linadi») mulohaza yolg‘on bo‘ladi ,chunki *A* va *B* larning ikkalasi ham yolg‘on .

Dizyunksiyaning chinlik jadvali quyidagicha bo‘ladi.

A	B	$A\vee B$
Ch	*Ch*	*Ch*
Yo	*Ch*	*Ch*
Ch	*Yo*	*Ch*
Yo	*Yo*	*Yo*

Dizyunksiya amali quyidagi xossalar ega

1° $A\vee B=B\vee A$ (kommutativlik)

2° $A\vee (B\vee S)=(A\vee B) \vee S$ (assosiativlik)

3° $(A\vee B) \wedge C=(A\wedge S) \vee (B\wedge S)$

4° $(A\wedge B) \vee C=(A\vee S) \wedge (B\vee S)$

Bu tengliklarni chinlik jadvalini tuzish orqali isbotlash mumkin.

Osongina ko‘rsatish mumkinki A va $\overline{A}$ fikirlarning dizyunksiyasi hamma vaqt chin bo‘ladi: $A\vee \overline{A}=Ch$

Konyunksiya, dizyunksiya va inkor amallari De Morgan formulalari deb ataluvchi quyidagi formulalar orqali bog‘langan: a) $A\wedge B=\overline{A}\vee B$,b) $\overline{A\vee B}=\overline{A\wedge B}$

Bularni chinlik jadvali yordamida isbotlash mumkin

4) ***Mulohazalar implikatsiyasi*****.** Ikkita sodda A va B mulohazalar berilgan bo‘lsin. Ulardan «Agar A bo‘lsa, u holda B bo‘ladi» degan murakkab mulohaza tuzamiz.

Bu mulohaza A va B mulohazalarning implikatsiyasi deyiladi va $A\Rightarrow B$ kabi belgilanadi. Bu A dan B kelib chiqadi deb o‘qiladi. $A\Rightarrow B$ implikatsiyada A-implikatsiyaning sharti, B esa xulosasi deyiladi.

«Agar A bo‘lsa , u xolda B bo‘ladi» implikatsiya faqat bitta holda ya’ni A chin, B esa yolg‘on bo‘lgandagina yolg‘on, qolgan barcha hollarda chin bo‘ladi deb hisoblanadi. Shuning uchun uning chinlik jadvali quyidagicha bo‘ladi

A	B	$A\Leftrightarrow B$
Ch	*Ch*	*Ch*
Ch	*Yo*	*Yo*
Yo	*Ch*	*Ch*
Yo	*Yo*	*Ch*

Misol, A (x son 4ga karrali), B (x son 2 ga karrali) mulohazalar implikatsiyasi quyidagicha bo‘ladi. $A \Rightarrow B$ (Agar x son 4ga karrali bo‘lsa, u holda 2 ga ham karrali bo‘ladi)

Agar $A \Rightarrow B$ implikatsiyada A va B larning o‘rinlari almashtirilsa $B \Rightarrow A$ implikatsiyaga ega bo‘lamiz. Bu berilgan implikatsiyaga teskari implikatsiya deyiladi.

Misol: A (x uchburchak teng yonli), B (x uchburchakning asosidagi burchaklari teng). Bu yerda $A \Rightarrow B = B \Rightarrow A$ ekanligi ravshan.

5)Ekvalensiya amali A va B sodda mulohazalardan quyidagi mulohazani

tuzish mumkin: «A bo‘ladi, faqat va faqat B bo‘lsa». Bu mulohaza A va B mulohazalarning ekvalensiyasi deyiladi va $A \Leftrightarrow B$ kabi belgilanadi. Ekvalensiyasining ma’nosi shundan iboratki, agar A mulohazadan B mulohaza kelib chiqsa, B mulohazadan esa A mulohaza kelib chiqsa u holda A va B mulohazalar ekvivalent (teng kuchli) bo‘ladi.

Agar A va B mulohazalarning ikkalasi ham chin yoki ikkalasi ham yolg‘on bo‘lsa $A \Leftrightarrow$ B ekvalnesiya chin, qolgan hollarda (ya’ni ularning biri chin ikkinchisi yolg‘on) yolg‘on bo‘ladi deb hisoblanadi. Shunday qilib ekvalensiyaning chinlik jadvali q o‘ydagicha bo‘ladi.

A	*B*	$A \Rightarrow B$
Ch	*Ch*	*Ch*
Ch	*Yo*	*Yo*
Yo	*Ch*	*Yo*
Yo	*Yo*	*Yo*

Misol. A («129 soni 3 ga bo‘linadi»), B («129 sonning raqamlar yig‘indisi 3 ga bo‘linadi») mulohazalar ekvalensiyasi $A \Leftrightarrow$ B («129 soni 3 ga bo‘linadi faqat va faqat uning raqamlar yig‘indisi 3 ga bo‘linadi») dan iborat bo‘lib u chin mulohazani ifodalaydi.

Osongina ko‘rish mumkinki. $A\wedge B \Leftrightarrow B \wedge A = Ch$. Bu yerda A va B lar bir vaqtda chin yoki yolg‘on mulohazalardan iborat. Xuddi shunga o‘xshash $A\vee B \Leftrightarrow B\vee A = Ch$ bo‘ladi. Umuman olganda A va B mulohazalar ekvivalent (teng kuchli) bo‘lsa, u holda $A \Leftrightarrow B$ chin bo‘ladi va aksincha sodda mulohazalar qanday bo‘lganda ham ulardan tashkil topgan murakkab mulohaza chin bo‘lsa, bunday mulohaza tavtalogiya deyiladi.

Masalan, $A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$ va $A\wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ lar tavtalogiyalardir.$((A \Rightarrow B)\wedge A) \Rightarrow B$ ham tavtalogiya bo‘ladi.

Savol va topshiriqlar

1. Mulohazalarga misollar keltiring. Ularning rost yoki yolg‘onligini aniqlang.

2. Quyidagi jumlalar orasidan mulohazalarni ajrating va ularni rostlik qiymatini toping.

3. 9-butun son, b) 48 ni 5 ga bo‘lganda 4 qoldiq qoladi, d) so‘roq gap mulohaza bo‘ladi e) $x \le 7$, f) 17·2-21=13, g) x+4=13, k) 24-tub son

4. Quyidagi mulohazalar inkorini tuzing va ularning rostlik qiymatini toping:

a)225 soni 9ga bo‘linadi, b) 7,6-natural son, d) 7<3, e) 21 soni 7 ga bo‘linadi, f) Praga-Bolgariyaning poytaxti, g) 27:3+2·3-18 ifodaning qiymati 0 ga teng.

5. *A*: «4<7» .*B*: «Toshkent O‘zbekistoning poytaxti» mulohazalari

berilgan bo‘lsin ularning kon’yunksiyasini tuzing va rostlik qiymatini toping shuningdek, $A\wedge B$, $A\vee B$, mulohazalarini s o‘z orqali ifodalang

A: «26:2+11=28», *B* 3 tub son mulohazalari berilgan bo‘lsin $A\vee B$,

$B\vee A$ larni s o‘z orqali ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.

6. S: 3 toq son, B: 7 soni 28 sonining bo‘linuvchisi mulohazalari berilgan bo‘lsin ularning emplikatsiyasini ifodaning va rostlik qiymatini toping

V Modul. ANALITIK GEOMETRIYA.

20-MAVZU. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI.TEKISLIKDAGI VA FAZODAGI TO`G`RI BURCHAKLI KOORDINATALAR SISTEMALARI. TEKISLIKDA, FAZODA IKKI NUQTA ORASIDAGI MASOFA.

Reja:

1. **Geometriyaning rivojlanish tarixidan.**
2. **Koordinatlar usuli va sodda masalalar.**

Tayanch ibora va tushunchalar

Geometriya rivojlanish tarixi, analitik geometriya, koordinatlar usuli va sodda(asosiy) masalalar, koordinatlar, ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo‘lish, koordinatlar orqali uchburchak yuzini toppish, Tekislikda chiziq va uning tenglamasi, burchak koeffisiyent, to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning o‘qlardan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi, berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi, to‘g‘ri chizioqning normali, to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.

1.Geometriyaning rivojlanish tarixidan. Geometriya fani qadimiy tarixga ega bo‘lib, unga oid boshlang‘ich tushunchalar bundan 4000 yil muqaddam Misr va Bobilda vujudga kelgan. Geometrik bilimlarning vujudga kelishi odamlarning amaliy faoliyati bilan bog‘liq. Bu ko‘pgina geometrik figuralarning nomlarida o‘z aksini topgan. Masalan, trapesiya nomi yunoncha trapezion - so‘zidan olingan bo‘lib, «stolcha» ni bildiradi. «Chiziq» termini lotincha «limem» - «zig‘ir ip» so‘zidan hosil bo‘lgan.

Qadimdayoq geometriya aksiomalar sistemasiga asosan tuzilgan qat’iy mantiqiy fanga aylangan. U uzluksiz rivojlanib yangi teoremalar, g‘oyalar va usullar bilan boyib borgan.

Eramizdan avvalgi III asrda yunon olimi Yevklid «Negizlar» nomli asarini yozadi. Yevklid shu davrgacha bo‘lgan geometrik bilimlarni jamladi va bu fanning tugallangan aksiomatik bayonini berishga harakat qildi. Yevkliddan so‘ng yashagan olimlar uning «Negizlar»iga ba’zi mavzularni qo‘shdilar, aniqliklar kiritdilar.

Geometriyaning hozirgi zamon fizikasi bilan bog‘lanishini kuzatish g‘oyat qiziqarli. Ko‘pincha matematikani boyitgan yangi tushunchalar fizika hamda ximiya va tabiatshunoslikning boshqa bo‘limlaridan keladi. Masalan, vektor mexanikadan olinganligi misol bo‘la oladi. Geometriyaning kelgusi rivojlanishida esa matematikaning ichki talabi va o‘ziga xos mantiqiy rivojlanishi natijasida uning ichida vujudga kelgan, yangi geometrik tushunchalar yangi zamonaviy fizikani yaratishga yo‘l ochdi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasi nisbiylik nazariyasini ochishga asos bo‘lib xizmat qildi.

Hozirgi zamon geometriyasi juda ko‘p yo‘nalishlarga ega. Ulardan biri geometriyani sonlar nazariyasi bilan, ikkinchisi kvant fizikasi bilan, uchinchisi esa matematik tahlil bilan yaqinlashtiradi. Hozirgi zamon matematikasi bo‘limlari shundayki unda geometriya ko‘proqmi, algebrami yoki tahlil (analiz) aytish qiyin.

Geometriyaning rivojlanishida Markaziy Osiyodan chiqqan matematiklar Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy, Abu Ali ibn Sino, Abdurahmon al-Xaziniy, Abul Vafo Buzjoniy, Umar Xayyom, Mirzo Ulug‘bek, G‘iyosiddin al-Koshiy va boshqalarning xizmati kattadir.

XVII asrda fransuz matematigi va filosofi Rene Dekart ishlari tufayli, butun matematikani, xususan geometriyani inqilobiy qayta qurgan koordinatlar usuli (metodi) vujudga keldi. Algebraik tenglik (tengsizlik) larni geometrik obraz (grafik) lar orqali talqin qilish va aksincha geometrik masalalarni yechishni analitik, formulalar, tenglamalar sistemalari yordamida izlash imkoniyatini paydo qildi. Matematika fanining yangi tarmog‘i ***analitik geometriya*** **vujudga keldi.** Analitik geometriyaning mohiyati, geometrik obyektlarga uning algebraik (analitik) ifodasini mos qo‘yib, ularning xususiyatlarini o‘rganishni, unga mos algebraik ifodalarni tekshirish orqali amalga oshiriladi**.**

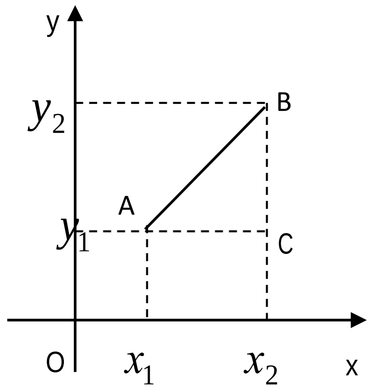
2. Koordinatlar usuli va sodda masalalar. Ma’lumki, o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan gorizontal va vertikal sonlar o‘qi Dekart to‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasini tashkil qiladi. Bu sistema orqali tekislikdagi nuqta bilan bir juft haqiqiy son o‘rtasida bir qiymatli moslik o‘rnatiladi. Tekislikda nuqta $A(x, y)$ bilan belgilanadi. x, y sonlarga uning ***koordinatlari*** deyiladi. ,,Nuqta berilgan” degan ibora uning koordinatlarining berilganligini, ,,Nuqtani toping” degan ibora esa, shu koordinatlarni topishni tushuniladi. Koordinatlar sistemasi orqali o‘rnatilgan bunday moslikka **koordinatlar usuli** deyiladi.

Bu usulni geometriyaning **sodda** ***masalalarini yechishga*** qo‘llaymiz.

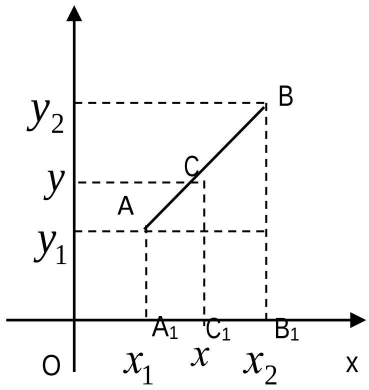
1) Tekislikda berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, x_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish talab etilsin. Ma’lumki, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$. ABC to‘g‘ri burchakli uchburchakdan, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, shunday qilib,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

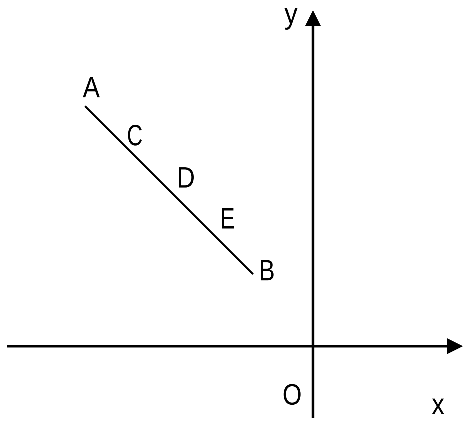
bo‘ladi. (1) formulaga tekislikda berilgan ikkita nuqta orasidagi masofani topish formulasi deyiladi (1-chizma).



1-chizma



2-chizma



3-chizma

2) AB kesma berilgan bo‘lib, uning uchlari $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bo‘lsin. AB kesmani $AC : BC = \lambda$ nisbatda bo‘luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin. O‘rta maktab geometriyasidan ma’lumki (2-chizma),

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = \lambda,$$

yoki

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$$

bo‘lib,

$$A_1C_1 = x - x_1, \quad B_1C_1 = x_2 - x$$

bo‘lganligi uchun,

$$(x-x_1):(x_2-x\ )=\lambda,\ x-x_1=\lambda\,(x_2-x);\ x+\lambda x=x_1+\lambda x_2;$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

bo‘ladi. Xuddi shunday,

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Demak, C nuqtaning koordinatlari uchun

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2)$$

formulani hosil qildik. (2) formulaga AB kesmani λ nisbatda bo‘luvchi $C(x,y)$ nuqtani topish formulasi deyiladi. Xususiy holda $C(x;\ y)$ nuoqta AV kesmani teng ikkiga bo‘lsa, u holda

$$\frac{AC}{CB}=\lambda=1 \text{ bo‘lib,} \quad x=\frac{x_1+x_2}{2},\ \ y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

kesmani teng ikkiga bo‘lish formulasi kelib chiqadi.

3) To‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida uchlari $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak yuzi quyidagi formula orqali topiladi:

$$S=\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)] \qquad (3)$$

1-m***isol***. $M(5;\ 3)$ va $N(2;\ -1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. Shartga ko‘ra: $x_1=5,\ y_1=3,\ x_2=2,\ y_2=-1$. Bularni (1) formulaga oqo‘ysak:

$$MN=\sqrt{(2-5)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

bo‘ladi.

2-**misol.** Tekislikda $A(5;3)$, $B(2;1)$ nuqtalar berilgan. *AV* kesmani $\frac{AC}{CB}=\lambda=0{,}2$ nisbatda bo'luvchi $C(x;\ y)$ nuoqtaning koordi-natlarini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $x_1=5,\ x_2=2,\ y_1=3,\ y_2=1,\ \lambda=0{,}2$.

(2) formulaga asosan:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{5+0{,}2\cdot 2}{1+0{,}2}=\frac{5+0{,}4}{1{,}2}=\frac{5{,}4}{1{,}2}=\frac{54}{12}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}=4{,}5;$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{3+0{,}2\cdot 1}{1+0{,}2}=\frac{3+0{,}2}{1{,}2}=\frac{3{,}2}{1{,}2}=\frac{32}{12}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}.$$

Shunday qilib, $C\left(4{,}5;\frac{8}{3}\right)$ bo'ladi.

3-m***isol.*** Uchlari $A(2;0), B(5;3)$ va $C(2;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

Yechish. (3) formulaga ko'ra $x_1=2,\ x_2=5,\ x_3=2,\ y_1=0,\ y_2=3,\ y_3=6$ bo'lganligi uchun,

$$S=\frac{1}{2}\left[(2\cdot 3-5\cdot 0)+(5\cdot 6-3\cdot 2)+(0\cdot 2-2\cdot 6)\right]=\frac{1}{2}(6+24-12)=\frac{1}{2}\cdot 18=9$$

bO'ladi.

4-misol. $A(-6;7)$ va $B(-2;3)$ nuqtalar berilgan. *AB* kesma C, D, E nuqtalar orqali 4 ta teng qismlarga ajratilgan. C, D, E bo'linish nuqtalarini toping (3-chizma).

Yechish: Ma'lumki $\frac{AC}{CB}=\frac{1}{3},\ \frac{AD}{DB}=1,\ \frac{AE}{EB}=3.$

C nuqtaning koordinatlarini (2) formuladan foydalanib topamiz:

$$x_c=\frac{-6+\frac{1}{3}(-2)}{1+\frac{1}{3}}=-5\ ,\quad y_c=\frac{-6+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}}=6$$

Demak, $C(-5,\ 6)$. (D va E nuqtalarni topish o'quvchiga havola etiladi).

1.Chiziq va uning tenglamasi haqida. Analitik geometriyaning eng muhim tushunchalaridan biri, **chiziq tenglamasi** tushunchasidir. Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida L chiziq berilgan bo‘lsin(4-chizma).

Ta’rif. L chiziqda yotuvchi istalgan $M(x, y)$ nuqtaning koordinatlari

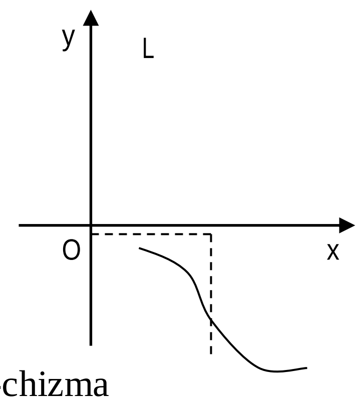
$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantirib, unda yotmagan nuqtalarning koordinatlari qanoatlantirmasa, bu tenglama L chiziqning tenglamasi deyiladi. Bundan L chiziq, koordinatlari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to‘plamidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Chiziqning tenglamasini tuzish deganda unga tegishli ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning koordinatlari orasidagi munosabatni(bog‘lanishni) tenglama ko‘rinishida ifodalashdan iborat. Topilgan chiziq tenglamasi uchun: chiziqdagi istalgan nuqtaning koordinatlari uni qanoatlantiradi va aksincha, nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantirsa, bu nuqta shu chiziqda yotadi.

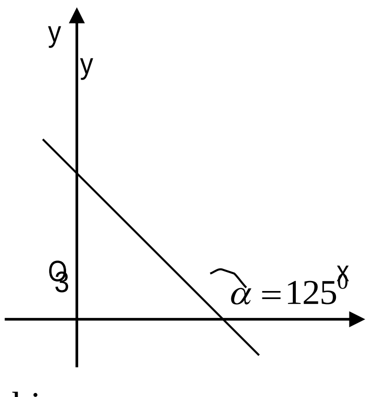
2. To‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari.

To‘g‘ri chiziq tushunchasi analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biridir. Quyida har xil holatlarda to‘g‘ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) keltirib chiqaramiz va ular yordamida to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o‘rganamiz.

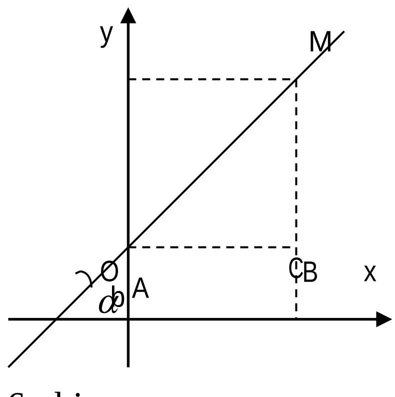
1) To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to‘g‘ri chiziqning ordinatlar o‘qidan ajratgan kesmasining kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi. Masalan, $b = 3$, $\alpha = 125^0$ bo‘lsa, uning holati aniq bo‘ladi (5-chizma).



4-chizma



5-chizma



6-chizma

Yuqoridagi mioqdorlar berilganda to‘g‘ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin (6-chizma). AMB to‘g‘ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = tg\alpha \text{, bundan } BM = ABtg\alpha$$

6–chizmadan $y = BC + BM$; yoki $y = ABtg\alpha + b$, $AB = x$ bo‘lganligi uchun $y = xtg\alpha + b$ bo‘ladi. $tg\alpha$ to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffisiyenti** deyiladi va $tg\alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \qquad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffisiyentli tenglamasi** deyiladi. $b = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tib, tenglamasi $y = kx$ bo‘ladi. $k = 1$ bo‘lsa, $y = x$ bo‘lib, bu birinchi koordinat- lar burchagining bissektrisasi bo‘ladi.

1-misol. OX o‘qi bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi va OY o‘qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra, to‘g‘ri chiziq OY o‘qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o‘tadi, demak $b = 3$. Bu nuqtadan OX o‘qiga parallel chiziq o‘tkazamiz, hamda shu to‘g‘ri chiziq bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Endi shu to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = tg\ 120^0 = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo‘lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}\,x + 3$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi bo‘ladi.

2) Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, x_1)$, $B(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.

$$y = kx + b \qquad (3)$$

to‘g‘ri chiziq A nuqtadan o‘tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatlari to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya’ni $y_1 = kx_1 + b$ bo‘ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4)$$

hosil bo‘ladi. (4) tenglamaga berilgan **bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi** deyiladi.

To‘g‘ri chiziq $B(x_2; y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o‘tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo‘lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo‘ladi. k ning yuoqoridagi qiymatini (4)ga qo‘yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{5}$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) **berilgan ikki** $A(x_1, y_1)$ **va** $B(x_2, y_2)$ **nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

2-misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so‘m harajat qilinsin. 500 donasi uchun esa harajat 1300 ming so‘m bo‘lsin. Harajat funksiyasi chiziqli (to‘g‘ri chiziq) bo‘lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish harajatini toping.

Yechish. Masala sharti bo‘yicha $A(100,\ 300)$ va $B = (500,\ 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{y - 300}{1300 - 300} = \frac{x - 100}{500 - 100}\text{, yoki } \quad y = 2{,}5x + 50$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Oxirgi tenglamadan $x = 400$ uchun, $y = 1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so‘m harajat qilinadi.

3). To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy <u>hollari.</u> Ikki noma’lumli

$$Ax + By + C = 0$$

tenglamani ko‘rib chiqamiz.

Bundan, $By=-Ax-C$, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ bo‘lib, $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ bilan belgilasak, $y=kx+b$ tenglama hosil bo‘ladi. Shunday qilib, $Ax+By+C=0$ tenglama ham to‘g‘ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

$$Ax+By+C=0 \qquad (6)$$

tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasining hususiy hollari: 1) $A\neq 0$, $B\neq 0, C=0$ bo‘lsa, $Ax+By=0$ bo‘lib, to‘g‘ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tadi, chunki $O(0;0)$ nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantiradi;

2) $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, bo‘lsa, $y=-\frac{C}{B}$ bo‘lib, OY o‘qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, OX o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq tenlamasi bo‘ladi;

3) $B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ bo‘lsa, $x=-\frac{C}{A}$ bo‘lib, OX o‘qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib , OY o‘qiga paralllel to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi;

4) $A=0$, $C=0$, $B\neq 0$ bo‘lsa, $y=0$ bo‘lib, OX o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

5) $B=0$, $C=0$, $A\neq 0$ bo‘lsa, $x=0$ bo‘lib, OY o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

6) $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$ bo‘lsa, $C=0$ bo‘lib, o‘zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga teng kelib chiqadi, bunday bo‘lishi mumkin emas.

3-misol. $x-2y+6=0$ to‘g‘ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yechish: Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz: $2y=x+6$, $y=1/2\cdot x+3$ bundan (2) tenglama bilan taqqoslab $k=1/2$, $b=3$, ekanligini topamiz. Shunday qilib, to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffisiyentli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

4) To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. To‘g‘ri chiziq koordinat o‘qlaridan mos ravishda a va b kesmalar ajratib o‘tsin(7-chizma). To‘g‘ri chiziq $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalardan o‘tadi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasiga asosan

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}, \qquad \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}, \qquad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

yoki
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{7}$$

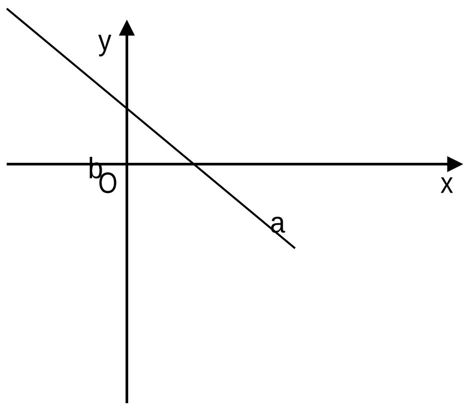
tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **kesmalarga nisbatan tenglamasi** deyiladi.

