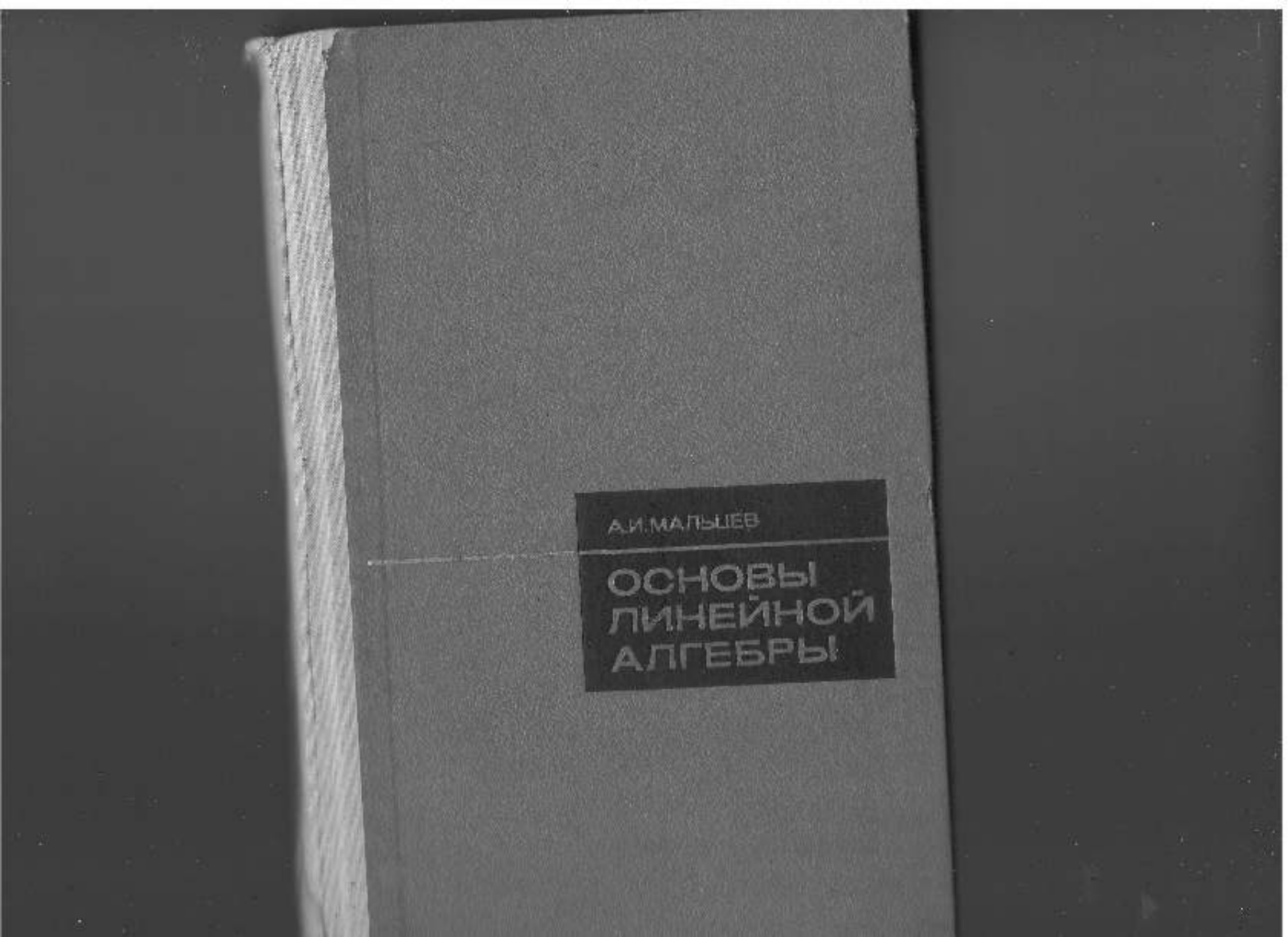

А.И. МАЛЬЦЕВ
ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

А. И. МАЛЬЦЕВ

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов университетов





ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970



513.1
М 21
УДК 512.8/.873.8

Анатолий Иосифович Мальцев
Основы линейной алгебры

М., 1970 г., 400 стр. с илл.

Редакторы Ю. Л. Ершов, Х. Л. Жевлакова и Д. Константинова, Ф. Л. Кляцер

Техн. редактор К. Ф. Брудно
Корректоры Г. С. Чайкина и Л. Б. Сокол

Сдано в набор 20/IX 1968 г. Подписано к печати 15/III 1970 г. Бумага 60×90 1/16. Физ. печ. л. 25. Условн. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 25,58. Тираж 15 000 экз. Т-04222. Цена книги 1 р. 28 к. Заказ № 198

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, К-64, Воинский проезд, 10

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26

9-3-8
6-70

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию 7
Введение 8
Глава I. **Матрицы и определители** 10
§ 1. Действия с матрицами 10
1.1. Матрицы. Основное поле (10). 1.2. Умножение матриц (12). 1.3. Транспонированные матрицы (17). 1.4. Клеточные матрицы (21). 1.5. Кватернионы (24).
Примеры и задачи 28
§ 2. Определители 30
2.1. Определение (30). 2.2. Основные свойства определителей (36). 2.3. Определитель произведения. Обратные матрицы (45). 2.4. Крамеровские системы линейных уравнений (50).
Дополнения и примеры 51
§ 3. Характеристический и минимальный многочлены 55
3.1. Подобие матриц (55). 3.2. Характеристический многочлен (57). 3.3. Минимальный многочлен (60).
Примеры и задачи 64
Глава II. **Линейные пространства** 65
§ 1. Размерность 65
4.1. Модули и векторные пространства (65). 4.2. Линейная зависимость (70). 4.3. Изоморфизм (75).
Примеры и задачи 81
§ 5. Координаты 84
5.1. Координаты векторы (84). 5.2. Ранги матриц (85). 5.3. Общие системы линейных уравнений (94).
Дополнения и примеры 99
§ 6. Линейные подпространства 98
6.1. Пересечение и сумма подпространств (98). 6.2. Прямые суммы (103). 6.3. Системы однородных линейных уравнений (105).
Примеры и задачи 109
Глава III. **Линейные преобразования** 110
§ 7. Преобразования произвольных множеств 110
7.1. Произведение преобразований (110). 7.2. Единичное и обратное преобразования (112). 7.3. Взаимно однозначные преобразования (113). 7.4. Подстановки (114).
Примеры и задачи 117

§ 8. Линейные преобразования и их матрицы 117
8.1. Простейшие свойства (117). 8.2. Матрица линейного преобразования (120). 8.3. Преобразование координат (121). Примеры и задачи 127

§ 9. Действия с линейными преобразованиями 123
9.1. Умножение линейных преобразований (123). 9.2. Умножение матриц и матричная запись (125). 9.3. Многочлены от линейных преобразований (127). Примеры и задачи 128

§ 10. Ранг и дефект линейного преобразования 129
10.1. Ядро и область значений (129). 10.2. Собственные и инвариантные подпространства (131). 10.3. Ранг матрицы преобразования (133). Примеры и задачи 135

§ 11. Аффинные подпространства 135
11.1. Индуцированное преобразование (135). 11.2. Прямая сумма инвариантных подпространств (137). 11.3. Характеристический многочлен преобразования (139). 11.4. Собственные векторы и собственные значения (140). Примеры и задачи 143

§ 12. Преобразования с матрицей нормальной формы 141
12.1. Диагональная форма (144). 12.2. Клетки Жордана (145). 12.3. Корневые подпространства (146). Примеры и задачи 149

Глава IV. Многочленные матрицы 150
§ 13. Инвариантные множители 150
13.1. Эквивалентность (150). 13.2. Диагональная форма (152). 13.3. Наибольшие общие делители миноров (155). 13.4. Условие эквивалентности (159). Примеры и задачи 162

§ 14. Элементарные делители 163
14.1. Связь с инвариантными многочленами (163). 14.2. Элементарные делители расширенной матрицы (165). Примеры и задачи 168

§ 15. Нормальная форма матрицы линейного преобразования . . 167
15.1. Целые матрицы (167). 15.2. Сходимость эквивалентность (168). 15.3. Критерий подобия матриц (170). 15.4. Нормальная форма Жордана (171). 15.5. Естественная нормальная форма (174). 15.6. Другие нормальные формы (176). Примеры и задачи 178

§ 16. Функции от матриц 180
16.1. Многочлен от матрицы (180). 16.2. Сходящиеся функции (182). 16.3. Представление значений функций многочленами (185). 16.4. Элементарные аналитические функции (187). 16.5. Степенные ряды (190). 16.6. Матрицы, перестановочные с данной матрицей (191). 16.7. Матрицы, перестановочные с перестановочными матрицами (193). Примеры и задачи 197

Глава V. Унитарные и евклидовы пространства 199
§ 17. Унитарные пространства 199
17.1. Аксиоматика и примеры (199). 17.2. Длина вектора (203). 17.3. Ортонормированные системы (205). 17.4. Изоморфизмы (208). 17.5. Ортогональные суммы. Проекции (211). Примеры и задачи 217

§ 18. Сопряженные преобразования 214
18.1. Линейные функции (214). 18.2. Сопряженные преобразования (215). 18.3. Нормальные преобразования (219). Примеры и задачи 224

§ 19. Унитарное и симметрическое преобразования 225
19.1. Унитарные преобразования (225). 19.2. Унитарная эквивалентность (227). 19.3. Нормальная форма матрицы унитарного преобразования (228). 19.4. Симметрические преобразования (231). 19.5. Кососимметрическое преобразование (233). 19.6. Неотрицательные симметрические преобразования (235). Примеры и задачи 239

§ 20. Разложение общих преобразований 240
20.1. Разложение на симметрическую и кососимметрическую части (240). 20.2. Полярное разложение (241). 20.3. Преобразования Кели (243). 20.4. Спектральное разложение (245). Примеры и задачи 253

Глава VI. Квадратичные и билинейные формы 254
§ 21. Билинейные формы 254
21.1. Преобразование форм (254). 21.2. Эквивалентность билинейных форм (256). 21.3. Конгруэнтность симметрических билинейных форм (259). Примеры и задачи 261

§ 22. Квадратичные формы 262
22.1. Конгруэнтность (262). 22.2. Алгоритм Лагранжа (264). 22.3. Закон инерции квадратичных форм (267). 22.4. Знакоопределенные формы (269). Примеры и задачи 270

§ 23. Пары форм 271
23.1. Эквивалентность пар форм (271). 23.2. Конгруэнтность пар форм (272). 23.3. Конгруэнтность несимметрических билинейных форм (276). Примеры и задачи 278

§ 24. Билинейные функции 278
24.1. Основные определения (278). 24.2. Пространства с билинейной метрикой (281). 24.3. Билинейные функции в билинейно-метрических пространствах (286). Примеры и задачи 290

Глава VII. Аффинные преобразования билинейно-метрических пространств 293
§ 25. Основные типы аффинных преобразований 293
25.1. Автоморфизмы (293). 25.2. Симметрические и кососимметрические преобразования (298). Примеры и задачи 300

§ 28. Комплексные евклидовы пространства 300
28.1. Симметрические преобразования (301). 28.2. Кососимметрические преобразования (303). 28.3. Комплексные ортогональные преобразования (306).
Примеры и задачи 309

§ 29. Симплектические пространства 309
29.1. Симметрические преобразования (309). 29.2. Кососимметрические преобразования (312). 29.3. Симплектические преобразования. (313).
Примеры и задачи 315

§ 30. Псевдоунитарные пространства 315
30.1. Симметрические преобразования (316). 30.2. Псевдоунитарные преобразования (320).
Примеры и задачи 323

Глава VIII. Аффинные пространства 326

§ 31. Общие аффинные пространства 326
31.1. Аксиоматика (326). 31.2. Линейные многообразия (334). 31.3. Параллельные плоскости (341). 31.4. Линейные функционалы (346).
Доказательства и примеры 351

§ 32. Аффинные координаты 358
32.1. Координаты точки (358). 32.2. Уравнения плоскостей (360). 32.3. Уравнения гиперплоскостей и прямых (366). 32.4. Преобразования аффинных координат (369).
Примеры и задачи 373

§ 33. Выпуклые тела 374
33.1. Лучи (374). 33.2. Полупространства (377). 33.3. Выпуклые множества (381).
Доказательства и примеры 385

§ 34. Евклидовы точечные пространства 386
34.1. Длина отрезка (386). 34.2. Углы между прямыми (388). 34.3. Ортогональные проекции (391). 34.4. Угол между плоскостью и прямой (397).

Примеры и задачи 398

Предметный указатель 399

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Анатолий Иванович Мальцев собирался существенно переработать «Основы линейной алгебры» для третьего издания, выбросив часть старого текста и сделав значительные добавления из геометрии. «В результате, — писал он в издательство, — возникает более чем наполовину новая книга. Надеюсь, что она будет полезна более подготовленным современным студентам университетов и пединститутов, в особенности тех университетов, где курсы линейной алгебры и аналитической геометрии читаются совместно. Я даже подумывал не изменять ли название на «Основы линейной алгебры и аналитической геометрии». Смерть помешала Анатолию Ивановичу осуществить его планы, он успел написать только первые три главы (третью не полностью). В настоящем издании главы I, II, включающие теперь теорию определителей и систем линейных уравнений, печатаются по рукописи Анатолия Ивановича, а главы III — VII почти без изменений воспроизводят соответствующий текст второго издания. Заключительную главу второго издания — о тензорах — Анатолий Иванович собирался подвергнуть коренной переработке, до которой не успел даже приступить к ней; в настоящем издании эта глава отпала. Вместо нее здесь приводится новая глава VIII — об аффинных пространствах, — которая печатается по неоконченной рукописи главы III. Ссылки на некоторые определения и результаты общей теории алгебраических систем даются по книге А. И. Мальцева «Алгебраические системы» (цитируется «АС»), вышедшей в 1969 г. в издательстве «Наука». Мы старались по возможности сохранить оригинальное изложение Анатолия Ивановича и ограничились самыми необходимыми изменениями и исправлениями отдельных неточностей.

Ю. Л. Ершов, Ю. И. Мерзляков, В. Н. Ремесленников

Новосибирск,
Академгородок,
1 июня 1986 г.

ВВЕДЕНИЕ

Линейная алгебра — ветвь математики столь же старая, как и сама математика. Первоначальной задачей линейной алгебры можно считать задачу решения линейного уравнения $ax - b = 0$. Хотя эта задача и не представляет каких-либо трудностей, прием, при помощи которого она решается, а также свойства соответствующей линейной функции $y = ax + b$ являются исходными образцами для идей и методов всей линейной алгебры. Например, учение о решении систем уравнений со многими неизвестными имеет в своей основе идею замены системы цепочкой указанных уравнений простейшего вида.

Важность систем линейных уравнений особенно возросла после создания аналитической геометрии, позволяющей свести к исследованию систем линейных уравнений все основные вопросы о расположении плоскостей и прямых в пространстве. Поиски общих формул, решения системы n уравнений с n неизвестными уже в XVIII в. привели Лейбница и Крамера к понятию определителя. В XIX в., помимо алгебры и аналитической геометрии, определители проникают и в анализ в работах Остроградского, Якоби (функциональные определители), Бронского и др. Параллельно с этим в аналитической геометрии, теории чисел и особенно в теоретической механике все большую важность приобретала задача преобразования квадратичных форм линейными подстановками переменных. Эта же задача явилась одной из центральных и в разработке геометрических идей Лобачевского и Римана, приведшей к созданию учения о линейных многомерных пространствах (Грассман). В середине прошлого века в связи с исследованиями гиперкомплексных систем (Гамильтон) в работах Кэли и Сильвестра возникает матричное исчисление, занявшее в дальнейшем развитии линейной алгебры одно из главных мест. К концу XIX в. постепенно создаются важнейшие разделы матричного исчисления: о нормальной форме матрицы линейного преобразования (Жордан), элементарных делителях (Вейерштрасс), парах квадратичных форм (Вейерштрасс, Кронекер), эрмитовых формах (Эрмит). Развитие дифференциальной геометрии многомерных пространств и теории преобразований

алгебраических форм высших степеней приводит в конце XIX в. к созданию тензорного исчисления.

В текущем столетии методы линейной алгебры нашли общие применения и были развиты далее в теории колец и модулей, в теории представлений групп, а также в теории топологических векторных пространств и других разделах функционального анализа. Уже в последние два десятилетия теория линейных неравенств и неразрывно связанная с ней теория аффинных многомерных пространств заняли одно из центральных мест в такой популярной области прикладной математики, как теория операций. Благодаря этому элементы теории многомерных аффинных пространств стали теперь обязательной частью математического образования инженеров и экономистов.

В линейной алгебре изучаются объекты трех родов: матрицы, пространства и алгебраические формы. Теория этих объектов тесно связаны друг с другом. Богатство задач линейной алгебры допускает естественную формулировку в каждой из указанных трех теорий. Матричная формулировка обычно наиболее удобна для вычислений. С другой стороны, в геометрии и механике большинство задач линейной алгебры возникает в виде задач об исследовании алгебраических форм. Тем не менее наиболее отчетливое понимание внутренних связей между различными задачами линейной алгебры достигается лишь при рассмотрении соответствующих линейных пространств, которые и являются поэтому главным объектом изучения линейной алгебры.

С точки зрения теории форм содержание линейной алгебры естественно распадается на теорию линейных, теорию квадратичных и теорию форм высших степеней. К собственно линейной алгебре обычно относят лишь теорию линейных и квадратичных форм, а также начала теории полилинейных форм и тензорной алгебры.

Глава I

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Действия с матрицами

1.1. Матрицы. Основное поле. Главными объектами изучения далее будут матрицы, линейные пространства и многочлены от нескольких переменных, называемые также алгебраическими формами. В определении каждого из этих объектов участвует некоторая совокупность K чисел или элементов какой-нибудь природы, которая должна быть предварительно выбрана. Фактический выбор K зависит от решаемых задач и научной дисциплины. Например, с алгебраической точки зрения результаты получают наиболее законченную форму, если в качестве K выбрать совокупность всех комплексных чисел. Напротив, в геометрии и механике обычно необходимо рассматривать вещественные числа, а в теории чисел в качестве K естественно брать совокупность рациональных чисел и даже совокупность лишь целых рациональных чисел. Поэтому, чтобы сделать результаты применимыми к возможно более широкому кругу задач, целесообразно заранее не фиксировать, какая именно индивидуальная совокупность понимается под K. В некоторых разделах достаточно будет предполагать, что K — какое-то ассоциативное кольцо. В ряде глав мы будем предполагать, что K — произвольное поле или произвольное упорядоченное поле, а многие важные теоремы будут доказаны лишь в предположении, что K — совокупность всех вещественных или совокупность всех комплексных чисел. Для геометрических и физических приложений наиболее важны как раз случаи, когда K — поле вещественных или поле комплексных чисел.

Элементы совокупности K далее будут называться *числами*, даже и тогда, когда K будет произвольным кольцом. Мы будем их обозначать малыми греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$.

Произвольная система элементов совокупности K, расположенная в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называется (m, n)-*матрицей* или просто *матрицей над* K. Чтобы записать матрицу, записывают в надлежащем порядке обозначения ее элементов и получившуюся таблицу заключают в скобки или ограничивают двойными чертами. Таким образом, общий вид (m, n)-матрицы будет

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

где a_{ij} — обозначения элементов из K. Часто вместо такой подробной записи употребляют сокращенную: $\|a_{ij}\|$ или $\|a_{ij}\|_{m,n}$.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число ее строк, равное числу столбцов, называется *порядком* квадратной матрицы. В частности, квадратная матрица порядка 1 — это просто элемент из K.

Матрицу, имеющую только одну строку, называют просто *строкой*, а число ее элементов — *длиной* строки. В дальнейшем матрицы будут обозначаться большими буквами латинского алфавита.

Две матрицы называются *равными*, если числа строк и столбцов у них соответственно равны и если равны числа, стоящие на соответственных местах этих матриц. Таким образом, задать равенство между (m, n)-матрицами равносильно системе mn равенств между их элементами.

Основными матричными операциями являются умножение числа на матрицу или матрицы на число, сложение и перемножение двух матриц. По определению, чтобы умножить число α на матрицу A или матрицу A на число α, нужно умножить на α все элементы матрицы A. Например,

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} \lambda & \varkappa \\ \xi & \tau_{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\lambda & \alpha\varkappa \\ \alpha\xi & \alpha\tau_{i} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \varkappa \\ \xi & \tau_{i} \end{bmatrix} \cdot \alpha = \begin{bmatrix} \lambda\alpha & \varkappa\alpha \\ \xi\alpha & \tau_{i}\alpha \end{bmatrix}.$$

Если рассматривается матрица над коммутативным кольцом K, то для любой матрицы A и любого $\alpha \in K$ справедливо равенство $\alpha A = A\alpha$. В случае некоммутативного кольца K может оказаться, что $\alpha A \neq A\alpha$. Беря в качестве K кольцо всех целых чисел, получим, например,

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \cdot 5 = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 35 & -5 \end{bmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* и обозначается 0. Если желают указать явно число строк и столбцов нулевой матрицы, то пишут 0_{mn}.

Ясно, что для каждой матрицы A над K и каждых $\alpha, \beta \in K$ имеют место соотношения:

1. $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$.
2. $0 \cdot A = A \cdot 0 = O$; $\alpha \cdot O = O \cdot \alpha = O$.
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$; $(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$.

Суммой двух матриц A и B, имеющих соответственно равные числа строк и столбцов, называется матрица, имеющая те же числа строк и столбцов и элементы, равные суммам соответствующих элементов матриц A, B. Например,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из этого определения непосредственно вытекают соотношения:

4. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
5. $A + B = B + A$.
6. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$; $A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta$.
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; $(A + B)\alpha = A\alpha + B\alpha$.
8. $A + O = O + A = A$,

доказательства которых предоставляются читателю. В частности, применяя свойства 1 и 6, получим

$$A + A = 2A, \quad A + A + A = 3A, \ldots$$

Вводя обозначение $(-1)A = -A$, будем иметь также

$$A + (-A) = O, \quad (-\alpha)A = -\alpha A, \quad -(A - B) = -A + B,$$
$$-(-A) = A.$$

Для краткости вместо $A + (-B)$ обыкновенно пишут $A - B$.

1.2. Умножение матриц. В отличие от операций сложения и умножения на число операция умножения матрицы на матрицу определяется более сложным образом. Именно пусть заданы две матрицы A, B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй. Если

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{np} \end{bmatrix},$$

то матрица

$$C = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \ldots & \gamma_{mp} \end{bmatrix},$$

где

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nj} \quad (i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, p),$$

называется *произведением* A *на* B и обозначается AB. Например,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon \\ \lambda & \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma + \beta\lambda & \alpha\delta + \beta\mu & \alpha\varepsilon + \beta\nu \\ \alpha_1\gamma + \beta_1\lambda & \alpha_1\delta + \beta_1\mu & \alpha_1\varepsilon + \beta_1\nu \\ \alpha_2\gamma + \beta_2\lambda & \alpha_2\delta + \beta_2\mu & \alpha_2\varepsilon + \beta_2\nu \end{bmatrix}.$$

Правило умножения матриц иногда формулируют следующим образом: *чтобы получить элемент, стоящий в* i*-й строке и* j*-м столбце произведения двух матриц, нужно элементы* i*-й строки первой матрицы умножить на соответственные элементы* j*-го столбца второй и полученные произведения сложить.*

Произведение двух матриц, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей даже и в том случае, когда кольцо K коммутативно. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Если рассматривать матрицы не квадратные, то может случиться даже, что произведение двух матриц в одном порядке будет иметь смысл, а в обратном — нет.

Докажем теперь основные свойства умножения матриц.

9. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$; $A(\alpha B) = (A\alpha)B$; $(AB)\alpha = A(B\alpha)$.

Пусть $A = \|\alpha_{ij}\|_{mn}$, $B = \|\beta_{jk}\|_{np}$. Пользуясь правилом умножения матриц, мы получим для элемента, находящегося в i-й строке и k-м столбце матрицы $\alpha(AB)$ $(i = 1, \ldots, m; \ k = 1, \ldots, p)$, следующее выражение:

$$\alpha(\alpha_{i1}\beta_{1k} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nk}).$$

Аналогично для элемента, находящегося в той же i-й строке и k-м столбце матрицы $(\alpha A)B$, получим выражение

$$(\alpha\alpha_{i1})\beta_{1k} + \ldots + (\alpha\alpha_{in})\beta_{nk}.$$

Так как оба выражения равны, то первое из равенств 9 доказано. Такими же вычислениями доказываются и остальные два равенства из 9, а также и свойства:

10. $(A + B)C = AC + BC$.
11. $C(A + B) = CA + CB$.

Из свойств 10, 11 непосредственно вытекает общее правило: *чтобы умножить сумму матриц на сумму, нужно каждую матрицу первой суммы умножить на каждую матрицу второй и полученные произведения сложить.*

Мы видели, что закон коммутативности для произведения матриц не выполняется: AB может отличаться от BA. Однако второй арифметический закон — ассоциативность умножения — для матричного умножения выполняется *):

12. $A(BC)=(AB)C$.

Для доказательства положим

$$AB=M, \quad BC=N$$

и обозначим элементы матриц M, N через μ_{ik}, ν_{jl}. По правилу умножения матриц имеем

$$\mu_{ik}=\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\ldots+\alpha_{in}\beta_{nk},$$
$$\nu_{jl}=\beta_{j1}\gamma_{1l}+\beta_{j2}\gamma_{2l}+\ldots+\beta_{jn}\gamma_{nl},$$

где α_{ij}, β_{jk}, γ_{kl} — элементы матриц A, B, C. Выполняя умножение M на C, мы в i-й строке и l-м столбце матрицы $(AB)C$ получим сумму

$$\mu_{i1}\gamma_{1l}+\mu_{i2}\gamma_{2l}+\ldots+\mu_{in}\gamma_{nl}=\sum_{k}\sum_{j}\alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}.$$

Аналогично, выполняя умножение A на N, мы в i-й строке и в l-м столбце произведения $A(BC)$ получим сумму

$$\alpha_{i1}\nu_{1l}+\alpha_{i2}\nu_{2l}+\ldots+\alpha_{in}\nu_{nl}=\sum_{j}\sum_{k}\alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}.$$

Так как обе эти суммы отличаются лишь порядком слагаемых, то формула 12 доказана.

Из формулы 12 следует, что произведение нескольких матриц A, B, C, ..., D, записанных в определенном порядке, не зависит от способа расстановки скобок. Поэтому можно говорить не только о произведении двух, но и о произведении большего числа матриц. Например, можно говорить просто о произведении четырех матриц $ABCD$, так как все пять возможных способов вычисления этого произведения

$$((AB)C)D, \quad (A(BC))D, \quad A((BC)D), \quad A(B(CD)), \quad (AB)(CD)$$

дают один и тот же результат. Действительно, каждое следующее произведение получается из предшествующего непосредственным применением закона ассоциативности 12°.

Выше уже отмечалось, что не всякие две матрицы можно сложить или перемножить. Так как для осуществимости таких действий необходимы известные соотношения между числами

*) Поскольку складывать и вычитать можно не любые матрицы, а только те, числа строк и столбцов которых попарно известным условием, то равенства 10, 11, 12 следует понимать так, что если действия, указанные по одну сторону от знака равенства, возможны, то действия, указанные по другую сторону, тоже возможны и результаты в обоих случаях одинаковы.

строк и столбцов. Это неудобство исчезает, если рассматривать только квадратные матрицы некоторого фиксированного порядка n. Любые две такие матрицы можно сложить или перемножить, также возможно умножение на любые числа из K, и в результате снова получается квадратная матрица того же порядка n. Свойства 1 — 12 показывают, что *совокупность всех квадратных матриц данного порядка n над произвольным ассоциативным кольцом K является снова ассоциативным кольцом относительно матричных операций сложения и умножения.*

Всюду далее мы будем предполагать, что основная числовая совокупность K есть ассоциативное кольцо с единицей 1. Квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а остальные — нули, называется *единичной* и обозначается E или E_n, где n — ее порядок. Таким образом,

$$E=\begin{vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}.$$

Непосредственным вычислением для любой квадратной матрицы A получим равенство

$$AE=EA=A,$$

выражающее основное свойство матрицы E. Матрицы, имеющие вид

$$\begin{vmatrix}\alpha & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \beta & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \gamma\end{vmatrix},$$

называются *диагональными*.

Из правил действий непосредственно вытекает, что сумма и произведение диагональных матриц будут снова диагональными матрицами:

$$\begin{vmatrix}\alpha & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \beta & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \gamma\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \beta_1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \gamma_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha+\alpha_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \beta+\beta_1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \gamma+\gamma_1\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}\alpha & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \beta & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \gamma\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\alpha_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \beta_1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \gamma_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha\alpha_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \beta\beta_1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \gamma\gamma_1\end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь произвольную квадратную матрицу X порядка n с элементами из кольца K. По определению полагаем

$$X^1 = E, \quad X^2 = X, \quad X^3 = XX, \quad X^4 = XXX, \ldots$$

Так как в произведениях нескольких матриц скобки можно расставлять произвольно, то для любых целых неотрицательных p, q и произвольной квадратной матрицы X над ассоциативным кольцом K имеем

$$X^p X^q = X^{p+q}, \tag{1}$$

$$(X^p)^q = X^{pq}. \tag{2}$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если

$$AB = BA. \tag{3}$$

Из соотношения (1) получаем

$$X^p X^q = X^{p+q} = X^q X^p,$$

т. е. *все натуральные степени одной и той же матрицы перестановочны между собой.*

Справедливо и более общее утверждение: *если матрицы A и B перестановочны, то любые их натуральные степени также перестановочны и для любого натурального p имеет место*

$$(AB)^p = A^p B^p. \tag{4}$$

В самом деле, для любых натуральных p, q

$$A^p B^q = AA \ldots AB \ldots B.$$

По условию в этом произведении можно переставить любые соседние множители. Но такими перестановками можно их расположить в любом порядке, в частности, можно переставить все сомножители, равные B, на первые места. Аналогично доказывается и формула (4).

Рассмотрим теперь какой-нибудь многочлен

$$\varphi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_n\lambda^n$$

от буквы λ, коэффициенты которого принадлежат кольцу K. Если A — какая-нибудь квадратная матрица над K, то выражение

$$\alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n$$

называется *значением* многочлена $\varphi(\lambda)$ при $\lambda = A$ или, короче, соответствующим многочленом от матрицы A. Предполагая кольцо K коммутативным, легко приходим к заключению, что *значение суммы многочленов от λ при $\lambda = A$ равно сумме значений слагаемых, а значение произведения многочленов равно произведению значений сомножителей.*

Пусть

$$\varphi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_n\lambda^n,$$
$$\psi(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \ldots + \beta_n\lambda^n.$$

Тогда

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\lambda^n,$$
$$g(\lambda) = \varphi(\lambda)\psi(\lambda) = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\lambda + \ldots + \alpha_n\beta_n\lambda^{2n}.$$

Наши утверждения состоят в том, что

$$f(A) = \varphi(A) + \psi(A),$$
$$g(A) = \varphi(A)\psi(A).$$

Для доказательства достаточно выписать $\varphi(A)$, $\psi(A)$, $f(A)$, $g(A)$ и по правилам 1—12 матричного исчисления произвести сложение и умножение $\varphi(A)$ и $\psi(A)$.

В качестве примера рассмотрим равенство

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1).$$

Беря значения левой и правой частей при $\lambda = A$, получим матричное равенство

$$A^3 - E = (A - E)(A^2 + A + E).$$

Аналогичным путем из равенства

$$\lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

получим соотношение

$$A^3 + E = (A + E)(A^2 - A + E).$$

Вообще из каждого соотношения между многочленами от λ таким способом получается некоторое матричное тождество. В частности, по правилам действий с многочленами имеем

$$\varphi(\lambda)\psi(\lambda) = \psi(\lambda)\varphi(\lambda).$$

Подставляя сюда вместо λ какую-нибудь квадратную матрицу A, получим

$$\varphi(A)\psi(A) = \psi(A)\varphi(A).$$

Следовательно, многочлены от одной и той же матрицы перестановочны друг с другом.

1.3. Транспонирование матриц. Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

TERMİZ DAVLAT UNİVERSİTETİ
DENOV FİLİALİ ARM
№ 2731

Матрица

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

получающаяся из A заменой строк столбцами, называется *транспонированной* по отношению к A. В дальнейшем штрихом всегда будет обозначаться переход к транспонированной матрице.

Для произвольных матриц A, B имеют место следующие правила транспонирования:

$$(\alpha A + \beta B)' = \alpha A' + \beta B',$$

$$(AB)' = B'A',$$

где α, β — какие-либо числа. Докажем, например, второе из этих равенств. Элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы $(AB)'$, равен элементу, стоящему в j-й строке и i-м столбце матрицы AB, т. е. равен

$$a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \dots + a_{jn}b_{ni},$$

где a_{jk}, b_{ki} — элементы матриц A, B. Но это выражение есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы B' на соответственные элементы j-го столбца матрицы A', так что $(AB)' = B'A'$.

Если A — произвольная квадратная матрица и

$$A' = A,$$

то A называется *симметрической*; если же

$$A' = -A,$$

то — *кососимметрической*. Элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, у симметрической матрицы равны, а у кососимметрической противоположны. В частности, все диагональные элементы кососимметрической матрицы равны нулю.

Из правила транспонирования суммы непосредственно вытекает, что сумма симметрических матриц есть матрица симметрическая, а сумма кососимметрических — матрица кососимметрическая. Произведение симметрических матриц может и не быть симметрической матрицей, например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Однако, если две симметрические матрицы A, B переставочны, то их произведение будет снова матрицей симметрической.

Действительно, в этом случае

$$(AB)' = B'A' = BA = AB.$$

Отсюда следует, что степени симметрической матрицы являются симметрическими матрицами и многочлены от симметрической матрицы являются также матрицами симметрическими.

Квадратная матрица A над кольцом K называется *обратимой* (над K), если существует квадратная матрица X над K, удовлетворяющая соотношениям

$$AX = XA = E. \tag{1}$$

Каждая матрица X, удовлетворяющая условиям (1), называется матрицей, *обратной* к A, или *обращением* матрицы A. У каждой обратимой матрицы A существует лишь одно обращение. Действительно, если наряду с матрицей X условиям (1) удовлетворяет матрица Y, то, умножая обе части равенства

$$AY = E$$

слева на X, получим

$$XAY = XE,$$

или $Y = X$.

Обращение матрицы A, если оно существует, обозначается через A^{-1}. Таким образом, по определению

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \tag{2}$$

В условие (1) матрицы A и X входят симметрично, и потому, если X есть обращение A, то A есть обращение X, иными словами,

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{3}$$

Если квадратные матрицы A, B, C одного и того же порядка обратимы, то их произведение ABC также обратимо и

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1},$$

т. е. обращение произведения матриц равно произведению обращений сомножителей, расположенных в противоположном порядке.

Для доказательства надо проверить лишь равенства

$$ABC \cdot C^{-1}B^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1} \cdot ABC = E,$$

являющиеся очевидными следствиями соотношений (2) и аналогичных соотношений для матриц B, C.

Для каждой обратимой матрицы A наряду с натуральными степенями $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, ... рассматривают и ее целые отрицательные степени, полагая по определению

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1},\ A^{-3} = A^{-1}A^{-1}A^{-1}, \dots \tag{4}$$

Дробные степени матриц рассматриваются редко, так как во многих случаях обычные определения не дают однозначных значений для таких степеней (см. п. 16.2 гл. IV).

Из соотношений (2), (4) следует, что для любой обратимой матрицы A и любых целых (не обязательно неотрицательных) чисел p, q имеют место обычные правила действий со степенями

$$A^pA^q = A^{p+q},$$
$$(A^p)^q = A^{pq},$$

и если матрицы A, B обратимы и $AB = BA$, то

$$(AB)^p = A^pB^p.$$

Посмотрим теперь, как связаны операции транспонирования и обращения. Применяя правило транспонирования произведения матриц к соотношениям (1), получаем

$$X'A' = A'X' = E,$$

т.е. в результате транспонирования обратной матрицы A получается снова обратимая матрица и

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'. \tag{5}$$

Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если

$$AA' = A'A = E, \tag{6}$$

т.е. если транспонированная матрица обратна к исходной. Отсюда, в частности, следует, что *каждая ортогональная матрица обратима*.

Так как $(A')' = A$, то из (6) вытекает, что *обращение ортогональной матрицы дает ортогональную матрицу*.

Далее, если матрицы A, B ортогональны, то

$$A' = A^{-1},\ B' = B^{-1}$$

и, значит,

$$(AB)' = B'A' = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Иными словами, *произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица*.

Рассмотрим еще одну матричную операцию. Пусть A — произвольная матрица, элементы которой являются комплексными числами. Заменим в A каждый элемент комплексно сопряженным числом. Полученная таким способом новая матрица называется *комплексно сопряженной* с A и обозначается $\bar{A}$. Операция перехода к комплексно сопряженной матрице обладает следующими

свойствами:

$$\overline{\alpha A + \beta B} = \bar{\alpha}\bar{A} + \bar{\beta}\bar{B},$$
$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B},$$
$$\overline{A'} = (\bar{A})',$$
$$\overline{A^{-1}} = (\bar{A})^{-1};$$

доказательство их весьма просто и предоставляется читателю.

Матрицы A и A' называются *эрмитово-сопряженными*. Если $A = \bar{A}'$, то A называется *эрмитовой* или *эрмитово-симметрической*.

Матрица A, удовлетворяющая соотношению

$$A'A = A\bar{A}' = E,$$

называется *унитарной*.

Таким же способом, как и для ортогональных матриц, доказывается, что *матрица, обратная к унитарной матрице, является унитарной и что произведение унитарных матриц является снова унитарной матрицей*.

Если все элементы матрицы A — числа вещественные, то $\bar{A} = A$, и, следовательно, для вещественных матриц понятие симметричности и эрмитовой симметричности, унитарности и ортогональности соответственно совпадают.

1.4. Клеточные матрицы. Разобьем какую-нибудь матрицу A системой вертикальных и горизонтальных прямых на части. Эти части можно рассматривать как матрицы низших порядков, из которых сама матрица построена как из элементов. Они называются *клетками*, *ячейками* или *блоками* матрицы A, а сама матрица A, разбитая определенным способом на клетки, называется соответственно клеточной, ячеистой или блочной. Одна и та же матрица может быть разбита на клетки различными способами, например:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right].$$

Удобство разбиений на клетки состоит в том, что основные операции над клеточными матрицами формально совершаются по тем же правилам, как и над обыкновенными. В самом деле, пусть некоторая матрица A каким-то способом разбита на клетки:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix},$$

Умножая все клетки на число α, мы умножим на α все элементы матрицы A. Следовательно,

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \dots & \alpha A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \dots & \alpha A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Пусть B — какая-либо матрица, разбитая на такое же число клеток, что и A:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix}.$$

Предположим, кроме того, что соответственные клетки матриц A и B имеют соответственно равные числа строк и столбцов.

Чтобы сложить матрицы A и B, надо, согласно определению, сложить их соответственные элементы. Однако то же самое произойдет и в том случае, если мы сложим соответственные клетки этих матриц. Поэтому

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}.$$

Несколько менее очевидно обстоит дело с умножением. Рассмотрим матрицы

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & \dots & U_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{m1} & \dots & U_{mn} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & \dots & V_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} & \dots & V_{np} \end{bmatrix},$$

разбитые на клетки U_{ij}, V_{jk} таким образом, что число столбцов клетки U_{ij} равняется числу строк клетки V_{jk} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, p$). При этом условии выражения

$$W_{ik} = U_{i1}V_{1k} + U_{i2}V_{2k} + \dots + U_{in}V_{nk}$$

имеют смысл. Легко показать, что

$$UV = \begin{bmatrix} W_{11} & \dots & W_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{m1} & \dots & W_{mp} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

т. е. что матрицы, разбитые надлежащим образом на клетки, можно перемножать обычным путем: *клетки произведения равны суммам произведений клеток строк U на клетки соответственных столбцов V.*

Докажем сначала это правило в простейшем частном случае:

$$[A\ B]\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = AC + BD. \tag{2}$$

Пусть α_{ij}, β_{ik}, γ_{kj}, δ_{ik} — элементы соответственных матриц A, B, C, D ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, s$; $l = 1, \dots, t$). Выполняя действия, указанные в левой части равенства (2), мы получим, что элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце, будет равен

$$\alpha_{i1}\gamma_{1j} + \dots + \alpha_{is}\gamma_{sj} + \beta_{i1}\delta_{1j} + \dots + \beta_{it}\delta_{tj}.$$

Однако, в точности соответственный элемент правой части, как получится из наших правил, и, таким образом, равенство (2) доказано.

Получив формулой (2), теперь легко показать более общую формулу:

$$[A_1\ A_2\ \dots\ A_n]\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2 + \dots + A_nB_n \tag{3}$$

(все A_i, B_i — отдельные клетки). При $n = 2$ эта формула совпадает с (2). Далее применим индукцию. Пусть для значений n, меньших данного, формула (3) уже доказана, и пусть

$$C = [A_1 \dots A_{n-1}],\quad D = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда из (2) имеем

$$[A_1\ A_2 \dots A_n]\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = [A_1\ C]\begin{bmatrix} B_n \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= A_1B_n + CD = A_1B_n + A_2B_2 + \dots + A_{n-1}B_{n-1} + A_nB_n.$$

Аналогично (2) легко получается и формула

$$A[B_1\ B_2 \dots B_n] = [AB_1\ AB_2 \dots AB_n], \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_mB \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Чтобы теперь из клеточных формул (3), (4), (5) вывести (1), обозначим строки клеток матрицы U через $U_1, \dots, U_m$, столбцы клеток матрицы V через $V_1, \dots, V_p$. На основании формулы (5)

$$UV = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} U_1V \\ \vdots \\ U_mV \end{bmatrix}.$$

Подставляя сюда вместо матрицы V ее разбиение на клетки $[V_1 \dots V_p]$ и используя формулу (4), получим

$$UV = \begin{bmatrix} U_1V_1 & \dots & U_1V_p \\ \dots & \dots & \dots \\ U_mV_1 & \dots & U_mV_p \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Однако в силу (3)

$$U_i V_k = [U_{i1} \dots U_{is}] \begin{bmatrix} V_{1k} \\ \vdots \\ V_{sk} \end{bmatrix} = U_{i1}V_{1k} + \dots + U_{is}V_{sk} = W_{ik}.$$

Подставляя эти выражения в (6), мы получим формулу (1).

Чаще всего квадратные матрицы приходится разбивать на клетки так, чтобы диагональные клетки были также квадратными. Легко видеть, что если две квадратные матрицы разбиты на клетки таким образом, что их диагональные клетки квадратны и степени соответственных диагональных клеток совпадают, то это разбиение удовлетворяет как условиям, при которых возможно поклеточное сложение, так и условиям, которые необходимы для возможности их умножения в качестве клеточных матриц.

Клеточная матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_s \end{bmatrix},$$

где $A_1, \dots, A_s$ — квадратные клетки, а O — нулевые матрицы надлежащих размерностей, называется *клеточно-диагональной*. Вместо этого говорят также, что A распадается на части $A_1, \dots, A_s$ или что A есть *прямая сумма* матриц $A_1, \dots, A_s$; символически

$$A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \dots \dotplus A_s.$$

Операции над распавшимися матрицами приводятся к операциям над их диагональными клетками. Отсюда в свою очередь следует, что если $f(\lambda)$ — некоторый многочлен и A — клеточно-диагональная матрица с диагональными клетками $A_1, \dots, A_s$, то

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & & & \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(A_s) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

1.5. Кватернионы. Матрицы представляют собою удобный аппарат, при помощи которого, исходя из какого-нибудь заданного кольца, например кольца вещественных чисел, можно построить более сложные кольца. Систематически этот вопрос изучается в теории колец, а мы здесь ограничимся рассмотрением лишь двух частных случаев.

Рассмотрим кольцо R_2 всех квадратных матриц 2-го порядка над полем R вещественных чисел. Введем обозначения

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть C — совокупность всех матриц из R_2, имеющих вид

$$\alpha E + \beta I = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in R). \tag{1}$$

Простое возведение в квадрат матрицы I показывает, что $I^2 = -E$, и потому действия над матрицами (1) можно производить по формулам

$$(\alpha E + \beta I) \pm (\gamma E + \delta I) = (\alpha \pm \gamma) E + (\beta \pm \delta) I,$$
$$(\alpha E + \beta I)(\gamma E + \delta I) = (\alpha\gamma - \beta\delta) E + (\alpha\delta + \beta\gamma) I,$$

т. е. по тем же формулам, что и над комплексными числами $\alpha + \beta i$, $\gamma + \delta i$. Из указанных формул вытекает также, что совокупность матриц C является кольцом и соответствие

$$\alpha E + \beta I \leftrightarrow \alpha + \beta i$$

есть изоморфное отображение кольца C на кольцо всех комплексных чисел.

Исходя из матриц 2-го порядка E, I, строим теперь следующие четыре квадратные матрицы 4-го порядка:

$$e = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} O & -E \\ E & O \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} I & O \\ O & -I \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Матрица e — это обычная единичная матрица 4-го порядка, и потому

$$ei = ie = i, \quad ej = je = j, \quad ek = ke = k. \tag{3}$$

Перемножая матрицы (2) по правилам перемножения клеточных матриц и замечая, что $I^2 = -E$, получаем

$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik \tag{4}$$

и, сверх того,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -e. \tag{5}$$

Формулы (4) легко запоминаются: они означают, что в последовательности i, j, k, i, j, k произведение двух соседних элементов равно следующему за ними элементу.

Матрицы вида

$$\alpha e+\beta i+\gamma j+\delta k=\begin{bmatrix}\alpha & -\gamma & -\beta & -\delta\\ \gamma & \alpha & \delta & \beta\\ \beta & -\delta & \alpha & \gamma\\ \delta & \beta & -\gamma & \alpha\end{bmatrix}, \tag{6}$$

где α, β, γ, δ — произвольные вещественные числа, называются *кватернионами* (иногда — кватернионными матрицами). Из (6) следует, что представление кватернионов в форме $\alpha e+\beta i+\gamma j+\delta k$ однозначно. Иными словами, соотношение

$$\alpha e+\beta i+\gamma j+\delta k=\alpha_1 e+\beta_1 i+\gamma_1 j+\delta_1 k$$

равносильно четырем равенствам:

$$\alpha=\alpha_1,\quad \beta=\beta_1,\quad \gamma=\gamma_1,\quad \delta=\delta_1.$$

Сложение и вычитание кватернионов, записанных в нормальной алгебраической форме $\alpha e+\beta i+\gamma j+\delta k$, производится по обычному правилу:

$$(\alpha e+\beta i+\gamma j+\delta k)\pm(\alpha_1 e+\beta_1 i+\gamma_1 j+\delta_1 k)=$$
$$=(\alpha\pm\alpha_1)e+(\beta\pm\beta_1)i+(\gamma\pm\gamma_1)j+(\delta\pm\delta_1)k. \tag{7}$$

Для перемножения двух кватернионов, записанных в алгебраической нормальной форме, достаточно воспользоваться законом дистрибутивности и таблицами умножения (3), (4), (5). В результате приходим к формуле

$$(\alpha e+\beta i+\gamma j+\delta k)(\alpha_1 e+\beta_1 i+\gamma_1 j+\delta_1 k)=$$
$$=(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1-\gamma\gamma_1-\delta\delta_1)e+(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1+\gamma\delta_1-\gamma_1\delta)i+$$
$$+(\alpha\gamma_1+\gamma\alpha_1+\delta\beta_1-\beta\delta_1)j+(\alpha\delta_1+\alpha_1\delta+\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)k. \tag{8}$$

Формулы (7), (8) показывают, что совокупность матричных кватернионов Q есть кольцо с единицей e, являющееся подкольцом кольца всех вещественных матриц 4-го порядка. Кватернионы e, i, j, k обычно называются кватернионными единицами. Из соотношений (4) следует, что кольцо кватернионов некоммутативно. Наиболее замечательный факт состоит в том, что кольцо кватернионов является телом, т. е. что в кольце кватернионов разрешимы все уравнения вида

$$ax=b,\qquad ya=b, \tag{9}$$

где a, b — любые заданные кватернионы, из которых a не равен нулю. Ниже приведены удобные формулы для решения этих уравнений.

Рассмотрим какой-либо кватернион

$$q=\alpha e+\beta i+\gamma j+\delta k.$$

Вещественное число

$$N(q)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

называется *нормой* кватерниона q. Так как α, β, γ, δ вещественные, то норма любого кватерниона есть неотрицательное вещественное число, равное нулю только для нулевого кватерниона.

Кватернион

$$q^*=\alpha e-\beta i-\gamma j-\delta k$$

называется *сопряженным* для q. Ясно, что $q^{**}=q$. Прямым перемножением кватернионов q и q^* (по формуле (8)) получаются основные равенства

$$qq^*=q^*q=N(q)\cdot e,$$

откуда

$$q\cdot\frac{1}{N(q)}\cdot q^*=e \tag{10}$$

или

$$q^{-1}=\frac{1}{N(q)}q^* \tag{11}$$

(при условии, что $q\neq 0$).

Возвратимся теперь к уравнениям (9). Умножая первое из них слева, второе справа на a^{-1}, получим

$$x=a^{-1}b,\quad y=ba^{-1}. \tag{12}$$

Подстановка этих значений в уравнения (9) показывает, что формулы (12) на самом деле дают искомые решения этих уравнений.

Решения $a^{-1}b$ и ba^{-1} в общем случае различны. Поэтому их часто называют левым и правым частными от деления b на a и обозначают соответственно через $a\backslash b$ и b/a. Непосредственными вычислениями легко проверяются формулы

$$(\alpha a+\beta b)^*=\alpha a^*+\beta b^*,$$
$$(ab)^*=b^*a^*,$$

из которых просто выводится и важное соотношение

$$N(ab)=N(a)N(b)\quad (a,\ b\in Q).$$

В самом деле,

$$N(ab)\cdot e=abb^*a^*=aa^*N(b)=N(a)N(b)\cdot e.$$

Отображение $\alpha\to\alpha e$ есть изоморфизм поля вещественных чисел в тело кватернионов. Это позволяет кватернион вида αe отождествить с числом α и вместо $\alpha e+\beta i+\gamma j+\delta k$ писать просто

$x=3i+\gamma j+\delta k$. Так, например,

$$(i+k)(1+i-j)^{-1}-(i+k)(1-i+j)^{-1}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i+\frac{2}{3}k.$$

В последующих разделах книги значительная часть результатов будет относиться к объектам, определения которых зависят от наперед заданного тела K. Хотя главный интерес будут представлять случаи, когда K поле, рассуждения будут строиться таким образом, чтобы не исключать и некоммутативных тел. Изучая эти рассуждения, полезно иметь в виду, что тело K может быть всегда телом кватернионов Q.

Примеры и задачи

1. Пусть

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3E,\qquad A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix};$$

тогда

$$\gamma(A)=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

2. Показать, что матрица

$$U=\begin{bmatrix}0 & 1\\ i & 0\end{bmatrix}$$

является унитарной. При каких условиях диагональная матрица является ортогональной, унитарной?

3. Найти обратную для матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

4. Если

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

то

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & n & \frac{1}{2}n(n-1)\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

5. Показать, что все матрицы, перестановочные с

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

имеют вид

$$B=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta\\ 0 & \alpha & \beta & \gamma\\ 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}.$$

6. Если матрица обладает двумя свойствами из следующих трех: *вещественная, ортогональная, унитарная*, то она обладает и третьим.

7. Всякая квадратная матрица может быть представлена в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

8. Матрица I называется *инволюцией*, если $I^2=E$. Показать, что если матрица обладает двумя из свойств: *вещественная, ортогональная, инволюция*, то она обладает и третьим.

9. Матрица P называется *идемпотентной*, если $P^2=P$. Показать, что матрицы

$$\begin{bmatrix}-23 & -16 & -20\\ 27 & 19 & 27\\ 12 & 8 & 13\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

идемпотентны.

10. Если P идемпотентна, то

$$I=2P-E$$

инволютивна, и, наоборот, если I инволютивна, то

$$P=\frac{1}{2}(I+E)$$

идемпотентна.

11. Рассматриваются квадратные матрицы порядка n. Обозначим через E_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$ матрицу, у которой в i-й строке и j-м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны 0. Тогда для $A=\|a_{ij}\|$ имеем

$$A\cdot E_{ij}=a_{1i}E_{1j}+\dots+a_{ni}E_{nj},$$
$$E_{ij}\cdot A=a_{j1}E_{i1}+\dots+a_{jn}E_{in}.$$

Вывести отсюда, что матрица A тогда и только тогда перестановочна с каждой из матриц E_{ij}, когда A имеет вид αE.

Пользуясь этим результатом, показать, что матрица A тогда и только тогда перестановочна с произвольной квадратной матрицей порядка n, когда $A=\alpha E$, где α — элемент из основного кольца K, перестановочный с каждым элементом из K.

12. Иногда наряду с матрицами конечного порядка рассматривают и матрицы бесконечного порядка, имеющие вид бесконечной таблицы с двумя входами:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots\\ a_{21} & a_{22} & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}.$$

Такая матрица называется *строчно-конечной*, если начиная со строки она содержит лишь конечное число отличных элементов. Операции над строчно-конечными (и аналогично определенными конечными по столбцам)

матрицах производятся по тем же правилам, что и над квадратными матрицами конечного порядка. Легко видеть, что в результате получаются также строчно-конечные матрицы.

Пусть $A=\|a_{ij}\|$ — матрица бесконечного порядка, причем $a_{11}=a_{12}=\ldots$ и $a_{i2}=0$ для $i=2,3,\ldots$. Показать, что $AA'=E$, $A'A\neq E$.

§ 2. Определители

2.1. Определение. Понятие определителя возникло в связи с задачей решения систем линейных уравнений. Возьмем какое-нибудь поле K и рассмотрим простейшие системы уравнений 1-й степени с двумя и тремя неизвестными с коэффициентами из K. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными ξ_1, ξ_2 записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2&=\beta_1,\\ a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2&=\beta_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где a_{ij}, β_i — заданные числа из K. Матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \beta_1\\ a_{21} & a_{22} & \beta_2\end{pmatrix}$$

называются соответственно *основной* и *расширенной* матрицами системы (1). Чтобы исключить неизвестное ξ_2, умножим первое из уравнений на a_{22}, второе на $-a_{12}$ и сложим их. В результате получим уравнение

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,\xi_1=\beta_1a_{22}-\beta_2a_{12}.$$

Если $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, то из этого уравнения и аналогичного уравнения, получающегося путем исключения ξ_1, получим

$$\xi_1=\frac{a_{22}\beta_1-a_{12}\beta_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad \xi_2=\frac{a_{11}\beta_2-a_{21}\beta_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

Знаменатели выражений для неизвестных ξ_1, ξ_2 здесь одинаковы и представляют собой многочлен от элементов основной матрицы A. Значение этого многочлена называют *определителем* или *детерминантом* матрицы A и обозначают $\det A$ или $|A|$. Если матрица задана своей таблицей, то детерминант обозначают, заключая таблицу в вертикальные черты.

Таким образом, по определению для любой квадратной матрицы 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma. \tag{3}$$

С помощью определителей формулы (2) можно переписать в виде

$$\xi_1=\frac{\begin{vmatrix}\beta_1 & a_{12}\\ \beta_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\qquad \xi_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & \beta_1\\ a_{21} & \beta_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}. \tag{4}$$

Решая аналогичным путем систему трех уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3&=\beta_1,\\ a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+a_{23}\xi_3&=\beta_2,\\ a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+a_{33}\xi_3&=\beta_3 \end{aligned} \tag{5}$$

с тремя неизвестными ξ_1, ξ_2, ξ_3, получим

$$\xi_1=\frac{\beta_1a_{22}a_{33}-\beta_1a_{23}a_{32}-\beta_2a_{12}a_{33}+\beta_2a_{13}a_{32}+\beta_3a_{12}a_{23}-\beta_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \tag{6}$$

и аналогичные выражения для ξ_2, ξ_3. Конечно, эти выражения имеют смысл лишь в том случае, когда знаменатель их отличен от нуля. Матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \beta_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \beta_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \beta_3\end{pmatrix}$$

называются снова *основной* и *расширенной* матрицами системы уравнений (5). Знаменатель в формуле (6) называется *определителем* или *детерминантом* квадратной матрицы 3-го порядка A. Итак, согласно определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{7}$$

Объединяя справа члены, содержащие элементы a_{11}, a_{12}, a_{13} и вспоминая формулу (3), получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Формулу (8) легко запомнить. Для краткости вместо того, чтобы говорить *определитель матрицы* 2-го порядка, 3-го порядка, говорят *определитель* 2-го, 3-го порядка. Три определителя

2-го порядка в формуле (8) получаются из находящегося у ней определителя 3-го порядка вычеркиванием первой строки и соответственно 1-го, 2-го и 3-го столбцов. Далее, определитель 2-го порядка, получившийся вычеркиванием 1-й строки и j-го столбца, следует умножить на элемент, находящийся в первой строке и j-м столбце, все произведения снабдить чередующимися знаками и сложить. В результате и получится определитель 3-го порядка.

Это правило подсказывает нам, как следует определить понятие определителя, или детерминанта, квадратной матрицы 4-го, 5-го и высших порядков. Итак, вводим следующее основное

Определение. *Определителем матрицы 1-го порядка, образованной числом a, называется само это число a. Пусть теперь для какого-то натурального числа $n \geqslant 1$ нам уже знаем, какой элемент кольца K называется определителем произвольной квадратной матрицы n-го порядка над K. Тогда для произвольной квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ $(n+1)$-го порядка над K по определению полагаем*

$$\det \|a_{ij}\| = a_{11}|A_1^1| - a_{12}|A_1^2| + a_{13}|A_1^3| - \ldots + (-1)^n a_{1\,n+1}|A_1^{n+1}|, \tag{9}$$

где через $|A_1^j|$ обозначен вполне определенный элемент кольца K, являющийся определителем матрицы n-го порядка, получаемой из первоначальной матрицы A вычеркиванием 1-й строки и j-го столбца $(j = 1, \ldots, n+1)$.

Применяя это определение для $n = 1$, получим формулу (3) для определителей 2-го порядка. Зная выражение для определителей 2-го порядка, можем воспользоваться основным определением, чтобы получить выражение (8) для детерминантов 3-го порядка. Из выражения (8) при помощи (3) получаем окончательную формулу (7).

Посмотрим теперь, какова окончательная формула для детерминанта 4-го порядка. Согласно основному определению для произвольной квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ 4-го порядка детерминантом ее служит выражение

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Подставляя сюда из формулы (7) выражения определителей 3-го порядка и раскрывая скобки, получим искомую окончательную формулу для определителя 4-го порядка. Мы ее не будем здесь выписывать, так как запоминать ее вряд ли целесообразно.

Согласно (7) каждый определитель 3-го порядка равен сумме шести членов с чередующимися знаками. Поэтому, подставляя в (10) вместо определителей 3-го порядка их выражения и раскрывая скобки, получим всего $4 \cdot 6 = 24$ члена. Половина их будет входить со знаком плюс и половина со знаком минус. Аналогичное утверждение истинно и для определителей любого порядка.

Теорема 1. *Для произвольной квадратной матрицы*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (\pm) a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}, \tag{11}$$

где суммирование распространяется на произвольные перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$. Знак плюс или минус берется в зависимости от четности или нечетности перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, т. е. в половине случаев плюс, а в половине минус; общее число членов в сумме (11) равно $1 \cdot 2 \ldots n = n!$.

Для $n = 1, 2, 3, 4$ истинность теоремы нами уже проверена. Далее рассуждаем по индукции. Пусть теорема истинна для определителей какого-то порядка n, и пусть $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица порядка $n+1$. По предположению в формуле (9) каждый определитель $|A_1^j|$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ имеет следующий вид:

$$A_1^j = \sum (\pm) a_{2m_1} a_{3m_2} \ldots a_{n+1, m_n}, \tag{12}$$

где суммирование распространяется на все перестановки $(m_1, \ldots, m_n)$ чисел $1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n+1$. Число членов в сумме (12) равно $n!$. Подставляя в (9) вместо $|A_1^j|$ их выражения и раскрывая скобки, получим всего $n!(n+1) = (n+1)!$ членов. Половина из них будет со знаком плюс и половина со знаком минус. Подобных членов не будет, так как членов, получающихся при раскрытии различных скобок, отличаются друг от друга первыми множителями. Ясно, что произвольный член вида $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_{n+1} j_{n+1}}$ получится при раскрытии скобок из произведения $a_{i_1 j_1} |A_1^{j_1}|$, и потому формула (11) истинна.

Из формулы (11) легко вытекает одно существенное следствие. Пусть элементы матрицы $A = \|a_{ij}\|$ суть комплексные числа. На основании формулы (11) имеем

$$|A| = \sum (\pm) a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_n j_n} = \overline{\sum (\pm) a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_n j_n}} = \overline{|A|},$$

т. е.

$$|A| = \overline{|A|}.$$

Формула (11) показывает, что величина определителя матрицы равна алгебраической сумме членов, каждый из которых есть

произведение элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. Поэтому, если все элементы какой-нибудь строки или какого-нибудь столбца матрицы равны нулю, то будут равны нулю и все члены определителя. Таким образом, нами получено

Следствие. *Если какая-нибудь строка или какой-нибудь столбец квадратной матрицы состоит целиком из нулей, то определитель этой матрицы равен нулю.*

Квадратная матрица называется *полураспадающейся*, если ее элементы можно разбить вертикальной и горизонтальной чертами на четыре матрицы так, чтобы по диагонали стояли квадратные матрицы, а одна из двух других матриц состояла целиком из нулей. Иначе говоря, матрица A полураспадающаяся, если она имеет один из следующих двух видов:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,r+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right].$$

Иногда первую из этих матриц называют *верхней* полураспавшейся, а вторую — *нижней* полураспавшейся.

Теорема 2. *Определитель полураспавшейся матрицы равен произведению определителей ее диагональных клеток.*

Для матриц 2-го порядка это утверждение очевидно, так как

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta.$$

Далее применяем индукцию, считая теорему 2 истинной для матриц какого-нибудь порядка $n-1$. Рассмотрим произвольную полураспавшуюся матрицу A порядка n. Пусть она имеет вид

$$A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} B & D \\ O_{sr} & C \end{vmatrix},$$

где B, C — квадратные матрицы, имеющие порядки r, s ($r+s=n$), а O_{sr} и D — прямоугольные матрицы, причем матрица O_{sr} нулевая. Применяя формулу (9), получим

$$|A| = a_{11}|A_1^1| - a_{12}|A_1^2| + \dots + (-1)^{n-1}a_{1n}|A_1^n|, \qquad (13)$$

где A_1^j — матрица порядка $n-1$, получающаяся из A вычеркиванием первой строки и j-го столбца. Легко заметить, что все матрицы A_1^j полураспадающиеся, и потому, в силу индуктивного предположения, определитель каждой из них равен произведению определителей диагональных клеток. Однако матрицы $A_1^1, \dots$

$\dots, A_1^r$ и матрицы $A_1^{r+1}, \dots, A_1^n$ распадаются по-разному. Для первых имеем

$$|A_1^j| = |B_{1j}| \cdot |C|, \qquad j = 1, \dots, r. \qquad (14)$$

А матрицы $A_1^{r+1}, \dots, A_1^n$ можно разбить горизонтальной и вертикальной линиями так, чтобы верхний левый квадрат имел порядок r. Так как у этого квадрата последняя строка состоит из нулей, то определитель его равен нулю. Определитель матрицы A_1^{r+1} равен произведению определителя указанного квадрата и определителя дополнительного квадрата. Поэтому $A_1^{r+1} = 0$ и, значит,

$$|A| = a_{11}|B_1^1| \cdot |C| - \dots + (-1)^{r-1}a_{1r}|B_1^r| \cdot |C| = \\ = (a_{11}|B_1^1| - \dots + (-1)^{r-1}a_{1r}|B_1^r|) \cdot |C| = |B| \cdot |C|, \qquad (15)$$

что и требовалось. Случай, когда матрица A имеет вид

$$A = |a_{ij}| = \begin{bmatrix} B & O_{sr} \\ D & C \end{bmatrix},$$

еще проще, так как здесь $a_{1,r+1} = \dots = a_{1n} = 0$, и потому из (13), (14) сразу получаем (15).

Теорема 3. *Если все соответственные элементы квадратных матриц $A = |\alpha_{ij}|$, $B = |\beta_{ij}|$ одного и того же порядка n одинаковы, за исключением элементов какой-то одной i-й строки, то*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \dots & \beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\beta_{i1} & \dots & a_{in}+\beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Эта теорема иногда называется теоремой сложения определителей. Переходя к ее доказательству, обозначим через C матрицу, стоящую в правой части равенства (18). Для матриц 1-го порядка равенство (18) тривиально. Далее рассуждаем по индукции и предполагаем, что для матриц порядка $n-1$ теорема 3 истинна. Тогда в формуле (18) $i=1$, то, разлагая определитель матрицы C по формуле (9), получим

$$|C| = (\alpha_{11}+\beta_{11})|C_1^1| - \dots + (-1)^{n-1}(a_{1n}+\beta_{1n})|C_1^n|.$$

Ясно, что $C_1^j = A_1^j = B_1^j$ и потому

$$|C| = (a_{11}|A_1^1| - \dots - (-1)^{n-1}a_{1n}|A_1^n|) + \\ + (\beta_{11}|B_1^1| - \dots + (-1)^{n-1}\beta_{1n}|B_1^n|) = |A| + |B|.$$

Допустим теперь, что в формуле (18) $i > 1$. Тогда

$$|C| = a_{11}|C_1^1| - \dots + (-1)^{i-1}a_{1n}|C_1^n| \qquad (17)$$

Матрицы $C_1^1, \ldots, C_1^n$ имеют порядок $n-1$, и потому к ним можно применить разложение вида (16). В результате получим

$$C_1^i| = |A_1^i| + B_1^i| \qquad (i=1, \ldots, n)$$

и вследствие соотношения (17) имеем $|C| = |A| + |B|$.

Говоря формально, основное определение детерминантов тогда и для матриц с элементами из произвольного ассоциативного (не обязательно коммутативного) кольца K. В доказательствах теорем 1, 2, 3 также коммутативность K не использовалась. Тем не менее ряд важнейших для приложений свойств детерминантов зависит от коммутативности основного кольца K. Одно из таких свойств указывает

Теорема 4. *Пусть A — квадратная матрица с элементами из коммутативного кольца K. Если все элементы какой-нибудь строки матрицы A умножить на некоторый элемент $\lambda \subseteq K$, то определитель матрицы также умножится на λ. Иначе говоря,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{i1} \ldots \lambda a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство точно такое же, как и у предыдущей теоремы, и мы его повторять не будем. Отметим лишь важное

Следствие. *Для любой квадратной матрицы A порядка n с элементами из коммутативного кольца K и любого $\lambda \subseteq K$*

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|.$$

Действительно, при умножении на λ матрицы A каждая из ее n строк умножается на λ. Поэтому определитель матрицы A в результате умножается на λ^n.

2.2. **Основные свойства определителей.** Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A = \|a_{ij}\|$ порядка n с элементами из какого-нибудь кольца K. Согласно основному определению

$$|A| = a_{11}|A_1^1| - a_{12}|A_1^2| + \ldots + (-1)^{n-1}a_{1n}|A_1^n|, \qquad (1)$$

где A_1^j — матрица, получаемая из A вычеркиванием первой строки и j-го столбца. Применяя теперь к определителю матрицы A_1^j ту же формулу, получим

$$|A_1^j| = a_{21}|A_{12}^{1j}| - \ldots + (-1)^{j-1}a_{2,j-1}|A_{12}^{1,j-1}| + (-1)^{j+1}a_{2,j+1}|A_{12}^{1,j+1}| + \ldots + (-1)^{n}a_{2n}|A_{12}^{1n}|, \qquad (2)$$

где A_{12}^{jk} — матрица, получающаяся из A вычеркиванием первой и второй строк и j-го и k-го столбцов ($j \neq k$).

Подставим в формулу (1) вместо величин $|A_1^j|$ значения из (2). В результате придем к соотношению

$$|A| = \sum_{j \neq k} \pm a_{1j}a_{2k}|A_{12}^{jk}|. \qquad (3)$$

Здесь суммирование берется по всевозможным парам j, k различных чисел из множества $1, \ldots, n$, а знак плюс или минус ставится в соответствии с (1) и (2). Матрицы A_{12}^{jk} и A_{12}^{kj}, очевидно, транспонированы, и потому формулу (3) можно придать следующий вид:

$$|A| = \sum_{j<k} (\pm a_{1j}a_{2k} \mp a_{1k}a_{2j})|A_{12}^{jk}|. \qquad (4)$$

Подсчитаем теперь более точно, какие именно знаки следует взять в последней формуле. Согласно (2) для j-го члена в (1) имеем

$$(-1)^{j-1}a_{1j}|A_1^j| = \ldots + (-1)^{j-1}a_{1j}(-1)^{k}a_{2k}|A_{12}^{jk}| + \ldots$$

Аналогично, учитывая, что $j<k$, для k-го члена из (1) имеем

$$(-1)^{k-1}a_{1k}|A_1^k| = \ldots + (-1)^{k-1}a_{1k}(-1)^{j-1}a_{2j}|A_{12}^{jk}| + \ldots$$

Таким образом, коэффициент при $|A_{12}^{jk}|$ в формуле (4) равен

$$(-1)^{j+k+1}(a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j}) = (-1)^{j+k+1}\begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{vmatrix},$$

и, следовательно,

$$|A| = \sum_{j<k} (-1)^{j+k+1}\begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{vmatrix} \cdot |A_{12}^{jk}|. \qquad (5)$$

Формула (5) называется разложением определителя по элементам 1-й и 2-й строк. Она легко запоминается: *берутся всевозможные определители 2-го порядка, элементы которых находятся в 1-й и 2-й строках и каких-то j-м и k-м столбцах ($j<k$), и умножаются на определители соответствующих матриц, получающихся вычеркиванием указанных строк и столбцов из матрицы A. Произведения дополнительно умножаются на $(-1)^{j+k+1+1}$, где показатель равен сумме номеров вычеркнутых строк и столбцов, и затем складываются. Полученная алгебраическая сумма равна определителю заданной матрицы.*

Точно такие же правила имеют место и для разложений по элементам первых трех, первых четырех и т. д. строк. Однако они нам далее не понадобятся.

Формулой (5) мы теперь воспользуемся, чтобы вывести ряд основных свойств определителей. Ниже предполагается, что элементы рассматриваемых матриц берутся из коммутативного кольца K.

Теорема 1. *Если в квадратной матрице переставлять какие-нибудь две строки, то определитель новой матрицы будет равен определителю старой, взятому со знаком минус.*

Для матриц 2-го порядка это утверждение проверяется непосредственно:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma, \qquad \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \gamma\beta - \delta\alpha = -(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Далее по индукции предполагаем, что для матриц порядка $n-1$ теорема верна и что данная матрица $A = \|a_{ij}\|$ имеет порядок n. Допустим, что в A переставляются две первые строки. Из формулы (5) видно, что при этом все определители $(n-2)$-го порядка изменят знак, а дополнительные множители останутся без изменений. В результате вся сумма приобретает множитель -1, что и требовалось.

Рассмотрим случай, когда переставляются какие-то i-я и k-я строки, где $1 < i < k$. Тогда 1-я строка остается неизменной и из разложения (1) видно, что каждый множитель $|A_1^j|$ будет иметь после перестановки противоположное значение; поэтому и вся сумма после перестановки строк приобретет противоположное значение.

Наконец, допустим, что переставляются 1-я и какая-то i-я строка, где $i > 2$. Этот же результат мы получим, переставив сначала 1-ю и 2-ю строки, затем 2-ю и i-ю и далее 2-ю и 1-ю. По доказанному каждый раз определитель будет менять знак, и в результате трех перемен определитель умножится на -1.

Следствие 1. *Определитель квадратной матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю.*

Перестановкой строк можно достигнуть того, чтобы одинаковыми строками были 1-я и 2-я. При этом определитель матрицы с переставленными строками будет или совпадать с определителем первоначальной матрицы, или отличаться от него множителем -1. Из формулы (5) непосредственно видно, что определитель матрицы с совпадающими первыми двумя строками равен нулю. Поэтому равен нулю и определитель первоначальной матрицы.

Следствие 2. *Если к элементам некоторой r-й строки квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ прибавить соответствующие элементы какой-то другой s-й ($s \neq r$) строки, умноженные на произвольный множитель λ, то определитель новой матрицы будет равен определителю старой.*

Действительно, в силу теорем 3 и 4 предыдущего пункта

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} + \lambda a_{r1} & \dots & a_{sn} + \lambda a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Здесь последний определитель имеет две одинаковые строки и поэтому равен нулю.

До сих пор все наши результаты относились к строкам определителей. Сделаем первый шаг, чтобы вывести в игру и столбцы.

Теорема 2. *Для каждой квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n истинно следующее разложение по элементам 1-го столбца:*

$$|A| = a_{11}|A_1^1| - a_{21}|A_2^1| + \dots + (-1)^{n-1}a_{n1}|A_n^1|, \qquad (6)$$

где A_i^j — матрица, получающаяся из A вычеркиванием i-го столбца и j-й строки.

Будем рассматривать элементы a_{ij} заданной матрицы как буквы. Тогда определителем матрицы A будет многочлен от этих букв, общий вид которого был установлен в теореме 1 предыдущего пункта. Там, в частности, отмечалось, что каждый член многочлена $|A|$ содержит один и только один множитель из совокупности $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$. Соберем в $|A|$ вместе все члены, содержащие множитель a_{11}, вынесем этот множитель за скобки, а выражение в скобках обозначим через A_{11}. В результате получим

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}. \qquad (7)$$

Сравнивая формулу (7) с формулой (1), приходим к выводу, что

$$A_{11} = |A_1^1|.$$

Чтобы найти аналогичное выражение для A_{r1}, теперь достаточно воспользоваться теоремой 1. В самом деле, будем последовательно переставлять r-ю строку матрицы A с каждой из предыдущих, поднимая ее все выше и выше. После $r-1$ таких перестановок получим матрицу B, отличающуюся от матрицы A только порядком строк, к тому

$$|A| = (-1)^{r-1}|B|.$$

Разлагая определитель B по элементам 1-й строки, получаем

$$|B| = a_{r1}|B_1^1| - a_{r2}|B_1^2| + \dots + (-1)^{n-1}a_{rn}|B_1^n|.$$

или

$$|A| = a_{11}(-1)^{r-1}|B_1^1| + \ldots + (-1)^{r+s-2}a_{rs}|B_s^1|.$$

Сравнивая это разложение с разложением (7), приходим к соотношению

$$A_{11} = (-1)^{r-1}B_1^1.$$

Матрица B_1^1 получается из матрицы B вычеркиванием 1-й строки и 1-го столбца. Ясно, что ту же матрицу мы получим, вычеркивая из A r-ю строку и 1-й столбец, т. е. $B_1^1 = A_1^r$. Заменяя в формуле (7) A_{11} на $(-1)^{r-1}|A_1^r|$, приходим к требуемому разложению (6).

Выше отмечалось, что матрица, у которой 1-я, 2-я и т. д. строки совпадают соответственно с 1-м, 2-м и т. д. столбцами матрицы A, называется *транспонированной* относительно A и обозначается через A'. Ясно, что если матрица A квадратная порядка n, то матрица A' также квадратная порядка n.

Теорема 3. *Определитель квадратной матрицы A не меняется при ее транспонировании:*

$$|A'| = |A|. \tag{8}$$

Для матриц порядка 1 утверждение тривиально. Далее, как и выше, используется индукция, предполагая, что заданная матрица $A = \|a_{ij}\|$ имеет порядок $n \geqslant 1$ и что для матриц порядка $n-1$ теорема истинна. Разлагая определитель матрицы A по элементам 1-й строки, а определитель транспонированной матрицы A' по элементам 1-го столбца, получим

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|A_1^1| - a_{12}|A_1^2| + \ldots + (-1)^{n-1}a_{1n}|A_1^n|, \\ |A'| &= a_{11}|(A')_1^1| - a_{12}|(A')_1^2| - \ldots - (-1)^{n-2}a_{1n}|(A')_1^n|. \end{aligned} \tag{9}$$

Однако легко заметить, что $(A')_1^1 = (A_1^1)'$. Матрицы A_1^1 имеют порядок $n-1$, и потому, в силу индуктивного предположения,

$$|(A')_1^1| = |(A_1^1)'| = |A_1^1| \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Сравнивая эти соотношения с разложениями (9), получаем (8).

Итак, при вычислении определителя матрицы строки ее и столбцы можно поменять ролями. Поэтому из каждой теоремы, относящейся к свойствам определителя матрицы и содержащей в формулировке упоминания о строках или столбцах, можно получить новую теорему, поменяв ролями строки и столбцы. В частности, из указанных выше свойств определителей, связанных со строками, получаем

Следствие. *При перестановке двух столбцов матрицы определитель матрицы приобретает противоположное значение. Определитель квадратной матрицы, имеющей два одинаковых столбца, равен нулю. Если все элементы какого-нибудь столбца матрицы*

умножить на λ, то определитель матрицы также умножится на λ. Если ко всем элементам какого-нибудь столбца матрицы прибавить соответствующие элементы какого-нибудь из другого столбца, умноженные на фиксированное число, то определитель новой матрицы будет равен определителю старой.

Аналогично для разложения (5) путем изменения ролей строк и столбцов получаем разложение по двум первым столбцам:

$$|A| = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{vmatrix} \cdot |A_{ij}^{12}|.$$

Наконец, из теоремы сложения определителей, относящейся к строкам, получаем соответствующую формулу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \beta_{i1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \beta_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i}+\beta_{i1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni}+\beta_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

относящуюся к столбцам.

До сих пор мы пользовались только разложениями определителя по элементам *первой* строки, *первого* столбца. Вместе с тем мы знаем закон изменения величины определителя при перестановке строк или столбцов. Это дает возможность из разложений по элементам первой строки или столбца сразу получить аналогичные разложения по элементам любой строки или столбца.

Теорема 4. *Для произвольной квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n истинны следующие разложения по элементам r-й строки и s-го столбца:*

$$|A| = (-1)^{r-1}a_{r1}|A_1^r| + \ldots + (-1)^{r-1}a_{rn}|A_n^r|, \tag{10}$$

$$|A| = (-1)^{s+1}a_{1s}|A_1^1| + \ldots + (-1)^{s+n}a_{ns}|A_n^1|, \tag{11}$$

где A_j^i — матрица, получающаяся из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Ввиду равноправности строк и столбцов определителя достаточно доказать лишь одну из формул (10), (11), например (10). Переставляя последовательно r-ю строку матрицы A с каждой над ней стоящей, через $r-1$ перестановок получим матрицу

$$D = \begin{vmatrix} a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \ldots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \ldots & a_{r-1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Согласно теореме о перестановке строк имеем $A = (-1)^{i-1}|B|$. Разлагая здесь определитель B по элементам 1-й строки и пользуясь очевидными соотношениями $B_{1j} = A_{ij}$, приходим к разложению (10).

Определитель матрицы A_{ij} называется *минором* определителя матрицы A, отвечающим элементу a_{ij}. Выражение $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} в $|A|$; и обозначается часто через $A|_{ij}$. При помощи понятия алгебраического дополнения формулы (10), (11) можно записать в более коротком виде:

$$a_{11}|A|_{11} + a_{12}|A|_{12} + \ldots + a_{1n}|A|_{1n} = |A|, \tag{12}$$

$$a_{11}|A|_{11} + a_{21}|A|_{21} + \ldots + a_{n1}|A|_{n1} = |A|. \tag{13}$$

В этих равенствах каждый элемент a_{ij} умножается на свое алгебраическое дополнение $|A|_{ij}$. Что будет, если взять сумму произведений элементов i-й строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов какой-нибудь другой строки? Чтобы получить ответ, заменим в данной матрице A j-ю строку ее i-й строкой, а все остальные строки, включая и i-ю, оставим неизменными. В результате получим некоторую матрицу B, у которой i-я и j-я строки одинаковы. Определитель матрицы равен нулю. В то же время ясно, что миноры элементов j-й строки у определителей матриц A и B совпадают. Разлагая B по элементам j-й строки, получим

$$a_{i1}|A|_{j1} + \ldots + a_{in}|A|_{jn} = 0 \quad (i \neq j). \tag{14}$$

Меняя в рассуждениях строки и столбцы, получим вторую серию соотношений:

$$a_{1i}|A|_{1j} + \ldots + a_{ni}|A|_{nj} = 0 \quad (i \neq j). \tag{15}$$

Соотношения (12) — (15) обычно формулируют следующим образом:

Теорема 5. *Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя на свои алгебраические дополнения равна величине определителя. Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой его строки (столбца) равна нулю.*

Сделаем теперь несколько замечаний о способах вычисления определителей. Определители 2-го и 3-го порядков обычно вычисляются по каждым формулам. Например,

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 187.$$

Здесь мы разложили определитель 3-го порядка по элементам 1-й строки. Если бы среди элементов заданного определителя были равные нулю, то выгоднее было бы пользоваться разложением по элементам той строки (или столбца), в которой этот нулевой элемент находится. Этот же способ применим и для вычисления определителей высокого порядка, у которых много элементов, равных нулю. В частности,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

и аналогично

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n1}\ldots a_{1n}.$$

Более сложно обстоит дело, если порядок заданного определителя сравнительно высокий (например, 7 и больше), а среди элементов определителя нет нулей или их мало. В этом случае сначала к определителю применяют преобразования, указанные в следствии 2 из теоремы 1, стараясь подобрать коэффициент λ так, чтобы новый определитель содержал нули в каких-то местах или имел в каком-то смысле более простое строение. Эти приемы хорошо видны из следующего примера. Пусть нам надо вычислить определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычитая в этом определителе из 6-й строки 5-ю, затем в новом определителе вычитая из 5-й строки 4-ю, затем из 4-й 3-ю

и т. д., получим

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая теперь 6-ю строку из 1-й, 2-й, ..., 5-й, получим

$$d=\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)6^5\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В получившемся определителе 5-го порядка прибавляем к 1-му столбцу остальные и затем разлагаем определитель по элементам 1-го столбца. Мы получим

$$d=-6^4\cdot\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-6^4\cdot 21.$$

Аналогичными вычислениями находится и общая формула

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}. \qquad (16)$$

Этот определитель носит название *циркулянта* n-го порядка, так как его строки получаются циклическими перестановками элементов 1-й строки. На указанную закономерность в расположении элементов определителя и опирается вывод формулы (16), которая далее, впрочем, нами использоваться не будет. Для нахождения численного значения определителей высокого порядка теперь прибегают к *услугам* машинно-счетных станций, на которых имеются стандартные программы вычисления определителей, приспособленные к тому типу машин, которыми оборудованы

станции. Найдем лишь грубую оценку числа арифметических действий, заведомо достаточных для вычисления определителя произвольной матрицы $\|a_{ij}\|$ n-го порядка.

Допустим, что $a_{11}\neq 0$. Вычисляем a_{ij}' и представляем искомый определитель в виде

$$a_{11}\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_{11}^{-1}a_{12} & \dots & a_{11}^{-1}a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

При этом мы выполняем одно обращение и $n-1$ перемножений. Далее к элементам 2-й, 3-й, ..., n-й строк прибавляем элементы 1-й строки, умноженные соответственно на $-a_{21}$, $-a_{31}$, ..., $-a_{n1}$ ($(n-1)^2$ умножений и столько же сложений). После этого задача сводится к вычислению определителя порядка $n-1$:

$$a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22}' & \dots & a_{2,n-1}' \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2}' & \dots & a_{n-1,n-1}' \end{vmatrix}.$$

Продолжая указанный процесс, в конце мы должны будем найти лишь произведение $a_{11}a_{22}'\dots a_{nn}^{(n-1)}$ ($n-1$ умножений). Всего при изложенном алгоритме потребуется произвести $n-1$ обращений чисел,

$$n(n-1)+(n-1)(n-2)+\dots+2\cdot 1=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

умножений, $\frac{(2n-1)n(n-1)}{6}$ сложений и заключительных $n-1$ умножений. Таким образом, грубо говоря, для вычисления определителя n-го порядка надо произвести около $\frac{1}{3}n^3$ умножений и такое же количество сложений. Мы не будем здесь заниматься дальнейшим изучением этого вопроса. Ряд точных определений и результатов указан в статье В. Я. Панна «О способах вычисления значений многочленов» (Успехи матем. наук 21, № 1 (1966), 103—134), а также в приведенной в этой статье литературе.

2.3. Определитель произведения. Обратные матрицы. Значительную роль в теории матриц играет

Теорема 1 (об умножении определителей). *Определитель произведения квадратных матриц (с элементами из коммутативного кольца K) равен произведению определителей матриц.*

Пусть заданы квадратные матрицы $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|$ порядка n. На основании теоремы о полураспавшихся

матрицах (гл. 2.1)

$$|A|\cdot|B|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Справа стоит определитель матрицы специального вида, имеющей порядок $2n$. Не изменяя величины определителя, над этой матрицей можно выполнить последовательно следующее преобразование: к 1-й строке прибавляем элементы $(n+1)$-й строки, умноженные на a_{11}, элементы $(n+2)$-й строки, умноженные на a_{12}, и т. д., элементы $2n$-й строки, умноженные на a_{1n}. В результате возникнет матрица порядка $2n$, у которой первые n мест 1-й строки будут заполнены нулями, а остальные n мест заполнены произведениями 1-й строки матрицы A на столбцы матрицы B. Теперь в новой матрице порядка $2n$ к элементам 2-й строки прибавляем элементы $(n-1)$-й, $(n+2)$-й и т. д. строк, умноженные соответственно на $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$. Затем аналогичные преобразования продолжаем с 3-й, ..., n-й строками. После этого получаем следующее равенство:

$$|A|\cdot|B|=\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \sum a_{1i}\beta_{i1} & \dots & \sum a_{1i}\beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sum a_{ni}\beta_{i1} & \dots & \sum a_{ni}\beta_{in} \\ -1 & \dots & 0 & \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Чтобы привести правый определитель к нужному виду, меняем в нем местами 1-й и $(n+1)$-й, 2-й и $(n+2)$-й, ..., n-й и $2n$-й столбцы. В результате получим равенство

$$|A|\cdot|B|=(-1)^n\begin{vmatrix} \sum a_{1i}\beta_{i1} & \dots & \sum a_{1i}\beta_{in} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{ni}\beta_{i1} & \dots & \sum a_{ni}\beta_{in} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Так как определитель полученной матрицы равен произведению определителей диагональных клеток, то из соотношения (1) вытекает, что

$$|A|\cdot|B|=(-1)^n(-1)^n\begin{vmatrix} \sum a_{1i}\beta_{i1} & \dots & \sum a_{1i}\beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{ni}\beta_{i1} & \dots & \sum a_{ni}\beta_{in} \end{vmatrix},$$

т. е.

$$|A|\cdot|B|=|AB|, \quad (2)$$

что и требовалось.

Мы доказали теорему 1 для произведения двух матриц. Ясно, что отсюда непосредственно вытекает ее истинность и для произведений любого конечного числа матриц. Например,

$$|ABC|=|(AB)C|=|AB|\cdot|C|=|A|\cdot|B|\cdot|C|.$$

В частности, для любой квадратной матрицы A

$$|A^k|=|A|^k \qquad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Мы знаем, что транспонирование квадратной матрицы не меняет ее определителя. Поэтому для произвольных квадратных матриц A, B одного и того же порядка

$$|A|\cdot|B|=|AB|=|A'B|=|AB'|=|A'B'|.$$

Например, пусть

$$A=\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$|A|^2=|AA'|=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & xu+yv \\ xu+yv & u^2+v^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(x^2+y^2)(u^2+v^2)-(xu+yv)^2,$$

т. е.

$$(xv-yu)^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2)-(xu+yv)^2.$$

Это соотношение обычно записывают в виде следующего тождества:

$$(x^2+y^2)(u^2+v^2)=(xv-yu)^2+(xu+yv)^2,$$

называемого тождеством Лагранжа.

Воспользуемся теперь теоремой 1 для более подробного изучения свойств обратной матрицы.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A=\|a_{ij}\|$ порядка n. Из алгебраических дополнений элементов определителя $|A|$ составим матрицу и затем транспонируем ее. Получившуюся в результате матрицу называют *присоединенной (взаимной)* для A и

обозначают через A^*. Иными словами,

$$A^* = \begin{bmatrix} |A|_{11} & |A|_{21} & \dots & |A|_{n1} \\ |A|_{12} & |A|_{22} & \dots & |A|_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |A|_{1n} & |A|_{2n} & \dots & |A|_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вычисляя произведения $A \cdot A^*$ и $A^* \cdot A$ по правилу умножения матриц и принимая во внимание формулы (12) — (15) предыдущего пункта, непосредственно получаем важные соотношения

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot E, \tag{4}$$

где E — единичная матрица.

Определитель матрицы A есть элемент основного кольца K, из которого берутся элементы всех рассматриваемых матриц. Допустим, что в K элемент $|A|$ имеет обратный $|A|^{-1}$. Тогда, умножая соотношения (4) на $|A|^{-1}$, приходим к равенствам

$$A \cdot |A|^{-1} A^* = |A|^{-1} A^* \cdot A = E,$$

из которых следует, что

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*. \tag{5}$$

С другой стороны, если матричное уравнение

$$AX = E$$

разрешимо, то, переходя к определителям, получим

$$|A| \cdot |X| = 1,$$

т. е. элемент $|A|$ обратим в кольце K.

Сводя полученные результаты, приходим к следующему утверждению:

Теорема 2. *Квадратная матрица A с элементами из коммутативного кольца K с единицей всегда и только тогда имеет обратную матрицу с элементами из K, когда определитель A обратим в кольце K. Если обратная матрица существует, то ее определитель равен обратной величине определителя данной матрицы.*

Например, в кольце всех целых чисел $K = \{0, \pm 1, \dots\}$ имеют обратные только элементы 1 и -1. Поэтому *целочисленная квадратная матрица тогда и только тогда имеет обратную целочисленную матрицу, когда определитель заданной матрицы есть ± 1.*

Пусть рассматриваются матрицы с элементами из некоторого поля. В поле любой ненулевой элемент имеет обратный. Поэтому

над полем те и только те матрицы обратимы, определитель которых отличен от нуля.

Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется *особенной*. В противоположном случае матрица называется *неособенной*. Поэтому отмеченное выше условие обратимости матрицы может быть выражено следующим образом: *квадратная матрица над полем тогда и только тогда имеет обратную, когда она неособенная.*

Мы видели, что для неособенных матриц A над полем K

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$|A^{-m}| = |A^{-1} \dots A^{-1}| = |A|^{-m} \qquad (m = 1, 2, \dots),$$

и потому формула (3) справедлива не только для натуральных k, но и для любых целых k (если матрица A обратима).

Согласно п. 1.3 квадратная матрица A называется ортогональной, если

$$AA' = A'A = E.$$

Переходя к определителям, получаем $|A|^2 = 1$, а поэтому, если матрицы рассматриваются над полем K, то $|A| = \pm 1$. Благодаря этому все ортогональные матрицы распадаются на два множества матриц: *собственно ортогональных* с определителем $+1$ и *несобственно ортогональных*, определитель которых равен -1. Все собственно ортогональные матрицы относительно операции умножения образуют группу, являющуюся подгруппой группы всех ортогональных матриц.

Напомним, что квадратная матрица A над полем комплексных чисел называется *унитарной*, если $A\bar{A}' = E$. Беря определители, получим $|A| \cdot \overline{|A|} = 1$, т. е. *модуль определителя унитарной матрицы равен единице.*

В заключение найдем еще определитель трисоединенной матрицы. В качестве кольца K возьмем кольцо многочленов от букв x_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ с целыми коэффициентами и рассмотрим матрицу $X = |x_{ij}|$. Согласно формуле (4)

$$X \cdot X^* = |X| \cdot E,$$

и потому

$$|X| \cdot |X^*| = |X|^n.$$

Так как многочлен $|X|$ отличен от нуля, то равенство можно сократить на $|X|$, и в результате получаем искомую формулу

$$|X^*| = |X|^{n-1}, \tag{6}$$

левая и правая части которой суть многочлены от переменных x_{ij} с целыми коэффициентами. Но если два таких многочлена равны,

то равны и значения их при любых значениях переменных из любого коммутативного кольца. Поэтому формула (6) истинна для произвольных квадратных матриц над любым коммутативным кольцом.

2.4. **Крамеровские системы линейных уравнений.** Рассмотрим совокупность условий

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n &= \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n &= \beta_m \end{aligned} \tag{1}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — буквы, а α_{ij}, β_j — какие-то элементы из некоторого кольца K. Совокупность этих условий называется *системой линейных уравнений* от неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ над кольцом K. Последовательность элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ из кольца K называется *решением* системы (1), если при подстановке в условия (1) вместо переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ соответственно элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ все условия становятся истинными. Вводя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

систему (1) можно записать в следующей матричной форме:

$$Ax = b. \tag{2}$$

Матрица A называется матрицей системы (1), а матрица

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}$$

называется *расширенной* матрицей системы (1). Свойства матрицы B нам потребуются в п. 5.3 при более детальном изучении свойств системы (1), а сейчас мы вновь рассмотрим случай, когда $m = n$, т. е. матрица A является квадратной. Допустим, что матрица A обратима. Тогда, умножая обе части равенства (2) слева на A^{-1}, получим

$$x = A^{-1}b. \tag{3}$$

Обратно, умножая соотношение (3) слева на A, получим (2). Таким образом, условия (2), (3) равносильны, и потому формулу (3) можно рассматривать как формулу, решающую систему уравнений (1) при условии, что матрица системы обратима.

До сих пор мы даже не предполагали, что кольцо K коммутативно. Предположим теперь, что K — поле. Тогда обратимость

матрицы A будет равносильна ее невырожденности, обратная матрица будет выражаться указанным выше образом через присоединенную и формулу (3) можно будет переписать в следующем виде

$$x = |A|^{-1}A^*b.$$

Подставляя вместо матрицы A^* ее выражение через алгебраические дополнения определителя $|A|$ и производя справа умножение, получим

$$\xi_j = \frac{A_{1j}\beta_1 + \ldots + A_{nj}\beta_n}{|A|},$$

или, в окончательной форме,

$$\xi_j = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1,j-1} & \beta_1 & \alpha_{1,j+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2,j-1} & \beta_2 & \alpha_{2,j+1} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{n,j-1} & \beta_n & \alpha_{n,j+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Для проверки достаточно разложить определитель, находящийся в числителе, по элементам j-го столбца.

Система линейных уравнений над полем называется *крамеровской*, если число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель матрицы системы отличен от нуля. Мы видим, следовательно, что *каждая крамеровская система линейных уравнений имеет одно и только одно решение* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *и это решение дается формулами* (4). Формулы (4) называются *формулами Крамера* и честь математика передали придумавшего соответствующие Крамера, в работе которого они, по-видимому, впервые появились. Для $n = 2$ и $n = 3$ формулы Крамера подробно были выписаны в п. 2.1.

Формулы Крамера дают явную зависимость выражения решения крамеровской системы уравнений через коэффициенты этих уравнений. Тем не менее фактическое вычисление решений линейной системы по формулам Крамера вести нецелесообразно. В самом деле, для того чтобы воспользоваться формулами Крамера, надо вычислить значение $n + 1$ определителей порядка n. Согласно грубым оценкам, сделанным в п. 2.2, при этом придется выполнить около n^4 умножений и сложений. В то же время обычный способ последовательного исключения неизвестных требует, как мы сейчас проверим, значительно меньшего числа операций, это способ, надлежащим образом упорядоченный, ныне называется *алгоритмом Гаусса*.

Итак, рассмотрим снова систему линейных уравнений (1), коэффициенты которой взяты из некоторого поля K. Если все коэффициенты какого-то уравнения равны нулю, то вычеркиваем

сего из системы. Если коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а $\beta \neq 0$, то система решений не имеет. Поэтому можно предположить, что некоторые из коэффициентов при неизвестных в первом уравнении отличны от нуля. Тогда, изменяя, если надо, нумерацию неизвестных, мы приведем систему к виду (1), где $\alpha_{11} \neq 0$. Вычисляем α_{11}^{-1} и умножаем все члены 1-го уравнения на α_{11}^{-1}. Затем из каждого 2-го, 3-го, ..., m-го уравнения вычитаем почленно 1-е уравнение, умноженное соответственно на $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \ldots, \alpha_{m1}$. После этого наша первоначальная система будет равносильна системе вида

$$\begin{aligned} \xi_1 + \alpha'_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha'_{1n}\xi_n &= \beta'_1, \\ \alpha'_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha'_{2n}\xi_n &= \beta'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha'_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha'_{mn}\xi_n &= \beta'_m. \end{aligned} \tag{5}$$

Для перехода от системы (1) к системе (5) мы произвели одно обращение, mn умножений и $n(m-1)$ сложений. Поступая далее таким же образом с последними $m-1$ уравнениями системы (5), мы после одного обращения, $(n-1)(m-1)$ умножений и $(n-1)(m-2)$ сложений придем к системе вида

$$\begin{aligned} \xi_1 + \alpha'_{12}\xi_2 + \alpha'_{13}\xi_3 + \ldots + \alpha'_{1n}\xi_n &= \beta'_1, \\ \xi_2 + \alpha''_{23}\xi_3 + \ldots + \alpha''_{2n}\xi_n &= \beta''_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha''_{m3}\xi_3 + \ldots + \alpha''_{mn}\xi_n &= \beta''_m. \end{aligned}$$

Продолжая указанный процесс, мы можем столкнуться с тремя случаями: а) на каком-то этапе заключим, что система решений не имеет; б) получим систему вида

$$\begin{aligned} \xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \ldots + \gamma_{1r}\xi_r + \gamma_{1, r+1}\xi_{r+1} + \ldots + \gamma_{1n}\xi_n &= \delta_1, \\ \xi_2 + \ldots + \gamma_{2r}\xi_r + \gamma_{2, r+1}\xi_{r+1} + \ldots + \gamma_{2n}\xi_n &= \delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \xi_r + \gamma_{r, r+1}\xi_{r+1} + \ldots + \gamma_{rn}\xi_n &= \delta_r; \end{aligned}$$

в) получим систему вида

$$\begin{aligned} \xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \gamma_{13}\xi_3 + \ldots + \gamma_{1n}\xi_n &= \delta_1, \\ \xi_2 + \gamma_{23}\xi_3 + \ldots + \gamma_{2n}\xi_n &= \delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \xi_{n-1} + \gamma_{n-1, n}\xi_n &= \delta_{n-1}, \\ \xi_n &= \delta_n. \end{aligned} \tag{6}$$

В случае б) выразим ξ_r из последнего уравнения через «свободные» неизвестные $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$. Подставив полученное значение

для ξ_r в предыдущее уравнение, найдем из него ξ_{r-1} и т. д. В результате найдем линейные выражения неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_r$ через «свободные» неизвестные. Придавая «свободным» неизвестным произвольные значения, мы по указанным формулам можем вычислить соответствующие значения для неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_r$ и получить, таким образом, некоторое решение $\xi_1, \ldots, \xi_r, \ldots, \xi_n$ заданной системы. То же самое будет и в случае в). Разница лишь та, что теперь мы получим вполне определенные значения для всех неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Подсчитаем, сколько же операций нам придется выполнить в случае в), чтобы получить решение. Для приведения системы к виду (6) (предполагая $m = n$) нам надо выполнить n обращений,

$$n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$$

умножений и

$$n(n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + 2 \cdot 1 = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$$

сложений. Затем, чтобы из треугольной системы (6) найти неизвестные, надо дополнительно произвести

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

умножений и столько же сложений. Таким образом, чтобы решить систему (1) по способу Гаусса, требуется в общем случае n обращений,

$$\frac{1}{6}n(n^2 - 3n - 1) \approx \frac{1}{3}n^3$$

умножений и

$$\frac{1}{6}n(2n^2 - 3n - 5) \approx \frac{1}{3}n^3$$

сложений.

Заметим теперь, что по способу Гаусса можно вычислять и обратную матрицу A^{-1}. Делается это следующим образом. Пишется система линейных уравнений $Ax = b$, у которой столбцы x и b берутся буквенными. Затем из данной системы по способу Гаусса переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выражаются через переменные $\beta_1, \ldots, \beta_n$. В результате получаются формулы вида

$$\xi_i = \gamma_{i1}\beta_1 + \ldots + \gamma_{in}\beta_n \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Так как из $Ax = b$ следует $x = A^{-1}b$, то матрица $\|\gamma_{ij}\|$ и будет искомой обратной для A. Подсчет числа операций показывает, что при этом достаточно произвести n обращений, $\frac{1}{3}n(4n^2 - 1) \approx \frac{4}{3}n^3$ умножений и $\frac{2}{3}(n^2 - n)(2n - 1) \approx \frac{4}{3}n^3$ сложений.

Изложенные подсчеты количества операций, необходимых для нахождения величины определителя матрицы, решения системы линейных уравнений и обращения матрицы, не учитывают некоторых побочных операций и не принимают во внимание возрастание числа десятичных знаков у промежуточных или складываемых чисел. Тем не менее полученные результаты могут быть полезны для решения вопроса, надо ли решать какую-нибудь практически интересную систему линейных уравнений ручным способом или целесообразно передать заказ в вычислительный центр.

Дополнения и примеры

1. Решить по формулам Крамера систему

$$\begin{aligned} x+y+z&=-2,\\ x+3y-2t&=-4,\\ 2x+z-t&=-1,\\ 2y-z-3t&=-3. \end{aligned}$$

2. По способу Гаусса найти обратные для матриц

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a-1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a-1 \end{bmatrix}.$$

3. Доказать формулу (определитель Вандермонда)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$

4. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \dots & a \\ a & a+x_2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a-x_n \end{vmatrix} = x_1 x_2 \dots x_n \left(1 + \frac{a}{x_1} + \dots + \frac{a}{x_n}\right).$$

5. Если в основном кольце K для любого x из $2x=0$ следует $x=0$, то определитель любой кососимметрической матрицы над K нечетного порядка равен нулю.

6. Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A (над коммутативным кольцом K) порядка n. Вычеркивая из A строки с номерами $i_1, \dots, i_r$ $(1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n)$ и столбцы с номерами $j_1, \dots, j_r$ $(1 \leqslant j_1 < \dots < j_r \leqslant n)$, получим новую матрицу $A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$ порядка $n-r$. Элементы матрицы A, находящиеся на пересечениях вычеркиваемых строк и столбцов, также образуют квадратную матрицу. Порядок последней матрицы равен r. Определитель ее называется *минором* порядка r определителя матрицы A, принадлежащим строкам с номерами $i_1, \dots, i_r$ и столбцам с номерами $j_1, \dots, j_r$. Дополнительный минор называется определитель матрицы $A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$, умноженный на $(-1)^s$, где $s = i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r$. Имеет место следующее обобщение разложения определителя по элементам 1-й и 2-й строк: *если в определителе n-го порядка фиксированы какие-то r строк, то сумма произведений миноров r-го порядка, принадлежащих зафиксированным строкам, на их дополнительные миноры равна величине заданного определителя.*

7. Если заданная квадратная матрица X симметрическая или кососимметрическая, то присоединенная матрица X^* также симметрическая или кососимметрическая.

8. Пусть A — квадратная матрица с перечисленными элементами, x, b — столбцы, элементами которых являются буквы $\xi_1, \dots, \xi_n$ и соответственно $\beta_1, \dots, \beta_n$. Система линейных уравнений $Ax=b$ тогда и только тогда при любых целых значениях $\beta_1, \dots, \beta_n$ имеет целое решение $\xi_1, \dots, \xi_n$, когда $|A| = \pm 1$.

§ 3. Характеристический и минимальный многочлены

Все рассматриваемые в настоящем параграфе матрицы будут предполагаться квадратными, одной и той же степени n. Элементы этих матриц берутся из произвольного фиксированного поля K.

3.1. Подобие матриц. Матрица A называется *подобной* матрице B, если существует такая неособенная матрица X, что

$$A = X^{-1}BX. \tag{1}$$

В этом случае говорят также, что A *получается преобразованием матрицы B при помощи X*. Умножая равенство (1) слева на X и справа на X^{-1}, получим

$$B = XAX^{-1} = (X^{-1})^{-1} A X^{-1},$$

Таким образом, *из подобия A с B следует подобие B с A*. Далее, если

$$A = X^{-1}BX, \quad B = Y^{-1}CY,$$

то подстановкой получим

$$A = (YX)^{-1} C (YX).$$

Следовательно, *две матрицы, подобные третьей, подобны между собой*. Наконец, каждая матрица, очевидно, подобна себе самой.

Эти свойства показывают, что все квадратные матрицы данной степени n с элементами из какого-либо поля K естественно разбиваются на классы подобных. Нахождение необходимых и достаточных условий подобия матриц является одной из основных задач теории матриц. Решение этой задачи будет дано в гл. IV.

Здесь же мы установим только несколько предварительных свойств подобных матриц.

Для того чтобы преобразовать при помощи матрицы X сумму матриц, достаточно преобразовать с помощью X каждое слагаемое.

В самом деле,

$$X^{-1}(A_1 + A_2 + \ldots + A_k)X = X^{-1}A_1X + X^{-1}A_2X + \ldots + X^{-1}A_kX.$$

Для того чтобы преобразовать при помощи матрицы X произведение матриц, достаточно преобразовать каждый сомножитель.

Действительно,

$$X^{-1}A_1X \cdot X^{-1}A_2X \ldots X^{-1}A_kX = X^{-1}A_1A_2 \ldots A_kX,$$

так как произведения XX^{-1}, стоящие в левой части, равны E и их можно вычеркнуть.

Для того чтобы преобразовать степень матрицы, достаточно преобразовать основание степени, т. е.

$$X^{-1}A^mX = (X^{-1}AX)^m.$$

При $m \geqslant 0$ эта формула есть частный случай предыдущей. Если же $m < 0$, то пусть $k = -m$. Тогда

$$X^{-1}A^mX = X^{-1}(A^{-1})^kX = (X^{-1}A^{-1}X)^k = (X^{-1}AX)^{-k} = (X^{-1}AX)^m.$$

Преобразованное значение многочлена от матрицы равно значению многочлена от преобразованной матрицы, иными словами,

$$X^{-1}f(A)X = f(X^{-1}AX). \tag{2}$$

Это утверждение непосредственно вытекает из предыдущих, так как значение многочлена от A получается из A с помощью операций возведения в степень, умножения на число и сложения.

Правила преобразования выражений во многих случаях позволяют значительно упростить вычисления. Например, пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Индукцией легко доказывается, что

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix},$$

то по правилу преобразования степени имеем

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}^n = X^{-1}A^nX = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}.$$

3.2. Характеристический многочлен. Пусть A — квадратная матрица с элементами a_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$). Матрица

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix},$$

где λ — независимая переменная, называется *характеристической матрицей* для A. Ее определитель

$$\varphi(\lambda) = |\lambda E - A| \tag{1}$$

является, очевидно, многочленом относительно λ и называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

Чтобы найти старшие члены этого многочлена, воспользуемся тем, что величина определителя равна сумме произведений его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца и снабженных надлежащими знаками. Поэтому, чтобы получить член, имеющий относительно λ наивысшую степень, необходимо взять произведение элементов наивысшей степени. В нашем случае таким произведением будет только одно — произведение диагональных элементов $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \ldots (\lambda - a_{nn})$. Все остальные входящие в состав определителя произведения имеют степень не выше $n-2$, так как если один из множителей такого произведения будет $-a_{ij}$ ($i \neq j$), то это произведение не будет содержать множителями $\lambda - a_{ii}$, $\lambda - a_{jj}$ и будет, следовательно, степени не более $n-2$. Таким образом, $\varphi(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \ldots (\lambda - a_{nn}) +$ члены степени не выше $n-2$, или

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots \tag{2}$$

Сумма диагональных элементов матрицы называется ее *следом*. Формула (2) показывает, что *степень характеристического многочлена матрицы равна порядку этой матрицы, старший коэффициент характеристического многочлена равен* 1, *а коэффициент при λ^{n-1} равен следу матрицы, взятому с обратным знаком.* Полагая в формуле (3) $\lambda = 0$, мы получим

$$\varphi(0) = |-A| = (-1)^n |A|.$$

Но $\varphi(0)$ есть свободный член характеристического многочлена. Поэтому свободный член характеристического многочлена

матрицы A равен определителю этой матрицы, умноженному на $(-1)^n$, где n — порядок матрицы A.

Следующая теорема указывает на одно из важнейших свойств характеристического многочлена.

Теорема 1. *Характеристические многочлены подобных матриц равны друг другу.*

В самом деле, пусть матрица A подобна матрице B:

$$A = X^{-1}BX.$$

Тогда для характеристического многочлена A получаем

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - X^{-1}BX| = |X^{-1}(\lambda E - B)X| = |X^{-1}| \cdot |\lambda E - B| \cdot |X|.$$

Определители $|X^{-1}|$, $|X|$ взаимно обратны и в произведении дают 1; поэтому

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|,$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает, в частности, что *подобные матрицы имеют одинаковые следы и определители*, так как след и определитель матрицы, взятые с надлежащими знаками, являются коэффициентами ее характеристического многочлена.

Равенство характеристических многочленов является необходимым, но, вообще говоря, не является достаточным признаком подобия матриц. Например, характеристические многочлены матриц

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равны. Однако A не может быть подобна E, так как при любой матрице X

$$X^{-1}EX = X^{-1}X = E.$$

Корни характеристического многочлена матрицы называются ее *характеристическими числами* или *собственными значениями*. Кратные корни характеристического многочлена называются кратными собственными значениями матрицы. Известно, что сумма всех вещественных и комплексных корней многочлена степени n, имеющего старший коэффициент 1, равна взятому с обратным знаком коэффициенту при $(n-1)$-й степени переменной. Формула (2) показывает поэтому, что в *поле комплексных чисел сумма всех собственных значений матрицы равна ее следу*.

Известно, что след суммы матриц равен сумме следов слагаемых, а след произведения числа на матрицу равен произведению этого

числа на след матрицы. Оба эти утверждения можно объединить в одну формулу:

$$\text{след } (\alpha A + \beta B) = \alpha \cdot \text{след } A + \beta \cdot \text{след } B,$$

для доказательства которой достаточно выписать соответствующие матрицы и вычислить их следы.

В п. 1.2 любому многочлену $\varphi(\lambda)$ была поставлена в соответствие матрица $\varphi(A)$, называемая значением многочлена $\varphi(\lambda)$ при $\lambda = A$. Если $\varphi(A) = 0$, говорят, что A есть к о р е н ь $\varphi(\lambda)$.

Теорема Гамильтона — Кэли. *Каждая матрица является корнем своего характеристического многочлена.*

Пусть A — какая-нибудь матрица. Обозначим через B присоединенную матрицу для характеристической матрицы $\lambda E - A$ (см. п. 2.3). Элементы матрицы B обозначим через β_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Эти элементы являются алгебраическими определителями $|\lambda E - A|$ и поэтому представляют собой многочлены от λ, степень которых не превосходит $n-1$. Пусть

$$\beta_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}\lambda + \ldots + b_{ij}^{(n-1)}\lambda^{n-1}.$$

Составим вспомогательные числовые матрицы

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \ldots & b_{1n}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & \ldots & b_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \ldots & b_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Тогда матрицу B можно будет, очевидно, представить в следующем виде:

$$B = B^{(0)} + \lambda B^{(1)} + \ldots + \lambda^{n-1}B^{(n-1)}.$$

По основному свойству присоединенных матриц

$$B(\lambda E - A) = |\lambda E - A| \cdot E. \tag{3}$$

Здесь $|\lambda E - A|$ есть характеристический многочлен матрицы A, который мы обозначим через $\varphi(\lambda)$. Пусть

$$\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

Теперь равенство (3) можно переписать более подробно:

$$(B^{(0)} + \lambda B^{(1)} + \ldots + \lambda^{n-1}B^{(n-1)})(\lambda E - A) = (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n) \cdot E.$$

Раскрывая скобки и сравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях λ, получим

$$\begin{aligned} -B^{(1)}A &= \alpha_1 E,\\ B^{(1)}A - B^{(2)} &= \alpha_2 E,\\ B^{(2)}A - B^{(3)} &= \alpha_3 E,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ B^{(n-1)}A &= \alpha_{n-1}E,\\ B^{(n-1)} &= E. \end{aligned}$$

Умножим эти равенства соответственно на $E, A, \dots, A^n$ справа и сложим. Все члены левой части уничтожатся, и мы получим

$$O = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + A^n,$$

т. е. $\varphi(A) = O$, это и требовалось.

3.3. **Минимальный многочлен.** Рассмотрим всевозможные ненулевые многочлены $f(\lambda)$, корнем которых является некоторая заданная матрица A. Такие многочлены существуют; к ним относится, например, характеристический многочлен матрицы A. Ненулевой многочлен наивысшей степени со старшим коэффициентом 1, имеющий своим корнем матрицу A, называется *минимальным многочленом* этой матрицы.

Каждая матрица A имеет только один минимальный многочлен. В самом деле, если бы их было два, например $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, то разность $\psi_1(\lambda) - \psi_2(\lambda)$ была бы ненулевым многочленом более низкой степени, корнем которого снова являлась бы матрица A. Разделив эту разность на ее старший коэффициент, мы получили бы многочлен со старшим коэффициентом 1, корнем которого являлась бы матрица A и который имел бы более низкую степень, чем минимальные многочлены $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, что противоречит определению минимальных многочленов.

Всякий многочлен $f(\lambda)$, корнем которого является матрица A, делится без остатка на минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ этой матрицы.

Действительно, пусть, наоборот, $f(\lambda)$ не делится на $\psi(\lambda)$. Обозначая через $q(\lambda)$ частное, через $r(\lambda)$ остаток от деления $f(\lambda)$ на $\psi(\lambda)$, будем иметь

$$f(\lambda) = \psi(\lambda)\, q(\lambda) + r(\lambda).$$

Подставив сюда $\lambda = A$ и пользуясь тем, что $\psi(A) = f(A) = O$, мы получим $r(A) = O$. Но степень остатка $r(\lambda)$ меньше степени делителя $\psi(\lambda)$. Поэтому $r(\lambda)$ является ненулевым многочленом, корнем которого является матрица A и степень которого меньше степени минимального многочлена $\psi(\lambda)$, что противоречиво. Наше утверждение доказано. В частности, *минимальный многочлен матрицы является делителем ее характеристического многочлена.*

Мы знаем, что подобные матрицы имеют один и тот же характеристический многочлен. Тем же свойством обладает и минимальный многочлен: подобные матрицы имеют *одинаковые* минимальные многочлены. В самом деле, пусть A подобна B: $A = X^{-1}BX$. Если $f(\lambda)$ — какой-либо многочлен, имеющий своим корнем B, то согласно п. 3.1

$$f(A) = f(X^{-1}BX) = X^{-1}f(B)\,X = O.$$

Таким образом, совокупность многочленов, имеющих своим корнем одну из подобных матриц, совпадает с совокупностью многочленов, имеющих своим корнем другую. Поэтому многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, принадлежащий этой совокупности, будет минимальным многочленом для обеих матриц.

Равенство минимальных многочленов является еще одним необходимым условием подобия матриц. Однако это условие снова не является достаточным. Рассмотрим, например, матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Характеристические многочлены их равны соответственно

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 \quad \text{и} \quad (\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Поскольку эти многочлены различны, то A и B не подобны. Минимальный многочлен матрицы A должен быть делителем ее характеристического многочлена, т. е. должен совпадать с одним из следующих многочленов: $\lambda - 2$, $\lambda - 3$, $(\lambda - 3)^2$, $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$, $(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$. Подставляя снова вместо λ матрицу A, мы найдем, что первый раз нуль получится для многочлена $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Следовательно, этот многочлен и будет минимальным для матрицы A. Совершенно тем же способом найдем, что минимальным многочленом матрицы B будет снова многочлен $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Итак, минимальные многочлены матриц A, B равны, а сами матрицы A, B не подобны.

В п. 1.4 упоминалось, что матрицы вида

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix},$$

где $A_1, \dots, A_s$ — квадратные матрицы, называются *распадающимися на клетки* $A_1, \dots, A_s$ или *распадающимися в прямую сумму* этих клеток.

Характеристический многочлен распавшейся матрицы равен произведению характеристических многочленов ее диагональных клеток.

В самом деле, если A распадается на клетки $A_1, \ldots, A_s$, то ее характеристическая матрица, как легко видеть, имеет вид

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda E_1 - A_1 & & & \\ & \lambda E_2 - A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_s - A_s \end{bmatrix},$$

где $E_1, \ldots, E_s$ — единичные матрицы соответственных порядков. Из п. 2.1 известно, что определитель распавшейся матрицы равен произведению определителей ее диагональных клеток. Следовательно,

$$|\lambda E - A| = |\lambda E_1 - A_1| \cdot |\lambda E_2 - A_2| \ldots |\lambda E_s - A_s|,$$

что и требовалось.

Минимальный многочлен распавшейся матрицы равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов ее диагональных клеток.

Пусть матрица A распадается на клетки $A_1, \ldots, A_s$. Обозначим через $\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_s(\lambda)$ их соответственные минимальные многочлены. Рассмотрим произвольный многочлен $f(\lambda)$. Если $f(A) = 0$, то из формулы (7) п. 1.4 следует, что $f(A_1) = \ldots = f(A_s) = 0$. Но всякий многочлен, корнем которого является матрица A_i, должен делиться на минимальный многочлен $\psi_i(\lambda)$ этой матрицы. Следовательно, $f(\lambda)$ есть общее кратное многочленов $\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_s(\lambda)$. Обратно, если какой-либо многочлен $f(\lambda)$ есть общее кратное от $\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_s(\lambda)$, то, очевидно, $f(A) = 0$. Таким образом, чтобы получить минимальный многочлен матрицы A, надо взять общее кратное многочленов $\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_s(\lambda)$ наименьшей степени, т. е. взять их наименьшее общее кратное, что и требовалось.

Клеточная матрица A называется *полураспавшейся* или *клеточно-треугольной*, если все ее диагональные клетки квадратные, а клетки, стоящие по какую-либо одну сторону от главной диагонали, заполнены нулями. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что нулевые клетки полураспавшейся матрицы стоят над главной диагональю. Таким образом, полураспавшиеся клеточные матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где $A_{11}, \ldots, A_{ss}$ — квадратные клетки, а все клетки, стоящие над ними, заполнены нулями.

Пусть B — какая-либо вторая полураспавшаяся матрица, диагональные клетки которой имеют ту же степень, что и соответственные клетки матрицы A. На основании правила действия с клеточными матрицами имеем

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & & & \\ B_{21} & B_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ B_{s1} & B_{s2} & \ldots & B_{ss} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & & & \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ A_{s1} + B_{s1} & A_{s2} + B_{s2} & \ldots & A_{ss} + B_{ss} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & & & \\ B_{21} & B_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ B_{s1} & B_{s2} & \ldots & B_{ss} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & & & \\ C_{21} & A_{22}B_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ C_{s1} & C_{s2} & \ldots & A_{ss}B_{ss} \end{bmatrix},$$

где $C_{ij} = A_{ij}B_{jj} + A_{i,\,j+1}B_{j+1,\,j} + \ldots + A_{ii}B_{ij}$. Следовательно, *сумма и произведение полураспавшихся матриц являются полураспавшимися матрицами, диагональные клетки которых равны суммам и произведениям соответствующих клеток исходных матриц.* В частности, если $f(\lambda)$ — некоторый многочлен от λ и A — полураспавшаяся матрица вида (1), то

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(A_{11}) & & & \\ D_{21} & f(A_{22}) & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ D_{s1} & D_{s2} & \ldots & f(A_{ss}) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

(клетки D_{ij} имеют более сложное строение). Из § 2 известно, что определитель полураспавшейся матрицы равен произведению определителей ее диагональных клеток.

Отсюда непосредственно следует, что *характеристический многочлен полураспавшейся матрицы равен произведению характеристических многочленов диагональных клеток этой матрицы.*

Если полураспавшаяся матрица A состоит из клеток степени 1, то A называется также имеющей *треугольную форму* или просто *треугольной матрицей*. Собственные значения треугольной матрицы равны ее диагональным элементам. Из формулы (2) следует также, что если $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ — собственные значения треугольной матрицы, то $f(\zeta_1), f(\zeta_2), \ldots, f(\zeta_n)$ будут собственными значениями матрицы $f(A)$.

Примеры и задачи

1. Матрица называется *нильпотентной*, если некоторая ее степень равна нулевой матрице. Доказать, что полураспавшаяся матрица тогда и только тогда нильпотентна, когда нильпотентны ее диагональные клетки.

2. Используя теорему Гамильтона—Кэли, доказать, что если в поле комплексных чисел все собственные значения матрицы равны нулю, то матрица нильпотентна.

3. Показать, что если в прямой сумме матриц переставить слагаемые, то новая сумма будет матрицей, *подобной* старой сумме.

4. Вычислить характеристические многочлены и собственные значения матриц

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{bmatrix}.$$

5. Найти минимальные многочлены матриц

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

6. Показать, что собственные значения диагональной матрицы являются ее диагональными элементами.

7. Доказать формулу

$$\operatorname{след}(AB)=\operatorname{след}(BA).$$

8. Если из какой-либо квадратной матрицы порядка n вычеркнуть m строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ и m столбцов с теми же номерами, то определитель оставшейся матрицы порядка $n-m$ называется *главным минором* степени $n-m$. Показать, что коэффициент при λ^m характеристического многочлена матрицы A равен сумме всех ее главных миноров степени $n-m$, умноженных на $(-1)^{n-m}$.

9. Показать, что характеристический многочлен матрицы AB совпадает с характеристическим многочленом матрицы BA.

10. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ — собственные значения матрицы A, а собственными значениями матрицы $f(A)$, где $f(\lambda)$ — некоторый многочлен, будут $f(\zeta_1), f(\zeta_2), \ldots, f(\zeta_n)$.

Глава II

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Размерность

1.1. **Модули и векторные пространства.** Произвольное непустое множество элементов $\mathfrak{V}$ называется *модулем* (или *некоторым модулем* K), если выполняются следующие условия:

а) дано правило, как для любой пары элементов a, b из $\mathfrak{V}$ найти в $\mathfrak{V}$ некоторый элемент, называемый *суммой* двух первых и обозначаемый символически $a+b$;

б) дано правило, как для любого числа α из K и любого элемента a из $\mathfrak{V}$ найти в $\mathfrak{V}$ новый элемент, называемый *произведением* α *на* a и обозначаемый αa;

в) операции сложения и умножения на число удовлетворяют следующим требованиям:

1° сложение коммутативно:

$$a+b=b+a;$$

2° сложение ассоциативно:

$$a+(b+c)=(a+b)+c;$$

3° возможно вычитание, т. е. для каждых двух элементов a, b из $\mathfrak{V}$ в $\mathfrak{V}$ существует элемент x такой, что

$$a+x=b;$$

4° умножение ассоциативно:

$$\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a;$$

5° умножение дистрибутивно по отношению к сложению в $\mathfrak{V}$:

$$\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b;$$

6° умножение дистрибутивно по отношению к сложению чисел:

$$(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a.$$

Если кольцо K имеет единицу 1, то обычно еще требуют, чтобы выполнялось условие

7° $$1\cdot a=a \quad (a\in\mathfrak{V}).$$

В этом случае модуль называется *унитарным*. Унитарный модуль над телом K называется *линейным* или *векторным пространством* над K. Элементы модулей и векторных пространств называются *векторами* и в дальнейшем обозначаются малыми латинскими буквами a, b, x, y, ... Линейные пространства и совокупности векторов будут обозначаться большими готическими буквами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}$, ...

В приведенном выше определении векторы умножались на элементы кольца K слева. По этой причине определенные выше модули и пространства называются также левыми модулями и левыми пространствами над K. Если потребовать, чтобы были определены произведения элементов x на элементы K справа, изменив при этом соответственным образом аксиомы $4^\circ - 7^\circ$, то получится структура, называемая правым модулем, соответственно правым линейным пространством. Ясно, что свойства левых и правых пространств одинаковы, и различать левое и правое умножение важно тогда, когда они определены одновременно. Ниже левые пространства над K называются просто пространствами над K.

Линейное пространство над полем комплексных чисел называется *комплексным линейным пространством*, а над полем вещественных чисел — *вещественным линейным пространством*. Основные примеры модулей и линейных пространств будут указаны ниже, а сначала рассмотрим простейшие следствия, которые непосредственно вытекают из аксиом $1^\circ - 7^\circ$.

Прежде всего, условие а) и аксиомы 2°, 3° показывают, что каждый модуль есть группа относительно операции сложения векторов, причем аксиома 1° требует, чтобы эта группа была коммутативной. Поэтому, как и в любой коммутативной группе, сумма конечного числа векторов не зависит ни от порядка слагаемых в этой сумме, ни от способа расстановки скобок. Например,

$$(a+b)+(c+d)=a+[b+(d+b)].$$

Далее, в произвольном модуле, как в любой аддитивной группе, среди векторов имеется единственный вектор, обозначаемый нами через o, обладающий тем свойством, что для любого вектора x рассматриваемого модуля

$$x+o=o+x=x.$$

Вектор o называется *нулевым вектором* или просто *нулем* модуля. Кроме того, для любого вектора a модуля $\mathfrak{A}$ в этом модуле существует один и только один вектор y, удовлетворяющий уравнению

$$a+y=o.$$

Этот вектор y обозначается через $-a$ и называется *противоположным* относительно a.

Из аксиом 1°, 2°, 3° вытекает, что $-o=o$ и для любых a, b

$$-(-a)=a,\quad -(a+b)=(-a)+(-b).$$

В выражениях типа $(-a)+b+(-c)$ принято опускать скобки и писать $-a+b-c$. Бинарная операция $-$, определенная формулой

$$x-y=x+(-y),$$

называется операцией *вычитания* векторов. То, что один и тот же символ обозначает два разные операции (операцию перехода к противоположному вектору и бинарную операцию вычитания), в дальнейшем никаких неудобств не вызовет.

До сих пор были сформулированы лишь те свойства модулей, которые присущи им, как коммутативным группам по сложению, т. е. вытекают из аксиом $1^\circ - 3^\circ$. Принимая во внимание аксиомы $4^\circ - 7^\circ$, легко получаем тождества

$$0\cdot a=o,$$

$$na=a+a+\ldots+a$$

(n слагаемых, n — целое положительное),

$$(-\alpha)\cdot a=-(\alpha a),$$

$$\alpha\cdot o=o.$$

В самом деле, первое следует из того, что

$$a=(1-0)a=1\cdot a-0\cdot a=a+0\cdot a,$$

второе доказывается следующим образом:

$$na=(1+\ldots+1)a=1\cdot a+\ldots+1\cdot a=a+\ldots+a.$$

Далее, так как

$$\alpha a+(-\alpha)a=(\alpha-\alpha)a=o,$$

то $(-\alpha)a=-(\alpha a)$. Наконец, четвертое равенство следует из того, что

$$\alpha\cdot o+\alpha a=\alpha(o+a)=\alpha a.$$

Отметим также, что когда K — тело, то из $\alpha a=o$ вытекает, что или $\alpha=0$, или $a=o$. В самом деле, если $\alpha\neq 0$, то, умножая соотношение $\alpha a=o$ на число α^{-1}, получим $a=o$.

Выражения вида

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_s a_s$$

называется *линейной комбинацией* векторов $a_1, a_2, \ldots a_s$. Наши рассуждения показывают, что линейные комбинации можно складывать, вычитать, умножать на числа, а также приводить в них подобные члены по обычным правилам.

Наиболее известным примером линейного пространства является совокупность направленных отрезков, выходящих из какой-либо фиксированной точки O нашего обыкновенного пространства. Умножить отрезок на положительное вещественное число α — это значит увеличить его длину в α раз, не меняя направления. Если α отрицательно, то умножение отрезка на α означает увеличение его длины в $|\alpha|$ раз и изменение направления на прямо противоположное. Аналогично сложить два отрезка — значит взять диагональ параллелограмма, построенного на них. Нулевым вектором будет отрезок, начало и конец которого совпадают с точкой O. Поскольку операция умножения отрезка на число определена только для вещественных чисел, то основным полем K здесь является поле всех вещественных чисел, и пространство направленных отрезков есть *вещественное* линейное пространство. Это пространство мы будем всегда называть пространством обыкновенных векторов-отрезков и обозначать R.

Более общим, а для всей теории линейных пространств и основным примером линейных пространств является *пространство строк*. Рассмотрим множество всех последовательностей вида $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — числа некоторого тела K, n — заданное целое число. Эти последовательности мы будем называть такие *строками* и рассматривать их как матрицы, состоящие из одной строки. Две строки называются *равными*, если равны их соответственные элементы. Действия сложения строк и умножения на число определяются по соответственным матричным формулам

$$\beta[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\beta\alpha_1, \ldots, \beta\alpha_n],$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] + [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] = [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n].$$

Ясно, что аксиомы 1°—7° здесь выполняются и совокупность всех строк длины n с элементами из тела K является *линейным пространством над* K. Если в качестве K взять произвольное кольцо, то получится пример *модуля над* K.

Вместо строк можно рассматривать матрицы, имеющие произвольное фиксированное число строк и столбцов с элементами из кольца K. Любую такую матрицу можно по правилам матричного исчисления умножить на число из K, и любые две можно сложить — в результате получится матрица того же вида. Аксиомы 1°—7° здесь, очевидно, снова выполняются, и, таким образом,

матрицы с m строками и n столбцами образуют относительно операций сложения и умножения на число модуль над K или линейное пространство, если K — тело.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество каких-либо элементов и K — некоторое кольцо. Предположим, что нам задан некоторый закон, ставящий каждому элементу m множества $\mathfrak{M}$ в соответствие определенное число из K. Каждый такой закон называется *функцией*, определенной на множестве $\mathfrak{M}$ со значениями в K. Если функцию обозначить какой-либо буквой f, то через $f(m)$ обозначается число, отвечающее элементу m. Число $f(m)$ называется значением функции f на элементе m. Если функции f, g для всех m из $\mathfrak{M}$ удовлетворяют равенству $f(m) = g(m)$, то их называют *равными*. Для функций, заданных на $\mathfrak{M}$, обычным образом определяются операции умножения на число, сложения и перемножения функций. Например, если задано число α и функция f, то, ставя в соответствие каждому элементу m из $\mathfrak{M}$ число $\alpha f(m)$, мы получим новую функцию, которую называют произведением числа α на функцию f. Аналогично определяются сумма и произведение двух функций. Если из этих операций рассматривать только две первые — умножение на число и сложение, то легко убедиться, что аксиомы модуля будут выполняться. Следовательно, совокупность всех функций, определенных на некотором заданном множестве $\mathfrak{M}$, со значениями из какого-либо кольца K образует *модуль над* K. Как и выше, если исходное кольцо K является телом, то получим пример *векторного пространства*.

В случае, когда $\mathfrak{M}$ состоит из конечного числа элементов, для функций, определенных на $\mathfrak{M}$, можно ввести более удобную запись. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_s$ — элементы множества $\mathfrak{M}$. Обозначим через $[m_i]$ функцию, равную 1 на m_i и равную 0 на всех остальных элементах $\mathfrak{M}$ ($i = 1, \ldots, s$). Тогда произведение $\alpha[m_i]$ будет функцией, равной α на m_i и 0 на всех остальных элементах $\mathfrak{M}$, а выражение

$$\alpha_1[m_1] + \alpha_2[m_2] + \ldots + \alpha_s[m_s], \tag{1}$$

очевидно, будет функцией, равной α_1 на m_1, α_2 на m_2, ..., α_s на m_s. Следовательно, каждая функция, определенная на $\mathfrak{M}$, может быть записана в виде (1), и такая запись, как легко видеть, возможна только единственным способом. Если нет опасности смешения, то скобки в (1) опускают и вместо (1) пишут более кратко:

$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \ldots + \alpha_s m_s,$$

причем члены с нулевыми коэффициентами вообще не выписывают. Например, если $\mathfrak{M}$ состоит из букв a, b, c, то $2a - c$ означает функцию, равную 2 на a, нулю на b и -1 на c.

4.2. Линейная зависимость. Пусть $\mathfrak{L}$ — какое-либо векторное пространство над телом коэффициентов K и $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — его векторы. Соотношение вида

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = o,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — некоторые числа из K, называется *линейной зависимостью* между векторами $a_1, \ldots, a_m$. Если все коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ равны нулю, то зависимость называется *тривиальной*. В противном случае, т. е. когда по меньшей мере один из коэффициентов отличен от нуля, зависимость называется *нетривиальной*. Ясно, что тривиальная зависимость существует между любыми векторами. Ответ на вопрос — существует или нет нетривиальная зависимость — зависит от рассматриваемых векторов. Например, в пространстве строк длины 3 между векторами $a = [1, 4, 6]$, $b = [1, -1, 1]$, $c = [1, 1, 3]$ существует линейная зависимость

$$2a + 3b - 5c = o.$$

С другой стороны, в том же пространстве между векторами $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1]$ никакой нетривиальной линейной зависимости нет, так как соотношение

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = o$$

означает, что

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [0, 0, 0],$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Конечная система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ какого-нибудь линейного пространства называется линейно зависимой, если между ними существует нетривиальная линейная зависимость.

Если такой зависимости нет, т. е. если из всякого соотношения вида

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = o$$

следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то система $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется *линейно независимой*.

Из этого определения непосредственно вытекает, что *если к линейно зависимой системе векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ присоединить еще несколько векторов $b_1, \ldots, b_k$, то расширенная система останется линейно зависимой*. В самом деле, если

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = o$$

— нетривиальное соотношение между $a_1, \ldots, a_m$, то

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m + 0 \cdot b_1 + \ldots + 0 \cdot b_k = o$$

будет нетривиальным соотношением между $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_k$.

В вопросах, связанных с линейной зависимостью, нулевой вектор o занимает особое место, так как всякая система, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой. Для доказательства достаточно заметить, что соотношение

$$1 \cdot o + 0 \cdot a_1 + \ldots + 0 \cdot a_m = o$$

является нетривиальной линейной зависимостью, имеющей место при любых $a_1, \ldots, a_m$.

Данное выше определение линейно зависимой системы предполагает, что эта система содержит только конечное число векторов. Однако часто приходится рассматривать и бесконечные системы. Мы условимся бесконечную систему векторов называть *линейно зависимой*, если линейно зависимой будет какая-нибудь конечная часть ее. Следующий пример показывает, что бесконечные линейно независимые системы векторов существовать могут. Рассмотрим совокупность всех многочленов от буквы λ с коэффициентами из некоторого тела K. Эти многочлены относительно операций сложения и умножения на числа из K, очевидно, образуют линейное пространство. Многочлены

$$1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^m, \ldots$$

составляют в этом пространстве линейно независимую систему. Действительно, любая ее конечная часть

$$\lambda^{m_1}, \lambda^{m_2}, \ldots, \lambda^{m_k}$$
$$(0 \leqq m_1 < m_2 < \ldots < m_k)$$

линейно независима, так как из

$$\alpha_1 \lambda^{m_1} + \alpha_2 \lambda^{m_2} + \ldots + \alpha_k \lambda^{m_k} = o$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Рассмотрим снова произвольное линейное пространство $\mathfrak{L}$. Если какой-либо его вектор a можно представить в форме

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m,$$

то говорят, что a *выражается линейно через $a_1, a_2, \ldots, a_m$* или что a *линейно зависит от $a_1, \ldots, a_m$*.

Если векторы $a_1, \ldots, a_m$ выражаются линейно через $b_1, \ldots, b_k$, а $b_1, \ldots, b_k$ выражаются линейно через $c_1, \ldots, c_p$, то $a_1, \ldots, a_m$ выражаются линейно через $c_1, \ldots, c_p$.

Для доказательства достаточно в линейные выражения векторов $a_1, \ldots, a_m$ через $b_1, \ldots, b_k$ подставить вместо $b_1, \ldots, b_k$ их выражения через $c_1, \ldots, c_p$ и привести подобные члены.

Теорема 1. *Если система некоторых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, рассматриваемых в определенном порядке, линейно зависима, то*

по меньшей мере один из этих векторов можно выразить линейно через предыдущие. Обратно, если один из векторов этой последовательности выражается линейно через предыдущие, то система линейно зависима.

Пусть между векторами $a_1, a_2, \ldots, a_m$ существует нетривиальная зависимость

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = o. \qquad (1)$$

Обозначим через α_k последний коэффициент, отличный от нуля. Если $k=1$, то соотношение (1) обращается в

$$\lambda_1 a_1 = o \qquad (\lambda_1 \neq 0),$$

откуда $a_1 = o$ вопреки предположению, что система не содержит нулевых векторов. Следовательно, $1 \leqslant k \leqslant m$, и соотношение (1) мы можем переписать в виде

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = o \qquad (\lambda_k \neq 0),$$

откуда

$$a_k = -\lambda_k^{-1}\lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda_k^{-1}\lambda_{k-1} a_{k-1}.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана. Обратное утверждение очевидно.

Пусть $\mathfrak{M}$ — какое-нибудь множество векторов линейного пространства $\mathfrak{L}$. Система векторов $a_1, a_2, \ldots$ этого множества называется *системой образующих для* $\mathfrak{M}$, если всякий вектор из $\mathfrak{M}$ может быть выражен линейно через какое-либо конечное число векторов $a_1, a_2, \ldots$. Линейно независимая система образующих для $\mathfrak{M}$ называется *базой* или *базисом* множества $\mathfrak{M}$. Например, в пространстве всех многочленов от λ многочлены

$$1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^m, \ldots \qquad (2)$$

образуют базу, так как эти многочлены, как мы видели выше, линейно независимы и, с другой стороны, всякий многочлен имеет вид

$$\lambda_0 + \lambda_1\lambda + \lambda_2\lambda^2 + \ldots + \lambda_m\lambda^m,$$

т. е. выражается линейно через $1, \lambda, \ldots, \lambda^m$.

Лемма. *Если система образующих $a_1, a_2, \ldots$ множества $\mathfrak{M}$ содержит элемент a_i, который можно линейно выразить через остальные образующие, то, выбросив a_i из системы образующих, мы снова получим систему образующих для $\mathfrak{M}$.*

В самом деле, по условию каждый вектор из $\mathfrak{M}$ является линейной комбинацией некоторого конечного числа образующих. Заменяя в этих комбинациях вектор a_i его выражением через остальные образующие, мы получим выражение любого элемента $\mathfrak{M}$ через образующие, отличные от a_i, что и требовалось.

Теорема 2. *Из всякой системы образующих пространства $\mathfrak{L}$ можно выбрать базу этого пространства.*

Пусть $\mathfrak{L}$ имеет конечную систему образующих $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Выбрасывая из этой системы векторы, выражающиеся линейно через предыдущие, мы получим некоторую систему векторов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, которая согласно лемме все еще будет системой образующих пространства $\mathfrak{L}$. Так как ни один из векторов последней системы не может быть выражен линейно через предыдущие, то в силу теоремы 1 эта система линейно независима и, следовательно, является базой пространства.

Мы доказали теорему 2 в предположении, что система образующих содержит конечное число элементов. Однако эта теорема верна и в случае бесконечной системы образующих. Для доказательства достаточно рассматривать образующие в трансфинитную последовательность $a_1, a_2, \ldots a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots$ и выбрасывать из нее элементы, выражающиеся линейно через предыдущие.

Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — база пространства $\mathfrak{L}$. Согласно определению базы всякий вектор из $\mathfrak{L}$ будет линейно выражаться через конечное число базисных векторов. Покажем, что такое выражение возможно только единственным образом. В самом деле, пусть

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s$$

и

$$a = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_s a_s.$$

Вычитая, мы получим

$$o = (\alpha_1 - \beta_1) a_1 + (\alpha_2 - \beta_2) a_2 + \ldots + (\alpha_s - \beta_s) a_s.$$

Так как $a_1, a_2, \ldots$ линейно независимы, то $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \alpha_s - \beta_s = 0$, или $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_s = \beta_s$, что и требовалось.

Если линейное пространство $\mathfrak{L}$ имеет хотя бы одну базу, состоящую из конечного числа элементов, то $\mathfrak{L}$ называется *конечномерным*. Более подробно, $\mathfrak{L}$ называется конечномерным, если в $\mathfrak{L}$ можно выбрать такую конечную линейно независимую систему векторов, через которую все векторы из $\mathfrak{L}$ выражаются линейно.

Понятие базы неприменимо к нулевому пространству. Однако мы будем считать, что нулевое пространство также конечномерно.

Теорема 3. *Все базы конечномерного линейного пространства $\mathfrak{L}$ состоят из одного и того же конечного числа векторов. Это число называется размерностью пространства $\mathfrak{L}$. Размерностью нулевого пространства называется число нуль.*

Согласно определению в $\mathfrak{L}$ найдется база, состоящая из конечного числа векторов. Пусть эта база будет

$$a_1, a_2, \ldots, a_n. \qquad (3)$$

Покажем, что число векторов любой другой базы

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots \qquad (4)$$

не может превосходить n. В самом деле, рассмотрим систему

$$x_1, a_1, a_2, \ldots, a_m. \tag{5}$$

Так как система (3) является системой образующих $\mathfrak{L}$, т. е. всякий вектор ξ выражается линейно через векторы (3), то тем более обладает этим свойством и система (5). Однако система (5) линейно зависима, так как первый ее вектор x_1 может быть линейно выражен через остальные. Применяя к последовательности (5) теорему 3, мы видим, что один из векторов этой последовательности, например a_1, должен выражаться линейно через предыдущие. Выбрасывая из (5) вектор a_1, мы получим новую последовательность

$$x_1, a_1', \ldots, a_{m-1}', \tag{6}$$

где через $a_1', \ldots, a_{m-1}'$ обозначены оставшиеся из векторов $a_1, \ldots, a_m$. В силу леммы система (6) будет все еще системой образующих для $\mathfrak{L}$. Рассмотрим теперь последовательность

$$x_2, x_1, a_1', \ldots, a_{m-1}'. \tag{7}$$

Эта последовательность линейно зависима, так как вектор x_1 выражается линейно через остальные ее элементы. Следовательно, по теореме 1 один из векторов этой системы должен выражаться линейно через *предыдущие*. Этот вектор должен быть одним из $a_1', \ldots, a_{m-1}'$, так как x_2 и x_1 по предположению линейно независимы. Выбрасывая его из последовательности (7), мы получим последовательность

$$x_2, x_1, a_1'', \ldots, a_{m-2}'', \tag{8}$$

где через $a_1'', \ldots, a_{m-2}''$ обозначены оставшиеся векторы из $a_1', \ldots, a_{m-1}'$. Поскольку последовательность (7) являлась системой образующих $\mathfrak{L}$, то согласно лемме последовательность (8) также будет системой образующих для $\mathfrak{L}$. Присоединяя теперь к последовательности (8) вектор x_3, из новой последовательности выбрасываем вектор, выражающийся линейно через предыдущие, и т. д. Если бы число векторов x_i было больше n, то через n шагов мы получили бы последовательность

$$x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1, \tag{9}$$

совсем не содержащую векторов $a_1, \ldots, a_m$, причем эта последовательность была бы системой образующих для $\mathfrak{L}$. Это означает, что все векторы пространства $\mathfrak{L}$ можно было бы выразить линейно через векторы (9). В частности, можно было бы выразить линейно через векторы (9) и вектор x_{n+1}, что противоречит линейной независимости векторов $x_1, x_2, \ldots$. Следовательно, база (3) не может содержать векторов больше, чем база (3), и, таким

образом, все базы $\mathfrak{L}$ состоят из *конечного* числа векторов. Однако в качестве базы (3) была взята произвольная конечная база. Поэтому наше рассуждение показало, что число векторов одной базы не может быть меньше числа векторов любой другой, т. е. что все базы $\mathfrak{L}$ имеют одинаковое число векторов.

Теорема 4. *Для каждой линейно независимой системы векторов $a_1, \ldots, a_m$ конечномерного пространства $\mathfrak{L}$ можно найти в $\mathfrak{L}$ такие векторы $a_{m+1}, \ldots, a_n$, что система $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ будет базой пространства $\mathfrak{L}$.*

Доказательство. Выберем в $\mathfrak{L}$ какую-нибудь базу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и составим последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{10}$$

Выбросим теперь из этой последовательности все те векторы, которые выражаются линейно через предыдущие. Так как $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно независимы, то ни один из них выброшен не будет, а оставшаяся система примет вид

$$a_1, \ldots, a_m, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}. \tag{11}$$

На основании теоремы 1 эта система линейно независима. С другой стороны, все векторы пространства $\mathfrak{L}$ выражались линейно через систему (10). Согласно лемме тем же свойством должна обладать и система (11). Следовательно, система (11) есть база пространства $\mathfrak{L}$, а $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ — искомые векторы.

Теорему 4 можно сформулировать еще так: *всякая линейно независимая система векторов пространства $\mathfrak{L}$ либо сама является базой $\mathfrak{L}$, либо есть часть некоторой базы $\mathfrak{L}$.*

Пусть $\mathfrak{L}$ имеет размерность n. Тогда каждая база пространства $\mathfrak{L}$ содержит n векторов и, значит, число векторов любой линейно независимой системы из $\mathfrak{L}$ либо меньше n, либо равно n. В последнем случае система должна быть базисом пространства $\mathfrak{L}$. В частности, максимальное число линейно независимых векторов из $\mathfrak{L}$ равно n, т. е. равно размерности $\mathfrak{L}$.

Мы пришли к следующей теореме:

Теорема 5. *Всякая система из $n+1$ вектора n-мерного линейного пространства $\mathfrak{L}$ линейно зависима. Любые n линейно независимых векторов этого пространства образуют его базу. Максимальное число линейно независимых векторов пространства $\mathfrak{L}$ равно размерности этого пространства.*

В заключение отметим, что теоремы 3, 4, сформулированные нами для конечномерных пространств, на самом деле имеют место и для пространств бесконечной размерности. Для этого только придется вместо числа векторов базы рассматривать мощность совокупности ее векторов и соответственно этому под размерностью пространства понимать мощность совокупности

векторов, образующих какую-нибудь базу этого пространства. Что касается теоремы 5, то из ее утверждений переносится на случай бесконечной размерности непосредственно только последнее. В настоящей книге мы будем изучать свойства конечномерных пространств. Поэтому в дальнейшем *вообще, где не оговорено противное, под линейным пространством будет пониматься линейное пространство конечной размерности.*

Определим размерность пространств, рассмотренных в п. 1.1. Пусть $\mathfrak{R}$ — обыкновенное пространство направленных отрезков, выходящих из некоторой точки O. Эти отрезки, как обычно, будем называть векторами. Докажем, что *любые три вектора e_1, e_2, e_3 пространства $\mathfrak{R}$, исходящие из O и не лежащие в одной плоскости, составляют базу пространства $\mathfrak{R}$.* В самом деле, e_1, e_2, e_3 линейно независимы, так как в противном случае один из них, например e_3, должен был бы выражаться линейно через два других. Однако соотношение $e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ означает, что e_3 есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$. Поскольку $\alpha_1 e_1$ и $\alpha_2 e_2$ лежат в плоскости $e_1 O e_2$, то в той же плоскости лежит и e_3, что противоречит предположению. С другой стороны, всякий вектор OA пространства $\mathfrak{R}$ может быть выражен линейно через e_1, e_2, e_3 (рис. 1):

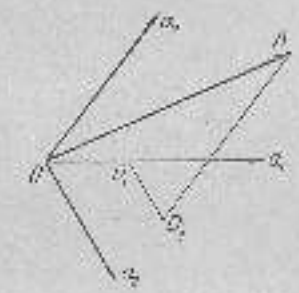


Рис. 1.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2A} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

где α_i есть отношение длины отрезка $P_{i-1}P_i$ ($P_0 = O$, $P_3 = A$) к длине e_i, взятое с надлежащим знаком. Таким образом, e_1, e_2, e_3 есть база пространства $\mathfrak{R}$, и, следовательно, $\mathfrak{R}$ имеет размерность 3.

Аналогичным образом доказывается, что совокупность векторов, выходящих из точки O и лежащих в некоторой плоскости, проходящей через O, является двумерным линейным пространством, а также что совокупность векторов, выходящих из O и лежащих на некоторой прямой, проходящей через O, является одномерным пространством.