4-misol. $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va uni yasang.

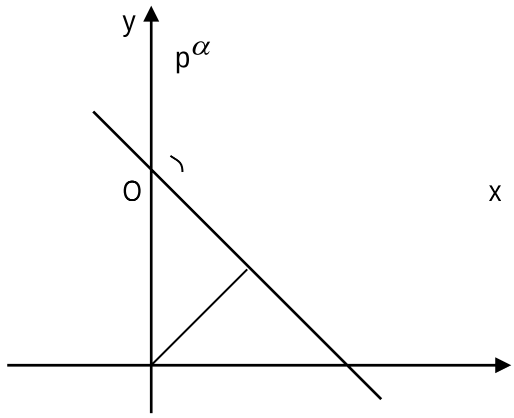
Yechish. $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini (7) ko‘rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$$3x+5y=15, \quad \frac{3x}{15}+\frac{5y}{15}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

bu to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi bo‘ladi. Endi koordinat o‘qlaridan mos ravishda 5 va 3 kesmalarni ajratib, ajratilgan kesmalar oxiridan yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz.



7- chizma.



8- chizma.

5) To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi. To‘g‘ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi (8-chizma) va uning tenglamasi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{8}$$

bo‘ladi. (8) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Ma’lumki, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak.

To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglama keltirish uchun

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

normallovchi ko‘paytuvchini hisoblab, uni $Ax+By+C=0$ tenglamaga ko‘paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

normal tenglama hosil bo‘ladi. Normallovchi ko‘paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

5-misol. Normalning uzunligi $p=3$ va uning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchagi 30^0 bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra normal OX o‘qi bilan 30^0 li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo‘zg‘aluvchi tomoni normal to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Shu to‘g‘ri chiziqda $p=3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi . Endi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini yozamiz. Shartga ko‘ra normalning uzunligi va uning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma’lumki, to‘g‘ri chiziqning (8) normal tenglamasini yozamiz. $p=3$, $\alpha=30^0$ bo‘lganligi uchun

$$x\cos 30^0 + y\sin 30^0 - 3 = 0 \qquad \textit{ёки} \qquad \sqrt{3}/2\cdot x+1/2\cdot y-3=0$$

Natijada $\sqrt{3}x+y-6=0$ tenglama hosil bo‘ladi.

6-misol.. $4x-3y-5=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring. Yechish.

Normallovchi ko‘paytuvchini topamiz: $M=\dfrac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{1}{5}$ bo‘ladi.

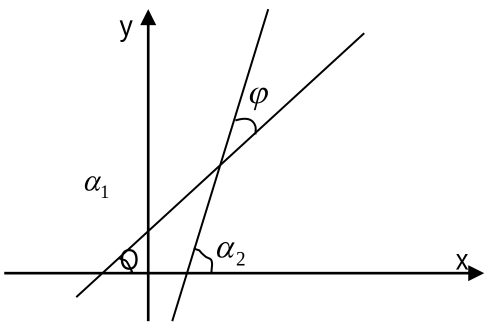
Berilgan tenglamani $M=1/5$ ko‘paytirib, $4/5\cdot x-3/5\cdot y-1=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi, chunki

$$(\frac{4}{5})^2+(-\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1, \qquad (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$$ edi.

3. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita

$$y = k_1 x + b_1,$$
$$y = k_2 x + b_2$$

to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bunda $k_1 = tg\alpha$, $k_2 = tg\alpha_2$ bu to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lmasin va ular orasidagi burchakni topish kerak. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.



9-chizma.

Ya’ni , $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$(9-chizma) . Ma’lumki,

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

yoki

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (1)$$

bo‘ladi. (1) ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakning tangensini topish for- mulasi deb ataladi.

1-misol. $y = 3x + 1, y = 2x + 5$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$tg\varphi = \frac{3-2}{1+2\cdot 3} = \frac{1}{7}$ bo‘lib, $\varphi = arctg\,{}^1\!/_7 \approx arctg 0.14 \approx 8^0, \varphi \approx 8^0$

bo‘ladi.

4. To‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari. To‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lsa, ular orasidagi burchak

$\varphi = 90^0$ bo‘lib, $tg90^0 = \infty$ yoki $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty$, $1 + k_1 . k_2 = 0$

kelib chiqadi, bundan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo‘ladi, bunga ikki to‘g‘ri chiziqning **perpendikulyarlik** **sharti** deyiladi.

To‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $\varphi = 0$ bo‘lib, $tg0^0 = 0$, ¸yoki

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0,\ k_2 - k_1 = 0\ ,\ k_1 = k_2$$

kelib chiqadi.

$$k_1 = k_2$$

tenglikka **ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti** deyiladi.

5. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishuvi. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechib, kesishish nuqtasining koordinatlari topiladi.

2-misol. $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. Ikkinchi tenglamani (-1) ga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamalarni hadma-had qo‘shib $x - 1 = 0$, $x = 1$ ni hosil qilamiz. $x = 1$ ni birinchi tenglamaga qo‘ysak, $2 \cdot 1 + y - 3 = 0$ yoki $y = 1$ bo‘ladi. Shunday qilib, bu to‘g‘ri chiziqlar $A(1;1)$ nuqtada kesishadi.

6. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa. $M(x_0;y_0)$ nuqta va $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Berilgan nuqtadan, berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \tag{2}$$

formula yordamida topiladi. To‘g‘ri chiziq tenglamasi umumiy

$$Ax + By + C = 0$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3}$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $A(3;\ \sqrt{5})$ nuqtadan $2x + \sqrt{5}y - 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. To‘g‘ri chiziq tenglamasi umumiy holda berilgan. Shuning uchun (3) formulaga asosan,

$$d = \left|\frac{2\cdot 3 + \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} - 2}{\pm\sqrt{2^2 + \sqrt{5^2}}}\right| = \left|\frac{6+5-2}{3}\right| = \frac{9}{3}, \qquad d = 3$$

bo‘ladi.

7. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish.

$5x - 2y + 10 = 0$ **va** $5x - 2y + 36 = 0$

parallel to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish uchun, bu to‘g‘ri chiziqlarning bittasida ixtiyoriy bir nuqtani tanlaymiz va tanlangan nuqtadan ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topamiz: birinchi to‘g‘ri chiziqda $x = 4$ desak, $y = 15$ bo‘lib, $A(4{,}15)$ 1-to‘g‘ri chiziqdagi nuqta bo‘ladi. $A(4{,}15)$ nuqtadan ikkinchi $5x - 2y + 36 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani (3) formulaga asosan, hisoblasak,

$$d = \left|\frac{5\cdot 4 - 2\cdot 15 + 36}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{26}{\sqrt{29}} \quad , \quad d == \frac{26}{\sqrt{29}}$$

bo‘ladi.

Takrorlash uchun savollar

1.Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?

2. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi qanday yoziladi?

3. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyenti deb nimaga aytiladi?

4. Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?

21-Mavzu: Ikkinchi tartibli egri chiziq.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha.
2. Aylana va uning kanonik tenglamasi.
3. Ellips va uning kanonik tenglamasi.
4. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
5. Parabola va uning kanonik tenglamasi.

Tayanch iboralar va tushunchalar: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar, Aylana va uning kanonik tenglamasi, Ellips va uning kanonik tenglamasi, Giperbola va uning kanonik tenglamasi, Parabola va uning kanonik tenglamasi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha.

1-ta'rif. $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (1) ko'rinishdagi tenglama **ikkinchi darajali algebraik tenglama** deb ataladi.

Bu yerdagi A, B, C, D, E, F ma'lum sonlar bo'lib ulardan A, B, C bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda, ya'ni $A=B=C=0$ bo'lganda (1) tenglama

$$Dx+Ey+F=0$$

ko'rinishdagi chiziqli (birinchi darajali) tenglamaga aylanadi va bu to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligini bilamiz.

2-ta'rif. Dekart koordinatalari x va y ga nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama yordamida aniqlanadigan egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deb ataladi. (1) ikkinchi tartibli egri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarga **aylana,ellips, giperbola** va **parabolalar** kiradi.

Aylana va uning kanonik tenglamasi.

3-ta'rif. Tekislikning berilgan nuqtasidan bir xil masofada joylashgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **aylana** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtasini aylananing **markazi**, undan aylanagacha masofani **aylananing radiusi** deb ataymiz.

Markazi 0_1 $(a;b)$ nuqtada bo'lib radiusi R ga teng aylananing tenglamasini tuzamiz (1^a-chizma). Aylananing ixtiyoriy nuqtasini $M(x;y)$ desak aylananing ta'rifiga binoan:

$$MO_1=R..$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (2) dan foydalansak.

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

yoki bu tenglikni har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

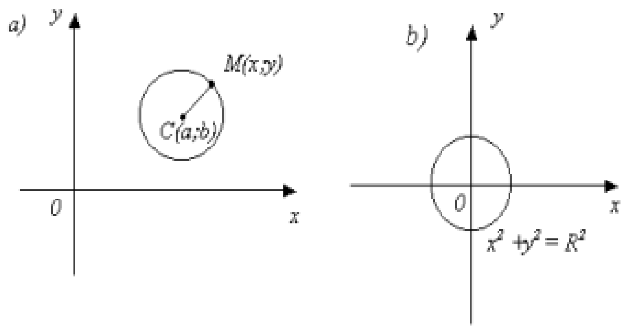
kelib chiqadi. Shunday qilib aylananing istalgan $M(x;y)$ nuqtasining kooordinatalari (2) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek aylanaga tegishli bo'magan hech bir nuqtaning koordinatalari (2) tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (2) aylana tenglamasi. U aylananing **kanonik** (eng sodda) tenglamasi deb ataladi.

Xususiy holda aylananing markazi $0_1(a,b)$ koordinatalar boshida bo'lsa $a=b=0$ bo'lib uning tenglamasi

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (3)$$

ko'rinishga ega bo'ladi (1^b-chizma).

Endi aylananing kanonik tenglamasini ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan taqqoslaymiz. (2) da qavslarni ochib ma'lum almashtirishlarni bajarsak u



1-chizma.

$$x^2+y^2-2ax-2ay+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni (1) bilan taqqoslab unda x^2 bilan y^2 oldidagi koeffitsientlarni tengligini va koordinatalarni ko'paytmasi xy ni yo'qligini ko'ramiz, ya'ni

$$A=C \text{ va } B=0.$$

(1) tenglamada $A=C$ va $B=0$ bo'lsa u aylanani tenglamasi bo'ladimi degan savolga javob izlaymiz.

Soddalik uchun $A=C=1$ deb olamiz. Aks holda tenglamani A ga bo'lib shuncha erishish mumkin.

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (5)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu tenglamani hadlarini o'zimizga qulay shaklda o'rinlarini almashtirib to'la kvadrat uchun zarur bo'lgan $\frac{D^2}{4}$ va $\frac{E^2}{4}$ ni ham qo'shamiz ham ayirimiz. U holda

$$x^2+Dx+\frac{D^2}{4}+y^2+Ey+\frac{E^2}{4}-\frac{D^2}{4}-\frac{E^2}{4}+F=0$$

yoki

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F \quad (6)$$

hosil bo'ladi. Mumkin bo'lgan uch holni qaraymiz:

1) $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F>0$ (yoki $D^2+E^2>4F$). Bu holda (6) tenglamani (2) bilan taqqoslab u va unga teng kuchli (5) tenglama ham markazi $0_1\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ nuqtada, radiusi $R=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}$ bo'lgan aylanani ifodalashiga ishonch hosil qilamiz.

2) $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F=0$. Bu holda (6) tenglama

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani yagona $0_1\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi xolos.

3) $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F<0$. Bu holda (6) tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamaydi. Chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni ega manfiy emas.

Xulosa. (11.1) tenglama $A=C$, $B=0$, $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F \phi 0$

bo'lgandagina aylanani tenglamasini ifodalar ekan.

1-misol. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ tenglama aylananing tenglamasi ekanligi ko'rsatilsin va aylananing markazi hamda radiusi topilsin.

Yechish. $A=C=1, B=0,$ $\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F=1^2+2^2-(-4)=9>0$,

demak berilgan tenglama aylanani umumiy tenglamasi ekan. Tenglamani

$$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)-1-4-4=0$$

ko'rinishda yozib undan

$$(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$$

aylananing kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib aylananing markazi $0_1(-1;2)$ nuqta va radiusi R=3 ekan.

2-misol. $x^2-2x+y^2+2y+4=0$ tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamasligi ko'rsatilsin.

Yechish. Tenglamani $(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)-1-1+4=0$

ko'rinishda yozsak undan $(x-1)^2+(y+1)^2=-2$

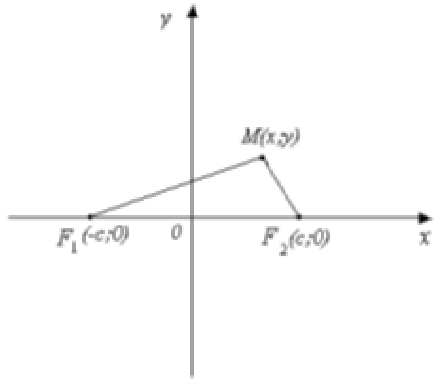
tenglikka ega bo'lamiz. Koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta mavjud emas. Demak berilgan tenglama hech qanday egri chiziqni tenglamasi emas.

Ellips va uning kanonik tenglamasi.

4-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **ellips** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni ellipsning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va ellipsning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning yig'indisini $2a$ orqali belgilaymiz. $0xy$ dekart koordinatalar sistemasini $0x$ o'qni ellipsning fokuslari F_1 va F_2 orqali o'tkazib F_1 dan F_2 tomonga yo'naltiramiz, koordinatalar boshini esa F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz. U holda fokuslar $F_1(-c;0)$, $F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (2-chizma).

Endi shu ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra M nuqtadan ellipsning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas son $2a$ ga teng, ya'ni



2-chizma

$$MF_1+MF_2=2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (2) ga ko'ra

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\, MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

bo'lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad \text{yoki} \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlaymiz:

$$(x+c)^2+y^2=(2a)^2-2\cdot 2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2;$$
$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}; cx=a^2-a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Buni yana ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right], \quad a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\left[x^2-2cx+c^2+y^2\right],$$
$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2; \quad a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2;$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (7)$$

hosil bo'ladi.

Uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta ekanini nazarda tutsak ΔF_1MF_2 dan $MF_1+MF_2>F_1F_2$; $2a>2c$; $a>c$; a^2-$c^2>0$ ($a>0$, $c>0$) bo'ladi.

a^2-c^2=b^2 deb belgilab uni (7) ga qo'yamiz. U holda

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

yoki buni a^2b^2 ga bo'lsak

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (8)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (8) tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha ellipsga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtani koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (8) ellipsning tenglamasi. U ellipsning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. Koordinatalar boshi **ellipsning markazi** deyiladi. Koordinata o'qlari esa ellipsning **simmetriya o'qlari** bo'lib xizmat qiladi. Ellipsning fokuslari joylashgan o'q uning **fokal o'qi** deyiladi.

Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishish nuqtalari uni **uchlari** deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B(0,b)$ nuqtalar ellipsning uchlari.

a va b sonlar mos ravishda ellipsning **katta** va **kichik yarim o'qlari** deyiladi. $\frac{c}{a}$ nisbat ellipsning **ekssentrisiteti** deyiladi va ε orqali belgilanadi. Ellips uchun $0<\varepsilon<1$ bo'ladi, chunki $c<a$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini izohlaydi.

Haqiqatan, $a^2-c^2=b^2$ tenglikni a^2 ga bo'lsak $1-\left(\frac{c}{a}\right)^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki $\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-\varepsilon^2$ bo'ladi. Bundan ekssentrisitet qanchalik kichik bo'lsa ellipsning kichik yarim o'qi uning katta yarim o'qidan shunchalik kam farq qilishini ko'ramiz.

$b=a$ bo'lganda ellips tenglamasi $x^2+y^2=a^2$ ko'rinishiga ega bo'lib ellips aylanaga aylanadi. Bu holda $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-a^2}=0$, bo'lgani uchun $\varepsilon=\frac{0}{a}=0$ bo'ladi.

Demak aylana ekssentrisiteti nolga teng va fokuslari uning markaziga joylashgan ellips ekan.

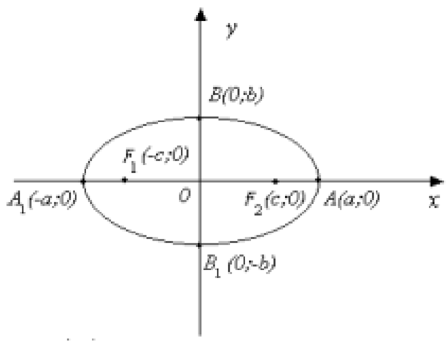
Endi ellipsni shaklini aniqlaymiz. Uning shaklini avval I–chorakda aniqlaymiz. Ellipsning kanonik tenglamasi (8)ni y ga nisbatan yechsak

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2};\ \ y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);\ y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2);\ \ y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

bo'ladi, bunda $0<x<a,$ chunki $x>a$ bo'lganda ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lib u ma'noga ega bo'lmaydi. x 0 dan a gacha o'sganda y b dan 0 gacha kamayadi.

Ellipsning I–chorakdagi bo'lagi koordinatalar o'qlarida joylashgan $B(0,b)$ va $A(a;0)$ nuqtalar bilan chegaralangan yoydan iborat bo'ladi (3–chizma). Ellipsning kanonik tenglamasida x ni $-x$ ga va y ni $-y$ ga o'zgartirilsa tenglama o'zgarmaydi.

Bu ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi. Ellipsning ana shu xususiyatiga asoslanib uning shakli 45-chizmada ko'rsatilgandek ekanligiga iqror bo'lamiz.



3-chizma

3-misol. Kichik yarim o'qi $b=4$ va ekssentrisiteti $\varepsilon=0,6$ bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi yezilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $\varepsilon=\frac{c}{a}=0,6;\ \ c=0,6a,\ \ a^2-c^2=b^2$

tenglikka c va b ning qiymatlarini qo'yib a ni aniqlaymiz.

$$a^2 - (0,6a)^2 = 4^2; a^2(1-0,36) = 16; 0,64a^2 = 16; a^2 = \frac{16}{0,64} = 25.$$

Shunday qilib ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

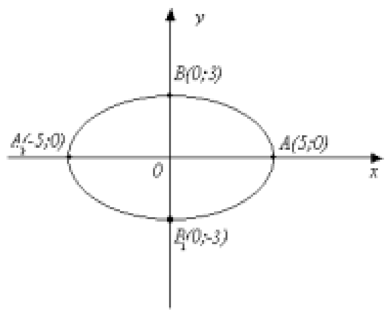
ko'rinishda bo'lar ekan.

4-misol. $9x^2+25y^2-225=0$ tenglamaga ko'ra ikkinchi tartibli egri chiziqning turi aniqlansin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani $9x^2+25y^2=225$ ko'rinishda yozib buni 225 ga bo'lsak

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \text{ yoki } \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

kelib chiqadi. Demak berilgan tenglama yarim o'qlari a=5, b=3 bo'lgan ellipsni tenglamasi ekan (4-chizma)



4-chizma.

5-misol. $4x^2 - 16x + 9y^2 - 54y + 61 = 0$ egri chiziq chizilsin.

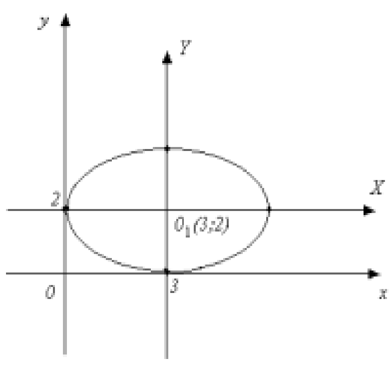
Yechish. Tenglamani $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) + 61 = 0;$

$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) - 16 - 81 + 61 = 0$; $4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 36$

ko'rinishda yozib buni 36 ga bo'lsak $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ yoki

$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$ tenglama hosil bo'ladi. x-2=X; y-3=Y almashtirish olsak

$\frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$ kelib chiqadi.



5-chizma.

Bu ellipsning 0_1XY sistemaga nisbatan kanonik tenglamasi.

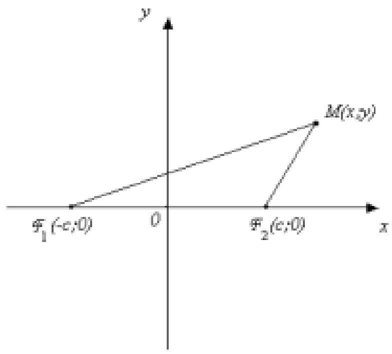
Shunday qilib berilgan tenglama ellipsning umumiy tenglamasi ekan. Agar $0xy$ eski sistemani $0_1(3,2)$ nuqtaga parallel kuchirilsa ya‘ni 0_1XY sistemaga nisbatan ellipsning tenglamasi kanonik ko’rinishga ega bo’lar ekan (5-chizma).

Giperbola va uning kanonik tenglamasi.

5-ta‘rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning ayirmasi o’zgarmas bo’lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o’rniga **giperbola** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni gepirbolaning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va giperbolaning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo’lgan masofalarning ayirmasini $\pm 2a$ orqali belgilaymiz. $0xy$ dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellipsdagidek, ya‘ni $0x$ o’qni F_1, F_2 fokuslaridan o’tadigan qilib tanlaymiz va koordinatalar boshini F_1F_2 kesmaning o’rtasiga joylashtiramiz.

U holda fokuslar $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo’ladi (6-chizma).



6-chizma

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin.

Ta‘rifga binoan giperbolaning M nuqtasidan uning fokuslari F_1 va F_2 gacha

masofalarning ayirmasi o’zgarmas son $\pm 2a$ ga teng, ya‘ni

$$MF_1-MF_2=\pm 2a$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ va $MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ bo’lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \quad (9)$$

kelib chiqadi.

Ellips tenglamasini chiqarishda bajarilgan amallarga o’xshash amallarni bajarib $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ (10)

tenglamaga ega bo’lamiz. Ma‘lumki uchburchakning ikki tomonini ayirmasi uchinchi tomonidan kichik. Shunga ko’ra ΔF_1MF_2 дан

$F_1M-F_2M<F_1F_2$; $2a<2c$; $a<c$; $a^2-c^2<0$ $(a>0,c>0)$ hosil bo’ladi. Shuning uchun $a^2-c^2=-b^2$ yoки $c^2-a^2=b^2$ deb belgilab olamiz. U holda (10) formula

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2 \quad \text{yoki} \quad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

ko’rinishga ega bo’ladi. Buni a^2b^2 ga bo’lib

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (11)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib giperbolaning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (11) tenglamani qanoatlatirar ekan. Shuningdek giperbolaga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak u giperbolaning tenglamasi (11) giperbolaning **kanonik** tenglamasi deb ataladi. Giperbolaning tenglamasida x va y juft darajalari bilan ishtirok etadi. Bu giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi.

Ya'ni qaralayotgan holda koordinata o'qlari giperbolaning simmetriya o'qlari ham bo'ladi.

Gepirbolaning simmetriya o'qlarini kesishish nuqtasi **giperbolaning markazi** deb ataladi.

Giperbolaning fokuslari joylashgan simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Endi giperbolaning shaklini chizishga harakat qilamiz. Oldin uning shaklini I–chorakda chizamiz.

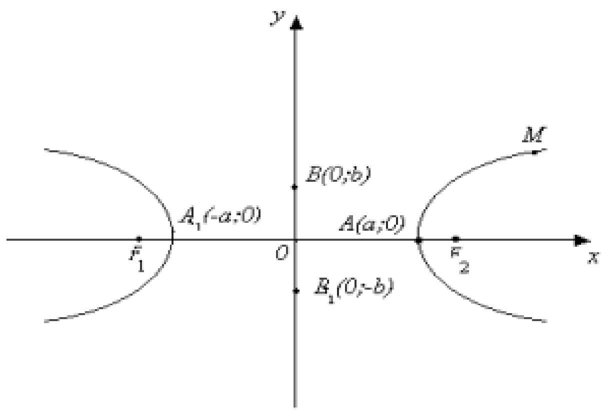
Giperbolaning kanonik tenglamasi (11) dan

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1;\ \ \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2-a^2}{a^2};\ y^2=\frac{b^2(x^2-a^2)}{a^2};\ \ y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

kelib chiqadi, chunki I–chorakda $y \geq 0$. Bunda $x \geq a$, aks holda u ma'noga ega bo'lmaydi (ildiz ostida manfiy son bo'ladi). x α dan $+\infty$ гача o'zgarganda y 0 dan $+\infty$ gacha o'zgaradi. Demak giperbolaning I–chorakdagi qismi 7-chizmada tasvirlangan AM yoydan iborat bo'ladi.

Giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligini hisobga olsak uning shakli 7-chizmada tasvirlangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.

Giperbolaning fokal o'q bilan kesishish nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Giperbolaning tenglamasiga y=0 ni qo'ysak $x=\pm a$ kelib chiqadi. Demak $A_1(-a;0)$ va $A(a;0)$ nuqtalar giperbolaning uchlari bo'ladi



7-chizma.

Giperbolaning tenglamasi (11) ga x=0 ni qo'ysak $-\frac{y^2}{b^2}=1;\ y=\pm\sqrt{-b^2}$ bo'ladi. Bu esa haqiqiy son emas (manfiy sondan kvadrat ildiz chiqmaydi). Demak giperbola $0y$ o'q bilan kesishmas ekan.

Shuning uchun giperbolaning fokal o'qi **haqiqiy o'qi** o'nga perpendikulyar o'qi **mavhum o'qi** deb ataladi.

a va b sonlar mos ravishda giperbolaning **haqiqiy** va **mavhum yarim o'qlari** deyiladi.