Рассмотрим пространство строк длины n с элементами из некоторого тела K. Пусть

$$e_1 = [1, 0, \ldots, 0],$$
$$e_2 = [0, 1, \ldots, 0],$$
$$e_n = [0, 0, \ldots, 1].$$

Умножая эти строки последовательно на произвольные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и складывая, получим

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n].$$

Таким образом, произвольная строка $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ выражается линейно через $e_1, \ldots, e_n$. Однако система $e_1, \ldots, e_n$ линейно независима, так как соотношение

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$$

дает

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots, \alpha_n] = [0, 0, \ldots, 0],$$

откуда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Поэтому $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — база рассматриваемого пространства, и размерность его, таким образом, есть n.

Наконец, пусть $\mathfrak{P}$ будет пространством функций, определенных на конечном множестве $\mathfrak{M}$ со значениями в теле K. Обозначим элементы из $\mathfrak{M}$ через $m_1, m_2, \ldots m_s$. Согласно п. 4.1 всякая функция f из $\mathfrak{P}$ может быть представлена в виде

$$f = a_1 [m_1] + a_2 [m_2] + \ldots + a_s [m_s],$$

где $[m_i]$ — функция, равная 1 на m_i и равная 0 на остальных элементах множества $\mathfrak{M}$. Следовательно, f выражается линейно через $[m_1], \ldots, [m_s]$. С другой стороны, равенство

$$a_1 [m_1] + a_2 [m_2] + \ldots + a_s [m_s] = 0$$

означает, что все значения функции, представляемой левой частью, равны нулю и, следовательно, $a_1 = \ldots = a_s = 0$. Мы видим, таким образом, что $[m_1], \ldots, [m_s]$ есть база пространства $\mathfrak{P}$ и размерность его равна s.

Выше рассматривались линейные пространства, т. е. (унитарные) модули над телом K. Самые простые примеры показывают, что для модулей над *произвольными кольцами* и даже над произвольными коммутативными кольцами теоремы 1, 2 перестают быть верными. В частности, пусть K — кольцо обычных целых чисел, $\mathfrak{Z}$ — совокупность тех же целых чисел, рассматриваемых с обычной операцией сложения, а умножение «чисел» из K на «векторы» из $\mathfrak{Z}$ — это обычное умножение целых чисел. Целые числа, рассматриваемые как векторы из $\mathfrak{Z}$, условимся обозначать жирными цифрами, а числа из K — обыкновенными цифрами. Так как для любого вектора $\boldsymbol{m}$ истинна формула

$$\boldsymbol{m} = m \cdot 1,$$

то наш числовой модуль $\mathfrak{Z}$ порождается вектором 1. Векторы $\boldsymbol{2}$ и $\boldsymbol{3}$ линейно зависимы, а именно:

$$2 \cdot \boldsymbol{3} + (-3) \cdot \boldsymbol{2} = \boldsymbol{0}.$$

Однако для любого $a \in K$ $a \cdot 3 \neq 2$, $a \cdot 2 \neq 3$, т. е. в $\mathfrak{Z}$ ни один из

векторов 2, 3 не выражается линейно через другой. Свойства модулей над произвольными кольцами систематически изучаются в теории модулей, тесно связанной с теорией чисел. Нас же будут интересовать лишь свойства векторных пространств, и к теории модулей над кольцами мы будем возвращаться лишь тогда, где это будет нужно для теории векторных пространств.

4.3. **Изоморфизм.** Понятие линейного пространства состоит из двух существенно различных частей. Во-первых, линейное пространство есть совокупность некоторых вещей, называемых векторами, во-вторых, на линейном пространстве действуют операции сложения и умножения на число. Поэтому либо можно интересоваться, чем являются векторы, каковы их природа и свойства, либо можно встать на противоположную точку зрения и интересоваться свойствами указанных операций независимо от природы элементов, над которыми они совершаются. В дальнейшем мы будем интересоваться только свойствами второго рода. Поэтому два пространства, устроенные одинаково по отношению к операциям сложения и умножения на число, мы будем считать обладающими одинаковыми свойствами, или *изоморфными*. Более точно понятие *изоморфизма* можно сформулировать следующим образом:

Два линейных пространства над одним и тем же телом коэффициентов называются изоморфными, если между их элементами возможно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором сумме векторов первого пространства будет отвечать сумма соответственных векторов второго, а произведению какого-либо числа на вектор первого пространства будет отвечать произведение того же числа на соответственный вектор второго.

Взаимно однозначное соответствие, обладающее указанными свойствами, называется *изоморфизмом* или *изоморфизмом*. Рассмотрим простейшие свойства изоморфизмов.

При изоморфизме соответствует нулевой вектор переходит в нулевой вектор. Действительно, пусть при изоморфном отображении одного линейного пространства $\mathfrak{L}$ на другое $\mathfrak{L}_1$ вектор a из $\mathfrak{L}$ переходит в вектор a_1 из $\mathfrak{L}_1$. Тогда согласно определению изоморфизма произведение $0 \cdot a$ должно переходить в произведение $0 \cdot a_1$, т. е. нулевой вектор первого пространства должен переходить в нулевой вектор второго.

При изоморфном отображении система образующих первого пространства переходит в некоторую систему образующих второго.

Действительно, пусть $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — образующие первого пространства и $b_1, b_2, \ldots, b_r$ — соответствующие им векторы во втором. Возьмем во втором пространстве произвольный вектор b и рассмотрим отвечающий ему вектор a в первом пространстве.

По условию a можно представить в форме

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_r a_r.$$

По определению изоморфного отображения сумма $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_r b_r$ должна перейти в сумму $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_r b_r$, следовательно, вектор b должен совпасть с суммой $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_r b_r$, а это и значит, что векторы $b_1, \ldots, b_r$ составляют систему образующих второго пространства.

При изоморфизме линейно независимые векторы переходят в линейно независимые.

В самом деле, пусть линейно независимые векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ первого пространства переходят в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ второго. Допустим, что между последними векторами существует соотношение

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m = 0.$$

Согласно определению изоморфизма левой части этого равенства отвечает в первом пространстве вектор $\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_m a_m$, нулевому вектору 0_1 отвечает в первом пространстве нулевой вектор 0. Следовательно,

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_m a_m = 0.$$

Так как векторы $a_1, \ldots, a_m$ линейно независимы, то

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0,$$

т.е. векторы $b_1, \ldots, b_m$ линейно независимы.

Из двух последних свойств непосредственно вытекает, что *базис линейного пространства при изоморфизме переходит снова в базис линейного пространства, и, таким образом, изоморфные линейные пространства имеют одинаковую размерность.*

Обратное также справедливо: *если два линейных пространства над одним и тем же телом коэффициентов одинакового размерности, то они изоморфны.*

Для доказательства выберем в каждом из заданных пространств какую-либо базу, например $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Векторы

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n,$$
$$b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n$$

мы назовем *соответственными*, если $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Так как каждый вектор пространства может быть выражен линейно через базу только одним способом, то наше соответствие взаимно однозначно. Пусть теперь

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n,$$
$$b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n$$

— два соответственных вектора. Тогда

$$\alpha a = \alpha\alpha_1 a_1 + \alpha\alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha\alpha_n a_n,$$
$$a b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n.$$

Так как соответственные коэффициенты в этих разложениях равны, то αa и ab будут соответственными векторами, т. е. при нашем соответствии произведение числа на вектор переходит в произведение того же числа на соответственный вектор. Аналогично доказывается и то свойство, что сумма векторов переходит в сумму соответственных векторов. Поэтому построенное соответствие является изоморфизмом, что и требовалось.

Перечисленные выше свойства изоморфных соответствий показывают, что при заданном основном теле K каждое линейное пространство определяется своей размерностью с точностью до изоморфизма. Поэтому пространства строк длины n с элементами из тела K при $n = 1, 2, \ldots$, с точностью до изоморфизма исчерпывают вообще все пространства конечной размерности над K. В частности, обыкновенное пространство направленных отрезков изоморфно пространству строк длины 3 над полем вещественных чисел, пространство функций, определенных на множестве $\mathfrak{M}$, содержащем s элементов, со значениями в теле K изоморфно пространству строк длины s с элементами из K и т. д.

В заключение сделаем еще одно замечание. В общей алгебре центральную роль играет понятие алгебры данной сигнатуры и изоморфизма алгебр фиксированной сигнатуры (см. [А.Г.]). В принятой нами определение понятия модуля формально не была указана сигнатура модуля, т. е. не были указаны те операции, которые считаются основными и по отношению к которым определяется понятие изоморфизма. Определив (точно так же, как и для линейных пространств) понятие изоморфизма модулей, мы тем самым фиксируем совокупность основных операций, хотя и неявно. Выделим эти основные операции в явном виде, приходя к следующему определению унитарного модуля, лишь по форме отличающемуся от определения в п. 4. 1.

Унитарным модулем над кольцом K с единицей 1 называется алгебра, сигнатура которой состоит из символа $+$ бинарной операции и символов $-$, F_α ($\alpha \in K$) одноместных операций, при условии, что в этой алгебре выполняются тождества

$$M_1: x + y = y + x;$$
$$M_2: x + (y + z) = (x + y) + z;$$
$$M_3: x + (y + (-y)) = x;$$
$$M_4: F_\alpha(F_\beta(a)) = F_{\alpha\beta}(a);$$
$$M_5: F_\alpha(a + b) = F_\alpha(a) + F_\alpha(b);$$
$$M_6: F_{\alpha+\beta}(a) = F_\alpha(a) + F_\beta(a);$$
$$M_7: F_1(a) = a.$$

Таким образом, мы принимаем здесь в качестве отдельных основных операций умножение элементов основного множества (векторов) на любой фиксированный элемент $\alpha \in K$. Если основное кольцо K бесконечно, то сигнатура модуля также бесконечна. Меняя кольцо K, мы меняем и сигнатуру класса модулей.

Вообще говоря, имеются и другой путь включения теории модулей в общую теорию алгебр. Для этого модули рассматривают как алгебры с двумя основными множествами: множеством чисел и множеством векторов. Сигнатура теперь состоит из операций сложения чисел и взятия им противоположных, сложения и взятия противоположных векторов, операции умножения числа на вектор и 0-местной операции, выделяющей единицу 1 (всего 6 операций). В качестве основных тождеств берут тождества, определяющие кольцо, определяющие коммутативную группу и тождества $4'$—$7'$ из п. 4.1.

Новое понятие модуля отлично от старого. Все модули в новом смысле имеют одну и ту же сигнатуру (указанные 6 операций), и поэтому становится возможным сравнивать, изоморфны ли они модули над различными кольцами. Эти новые изоморфизмы, в отличие от определенных выше, часто называют *кольцевыми изоморфизмами*. Соответственно этому определяются и *кольцевые автоморфизмы, эндоморфизмы* и другие аналогичные понятия.

Примеры и задачи

1. Показать, что размерность пространства всех многочленов степени не выше n от одной переменной равна $n + 1$.

2. Однородные многочлены степени n от двух переменных образуют линейное пространство размерности $n - 1$.

3. Чему равна размерность пространства однородных многочленов степени n от k переменных?

4. Матрицы с m строками и n столбцами с элементами из заданного тела K образуют относительно обычных матричных операций сложения и умножения на число линейное пространство. Показать, что матрицы, у которых один какой-либо элемент равен единице, а остальные равны нулю, образуют базу этого пространства и, таким образом, размерность пространства равна mn.

5. Симметрические, а также кососимметрические матрицы порядка n с элементами из какого-либо тела K образуют линейные пространства над K. Показать, что размерность этих пространств равна соответственно $\frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{n(n-1)}{2}$.

§ 5. Координаты

5.1. Координаты вектора. В предыдущем параграфе были рассмотрены простейшие общие свойства линейных пространств. Однако в приложениях, кроме знания общих свойств, важно уметь задать векторы при помощи чисел и свести векторные операции к действиям над числами. Эта задача решается путем введения в векторное пространство координат.

Всякую базу линейного пространства $\mathfrak{L}$, векторы которой берутся в определенной последовательности, мы будем называть *координатной базой* или *координатной системой* в $\mathfrak{L}$. Таким образом, если

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad (1)$$

есть система координат в $\mathfrak{L}$, то те же векторы, взятые в другом порядке, будут другой системой координат в $\mathfrak{L}$. Мы видели, что каждый вектор a из $\mathfrak{L}$ может быть однозначно представлен в форме

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n. \qquad (2)$$

Числа $x_1, \ldots, x_n$ называются *координатами вектора* a в системе координат (1). Строка $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, составленная из координат вектора a, взятых в надлежащем порядке, называется *координатной строкой* и обозначается $[a]$. Следовательно, если в пространстве выбрана определенная координатная система, то каждому вектору отвечает координатная строка и, обратно, для каждой строки длины n формула (2) дает определенный вектор a, имеющий эту строку своей координатной строкой.

Пусть векторы a, b имеют координатные строки $[x_1, \ldots, x_n]$ и $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, т. е.

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n,$$
$$b = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_n a_n.$$

Тогда, очевидно,

$$\lambda a = (\lambda x_1) a_1 + (\lambda x_2) a_2 + \ldots + (\lambda x_n) a_n,$$
$$a + b = (x_1 + \xi_1) a_1 + (x_2 + \xi_2) a_2 + \ldots + (x_n + \xi_n) a_n.$$

Эти равенства можно, пользуясь правилами действий со строками, переписать в виде

$$[\lambda a] = \lambda [a], \qquad [a + b] = [a] + [b].$$

Следовательно, координатная строка суммы векторов равна сумме координатных строк слагаемых и координатная строка произведения числа на вектор равна произведению этого числа на координатную строку вектора.

Этот результат можно истолковать еще следующим образом. Пусть задано какое-либо линейное пространство $\mathfrak{L}$ размерности n над телом K. Обозначим через V_n пространство строк длины n с элементами из K. Выберем в $\mathfrak{L}$ определенную координатную систему и поставим каждому вектору из $\mathfrak{L}$ в соответствие его координатную строку. Наш результат показывает, что это соответствие есть изоморфизм между $\mathfrak{L}$ и V_n. В частности, отсюда следует, что линейно независимые векторы имеют линейно независимые координатные строки и каждая линейная зависимость между заданными векторами имеет место и между их координатными строками.

В одном и том же пространстве $\mathfrak{L}$ существуют различные координатные системы. Поэтому возникает вопрос, как изменятся координаты вектора, если мы от одной координатной системы

перейдем к другой. Для решения этого вопроса выберем в $\mathfrak{L}$ какие-либо две координатные системы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Так как векторы $a_1, \ldots, a_n$ являются базой пространства $\mathfrak{L}$, то $a'_1, \ldots, a'_n$ должны линейно выражаться через $a_1, \ldots, a_n$. Пусть эти выражения будут

$$\begin{aligned} a'_1 &= \tau_{11} a_1 + \tau_{12} a_2 + \ldots + \tau_{1n} a_n, \\ a'_2 &= \tau_{21} a_1 + \tau_{22} a_2 + \ldots + \tau_{2n} a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a'_n &= \tau_{n1} a_1 + \tau_{n2} a_2 + \ldots + \tau_{nn} a_n. \end{aligned}$$

Матрица

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей перехода от координатной системы* $a_1, \ldots, a_n$ *к системе* $a'_1, \ldots, a'_n$. Возьмем произвольный вектор a и обозначим через $[x_1, \ldots, x_n]$, $[x'_1, \ldots, x'_n]$ его координатные строки в старой и новой координатных системах. Следовательно, мы имеем

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n,$$
$$a = x'_1 a'_1 + x'_2 a'_2 + \ldots + x'_n a'_n.$$

Подставляя во второе из этих равенств вместо векторов $a'_1, \ldots, a'_n$ их выражения через $a_1, \ldots, a_n$, получим

$$a = (x'_1 \tau_{11} + x'_2 \tau_{21} + \ldots + x'_n \tau_{n1}) a_1 + (x'_1 \tau_{12} + \ldots + x'_n \tau_{n2}) a_2 + \ldots,$$

или

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \tau_{11} + x'_2 \tau_{21} + \ldots + x'_n \tau_{n1}, \\ x_2 &= x'_1 \tau_{12} + x'_2 \tau_{22} + \ldots + x'_n \tau_{n2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= x'_1 \tau_{1n} + x'_2 \tau_{2n} + \ldots + x'_n \tau_{nn}. \end{aligned}$$

Эти равенства и являются искомыми формулами преобразования координат.

Заметим, что выражение для x_1:

$$x_1 = x'_1 \tau_{11} + x'_2 \tau_{21} + \ldots + x'_n \tau_{n1}$$

представляет собой произведение координатной строки $[x'_1, \ldots, x'_n]$ на 1-й столбец матрицы T, мы видим, что всю систему формул преобразования координат можно записать в кратком матричном виде:

$$[x_1, \ldots, x_n] = [x'_1, \ldots, x'_n]\, T.$$

Мы получили следующее

Правило преобразования координат. *Старая координатная строка вектора равна новой, умноженной на матрицу перехода.*

Докажем следующую полезную во многих случаях лемму:

Лемма. *Пусть A, B — квадратные матрицы порядка n с элементами из тела K. Если для любой строки $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ с элементами из K*

$$[\xi_1, \ldots, \xi_n]A = [\xi_1, \ldots, \xi_n]B, \tag{3}$$

то $A = B$.

В самом деле, если элементы матрицы A обозначать через α_{ij}, а элементы матрицы B через β_{ij} ($i, j = 1, \ldots, n$), то для каждого i при значениях $\xi_i = 1$, $\xi_j = 0$ ($j \neq i$) равенство (3) дает $\alpha_{is} = \beta_{is}$ ($i, s = 1, \ldots, n$), что и требовалось.

Рассмотрим теперь в n-мерном линейном пространстве $\mathfrak{V}$ две координатные системы $a_1, \ldots, a_n$ и $a'_1, \ldots, a'_n$. Мы можем либо $a'_1, \ldots, a'_n$ выразить через $a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} a'_1 &= \tau_{11}a_1 + \ldots + \tau_{1n}a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_n &= \tau_{n1}a_1 + \ldots + \tau_{nn}a_n, \end{aligned} \tag{4}$$

либо, наоборот, $a_1, \ldots, a_n$ выразить через $a'_1, \ldots, a'_n$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sigma_{11}a'_1 + \ldots + \sigma_{1n}a'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \sigma_{n1}a'_1 + \ldots + \sigma_{nn}a'_n. \end{aligned}$$

Матрица T, составленная из коэффициентов τ_{ij}, есть матрица перехода от системы $a_1, \ldots, a_n$ к системе $a'_1, \ldots, a'_n$, а матрица S, составленная из коэффициентов σ_{ij}, является матрицей *обратного перехода* от системы $a'_1, \ldots, a'_n$ к системе $a_1, \ldots, a_n$. Пусть $[x]$ — координатная строка произвольного вектора x в координатной системе $a_1, \ldots, a_n$, а $[x]_1$ — координатная строка вектора x в системе $a'_1, \ldots, a'_n$. Рассматривая координатную систему $a_1, \ldots, a_n$ в качестве старой и применяя правило преобразования координат, получим

$$[x] = [x]_1 T. \tag{5}$$

Рассматривая, наоборот, в качестве старой систему $a'_1, \ldots, a'_n$, получим

$$[x]_1 = [x]S.$$

Подставляя сюда вместо $[x]$ его выражение из (5), мы получим

$$[x]_1 = [x]_1 TS$$

и аналогичным образом

$$[x] = [x]ST.$$

Здесь вектор x, а следовательно, и его координатные строки $[x]_1$, $[x]$ произвольны. В силу леммы отсюда получаем

$$E = TS = ST, \quad S = T^{-1}.$$

Таким образом, *матрица преобразования координат всегда имеет обратную*, которая является матрицей обратного преобразования координат.

Указанные рассуждения позволяют выяснить одну деталь, связанную с обратными матрицами и оставленную нами без рассмотрения в п. 2.3. Согласно п. 2.3 квадратная матрица S называется обратной для матрицы T, если выполнены два равенства:

$$ST = E, \quad TS = E.$$

Если S удовлетворяет только первому или только второму, то называется *обратной слева* или соответственно *обратной справа*.

Теорема. *Если квадратная матрица T с элементами из тела K имеет слева или справа обратную матрицу S, то S является просто обратной матрицей для T.*

Берем n-мерное пространство $\mathfrak{V}$ с какой-нибудь базой $a_1, \ldots, a_n$. Вычисляем по формулам (4) векторы $a'_1, \ldots, a'_n$. Покажем, что они линейно независимы. Пусть

$$\lambda_1 a'_1 + \ldots + \lambda_n a'_n = 0.$$

Ясно, что это соотношение равносильно матричному условию

$$[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \cdot T = 0. \tag{6}$$

Если T имеет правую обратную матрицу S, то, умножая обе части равенства (6) справа на S и замечая, что $TS = E$, получим $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = 0$. Следовательно, векторы $a'_1, \ldots, a'_n$ линейно независимы, и потому систему $a'_1, \ldots, a'_n$ можно принять в качестве новой координатной системы в $\mathfrak{V}$, причем матрица T будет матрицей перехода. Матрица перехода имеет обратную матрицу T^{-1}. Умножая соотношение $TS = E$ слева на T^{-1}, получим $S = T^{-1}$. Мы показали, что правая обратная является просто обратной. Аналогично устанавливается, что левая обратная также является просто обратной.

Изложенные рассуждения показывают, в частности, что каждая обратная матрица порядка n является матрицей перехода для подходящих координатных систем.

3.2. Ранги матриц. Рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{V}$ над каким-то телом K, имеющее конечную размерность n. Выберем

в $\mathfrak{L}$ произвольную базу $a_1, \ldots, a_n$ в качестве координатной системы, и пусть векторы $x_1, \ldots, x_m$ имеют соответственно координатные строки

$$[x_1] = [\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[x_m] = [\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}].$$

Составляем из этих строк матрицу

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1} \ldots \alpha_{mn} \end{vmatrix}.$$

Мы уже знаем, что максимальное число линейно независимых векторов в системе $x_1, \ldots, x_m$ равно максимальному числу линейно независимых строк в системе $[x_1], \ldots, [x_m]$, т. е. максимальному числу линейно независимых строк матрицы A.

Максимальное число линейно независимых строк произвольной матрицы A с элементами из заданного тела K называется *рангом матрицы* A или, подробнее, *рангом по строкам*.

Таким образом, максимальное число линейно независимых векторов среди $x_1, \ldots, x_m$ равно рангу матрицы, составленной из координатных строк этих векторов.

Вернемся снова к произвольной матрице A с m строками и n столбцами. Отметим какие-то k строк и k столбцов в A. Элементы матрицы A, находящиеся на пересечениях отмеченных строк и столбцов, взятые в их естественном порядке, образуют квадратную матрицу порядка k. Она называется *минором* k-го порядка матрицы A. Рассматривая всевозможные миноры 1-го, 2-го и т. д. порядков матрицы A, увидим, что часть их будет обратимыми матрицами, а часть — необратимыми. Наивысший порядок обратимых миноров матрицы A назовем ее *рангом по минорам* или *минорным рангом*.

Миноры 1-го порядка — это элементы матрицы A. Так как матрица A берется над телом, то необратимость минора 1-го порядка означает просто, что этот минор образован нулем. Поэтому матрица A не имеет обратимых миноров тогда и только тогда, когда она состоит из нулей. В этом случае говорят, что минорный ранг матрицы A равен нулю. Заметим, что ранг по строкам нулевой матрицы также равен нулю, так как система нулевых векторов не имеет линейно независимых подсистем. Мы хотим теперь доказать, что ранг по строкам произвольной матрицы совпадает с ее рангом по минорам. Однако мы сделаем это не сразу, а предварительно рассмотрев квадратные матрицы.

Теорема 1. *Для того, чтобы квадратная матрица* $A = \|\alpha_{ij}\|_n$ *с элементами из некоторого тела* K *была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы ее строки были линейно независимы.*

Обозначим через a_i i-ю строку матрицы ($i = 1, \ldots, n$). Тогда произвольная линейная зависимость

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0 \tag{1}$$

строк матрицы A может быть переписана в виде

$$[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \cdot A = 0. \tag{2}$$

Если матрица A обратима, то, умножая обе части равенства (2) на A^{-1}, получим $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = 0$, и необходимость условий теоремы 1 доказана.

Напротив, пусть строки $a_1, \ldots, a_n$ матрицы A линейно независимы. Обозначим через $\mathfrak{L}$ векторное пространство всех строк длины n с элементами из тела K. Строки

$$e_1 = [1, 0, \ldots, 0],$$
$$e_2 = [0, 1, \ldots, 0],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = [0, 0, \ldots, 1]$$

составляют базу $\mathfrak{L}$. С другой стороны, пространство $\mathfrak{L}$ n-мерно и, по условию, его векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы. Поэтому векторы $a_1, \ldots, a_n$ также составляют базу пространства $\mathfrak{L}$. Рассматривая базу $e_1, \ldots, e_n$ в качестве исходной координатной системы в $\mathfrak{L}$, а базу $a_1, \ldots, a_n$ в качестве новой координатной системы, видим, что A есть матрица перехода от первой ко второй координатной системе, и потому (см. п. 5.1) матрица A обратима.

Следствие. *Определитель квадратной матрицы с элементами из некоторого поля тогда и только тогда равен нулю, когда строки этой матрицы линейно зависимы.*

Действительно, для квадратных матриц с элементами из поля обратимость равносильна невырожденности, т. е. отличию от нуля определителя матрицы.

Вспоминая теперь замечание, сделанное в начале этого пункта, видим, что система a векторов n-мерного векторного пространства над полем тогда и только тогда является базой этого пространства, когда определитель матрицы, составленной из координатных строк указанных векторов, отличен от нуля.

В теореме 1 и ее следствии речь идет о строках матрицы. Однако эти же утверждения будут справедливы и для столбцов, если под выражением «линейная зависимость столбцов» понимать линейную зависимость относительно умножения столбцов на элементы K справа. Поэтому всюду, где противное не оговорено явно, под умножением строк на элементы из K мы понимаем

умножение строк на элементы слева, а под умножением столбцов на элементы K подразумевается умножение справа. Ясно, что это условие излишне, если в качестве K берется поле. Для некоммутативных тел K принятое условие становится существенным.

Легко проверить, что все рассуждения, приведшие нас к теореме 1, остаются справедливыми, если в них слово «строка» заменить словом «столбец». В результате получается

Теорема 1а. *Для того чтобы квадратная матрица с элементами из некоторого тела была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы ее столбцы были линейно независимы. Определитель квадратной матрицы с элементами из поля тогда и только тогда равен нулю, когда столбцы матрицы линейно зависимы.*

Ясно, что для случая, когда рассматриваются матрицы над полем, теорема 1а получается из теоремы 1 простым переходом к транспонированной матрице.

Теорема 2. *Пусть $A=\|a_{ij}\|_{mn}$ — произвольная матрица с элементами из какого-то тела K. Ранги матрицы A по строкам, по столбцам и по минорам не изменятся, если над A произвести любое из следующих преобразований:*

а) *поменять местами какие-то строки матрицы A;*

б) *поменять местами какие-то столбцы матрицы A;*

в) *к элементам одной из строк матрицы A прибавить соответствующие элементы какой-то другой строки, умноженные слева на произвольный фиксированный множитель $\lambda\in K$;*

г) *к элементам одного из столбцов матрицы A прибавить соответствующие элементы какого-то другого столбца, умноженные справа на произвольный множитель $\lambda\in K$.*

Ранг матрицы A по строкам равен максимальному числу линейно независимых в совокупности ее строк $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$. Меняя порядок строк A, мы изменим лишь их нумерацию, а линейная зависимость или независимость векторов не связана с нумерацией. Также ясно, что ранг матрицы A по строкам не изменится при перестановке ее столбцов. В самом деле, обозначим строки новой матрицы, получившейся после перестановки столбцов, через $b_1, \ldots, b_m$. Если между строками матрицы A существовала какая-то линейная зависимость $\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_m a_m=0$, то очевидно, что новые строки связаны аналогичной зависимостью $\lambda_1 b_1+\ldots+\lambda_m b_m=0$, и, обратно, из последней зависимости вытекает первая. То же самое верно и для случая, когда к какому-нибудь столбцу матрицы A мы прибавляем другой столбец, умноженный справа на λ. Наконец, максимальное число линейно независимых строк не изменится, если i-ю строку матрицы A заменить строкой $a_i+\lambda a_j$, так как векторы системы $a_1, \ldots, a_i+\lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_m$ выражаются линейно через векторы $a_1, \ldots, a_m$, а векторы последней системы выражаются линейно через векторы первой.

Мы убедились, что ранг матрицы A *по строкам* не меняется при указанных в теореме преобразованиях. Аналогичное рассуждение показывает, что ранг матрицы A *по столбцам* также не меняется при преобразованиях а), б), в), г). Мы теперь перейдем к доказательству независимости ранга A *по минорам*, что потребует несколько большего внимания.

Пусть в матрице A переставляются какие-то строки или столбцы. Миноры новой матрицы при этом получаются из соответствующих миноров старой такими же перестановками строк или столбцов, и нам следует лишь убедиться, что, переставляя строки или столбцы обратимой матрицы, мы получим снова обратимую матрицу.

Итак, пусть в квадратной матрице $B=\|\beta_{ij}\|_n$ переставляются первая и i-я строки. Простой подсчет показывает, что новую матрицу можно представить в виде DB, где

$$D=E_{ii}+E_{12}+\ldots+E_{1i}+\ldots+E_{i1}+\ldots-E_{11}.$$

Здесь через E_{ij} обозначена матрица, у которой в i-й строке и j-м столбце стоит единица, а на остальных местах — нули. Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$DD=E,\quad D^{-1}=D.$$

Поэтому, если матрица B имеет обратную, то матрица $B^{-1}D$ будет обратной для DB. Аналогично матрица BD получается из B перестановкой 1-го и i-го столбцов. Если B обратима, то BD также имеет обратную матрицу, именно DB^{-1}.

Независимость минорного ранга при перестановках строк и столбцов доказана. Пусть теперь минорный ранг B равен r, и мы к i-й строке B прибавляем ее j-ю строку, умноженную на λ. По предположению матрица B имеет обратный минор порядка r, принадлежащий каким-то r строкам и r столбцам. Чтобы не усложнять без нужды запись, допустим, что этот минор принадлежит первым r строкам и первым r столбцам матрицы B. Если изменяемая i-я строка не принадлежит к числу первых r строк, то указанный минор r-го порядка является минором и новой матрицы. Поэтому ранг новой матрицы $\geq r$. Допустим, что i-я строка принадлежит к числу первых r строк. Вычеркнем элементы старой и новой матриц, находящиеся в первых r столбцах, первых r строках и в j-й строке (если $j>r$). Получатся матрицы

$$P=\begin{vmatrix}\beta_{11}&\ldots&\beta_{1r}\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ \beta_{i1}&\ldots&\beta_{ir}\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ \beta_{r1}&\ldots&\beta_{rr}\\ \beta_{j1}&\ldots&\beta_{jr}\end{vmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1}-\lambda\beta_{j1} & \dots & \beta_{ir}-\lambda\beta_{jr} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r1} & \dots & \beta_{rr} \\ \beta_{j1} & \dots & \beta_{jr} \end{bmatrix},$$

В силу теоремы 1 первые r строк матрицы P линейно независимы, и потому ранг P по строкам равен r. Согласно доказанному отсюда следует, что ранг матрицы Q по строкам также равен r. Строки 1-я, ..., $(i-1)$-я, $(i+1)$-я, ..., r-я матрицы Q заведомо линейно независимы, так как они составляют часть линейно независимых первых r строк матрицы Q. Поэтому либо первые r строк матрицы Q линейно независимы, либо i-я строка линейно выражается через остальные строки, и потому остальные r строк матрицы Q линейно независимы. Иными словами, один из миноров

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1}-\lambda\beta_{j1} & \dots & \beta_{ir}-\lambda\beta_{jr} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r1} & \dots & \beta_{rr} \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i-1,1} & \dots & \beta_{i-1,r} \\ \beta_{i+1,1} & \dots & \beta_{i+1,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{j1} & \dots & \beta_{jr} \\ \beta_{j1} & \dots & \beta_{jr} \end{vmatrix}$$

матрицы Q имеет линейно независимые строки. В силу теоремы 1 этот минор обратим и минорный ранг матрицы Q не меньше r.

Мы доказали, что преобразование вида в) не уменьшает минорного ранга матрицы. Но если матрица C получается из A прибавлением к i-й строке ее j-й строки, умноженной на λ, то A получается из C прибавлением к i-й строке матрицы C ее j-й строки, умноженной на $-\lambda$. Ранг по минорам при том и другом преобразовании не увеличивается и потому остается неизменным. Остается рассмотреть еще преобразование г); но неизменность при нем минорного ранга матрицы A устанавливается совершенно тем же способом, что и неизменность при преобразовании в).

Из теоремы 2 путем несложных рассуждений выводится основная

Теорема 3 (о ранге матрицы). *У произвольной матрицы $A=\|\alpha_{ij}\|_{m,n}$ с элементами из поля ранг по строкам, ранг по столбцам и ранг по минорам совпадают.*

Утверждение тривиально, если все элементы матрицы A равны нулю. Поэтому предположим, что A содержит ненулевой элемент α_{ij}. Переставляя 1-ю и i-ю строки и 1-й и j-й столбцы матрицы A, получим некоторую матрицу $B=\|\beta_{ij}\|$, у которой $\beta_{11}=\alpha_{ij}\neq 0$, причем в силу теоремы 2 три ранга матрицы B будут равны соответствующим рангам матрицы A. Теперь, прибавляя ко 2-й, ..., ..., m-й строкам матрицы B ее первую строку, умноженную слева соответственно на $-\beta_{21}\beta_{11}^{-1}$, ..., $-\beta_{m1}\beta_{11}^{-1}$, получим матрицу вида

$$C_1=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mn} \end{bmatrix},$$

причем три ранга матрицы C_1 будут такими же, как у матрицы A. Если все γ_{ij} равны нулю, то преобразования считаем законченными. Если же $\gamma_{ij}\neq 0$ ($i\geqslant 2$, $j\geqslant 2$), то, переставляя 2-ю и i-ю строки и 2-й и j-й столбцы матрицы C_1, мы добьемся, чтобы у новой матрицы элемент γ_{22} был отличен от нуля. Прибавляя затем к 3-й, ..., m-й строкам вторую строку, умноженную соответственно на $-\gamma_{32}\gamma_{22}^{-1}$, ..., $-\gamma_{m2}\gamma_{22}^{-1}$, получим матрицу вида

$$C_2=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ 0 & 0 & \delta_{33} & \dots & \delta_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \delta_{m3} & \dots & \delta_{mn} \end{bmatrix} \quad (\delta_{11}\delta_{22}\neq 0).$$

Ранги матрицы C_2 снова совпадают с соответствующими рангами матрицы A. Продолжая процесс дальше, мы не более чем через n шагов придем к матрице вида

$$C_r=\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1r} & \rho_{1,r+1} & \dots & \rho_{1n} \\ 0 & \rho_{22} & \dots & \rho_{2r} & \rho_{2,r+1} & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_{rr} & \rho_{r,r+1} & \dots & \rho_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\rho_{11}\dots\rho_{rr}\neq 0),$$

ранги которой все еще будут совпадать с соответствующими рангами матрицы A. Однако из вида матрицы C_r непосредственно

следует, что все три ранга этой матрицы равны одному и тому же числу r. Поэтому и все три ранга матрицы A имеют одно и то же значение r.

В п. 2.3 было показано, что квадратная матрица с элементами из поля обратима тогда и только тогда, когда она имеет ненулевой определитель. Поэтому для матриц над полем теорема 3 может быть переформулирована следующим образом:

Теорема 3а. *У любой матрицы с элементами из поля максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов и равно наивысшему порядку не миноров, имеющих ненулевой определитель.*

Фактическое отыскание ранга матрицы обычно производится по способу, указанному в доказательстве теоремы 3, или по его различным видоизменениям.

Довольно часто оказываются полезными следующие два замечания, непосредственно вытекающие из теоремы 3.

Теорема 4. *Для любых матриц $A=\|\alpha_{ij}\|_{mn}$, $B=\|\beta_{jk}\|_{nl}$ с элементами из произвольного тела ранг произведения AB не превосходит ни ранга матрицы A, ни ранга матрицы B.*

Действительно, из определения произведения видно, что строки матрицы AB являются линейными комбинациями строк матрицы B, и потому максимальное число линейно независимых строк матрицы AB не может быть больше максимального числа линейно независимых строк матрицы B. Аналогично столбцы матрицы AB являются линейными комбинациями столбцов матрицы A, и потому ранг матрицы AB по столбцам не превосходит ранга по столбцам матрицы A.

Теорема 5. *Ранг элементов матрицы A принадлежит полю, не ранг не совпадает с рангом транспонированной матрицы A'.*

Все миноры матрицы A' получаются транспонированием миноров матрицы A. Поскольку элементы миноров берутся из поля, то транспонирование обратимого минора приводит к обратимому минору, и потому ранг (по минорам) матрицы A' совпадает с рангом (по минорам) матрицы A.

В упражнении на стр. 97 указан пример обратимой матрицы с элементами из некоммутативного тела, у которой транспонированная матрица не является обратимой.

5.3. **Общие системы линейных уравнений.** Фиксируем какое-нибудь тело K и рассмотрим произвольную систему уравнений вида

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1,\\
&\alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m,
\end{aligned} \tag{1}$$

где α_{ij}, β_i — заданные элементы из K, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — неизвестные, число которых n может быть меньше, больше или равно числу m уравнений. Один из алгоритмов для решения таких систем — способ исключения неизвестных — уже был изложен в п. 2.4. Доказанная в предыдущем пункте теорема о ранге матрицы позволяет по-иному подойти к исследованию линейных систем уравнений.

Коэффициенты α_{ij} и свободные члены β_i уравнений (1) естественно расположатся в две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix},\qquad B=\left(\begin{array}{cccc|c}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m\end{array}\right),$$

называемые *основной* и *расширенной* матрицами системы (1). Каждому уравнению системы (1) отвечает определенная строка в матрицах A и B. Перестановка уравнений в системе (1) влечет соответствующую перестановку строк матриц A и B, а изменение нумерации неизвестных влечет перестановку столбцов в указанных матрицах.

Говорят, что i-е уравнение системы (1) линейно зависит от i_1-го, ..., i_k-го уравнений этой системы, если i-я строка матрицы B есть линейная комбинация ее i_1-й, ..., i_k-й строк. Так как тело K не предполагается коммутативным, то строки матриц множатся всегда слева на элементы K, а столбцы матриц множатся справа (см. п. 5.2).

Решением системы уравнений (1) называется последовательность $\xi_1, \dots, \xi_n$ элементов тела K, при подстановке которых в уравнения (1) вместо букв $\xi_1, \dots, \xi_n$ все равенства становятся истинными. Элементы $\xi_1, \dots, \xi_n$ мы расположим в столбец $[\xi_1, \dots, \xi_n]'=x$, после чего систему (1) можно будет переписать в матричной форме:

$$A\cdot x=b, \tag{2}$$

где b — столбец $[\beta_1, \dots, \beta_n]'$ свободных членов.

1) *Если i-я строка матрицы B является линейной комбинацией остальных ее строк, то, вычеркнув i-е уравнение из системы (1), получим сокращенную систему уравнений, имеющую то же совокупность решений, что и система (1).*

Ибо, что каждое решение системы (1) является решением и сокращенной системы. Обратно, пусть i-я строка матрицы B равна сумме i_1-й, ..., i_k-й строк, умноженных слева соответственно на $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ из K ($i\neq i_1, \dots, i_k$), и пусть значения $\xi_1', \dots, \xi_n'$ удовлетворяют i_1-му, ..., i_k-му уравнениям из (1). Тогда, умножая

эти уравнения слева соответственно на $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ и складывая почленно, получим i-е уравнение.

Б) *Если ранг (по строкам) матрицы B равен r, то система уравнений (1) содержит подсистему из r линейно независимых уравнений, обладающую той же совокупностью решений, что и система (1).*

Поскольку ранг матрицы B равен r, то матрица B имеет r линейно независимых строк, через которые все остальные ее строки выражаются линейно. Беря уравнения, отвечающие указанным r линейно независимым строкам, получим требуемую подсистему.

В) *Если система уравнений (1) имеет какое-нибудь решение $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$, то ранг расширенной матрицы B равен рангу основной матрицы A.*

Если равенства (1) для некоторых $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ истинны, то они показывают, что последний столбец матрицы B равен сумме ее 1-го, ..., n-го столбцов, умноженных справа соответственно на $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$. Поэтому общее максимальное число линейно независимых столбцов матрицы B равно максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A, т. е. ранг по столбцам матрицы B равен рангу по столбцам матрицы A. Слова «по столбцам» здесь можно выбросить, так как в п. 5.2 было показано, что ранг по столбцам совпадает с рангом по строкам.

Из утверждений Б) и В) легко выводится основная

Теорема Кронекера—Капелли. *Для того чтобы система уравнений (1) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу основной матрицы этой системы. Если ранги основной и расширенной матриц совпадают с числом неизвестных, то система имеет единственное решение. Если ранг r основной и расширенной матриц меньше числа n неизвестных, то система (1) имеет более одного решения и произвольна системе вида*

$$\begin{aligned} \xi_{j_1} &= \gamma_{10}\xi_{j_{r+1}} + \ldots + \gamma_{1,n-r}\xi_{j_n} + \gamma_{1n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{j_r} &= \gamma_{r1}\xi_{j_{r+1}} + \ldots + \gamma_{r,n-r}\xi_{j_n} + \gamma_{rn}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $(j_1, \ldots, j_n, j_{r+1}, \ldots, j_n)$ — подходящая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.

Иначе говоря, в последнем случае среди неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можно выбрать такие $n-r$ неизвестных $\xi_{j_{r+1}}, \ldots, \xi_{j_n}$, называемых свободными, придавая которым произвольные значения из K, можно для остальных неизвестных найти уже единственные значения, удовлетворяющие системе (1).

Необходимость условий вытекает из утверждения В). Поэтому пусть ранги матриц A, B совпадают и равны r. Матрица A,

содержит всего n столбцов, и потому $r \leq n$. По условию матрица A обладает обратным минором M порядка r (см. п. 5.2), принадлежащим каким-то k_1-й, ..., k_r-й строкам и j_1-му, ..., j_r-му столбцам матрицы A. Отсюда следует, что k_1-я, ..., k_r-я строки матрицы B линейно независимы и что все остальные ее строки являются линейными комбинациями указанных строк. Поэтому, оставляя лишь k_1-е, ..., k_r-е уравнения системы (1) и вычеркивая остальные уравнения, мы получим сокращенную систему, имеющую те же решения, что и система (1). Оставляя теперь в каждом уравнении сокращенной системы слева члены, содержащие неизвестные $\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_r}$, и перенося вправо остальные члены, мы приведем сокращенную систему к виду

$$M \cdot \begin{bmatrix} \xi_{j_1} \\ \vdots \\ \xi_{j_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где

$$c_s = -a_{k_s j_{r+1}}\xi_{j_{r+1}} - \ldots - a_{k_s j_n}\xi_{j_n} + \beta_{k_s} \quad (s = 1, \ldots, r).$$

По условию минор M является обратимой матрицей. Умножая обе части равенства (4) слева на M^{-1}, получим

$$\begin{bmatrix} \xi_{j_1} \\ \vdots \\ \xi_{j_r} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}.$$

Выполняя здесь в правой части умножение, придем к системе вида (3). Теорема доказана.

Систему уравнений (1) иногда называют *определенной, неопределенной, противоречивой*, если она имеет соответственно единственное решение, более одного решения, не имеет решений. Заметим, что согласно этой терминологии система, не являющаяся определенной, либо неопределенная, либо противоречивая.

Следствие 1. *Если число уравнений в системе (1) меньше числа неизвестных, то система (1) либо неопределенная, либо противоречивая.*

Следствие 2. *Система n линейных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда определенная, когда основная матрица этой системы обратима.*

Оба эти следствия непосредственно вытекают из теоремы Кронекера—Капелли.

Мы рассматрели систему линейных уравнений (1), в которой коэффициенты стоят слева от неизвестных. Что можно сказать

о системе уравнений

$$\begin{aligned} &\xi_1\alpha_{11} + \xi_2\alpha_{21} + \ldots + \xi_n\alpha_{n1} = \beta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\xi_1\alpha_{1m} + \xi_2\alpha_{2m} + \ldots + \xi_n\alpha_{nm} = \beta_m. \end{aligned} \tag{5}$$

у которой коэффициенты стоят справа от неизвестных? Эту систему можно записать в матричном виде:

$$[\xi_1, \ldots, \xi_n]\cdot A = [\beta_1, \ldots, \beta_m],$$

где $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матрица коэффициентов при неизвестных системы (5). Обратим внимание, что в матрице A коэффициенты i-го уравнения образуют i-й столбец, а не i-ю строку, как было раньше. Все рассуждения, приведенные нами при доказательстве теоремы Кронекера — Капелли, сохранят свою силу и для системы (5), если в них слова «столбец» и «строка» поменять местами, а под расширенной матрицей системы (5) понимать матрицу

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nm} \\ \beta_1 & \ldots & \beta_m \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для совместности системы (5) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы B совпадал с рангом матрицы A. Если ранги матриц A, B совпадают и равны числу неизвестных, то система (5) имеет единственное решение. Если ранги A, B совпадают и равны числу r, меньшему числа n неизвестных, то среди неизвестных найдутся $n - r$ свободных неизвестных $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{n-r}}$, через которые остальные неизвестные $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r}$ будут выражаться формулами вида

$$\xi_{i_s} = \gamma_{i_s 1}\xi_{i_1} + \ldots + \gamma_{i_s i_{n-r}}\xi_{i_{n-r}} + \gamma_{i_s} \quad (s = 1, \ldots, r).$$

Ясно, что если рассматриваются линейные уравнения над полем, то различие между системами (1) и (5) исчезает. Для некоммутативных тел K (например, для кватернионов (см. п. 1.5)) наряду со стандартными системами вида (1), (5) иногда рассматривают и уравнения «смешанного» вида, например уравнение $a\xi - \xi a = 0$. Однако вопросы о разрешимости таких уравнений носят специфический характер и выходят за рамки собственно линейной алгебры.

Дополнения и примеры

1. В пространстве строк длины 3 над полем рациональных чисел берется координатная система, состоящая из строк $[1, 3, 5]$, $[6, 3, 2]$, $[3, 1, 0]$. Какими в этой системе координатные строки векторов $[3, 7, 1]$, $[0, 0, 1]$, $[2, 3, 5]$, $[1, 1, 1]$?

2. Пространство $\mathfrak{P}$ образовано многочленами от t степени не выше n. Показать, что многочлены 1, $\lambda - 1$, $(\lambda - 1)^2$, ..., $(\lambda - 1)^n$ образуют базу пространства $\mathfrak{P}$. Найти в этой базе координатные строки многочленов t^2, $(t+1)^3$, t^n.

3. На плоскости берется координатная система, состоящая из двух взаимно перпендикулярных векторов длины 1, и после этого совершается преобразование координат с матрицей $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Какие условия должны удовлетворять числа α, β, γ, δ, чтобы новые координатные векторы были взаимно перпендикулярны и имели длину 1?

4. Найти ранги матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 17 & 24 \\ 1 & 3 & 13 & 41 & 55 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}.$$

5. Показать, что в теле кватернионов K (п. 1.4) система «правых» линейных уравнений

$$\begin{aligned} i\xi_1 - j\xi_2 &= 1, \\ k\xi_1 - \xi_2 &= i \end{aligned}$$

имеет единственное решение, а система «левых» уравнений

$$\begin{aligned} \xi_1 i + \xi_2 j &= 1, \\ \xi_1 k - \xi_2 &= i \end{aligned}$$

решений не имеет. Это дает пример обратимой матрицы над телом, у которой транспонированная матрица необратима.

6. До сих пор под линейной независимостью строк мы понимали линейную независимость относительных умножений строк слева на элементы тела K, а линейную независимость столбцов понимали как независимость относительных умножений столбцов на элементы тела справа. Это связано с исходным правилом умножения матриц: строки первой множить на столбцы второй. Конечно, вся теория остается неизменной, если матрицы умножать по «левому» правилу: столбцы первой множить на строки второй. Но тогда надо будет рассматривать линейную зависимость строк относительно умножения на элементы K справа, а линейную зависимость столбцов относительно умножения на элементы K слева. В результате получатся ранги матриц по строкам справа и по столбцам слева. Оба эти ранга будут совпадать

друг с другом, но в общем случае будут отличны от обычных рангов по строкам (столбцам) и по столбцам (строкам). Примером может служить клеточная матрица

$$\begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}$$

из упражнения 5, у которой левый ранг по строкам равен 2, а правый ранг по строкам равен 4.

7. Пусть A — обратимая квадратная матрица порядка n, B и C — произвольные матрицы, имеющие соответственно n строк и n столбцов. Тогда

$$\operatorname{ранг}(AB) = \operatorname{ранг} B,$$
$$\operatorname{ранг}(CA) = \operatorname{ранг} C.$$

8. Привести пример квадратных матриц A, B одного и того же порядка 2, для которых $\operatorname{ранг}(AB) \neq \operatorname{ранг}(BA)$.

9. Показать, что для любых квадратных матриц A, B порядка n

$$\operatorname{ранг}(AB) \geqslant \operatorname{ранг} A + \operatorname{ранг} B - n.$$

§ 6. Линейные подпространства

6.1. **Пересечение и сумма подпространств.** Непустая совокупность $\mathfrak{M}$ векторов какого-нибудь линейного пространства $\mathfrak{L}$ называется *линейным подпространством* этого пространства, если выполняются следующие два условия:

1° *если* $\mathfrak{M}$ *содержит какой-нибудь вектор* a, *то* $\mathfrak{M}$ *содержит и все кратные* λa, *где* λ — *число из поля коэффициентов*;

2° *если* $\mathfrak{M}$ *содержит какие-нибудь векторы* a, b, *то* $\mathfrak{M}$ *содержит и их сумму* $a + b$.

Ясно, что эти два условия равносильны следующему одному: *если* $\mathfrak{M}$ *содержит какие-нибудь векторы* a, b, *то* $\mathfrak{M}$ *содержит и любую их линейную комбинацию* $\lambda a + \mu b$.

Из этих определений вытекает, что каждое линейное подпространство $\mathfrak{M}$ содержит нулевой вектор и вместе с любыми своими векторами содержит и все их линейные комбинации.

В п. 4.1 было отмечено, что каждое линейное пространство над полем K — это множество особого вида, основными операциями в которой являются сложение векторов, вычитание векторов и умножение векторов (слева) на элементы из K. Так как сложение векторов рассматривалось уже в $\mathfrak{L}$, то условия 1°, 2° показывают, что *линейные подпространства пространства* $\mathfrak{L}$ — *это просто подмножества, взятые из* $\mathfrak{L}$.

Совокупность, состоящая только из нулевого вектора, обладает свойствами 1°, 2° и, следовательно, является линейным подпространством в $\mathfrak{L}$. Это подпространство называется *нулевым*. С другой стороны, само пространство $\mathfrak{L}$ можно также рассматривать как свое собственное линейное подпространство. Нулевое подпространство и $\mathfrak{L}$ иногда называются *несобственными* подпространствами пространства $\mathfrak{L}$. Все остальные подпространства называются *непустыми или ненулевыми*.

Простейший способ построения линейных подпространств состоит в следующем. Берем в заданном линейном пространстве $\mathfrak{L}$ произвольные векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и рассматриваем все их линейные комбинации

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m.$$

Обозначим совокупность этих комбинаций через $\mathfrak{M}$. Так как сумма линейных комбинаций от $a_1, \ldots, a_m$ и произведение линейной комбинации на число снова являются линейными комбинациями от $a_1, \ldots, a_m$, то $\mathfrak{M}$ — линейное подпространство. Векторы $a_1, \ldots, a_m$ являются образующими этого подпространства. Выбрасывая из них те, которые линейно зависят от предыдущих, мы получим линейно независимую систему образующих подпространства $\mathfrak{M}$, т. е. базу в $\mathfrak{M}$. Но число векторов базы есть размерность пространства, поэтому *размерность подпространства* $\mathfrak{M}$ *равна максимальному числу линейно независимых векторов, содержащихся в системе* $a_1, \ldots, a_m$. Иногда говорят, что подпространство $\mathfrak{M}$ есть подпространство, *натянутое* на векторы $a_1, \ldots, a_m$. Следовательно, размерность подпространства, натянутого на систему векторов $a_1, \ldots, a_m$, равна максимальному числу линейно независимых векторов, содержащихся в этой системе.

Способ натягивания подпространства на заданную систему векторов является вполне общим: *всякое линейное подпространство* $\mathfrak{M}$ *линейного пространства* $\mathfrak{L}$ *является подпространством, натянутым на свою базу.*

Поскольку число линейно независимых векторов в $\mathfrak{L}$ не может быть больше размерности $\mathfrak{L}$, то отсюда видно, что размерность линейного подпространства не может превосходить размерности объемлющего пространства. Более того, если размерность линейного пространства $\mathfrak{L}$ равна размерности его подпространства $\mathfrak{M}$, то база для $\mathfrak{M}$ будет базой и для $\mathfrak{L}$. Поэтому всякий вектор из $\mathfrak{L}$ будет выражаться линейно через базу подпространства $\mathfrak{M}$, таким образом, $\mathfrak{L}$ совпадает с $\mathfrak{M}$. Следовательно, размерность истинного линейного подпространства меньше размерности объемлющего пространства.

В качестве примера рассмотрим обыкновенное пространство $\mathfrak{L}$, образованное направленными отрезками, выходящими из некоторой точки O. Размерность пространства $\mathfrak{L}$ равна трем, поэтому истинные подпространства могут иметь размерность 1 или 2. Подпространства размерности 1 должны натягиваться на какой-либо один ненулевой вектор a, т. е. должны быть совокупностью кратных за отрезки a. Но все отрезки вида αa лежат на прямой, содержащей вектор a. Таким образом, *одномерное подпространство* $\mathfrak{M}$ *является прямыми, проходящими через точку* O.

Двумерные подпространства должны натягиваться на два линейно независимых вектора, т. е. на два вектора a, b, не лежащих на одной прямой. Пусть $\mathfrak{N}$ — плоскость, проходящая через векторы a, b. Тогда все линейные комбинации $\alpha a + \beta b$ будут лежать в плоскости $\mathfrak{N}$ и, с другой стороны, всякий вектор, лежащий в $\mathfrak{N}$, будет линейной комбинацией векторов a, b. Следовательно, подпространство, натянутое на векторы a, b, будет совокупностью векторов, лежащих в плоскости $\mathfrak{N}$. Итак, *двумерными подпространствами пространства $\mathfrak{R}$ являются плоскости, проходящие через точку O.*

Пространства размерности, большей трех, не имеют столь наглядного геометрического истолкования. Однако геометрическую терминологию применяют и для них, называя одномерные линейные подпространства *прямыми*, двумерные — *плоскостями*, k-мерные при $k \geq 3$ соответственно — *k-мерными плоскостями*. Линейные подпространства, размерность которых на 1 меньше размерности пространства, носят специальное название *гиперплоскостей*.

Над подпространствами заданного линейного пространства можно производить некоторые операции, важнейшими из которых являются сложение и пересечение. *Пересечением* подпространств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... пространства $\mathfrak{L}$ называется совокупность $\mathfrak{P}$ векторов, входящих одновременно во все эти пространства. Операция пересечения обозначается знаком $\bigcap$, так что

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \bigcap \mathfrak{B} \bigcap \dots$$

Пересечение любого числа линейных подпространств пространства $\mathfrak{L}$ есть линейное подпространство этого пространства.

В самом деле, нулевой вектор содержится в каждом из заданных подпространств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... Поэтому он содержится и в их пересечении $\mathfrak{P}$, которое является, таким образом, непустым множеством. С другой стороны, если какие-нибудь векторы a, b входят в пересечение $\mathfrak{P}$, то они, а вместе с ними и любая их линейная комбинация $\alpha a + \beta b$ входят в каждое из подпространств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... Следовательно, $\alpha a + \beta b$ содержится в $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}$ — линейное подпространство.

Суммой конечного числа линейных подпространств $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_s$ пространства $\mathfrak{L}$ называется совокупность векторов, представимых в виде

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_s, \qquad (1)$$

где a_i — какой-нибудь вектор из $\mathfrak{A}_i$ ($i = 1, \dots, s$). Операция сложения подпространств обозначается знаком $+$.

Сумма конечного числа линейных подпространств пространства $\mathfrak{L}$ является снова линейным подпространством, которое

содержит все векторы заданных подпространств, и только всевозможные их линейные комбинации.

В самом деле, пусть заданы линейные подпространства $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_s$ и пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_s$. Если a, b — какие-либо векторы из $\mathfrak{A}$, то это значит, что их можно представить в форме

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_s, \quad b = b_1 + b_2 + \dots + b_s,$$

где a_i, b_i принадлежат $\mathfrak{A}_i$ ($i = 1, \dots, s$). Но тогда при любых α, β из K

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) + \dots + (\alpha a_s + \beta b_s)$$

есть разложение вектора $\alpha a + \beta b$ вида (1), так как $\alpha a_i + \beta b_i$ входит в $\mathfrak{A}_i$. Следовательно, $\alpha a + \beta b$ входит в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ — линейное подпространство. Полагая теперь в (1) $a_i = a$ для $i = l$, мы видим, что a_l будет содержаться в $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}$ содержит все векторы из $\mathfrak{A}_l$.

Отметим, наконец, без доказательства следующие свойства суммы подпространств, непосредственно вытекающие из ее определения:

1° $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$;

2° $\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}$;

3° *если $\mathfrak{A}$ содержится в подпространстве $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$.*

Рассматривая сумму двух произвольных линейных подпространств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, мы легко заметим, что ее размерность зависит не только от размерностей подпространств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, но и от того, как велика их общая часть. Точное значение размерности суммы дается следующей теоремой.

Теорема. *Размерность суммы двух линейных подпространств пространства $\mathfrak{L}$ равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения.*

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — заданные подпространства, r_1 и r_2 — соответственно их размерности. Обозначим размерность пересечения $\mathfrak{C}$ этих подпространств через m. Выберем в $\mathfrak{C}$ какую-либо базу $c_1, c_2, \dots, c_m$. Векторы $c_1, c_2, \dots, c_m$ линейно независимы и лежат в $\mathfrak{A}$. Поэтому в $\mathfrak{A}$ можно найти такие векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$, что система $a_1, a_2, \dots, a_k, c_1, \dots, c_m$ будет базой в $\mathfrak{A}$ (см. п. 4.2). По той же причине в подпространстве $\mathfrak{B}$ найдутся векторы $b_1, b_2, \dots, b_p$, которые вместе с векторами $c_1, c_2, \dots, c_m$ дадут базу для $\mathfrak{B}$. Поскольку число векторов базы совпадает с размерностью пространства, то между числами k, p и размерностями подпространств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ существуют соотношения

$$r_1 = k + m, \quad r_2 = p + m.$$

Если мы докажем, что система

$$a_1, \dots, a_k, \quad c_1, \dots, c_m, \quad b_1, \dots, b_p \qquad (2)$$

является базой пространства $\mathfrak{N}+\mathfrak{B}$, то теорема 1 будет доказана, так как тогда размерность пространства $\mathfrak{N}+\mathfrak{B}$ будет равна

$$k=m+p=r_1+r_2-n.$$

Всякий вектор a из $\mathfrak{N}$ выражается линейно через систему $a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m$, являющуюся базой для $\mathfrak{N}$, а тем более выражается через систему (2). Аналогично всякий вектор b из $\mathfrak{B}$ также выражается линейно через (2). Но тогда и сумма $a+b$, т. е. любой вектор из $\mathfrak{N}+\mathfrak{B}$, будет линейно выражаться через (2). Нам остается показать, что система (2) линейно независима.

Пусть

$$\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_k a_k+\gamma_1 c_1+\ldots+\gamma_m c_m+\beta_1 b_1+\ldots+\beta_p b_p=0 \quad (3)$$

— какое-нибудь линейное соотношение между этими векторами. Положим

$$b=\beta_1 b_1+\ldots+\beta_p b_p.$$

Вектор b выражается линейно через векторы $b_1, \ldots, b_p$, содержащиеся в пространстве $\mathfrak{B}$, поэтому b содержится в $\mathfrak{B}$. С другой стороны, из (3) вытекает, что

$$b=-\alpha_1 a_1-\ldots-\alpha_k a_k-\gamma_1 c_1-\ldots-\gamma_m c_m. \quad (4)$$

Поскольку $a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m$ содержатся в $\mathfrak{N}$, то отсюда следует, что b также содержится в $\mathfrak{N}$. Следовательно, b входит в пересечение пространств $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}$, и, значит, в выражении (4) вектора b через базу $\mathfrak{N}$ отсутствуют члены с $a_1, \ldots, a_k$, т. е.

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0.$$

Подставляя эти значения в (3), мы получим

$$\gamma_1 c_1+\ldots+\gamma_m c_m+\beta_1 b_1+\ldots+\beta_p b_p=0.$$

Но система $c_1, \ldots, c_m, b_1, \ldots, b_p$ является базой для $\mathfrak{B}$ и, следовательно, линейно независима, поэтому

$$\gamma_1=\ldots=\gamma_m=\beta_1=\ldots=\beta_p=0.$$

Линейная независимость системы (2) доказана.

Из доказанной теоремы можно вывести неравенство, дающее наименьшее значение размерности пересечения подпространств. Рассмотрим какие-либо линейные подпространства $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{L}$ и обозначим через r_1, r_2 размерности этих подпространств, через n — размерность $\mathfrak{L}$, через m — размерность пересечения $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{B}$. На основании теоремы размерность суммы $\mathfrak{N}+\mathfrak{B}$ равна r_1+r_2-m. Однако размерность суммы $\mathfrak{N}+\mathfrak{B}$ не может быть больше размерности пространства $\mathfrak{L}$. Следовательно, $r_1+r_2-m\leqslant n$, откуда $m\geqslant r_1+r_2-n$. Итак, *размерность пересечения двух линейных*

подпространств пространства $\mathfrak{L}$ не может быть меньше избытка суммы размерностей этих подпространств над размерностью пространства $\mathfrak{L}$.

Например, пересечение двух плоскостей в трехмерном пространстве всегда содержит прямую, пересечение двумерного и трехмерного подпространств четырехмерного пространства содержит прямую, пересечение двух трехмерных подпространств в четырехмерном пространстве содержит плоскость и т. д.

6.2. **Прямые суммы.** Согласно определению всякий вектор a, принадлежащий сумме линейных подпространств

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2+\ldots+\mathfrak{N}_s,$$

может быть представлен в виде

$$a=a_1+a_2+\ldots+a_s \quad (a_i\in\mathfrak{N}_i,\ i=1, \ldots, s). \quad (1)$$

Однако это представление, вообще говоря, не будет однозначным. Если каждый вектор a из $\mathfrak{N}$ допускает только одно представление вида (1), т. е. если из равенства (1) и

$$a=a_1'+a_2'+\ldots+a_s' \quad (a_i'\in\mathfrak{N}_i,\ i=1, \ldots, s) \quad (2)$$

следует, что $a_1=a_1', \ldots, a_s=a_s'$, то сумма называется *прямой суммой* и обозначается

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\dotplus\mathfrak{N}_2\dotplus\ldots\dotplus\mathfrak{N}_s.$$

Прямые суммы обладают многочисленными специальными свойствами, некоторые из которых мы теперь рассмотрим. Прежде всего, требование однозначной разложимости любого вектора суммы можно в определении прямой суммы заменить более слабым требованием однозначной разложимости только нулевого вектора: *если нулевой вектор суммы $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2+\ldots+\mathfrak{N}_s$ допускает только одно разложение вида (1), т. е. если из*

$$a_1+a_2+\ldots+a_s=0 \quad (a_i\in\mathfrak{N}_i,\ i=1, \ldots, s)$$

следует, что $a_1=a_2=\ldots=a_s=0$, то сумма является прямой.

Для доказательства рассмотрим какой-нибудь вектор суммы a и допустим, что он имеет два разложения: (1) и (2). Вычитая из одного разложения другое, получим

$$(a_1-a_1')+(a_2-a_2')+\ldots+(a_s-a_s')=0.$$

Так как здесь $(a_i-a_i')\in\mathfrak{N}_i$, $i=1, 2, \ldots, s$, то согласно предположению

$$a_1-a_1'=a_2-a_2'=\ldots=a_s-a_s'=0,$$

или

$$a_1=a_1',\ \ a_2=a_2', \ldots, a_s=a_s'.$$

Утверждение доказано.

Следующая теорема относится к употреблению в прямых суммах скобок.

Теорема 1. *Если разложения линейных подпространств*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_s, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{12} + \ldots + \mathfrak{A}_{1m_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{A}_s &= \mathfrak{A}_{s1} + \mathfrak{A}_{s2} + \ldots + \mathfrak{A}_{sm_s} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

прямые, то разложение

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{12} + \ldots + \mathfrak{A}_{1m_1} + \ldots + \mathfrak{A}_{s1} + \mathfrak{A}_{s2} + \ldots + \mathfrak{A}_{sm_s} \tag{5}$$

также прямое; и наоборот, если в прямой сумме каждое слагаемое заменить его прямым разложением, то получится снова прямое разложение. Обратно, если разложение (5) прямое, то разложения (4) и (3) также прямые.

Докажем сначала первое утверждение. Пусть

$$a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m_1} + \ldots + a_{s1} + a_{s2} + \ldots + a_{sm_s} = o.$$

Перепишем это равенство в виде

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_s = o, \tag{6}$$

где

$$a_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{im_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{7}$$

Так как $a_i \in \mathfrak{A}_i$, а сумма (3) прямая, то из (6) следует, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_s = o$ и равенство (7) переходит в

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{im_i} = o \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{8}$$

Но разложение

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_{i1} + \mathfrak{A}_{i2} + \ldots + \mathfrak{A}_{im_i}$$

по условию также прямое, поэтому из (8) следует, что $a_{i1} = a_{i2} = \ldots = a_{im_i} = o$. Таким образом, сумма (5) прямая, что и требовалось. Повторяя рассуждения в обратном порядке, получим доказательство обратного утверждения.

Теорема 1 позволяет рассматривать прямую сумму нескольких подпространств как результат последовательных прямых сумм двух слагаемых. Условия, при которых сумма двух подпространств будет прямой, можно представить в следующей удобной форме.

Теорема 2. *Для того чтобы сумма двух линейных подпространств пространства $\mathfrak{R}$ была прямой, необходимо и достаточно, чтобы пересечение этих подпространств было нулевым.*

В самом деле, если пересечение двух подпространств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ содержит ненулевой вектор a, то для o можно написать разложение

$$a + (-a) = o,$$

где $a \neq o$, $a \in \mathfrak{A}$, $-a \in \mathfrak{B}$, и, следовательно, сумма $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ прямой не будет. Обратно, если сумма $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ не прямая, то для нулевого вектора должно найтись разложение

$$a + b = o \qquad (a \neq o,\ a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B}).$$

Так как $b = -a$, то b входит и в подпространство $\mathfrak{A}$. Следовательно, в этом случае пересечение $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ содержит ненулевой вектор b, что и требовалось.

Теорема 3. *Размерность прямой суммы подпространств равна сумме размерностей этих подпространств.*

Если слагаемых два, то согласно п. 6.1 размерность суммы равна сумме размерностей слагаемых минус размерность пересечения. Но по теореме 2 пересечение подпространств в случае прямой суммы является нулевым и его размерность равна нулю. Поэтому *размерность прямой суммы двух подпространств равна сумме их размерностей.* Если слагаемых больше чем два, то доказательство легко проводится полной индукцией.

Из теоремы 3 вытекает такое следствие: *если подпространство $\mathfrak{A}$ есть прямая сумма подпространств $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$, то, выбирая в каждом подпространстве $\mathfrak{A}_i$ базу $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и объединяя эти базы в одну систему*

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m_1}, \ldots, a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sm_s}, \tag{9}$$

мы получим базу подпространства $\mathfrak{A}$.

Действительно, каждый вектор подпространства $\mathfrak{A}_i$ выражается линейно через векторы (9), поэтому и любой вектор из $\mathfrak{A}$ будет выражаться линейно через векторы (9). Число векторов системы (9) равно на основании теоремы 3 размерности подпространства $\mathfrak{A}$. Поэтому система (9) является базой для $\mathfrak{A}$, что и требовалось.

Теорема 3 допускает обращение: *если размерность суммы линейных подпространств равна сумме их размерностей, то сумма прямая.*

Пусть сначала $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ и

$$\text{разм. } \mathfrak{A} = \text{разм. } \mathfrak{A}_1 + \text{разм. } \mathfrak{A}_2.$$

В силу теоремы п. 6.1 отсюда следует, что размерность пересечения $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ равна нулю, и, следовательно, это пересечение является нулевым. Согласно теореме 2 отсюда в свою очередь следует, что сумма $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ прямая. Если число слагаемых больше двух, то для доказательства достаточно применить индукцию.

6.3. **Системы однородных линейных уравнений.** В качестве иллюстрации к теории линейных подпространств рассмотрим задачу о решении систем линейных однородных уравнений, т. е. систем

вида

$$\begin{aligned} &\xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{21} + \ldots + \xi_n a_{n1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\xi_1 a_{m1} + \xi_2 a_{m2} + \ldots + \xi_n a_{mn} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где a_{ij} — заданные элементы какого-то тела K, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — неизвестные, значения которых ищутся в теле K. Систему (1) можно переписать в следующей матричной форме:

$$x \cdot A = O, \tag{2}$$

где $x = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ — строка неизвестных, а $A = \|a_{ij}\|$ — матрица, у которой j-й столбец образован коэффициентами j-го уравнения системы (1). Нулевая строка $[0, \ldots, 0]$ является решением системы (1) при любых коэффициентах a_{ij}. Эта строка называется *нулевым* или *тривиальным* решением системы (1). Существование тривиального решения показывает, что система однородных линейных уравнений всегда непротиворечива.

Для более подробного изучения свойств решений системы (1) обозначим через $\mathfrak{P}$ пространство строк длины n над телом K и каждое решение $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ системы (1) будем рассматривать как вектор x пространства $\mathfrak{P}$, удовлетворяющий уравнению (2). *Совокупность всех решений уравнения (2) является линейным подпространством пространства* $\mathfrak{P}$. Действительно, из (2) и $y \cdot A = O$ следует

$$(\lambda x + \mu y) A = \lambda (xA) + \mu (yA) = O$$

для любых $\lambda, \mu \in K$. Иначе говоря, произвольная линейная комбинация решений системы (1) является снова решением системы (1). Поскольку пространство $\mathfrak{P}$ имеет размерность n, то размерность пространства решений системы (1) имеет размерность не более n.

Говорят, что какие-то решения $x_1, \ldots, x_k$ системы (2) образуют *фундаментальную систему решений* для (2), если любое решение системы (2) можно представить в виде линейной комбинации указанных решений $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ и в то же время никакое из решений $x_1, \ldots, x_k$ нельзя представить в виде линейной комбинации остальных. На языке теории линейных пространств это означает, что совокупность $x_1, \ldots, x_k$ является просто *базой подпространства решений*, а число фундаментальных решений — это размерность подпространства решений.

Рангом однородной системы (1) называется ранг матрицы A. Однородные системы вида (1) являются частным видом общих систем линейных уравнений, уже изученных в п. 5.3. С помощью доказанной там теоремы Кронекера — Капелли легко получается следующая

Теорема об однородных линейных уравнениях. *Размерность пространства решений системы* (1) *однородных линейных уравнений с* n *неизвестными ранга равного* $n - r$, *где* r — *ранг системы* (1).

Если $r = n$, то по теореме Кронекера — Капелли система (1) должна иметь единственное решение, являющееся, следовательно, просто нулевым решением. Подпространство решений состоит из одного нулевого вектора, и его размерность 0 совпадает с размерностью $n - r$.

Пусть $r < n$. Согласно теореме Кронекера — Капелли система (1) в этом случае (после надлежащей перенумерации неизвестных и уравнений) будет равносильна системе вида

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \gamma_{r+1,1}\xi_{r+1} + \ldots + \gamma_{n1}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_r &= \gamma_{r+1,r}\xi_{r+1} + \ldots + \gamma_{nr}\xi_n, \end{aligned} \tag{3}$$

где γ_{ij} — подходящие элементы из K. Неизвестным $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ здесь можно придавать произвольные значения из K. Полагая последовательно

$$\begin{aligned} &[\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n] = [1, 0, \ldots, 0], \\ &[\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n] = [0, 1, \ldots, 0], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n] = [0, 0, \ldots, 1] \end{aligned}$$

и вычисляя каждый раз по формулам (3) значения неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_r$, находим следующую систему решений для (1):

$$\begin{aligned} c_1 &= [\gamma_{r+1,1}, \ldots, \gamma_{n1}, 1, 0, \ldots, 0], \\ c_2 &= [\gamma_{r+1,2}, \ldots, \gamma_{n2}, 0, 1, \ldots, 0], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-r} &= [\gamma_{r+1,n-r}, \ldots, \gamma_{nn-r}, 0, 0, \ldots, 1]. \end{aligned} \tag{4}$$

Мы знаем, что число линейно независимых строк в системе $c_1, \ldots, c_{n-r}$ совпадает с рангом матрицы, составленной из этих строк. Но из (4) видно, что указанная матрица содержит минор, образованный последними $n - r$ столбцами, являющийся единичной матрицей. Поэтому ранг матрицы равен $n - r$, и, следовательно, все векторы $c_1, \ldots, c_{n-r}$ линейно независимы. С другой стороны, формулы (3) показывают, что любое решение $x = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ удовлетворяет соотношению

$$x = \xi_{r+1} c_1 + \ldots + \xi_n c_{n-r},$$

т. е. является линейной комбинацией решений $c_1, \ldots, c_{n-r}$. Тем самым мы убедились, что система $c_1, \ldots, c_{n-r}$ является базой пространства решений системы (1) и потому размерность этого пространства равна $n - r$.

Отметим два непосредственных следствия доказанной теоремы.

Следствие 1. *Для того чтобы система n однородных линейных уравнений с n неизвестными*

$$\begin{aligned} &\xi_1 x_{11} + \ldots + \xi_n x_{n1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\xi_1 x_{1n} + \ldots + \xi_n x_{nn} = 0 \end{aligned}$$

с коэффициентами из какого-нибудь тела K не имела ненулевых решений, необходимо и достаточно, чтобы матрица этой системы

$$A = \begin{Vmatrix} x_{11} \ldots x_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} \ldots x_{nn} \end{Vmatrix}$$

была обратимой.