Giperbolaning M nuqtasi u bo'ylab cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan $y=-\frac{b}{a}x$ va $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlarning birortasigacha masofa nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Ya'ni giperbolaning koordinatalar boshidan yetarlicha katta masofada joylashgan nuqtalari $y=-\frac{b}{a}x$ va $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlardan biriga yetarlicha yaqin joylashadi. Koordinatalar boshidan o'tuvchi bu to'g'ri chiziqlar **giperbolaning asimptotalari** deb ataladi.

Giperbolani chizishdan oldin uning asimptotalarini chizish tavsiya etiladi.

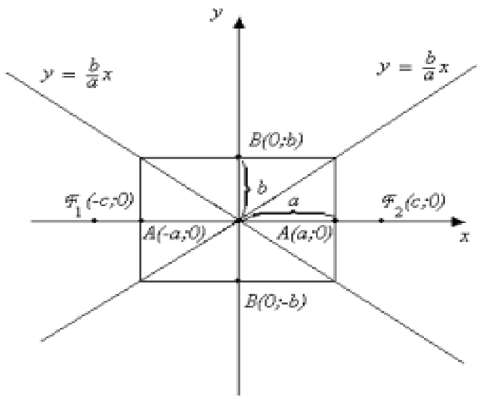
Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari $0x$ va $0y$ o'qlarga parallel va mos ravishda $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchak yasaymiz. Bu to'rtburchakni giperbolaning **asosiy to'rtburchagi** deb ataymiz.

To'rtburchakni diagonallarini har tarafga cheksiz davom ettirsak giperbolaning asimptotalari hosil bo'ladi(8-chizma).

$\frac{c}{a}$ nisbat giperbolaning **ekssentrisiteti** deb ataladi va ε orqali belgilanadi. Giperbola uchun $c>a$ bo'lganligi sababli $\varepsilon>1$ bo'ladi.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatdan, $c^2-a^2=b^2$ tenglamani har ikkala tomonini a^2 ga bo'lsak $\left(\frac{c}{a}\right)^2-1=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki $\varepsilon^2-1=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ kelib chiqadi. ε kichrayganda $\frac{b}{a}$ nisbat ham kichrayadi. Ammo $\frac{b}{a}$ nisbat giperbolaning asosiy to'rtburchagini shaklini belgilaganligi uchun u giperbolaning ham shaklini belgilaydi. ε qanchalik kichik bo'lsa $\frac{b}{a}$ nisbat ham ya'ni giperbolaning asimptotalarini burchak koeffitsientlari ham shunchali kichik bo'ladi va giperbola $0x$ o'qqa yaqinroq joylashadi.

Bu holda giperbolani asosiy to'rtburchagi $0x$ o'q bo'ylab cho'zilgan bo'ladi.



8-chizma

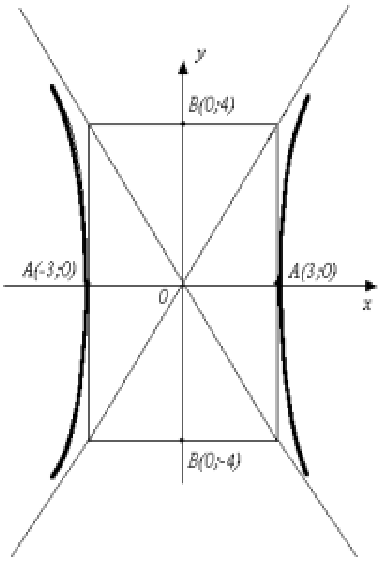
Haqiqiy va mavhum yarim o'qlari teng giperbola **teng tomonli** yoki **teng yonli** deb ataladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{yoki} \quad x^2-y^2=a^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$y=x$ va $y=-x$ to'g'ri chiziqlar teng tomonli giperbolaning asimptotalari bo'lib uning ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2}$ bo'ladi.

6-misol. $16x^2-9y^2=144$ egri chiziq chizilsin.



9-chizma

Yechish. Uni har ikkala tomonini 144 ga bo'lsak

$$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1; \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$$

kelib chiqadi. Demak qaralayotgan egri chiziq yarim o'qlari a=3 va b=4 bo'lgan giperbola ekan. Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari koordinata o'qlariga parallel hamda asosi 6 balandligi 8 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaymiz. Uning diagonallarini cheksiz davom ettirib giperbolaning asimptotalarini hosil qilamiz. Giperbolaning uchlari A_1(-3;0) va A(3;0) nuqtalar orqali asimptotalarga nihoyatda yaqinlashib boruvchi silliq chiziqni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan egri chiziq giperbolaning grafigi bo'ladi (9-chizma).

7-misol. $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi giperbola ekanligi ko'rsatilsin.

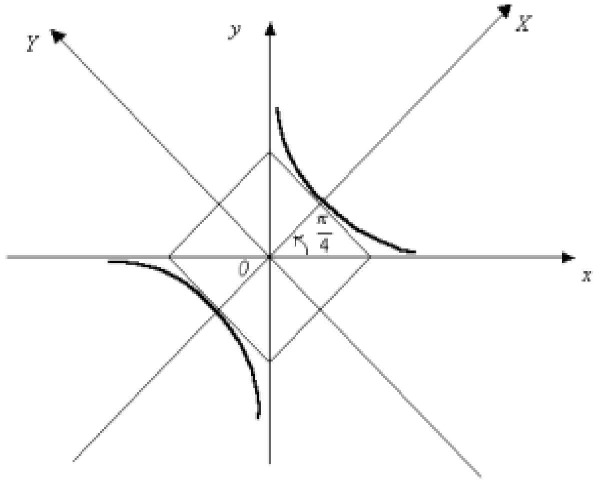
Yechish. Koordinata o'qlarini $\alpha=\frac{\pi}{4}$ burchakka burib yangi $0XY$ sistemani hosil qilamiz. Bu holda yangi koordinatalardan eski koordinatalarga o'tish formulasi. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y), y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$

ko'rinishga ega bo'lishi ko'rsatilgan edi (1-ma'ruza). x va y ning ushbu qiymatlarini $y=\frac{k}{x}$ tenglamaga qo'ysak

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=\frac{k}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)(X-Y)=k \text{ yoki } X^2-Y^2=2k$$

hosil bo'ladi. Bu tenglama tengtomonli giperbolaning tenglamasi. $k>0$ bo'lganda giperbolaning haqiqiy o'qi $0X$ bilan, $k<0$ bo'lganda $0Y$ o'q bilan ustma-ust tushadi.

$k>0$ bo'lgan hol uchun giperbola 10-chizmada tasvirlangan.



10-chizma.

0x, 0y eski o'qlar *0XY* yangi sistemani koordinata burchaklarini bissektrisalari bo'lgani uchun ular teng tomonli giperbolani asimptotalari bo'ladi. Shunday qilib $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi asimtotalari *0x* va *0y* o'qlardan iborat tengtomonli giperbola bo'lar ekan.

Shuningdek $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ kasr-chiziqli funksiyaning grafigi ham asimtotalari koordinata o'qlariga parallel tengtomonli giperbola ekanligini ko'rsatish mumkin.

Parabola va uning kanonik tenglamasi.

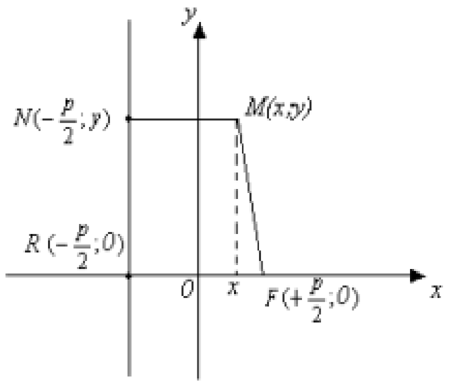
6-ta'rif. Berilgan nuqtadan hamda berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **parabola** deb ataladi.

Berilgan nuqtani F orqali belgilab uni parabolaning **fokusi** deb ataymiz. Berilgan to'g'ri chiziqni parabolaning **direktrisasi** deb ataladi. (Fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi).

Fokusdan direktrisagacha masofani p orqali belgilaymiz va uni parabolaning **parametri** deb ataymiz.

Endi parabolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Abssissalar o'qini fokusdan direktrisaga perpendikulyar qilib o'tkazib yo'nalishini direktrisadan fokusga tomon yo'naltiramiz.

Koordinatalar boshini fokusdan direktrisagacha masofa *FR* ning qoq o'rtasiga joylashtiramiz (11-chizma).



11-chizma

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinatalarga, direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga ega bo'ladi.

Faraz qilaylik $M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Parabolaning ta'rifiga binoan M nuqtadan direktrisagacha MN masofa undan fokusgacha MF masofaga teng: $MN=MF$

53-chizmadan $MN=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2}$ va $MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$ ekani ravshan.

Demak, $x+\frac{p}{2}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$.

Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2 \quad \text{yoki} \quad y^2=2px \qquad (12)$$

hosil bo'ladi.

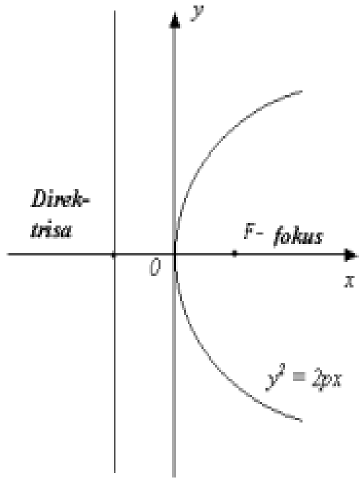
Shunday qilib parabolaning istalgan $M(x,y)$ nuqtasining koordinatalari (12) tenglamani qanoatlantiradi. Parabolada yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak (12) parabolaning tenglamasi ekan. U parabolaning **kanonik tenglamasi** deb ataladi.

Endi kanonik tenglamasiga ko'ra parabolani shaklini chizamiz (12) tenglamada y ni $-y$ ga almashtirilsa tenglama o'zgarmaydi. Bu abssissalar o'qi parabolaning simmetriya o'qidan iborat ekanligini bildiradi. (12) tenglamaning chap tomoni manfiy bo'lmaganligi uchun uning o'ng tomoni ya'ni x ning ham manfiy bo'lmasligi kelib chiqadi. Demak parabola $0y$ o'qning o'ng tomonida joylashadi. x=0 da y=0. Demak parabola koordinatalar boshidan o'tadi.

x cheksiz o'sganda y ning absalyut qiymati ham cheksiz o'sadi. (12) tenglama yordamida aniqlanadigan parabola 12-chizmada tasvirlangan.

Parabolaning simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning **uchi** deyiladi. Qaralayotgan hol uchun koordinatalar boshi parabolaning uchi bo'ladi.



12-chizma.

8-misol. $y^2=8x$ parabola berilgan. Uning direktrisasining tenglamasi yozilsin va fokusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (12) bilan taqqoslab $2p=8$, $p=4$ ekanini ko'ramiz. Direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga, fokus $-\frac{p}{2},\ 0$ koordinatalarga ega bo'lishini hisobga olsak direktrisaning tenglamasi $x=-2$ va fokus $F(2;0)$ bo'ladi.

Izoh. Fokal o'qi $0y$ o'qdan iborat parabolaning tenglamasi

$$x^2=2py \qquad (13)$$

ko'rinishga ega bo'ladi

9-misol. $y=3x^2-12x+16$ parabolaning tenglamasi kanonik holga keltirilsin va uning uchi topilsin.

Yechish. Tenglamani

$y=3(x^2-4x)+16$, $y=3(x^2-4x+4-4)+16$; $y=3(x-2)^2+4$; $y-4=3(x-2)^2$

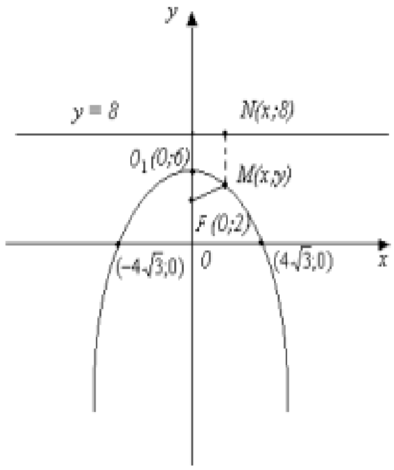
ko'rinishga keltirib $x-2=X$, $y-4=Y$ deb belgilasak parabolaning tenglamasi

$$Y=3X^2$$

kanonik ko'rinishga keladi. $x-2=X$, $y-4=Y$ alamashtirish bilan eski $0xy$ sistemani $0_1(2;4)$ nuqtaga parallel ko'chirdik. Yangi 0_1XY sistemaga nisbatan parabolaning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'ladi. Yangi sistemani koordinatalar boshini koordinatalari parabola uchining koordinatalari bo'ladi, ya'ni $x_0=2$, $y_0=4$.

10-misol. $F(0,4)$ nuqtadan hamda $y=8$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rni, egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. $M(x,y)$ egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Shartga binoan undan $y=8$ to'g'ri chiziqqacha $MN=\sqrt{(x-x)^2+(8-y)^2}$ masofa va undan $F(0,2)$ nuqtagacha $MF=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}$ masofa o'zaro teng ya'ni,



13-chizma.

$$\sqrt{(x-x)^2+(8-y)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2} \quad \text{(13-chizma).}$$

Bu tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak $(8-y)^2=x^2+(y-4)^2$ yoki qavslarni ochsak.

$$64-16y+y^2=x^2+y^2-8y+16 \text{ yoki } 64-16y=x^2-8y+16$$

hosil bo'ladi. Tenglamani soddalashtisak

$$-16y+8y=x^2+16-64,\ -8y=x^2-48$$

yoki -8 ga bo'lsak

$$y=-\frac{1}{8}x^2+6$$

tenglamaga ega bo'lamiz. U $0y$ o'qqa simmetrik parabolaning tenglamasi.

Endi parabolaning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Parabola tenglamasiga x=0 qiymatni qo'ysak y=6 kelib chiqadi. Demak parabola $0y$ o'q bilan $0_1(0,6)$ nuqtada kesishar ekan. Shuningdek paraborla tenglamasiga y=0 qiymatini qo'ysak $-\frac{1}{8}x^2+6=0; -x^2+48=0;\ x^2=48;\ x=\pm\sqrt{48}=\pm4\sqrt{3}$ hosil bo'ladi. Demak parabola $0x$ o'q bilan $(-4\sqrt{3},0)$ ва $(4\sqrt{3},0)$ nuqtalarda kesishar ekan.

Agar parabola tenglamasini $y-6=-\frac{1}{8}x^2$ yoki $x^2=-8(y-6)$ ko'rinishda yozib $x=X$, $y-6=Y$ almashtirish olsak uning tenglamasi $X^2=-8Y$ kanonik shaklni oladi.

Izoh. Aylana, ellips, giperbola va parabola umumiy tenglamalari yordamida berilganda koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish yoki koordinata o'qlarini burish yordamida umumiy tenglamani yangi sistemaga nisbatan kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

VI modul. Oliy matematika elementlari

22-Mavzu: Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant, uning xossalari. Kramer formulalari.

Reja

1. **Algebra va uning rivojlanish tarixidan.**
2. **2, 3-tartibli determinantlar.**
3. **Determinantlarning xossalari.**
4. **Minor va algebraik to‘ldiruvchilar.**
5. n **- tartibli determinantlar.**

Tayanch ibora va tushunchalar: algebra, algoritm, 2,3 va n -tartibli determinantlar, bosh diagonal, yordamchi diagonal, minor, algebraik to‘ldiruvchi, uchburchaklar qoidasi, diagonal qoidasi, determinantlarning xossalari, determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo‘yicha yoyish.

1.Algebra va uning rivojlanish tarixidan. Algebra matematikaning bir qismi va u turli miqdorlar ustida amallarni hamda shu amallar bilan bog‘liq tenglamalarni yechishni o‘rganadi. Kengroq ma’noda algebrada ixtiyoriy tabiatli to‘plamning elementlari ustida sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish kabi odatdagi amallarni umumlashtiruvchi amallarni o‘rganuvchi fan tushuniladi.

Uch og‘aynning yoshlari 30, 20, 6 da. Necha yildan keyin eng kattasining, yoshi ikkala qolgan yoshlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. $30+x=(20+x)+(6+x), \quad x=4.$ Bunday tenglamalar eramizdan avval 2 minginchi yillarda qadimgi Misrda ma’lum edi. Lekin ular harflardan foydalanmagan. Eramizdan avvalgi 2 minginchi yil boshida qadimgi bobilliklar yanada murakkabroq masalalarni yechishgan.

III asrda yashagan iskandariyalik olim Diofant geometrik bayonni rad etib harfiy ifodalardan foydalanadi. Unda manfiy ko‘rsatkichli darajalar, manfiy sonlar, musbat va manfiy sonlarni ko‘paytirish qoidalarini yozish uchun qisqacha belgilar bor edi.

Algebraning keyingi rivojiga Diofant o‘rgangan algebraik tenglamalar kuchli ta’sir ko‘rsatgan.

VI asrdan boshlab matematik tadqiqotlar markazi Hindiston, Xitoy, Yaqin Sharq va O‘rta Osiyo mamlakatlariga ko‘chdi. Xitoylik olimlar chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishda noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish usulini topishgandi. Ammo algebra, tenglamalarni yechish masalalariga bog‘liq muammolarni bayon etuvchi matematikaning maxsus tarmog‘i Yaqin Sharq va O‘rta Osiyo olimlari ishlarida shakllandi. IX asrda o‘zbek matematigi va astranomi Muhammad ibn Muso al Xorazmiy (783-850) «Al-jabr val muqobala» asarini yozdi. Bu asarda Xorazmiy chiziqli tenglamalarni yechishning umumiy qoidasini berdi va kvadrat tenglamalarni sinflarga ajratib, har bir sinf uchun yechish yo‘llarini ko‘rsatdi. Al-jabr (tiklash) so‘zi tenglamadagi manfiy hadlarni uning ikkinchi qismiga ishorasini o‘zgartirib o‘tkazishni bildirgan. Yangi fan **«*Algebra*» ning** nomi o‘sha «Al-jabr» so‘zidan olingan.

Qisqacha, al-Xorazmiy to‘g‘risida ma’lumotlarni qaraganda Xorazmiy o‘qish, yozish va sanashni mahalliy diniy maktab, madrasada oldi. U ilmiy masalalarni o‘z o‘qituvchilaridan yaxshiroq tushunar, juda ko‘p o‘qir, o‘z ustida tinimsiz ishlar, madrasaning majburiy darsliklari bilan chegaralanib qolmas edi.

Xorazmiyning yoshlik davri Xorazmni arablar zabt etgan davrga to‘g‘ri keladi. Beruniyning yozishicha, arab istilochilari Xorazmning milliy madaniyatini yo‘q qilib yuborgani, kitoblarning kuydirilganini, olimlarni o‘zlari bilan olib ketganini, bo‘ysunmaganlarini o‘ldirganini yozadi. Shu sabab bo‘lsa kerak, VIII asr oxirida Xorazmiy Bag‘dodga keladi. Bu asr o‘rtalarida davlat boshiga abbosiylar kelgan va Sharqiy arab xalifaligida hayot o‘z iziga tusha boshlagan edi. Bag‘dodda turli kasb egalari, olimlar to‘plana boshlaydi. Fanning rivojlanishi Xorun ar-Rashid (786-809) va uning o‘g‘li Al-Ma’mun xalifalik qilgan (813-833) davrga to‘g‘ri keladi. Al-Ma’mun Bag‘dodda «Bayt al-hikmat» (Donishmandlar uyi)ni qurdiradi. Bunda yaxshi rasadxona, boy kutubxona bor edi. Uni o‘z davrining Akademiyasi desa bo‘lar edi. Xorazmiy Bag‘dodga kelib ilmiy ishlar bilan shug‘ullanadi. Tez orada Xorazmiy matematika, astronomiya, geografiya, tarix va tabobat ilmi bo‘yicha butun O‘rta Sharqda shuhrat qozondi. U «Donishmandlar uyi»da ilmiy ishlarga, kutubxonaga, rasadxonaga rahbarlik qildi. Uni Fanlar Akademiyasining birinchi prezidenti deyish mumkin.

Xorazmiyning matematikaga qo‘shgan hissasi beqiyos. Uning «Hind hisobi» nomli asari o‘nli sistema raqamlari 0, 1, 2, . . . , 9 ga bag‘ishlangan. Ularni soddalashtiradi va birinchi marta arab tilida bayon etadi. Bu raqamlar Xorazmiy asari orqali arablarga, keyin Yevropaga o‘tadi. Matematikadagi *algoritm* termini ham Xorazmiyning nomi bilan bog‘liq, Al-Xorazmiy lotincha al-goritm deyilgan va shu so‘zdan kelib chiqqan.

Xorazmiy o‘rta asr Sharqida yaratilgan birinchi matematik-astronomik jadvallarning muallifi. Amerikalik sharqshunos olim Sorton Xorazmiyni «barcha zamonlarning eng buyuk matematiklaridan biridir» deb ta’riflaydi.

2. 2, 3 - tartibli determinantlar. Determinantlarni hisoblashga keltiriladigan ushbu masalani qaraylik. Masala. A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xom ashyodan foydalaniladi. Bitta A mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 birlik, 1-tur va 4 birlik 2-tur xom ashyo sarflanadi,bitta B mahsulotni ishlab chiqarish uchun esa, 3 birlik, 1-tur va 5 birlik 2-tur xom ashyo ishlatiladi. 1-tur xom ashyo 62 birlik, 2-tur xom ashyo 73 birlikda berilgan bo‘lsa, eng katta foyda olinadigan ishlab chiqarishni rejalashtirish uchun xom ashyo sarfi modelini tuzing.

Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida x_1 bilan ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan A mahsulot miqdorini, x_2 bilan esa ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1 + 3x_2$ A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan 1-tur xom ashyo jami sarfi miqdorini ifodalaydi, bu xom ashyo chegaralangan bo‘lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1 + 3x_2 = 62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xom ashyo sarfi uchun $4x_1 + 5x_2 = 73$ tenglamani hosil qilish mumkin. Shunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62, \\ 4x_1 + 5x_2 = 73 \end{cases}$$

ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar sistemasi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, xom ashyo sarfining matematik modelini ifodalaydi.

Biz yuqorida eng oddiy iqtisodiy masalani ko‘rdik, hamda uning modeli ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga keltirilishini ko‘rsatdik. Fan va texnikaning juda ko‘p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi. Bu holatlar chiziqli tenglamalar nazariyasini umumiy holda qarashimiz lozimligini ko‘rsatadi.

Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} \quad x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ bo‘lsa, (1) tenglamalar sistemasi yagona

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (2)$$

yechimga ega bo‘ladi. (2) formuladagi sur’at va mahrajdagi ifodalar 2- tartibli determinant (aniklovchi)lar deyiladi. 2-tartibli determinantni $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ bilan belgilanadi. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. Shunday qilib, (2) formulalarni determinantlar yordamida

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix} a_{13}a_{12} \\ a_{33}a_{32} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ifodaga ***3- tartibli determinant deyiladi*** va $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$ bilan belgilanadi.

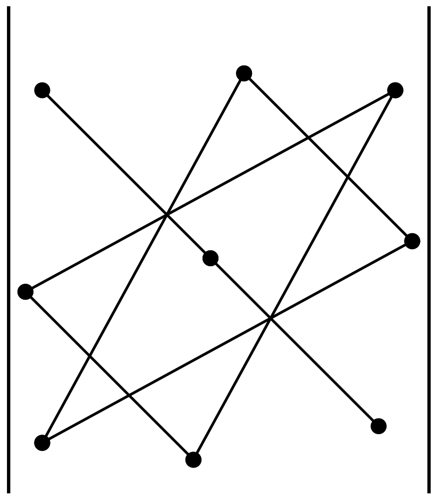
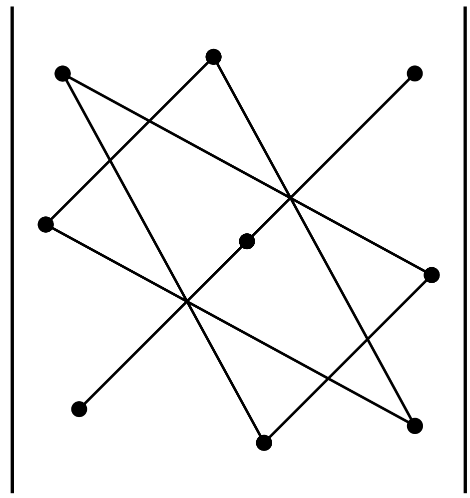
a_{11}, a_{22}, a_{33} elementlar ***bosh diagonalni***, a_{13}, a_{22}, a_{31}

yordamchi diagonalni ifodalaydi. (4) tenglikda 2- tartibli determinantlarni kattaliklari bilan almashtirsak

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

(5)

bo‘ladi. (5) formulani esda saqlash ***uchun uchburchak qoidasidan*** foydalanish mumkin. Elementlarni nuqtalar bilan belgilasak, quyidagi sxema hosil bo‘ladi :

	
+	–

(+) ishora bilan, (-) ishora bilan olinadi.

3. Minor va algebraik to‘ldiruvchilar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantda i- satrni va j- ustunni o‘chirishdan 2- tartibli determinant hosil bo‘ladi, bunga a_{ij} elementga mos <u>***minor***</u> deyiladi va M_{ij} bilan belgilanadi. Masalan,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix}$$

va boshqalar.

a_{ij} ***elementning algebraik to‘ldiruvchisi*** deb unga mos minorning musbat yoki manfiy ishora bilan olingan kattaligiga aytiladi, bunda $i + j$ juft bo‘lsa, musbat ishora bilan $i+j$, toq bo‘lsa manfiy ishora olinadi. a_{ij} elementning algebraik to‘ldiruvchisini A_{ij} bilan belgilanadi. Demak,

$$A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, A_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix}$$

bo‘ladi va boshqalar.

4. *Determinantlarning xossalari.* Determinantlar quyidagi xossalarga ega:

1. Determinantning barcha satridagi elementlarini mos ustunelementlari bilan almashtirilsa, uning kattaligi o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{21} a_{31} \\ a_{12} a_{22} a_{32} \\ a_{13} a_{23} a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-misol.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24-6-0-0+4-0=22$$

bo‘lib, bu determinantda barcha satrlarini mos ustunlar bilan almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24-6+0-0+4-0=22$$

bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, ikkala holda ham bir xil kattalik hosil bo‘ldi, bu birinchi xossaning to‘g‘riligini ko‘rsatadi.