Действительно, условие $r = r$ означает, что ранг матрицы A должен совпадать с ее порядком, т. е. матрица A должна быть обратимой.

Следствие 2. *Для того чтобы система n линейных однородных уравнений с k неизвестными с коэффициентами из некоторого поля имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы этой системы был равен нулю.*

В самом деле, квадратная матрица с элементами из поля тогда и только тогда необратима, когда ее определитель равен нулю.

Мы видели, что теорема об однородных линейных уравнениях является прямым следствием теоремы Кронекера—Капелли. Последняя теорема справедлива не только для линейных систем с числовыми коэффициентами, но и для линейных систем с иными коэффициентами. Поэтому наряду с теоремой об однородных линейных уравнениях и следствиями 1 справедливы аналогичные утверждения и о системах однородных линейных уравнений с любыми коэффициентами, а именно: совокупность решений-столбцов $x = \|\xi_1, \ldots, \xi_n\|$ системы однородных линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{m1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

с коэффициентами из некоторого тела K является линейным подпространством пространства всех столбцов длины n над K. Размерность этого пространства решений равна $n - r$, где r — ранг матрицы $A = \|\alpha_{ij}\|$, у которой i-я строка образована коэффициентами i-го уравнения системы (5).

Примеры и задачи

1. Найти размерность линейного подпространства, натянутого на векторы $a = \|1, 3, 2, 1\|$, $b = \|4, 9, 5, 2\|$, $c = \|3, 7, 4, 3\|$.

2. Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства X, а $\mathfrak{A}_i$ — линейное подпространство, натянутое на e_i, то

$$X = \mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{A}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{A}_n.$$

3. Для каждого активного подпространства $\mathfrak{A}$ пространства X существует такое линейное подпространство $\mathfrak{B}$, что $X = \mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$.

4. Показать следующее обобщение теоремы 2 п. 8.2: для того чтобы сумма нескольких заданных линейных подпространств была прямой, необходимо и достаточно, чтобы каждое из заданных подпространств имело нулевое пересечение с суммой всех остальных.

5. Показать, что пересечение всех линейных подпространств пространства X, содержащих заданные линейные подпространства, равно сумме последних.

6. Доказать, что для любых подпространств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ линейного пространства имеют место равенства

$$\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C},$$
$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C},$$

где для краткости пересечение подпространств обозначается как произведение.

7. Всякое линейное пространство X бесконечной размерности содержит активное линейное подпространство, размерность которого совпадает с размерностью всего пространства X.

8. Для каких значений λ (на всем комплексном числе) система уравнений

$$\begin{aligned} x + 2y - \lambda z &= y, \\ 2x + y - z &= \lambda, \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение? Для каких значений λ пространство решений этой системы имеет наименьшую размерность?

9. Для каких значений параметра λ система уравнений

$$\begin{aligned} x + y + (\lambda - 2)z &= 1, \\ (\lambda - 1)y + \lambda z &= 2 \end{aligned}$$

совместна?

10. Какова размерность пространства решений систем

$$\left.\begin{aligned} x - iy + z &= 0 \\ jx + ky - z &= 0 \\ x - (i+j)y - (2k - j)z &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x - yi - zj - tk &= 0 \\ xj + yk - zi - t &= 0 \\ x - yk + z(2i - j) - tk &= 0 \end{aligned}\right\},$$

рассматриваемых над телом кватернионов (п. 1.5)?

11. Существуют ли многочлены от кватернионных переменных a, b, c, d с кватернионными коэффициентами, обращение которого в нуль влекло бы необходимым и достаточным условием для существования ненулевого решения x системы линейных уравнений

$$ax - by = 0, \qquad cx + dy = 0?$$

12. Существуют ли многочлены от $a, \bar{a}, b, \bar{b}, c, \bar{c}, d, \bar{d}$, удовлетворяющий требованиям предыдущего упражнения?

Глава III

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Основной целью настоящей главы является изучение свойств преобразований линейных пространств. В §§ 8, 10 и в пп. 9.1, 11.1, 11.2 никаких ограничений на основное тело не накладывается. В пп. 9.2, 9.3, 11.3, 11.4 и в § 12 предполагается, что основное тело является полем. Во вводном § 7 устанавливается ряд понятий и свойств, относящихся к преобразованиям совершенно произвольных множеств.

§ 7. Преобразования произвольных множеств

7.1. Произведение преобразований. Рассмотрим произвольное множество объектов $\mathfrak{M}$. Это множество может состоять как из конечного, так и из бесконечного числа элементов. *Преобразованием* множества $\mathfrak{M}$ называется такой закон, который позволяет для каждого элемента множества $\mathfrak{M}$, находя какой-либо элемент множества $\mathfrak{M}$, находить снова некоторый элемент из $\mathfrak{M}$. Мы условимся обозначать преобразования буквами $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, ... Если m — элемент из $\mathfrak{M}$, то через $m\mathscr{A}$ будет обозначаться тот элемент множества $\mathfrak{M}$, который получается из элемента m посредством преобразования $\mathscr{A}$. Элемент $m\mathscr{A}$ называется *образом* элемента m при преобразовании $\mathscr{A}$, а m называется *прообразом* элемента $m\mathscr{A}$.

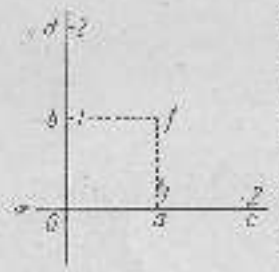


Рис. 2.

Рассмотрим в качестве примера совокупность всех точек плоскости и обозначим через $\mathscr{U}$ преобразование, заключающееся в повороте точек этой плоскости на 90° около некоторой ее точки O против часовой стрелки (рис. 2).

Пользуясь рисунком, мы видим, что

$$a\mathscr{U} = b, \quad c\mathscr{U} = d.$$

Аналогично, если $\mathscr{D}$ означает сдвиг точек на 1 параллельно оси Ox, то

$$a\mathscr{D} = c, \quad b\mathscr{D} = f.$$

Два преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ множества $\mathfrak{M}$ называются *равными*, если для каждого элемента m из $\mathfrak{M}$

$$m\mathscr{A} = m\mathscr{B}.$$

Одним из основных понятий теории преобразований является понятие произведения преобразований, которое вводится следующим образом. Пусть даны преобразования $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ множества $\mathfrak{M}$. Первое из них переводит произвольный элемент m множества $\mathfrak{M}$ в $m\mathscr{A}$. Если к новому элементу применить преобразование $\mathscr{B}$, то получится элемент $(m\mathscr{A})\mathscr{B}$. Преобразование, переводящее m непосредственно в $(m\mathscr{A})\mathscr{B}$, называется *произведением* $\mathscr{A}$ на $\mathscr{B}$ и обозначается $\mathscr{A}\mathscr{B}$. Таким образом, по определению

$$m(\mathscr{A}\mathscr{B}) = (m\mathscr{A})\mathscr{B}.$$

Если к элементу m сначала применить преобразование $\mathscr{B}$, а затем $\mathscr{A}$, то получится элемент $(m\mathscr{B})\mathscr{A}$, который может не совпасть с $(m\mathscr{A})\mathscr{B}$. Действительно, в разобранном выше примере с плоскостью имеем

$$a(\mathscr{U}\mathscr{D}) = (a\mathscr{U})\mathscr{D} = b\mathscr{D} = f,$$
$$a(\mathscr{D}\mathscr{U}) = (a\mathscr{D})\mathscr{U} = c\mathscr{U} = d,$$

следовательно, $\mathscr{U}\mathscr{D} \neq \mathscr{D}\mathscr{U}$. Таким образом, *произведение преобразований вообще говоря зависит от порядка сомножителей*. Мы видим, что один из основных законов, которым подчиняется произведение чисел, теряется для преобразований. Однако другой основной закон — *ассоциативность умножения* — для преобразований сохраняется. В самом деле, пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — произвольные преобразования множества $\mathfrak{M}$, m — один из его элементов. Согласно определению имеем

$$m((\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C}) = (m(\mathscr{A}\mathscr{B}))\mathscr{C} = ((m\mathscr{A})\mathscr{B})\mathscr{C},$$
$$m(\mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C})) = (m\mathscr{A})(\mathscr{B}\mathscr{C}) = ((m\mathscr{A})\mathscr{B})\mathscr{C},$$

откуда

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C} = \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C}).$$

Пользуясь этим законом, легко вывести, что *произведение любого конечного числа преобразований, записанных в определенном порядке, не зависит от способа расстановки скобок*. Так, например,

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})(\mathscr{C}\mathscr{D}) = ((\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C})\mathscr{D} = (\mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C}))\mathscr{D} = \mathscr{A}((\mathscr{B}\mathscr{C})\mathscr{D}).$$

Поэтому в произведениях, содержащих несколько сомножителей, можно опускать скобки и говорить просто о произведении двух, трех и большего числа преобразований. Произведение n множителей, равных $\mathscr{A}$, называется n-й степенью преобразования $\mathscr{A}$

n обозначается $\mathscr{A}^n$. Действия со степенями подчиняются обычным правилам

$$\mathscr{A}^m\mathscr{A}^n=\mathscr{A}^{m+n}, \tag{1}$$

$$(\mathscr{A}^m)^n=\mathscr{A}^{mn}, \tag{2}$$

доказательство которых опущено.

Если произведение двух преобразований $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ не зависит от порядка сомножителей, то $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ называются *перестановочными* или *коммутирующими*. Формула (1) показывает, что *степени одного и того же преобразования перестановочны между собой*.

Если преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{K}$ перестановочны, то

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})^2=\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A}^2\mathscr{B}\mathscr{B}=\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2$$

и вообще

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})^n=\mathscr{A}^n\mathscr{B}^n. \tag{3}$$

Если же $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ не перестановочны, то формула (3) может оказаться неверной.

7.2. **Единичное и обратное преобразования.** Среди всех преобразований множества $\mathfrak{M}$ особое место занимает преобразование, ставящее в соответствие каждому элементу m этого множества тот же самый элемент m. Это преобразование носит название *единичного* или *тождественного* и будет нами обозначаться через $\mathscr{E}$. Таким образом, для любого m

$$m\mathscr{E}=m.$$

Пусть $\mathscr{A}$ — произвольное преобразование множества $\mathfrak{M}$. Так как

$$m(\mathscr{E}\mathscr{A})=(m\mathscr{E})\mathscr{A}=m\mathscr{A},$$
$$m(\mathscr{A}\mathscr{E})=(m\mathscr{A})\mathscr{E}=m\mathscr{A},$$

то

$$\mathscr{E}\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{E}=\mathscr{A}.$$

Если для преобразования $\mathscr{A}$ можно найти такое преобразование $\mathscr{R}$, что

$$\mathscr{A}\mathscr{R}=\mathscr{R}\mathscr{A}=\mathscr{E}, \tag{4}$$

то $\mathscr{R}$ называется *обратным* по отношению к $\mathscr{A}$, а само $\mathscr{A}$ называется *обратимым*. Легко видеть, что каждое обратимое преобразование имеет только одно обратное. Действительно, если $\mathscr{A}$ имеет два обратных преобразования $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'$, то, умножая соотношение

$$\mathscr{A}\mathscr{R}'=\mathscr{E}$$

слева на $\mathscr{R}$ и пользуясь равенствами (4) и ассоциативностью умножения преобразований, получим $\mathscr{R}\mathscr{R}'=\mathscr{R}\mathscr{E}$, или $\mathscr{R}'=\mathscr{R}$.

Преобразование, обратное по отношению к $\mathscr{A}$, обозначается $\mathscr{A}^{-1}$. Соотношения (4) симметричны относительно $\mathscr{A}$, $\mathscr{R}$; поэтому, если $\mathscr{R}$ обратно по отношению к $\mathscr{A}$, то $\mathscr{A}$ обратно по отношению к $\mathscr{R}$, т. е.

$$(\mathscr{A}^{-1})^{-1}=\mathscr{A}, \tag{5}$$

Положим по определению

$$\mathscr{A}^0=\mathscr{E}, \quad \mathscr{A}^{-n}=(\mathscr{A}^{-1})^n \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Из (1), (5) легко следует, что формулы (1), (2) годны не только для целых положительных показателей, но и для всех целых показателей. В частности,

$$(\mathscr{A}^n)^{-1}=(\mathscr{A}^{-1})^n=\mathscr{A}^{-n},$$

Далее, соотношение

$$\mathscr{A}\mathscr{B}\cdot\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}^{-1}=\mathscr{E}$$

показывает, что

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})^{-1}=\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}^{-1}.$$

7.3. **Взаимно однозначные преобразования.** Не всякое преобразование обратимо. Следующая теорема указывает наиболее общие обратимые преобразования.

Теорема. *Для того чтобы преобразование $\mathscr{A}$ множества $\mathfrak{M}$ было обратимым, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{A}$ было взаимно однозначным отображением множества $\mathfrak{M}$ на себя, т. е. чтобы каждый элемент из $\mathfrak{M}$ имел в $\mathfrak{M}$ прообраз и чтобы различные элементы из $\mathfrak{M}$ переходили преобразованием $\mathscr{A}$ в различные элементы.*

Докажем сначала необходимость. Пусть $\mathscr{A}$ имеет обратное преобразование $\mathscr{R}$, так что

$$\mathscr{A}\mathscr{R}=\mathscr{R}\mathscr{A}=\mathscr{E}.$$

Возьмем в $\mathfrak{M}$ произвольный элемент m, и пусть $m\mathscr{R}=n$. Умножая это соотношение на $\mathscr{A}$ и заменяя $\mathscr{R}\mathscr{A}$ через $\mathscr{E}$, получим $n=n\mathscr{A}$, т. е. каждый элемент m из $\mathfrak{M}$ является образом некоторого элемента n из $\mathfrak{M}$. С другой стороны, если два элемента m_1, m_2 переводятся преобразованием $\mathscr{A}$ в один и тот же элемент

$$m_1\mathscr{A}=m_2\mathscr{A},$$

то, умножая это соотношение на $\mathscr{R}$, получим $m_1=m_2$. Следовательно, каждый элемент из $\mathfrak{M}$ имеет в $\mathfrak{M}$ только один прообраз.

Докажем теперь достаточность условий. Согласно условию для каждого элемента m в множестве $\mathfrak{M}$ найдется один и только один элемент n, для которого

$$n\mathscr{A}=m. \tag{6}$$

Обозначим преобразование, переводящее m в n, через $\mathscr{B}$. Таким образом,

$$m\mathscr{B} = n. \tag{7}$$

Умножая (7) на $\mathscr{A}$ и пользуясь равенством (6), получим

$$m(\mathscr{B}\mathscr{A}) = n\mathscr{A} = m.$$

Так как m — произвольный элемент, то отсюда $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathfrak{E}$. Аналогичным образом, умножая (6) на $\mathscr{B}$ и пользуясь (7), получим $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathfrak{E}$. Следовательно, $\mathscr{B}$ есть искомое обратное преобразование.

7.4. Подстановки. Преобразования конечных множеств обычно задают посредством таблиц, у которых в первой строке пишут в каком-нибудь порядке обозначения элементов заданного множества, а под ними — обозначения *соответствующих* им элементов. Например,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

есть преобразование множества чисел 1, 2, 3, при котором 1 переходит в 3, 2 в 1, 3 в 2 или, пользуясь установленными выше обозначениями,

$$1\sigma = 3, \quad 2\sigma = 1, \quad 3\sigma = 2.$$

Обратимые преобразования конечных множеств называются *подстановками*. Чтобы преобразование, записанное таблицей, было подстановкой, необходимо и достаточно, чтобы не только в верхней строке, но и в нижней находились обозначения всех элементов множества, причем каждый элемент должен встречаться только раз. Для записи обратной подстановки σ^{-1} достаточно, очевидно, в таблице для σ нижнюю строку сделать верхней, а верхнюю — нижней.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — какая-либо функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$, а σ — подстановка чисел $1, \ldots, n$. Результатом подстановки σ, произведенной над переменными $x_1, \ldots, x_n$ в функции F, по определению называется выражение

$$F\sigma = F(x_{1\sigma}, \ldots, x_{n\sigma}).$$

Из этого определения непосредственно следует, что для любых подстановок ρ, σ и любых функций F, G от $x_1, \ldots, x_n$ имеем

$$F(\rho\sigma) = (F\rho)\sigma, \tag{8}$$

$$(FG)\sigma = F\sigma \cdot G\sigma, \quad (F+G)\sigma = F\sigma + G\sigma. \tag{9}$$

Возьмем теперь в качестве функции F выражение

$$\Delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n) \ldots (x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n) \ldots (x_{n-1} - x_n). \tag{10}$$

Ясно, что для любой подстановки σ будем иметь $\Delta\sigma = \pm\Delta$. Если $\Delta\sigma = \Delta$, то σ называется *четной* подстановкой, если $\Delta\sigma = -\Delta$, то *нечетной*. Для необратимого преобразования σ имеем $\Delta\sigma = 0$. Поэтому для любого преобразования σ множества чисел $1, \ldots, n$ имеем

$$\Delta\sigma = \varepsilon_\sigma \Delta,$$

где $\varepsilon_\sigma = +1$, если σ — четная подстановка, $\varepsilon_\sigma = -1$, если σ — нечетная подстановка, и $\varepsilon_\sigma = 0$, если σ — необратимое преобразование. Значение символа ε_σ называется также *знаком* преобразования σ.

Из формул (8), (9) имеем для произвольных преобразований ρ, σ

$$\varepsilon_\rho \Delta = \Delta(\rho\sigma) - (\Delta\rho)\sigma = -\varepsilon_\rho \varepsilon_\sigma \Delta,$$

откуда

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\rho,$$

т. е. *знак произведения преобразований равен произведению знаков сомножителей*. Так как знак тождественного преобразования, очевидно, равен $+1$, то *знак обратной подстановки всегда совпадает со знаком заданной подстановки*.

Циклической подстановкой или *циклом* $(i_1\, i_2 \ldots i_m)$ называется подстановка, для которой $i_1\sigma = i_2$, $i_2\sigma = i_3$, $\ldots$, $i_{m-1}\sigma = i_m$, $i_m\sigma = i_1$ и $i\sigma = i$ для остальных элементов i множества, если они есть. В частности, двойным циклом или транспозицией $(i\,j)$ называется подстановка, переставляющая i и j и оставляющая неизменными остальные элементы. Переставляя в выражении (10) для Δ индексы 1 и 2, легко убеждаемся, что $\Delta(1\,2) = -\Delta$, т. е. что двойной цикл (1 2) есть подстановка нечетная. С другой стороны, непосредственные вычисления показывают, что

$$(1\,i)(1\,2)(1\,i) = (i\,2), \quad (2\,j)(1\,2)(2\,j) = (1\,j),$$

а так как для любых ρ, σ всегда $\varepsilon_{\rho\sigma} = \varepsilon_\rho \varepsilon_\sigma$, то

$$\varepsilon_{(i\,j)} = \varepsilon_{(1\,i)(1\,2)(1\,i)} = \varepsilon_{(1\,i)}\varepsilon_{(1\,2)}\varepsilon_{(1\,i)} = -\varepsilon_{(1\,2)},$$

т. е. *всякий двойной цикл есть подстановка нечетная*.

Отсюда следует, далее, что произведение нечетного числа двойных циклов есть подстановка нечетная, а произведение четного числа двойных циклов — подстановка четная. В частности, из

легко проверяемой формулы

$$(1\ 2\ 3\ \dots\ m) = (1\ 2)(1\ 3)\dots(1\ m)$$

следует, что цикл $(i_1 i_2 \dots i_m)$ четной длины m есть подстановка нечетная, а цикл нечетной длины — подстановка четная.

Ясно, что циклы без общих элементов являются перестановочными (коммутативными) подстановками. В то же время совершенно произвольную подстановку легко разложить в произведение циклов без общих элементов. Для этого берем произвольный элемент множества i_1 и смотрим, в какой элемент i_2 переводит его подстановка. Если $i_1 = i_2$, то получаем единичный цикл (i_1), т. е. тождественную подстановку, в качестве первого множителя. Если $i_1 \neq i_2$, то берем образ i_3 элемента i_2. При $i_3 = i_1$ получаем в качестве множителя цикл $(i_1 i_2)$, при $i_3 \neq i_1$ рассматриваем образ i_4 элемента i_3. Если $i_4 = i_1$, то цикл закрывается, и получаем множитель $(i_1 i_2 i_3)$ и т. д.; перебирая постепенно все элементы множества, получим разложение подстановки в циклы без общих элементов. Например, имеем

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5)(2\ 4).$$

Перемножая знаки циклов, получим, что $\varepsilon_\sigma = -1$.

Существует и другой способ определения знака подстановки — при помощи подсчета числа так называемых инверсий. По условию при записи подстановок таблицам в верхней строке можно писать элементы множества в произвольном порядке. Однако в случае, когда рассматриваемое множество есть совокупность целых чисел, можно условиться в первой строке писать числа в порядке возрастания. Тогда подстановка будет вполне известна, если будет задана только нижняя строка таблицы, т. е. задана *перестановка* чисел. Получаемое таким образом соответствие между подстановками и перестановками взаимно однозначно, и мы получаем возможность записывать подстановки вместо двухстрочных таблиц одностроч ными. Пусть σ — подстановка, отображающая перестановке $i_1, i_2, \dots, i_n$ чисел $1, 2, \dots, n$. Рассматриваем всевозможные пары i_k, i_l $(k < l)$ и говорим, что пара i_k, i_l дает *инверсию*, если $i_k > i_l$. Из соотношения

$$\Delta_\sigma = \prod_{k<l} (x_{i_k} - x_{i_l}) = \prod (x_{i_k} - x_{i_l})$$

видно, что $\varepsilon_\sigma = 1$, если четно число множителей $x_{i_k} - x_{i_l}$, для которых $i_k > i_l$, и $\varepsilon_\sigma = -1$, если число таких множителей нечетно. Следовательно, четность подстановки σ совпадает с четностью числа инверсий в перестановке $i_1, i_2, \dots, i_n$.

Примеры и задачи

1. В обыкновенном пространстве берем прямоугольную систему координат $OXYZ$. Обозначим через $\mathscr{A}$ поворот пространства около оси OX на 90° по направлению от OY к OZ, через $\mathscr{B}$ — поворот на 90° около оси OY от OZ к OX и через $\mathscr{C}$ — поворот на 90° около OZ от OX к OY. Пусть m — точка с координатами $(1, 0, 1)$. Вычислить координаты точек $m\mathscr{A}\mathscr{B}$, $m(\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C})$, $m(\mathscr{C}\mathscr{B}\mathscr{A})$. Показать, что

$$\mathscr{A}^4 = \mathscr{B}^4 = \mathscr{C}^4 = \mathscr{E}, \quad \mathscr{A}\mathscr{B} \neq \mathscr{B}\mathscr{A},$$
$$\mathscr{A}^2\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}^2.$$

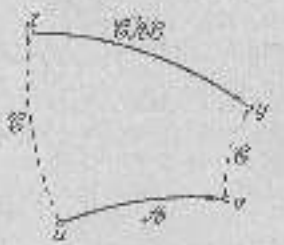


Рис. 8.

2. Рассмотрим два преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$ произвольного множества $\mathfrak{M}$, из которых $\mathscr{C}$ обратимо. Возьмем произвольный элемент a из $\mathfrak{M}$ и пусть $a = a_0\mathscr{C}$. Преобразование $\mathscr{C}$ «сдвинет» a_0 в некоторые элементы x, y. Показать, что тогда преобразование $\mathscr{C}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{C}$ переведет x в y (рис. 8).

3. Выберем на плоскости произвольную точку O и обозначим через $\alpha\mathscr{A}$ поворот плоскости на некоторый угол α около O. Пусть $\mathscr{B}$ — параллельный сдвиг плоскости на расстояние a в каком-либо определенном направлении. Показать, что $\mathscr{B}^{-1}\alpha\mathscr{A}\mathscr{B}$ есть поворот на угол α вокруг точки $O\mathscr{B}$, а $\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}_0\mathscr{A}$ — сдвиг плоскости на расстояние a в направлении, повернутом на угол α относительно первоначального.

§ 8. Линейные преобразования и их матрицы

8.1. Простейшие свойства. *Преобразованием* линейного пространства $\mathfrak{L}$ называется закон, ставящий каждому вектору из $\mathfrak{L}$ в соответствие один вполне определенный вектор из $\mathfrak{L}$. Преобразование называется *линейным*, если оно произведение числа на вектор переводит в произведение того же числа на соответственный вектор и сумму векторов переводит в сумму соответственных векторов. Короче, преобразование $\mathscr{A}$ называется линейным, если для любых векторов x, y из пространства $\mathfrak{L}$ и любого числа α из поля коэффициентов имеют место равенства

$$(\alpha x)\mathscr{A} = \alpha(x\mathscr{A}), \tag{1}$$
$$(x + y)\mathscr{A} = x\mathscr{A} + y\mathscr{A}. \tag{2}$$

Полагая в (1) $\alpha = 0$, получим

$$0\mathscr{A} = 0,$$

т. е. *всякое линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой.*

Из (1), (2) вытекает непосредственно и следующее основное свойство линейных преобразований: *если $\mathscr{A}$ — линейное*

преобразование, что

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m)\mathscr{A} = \alpha_1(x_1\mathscr{A}) + \alpha_2(x_2\mathscr{A}) + \ldots + \alpha_m(x_m\mathscr{A}). \quad (3)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — произвольные векторы из $\mathfrak{L}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — произвольные числа из поля коэффициентов.

Для доказательства достаточно применить индукцию по m. При $m=1$ формула (3) совпадает с (1). Пусть теперь (3) справедливо для $m-1$ слагаемых. Тогда

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m)\mathscr{A} = ((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{m-1} x_{m-1}) + \alpha_m x_m)\mathscr{A} =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{m-1} x_{m-1})\mathscr{A} + (\alpha_m x_m)\mathscr{A} =$$
$$= \alpha_1(x_1\mathscr{A}) + \alpha_2(x_2\mathscr{A}) + \ldots + \alpha_m(x_m\mathscr{A}),$$

что и требовалось. При $m=2$ формула (3) обращается в

$$(\alpha x + \beta y)\mathscr{A} = \alpha(x\mathscr{A}) + \beta(y\mathscr{A}), \quad (4)$$

откуда при $\beta=0$ и $\alpha=\beta=1$ получаем снова (1) и (2). Таким образом, свойство (4) вполне характеризует линейные преобразования и может служить в качестве их определения.

Мы условились выше называть единичным преобразованием $\mathscr{E}$ такое преобразование, которое каждый элемент переводит в себя. Поэтому, если рассматриваемое множество есть совокупность векторов линейного пространства $\mathfrak{L}$, то

$$(\alpha x + \beta y)\mathscr{E} = \alpha x + \beta y = \alpha(x\mathscr{E}) + \beta(y\mathscr{E}).$$

Следовательно, *обычное преобразование векторного пространства является линейным.* Преобразование, переводящее каждый вектор в нулевой, называется *нулевым* и обозначается $\mathscr{O}$. Ясно, что нулевое преобразование также линейно.

Рассмотрим два конкретных примера. Пусть $\mathfrak{N}$ — обыкновенное векторное пространство, т. е. совокупность направленных отрезков, выходящих из фиксированной точки O. Проведем через O какую-нибудь плоскость и обозначим через $x_0\mathscr{A}$ проекцию отрезка x на эту плоскость. Тогда известные свойства проекций: 1) проекция суммы отрезков равна сумме их проекций, 2) если отрезок увеличить в α раз, то его проекция также увеличится в α раз, — перепишутся в виде равенств

$$(x+y)\mathscr{A} = x\mathscr{A} + y\mathscr{A}, \quad (\alpha x)\mathscr{A} = \alpha(x\mathscr{A}),$$

которые показывают, что операция проектирования является линейным преобразованием.

В качестве второго примера рассмотрим совокупность всех многочленов от переменной λ степени не выше n. Эти многочлены

относительно обычных операций сложения и умножения на число образуют линейное пространство размерности $n+1$. Поставим каждому многочлену в соответствие его производную. Так как производная от суммы равна сумме производных слагаемых, а постоянный множитель выносится за знак производной, то операция дифференцирования является линейным преобразованием пространства многочленов.

Теперь посмотрим, какими элементами можно задать линейное преобразование.

Теорема. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — какой-либо базис линейного пространства $\mathfrak{L}$. Выберем в $\mathfrak{L}$ совершенно произвольные векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда существует одно и только одно линейное преобразование пространства $\mathfrak{L}$, переводящее векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$.*

Чтобы построить искомое преобразование, возьмем произвольный вектор x и выразим его линейно через базу $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_n a_n. \quad (5)$$

Составим вектор

$$x' = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \ldots + \xi_n b_n.$$

Преобразование, переводящее x в x', назовем $\mathscr{A}$. Таким образом, если x имеет выражение (5), то

$$x\mathscr{A} = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \ldots + \xi_n b_n. \quad (6)$$

Подставляя сюда $\xi_i = 1$, $\xi_j = 0$ $(j \neq i;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, мы получим $a_i\mathscr{A} = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, так что преобразование $\mathscr{A}$ переводит векторы $a_1, \ldots, a_n$ в $b_1, \ldots, b_n$. Покажем, что $\mathscr{A}$ линейно. Умножая (5) на произвольное число α, мы будем иметь

$$\alpha x = (\alpha\xi_1)a_1 + (\alpha\xi_2)a_2 + \ldots + (\alpha\xi_n)a_n.$$

Сравнивая этот результат с (6), получим

$$(\alpha x)\mathscr{A} = (\alpha\xi_1)b_1 + (\alpha\xi_2)b_2 + \ldots + (\alpha\xi_n)b_n,$$

т. е.

$$(\alpha x)\mathscr{A} = \alpha(x\mathscr{A}). \quad (7)$$

Пусть

$$y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \ldots + \eta_n a_n$$

— еще какой-нибудь вектор из $\mathfrak{L}$. Тогда

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)a_1 + (\xi_2 + \eta_2)a_2 + \ldots + (\xi_n + \eta_n)a_n$$

и, следовательно,

$$y\mathscr{A} = \eta_1 b_1 + \eta_2 b_2 + \ldots + \eta_n b_n,$$
$$(x + y)\mathscr{A} = (\xi_1 + \eta_1)b_1 + \ldots + (\xi_n + \eta_n)b_n.$$

Последнее равенство даст

$$(x+y)\mathscr{A}=\xi_1 b_1+\ldots+\xi_n b_n+\eta_1 b_1+\ldots+\eta_n b_n=x\mathscr{A}+y\mathscr{A}. \quad (8)$$

Свойства (7), (8) означают, что $\mathscr{A}$ линейно.

Нам остается показать, что всякое линейное преобразование $\mathscr{B}$, переводящее $a_1, \ldots, a_n$ в $b_1, \ldots, b_n$, совпадает с $\mathscr{A}$. Согласно условию $a_i\mathscr{B}=b_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, если вектор x имеет выражение (5), то

$$x\mathscr{B}=\xi_1(a_1\mathscr{B})+\ldots+\xi_n(a_n\mathscr{B})=\xi_1 b_1+\ldots+\xi_n b_n=x\mathscr{A},$$

т. е. $\mathscr{B}=\mathscr{A}$. Теорема доказана.

8.2. **Матрица линейного преобразования.** Мы покажем теперь, как задать линейное преобразование числами. Выберем в пространстве $\mathfrak{L}$ какую-либо координатную систему $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и допустим, что задано линейное преобразование $\mathscr{A}$ этого пространства. Преобразование $\mathscr{A}$ переведет векторы $a_1, \ldots, a_n$ в некоторые векторы $a_1\mathscr{A}, a_2\mathscr{A}, \ldots, a_n\mathscr{A}$, которые мы можем выразить линейно через $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть эти выражения будут

$$\begin{aligned}
a_1\mathscr{A}&=\alpha_{11}a_1+\alpha_{12}a_2+\ldots+\alpha_{1n}a_n,\\
a_2\mathscr{A}&=\alpha_{21}a_1+\alpha_{22}a_2+\ldots+\alpha_{2n}a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n\mathscr{A}&=\alpha_{n1}a_1+\alpha_{n2}a_2+\ldots+\alpha_{nn}a_n.
\end{aligned}$$

Матрица

$$A=\begin{Vmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}
\end{Vmatrix},$$

составленная из координатных строк векторов $a_1\mathscr{A}, \ldots, a_n\mathscr{A}$, называется *матрицей преобразования* $\mathscr{A}$ в системе координат $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Таким образом, при заданной системе координат каждому линейному преобразованию соответствует определенная матрица. Возникает вопрос, является ли это соответствие взаимно однозначным. Ответ положительный, так как, зная матрицу A, мы можем сначала найти векторы

$$\begin{aligned}
b_1&=\alpha_{11}a_1+\alpha_{12}a_2+\ldots+\alpha_{1n}a_n,\\
b_2&=\alpha_{21}a_1+\alpha_{22}a_2+\ldots+\alpha_{2n}a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_n&=\alpha_{n1}a_1+\alpha_{n2}a_2+\ldots+\alpha_{nn}a_n,
\end{aligned}$$

а затем построить согласно теореме предыдущего пункта линейное преобразование $\mathscr{A}$, переводящее $a_1, \ldots, a_n$ соответственно

в $b_1, \ldots, b_n$. Это преобразование единственное, и его матрица, очевидно, совпадает с A, что и требовалось.

Выясним, какие матрицы соответствуют единичному и нулевому преобразованиям пространства $\mathfrak{L}$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольная система координат в $\mathfrak{L}$. Тогда

$$\begin{aligned}
a_1\mathscr{E}&=0\cdot a_1+\ldots+0\cdot a_n, & a_1\mathscr{E}&=1\cdot a_1+\ldots+0\cdot a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n\mathscr{E}&=0\cdot a_1+\ldots+0\cdot a_n; & a_n\mathscr{E}&=0\cdot a_1+\ldots+1\cdot a_n.
\end{aligned}$$

Следовательно, *нулевое преобразование имеет нулевую, а единичное — единичную матрицы.*

Поставим задачу: как, зная матрицу линейного преобразования $\mathscr{A}$ и координаты вектора x, найти координаты вектора $x\mathscr{A}$?

Пусть выбранная система координат есть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и вектор x имеет в ней координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Обозначим элементы матрицы A преобразования $\mathscr{A}$, вычисленные в той же системе координат, через α_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$. Мы имеем

$$\begin{aligned}
x&=\xi_1 a_1+\xi_2 a_2+\ldots+\xi_n a_n,\\
x\mathscr{A}&=\xi_1(a_1\mathscr{A})+\xi_2(a_2\mathscr{A})+\ldots+\xi_n(a_n\mathscr{A}).
\end{aligned}$$

Согласно определению матрицы преобразования

$$a_i\mathscr{A}=\alpha_{i1}a_1+\alpha_{i2}a_2+\ldots+\alpha_{in}a_n \quad (i=1, \ldots, n).$$

Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, получим

$$\begin{aligned}
x\mathscr{A}=(\xi_1\alpha_{11}+\xi_2\alpha_{21}+\ldots+\xi_n\alpha_{n1})a_1+\ldots\\
\ldots+(\xi_1\alpha_{1n}+\xi_2\alpha_{2n}+\ldots+\xi_n\alpha_{nn})a_n.
\end{aligned}$$

Следовательно, координатная строка нового вектора $x\mathscr{A}$ есть

$$[x\mathscr{A}]=[\xi_1\alpha_{11}+\ldots+\xi_n\alpha_{n1}, \ldots, \xi_1\alpha_{1n}+\ldots+\xi_n\alpha_{nn}]=[x]A,$$

т. е. *координатная строка нового вектора равна координатной строке старого, умноженной на матрицу линейного преобразования:*

$$[x\mathscr{A}]=[x]A.$$

8.3. **Преобразование координат.** В предшествующем пункте установлено взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями n-мерного векторного пространства $\mathfrak{L}$ и квадратными матрицами порядка n. Однако для этого потребовалось сначала выбрать в $\mathfrak{L}$ определенную координатную систему. Изменив ее, мы изменим соответствие. В результате одному и тому же линейному преобразованию $\mathscr{A}$ в старой и новой координатных системах будут отвечать различные матрицы A, A_1. Найдем связь между ними.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — старая, $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ — новая координатные системы, T — матрица перехода (см. п. 5.1). Обозначим через $[x]$, $[x]_1$ координатные строки вектора x в старой и новой системах. Согласно правилу линейного преобразования имеем в старой координатной системе

$$[x\mathscr{A}] = [x]\,A.$$

В новой координатной системе то же правило дает

$$[x\mathscr{A}]_1 = [x]_1 A_1.$$

Однако правило преобразования координат п. 5.1 показывает что

$$[x] = [x]_1 T, \quad [x\mathscr{A}] = [x\mathscr{A}]_1 T.$$

Подставляя сюда значения $[x\mathscr{A}]$, $[x\mathscr{A}]_1$ и $[x]$ из предыдущих равенств, получим

$$[x]_1 TA = [x]_1 A_1 T.$$

Так как вектор x произволен, то по лемме п. 5.1 имеем $TA = A_1 T$, или

$$A_1 = TAT^{-1}.$$

Итак, *матрица линейного преобразования в новой координатной системе равна матрице того же линейного преобразования в старой, преобразованной посредством матрицы обратного перехода.*

В заключение рассмотрим еще вопрос, как с точки зрения теории линейных преобразований истолковать матрицу перехода от одной координатной системы к другой. Пусть в пространстве $\mathfrak{L}$ заданы две координатные системы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Согласно теореме п. 8.1 существует однозначно определенное линейное преобразование $\mathscr{T}$, переводящее старую систему координатных векторов в новую, т. е. обладающее свойством

$$a_i\mathscr{T} = a'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Чтобы теперь по правилу п. 8.2 написать матрицу преобразования $\mathscr{T}$ в старой системе, мы должны все векторы a'_i выразить через $a_1, \ldots, a_n$. Но то же самое следует сделать и для того, чтобы получить матрицу перехода. Таким образом, *матрица перехода есть матрица линейного преобразования, переводящего старую координатную систему в новую*, вычисленная в старой системе координат. Последнее добавление, впрочем, излишне, так как, вычисляя матрицу преобразования $\mathscr{T}$ в новой координатной системе, мы получим все ту же матрицу перехода T. В самом деле, если матрица преобразования $\mathscr{T}$ в старой системе координат есть T, то матрица перехода будет также T. Значит, матрица $\mathscr{T}$ в новой системе равна $TTT^{-1} = T$, что и требовалось.

Примеры и задачи

1. Рассмотрим пространство векторов на плоскости, исходящих из некоторой точки O. Показать, что преобразование, состоящее в повороте всех векторов около точки O на угол α, является линейным и что его матрица равна $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, если в качестве координатной системы взяты два взаимно перпендикулярных вектора длины 1.

2. Пусть $\mathfrak{R}$ — обыкновенное пространство направленных отрезков, исходящих из некоторой точки O. Выберем в $\mathfrak{R}$ координатную систему, состоящую из трех взаимно перпендикулярных векторов e_1, e_2, e_3 длины 1. Показать, что матрица линейного преобразования $\mathscr{P}_1$, состоящего в проектировании векторов на ось e_1, равна $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, а матрица проектирования на плоскость $e_1 e_2$ равна $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Как изменится матрица линейного преобразования $\mathscr{A}$, если в координатной системе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ переставить какие-нибудь два вектора, например e_1 и e_2?

4. Линейное преобразование одномерного пространства является умножением всех его векторов на одно и то же число.

5. Пусть $\mathfrak{L}$ есть пространство всех квадратных матриц второго порядка. Показать, что преобразование $\mathscr{A}$, состоящее в умножении всех матриц из $\mathfrak{L}$ справа на матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, будет линейным. Найти матрицу преобразования $\mathscr{A}$, если в качестве координатной системы в $\mathfrak{L}$ взята система

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Линейное преобразование $\mathscr{A}$ четырехмерного пространства $\mathfrak{L}$ имеет в координатной системе e_1, e_2, e_3, e_4 матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Какова будет матрица этого преобразования, если в качестве новой системы координат взять 1) e_1, e_3, e_2, e_4; 2) $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2 - e_3 + e_4$?

§ 9. Действия с линейными преобразованиями

9.1. Умножение линейных преобразований. Пусть в линейном пространстве $\mathfrak{L}$ заданы два линейных преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$. Применяя к произвольному вектору x из $\mathfrak{L}$ сначала преобразование $\mathscr{A}$, а затем $\mathscr{B}$, мы получим некоторый вектор

$$y = (x\mathscr{A})\mathscr{B}.$$

Преобразование, переводящее x непосредственно в y, было названо в п. 7.2 произведением $\mathscr{A}$ на $\mathscr{B}$. Следовательно,

$$x(\mathscr{A}\mathscr{B}) = (x\mathscr{A})\mathscr{B}. \tag{1}$$

Покажем, что *произведение линейных преобразований есть преобразование линейное*. Согласно п. 8.1 для этого достаточно доказать справедливость равенства

$$(\alpha x + \beta y)(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \alpha \cdot x(\mathscr{A}\mathscr{B}) + \beta \cdot y(\mathscr{A}\mathscr{B}).$$

В силу (1)

$$(\alpha x + \beta y)(\mathscr{A}\mathscr{B}) = ((\alpha x + \beta y)\mathscr{A})\mathscr{B}.$$

Так как $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ линейны, то

$$((\alpha x + \beta y)\mathscr{A})\mathscr{B} = (\alpha(x\mathscr{A}) + \beta(y\mathscr{A}))\mathscr{B} = \alpha \cdot (x\mathscr{A})\mathscr{B} + \beta \cdot (y\mathscr{A})\mathscr{B},$$

или

$$(\alpha x + \beta y)(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \alpha \cdot x(\mathscr{A}\mathscr{B}) + \beta \cdot y(\mathscr{A}\mathscr{B}),$$

что и требовалось.

Выберем в пространстве $\mathfrak{L}$ координатную систему и обозначим через A, B матрицы преобразований $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$. Спрашивается, как найти матрицу преобразования $\mathscr{A}\mathscr{B}$? Обозначим эту неизвестную матрицу через C. Пусть x — произвольный вектор пространства $\mathfrak{L}$ и $[x]$ — его координатная строка. По правилу линейного преобразования

$$[x(\mathscr{A}\mathscr{B})] = [x]C.$$

С другой стороны,

$$[x(\mathscr{A}\mathscr{B})] = [(x\mathscr{A})\mathscr{B}] = [x\mathscr{A}]B = [x]AB.$$

Сравнивая оба результата, мы видим, что при произвольном x

$$[x]C = [x]AB.$$

Согласно лемме из п. 5.1 отсюда следует, что

$$C = AB,$$

т. е. *матрица произведения линейных преобразований равна произведению матриц этих преобразований.*

Рассмотрим какое-нибудь *взаимно однозначное* линейное преобразование $\mathscr{A}$. Если $\mathscr{A}$ переводит вектор x в y, то преобразование, переводящее y в x, будет *обратным* преобразованием $\mathscr{A}^{-1}$ (см. п. 7.3). Покажем, что если $\mathscr{A}$ *линейно*, то и $\mathscr{A}^{-1}$ *линейно*. В самом деле, пусть

$$u\mathscr{A}^{-1} = x, \quad v\mathscr{A}^{-1} = y,$$

где u, v — произвольные векторы из $\mathfrak{L}$. Ввиду линейности преобразования $\mathscr{A}$

$$(\alpha x + \beta y)\mathscr{A} = \alpha \cdot x\mathscr{A} + \beta \cdot y\mathscr{A} = \alpha u + \beta v.$$

Отсюда

$$(\alpha u + \beta v)\mathscr{A}^{-1} = \alpha x + \beta y = \alpha \cdot u\mathscr{A}^{-1} + \beta \cdot v\mathscr{A}^{-1},$$

что и требовалось.

Если A — матрица преобразования $\mathscr{A}$ и X — матрица преобразования $\mathscr{A}^{-1}$, то из соотношения

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{E}$$

следует:

$$AX = XA = E,$$

или $X = A^{-1}$. Таким образом, *обратное преобразование имеет обратную матрицу*. В частности, *всякое линейное преобразование было обратимым, необходимо и достаточно, чтобы была обратимой его матрица.*

Из наших результатов вытекает непосредственно также следующее правило: *матрица преобразования $\mathscr{A}^n$ равна A^n, где A — матрица преобразования $\mathscr{A}$.*

9.2. **Умножение на число и сложение.** В этом и следующем пунктах предполагается, что основное тело K является полем. Преобразование, полученное в результате применения к некоторому вектору сначала преобразования $\mathscr{A}$, а затем умножения полученного вектора на число α, называется *произведением* $\mathscr{A}$ на α и обозначается $\alpha\mathscr{A}$. Это определение можно выразить формулой

$$x(\alpha\mathscr{A}) = \alpha(x\mathscr{A}).$$

Рассуждая, как и в случае умножения линейных преобразований, мы легко убедимся в том, что *если $\mathscr{A}$ — линейное преобразование, то $\alpha\mathscr{A}$ — снова линейное преобразование.* Найдем его матрицу. Пусть в некоторой фиксированной системе координат преобразование $\mathscr{A}$ имеет матрицу A, а преобразование $\alpha\mathscr{A}$ — матрицу B. По основанию правила линейного преобразования

$$[x(\alpha\mathscr{A})] = [x]B,$$

$$[x(\alpha\mathscr{A})] = [\alpha(x\mathscr{A})] = \alpha[x\mathscr{A}] = \alpha[x]A = [x](\alpha A),$$

откуда $[x]B = [x](\alpha A)$, или $B = \alpha A$.

Итак, *матрица произведения числа на линейное преобразование равна произведению этого числа на матрицу преобразования.*

Отметим, наконец, формулы

$$\alpha(\beta\mathscr{A}) = (\alpha\beta)\mathscr{A},$$
$$0\cdot\mathscr{A} = \mathscr{O},$$
$$1\cdot\mathscr{A} = \mathscr{A},$$
$$\alpha(\mathscr{A}\mathscr{B}) = (\alpha\mathscr{A})\mathscr{B} = \mathscr{A}(\alpha\mathscr{B}),$$

вполне аналогичные соответствующим формулам матричного исчисления. Доказательство их предоставляется читателю.

Возьмем теперь какие-либо два преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ линейного пространства V и каждому вектору x из V поставим в соответствие вектор $x\mathscr{A} + x\mathscr{B}$. Преобразование, переводящее x в $x\mathscr{A} + x\mathscr{B}$, обозначается $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ и называется *суммой* $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Таким образом, по определению

$$x(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = x\mathscr{A} + x\mathscr{B}.$$

Если преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ линейные, то

$$(\alpha x + \beta y)(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = (\alpha x + \beta y)\mathscr{A} + (\alpha x + \beta y)\mathscr{B} =$$
$$= \alpha \cdot x\mathscr{A} + \beta \cdot y\mathscr{A} + \alpha \cdot x\mathscr{B} + \beta \cdot y\mathscr{B} =$$
$$= \alpha(x\mathscr{A} + x\mathscr{B}) + \beta(y\mathscr{A} + y\mathscr{B}) = \alpha \cdot x(\mathscr{A} + \mathscr{B}) + \beta \cdot y(\mathscr{A} + \mathscr{B}).$$

Следовательно, *сумма двух линейных преобразований есть преобразование линейное.* Найдем его матрицу. Пусть в некоторой координатной системе преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ имеют матрицы A, B. Обозначим матрицу преобразования $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ через C. Тогда

$$[x(\mathscr{A} + \mathscr{B})] = [x]C,$$
$$[x(\mathscr{A} + \mathscr{B})] = [x\mathscr{A} + x\mathscr{B}] = [x\mathscr{A}] + [x\mathscr{B}] =$$
$$= [x]A + [x]B = [x](A + B).$$

Следовательно,

$$[x]C = [x](A + B), \quad C = A + B,$$

т. е. *матрица суммы преобразований равна сумме их матриц.*

Действия с линейными преобразованиями подчиняются тем же основным законам, что и действия с матрицами. Часть их, относящуюся только к умножению, мы уже указали. Выпишем теперь и те, которые относятся либо к сложению, либо к связям между сложением и умножением:

$$\mathscr{A} + \mathscr{B} = \mathscr{B} + \mathscr{A},$$
$$(\mathscr{A} + \mathscr{B}) + \mathscr{C} = \mathscr{A} + (\mathscr{B} + \mathscr{C}),$$
$$\mathscr{A} + \mathscr{O} = \mathscr{A},$$
$$x(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = x\mathscr{A} + x\mathscr{B},$$
$$(\alpha + \beta)\mathscr{A} = \alpha\mathscr{A} + \beta\mathscr{A},$$
$$\mathscr{A}(\mathscr{B} + \mathscr{C}) = \mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{A}\mathscr{C},$$
$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})\mathscr{C} = \mathscr{A}\mathscr{C} + \mathscr{B}\mathscr{C}.$$

Доказательство всех этих равенств проводится одним и тем же способом: берется произвольный вектор x и показывается, что преобразование, стоящее слева, переводит x в тот же самый вектор, что и стоящее справа. Например,

$$x\mathscr{A}(\mathscr{B} + \mathscr{C}) = (x\mathscr{A})(\mathscr{B} + \mathscr{C}) = (x\mathscr{A})\mathscr{B} + (x\mathscr{A})\mathscr{C},$$
$$x(\mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{A}\mathscr{C}) = x(\mathscr{A}\mathscr{B}) + x(\mathscr{A}\mathscr{C}) = (x\mathscr{A})\mathscr{B} + (x\mathscr{A})\mathscr{C},$$

откуда $\mathscr{A}(\mathscr{B} + \mathscr{C}) = \mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{A}\mathscr{C}$.

Можно также вывести все эти законы непосредственно из соответствующих формул матричного исчисления. В самом деле, между квадратными матрицами порядка n и линейными преобразованиями n-мерного линейного пространства существует взаимно однозначное соответствие. Это соответствие обладает тем свойством, что сумма переходит в сумму, а произведение — в произведение. Поэтому всякое тождество между матрицами дает аналогичное тождество между линейными преобразованиями, что и требовалось.

9.3. Многочлены от линейных преобразований. Пусть

$$f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_m\lambda^m$$

— некоторый многочлен от переменной λ. Выражение

$$f(\mathscr{A}) = \alpha_0\mathscr{E} + \alpha_1\mathscr{A} + \ldots + \alpha_m\mathscr{A}^m,$$

где $\mathscr{E}$ — единичное, $\mathscr{A}$ — произвольное линейное преобразования, называется *значением многочлена* $f(\lambda)$ при $\lambda = \mathscr{A}$ или просто *многочленом от* $\mathscr{A}$. *Если матрица преобразования* $\mathscr{A}$ *в некоторой системе координат равна* A, *то матрицей преобразования* $f(\mathscr{A})$ *в той же системе координат будет*

$$f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_m A^m.$$

Действительно, $f(\mathscr{A})$ получается из $\mathscr{A}$ с помощью операций умножения, умножения на число и сложения. Из указанных выше результатов видно, что, производя те же операции над матрицей A, мы получим матрицу преобразования $f(\mathscr{A})$.

Все правила действий с многочленами от одной переменной имеют силу и для многочленов от линейного преобразования. Поэтому, если в какое-либо тождество между многочленами от λ подставить вместо λ линейное преобразование, то получится верное соотношение. Например, во тождестве

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 1), \quad (\lambda + 1)^2 + (\lambda - 1)^2 - 2\lambda^2 = 2$$

подстановкой $\lambda = \mathscr{A}$ получаем

$$\mathscr{A}^2 - \mathscr{E} = (\mathscr{A} - \mathscr{E})(\mathscr{A} + \mathscr{E}),$$
$$(\mathscr{A} + \mathscr{E})^2 + (\mathscr{A} - \mathscr{E})^2 - 2\mathscr{A}^2 = 2\mathscr{E}.$$

В частности, из тождества

$$f(x)g(t)=g(x)f(t)$$

следует соотношение

$$f(\mathscr{A}\mathscr{C})g(\mathscr{B}\mathscr{C})=g(\mathscr{A}\mathscr{C})f(\mathscr{B}\mathscr{C}),$$

которое показывает, что многочлены от одного и того же линейного преобразования всегда коммутируют друг с другом.

Положение оказывается иным для многочленов от нескольких переменных. Дело в том, что при вычислениях с многочленами принимается, что переменные коммутируют друг с другом. Отсюда получаются, например, равенства $\lambda\rho=\rho\lambda$, $q^2\lambda=\lambda q^2$ и т. д.

Подставляя в эти равенства вместо переменных λ, ρ произвольные линейные преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, мы получим соотношения

$$\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{A}=\mathscr{A}^2\mathscr{B}\mathscr{C},\quad \mathscr{A}\mathscr{B}^2\mathscr{C}\mathscr{B}=\mathscr{A}\mathscr{B}^2\mathscr{C}\mathscr{B},$$

которые могут оказаться неверными для отдельных линейных преобразований. Ясно, что эти затруднения исчезнут, если рассматриваемые преобразования коммутируют друг с другом. Таким образом, во всяком тождестве между многочленами от нескольких неизвестных можно вместо этих неизвестных подставить произвольные, коммутирующие между собой линейные преобразования; в результате получится верное соотношение между линейными преобразованиями.

Мы условились считать, что все рассматриваемые в этой книге линейные пространства конечномерны. Однако это не исключает того, что часть определений и теорем остается верной и для пространств бесконечной размерности. В качестве примера можно указать на определения линейных преобразований и действий с ними и на те свойства линейных преобразований, изложенные в этом параграфе, которые не были связаны с матрицами.

Примеры и задачи

1. Пусть $\mathfrak{L}$ — совокупность всех многочленов степени $\leqslant n$ от λ. Обозначим через $\mathscr{D}$ преобразование, переводящее каждый многочлен $f(\lambda)$ в его производную $f'(\lambda)$. Показать, что $\mathscr{D}^{n+1}=\mathscr{O}$. Найти матрицу $\mathscr{D}$ в системе координат $1, \lambda, \ldots, \lambda^n$.

2. Пусть $\mathfrak{L}$ — бесконечномерное пространство всех многочленов от λ. Обозначим через $\mathscr{D}$ операцию дифференцирования, а через $\mathscr{S}$ — операцию умножения многочлена на λ. Показать, что обе операции линейны и что между ними существуют соотношения

$$\mathscr{D}^n\mathscr{S}-\mathscr{S}\mathscr{D}^n=n\mathscr{D}^{n-1}\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

3. Почему преобразование $\mathscr{S}$, указанное в предыдущей задаче, нельзя рассматривать в пространстве многочленов степени не выше N?

4. Линейные преобразования пространства $\mathfrak{L}$ относительно операций сложения и умножения на число сами образуют линейное пространство. Чему равна размерность этого пространства, если размерность $\mathfrak{L}$ равна n?

10. Ранг и дефект линейного преобразования

Выше рассматривались такие свойства линейных преобразований, которые были связаны главным образом с правилами действий с ними. Теперь мы рассмотрим несколько свойств, имеющих более геометрический характер.

10.1. Ядро и область значений. Пусть задана какая-либо совокупность $\mathfrak{M}$ векторов линейного пространства $\mathfrak{L}$ и произвольное его линейное преобразование $\mathscr{A}$. Каждый вектор a из $\mathfrak{M}$ переводится преобразованием $\mathscr{A}$ в некоторый новый вектор $a\mathscr{A}$ — образ вектора a. Этот образ, вообще говоря, не будет принадлежать $\mathfrak{M}$. Совокупность образов всех векторов из $\mathfrak{M}$ мы будем называть *образом* $\mathfrak{M}$ относительно $\mathscr{A}$ и обозначать $\mathfrak{M}\mathscr{A}$. *Прообразом* совокупности $\mathfrak{M}$ мы условимся называть совокупность всех тех векторов из $\mathfrak{L}$, образ которых лежит в $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Образы и прообразы линейных подпространств пространства $\mathfrak{L}$ относительно произвольного линейного преобразования $\mathscr{A}$ являются снова линейными подпространствами.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{N}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}$. Докажем, что $\mathfrak{N}\mathscr{A}$ — также линейное подпространство. Возьмем в $\mathfrak{N}\mathscr{A}$ какие-нибудь векторы a, b. Эти векторы являются образами некоторых векторов x, y из $\mathfrak{N}$, т. е. $a=x\mathscr{A}$, $b=y\mathscr{A}$. Так как $\mathfrak{N}$ — линейное подпространство, то $\alpha x+\beta y$ содержится в $\mathfrak{N}$ при любых α, β. Поэтому $(\alpha x+\beta y)\mathscr{A}$ содержится в $\mathfrak{N}\mathscr{A}$. Но

$$(\alpha x+\beta y)\mathscr{A}=\alpha\cdot x\mathscr{A}+\beta\cdot y\mathscr{A}=\alpha a+\beta b,$$

т. е. $\mathfrak{N}\mathscr{A}$ содержит $\alpha a+\beta b$ и, следовательно, является линейным подпространством. Совершенно аналогично доказывается и то, что прообраз линейного подпространства $\mathfrak{N}$ есть также линейное подпространство.

Ядром линейного преобразования $\mathscr{A}$ называется совокупность всех векторов $\mathfrak{L}$, переводящихся преобразованием $\mathscr{A}$ в нулевой вектор, а *областью значений* $\mathscr{A}$ называется совокупность образов всех векторов из $\mathfrak{L}$. Размерность области значений называется *рангом* преобразования, а размерность ядра — *дефектом* преобразования.

Теорема 2. *Сумма ранга и дефекта линейного преобразования $\mathscr{A}$ равна размерности пространства $\mathfrak{L}$.*

Обозначим через $\mathfrak{N}$ ядро преобразования $\mathscr{A}$ и предположим, что размерность ядра $\mathfrak{N}$ есть d. Размерность области значений $\mathfrak{L}\mathscr{A}$ обозначим через r. Согласно определению d и r — дефект и

ранг преобразования $\mathscr{A}$. Выберем в области значений $\mathfrak{L}\mathscr{A}$ некоторую базу $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_r$ элементы пространства $\mathfrak{L}$, переводящиеся преобразованием $\mathscr{A}$ соответственно в $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Векторы $b_1, b_2, \ldots, b_r$ линейно независимы, так как из

$$x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_rb_r = 0$$

следует:

$$(x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_rb_r)\mathscr{A} = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_ra_r = 0,$$

и, поскольку $a_1, a_2, \ldots, a_r$ линейно независимы,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0.$$

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{M}$, натянутое на векторы $b_1, b_2, \ldots, b_r$. Система $b_1, \ldots, b_r$ является базой в $\mathfrak{M}$, поэтому размерность подпространства $\mathfrak{M}$ равна r, т. е. рангу преобразования $\mathscr{A}$. Докажем, что пространство $\mathfrak{L}$ есть прямая сумма подпространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Согласно п. 6.2 для этого достаточно показать, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \{0\}$ и $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. Докажем первое. Всякий вектор из $\mathfrak{M}$ имеет вид

$$b = x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_rb_r.$$

Если b входит в $\mathfrak{N}$, то $b\mathscr{A} = 0$, т. е.

$$(x_1b_1 + \ldots + x_rb_r)\mathscr{A} = x_1a_1 + \ldots + x_ra_r = 0.$$

Но векторы $a_1, \ldots, a_r$ линейно независимы, поэтому $x_1 = \ldots = x_r = 0$, откуда $b = 0$, что и требовалось. Остается показать, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. Возьмем произвольный вектор a из $\mathfrak{L}$. Его образ $a\mathscr{A}$ лежит в $\mathfrak{L}\mathscr{A}$ и, значит, выражается линейно через $a_1, \ldots, a_r$:

$$a\mathscr{A} = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_ra_r.$$

Пусть

$$b = x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_rb_r, \quad a - b = c.$$

Так как

$$b\mathscr{A} = x_1b_1\mathscr{A} + \ldots + x_rb_r\mathscr{A} = x_1a_1 + \ldots + x_ra_r = a\mathscr{A},$$

то

$$c\mathscr{A} = (a - b)\mathscr{A} = a\mathscr{A} - b\mathscr{A} = 0.$$

Следовательно, c входит в $\mathfrak{N}$. Итак,

$$a = b + c \qquad (b \in \mathfrak{M},\ c \in \mathfrak{N}),$$

но это и значит, что

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}.$$

Поскольку сумма здесь прямая, то размерность пространства $\mathfrak{L}$ равна сумме размерностей подпространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, т. е. равна сумме ранга и дефекта пространства $\mathfrak{L}$. Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть $\mathfrak{R}$ — обыкновенное пространство направленных отрезков, выходящих из некоторой точки O. Возьмем произвольную плоскость $\mathfrak{P}$, проходящую через O, и обозначим через $\mathscr{P}$ операцию ортогонального проектирования на $\mathfrak{P}$. Преобразование $\mathscr{P}$ переводит все пространство $\mathfrak{R}$ в плоскость $\mathfrak{P}$. Таким образом, $\mathfrak{P}$ есть область значений преобразования $\mathscr{P}$ и ранг $\mathscr{P}$ равен 2. Ядро преобразования $\mathscr{P}$ состоит из векторов, лежащих на прямой, проходящей через O перпендикулярно к плоскости $\mathfrak{P}$, так как только эти векторы переводятся преобразованием $\mathscr{P}$ в нуль. Следовательно, дефект $\mathscr{P}$ равен единице. Сумма ранга и дефекта преобразования $\mathscr{P}$ равна 3, как и должно быть по теореме 2.

10.2. Особенные и неособенные преобразования. Выше было указано (п. 9.1), что не всякое преобразование обратимо. Обратимые линейные преобразования далее будут называться *неособенными*, а необратимые — *особенными*. Условия, при которых линейное преобразование будет особенным, мы получили в п. 9.1 в матричной форме. Теперь мы хотим придать этим условиям более геометрический характер.

Теорема 3. *Для того чтобы линейное преобразование $\mathscr{A}$ пространства $\mathfrak{L}$ было неособенным, необходимо и достаточно, чтобы ядро этого преобразования было нулевым, т. е. чтобы дефект $\mathscr{A}$ был равен нулю.*

Доказательство. Если данное преобразование $\mathscr{A}$ особенное, то каждый вектор должен иметь только один прообраз, в том числе единственный прообраз должен иметь и нулевой вектор o. Поскольку o всегда является прообразом нулевого вектора, а ядро в данном случае может состоять только из одного вектора, то оно и будет равно o.

Пусть, обратно, дефект $\mathscr{A}$ равен нулю. Согласно теореме 2 отсюда следует, что ранг $\mathscr{A}$ равен размерности $\mathfrak{L}$, т. е. что размерность области значений $\mathfrak{L}\mathscr{A}$ равна размерности $\mathfrak{L}$. Следовательно, $\mathfrak{L}\mathscr{A} = \mathfrak{L}$, и мы видим, что всякий вектор из $\mathfrak{L}$ является образом некоторого вектора из $\mathfrak{L}$. Если мы докажем, что преобразование $\mathscr{A}$ различные векторы a, b переводит в различные же, то это и будет означать, что преобразование $\mathscr{A}$ обратимо (п. 7.3). Но из $a\mathscr{A} = b\mathscr{A}$ следует, что $(a - b)\mathscr{A} = o$. Так как согласно предположению ядро $\mathscr{A}$ нулевое, то $a - b = 0$, или $a = b$, что и требовалось. Теорема доказана.

Равенство дефекта $\mathscr{A}$ нулю равносильно равенству ранга $\mathscr{A}$ размерности пространства $\mathfrak{L}$. Поэтому теорему 3 можно представить еще в следующей форме:

Теорема 4. *Для того чтобы линейное преобразование $\mathscr{A}$ пространства $\mathfrak{L}$ было несобственным, необходимо и достаточно, чтобы область значений $\mathscr{A}$ совпадала с $\mathfrak{L}$, т. е. чтобы ранг $\mathscr{A}$ был равен размерности $\mathfrak{L}$.*

Каждое однозначное отображение одного линейного пространства на другое называется *гомоморфизмом*, если оно сумму векторов первого пространства переводит в сумму соответствующих векторов второго, а произведение какого-либо числа на вектор первого пространства переводит в произведение того же числа на соответственный вектор второго (п. 4.3). Если оба линейных пространства совпадают, то мы получим изоморфное отображение линейного пространства самого на себя. Такое отображение называется *автоморфизмом* линейного пространства. Определение автоморфизма, очевидно, совпадает с определением несобственного линейного преобразования. Следовательно, линейные несобственные преобразования пространства $\mathfrak{L}$ можно рассматривать как автоморфизмы этого пространства. Из самого определения автоморфизмов следует, что автоморфизмы пространства $\mathfrak{L}$ — это такие взаимные отображения пространства $\mathfrak{L}$ на себя, при которых сохраняются все его геометрические свойства, т. е. свойства, выражающиеся с помощью операций сложения и умножения на число.

Рассмотрим два произвольных линейных преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ пространства $\mathfrak{L}$. Эти преобразования мы условимся называть *изоморфными* или *подобными*, если существует такой автоморфизм $\mathscr{C}$ пространства $\mathfrak{L}$, который одно преобразование переводит в другое.

Пусть x — какой-нибудь вектор из $\mathfrak{L}$ и $a=x\mathscr{A}$. Автоморфизм $\mathscr{C}$ переводит x в некоторый вектор x', а a — в некоторый вектор a'. Говорят, что $\mathscr{C}$ переводит преобразование $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$, если $x\mathscr{B}=y$ (см. рис. 3). Поскольку $x=a\mathscr{C}^{-1}$, $y=a'\mathscr{C}$, то равенство $x\mathscr{B}=y$ дает

$$a\mathscr{C}^{-1}\mathscr{B}=a'\mathscr{C}, \quad a\mathscr{C}^{-1}\mathscr{B}\mathscr{C}^{-1}=a'=a\mathscr{A}\mathscr{C}^{-1}.$$

Отсюда

$$\mathscr{C}^{-1}\mathscr{B}\mathscr{C}^{-1}=\mathscr{A}, \quad \mathscr{B}=\mathscr{C}\mathscr{A}\mathscr{C}^{-1}. \tag{1}$$

Следовательно, преобразование $\mathscr{B}$ тогда и только тогда подобно преобразованию $\mathscr{A}$, если оно получается из $\mathscr{A}$ преобразованием вида $\mathscr{C}\mathscr{A}\mathscr{C}^{-1}$, где $\mathscr{C}$ — некоторый автоморфизм пространства $\mathfrak{L}$, т. е. при помощи некоторого несобственного преобразования этого пространства.

Выберем в $\mathfrak{L}$ систему координат и обозначим матрицы преобразований $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ соответственно через A, B, C. Тогда равенство (1) будет равносильно матричному соотношению

$$B=C^{-1}AC.$$

К нам приходим к следующему утверждению: *для того чтобы два линейных преобразования пространства $\mathfrak{L}$ были подобны, необходимо и достаточно, чтобы их матрицы были подобны.*

Изоморфные преобразования мы должны рассматривать как преобразования, обладающие одинаковыми геометрическими свойствами. Отсюда ясна важность классификации всех линейных преобразований с точностью до их изоморфизма. Алгебраически эта задача эквивалентна классификации всех квадратных матриц порядка n с точностью до их подобия. В то время как задача классификации всех линейных пространств над заданным полем решается без всякого труда (см. п. 4.3), задача классификации линейных преобразований требует для своего решения более углубленного изучения свойств линейных преобразований. Эта задача будет решена полностью только в следующей главе.

Отметим, наконец, еще одно свойство гомоморфных линейных преобразований: *для того чтобы линейные преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие координатные системы, в которых эти преобразования записались бы одной и той же матрицей.*

В самом деле, если $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ изоморфны, то их матрицы связаны соотношением $A=CBC^{-1}$. Но это соотношение показывает, что если от заданной системы координат перейти к такой, чтобы матрица перехода была C, то матрица преобразования $\mathscr{B}$ в новой системе будет A, т. е. будет совпадать с матрицей преобразования $\mathscr{A}$, записанной в старой системе координат. Обратно, если матрица A преобразования $\mathscr{A}$ в системе координат $a_1, \ldots, a_n$ совпадает с матрицей преобразования $\mathscr{B}$, записанной в системе координат $a'_1, \ldots, a'_n$, то, обозначая через C матрицу перехода от первой системы координат ко второй, мы получим, что во второй системе координат матрицы преобразований $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ будут соответственно равны CAC^{-1} и A, т. е. будут подобны, что и требовалось.

10.3. **Ранг матрицы преобразования.** В п. 10.1 мы дали понятие ранга линейного преобразования. С другой стороны, из п. 3.2 известно понятие ранга матрицы как максимального числа линейно независимых строк ее. Возникает вопрос о связи этих понятий. Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Ранг произвольного линейного преобразования $\mathscr{A}$ пространства $\mathfrak{L}$ равен рангу матрицы этого преобразования.*

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — некоторая система координат в $\mathfrak{L}$. Область значений преобразования $\mathscr{A}$ состоит из образов векторов пространства $\mathfrak{L}$, т. е. из векторов вида

$$(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n)\mathscr{A} = \alpha_1(a_1\mathscr{A}) + \alpha_2(a_2\mathscr{A}) + \ldots + \alpha_n(a_n\mathscr{A}).$$

Это показывает, что область значений преобразования $\mathscr{A}$ есть

подпространство, натянутое на векторы $a_1\mathscr{A}, \ldots, a_n\mathscr{A}$. Ранг $\mathscr{A}$ равен размерности области значений и равен, следовательно, максимальному числу линейно независимых векторов среди $a_1\mathscr{A}, \ldots, a_n\mathscr{A}$ (п. 6.1). Пусть

$$\begin{aligned} a_1\mathscr{A} &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \ldots + \alpha_{1n}a_n, \\ a_2\mathscr{A} &= \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{2n}a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\mathscr{A} &= \alpha_{n1}a_1 + \alpha_{n2}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n. \end{aligned}$$

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

есть матрица преобразования $\mathscr{A}$. Строки этой матрицы являются координатными строками векторов $a_1\mathscr{A}, \ldots, a_n\mathscr{A}$. Поэтому максимальное число линейно независимых векторов среди $a_1\mathscr{A}, \ldots, a_n\mathscr{A}$ равно максимальному числу линейно независимых строк матрицы A, т. е. равно ее рангу, что и требовалось.

Дефектом квадратной матрицы называется разность между ее порядком и рангом. Из теорем 2 и 5 непосредственно вытекает, что *дефект линейного преобразования равен дефекту его матрицы.*

В качестве примера рассмотрим систему n линейных однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \xi_1\alpha_{11} + \xi_2\alpha_{21} + \ldots + \xi_n\alpha_{n1} &= 0, \\ \xi_1\alpha_{12} + \xi_2\alpha_{22} + \ldots + \xi_n\alpha_{n2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \xi_1\alpha_{1n} + \xi_2\alpha_{2n} + \ldots + \xi_n\alpha_{nn} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

с n неизвестными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Требуется исследовать решения этой системы. Геометрически эту задачу можно истолковать следующим образом. Возьмем произвольное n-мерное линейное пространство $\mathfrak{L}$ и выберем в нем какую-нибудь систему координат $e_1, \ldots, e_n$. Условимся числовые величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ считать как координаты некоторого вектора x из $\mathfrak{L}$. Рассмотрим линейное преобразование $\mathscr{A}$ этого пространства, имеющее своей матрицу A с элементами α_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Систему уравнений (2) можно переписать в виде

$$xA = O$$

или в векторной форме

$$x\mathscr{A} = o.$$

Отсюда видно, что решениями системы (2) являются координатные строки векторов, принадлежащих ядру преобразования $\mathscr{A}$. Так как размерность ядра есть дефект преобразования, а дефект преобразования равен дефекту его матрицы, то мы приходим к известной теореме теории систем линейных уравнений: *максимальное число линейно независимых решений однородной системы n линейных уравнений с n неизвестными равно дефекту матрицы этой системы.*

Примеры и задачи

1. В пространстве столбцов даны 4 вида систем координат

$$e_1 = [1, 0, 0, 0], \quad e_2 = [0, 1, 0, 0], \quad e_3 = [0, 0, 1, 0], \quad e_4 = [0, 0, 0, 1].$$

Найти ядро и область значений линейных преобразований, заданных матрицами

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \\ & & 3 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Пусть $\mathscr{A}$ — линейное преобразование пространства $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}$. Показать, что размерность образа подпространства $\mathfrak{M}$ удовлетворяет неравенствам

$$\text{разм. } \mathfrak{M} - \text{деф. } \mathscr{A} \leqslant \text{разм. } \mathfrak{M}\mathscr{A} \leqslant \text{разм. } \mathfrak{M}.$$

3. Если $\mathscr{A}_1$ — произвольное, $\mathscr{A}_2$ — невырожденное линейные преобразования, то

$$\text{ранг } (\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2) = \text{ранг } (\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1) = \text{ранг } \mathscr{A}_1.$$

4. Пусть $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ — произвольные линейные преобразования какого-нибудь линейного пространства $\mathfrak{L}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{ранг } (\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2) &\leqslant \text{ранг } \mathscr{A}_1 + \text{ранг } \mathscr{A}_2, \\ \text{деф. } (\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2) &\leqslant \text{деф. } \mathscr{A}_1 + \text{деф. } \mathscr{A}_2, \\ \text{ранг } (\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1) &\geqslant \text{ранг } \mathscr{A}_1 + \text{ранг } (\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1) - \text{ранг } \mathscr{A}_2. \end{aligned}$$

5. Всякое линейное преобразование ранга n может быть представлено в виде суммы преобразований ранга 1.

6. Для того чтобы матрица A порядка n имела ранг не выше k, необходимо и достаточно, чтобы A можно было представить в виде

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix} [\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_n] = \alpha\beta,$$

где α_i, β_j — подходящие числа.