2. Ikkita satr (ustun)ni o‘zaro almashtirilsa determinant kattaligining ishorasi teskarisiga o‘zgaradi; haqiqatan ham 1- misoldagi determinantda 1-satrini 3-satri bilan o‘zaro almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-4-24-0+6=-28+6=-22$$

bo‘lib, bu 2-xossaning o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

3. Ikkita bir xil satr (ustun)li determinant kattaligi no‘lga teng; ikkita satri bir xil bo‘lgan determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36+0+0+36-0-0=0$$

bo‘ladi, bu esa 3-xossaning to‘g‘riligini ko‘rsatadi.

4. Determinantning biror satr (ustun) hamma elementlarini $m \neq 0$ songa ko‘paytirilsa, uning kattaligi shuning m songa ko‘payadi.

Haqiqatan ham, 1-xossada keltirilgan determinantning 2-satri elementlarini 2 ga ko‘paytirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48-12+0-0+8-0=44$$

bo‘lib, bu xossaning ham to‘g‘riligi ko‘rinadi.

5. Determinantning ikkita satri (ustuni) elementlari o‘zaro proporsional (mutanosib) bo‘lsa, uning kattaligi no‘lga teng, misol uchun,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant berilgan bo‘lsin. Bu determinantning 1 va 2-satri elementlari o‘zaro proporsional, uni hisoblasak

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6+0-12-0+6+12=0$$

bo‘lib, bu esa 5-xossaning to‘g‘riligini ko‘rsatadi.

6. Determinantning kattaligi, biror satri (ustuni) elementlarini unga mos algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib qo‘shilganiga teng. 1-xossada keltirilgan misolni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

bu determinantni 3-satr elementlari bo‘yicha yoyib yozsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6+0+28=22$$

kelib chiqadi, bu esa 6-xossaning ham o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

7. Determinant biror satri (ustuni)ning har bir elementi ikkita qo‘shiluvchidan iborat bo‘lsa, u holda bu determinant ikkita determinant yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{pmatrix} (a_{11}+b_1)a_{12}a_{13} \\ (a_{21}+b_2)a_{22}a_{23} \\ (a_{31}+b_3)a_{32}a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1a_{12}a_{13} \\ b_2a_{22}a_{23} \\ b_3a_{32}a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ushbu determinantni

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

quyidagicha almashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2+2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

keyingi ikkita determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18+0-3-18+3-0=0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6+0-3+18+1-0=22;$$

1-xossadagi misoldan ma’lumki, u 22 ga teng edi, keyingi ikki determinant yig‘indisi ham 22ga teng bo‘ladi,bu esa 7-xossaning o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

8. Determinantning biror ustini (satri) elementlariga boshqa ustini(satri)ning mos elementlarini istalgan umumiy ko‘paytuvchiga ko‘paytirib qo‘shilsa, uning kattaligi o‘zgarmaydi, ya’ni:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+\lambda a_{12}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}+\lambda a_{22}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}+\lambda a_{32}) & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Misol uchun,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantning 2-ustun elementlarini 2 ga ko‘paytirib, 1-ustunning mos elementlariga qo‘shib, hosil bo‘lgan determinantni hisoblasak:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 6 = 22$$

bo‘ladi. Bu determinantning kattaligi 1- misolda hisoblaganimizdek 22 ga teng edi, bu esa 8-xossaning ham to‘g‘riligini ko‘rsatadi;

Determinantlarning xossalaridan foydalanish ko‘p hollarda qulay hisoblashlarga olib keladi. Ushbu misolni qaraymiz.

2-misol.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20537 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix}$$

determinantning kattaligini hisoblang.

Yechish. Bu determinantni uchburchak qoidasi bilan hisoblash ko‘p xonali sonlar bo‘lganligi uchun ancha noqulayliklarga olib keladi. Shuning uchun bu determinantni hisoblashda uning xossalaridan foydalanishga urinamiz. Ikkinchi satr elementlarini -2 ga ko‘paytirib, 1-satr mos elementlariga qo‘shamiz, bu holda ushbu determinant hosil bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix};$$

hosil bo‘lgan determinantni 1- satr elementlari bo‘yicha yoyib,ushbuni

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 8268 & 10268 \\ 689 & 126 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 10268 \\ 513 & 126 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} (-12)$$

olamiz. Oxirgi determinant 2-satr elementlarini (-12) ga ko‘paytirib 1-satr mos elementlariga qo‘shib, ushbu natijaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = 1 \cdot 689 - 0 \cdot 513 = 689.$$

Bu misoldan ko‘rinadiki, determinantlarni hisoblashda uning xossalaridan foydalanish ancha qulayliklarga olib keladi.

3 –tartibli determinantni ***diagonallar usuli*** deb ataluvchi quyidagi usul bilan ham hisoblash mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} .$$

1-misoldagi determinantni diagonal usulidan foydalanib hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 + 0 + 0 + 0 + 4 = 22$$

bo‘ladi.

5. n***- tartibli determinantlar haqida.*** Ko‘pgina masalalarni yechishda 2 va 3-tartibli determinantlardan tashqari yanada yuqori tartibli determinantlar ham uchraydi. Masalan, 4-tartibli determinant ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda n-tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ mos ravishda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ elementlarning algebraik to‘ldiruvchilaridir. Ma’lumki, algebraik to‘ldiruvchilar $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ ning tartiblari $(n-1)$ bo‘ladi. Determinantlarning hamma xossalari n-tartibli determinant uchun ham o‘rinlidir.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda determinantlarning 6-xossasidan foydalanib, uning tartibini pasaytirish bilan 3 yoki 2-tartibli determinantlarga keltirib hisoblanadi. Masalan, 4-tartibli determinantni 1-satr elemenlari bo‘yicha yoysak ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Bundan yuqori tartibli determinantlarning ham kattaligi yuqoridagiga o‘xshash hisoblanadi. Masalan, 6-tartibli determinantning kattaligini hisoblash kerak bo‘lsa, uni biror satri yoki ustuni elementlari bo‘yicha yoyib 5-tartibli determinantlarga, keyin o‘z navbatida 5-tartibli determinanatlarni ham biror satri yoki ustuni elementlari bo‘yicha yoyib, 4-tartibli determinantlarga keltiriladi va hokazo.

Determinantlarning yuqorida ko‘rsatilgan xossalari hamma tartibli determinantlar uchun ham to‘g‘ri. Endi yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga misol qaraymiz. Ushbu determinantning kattaligini hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish. Berilgan determinantni 1-satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2\left[3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] + 3\cdot\left[(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 2(-9+4+16)+3(2+6-16) = 22-24 = -2.$$

Determinantlarni hisoblashda uning biror satri yoki ustunlarida no‘llar ko‘proq bo‘lsa, o‘sha satr yoki ustun elementlari bo‘yicha yoyib hisoblash ancha qulaylik keltiradi, masalan, yuqoridagi misolda 1-satr elementlari bo‘yicha yoyganimiz uchun, ya’ni unda 2 ta no‘l element bo‘lgani uchun 2 ta 3- tartibli determinantlarni hisoblab chiqishga hojat qolmadi. Bunday satr yoki ustunlar bo‘lmasa determinantlarning 8-xossasidan foydalanib, uni bunday satrga yoki ustunga ega bo‘ladigan qilib o‘zgartirish mumkin, misol uchun ushbu

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblaylik. Buning uchun 1-ustun elementlarini oldin 2 ga, keyin mos ravishda 5 ga, -4 ga ko‘paytirib, 2,3 va 4- ustunlarning mos elementlariga qo‘shamiz, bu holda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix}$$

bo‘lib, keyingi 3-tartibli determinantni 2-satr elementlari bo‘yicha yoysak:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-33 + 21) = 7 \cdot (-12) = -84$$

bo‘ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Algebra va algoritm iborasi nima bilan bog‘liq?

2. 2-tartibli determinant qanday belgilanadi va u nimaga teng?

3. 3-tartibli determinant qanday belgilanadi va u qanday hisoblanadi?

4. Determinantlarning xossalari nimalardan iborat?

5. 4-tartibli determinantlarning kattaligi qanday hisoblanadi?

23-MAVZU. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH USULLARI

Reja

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar.

2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish.

Tayanch iboralar:

Chiziqli tenglamalar sistemasi(ChTS), tenglamalar sistemasining yechimi, yagona yechim, sistema birgalikda, aniq bo‘lmagan sistema,ekvivalent sistema, birgalikda bo‘lmagan sistema, sistema matrisasi, kengaytirilgan matrisa, Kroneker-Kapelli teoremasi, bir jinsli sistema, bosh o‘zgaruvchilar, noma’lumlarni yo‘qotish, teskari qadam, Gauss usulining xususiyati, sistema birgalikda va aniqmas, sistema birgalikda emas, Gauss usulining Jordan modifikasiyasi usuli.

1.ChTS haqida umumiy tushunchalar. Ma’lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi hamma tenglamalar chiziqli (1-darajali) bo‘lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi noma’lumlar o‘rniga ma’lum sonlar majmuini qo‘yganda, sistemaning hamma tenglamalari ayniyatga aylansa, bunday sonlar majmuiga tenglamalar sistemasining yechimi (ildizi) deyiladi. Bunday sonlar majmui bitta bo‘lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lib, bu sistema aniqlangan (tayin, muayyan) deb ataladi va bu tenglamalar sistemasi birgalikda deyiladi. Birgalikda bo‘lgan sistema bittadan ko‘p yechimga ega bo‘lsa, bunday sistema aniq bo‘lmagan sistema deyiladi.

Birgalikda bo‘lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo‘lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

Tenglamalar sistemasi birorta ham yechimga ega bo‘lmasa, bunday sistemaga birgalikda bo‘lmagan sistema deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini 0dan farqli songa ko‘paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo‘shish bilan hosil bo‘lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo‘ladi (bu xossadan kelgusida ko‘p foydalaniladi).

2.Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishni oldin ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi uchun qo'llaymiz. Ushbu ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

dan, birinchi tenglamani a_{22} ga, ikkinchi tenglamani $-a_{12}$ ga hadma-had ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shamiz, natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \qquad (1)$$

tenglama hosil bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, 1-tenglamani $-a_{21}$ ga, 2-tenglamani a_{11} ga hadma-had ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shib ushbuni hosil qilamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \qquad (2)$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

bo'lgani uchun, quyidagi belgilashlarni kiritib

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(1) va (2) tengliklarni

$$\Delta x = \Delta_1, \qquad \Delta y = \Delta_2$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan $\Delta \neq 0$ bo'lsa,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

bo'ladi, yoki determinantlar orqali yozsak

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Bu formulalarga Kramer formulalari deyiladi, bunda Δ_1 yordamchi determinant Δ determinantning birinchi ustunini ozod hadlar bilan, Δ_2 da esa ikkinchi ustun ozod hadlar bilan almashtiriladi. Δ determinantga tenglamalar sistemasining determinanti deyiladi.

Shunday qilib, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti 0 dan farqli bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

Endi sistemaning determinanti 0 ga teng, ya’ni

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad \text{ёки} \quad a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$$

bo‘lsin. Bu holda 1-tenglamaning noma’lumlari oldidagi koeffisiyentlari 2-tenglamaning noma’lumlari oldidagi koeffisiyentlariga proporsionaldir. Haqiqatan, koeffisiyentlardan biri, masalan a_{11} noldan farqli bo‘lsin deb $\frac{a_{22}}{a_{11}} = \lambda$ bilan belgilasak, bundan $a_{21} = \lambda a_{11}$ bo‘ladi. U holda $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ tenglikdan

$a_{11}a_{22} = \lambda a_{11}a_{12}$ bo‘lib, $a_{22} = \lambda a_{12}$ kelib chiqadi. Bularni hisobga olib, berilgan sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. bunda ikkita xususiy hol bo‘lishi mumkin:

1) ikkala Δ_1 va Δ_2 determinantlar 0 ga teng, ya’ni $\Delta_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = 0, \quad \Delta_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = 0$ bundan $b_2 = \lambda b_1$, chunki $a_{22} = \lambda a_{12}$.

Bu holda $a_{21,}$ a_{22}, b_2 sonlar $a_{11,}$ a_{12}, b_1 sonlarga proporsional bo‘lib, berilgan tenglamalar sistemasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = \lambda b_1 \end{cases}$$

Shunday qilib, sistemaning ikkinchi tenglamasi, birinchi tenglamasidan uning ikkala qismini λ ga ko‘paytirish bilan hosil qilinadi, ya’ni u 1-tenglamaning natijasidir. Bu holda berilgan sistema cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega bo‘ladi. Masalan, y ga ixtiyoriy qiymatlar berib, x ning tegishli qiymatini $x = \dfrac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$

tenglikdan topamiz.

2) $\Delta_1$va Δ_2 determinantlardan hech bo‘lmaganda bittasi 0 dan farqli, masalan,

$\Delta_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \neq 0$ bo‘lsin. U holda $b_2 a_{11} \neq b_1 a_{21}$ bo‘ladi, demak $b_2 \neq \lambda b_1$.

bu holda (3) sistemadan ma’lum bo‘ladiki, $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2$ tenglama birinchi $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ tenglamaga qarama-qarshidir. Demak, berilgan sistema yechimga ega emas, ya’ni birgalikda emas.

Endi uch noma’lumli uchta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Bu sistema noma’lumlari koeffisiyentlaridan ushbu determinantni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

bunga (4) ***sistemaning determinanti*** yoki aniqlovchisi deyiladi. $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, (4) sistema yagona

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \qquad (5)$$

yechimga ega bo‘ladi, bunda

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

(5) formulaga ham ikki noma’lumli ikkita tenglamalar sistemasidagidek ***Kramer formulalari*** *deyiladi*. Kramer formulalari n noma’lumli n ta tenglamalar sistemasi uchun ham umumlashtiriladi.

Endi misollar qaraymiz:

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Yechish. Bu sistemaning determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 2 + 9 = 11 \neq 0 .$$

Demak, berilgan tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 \cdot 3 = 55, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33 .$$

Shunday qilib, $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{55}{11} = 5, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3$.

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Yechish. Oldin sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 4 + 18 - 24 - 4 = 0.$$

Sistema determinanti 0 ga teng, bunda ikki hol bo‘lishi mumkin. Tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lmasligi yoki cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi mumkin. Buni aniqlash uchun $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ikkinchi va birinchi tenglamalarni solishtirib, ikkinchi tenglama birinchi tenglamadan ikkiga ko‘paytirish bilan hosil bo‘lganligini payqaymiz. Demak, berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \tag{6}$$

tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi. Bu sistemaning birorta noma’lumiga ixtiyoriy qiymatlar berish bilan cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega bo‘lamiz, masalan,

$x_3 = 1$ bo‘lsin, uni oxirgi sistemaga qo‘ysak,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

sistema hosil bo‘lib, $x_1 = -\frac{5}{11}$, $x_2 = \frac{18}{11}$ bo‘ladi. Bu holda $\left(\frac{-5}{11}, \frac{18}{11}, 1\right)$ yechim hosil bo‘ladi. $x_3 = -2$ bo‘lsin, buni (6) sistemaga qo‘yib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

bundan, $x_1 = \frac{10}{11}$, $x_2 = -\frac{3}{11}$ bo‘lib, $\left(\frac{10}{11}, -\frac{3}{11}, -2\right)$ yechimni olamiz.

Shunday qilib, noma’lumlarning biriga ixtiyoriy qiymatlar berib, cheksiz ko‘p yechimlarni olamiz.

3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Berilgan sistema determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lib, yordamchi determinantlar ham $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ bo‘ladi. Bu tenglamalar sistemasi yechimga ega emas, chunki 1-tenglama bilan 3-tenglama o‘zaro ziddir, ya’ni 1-tenglamani -3 ga ko‘paytirib 3- tenglamaga hadma-had qo‘shsak, 0=-3 tenglik hosil bo‘lib, bu tenglamalar sistemasining birgalikda bo‘lmasligini bildiradi.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi qachon yagona yechimga ega bo‘ladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lsa, u qanday topiladi?
4. Kramer formulalari nimadan iborat?
5. Qanday2349060 tenglamalar sistemasiga birgalikda deyiladi?

24-MAVZU. DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOB.FUNKSIYA HAQIDA TUSHUNCHA.

Reja:

1. Funksiya tushunchasi. Funksiyaning berilish usullari.
2. Funksiyaning ayrim hollari.

Tayanch iboralar: o‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar, funksiya tushunchasi, Funksiyaning berilish usullari.

O‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar. Qaralayotgan jarayonda bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi. Masalan, qanday radiusli aylana olmaylik, uning uzunligining deametriga nisbati bir xil π sondan iborat bo‘ladi. Bu holda nisbat o‘zgarmas miqdordir.

Qaralayotgan jarayonda har xil son qiymatlari qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi. Masalan, havo harorati (temperaturasi), vaqt, harakatning tezligi o‘zgaruvchi miqdorlardir. Bunday misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Hamma o‘zgaruvchi miqdorlarni birdaniga o‘rganib bo‘lmaydi. Endi ikkita o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni ko‘rib chiqamiz.

Funksiya tushunchasi. ***Funksiya tushunchasi*** matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning yordamida tabiat va jamiyatdagi ko‘p jarayon va hodisalar modellashtiriladi.

Matematik tahlilda elementlari haqiqiy sonlardan iborat, bo‘lgan to‘plamlarni qaraymiz. X va Y lar haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. $x \in X$ to‘plamda, $y \in Y$ to‘plamda o‘zgarsin.

Ta’rif. $x \in X$ har bir x ga biror qoida yoki qonun bo‘yicha $y \in Y$ dan bitta y mos qo‘yilsa, X to‘plamda ***funksiya berilgan*** **(aniqlangan)** deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

simvol bilan belgilanadi. Ayrim hollarda $y = xf$ ham deb belgilanadiki, bunda kompyuterda oldin x qiymati olinib, keyin hisoblanadigan simvol olinadi. Bunda X to‘plamga funksiyaning **aniqlanish sohasi,** Y to‘plamga o‘zgarish sohasi yoki ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi. Odatda funksiya aniqlanish sohasini D, qiymatlar to‘plamini E bilan belgilanadi.

Demak, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, bu moslikka X to‘plamda funksiya aniqlangan deyiladi. x ga

erkli o‘zgaruvchi yoki **argument,** y ga esa **erksiz o‘zgaruvchi** yoki x **ning funksiyasi** deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo‘lishi uchun: 1) X to‘plam berilishi kerak (ko‘p hollarda uni x bilan y o‘zgaruvchilarning bog‘lanishiga ko‘ra topiladi); 2) x o‘zgaruvchining X to‘plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo‘yiladigan y ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta’rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan: 1) f $X=(-\infty,\ +\infty)$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir songa uning o‘zini o‘ziga ko‘paytirib, ya’ni kvadratga ko‘tarib mos qo‘yuvchi qoida bo‘lsin. Bu holda $y=x^2$ funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiya $(-\infty,\ +\infty)$ oraliqda aniqlangan; 2) f har bir $x\in[0,\ +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo‘ysin. Bu $y=\sqrt{x}$ funksiyani ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0,\ +\infty)$bo‘ladi.

1-misol. $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Ma’lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to‘plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo‘lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x-3\geq 0,\ \ 4-x>0$$

bo‘lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo‘ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x\geq 3,\quad x<4$ bњlib, ya’ni $3\leq x<4$ bo‘lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3,\ 4)$ bo‘ladi.

Funksiyaning berilish usullari. Funksiya ta’rifida keltirilgan x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo‘yiladigan y ni aniqlovchi qoida yoki qonun turlicha bo‘lishi mumkin. Demak, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Funksiya ***analitik*, *jadval* va *grafik* hamda kompyuter** usullari yordamida berilishi mumkin:

1) funksiyaning ***analitik usul*** bilan berilishida, x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati, x argument ustida algebraik amallarning bajarilishi natijasida, ya’ni formulalar yordamida beriladi. Masalan,

$$y = x^3 + 1, \quad y^2 = \frac{x+5}{x^2-3}, \qquad y = 3^{x+1}, \qquad y = \log_2(x+3);$$

1) o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish **jadval** ko‘rinishida berilishi mumkin.

Masalan, kuzatish natijasida sutni yopiq idishda qizdirilganda P_1 bosim ostida uning qaynash temperaturasi t_1, P_2 bosim ostida qaynash temperaturasi t_2 va h.k. bo‘lishini topganda qo‘yidagi jadval kelib chiqadi.

2)

Bosim P	P_1	P_2	$\cdots$	P_n
Temperatura t	t_1	t_2	$\cdots$	t_n

Bundan ko‘rinadiki P bosim bilan t temperatura orasida bog‘lanish bo‘lib, P argument, t funksiya bo‘ladi. Funksiyaning bunday berilishiga ***jadval usulda*** berilgan deyiladi. Bunday usul ko‘proq tajribalarda ishlatiladi.

3) Funksiyaning ***grafik usulida*** berilishida, x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish tekislikdagi biror chiziq yordamida beriladi. Bunda X va Y to‘plamlar orasidagi moslik grafik bilan beriladi. XOY tekis-likda l chiziq berilgan bo‘lsin. x ning qiymatiga mos kelgan y ning qiymatini, topish uchun x nuqtadan OX o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz. U l chiziqni bitta A nuqtada kesib o‘tadi. A nuqtadan OY o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz, bu perpendikulyarning OY o‘qi bilan kesishish nuqtasi, y ning x ga mos qiymati bo‘ladi. Ma’lumki, bunday moslik l chiziq yordamida bajariladi. Funksiyaning bunday berilishi, **grafik usulda ifodalash** deyiladi. Funksiyaning grafik usulida berilishidan, uni analitik usul bilan ifodalash qiyin bo‘lgan hollarda va funksiyaning sifat o‘zgarishi grafik usulda yaxshi ko‘rinadigan hollarda foydalaniladi. Masalan, fizikaviy tajribalar jarayonida ossillografdan olinadigan grafik.

4) ***algoritmik yoki kompyuter usuli.*** Funksiyaning bunday usulda berilishida x ning har bir qiymati uchun, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaydigan algoritim yoki programma berilgan bo‘ladi. Bunday programma EHMga qo‘yilgan bo‘lib funksiyaning qiymati avtomatik hisoblanadi.

Funksiyaning ayrim hollari

1. Aniq va yashirin funksiyalar. Funksiya $y = f(x)$ ko‘rinishda, ya’ni y ga nisbatan yechilgan bo‘lsa, unga ***oshkor funksiya*** deyiladi. Funksiya $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ya’ni y ga nisbatan yechilmagan bo‘lsa, ***oshkormas funksiya*** ko‘rinishda berilgan deyiladi. Masalan, $y = 3x^2 + 5,\quad y = \sin x,\quad y = 4^x$ funksiyalar oshkor ko‘rinishda; $2x - 3y + 6 = 0,\qquad x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ funksiyalar oshkormas ko‘rinishda berilgan. Shuni ta’kidlaymizki hamma $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishdagi tenglik ham funksiyani ifodalay bermaydi. Masalan, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ tenglama funksiyani ifodalamaydi, chunki x ning har bir qiymatiga y ning haqiqiy son qiymatini mos qo‘yish mumkin emas.

2. Murakkab funksiya. $y = f(u)$ bo‘lib, $u = \varphi(x)$ funksiya berilgan bo‘lsa, y funksiyaga $\varphi(x)$ **funksiyaning funksiyasi** yoki y ga x ning ***murakkab funksiyasi*** deyiladi. Masalan, $y = \lg(x^2 + 1)$ funksiyada $u = x^2 + 1$ bo‘lib. y x ning murakkab funksiyasi bo‘ladi. Bundan tashqari $y = \sin(x^2 + 1),\quad y = 3^{x+5},\quad y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ va h.k. lar ham, murakkab funksiyaga misol bo‘laoladi.

3. ***Teskari funksiya.*** $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. y funksiyaning qiymatlar to‘plamidagi har bir qiymatiga x argumentning aniqlanish sohasidan bitta qiymati mos qo‘yilgan bo‘lsa, berilgan funksiyaga ***teskari*** $x = d(y)$ ***funksiya*** berilgan bo‘ladi va $D(f) = E(d)$ va $E(f) = D(d)$ har bir $x_0 \in D(f) = E(d)$ va $y_0 = E(f) = D(d)$ bo‘lib. $y_0 = f(x_0)$ faqat $x_0 = d(y_0)$ uchun bajariladi. Masalan $y = 2x - 3$ funksiyaga teskari funksiya $2x = y + 3$, $x = (y + 3)/2$ bo‘ladi. $y = x^3$ funksiya $x = \sqrt[3]{y}$ teskari funksiyaga ega bo‘ladi. O‘zaro teskari bo‘lgan funksiyalarning grafiklari $y = x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi.

Differensial hisobning asosiy xossalari.

1-teorema. (Ferma): *Agar* (a,b) *da berilgan* $y = f(x)$ *funksiya shu intervalning birorta ichki s nuqtasida eng katta yoki eng kichik qiymatiga erishsa va* $f'(c) - \exists$ *bo‘lsa, unda* $f'(c) = 0$ *bo‘ladi.*

Isbot. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya *s* nuqtada $(c\in(a,b))$ o‘zining eng katta qiymatiga erishsin. *s* qiymatga etarlicha kichik Δx orttirma beramiz. U holda $f(c+\Delta x)<f(c)$. Agar $\Delta x<0$ bo‘lsa,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}>0 \quad \text{va} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c)\geq 0 \qquad (1).$$

bo‘ladi. Agar $\Delta x>0$ bo‘lsa $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ va

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c)\leq 0 \qquad (2)$$

bo‘ladi. (1) va (2) ulardan $f'(c)=0$ kelib chiqadi.