§ 11. Инвариантные подпространства

11.1. **Индуцированное преобразование.** Говорят, что подпространство $\mathfrak{M}$ линейного пространства $\mathfrak{L}$ *инвариантно* относительно преобразования $\mathscr{A}$, если каждый вектор из $\mathfrak{M}$ преобразованием $\mathscr{A}$ переводится снова в некоторый вектор из $\mathfrak{M}$, т. е. если

$$\mathfrak{M}\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{M}.$$

Из этого определения непосредственно вытекает, что несобственные подпространства — нулевое и само $\mathfrak{L}$ — инвариантны

относительно любого линейного преобразования. Также непосредственно следует и предложение, что *сумма и пересечение инвариантных подпространств является снова инвариантным подпространством.*

Отметим еще, что *если подпространство $\mathfrak{N}$ инвариантно относительно какого-либо линейного преобразования $\mathscr{A}$, то $\mathfrak{N}$ будет инвариантным и относительно преобразования $f(\mathscr{A})$, где $f(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k$ — произвольный многочлен от λ.*

В самом деле, если α — вектор из $\mathfrak{N}$, то по условию $\alpha\mathscr{A} \in \mathfrak{N}$. Отсюда следует, что $(\alpha\mathscr{A})\mathscr{A} = \alpha\mathscr{A}^2 \in \mathfrak{N}$ и т. д. Мы видим, следовательно, что при любом $k \geqslant 0$ вектор $\alpha\mathscr{A}^k$ содержится в $\mathfrak{N}$. Но тогда $\mathfrak{N}$ содержит и все линейные комбинации этих векторов, в частности, $\mathfrak{N}$ содержит

$$\alpha f(\mathscr{A}) = a_0\alpha + a_1\cdot\alpha\mathscr{A} + \ldots + a_m\cdot\alpha\mathscr{A}^m,$$

что и требовалось.

Способы нахождения инвариантных подпространств будут рассмотрены в п. 11.4 и в § 12; теперь же мы хотим показать, каким образом можно воспользоваться знанием инвариантных подпространств для упрощения матрицы преобразования.

Пусть линейное преобразование $\mathscr{A}$ имеет нетривиальное инвариантное подпространство $\mathfrak{N}$. Выберем в $\mathfrak{N}$ базу $e_1, e_2, \ldots, e_m$ и дополним ее линейно независимыми векторами $e_{m+1}, \ldots, e_n$ до базы всего пространства $\mathfrak{L}$. Чтобы найти в системе координат $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ матрицу преобразования $\mathscr{A}$, необходимо векторы $e_1\mathscr{A}, \ldots, e_n\mathscr{A}$ выразить линейно через координатные векторы $e_1, \ldots, e_n$. Однако подпространство $\mathfrak{N}$ инвариантно, поэтому векторы $e_1\mathscr{A}, \ldots, e_m\mathscr{A}$ лежат снова в $\mathfrak{N}$ и выражаются линейно через $e_1, \ldots, e_m$. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}
e_1\mathscr{A} &= a_{11}e_1 + \ldots + a_{m1}e_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_m\mathscr{A} &= a_{1m}e_1 + \ldots + a_{mm}e_m \\
e_{m+1}\mathscr{A} &= a_{1,m+1}e_1 + \ldots + a_{m,m+1}e_m + \ldots + a_{n,m+1}e_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_n\mathscr{A} &= a_{1n}e_1 + \ldots + a_{mn}e_m + \ldots + a_{nn}e_n
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

т. е. матрица преобразования $\mathscr{A}$ равна

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{mm} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{m+1,1} & \ldots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \ldots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Итак, *если линейное преобразование имеет инвариантное линейное подпространство, то в подходящей координатной системе его матрица разбивается на четыре клетки, из которых диагональные клетки квадратные, а правая верхняя может быть прямоугольной, но заполнено целиком нулями.* Матрицы такого вида в п. 2.1 были названы *полураздельными*. Обратно, если в некоторой координатной системе матрица линейного преобразования $\mathscr{A}$ принимает полураздельный вид (2), то равенства (1) показывают, что в этом случае подпространство $\mathfrak{N}$, натянутое на m первых координатных векторов, будет инвариантным относительно $\mathscr{A}$.

Геометрический смысл матрицы A_2 можно истолковать следующим образом. Нам дано, что преобразование $\mathscr{A}$ переводит каждый вектор из $\mathfrak{N}$ снова в некоторый вектор из $\mathfrak{N}$. Поэтому $\mathscr{A}$ можно рассматривать также как преобразование пространства $\mathfrak{N}$. Обозначим это преобразование через $\mathscr{A}_1$ и условимся называть $\mathscr{A}_1$ *индуцированным* преобразованием. Преобразование $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}_1$ действуют на векторы подпространства $\mathfrak{N}$ одинаково: если α — вектор из $\mathfrak{N}$, то $\alpha\mathscr{A} = \alpha\mathscr{A}_1$. Различие между этими преобразованиями состоит в том, что различны области их действия: если α — вектор основного пространства $\mathfrak{L}$, не входящий в $\mathfrak{N}$, то $\alpha\mathscr{A}$ имеет смысл, а $\alpha\mathscr{A}_1$ смысла не имеет.

Первые m равенств системы (1) показывают, что A_1 есть *матрица индуцированного преобразования* $\mathscr{A}_1$ в системе координат $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

11.2. Прямая сумма инвариантных подпространств. Мы рассмотрели случай, когда линейное преобразование $\mathscr{A}$ имеет одно инвариантное подпространство. Предположим теперь, что $\mathscr{A}$ имеет два инвариантных подпространства $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ и, более того, предположим, что пространство $\mathfrak{L}$ есть прямая сумма их. Выберем в $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ соответственно координатные системы $e_1, \ldots, e_m$ и $e_{m+1}, \ldots, e_n$. Согласно п. 8.2 векторы $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ образуют координатную систему в $\mathfrak{L}$. Посмотрим, какую форму в этой системе примет матрица преобразования $\mathscr{A}$. По условию векторы $e_1\mathscr{A}, \ldots, e_m\mathscr{A}$ лежат в $\mathfrak{N}_1$, а векторы $e_{m+1}\mathscr{A}, \ldots, e_n\mathscr{A}$ лежат в $\mathfrak{N}_2$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}
e_1\mathscr{A} &= a_{11}e_1 + \ldots + a_{m1}e_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_m\mathscr{A} &= a_{1m}e_1 + \ldots + a_{mm}e_m \\
e_{m+1}\mathscr{A} &= a_{m+1,m+1}e_{m+1} + \ldots + a_{n,m+1}e_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_n\mathscr{A} &= a_{m+1,n}e_{m+1} + \ldots + a_{nn}e_n
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Следовательно, матрица преобразования $\mathscr{A}$ оказывается равной

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1m} & 0 & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\dots a_{mm} & 0 & \dots 0 \\ 0 \dots 0 & a_{m+1,\,m+1} & \dots a_{m+1,\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & a_{n,\,m+1} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

т. е. оказывается распавшейся. Обозначим через $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ преобразования, индуцируемые в подпространствах $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ преобразованием $\mathscr{A}$. Из равенств (3) следует, что A_1 и A_2 являются матрицами преобразований $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ в соответствующих координатных системах.

Итак, *если пространство $\mathfrak{L}$ распадается в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно данного преобразования $\mathscr{A}$, то в надлежащей координатной системе матрица преобразования $\mathscr{A}$ принимает клеточно-диагональный вид, диагональные клетки которого являются матрицами преобразований, индуцируемых преобразованием $\mathscr{A}$ в инвариантных подпространствах.*

Это предложение доказано нами только для случая суммы двух инвариантных подпространств. Однако все рассуждения переносятся без изменений и на случай любого числа слагаемых.

Предложим теперь обратное: пусть известно, что в некоторой координатной системе матрица преобразования $\mathscr{A}$ принимает распавшийся вид (4). Тогда из равенств (3) вытекает, что пространство $\mathfrak{N}_1$, натянутое на m первых координатных векторов, и пространство $\mathfrak{N}_2$, натянутое на оставшиеся координатные векторы, будут инвариантными относительно $\mathscr{A}$. Сумма $\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2$, очевидно, прямая и совпадает с $\mathfrak{L}$. Следовательно, приводимость матрицы преобразования $\mathscr{A}$ к клеточно-диагональной форме есть условие не только необходимое, но и достаточное для того, чтобы $\mathfrak{L}$ являлось прямой суммой подпространств, инвариантных относительно $\mathscr{A}$.

Рассмотрим следующую задачу. Дано разложение пространства $\mathfrak{L}$ в прямую сумму некоторых линейных подпространств

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2+\dots+\mathfrak{N}_s$$

и в каждом подпространстве $\mathfrak{N}_i$ задано свое линейное преобразование $\mathscr{A}_i$. Спрашивается, существует ли такое линейное преобразование $\mathscr{A}$ пространства $\mathfrak{L}$, относительно которого все подпространства $\mathfrak{N}_i$ являются инвариантными и которое в каждом $\mathfrak{N}_i$ индуцирует преобразование $\mathscr{A}_i$, а также будет ли это преобразование единственным? Ответ, очевидно, утвердительный. В самом деле, выберем в каждом подпространстве $\mathfrak{N}_i$ некоторую базу $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in_i}$ и обозначим матрицу преобразования $\mathscr{A}_i$ в этой координатной системе через A_i. Рассмотрим клеточно-диагональную матрицу

$$A=A_1+A_2+\dots+A_s.$$

Система векторов $a_{11}, \dots, a_{1n_1}, \dots, a_{s1}, \dots, a_{sn_s}$ является базой пространства $\mathfrak{L}$. В этой базе матрице A отвечает некоторое линейное преобразование $\mathscr{A}$ пространства $\mathfrak{L}$. В силу сказанного выше преобразование $\mathscr{A}$ удовлетворяет всем требованиям нашей задачи. Это преобразование единственно, так как его матрица в указанной координатной системе определяется условиями задачи однозначно.

11.3. **Характеристический многочлен преобразования.** В этом и следующих пунктах предполагается, что основное тело является полем. Возьмем какое-нибудь линейное преобразование $\mathscr{A}$ n-мерного линейного пространства $\mathfrak{L}$. Выбирая в $\mathfrak{L}$ определенную координатную систему $a_1, \dots, a_n$, мы сопоставим преобразованию $\mathscr{A}$ матрицу A. Характеристический многочлен $\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|$ матрицы A называется *характеристическим многочленом преобразования $\mathscr{A}$*. Если мы возьмем какую-либо другую координатную систему $a_1', \dots, a_n'$ и обозначим через T матрицу перехода, то матрица преобразования $\mathscr{A}$ в новой координатной системе будет согласно п. 8.3

$$A_1=TAT^{-1},$$

т. е. матрица, подобная A. Однако в п. 8.2 было показано, что подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены. Таким образом, *характеристический многочлен преобразования $\mathscr{A}$ не зависит от координатной системы, в которой он вычисляется.*

Степень характеристического многочлена равна порядку матрицы A, а порядок матрицы A равен размерности пространства $\mathfrak{L}$. Поэтому *степень характеристического многочлена преобразования $\mathscr{A}$ равна размерности пространства, в котором действует это преобразование.*

Сумма корней характеристического многочлена равна следу, а произведение корней — определителю матрицы A. Так как характеристический многочлен φ, а значит и его корни, не зависят от координатной системы, то от координатной системы не зависят также след и определитель A. Поэтому след и определитель матрицы преобразования $\mathscr{A}$ называются следом и определителем самого преобразования $\mathscr{A}$.

Если пространство $\mathfrak{L}$ распадается в прямую сумму подпространств $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, инвариантных относительно $\mathscr{A}$, то в надлежащей

координатной системе матрица преобразования $\mathscr{A}$ принимает клеточно-диагональный вид

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}.$$

Согласно п. 3.3 характеристический многочлен матрицы A равен в этом случае произведению характеристических многочленов матриц A_1, A_2. Но A_1, A_2 — матрицы линейных преобразований, индуцируемых преобразованием $\mathscr{A}$ в инвариантных подпространствах $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$. Следовательно, *если пространство $\mathfrak{L}$ распадается в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно линейного преобразования $\mathscr{A}$, то характеристический многочлен преобразования $\mathscr{A}$ равен произведению характеристических многочленов преобразований, индуцируемых преобразованием $\mathscr{A}$ в инвариантных подпространствах.*

По теореме Гамильтона — Кэли (п. 3.2) всякая квадратная матрица A является корнем своего характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$, т. е. $\varphi(A)=O$. Пусть $\mathscr{A}$ — линейное преобразование, имеющее матрицу A. Преобразование $\varphi(\mathscr{A})$ имеет согласно п. 3.3 матрицу $\varphi(A)$. Так как эта матрица нулевая, то $\varphi(\mathscr{A})=\mathscr{O}$. Следовательно, *каждое линейное преобразование является корнем своего характеристического многочлена.*

Минимальным многочленом линейного преобразования $\mathscr{A}$ называется многочлен наинизшей степени, старший коэффициент которого есть 1 и корнем которого является преобразование $\mathscr{A}$. Пусть A — матрица преобразования $\mathscr{A}$, вычисленная в некоторой координатной системе. Так как соотношения $f(A)=O$ и $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$, где $f(\lambda)$ — произвольный многочлен, равносильны, то *минимальный многочлен преобразования совпадает с минимальным многочленом матрицы этого преобразования.*

Если пространство $\mathfrak{L}$ распадается в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно преобразования $\mathscr{A}$, то матрица преобразования $\mathscr{A}$ в надлежащей системе координат распадается. Минимальный многочлен распавшейся матрицы есть наименьшее общее кратное минимальных многочленов ее диагональных клеток (п. 3.3). Поэтому минимальный многочлен преобразования $\mathscr{A}$ будет равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов преобразований, индуцированных преобразованием $\mathscr{A}$ в инвариантных подпространствах.

11.4. Собственные векторы и собственные значения. Пусть по-прежнему основное тело является полем. Мы хотим теперь более подробно изучить одномерные инвариантные подпространства. Сначала введем следующие определения. Число ζ называется *собственным значением* линейного преобразования $\mathscr{A}$, если

в пространстве $\mathfrak{L}$ существует ненулевой вектор a, для которого

$$a\mathscr{A}=\zeta a. \tag{5}$$

Всякий вектор, удовлетворяющий этому соотношению, называется *собственным вектором* преобразования $\mathscr{A}$, принадлежащим собственному значению ζ.

Нахождение собственных векторов и нахождение инвариантных одномерных подпространств — задачи равносильные. Действительно, пусть a — ненулевой собственный вектор преобразования $\mathscr{A}$ и ζ — отвечающее ему собственное значение. Рассмотрим одномерное подпространство $\mathfrak{N}$, натянутое на вектор a, т. е. совокупность всех векторов вида αa. Соотношение

$$(\alpha a)\mathscr{A}=\alpha(a\mathscr{A})=\zeta\alpha\cdot a \tag{6}$$

показывает, что $\mathfrak{N}$ инвариантно относительно $\mathscr{A}$. Обратно, пусть некоторое одномерное подпространство $\mathfrak{N}$ инвариантно относительно $\mathscr{A}$. Выберем в $\mathfrak{N}$ произвольный ненулевой вектор a. Так как $\mathfrak{N}$ одномерное, то все векторы из $\mathfrak{N}$ имеют вид αa. По условию $a\mathscr{A}$ принадлежит $\mathfrak{N}$, следовательно,

$$a\mathscr{A}=\zeta a,$$

т. е. a — собственный вектор преобразования $\mathscr{A}$, принадлежащий собственному значению ζ. Равенство (6) показывает, что все остальные векторы $\mathfrak{N}$ также являются собственными векторами, принадлежащими собственному значению ζ.

Выберем в пространстве $\mathfrak{L}$ некоторую координатную систему $e_1, \ldots, e_n$, и пусть в этой системе линейное преобразование $\mathscr{A}$ имеет матрицу $A=\|\alpha_{ij}\|$. Обозначим через a какой-нибудь ненулевой собственный вектор преобразования $\mathscr{A}$. Пусть координатная строка вектора a есть $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$, а соответствующее собственное значение равно ζ. Равенство (5) в координатной форме дает

$$[a]A=\zeta[a], \tag{7}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \xi_1\alpha_{11}+\xi_2\alpha_{21}+\ldots+\xi_n\alpha_{n1}&=\zeta\xi_1,\\ \xi_1\alpha_{12}+\xi_2\alpha_{22}+\ldots+\xi_n\alpha_{n2}&=\zeta\xi_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ \xi_1\alpha_{1n}+\xi_2\alpha_{2n}+\ldots+\xi_n\alpha_{nn}&=\zeta\xi_n \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Перенося все члены в одну сторону, получим

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(\zeta-\alpha_{11})-\xi_2\alpha_{21}-\ldots-\xi_n\alpha_{n1}&=0,\\ -\xi_1\alpha_{12}+\xi_2(\zeta-\alpha_{22})-\ldots-\xi_n\alpha_{n2}&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ -\xi_1\alpha_{1n}-\xi_2\alpha_{2n}-\ldots+\xi_n(\zeta-\alpha_{nn})&=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эту систему можно рассматривать как систему n однородных линейных уравнений с n неизвестными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Так как системе (9) удовлетворяют координаты *некулевого* собственного вектора a, то (см. п. 10.3)

$$\begin{vmatrix} \zeta - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \zeta - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \zeta - a_{nn} \end{vmatrix} = |\zeta E - A| = 0, \qquad (10)$$

где E — единичная матрица. Но $|\lambda E - A|$ есть характеристический многочлен матрицы A, поэтому равенство (10) показывает, что *все собственные значения линейного преобразования являются корнями его характеристического многочлена*. Обратно, *если ζ есть корень характеристического многочлена преобразования $\mathscr{A}$, принадлежащий полю коэффициентов линейного пространства, то ζ является собственным значением преобразования $\mathscr{A}$*. В самом деле, равенство (10) показывает, что ранг матрицы системы (9) будет меньше n; следовательно, эта система будет иметь по меньшей мере одно ненулевое решение. Обозначая это решение через $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$, мы из (8) и (7) непосредственно получаем, что вектор a с координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ будет искомым ненулевым собственным вектором *).

Кратностью собственного значения ζ линейного преобразования $\mathscr{A}$ называется кратность, с которой ζ входит в качестве корня в характеристический многочлен преобразования $\mathscr{A}$.

Рассмотрим пример. Пусть в трехмерном линейном вещественном пространстве с базой a_1, a_2, a_3 действует линейное преобразование $\mathscr{A}$ с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется найти собственные значения и собственные векторы преобразования $\mathscr{A}$. Вычисляем прежде всего характеристический многочлен преобразования $\mathscr{A}$:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 1 & 2 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda^2 + 4).$$

*) Более кратко доказательство последнего утверждения можно провести следующим образом. Условие $a\mathscr{A} = \zeta a$ можно переписать в виде $a(\zeta\mathscr{E} - \mathscr{A}) = 0$. Это показывает, что собственные векторы $\mathscr{A}$ являются векторами, входящими в ядро преобразования $\zeta\mathscr{E} - \mathscr{A}$. Но чтобы ядро содержало ненулевые векторы, необходимо и достаточно, чтобы преобразование было особенным (п. 10.2), т. е. необходимо и достаточно, чтобы $|\zeta E - A| = 0$.

Его корни равны соответственно $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$. Так как основное поле вещественное, то последние два значения отбрасываем, а первое $\lambda_1 = 4$ будет искомым собственным значением. Чтобы найти собственные векторы, составляем систему (9), которая в нашем случае обратится в

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3 &= 0, \\ -3\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 &= 0, \\ -2\xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим

$$\xi_2 = \xi_1, \quad \xi_3 = 0,$$

где ξ_1 — произвольное. Таким образом, вектор $\xi_1 a_1 + \xi_1 a_2$ будет при произвольном ξ_1 собственным вектором преобразования $\mathscr{A}$.

Примеры и задачи

1. В комплексном пространстве $\mathfrak{L}$ с базой a_1, a_2, a_3, a_4 дано линейное преобразование $\mathscr{A}$, имеющее матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти собственные векторы и собственные значения преобразования $\mathscr{A}$. Показать, что подпространство, натянутое на векторы $2a_1 - a_2 - a_3 + a_4$, является инвариантным относительно $\mathscr{A}$.

2. Доказать, что пространство $\mathfrak{L}$ имеет базу, образованную собственными векторами преобразования $\mathscr{A}$. Какова будет матрица преобразования $\mathscr{A}$ в такой базе?

3. Если в пространстве $\mathfrak{L}$ в системе координат $a_1, a_2, \ldots, a_n$ матрица линейного преобразования $\mathscr{A}$ имеет клеточный подразделенный вид

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

где A_2 — квадратная матрица порядка m, то подпространство, натянутое на последние m координатных векторов $a_{n-m+1}, \ldots, a_n$, будет инвариантным относительно $\mathscr{A}$.

4. Если преобразование $\mathscr{A}$ невырожденное, то всякое подпространство, инвариантное относительно $\mathscr{A}$, будет инвариантным и относительно $\mathscr{A}^{-1}$.

5. Если подпространство $\mathfrak{N}$ инвариантно относительно преобразования $\mathscr{A}$, то образ и прообраз подпространства $\mathfrak{N}$ будут также инвариантными относительно $\mathscr{A}$.

6. В комплексном линейном пространстве всякое линейное преобразование имеет по крайней мере один ненулевой собственный вектор.

7. Пусть в системе координат $a_1, \ldots, a_n$ матрица преобразования $\mathscr{A}$ имеет диагональную форму с различными диагональными элементами. Найти

все инвариантные подпространства преобразования $\mathscr{A}$ и показать, что их число равно 2^n.

9. Если линейное преобразование $\mathscr{A}$ n-мерного пространства $\mathfrak{L}$ имеет n различных собственных значений, то матрица преобразования $\mathscr{A}$ в подходящей системе координат приводится к диагональному виду.

§ 12. Преобразования с матрицей нормальной формы

В настоящем параграфе будут рассмотрены свойства линейных преобразований, матрицы которых имеют в некоторой фиксированной координатной системе так называемую нормальную форму Жордана. Таким образом, возможность приведения матриц рассматриваемых преобразований к требуемому виду здесь будет предполагаться заранее. Вопрос о том, что такое приведение в поле комплексных чисел всегда возможно, будет решен далее, в п. 15.4.

Всюду в этом параграфе предполагается, что основное тело является полем.

12.1. Диагональная форма. Простейшую характеристику преобразований, матрица которых может быть приведена к диагональной форме, дает

Теорема 1. *Если линейное преобразование пространства размерности n имеет n линейно независимых собственных векторов, то, приняв эти векторы в качестве координатных, мы приведем матрицу преобразования к диагональному виду. Обратно, если матрица преобразования в некоторой координатной системе имеет диагональный вид, то базисные векторы являются собственными векторами преобразования.*

Доказательство очевидно. Более тонкая задача состоит в том, чтобы по матрице преобразования, вычисленной в какой-нибудь случайной координатной системе, узнать, обладает ли преобразование собственными векторами, образующими базу пространства. Эта задача будет решена в п. 15.4, а здесь мы рассмотрим только один частный случай ее.

Теорема 2. *Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям линейного преобразования, линейно независимы.*

В самом деле, пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ — различные собственные значения и $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — отвечающие им собственные векторы линейного преобразования $\mathscr{A}$. По индукции можно считать, что $e_1, \ldots, e_{m-1}$ заведомо независимы. Допустим, что $e_1, \ldots, e_m$ связаны зависимостью

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{m-1} e_{m-1} + \alpha_m e_m = 0.$$

Применим к обеим частям этого равенства преобразование $\mathscr{A}$, получим

$$\alpha_1 \rho_1 e_1 + \ldots + \alpha_{m-1} \rho_{m-1} e_{m-1} + \alpha_m \rho_m e_m = 0.$$

Исключив e_m, будем иметь

$$\alpha_1 (\rho_m - \rho_1) e_1 + \ldots + \alpha_{m-1} (\rho_m - \rho_{m-1}) e_{m-1} = 0.$$

Вследствие линейной независимости $e_1, \ldots, e_{m-1}$ это дает $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$ и, следовательно, $\alpha_m = 0$, что и требовалось.

Сопоставляя обе доказанные теоремы, получаем такое следствие: *если характеристический многочлен линейного преобразования n-мерного пространства имеет n различных корней, то матрица преобразования в подходящей координатной системе приводится к диагональной форме.*

Например, характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ & 1 & 1 & 3 \\ & & 2 & 5 \\ & & & -2 \end{vmatrix}$$

имеет корни $+1$, $+2$; соответствующие собственные векторы имеют координатные строки $[2, 3, -3, -4]$, $[0, 3, -1, 1]$, $[0, 0, 4, 5]$, $[0, 0, 0, 1]$. Выбирая их в качестве координатных векторов, приведем матрицу A к диагональной форме с числами $1, -1, 2, -2$ по главной диагонали.

12.2. Клетки Жордана. Матрица вида

$$A = \begin{vmatrix} \rho & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \rho & 1 & \ldots & 0 \\ & & \rho & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & \\ & & & \rho & 1 \\ & & & & \rho \end{vmatrix} \tag{1}$$

называется *клеткой Жордана*. Характеристический многочлен клетки Жордана равен $(\lambda - \rho)^n$, где n — порядок матрицы. Следовательно, ρ является ее единственным собственным значением и имеет кратность n.

Пусть $\mathfrak{L}$ — линейное пространство с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $\mathscr{A}$ — линейное преобразование, имеющее в отмеченном базисе матрицу A вида (1). Тогда

$$e_1 \mathscr{A} = \rho e_1 + e_2, \ \ldots, \ e_{n-1} \mathscr{A} = \rho e_{n-1} + e_n, \ e_n \mathscr{A} = \rho e_n \tag{2}$$

и, следовательно,

$$e_1 (\mathscr{A} - \rho \mathscr{E}) = e_2, \ e_1 (\mathscr{A} - \rho \mathscr{E})^2 = e_3, \ \ldots, \ e_1 (\mathscr{A} - \rho \mathscr{E})^{n-1} = e_n. \tag{3}$$

Так как $\mathscr{A}$ должно быть корнем своего характеристического многочлена, то $(\mathscr{A} - \rho \mathscr{E})^n = \mathscr{E}^n$. Минимальный многочлен

преобразования $\mathscr{A}$ делит его характеристический многочлен и потому должен иметь вид $(\lambda-\rho)^s$, $0<s\leqslant k$. Последнее из равенств (3) показывает, что $(\mathscr{A}-\rho\mathscr{E})^{s-1}\neq\mathscr{O}$, и потому $s=n_1$, т. е. *минимальный многочлен клетки Жордана совпадает с ее характеристическим многочленом* $(\lambda-\rho)^n$.

Обозначим через $\mathfrak{L}_i$ подпространство, натянутое на базисные векторы $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Из равенств (2), а также и из вида матрицы A следует, что все эти подпространства инвариантны. С помощью соотношений (3) легко проверить, что $\mathfrak{L}_i$ состоит из тех и только тех векторов x, для которых

$$x(\mathscr{A}-\rho\mathscr{E})^{n-i+1}=o.$$

Это показывает, что цепочка подпространств $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1\supset\mathfrak{L}_2\supset\ldots$ $\ldots\supset\mathfrak{L}_n$ — та же самая, что и выбора координатной системы и определяется самим преобразованием $\mathscr{A}$.

Докажем, что других инвариантных подпространств преобразование не имеет. В самом деле, пусть $\mathfrak{M}$ — какое-либо инвариантное подпространство для $\mathscr{A}$, отличное от $\mathfrak{L}_i$. Найдем такое i, чтобы $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{L}_i$, $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{L}_{i+1}$, полагая для общности $\mathfrak{L}_{n+1}=o$. Покажем, что $\mathfrak{M}=\mathfrak{L}_i$. Для этого рассмотрим произвольный вектор

$$a=\alpha_i e_i+\alpha_{i+1}e_{i+1}+\ldots+\alpha_n e_n \qquad (\alpha_i\neq 0) \tag{4}$$

из $\mathfrak{M}$. Если $i=1$, то и $\in\mathfrak{L}_1$. Допустим, что $i\leqslant l$. Применим к обеим частям (4) преобразование $(\mathscr{A}-\rho\mathscr{E})^{l-i}$, получим

$$a(\mathscr{A}-\rho\mathscr{E})^{l-i}=\alpha_i e_l+\alpha_{i+1}e_{l+1}+\ldots+\alpha_{n-l+i}e_n\in\mathfrak{M}.$$

Так как по предположению $e_l,\ldots,e_n\subset\mathfrak{M}$, то $e_{l-1}\in\mathfrak{M}$, а следовательно, $\mathfrak{L}_{l-1}\subset\mathfrak{M}$, что противоречит выбору l. Поэтому $\mathfrak{M}=\mathfrak{L}_i$, откуда $\mathfrak{M}=\mathfrak{L}_i$.

Заметим еще, что *матрица преобразования* $\mathscr{A}$ *не распадается ни в одной координатной системе*.

Действительно, распадение матрицы $\mathscr{A}$ равносильно распадению $\mathfrak{L}$ в прямую сумму инвариантных подпространств, а последнее невозможно, так как из любых двух инвариантных подпространств преобразования $\mathscr{A}$ одно обязательно содержится в другом, тогда как в прямой сумме слагаемые имеют лишь нулевое пересечение.

12.3. Корневые подпространства. Линейные преобразования, матрицы которых приводимы к диагональному виду или к клетке Жордана, охватывают не всю совокупность матриц. В общем случае над полем комплексных чисел матрицу любого линейного преобразования можно привести к клеточно-диагональной форме с клетками Жордана по диагонали. Матрицы последнего вида называются *жордановыми* или *имеющими жорданову нормальную форму*.

Пусть в некотором базисе $e_1,\ldots,e_n$ матрица линейного преобразования $\mathscr{A}$ имеет нормальную жорданову форму

$$A=A_1+A_2+\ldots+A_s, \tag{5}$$

где A_i — клетка Жордана порядка n_i с собственным значением ρ_i $(i=1,\ldots,s)$, $n_1+\ldots+n_s=n$. Клетке A_i отвечает инвариантное подпространство $\mathfrak{L}^{(i)}$, натянутое на векторы $e_{\rho_i+1}, e_{\rho_i+2},\ldots,e_{\rho_i}$ $(\rho_i=n_1+\ldots+n_{i-1}, \rho_i=\rho_i+n_i)$. Преобразование $\mathscr{A}$ индуцирует в подпространстве $\mathfrak{L}^{(i)}$ преобразование $\mathscr{A}_i$, матрицей которого и является клетка A_i. Согласно предыдущему все векторы x из $\mathfrak{L}^{(i)}$ удовлетворяют соотношению

$$x(\mathscr{A}_i-\rho_i\mathscr{E})^{n_i}=o,$$

а следовательно, и соотношению

$$x(\mathscr{A}-\rho_i\mathscr{E})^{n_i}=o. \tag{6}$$

Однако теперь уже нельзя сказать, что соотношение (6) характеризует только векторы из $\mathfrak{L}^{(i)}$, поскольку среди диагональных клеток могут найтись и другие клетки с тем же собственным значением. Чтобы разобрать вопрос несколько детальнее, введем следующее определение.

Вектор a называется *корневым вектором высоты* h, *принадлежащим корню* ρ *преобразования* $\mathscr{A}$, если

$$a(\rho\mathscr{E}-\mathscr{A})^h=o.$$

Понятие корневого вектора является обобщением понятия собственного вектора, так как собственные векторы — это корневые векторы высоты 1.

Совокупность всех корневых векторов, принадлежащих некоторому фиксированному корню ρ *преобразования* $\mathscr{A}$, *есть инвариантное подпространство* $\mathfrak{L}_\rho$, *называемое корневым подпространством преобразования* $\mathscr{A}$.

Действительно, если x, y принадлежат $\mathfrak{L}_\rho$ и имеют высоты h_1, h_2, то при $h=\max(h_1, h_2)$ имеем

$$(\alpha x+\beta y)(\rho\mathscr{E}-\mathscr{A})^h=\alpha x(\rho\mathscr{E}-\mathscr{A})^h+\beta y(\rho\mathscr{E}-\mathscr{A})^h=o,$$
$$x\mathscr{A}(\rho\mathscr{E}-\mathscr{A})^h=x(\rho\mathscr{E}-\mathscr{A})^h\mathscr{A}=o.$$

Корневые векторы, принадлежащие различным корням, обязательно линейно независимы. Более того, справедлива и более сильная

Теорема 3. *Если суммы* $x_1+x_2+\ldots+x_m=x$ *корневых векторов, принадлежащих различным корням* $\rho_1,\ldots,\rho_m$ *преобразования* $\mathscr{A}$, *содержатся в инвариантном подпространстве* $\mathfrak{M}$, *то каждое слагаемое в отдельности содержится в* $\mathfrak{M}$.

Положим

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-\rho_1)^{k_1}(\lambda-\rho_2)^{k_2}\dots(\lambda-\rho_{m-1})^{k_{m-1}}.$$

По условию $\varphi(\mathscr{A})\xi \mathfrak{N}$ и в то же время

$$\varphi_{\mathscr{A}}(e_1') = \varphi_{\mathscr{A}}(e_2') = \dots = \varphi_{\mathscr{A}}(e_{m-1}') = 0.$$

Следовательно, $\varphi_{\mathscr{A}}(e_k')\in\mathfrak{N}$. Многочлены $\varphi(\lambda)$ и $(\lambda-\rho_m)^{k_m}$ взаимно просты. Поэтому найдутся такие многочлены $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, что

$$1=\varphi(\lambda)F(\lambda)+(\lambda-\rho_m)^{k_m}G(\lambda),$$

откуда

$$\mathscr{E}=\varphi(\mathscr{A})F(\mathscr{A})+(\mathscr{A}-\rho_m\mathscr{E})^{k_m}G(\mathscr{A}),$$

и, следовательно,

$$x_m=x_m\varphi(\mathscr{A})F(\mathscr{A})+x_m(\mathscr{A}-\rho_m\mathscr{E})^{k_m}G(\mathscr{A})=y_m+(\mathscr{A}-\rho_m\mathscr{E})^{k_m}G(\mathscr{A})\in\mathfrak{M},$$

что и требовалось.

Сформулированное выше утверждение о линейной независимости векторов $x_1,\dots,x_m$ получается из доказанной теоремы при $\mathfrak{N}=0$. В качестве следствия отметим также, что *различные корневые подпространства имеют только нулевое пересечение.*

Вернемся теперь снова к случаю конца в некотором базисе матрица преобразования $\mathscr{A}$ имеет нормальную форму Жордана (5). Выше были определены две серии подпространств: корневые подпространства $\mathfrak{L}_1,\dots,\mathfrak{L}_m$ и подпространства $\mathfrak{L}^{(1)},\dots,\mathfrak{L}^{(s)}$, отвечающие диагональным клеткам матрицы A. Чтобы выяснить связь между обеими сериями, обозначим через $\mathfrak{M}^{(i)}$ сумму тех подпространств $\mathfrak{L}^{(k)}$, которые отвечают клеткам с собственным значением ρ_i, и аналогично определим $\mathfrak{M}^{(1)},\dots,\mathfrak{M}^{(m)}$. Ввиду этого из разложения

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}^{(1)}+\mathfrak{L}^{(2)}+\dots+\mathfrak{L}^{(s)}$$

путем объединения отдельных слагаемых получается разложение

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}^{(1)}+\mathfrak{M}^{(2)}+\dots+\mathfrak{M}^{(m)}. \tag{7}$$

Ясно, что $\mathfrak{M}^{(i)}\subset\mathfrak{L}_{k_i}$ $(i=1,\dots,m)$. Поэтому вместе с (7) имеет место и разложение

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_{k_1}+\mathfrak{L}_{k_2}+\dots+\mathfrak{L}_{k_m}. \tag{8}$$

Так как согласно теореме 3 сумма (8) прямая, то, сравнивая ее с (7), получим требуемые равенства $\mathfrak{M}^{(i)}=\mathfrak{L}_{k_i}$.

Итак, если комплексное преобразование $\mathscr{A}$ может быть приведено к нормальной форме Жордана, то пространство $\mathfrak{L}$ есть прямая сумма корневых подпространств $\mathscr{A}$, причем каждое корневое подпространство в свою очередь есть прямая сумма кор-

невых подпространств, отвечающих клеткам Жордана с заданным собственным значением.

Приведенные рассуждения показывают также, что корневые подпространства определяются самим преобразованием $\mathscr{A}$ и не зависят от выбора координатного базиса $e_1,\dots,e_n$. Что касается подпространств $\mathfrak{L}^{(k)}$, то они, вообще говоря, зависят не только от $\mathscr{A}$, но и от способа приведения матрицы к нормальной форме.

Примеры и задачи

1. Пусть преобразование $\mathscr{A}$ в базисе $e_1,\dots,e_5$ имеет матрицу $A=\begin{vmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&A_3\end{vmatrix}$, где $A_1=A_2=\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}$, $A_3=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}$. Корневые подпространства $\mathscr{A}$ суть $\mathfrak{L}_1=Ke_1+Ke_2$, $\mathfrak{L}_2=Ke_3+Ke_4$ и $\mathfrak{L}_3=Ke_5$. Инвариантные подпространства $\mathfrak{L}^{(1)}=Ke_1+Ke_3$, $\mathfrak{L}^{(2)}=Ke_2+Ke_4$. В новом базисе

$$e_1'=e_1,\ e_2'=e_2+e_3,\ e_3'=e_3-e_2,\ e_4'=e_4,\ e_5'=e_5$$

матрица $\mathscr{A}$ будет той же самой, однако соответствующее клеткам Жордана подпространство $Ke_1'+Ke_2'$ и $Ke_3'+Ke_4'$ будет уже иным.

2. Почти треугольные квазидиагональные матрицы

$$\begin{vmatrix}2&1&1\\&2&1\\&&2\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}2&1&\\&2&1\\&&1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}2&1&\\&2&1\\&&2\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}2&1&\\&2&0\\&&2\end{vmatrix}.$$

3. Матрица приводима к диагональной форме тогда и только тогда, когда элементарные делители ее имеют простые корни.

4. Если матрица преобразования приводима к нормальной форме Жордана, то каждое ее инвариантное подпространство есть прямая сумма пересечений его с корневыми подпространствами преобразования.

5. Если матрица порядка n имеет n различных характеристических чисел, то соответствующее линейное преобразование имеет всего 2^n инвариантных подпространств, включая нулевое и все пространство.

Глава IV

МНОГОЧЛЕННЫЕ МАТРИЦЫ

Почти все матрицы, с которыми мы до сих пор встречались, имели своими элементами числа основного тела K. Однако в связи с понятием характеристического многочлена нам пришлось рассматривать характеристическую матрицу $\lambda E - A$, элементы которой были не числа из K, а *многочлены от* λ с коэффициентами из K, причем предполагалось, что само K является *полем*. В настоящей главе мы займемся систематическим изучением свойств многочленных матриц, т. е. матриц, элементы которых являются многочленами от λ с коэффициентами из основного поля. Эти результаты мы применим затем к задаче нахождения жордановой формы матрицы линейного преобразования.

§ 13. Инвариантные множители

13.1. **Эквивалентность.** Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$\begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & \dots & f_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda) & \dots & f_{nn}(\lambda) \end{vmatrix},$$

элементами которой являются многочлены от буквы λ с коэффициентами из основного поля K. Матрицы такого вида мы будем называть *многочленными* или λ-*матрицами*[*]). Над λ-матрицами часто приходится совершать следующие преобразования:

I. *Умножение какой-либо строки на число из K, отличное от нуля.*

II. *Прибавление к одной строке матрицы какой-либо другой ее строки, умноженной на произвольный многочлен $f(\lambda)$.*

III. *Умножение какого-либо столбца на число из K, отличное от нуля.*

IV. *Прибавление к какому-нибудь столбцу элементов другого столбца, умноженных на произвольный многочлен $f(\lambda)$.*

[*]) Мы всюду предполагаем, что рассматриваемые матрицы квадратные, хотя многие результаты непосредственно переносятся и на прямоугольные λ-матрицы.

Эти преобразования называются *элементарными преобразованиями* λ-*матриц*. Если над какой-нибудь λ-матрицей произвести элементарное преобразование, то получится опять некоторая λ-матрица; над этой матрицей можно снова произвести элементарное преобразование и т. д. Говорят, что λ-матрица F *эквивалентна* λ-*матрице* G, если F можно получить из G цепочкой элементарных преобразований. Во многих случаях оказывается полезной следующая лемма:

Элементарными преобразованиями I, II *можно переставить любые две строки* λ-*матрицы, а элементарными преобразованиями* III, IV *можно переставить любые два ее столбца.*

В самом деле, пусть нам требуется поменять местами i-ю и j-ю строки матрицы. Легко видеть, что мы достигнем этого, совершив следующие элементарные преобразования: 1) к i-й строке прибавим j-ю; 2) к j-й строке новой матрицы прибавим ее i-ю строку, умноженную на -1; 3) j-ю строку получившейся матрицы умножим на -1; 4) к i-й строке последней матрицы прибавим ее j-ю строку, умноженную на -1. Если аналогичные преобразования совершить над столбцами, то в результате поменяются местами i-й и j-й столбцы. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что *если матрица F отличается от G лишь порядком строк или столбцов, то F эквивалентна G.*

Из определения эквивалентности λ-матриц непосредственно вытекают следующие свойства:

1. *Отношение эквивалентности транзитивно*: если F эквивалентна G, а G эквивалентна H, то F эквивалентна H.

В самом деле, по условию G можно получить из H, а F из G цепочкой элементарных преобразований; следовательно, F можно получить цепочкой элементарных преобразований из H.

2. *Отношение эквивалентности симметрично*: если F эквивалентна G, то G эквивалентна F. Другими словами, если F можно получить из G цепочкой элементарных преобразований, то и G можно получить из F цепочкой элементарных преобразований.

Докажем сначала, что если F можно получить из G каким-нибудь одним элементарным преобразованием, то G также можно получить из F одним элементарным преобразованием. Для этого мы пересмотрим все четыре типа элементарных преобразований. Пусть F получается из G преобразованием типа I, т. е. умножением какой-либо i-й строки G на число $a \neq 0$. Тогда, умножая i-ю строку F на a^{-1}, мы, очевидно, получим G. Пусть теперь F получается из G преобразованием типа II, например путем прибавления к i-й строке матрицы G ее j-й строки, умноженной на $f(\lambda)$. В таком случае, прибавляя к i-й строке матрицы F ее j-ю

строку, умноженную на $-f(\lambda)$, мы получим обратно G. То же самое можно сказать и относительно преобразований типа III, IV. Мы видим, следовательно, что для каждого элементарного преобразования существует элементарное преобразование, ему обратное, отменяющее результат первого. Поэтому, если матрица F получается из G цепочкой элементарных преобразований, то, совершая обратные преобразования в обратном порядке, мы из матрицы F получим матрицу G, что и требовалось.

3. *Свойство эквивалентности рефлексивно*: каждая матрица эквивалентна самой себе.

Например, совершая над I два взаимно обратных преобразования, мы получим снова F.

13-2. Диагональная форма. Выше было показано, что отношение эквивалентности транзитивно, симметрично и рефлексивно. Отсюда следует, что λ-матрицы можно разбить на классы эквивалентных друг другу. Возникает вопрос: нельзя ли указать такую форму λ-матрицы, чтобы в каждом из этих классов содержалась одна и только одна матрица заданной формы? Формы, обладающие таким свойством, называются *каноническими*. Мы покажем, что для λ-матриц диагональная форма с некоторыми дополнительными условиями делимости будет в этом смысле канонической формой.

Определение. *λ-матрицу вида*

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{bmatrix}$$

называют канонической диагональной, если каждый диагональный элемент $f_i(\lambda)$ является делителем следующего $f_{i+1}(\lambda)$ и если все отличные от нуля многочлены $f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ имеют старший коэффициент 1.

Отсюда следует, что если среди диагональных элементов канонической диагональной матрицы встречаются нули, то они должны занимать последние места, так как нуль не может быть делителем никакого ненулевого многочлена. С другой стороны, если среди диагональных элементов встречаются числа, отличные от нуля, то они должны быть равны 1 и занимать первые места, так как 1 от чего какой многочлен со старшим коэффициентом 1, кроме 1, не делится. Следовательно, каноническая диагональная

матрица в общем случае будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & f_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & f_k(\lambda) \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

где многочлены $f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)$ неотличимы, по старшим коэффициентам 1, причем каждый из них является делителем следующего.

Теорема 1. *Всякая λ-матрица конечным числом элементарных преобразований может быть приведена к канонической диагональной форме.*

Доказательство. Пусть G — заданная λ-матрица. Если $G = 0$, то доказывать нечего, так как 0 уже имеет нормальную форму. Предположим теперь, что $G \neq 0$. Среди всех λ-матриц, эквивалентных G, выберем ту, у которой элемент, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля и имеет наименьшую степень. Пусть эта матрица есть

$$F = \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & \ldots & f_{1n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{m1}(\lambda) & \ldots & f_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Покажем, что все элементы первой строки и все элементы первого столбца матрицы F делятся на $f_{11}(\lambda)$ без остатка. В самом деле, пусть

$$f_{i1}(\lambda) = f_{11}(\lambda) q_i(\lambda) + r_i(\lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

где $q_i(\lambda)$, $r_i(\lambda)$ — частное и остаток от деления $f_{i1}(\lambda)$ на $f_{11}(\lambda)$. Произведем над F следующее элементарное преобразование: из элементов i-го столбца вычтем элементы первого, умноженные на $q_i(\lambda)$. Равенство (1) показывает, что элемент, стоящий в первой строке и i-м столбце новой матрицы, будет равен $r_i(\lambda)$. Если

$r_1(\lambda) \neq 0$, то степень $r_1(\lambda)$ меньше степени делителя $f_{11}(\lambda)$. Переставляя первый и i-й столбцы, мы получим матрицу, эквивалентную F и имеющую в левом верхнем углу многочлен $r_1(\lambda)$ меньшей степени, чем $f_{11}(\lambda)$, что противоречит определению матрицы F. Таким образом, $r_1(\lambda) = 0$.

Обозначая теперь через $q_i(\lambda)$ частное от деления $f_{i1}(\lambda)$ на $f_{11}(\lambda)$, произведем над матрицей F следующие элементарные преобразования: из второго столбца вычтем первый, умноженный на $q_2(\lambda)$, затем из третьего столбца вычтем первый, умноженный на $q_3(\lambda)$, и т. д. После этого произведем аналогичные преобразования над строками. В результате матрица F заменится эквивалентной матрицей

$$H = \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где $b_{ij}(\lambda)$ — некоторые многочлены.

Все $b_{ij}(\lambda)$ делятся без остатка на $f_{11}(\lambda)$. Действительно, если бы какой-нибудь из них, $b_{ij}(\lambda)$, не делился на $f_{11}(\lambda)$, то, прибавляя к первой строке матрицы H ее i-ю строку, мы получили бы матрицу Q, обладающую следующими свойствами:

1) Q эквивалентна G,

2) левый верхний элемент матрицы Q отличен от нуля и имеет наименьшую степень,

3) в первой строке матрицы Q имеется элемент $b_{ij}(\lambda)$, не делящийся на первый элемент этой строки.

Однако мы видели, что из первых двух свойств вытекает делимость всех элементов первой строки на ее первый элемент. Следовательно, третье свойство противоречит первым двум, и наше утверждение доказано. Итак, мы показали, что для каждой λ-матрицы H существует эквивалентная ей матрица H вида (2), где все $b_{ij}(\lambda)$ делятся на $f_{11}(\lambda)$. Теперь будем производить элементарные преобразования над матрицей

$$H_1 = \begin{bmatrix} b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Каждое элементарное преобразование над H_1 можно рассматривать и как элементарное преобразование матрицы H. Легко видеть, что при этом первая строка и первый столбец матрицы H меняться не будут. Кроме того, поскольку все элементы матрицы H_1 делятся на $f_{11}(\lambda)$, то и все элементы новых матриц, получающихся из H_1 в результате элементарных преобразований, также будут делиться на $f_{11}(\lambda)$.

Применяя доказанный выше результат к матрице H_1, мы видим, что H_1 можно элементарными преобразованиями привести к форме

$$\begin{bmatrix} b_{22}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{23}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

а матрицу H, следовательно, — к форме

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & & & \\ & b_{22}(\lambda) & & \\ & & b_{23}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где все $b_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 3, \dots, n)$ делятся на $b_{22}(\lambda)$, а $b_{22}(\lambda)$ делится на $f_{11}(\lambda)$. Продолжая этот процесс дальше, мы через конечное число шагов получим требуемую каноническую диагональную форму.

Из нашего доказательства нетрудно извлечь и практический способ для приведения λ-матриц к канонической диагональной форме. Идея его состоит в том, чтобы, пользуясь элементарными преобразованиями, сначала уменьшить степень элемента, стоящего в первой строке и первом столбце, и обратить в нуль остальные их элементы. После того как первая цель достигнута, применяем тот же способ к оставшемуся углу H_1 и т. д.

Теорема 1 утверждает, что *каждый класс эквивалентных матриц содержит по меньшей мере одну матрицу, имеющую каноническую диагональную форму*. В следующем пункте будет показано, что такая матрица в каждом классе единственная.

13.3. Наибольшие общие делители миноров. Пусть F — какая-нибудь λ-матрица порядка n. Составим из всевозможные миноры порядка k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Эти миноры являются многочленами от λ. Обозначим их наибольший общий делитель через $D_k(\lambda)$ *). Если окажется, что все миноры k-го порядка равны нулю, то по определению будем считать $D_k(\lambda) = 0$. В частности, $D_1(\lambda)$ есть наибольший общий делитель элементов матрицы F, а $D_n(\lambda)$ равен определителю F, деленному на свой старший коэффициент.

Теорема 2. *Эквивалентные λ-матрицы имеют один и тот же наибольший общий делитель миноров k-го порядка $(k = 1, 2, \dots, n)$.*

Пусть F_1, F_2 — две эквивалентные λ-матрицы. Обозначим наибольшие общие делители их миноров k-го порядка соответственно

*) Наибольшим общим делителем мы условимся всегда называть общий делитель наивысшей степени, со старшим коэффициентом 1. Поэтому все наши $D_k(\lambda)$ имеют старший коэффициент 1.

через $D_{k1}(\lambda)$ и $D_{k2}(\lambda)$. Требуется показать, что $D_{k1}(\lambda)=D_{k2}(\lambda)$. Нам известно, что F_2 можно получить из F_1 цепочкой элементарных преобразований. Предположим сначала, что эта цепочка состоит только из одного элементарного преобразования. Пусть, например, F_2 получается из F_1 умножением всех элементов i-й строки матрицы F_1 на число $c\neq 0$. Соответственные миноры F_1 и F_2 тогда либо совсем не отличаются друг от друга, либо отличаются лишь постоянным множителем c. Однако постоянный множитель не влияет на вычисление наибольшего общего делителя многочленов, поэтому $D_{k1}=D_{k2}$. То же самое будет и в случае, когда F_2 получается из F_1 умножением на c элементов какого-либо столбца матрицы F_1. Пусть теперь F_2 получается из F_1 преобразованием типа II или IV; например, пусть F_2 возникает в результате прибавления к i-й строке матрицы F_1 элементов j-й строки, умноженных на $f(\lambda)$. Покажем, что D_{k2} делится на D_{k1}.

В самом деле, миноры k-го порядка матриц F_1, F_2 можно разбить на три класса. К первому мы отнесем те из них, которые не содержат элементов i-й строки. Соответственные миноры матриц F_1, F_2 в этом случае, очевидно, равны друг другу. Ко второму классу отнесем те миноры, которые содержат элементы и i-й и j-й строк. Эти миноры у матриц F_1, F_2 будут опять равными, так как величина определителя не изменится, если к элементам одной из его строк прибавляются величины, пропорциональные элементам какой-либо другой строки. Наконец, к третьему классу мы отнесем миноры, содержащие элементы i-й строки и не содержащие элементов j-й строки. Соответственные миноры этого класса имеют вид

$$M_1=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ f_{i_1 1}\dots f_{i_1 k} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},\qquad M_2=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ f_{i_1 1}+f_{j_1 1}f(\lambda)\dots f_{i_1 k}+f_{j_1 k}f(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

где невыписанные строки у обоих миноров одинаковы. На основании теоремы сложения определителей

$$M_2=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ f_{i_1 1}\dots f_{i_1 k} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+f(\lambda)\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ f_{j_1 1}\dots f_{j_1 k} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=M_1\pm f(\lambda)N_1,$$

где N_1 — некоторый минор матрицы F_1. Все миноры k-го порядка матрицы F_1 делятся и на D_{k1}. Из наших рассуждений видно, что их D_{k1} делятся и все миноры k-го порядка матрицы F_2, так как они либо совпадают с соответственными минорами матрицы F_1, либо получаются через них линейно. Но в таком случае D_{k1} делит и наибольший общий делитель миноров k-го порядка матрицы F_2, т. е. D_{k2}. Итак, если F_2 получается из F_1 одним элементарным преобразованием, то D_{k1} делится на D_{k2}. Совершая над F_2 обратное элементарное преобразование, мы получим F_1. Поэтому D_{k1} также должен делиться на D_{k2}. Но если старшие коэффициенты двух многочленов равны и эти многочлены делятся без остатка друг на друга, то они совпадают. Таким образом, $D_{k1}=D_{k2}$. Мы тем доказали равенство наибольших общих делителей в предположении, что F_2 получается из F_1 одним элементарным преобразованием. Однако если $D_k(\lambda)$ не меняется при каждом отдельном элементарном преобразовании, то, очевидно, $D_k(\lambda)$ не изменится и при нескольких последовательных преобразованиях. Поэтому теорему 2 можно считать доказанной в общем виде.

Вычислим многочлены $D_1(\lambda),\dots,D_n(\lambda)$ для матрицы, имеющей канонический диагональный вид

$$D=\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Чтобы получить какой-нибудь минор k-го порядка, мы должны из D вычеркнуть $n-k$ строк и $n-k$ столбцов. Если из D вычеркнуть i-ю строку, то в i-м столбце останется только нуль. Поэтому, чтобы получить минор, отличный от нуля, мы должны вычеркнуть все столбцы матрицы D, номера которых равны номерам вычеркнутых строк. Таким образом, отличные от нуля миноры k-й степени должны иметь вид

$$\begin{vmatrix} d_{i_1}(\lambda) & & & \\ & d_{i_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{i_k}(\lambda) \end{vmatrix}=d_{i_1}(\lambda)d_{i_2}(\lambda)\dots d_{i_k}(\lambda). \tag{3}$$

Наибольшим общим делителем этих миноров будет $D_k(\lambda)$. Из неравенств $1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n$ следует, что $1\leqslant i_1$, $2\leqslant i_2,\dots$, $k\leqslant i_k$. Поэтому $d_{i_1}(\lambda)$ делится на $d_k(\lambda)$, а значит, $d_{i_1}(\lambda)\dots d_{i_k}(\lambda)$ делится на $d_1(\lambda)\dots d_k(\lambda)$. Мы видим, следовательно, что все

миноры k-го порядка матрицы D делятся на минор

$$\begin{vmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_k(\lambda) \end{vmatrix} = d_1(\lambda)\dots d_k(\lambda). \qquad (4)$$

Если этот минор равен нулю, то и все миноры k-го порядка матрицы D также равны нулю. Согласно определению в этом случае $D_k(\lambda)=0$. Если минор (4) отличен от нуля, то многочлены $d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda)$ отличны от нуля и имеют старший коэффициент 1. Но тогда и минор (4) имеет старший коэффициент 1. Поскольку все миноры (3) делятся на (4), то $D_k(\lambda)$ совпадает с (4). Следовательно, в обоих случаях имеем

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)\, d_2(\lambda)\dots d_k(\lambda) \quad (k=1, 2, \dots, n). \qquad (5)$$

Таковы многочлены $D_k(\lambda)$ канонической диагональной матрицы с диагональными элементами $d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$.

Рассмотрим теперь произвольную λ-матрицу F. Обозначим через $D_k(\lambda)$ наибольший общий делитель миноров степени k этой матрицы. Согласно теореме 1 матрицу F элементарными преобразованиями можно привести к канонической диагональной форме

$$D = \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме 2 многочлены $D_k(\lambda)$, вычисленные для матрицы D, совпадают с соответственными многочленами $D_k(\lambda)$, вычисленными для F. Таким образом, *многочлены $D_k(\lambda)$ матрицы F и диагональные элементы канонической диагональной матрицы D, к которой можно привести F, связаны соотношениями (5)*.

Пусть $D_1(\lambda), \dots, D_r(\lambda)$ отличны от нуля, а остальные многочлены $D_{r+1}(\lambda), \dots, D_n(\lambda)$, если они есть, равны нулю. Тогда из (5) имеем

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= d_1(\lambda), & d_1(\lambda) &= D_1(\lambda), \\ D_2(\lambda) &= d_1(\lambda)\, d_2(\lambda), & d_2(\lambda) &= D_2(\lambda) : D_1(\lambda), \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ D_r(\lambda) &= d_1(\lambda)\, d_2(\lambda)\dots d_r(\lambda), & d_r(\lambda) &= D_r(\lambda) : D_{r-1}(\lambda), \\ D_{r+1}(\lambda) &= d_1(\lambda)\, d_2(\lambda)\dots d_r(\lambda)\, d_{r+1}(\lambda), & d_{r+1}(\lambda) &= D_{r+1}(\lambda) : D_r(\lambda), \end{aligned}$$

Поскольку $d_{r+1}(\lambda)=0$, то $d_{r+2}(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ также должны быть равны нулю, и мы имеем окончательно

$$\begin{gathered} d_1(\lambda) = D_1(\lambda),\ d_2(\lambda) = D_2(\lambda) : D_1(\lambda),\ \dots,\ d_r(\lambda) = D_r(\lambda) : D_{r-1}(\lambda), \\ d_{r+1}(\lambda) = \dots = d_n(\lambda) = 0. \qquad (6) \end{gathered}$$

Тем самым мы получили следующую теорему:

Теорема 3. *Если наибольшие общие делители $D_k(\lambda)$ миноров порядка k λ-матрицы F при $k=1, 2, \dots, r$ отличны от нуля, а $D_{r+1}(\lambda)=0$, то диагональные элементы $d_k(\lambda)$ канонической диагональной матрицы, к которой F приводится элементарными преобразованиями, выражаются через $D_k(\lambda)$ по формулам (6) и определяются, таким образом, матрицей F однозначно.*

Многочлены $d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ называются *инвариантными многочленами матрицы F*.

Число r, фигурирующее в равенствах (6), имеет очень простой смысл: это — ранг матрицы F. Действительно, ранг матрицы F есть порядок наивысшего минора F, отличного от нуля. Если этот порядок равен r, то, следовательно, $D_r(\lambda) \neq 0$, а $D_{r+1}(\lambda)=0$. Обратно, условия $D_r(\lambda) \neq 0$, $D_{r+1}(\lambda)=0$ означают, что некоторый минор порядка r отличен от нуля, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю. Следовательно, ранг F равен r.

18.4. Условия эквивалентности. С помощью результатов предыдущего пункта легко найти условия, при которых две заданные λ-матрицы являются эквивалентными. Эти условия мы представим в двух видах.

Первое условие эквивалентности. *Для того чтобы многочленные матрицы порядка n были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы наибольшие общие делители их миноров k-го порядка совпадали при $k=1, 2, \dots, n$.*

Поскольку совпадение наибольших общих делителей миноров равносильно совпадению соответствующих инвариантных множителей, то первое условие эквивалентности можно сформулировать и в следующем виде: *для эквивалентности λ-матриц необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие инвариантные множители были равны.*

Доказательство очевидно. В самом деле, если две λ-матрицы F, G эквивалентны, то их наибольшие общие делители $D_k(\lambda)$ одинаковы (теорема 2). Обратно, если многочлены $D_k(\lambda)$ у F и G равны, то F и G элементарными преобразованиями приводятся к одной и той же канонической диагональной матрице (теорема 3). Но две матрицы, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой; следовательно, F эквивалентна G, что и требовалось.

Второе условие эквивалентности. *Для того чтобы многочленные матрицы F и G порядка n были эквивалентны,*

необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли соотношению

$$C = PFQ,$$

где P, Q — некоторые многочленные матрицы с постоянными определителями, или существуют всевозможные квадратные матрицы P, Q с постоянными определителями, удовлетворяющие соотношению $H = PFQ$. Тогда второе условие эквивалентности оказывается возможным истолковать как теорему о равносильности этих определений.

Прежде чем перейти к доказательству этого утверждения, мы сделаем несколько замечаний. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{— } i\text{-я строка},$$

где α — некоторое число, отличное от нуля. Умножая произвольную матрицу F на A слева, мы увидим, что все элементы матрицы F останутся без изменения, кроме элементов i-й строки, которые умножатся на α. Таким образом, *каждое элементарное преобразование типа* I, *состоящее над матрицей F, равносильно умножению F на подходящую матрицу A слева.* Аналогично, если мы умножим матрицу F слева на матрицу

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & f(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{— } i\text{-я строка} \\ \\ j\text{-я строка,} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

где все диагональные элементы равны единице, элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен $f(\lambda)$, а остальные элементы

[1] Эквивалентность λ-матриц была определена нами с помощью элементарных преобразований. Наряду с этим понятием эквивалентности было определено и другими способами. Именно две λ-матрицы G, F называют эквивалентными, если существуют всевозможные квадратные матрицы P, Q с постоянными определителями, удовлетворяющие соотношению $G = PFQ$. Тогда второе условие эквивалентности оказывается возможным истолковать как теорему о равносильности этих определений.

равны нулю, то в результате к элементам i-й строки F прибавятся элементы из j-й строки, умноженные на $f(\lambda)$. Следовательно, *каждое элементарное преобразование типы* II *произведения умножает матрицу F слева на соответственную матрицу R.*

Наконец, нам не составит труда убедиться, что *элементарные преобразования матрицы F типов* III, IV *равносильны умножениям F на соответственные матрицы A, B справа.*

Перейдем теперь к доказательству второго условия эквивалентности.

Необходимость. Пусть матрица G эквивалентна матрице F. Это значит, что G может быть получена из F целой последовательностью элементарных преобразований. Каждое элементарное преобразование мы можем заменить умножением на матрицу вида A или B соответственно слева или справа. В результате получим равенство

$$G = P_1 P_2 \dots P_p F Q_1 Q_2 \dots Q_q, \tag{7}$$

где каждая из матриц P_i, Q_j имеет вид A или B (i, $j = 1, 2, \dots$). Положим

$$P = P_1 P_2 \dots P_p, \quad Q = Q_1 Q_2 \dots Q_q.$$

Поскольку определители матриц B равны единице, а определители матриц A являются постоянными, отличными от нуля числами, то определители матриц P и Q будут также постоянными, отличными от нуля числами. Соотношение (7) дает

$$G = PFQ,$$

и необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, обратно, что

$$G = PFQ, \tag{8}$$

где P и Q — многочленные матрицы с постоянными, отличными от нуля определителями. Наибольший общий делитель $D_n(\lambda)$ всех миноров порядка n матрицы P равен определителю P, деленному на его старший коэффициент. Так как этот определитель есть постоянное число, то $D_n(\lambda) = 1$. Из соотношения (8) при $k = n$ получаем

$$D_n(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \dots d_n(\lambda) = 1,$$

откуда

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \dots = d_n(\lambda) = 1,$$

где $d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ — инвариантные множители матрицы F. Но инвариантные множители единичной матрицы E также все равны единице, ибо E имеет канонический диагональный вид. Согласно первому признаку эквивалентности отсюда следует, что матрица F

эквивалентна E и, значит, может быть получена из E цепочкой элементарных преобразований. Каждое элементарное преобразование можно заменить умножением на матрицу типа A или B. В результате P будет представлена следующим образом:

$$P = P_1 \dots P_s E Q_1 \dots Q_t = P_1 \dots P_s Q_1 \dots Q_t,$$

где P_i, Q_j — матрицы типов A, B.

Применяя те же самые рассуждения к матрице Q, получим аналогичное разложение

$$Q = M_1 \dots M_u N_1 \dots N_v.$$

Подставляя эти разложения в (8), придем к равенству

$$G = P_1 \dots P_s Q_1 \dots Q_t F M_1 \dots M_u N_1 \dots N_v, \qquad (9)$$

из которого видно, что G получается последовательным умножением матрицы F на матрицы P_i, Q_j, M_k, N_l типа A или B. Но каждое такое умножение равносильно некоторому элементарному преобразованию. Следовательно, G эквивалентна F, и доказательство закончено.

Примеры и задачи

1. Привести элементарными преобразованиями матрицы

$$\begin{bmatrix} \lambda & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

к канонической диагональной форме.

2. Пользуясь вычислением общих делителей миноров, найти каноническую диагональную форму λ-матрицы

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha+\lambda & 5 & 1 & 0 \\ -3 & \alpha+\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -5 & \alpha+\lambda \end{bmatrix}.$$

3. Показать, что нулями прямоугольную λ-матрицу с m строками и n столбцами можно привести элементарными преобразованиями к виду

$$\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_m(\lambda) & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & d_n(\lambda) \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

Как должно быть сформулировано второе условие эквивалентности для таких матриц?

4. Показать, что элементарными преобразованиями типов I, II любую квадратную λ-матрицу можно привести к виду

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \dots & f_{1n}(\lambda) \\ & f_{22}(\lambda) & \dots & f_{2n}(\lambda) \\ & & \dots & \dots \\ & & & f_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где диагональные элементы либо равны нулю, либо имеют старший коэффициент 1.

5. Вместо λ-матриц рассмотрим целочисленные матрицы, т. е. матрицы, составленные из целых чисел. Элементарные преобразования целочисленных матриц определяются следующим образом: I — умножение строки на ± 1; II — прибавление к элементам одной строки элементов любой другой, умноженных на некоторое целое число; II′, III — аналогичные преобразования столбцов. Диагональная целочисленная матрица называется канонической, если ее диагональные элементы неотрицательны и каждый предыдущий делит последующий. Доказать теоремы: а) каждая целочисленная матрица может быть конечным числом элементарных преобразований приведена к канонической диагональной форме; б) эта каноническая диагональная форма единственна; в) для эквивалентности двух целочисленных матриц F, G необходимо и достаточно, чтобы между ними существовало соотношение $G = PFQ$, где P, Q — некоторые целочисленные матрицы с определителями ± 1.

§ 14. Элементарные делители

Инвариантные множители характеризуют многочленную матрицу F с точностью до эквивалентности. Однако если F распадается на диагональные клетки, то зависимость инвариантных множителей матрицы F от инвариантных множителей клеток оказывается сложной. Поэтому в некоторых вопросах удобнее рассматривать не инвариантные множители, а так называемые элементарные делители матрицы F, поведение которых в случае распадения F более просто.

14.1. Связь с инвариантными множителями. Рассмотрим произвольную λ-матрицу F, элементами которой являются многочлены от λ с коэффициентами из основного поля K. На поле K мы не будем здесь налагать никаких ограничений. Обозначим через $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, $\dots$, $d_n(\lambda)$ инвариантные множители матрицы F. Часть этих множителей может равняться нулю, поэтому мы предположим для определенности, что $d_1(\lambda)$, $\dots$, $d_r(\lambda)$ нулю не равны, а $d_{r+1}(\lambda) = \dots = d_n(\lambda) = 0$. Число r, как мы видели выше, есть ранг матрицы F. Разложим каждый из многочленов $d_1(\lambda)$, $\dots$, $d_r(\lambda)$ на множители, неприводимые в поле K. Пусть, например,

$$d_1(\lambda) = [e_1(\lambda)]^{\alpha_1} [e_2(\lambda)]^{\alpha_2} \dots [e_s(\lambda)]^{\alpha_s},$$

где $e_1(\lambda)$, $\dots$, $e_s(\lambda)$ — различные неприводимые многочлены со старшим коэффициентом 1. Выражения $[e_1(\lambda)]^{\alpha_1}$, $\dots$, $[e_s(\lambda)]^{\alpha_s}$ называ-

ются *элементарными делителями* инвариантного множителя $d_i(\lambda)$. Элементарные делители всех неостоянных инвариантных множителей матрицы F называются ее *элементарными делителями*. Например, если инвариантные множители матрицы F равны соответственно $1, \lambda, \lambda^2(\lambda+1), \lambda^2(\lambda-1)^2$, то элементарные делители будут $\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda+1, (\lambda+1)^2$. Элементарный делитель вида $[\varepsilon(\lambda)]^k$, где $\varepsilon(\lambda)$ — неприводимый многочлен, называют *принадлежащим* многочлену $\varepsilon(\lambda)$. В рассмотренном примере элементарные делители λ, λ^2, λ^2 принадлежат λ, а $\lambda+1$ и $(\lambda+1)^2$ принадлежат $\lambda+1$.

Возьмем теперь некоторую λ-матрицу F и выпишем все ее элементарные делители. Если при этом какой-нибудь элементарный делитель F входит в несколько инвариантных множителей F, то мы его выпишем столько раз, во сколько инвариантных множителей он входит. Покажем, что полученная таким образом система элементарных делителей вполне определяет все неостоянные инвариантные множители матрицы F, а если к этому добавить еще порядок и ранг F, то тем самым будут определены и вообще все инвариантные множители матрицы F.

Теорема 1. *Порядок, ранг и система элементарных делителей λ-матрицы F вполне определяют ее инвариантные множители и, следовательно, определяют F с точностью до эквивалентности.*

Доказательство легко извлекается из следующего примера. Пусть порядок F равен 6, ранг 4, элементарные делители $\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda+1, (\lambda+1)^2, \lambda-1, \lambda-1$. Поскольку порядок F есть 6, то F имеет шесть инвариантных множителей $d_1(\lambda), \ldots, d_6(\lambda)$. Из них $d_5(\lambda) = d_6(\lambda) = 0$, так как ранг F должен быть 4. Если разложить $d_1(\lambda), \ldots, d_4(\lambda)$ на множители, то должна получиться указанная сеть элементарных делителей. Поскольку, однако, $d_4(\lambda)$ делится на $d_3(\lambda)$, $d_2(\lambda)$ и $d_1(\lambda)$, то в $d_4(\lambda)$ входят элементарные делители, принадлежащие ко всем неприводимым многочленам, и притом в высших степенях. Поэтому $d_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. Среди оставшихся элементарных делителей λ, λ^2, $\lambda+1$, $\lambda-1$ высшие должны войти в $d_3(\lambda)$, следовательно, $d_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)$. В свою очередь высшие из оставшихся должны составить $d_2(\lambda)$, т. е. $d_2(\lambda) = \lambda$. Поскольку все элементарные делители уже распределены, то $d_1(\lambda) = 1$. Ясно, что этот способ применим в любом случае, что и доказывает теорему.

Элементарные делители зависят от основного поля K. Например, пусть инвариантные множители некоторой λ-матрицы F равны λ^2-1, $(\lambda^2+1)^2$. Если основное поле есть поле вещественных чисел, то многочлен λ^2-1 неприводим и элементарными делителями матрицы F являются λ^2-1 и $(\lambda^2+1)^2$. Однако если основное поле — поле всех комплексных чисел, то $\lambda^2+1 = (\lambda-i)(\lambda+i)$

и элементарными делителями F будут $\lambda+1$, $(\lambda+i)^2$, $\lambda-1$, $(\lambda-i)^2$.

14.2. **Элементарные делители диагональной матрицы.** Чтобы получить элементарные делители λ-матрицы, имеющей каноническую диагональную форму, достаточно взять, согласно определению, все элементарные делители ее диагональных элементов. Покажем, что это же правило имеет место и для произвольной диагональной λ-матрицы.

Лемма. *Система элементарных делителей произвольной диагональной λ-матрицы F есть объединение элементарных делителей ее диагональных элементов.*

Пусть F имеет своими диагональными элементами многочлены $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что все эти многочлены отличны от нуля и что их старшие коэффициенты равны 1. Обозначим через $D_k(\lambda)$ наибольший общий делитель миноров k-го порядка матрицы F. Поскольку старшие коэффициенты многочленов $f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ равны единице, то $D_n(\lambda)$ будет определителем матрицы F, т. е.

$$D_n(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda) \ldots f_n(\lambda).$$

Но

$$D_n(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \ldots d_n(\lambda),$$

где $d_1(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)$ — инвариантные множители матрицы F. Поэтому, обозначая через $\varepsilon_1(\lambda), \varepsilon_2(\lambda), \ldots, \varepsilon_s(\lambda)$ различные неприводимые множители многочленов $f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$, мы видим, что каждый элементарный делитель матрицы F будет степенью одного из многочленов $\varepsilon_1(\lambda), \ldots, \varepsilon_s(\lambda)$. Выделим теперь из $f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ наивысшие степени $\varepsilon_1(\lambda)$, на которые эти многочлены делятся. Пусть

$$f_i(\lambda) = [\varepsilon_1(\lambda)]^{\alpha_i} g_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $g_i(\lambda)$ на $\varepsilon_1(\lambda)$ не делится. Мы хотим показать, что $[\varepsilon_1(\lambda)]^{\alpha_1}, \ldots, [\varepsilon_1(\lambda)]^{\alpha_n}$ и есть система элементарных делителей матрицы F, принадлежащих неприводимому многочлену $\varepsilon_1(\lambda)$. Поскольку элементарные делители матрицы F не зависят от порядка ее строк и столбцов, то мы расположим эти строки и столбцы в таком порядке, чтобы

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n. \tag{1}$$

Найдем наивысшую степень $\varepsilon_1(\lambda)$, входящую в $D_k(\lambda)$. Согласно определению $D_k(\lambda)$ есть наибольший общий делитель миноров k-го порядка матрицы F, из которых, как мы видели выше (п. 13.3), отличными от нуля будут только миноры, равные

$$f_{\alpha_1} \ldots f_{\alpha_k} = [\varepsilon_1(\lambda)]^{\alpha_{\alpha_1}+\ldots+\alpha_{\alpha_k}} g_{\alpha_1} \ldots g_{\alpha_k}.$$

Ввиду неравенств (1) наименьшую степень $e_1(\lambda)$ содержит минор

$$f_1(\lambda)\dots f_s(\lambda)=[e_1(\lambda)]^{s_1+\dots+s_s}g_1(\lambda)\dots g_s(\lambda).$$

Следовательно, $D_s(\lambda)$ содержит $e_1(\lambda)$ в степени $s_1+\dots+s_s$. Заменяя здесь k на $k-1$, мы получим, что $D_{s-1}(\lambda)$ содержит $e_1(\lambda)$ в степени $s_1+\dots+s_{s-1}$. Но инвариантный множитель $d_s(\lambda)$ равен отношению $D_s(\lambda)$ к $D_{s-1}(\lambda)$. Поэтому $d_s(\lambda)$ содержит $e_1(\lambda)$ точно в степени s_s. Итак, элементарные делители матрицы F, принадлежащие неприводимому многочлену $e_1(\lambda)$, совпадают с принадлежащими $e_1(\lambda)$ элементарными делителями диагональных элементов матрицы F. Так как наше рассуждение годится и для остальных многочленов $e_2(\lambda),\dots,e_r(\lambda)$, то теорема доказана в общем виде.

Теорема 2. *Система элементарных делителей рассматриваемой матрицы равна объединению систем элементарных делителей ее клеток.*

Пусть λ-матрица F имеет клеточно-диагональный вид

$$F=\begin{bmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_m \end{bmatrix}.$$

Элементарные преобразования отдельных клеток $F_1,\dots,F_m$ можно рассматривать и как преобразования всей матрицы F. Эти преобразования не нарушают клеточно-диагонального вида матрицы F, и преобразования, совершаемые над одной клеткой, не зависят вида всех остальных. Поэтому элементарными преобразованиями матрицу F можно привести все клетки к диагональной форме. Применяя лемму, мы видим, что элементарные делители матриц $F, F_1,\dots,F_m$ будут являться объединениями элементарных делителей тех диагональных членов, которые входят в эти матрицы. В частности, элементарные делители матрицы F получатся объединением элементарных делителей всех диагональных элементов, т. е. объединением элементарных делителей всех клеток $F_1,\dots,F_m$, что и требовалось.

Примеры и задачи

1. Найти элементарные делители следующих матриц:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & \\ 1 & \lambda+2 & & \\ \lambda+2 & & & \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & \\ 0 & (\lambda-1)^2 & & \\ \lambda(\lambda-1) & & & \end{bmatrix}.$$

2. Найти инвариантные множители матриц

$$\begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda^2 & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

3. Найти элементарные делители матрицы

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \\ 3 & \lambda^2+1 & 3 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix}$$

в поле рациональных чисел, в поле действительных чисел, в поле комплексных чисел.

§ 15. Нормальные формы матрицы линейного преобразования

15.1. Деление λ-матриц. Матричным многочленом от переменной λ называется выражение вида

$$F(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+A_2\lambda^{m-2}+\dots+A_m \qquad (1)$$

где $A_0,\dots,A_m$ — квадратные матрицы одного и того же порядка с элементами из основного поля K. Два многочлена называются равными, если равны матрицы, стоящие в этих многочленах при одинаковых степенях переменной λ. Складываются и перемножаются матричные λ-многочлены по обычным правилам. Ясно, что каждый λ-многочлен можно записать в виде одной матрицы, элементами которой являются обыкновенные многочлены от λ, и обратно. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3=\begin{bmatrix} \lambda^3+5\lambda^2+1 & 6\lambda-2 \\ 7\lambda & \lambda^3-2\lambda^2+3 \end{bmatrix}.$$

Поэтому матричные λ-многочлены являются лишь особым видом записи λ-матриц.

Если в λ-многочлене (1) матрица A_0 отлична от нулевой, то m называется степенью матричного многочлена. Многочлен $F(\lambda)$ называется *регулярным*, если матрица A_0 обратима.

Очевидно, *степень суммы матричных λ-многочленов не выше максимума степеней слагаемых.* На примерах легко убедиться, что степень произведения двух матричных λ-многочленов может оказаться меньше суммы степеней сомножителей. Однако *если хотя бы один из двух перемножаемых многочленов регулярен, то степень произведения точно равна сумме степеней сомножителей,*

В самом деле, если

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\ldots+A_m,$$
$$B(\lambda)=B_0\lambda^p+B_1\lambda^{p-1}+\ldots+B_p, \tag{2}$$

и матрица B_0 обратима, то старший член произведения $A(\lambda)\cdot B(\lambda)$ равен $A_0B_0\lambda^{m+p}$ и на $A_0B_0\neq 0$ следовало бы $0=A_0B_0B_0^{-1}=A_0$ вопреки предположению.

Теорема 1. *Для произвольного матричного λ-многочлена $A(\lambda)$ и регулярного λ-многочлена $B(\lambda)$ существуют λ-многочлены $P(\lambda)$, $S(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$, удовлетворяющие требованиям:*

а) $A(\lambda)=B(\lambda)P(\lambda)+S(\lambda)$, $A(\lambda)=Q(\lambda)B(\lambda)+R(\lambda)$;

б) либо $S(\lambda)=0$, либо степень $S(\lambda)$ меньше степени $B(\lambda)$; либо $R(\lambda)=0$, либо степень $R(\lambda)$ меньше степени $B(\lambda)$.

Требованиями а), б) указанные многочлены определяются однозначно и называются: $P(\lambda)$, $S(\lambda)$ — левым частным и остатком, $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$ — правым частным и остатком от деления $A(\lambda)$ на $B(\lambda)$.

Для доказательства укажем процесс нахождения частных и остатков, который совпадает в рассматриваемом случае с алгоритмом деления обычных многочленов. Пусть, например, $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ имеют вид (2). Если $m<p$, то можно принять $P(\lambda)=0$, $S(\lambda)=A(\lambda)$. Поэтому пусть $m\geqslant p$. Составляем последовательные разности

$$S_1(\lambda)=A(\lambda)-A_0B_0^{-1}\lambda^{m-p}B(\lambda)=C_1^{(1)}\lambda^{m_1}+\ldots,$$
$$S_2(\lambda)=S_1(\lambda)-C_0^{(1)}B_0^{-1}\lambda^{m_1-p}B(\lambda)=C_1^{(2)}\lambda^{m_2}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{t+1}(\lambda)=S_t(\lambda)-C_0^{(t)}B_0^{-1}\lambda^{m_t-p}B(\lambda)=C^{(t+1)}\lambda^{m_{t+1}}+\ldots,$$

где точками обозначены члены низших степеней, а $m_{t+1}<p$. Складывая эти равенства и полагая

$$S(\lambda)=S_{t+1}(\lambda),$$
$$P(\lambda)=A_0B_0^{-1}\lambda^{m-p}+C_0^{(1)}B_0^{-1}\lambda^{m_1-p}+\ldots+C_0^{(t)}B_0^{-1}\lambda^{m_t-p},$$

получим первое из соотношений а). Аналогично находятся $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$.

Остается доказать единственность. Но если

$$A(\lambda)=B(\lambda)P(\lambda)+S(\lambda)=B(\lambda)P_*(\lambda)+S_*(\lambda),$$

то

$$B(\lambda)[P(\lambda)-P_*(\lambda)]=S_*(\lambda)-S(\lambda).$$

Так как многочлен $B(\lambda)$ регулярен, то в случае неравенства разности $P(\lambda)-P_*(\lambda)$ степень левой части была бы не меньше степени $B(\lambda)$, в то время как степень правой заведомо меньше степени $B(\lambda)$. Поэтому $P(\lambda)=P_*(\lambda)$ и $S(\lambda)=S_*(\lambda)$.

15.2. Скалярная эквивалентность. Согласно п. 13.4 две λ-матрицы $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ эквивалентны тогда и только тогда, если существуют λ-матрицы $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ с не зависящими от λ неравными нулю определителями, удовлетворяющие соотношению

$$A(\lambda)=U(\lambda)B(\lambda)V(\lambda). \tag{3}$$

Условимся говорить, что матрица $A(\lambda)$ скалярно эквивалентна матрице $B(\lambda)$, если существуют несобственные матрицы U, V с не зависящими от λ элементами, удовлетворяющие соотношению (3). Матрицы с не зависящими от λ элементами будем называть скалярными.

Теорема 2. *Если λ-многочлены первой степени $A\lambda+B$, $C\lambda+D$ регулярны и эквивалентны, то они и скалярно эквивалентны.*

По условию

$$A\lambda+B=U(\lambda)(C\lambda+D)V(\lambda), \tag{4}$$

где $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ — матрицы с отличными от нуля постоянными определителями. Обозначим через P, S левые частное и остаток от деления $U(\lambda)$ на $A\lambda+B$, а через Q, R — правые частное и остаток от деления $V(\lambda)$ на $A\lambda+B$. Следовательно,

$$U=(A\lambda+B)P+S,\quad V=Q(A\lambda+B)+R. \tag{5}$$

Матрицы S и R скалярны, так как их степень меньше единицы. Покажем, что

$$A\lambda+B=S(C\lambda+D)R. \tag{6}$$

Действительно, умножая обе стороны равенства (4) на U^{-1} и подставляя вместо V его выражение из (5), получим, перенеся члены,

$$[U^{-1}-(C\lambda+D)Q](A\lambda+B)=(C\lambda+D)R.$$

Сравнивая степени левой и правой частей, видим, что выражение внутри квадратных скобок должно равняться некоторой скалярной матрице T, и мы имеем

$$T=U^{-1}-(C\lambda+D)Q,\quad T(A\lambda+B)=(C\lambda+D)R. \tag{7}$$

Отсюда

$$E=U(C\lambda+D)Q+UT=(A\lambda+B)V^{-1}Q-UT=$$
$$=(A\lambda+B)V^{-1}Q-[(A\lambda+B)P+S]T,$$

т. е.

$$E=(A\lambda+B)[V^{-1}Q+PT]-ST.$$

Но правая часть может иметь нулевую степень только в случае обращения в нуль квадратной скобки, откуда

$$E=ST,\quad T=S^{-1},$$

Сравнивая с (7), получаем (6), где S, а значит, и R — обратимые скалярные матрицы.

15.3. **Критерий подобия матриц.** Согласно п. 3.1 квадратные матрицы A, B над полем K называются *подобными*, если существует обратимая матрица T с элементами из K такая, что

$$A = T^{-1}BT. \tag{8}$$

Важность нахождения условий, при которых данные матрицы были бы подобны, была замечена в гл. III. С основным уже полученным результатов легко указать необходимые и достаточные условия подобия матриц и тем самым решить одну из основных задач теории матриц.

Теорема 3. *Для того чтобы матрицы A, B над произвольным полем K были подобны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические матрицы $\lambda E - A$ и $\lambda E - B$ были эквивалентны.*

Необходимость очевидна, так как из (8) следует, что

$$\lambda E - A = T^{-1}(\lambda E - B)T,$$

т. е. что $\lambda E - B$ и $\lambda E - A$ эквивалентны и даже скалярно эквивалентны. Пусть, наоборот, матрицы $\lambda E - B$ и $\lambda E - A$ эквивалентны. Так как они представляют собой матричные λ-многочлены, регулярные и первой степени, то в силу теоремы 2 они будут скалярно эквивалентными, т. е. найдутся такие неособенные скалярные матрицы S, R, что

$$\lambda E - A = S(\lambda E - B)R.$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при λ и свободные члены, получим

$$E = SR, \quad A = SBR,$$

откуда

$$A = R^{-1}BR, \tag{9}$$

что и требовалось.

Из доказанных теорем можно извлечь следующий алгоритм для распознавания подобия матриц A, B: составляем характеристические матрицы $\lambda E - A$, $\lambda E - B$ и процессом, описанным в п. 13.2, приводим их элементарными преобразованиями к канонической диагональной форме. Если эти формы совпадают, то матрицы A, B подобны; если различны, то A и B не подобны.

Иногда, кроме установления самого факта подобия, требуется найти и преобразующую матрицу T, для которой $B = T^{-1}AT$. В этом случае при небольшом порядке n рассматриваемых матриц полагают $T = \|t_{ij}\|$, переписывают матричное равенство $TB = AT$ в виде n^2 равенств между элементами TB и AT и рассматривают эти равенства как линейные однородные уравнения относительно n^2 неизвестных величин t_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$). Решая эту систему, находят T.

При больших n изложенный способ слишком громоздок, и предпочтительнее путь, указанный в самом доказательстве теоремы 3. Прежде всего, ищем элементарные преобразования, переводящие матрицы $\lambda E - A$, $\lambda E - B$ в каноническую диагональную форму, а следовательно, и элементарные преобразования, переводящие $\lambda E - A$ и $\lambda E - B$, можно согласно п. 13.4 найти λ-матрицы $U(\lambda)$, $V(\lambda)$, для которых

$$\lambda E - A = U(\lambda)(\lambda E - B)V(\lambda).$$

Вычисляя правый остаток R от деления $V(\lambda)$ на $\lambda E - A$, будем иметь согласно (9) $A = R^{-1}BR$, т. е. R будет одной из искомых преобразующих матриц.

Заметим, что для нахождения R нет необходимости фактически делить $V(\lambda)$ на $\lambda E - A$. В самом деле, записывая $V(\lambda)$ в виде

$$V(\lambda) = V_0\lambda^s + V_1\lambda^{s-1} + \ldots + V_s$$

и применяя схему деления из п. 15.1, получим

$$R = V_0A^s + V_1A^{s-1} + \ldots + V_s. \tag{10}$$

Аналогично, записывая многочлен $U(\lambda)$ в «левом» виде

$$U(\lambda) = \lambda^r U_0 + \lambda^{r-1}U_1 + \ldots + U_r,$$

и вычисляя левое деление на $\lambda E - A$, получим для левого остатка S выражение

$$S = A^rU_0 + A^{r-1}U_1 + \ldots + U_r. \tag{11}$$

Эти формулы для остатков от деления матричного λ-многочлена на двучлен $\lambda E - A$ совершенно аналогичны формуле Безу $r = f(a)$ для остатка от деления обычного многочлена $f(\lambda)$ на двучлен $\lambda - a$. Поэтому (10), (11) иногда называют матричными формулами Безу для остатков.

15.4. **Нормальная форма Жордана.** В п. 12.2 были введены матрицы особого вида, названные *жордановыми клетками*, и изучены некоторые свойства линейных преобразований, матрицы которых в подходящей координатной системе имеют жорданову форму. Однако основной вопрос, при каких условиях матрицу преобразования можно привести к жордановой форме, был оставлен открытым. Но теперь имеются все необходимые средства, чтобы ответить на этот вопрос.

Теорема 4. *Каждая квадратная матрица над полем комплексных чисел, а также и над любым другим алгебраически замкнутым полем подобна матрице, имеющей жорданову форму. Две матрицы Жордана подобны тогда и только тогда, когда они*

состоящие из single и тех же жордановых клеток и отличающиеся друг от друга самое большее лишь расположением клеток на главной диагонали.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы, имеющие и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Характеристическая матрица клетки Жордана имеет только один элементарный делитель $(\lambda-\rho)^n$, где n — порядок клетки, а ρ — ее собственное значение.

Характеристическая матрица заданной клетки Жордана (см. п. 12.2) имеет вид

$$\lambda E-A=\begin{vmatrix} \lambda-\rho & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda-\rho & -1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-\rho & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda-\rho \end{vmatrix}.$$

Вычислим наибольший общий делитель $D_k(\lambda)$ миноров порядка k матрицы $\lambda E-A$. Прежде всего, имеем

$$D_n(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\rho)^n.$$

Далее, $D_{n-1}(\lambda)$ есть наибольший общий делитель всех миноров степени $n-1$. Но среди последних находится минор

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \lambda-\rho & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda-\rho & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda-\rho & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1},$$

получаемый вычеркиванием первого столбца и последней строки матрицы $\lambda E-A$. Поскольку этот минор равен ± 1, то $D_{n-1}(\lambda)=1$. Обозначим через $d_1(\lambda),\dots,d_n(\lambda)$ инвариантные множители матрицы $\lambda E-A$. Из соотношений

$$D_{n-1}(\lambda)=d_1(\lambda)\dots d_{n-1}(\lambda)=1,$$
$$D_n(\lambda)=d_1(\lambda)\dots d_{n-1}(\lambda)d_n(\lambda)=(\lambda-\rho)^n$$

получаем, что $d_1(\lambda)=\dots=d_{n-1}(\lambda)=1$, $d_n(\lambda)=(\lambda-\rho)^n$. Следовательно, $\lambda E-A$ имеет только один элементарный делитель и этот делитель равен $(\lambda-\rho)^n$.

Лемма 2. Система элементарных делителей характеристической матрицы жордановой матрицы состоит из элементарных делителей ее клеток Жордана и определяет вид жордановой матрицы

однозначно с точностью до порядка следования клеток по главной диагонали.

По определению жордановой матрицей называется клеточно-диагональная матрица с клетками Жордана по главной диагонали. Поэтому характеристическая матрица для матрицы Жордана распадается на характеристические матрицы для отдельных клеток Жордана. В силу п. 14.2 отсюда следует, что система элементарных делителей характеристической матрицы для матрицы Жордана состоит из элементарных делителей характеристических матриц отдельных клеток Жордана, по одному для каждой клетки. Тем самым система элементарных делителей характеристической матрицы для матрицы Жордана определяет вид этой матрицы однозначно с точностью до порядка расположения клеток по главной диагонали.

Характеристические матрицы подобных матриц эквивалентны и потому имеют одинаковые системы элементарных делителей. Отсюда следует, что подобные матрицы Жордана должны состоять из одинаковых клеток Жордана, и для завершения доказательства теоремы 4 остается только для каждой заданной матрицы A уметь построить подобную ей матрицу Жордана. Пусть $(\lambda-\rho_1)^{n_1},\dots,(\lambda-\rho_s)^{n_s}$ — полный набор элементарных делителей характеристической матрицы $\lambda E-A$. Обозначим через B клеточно-диагональную матрицу, диагональными клетками которой являются клетки Жордана с указанными элементарными делителями. Следовательно, матрица $\lambda E-B$ имеет те же элементарные делители, что и $\lambda E-A$. Но тогда согласно п. 14.1 матрицы $\lambda E-A$ и $\lambda E-B$ эквивалентны, а согласно п. 15.3 отсюда вытекает, что A подобна жордановой матрице B. Теорема доказана.

Изложенные рассуждения дают ответ и на вопрос о том, как по заданной матрице A найти подобную ей матрицу Жордана. Для этого достаточно составить характеристическую матрицу $\lambda E-A$, привести ее элементарными преобразованиями к канонической диагональной форме, разложить диагональные многочлены на множители, найти элементарные делители и по ним составить матрицу Жордана. Пусть, например,

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3\\ -7 & -2 & 9\\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Составляем характеристическую матрицу

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 3\\ 7 & \lambda+2 & -9\\ 2 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

и найдем ее инвариантные множители. Эти множители, как легко видеть, будут $1, 1, (\lambda-1)(\lambda-2)^2$. Следовательно, элементарные делители равны $\lambda-1$, $(\lambda-2)^2$ и жорданова матрица имеет вид

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

В заключение сделаем еще одно замечание. Если элементарные делители матрицы $\lambda E-A$ окажутся первой степени, то первого порядка будут и клетки Жордана в соответствующей жордановой матрице B, т. е. матрица B будет диагональной. Обратно, если соответствующая жорданова матрица диагональна, то элементарные делители будут первой степени. Таким образом, *для того чтобы задания матрица была подобна диагональной, необходимо и достаточно, чтобы все элементарные делители ее характеристической матрицы были первой степени.*

18.3. Естественная нормальная форма. В поле комплексных чисел всякая матрица подобна некоторой жордановой матрице. Если же в качестве основного поля K взять произвольное поле, то приведение к жордановой форме может оказаться невозможным. Для такого приведения во всяком случае необходимо, а также, как легко видеть, и достаточно, чтобы характеристический многочлен матрицы разлагался в K на линейные множители. Поэтому возникает задача — указать такую нормальную форму, к которой можно было бы привести матрицу в том поле, из которого берутся элементы этой матрицы. Таких нормальных форм можно указать бесконечное множество. Из них наиболее просто строится нормальная форма, называемая *естественной*.

Пусть

$$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n$$

— произвольный многочлен степени n, старший коэффициент которого равен единице. Коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ мы будем предполагать лежащими в некотором поле K. Матрица

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

называется *сопровождающей матрицей многочлена* $f(\lambda)$.

Лемма 5. *Если $f(\lambda)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1 и A — его сопровождающая матрица, то инвариантными множителями характеристической матрицы $\lambda E-A$ равны $1, 1, \ldots, 1, f(\lambda)$.*

В самом деле, если $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n$, то

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \ldots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & -1\\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Вычеркивая первый столбец и последнюю строку, мы получим минор, равный $(-1)^{n-1}$. Следовательно, наибольший общий делитель $D_{n-1}(\lambda)$ миноров порядка $n-1$ равен единице. Что касается $D_n(\lambda)$, то этот многочлен равен определителю матрицы $\lambda E-A$. Разлагая этот определитель по элементам последней строки, мы непосредственно найдем, что

$$D_n(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n.$$

Из $D_{n-1}(\lambda)=1$ следует, что $d_1(\lambda)=\ldots=d_{n-1}(\lambda)=1$, а из $D_n(\lambda)=f(\lambda)$ выекает, что $d_n(\lambda)=f(\lambda)$, что и требовалось.

Говорят, что матрица A имеет *естественную нормальную форму*, если A распадается на клетки $A_1, A_2, \ldots, A_s$, являющиеся сопровождающими матрицами многочленов $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$, каждый из которых делится на предыдущий. Покажем, что инвариантные множители матрицы A равны $1, \ldots, 1, f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$, где число единиц равно сумме степеней многочленов $f_1(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$, уменьшенной на s. Действительно, характеристическая матрица имеет вид

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda E_1-A_1 & & & \\ & \lambda E_2-A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_s-A_s\end{bmatrix}.$$

Согласно лемме каждая клетка λE_i-A_i элементарными преобразованиями можно привести к диагональному виду, в котором диагональными элементами будут $1, \ldots, 1, f_i(\lambda)$. Кроме этих в $\lambda E-A$ порядка строк и столбцов, мы приведем ее к диагональному виду с диагональными элементами $1, \ldots, 1, f_1(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$. Так как здесь каждый элемент делится на предыдущий, то эта матрица будет канонической диагональной формой, а элементы $1, \ldots, 1, f_1(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$ будут инвариантными множителями матрицы $\lambda E-A$. Поскольку порядок матрицы A равнялся сумме степеней многочленов $f_1(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$, а общее число инвариантных множителей равно порядку матрицы, то число единиц среди инвариантных множителей совпадает с указанным.

Из нашего рассуждения вытекает, в частности, что естественная нормальная матрица однозначно определяется инвариантными множителями своей характеристической матрицы.

Теперь мы можем в несколько слов доказать следующую теорему:

Теорема 5. *Каждая матрица A с элементами из поля K приводится в этом поле к одной и только одной естественной нормальной форме.*

Пусть $1, \ldots, 1, f_1(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$ — инвариантные множители матрицы $\lambda E-A$. Поскольку сумма степеней всех инвариантных множителей должна быть равна степени матрицы A, число единиц здесь равно сумме степеней многочленов $f_1(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$, уменьшенной на s. Построим для каждого многочлена $f_i(\lambda)$ сопровождающую матрицу B_i и рассмотрим многочленную матрицу B с указанными клетками $B_1, \ldots, B_s$. Так как каждый из многочленов $f_i(\lambda)$ делится на предыдущий, то B будет естественной нормальной матрицей, инвариантные множители матрицы $\lambda E-B$ равны,

как показано выше, $1, \ldots, 1, f_1(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$ и совпадают, таким образом с инвариантными множителями матрицы $\lambda E - A$. В силу теоремы 3 отсюда следует, что A подобна B. Тем самым доказана возможность приведения матрицы A к естественной нормальной форме. Единственность следует из того, что естественная матрица B однозначно определяется инвариантными множителями, которые в свою очередь однозначно определяются матрицей A.

15.6. **Другие нормальные формы.** Преимуществом естественной нормальной формы является ее абсолютная однозначность: не только сами диагональные клетки, но и порядок их расположения по главной диагонали определяются однозначно. К недостаткам следует отнести то, что эта форма не дает приведения к клеткам наименьших возможных степеней, а также то, что форма Жордана не является ее частным случаем.

От первого из этих недостатков можно избавиться следующим образом. Условимся называть матрицу B квазиестественной, если B распадается на клетки $B_1, \ldots, B_s$, являющиеся сопровождающими матрицами многочленов вида $[\varphi_1(\lambda)]^{m_1}, \ldots, [\varphi_s(\lambda)]^{m_s}$, где $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_s(\lambda)$ — неприводимые в основном поле K многочлены со старшим коэффициентом 1. Поскольку B_i — сопровождающая матрица многочлена $[\varphi_i(\lambda)]^{m_i}$, инвариантные множители характеристической матрицы $\lambda E_i - B_i$ равны $1, \ldots, 1, [\varphi_i(\lambda)]^{m_i}$. Следовательно, $\lambda E_i - B_i$ имеет единственный элементарный делитель $[\varphi_i(\lambda)]^{m_i}$, а элементарными делителями матрицы $\lambda E - B$ будут $\varphi_1(\lambda)^{m_1}, \ldots, [\varphi_s(\lambda)]^{m_s}$. Так как ранг матрицы $\lambda E - B$ равен ее порядку и равен сумме степеней многочленов $[\varphi_i(\lambda)]^{m_i}$, то квазиестественная матрица однозначно, с точностью до расположения клеток по главной диагонали, определяется своими элементарными делителями.

Отсюда, как и в предыдущем пункте, непосредственно вытекает, что каждая матрица A с элементами из поля K приводится в этом поле к квазиестественной нормальной форме. Эта форма определяется матрицей A однозначно, с точностью до порядка следования клеток по главной диагонали.

Клетки квазиестественной формы нельзя в поле K разложить на клетки более низкой степени, так как если такое расщепление было бы возможно, то характеристическая матрица клетки имела бы не один, а по меньшей мере два элементарных делителя.

В заключение остановимся на нормальной форме, которую можно рассматривать как обобщение формы Жордана на произвольные подполя K поля комплексных чисел[*]. Пусть $\varkappa(\lambda)$ — какой-нибудь неприводимый многочлен с коэффициентами из K. Мы предполагаем, что многочлен $\varkappa(\lambda)$ — конусовой степени и что его старший коэффициент равен единице.

Лемма 1. Если характеристический определитель матрицы A с элементами из числового поля K неприводим в K и равен $\varkappa(\lambda)$, то клеточная матрица

$$B = \begin{bmatrix} A & E & 0 & \ldots & 0 \\ & A & E & \ldots & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & A & E \\ & & & & A \end{bmatrix},$$

где E — единичная матрица, имеет характеристическую матрицу с единственным элементарным делителем $[\varkappa(\lambda)]^m$, где m — число диагональных клеток матрицы B.

---

[*] Вообще — на произвольные совершенные поля. При этом вместо поля комплексных чисел следует брать алгебраическое замыкание соответствующего поля.

Пусть $\lambda E - A = P$, тогда

$$\lambda E - B = \begin{bmatrix} P - E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & P & -E & \ldots & 0 & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & P - E & 0 \\ & & & & & P \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Если мы к клеткам какого-нибудь столбца матрицы (12) прибавим клетки любого другого не столбца, умноженные на произвольную λ-матрицу X, то эти операции будут равносильны, очевидно, серии элементарных преобразований типа II или IV, произведенных над матрицей $\lambda E - B$, так что мы в результате получим матрицу, эквивалентную $\lambda E - B$. Воспользуемся этим замечанием и произведем последовательно следующие преобразования, начиная с матрицы $\lambda E - B$: прибавим к первому столбцу второй, умноженный на P, к первому столбцу новой матрицы прибавим третий, умноженный на P^2, и ко второму — третий, умноженный на P, и т. д. После этих преобразований получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & -E & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -E & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -E \\ p_m & p_{m-1} & p_{m-2} & \ldots & P \end{bmatrix}.$$

Прибавляя теперь к последней строке первую, вторую, ..., умноженные соответственно на $P^{m-1}, P^{m-2}, \ldots$, и меняя порядок столбцов, придем к матрице

$$\begin{bmatrix} -E & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & -E \\ & & & p_m \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Поскольку матрица (13) имеет клеточно-треугольный вид и начальные ее клетки с точностью до знака единичные, то элементарные делители матрицы (13) совпадают с элементарными делителями матрицы $P^m = (\lambda E - A)^m$, которой мы теперь и займемся.

По условию характеристический многочлен матрицы A равен $\varkappa(\lambda)$ и неприводим в поле K. Но отсюда следует, что все его корни в поле комплексных чисел различны, и, следовательно, существует такая комплексная матрица T, что TAT^{-1} имеет диагональный вид и

$$\lambda E - TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda - \alpha_1 & & & \\ & \lambda - \alpha_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda - \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Матрица P^m эквивалентна матрице $TP^mT^{-1} = (TPT^{-1})^m$, а последняя имеет вид

$$[T(\lambda E - A)T^{-1}]^m = (\lambda E - TAT^{-1})^m = \begin{bmatrix} (\lambda - \alpha_1)^m & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & (\lambda - \alpha_n)^m \end{bmatrix}.$$

Поэтому элементарные делители матрицы $f^{(m)}$ в поле комплексных чисел равны $(\lambda-a_1)^m, \ldots, (\lambda-a_s)^m$. Все они принадлежат различным неприводимым многочленам. Инвариантные множители матрицы $f^{(m)}$ будут $1, \ldots, 1, (\lambda-a_1)^m \ldots (\lambda-a_s)^m = [\varphi(\lambda)]^m$. Но многочлен $\varphi(\lambda)$ неприводим в поле K, следовательно, в этом поле матрица $\lambda E - f^{(m)}$ имеет только одну элементарную делитель, именно $[\varphi(\lambda)]^m$. Таким образом, матрица (13), в вместе с ней и матрица (12) имеют только один элементарный делитель $[\varphi(\lambda)]^m$. Лемма доказана.

Если A — произвольная матрица для $\varphi(\lambda)$, то условимся называть матрицу B *обобщенной клеткой Жордана*, отвечающей элементарному делителю $[\varphi(\lambda)]^m$. Условимся также говорить, что некоторая матрица имеет *обобщенную форму Жордана*, если она распадается на обобщенные клетки Жордана. Ясно, что обобщенная жорданова матрица вполне определяется своими элементарными делителями.

Теорема 8. *Каждая матрица A с элементами из поля K приводима в этом поле к обобщенной форме Жордана. Эта форма определяется матрицей A однозначно, с точностью до расположения клеток по главной диагонали.*

В самом деле, пусть элементарными делителями матрицы $\lambda E - A$ в поле K являются многочлены $[\varphi_1(\lambda)]^{m_1}, \ldots, [\varphi_s(\lambda)]^{m_s}$. Для каждого многочлена $[\varphi_i(\lambda)]^{m_i}$ строим соответственную обобщенную клетку Жордана B_i и рассматриваем клеточно-диагональную матрицу B с клетками B_i по главной диагонали.

В силу леммы 4 элементарные делители матрицы $\lambda E - B$ будут равны соответственным элементарным делителям матрицы $\lambda E - A$. Так как $\lambda E - B$ и $\lambda E - A$ имеют, кроме того, один и тот же ранг и один и тот же порядок, то A подобна B. Единственность следует из того, что элементарными делителями матрицы $\lambda E - A$ матрица B определяется однозначно.

Если основное поле K есть поле комплексных чисел, то все неприводимые многочлены будут первой степени. Следовательно, и обобщенных клетках Жордана матрицы A и B будут первой степени, и обобщенные клетки обратятся в обыкновенные клетки Жордана.

Рассмотрим еще случай, когда основное поле K есть поле всех вещественных чисел. Неприводимые многочлены в K будут двух видов: 1) многочлены первой степени $\lambda - p$; соответственные обобщенные клетки Жордана будут обыкновенными клетками Жордана; 2) $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$, где $p^2 - 4q < 0$; сопровождающая клетка A имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix}, \tag{14}$$

а обобщенная клетка Жордана, отвечающая $(\lambda^2 + p\lambda + q)^m$, будет иметь вид матрицы B из леммы 4, где вместо A можно подставить матрицу вида (14):

$$\lambda - \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\beta & \alpha \end{bmatrix};$$

здесь $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ — коэффициенты при вещественной и мнимой частях комплексного корня многочлена $\lambda^2 + p\lambda + q$. Такую замену сделать можно, так как матрица

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - \alpha & -\beta \\ \beta & \lambda - \alpha \end{bmatrix}$$

имеет характеристический многочлен, равный $\lambda^2 + p\lambda + q$.

Примеры и задачи

1. Узнать, какие из матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 49 & 130 & 29 \\ -8 & -22 & -5 \\ -23 & -73 & -18 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -17 \\ 7 & 2 & -22 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -18 & 16 \\ -3 & 18 & -22 \\ -11 & 28 & -27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 20 & -89 & -32 \\ 11 & -51 & -20 \\ 20 & -93 & -28 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

являются подобными. Найти подобные им жордановы матрицы.

2. Доказать, что характеристический многочлен матрицы A равен произведению всех инвариантных множителей, а минимальный многочлен равен последнему из инвариантных множителей характеристической матрицы $\lambda E - A$.

3. Найти минимальные многочлены матриц, указанных в задаче 1.

4. Доказать, что над полем комплексных чисел квадратная матрица тогда и только тогда подобна диагональной матрице, когда ее минимальный многочлен не имеет кратных корней.

5. Показать, что взаимно транспонированные матрицы A, A' всегда подобны.

6. Если A — неособенная, B — произвольная матрицы, то AB подобна BA. Будет ли AB подобна BA для произвольных матриц A, B?

7. Найти нормальные формы матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 22 & 9 & -27 \\ 5 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

в поле рациональных чисел, в поле вещественных чисел, в поле комплексных чисел.

8. Показать, что для построения нормальной формы в поле комплексных чисел можно вместо клеток Жордана брать клетки вида

$$\begin{bmatrix} p & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & p & \varepsilon & \ldots & 0 & 0 \\ & & p & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & p & \varepsilon \\ & & & & & p \end{bmatrix},$$

где ε — любое фиксированное число, отличное от нуля.

9. Характеристики Сегре. Пусть $\mathscr{A}$ — линейное преобразование комплексного некоторого пространства, $\rho_1, \ldots, \rho_s$ — различные собственные значения этого преобразования. Обозначим через $\varepsilon_{\rho_1}, \varepsilon_{\rho_2}, \ldots, \varepsilon_{\rho_s}$ степени клеток Жордана в жордановой нормальной форме $\mathscr{A}$, принадлежащих собственному значению ρ_i. Символ

$$[(\varepsilon_{\rho_1}, \varepsilon_{\rho_2}, \ldots)(\varepsilon_{\rho_2}, \varepsilon_{\rho_2}, \ldots) \ldots (\varepsilon_{\rho_s}, \varepsilon_{\rho_s}, \ldots)]$$

называется *характеристикой Сегре* преобразования $\varphi\mathscr{E}$. Например, матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

имеют следующие характеристики Сегре: $[(2, 2)]$, $[(2, 1), (2, 1)]$, $[(3), (1)]$, $[(4)]$. Вычислить характеристики Сегре матриц, указанных в задаче 1.

6. Характеристика Вейра. Пусть $\varphi\mathscr{E}$ — то же, что и в предыдущей задаче. Обозначим ядра преобразований $\varphi\mathscr{E} - \lambda_0\mathscr{E}$, $(\varphi\mathscr{E} - \lambda_0\mathscr{E})^2$, ..., $(\varphi\mathscr{E} - \lambda_0\mathscr{E})^\beta$, где β — кратность собственного значения λ_0, через

$$e_{10}, e_{20} + e_{21}, \ldots, e_{\alpha 0} + e_{\alpha 1} + \ldots + e_{\alpha\beta}.$$

Строка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\beta)$ называется *характеристикой Вейра* преобразования $\varphi\mathscr{E}$, отвечающей собственному значению λ_0. Показать, что характеристики Вейра преобразований, указанных в задаче 5, равны соответственно

$$[(2, 1)], \quad [(1)], \quad [(2, 2)], \quad [(1, 1, 1)], \quad [(3)], \quad [(4, 4, 1, 1)].$$

11. Показать, что характеристика Сегре и характеристика Вейра, отвечающие одному и тому же собственному значению, связаны следующим образом. Пусть характеристика Сегре есть $(6, 4, 3, 3)$. Строим диаграмму из точек

$$\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Число точек в положительных полях этой диаграммы и будет характеристикой Вейра. Для взятого случая она равна $(4, 4, 3, 2, 1, 1)$.

12. Матрица с неприводимыми элементарными делителями называется *неразложимой*. Показать, что любая матрица A может быть разложена в сумму неразложимых и попарно ортогональных матриц, перестановочных между собой, и что такое разложение однозначно.

§ 16. Функции от матриц

В настоящем параграфе будут рассмотрены такие вопросы матричного исчисления, для решения которых используется возможность приведения матриц к нормальной жордановой форме. Соответственно этому в качестве основного поля здесь берется поле всех комплексных чисел.

16.1. Многочлен от жордановой матрицы. Простейшими функциями от матриц являются многочлены. В дальнейшем будет дано общее определение функций от матриц, а сейчас мы укажем явное выражение для многочлена от матрицы, имеющей нормальную форму Жордана. Рассмотрим сначала отдельную клетку Жордана

порядка n

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \rho & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ & & & & \rho & 1 \\ & & & & & \rho \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Покажем, что для всех натуральных m имеет место формула

$$A^m = \begin{bmatrix} \rho^m & \binom{m}{1}\rho^{m-1} & \ldots & \binom{m}{n-1}\rho^{m-n+1} \\ & \rho^m & \ldots & \binom{m}{n-2}\rho^{m-n+2} \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & \rho^m \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где положено

$$\binom{m}{s} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}.$$

Доказательство проще всего провести индукцией по m. Для $m=1$ формула (2) совпадает с (1) и поэтому верна. С другой стороны, если равенство (2) верно для какого-нибудь m, то, умножая его на A, мы непосредственными вычислениями получим, что для A^{m+1} формула (2) также верна.

Пусть теперь $f(\lambda)$ — некоторый многочлен от λ:

$$f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_s\lambda^s.$$

Согласно определению

$$f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_s A^s.$$

Подставляя сюда вместо матриц A^m их значения из (2), мы увидим, что в i-й строке и $(i+s)$-м столбце матрицы $f(A)$ стоит выражение

$$\sum_{m=0}^{s} \alpha_m \frac{m(m-1)\ldots(m-s)}{1\cdot 2\ldots s}\rho^{m-s} = \frac{1}{1\cdot 2\ldots s} f^{(s)}(\rho).$$

Следовательно, окончательно имеем

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(\rho) & \frac{1}{1!}f'(\rho) & \frac{1}{2!}f''(\rho) & \ldots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\rho) \\ & f(\rho) & \frac{1}{1!}f'(\rho) & \ldots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\rho) \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & & & f(\rho) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Мы вычислили пока значение многочлена от клетки Жордана. Однако общая жорданова матрица A есть прямая сумма отдельных клеток Жордана:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_p$$

и согласно п. 1.4

$$f(A) = f(A_1) + f(A_2) + \dots + f(A_p). \tag{4}$$

Здесь $f(A_1), \dots, f(A_p)$ — многочлены от отдельных клеток Жордана, выражения которых даны формулой (3). Этот результат можно применить и к вычислению многочлена от матриц A, не имеющих формы Жордана. В самом деле, сначала ищем такое T, чтобы матрица $T^{-1}AT = B$ имела нормальную форму Жордана; затем вычисляем $f(B)$ согласно формулам (3) и (4) и, наконец, в силу соотношения

$$f(A) = f(TBT^{-1}) = Tf(B)T^{-1}$$

(п. 3.1) получаем значение $f(A)$.

16.2. Скалярные функции. Общее понятие матричной функции определяется совершенно аналогично понятию обыкновенных числовых функций. Именно рассмотрим некоторое множество матриц $\mathfrak{M}$. Если каждой матрице A из $\mathfrak{M}$ поставлена в соответствие некоторая матрица B, то говорят, что B есть функция от A, определенная на $\mathfrak{M}$. Мы хотим теперь каждой обыкновенной числовой функции $y = f(\lambda)$, заданной на некотором множестве всевозможных чисел и удовлетворяющей сформулированным ниже требованиям, поставить в соответствие определенную матричную функцию $f(A)$. Соответствие это строится следующим образом. Пусть даны некоторая числовая функция $y = f(\lambda)$ и произвольная матрица A. Обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ различные собственные значения матрицы A. Приведем A к нормальной форме Жордана:

$$T^{-1}AT = B = B_1 + B_2 + \dots + B_p,$$

где $B_1, \dots, B_p$ — клетки Жордана, и рассмотрим какую-нибудь из них, например

$$B_i = \begin{bmatrix} \varphi_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \varphi_j & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \\ & & & & \varphi_j \end{bmatrix}, \tag{5}$$

отвечающую элементарному делителю $(\lambda - \varphi_j)^{\nu_i}$. Если функция $f(\lambda)$ определена в окрестности точки φ_j и имеет конечные производные

$f'(\varphi_j), \dots, f^{(\nu_i - 1)}(\varphi_j)$, то мы полагаем, по определению,

$$f(B_i) = \begin{bmatrix} f(\varphi_j) & \frac{1}{1!}f'(\varphi_j) & \dots & \frac{1}{(\nu_i - 1)!}f^{(\nu_i - 1)}(\varphi_j) \\ & f(\varphi_j) & \dots & \frac{1}{(\nu_i - 2)!}f^{(\nu_i - 2)}(\varphi_j) \\ & & \dots & \dots \\ & & & f(\varphi_j) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Далее, если $f(\lambda)$ определена в окрестности каждой точки $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ и имеет в них конечные производные надлежащих порядков, то мы полагаем также

$$f(B) = f(B_1) + f(B_2) + \dots + f(B_p), \tag{7}$$

$$f(A) = Tf(B)T^{-1} = T[f(B_1) + \dots + f(B_p)]T^{-1}. \tag{8}$$

Матрица $f(A)$ называется *значением* функции $f(\lambda)$ при $\lambda = A$. Ниже будет показано, что $f(A)$ не зависит от способа приведения матрицы A к нормальной форме *), и, таким образом, является некоторой матричной функцией от A. Эта функция называется *соответствующей* числовой функции $f(\lambda)$. Ясно, что далеко не все матричные функции имеют соответствующие числовые. Те из них, для которых соответствующие числовые функции существуют, называются *скалярными функциями*.

Отметим несколько простейших свойств скалярных функций:

А) Если $f(\lambda)$ есть многочлен от λ, то значение скалярной функции $f(A)$ совпадает со значением многочлена $f(\lambda)$ при $\lambda = A$ в смысле п. 1.2.

Действительно, само определение скалярных функций выбрано таким образом, чтобы для многочленов оно совпадало со старым.

Б) Пусть A — матрица и $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ — числовые функции, для которых выражения $f_1(A)$ и $f_2(A)$ имеют смысл. Если $f(\lambda) = f_1(\lambda) + f_2(\lambda)$, то $f(A)$ также имеет смысл и $f(A) = f_1(A) + f_2(A)$.

В) Если A — матрица, $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — числовые функции, для которых $f_1(A)$ и $f_2(A)$ имеют смысл, и $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)$, то $f(A)$ имеет смысл и $f(A) = f_1(A)f_2(A)$.

Доказательства свойств Б) и В) аналогичны, поэтому мы ограничимся только рассмотрением свойства В). Чтобы вычислить $f_1(A)$, $f_2(A)$, $f(A)$, мы, согласно определению, должны привести A к нормальной форме Жордана B и воспользоваться формулами (7) и (8). Если удастся показать, что $f(B) = f_1(B)f_2(B)$, то из (8) непосредственно получится $f(A) = f_1(A)f_2(A)$. С другой стороны,

$$f(B) = f(B_1) + f(B_2) + \dots + f(B_p),$$

$$f_1(B)f_2(B) = f_1(B_1)f_2(B_1) + \dots + f_1(B_p)f_2(B_p),$$

*) То есть от выбора матрицы T.

поэтому все дело сводится к доказательству равенств

$$f(B_i)=f_1(B_i)f_2(B_i) \quad (i=1, 2, \ldots, t),$$

где B_i — клетка Жордана. Беря значения $f_1(B_i)$, $f_2(B_i)$ по формуле (5) и перемножая, мы обнаружим, что в k-й строке и $(k+j)$-м столбце матрицы $f_1(B_i)f_2(B_i)$ будет стоять элемент, равный

$$f_1(\rho)\cdot\frac{1}{j!}f_2^{(j)}(\rho)+\frac{1}{1!}f_1'(\rho)\cdot\frac{1}{(j-1)!}f_2^{(j-1)}(\rho)+\ldots+\frac{1}{j!}f_1^{(j)}(\rho)\cdot f_2(\rho).$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\frac{1}{j!}\left[f_1(\rho)f_2^{(j)}(\rho)+\frac{j}{1}f_1'(\rho)f_2^{(j-1)}(\rho)+\ldots+f_1^{(j)}(\rho)f_2(\rho)\right],$$

что согласно правилу дифференцирования произведения функций совпадает с $\frac{1}{j!}f^{(j)}(\rho)$. Таким образом,

$$f_1(B_i)f_2(B_i)=f(B_i),$$

и утверждение В) доказано.

Аналогичным образом, используя правило дифференцирования функции от функции, можно было бы показать, что если числовые функции $\varphi(\lambda)$ и $f(\varphi(\lambda))$ удовлетворяют требованиям, при которых выражение $f(\varphi(A))$ определено, и если $\psi(\lambda)=f(\varphi(\lambda))$, то $\psi(A)=f(\varphi(A))$.

Г) Пусть A — матрица, имеющая собственные значения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, причем каждое собственное значение выписано здесь столько раз, какова его кратность. Если $f(\lambda)$ — числовая функция и $f(A)$ имеет смысл, то собственные значения матрицы $f(A)$ равны $f(\rho_1), f(\rho_2), \ldots, f(\rho_n)$.

В самом деле, собственные значения матриц $f(A)$ и $T^{-1}f(A)T=f(T^{-1}AT)$ соответственно равны, поэтому мы можем предполагать, что A имеет нормальную форму Жордана. Формулы (5) и (6) показывают, что в этом случае $f(A)$ имеет треугольную форму, причем по главной диагонали $f(A)$ стоят числа $f(\rho_1), f(\rho_2), \ldots, f(\rho_n)$. Поскольку диагональные элементы треугольной матрицы являются ее собственными значениями, то утверждение Г) доказано.

Рассмотрим два примера. 1) Пусть $f(\lambda)=\lambda^{-1}$. Эта функция определена всюду, кроме $\lambda=0$, и при всех значениях λ, отличных от нуля, имеет производные любых порядков. Следовательно, если матрица A не имеет нулевых собственных значений, т. е. если A неособенная, то $f(A)$ имеет смысл. Но $\lambda\cdot f(\lambda)=1$, поэтому $A\cdot f(A)=E$, откуда $f(A)=A^{-1}$. Таким образом, функции λ^{-1} отвечает обратная матрица.

2) Пусть $f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$. Эта функция при $\lambda\neq 0$ имеет конечные производные любых порядков. Таким образом, выражение $\sqrt{A}$ имеет смысл для всех неособенных матриц A[*]). Полагая в соотношении

$$f(\lambda)f(\lambda)=\lambda$$

$\lambda=A$, мы получим

$$f(A)f(A)=A.$$

Мы доказали, следовательно, что из всякой неособенной матрицы можно извлечь квадратный корень.

16.3. **Представление значений функций многочленами.** Во всех курсах высшей алгебры рассматривается задача, как по заданной системе различных чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ и произвольной системе чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ построить многочлен $f(\lambda)$, который в точках $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ принимает соответственные значения $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Решение дается в виде известного интерполяционного многочлена Лагранжа.

Для дальнейшего важно уметь строить многочлены, которые не только сами, но и их производные до некоторого порядка принимают заданные значения в точках $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$. Эта задача является, таким образом, непосредственным обобщением предшествующей. Утверждение о ее разрешимости мы сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма. *Пусть заданы различные числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ и любые из $(k+1)s$ произвольных чисел a_{ij}. Найдется многочлен $p(\lambda)$, который в каждой точке ρ_i имеет значение a_{i0}, а его j-я производная — значение a_{ij} $(i=1, 2, \ldots, s;\ j=1, \ldots, k)$.*

Сначала удобнее построить вспомогательный многочлен $p_i(\lambda)$ такой, что он и его производные до k-го порядка имеют требуемые значения лишь в точке ρ_i, а в остальных заданных точках обращаются в нуль. Положим

$$\varphi_i(\lambda)=\beta_{i0}+\beta_{i1}(\lambda-\rho_i)+\ldots+\beta_{ik}(\lambda-\rho_i)^k,$$
$$\psi_i(\lambda)=(\lambda-\rho_1)^{k+1}\ldots(\lambda-\rho_{i-1})^{k+1}(\lambda-\rho_{i+1})^{k+1}\ldots(\lambda-\rho_s)^{k+1},$$
$$p_i(\lambda)=\varphi_i(\lambda)\psi_i(\lambda),$$

где $\beta_{i0}, \beta_{i1}, \ldots, \beta_{ik}$ — некоторые пока не определенные числа. Очевидно, при любых $\beta_{i0}, \ldots, \beta_{ik}$ имеем

$$p_i(\rho_j)=p_i'(\rho_j)=\ldots=p_i^{(k)}(\rho_j)=0 \qquad (j\neq i).$$

---

[*]) Чтобы устранить неоднозначность $\sqrt{\lambda}$ и сделать рассуждения вполне точными, достаточно в комплексной плоскости переменной λ провести разрез из начала координат вдоль луча, не содержащего ни одного собственного значения матрицы A, и рассматривать какую-либо одну ветвь радикала,

Согласно правилу дифференцирования произведения

$$p_i^{(j)}(\rho_i) = \varphi_i^{(j)}(\rho_i)\Phi_i(\rho_i) + j\varphi_i^{(j-1)}(\rho_i)\Phi_i'(\rho_i) + \ldots + \varphi_i(\rho_i)\Phi_i^{(j)}(\rho_i),$$

или

$$\alpha_{ij} = j!\gamma_{ij}\Phi_i(\rho_i) + (j+1)!\gamma_{i,j+1}\Phi_i'(\rho_i) + \ldots + \gamma_{is}\Phi_i^{(s-j)}(\rho_i). \qquad (9)$$

Так как $\Phi_i(\rho_i) \neq 0$, то из соотношений (9) при $j = 0, 1, \ldots, s$ можно последовательно определить числа $\gamma_{i0}, \gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{is}$ и тем самым найти $\varphi_i(\lambda)$. Многочлен

$$p(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda) + \ldots + \varphi_r(\lambda)$$

будет, очевидно, удовлетворять всем требованиям теоремы.

Рассмотрим некоторую числовую функцию $f(\lambda)$ и матрицу A, для которой значение $f(A)$ определено. Покажем, что тогда найдется многочлен $p(\lambda)$, для которого $p(A)$ будет равно $f(A)$. Обозначим через $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ различные собственные значения матрицы A. Пусть n_i есть порядок n_i. Согласно только что доказанной лемме мы можем построить многочлен $p(\lambda)$, удовлетворяющий требованиям *)

$$p(\rho_i) = f(\rho_i), \quad p'(\rho_i) = f'(\rho_i), \ \ldots, \ p^{(n_i-1)}(\rho_i) = f^{(n_i-1)}(\rho_i) \quad (i = 1, \ldots, s). \qquad (10)$$

Для определения смысла выражения $f(A)$ нам нужны были только значения функции $f(\lambda)$ и ее производных самое большее до (n_i-1)-й в точках $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$. Поскольку эти значения у $f(\lambda)$ и $p(\lambda)$ совпадают, то $f(A) = p(A)$. Итак:

Теорема 1. *Значения всех скалярных функций от матрицы A можно представлять многочленами от A* **).

В частности, рассматривая функцию $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, мы видим, что *для каждой неособенной матрицы A существует такой многочлен $p(\lambda)$, для которого*

$$p(A)\,p(A) = A.$$

С помощью теоремы 1 легко решается оставшийся в предыдущем пункте сохранный вопрос об однозначности определения значения $f(A)$. В самом деле, зная функцию $f(\lambda)$ и ее производные в точках $\rho_1, \ldots, \rho_s$, мы можем построить многочлен $p(\lambda)$, значение которого $p(A)$ не зависит от приведения матрицы A к нормальной форме Жордана и в то же время совпадает с $f(A)$. Следо-

*) Если какие-либо из производных $p^{(j)}(\rho_i)$ для определения $f(\lambda)$ нулевые, то соответствующие числа в (10) можно изменить произвольно.

**) Заметим еще раз, что приведенное в тексте рассуждение показывает, что каждое значение $f(A)$ скалярной функции f можно представить в виде некоторого многочлена $p(A)$. Однако этот многочлен для одной и той же функции f будет различным для различных матриц A.

вательно, значение $f(A)$, определенное в предыдущем пункте с помощью приведения матрицы A к нормальной форме, от способа этого приведения не зависит.

Сделаем еще одно замечание. Пусть $f(\lambda)$ — некоторая числовая функция, A — матрица, для которой $f(A)$ имеет смысл. Согласно теореме 1 мы можем найти многочлен $p(\lambda)$, для которого $p(A) = f(A)$. При заданной функции $f(\lambda)$ многочлен $p(\lambda)$ зависит лишь от элементарных делителей матрицы A. Но элементарные делители матрицы A и транспонированной матрицы A' совпадают, поэтому $p(A') = f(A')$. Из п. 13 легко усмотреть, что $p(A') = p(A)'$. Таким образом, *для всех скалярных функций $f(A)$ имеем $f(A') = f(A)'$.*

13.4. Элементарные делители функций. Рассмотрим вопрос, как по элементарным делителям матрицы A найти элементарные делители какой-нибудь ее скалярной функции $f(A)$. Приведем A к нормальной форме

$$T^{-1}AT = B = B_1 + B_2 + \ldots + B_s, \qquad (11)$$

где $B_1, \ldots, B_s$ — клетки Жордана. Согласно определению

$$f(A) = T f(B) T^{-1},$$

и, следовательно, элементарные делители матриц $f(A)$ и $f(B)$ совпадают. Из (11) вытекает, что

$$f(B) = f(B_1) + f(B_2) + \ldots + f(B_s);$$

поэтому система элементарных делителей матрицы $f(B)$ есть объединение систем элементарных делителей клеток $f(B_1), \ldots, f(B_s)$. Таким образом, наш первоначальный вопрос сводится к следующему: дана клетка Жордана B_i с элементарным делителем $(\lambda-\rho_i)^{n_i}$; требуется найти элементарные делители для $f(B_i)$.

На основании формул (5), (6) имеем

$$\lambda E_i - f(B_i) = \begin{vmatrix} \lambda - f(\rho_i) & -f'(\rho_i) & \ldots & -\frac{1}{(n_i-1)!}f^{(n_i-1)}(\rho_i) \\ & \lambda - f(\rho_i) & \ldots & -\frac{1}{(n_i-2)!}f^{(n_i-2)}(\rho_i) \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & \lambda - f(\rho_i) \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Ищем наибольшие общие делители $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \ldots, D_{n_i}(\lambda)$ миноров 1-го, 2-го, ..., n_i-го порядков этой матрицы. Старший из них $D_{n_i}(\lambda)$ равен определителю матрицы, следовательно,

$$D_{n_i}(\lambda) = (\lambda - f(\rho_i))^{n_i}.$$

Все остальные являются делителями $D_{\varepsilon_i}(\lambda)$ и поэтому имеют вид $(\lambda-f(\gamma_i))^{\gamma}$. Рассмотрим $D_{\varepsilon_i-1}(\lambda)$. Этот многочлен должен быть делителем всех миноров порядка n_i-1 матрицы (12), в том числе и минора $\Delta(\lambda)$, получающегося вычеркиванием первого столбца и последней строки. Однако если в этот минор подставить вместо λ число $f(\gamma_i)$, то получится матрица треугольной формы с элементами $-f'(\gamma_i)$ на главной диагонали и, значит,

$$\Delta(\gamma_i)=(-f'(\gamma_i))^{n_i-1}. \tag{13}$$

Мы предположим теперь, что $f'(\gamma_i)\neq 0$. Равенство (13) показывает тогда, что $\Delta(\lambda)$ не делится на $\lambda-f(\gamma_i)$. Но многочлен $D_{\varepsilon_i-1}(\lambda)$ должен быть общим делителем многочленов $\Delta(\lambda)$ и $D_{\varepsilon_i}(\lambda)$, следовательно, $D_{\varepsilon_i-1}(\lambda)=1$. Остальные многочлены $D_{\varepsilon_i-2}(\lambda),\ldots,D_2(\lambda),D_1(\lambda)$ являются делителями $D_{\varepsilon_i-1}(\lambda)$ и поэтому также равны единице. Составляя отношения $D_{k-1}:D_k$, мы видим, что инвариантными множителями матрицы (12) будут $1,\ldots,1,(\lambda-f(\gamma_i))^{\varepsilon_i}$; вследствие чего матрица (12) будет иметь только один элементарный делитель $(\lambda-f(\gamma_i))^{\varepsilon_i}$. Отсюда следует

Теорема 2. *Пусть матрица A имеет собственные значения $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ и $f(\lambda)$ — функция, для которой $f'(\gamma_i)\neq 0$ $(i=1,\ldots,s)$. Тогда, если матрица $f(A)$ существует, то ее элементарные делители можно получить заменой каждого элементарного делителя $(\lambda-\gamma_i)^{\varepsilon_i}$ матрицы A выражением $(\lambda-f(\gamma_i))^{\varepsilon_i}$.*

Например, если A — несобственная матрица, $f(\lambda)=\lambda^{-1}$, то $f(A)=A^{-1}$ и $f'(\gamma_i)=-\gamma_i^{-2}\neq 0$. Поэтому, если каждый элементарный делитель $(\lambda-\gamma_i)^{\varepsilon_i}$ матрицы A заменить выражением $(\lambda-\gamma_i^{-1})^{\varepsilon_i}$, то получится система элементарных делителей обратной матрицы.

Теорема 2 позволяет находить элементарные делители матрицы $f(A)$, принадлежащие тем собственным значениям $f(\gamma_i)$, для которых $f'(\gamma_i)\neq 0$. Нетрудно указать соответствующее правило и в случае $f'(\gamma_i)=0$. Пусть для некоторого собственного значения матрицы A

$$f'(\gamma_i)=f''(\gamma_i)=\ldots=f^{(k-1)}(\gamma_i)=0,\qquad f^{(k)}(\gamma_i)\neq 0. \tag{14}$$

Требуется указать, в какие элементарные делители матрицы $f(A)$ перейдет каждый элементарный делитель $(\lambda-\gamma_i)^{\varepsilon_i}$ матрицы A. Этот вопрос, именно, сводится к следующему: найти элементарные делители матрицы (6) при условии (14). Для $k\geqslant n_i$ матрица (6) является скалярной, и ее элементарными делителями будут $\lambda-f(\gamma_i),\ldots,\lambda-f(\gamma_i)$. Случай $k=1$ был разобран выше: матрица (12) имеет лишь собственный элементарный делитель $(\lambda-f(\gamma_i))^{n_i}$. Поэтому нас будет интересовать только значения k, лежащие между 1 и n_i.

Рассмотрим вспомогательное линейное пространство $\mathfrak{L}$ размерности n_i с базой $e_1,e_2,\ldots,e_{n_i}$. Положим для краткости $\frac{1}{q!}f^{(q)}(\gamma_i)=\alpha_q$, $q=0,1,\ldots$ и обозначим через $\mathscr{C}$ линейное преобразование пространства $\mathfrak{L}$ с матрицей

$$C=f(B_i)-f(\gamma_i)E_{n_i}$$

(мы имеем, таким образом,

$$\left.\begin{aligned}
e_1\mathscr{C}&=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ke_k\\
e_2\mathscr{C}&=\alpha_1e_2+\ldots+\alpha_{k-1}e_k\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_{k-1}\mathscr{C}&=\alpha_1e_{k-1}+\alpha_2e_k\\
e_k\mathscr{C}&=\alpha_1e_k\\
e_s\mathscr{C}&=0 \qquad (s>k).
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Нас интересуют элементарные делители преобразования $\mathscr{C}$, поэтому мы выберем в $\mathfrak{L}$ другую базу, в которой матрица преобразования $\mathscr{C}$ будет иметь более простой вид. Пусть

$$e_i'=\beta_{i1}e_1+\beta_{i,i+1}e_{i+1}+\ldots+\beta_{in}e_n \qquad (i=1,\ldots,n),$$

тогда

$$e_i'\mathscr{C}=\beta_{i1}\alpha_1e_1+(\beta_{i1}\alpha_2+\beta_{i,i+1}\alpha_1)e_2+\ldots$$

Подберем числа β_{ij} так, чтобы выполнялись соотношения

$$e_i'\mathscr{C}=e_{i+1}',\quad e_i'\mathscr{C}^{k-i}=0 \qquad (i=1,\ldots,n-k;\ k>n-k). \tag{16}$$

Это дает следующую систему уравнений относительно β_{ij}:

$$\beta_{i1}\alpha_{k-i}=\beta_{i+1,1}\alpha_{k-i+1}+\beta_{i,2}\alpha_{k-i}=\beta_{i+2,1}\alpha_{k-i+2}=\ldots$$

Ввиду условия $\alpha_{k+1}\neq 0$ отсюда можно последовательно определить β_{i1}, $\beta_{i+1,1},\ldots$, выражая их через β с большим первым индексом. Для β_{ij} с $j>i+1$ k вообще никаких уравнений не получается, так что их можно выбирать произвольно. В частности, полагая $\beta_{n-k,n-k}=\ldots=\beta_{nn}=1$, из них остальных начальных коэффициентов $\beta_{12},\ldots,\beta_{n-k-1,n-k}$ получим вполне определенные значения. Уравнения (15) тогда можно решить относительно $e_1,e_2,\ldots,e_{n_i}$ подходящей системой $e_1',e_2',\ldots,e_{n_i}'$ будет новой базой в $\mathfrak{L}$, связанной условиями (16). Разложим векторы $e_1',\ldots,e_{n_i}'$ на системы

$$\begin{aligned}
&e_1,\ e_{1+k},\ e_{1+2k},\ \ldots\\
&e_2,\ e_{2+k},\ e_{2+2k},\ \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&e_k,\ e_{2k},\ e_{3k},\ \ldots
\end{aligned}$$

и рассмотрим подпространства $\mathfrak{L}_1,\ldots,\mathfrak{L}_k$, натянутые на эти системы. Соотношения (16) показывают, что $\mathfrak{L}_i$ есть инвариантное подпространство с базой $e_i,e_{i+k},e_{i+2k},\ldots$, причем

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2+\ldots+\mathfrak{L}_k. \tag{17}$$

В силу результатов п. 12.3 отсюда следует, что матрица преобразования $\mathscr{C}$ распадается на k клеток Жордана с элементарными делителями $\lambda^{m_1},\lambda^{m_2},\ldots,\lambda^{m_k}$, где $m_1,m_2,\ldots,m_k$ — размерности подпространств $\mathfrak{L}_1,\mathfrak{L}_2,\ldots,\mathfrak{L}_k$. Матрица искомого преобразования $f(B_i)$ была связана с C формулой $f(B_i)=f(\gamma_i)E_{n_i}+C$, поэтому элементарными делителями матрицы $f(B_i)$ являются $(\lambda-f(\gamma_i))^{m_1},\ldots,(\lambda-f(\gamma_i))^{m_k}$. Если символом $[a]$ обозначить наибольшее целое число, не превосходящее a, тогда для $m_1,\ldots,m_k$ получатся следующие выражения:

$$m_1=\left[\frac{n-1}{k}\right]+1,\quad m_2=\left[\frac{n-2}{k}\right]+1,\ \ldots,\ m_k=\left[\frac{n-k}{k}\right]+1=\left[\frac{n}{k}\right].$$

Итак, *если матрица A имеет элементарный делитель $(\lambda-\rho)^m$, а $f'(\rho)=\ldots=f^{(k-1)}(\rho)=0$, $f^{(k)}(\rho)\neq 0$, то при переходе от A к $f(A)$ этот элементарный делитель распадается на элементарные делители $(\lambda-f(\rho))^{m_1}, \ldots, (\lambda-f(\rho))^{m_k}$, где*

$$m_1=\left[\frac{m-1}{k}\right]+1,\quad m_2=\left[\frac{m-2}{k}\right]+1,\ \ldots,\ m_k=\left[\frac{m-k}{k}\right]+1.$$

Рассмотрим пример. Пусть A имеет элементарные делители $(\lambda-1)^3$, $(\lambda+2)^2$; требуется найти элементарные делители матрицы $A^2-3A^3+5A^{10}-2A$. Пусть $f(\lambda)=\lambda^2-3\lambda^3+5\lambda^{10}-2\lambda$. Тогда $f(\lambda)-1=(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3$, $f'(-2)\neq 0$, $f(1)=f'(1)=0$, $f''(1)\neq 0$. Элементарный делитель $(\lambda+2)^2$ при переходе к $f(A)$ даст $(\lambda-f(-2))^2=(\lambda-2)^2$, а элементарный делитель $(\lambda-1)^3$ распадается на $\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$. Следовательно, элементарными делителями матрицы $f(A)$ будут $\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-2)^2$.

16.5. **Степенные ряды.** Последовательность квадратных матриц

$$A_0, A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots \tag{18}$$

одного и того же порядка называется *сходящейся* к матрице A, если элемент матрицы (18), стоящий на пересечении заданных столбца и заданной строки, стремится к соответствующему элементу матрицы A. Из этого определения непосредственно ясно, что если матрицы A_m и B_m при возрастании m стремятся соответственно к A и B, то $A_m\pm B_m$ и A_mB_m стремятся соответственно к $A\pm B$ и AB. В частности, если T — постоянная матрица, а матрица A_m стремится к A, то $T^{-1}A_mT$ будет иметь своим пределом $T^{-1}AT$. Далее, ясно

$$A_m=A_m^{(1)}+A_m^{(2)}+\ldots+A_m^{(k)}\qquad (m=1,\ 2,\ \ldots),$$

где порядки матриц от m не зависят, то A_m при возрастании m стремится к некоторому пределу тогда и только тогда, когда к пределу стремится каждая матрица $A_m^{(j)}$ отдельно.

Последнее замечание позволяет очень просто решить вопрос о сходимости так называемых степенных рядов от матрицы. Пусть

$$a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_m\lambda^m+\ldots \tag{19}$$

— формальный степенной ряд относительно переменной λ. Выражение

$$a_0E+a_1A+a_2A^2+\ldots+a_mA^m+\ldots \tag{20}$$

называется соответствующим *степенным рядом* от матрицы A, а многочлен

$$f_n(A)=a_0E+a_1A+\ldots+a_nA^n$$

— n-й *начальной суммой* этого ряда. Ряд (20) называется *сходящимся*, если последовательность начальных сумм $f_0(A), \ldots, f_m(A), \ldots$ имеет предел; в случае существования этот предел называется *суммой* ряда (20).

Приведем матрицу A к нормальной форме

$$T^{-1}AT=B=B_1+B_2+\ldots+B_l,$$

где $B_1, \ldots, B_l$ — клетки Жордана. Ясно так же, как и выше, что сходимость последовательности $f_m(A)$ равносильна сходимости последовательности $T^{-1}f_m(A)T$ $(m=1, 2, \ldots)$. Но

$$T^{-1}f_m(A)T=f_m(T^{-1}AT)=f_m(B)=f_m(B_1)+\ldots+f_m(B_l),$$

поэтому вопрос о сходимости ряда (20) решается следующим: при каких условиях этот ряд сходится для клеток Жордана $B_1, \ldots, B_l$? Рассмотрим одну из этих клеток, например B_1. Пусть ей отвечает элементарный делитель $(\lambda-\rho_1)^{n_1}$. Согласно формуле (5)

$$f_m(B_1)=\begin{vmatrix} f_m(\rho_1) & \frac{1}{1!}f_m'(\rho_1) & \cdots & \frac{1}{(n_1-1)!}f_m^{(n_1-1)}(\rho_1) \\ & f_m(\rho_1) & \cdots & \frac{1}{(n_1-2)!}f_m^{(n_1-2)}(\rho_1) \\ & & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ & & & f_m(\rho_1) \end{vmatrix},$$

следовательно, $f_m(B_1)$ при возрастании m тогда и только тогда стремится к некоторому пределу, когда к пределу стремятся $f_m(\rho_1)$, $f_m'(\rho_1)$, $\ldots$, $f_m^{(n_1-1)}(\rho_1)$, т. е. когда и только ρ_1 сходится ряд (19), а также ряды, получаемые из него почленным дифференцированием до (n_1-1)-го раза включительно. Из теории аналитических функций известно, что все эти ряды одновременно сходятся, если либо ρ_1 лежит внутри круга сходимости ряда (19), либо ρ_1 лежит на окружности круга сходимости и (n_1-1)-е производная от ряда (19) в точке ρ_1 сходится. Следовательно, доказана

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы степенной ряд от матрицы A сходился, необходимо и достаточно, чтобы каждое собственное значение ρ_i матрицы A либо находилось внутри круга сходимости соответствующего степенного ряда $f(\lambda)$, либо лежало на круге сходимости в том, чтобы соответствующий ряд, полученный (n_i-1)-кратным дифференцированием ряда $f(\lambda)$, сходился в точке ρ_i, где n_i — степень наивысшего элементарного делителя, принадлежащего ρ_i.*

16.6. Матрицы, перестановочные с данной матрицей. Матрицы A, B называются *перестановочными*, если $AB=BA$. Каждая матрица перестановочна сама с собой и с единичной. Далее, если A перестановочна с матрицами B и C, то равенства

$$A\cdot BC=BAC=BC\cdot A,$$

$$A(\alpha B+\beta C)=\alpha AB-\beta AC=\alpha BA-\beta CA=(\alpha B+\beta C)A$$

показывают, что A перестановочна с их произведением и линейной комбинацией. Следовательно, если B перестановочна с A, то B перестановочна с любым многочленом от A. В частности, A перестановочна с многочленами от A и любые два многочлена от A перестановочны друг с другом.

Согласно п. 16.3 значения скалярных функций от матрицы A могут быть представлены многочленами от A. Многочлены от A перестановочны с каждой матрицей B, которая перестановочна с A. Следовательно, *значение любой скалярной функции от матрицы A перестановочно со всеми матрицами, перестановочными с A.*

Соотношение $\alpha E\cdot P=P\cdot\alpha E$ показывает, что *матрица αE перестановочна со всеми матрицами того же порядка.* Верно и обратное:

Если квадратная матрица A порядка n перестановочна со всеми матрицами порядка n, то A имеет вид αE.

Обозначим элементы матрицы A через a_{ij}. Пусть P — матрица, у которой в p-й строке и q-м столбце стоит единица, а остальные места заняты нулями. Непосредственным перемножением находим

$$AP=\begin{bmatrix} 0 & \dots & a_{1p} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2p} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad PA=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где у первой матрицы записан q-й столбец, а у второй p-я строка. По условию $AP=PA$, следовательно, $a_{pp}=a_{qq}$ и $a_{pq}=0$, если $p\neq q$. Ввиду произвольности p и q это означает, что A диагональна и что все ее диагональные элементы равны между собой.

Рассмотрим теперь более сложную задачу: *найти все матрицы, перестановочные с заданной матрицей A.*

Для решения ее приведем A к нормальной жордановой форме

$$T^{-1}AT=B=B_1\dotplus B_2\dotplus\dots\dotplus B_s, \tag{21}$$

где $B_1, \dots, B_s$ — клетки Жордана. Если матрица X перестановочна с B, то, очевидно, $Y=TXT^{-1}$ будет перестановочна с A, и, обратно, если Y перестановочна с A, то $T^{-1}YT=X$ будет перестановочна с B. Поэтому все дело сводится к тому, чтобы найти матрицы X, перестановочные с матрицей B, имеющей нормальную форму (21). Соответственно (21) разобьем на клетки и матрицу X:

$$X=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{s1} & X_{s2} & \dots & X_{ss} \end{bmatrix}.$$

Условие $BX=XB$ приводится к равенствам

$$B_pX_{pq}=X_{pq}B_q \qquad (p,\ q=1,\ \dots,\ s). \tag{22}$$

Мы видим, что для каждой клетки X_{pq} получается только одно равенство (22), из которого нам и надо определить элементы X_{pq}.

Пусть порядки матриц B_p, B_q равны соответственно k, m, а их собственные значения суть ρ, σ. Тогда X_{pq} будет прямоугольной матрицей с k строками и m столбцами. Обозначим элементы матрицы X_{pq} через ξ_{ij} $(i=1,\ \dots,\ k;\ j=1,\ \dots,\ m)$

и перепишем соотношение (22) подробно:

$$\begin{bmatrix} \rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \rho & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1m} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \dots & \xi_{km} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1m} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \dots & \xi_{km} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \sigma & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \sigma \end{bmatrix}.$$

Выполняя здесь умножение и сравнивая элемент, который получится в i-й строке и j-м столбце левой части, с соответственным элементом в правой, мы придем к уравнениям

$$\rho\xi_{ij}+\xi_{i+1,\,j}=\xi_{ij}\sigma+\xi_{i,\,j-1} \qquad (i\neq k,\ j\neq 1), \tag{23}$$

$$\rho\xi_{kj}=\xi_{k,\,j-1}+\xi_{kj}\sigma \qquad (i=k,\ j\neq 1), \tag{24}$$

$$\rho\xi_{i1}=\xi_{i1}\sigma \qquad (i=k,\ j=1). \tag{25}$$

Если $\rho\neq\sigma$, то из (25) следует $\xi_{i1}=0$; тогда из (24) последовательно получим $\xi_{k2}=\dots=\xi_{km}=0$, а из (23) выведем, что все остальные ξ_{ij} также равны нулю. Таким образом, для $\rho\neq\sigma$ имеем $X_{pq}=0$.

Рассмотрим случай $\rho=\sigma$. Уравнения (23), (24), (25) теперь обратятся в

$$\xi_{i+1,\,j}=\xi_{i,\,j-1} \qquad (i=1,\ \dots,\ k-1;\ j=2,\ \dots,\ m), \tag{26}$$

$$\xi_{k,\,j+1}=0 \qquad (j=2,\ \dots,\ m). \tag{27}$$

Если $k\geqslant m$, то, полагая $\xi_{11}=\xi_1$, $\xi_{12}=\xi_2$, $\dots$, $\xi_{1m}=\xi_m$, мы приведем уравнения (26) и (27) к уравнениям

$$\xi_{ij}=\xi_{i-1,\,j} \qquad (i\geqslant j),$$

$$\xi_{ij}=0 \qquad (i>j),$$

из которых следует, что матрица X_{pq} имеет *линейный треугольный* вид

$$X_{pq}=\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_m \\ & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & \xi_1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

для $k=m$ и соответственный вид

$$X_{pq}=\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_m \\ & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

для $k>m$. Если $k<m$, то полагая $\xi_{1,\,m-k+1}=\xi_1$, $\xi_{1,\,m-k+2}=\xi_2$, ..., $\xi_{1m}=\xi_k$, мы приведем уравнения (23), (24) и (25) к уравнениям

$$\begin{aligned} &\xi_{ij}=\xi_{i-1,\,j-1} && (j-i\geqslant m-k),\\ &\xi_{ij}=0 && (j-i<m-k), \end{aligned}$$

которые означают, что матрица X_{pq} имеет вид

$$X_{pq}=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_k \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \xi_1 & \dots & \xi_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_1 \end{bmatrix}.$$

Обратно, если клетки матрицы X имеют указанный выше вид, то уравнения (23), (24) и (25) удовлетворяются и, следовательно, X перестановочна с B.