Bu teoremaning geometrik ma’nosi funksiya grafigining $(c;f(c))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma OX o‘qiga parallel bo‘ladi.

2-teorema (Rollь): *Aytaylik,* $y=f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *kesmada aniqlangan bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:*

1) $f(x)\in C[a,b]$
2) $\forall x\in(a,b)$ *uchun* $f'(x)-\exists$
3) $f(a)=f(b)$

U holda $\exists c\in[a,b]$ *nuqta:* $f'(c)=0$ *bo‘ladi.*

Izoh. Roll teoremasining shartlari ham muhim. $x=0$ nuqtadan tashqarida $f(x)=|x|$ funksiya -1 $\leq x\leq 1$ da teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. $(-1;1)$ oraliqda birorta ham nuqta yo‘qki hosilasi 0 ga teng bo‘lsa: $(-1;0)$ da $f'(x)=-1$, $(0;1)$, $f'(x)=1$ ga teng. $x=0$ da funksiya hosilaga ega emas.

3-teorema (Lagranj): $[a,b]$ *da aniqlangan* $y=f(x)$ *funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:*

1) $f(x)\in C[a,b]$,
2) $\forall x\in(a,b)$ *uchun* $f'(x)-\exists$.

Unda $\exists c\in[a,b]$ *nuqta topiladiki,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad \textit{(3) bo‘ladi.}$$

Agar Lagranj teoremasida $f(a)=f(b)$ bo‘lsa, unda $f'(c)=0$ bo‘ladi, ya’ni Lagranj teoremasidan Roll teoremasi kelib chiqadi.

Natija: Agar (a,b) da $f'(x)=0$ bo‘lsa, unda shu intervalda $f(x)=const$ bo‘ladi.

4-teorema (Lopital qoidasi): *Faraz qilamiz* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \quad (\infty)$ *va* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (∞) *bo‘lib,* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}-\exists$ *bo‘lsin.*

U holda,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \textit{(4) bo‘ladi.}$$

Izoh: Boshqa barcha aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarga keltirish yordamida echiladi.

1-misol.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{\cos x}=\ln 2.$$

2-misol.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Funksiyani to‘liq tekshirish va uning grafigini yasash.
Funksiyaning o‘sishi va kamayishi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan bo‘lsin. Agar shu intervaldan olingan ixtiyoriy $x_2>x_1$ uchun $f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$ bo‘lsa, unda $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda **o‘suvchi (kamayuvchi)** deyiladi.

O‘suvchi va kamayuvchi funksiyalarga **monoton funksiyalar** deb ataladi. Monoton funksiyalar hayotda ko‘p uchraydi. Masalan, o‘sayotgan daraxtning bo‘yi, yetilayotgan donning og‘irligi vaqtning o‘suvchi funksiyalari; yorug‘lik manbaidan ma’lum masofadagi yoritilganlik – masofaning kamayuvchi funksiyasi bo‘ladi.

1-teorema: *Agar* $f(x)$ *funksiya* (a,b) *da differensiallanuvchi bo‘lib, kamayuvchi (o‘suvchi) bo‘lmasa, u holda* (a,b) *oraliqda* $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ *bo‘ladi.*

2-teorema: *Agar* $f(x)$ *funksiya* (a,b) *oraliqda differensiallanuvchi bo‘lib,* $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ *shartni qanoatlantirsa, u holda* (a,b) *oraliqda funksiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.*

Misollar.

1) $y=e^x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da o‘suvchi, chunki $\forall x\in R$ uchun $y'=e^x>0$.

2) $y=x^2$ funksiya uchun $y'=2x\Rightarrow x^2$ funksiya $[-\infty;0]$ da kamayuvchi va $[0;+\infty)$ da o‘suvchi.

Funksiyaning ekstremumlari.

Agar x_0 nuqtaning $\exists\cup_\delta(x_0)$ atrofi; $\forall x\in\bigcup_\delta(x_0)$ uchun $f(x)<f(x_0),(f(x)>f(x_0))$ tengsizlik bajarilsa, unda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal **maksimumga (minimumga) erishadi** deyiladi va $f(x_0)$ qiymatga funksiyaning $\cup_\delta(x_0)$ atrofdagi **maksimum (minimum) qiymati** deb ataladi, hamda u

$$\max_{\cup_\delta(x)}\{f(x)\},\qquad \min_{\cup_\delta(x)}\{f(x)\}\quad \text{kabi belgilanadi.}$$

1-teorema: (Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti).

a. Agar $f(x)$ *funksiya* (a,b) *oraliqda differensiallanuvchi bo‘lib,* x_0 $(a<x<b)$ *nuqtada ekstremumga erishsa, u holda* $f'(x_0)=0$, *bo‘ladi.*

Izoh: $f(x)=x^3$ funksiya uchun $x=0$ nuqtada $f'(x)=0$ lekin bu nuqtada funksiya ekstremumga erishmaydi, funksiyaning hosilasi nolga teng bo‘lishi etarli bo‘lmay, zaruriy shart ekan.

2-teorema: (Etarli shart). *Agar* $f'(x_0)=0$ *bo‘lib,* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tganda ishorasini musbat*dan *(manfiy*dan) *manfiy*ga (*musbat*ga) o‘zgartirsa, *u holda* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada maksimumga (minimumga) erishadi. Agar* x_0 *nuqtadan o‘tganda ishorasini o‘zgartirmasa, u holda* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada ekstremumga erishmaydi.*

Misollar.

1) $f(x)=e^x-x,\quad f^1(x)=e^x-1,\quad f^1(x)=0\Rightarrow x=0$

x	x<0	X$=0$	x>0
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	Kamayuvchi	min	o‘suvchi

$y_{\min} = f(0) = e^0 - 0 = 1$

Funksiyaning botiq va qavariqligi. Burilish nuqtasi.

Faraz qilaylik, (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Unda bu funksiya grafigining ixtiyoriy nuqtasidan urinma o‘tkazish mumkin. Agar har doim urinma grafikdan pastda (yuqorida) joylashgan bo‘lsa, unda funksiya (a,b) oraliqda **botiq (qavariq)** deb ataladi. Funksiya grafigi o‘z botiqligi yoki qavariqligini o‘zgartiradigan nuqtaga esa **egilish nuqtasi** deyiladi.

5-teorema. *Agar* (a,b) *oraliqda* $f''(x) > 0 (< 0)$, *bo‘lsa, u holda* $f(x)$ *funksiya grafigi* (a,b) *oraliqda botiq (qavariq) bo‘ladi.*

4. Funksiyaning asimptotalari.

a) Vertikal asimptota. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ bo‘lsa, $x = a$ to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota bo‘ladi.

b) Gorizontal asimptota. Agar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ bo‘lsa, $y = b$ to‘g‘ri chiziq gorizontal asimptota bo‘ladi.

v) Og‘ma asimptota. Agar $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx+b)] = 0$ bo‘lsa, $y = kx+b$ to‘g‘ri chiziq og‘ma asimptota bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziqning parametrlari ushbu,

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]$$

tengliklar yordamida topiladi.

Endi funksiya grafigini yasashni ko‘rib chiqamiz.

U quyidagi sxema asosida bajariladi:

1) Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.

2) Funksiyaning juft-toqligini aniqlash.

3) Funksiyaning davriyligini aniqlash.

4)Funksiyani uzluksizlikda tekshirish va uzilish nuqtalarini topish.

5) Funksiya grafigining koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini topish.

6) Monotonlik oraliqlarini aniqlash.

7) Ekstremumga tekshirish.

8) Botiq va qavariqlikka tekshirish.

9) Funksiyaning asimptotalarini topish.

10) Funksiya grafigini chizish.

Misollar. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

1. Funksiya $x=1$ nuqtadan tashqari barcha sonlar o‘qida aniqlangan.

2. $f(-x)=\frac{-2x-1}{(-x-1)^2}\neq f(x)$ va $f(-x)\neq f(x)$ demak funksiya toq ham emas, juft ham emas.

3. Funksiya davriy emas.

4. $x=1$ nuqtada II-tur uzilishga ega.

$\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty$ qolgan nuqtalarda funksiya uzluksiz.

5. $x=1$ funksiyaning vertikal asimptotasi $y=0$ gorizontal asimptotasi, ya’ni $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x_2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=0$

Og‘ma asimptotasini topamiz.

$k_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=0,$ u holda $k=0,$

$b_{1,2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0,$ u holda $b = 0$. Bundan kelib chiqadiki $y = kx + b$ og‘ma asimptota yo‘q.

6. $y' = -\frac{2x}{(x-1)^2}$ funksiya aniqlanish sohasini quyidagi oraliqlarga bo‘lamiz: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$. $(-\infty;0)$ oraliqlarda funksiya kamayadi. $(0;1)$ oraliqda esa funksiya o‘sadi. $(1;+\infty)$ oraliqda funksiya kamayadi.

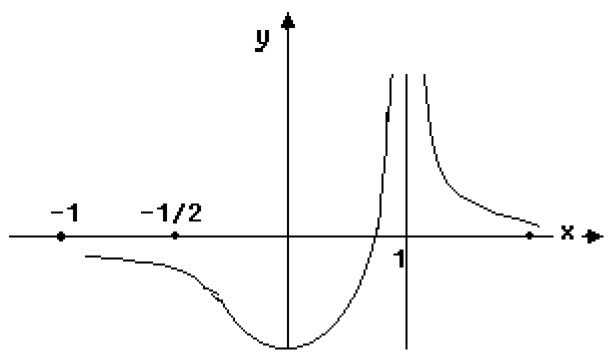
7. $x = 0$ nuqtada funksiya aniqlangan va uzluksiz, $y'(x)$ hosila ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartiradi, u holda funksiya, bu nuqtada $y_{\min} = y(0) = -1$ erishadi.

8. Funksiya botiq va qavariqligini tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilani olamiz. $y'' = 2 \cdot \frac{2x+1}{(x-1)^4}$ funksiyaning aniqlanish sohasini quyidagi oraliqlarga ajratamiz.

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $(1;+\infty)$. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, da $f''(-1) = -\frac{1}{8} < 0$, funksiya qavariq, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ da $f''(0) = 2 > 0$ funksiya botiq, $(1;+\infty)$ oraliqda $f''(0) = 10 > 0$ funksiya botiq. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = 1$ nuqtaga o‘tishdan o‘z ishorasini o‘zgartiradi, bundan kelib chiqadiki, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}$ nuqta egilish nuqtasi bo‘ladi.

9. Agar $x = 0$ bo‘lsa, u holda $y = -1$ va $y = 0$ da $x = \frac{1}{2}$. Bundan kelib chiqadiki, $(0;-1)$ va $\left(\frac{1}{2};0\right)$ nuqtalar funksiya grafigining koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari.

10. Funksiya grafigi:



Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday miqdorlar o‘zgaruvchi deb ataladi?
2. Qanday holda funksiya aniqlangan deyiladi?
3. Funksional bog‘lanish qanday belgilanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning qiymatlar to‘plami nima?
6. Qanday moslik funksiyani ifodalashi mumkin?

25-MAVZU: FUNKSIYANING LIMITI,FUNKSIYA HOSILASINING TA`RIFI,UNING GEOMETRIK VA MEXANIK MA`NOSI ,DIFFERINSIYALASH.

Reja:

1. Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari.

2. Funksiya hosilasining ta'rifi. Hosilaning geometrik ma'nosi.

3. Differensial hisobning asosiy xossalari. Funksiyani to'liq tekshirish va uning grafigini yasash.

Tayanch iboralar: Funksiyaning ayrim hollari, Funksiyaning limit iva uning asosiy xossalari,funksiya uzluksizligi va xossalari, funksiya xosilasi.

Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad yo\kappa i \quad x \to a \quad da \quad f(x) \to A \text{ bo'ladi.} \qquad (1)$$

Funksiya limitining ta'rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo'lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

2-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad (2)$$

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning ***chap yoki o'ng limit*** tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x\to a-0} f(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) \qquad (3)$$

bilan begilanadi.

3-ta’rif. Limiti $A=0$ bo‘lgan funksiyaga **cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.)** deyiladi.

4-ta’rif. Limiti $A=+\infty$ yoki $A=-\infty$ bo‘lgan funksiyalarga **cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.)** deyiladi va

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to a} f(x)=+\infty \tag{4}$$

simvollar bilan belgilanadi.

Limitning ta’rifidan kelib chiqadiki $y=C$ o‘zgarmas miqdorning limitining o‘ziga teng.

Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) ***Yig‘indining limiti*.** Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisining limiti, qo‘shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x\to a$ dagi limitlari mavjud bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\pm\lim_{x\to a} f_2(x) \tag{5}$$

2) chekli sondagi funksiyalar ***ko‘paytmasining limiti*** funksiyalar limitlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x) \tag{6}$$

Natija: O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni,

$$\lim_{x\to a}\left[cf_1(x)\right]=c\lim_{x\to a} f_1(x) \tag{7}$$

3) Ikkita funksiya ***nisbatining limiti*****,** maxrajning limiti noldan farqli bo‘lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya’ni $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0$ bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \tag{8}$$

bo‘ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e, \qquad e=2{,}71828\ldots \qquad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda ***birinchi*** **va *ikkinchi* ajoyib** limitlar deyiladi.

1-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{6x}=\frac{5}{6}$$

ekanligini funksiya limitining ta'rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun $f(x)=(5x+6)/6x$ o‘zgaruvchi miqdor va $A=5/6$ o‘zgarmas miqdor orasidagi farq $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko‘rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x}-\frac{5}{6}=\frac{5x+6-5x}{6x}=\frac{6}{6x}=\frac{1}{x}$$

$1/x$ o‘zgaruvchi miqdor $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyadan iborat. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to\infty}(5x+6)/6x=5/6..$$

9-misol. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x=\alpha$, deb almashtirsak, bundan $x=\alpha/5$, $x\to 0$ $\alpha\to 0$ hosil bo‘ladi.
Shuning uchun,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/5}=5\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=5\cdot 1=5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

10-misol. $\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da limitga o‘tsak, 1^{∞} ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x=\alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x=3/\alpha$ hamda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ bo‘ladi..Demak,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3 = e^3$$

kelib chiqadi.

Shundayqilib, $\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x = e^3$.

Funksiya uzluksizligi va xossalari

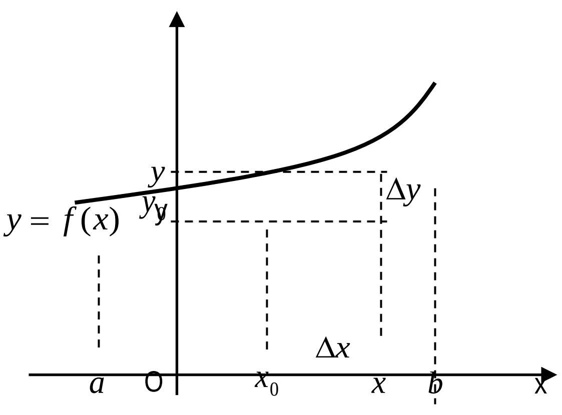
Funksiya orttirmasi

Uzluksizlik matematik tahlilning asosiy tushunchalaridan biridir. Matematika uzluksiz funksiya tushunchasiga birinchi navbatda turli harakat qonunlarini o‘rganish natijasida keldi. Fazo va vaqt uzluksiz, masalan: harakatdagi nuqtaning bosib o‘tgan yo‘li s ning t vaqtga bog‘lanishini ifodalovchi $s=f(t)$ qonun uzluksiz funksiyaga misol bo‘ladi.

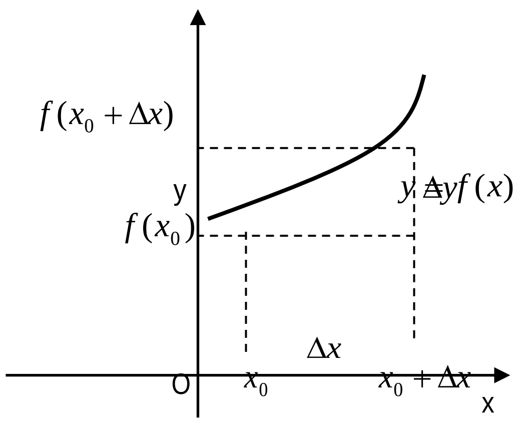
Qattiq jismlar, suyuqlik va gazlardagi holatlar hamda jarayonlar uzluksiz funksiyalar yordamida tavsiflanadi. Bunday uzluksiz jarayonlar iqtisodiyot modellarida ham mavjud. Bunday jarayonlar mexanika fizika va bir qancha maxsus fanlarda muayyan holda o‘rganiladi.

Matematikada uzluksiz jarayonni umumiy holda o‘rganamiz.

_***Funksiya orttirmasi.*** $y=f(x)$ funksiya biror $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va x_0 shu kesmadagi biror nuqta bo‘lsin. x argumentning keyingi qiymati bo‘lsa, $x-x_0=\Delta x$ ga ***argument orttirmasi*** deyiladi (1-chizma).



1-chizma



2-chizma

$f(x)-f(x_0)$ funksiyaning qiymatlari orasidagi farqqa ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va odatda Δy bilan belgilanadi. $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ yoki $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

1-chizmadan ko‘rinadiki $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ bo‘ladi.

1-misol. $y = f(x) = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada argument $\Delta x = 0{,}5$ orttirma olgandagi funksiya Δy orttirmasini toping.

Yechish. $f(x_0) = 2^3 = 8$ funksiyaning boshlang‘ich nuqtadagi qiymati. $f(x_0 + \Delta x) = f(2 + 0{,}5) = (2 + 0{,}5)^3$ funksiyaning keyingi qiymati, demak, funksiya orttirmasi

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + 0{,}5)^3 - 2^3 =$$
$$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}5^3 - 8 = 7{,}625$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, $\Delta y = 7{,}625$.

Funksiya uzluksizligi ta’riflari. 1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, argumentning x_0 nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz deyiladi*** (2-chizma). Bu ta’rifga quyidagi ta’rif ham teng kuchlidir.

2-ta’rif. x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu nuqtada chekli limitga ega bo‘lib, bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Funksiya uzluksizligi ta’riflari quyidagi ***shartlarni*** o‘z ichiga oladi:

1) funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;
2) funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o‘ng limitlari

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

mavjud;

3) x_0 nuqtada chap va o‘ng limitlar o‘zaro teng, ya’ni

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

4) chap va o‘ng limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Elementar funksiyalarning hammasi o‘zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa:

1) $f(x) \pm \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $f(x)/\varphi(x)$ $(\varphi(x_0) \neq 0$ bo‘lganda) lar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari. $f(x)$ funksiya $[a, \ b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u: 1) shu kesmada chegaralangan; 2) shu kesmada eng kichik va eng katta qiymatlarga erishadi; 3) kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, shu kesmaning biror nuqtasida 0 ga teng bo‘ladi; 4) $f(a)$ va $f(b)$ orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

$y = f(z)$ va $z = \varphi(x)$ funksiyalar o‘z argumentlarining uzluksiz funksiyalari bo‘lsa, $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham uzluksiz bo‘ladi. $y = f(x)$ uzluksiz bo‘lib, $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsa, u ham uzluksizdir.

Funksiyaning uzilish va uning turlari

Ta’rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan, lekin bu nuqtaning o‘zida uzluksizlik shartlaridan birortasi bajarilmasa, funksiya x_0 nuqtada **uzilishga ega deyiladi.**

$f(x)$ funksiya uchun

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ chekli limitlar mavjud bo‘lsa, chap va o‘ng limitlar hamda $f(x_0)$ sonlar o‘zaro teng bo‘lmasa, x_0 nuqta ***1-tur uzilish*** *nuqtasi* deyiladi.

Xususan, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ bo‘lsa x_0 ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi deyiladi.

1-tur uzilish nuqtasi bo‘lmagan uzilish nuqtalariga ***2-tur uzilish nuqtalari*** deyiladi. Bunday nuqtalarda, aqalli bitta tomonli limit qiymati cheksiz yoki mavjud bo‘lmaydi.

1-misol. $f(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada 1-tur uzilishga ega ekanligini isbotlang.

Yechish. funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlanmagan. Absolyut qiymat ta’rifidan $x-2<0$ yoki $x<2$ va $x-2>0$ yoki $x>2$ bњlganda mos ravishda

$$f(x) = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1, \quad f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

bo‘ladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 1.$

Shunday qilib, $x_0 = 2$ nuqta 1-tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. Bu uzilish nuqtasi **bartaraf** qilib (yo‘qotib) bo‘lmaydigan uzilish nuqtasiga kiradi.

Funksiya hosilasining ta’rifi.

1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo‘lib, x_0 nuqtadagi funksiya Δy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi. Bu limit

$$y', \; f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

simvollardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, ta’rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo‘ladi, bu limit mavjud bo‘lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deyiladi.

Hosilani topish jarayoni ***differensiallash*** **deb** ataladi.

Biz o‘rganayotgan $y = f(x)$ funksiya orqali qanday jarayon tavsiflanmasin, uning hosilasi $y = f(x)$ fizik nuqtai nazardan shu jarayon kechishining tezligini ifodalaydi.

Chunonchi, τ vaqt, Q biror reaksiya natijasida olingan moddaning τ momentdagi miqdori bo‘lsa, demak Q τ ning funksiyasi bo‘ladi. Q dan olingan hosila, reaksiya kechishining tezligini ifodalaydi. τ vaqt, Q biror o‘tkazgich kesim yuzidan vaqt birligida o‘tayotgan elektr miqdori bo‘lsa, Q hosila tok kuchining o‘zgarish tezligini ifodalaydi. Q isitilayotgan jismning o‘zgaruvchi temperaturasini tavsiflasa, Q' hosila isish tezligini ifodalaydi.

Funksiya hosilasini hosila ta’rifiga asosan topishga bir necha misollar keltiramiz:

1-misol. $y = x^3$ funksiyaning hosilasini hosila ta’rifiga asosan toping.

Yechish. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limitni hisoblaymiz:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Shunday qilib, $y' = 3x^2$.

2-misol. $y = \sin x$ funksiya hosilasini hosila ta’rifiga asosan, toping.

Yechish. argument x, Δx orttirma olganda, funksiya Δy orttirma oladi.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)};$$

$$\Delta x \to 0 \quad \partial a \quad \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x. \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} = 1.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x,\quad y'=(\sin x)'=\cos x$ bo‘ladi.

Umuman, x va y o‘zgaruvchilarning fizik, iqtisodiy, kimyoviy ma’nolaridan voz kechsak, y dan x bo‘yicha olingan hosila, y ning x ga bog‘liq bo‘lib o‘zgarishining tezligini ifodalaydi.

Hosilaning geometrik ma’nosi. Hosila muhim geometrik ma’noga ega. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M(x_0,\ f(x_0))$ *nuqtada o‘tkazilgan urinmaning* OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. $y=f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0,\ y_0)$ nuqtadan *o‘tkazilgan urinma tenglamasi*

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

bo‘ladi, bunda $y_0=f(x_0)$. Funksiya grafigiga urinish nuqtasi $M_0(x_0,\ y_0)$ da o‘tkazilgan normalning tenglamasi

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\ (f'(x_0)\neq 0)$$

bo‘ladi.

3-misol. $y=\dfrac{x^3}{3}+4$ egri chiziqqa abssissasi $x_0=2$ nuqtada o‘tkazilgan urinma va normalning tenglamasini yozing.

Yechish.

$$y_0=\frac{20}{3},\qquad y'(2)=2^2=4,\qquad y-\frac{20}{3}=4(x-2)$$

yoki

$3y-20=12(x-2)$, $12x-3y-4=0$, bu $M_0(2{,}20/3)$ nuqtadan o‘tkazilgan urinmaning tenglamasi. Normalning burchak koeffisiyenti

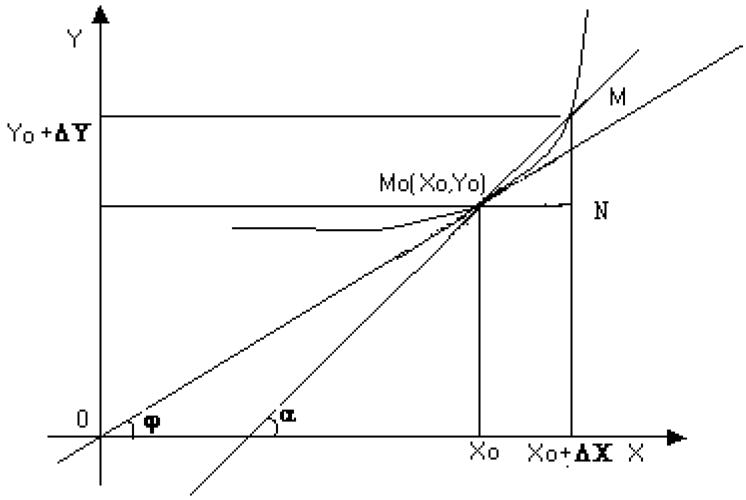
$$-\frac{1}{f'(x_0)}=-\frac{1}{4},\qquad \text{demak,}\quad y-\frac{20}{3}=-\frac{1}{4}(x-2)$$

yoki

$$12y-80=-3(x-2),\ 3x+12y-86=0$$

bo‘lib, bu M_0 nuqtadan o‘tkazilgan normalning tenglamasi bo‘ladi.

Hosilaning geometrik ma’nosi.



quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\angle MM_0N=\alpha$$

$$tg\alpha=\frac{MN}{M_0N}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$tg\varphi=\lim_{\Delta x\to 0} tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x) \qquad (2)$$

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$ (3)-urinma tenglamasi.

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$$ (4) – normal tenglamasi.

1-teorema: *Agar $y=f(x)$ funksiya biror x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda u shu x nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

Izoh. Teoremaning teskarisi har doim ham o‘rinli bo‘lavermaydi. Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, lekin differensiallanuvchi emas.

Chunki,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, \text{агар}\ \Delta x>0\\ -1, \text{агар}\ \Delta x<0\end{cases}\Rightarrow f'(0)$$

mavjud emas.

2-teorema. *Aytaylik,* $u = u(x)$ *va* $v = v(x)$ *funksiyalar* $x = 0$ *nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib, chekli* $u'(x)$ *va* $v'(x)$ *hosilalarga ega bo‘lsin.*

Unda,

$$1)\ [u \pm v]' = u' \pm v',$$

$$2)\ [u \cdot v]' = u'v \pm uv',$$

$$3)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (v \neq 0)$$

bo‘ladi.

Natija: $[C \cdot f(x)]' = C \cdot f'(x).$

3-teorema. *Aytaylik* $y = f(u)$ *bo‘lib,* $u = \varphi(x)$ *bo‘lsin. Agar* $u = \varphi(x)$ *funksiya* x *nuqtada* $\varphi'(x)$ *hosilaga,* $y = f(u)$ *funksiya esa* x *nuqtaga mos* $u = \varphi(x)$ *nuqtada* $\varphi'(x)$ *hosilaga ega bo‘lsa, u holda* $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ *murakkab funksiya ham* x *nuqtada hosilaga ega bo‘ladi va*

$$y' = F'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x) \quad (5)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

(5) – tenglikka **murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash formulasi** deyiladi.

Endi $y = f(x)$ funksiya va unga teskari bo‘lgan $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$ funksiyalar berilgan bo‘lsin.

4-teorema: *Agar* $y = f(x)$ *va* $x = \varphi(y)$ *funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lsa, unda* $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ *yoki* $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ *(6) formulalar o‘rinli bo‘ladi.*

2 – 4 – teoremalarni qo‘llash natijasida quyidagi hosilalar jadvalini hosil qilamiz.

1) $(C)'=0,$ 11) $(\ln u)'=\frac{u'}{u},$

2) $(C\cdot u)'=C\cdot u',$ 12) $(\sin u)'=u'\cos u,$

3) $(u+v)'=u'+v',$ 13) $(\cos u)'=-u'\cdot\sin u,$

4) $(u\cdot v)'=u'v+uv',$ 14) $(tgu)'=\frac{u'}{\cos^2 u},$

5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$ 15) $(ctgu)'=\frac{-u'}{\sin^2 u},$

6) $(x'_y)'=\frac{1}{y'_x},$ 16) $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$

7) $(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u',$ 17) $(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$

8) $(a^u)'=a^u\cdot u'\cdot\ln a,\quad (a>0)$ 18) $(arctgu)'=\frac{u'}{1+u^2},$

9) $(e^u)'=e^u\cdot u',$ 19) $(arcctgu)'=-\frac{u'}{1+u^2}.$

10) $(\log_a u)'=\frac{u'}{u},\quad (a>0, a\neq 1)$

Bu jadvalda $u=u(x)$ va $v=v(x)$lar differensiallanuvchi funksiyalar.

Agar funksiya orttirmasini ushbu,

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=A(x)\cdot\Delta x+\alpha(x,\Delta x)\cdot\Delta x \quad (7)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lib, bu erda A -o‘zgarmas son va $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x,\Delta x)=0$ bo‘lsa unda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada **differensiallanuvchi** deyiladi va $A\cdot\Delta x$ ga funksiya orttirmasining **chiziqli bosh qismi** deyiladi, hamda $df(x)$ kabi belgilanadi.

(7) tenglikdan, $df(x)=A\cdot\Delta x=f'(x)\cdot\Delta x$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Agar bu tenglikda $\Delta x=dx$ desak, u holda

$$df(x)=f'(x)dx \quad (8)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(7) va (8) dan

$$\Rightarrow \Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(dy+\alpha\cdot\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}dy\Rightarrow \Delta y \qquad \Delta y\approx dy=f'(x)\cdot\Delta x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x \quad (9)$$

(9) – taqribiy hisoblash formulasi.

1-misol. $\sqrt[3]{1{,}1}$ ni hisoblang.

Funksiyani $f(x)=\sqrt[3]{x}$ deb , $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x=1$, $\Delta x=0{,}1$ kabi olamiz. (9) formuladan foydalanamiz:

$$\sqrt[3]{1{,}1}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}\cdot 0{,}1=1+0{,}1\cdot\frac{1}{3}=1{,}033.$$

Jadvalga ko‘ra $\sqrt[3]{1{,}1}\approx 1{,}032$ ga teng.

$y=f(x)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi $y'=f'(x)$ dan olingan hosilaga (agar u mavjud bo‘lsa) $y=f(x)$ funksiyaning **ikkinchi tartibli hosilasi** deb ataladi va

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2 f}{dx^2}$$

belgilarining biri yordamida belgilanadi. Funksiyaning n – tartibli hosilasi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$y^{(n)}:=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari ham shu kabi aniqlanadi.

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Funksiyaning limiti

2.Funksiya hosilasining ta’rifi.

3. Hosilaning geometrik ma’nosi.

4. Hosilalar jadvali.

26-MAVZU. BOSHLANG`ICH FUNKSIYA. ANIQMAS INTEGRAL TA’RIFI VA XOSSALARI. INTEGRALLASH JADVALI, INTEGRALLASH USULLARI.

Reja:

1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral.
2. Asosiy integrallar jadvali.
3. Aniqmas integralni hisoblah usullari
4. Bo‘laklab integrallash usuli.

Tayanch ibora va tushunchalar: Funksiya, boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral, asosiy integrallar jadvali . aniqmas integralni o‘rniga qo‘yish usuli bilan integrallash, bo‘laklab integrallash usuli.

1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral

1. Ta’riflar. Agar (*a; b*) oraliqda berilgan $f(x)$ funksiya uchun $F'(x)=f(x)$ yoki $dF(x)=f(x)$ kabi munosabat o‘rinli bo‘lsa, *F(x)* funksiyani u oraliqda *f(x)* funksiya uchun boshlang‘ich funksiya deb yuritiladi. Berilgan *f(x)* funksiyaning har qanday ikkita boshlang‘ich funksiyalari bir-biridan ixtiyoriy o‘zgarmas son bilan farqlanadi. Agar *F(x)* funksiya *f(x)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa $\left(x\in(a;b)\right)$, u holda $F(x)+C$ (bu yerda C- ihtiyoriy o‘zgarmas son) funksiyalar ham *f(x)* funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi va ular *f(x)* funksiyaning *(a;b)* oraliqdagi aniqmas integrali deb ataladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

Bu yerda: $\int$ - belgisi, *f(x)* – integrallanuvchi funksiya, *f(x)dx* – integral belgisi ostidagi ifoda, *x* – integrallash o‘zgaruvchisidir.

Funksiyaning aniqmas integralini hisoblashni uni integrallash deb yuritiladi.

Aniqmas integralning asosiy xossalari quyidagicha yoziladi:

1. $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$,
2. $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$,
3. $\int d\,f(x)=f(x)+C$,
4. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$ (a - узгармассон),
5. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\pm...\pm f_n(x)\right]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm...\pm\int f_n(x)dx$.

Integrallash natijasining to‘g‘riligini topilgan boshlang‘ich funksiyani diferensiallash orqali tekshiriladi, ya’ni:

$$(F(x)+C)'=f(x).$$

Asosiy integrallar jadvali

1. $\int dx = x + C,$

2. $\int x^{a} dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1),$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C,$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$

6. $\int e^x dx = e^x + C,$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C,$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,$

12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C,$

13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,$

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right| + C,$

17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C,$

18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$

19. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C,$

20. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C,$

Aniqmas integralni hisoblah usullari

Berilgan funksiyaning boshlangich funksiyasini topishda, anikmas integralini topishda turli usullar mavjud, bular jumlasiga:

1. Bevosita integrallash usuli;
2. O‘zgaruvchini almashtirish usuli;
3. Bo‘laklab integrallash usuli $\int udv = uv - \int vdu$ bo‘laklab integrallash deyiladi.

Biz bo‘laklab integrallash usulini qaraymiz.

4. Bo‘laklab integrallash usuli

1-misol. Ushbu $\int xe^x dx$ ni hisoblang

Yechish. Buni yechish uchun bo‘laklab integrallash formulasidan foydalanamiz:

$$u = x \qquad dv = Sinxdx$$
$$du = dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

2-misol. Ushbu $\int x\sin xdx$ ni hisoblang:

Yechish. Bunda ham bo‘laklab integrallash formulasi qo‘l keladi.

$$u = x. \quad dv = \sin xdx$$
$$du = dx \qquad v = \int \sin xdx = -\cos x + c$$
$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c;$$

3-misol. Ushbu $\int x\ln xdx$ ni hisoblang:

Yechish. Bo‘laklab integrallash formulasini bevosita qo‘llash lozim bo‘ladi:

$$u = \ln x \qquad dv = x^2 dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$
$$\int x^2 \ln xdx = \ln x\frac{x^3}{3} + \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \ln x\frac{x^3}{3} + \frac{1}{9}x^3 + c$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang‘ich funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Aniqmas integral qanday ta’riflanadi?
3. O‘zgaruvchilarni almashtirish usulin mohiyatini ayting.
4. Bo‘laklash integral usuli qanday qo‘llaniladi?

27-MAVZU. ANIQ INTEGRAL, UNING XOSSALARI. NYUTON - LEYBNITS FORMULASI.

Reja:

1. Aniq integral.

2. Aniq integralning xossalari.

Tayanch ibora va tushunchalar: funksiya, boshlang‘ich funksiya va Aniq integral, asosiy integrallar jadvali . Aniq integrani o‘rniga qo‘yish usuli bilan integrallash, bo‘laklab integrallash usuli.

Aniq integral

Aytaylik, *f(x)* funksiya [*a*,*b*] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Shu kesmani $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b(x_0 < x_1 < ... < x_n)$ nuqtalar orqali uzunligi $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ (k = \overline{1,n})$ bo‘lgan *n* ta bo‘laklarga ihtiyoriy ravishda bo‘lib chiqamiz. Har bir $[x_{k-1}; x_k]$ kesmada ξ_k nuqtani ihtiyoriy tanlab, funksiyaning [*a*,*b*] kesma bo‘yicha n-integral yig‘indisi deb ataluvchi $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ ni tuzamiz.

Ta’rif. Agar $[x_{k-1}\ ; x_k](k = \overline{1,n})$ kesmalar ichidagi eng katta uzunlikka ega bo‘lgan kesmaning uzunligi nolga intilganda, S_n integral yig‘indining chekli limiti mavjud bo‘lib, u limit [a,b] kesmaning bo‘laklarga bo‘linish usuliga va ξ_k nuqtalarning tanlanilishiga bog‘liq bo‘lmasa, u xolda u limit f(x) funksiyaning [a,b] kesma bo‘yicha aniq integrali deb ataladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi, ya’ni ta’rifga ko‘ra,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Bu yerda: [*a;b*] – integrallash kesmasi, *a* va *b* lar mos ravishda aniq integralning quyi va yuqori chegaralari, *x* esa integrallash o‘zgaruvchisidir.

Aniq integralning xossalari

Endi *f(x)* va *φ(x)* funksiyalarni qaralayotgan [*a;b*] kesmada integrallanuvchi funksiyalar deb faraz qilib, aniq integralning asosiy xossalarini sanab o‘tamiz:

1. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$ $(\mathrm{C} = \mathrm{const})$, ya’ni o‘zgarmas ko‘paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarib yoziladi.

2. $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b \varphi(x)dx$, ya’ni ikkita funksiya algebraik yig‘indisining aniq integrali, qo‘shiluvchilar integralining algebraik yig‘indisiga teng.

3. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Agar aniq integralning quyi va yuqori chegaralari o‘zaro teng bo‘lsalar, aniq integralning qiymati nolga teng.
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, aniq integral chegaralarining o‘rinlari almashtirilsa, uning qiymati teskari ishoraga o‘zgaradi.
5. Agar s, $[a;b]$ dagi ihtiyoriy nuqta bo‘lsa, u xolda quyidagi tenglik har doim o‘rinlidir (aniq integralning additivlik xossasi):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Aniq integralning qiymati integrallash o‘zgaruvchisining ko‘rinishiga bog‘liq emas: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(\alpha)d\alpha$
7. Agar $[a;b]$ kesmada $\varphi(x) \le f(x)$ bo‘lib, $a<b$ bo‘lsa, u holda har doim $\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$ dir.
8. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) \ge 0$ bo‘lib, $a<b$ bo‘lsa, u xolda $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ dir.
9. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo‘lib, $a<b$ bo‘lsa, u xolda, $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Bu yerda, m va M lar $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ dagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlaridir.
10. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u xolda shu kesmada hech bo‘lmaganda shunday bitta *xqs* nuqta mavjudki $(a \le c \le b)$, har doim quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:
11. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ (o‘rta qiymat haqidagi teorema).

Aniq integralni hisoblash uslullari

Agar F(x) funksiya $[a;b]$ da *f(x)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda aniq integral, Nyuton-Leybnis formulasi deb ataladigan quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Endi aniq integralning xossalari hamda Nyuton-Leybnis formulasining qo‘llanishiga doir ayrim misollarning yechilishini keltiramiz.

1-Misol. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin2xdx = -\frac{1}{2}Cos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(Cos\pi - Cos0) = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1.$

2-Misol. .

-

3-Misol. Agar $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{га}, 0 \le \text{x} \le 1 \\ \sqrt{\text{x}} & \text{га}, 1 \le \text{x} \le 2 \end{cases}$ kabi bo‘lsa, $\int_0^2 f(x)dx$ hisoblansin.

Yechilishi. Aniq integralning additivlik xossasiga binoan,

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{2} - 1).$$

Yechilishi. O‘rta qiymat haqidagi teoremaga binoan,

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx = \sqrt{1+\zeta^4}, \quad 0 \le \zeta \le 1$$

Ammo $1 < \sqrt{1+\zeta^4} < \sqrt{2}$ ligi uchun $1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \le \sqrt{2} \cong 1.414$

28-MAVZU. ANIQ INTEGRALNI HISOBLASH USULLARI. ANIQ INTEGRALNING TADBIQLARI

Reja:

1. Aniq integralni hisoblash usullari.
2. Aniq integralning tadbiqlari.

Tayanch ibora va tushunchalar: Aniq integral, asosiy integrallar jadvali . Aniq integrani o‘rniga qo‘yish usuli bilan integrallash, bo‘laklab integrallash usuli.

1. Aniq integral

Aytaylik, *f(x)* funksiya [*a,b*] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Shu kesmani $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b(x_0 < x_1 < ... < x_n)$ nuqtalar orqali uzunligi $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ (k = \overline{1,n})$ bo‘lgan *n* ta bo‘laklarga ihtiyoriy ravishda bo‘lib chiqamiz. Har bir $[x_{k-1}; x_k]$ kesmada ξ_k nuqtani ihtiyoriy tanlab, funksiyaning [*a,b*] kesma bo‘yicha n-integral yig‘indisi deb ataluvchi $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ ni tuzamiz.

Ta’rif. Agar $[x_{k-1}\ ; x_k](k = \overline{1,n})$ kesmalar ichidagi eng katta uzunlikka ega bo‘lgan kesmaning uzunligi nolga intilganda, S_n integral yig‘indining chekli limiti mavjud bo‘lib, u limit [a,b] kesmaning bo‘laklarga bo‘linish usuliga va ξ_k nuqtalarning tanlanilishiga bog‘liq bo‘lmasa, u xolda u limit f(x) funksiyaning [a,b] kesma bo‘yicha aniq integrali deb ataladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi, ya’ni ta’rifga ko‘ra,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Bu yerda: [*a;b*] – integrallash kesmasi, *a* va *b* lar mos ravishda aniq integralning quyi va yuqori chegaralari, *x* esa integrallash o‘zgaruvchisidir.

2. Aniq integralning xossalari

Endi *f(x)* va *φ(x)* funksiyalarni qaralayotgan [*a;b*] kesmada integrallanuvchi funksiyalar deb faraz qilib, aniq integralning asosiy xossalarini sanab o‘tamiz:

1. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$ $(\mathrm{C} = \mathrm{const})$, ya’ni o‘zgarmas ko‘paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarib yoziladi.

2. $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b \varphi(x)dx$, ya’ni ikkita funksiya algebraik yig‘indisining aniq integrali, qo‘shiluvchilar integralining algebraik yig‘indisiga teng.

12. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Agar aniq integralning quyi va yuqori chegaralari o‘zaro teng bo‘lsalar, aniq integralning qiymati nolga teng.

13. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, aniq integral chegaralarining o‘rinlari almashtirilsa, uning qiymati teskari ishoraga o‘zgaradi.

14. Agar s, $[a;b]$ dagi ihtiyoriy nuqta bo‘lsa, u xolda quyidagi tenglik har doim o‘rinlidir (aniq integralning additivlik xossasi):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

15. Aniq integralning qiymati integrallash o‘zgaruvchisining ko‘rinishiga bog‘liq emas: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(\alpha)d\alpha$

16. Agar $[a;b]$ kesmada $\varphi(x) \le f(x)$ bo‘lib, $a<b$ bo‘lsa, u holda har doim $\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$ dir.

17. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) \ge 0$ bo‘lib, $a<b$ bo‘lsa, u xolda $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ dir.

18. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo‘lib, $a<b$ bo‘lsa, u xolda, $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Bu yerda, m va M lar $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ dagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlaridir.

19. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u xolda shu kesmada hech bo‘lmaganda shunday bitta *xqs* nuqta mavjudki $(a \le c \le b)$, har doim quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

20. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ (o‘rta qiymat haqidagi teorema).

Aniq integralni hisoblash uslullari

Agar F(x) funksiya $[a;b]$ da *f(x)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda aniq integral, Nyuton-Leybnis formulasi deb ataladigan quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Endi aniq integralning xossalari hamda Nyuton-Leybnis formulasining qo‘llanishiga doir ayrim misollarning yechilishini keltiramiz.

1-Misol. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin2xdx = -\frac{1}{2}Cos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(Cos\pi - Cos0) = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1.$

2-Misol. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = arcSin\frac{x}{4}\Big|_0^2 = arcSin\frac{1}{2} - arcSin0 = \frac{\pi}{6}.$

3-Misol. Agar $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ га}, 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} \text{ га}, 1 \le x \le 2 \end{cases}$ kabi bo‘lsa, $\int_0^2 f(x)dx$ hisoblansin.

Yechilishi. Aniq integralning additivlik xossasiga binoan,

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{2}-1).$$

Yechilishi. O‘rta qiymat haqidagi teoremaga binoan,

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx = \sqrt{1+\zeta^4}, \quad 0 \le \zeta \le 1$$

Ammo $1 < \sqrt{1+\zeta^4} < \sqrt{2}$ ligi uchun $1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \le \sqrt{2} \cong 1.414$

O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli

1. Ko‘pincha $\int_a^b f(x)dx$ ning hisoblanish jarayonini soddalashtirish maqsadida $x = \varphi(t)$ kabi almashtirish qo‘llanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Bu yerda : 1) $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz; 2) $\varphi(t)$ funksiya va uning $\varphi'(t)$ hosilasi $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz; 3) $a = \varphi(\alpha)$ va $b = \varphi(\beta)$ tengliklar o‘rinli;

2. x=φ(t) funksiya [α;β] da monotondir, ya’ni, φ(t) funksiyaning barcha qiymatlari [*a;b*] da joylashgan bo‘lishi kerak.

Eslatma. Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirib integrallash chegaralari o‘zgartirilgandan so‘ng uni hisoblashda eski o‘zgaruvchiga qaytishning xojati yo‘q.

1-misol. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ ni hisoblashda xqz[2] almashtirish kiritamiz. Yangi integrallash chegaralarini aniqlaymiz: xq1 da zq1 va xq4 da zq2;
U holda:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int_1^2 \frac{z^2dz}{1+z} = 2\int_1^2 \frac{z^2-1+1}{1+z}dx = 2\int_1^2 (z-1)dz + 2\int_1^2 \frac{dz}{1+z} = (z-1)^2\Big|_1^2 + 2\ln|1+z|\Big|_1^2 =$$
$$= 1+2(\ln 3-\ln 2) = 1+\ln\frac{9}{4}.$$

Bo‘laklab integrallash usuli

Aytaylik, u=u(x) va v=v(x) funksiyalar [*a;b*] kesmada uzluksiz diferensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin.

Ushbu $\int_a^в udv = uv\Big|_a^в - \int_a^b vdu$ formulani bo‘laklab integrallash formulasi deb yuritiladi va uning qo‘llanilishi aniqmas integraldagi mos formulaga o‘xshashdir.

1-misol. $\int_0^1 \arccos x dx = \begin{vmatrix} u=\arccos x & dv=dx \\ du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v=x \end{vmatrix} = x\arccos x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= 1\cdot\arccos 1 - 0\cdot\arccos 0 - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1.$$

3. Quyida aniq integrallarni hisoblashni yengillashtiradigan ba’zi bir omillarni keltiramiz.

a) Agar *f(x)* funksiya [-*a*; *a*] kesmada juft bo‘lsa, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

b) Agar *f(x)* funksiya [-a;a] kesmada toq bo‘lsa, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

1-misol. $\int_{-1}^{1}|x|dx$ hisoblansin.

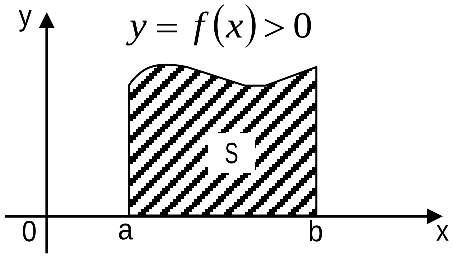
Yechilishi. Integral belgisi ostidagi funksiya *f(x)*q|*x*|- juft funksiya bo‘lganligi sababli, $\int_{-1}^{1}|x|dx = 2\int_0^1|x|dx = 2\int_0^1 xdx = x^2\Big|_0^1 = 1.$

$$= 0 + 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{3x^2(x^2-2)}{x^2-2}dx = 6\int_0^{\sqrt{2}} x^2dx = 6\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2})^3 = 4\sqrt{3}.$$

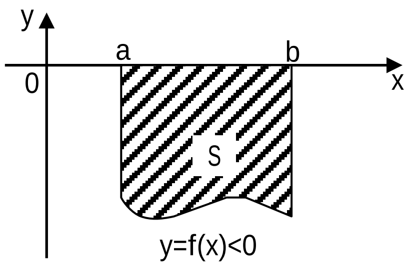
Aniq integralning tadbiqlari

Yassi figuralarning yuzlarini hisoblash.

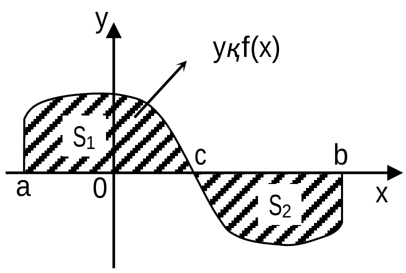
Ma’lumki, agar [*a; b*] kesmada $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, mazkur funksiyaning mazkur kesma bo‘yicha aniq integrali geometrik jixatdan *xqa* va *x=b* to‘g‘ri chiziqlar,*Ox* o‘qi xamda $y = f(x)$ egri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyaning yuzini ifodalar edi.



Agar [*a; b*] kesmada $f(x) \leq 0$ bo‘lsa, mazkur egri chiziqli trapesiya *Ox* o‘qidan pastda joylashadi va uning yuzi $S = \int_a^b |f(x)| dx$ formula orqali hisoblanadi.



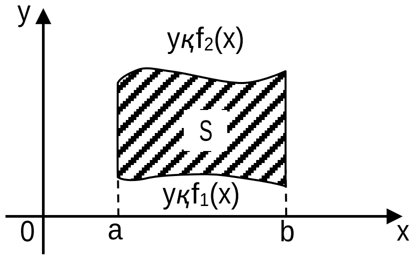
Agar $y = f(x)$ egri chiziq, *Ox* o‘qi va *x=a*, *x=b* to‘g‘ri chiziqlar bilan



chegaralangan figura *Ox* o‘qidan yuqorida va pastda joylashgan bo‘lsa, uning yuzi

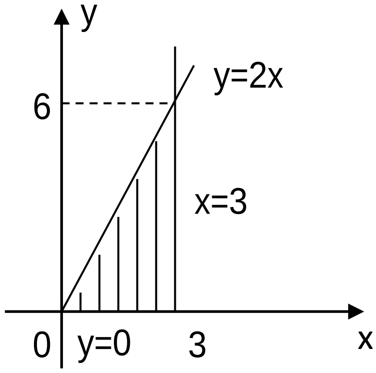
$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b |f(x)| dx$ formula bilan hisoblanadi

Agar $x=a$, $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar, $y=f_1(x)$ va $y=f_2(x)$ egri chiziqlar $\left(f_1(x)\le f_2(x)\right)$ bilan chegaralangan yuzani hisoblash lozim bo‘lsa, uni ushbu $S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_2(x)\right]dx$ formula bilan hisoblanadi.



1-Misol. Tenglamalari *y=2x*, *y=0* va *x=3* bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzi hisoblansin.

Yechilishi. $S=\int_0^3 2xdx=2\int_0^3 xdx=x^2\Big|_0^3=9$ кв.б.



MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan yuzalar hisoblansin.

1.	$y=0,\ y=3-2x+x^2;$	6.	$x+2y-=0,\ y=0,\ x=-3,\ x=2;$
2.	$x=e,\ y=0,\ y=\ln x;$	7.	$x=2,\ x=3,\ y=0,\ y=x^2;$

29-MAVZU. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI. EHTIMOLLAR NAZARIYASINING KELIB CHIQISHI, ASOSIY TUSHUNCHALAR , EHTIMOLLIKNING TA`RIFI.

Reja:

1.Tasodifiy hodisa (voqea).
2. Hodisalar yig‘indisi, ko‘paytmasi.
3.Muqarrar, mumkin bo‘lmagan, teng ehtimolli, birgalikda bo‘lmagan hodisalar.
4. Hodisa ehtimolining geometrik ta’rifi.
5. Kombinatorika elementlari.
6. Ehtimollar teoremasi, ehtimollarni qo‘shish teoremasi.
7. Ehtimollarni ko‘paytirish teoremasi.
8. Shartli va to‘liq ehtimol formulasi. Bayes formulasi

Tayanch iboralar: Tasodifiy hodisa (voqea), Hodisalar yig‘indisi, ko‘paytmasi, Muqarrar, mumkin bo‘lmagan, teng ehtimolli, birgalikda bo‘lmagan hodisalar, Hodisa ehtimolining geometrik ta’rifi, Kombinatorika elementlari, Ehtimollar teoremasi, ehtimollarni qo‘shish teoremasi, Ehtimollarni ko‘paytirish teoremasi, Shartli va to‘liq ehtimol formulasi, Bayes formulasi.