Например, если

$$B=\begin{bmatrix} \rho & 1 & 0 & & \\ & \rho & 1 & & \\ & & \rho & & \\ & & & \sigma & 1 \\ & & & & \sigma \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \rho & 1 & & \\ & \rho & & \\ & & \sigma & 1 \\ & & & \sigma \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ & \sigma & 1 \\ & & \sigma \end{bmatrix} \quad (\rho\neq\sigma), \tag{29}$$

то перестановочные с B матрицы имеют вид

$$X=\left[\begin{array}{ccc|cc} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma_0 & \gamma_1 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & \gamma_0 \\ & & \alpha_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta_0 & \beta_1 & \delta_0 & \delta_1 \\ 0 & 0 & \beta_0 & 0 & \delta_0 \end{array}\right]+\begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 \\ & & \varepsilon_0 \end{bmatrix},$$

где α_i, β_i, γ_i, δ_i, ε_i — произвольные.

Результат становится особенно простым для матриц вида $\rho_1E_1+\rho_2E_2+\dots+\rho_sE_s$, где E_1, ..., E_s — единичные матрицы,

а числа ρ_1, ..., ρ_s различны. В этом случае для $p\neq q$ клетки X_{pq} обращаются в нули и X приводится клеточно-диагональной форме.

В частности, если B диагональна с различными диагональными элементами, то перестановочные с B матрицы также диагональны.

16.7. Матрицы, перестановочные с перестановочными матрицами. Многочлены от матрицы A обладают тем специальным свойством, что они не только перестановочны с самой матрицей A, но перестановочны и с любой матрицей X, перестановочной с A. Это свойство оказывается характеристическим для многочленов от A.

Теорема 4. Если квадрат C перестановочен со всеми матрицами, перестановочными с B, то C есть многочлен от B.

Очевидно, доказательство достаточно дать для случая, когда B имеет нормальную жорданову форму; поэтому пусть

$$B=B_1\dotplus B_2\dotplus\dots\dotplus B_s,$$

где B_1, ..., B_s — клетки Жордана. Вспомогательные матрицы

$$X=\alpha_1E_1\dotplus\alpha_2E_2\dotplus\dots\dotplus\alpha_sE_s,$$

где α_1, ..., α_s — произвольные числа, E_1, ..., E_s — единичные матрицы, заведомо коммутируют с B, поэтому матрицы X коммутируют и с C. Согласно предыдущему отсюда следует, что C распадается на клетки:

$$C=C_1\dotplus C_2\dotplus\dots\dotplus C_s \tag{30}$$

причем из условия $CB=BC$ вытекает, что эти клетки имеют линейную треугольную форму (28). Пусть теперь X — произвольная матрица, коммутирующая с B. Общий вид матрицы X был установлен в предыдущем пункте. Согласно условиям доказываемой теоремы матрица C должна коммутировать с X. Представляя X в клеточной форме, мы видим, что равенство $CX=XC$ равносильно соотношениям

$$C_pX_{pq}=X_{pq}C_q \quad (p,\ q=1,\ \dots,\ s). \tag{31}$$

Если соответствующие клетки B_p, B_q имеют разные собственные значения, то (31) ничего не дает, так как тогда $X_{pq}=0$. Поэтому мы предположим, что собственные значения клеток B_p и B_q совпадают. Пусть

$$C_p=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ & \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-1} \\ & & \dots & \dots \\ & & & \alpha_1 \end{bmatrix},\qquad C_q=\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \\ & \beta_1 & \dots & \beta_{m-1} \\ & & \dots & \dots \\ & & & \beta_1 \end{bmatrix},$$

Пусть для определенности $k \leqslant m$. Тогда соотношение (31) сводится к

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \\ & \alpha_0 & \dots & \alpha_{k-1} \\ & & \dots & \dots \\ & & & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_k \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \xi_1 & \dots & \xi_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_k \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \eta_1 & \dots & \eta_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \\ & \beta_1 & \dots & \beta_{m-1} \\ & & \dots & \dots \\ & & & \beta_1 \end{bmatrix},$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ — произвольные числа. Умножая первую строку на последний столбец слева и справа и приравнивая результаты, мы получим

$$\alpha_0\xi_k + \alpha_1\xi_{k-1} + \dots + \alpha_k\xi_1 = \beta_1\eta_k + \beta_2\eta_{k-1} + \dots + \beta_k\eta_1,$$

откуда ввиду произвольности чисел $\xi_1, \dots, \xi_k$ следует, что

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \ \dots, \ \alpha_k = \beta_k. \tag{32}$$

Легко проверить, что аналогичные равенства получатся и при $k > m$. Равенства (30), (31) и (32) представляют собой полную систему условий, которым должна подчиняться искомая матрица C. Чтобы сделать эти условия несколько более наглядными, мы поступим следующим образом. Расположим клетки Жордана матрицы B так, чтобы клетки с равными собственными значениями стояли рядом. Пусть, например,

$$B = (B_1 \dotplus \dots \dotplus B_{s_1}) \dotplus (B_{s_1+1} \dotplus \dots \dotplus B_{s_2}) \dotplus \dots$$
$$\dots \dotplus (B_{s_{l-1}+1} \dotplus \dots \dotplus B_{s_l}),$$

где каждая скобка содержит клетки с одинаковыми собственными значениями. Обозначая суммы, стоящие в скобках, соответственно через $B^{(1)}, \dots, B^{(l)}$, мы разобьем матрицу B на более крупные клетки, которые назовем блоками. Соответственно этому разобьются на блоки и матрицы X и C. Результаты предыдущего пункта показывают, что все недиагональные блоки матрицы X равны нулю; что касается диагональных блоков X, то они имеют строение, которое там было описано. Условия, полученные в настоящем пункте для матрицы C, показывают, что и диагональные блоки этой матрицы распадаются подобно B на клетки, причем клетки матрицы C имеют специальную треугольную форму.

Равенства (32) означают, что у клеток матрицы C, принадлежащих какому-либо одному блоку, элементы, расположенные на одной и той же параллели к главной диагонали, равны друг другу.

Возьмем, например, матрицу B в форме (29), приведенной в качестве примера в конце предыдущего пункта. Наши результаты показывают, что матрица C, перестановочная с каждой матрицей, перестановочной с B, будет иметь форму

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & & & & \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & & & & \\ & & \alpha_0 & & & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & & \\ & & & & \alpha_2 & & \\ & & & & & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ & & & & & & \lambda_0 & \lambda_1 \\ & & & & & & & \lambda_0 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Остается показать, что C можно представлять в виде многочлена от B. Мы это сделаем только для частного случая, когда B имеет вид (29), а C, следовательно, вид (33); в общем случае рассуждения остаются теми же. Итак, требуется показать, что матрица (33) есть многочлен от матрицы (29). Ищем многочлен $f(\lambda)$, удовлетворяющий условиям

$$f(\lambda) = \alpha_0, \quad f'(\lambda) = \alpha_1, \quad f''(\lambda) = 2\alpha_2,$$
$$f(\mu) = \lambda_0, \quad f'(\mu) = \lambda_1, \quad f''(\mu) = 2\lambda_2.$$

Такой многочлен согласно п. 16.3 найти возможно. Применяя правило (3) из п. 16.1, убедимся в том, что $f(B) = C$.

Примеры и задачи

1. Найти A^n, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Найти все решения уравнения $X^2 = A$, где A имеет то же значение, что и в предыдущей задаче. Какие из этих решений будут многочленами от A? Вычислить $\sin A$, e^A, $\cos A$.

3. Элементарные делители преобразования $\mathscr{A}'$ равны $X, (X-\lambda)^2, (X-\lambda)^3, \ldots, (X-\lambda)^n$.

Выписать элементарные делители преобразований вида $g(\mathscr{A})$, $\sin \mathscr{A}$.

4. Если A, B — перестановочные матрицы, то $e^A e^B = e^{A+B}$.

5. Для каких матриц A уравнение $A = e^X$ разрешимо?

6. Если сумму степенного ряда (19) обозначить через $f(A)$, то сумма степенного ряда (20) в случае его сходимости будет равна $f(f(A))$.

7. Написать общий вид матриц, перестановочных с нормальной жордановой матрицей A, если A имеет элементарные делители $(\lambda-1)^3$, $(\lambda-1)^2$, $\lambda-1$, $(\lambda+2)^4$, $\lambda+2$.

8. Пусть все инвариантные множители матрицы $\lambda E - A$, кроме последнего, равны 1. Тогда всякая матрица, перестановочная с A, есть многочлен от A.

Глава V

УНИТАРНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Изучавшиеся в предыдущих главах линейные пространства сказались, в известном смысле, бедное понятиями и свойствами, чем наше обыкновенное пространство. Такие понятия, как длина отрезка, величина угла, скалярное произведение, играющие основную роль в геометрии, не нашли отражения в общей теории линейных пространств. Поэтому, если мы хотим, чтобы общая теория охватывала все наиболее существенные свойства обыкновенного пространства, мы должны, кроме операций сложения векторов и умножения их на число, ввести еще операцию скалярного умножения. Изучение свойств векторов, расположенных в пространствах со скалярным умножением, и производится в настоящей главе.

Основное тело в этой главе имеет весьма специальный вид: оно будет полем вещественных чисел в случае евклидовых пространств и полем комплексных чисел в случае унитарных пространств.

§ 17. Унитарные пространства

17.1. Аксиоматика и примеры. Пусть $\mathfrak{R}$ — наше обыкновенное пространство, векторами которого служат направленные отрезки, выходящие из некоторой начальной точки O. Скалярным произведением (a, b) векторов a, b называется произведение длин a и b на косинус угла между ними. Отсюда непосредственно вытекают известные свойства скалярного произведения:

(а) $(a, b) = (b, a)$;

(б) $(\alpha a, b) = \alpha (a, b)$;

(в) $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$;

(г) если $a \neq 0$, то $(a, a) > 0$.

Выберем в пространстве $\mathfrak{R}$ какие-либо три взаимно перпендикулярных вектора e_1, e_2, e_3 длины 1 в качестве координатной системы. Тогда каждый вектор a будет допускать единственную запись в виде

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

где a_1, a_2, a_3 — длины проекций вектора a на оси координат, взятые с соответствующими знаками. Если

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$$

— какой-либо второй вектор, то из определения скалярного произведения и свойств (б), (в) следует, что

$$(a, b) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3. \qquad (1)$$

Пространство $\mathfrak{R}$ вещественное. Это находит свое выражение в том, что проекции, длины, а также скалярные произведения векторов — числа вещественные. Однако в некоторых случаях возникает необходимость рассматривать векторы с комплексными проекциями. На первый взгляд кажется естественным в качестве скалярного произведения векторов с комплексными координатами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ взять снова выражение (1). В некоторых случаях так и поступают. Пространство, которое при этом получается, называют *комплексным евклидовым*. К сожалению, скалярное произведение теряет при этом много важных свойств и среди них в особенности свойство (г). В самом деле, для вектора

$$a = 3e_1 + 4ie_2 + 5ie_3 \qquad (i = \sqrt{-1})$$

формула (1) дает

$$(a, a) = 9 + 16i^2 + 25i^2 = 0$$

вопреки свойству (г). Чтобы избавиться от этого неудобства, принимают в качестве определения скалярного произведения комплексных векторов не выражение (1), а выражение

$$(a, b) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \alpha_3\bar{\beta}_3, \qquad (2)$$

где черта сверху означает переход к комплексно сопряженным числам. В случае, когда векторы a, b вещественные, имеем $\bar{\beta}_i = \beta_i$, и выражение (2) совпадает с (1). Таким образом, новое определение (2) является расширением старого. С другой стороны, свойство (г) при новом определении заведомо выполняется, так как из (2) следует:

$$(a, a) = \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \alpha_3\bar{\alpha}_3 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2,$$

где $|\alpha_i|$ — модуль числа α_i. Свойства (б), (в), как легко видеть, также выполняются. Что касается свойства (а), то оно для комплексных векторов имеет свой вид. Действительно, из (2) имеем

$$(b, a) = \beta_1\bar{\alpha}_1 + \beta_2\bar{\alpha}_2 + \beta_3\bar{\alpha}_3 = \overline{\alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \alpha_3\bar{\beta}_3},$$

или

$$(b, a) = \overline{(a, b)}. \qquad (a^*)$$

Пространство комплексных векторов, в котором скалярное произведение вычисляется по формуле (2), называется унитарным. Формула (а*) показывает, что свойства унитарного пространства, вообще говоря, отличаются от свойств обыкновенного пространства. Однако эти различия малосущественны. Во всяком случае, унитарное пространство по своим свойствам гораздо ближе подходит к общепринятому пространству, чем упомянутое выше комплексное евклидово пространство.

Рассуждения, которые мы здесь привели, нелишне назвать вполне отчетливыми. Кроме того, рассмотренное пространство было трехмерным. Поэтому нам теперь нужно дать вполне строгое определение унитарных пространств, пригодное и для пространств любой размерности.

В общей теории линейных пространств почти все делалось нами в предположении, что основное тело K совершенно произвольно. В настоящей главе в качестве K будет рассматриваться только либо поле всех комплексных, либо поле всех вещественных чисел.

Линейное пространство $\mathfrak{L}$ над полем K называется *унитарным*, если каждой паре векторов a, b из $\mathfrak{L}$, взятых в определенном порядке, поставлено в соответствие некоторое число из K, называемое *скалярным произведением* (a, b) вектора a на вектор b, обладающее следующими свойствами:

1° $(a, b) = \overline{(b, a)}$;
2° $(\alpha a, b) = \alpha (a, b)$;
3° $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$;
4° *если* $a \neq 0$, *то* $(a, a) > 0$.

В случае, когда основное поле K — поле вещественных чисел, унитарное пространство $\mathfrak{L}$ называется *вещественным унитарным* или *вещественным евклидовым* пространством. В этом случае отображение (a, b), очевидно, совпадает с (a, b) и аксиома 1° принимает более простой вид: $(a, b) = (b, a)$.

Если поле K есть поле комплексных чисел, то пространство $\mathfrak{L}$ называется *комплексным унитарным* пространством. В дальнейшем свойства вещественных евклидовых пространств и свойства комплексных унитарных пространств будут по большей части рассматриваться совместно, и под унитарным пространством будет подразумеваться, в соответствии с определением, либо вещественное, либо комплексное унитарное пространство.

Отметим также, что в определение унитарных пространств не требуется, чтобы пространство имело конечную размерность. Поэтому можно говорить и о бесконечномерных унитарных пространствах. Хотя некоторые свойства унитарных пространств не зависят от размерности последних, мы будем рассматривать лишь

конечномерные пространства, если противное не оговорено явно. Теория бесконечномерных пространств входит в особую математическую дисциплину — функциональный анализ.

Из свойств 1°, 3° следует, что

$$(\alpha a, \beta b) = \alpha(a, \beta b) = \alpha\overline{(\beta b, a)} = \alpha\bar{\beta}(b, a) = \alpha\bar{\beta}(a, b),$$

т. е.

$$(\alpha a, \beta b) = \alpha\bar{\beta}(a, b). \tag{3}$$

Аналогично из 1°—3° следует, что

$$(a, b + c) = \overline{(b + c, a)} = \overline{(b, a)} + \overline{(c, a)} = (a, b) + (a, c).$$

Отсюда обычным способом получаем общую формулу

$$\left(\sum \alpha_i a_i, \sum \beta_k b_k\right) = \sum\sum \alpha_i \bar{\beta}_k (a_i, b_k). \tag{4}$$

Соотношение (3) при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ дает

$$(a, 0) = (0, a) = 0.$$

Укажем два примера. Рассмотрим линейное пространство строк длины n с элементами из поля K. Условимся называть *скалярным произведением* строки $a = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ на строку $b = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$ выражение

$$(a, b) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n. \tag{5}$$

Из этого выражения видно, что

$$(a, a) = \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{\alpha}_n = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2. \tag{6}$$

Поскольку модули $|\alpha_i|$ — неотрицательные вещественные числа, сумма их квадратов будет неотрицательным вещественным числом, равным нулю только в случае равенства нулю всех слагаемых. Таким образом, свойство 4° здесь выполняется. Свойства 1°, 2°, 3°, очевидно, также выполняются, и пространство строк со скалярным произведением (5) является унитарным пространством размерности n над полем K. Этот пример имеет существенное значение, так как дальше будет показано, что все унитарные пространства размерности n над полем K изоморфны друг другу.

Примером унитарных пространств бесконечной размерности может служить пространство $\mathfrak{C}$ всех непрерывных функций $f(t)$ с комплексными значениями, определенных на отрезке $[0, 1]$. Сложение и умножение этих функций на число определяются обычным образом, а скалярное произведение функции $f(t)$ на функцию $g(t)$ определяется по формуле

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt. \tag{7}$$

Свойства 1°—4° легко доказываются, и, следовательно, пространство $\mathfrak{C}$ является унитарным. В этом примере основным полем является поле всех комплексных чисел. Если мы будем рассматривать только непрерывные функции с вещественными значениями, то в качестве основного поля нужно будет принять поле вещественных чисел. Формула (7) тогда запишется формулой

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt.$$

17.2. Длина вектора. Согласно аксиоме 4° скалярный квадрат (a, a) любого вектора есть неотрицательное вещественное число. Неотрицательное значение квадратного корня из этого числа называется *длиной* или *нормой* вектора a и обозначается $|a|$. Таким образом, согласно определению

$$|a| = \sqrt{(a, a)}.$$

Из этого определения непосредственно видно, что *нулевой вектор является единственным вектором, длина которого равна нулю.* Далее, если α — некоторое число, то

$$|\alpha a| = \sqrt{(\alpha a, \alpha a)} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}(a, a)} = |\alpha|\sqrt{(a, a)}, \tag{8}$$

т. е. *при умножении вектора на число длина вектора умножается на модуль этого числа.* Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* или *нормированным*. Равенства (8) показывают, что, умножив ненулевой вектор на число, обратное его длине, мы получим единичный вектор. Эта операция иногда называется *нормированием* вектора.

Мы переходим к доказательству важного неравенства, связывающего длины векторов с величиной скалярного произведения этих векторов.

Неравенство Коши — Буняковского. *Для любых двух векторов a, b унитарного пространства имеет место неравенство*

$$|(a, b)| \leqslant |a| \cdot |b|,$$

причем равенство здесь выполняется тогда и только тогда, когда a и b линейно зависимы.

Согласно аксиоме 4° для любого числа λ

$$(a - \lambda b, a - \lambda b) \geqslant 0, \tag{9}$$

откуда после перемножения получим

$$(a, a) - \lambda(a, b) - \bar{\lambda}(a, b) + \lambda\bar{\lambda}(b, b) \geqslant 0. \tag{10}$$

Если $b = 0$, то требуемое неравенство выполняется тривиальным образом, так как обе его части оказываются равными нулю.

Поэтому мы предположим, что $b \neq 0$. Подставим в неравенство (10) вместо λ число $\frac{(a, b)}{(b, b)}$ и умножим все члены неравенства на положительное число (b, b). В результате получим

$$(a, a)(b, b) - (a, b)(a, b) - (a, b)\overline{(a, b)} + (a, b)\overline{(a, b)} \geq 0,$$

или

$$(a, b)\overline{(a, b)} \leq (a, a)(b, b),$$

$$|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|. \tag{11}$$

Таким образом, неравенство Коши — Буняковского доказано.

Если a, b линейно независимы, то $a - \lambda b \neq 0$ и мы вместо (10) можем взять строгое неравенство

$$(a - \lambda b, a - \lambda b) > 0.$$

Но тогда во всех последующих неравенствах знак равенства можно отбросить, и мы получим вместо (11) неравенство

$$|(a, b)| < |a| \cdot |b|. \tag{12}$$

Если же a, b линейно зависимы, например $a = \alpha b$, то

$$|(a, b)| = |(\alpha b, b)| = |\alpha (b, b)| = |\alpha| \cdot |b|.$$

Следовательно, дополнительное замечание к неравенству Буняковского также доказано.

Посмотрим, что означает неравенство Буняковского в тех конкретных пространствах, которые были рассмотрены выше. Пусть $\mathfrak{L}$ — унитарное пространство строк. Возьмем какие-нибудь его векторы $a = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ и $b = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$. Согласно формуле (6) имеем

$$(a, b) = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\beta}_n,$$

$$|a| = \sqrt{|\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2}, \quad |b| = \sqrt{|\beta_1|^2 + \ldots + |\beta_n|^2}.$$

Неравенство Коши — Буняковского дает, следовательно, что

$$|\alpha_1\overline{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\beta}_n| \leq \sqrt{|\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2}\sqrt{|\beta_1|^2 + \ldots + |\beta_n|^2},$$

где α_i, β_i — любые комплексные числа.

Аналогично, если $\mathfrak{C}$ — упомянутое выше пространство функций, то неравенство Буняковского обращается в неравенство

$$\left|\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2\,dt \int_a^b |g(t)|^2\,dt.$$

Возвратимся к произвольным унитарным пространствам. Неравенство Коши — Буняковского позволит теперь весьма просто

доказать следующее предложение: *длина суммы векторов не превосходит суммы длин слагаемых*. Достаточно, очевидно, рассмотреть только случай двух слагаемых, так как общий случай из него следует по индукции. Мы имеем

$$|a + b|^2 = (a + b, a + b) =$$

$$= (a, a) + (a, b) + \overline{(a, b)} + (b, b) = (a, a) + 2\mathrm{Re}(a, b) + (b, b),$$

где через $\mathrm{Re}(a, b)$ обозначена вещественная часть (a, b). Так как

$$\mathrm{Re}(a, b) \leq |(a, b)| \leq |a| \cdot |b|,$$

то

$$|a + b|^2 \leq |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2,$$

откуда

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

что и требовалось.

Выражение $|a - b|$ иногда называют *расстоянием* между векторами a и b. Обозначив его символом $\rho(a, b)$, мы получим следующие соотношения:

1) $\rho(a, a) = 0$; $\rho(a, b) > 0$, если $a \neq b$;

2) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;

3) $\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$.

Доказательства их очевидны; например, для последнего имеем

$$\rho(a, c) = |a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c| =$$

$$= \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

17.3. **Ортонормированные системы.** Векторы a, b унитарного пространства $\mathfrak{L}$ называются *ортогональными*, если скалярное произведение a на b равно нулю. Если $\mathfrak{L}$ — обыкновенное пространство, то понятие ортогональности совпадает с понятием перпендикулярности. Поэтому ортогональность можно рассматривать как обобщение понятия перпендикулярности.

Из аксиомы 1° следует, что отношение ортогональности симметрично: если вектор a ортогонален к b, то b ортогонален к a. *Нулевой вектор*, очевидно, *ортогонален ко всякому вектору пространства и является единственным вектором, обладающим этим свойством*.

Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ унитарного пространства называется *ортогональной*, если любые ее два вектора a_i, a_k $(i \neq k)$ ортогональны. Если система содержит только один вектор, то мы ее также будем называть ортогональной.

Теорема 1. *Всякая ортогональная система ненулевых векторов унитарного пространства $\mathfrak{L}$ является линейно независимой.*

В самом деле, пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — ортогональная система ненулевых векторов и

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = 0.$$

Умножая это равенство скалярно на a_2, получим

$$\lambda_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) + \ldots + \alpha_m(a_m, a_2) = 0,$$

или

$$\alpha_2(a_2, a_2) = 0, \tag{13}$$

так как в силу ортогональности системы все остальные члены обратятся в нуль. Но $a_2 \neq 0$, следовательно, $(a_2, a_2) \neq 0$, и из (13) вытекает $\alpha_2 = 0$, что и требовалось.

Пусть размерность пространства $\mathfrak{L}$ равна n. Теорема 1 показывает, что в $\mathfrak{L}$ всякая ортогональная система ненулевых векторов не может содержать более n векторов. Если в ортогональных ненулевых векторов в $\mathfrak{L}$ найдутся, то они составят *ортогональную базу* пространства $\mathfrak{L}$. Покажем, что такая база в $\mathfrak{L}$ действительно существует. Более того, покажем, что *в каждом унитарном пространстве $\mathfrak{L}$ любая ортогональная система ненулевых векторов может быть дополнена до ортогональной базы пространства $\mathfrak{L}$*. Пусть в $\mathfrak{L}$ задана ортогональная система $a_1, \ldots, a_m$. Дополним ее до максимальной ортогональной системы $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_k$ ненулевых векторов. Такое пополнение возможно, так как согласно теореме 1 линейная ортогональная система не может содержать более n отличных от нуля векторов. Покажем, что $a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_k$ и есть искомая база пространства $\mathfrak{L}$. Рассмотрим произвольный вектор x из $\mathfrak{L}$. Введем обозначения

$$\xi_k = \frac{(x, a_k)}{(a_k, a_k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, k),$$

$$y = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_k a_k.$$

Умножая все члены последнего равенства скалярно на a_2, мы получим

$$(y, a_2) = (x, a_2),$$

откуда

$$(x - y, a_2) = (x, a_2) - (y, a_2) = 0.$$

Таким образом, вектор $x - y$ оказывается ортогональным ко всем векторам $a_1, \ldots, a_k$. По предположению система $a_1, \ldots, a_k$ является максимальной ортогональной системой ненулевых векторов $\mathfrak{L}$, следовательно, $x - y = 0$, т. е.

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_k a_k.$$

Итак, всякий вектор системы $a_1, \ldots, a_k$ обладает тем свойством, что через них любой вектор x выражается линейно. Но это и означает, что $a_1, \ldots, a_k$ — база пространства $\mathfrak{L}$.

Ортогональная система, состоящая из векторов единичной длины, называется *ортонормированной*. Нормируя ортогональные

ненулевые векторы, мы получим, очевидно, опять ортогональные векторы. Поэтому, нормируя векторы какой-либо ортогональной базы пространства, мы получим ортонормированную базу этого пространства. Мы видели, что всякую систему ненулевых ортогональных векторов можно дополнить до ортогональной базы пространства. Поэтому имеет место

Теорема 2. *Всякую ортонормированную систему векторов пространства $\mathfrak{L}$ можно дополнить до ортонормированной базы этого пространства.*

Так как любая система, содержащая только один вектор, является ортогональной, то отсюда, в частности, следует, что *в каждом унитарном пространстве существует ортонормированная база.*

Систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, рассматриваемых в определенной последовательности, мы назвали координатной системой в пространстве $\mathfrak{L}$, если $e_1, \ldots, e_n$ образуют базу пространства $\mathfrak{L}$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированная база, то и координатная система называется ортонормированной. Разница между произвольной и ортонормированной координатными системами такая же, как между косоугольной и прямоугольной декартовой системами координат в обыкновенном пространстве. Действительно, пусть $\mathfrak{R}$ — обыкновенное пространство векторов-отрезков с обычным скалярным произведением. Произвольная база пространства $\mathfrak{R}$ состоит из трех произвольных векторов a_1, a_2, a_3, выходящих из точки O и не лежащих в одной плоскости (см. рис. 1 на стр. 76). Возьмем некоторую точку A и выразим вектор $\overrightarrow{OA}$ через координатные векторы a_1, a_2, a_3. Пусть

$$\overrightarrow{OA} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3.$$

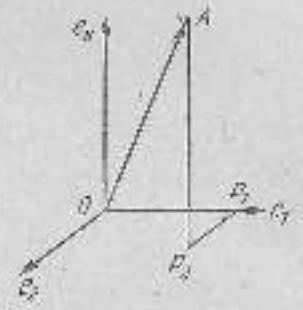


Рис. 4.

Согласно определению числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ являются координатами вектора $\overrightarrow{OA}$. В то же время декартовым видом, что эти числа являются координатами точки A, вычисленными в косоугольной декартовой системе координат с осями a_1, a_2, a_3, у которой по всем отложены в качестве единичных отрезков векторы a_1, a_2, a_3.

Таким образом, произвольная координатная система в $\mathfrak{R}$ с точки зрения аналитической геометрии равносильна некоторой декартовой системе координат с различными масштабами по координатным осям. Напротив, ортонормированная координатная система e_1, e_2, e_3 будет в этом смысле равносильна обыкновенной прямоугольной декартовой координатной системе с одинаковым масштабом на всех осях (рис. 4).

Ортонормированные координатные системы в унитарных пространствах обладают многими специальными свойствами. Часть из них мы теперь рассмотрим.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированная система координат в пространстве $\mathfrak{L}$, то координаты произвольного вектора a равны соответственным скалярным произведениям $(a, e_1), (a, e_2), \ldots, (a, e_n)$.

В самом деле, пусть

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Умножая это равенство скалярно на e_k и пользуясь тем, что $(e_j, e_k) = 0$ для $j \neq k$, мы получим

$$(a, e_k) = \alpha_k (e_k, e_k) = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

что и требовалось.

Если в ортонормированной координатной системе координаты векторов a, b равны соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, то

$$(a, b) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{\beta}_n. \tag{14}$$

Действительно, пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — заданная ортонормированная система координат и

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n.$$

Тогда

$$(a, b) = \left(\sum \alpha_j e_j, \sum \beta_k e_k\right) = \sum\sum \alpha_j \bar{\beta}_k (e_j, e_k) = \sum \alpha_j \bar{\beta}_j.$$

Неравенство Бесселя. *Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — произвольная ортонормированная система векторов унитарного пространства и a — какой-нибудь вектор, то, полагая*

$$(a, e_k) = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

будем иметь неравенство

$$(a, a) \geqslant |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2.$$

Мы дадим независимое доказательство этого неравенства, хотя оно легко вытекает и из предшествующих предложений. Составим вспомогательный вектор

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Мы имеем

$$(a - x, a - x) = (a, a) - (a, x) - (x, a) + (x, x) \geqslant 0, \tag{15}$$
$$(x, x) = \left(\sum \alpha_j e_j, \sum \alpha_k e_k\right) = \sum \alpha_j \bar{\alpha}_j, \tag{16}$$
$$(a, x) = \left(a, \sum \alpha_j e_j\right) = \sum \bar{\alpha}_j \bar{\alpha}_j, \tag{17}$$
$$(x, a) = \overline{(a, x)} = \sum \alpha_j \bar{\alpha}_j. \tag{18}$$

Подставляя значения (16), (17), (18) в неравенство (15), получим

$$(a, a) - \sum \bar{\alpha}_j \alpha_j - \sum \alpha_j \bar{\alpha}_j + \sum \alpha_j \bar{\alpha}_j \geqslant 0,$$

т. е.

$$(a, a) \geqslant \sum \alpha_j \bar{\alpha}_j,$$

что и требовалось.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированная база, то вместо неравенства Бесселя согласно (14) будем иметь равенство

$$(a, a) = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \alpha_2 \bar{\alpha}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{\alpha}_n,$$

которое называется равенством Парсеваля. Равенство Парсеваля является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы ортонормированная система $e_1, e_2, \ldots, e_n$ была базой.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — какая-нибудь ортонормированная система векторов пространства $\mathfrak{L}$ и для каждого вектора a из $\mathfrak{L}$

$$(a, a) = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \alpha_2 \bar{\alpha}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{\alpha}_n,$$

где $\alpha_j = (a, e_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — база пространства $\mathfrak{L}$.

Доказательство легко вытекает из предшествующих предложений и предоставляется читателю.

Существование в каждом унитарном пространстве ортонормированной базы было указано выше с помощью косых проекций. Однако имеется прямой способ, позволяющий из любой базы пространства получить некоторую ортонормированную базу. Этот способ носит название процесса ортогонализации Грама—Шмидта и часто используется при рассмотрении пространств функций. Сущность его заключается в следующем. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — какая-нибудь линейно независимая система векторов унитарного пространства $\mathfrak{L}$. Поставим себе целью построить такую ортонормированную последовательность векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, чтобы каждый k-й вектор e_k выражался линейно через k первых векторов $a_1, \ldots, a_k$. Построение будем вести индуктивно. Вектор e_1 по условию должен выражаться через a_1 и иметь длину 1. Такой вектор мы получим, нормируя a_1:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{(a_1, a_1)}} a_1.$$

Теперь мы предположим, что для некоторого j векторы $e_1, \ldots, e_j$, обладающие требуемыми свойствами, уже построены. Вторая задача e_{j+1}. Сначала подберем числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ так, чтобы вспомогательный вектор

$$e'_{j+1} = a_{j+1} - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_j e_j \tag{19}$$

был ортогонален к векторам $e_1, e_2, \ldots, e_j$. Умножая (19) скалярно на e_k $(k = 1, 2, \ldots, j)$, мы видим, что для этого необходимо, чтобы

$$\alpha_k = -(a_{j+1}, e_k), \tag{20}$$

Обратно, беря для e_k значения из (20) и подставляя в (19), мы получим вектор e'_{k+1}, ортогональный к $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Так как e_{k+1} не может оказаться линейно через $e_1, \ldots, e_k$ (следовательно, не может быть линейно выражен ненулевой вектор e'_{k+1}), то e'_{k+1} отличен от нуля, и его поэтому можно нормировать. Положим

$$e_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{(e'_{k+1}, e'_{k+1})}} e'_{k+1}. \tag{21}$$

Соотношения (21) и (19) показывают, что e_{k+1} выражается линейно через $e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}$. Вместе с тем e_{k+1} нормирован и ортогонален ко всем $e_1, \ldots, e_k$. Следовательно, предположение индукции выполнено, и мы можем сказать, что последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_m$ построена. Если исходная система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ была базой пространства $\mathfrak{L}$, значит, и последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_m$ полученной ортогональности будет базой пространства $\mathfrak{L}$.

17.4. **Изоморфизм.** В п. 4.3 мы условились два линейных пространства называть изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее операции сложения и умножения на число. В унитарных пространствах к этим операциям добавляется еще скалярное умножение. Поэтому унитарные пространства естественно назвать изоморфными только в том случае, если они ведут себя одинаково по отношению ко всем трем упомянутым операциям.

Определение. *Два унитарных пространства $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1$ над одним и тем же полем коэффициентов называются изоморфными, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором сумма двух векторов из $\mathfrak{L}$ переходит в сумму соответствующих векторов из $\mathfrak{L}_1$, произведение числа на вектор из $\mathfrak{L}$ переходит в произведение того же числа на соответствующий вектор из $\mathfrak{L}_1$ и скалярные произведения соответствующих пар векторов из $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$ равны друг другу.*

Нас будут интересовать только такие свойства унитарных пространств, которые являются свойствами трех основных операций, действующих в этих пространствах, и не зависят от природы элементов, составляющих пространства. С этой точки зрения изоморфные унитарные пространства будут иметь одинаковые свойства. Отсюда видна важность классификации всех унитарных пространств с точностью до изоморфизма. Эта классификация не отличается от классификации линейных пространств и дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Для того чтобы два унитарных пространства над одним и тем же полем коэффициентов были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы были равны размерности этих пространств.*

В самом деле, если два унитарных пространства $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$ изоморфны, то они будут изоморфны и как линейные пространства,

т. е. по отношению к операциям сложения и умножения на число. Однако изоморфные линейные пространства имеют одинаковую размерность, следовательно, размерности пространств $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$ равны. Необходимость доказана. Обратно, пусть известно, что размерности пространств $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$ равны. Выберем в $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$ ортонормированные базы $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$. Условимся вектору $x \in \mathfrak{L}$ и $x' \in \mathfrak{L}_1$ называть *соответственным*, если их координаты в выбранных базах одинаковы. Это соответствие взаимно однозначное и сохраняет операции сложения и умножение на число (п. 4.3). Поэтому нам нужно только доказать, что скалярные произведения соответственных пар векторов одинаковы. Рассмотрим два произвольных вектора

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

в пространстве $\mathfrak{L}$. Соответственные векторы из $\mathfrak{L}_1$ будут

$$a' = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \ldots + \alpha_n e'_n,$$
$$b' = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \ldots + \beta_n e'_n.$$

Так как базы $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ ортонормированные, то по формуле (14)

$$(a, b) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{\beta}_n = (a', b'),$$

что и требовалось.

17.5. **Ортогональные суммы. Проекция.** Два множества векторов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ унитарного пространства $\mathfrak{L}$ называются *ортогональными*, если каждый вектор первого множества ортогонален к каждому вектору второго. В частности, говорят, что вектор a ортогонален к множеству $\mathfrak{M}$, если a ортогонален к каждому вектору из $\mathfrak{M}$. Ортогональность $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ иногда обозначается символически в виде $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$.

Если множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ ортогональны, то их пересечение либо пусто, либо состоит только из нулевого вектора.

В самом деле, если вектор a содержится в $\mathfrak{M}$ и в $\mathfrak{N}$, то $(a, a) = 0$, откуда $a = 0$.

Сумма нескольких линейных подпространств $\mathfrak{N}_1 + \ldots + \mathfrak{N}_m$ называется *ортогональной*, если каждые два подпространства $\mathfrak{N}_j, \mathfrak{N}_k$ $(j \neq k)$ ортогональны.

Ортогональная сумма любого конечного числа подпространств всегда является прямой суммой.

Действительно, если сумма содержит только два слагаемых, то их пересечение в силу предыдущего замечания состоит только из нулевого вектора и, следовательно, сумма прямая. В общем случае доказательство ведется по индукции.

Если сумма

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \ldots + \mathfrak{N}_s$$

ортогональна к

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_s,$$
$$b = b_1 + b_2 + \ldots + b_s,$$

где $a_j \in \mathfrak{N}_j$, $b_j \in \mathfrak{N}_j$, $j = 1, \ldots, s$, *то*

$$(a, b) = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) + \ldots + (a_s, b_s). \qquad (22)$$

В самом деле, так как $\mathfrak{N}_j \perp \mathfrak{N}_k$ при $j \neq k$, то $(a_j, b_k) = 0$. Следовательно,

$$(a, b) = \left(\sum a_j, \sum b_j\right) = \sum\sum (a_j, b_k) = \sum (a_j, b_j),$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь произвольное непустое множество векторов $\mathfrak{M}$ некоторого унитарного пространства $\mathfrak{L}$. Совокупность всех векторов пространства $\mathfrak{L}$, ортогональных к $\mathfrak{M}$, называется *ортогональным дополнением* множества $\mathfrak{M}$ и обозначается $\mathfrak{M}^\perp$.

Ортогональное дополнение любого непустого множества $\mathfrak{M}$ *является линейным подпространством.*

В самом деле, если a, b принадлежат ортогональному дополнению $\mathfrak{M}^\perp$, а c — произвольный вектор из $\mathfrak{M}$, то

$$(\alpha a + \beta b, c) = \alpha (a, c) + \beta (b, c) = 0,$$

Следовательно, при любых α, β вектор $\alpha a + \beta b$ содержится в $\mathfrak{M}^\perp$ и $\mathfrak{M}^\perp$ является линейным подпространством.

Теорема 4. *Унитарное пространство есть прямая сумма любого своего линейного подпространства* $\mathfrak{N}$ *и его ортогонального дополнения* $\mathfrak{N}^\perp$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — ортонормированная база подпространства $\mathfrak{N}$, $e_{m+1}, \ldots, e_n$ — ортонормированная база подпространства $\mathfrak{N}^\perp$. Для доказательства теоремы достаточно обнаружить, что $e_1, \ldots, e_m, \ldots, e_n$ есть база пространства $\mathfrak{L}$. Допустим, наоборот, что система $e_1, \ldots, e_n$ не есть база пространства $\mathfrak{L}$. Тогда согласно теореме 2 ее можно дополнить до ортонормированной базы пространства $\mathfrak{L}$. Пусть e — один из этих дополнительных векторов. Так как e ортогонален ко всем векторам $e_1, \ldots, e_m$, то e содержится в $\mathfrak{N}^\perp$. Следовательно, $\mathfrak{N}^\perp$ содержит ортонормированную и поэтому линейно независимую систему векторов $e_{m+1}, \ldots, e_n, e$. Однако это противоречит нашему предположению, что $e_{m+1}, \ldots, e_n$ является базой для $\mathfrak{N}^\perp$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 вытекает, в частности, что

$$\mathfrak{N}^{\perp\perp} = \mathfrak{N}. \qquad (23)$$

Действительно, $\mathfrak{N}^{\perp\perp}$ заведомо содержит $\mathfrak{N}$. С другой стороны, по теореме 4 для любого x из $\mathfrak{N}^{\perp\perp}$ имеем

$$x = a + b, \quad a \in \mathfrak{N}, \quad b \in \mathfrak{N}^\perp,$$

Умножая это равенство скалярно на b, получим $(b, b) = 0$, т. е. $b = 0$, $x = a$. Следовательно, $\mathfrak{N}^{\perp\perp} = \mathfrak{N}$.

Определим, наконец, еще понятие ортогональной проекции вектора на линейное подпространство. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое линейное подпространство унитарного пространства $\mathfrak{L}$. Согласно теореме 4 $\mathfrak{L}$ есть прямая сумма подпространства $\mathfrak{N}$ и его ортогонального дополнения $\mathfrak{N}^\perp$. Следовательно, всякий вектор x из $\mathfrak{L}$ может быть одним и только одним способом представлен в виде суммы

$$x = a + b \quad (a \in \mathfrak{N}, \ b \in \mathfrak{N}^\perp). \qquad (24)$$

Слагаемое a называется *проекцией вектора* x *на подпространство* $\mathfrak{N}$. Так как формула (24) показывает, что $\mathfrak{N}$ является ортогональным дополнением к $\mathfrak{N}^\perp$, то в равенстве (24) слагаемое b будет проекцией вектора x на подпространство $\mathfrak{N}^\perp$.

Умножая (24) на число λ, получим

$$\lambda x = \lambda a + \lambda b \quad (\lambda a \in \mathfrak{N}, \ \lambda b \in \mathfrak{N}^\perp),$$

т. е. *проекция произведения числа на вектор равна произведению этого числа на проекцию вектора.*

Аналогично доказывается и утверждение, что *проекция суммы векторов на некоторое подпространство равна сумме проекций слагаемых на это подпространство.*

Примеры и задачи

1. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированная система координат трехмерного унитарного пространства. Показать, что система векторов

$$a_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3),$$
$$a_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3),$$
$$a_3 = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 - 2e_3)$$

также образует ортонормированную систему координат этого пространства.

2. В унитарном пространстве $\mathfrak{L}$ выбрана ортонормированная система координат $e_1, \ldots, e_n$. Показать, что система векторов $a_1, \ldots, a_n$ тогда и только тогда будет ортонормированной базой пространства $\mathfrak{L}$, когда матрица, составленная из координатных строк этих векторов, унитарна (см. п. 13).

3. Если $a_1, \ldots, a_m$ — ортонормированная база линейного подпространства $\mathfrak{N}$, то проекция вектора x на $\mathfrak{N}$ равна

$$(x, a_1)a_1 + (x, a_2)a_2 + \ldots + (x, a_m)a_m.$$

4. В пространстве всех многочленов от x степени не выше n скалярное произведение определяется по формуле (7) п. 13.1. Показать, что это будет унитарное пространство размерности $n+1$. Показать, что, ортогонализуя в этом пространстве по Шмидту последовательность $1, x, x^2, \ldots$, мы получим многочлены $1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1), \ldots$

3. Определителем Грама системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n-мерного унитарного пространства $\mathfrak{L}$ называется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & \ldots & (a_n, a_n) \end{vmatrix}.$$

Пусть в $\mathfrak{L}$ выбрана ортонормированная система координат. Показать, что определитель Грама Δ равен квадрату модуля определителя, составленного из координат строк-векторов $a_1, \ldots, a_n$. Показать также, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тогда и только тогда линейно независимы, если их определитель Грама отличен от нуля.

4. Истолковать геометрически полное ортогонализирование Грама — Шмидта в обыкновенном трехмерном пространстве векторов-отрезков.

§ 18. Сопряженные преобразования

18.1. Линейные функции. Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольное конечномерное линейное пространство над полем K. Поставим каждому вектору x из $\mathfrak{L}$ в соответствие некоторое число $f(x)$ из K. Соответствия такого вида были названы в п. 4.1 функциями, определенными на $\mathfrak{L}$, со значениями в K. Функция $f(x)$ называется *линейной*, если для произвольных x, y из $\mathfrak{L}$ и произвольных α, β из K

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y). \tag{1}$$

Подставляя в (1) $\alpha = \beta = 0$, мы получим

$$f(0) = 0.$$

По этой причине иногда вместо «линейная функция» говорят «линейная *однородная* функция».

Легко видеть, что *сумма линейных функций и произведение числа на линейную функцию — снова линейная функция*. Проверим, например, первое утверждение. Пусть $f = g + h$, где g и h — линейные функции. Согласно определению

$$f(\alpha x + \beta y) = g(\alpha x + \beta y) + h(\alpha x + \beta y) = \\ = \alpha g(x) + \beta g(y) + \alpha h(x) + \beta h(y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

что и требовалось.

Нам уже известно, что действия сложения функций и умножение их на число удовлетворяют аксиомам линейного пространства. Так как сумма линейных функций и произведение линейной функции на число являются снова линейными функциями, то совокупность всех линейных функций, определенных на векторном пространстве $\mathfrak{L}$, сама является линейным пространством. Это пространство называется *сопряженным* пространством по отношению к $\mathfrak{L}$ и обозначается $\mathfrak{L}^*$.

Из равенства (1), характеризующего линейные функции, непосредственно вытекает более общее соотношение

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = \\ = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n), \tag{2}$$

доказательство которого мы опустим в силу его очевидности. Следующие теоремы в значительной мере выясняют строение линейных функций.

Теорема 1. *Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — какая-нибудь координатная система в линейном пространстве $\mathfrak{L}$. Зафиксируем произвольную последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из K. Тогда найдется одна и только одна линейная функция $f(x)$, определенная на $\mathfrak{L}$ и удовлетворяющая условиям*

$$f(e_i) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть x — вектор из $\mathfrak{L}$,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n. \tag{4}$$

Ставя этому вектору в соответствие число $\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n$, мы получим некоторую функцию $f(x)$ на $\mathfrak{L}$. Согласно определению

$$f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n.$$

Полагая здесь $x = e_i$, мы будем иметь $f(e_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. С другой стороны, если

$$g = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n \tag{5}$$

то

$$f(g) = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \ldots + \alpha_n \eta_n.$$

Из (4) и (5) следует:

$$\alpha x + \beta y = (\alpha \xi_1 + \beta \eta_1) e_1 + \ldots + (\alpha \xi_n + \beta \eta_n) e_n,$$

откуда

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha_1 (\alpha \xi_1 + \beta \eta_1) + \ldots + \alpha_n (\alpha \xi_n + \beta \eta_n) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Таким образом, $f(x)$ — линейная функция.

Мы доказали, что линейная функция, удовлетворяющая условиям (3), существует. Покажем, что она единственная. Пусть $g(x)$ — линейная функция, для которой $g(e_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда для произвольного вектора x с координатами $\xi_1, \ldots, \xi_n$ мы будем иметь

$$g(x) = g(\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) = \xi_1 g(e_1) + \ldots + \xi_n g(e_n) = \\ = \xi_1 \alpha_1 + \ldots + \xi_n \alpha_n,$$

т. е. $g(x) = f(x)$.

Теорема 1 была доказана для произвольных линейных пространств $\mathfrak{L}$. Если пространство $\mathfrak{L}$ унитарное, то линейные функции на $\mathfrak{L}$ получают весьма простое выражение через скалярное произведение.

Теорема 2. *Скалярное произведение (x, a) векторов унитарного пространства $\mathfrak{L}$ при фиксированном a является линейной функцией от x. Для самых разных векторов a из $\mathfrak{L}$ описанием в совокупности линейная функция, определенная на $\mathfrak{L}$. Различные векторы дают при этом различные линейные функции, и все линейные функции на $\mathfrak{L}$ таким способом получаются.*

Первое утверждение очевидно, так как из $f(x)=(x, a)$ следует:

$$f(\alpha x+\beta y)=(\alpha x+\beta b, a)=\alpha(x, a)+\beta(y, a)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

Докажем второе утверждение. Если бы, вопреки ему, различным векторам a и b отвечала одна и та же линейная функция, то это означало бы, что равенство $(x, a)=(x, b)$ имеет место при любых x из $\mathfrak{L}$. Перенося члены в одну сторону, можно представить его в форме $(x, a-b)=0$, откуда, полагая $x=a-b$, получим $(a-b, a-b)=0$. Однако нулевой вектор является единственным, скалярный квадрат которого равен нулю, так что $a-b=o$, или $a=b$. Нам остается доказать третье утверждение, именно что всякая линейная функция $f(x)$, определенная на $\mathfrak{L}$, может быть представлена в форме

$$f(x)=(x, a), \tag{6}$$

где a зависит от f, а x — произвольный вектор из $\mathfrak{L}$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность тех векторов, для которых $f(x)=0$. Так как $f(o)=0$, то o заведомо содержится в $\mathfrak{N}$. Далее, если векторы a и b содержатся в $\mathfrak{N}$, то

$$f(\alpha a+\beta b)=\alpha f(a)+\beta f(b)=0,$$

т. е. и $\alpha a+\beta b$ содержится в $\mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{N}$ есть линейное подпространство пространства $\mathfrak{L}$. Если $\mathfrak{N}=\mathfrak{L}$, то $f(x)=0$ для всех x. Чтобы удовлетворить требованию (6), нам достаточно в этом случае взять $a=o$. Предположим теперь, что $\mathfrak{N}\neq\mathfrak{L}$. Выберем какой-либо ненулевой вектор b из $\mathfrak{L}$, ортогональный к $\mathfrak{N}$, и постараемся найти такое число α, чтобы вектор $a=\alpha b$ удовлетворял соотношению (6). Пусть $f(b)=\beta$, $f(x)=\lambda$, где x — произвольный вектор из $\mathfrak{L}$. Имеем

$$f\left(x-\frac{\lambda}{\beta}b\right)=f(x)-\frac{\lambda}{\beta}f(b)=0.$$

Обозначив разность $x-\frac{\lambda}{\beta}b$ через c, мы видим, что c входит в $\mathfrak{N}$

и $x=c+\frac{\lambda}{\beta}b$. Отсюда

$$(x, a)=\left(c+\frac{\lambda}{\beta}b, \alpha b\right)=\frac{\alpha\lambda}{\beta}(b, b)=\lambda\ (c, b).$$

Так как вектор b ортогонален к $\mathfrak{N}$, то $(c, b)=0$ и, следовательно,

$$(x, a)=\frac{\alpha\lambda}{\beta}(b, b). \tag{7}$$

Равенство (7) показывает, что если мы примем $\alpha=\overline{\beta}(b, b)^{-1}$, то для любого x будем иметь

$$(x, a)=\lambda=f(x),$$

что и требовалось.

16.2. Сопряженные преобразования. Мы теперь воспользуемся результатами предыдущего пункта, чтобы для каждого линейного преобразования унитарного пространства построить однозначно определенное новое преобразование, называемое *сопряженным* по отношению к старому.

Пусть $\mathscr{A}$ — линейное преобразование унитарного пространства $\mathfrak{L}$. Выберем в $\mathfrak{L}$ произвольный вектор y и рассмотрим выражение

$$f(x)=(x\mathscr{A}, y), \tag{8}$$

где x — переменный вектор. Так как

$$f(\alpha x+\beta z)=((\alpha x+\beta z)\mathscr{A}, y)=(\alpha\cdot x\mathscr{A}+\beta\cdot z\mathscr{A}, y)=\alpha f(x)+\beta f(z),$$

то $f(x)$ — линейная функция. Поэтому $f(x)$ можно представить согласно теореме 2 в виде

$$f(x)=(x, a), \tag{9}$$

где вектор a однозначно определяется функцией $f(x)$, т. е. преобразованием $\mathscr{A}$ и вектором y. Если рассматривать $\mathscr{A}$ как заданное преобразование, а вектор y менять, то для каждого вектора y получится свой вполне определенный вектор a. Преобразование, переводящее y в a, обозначается $\mathscr{A}^*$ и называется сопряженным к $\mathscr{A}$; таким образом, $a=y\mathscr{A}^*$. Подставляя это значение в (9) и сравнивая с (8), мы получим соотношение

$$(x\mathscr{A}, y)=(x, y\mathscr{A}^*), \tag{10}$$

имеющее место для произвольных векторов x, y из $\mathfrak{L}$.

Свойство (10) вполне характеризует сопряженное преобразование $\mathscr{A}^*$. В самом деле, пусть какое-либо преобразование $\mathscr{U}$ обладает тем же свойством, т. е. для любых x, y

$$(x\mathscr{A}, y)=(x, y\mathscr{U}).$$

ибо

$$(x,\ y\mathscr{A}^*) - (x,\ y\mathscr{B}) = (x,\ y\mathscr{A}^* - y\mathscr{B}) = 0.$$

Это означает, что вектор $y\mathscr{A}^* - y\mathscr{B}$ ортогонален ко всему пространству, откуда

$$y\mathscr{A}^* = y\mathscr{B}.$$

Последнее равенство имеет место для всех y, следовательно, $\mathscr{A}^* = \mathscr{B}$.

Теперь нетрудно доказать, что *сопряженное преобразование $\mathscr{A}^*$ является линейным*. Действительно, на основании (10)

$$(x,\ (\alpha y + \beta z)\mathscr{A}^*) = (x\mathscr{A},\ \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x\mathscr{A},\ y) + \bar{\beta}(x\mathscr{A},\ z) =$$
$$= \alpha(x,\ y\mathscr{A}^*) + \beta(x,\ z\mathscr{A}^*) = (x,\ \alpha \cdot y\mathscr{A}^* + \beta \cdot z\mathscr{A}^*)$$

при любых значениях вектора x. В силу второго утверждения теоремы 2 это влечет за собой равенство

$$(\alpha y + \beta z)\mathscr{A}^* = \alpha \cdot y\mathscr{A}^* + \beta \cdot z\mathscr{A}^*,$$

которое и означает, что $\mathscr{A}^*$ линейно.

Операция перехода к сопряженному преобразованию обладает следующими свойствами:

а) $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$,
б) $(\alpha\mathscr{A})^* = \bar{\alpha}\mathscr{A}^*$,
в) $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$,
г) $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Все эти свойства доказываются одним и тем же способом, поэтому мы ограничимся доказательством только одного из них.

Например,

$$(x\mathscr{A}\mathscr{B},\ y) = (x\mathscr{A},\ y\mathscr{B}^*) = (x,\ y\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*),$$

следовательно, $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Отметим здесь же, что сопряженное преобразование для единичного и нулевого преобразований совпадает с ними самими. Действительно,

$$(x\mathscr{E},\ y) = (x,\ y),\quad (x,\ y\mathscr{E}) = (x,\ y),\quad (x\mathscr{O},\ y) = 0 = (x,\ y\mathscr{O}).$$

Посмотрим, как связаны матрицы сопряженных преобразований. Выберем в пространстве $\mathfrak{L}$ *ортонормированную* систему координат $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ и пусть

$$e_i\mathscr{A} = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \ldots + a_{in}e_n,$$
$$e_i\mathscr{A}^* = \beta_{i1}e_1 + \beta_{i2}e_2 + \ldots + \beta_{in}e_n \quad (i = 1,\ \ldots,\ n).$$

Умножая эти равенства скалярно на e_j и пользуясь ортонормированностью системы $e_1,\ \ldots,\ e_n$, мы получим

$$(e_i\mathscr{A},\ e_j) = a_{ij},\ (e_i\mathscr{A}^*,\ e_j) = \beta_{ij} \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда

$$a_{ij} = (e_i\mathscr{A},\ e_j) = (e_i,\ e_j\mathscr{A}^*) = \overline{(e_j\mathscr{A}^*,\ e_i)} = \bar{\beta}_{ji}.$$

Следовательно, если матрица преобразования $\mathscr{A}$ есть A, то матрица сопряженного преобразования $\mathscr{A}^*$ будет равна $\bar{A}'$. Мы получили следующую теорему:

Теорема 3. *Если линейное преобразование $\mathscr{A}$ одного ортонормированного базиса имеет матрицу A, то сопряженное преобразование $\mathscr{A}^*$ будет иметь в этом базисе сопряженно-транспонированную матрицу $\bar{A}'$.*

Операция перехода к сопряженным преобразованиям обладает свойствами а), б), в), г). На основании теоремы 3 мы заключаем, что теми же свойствами будет обладать и операция перехода к сопряженно-транспонированным матрицам. Этот результат легко получается и непосредственной проверкой (ср. п. 1.3).

18.3. Нормальные преобразования. Рядом замечательных свойств обладают линейные преобразования унитарного пространства, перестановочные со своими сопряженными, для которых, таким образом, имеет место соотношение

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A}.$$

Эти преобразования называются *нормальными*. Вспомним, что в ортонормированной координатной системе сопряженные преобразования имеют сопряженно-транспонированные матрицы, мы непосредственно приходим к выводу, что те и только те линейные преобразования унитарного пространства нормальны, матрицы которых в ортонормированных базисах удовлетворяют соотношению

$$AA' = \bar{A}'A.$$

Столь же просто получаются и следующие свойства нормальных преобразований:

Теорема 4. *Всякий собственный вектор e нормального преобразования $\mathscr{A}$, принадлежащий собственному значению ρ, будет собственным вектором и сопряженного преобразования $\mathscr{A}^*$, но принадлежащим комплексно сопряженному собственному значению $\bar{\rho}$.*

Нам дано:

$$e\mathscr{A} = \rho e,\quad \mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A},\quad e \neq 0.$$

Отсюда

$$0 = (e\mathscr{A} - \rho e,\ e(\mathscr{A} - \rho\mathscr{E})) = (e(\mathscr{A} - \rho\mathscr{E})(\mathscr{A}^* - \bar{\rho}\mathscr{E}),\ e) =$$
$$= (e(\mathscr{A}^* - \bar{\rho}\mathscr{E})(\mathscr{A} - \rho\mathscr{E}),\ e) = (e(\mathscr{A}^* - \bar{\rho}\mathscr{E}),\ e(\mathscr{A} - \rho\mathscr{E})),$$

или

$$e(\mathscr{A}^* - \bar{\rho}\mathscr{E}) = 0,$$

что и требовалось.

Теорема 5. *Собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям нормального преобразования $\mathscr{A}$, ортогональны.*

Пусть

$$a\mathscr{A} = \rho a, \quad b\mathscr{A} = \sigma b \quad (\rho \neq \sigma).$$

Тогда

$$\rho(a, b) = (a\mathscr{A}, b) = (a, b\mathscr{A}^*) = \sigma(a, b),$$

т. е.

$$(\rho - \sigma)(a, b) = 0, \quad (a, b) = 0.$$

Лишь немногим более сложно доказывается следующая основная

Теорема 6. *В комплексном унитарном пространстве для каждого нормального преобразования $\mathscr{A}$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathscr{A}$; матрица $\mathscr{A}$ имеет в этом базисе диагональный вид.*

Для доказательства берем в исходном пространстве $\mathfrak{L}$ какой-либо собственный вектор $a_1 \neq 0$ преобразования $\mathscr{A}$ и обозначаем через $\mathfrak{L}_1$ подпространство, ортогональное к a_1. Если

$$x_1\mathscr{A} = \rho_1 a_1, \quad x \in \mathfrak{L}_1,$$

то

$$(a_1, x\mathscr{A}) = (a_1\mathscr{A}^*, x) = \bar{\rho}_1 (a_1, x) = 0,$$

т. е. подпространство $\mathfrak{L}_1$ инвариантно относительно $\mathscr{A}$. Из инвариантности $\mathfrak{L}_1$ следует, что в нем найдется некоторый собственный вектор a_2 преобразования $\mathscr{A}$. Обозначаем через $\mathfrak{L}_2$ подпространство всех векторов из $\mathfrak{L}$, ортогональных к a_2, и полагаем $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$. Так как $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ инвариантны относительно $\mathscr{A}$, то инвариантным будет и подпространство $\mathfrak{L}_2$, в котором поэтому снова найдется ненулевой собственный вектор a_3 преобразования $\mathscr{A}$. Обозначая через $\mathfrak{L}_3$ совокупность всех векторов $\mathfrak{L}$, ортогональных к a_3, и полагая $\mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 \cap \mathfrak{L}_3$, получим инвариантное подпространство векторов, ортогональных к a_1, a_2, a_3. Продолжая процесс, получим искомый ортогональный базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пространства $\mathfrak{L}$, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathscr{A}$.

Выраженное в теореме 6 свойство нормальных преобразований комплексных пространств характеристично для этих преобразований. Действительно, если в некотором ортонормированном базисе матрица A преобразования $\mathscr{A}$ диагональна, то матрица A' сопряженного преобразования будет также диагональна, а значит и перестановочна с A.

В вещественных унитарных пространствах положение несколько иное. Чтобы разобраться в нем, докажем сначала одно общее предложение, относящееся к произвольным вещественным линейным преобразованиям.

Теорема 7. *Каждое линейное преобразование $\mathscr{A}$ вещественного ненулевого пространства оставляет по меньшей мере одно инвариантное подпространство размерности 1 или 2.*

Если характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ преобразования $\mathscr{A}$ имеет вещественный корень α, то $\mathscr{A}$ имеет в $\mathfrak{L}$ ненулевой собственный вектор. Подпространство, натянутое на этот вектор, и будет искомым одномерным инвариантным подпространством.

Предположим теперь, что $\varphi(\lambda)$ вещественных корней не имеет. В таком случае $\varphi(\lambda)$ будет иметь пару сопряженных комплексных корней $\alpha = \beta + i\gamma$, $\bar{\alpha} = \beta - i\gamma$, так как коэффициенты многочлена $\varphi(\lambda)$ вещественны. Выберем в $\mathfrak{L}$ какую-нибудь координатную систему $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и пусть A — матрица преобразования $\mathscr{A}$ в этой системе. Рассмотрим уравнение

$$[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] A = \alpha [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n], \tag{11}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — некоторые неизвестные, значения которых будем искать в поле комплексных чисел. Уравнение (11) можно переписать в виде

$$[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n](\alpha E - A) = O,$$

где E — единичная матрица, а O — нулевая строка. Это уравнение равносильно системе линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с матрицей $(\alpha E - A)'$ (см. п. 11.4). Так как определитель этой матрицы есть $\varphi(\alpha)$ и, следовательно, равен нулю, то уравнение (11) будет иметь в поле комплексных чисел ненулевое решение, которое мы обозначим теми же буквами $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Положим для краткости

$$[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] = x,$$

так что соотношение (11) примет вид

$$xA = \alpha x. \tag{12}$$

Переходя здесь к комплексно сопряженным числам, получим $\bar{x}A = \bar{\alpha}\bar{x}$. Но матрица A имеет вещественные элементы, поэтому $\bar{A} = A$ и

$$\bar{x}A = \bar{\alpha}\bar{x}. \tag{13}$$

Так как строки $x + \bar{x}$, $i(x - \bar{x})$ вещественны, то в пространстве $\mathfrak{L}$ найдутся векторы a, b, координатные строки которых будут соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} [a] &= \frac{1}{2}(x + \bar{x}), \\ [b] &= \frac{1}{2i}(x - \bar{x}). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Выражая отсюда x и y через $[a]$, $[b]$ и подставляя (12), (13), придем к соотношениям

$$\begin{aligned}[a]A &= \gamma[a] - \alpha[b],\\ [b]A &= \alpha[a] + \gamma[b]\end{aligned} \qquad (\alpha = \varphi + i\psi).$$

Эти соотношения равносильны равенствам

$$\left.\begin{aligned} a\mathscr{A} &= \gamma a - \alpha b,\\ b\mathscr{A} &= \alpha a + \gamma b,\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

показывающим, что подпространство, натянутое на векторы a, b, инвариантно относительно преобразования $\mathscr{A}$. Теорема доказана.

Допустим теперь, что рассматриваемое пространство $\mathfrak{L}$ является вещественным унитарным, $\mathscr{A}$ — некоторое его нормальное преобразование, характеристический многочлен которого $\chi(\lambda)$ имеет два сопряженных невещественных корня $\varphi + i\psi$ и $\varphi - i\psi$ ($\psi \neq 0$). Выберем в $\mathfrak{L}$ в качестве координатной системы $e_1, \ldots, e_n$ какой-нибудь *ортонормированный* базис и повторяя предыдущее построение, получим в $\mathfrak{L}$ single векторы a, b, связанные соотношениями (15). Покажем, что теперь векторы a, b будут *ортогональными*. В самом деле, для нахождения этих векторов нам пришлось рассматривать пространство строк $\bar{\mathfrak{L}}$ над полем комплексных чисел. Это пространство строк мы можем считать унитарным, приняв в соответствии с п. 17.1 в качестве скалярного произведения строк $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ и $[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ выражение $\xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\bar{\eta}_n$. Строки $[e_1], \ldots, [e_n]$ составляют ортонормированный базис в $\bar{\mathfrak{L}}$. Преобразование, состоящее в умножении строк на матрицу A, будет линейным преобразованием, матрица которого в указанном базисе будет совпадать с A. Так как $\bar{A} = A$, то рассматриваемое преобразование унитарно, и строки x, z, найденные в доказательстве теоремы 7, будут собственными векторами, отвечающими различным собственным значениям $\varphi + i\psi$ и $\varphi - i\psi$. На основании теоремы 6 имеем $(x, y) = 0$, откуда

$$([a], [b]) = \frac{1}{i}(x + \bar{x}, x - \bar{x}) = 0,$$

т. е. $(a, b) = 0$. Выбирая в качестве x вектор длины $1/\sqrt{2}$, мы получим из (14), что a, b будут иметь длину 1.

Докажем еще, что подпространство в $\mathfrak{L}$, ортогональное к a и b, будет инвариантным относительно $\mathscr{A}$. Но в пространстве строк $\bar{\mathfrak{L}}$ подпространство, ортогональное к $[a]$ и $[b]$, совпадает с подпространством $\bar{\mathfrak{L}}_1$, ортогональным к x и $\bar{x}$. Последнее подпространство инвариантно относительно A. Так как оно является пересечением подпространств, ортогональных к собственным век-

торам x, $\bar{x}$ нормального преобразования. Если теперь $y \in \mathfrak{L}_1$, $(x, y) = (\bar{x}, y) = 0$, то $[y] \in \bar{\mathfrak{L}}_1$, $[y]A \in \bar{\mathfrak{L}}_1$, откуда

$$(y\mathscr{A}, a) = ([y]A, [a]) = 0, \qquad (y\mathscr{A}, b) = 0,$$

что и требовалось.

Преобразование $\mathscr{A}_1$, индуцированное преобразованием $\mathscr{A}$ в двумерном подпространстве, натянутом на векторы a, b, имеет в силу (15) матрицу

$$A_1 = \begin{bmatrix} \gamma & -\alpha \\ \alpha & \gamma \end{bmatrix}.$$

Представляя комплексное число $\gamma + i\alpha$ в форме $r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, мы придадим матрице A_1 вид

$$A_1 = r\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $\mathscr{A}_1$ есть произведение преобразования с матрицей rE и преобразования с матрицей $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Первое из них есть преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом растяжения r, а второе, как легко видеть, есть просто поворот векторов в плоскости a, b на угол φ около начала координат.

Теорема 8. *Для каждого нормального преобразования $\mathscr{A}$ вещественного унитарного пространства $\mathfrak{L}$ существует в $\mathfrak{L}$ такой ортонормированный базис, в котором матрица преобразования $\mathscr{A}$ имеет вид*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_k & \\ & & & \end{bmatrix} + r_1\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} + \ldots + r_m\begin{bmatrix} \cos\varphi_m & \sin\varphi_m \\ -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

где числа k, m могут быть и нулями.

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством аналогичной теоремы 6. Разница состоит лишь в том, что теперь мы не можем утверждать, что в каждом инвариантном относительно $\mathscr{A}$ подпространстве $\mathfrak{L}_i$ содержится нормальный собственный вектор α_{i1} преобразования $\mathscr{A}$. Однако если в $\mathfrak{L}_i$ нет собственных векторов преобразования $\mathscr{A}$, то на основании теоремы 7 в $\mathfrak{L}_i$ найдется пара взаимно ортогональных векторов a_{i1}, b_{i1},

связанных соотношениями вида (15). В качестве подпространства $\mathfrak{L}_{q-1}$ тогда можно взять совокупность векторов ξ, ортогональных к a_{q-1} и b_{q-1}. На основании сделанных выше замечаний $\mathfrak{L}_{q-1}$ будет инвариантным относительно $\mathscr{A}$, и процесс можно будет продолжать далее по схеме, изложенной в доказательстве теоремы 6. В результате получим ортонормированный базис $\mathfrak{L}$, состоящий из векторов $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, b_{n+1}, \ldots, a_{k-1}, b_{k-1}$, связанных соотношениями вида

$$\left.\begin{aligned} a_p\mathscr{A} &= \alpha_p a_p \qquad (p = 1, \ldots, k), \\ a_q\mathscr{A} &= \beta_q a_q - \gamma_q b_q \\ b_q\mathscr{A} &= \gamma_q a_q + \beta_q b_q \end{aligned}\right\} \quad (q = 1, \ldots, n,\ \gamma_q \neq 0),$$

которые показывают, что матрица преобразования $\mathscr{A}$ в указанном базисе имеет как раз вид (16).

Примеры и задачи

1. В обыкновенном трехмерном евклидовом пространстве $\mathfrak{R}$ выберем направленную прямую, проходящую через начало координат, и обозначим через $f(x)$ длину проекции вектора x на эту прямую, взятую с соответствующим знаком. Показать, что $f(x)$ — линейная функция и что всякая линейная функция в пространстве $\mathfrak{R}$ имеет вид $\alpha f(x)$, где $\alpha \geq 0$, а ось проекций выбрана надлежащим образом (ср. теорему 2).

2. Функция $f(x)$, определенная на комплексном линейном пространстве, называется *полулинейной*, если $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$. Показать, что всякая полулинейная функция на унитарном пространстве имеет вид (a, x).

3. Доказать, что соответствие между векторами унитарного пространства $\mathfrak{L}$ и полулинейными функциями, установленное в предыдущей задаче, есть изоморфизм между $\mathfrak{L}$ и пространством всех полулинейных функций на $\mathfrak{L}$.

4. В унитарном пространстве $\mathfrak{L}$ с ортонормированным базисом a_1, a_2, a_3 даны линейные преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти в $\mathfrak{L}$ *ортонормированный* базис, если известно, что $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ нормальны и что вектор a_1 имеет длину 1.

5. Показать, что в комплексном унитарном пространстве из каждого нормального преобразования можно извлечь корень произвольной натуральной степени m, т. е. что для каждого нормального преобразования $\mathscr{A}$ существует нормальное же преобразование $\mathscr{N}$ такое, что $\mathscr{N}^m = \mathscr{A}$. Каково максимальное число таких преобразований $\mathscr{N}$?

6. Доказать, что если $\mathfrak{N}$ есть инвариантное подпространство нормального преобразования $\mathscr{A}$, то ортогональное подпространство $\mathfrak{N}^\perp$ будет также инвариантным относительно $\mathscr{A}$. Если исходное пространство комплексное, то указанное свойство характеристично для нормальных преобразований.

§ 19. Унитарные и симметрические преобразования

19.1. Унитарные преобразования. Изоморфное отображение унитарного пространства на себя называется *унитарным* преобразованием этого пространства. Более подробно: линейное преобразование $\mathscr{U}$ унитарного пространства $\mathfrak{L}$ называется унитарным, если оно не меняет величины скалярного произведения, т. е. если для всех a, b из $\mathfrak{L}$ имеет место соотношение

$$(a, b) = (a\mathscr{U}, b\mathscr{U}). \tag{1}$$

Повороты обыкновенного трехмерного евклидова пространства около начала координат O представляют собой простейший пример унитарных преобразований. Зеркальные отображения этого пространства относительно какой-нибудь проходящей через O плоскости представляют собой другой пример унитарных преобразований обыкновенного пространства. Можно легко доказать, что комбинациями этих двух типов преобразований исчерпываются вообще все унитарные преобразования обыкновенного пространства. Поэтому унитарные преобразования унитарных пространств можно рассматривать как преобразования, аналогичные вращениям и зеркальным отражениям обыкновенного евклидова пространства.

Из равенства (1), характеризующего унитарные преобразования, следует, что

$$(x, y) = (x\mathscr{U}, y\mathscr{U}) = (x, y\mathscr{U}\mathscr{U}^*),$$

откуда

$$\mathscr{U}\mathscr{U}^* = \mathscr{E}, \quad \mathscr{U}^* = \mathscr{U}^{-1}, \quad \mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{E}. \tag{2}$$

Обратно, из соотношений (2) следует, что $\mathscr{U}$ обратимо и что

$$(x, y) = (x, y\mathscr{U}\mathscr{U}^*) = (x\mathscr{U}, y\mathscr{U}).$$

Таким образом, *линейное преобразование $\mathscr{U}$ тогда и только тогда унитарно, когда сопряженное преобразование $\mathscr{U}^*$ совпадает с обратным $\mathscr{U}^{-1}$.*

В частности, соотношения (2) показывают, что *унитарные преобразования являются нормальными преобразованиями в смысле предыдущего пункта.*

Выберем в пространстве $\mathfrak{L}$ какую-нибудь ортонормированную систему координат, и пусть $\mathscr{U}$ — некоторое унитарное преобразование этого пространства. Если матрица преобразования $\mathscr{U}$ равна U, то матрица сопряженного преобразования согласно п. 18.2 есть $\overline{U}'$. Из соотношения (2) поэтому следует:

$$U\overline{U}' = E. \tag{3}$$

Обратно, если в ортонормированной системе координат матрица U какого-нибудь линейного преобразования $\mathscr{U}$ удовлетворяет соотношению (3), то само преобразование $\mathscr{U}$ удовлетворяет соотношениям (2) и, следовательно, является унитарным. Матрицы U, удовлетворяющие соотношению (3), называются *унитарными* (п. 1.3), и мы приходим к следующему результату: *всякое унитарное преобразование имеет в ортонормированной системе координат унитарную матрицу; обратно, если линейное преобразование в некоторой ортонормированной системе координат имеет унитарную матрицу, то оно унитарно.*

Если основное поле K вещественно, то матрицы преобразований также вещественны и соотношение (3) принимает вид

$$UU' = E. \tag{4}$$

Матрицы, удовлетворяющие этому соотношению, были названы в п. 1.3 ортогональными. Таким образом, вещественные унитарные преобразования в ортонормированном базисе имеют ортогональные матрицы. Обратно, если матрица линейного преобразования вещественного унитарного пространства в ортонормированном базисе ортогональна, то преобразование унитарно.