1. Tasodifiy hodisa (voqea).

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalarning qonuniyatlarini o‘rgatuvchi fandir.

Ma’lum shartlar to‘plami(majmuasi) bajarilganda ro‘y berishi (kelib chiqishi) yoki ro‘y bermasligi mumkin bo‘lgan har qanday hodisa(voqea) *tasodifiy hodisa* deb ataladi. Shartlar to‘plamini har gal amalga oshirilishi *sinov* (yoki t*ajriba*) deyiladi.

Masalan, agar tajriba detal tayyorlashdan iborat bo‘lsa, detalning standartga mos kelishi hodisadir; agar tajriba tangani tashlashdan iborat bo‘lsa, uning gerbli tomoni tushishi hodisadir; agar tajriba o‘yin soqqasini (yoqlariga 1dan 6gacha raqamlar yozilgan bir jinsli kubik) tashlashdan iborat bo‘lsa, u holda to‘rtlik tushishi hodisadir.

Hodisalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi: $A,B,C,\ldots$

A hodisaning *nisbiy chastotasi* yoki *chastotasi* deb berilgan hodisaning ro‘y berish soni *m* ning berilgan hodisa har birida ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi mumkin bo‘lgan bir xil sharoitda o‘tkazilgan tajribalarning umumiy *n* soniga nisbatiga aytiladi va *P*(A)* bilan belgilanadi:

$$P^*(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Kuzatishlar, tajribalar ko‘p marta takrorlanganda tasodifiy hodisaning *P*(A)* chastotasi barqaror ekanini ko‘rsatadi. Misolda tushintiramiz. Tanga tashlash bir xil sharoitda 3 seriyada amalga oshirilgan. Birinchi seriya 6(olti)ta tashlashdan iborat bo‘lib, unda tanganing gerbli tomoni tushishi 4marta sodir bo‘lgan. Ikkinchi seriya 250 tashlashdan iborat bo‘lib, unda gerbli tomoni tushishi 139 marta sodir bo‘lgan. Uchinchi seriya 302 tashlashdan iborat bo‘lib, unda gerbli tomon tushishi 155 marta sodir bo‘lgan. *A* hodisa tanganing gerbli tomoni tushishi. Seriyalarda tanganing, gerbli tomoni tushishi nisbiy chastotasi quyidagicha bo‘ladi:

I seriyada $P^*(A)= 0,66$;

II seriyada $P^*(A)= 0,55$;

III seriyada $P^*(A)= 0,51$.

Bundan ko‘rinadiki, seriyalarda tashlash soni qancha katta bo‘lsa, tushish chastotasi barqaror bo‘lib, 0,5 sonidan kam farq qiladi. Tajribalarning ko‘rsatishicha, chastotaning 0,5 sonidan bu chetlanishi sinovlar sonining ortishi bilan kamayadi. Ko‘pgina xollarda shunday P son mavjudki, A hodisa ro‘y berishining nisbiy chastotasi, juda kam uchraydigan xollardan tashqari, sinovlar soni katta bo‘lganda shu P sonidan kam farq qiladi. Bu son hodisaning ehtimoli deyiladi

U hodisa ro‘y berishining ob’ektiv imkonini ifodalaydi. Hodisaning ehtimoli qanchali katta bo‘lsa, uning ro‘y berishi shunchali mumkin bo‘ladi. A hodisaning ehtimolini $P\ (A)$ bilan belgilaymiz(bu inglizcha *probability* so‘zidan olingan bo‘lib, bizningcha “ehtimol” degan ma’noni beradi). Tajribalar soni n cheksiz o‘sib borganda, A hodisaning nisbiy chastotasi shu hodisaning ro‘y berish ehtimoli P ga yaqinlashadi. Yuqoridagi misolda gerbning tushish ehtimoli 0,5ga teng ekanligi o‘z-o‘zidan ravshan.

2.Hodisalar yig‘indisi, ko‘paytmasi

A va B hodisalar yig‘indisi deb A yoki B hodisalardan bittasi ro‘y beradigan $A + B$ hodisaga aytiladi.

A va B hodisalar ko‘paytmasi deb A va B hodisalar bir tajribada bir vaqtda yuz beradigan $A\,B$ hodisaga aytiladi.

Misol. Ikkita o‘yin soqqasi tashlanadi. Birinchi soqqa tashlanganda 6 sonining chiqishi A hodisa, ikkinchi soqqa tashlanganda 6 sonining chiqishi B hodisa bo‘lsin. U xolda $A + B$ hodisa ikkita soqqa tashlanganda uning kamida bittasida 6 sonining chiqishini ifodalaydi. $A\,B$ hodisa esa ikkala soqqada xam 6 sonining chiqish hodisasidir.

3 .Muqarrar, mumkin bo‘lmagan, teng ehtimolli, birgalikda bo‘lmagan hodisalar.

Tajriba natijasida biror shartlar to‘plami bajarilganda albatta ro‘y beradigan hodisa muqarrar hodisa deyiladi. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng va u E bilan belgilanadi. Tajriba natijasida shartlar to‘plami bajarilganda mutlaqo ro‘y bermaydigan hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa deyiladi. Bu hodisaning ehtimoli nolga teng va uni 0 bilan belgilaymiz.

Masalan, tanga tashlanganda u yoki bu tomonining tushishini oldindan to‘la ishonch bilan aytish mumkin emas.

Tajribaning har bir natijasini ifodalovchi hodisa *elementar hodisa* deb ataladi. Elementar hodisalarga ajratish mumkin bo‘lgan hodisa *murakkab hodisa* deyiladi. Agar bir necha hodisalardan istalgan birini tajriba natijasida ro‘y berishi boshqalariga qaraganda kattaroq imkoniyatga ega deyishga asos bo‘lmasa, bunday hodisalar *teng imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

Soqqa tashlanganda uning yuqori yog‘ida $l(1 \le l \le 6)$ sonning paydo bo‘lishi tasodifiy hodisasini qaraylik. Soqqamiz simmetrik (bir jinsli) bo‘lgani uchun 1 dan 6 gacha bo‘lgan sonlarning istalgan birining tushishi hodisalarining ro‘y berishi bir xil imkoniyatli hodisalar deyiladi.

Tashlash soni *n* katta bo‘lganda *l* sonini – 1 dan 6 gacha bo‘lgan sonlarning har birining xam soqqaning yuqori yog‘ida paydo bo‘lishini taqriban $\frac{n}{6}$ ko‘rish mumkin. Bu tajriba bilan tasdiqlangan. Nisbiy chastota soni $P^* = \frac{1}{6}$ ga yaqin bo‘ladi. SHuning uchun *l* sonining, shuningdek 1dan 6gacha har qanday boshqa sonning xam yuqori yoqda paydo bo‘lish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng deb xisoblanadi.

Agar *A* va *B* hodisalar bir paytda ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisalar bo‘lsa, ular *birgalikda bo‘lmagan hodisalar* deyiladi. Masalan, tangani tashlaganda bir vaqtda gerbli va raqamli tomonlarini tushish hodisalari birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

A xordisaga *qarama – qarshi hodisa* deb, *A* hodisaning ro‘y bermasligidan iborat $\bar{A}$ hodisaga aytiladi. *A* va $\bar{A}$ hodisalar birgalikda bo‘lmasligi o‘z – o‘zidan ravshan.

Agar tajriba tasodifiy hodisalarning istalgan birining ro‘y berishi mumkin bo‘lib, bu hodisa bilan birgalikda emas biror boshqa hodisaning ro‘y berishi mumkin bo‘lmasa, bu xolda tasodifiy *hodisalar to‘liq gruppasini* tashkil qiladi deb aytamiz. Teng imkoniyatli birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘liq gruppasini olaylik. Bunday hodisalarni xollar (yoki imkonlar) deb aytamiz. Bunday gruppaning hodisasi, agar uning ro‘y berishi natijasida *A* hodisaning ro‘y berishi kelib chiqadigan bo‘lsa, *A* hodisaning ro‘y berishi *qulaylik tug‘diruvchi hodisalar* deb ataladi.

Misol. Qutida 8ta shar bo‘lib, ularning har biriga bittadan 1 dan 8 gacha bo‘lgan raqam yozilgan. 1,2,3,4 raqamli sharlar qizil, qolgan sharlar esa qora rangda. 1raqamli sharning paydo bo‘lishi (shuningdek,2,3,va 4 raqamli sharning paydo bo‘lishi ham) qizil sharning paydo bo‘lishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisadir.

Qaralayotgan xol uchun ehtimolga boshqacha ta’rif berish mumkin.

Ta’rif. A hodisaning ehtimoli deb A hodisaga qulaylik tug‘diruvchi xollar soni m ning teng imkoniyatli, birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘liq gruppasini tashkil qiluvchi barcha mumkin bo‘lgan xollar soni n ga nisbatiga aytiladi va simvolik ravishda quyidagicha yoziladi:

$$P(A) = P = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Bu ta’rif ehtimolning klassik ta’rifi deb xam yuritiladi. Ehtimolning ta’rifidan uning ushbu $0 \le P \le 1$ munosabatni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

1 – misol. Qutida 36 ta olma bo‘lib, undan bitta olma olindi. 36ta olmadan 9 tasi qizil olma. Qizil olmaning olinganligi ehtimolini toping.

Echish. Agar qulaylik tug‘diruvchi xollar soni m=9 bo‘lsa, u xolda qizil olma chiqish ehtimoli $P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ ga teng.

2 – misol. Birinchi to‘pdan nishonga tegish ehtimoli $\frac{8}{10}$ ga, ikkinchi to‘pdan nishonga tegish ehtimoli esa $\frac{7}{10}$ ga teng. Ikkala to‘pdan bir vaqtda o‘q uzilganda nishonga tegish ehtimolini toping. Xech bo‘lmaganda bitta o‘qning nishonga tegishi nishonning shikastlanganligi xisoblanadi.

Yechish. Ehtimollar nazariyasining ko‘pgina masalalarini yechish “Qutilar sxemasi” masalasiga keltiradi. Shuning uchun qutidan shar olish masalasiga umumlashgan masala deb qaraladi. Berilgan masala ham quyidagicha modellashtiriladi.

Ikki qutida 10tadan shar bo‘lib, ular 1 dan 10 gacha nomerlangan. Birinchi quti ichida 8 ta qizil va ikkita qora shar bo‘lib, ikkinchisida esa 7ta qizil va uchta qora shar bor. Har bir qutidan bittadan shar olinadi. Olingan ikkita shar ichida kamida bittasi qizil shar bo‘lishi ehtimoli qanday?

Birinchi qutida har bir shar ikkinchi qutidagi ixtiyoriy shar bilan birga olinishi mumkin bo‘lgani uchun barcha xollar soni 100ta, ya’ni n=100. qulaylik tug‘diruvchi xollarni xisoblaymiz. Ikkinchi qutidagi ixtiyoriy shar bilan birgalikda birinchi qutidagi 8ta qizil shar ixtiyoriy olinganda, olingan sharlar ichida eng kamida bitta qizil shar bo‘ladi. Bunday xollar 10*8=80ta.

Birinchi qutidan ikkita qora sharning har birini ikkinchi qutidagi 7 ta qizil sharning har biri bilan birgalikda olinganda olingan sharlar orasida bitta qizil shar bo‘ladi. Bunday imkonlar 2*7=14 ga teng. SHunday qilib, xammasi bo‘lib qulaylik tug‘diruvchi xollar m=80+14=94ta. Olingan sharlar orasida kamida bitta qizil shar bo‘lish ehtimoli

$P = \frac{m}{n} = \frac{94}{100}$ ga teng.

Nishonga tegish ehtimoli xam shunga teng.

4. Hodisa ehtimolining geometrik ta'rifi.

Faraz qilaylik, tekislikda biror D soxa berilgan bo'lsin. D soha boshqa biror G soxani o'z ichiga olgan bo'lsin, ya'ni $G \subset D$.

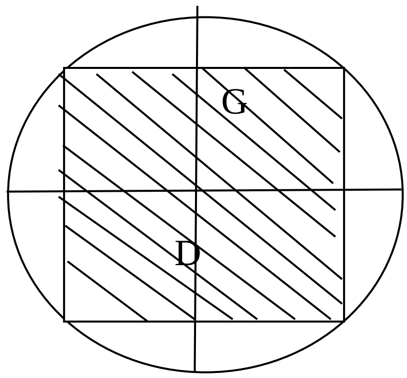
D soxaga tavakkaliga biror nuqta tashlansin. Bu nuqtaning G soxaga tushish ehtimolini qaraymiz. Bunda barcha elementar hodisalar D soxadan iborat. D – cheksiz to'plam. Bunda biz klassik ta'rifdan foydalanamiz. D soxaga tashlangan nuqta soxaning istalgan qismiga tushishi mumkin. Bu nuqtaning G soxaga tushish ehtimoli G soxaning o'lchamiga (uzunligi, xajmi) proporsional bo'lib, G ning shakliga, uning D soxaning qaerida joylashishiga bog'liq bo'lmasin. Soxa o'lchamini mes orqali belgilasak, tavakkaliga tashlangan nuqtaning G soxaga tushish ehtimoli

$$P = \frac{мес G}{мес D}$$

ga teng bo'ladi.

1 – misol. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan A nuqtaning doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushish ehtimolini toping.

Echish. S(G) – kvadratning yuzi, S\`(D) – doiraning yuzi bo'lsin (173-chizma).



173 - chizma

A – nuqtaning kvadratga tushish hodisasi. U xolda

$$P(A) = \frac{S(G)}{S`(D)} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} = 0{,}636; \qquad P(A) = 0{,}636.$$

5. Kombinatorika elementlari.

Ehtimollarni bevosita hisoblashda ko‘pincha kombinatorika formulalaridan foydalaniladi.

O‘rin almashtirish deb n ta turli elementlardan m tadan tuzilgan kombinatsiyalar bo‘lib, ular bir-biridan elementlarning tarkibi yoki ularning tartibi bilan farq qiladi. Ularning soni

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ yoki } A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$$

formulalar bilan topiladi.

Gruppalashlar bir-biridan hech bo‘lmaganda, bitta elementi bilan farq qiluvchi n ta elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalardir.

Ularning soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ga teng.

1-misol. Guruhda 14 talaba bo‘lib, ularning 8 nafari a’lochilar. Ro‘yxat bo‘yicha tavakkaliga 10 talaba tanlab olindi. Tanlab olinganlar ichida 6 talaba a’lochi bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. Sinovning barcha mumkin bo‘lgan teng imkoniyatli elementlar hodisalari soni C_{14}^{10} ga teng. Bularning ichidan $C_8^6 * C_6^4$ tasi tanlab olingan talabalar ichidan 6 tasi talabalar xoditsasi (A) uchun qulaylik tug‘diradi.

Shuning uchun:

$$P(A) = \frac{C_8^6 * C_6^4}{C_{14}^{10}} = \frac{\dfrac{8*7*6*5}{1*2*1*2}}{\dfrac{14*13*12*11}{1*2*3*4}} = \frac{4*7*3*5}{7*13*11} = \frac{60}{143}.$$

6. Ehtimollar ko’paytirish va qo‘shish teoremalari.

Ta’rif. *A* va *B* hodisalar yig‘indisi deb bu hodisalardan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat bo‘lgan S hodisaga aytiladi. Biz birgalikda bo‘lmagan A va B hodisalar yig‘indisining ehtimolini qaraymiz. P(A) va P(B) mos ravishda ularning ehtimollari bo‘lsin.

1-teorema. Ikkita birgalikda bo‘lmagan A va B hodisalar yig‘indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Isbot. Hodisa ehtimolining klassik ta’rifiga ko‘ra, aytaylik, tajribalar natijasi n ta elementar hodisalar bo‘lib, bulardan m_1 tasi A hodisaga, m_2 tasi esa V hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘dirsin. U xolda

$$P(A)=\frac{m_1}{n};P(B)=\frac{m_2}{n} \qquad (1)$$

bo‘ladi.

Teorema shartiga ko‘ra A va B hodisalar birgalikda emas. SHunga ko‘ra yo A hodisa, yoki B hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar soni m_1+m_2 ga teng.

Demak $A + B$ hodisaning ehtimoli $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}$ bo‘ladi.

Agar $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$ bo‘lsa, u xolda (1) ga asosan tubandagiga ega bo‘lamiz:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Natija. A hodisaga qarama – qarshi $\overline{A}$ hodisaning ehtimoli $P(\overline{A})=1-P(A)$ ga teng.

Isbot. A va $\overline{A}$ hodisalar qarama – qarshi bo‘lganligidan:

$$P(A+\overline{A})=1 \qquad (2)$$

Yuqoridagi birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}). \qquad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Misol. Qutida 25ta shar bor. Ulardan 8tasi qizil, 6tasi oq, 11tasi sariq. Tavakkaliga olingan sharning rangli shar bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. Rangli shar chiqishi deganda yo qizil shar, yoki sariq shar chiqishini tushunamiz. Qizil shar chiqish hodisasini A, sariq shar chiqish hodisasini B bilan belgilaylik. U xolda ehtimolning klassik ta’rifiga asosan: $P(A) = \frac{8}{25}; P(B) = \frac{11}{25}$ bo‘ladi. $A + B$ hodisa rangli shar chiqishi hodisasi. A va B hodisalar birgalikda emas, shuning uchun 1 – teoremaga ko‘ra: $P(A+B) = P(A) + P(B).$

Demak, izlangan ehtimol: $P(A+B) = \frac{8}{25} + \frac{11}{25} = \frac{19}{25}.$

2-teorema. Ehtimollarni qo‘shish teoremasi juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar uchun xam o‘rinli, ya’ni

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar hodisalarning to‘la gruppasini tashkil qilsa, u xolda $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$ 1. bo‘ladi.

Endi birgalikda bo‘lgan hodisalar (ikkita hodisadan birining ro‘y berishi ikkinchisining ro‘y berishini inkor etmaydigan hodisalar) uchun qo‘shish teoremasini qaraymiz.

3 – teorema. Ikkita birgalikda bo‘lgan A va B hodisadan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berish ehtimoli hodisalar ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish hodisasi ehtimolining ayirmasiga tengbo‘ladi: $P(A+B)=P(A)+P(B) - P(AB)$.

7. Ehtimollarni ko‘paytirish teoremasi

Teorema. A va B hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli ulardan biri ehtimolining ikkinchisining birinchi hodisa ro‘y berdi, deb xisoblangan shartli ehtimoliga ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$P(AB) = P(A) * P_A(B). \qquad (5)$$

Isbot. Bu munosabatning to‘g‘riligini ehtimolning klassik ta’rifiga asoslanib isbotlaymiz. Tajribalarning mumkin bo‘lgan E_1, E_2, … , E_N natijalari teng ehtimolli, juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘liq gruppasini tashkil qilsin va ulardan A hodisaga K ta natija qulaylik yaratsin hamda ana shu K ta natijadan L tasi B hodisaga qulaylik yaratsin. U xolda, *A* va *B* hodisalarning ko‘paytmasiga tajribalarning mumkin bo‘lgan K ta natijasidan L tasi qulaylik tug‘diradi.

Bundan esa quyidagiga egamiz:

$$P(A) = \frac{K}{N}; P(AB) = \frac{L}{N}; P_A(B) = \frac{L}{K}.$$

Shunday qilib,

$$P(AB) = \frac{L}{N} = \frac{K}{N} * \frac{L}{N} = P(A) * P_A(B).$$

Shunga o‘xshash A va B ning o‘rinlarini almashtirib, quyidagi munosabatga ega bo‘lamiz:

$$P(AB) = P(A) * P_A(B). \tag{6}$$

(5) va (6) munosabatlardan

$$P(A) * P_A(B) = P(B) * P_B(A) \tag{7}$$

kelib chiqadi.

Ehtimollarni ko‘paytirish teoremasi istalgan chekli sondagi hodisalar uchun umumlashtiriladi. Masalan, uchta A_1, A_2, A_3 hodisa uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P(A_1A_2A_3) = P[(A_1A_2)A_3] = P(A_1A_2) * P_{A_1A_2}(A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)$$

Umumiy holda:

$$P(A_1A_2...A_N) = P(A_1) * P_{A_1}(A_2) * P_{A_1A_2}(A_3) * ... * P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n) \tag{8}$$

Misol. 4ta oq va 9 ta qora shar bo‘lgan qutidan ikkita shar olinadi. Olingan ikkala shar oq bo‘lish ehtimoli qancha?

Yechish. Bu masalani (6) formulani qo‘llab echamiz. Ikkita sharni olish ularni ketma-ket olishga teng kuchlidir. Ikkita oq shar chiqishidan iborat hodisa A va B hodisalarning ko‘paytmasidan iborat bo‘ladi. (6) formulaga ko‘ra quyidagiga ega bo‘lamiz:

$P(AB) = P(A)P_A(B)$. Biroq, birinchi oq shar chiqqandan so‘ng qutida uchtasi oq bo‘lgan 12ta shar qolgani uchun: $P(A) = \dfrac{3}{10}$, $P_A(B) = \dfrac{3}{12}$. Demak,

$$P(AB) = \left(\frac{3}{10}\right) * \left(\frac{3}{12}\right) = \frac{3}{40} .$$

8. Shartli va to‘liq ehtimol formulasi. Bayes formulasi

Shartli ehtimol

Ayrim masalalarni echishda A va B hodisalarning ehtimollari ma’lum bo‘lsa, bu hodisalar ko‘paytmasining ehtimolini topishga to‘g‘ri keladi. Quyidagi misolni qaraymiz. Ikkita tanga tashlangan bo‘lsin. Ikkita gerb tushish ehtimolini topish talab qilinadi.

Biz to‘liq gruppa tashkil etuvchi 4 ta teng ehtimolli juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan ushbu natijaga egamiz:

	1 – tanga	2 – tanga
1 – natija	gerb	gerb
2 – natija	gerb	raqam
3 – natija	raqam	gerb
4 – natija	raqam	raqam

Shunday qilib, P (gerb, gerb) = 1/4. endi birinchi tangada gerb tushgani ma’lum deb faraz qilaylik. Shundan so‘ng gerb ikkala tangada tushish ehtimoli qanday o‘zgaradi?

Birinchi tangada gerb tushgani uchun, endi to‘liq gruppa ikkita teng ehtimolli birgalikda bo‘lmagan natijalardan iborat bo‘ladi:

	1 – tanga	2 – tanga
1 – natija	gerb	gerb

2 – natija	gerb	raqam

Bunda natijalardan faqat bittasi (gerb, gerb) hodisaga imkon yaratadi. Shuning uchun qilingan farazlarda P (gerb, gerb) = 1/2 .

Endi A orqali ikkita gerbning tushishini, B orqali esa gerbning birinchi tangada tushishini belgilaymiz.

B hodisa ro‘y berganligi ma’lum bo‘lganda, A hodisa ehtimoli o‘zgarishini ko‘rayapmiz.

A hodisaning B hodisa ro‘y berdi, degan shart ostidagi yangi ehtimolini $P_B(A)$ orqali belgilaymiz. SHunday qilib,

$$P(A)=\frac{1}{4}, \qquad P_B(A)=\frac{1}{2}$$

A hodisaning B hodisa ro‘y beradi, degan shart ostidagi ehtimoli A hodisaning shartli ehtimoli deyiladi.

To‘liq ehtimol formulasi

Aytaylik, A hodisa to‘liq gruppa tashkil etuvchi n ta juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan H_1, H_2, …, H_n hodisalarning bittasi va faqat bittasi bilan birgalikda ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. U xolda, agar A hodisa ro‘y bergan bo‘lsa, bu juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan AH_1, AH_2, …, AH_n hodisalarning birortasi ro‘y berganini bildiradi. Demak,

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n .$$

U xolda, ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan, tubandagiga ega bo‘lamiz:

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Biroq, $P(AH_i) = P(H_i) * P_{H_i}(A)(i = 1,2,...n)$, shuning uchun

$$P(A) = P(H_i)P_{H_i}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A). \qquad (1)$$

Bu formula to‘liq ehtimol formulasi deyiladi. H_1, H_2, …, H_n hodisalar

ko‘pincha “gipotezalar ” deyiladi. Bu formuladan murakkab hodisalarning ehtimollarini xisoblashda foydalaniladi.

Misol. Omborga 360 ta maxsulot keltirildi. Bulardan 300 tasi bir korxonada tayyorlangan bo‘lib,250 tasi yaroqli maxsulot; 40 tasi ikkinchi korxonada tayyorlangan bo‘lib, 30 tasi yaroqli maxsulot; 20 tasi uchinchi korxonada tayyorlangan bo‘lib, 10 tasi yaroqli maxsulot.

Ombordan tavakkaliga olingan maxsulotning yaroqli bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Tavakkaliga olingan maxsulot uchun quyidagi gipotezalar o‘rinli bo‘ladi:

H_1 – maxsulotning 1 – korxonada tayyorlangan bo‘lishi;

H_2 – maxsulotning 2 – korxonada tayyorlangan bo‘lishi;

H_3 – maxsulotning 3 – korxonada tayyorlangan bo‘lishi.

Ularning ehtimollari mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$P(H_1) = \frac{300}{360} = \frac{5}{6}; \quad P(H_2) = \frac{40}{360} = \frac{1}{9}; \quad P(H_3) = \frac{20}{360} = \frac{1}{18}.$$

Agar olingan maxsulotning yaroqli bo‘lishini A hodisa deb beolgilasak, u xolda bu hodisaning turli gepotezalar shartlari ostidagi ehtimollari quyidagicha bo‘ladi:

$$P_{H_1}(A) = \frac{5}{6}; \qquad P_{H_2}(A) = \frac{3}{4}; \qquad P_{H_3}(A) = \frac{1}{2}.$$

YUqorida topilganlarni to‘liq ehtimol formulasiga qo‘yamiz:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A) =$$
$$\frac{5}{6} * \frac{5}{6} + \frac{1}{9} * \frac{3}{4} + \frac{1}{18} * \frac{1}{2} = \frac{29}{36}$$

Bayes formulasi

Biror tajriba o‘tkazilmoqda va uning o‘tish shartlari to‘g‘risida to‘liq gruppa tashkil etuvchi juft-juft bo‘lib birgalikda bo‘lmagan n ta H_1, H_2, …, H_n gipotezalarni aytish mumkin bo‘lsin.

Gipotezalarning ehtimoli $P(H_i)$ ga teng. Tajriba natijasida A hodisa ro‘y berishi xam, ro‘y bermasligi xam mumkin bo‘lsin, shuning bilan birga, agar tajriba gipoteza bajarilganda o‘tayotgan bo‘lsa, $P_{H_i}(A) = P_i$ (i = 1, 2, …, n) ekani ma’lum bo‘lsin.

U xolda, agar A hodisa ro‘y berganligi ma’lum bo‘lib qolsa, gipotezalarning ehtimollari qanday o‘zgaradi, degan savol paydo bo‘lishi mumkin. Boshqacha aytganda, bizni $P_A(H_i)$ ehtimollarning qiymatlari qiziqtiradi.

Ehtimollarni ko‘paytirish teoremasidagi (5) va (6) munosabatlar asosida quyidagiga egamiz: $P(H_i A) = P_A(H_i) * P(A) * P(H_i)$ (i = 1, 2, …, n), bu erdan $P_A(H_i) = \dfrac{P_{H_1}(A) * P(H_i)}{P(A)}$.

Biroq, to‘liq ehtimol formulasiga ko‘ra:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) * P_k$$

shuning uchun

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_i}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_k} \quad (i = 1, 2, …, n). \qquad (1)$$

(1) formula Bayes formulasi deyiladi.

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Ehtimol nima?
2. Hodisa ehtimolining klassik ta’rifini keltiring.
3. Muqarrar mumkin bo‘lmagan, teng ehtimolli hodisalar deganda nimani tushunasiz?
4. Hodisalar yig‘indisi va ko‘paytmasi ta’rifini keltiring.
5. Birgalikda va birgalikda bo‘lmagan hodisalarni misollar yordamida tushuntiring.
6. A hodisaga qarama – qarshi hodisa deganda nimani tushunasiz?
7. Hodisa ehtimolining geometrik ta’rifini misollar yordamida tushuntirib bering.

30-MAVZU: KOMBINATORIKA ELEMENTLARI VA ULARNING EHTIMOLLAR NAZARIYASI MASALALARINI YECHISHDA QO`LLANILISHI

Reja:

1. **Matematik statistikaning vazifalari (masalalari).**
2. **Bosh va tanlanma to‘plamlar.**
3. **Tanlanmalarning tiplari, tanlash usullari.**
4. **Tanlanmaning statistik taqsimoti.**
5. **Empirik taqsimot funksiyasi.**
6. **Poligon va gistogramma.**

Tayanch iboralar**: matematik statistika, baho, statistik gipotezalarni tekshirish, statistik ma’lumotlarni to‘plash va qayta ishlash, tanlanma to‘plam, tanlanma, bosh to‘plam, to‘plam hajmi, takror tanlanma, notakror tanlanma, reprezentativ tanlanma, oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash, oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash, tipik tanlash, mexanik tanlash, seriyali tanlash, kombinatsiyali tanlash.**

Varianta, variatsiyaviy qator, chastota, nisbiy chastota, tanlanmaning statistik taqsimoti, empirik taqsimot funksiyasi, nazariy taqsimot funksiyasi, chastotalar poligoni, nisbiy chastotalar poligoni, chastotalar gistogrammasi, chastotalar gistogrammasining yuzi, nisbiy chastotalar gistogrammasi, nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi.

Matematik statistikani qo‘llashdan asosiy maqsad ommaviy hodisalar va jarayonlar haqida ularni kuzatish yoki eksperimenlar natijasida olingan ma’lumotlar asosida xulosalar hosil qilishdan iborat. Bu statistik xulosalar alohida tajribalarga tegishli bo‘lmasdan, balki tadqiq qilinayotgan hodisani keltirib chiqaruvchi shart-sharoitlarning doimiy ekanligi farazidagi shu hodisaning umumiy tavsiflari (ehtimolliklari, taqsimot qonunlari va ularning parametrlari, matematik kutilmalari va h.k.) haqida-gi da’volardan iborat.

Ommaviy tasodifiy hodisalar bo‘ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash statistik ma’lumotlarni — kuzatish natijalarini ehtimollar nazariyasi uslublari bilan o‘rganishga asoslanadi.

Matematik statistikaning birinchi vazifasi (masalasi) — kuzatishlar yoki maxsus o‘tkazilgan eksperimentlar natijasida olingan statistik ma’lumotlarni to‘plash va guruhlash usullari-ni ko‘rsatish.

Matematik statistikaning ikkinchi vazifasi (masalasi):

a) hodisaning noma’lum ehtimolligini baholash; noma’lum taqsimot funksiyasini baholash; ko‘rinishi ma’lum bo‘lgan taqsimotning parametrlarini baholash; tasodifiy miqdorning boshqa bitta yoki bir nechta tasodifiy miqdorlarga bog‘liqligini baho-lash va h.k.;

b) noma’lum taqsimotning ko‘rinishi haqidagi yoki ko‘rinishi ma’lum bo‘lgan taqsimot parametrlarining kattaligi haqidagi statistik gipotezalarni tekshirish kabi tadqiqot maqsadlariga bog‘liq ravishda statistik ma’lumotlarni tahlil qilish usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Demak, *matematik statistikaning predmeti ilmiy va amaliy xulosalar hosil qilish maqsadida statistik ma’lumolarni to‘plash va qayta ishlash usullarini yaratishdan iborat*.

Matematik statistika ehtimollar nazariyasiga tayanadi va uning maqsadi — bosh to‘plam tavsiflarini tanlanma ma’lumotlari asosida baholash.

Agar bir jinsli ob’ektlar to‘plamini bu ob’ektlarni tavsiflovchi biror belgiga nisbatan o‘rganish talab etilsa, u holda yalpi tekshirish o‘tkazish, ya’ni to‘plamning har bir ob’ektini ushbu belgiga nisbatan tekshirish tabiiy bo‘ladi. Biroq, amalda, yalpi tekshirishni o‘tkazish u yoki bu sabablarga ko‘ra ko‘pincha mumkin bo‘lmaydi. Bunday hollarda butun to‘plamdan chekli sondagi ob’ektlar tasodifiy ravishda tanlanadi va ular o‘rganiladi.

Tanlanma to‘plam, yoki oddiy qilib, *tanlanma* deb tasodi-fiy ravishda tanlab olingan ob’ektlar to‘plamiga aytiladi. *Bosh to‘plam* deb tanlanma ajratiladigan ob’ektlar to‘plamiga aytiladi. Masalan, agar Soliq akademiyasining barcha talabalari bosh to‘plam bo‘lsa, u holda biror guruh talabalari tanlanma to‘plam bo‘ladi.

To‘plam (tanlanma yoki bosh to‘plam)ning *hajmi* deb bu to‘lamdagi ob’ektlar soniga aytiladi. Masalan, agar 1000 ta detaldan tekshiruv uchun 100 ta detal tanlab olingan bo‘lsa, u holda bosh to‘plam hajmi $N = 1000$, tanlanma hajmi esa $n = 100$ bo‘ladi.

Tanlanmani tuzishda ikki xil yo‘l tutish mumkin: ob’ekt tanlanib, uning ustida kuzatish o‘tkazilganidan so‘ng, u bosh to‘plamga qaytarilish yoki qaytarilmasligi mumkin. SHunga bog‘liq ravishda tanlamalar takror va notakror tanlamalarga ajratiladi.

Takror tanlanma deb shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda tanlab olingan ob’ekt (keyingisini olishdan oldin) bosh to‘plamga qaytariladi. *Notakror* tanlanma deb tanlab olingan ob’ekt yana bosh to‘plamga qaytarilmaydigan tanlanmaga aytiladi.

Tanlanmadagi ma’lumotlar bo‘yicha bosh to‘plamning bizni qiziqtirayotgan belgisi haqida etarlicha ishonch bilan fikr yuritish uchun tanlanmaning ob’ektlari uni to‘g‘ri tavsiflashi zarur. Boshqacha aytganda, tanlanma bosh to‘plamning mutanosibliklarini to‘g‘ri tavsiflashi kerak, ya’ni tanlanma *reprezentativ* (*to‘laqonli tavsiflovchi*) bo‘lishi lozim.

Agar bosh to‘plam barcha ob’ektlarining tanlanmaga tushish ehtimolliklari bir xil degan farazda tanlanmaning har bir ob’ekti bosh to‘plamdan tasodifiy ravishda tanlangan bo‘lsa, u holda katta sonlar qonuniga asosan tanlanma reprezentativ bo‘ladi deb ta’kidlash mumkin.

Agar bosh to‘plamning hajmi etarlicha katta bo‘lib, tanlanma esa bu to‘plamning uncha katta bo‘lmagan qismini tashkil qilsa, u holda takror va notakror tanlanmalar orasidagi farq yo‘qolib boradi; cheksiz bosh to‘plam qaralib, tanlanma chekli hajmga ega bo‘lgan limit holda bu farq yo‘qoladi.

Amaliyotda tanlashning turli usullari qo‘llaniladi. Bosh to‘plamni qismlarga ajratishni talab qilmaydigan tanlash mavjud, masalan, oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash va odiy qaytariladigan tasodifiy tanlash, shuningdek, bosh to‘plam qismlarga ajratilgandan keyin amalga oshiriladigan tanlash (tipik tanlash, mexanik tanlash, seriyali tanlash) ham qo‘llaniladi.

Butun bosh to‘plamdan ob’ektlar bittalab olinadigan tanlash *oddiy tasodifiy* tanlash deb ataladi. Agar tanlangan ob’ektlar keyingi tanlovda qatnashishi uchun bosh to‘plamga qaytarilsa, bunday tanlash oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash, aks holda esa oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash bo‘ldi. Masalan, agar biror hudud bo‘yicha o‘rtacha oylik ish haqini aniqlash talab etilgan bo‘lsa, oddiy qaytarilmaydigan tasodi-fiy tanlash qo‘llaniladi, chunki ayni bir odamning ish haqi faqat bir marta hisobga olinadi. Agar biror tumandagi turli komissiyalarning jinsi, yoshi, ijtimoiy holati, ma’lumoti bo‘yicha tarkibini aniqlash talab etilgan bo‘lsa, tanlash oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash bo‘ladi, chunki ayni bir odam har xil komissiyalarda ishtirok etishi mumkin, binobarin, tanlanmaga bir necha marta tushishi mumkin.

Ob’ektlar butun bosh to‘plamdan emas, balki uning har bir tipga tegishli qismlaridan olinsa, bunday tanlash *tipik tanlash* deb ataladi. Masalan, agar detallar bir nechta stanokda tayyorlanayotgan bo‘lsa, u holda tanlash hamma stanoklarda tayyorlangan barcha detallar to‘plamidan emas, balki har bir stanok mahsulotidan alohida amalga oshiriladi. Tipik tanlashdan tekshirilayotgan belgi bosh to‘plamning turli tiplarga tegishli qismla-rida sezilarli darajada o‘zgarib turganda foydalaniladi.

Bosh to‘plam tanlanmaga nechta ob’ekt kirishi lozim bo‘lsa, kattaligi taxminan bir xil bo‘lgan shuncha gruppaga mexanik ravishda ajratilib, har bir gruppadan esa ayni bitta nomerli ob’ekt tanlansa, bunday tanlash *mexanik tanlash* deb ataladi. Masalan, agar stanokda tayyorlangan detallarning 20% ini tanlab olish lozim bo‘lsa, u holda har beshinchi detal tanlanadi; agar detallarning 5% ini tanlab olish talab etilgan bo‘lsa, u holda har yigirmanchi detal tanlanadi va h.k. Mexanik tanlash ba’zan tanlanmaning reprezentativligini ta’minlamasligi mumkin.

Seriyali tanlash deb shunday tanlashga aytiladiki, bunda ob’ektlar bosh to‘plamdan bittalab emas, balki «seriya»lab olinadi va ular yalpisiga tekshiriladi. Masalan, agar mahsulotlar katta guruhdagi avtomat dastgohlar yordamida tayyorlanayotgan bo‘lsa, u holda faqat bir nechta dastgohning mahsuloti yalpisiga tekshiriladi. Seriyali tanlashdan tekshirilayotgan belgi turli seriyalarda uncha o‘zgarmagan holda foydalaniladi.

Amaliyotda ko‘pincha kombinatsiyali (aralash) tanlash qo‘llaniladi, bunda yuqorida ko‘rsatilib o‘tilgan usullardan birgalikda foydalaniladi.

Bosh to‘plamdan tanlanma olingan bo‘lsin. Bunda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta, ... , x_k qiymat esa n_k marta kuzatilgan bo‘lsin va h.k.; $\sum n_i = n$ tanlanmaning hajmi bo‘lsin.

Kuzatilgan x_i qiymatlar *variantalar*, variantalarning o‘sib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi *variatsiyaviy qator* deb ataladi. n_i kuzatishlar sonlari *chastotalar*, ularning tanlanma hajmiga $n_i / n = W_i$ nisbatlari *nisbiy chastotalar* deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi. Statistik taqsimotni oraliqlar va ularga mos chastotalarning ketma-ketligi ko‘rinishida ham berish mumkin. Bu holda oraliqqa mos chastota sifatida shu oraliqqa tushgan chastotalar yig‘indisi qabul qilinadi. Bunda chastotalar yig‘indisi tanlanma hajmiga, nisbiy chastotalar yig‘indisi esa birga teng bo‘lishi kerak.

Taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimolliklari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilayotgan variantalar va ularning chastotalari (nisbiy chastotalari) orasidagi moslik tushuniladi.

1-misol. Hajmi $n = 20$ bo‘lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan:

11.1 – j a d v a l

x_i	3	5	10
n_i	7	8	5

2. Nisbiy chastotalar taqsimoti yozilsin.

Echish. CHastotalarni tanlanma hajmiga bo‘lib, nisbiy chas-totalarni topamiz:

$$W_1 = 7/20 = 0{,}35, \quad W_2 = 8/20 = 0{,}4, \quad W_3 = 5/20 = 0{,}25.$$

3. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozamiz:

11.2 – j a d v a l

x_i	3	5	10
W_i	0,35	0,4	0,25

N a z o r a t: 0,35 + 0,4 + 0,25 = 1.

X miqdoriy belgi chastotalarining statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. n_x orqali belgining *x* dan kichik qiymatlari kuzatilgan kuzatishlar sonini, n orqali esa kuzatishlarning umumiy soni (tanlanma hajmi)ni belgilaymiz. $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi n_x/n ga teng. *x* o‘zgarganda nisbiy chastota ham o‘zgaradi, ya’ni n_x/n nisbiy chastota *x* ning funksiyasidir.

Empirik taqsimot funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb *x* ning har bir qiymati uchun $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $\overline{F}_n(x)$ funksiyaga aytiladi, ya’ni

$$\overline{F}_n(x) = n_x / n, \tag{11.1}$$

bu erda n_x — x dan kichik variantalar soni; n — tanlanma haj-mi.

$\overline{F}_n(x)$ funksiya empirik (tajriba) yo‘li bilan topilgani uchun empirik funksiya deb ataladi.

Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan farqli ravishda bosh to‘plamning $F(x)$ taqsimot funksiyasi *nazariy taqsimot funksiyasi* deb ataladi. Empirik va nazariy funksiyalar orasidagi farq shundan iboratki, $F(x)$ nazariy funksiya $X < x$ hodisaning ehtimolligini aniqlaydi, $\overline{F}_n(x)$ empirik funksiya esa aynan shu hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi.

Bernullining katta sonlar qonuni (9.2- teorema)dan kelib chiqadiki, katta n larda $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi, ya’ni $\overline{F}_n(x)$ va aynan shu hodisaning $F(x)$ ehtimolligi bir-biridan quyidagi ma’noda kam farq qiladi:

ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ da $\lim\limits_{n \to \infty} P\left(\left|F(x) - \overline{F}_n(x)\right| < \varepsilon\right) = 1$ bo‘ladi. (11.2)

Ikkinchi tomondan, $\overline{F}_n(x)$ funksiyaning ta’rifidan u $F(x)$ ning barcha xossalariga ega ekanligi kelib chiqadi:

1) empirik funksiyaning qiymatlari $[0,\ 1]$ kesmaga tegishli;

2) $\overline{F}_n(x)$ — kamaymaydigan funksiya;

3) agar x_1 eng kichik varianta bo‘lsa, u holda $x \le x_1$ da $\overline{F}_n(x) = 0$ bo‘ladi; agar x_k eng katta varianta bo‘lsa, u holda $x > x_k$ da $\overline{F}_n(x) = 1$ bo‘ladi.

Bu erdan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to‘plamning nazariy taqsimot funksiyasini taqriban tasvirlash uchun foydalanishning maqsadga muvofiq ekanligi kelib chiqadi. Boshqacha qilib aytganda, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi bosh to‘plamning nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

2-misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo‘yicha empirik taqsimot funksiyasi tuzilsin:

11.3 – j a d v a l

x_i	1	4	8
n_i	9	3	18

Echish. Tanlanmaning hajmini topamiz: $9+3+18=30$. Eng kichik varianta 1 ga teng, demak

$x \le 1$ da $\overline{F}_n(x)=0$ bo‘ladi.

$X<4$ qiymat, ya’ni $x_1=1$ qiymat 9 marta kuzatildi, demak

$1<x\le 4$ da $\overline{F}_n(x)=9/30=0{,}3$ bo‘ladi.

$X<8$ qiymat, ya’ni $x_1=1$ va $x_2=4$ qiymatlar $9+3=12$ marta kuzatildi, demak

$4<x\le 8$ da $\overline{F}_n(x)=12/30=0{,}4$ bo‘ladi.

Eng katta varianta 8 ga teng bo‘lgani uchun

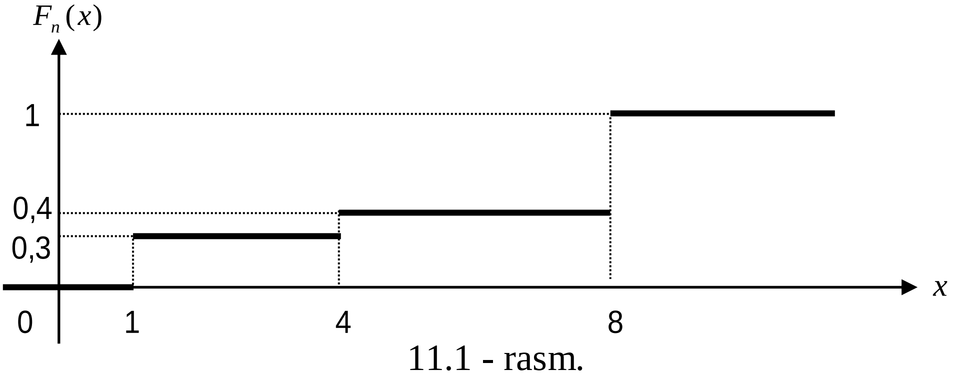
$x>8$ da $\overline{F}_n(x)=1$ bo‘ladi.

Izlanayotgan empirik funksiya

$$\overline{F}_n(x)=\begin{cases} x\le 1 & \partial a \quad 0 \\ 1<x\le 4 & \partial a \quad 0{,}3 \\ 4<x\le 8 & \partial a \quad 0{,}4 \\ x>8 & \partial a \quad 1 \end{cases}$$

bo‘ladi.

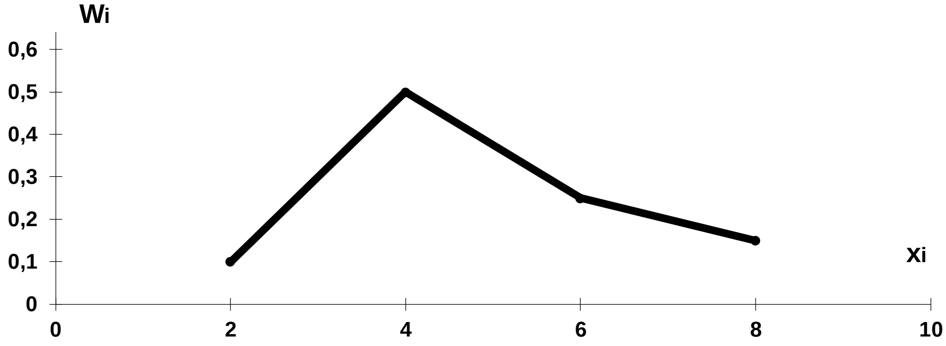
Bu funksiyaning grafigi 11.1-rasmda tasvirlangan.



11.1 - rasm.

Statistik taqsimotni grafik usulda turli yo‘llar bilan, xususan poligon va gistogramma ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

Chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ... , $(x_k;\ n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Poligonni yasash uchun abssissalar o‘qida x_i variantalar, ordinatalar o‘qida esa ularga mos n_i chastotalar qo‘yib chiqiladi. So‘ngra $(x_i;\ n_i)$ nuqtalar to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan tutashtirilib, chastotalar poligoni hosil qilinadi.



11.2 - rasm.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1;\ W_1)$, $(x_2;\ W_2)$, ... , $(x_k;\ W_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Nisbiy chastotalar poligoni chastotalar poligoniga o‘xshash usulda yasaladi. 11.2-rasmda quyidagi taqsimotning nisbiy chastotalar poligoni tasvirlangan:

11.4 – j a d v a l

x_i	2	4	6	8
W_i	0,1	0,5	0,25	0,15

Uzluksiz belgi bo‘lgan holda gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir, buning uchun belgining barcha kuzatilayotgan qiymatlarini o‘z ichiga olgan oraliq uzunligi h ga teng bo‘lgan bir nechta qism oraliqlarga bo‘linadi va har bir qism oraliq uchun *i* nchi oraliqqa tushgan variantalar chastotalarining yig‘indisi n_i topiladi.

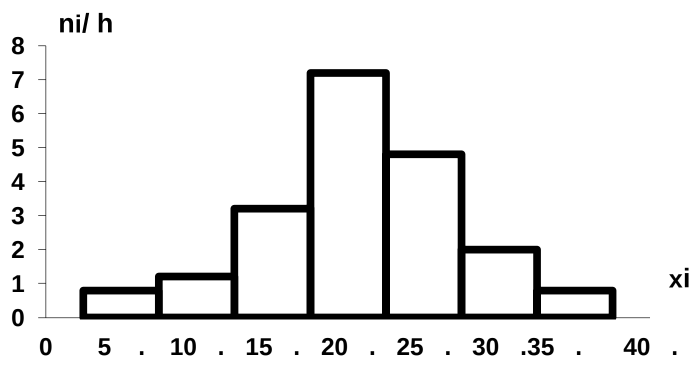
Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi qism oraliqlardan iborat bo‘lgan, balandliklari esa n_i/h nisbatga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onasimon shaklga aytiladi. CHastotalar gistogrammasini yasash uchun abssissalar o‘qida qism oraliqlar ajratiladi, ularning ustida esa abssissalar o‘qiga parallel holda n_i/h masofada kesmalar o‘tkaziladi.

i nchi qism to‘rtburchakning yuzi *i* nchi oraliq variantalari chastotalarining yig‘indisi $hn_i/h = n_i$ ga teng; binobarin, *chastotalar gistogrammasining yuzi barcha chastotalar yig‘indisiga, ya’ni tanlanma hajmiga teng*.

11.5 – j a d v a l

h = 5 uzunlikdagi qism oraliq	Qism oraliq variantalari chastotalarining yig‘indisi n_i	CHastota zichligi n_i/h
5 — 10	4	0,8
10 — 15	6	1,2
15 — 20	16	3,2
20 — 25	36	7,2
25 — 30	24	4,8
30 — 35	10	2,0
35 — 40	4	0,8

11.3-rasmda 11.5-jadvalda berilgan taqsimotning chastotalar gistogrammasi tasvirlangan.



11.3 - rasm.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi qism oraliqlardan iborat bo‘lgan, balandliklari esa W_i/h nisbatga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onasimon shaklga aytiladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasi chastotalar gistogrammasiga o‘xshash usulda yasaladi.

i nchi qism to‘rtburchakning yuzi i nchi oraliq variantalari nisbiy chastotalarining yig‘indisi $hW_i/h = W_i$ ga teng; binobarin, *nisbiy chastotalar* *gistogrammasining yuzi barcha nisbiy chastotalar yig‘indisiga, ya’ni birga teng.*

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Matematik statistikaning oldida qanday vazifa (masala)lar turadi?
2. Matematik statistikani qo‘llashdan maqsad nima va uning predmeti nimadan iborat?
3. Tanlanma to‘plam (tanlanma), bosh to‘plam, to‘plam hajmi nima?
4. Takror tanlanma, notakror tanlanma va reprezentativ tanlanma deb nimaga aytiladi?
5. Oddiy tasodifiy tanlash va tipik tanlash nimadan iborat?
6. Mexanik tanlash va seriyali tanlash nimadan iborat?
7. Variantalar, variatsiyaviy qator, chastotalar va nisbiy chastotalar deb nimaga aytiladi?
8. Tanlanmaning statistik taqsimoti nima va u qanday beriladi, ehtimollar nazariyasidagi taqsimot bilan matematik statistikadagi taqsimot orasidagi farq nimada?
9. Empirik taqsimot funksiyasi va nazariy taqsimot funksiyasi nima?
10. Empirik taqsimot funksiyasi qanday xossalarga ega?
11. Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to‘plamning nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun foydalanishning maqsadga muvofiq ekanligi nimada?