Согласно определению унитарные преобразования не меняют величин скалярных произведений. Отсюда следует, что унитарные преобразования не меняют длин векторов.

Последнее свойство характеристично для унитарных преобразований: *если линейное преобразование $\mathscr{U}$ унитарного пространства $\mathfrak{L}$ не меняет длин векторов, то $\mathscr{U}$ унитарно.*

В самом деле, пусть a, b — произвольные векторы из $\mathfrak{L}$. Положим

$$a\mathscr{U} = a', \quad b\mathscr{U} = b'.$$

Так как преобразование $\mathscr{U}$ линейное, то при всех значениях α из поля коэффициентов

$$(a + \alpha b)\mathscr{U} = a' + \alpha b'.$$

По условию $\mathscr{U}$ длин не меняет, так что

$$(a + \alpha b,\ a + \alpha b) = (a' + \alpha b',\ a' + \alpha b').$$

Выполняя здесь умножение и вычеркивая взаимно уничтожающиеся члены, получим

$$\alpha(b, a) + \bar{\alpha}(a, b) = \alpha(b', a') + \bar{\alpha}(a', b'). \tag{5}$$

При $\alpha = 1$ это равенство переходит в

$$(b, a) + (a, b) = (b', a') + (a', b'). \tag{6}$$

Если основное поле вещественно, то $(b, a) = (a, b)$ и (6) дает

$(a, b) = (a', b')$. Если же K не вещественно, то, полагая в (5) $\alpha = i$ и сокращая на i, приходим к соотношению

$$(b, a) - (a, b) = (b', a') - (a', b'),$$

которое вместе с (6) дает снова $(a, b) = (a', b')$. Итак, в обоих случаях

$$(a, b) = (a', b') = (a\mathscr{U}, b\mathscr{U}),$$

т. е. $\mathscr{U}$ унитарно.

Рассмотрим вопрос о преобразовании координат в унитарных пространствах. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в унитарном пространстве $\mathfrak{L}$ и $\mathscr{U}$ — какое-нибудь унитарное преобразование этого пространства. Так как унитарное преобразование не меняет длин векторов и переводит ортогональные векторы в ортогональные, то система $e_1\mathscr{U}, e_2\mathscr{U}, \ldots, e_n\mathscr{U}$ будет снова ортонормированным базисом в $\mathfrak{L}$. Обратно, допустим, что некоторое линейное преобразование $\mathscr{U}$ переводит ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ снова в ортонормированный базис $e_1\mathscr{U}, \ldots, e_n\mathscr{U}$. Возьмем в $\mathfrak{L}$ произвольные векторы

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n.$$

Имеем

$$(a, b) = (\sum \alpha_i e_i,\ \sum \beta_i e_i) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n,$$

$$(a\mathscr{U}, b\mathscr{U}) = (\sum \alpha_i e_i\mathscr{U},\ \sum \beta_i e_i\mathscr{U}) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n,$$

т. е. $(a, b) = (a\mathscr{U}, b\mathscr{U})$; преобразование $\mathscr{U}$ унитарно. Итак, *для того чтобы линейное преобразование $\mathscr{U}$ было унитарным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{U}$ переводило ортонормированный базис в ортонормированный.*

Отсюда непосредственно вытекает и следующее предложение: *матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому унитарна, и, обратно, если один из базисов ортонормирован, а матрица перехода унитарна, то другой базис также ортонормирован.*

Для доказательства достаточно заметить, что матрица перехода от одной системы координат к другой совпадает с матрицей линейного преобразования, переводящего первую систему во вторую (п. 8.3).

Отметим, наконец, еще следующие свойства унитарных преобразований, легко вытекающие из их определения: 1) *единичное преобразование унитарно*, 2) *произведение унитарных преобразований унитарно*, 3) *обратное для унитарного преобразование унитарно.*

19.2. Унитарная эквивалентность. В связи с понятием унитарного преобразования естественно формулируется и одна из

основных задач теории унитарных пространств. Речь идет о классификации линейных преобразований этих пространств. Пусть $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$ — унитарные пространства над одним и тем же основным полем K. Рассмотрим два линейных преобразования этих пространств $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_1$, из которых $\mathscr{A}$ действует в $\mathfrak{L}$, а $\mathscr{A}_1$ действует в $\mathfrak{L}_1$. Преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_1$ называются *подобными* или *изоморфными*, если существует такое изоморфное отображение $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{L}_1$, при котором преобразование $\mathscr{A}$ переходит в $\mathscr{A}_1$. Поскольку все унитарные пространства с точностью до изоморфизма известны и определяются их размерностью n, то мы можем считать, что $\mathfrak{L}_1$ совпадает с $\mathfrak{L}$ и, следовательно, что преобразования $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}_1$ действуют в одном и том же пространстве $\mathfrak{L}$. В этом случае наше определение означает, что $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}_1$ тогда и только тогда изоморфны, если существует изоморфное отображение U пространства $\mathfrak{L}$ на себя, при котором $\mathscr{A}$ переходит в $\mathscr{A}_1$. Как мы видели в п. 10.2, это равносильно условию, что

$$\mathscr{A}_1 = U^{-1}\mathscr{A}U, \tag{7}$$

Если в $\mathfrak{L}$ выбрать ортонормированную систему координат, то (7) можно переписать в матричной форме:

$$A_1 = U^{-1}AU, \tag{8}$$

где U — унитарная матрица, A и A_1 — матрицы заданных линейных преобразований. Матрицы A, A_1, связанные соотношением (8), называются *унитарно эквивалентными*. Следовательно, *линейные преобразования унитарного пространства тогда и только тогда изоморфны, если их матрицы, вычисленные в ортонормированном базисе, унитарно эквивалентны.*

Рассматривая матрицу U в соотношении (8) как матрицу перехода, мы придем к такому предложению: *линейные преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ унитарного пространства $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда изоморфны, если в $\mathfrak{L}$ существуют два ортонормированных базиса, обладающих тем свойством, что матрица преобразования $\mathscr{A}$, вычисленная в одном из них, совпадает с матрицей преобразования $\mathscr{B}$, вычисленной в другом.*

Это предложение вполне аналогично соответствующему утверждению для произвольных линейных пространств, рассмотренному в конце п. 10.2, где приведено и подробное доказательство.

В качестве примера можно взять нормальные преобразования. Ясно, что для *унитарного* изоморфизма линейных преобразований унитарного пространства необходимо, чтобы они были *линейно* изоморфны, т. е. изоморфны как линейные преобразования линейного пространства. Поэтому для унитарного изоморфизма линейных преобразований необходимо, чтобы их характеристические многочлены совпадали. Если заданные преобразования нормальны, то, зная корни их характеристических многочленов, можно согласно предыдущему пункту написать матрицы этих преобразований в подходящих ортонормированных базисах пространства. Так как эти матрицы будут одинаковыми, то преобразования будут унитарно изоморфными. Тем самым доказана

Теорема 1. *Для унитарного изоморфизма нормальных преобразований как комплексных, так и вещественных унитарных пространств необходимо и достаточно совпадение характеристических многочленов этих преобразований.*

В чисто матричной форме теорему 1 можно изложить следующим образом:

Теорема 1а. *Для унитарной эквивалентности матриц A, B, перестановочных со своими комплексными $\bar{A}'$, $\bar{B}'$, в поле комплексных и в поле вещественных чисел необходимо и достаточно совпадение характеристических многочленов A и B.*

В частности, для каждой комплексной или вещественной матрицы A, для которой $A\bar{A}' = \bar{A}'A$, существует такая комплексная, соответственно вещественная, унитарная матрица U, что матрица $UAU^{-1} = UA\bar{U}'$ будет диагональна в комплексном случае и иметь вид (16) из п. 18.3 в вещественном случае.

Таким образом, унитарный изоморфизм нормальных преобразований оказывается равносильным обычному изоморфизму их.

19.3. Нормальная форма матрицы унитарного преобразования. Как уже было отмечено, унитарные преобразования являются частным случаем нормальных. Поэтому теоремы 1 и 1а дают необходимые и достаточные условия унитарной изоморфности, а также и нормальный вид матриц унитарных преобразований. Характерная особенность унитарных преобразований, отличающая их от остальных нормальных преобразований, дается следующей теоремой:

Теорема 2. *Все корни характеристического многочлена унитарного преобразования имеют модуль, равный единице.*

Рассмотрим сначала комплексный случай. В этом случае каждому корню α характеристического многочлена унитарного преобразования $\mathscr{U}$ соответствует ненулевой собственный вектор a. Из

$$a\mathscr{U} = \alpha a, \quad (a\mathscr{U}, a\mathscr{U}) = (a, a)$$

следует:

$$(\alpha a, \alpha a) = \alpha\bar{\alpha}(a, a) = (a, a),$$

т. е. $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$.

В вещественном случае каждому комплексному корню $\alpha = \beta + i\gamma$ отвечает пара ненулевых ортогональных векторов a, b, для которых

$$a\mathscr{U} = \beta a - \gamma b, \quad b\mathscr{U} = \alpha a + \beta b,$$

Отсюда имеем

$$(\alpha,\ \alpha)+(b,\ b)=(a\overline{a}+b\overline{c},\ a\overline{b}+b\overline{d})=(a^2+c^2)((a,\ a)+(b,\ b)),$$

т. е.

$$\gamma^2+\delta^2=|\alpha|^2-1.$$

Заметим, что среди вещественных чисел только 1 и -1 обладают модулем, равным единице, мы можем теорему 1а применительно к унитарным преобразованиям сформулировать в следующей форме:

Теорема 3. *Для каждой унитарной матрицы A найдется такая ортогональная унитарная матрица U, что UAU^{-1} будет диагональной матрицей с диагональными элементами, по модулю равными единице. Для каждой вещественной унитарной матрицы A найдется такая вещественная унитарная матрица U, для которой*

$$UAU^{-1}=E_r+(-E_s)+\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix}+\ldots$$

$$\ldots+\begin{bmatrix}\cos\varphi_m & \sin\varphi_m\\ -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m\end{bmatrix}, \qquad (9)$$

где E_r, E_s — единичные матрицы порядков r и s, $\sin\varphi_j\neq 0$ $(j=1,\ \ldots,\ m)$, причем некоторые из чисел r, s, m могут быть и нулями, т. е. в формуле (9) соответствующие члены могут отсутствовать.

Рассмотрим в качестве примера обыкновенное трехмерное евклидово пространство $\mathfrak{R}$. Согласно теореме 3 для каждого ортогонального преобразования $\mathscr{U}$ пространства $\mathfrak{R}$ можно найти такую систему e_1, e_2, e_3 взаимно перпендикулярных единичных векторов, что матрица преобразования $\mathscr{U}$ получит один из следующих шести видов:

$$\alpha)\ \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix},\quad \beta)\ \begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix},\quad \gamma)\ \begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix},$$

$$\delta)\ \begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix},\quad \varepsilon)\ \begin{bmatrix}1 & & \\ & \cos\varphi & \sin\varphi\\ & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix},\quad \zeta)\ \begin{bmatrix}-1 & & \\ & \cos\varphi & \sin\varphi\\ & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Очевидно, преобразование $\mathscr{U}$ будет в случае α) тождественным преобразованием, в случае β) зеркальным отражением относительно плоскости e_2Oe_3, в случае γ) зеркальным отражением относительно прямой Oe_1, в случае δ) зеркальным отражением относительно

начала O, в случае ε) вращением на угол φ около оси e_1, в случае ζ) вращением на угол φ около оси e_1, сопровождаемым зеркальным отражением относительно плоскости e_2Oe_3. Первые четыре случая можно рассматривать как частные случаи двух последних при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$.

19.4. Симметрические преобразования. Линейное преобразование $\mathscr{A}$ унитарного пространства $\mathfrak{R}$ называется *эрмитовым или симметрическим*, если $\mathscr{A}$ совпадает со своим сопряженным преобразованием $\mathscr{A}^*$. Таким образом, если $\mathscr{A}$ симметрическое, то

$$(x\mathscr{A},\ y)=(x,\ y\mathscr{A}). \qquad (10)$$

Обратно, если при любых x, y из $\mathfrak{R}$ линейное преобразование $\mathscr{A}$ удовлетворяет условию (10), то $\mathscr{A}$ симметрическое.

Из условия $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$, очевидно, следует равенство $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}$, т. е. *симметрические преобразования являются нормальными преобразованиями.*

Выберем в $\mathfrak{R}$ какой-нибудь ортонормированный базис, и пусть A — матрица симметрического преобразования $\mathscr{A}$. Матрица сопряженного преобразования $\mathscr{A}^*$ в таком базисе равна комплексно-сопряженной матрице $\overline{A}'$. По условию $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$, откуда

$$\overline{A}'=A. \qquad (11)$$

Обратно, из (11) следует, что $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$, т. е. что $\mathscr{A}$ симметрическое. Матрицы, удовлетворяющие соотношению (11), были названы в п. 1.3 эрмитовыми. Таким образом, *в ортонормированном базисе симметрическим преобразованиям отвечают эрмитовы матрицы и, наоборот, эрмитовым матрицам отвечают симметрические преобразования.*

Преобразования вида $\varkappa\mathscr{E}$ при вещественном $\varkappa$ представляют простейший пример симметрических преобразований. Общий пример дают преобразования, матрица которых в каком-либо ортонормированном базисе имеет вещественную диагональную форму.

Сумма симметрических преобразований, а также произведение симметрического преобразования на вещественное число являются снова симметрическими преобразованиями.

В самом деле, если преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ симметрические, число $\varkappa$ вещественное, то

$$(\varkappa\mathscr{A}+\lambda\mathscr{B})^*=\overline{\varkappa}\mathscr{A}^*+\overline{\lambda}\mathscr{B}^*=\varkappa\mathscr{A}+\lambda\mathscr{B},$$
$$(\varkappa\mathscr{A})^*=\overline{\varkappa}\mathscr{A}^*=\varkappa\mathscr{A}.$$

Произведение двух симметрических преобразований тогда и только тогда является симметрическим, когда они перестановочны.

Действительно, из $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$, $\mathscr{A}=\mathscr{A}^*$, $\mathscr{B}=\mathscr{B}^*$ следует

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})^*=\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*=\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{B}.$$

Обратно, если $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{A}\mathscr{B}$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}^*$, то

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = (\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^* = \mathscr{B}\mathscr{A}.$$

Отсюда следует, в частности, что степени симметрического преобразования и вообще многочлены с вещественными коэффициентами от симметрического преобразования — снова преобразования симметрические.

Собственные значения симметрических преобразований вещественны.

Действительно, пусть $\mathscr{A}$ — симметрическое преобразование, λ — его собственное значение и a — соответствующий ненулевой собственный вектор. Тогда

$$(a, a\mathscr{A}) = (a, \lambda a) = \bar{\lambda}(a, a),$$
$$(a\mathscr{A}, a) = (\lambda a, a) = \lambda(a, a).$$

Но

$$(a, a\mathscr{A}) = (a\mathscr{A}, a).$$

Сравнивая эти результаты, мы видим, что $\lambda = \bar{\lambda}$, т. е. что λ вещественно.

Все корни характеристического многочлена эрмитовой матрицы вещественны.

В самом деле, каждая эрмитова матрица A может быть рассматриваема как матрица некоторого симметрического преобразования $\mathscr{A}$ унитарного пространства. Корни характеристического многочлена матрицы A являются собственными значениями преобразования $\mathscr{A}$ и поэтому вещественны.

Выше было отмечено, что симметрические преобразования являются нормальными. Поэтому на основании теоремы 1 для унитарного изоморфизма симметрических преобразований необходимо и достаточно совпадение характеристических многочленов этих преобразований.

Согласно теореме 6 п. 18.3 для каждого нормального преобразования комплексного унитарного пространства существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования имеет диагональный вид. Поскольку все собственные значения симметрических преобразований вещественны, указанная диагональная матрица для симметрических преобразований будет вещественной, и мы приходим к теореме:

Теорема 4. *Всякое симметрическое преобразование комплексного унитарного пространства в подходящем ортонормированном базисе имеет вещественную диагональную матрицу.*

Обратное также справедливо, так как если матрица линейного преобразования $\mathscr{A}$ имеет в ортонормированном базисе вещественную диагональную форму A, то $\bar{A}' = A$ и, следовательно, $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$.

В матричной форме теорема 4 может быть переформулирована в следующем виде:

Теорема 4а. *Для каждой эрмитовой матрицы A существует такая комплексная унитарная матрица U, что UAU^{-1} имеет вещественный диагональный вид.*

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathscr{A}$ — симметрическое преобразование вещественного унитарного пространства. Согласно теореме 8 п. 18.3 в подходящем ортонормированном базисе матрица преобразований $\mathscr{A}$ распадется на клетки порядков 1 или 2. При этом клетки порядка 2 появляются только тогда, когда характеристический многочлен преобразования имеет невещественные корни. Но характеристические многочлены симметрических преобразований невещественных корней не имеют. Следовательно, матрица симметрического преобразования и в вещественном случае в подходящем ортонормированном базисе приводится к диагональному виду. Обратное, очевидно, также справедливо, и, таким образом, имеет место

Теорема 5. *Для каждого симметрического преобразования вещественного унитарного пространства существует такой ортонормированный базис, в котором матрица преобразования принимает диагональный вид.*

Матрицы симметрических преобразований в ортонормированном базисе удовлетворяют соотношениям $A' = A$. В вещественном случае это соотношение обращается в равенство $A' = A$. Матрицы, удовлетворяющие этому равенству, называются симметрическими (п. 1.3). Таким образом, в ортонормированном базисе матрицы вещественных симметрических преобразований симметричны и, обратно, преобразования симметричны, если их матрицы вещественные симметрические. Это замечание позволяет теорему 5 придать следующую форму:

Теорема 5а. *Для каждой вещественной симметрической матрицы A существует такая вещественная унитарная матрица U, что матрица UAU^{-1} имеет диагональную форму.*

19.5. **Кососимметрические преобразования.** Пусть $\mathfrak{L}$ — унитарное пространство. Линейное преобразование $\mathscr{A}$ называется *кососимметрическим*, если оно связано со своим сопряженным преобразованием соотношением

$$\mathscr{A}^* = -\mathscr{A}. \tag{12}$$

Если a, b — произвольные векторы пространства $\mathfrak{L}$, то из (12) следует:

$$(a, b\mathscr{A}) = (a\mathscr{A}^*, b) = -(a\mathscr{A}, b).$$

Обратно, если для всех a, b имеем

$$(a, b\mathscr{A}) = -(a\mathscr{A}^*, b),$$

то $\mathscr{A} = -\mathscr{A}^*$ и $\mathscr{A}$ — кососимметрическое преобразование.

В том случае, когда основное поле — поле комплексных чисел, кососимметрические преобразования весьма просто выражаются через симметрические. В самом деле, пусть $\mathscr{A}$ — симметрическое преобразование пространства $\mathfrak{L}$. Тогда

$$(i\mathscr{A})^* = \bar{i}\mathscr{A}^* = -i\mathscr{A},$$

т. е. $i\mathscr{A}$ является кососимметрическим. Обратно, если преобразование $\mathscr{A}$ кососимметрическое, то

$$(i\mathscr{A})^* = \bar{i}\mathscr{A}^* = i\mathscr{A},$$

следовательно, $i\mathscr{A}$ — симметрическое преобразование. В вещественных пространствах эта простая связь разрушается.

Выберем в унитарном пространстве $\mathfrak{L}$ ортонормированный базис и обозначим через A матрицу какого-нибудь кососимметрического преобразования $\mathscr{A}$. Так как матрица сопряженного преобразования $\mathscr{A}^*$ равна $\bar{A}'$, то условие (12) дает

$$\bar{A}' = -A. \tag{13}$$

Обратно, из (13), очевидно, следует, что $\mathscr{A}$ — кососимметрическое преобразование. Матрицы, удовлетворяющие соотношению (13), называются *эрмитовыми кососимметрическими*. Таким образом, в ортонормированном базисе кососимметрическим преобразованиям отвечают эрмитовы кососимметрические матрицы и, обратно, эрмитовым кососимметрическим матрицам отвечают кососимметрические преобразования.

Из соотношения (12) непосредственно вытекает, что сумма кососимметрических преобразований и произведение кососимметрического преобразования на вещественное число снова являются кососимметрическими преобразованиями.

Каждое собственное значение кососимметрического преобразования либо равно нулю, либо есть число мнимое.

Если α — собственное значение кососимметрического преобразования $\mathscr{A}$ и a — собственный ненулевой вектор, то

$$(a, a\mathscr{A}) = (a, \alpha a) = \alpha(a, a),$$
$$(a\mathscr{A}, a) = (\alpha a, a) = \bar{\alpha}(a, a).$$

Но $(a, a\mathscr{A}) = -(a\mathscr{A}, a)$, следовательно, $-\alpha = \bar{\alpha}$, что и требовалось.

В частности, отсюда следует, что *каждый корень характеристического многочлена эрмитовой кососимметрической матрицы есть либо нуль, либо число мнимое чисто.*

Поскольку из соотношения $\mathscr{A}\mathscr{A}^* = -\mathscr{A}^2$ непосредственно следует равенство $\mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$, то *кососимметрические преобразования являются разновидностью нормальных преобразований*, и потому для нахождения простейшей формы матрин кососимметрических преобразований достаточно воспользоваться теоремой 8 из п. 18.3. В результате получается следующая

Теорема 6. *В вещественном унитарном пространстве матрица A кососимметрического преобразования в подходящем ортонормированном базисе принимает вид*

$$A = O_k + \begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ -c_1 & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 & c_m \\ -c_m & 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где O_k — нулевая матрица порядка k.

Действительно, согласно указанной теореме в подходящем ортонормированном базисе матрица заданного преобразования распадается на клетки порядков 1 и 2. Из соотношения (13) ясно, что такому же равенству должны удовлетворять и отдельные клетки. Клетки порядка 1 являются вещественными числами γ_j, и соотношение (13) дает для них $\gamma_j = -\gamma_j$, т. е. $\gamma_j = 0$. Если же клетка имеет порядок 2, то из (13) следует, что она должна иметь вид

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & c_j \\ -c_j & 0 \end{bmatrix},$$

что и требовалось.

В матричной форме теорему 6 можно придать следующий вид:

Теорема 6а. *Для каждой вещественной кососимметрической матрицы A существует такая вещественная унитарная матрица U, что матрица UAU^{-1} приобретает вид (14).*

Для вещественных матриц унитарность и ортогональность — равносильные понятия, поэтому в теоремах 5а и 6а слова *вещественная унитарная* можно заменить словами *вещественная ортогональная*.

19.6. Неотрицательные симметрические преобразования. Симметрическое преобразование $\mathscr{A}$ унитарного пространства $\mathfrak{L}$ называется *неотрицательным*, если для всех x из $\mathfrak{L}$

$$(x\mathscr{A}, x) \geqslant 0. \tag{15}$$

Знак неравенства здесь имеет смысл, так как для симметрических преобразований скалярное произведение $(x\mathscr{A}, x)$ всегда вещественно. Если в (15) знак неравенства имеет место только для нулевого вектора, то $\mathscr{A}$ называется *положительным* или *положительно определенным* преобразованием.

Линейная комбинация неотрицательных преобразований с вещественными неотрицательными коэффициентами есть неотрицательное преобразование.

Это непосредственно видно из формулы

$$(x(\alpha_1\mathscr{A}+\alpha_2\mathscr{B}), x) = \alpha_1(x\mathscr{A}, x) + \alpha_2(x\mathscr{B}, x).$$

Произведение любого линейного преобразования на сопряженное есть неотрицательное симметрическое преобразование.

Действительно,

$$(x\mathscr{A}\mathscr{A}^*, x) = (x\mathscr{A}, x\mathscr{A}) \geqslant 0,$$
$$(x\mathscr{A}^*\mathscr{A}, x) = (x\mathscr{A}^*, x\mathscr{A}^*) \geqslant 0.$$

Квадрат любого симметрического преобразования есть неотрицательное преобразование.

Вытекает из предыдущего, так как симметрическое преобразование сопряжено с самим собой.

Все собственные значения неотрицательного преобразования вещественны и неотрицательны.

Пусть $\mathscr{A}$ — неотрицательное преобразование, α — его собственное значение, a — соответствующий ненулевой собственный вектор. Тогда

$$(a\mathscr{A}, a) = \alpha(a, a) \geqslant 0.$$

Следовательно, $\alpha \geqslant 0$.

Если симметрическое преобразование комплексного или вещественного унитарного пространства $\mathfrak{L}$ имеет неотрицательные собственные значения, то оно неотрицательно.

Согласно п. 19.4 в $\mathfrak{L}$ существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathscr{A}$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — соответствующие собственные значения и

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

— произвольный вектор из $\mathfrak{L}$. Тогда

$$(x\mathscr{A}, x) = \alpha_1\xi_1\bar{\xi}_1 + \alpha_2\xi_2\bar{\xi}_2 + \ldots + \alpha_n\xi_n\bar{\xi}_n = \alpha_1|\xi_1|^2 + \ldots + \alpha_n|\xi_n|^2 \geqslant 0, \quad (16)$$

что и требовалось.

Определитель преобразования $\mathscr{A}$ равен $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Если он отличен от нуля, то все числа α_j больше нуля и сумма (16) будет равна нулю только для $x=0$. Следовательно, в этом случае $\mathscr{A}$ будет *положительно определенным*. Если же $|\mathscr{A}| = 0$, то какое-нибудь из собственных значений, например α_1, равно нулю. Тогда

$$(e_1\mathscr{A}, e_1) = 0 (e_1, e_1) = 0$$

и преобразование $\mathscr{A}$ положительно определенным не будет.

Следовательно, *неотрицательное симметрическое преобразование тогда и только тогда положительно определенное, когда оно неособенное.*

Рассмотрим теперь операцию извлечения квадратного корня из линейного преобразования. Говорят, что некоторое линейное преобразование $\mathscr{X}$ является квадратным корнем из линейного преобразования $\mathscr{A}$, если

$$\mathscr{X}^2 = \mathscr{A}. \quad (17)$$

Уравнение (17) в зависимости от преобразования $\mathscr{A}$ может совсем не иметь решений, может иметь лишь конечное число их, может иметь и бесконечное число решений. Однако для неотрицательных симметрических преобразований дело обстоит совершенно определенно.

Теорема 7. *Для каждого неотрицательного симметрического преобразования $\mathscr{A}$ унитарного пространства существует одно и только одно неотрицательное симметрическое преобразование $\mathscr{B}$, удовлетворяющее соотношению*

$$\mathscr{B}^2 = \mathscr{A}.$$

Всякое линейное преобразование, перестановочное с $\mathscr{A}$, перестановочно с $\mathscr{B}$.

Доказательство. Выберем в $\mathfrak{L}$ ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, составленный из собственных векторов преобразования $\mathscr{A}$. Такой базис согласно п. 19.4 существует. Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ соответственные собственные значения преобразования $\mathscr{A}$. Пусть $\mathscr{B}$ — линейное преобразование, переводящее e_j в $\sqrt{\alpha_j}\, e_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, где в качестве значений радикалов взяты их неотрицательные значения. Поскольку $e_1, \ldots, e_n$ является ортонормированным базисом, образованным собственными векторами преобразования $\mathscr{A}$, и собственные значения его равны $\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}$ и, следовательно, неотрицательны, то $\mathscr{B}$ — симметрическое неотрицательное преобразование. Но

$$e_j\mathscr{B}^2 = \alpha_j e_j = e_j\mathscr{A} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Поэтому $\mathscr{B}^2 = \mathscr{A}$. Мы доказали, что требуемый квадратный корень из $\mathscr{A}$ существует.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть $\mathscr{X}$ — некоторое линейное преобразование, перестановочное с $\mathscr{A}$. Расположим координатные векторы $e_1, \ldots, e_n$ в таком порядке, чтобы равные собственные значения, если они есть, отвечали соседним координатным векторам. Тогда матрицы преобразований $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ примут

соответственно вид

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 E_1 & & & \\ & \lambda_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_s\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}\sqrt{\alpha_1}E_1 & & & \\ & \sqrt{\alpha_2}E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\alpha_s}E_s\end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — *различные* собственные значения преобразования $\mathscr{A}$, $E_1, \ldots, E_s$ — единичные матрицы. Матрицу преобразования $\mathscr{X}$ мы представим в соответственном клеточном виде

$$X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1s}\\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2s}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ X_{s1} & X_{s2} & \ldots & X_{ss}\end{bmatrix}.$$

Условие $AX=XA$ дает

$$\lambda_j X_{jk}=X_{jk}\lambda_k \quad (j, k=1, 2, \ldots, s),$$

или

$$(\lambda_j-\lambda_k)X_{jk}=0.$$

Так как $\lambda_j\neq\lambda_k$ для $j\neq k$, то $X_{jk}=0$ $(j\neq k)$. Следовательно,

$$X=\begin{bmatrix}X_{11} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & X_{22} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & X_{ss}\end{bmatrix},$$

но тогда

$$BX=\begin{bmatrix}\sqrt{\alpha_1}X_{11} & & & \\ & \sqrt{\alpha_2}X_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\alpha_s}X_{ss}\end{bmatrix}=XB,$$

что и требовалось.

Остается доказать единственность. Пусть $\mathscr{C}$ — еще одно неотрицательное симметрическое преобразование, для которого $\mathscr{C}^2=\mathscr{A}$. Соответственно клеточному разбиению матрицы A, указанному выше, пространство $\mathfrak{L}$ разложится в прямую сумму инвариантных подпространств $\mathfrak{L}_j$ $(j=1, \ldots, s)$. Так как $\mathscr{C}\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{C}$, то по доказанному подпространства $\mathfrak{L}_j$ инвариантны и относительно $\mathscr{C}$. Ввиду симметричности $\mathscr{C}$ в каждом из подпространств $\mathfrak{L}_j$ существует ортонормированный базис, образованный собственными векторами $\mathscr{C}$. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — соответствующие собственные значения. Обозначив через $\mathscr{A}_j$, $\mathscr{C}_j$, $\mathfrak{L}_j$ преобразования, индуцированные в подпространстве $\mathfrak{L}_j$ соответственно преобразованиями $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$, $\mathfrak{L}$, имеем

$$\mathscr{A}_j=\lambda_j\mathscr{E}_j,\quad \mathscr{C}_j=\sqrt{\alpha_j}\mathscr{E}_j,\quad \mathfrak{L}_j=\mathscr{A}\mathfrak{L}_j,$$

откуда

$$\gamma_{j1}=\ldots=\gamma_{jk_j}=\lambda_j.$$

Так как все $\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jk_j}$ неотрицательны, то отсюда

$$\gamma_{j1}=\ldots=\gamma_{jk_j}=\sqrt{\alpha_j}$$

и, следовательно, $\mathscr{C}_j=\sqrt{\lambda_j}\mathscr{E}_j=\mathscr{B}_j$, т. е. $\mathscr{C}=\mathscr{B}$.

В качестве непосредственного приложения теоремы 7 докажем, что *произведение перестановочных неотрицательных симметрических преобразований есть преобразование неотрицательное.*

В самом деле, пусть $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ — перестановочные симметрические неотрицательные преобразования. Обозначим через $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ их квадратные корни, которые согласно теореме 7 можно выбрать также перестановочными, симметрическими и неотрицательными. Тогда

$$(\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2)^*=\mathscr{B}_2^*\mathscr{B}_1^*=\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1=\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2=\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2,$$

т. е. $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$ равно квадрату симметрического преобразования $\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2$. Следовательно, $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$ неотрицательно. Утверждение доказано.

Из него, в частности, следует, что многочлен с вещественными неотрицательными коэффициентами от симметрического неотрицательного преобразования сами будут симметрическими неотрицательными преобразованиями.

Примеры и задачи

1. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в унитарном пространстве $\mathfrak{L}$. Найти матрицу унитарного преобразования, переводящего векторы e_1, e_2 в векторы $\frac{2}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2-\frac{1}{3}e_3$, $\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}e_2-\frac{2}{3}e_3$.

2. Если $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_m$ — две ортонормированные системы векторов n-мерного унитарного пространства $\mathfrak{L}$ $(m\leqslant n)$, то существует унитарное преобразование $\mathscr{U}$, переводящее первую систему во вторую.

3. Для того чтобы система векторов $a_1, \ldots, a_m$ унитарного пространства могла перейти унитарным преобразованием в систему $b_1, \ldots, b_m$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы Грама для этих систем совпадали (см. задачу 5, стр. 214).

4. С помощью нормальной формы Жордана и процесса ортогонализации Грама — Шмидта доказать, что матрица всякого линейного преобразования унитарного пространства может быть приведена к треугольной форме в подходящей ортонормированной системе координат (теорема Шура).

5. Доказать, что если произвольное преобразование $\mathscr{A}$ унитарного пространства $\mathfrak{L}$ сохраняет величины скалярных произведений, то $\mathscr{A}$ будет линейным и, следовательно, унитарным преобразованием пространства $\mathfrak{L}$.

6. В линейном пространстве с точностью до изоморфизма существует только две линейные функции. В унитарном пространстве линейные функции

с точностью до изоморфизма имеют вид $\tau(x, e)$, где e — фиксированный единичный вектор.

7. В евклидовом пространстве в ортонормированном базисе матрицы преобразований $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ соответственно равны

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Показать, что $\mathscr{A}$ положительно определенное, $\mathscr{B}$ неотрицательное, $\mathscr{C}$ хотя и не является симметрическим, обладает $(\mathscr{C}x, x) \geqslant 0$ для любого x.

8. Найти симметрический неотрицательный квадратный корень из преобразования $\mathscr{B}$ предыдущей задачи.

9. Матрица симметрического неотрицательного преобразования, вычисленная в ортонормированном базисе, называется *вековой матрицей*. Показать, что вековая матрица тогда и только тогда неотрицательна, если коэффициенты ее характеристического многочлена имеют чередующиеся знаки. При этом, если какой-нибудь коэффициент равен нулю, то коэффициенты всех младших членов также должны быть нулями.

10. Показать, что из каждого нормального преобразования $\mathscr{A}$ можно извлечь корень любой положительной степени s, т. е. показать, что для каждого нормального $\mathscr{A}$ существует нормальное преобразование $\mathscr{X}$, удовлетворяющее соотношению $\mathscr{X}^s = \mathscr{A}$. Какое максимальное число таких значений $\mathscr{X}$?

11. В унитарном пространстве $\mathfrak{L}$ выбран ортонормированный базис. Показать, что в этом базисе матрица каждого неотрицательного симметрического преобразования $\mathscr{A}$ ранга 1 может быть представлена в форме

$$A = \overline{[x]}\,[x],$$

где $[x]$ — координатный столбец некоторого наперед выбранного вектора x.

12. Всякое неотрицательное симметрическое преобразование есть сумма неотрицательных симметрических преобразований ранга 1.

13. Если эрмитовы матрицы с элементами τ_{ij}, β_{ij} неотрицательны, то матрица с элементами $\tau_{ij}\beta_{ij}$ также неотрицательна $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

§ 20. Разложения общих преобразований

Унитарные, симметрические и кососимметрические преобразования имеют весьма прозрачную геометрическую структуру. Поэтому в унитарных или евклидовых пространствах при изучении общих линейных преобразований естественно возникает вопрос, нельзя ли эти преобразования выразить каким-нибудь простым способом через преобразования указанных специальных видов. Несколько таких способов, имеющих наиболее важное значение, и рассматривается в настоящем параграфе.

20.1. Разложение на симметрическую и кососимметрическую части. Пусть $\mathfrak{L}$ — комплексное унитарное пространство, $\mathscr{A}$ — некоторое его линейное преобразование. Введем обозначения

$$\mathscr{B} = \frac{1}{2}(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*), \quad \mathscr{C} = \frac{1}{2i}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*). \tag{1}$$

Имеем

$$\mathscr{B}^* = \frac{1}{2}(\mathscr{A}^* + \mathscr{A}) = \mathscr{B}, \quad \mathscr{C}^* = -\frac{1}{2i}(\mathscr{A}^* - \mathscr{A}) = \mathscr{C}.$$

Следовательно, $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ симметрические. Из (1) вытекает

$$\mathscr{A} = \mathscr{B} + i\mathscr{C}. \tag{2}$$

Таким образом, *всякое линейное преобразование $\mathscr{A}$ комплексного унитарного пространства можно представить в виде* (2), *где $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — симметрические преобразования. Это представление однозначно*, так как из (2) следует:

$$\mathscr{A}^* = \mathscr{B}^* - i\mathscr{C}^* = \mathscr{B} - i\mathscr{C},$$

откуда для $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ снова получаем выражения (1).

Если основное поле вещественно, то разложение (2) не годится. В этом случае поступают следующим образом. Пусть $\mathscr{A}$ — произвольное преобразование. Положим

$$\mathscr{B} = \frac{1}{2}(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*), \quad \mathscr{C} = \frac{1}{2}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*). \tag{3}$$

Отсюда

$$\mathscr{A} = \mathscr{B} + \mathscr{C}. \tag{4}$$

Так как

$$\mathscr{B}^* = \frac{1}{2}(\mathscr{A}^* + \mathscr{A}) = \mathscr{B}, \quad \mathscr{C}^* = \frac{1}{2}(\mathscr{A}^* - \mathscr{A}) = -\mathscr{C},$$

то в разложении (4) $\mathscr{B}$ — симметрическое, $\mathscr{C}$ — кососимметрическое преобразования. Разложение (4) однозначно, ибо из него следует $\mathscr{A}^* = \mathscr{B} - \mathscr{C}$, откуда для $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ снова получаем выражения (3). Следовательно, *всякое линейное преобразование можно представить в виде суммы симметрического и кососимметрического преобразований. Это представление возможно только единственным способом.*

Разложение (4), очевидно, годится при любом основном поле. Преобразование $\mathscr{B}$ называется *симметрической*, а $\mathscr{C}$ — *кососимметрической частью* преобразования $\mathscr{A}$.

С точки зрения матричного исчисления разложение (2) означает, что всякую квадратную матрицу A можно представить в виде $B + iC$, где B и C — эрмитовы матрицы, а разложение (4) означает, что квадратную матрицу A можно представить в виде $B + C$, где B симметрическая, C — кососимметрическая матрицы.

20.2. Полярное разложение. Геометрически много более интересным является представление линейного преобразования в виде произведения симметрического и унитарного преобразований. Возможность такого разложения основывается на следующей лемме.

Лемма. Если линейное преобразование $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ унитарного пространства $\mathfrak{L}$ изменяют длину векторов одинаковым образом[*]), *т. е. если для любого a*

$$(a\mathscr{A},\ a\mathscr{A}) = (a\mathscr{B},\ a\mathscr{B}), \tag{5}$$

то найдется такое унитарное преобразование $\mathscr{U}$ пространства $\mathfrak{L}$, что $\mathscr{A}\mathscr{U} = \mathscr{B}$.

Рассмотрим область значений преобразования $\mathscr{A}$, т. е. совокупность векторов вида $x\mathscr{A}$, где x пробегает пространство $\mathfrak{L}$. Обозначим эту область через $\mathfrak{A}$. Аналогично обозначим область значений преобразования $\mathscr{B}$ через $\mathfrak{B}$. Согласно п. 10.1 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ являются линейными подпространствами. Мы хотим прежде всего установить изоморфное соответствие между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Пусть a — некоторый вектор из $\mathfrak{A}$. Ищем в $\mathfrak{L}$ такой вектор x, чтобы $x\mathscr{A} = a$, и полагаем $x\mathscr{B} = b$. Условимся вектор b называть образом a и обозначать $a^{\mathscr{V}}$. Покажем, что b через a определяется однозначно. В самом деле, неоднозначность может произойти только вследствие того, что вектор x из условия $x\mathscr{A} = a$ определяется неоднозначно. Однако если x_1 — какой-либо другой вектор, удовлетворяющий условию $x_1\mathscr{A} = a$, то $(x - x_1)\mathscr{A} = o$. Согласно (5) отсюда следует:

$$((x - x_1)\mathscr{A},\ (x - x_1)\mathscr{A}) = ((x - x_1)\mathscr{A},\ (x - x_1)\mathscr{A}) = 0,$$

т. е. $(x - x_1)\mathscr{B} = o$, или $x_1\mathscr{B} = x\mathscr{B}$, что и требовалось. Мы показали, таким образом, что $\mathscr{V}$ является однозначным отображением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Однако легко видеть, что $\mathscr{V}$ есть вообще однозначное отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Действительно, если b — вектор из $\mathfrak{B}$, то в $\mathfrak{L}$ найдется вектор x, для которого $x\mathscr{B} = b$. Тогда полагая $x\mathscr{A} = a$, мы будем иметь $a^{\mathscr{V}} = b$, что и требовалось.

Из самого определения соответствия $\mathscr{V}$ вытекает, что для каждого вектора x из $\mathfrak{L}$ имеет место равенство

$$x\mathscr{A}^{\mathscr{V}} = x\mathscr{B}, \tag{6}$$

Пользуясь этим равенством, можно показать, что $\mathscr{V}$ есть *изоморфное* отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Действительно, пусть a_1, a_2 — векторы из $\mathfrak{A}$. Ищем такие x_1, x_2 в $\mathfrak{L}$, чтобы $x_1\mathscr{A} = a_1$, $x_2\mathscr{A} = a_2$. Тогда

$$\begin{aligned}(\alpha a_1 + \beta a_2)^{\mathscr{V}} &= (\alpha x_1\mathscr{A} + \beta x_2\mathscr{A})^{\mathscr{V}} = (\alpha x_1 + \beta x_2)\mathscr{A}^{\mathscr{V}} = \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2)\mathscr{B} = \alpha(x_1\mathscr{B}) + \beta(x_2\mathscr{B}) = \\ &= \alpha(x_1\mathscr{A}^{\mathscr{V}}) + \beta(x_2\mathscr{A}^{\mathscr{V}}) = \alpha a_1^{\mathscr{V}} + \beta a_2^{\mathscr{V}},\end{aligned} \tag{7}$$

[*]) Преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, обладающие этим свойством, называются *метрически равными*.

т. е. отображение $\mathscr{V}$ сохраняет операции сложения и умножения на число. Сверх того,

$$\begin{aligned}(a_1^{\mathscr{V}},\ a_1^{\mathscr{V}}) &= (x_1\mathscr{A}^{\mathscr{V}},\ x_1\mathscr{A}^{\mathscr{V}}) = (x_1\mathscr{B},\ x_1\mathscr{B}) = \\ &= (x_1\mathscr{A},\ x_1\mathscr{A}) = (a_1,\ a_1).\end{aligned} \tag{8}$$

т. е. отображение $\mathscr{V}$ сохраняет длины векторов. Следовательно, $\mathscr{V}$ — изоморфизм.

Отображение $\mathscr{V}$ у нас определено только для векторов из $\mathfrak{A}$. Мы хотим теперь доопределить его для всех остальных векторов пространства $\mathfrak{L}$. С этой целью рассмотрим ортогональные подпространства $\mathfrak{A}^{\perp}$ и $\mathfrak{B}^{\perp}$. Согласно п. 17.5 для $\mathfrak{L}$ имеют место прямые разложения

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{A}^{\perp} = \mathfrak{B} \dotplus \mathfrak{B}^{\perp}.$$

Подпространства $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны и потому имеют одинаковую размерность. Но тогда ортогональные дополнения $\mathfrak{A}^{\perp}$, $\mathfrak{B}^{\perp}$ также имеют одинаковую размерность. Унитарные пространства одинаковой размерности изоморфны, поэтому должно существовать взаимно однозначное отображение $\mathfrak{A}^{\perp}$ на $\mathfrak{B}^{\perp}$, сохраняющее операции сложения и умножения на число и не меняющее длин векторов. Обозначим это отображение через $\mathscr{U}$. Следовательно, если a', a'' — векторы из $\mathfrak{A}^{\perp}$, то $a'\mathscr{U}$, $a''\mathscr{U}$ лежат в $\mathfrak{B}^{\perp}$ и

$$(\alpha a' + \beta a'')\mathscr{U} = \alpha(a'\mathscr{U}) + \beta(a''\mathscr{U}), \tag{9}$$

$$(a'\mathscr{U},\ a''\mathscr{U}) = (a',\ a''). \tag{10}$$

Определим теперь преобразование $\mathscr{U}$ пространства $\mathfrak{L}$ следующим образом. Пусть x — произвольный вектор из $\mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{L} = \mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{A}^{\perp}$, то x можно единственным образом представить в виде

$$x = x' + x'' \qquad (x' \in \mathfrak{A},\ x'' \in \mathfrak{A}^{\perp}). \tag{11}$$

Положим по определению

$$x\mathscr{U} = x'^{\mathscr{V}} + x''\mathscr{U}. \tag{12}$$

Преобразование $\mathscr{U}$ линейно, так как если

$$y = y' + y'' \qquad (y' \in \mathfrak{A},\ y'' \in \mathfrak{A}^{\perp}),$$

то из (7), (9), (11) следует:

$$(\alpha x + \beta y)\mathscr{U} = (\alpha x' + \beta y')^{\mathscr{V}} + (\alpha x'' + \beta y'')\mathscr{U} = \alpha(x\mathscr{U}) + \beta(y\mathscr{U}).$$

Преобразование $\mathscr{U}$ унитарно, так как в силу (8), (10), (11)

$$\begin{aligned}(x\mathscr{U},\ x\mathscr{U}) &= (x'^{\mathscr{V}} + x''\mathscr{U},\ x'^{\mathscr{V}} + x''\mathscr{U}) = \\ &= (x'^{\mathscr{V}},\ x'^{\mathscr{V}}) + (x''\mathscr{U},\ x''\mathscr{U}) = (x',\ x') + (x'',\ x'') = (x,\ x).\end{aligned}$$

Для всех x из $\mathfrak{L}$ имеет место соотношение

$$x\mathscr{A}\mathscr{U} = x\mathscr{B}.$$

Действительно, $x\mathscr{A}$ входит в $\mathfrak{N}$, поэтому в разложении (11) вектор x'' равен нулю и, следовательно,

$$x_1\mathscr{A}\mathscr{U} = x_1\mathscr{A}^*\mathscr{P}_1.$$

Согласно (6) это даст $x_1\mathscr{A}\mathscr{U} = x_1\mathscr{B}$. Отсюда $\mathscr{A}\mathscr{U} = \mathscr{B}$, и лемма доказана.

Теорема 1. *Каждое линейное преобразование $\mathscr{A}$ унитарного пространства $\mathfrak{L}$ допускает полярное разложение*

$$\mathscr{A} = \mathscr{D}\mathscr{U}, \tag{13}$$

где $\mathscr{D}$ — неотрицательное симметрическое, а $\mathscr{U}$ — унитарное преобразования пространства $\mathfrak{L}$. Преобразование $\mathscr{D}$ определяется однозначно; если $\mathscr{A}$ — несобственное преобразование, то $\mathscr{U}$ также определяется однозначно.

Согласно п. 19.6 преобразование $\mathscr{A}\mathscr{A}^*$ является симметрическим и неотрицательным. Обозначим через $\mathscr{D}$ неотрицательный симметрический квадратный корень из $\mathscr{A}\mathscr{A}^*$. Таким образом,

$$\mathscr{D}^2 = \mathscr{A}\mathscr{A}^*.$$

Для любого вектора x имеем

$$(x\mathscr{A}, x\mathscr{A}) = (x, x\mathscr{A}\mathscr{A}^*) = (x, x\mathscr{D}^2) = (x\mathscr{D}, x\mathscr{D}),$$

т. е. преобразования $\mathscr{A}$ и $\mathscr{D}$ изменяют длины векторов одинаковым образом. На основании леммы мы заключаем отсюда, что найдется такое унитарное преобразование $\mathscr{U}$, для которого

$$\mathscr{D}\mathscr{U} = \mathscr{A}.$$

Тем самым возможность полярного разложения доказана. Остается рассмотреть единственность его. Из (13) следует:

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{D}^2\mathscr{U}\mathscr{U}^{-1}\mathscr{D} = \mathscr{D}^2, \quad \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{U}^{-1}\mathscr{D}\mathscr{D}\mathscr{U} = \mathscr{U}^{-1}\mathscr{D}^2\mathscr{U}.$$

Таким образом, преобразование $\mathscr{D}$ является неотрицательным, симметрическим и квадрат его равен преобразованию $\mathscr{A}\mathscr{A}^*$. Согласно теореме 7 п. 19.6 этими условиями преобразование $\mathscr{D}$ определяется однозначно. Если $\mathscr{A}$ — несобственное преобразование, то $\mathscr{D}$ — также несобственное, и тогда из (13) следует $\mathscr{U} = \mathscr{D}^{-1}\mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{U}$ также определяется однозначно.

Геометрический смысл теоремы 1 весьма прост. Именно она показывает, что действие всякого линейного преобразования пространства $\mathfrak{L}$ можно представить следующим образом: сначала $\mathfrak{L}$ растягивается по n взаимно ортогональным направлениям со своим особым вещественным неотрицательным коэффициентом растяжения по каждому направлению, а затем поворачивается около начала координат*). Если преобразование несобственное, то все коэффициенты растяжения строго положительны. В случае собственного преобразования некоторые коэффициенты обращаются в нуль и вместо растяжения по этим направлениям происходит проектирование пространства.

Заметим еще, что при доказательстве существования полярного разложения мы отправлялись от произведения $\mathscr{A}\mathscr{A}^*$. Если вместо него взять $\mathscr{A}^*\mathscr{A}$, то в результате получится разложение вида

$$\mathscr{A} = \mathscr{U}\mathscr{D}_1,$$

где $\mathscr{U}$ — унитарное, $\mathscr{D}_1$ — неотрицательное симметрическое преобразования.

Выберем в пространстве $\mathfrak{L}$ какую-нибудь ортонормированную систему координат. Тогда унитарным преобразованиям будут соответствовать унитарные, симметрическим — эрмитовы матрицы и теорема 1 перейдет в следующее утверждение: *каждую квадратную матрицу можно представить в виде произведения эрмитовой и унитарной матриц.*

Предполагая, что основное поле есть поле вещественных чисел, получим, что *всякую квадратную вещественную матрицу можно представить в виде произведения симметрической и ортогональной вещественных матриц.*

В теореме 1 утверждается, что $\mathscr{D}$ — неотрицательное симметрическое преобразование. Соответственно этому и в двух последних утверждениях можно в словах *эрмитова* и *симметрическая* добавить: *с неотрицательными собственными значениями.*

20.3. Преобразование Кэли. Сравнивая свойства унитарных преобразований со свойствами симметрических, можно заметить, что оба класса преобразований тесно связаны друг с другом. Эту связь в явном виде дало так называемые формулы Кэли.

Теорема 2 (преобразование Кэли). *Если $\mathscr{A}$ — симметрическое преобразование комплексного унитарного пространства, то преобразования $\mathscr{A} \pm i\mathscr{E}$ имеют обратные; преобразование $\mathscr{U}$, вычисленное по формуле*

$$\mathscr{U} = (\mathscr{A} - i\mathscr{E})(\mathscr{A} + i\mathscr{E})^{-1}, \tag{14}$$

унитарно, не имеет собственных значений, равных единице, и $\mathscr{A}$ выражается через $\mathscr{U}$ по формуле

$$\mathscr{A} = -i(\mathscr{U} + \mathscr{E})(\mathscr{U} - \mathscr{E})^{-1}. \tag{15}$$

*) Поворот понимается в смысле унитарного преобразования.

Обратно, если U — унитарное преобразование, не имеющее собственных значений, равных единице, то преобразование $U-S$ обратимо, преобразование $\mathscr{A}$, вычисленное по формуле (15), симметрическое и U выражается через $\mathscr{A}$ в виде (14).

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — симметрическое преобразование унитарного пространства. Числа $\pm i$ не могут быть собственными значениями преобразования $\mathscr{A}$, так как все собственные значения симметрических преобразований вещественны (п. 19.4). Это означает, что преобразования $\mathscr{A}\pm iS$ невырожденные. Из перестановочности преобразований $\mathscr{A}+iS$ и $\mathscr{A}-iS$ вытекает их перестановочность с преобразованиями $(\mathscr{A}+iS)^{-1}$, $(\mathscr{A}-iS)^{-1}$. Преобразование U, вычисленное по формуле (14), имеет сопряженное, равное

$$U^*=(\mathscr{A}+iS)^{-1}(\mathscr{A}-iS)^*=(\mathscr{A}^*-iS)^{-1}(\mathscr{A}^*+iS).$$

Отсюда

$$UU^*=(\mathscr{A}-iS)(\mathscr{A}+iS)^{-1}(\mathscr{A}^*-iS)^{-1}(\mathscr{A}^*+iS)=$$
$$=(\mathscr{A}-iS)(\mathscr{A}+iS)^{-1}(\mathscr{A}-iS)(\mathscr{A}-iS)^{-1}=S,$$

т. е. U унитарно. Покажем, что $U-S$ имеет обратное. Для этого из обеих частей равенства (14) вычтем S и результаты умножим на $\mathscr{A}+iS$. После очевидных преобразований будем иметь

$$(U-S)(\mathscr{A}+iS)=-2iS, \tag{16}$$

или

$$(U-S)^{-1}=-\frac{1}{2i}(\mathscr{A}-iS).$$

Таким образом, U не имеет собственных значений, равных единице. Из (16), далее, следует:

$$(U-S)\mathscr{A}=-2iS-i(U-S)=-i(U+S),$$

т. е.

$$\mathscr{A}=-i(U+S)(U-S)^{-1}.$$

Первая часть теоремы доказана. Доказательство обратного утверждения вполне аналогично изложенному.

Формулы Кэли устанавливают взаимно однозначное соответствие между всеми симметрическими преобразованиями унитарного пространства $\mathfrak{L}$ и теми его унитарными преобразованиями U, которые не имеют 1 своим собственным значением. Аналогичные формулы

$$U=(iS+\mathscr{A})(iS-\mathscr{A})^{-1}, \tag{14'}$$
$$\mathscr{A}=i(U-S)(U+S)^{-1} \tag{15'}$$

дают взаимно однозначное соответствие между симметрическими преобразованиями пространства $\mathfrak{L}$ и теми унитарными преобразованиями U, для которых -1 не является собственным значением.

Преобразования (14), (15), а также (14'), (15') возможны благодаря наличию в основном поле числа i. Если основное поле вещественное, то указанные формулы неприемлемы. Однако эти формулы легко могут быть видоизменены таким образом, чтобы они годились для любого поля. Именно, имеет место

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{A}$ — кососимметрическое преобразование унитарного пространства $\mathfrak{L}$. Тогда преобразования $\mathscr{A}\pm S$ обратимы, преобразование*

$$U=(\mathscr{A}-S)(\mathscr{A}+S)^{-1} \tag{17}$$

унитарно, не имеет собственных значений, равных единице, и

$$\mathscr{A}=-(U+S)(U-S)^{-1}. \tag{18}$$

Обратно, если U — унитарное преобразование и 1 не является его собственным значением, то преобразование $\mathscr{A}$, вычисленное по формуле (18), — кососимметрическое и U выражается через $\mathscr{A}$ в виде (17).

В самом деле, если $\mathscr{A}$ кососимметрическое, то ± 1 не могут быть его собственными значениями, так как все собственные значения кососимметрических преобразований или равны нулю, или чисто мнимые (п. 19.5). Поэтому преобразования $\mathscr{A}\pm S$ невырожденные. Так как $(\mathscr{A}+S)(\mathscr{A}-S)=(\mathscr{A}-S)(\mathscr{A}+S)$, то $(\mathscr{A}-S)(\mathscr{A}+S)^{-1}=(\mathscr{A}+S)^{-1}(\mathscr{A}-S)$. Из (17) имеем

$$U^*=(\mathscr{A}^*+S)^{-1}(\mathscr{A}^*-S)=(-\mathscr{A}+S)^{-1}(-\mathscr{A}-S)=$$
$$=(\mathscr{A}-S)^{-1}(\mathscr{A}+S),$$

откуда

$$UU^*=(\mathscr{A}-S)(\mathscr{A}+S)^{-1}(\mathscr{A}-S)^{-1}(\mathscr{A}+S)=S,$$

т. е. U унитарное. Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны приведенным в доказательстве теоремы 2, и мы их опустим.

В заключение отметим, что результаты последних параграфов показывают известное сходство между свойствами линейных преобразований унитарных пространств и свойствами комплексных чисел. Условимся считать, что линейные преобразования в некотором смысле аналогичны комплексным числам, а сопряженные преобразования аналогичны сопряженным числам. Тогда симметрические преобразования, характеризующиеся свойством $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$, будут аналогичны вещественным числам, удовлетворяющим соотношению $\bar{z}=z$, т. е. вещественным числам; кососимметрические преобразования, характеризующиеся свойством $\mathscr{A}^*=-\mathscr{A}$, аналогичны комплексным числам, удовлетворяющим соотношению $\bar{z}=-z$, т. е. чисто мнимым числам; унитарные преобразования со свойством $UU^*=S$ аналогичны комплексным числам z, для которых $z\bar{z}=1$, т. е. $|z|=1$. Разложение $\mathscr{A}=\mathscr{B}-i\mathscr{C}$ из п. 20.1 будет соответствовать представлению комплексного числа

z в декартовом виде $z = x + iy$, а полярное разложение $\mathscr{A} = \mathscr{U}\mathscr{H}$ будет отвечать представлению комплексного числа в тригонометрической форме $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и т. д.

20.4. Спектральное разложение. С геометрической точки зрения одним из наиболее простых видов линейных преобразований является проектирование векторов на какое-либо подпространство. Некоторые свойства этих проекционных преобразований здесь будут рассмотрены.

Пусть в унитарном пространстве $\mathscr{E}$ задано линейное подпространство $\mathfrak{A}$. Совокупность векторов, ортогональных к $\mathfrak{A}$, есть ортогональное подпространство $\mathfrak{A}^\perp$, причем $\mathscr{E}$ есть прямая сумма $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{A}^\perp$. Следовательно, каждый вектор a из $\mathscr{E}$ может быть единственно представлен в виде

$$a = a' + a'' \qquad (a' \in \mathfrak{A},\ a'' \in \mathfrak{A}^\perp), \tag{18}$$

Вектор a' называется *проекцией* вектора a на подпространство $\mathfrak{A}$. Ставя в соответствие каждому вектору его проекцию на $\mathfrak{A}$, мы получим некоторое преобразование пространства $\mathscr{E}$, которое называется *проекционным* и обозначается $\mathscr{P}_\mathfrak{A}$. Таким образом, по определению

$$a\mathscr{P}_\mathfrak{A} = a'.$$

Индекс $\mathfrak{A}$ мы иногда для краткости будем опускать и вместо $\mathscr{P}_\mathfrak{A}$ будем писать $\mathscr{P}$.

Проекционные преобразования линейны, так как если вектор a имеет разложение (18), а вектор b — разложение

$$b = b' + b'' \qquad (b' \in \mathfrak{A},\ b'' \in \mathfrak{A}^\perp),$$

то

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a' + \beta b') + (\alpha a'' + \beta b''),$$

т. е. $(\alpha a + \beta b)\mathscr{P} = \alpha a' + \beta b'$, откуда

$$(\alpha a + \beta b)\mathscr{P} = \alpha \cdot a\mathscr{P} + \beta \cdot b\mathscr{P}.$$

Проекционные преобразования являются неотрицательными симметрическими преобразованиями. Действительно, разложение (18) дает

$$(a\mathscr{P},\ a) = (a',\ a' + a'') = (a',\ a') \geqslant 0,$$

так что $\mathscr{P}$ неотрицательно. С другой стороны, если

$$b = b' - b'' \qquad (b' \in \mathfrak{A},\ b'' \in \mathfrak{A}^\perp),$$

то

$$(a\mathscr{P},\ b) = (a',\ b' + b'') = (a',\ b') = (a' + a'',\ b') = (a,\ b\mathscr{P}),$$

т. е. преобразование $\mathscr{P}$ симметрическое.

Из формулы (19) вытекает еще одно важное свойство проекционных преобразований. Очевидно, для любого a имеем

$$a\mathscr{P}^2 = a'\mathscr{P} = a' = a\mathscr{P},$$

откуда

$$\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}. \tag{20}$$

Преобразования, совпадающие со своим квадратом, называются *идемпотентными*. Таким образом, (20) показывает, что *все проекционные преобразования идемпотентны.*

Обратно, свойство идемпотентности и симметричности также характеризует проекционные преобразования: *всякое симметрическое идемпотентное преобразование $\mathscr{P}$ есть проектирование на область значений $\mathscr{P}$.*

Пусть область значений $\mathscr{P}$ есть $\mathfrak{A}$. Для каждого a справедливо разложение

$$a = a\mathscr{P} + a(\mathscr{E} - \mathscr{P}). \tag{21}$$

Слагаемое $a\mathscr{P}$, по определению, входит в $\mathfrak{A}$. Второе слагаемое ортогонально к $\mathfrak{A}$, так как всякий вектор $\mathfrak{A}$ есть $x\mathscr{P}$, где x — некоторый вектор из $\mathscr{E}$, а ввиду симметричности и идемпотентности преобразования $\mathscr{P}$

$$(x\mathscr{P},\ a(\mathscr{E} - \mathscr{P})) = (x,\ a(\mathscr{E} - \mathscr{P})\mathscr{P}) = (x,\ a\mathscr{P} - a\mathscr{P}^2) = 0.$$

Разложение (21) показывает, следовательно, что $a\mathscr{P}$ есть проекция a на $\mathfrak{A}$, что и требовалось.

Найдем простейший вид матрицы проекционного преобразования $\mathscr{P}_\mathfrak{A}$.

Выберем в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^\perp$ ортонормированные базисы $e_1, \ldots, e_m$ и $e_{m+1}, \ldots, e_n$. Объединенная система $e_1, \ldots, e_n$, $e_{m+1}, \ldots, e_n$ будет ортонормированным базисом пространства $\mathscr{E}$. Равенства

$$e_j\mathscr{P} = e_j, \quad e_\kappa\mathscr{P} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m;\ \kappa = m+1, \ldots, n)$$

показывают, что в этом базисе матрица преобразования $\mathscr{P}_\mathfrak{A}$ имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Обратно, если в ортонормированной системе координат матрица некоторого линейного преобразования $\mathscr{P}$ приводится к виду (22), то $\mathscr{P}$, очевидно, — проекционное преобразование.

Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ — операции проектирования на некоторые подпространства $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ пространства $\mathscr{E}$. Возникает вопрос: как расположены подпространства $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{X}$ зависит ли свойства преобразований $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$? Например, что можно сказать о $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ взаимно ортогональны или если $\mathfrak{A}$ входит в $\mathfrak{B}$ и т. п.? Чтобы ответить на этот вопрос, весьма, прежде всего, важно определение: *два проекционных преобразования $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ называются ортогональными, если $\mathscr{P}\mathscr{Q} = \mathscr{O}$.* Поскольку проекционные преобразования симметрические, имеем отсюда

$$\mathscr{Q}\mathscr{P} = \mathscr{Q}^*\mathscr{P}^* = (\mathscr{P}\mathscr{Q})^* = \mathscr{O},$$

т. е. из ортогональности $\mathscr{P}$ к $\mathscr{Q}$ следует ортогональность $\mathscr{Q}$ к $\mathscr{P}$.

Для того, чтобы проекционные преобразования $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы были ортогональны соответствующие подпространства $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathscr{P}\mathscr{Q} = \mathscr{O}$; тогда для $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ имеем

$$(a,\ b) = (a\mathscr{P},\ b\mathscr{Q}) = (a\mathscr{P}\mathscr{Q},\ b) = 0,$$

т. е. $\mathfrak{N}$ ортогонально к $\mathfrak{M}$. Обратно, если $\mathfrak{N}$ ортогонально к $\mathfrak{M}$, то для любого вектора x из $\mathfrak{N}$

$$x\mathscr{F}\in\mathfrak{N},\quad x(\mathscr{F}\mathscr{G})=(x\mathscr{F})\mathscr{G}=0,\quad \mathscr{F}\mathscr{G}=\mathscr{O},$$

что и требовалось.

Для детального изучения свойств линейных преобразований обычно используют их матричное изображение. Однако если матричное изображение по каким-либо причинам неудобно, то стремятся выразить заданное линейное преобразование через преобразования более простого характера. В случае нормальных преобразований в качестве таких простейших преобразований можно принять проекционные преобразования.

Разложение вида

$$\mathscr{A}=\alpha_1\mathscr{P}_1+\alpha_2\mathscr{P}_2+\ldots+\alpha_s\mathscr{P}_s \tag{23}$$

называется спектральным разложением преобразования $\mathscr{A}$, *если*

а) числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ различны;

б) $\mathscr{P}_i\mathscr{P}_j=\mathscr{O}$ $\quad(i=1,2,\ldots,s)$,

в) $\mathscr{P}_i^2=\mathscr{P}_i$ $\quad(i=1,2,\ldots,s)$,

г) $\mathscr{P}_i\mathscr{P}_k=\mathscr{O}$ $\quad(i\neq k;\ i,\ k=1,2,\ldots,s)$,

д) $\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2+\ldots+\mathscr{P}_s=\mathscr{E}$.

Условия б), в), г) означают, что $\mathscr{P}_1,\ldots,\mathscr{P}_s$ — взаимно ортогональные проекционные преобразования.

Ясно, что *спектральное разложение может допускать лишь нормальные преобразования*. Действительно, из (23) следует:

$$x\mathscr{A}^*=\bar\alpha_1\mathscr{P}_1+\bar\alpha_2\mathscr{P}_2+\ldots+\bar\alpha_s\mathscr{P}_s,$$

$$x\mathscr{A}x\mathscr{A}^*=(\Sigma\alpha_i\mathscr{P}_i)(\Sigma\bar\alpha_k\mathscr{P}_k)=\Sigma\alpha_i\bar\alpha_i\mathscr{P}_i=x\mathscr{A}^*x\mathscr{A}.$$

Обратно, всякое нормальное преобразование комплексного унитарного пространства допускает спектральное разложение.

Пусть $\mathscr{A}$ — нормальное преобразование комплексного унитарного пространства $\mathfrak{L}$. Мы знаем, что в $\mathfrak{L}$ существует ортонормированная база $e_1, e_2,\ldots, e_n$, образованная собственными векторами преобразования $\mathscr{A}$. Расположим эти векторы так, чтобы те из них, которые отвечают одинаковым собственным значениям, находились рядом. Пусть, например, $e_1,\ldots,e_{n_1}$ отвечают собственному значению α_1, $e_{n_1+1},\ldots,e_{n_2}$ — собственному значению α_2 и т. д. Обозначим через $\mathfrak{L}_i$ подпространство, натянутое на векторы $e_{n_{i-1}+1},\ldots,e_{n_i}$, отвечающие собственному значению α_i $(i=1,2,\ldots,s)$. Так как все координатные векторы пространства $\mathfrak{L}_i$ являются собственными, принадлежащими одному и тому же собственному значению α_i, то вообще все векторы из $\mathfrak{L}_i$ будут собственными с собственными значениями, равными α_i. Мы имеем

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2+\ldots+\mathfrak{L}_s, \tag{24}$$

где подпространства $\mathfrak{L}_1,\ldots,\mathfrak{L}_s$ взаимно ортогональны. Обозначим через $\mathscr{P}_i$ проектирование на подпространство $\mathfrak{L}_i$. Из ортогональности подпространств $\mathfrak{L}_i$ вытекает ортогональность соответствующих проекционных преобразований. Кроме того, из равенства (24) следует, что $\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2+\ldots+\mathscr{P}_s=\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — проектирование на $\mathfrak{L}$. Однако проектирование на $\mathfrak{L}$ есть единичное преобразование, так что

$$\mathscr{E}=\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2+\ldots+\mathscr{P}_s. \tag{25}$$

Мы видим, таким образом, что преобразования $\mathscr{P}_1,\ldots,\mathscr{P}_s$ обладают свойствами б) — д). Покажем, наконец, что

$$a\mathscr{A}=\alpha_1\mathscr{P}_1+\alpha_2\mathscr{P}_2+\ldots+\alpha_s\mathscr{P}_s.$$

Пусть a — произвольный вектор из $\mathfrak{L}$. Равенство (25) дает

$$a=a\mathscr{P}_1+a\mathscr{P}_2+\ldots+a\mathscr{P}_s. \tag{26}$$

Вектор $a\mathscr{P}_i$ содержится в $\mathfrak{L}_i$, а все векторы из $\mathfrak{L}_i$ собственные, принадлежащие собственному значению α_i, поэтому $a\mathscr{P}_i\mathscr{A}=\alpha_i\cdot a\mathscr{P}_i$. Умножая (26) на $\mathscr{A}$, мы получим

$$a\mathscr{A}=\alpha_1 a\mathscr{P}_1+\ldots+\alpha_s a\mathscr{P}_s+a(\alpha_1\mathscr{P}_1+\ldots+\alpha_s\mathscr{P}_s),$$

откуда $a\mathscr{A}=\alpha_1\mathscr{P}_1+\ldots+\alpha_s\mathscr{P}_s$, что и требовалось.

Если

$$\mathscr{A}=\alpha_1\mathscr{P}_1+\alpha_2\mathscr{P}_2+\ldots+\alpha_s\mathscr{P}_s \tag{27}$$

— *какое-нибудь спектральное разложение преобразования* $\mathscr{A}$, *то* $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ — *всевозможные все собственные значения этого преобразования.*

В самом деле, любое преобразование $\mathscr{P}_i$ по предположению отлично от $\mathscr{O}$. Следовательно, найдется такой вектор a_i, что $a\mathscr{P}_i\neq 0$. Но тогда из

Умножая эти равенства последовательно на числа $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{s0}$ и складывая, мы получим требуемое соотношение.

Если

$$\mathscr{A} = \alpha_1\mathscr{P}_1 + \alpha_2\mathscr{P}_2 + \ldots + \alpha_s\mathscr{P}_s$$

— какое-нибудь спектральное разложение преобразования $\mathscr{A}$, то

$$\mathscr{P}_i = \frac{(\mathscr{A} - \alpha_1\mathscr{E})\ldots(\mathscr{A} - \alpha_{i-1}\mathscr{E})(\mathscr{A} - \alpha_{i+1}\mathscr{E})\ldots(\mathscr{A} - \alpha_s\mathscr{E})}{(\alpha_i - \alpha_1)\ldots(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i - \alpha_s)}.$$

В самом деле, рассмотрим многочлен

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{(\lambda - \alpha_1)\ldots(\lambda - \alpha_{i-1})(\lambda - \alpha_{i+1})\ldots(\lambda - \alpha_s)}{(\alpha_i - \alpha_1)\ldots(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i - \alpha_s)}.$$

Согласно (28)

$$\varphi_i(\mathscr{A}) = \varphi_i(\alpha_1)\mathscr{P}_1 + \varphi_i(\alpha_2)\mathscr{P}_2 + \ldots + \varphi_i(\alpha_s)\mathscr{P}_s.$$

Но $\varphi_i(\alpha_j) = 0$ $(i \neq j)$, $\varphi_i(\alpha_i) = 1$, следовательно, $\varphi_i(\mathscr{A}) = \mathscr{P}_i$.

Последнее свойство показывает, что *каждое нормальное преобразование унитарного пространства допускает одно и только одно спектральное разложение.*

Действительно, возможность разложения была установлена нами с самого начала, поэтому речь идет только о его единственности. Коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ спектрального разложения являются собственными числами преобразования $\mathscr{A}$ и, таким образом, преобразование $\mathscr{A}$ определяется однозначно. Но, зная эти коэффициенты, мы тем самым знаем многочлены $\varphi_i(\lambda)$ и, стало быть, и наши проекционные преобразования $\mathscr{P}_i$, что и требовалось.

Отметим еще несколько свойств спектральных разложений. Совокупность коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ спектрального разложения называется его *спектром*. *Спектром матрицы* называется спектр его спектрального разложения. Выше показано, что спектр нормального преобразования совпадает с совокупностью его собственных значений.

Для того чтобы нормальное преобразование было симметрическим, соответственно кососимметрическим или унитарным, необходимо и достаточно, чтобы его спектр был вещественным, соответственно чисто мнимым или состоящим из чисел с единичным модулем.

Пусть $\mathscr{A} = \alpha_1\mathscr{P}_1 + \alpha_2\mathscr{P}_2 + \ldots + \alpha_s\mathscr{P}_s$ — спектральное разложение преобразования $\mathscr{A}$. Тогда $\mathscr{A}^* = \bar{\alpha}_1\mathscr{P}_1 + \bar{\alpha}_2\mathscr{P}_2 + \ldots + \bar{\alpha}_s\mathscr{P}_s$ — спектральное разложение сопряженного преобразования. Поскольку каждое нормальное преобразование допускает только одно спектральное разложение, условие $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$ равносильно равенствам $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, т. е. равносильно вещественности спектра. Первое утверждение доказано. Остальные два доказываются аналогично.

Примеры и задачи

1. Разложить на симметрическую и кососимметрическую части, а также найти полярное разложение следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть $\mathscr{V}$ — двумерное евклидово пространство, $\mathscr{A}$ — его линейное преобразование, имеющее два единичных, но не ортогональных собственных

вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ с собственными значениями α_1 и α_2 $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$. Найти полярное разложение преобразования $\mathscr{A}$, если $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \cos\varphi$, где φ известно.

3. Указать матричную формулировку преобразования Кэли (теорема 2, 3).

4. Показать, что всякая ортогональная матрица D порядка 3, не содержащая -1 среди своих собственных значений, имеет вид

$$D = \frac{1}{1 + \gamma^2 + \beta^2 + \gamma^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 1 & 2(\alpha\beta - \gamma) & 2(\gamma + \alpha\gamma) \\ 2(\alpha\beta + \gamma) & \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 1 & 2(\beta\gamma - \alpha) \\ 2(\gamma\alpha - \beta) & 2(\beta\gamma + \alpha) & -\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

5. Комплексные квадратные матрицы порядка n образуют относительно сложения и умножения на число линейное пространство $\mathscr{V}$ размерности n^2. Матрицы E_{ik}, у которых в i-й строке и k-м столбце стоит единица, а на остальных местах нули, образуют базис пространства $\mathscr{V}$. Сделаем пространство $\mathscr{V}$ унитарным, считая, что E_{ik} дают ортонормированный базис в $\mathscr{V}$, т. е. полагая, что скалярное произведение матриц A и B вычисляется по формуле $(A, B) = \sum\sum a_{ik}\bar{b}_{ik}$, где a_{ik} — элементы матрицы A, b_{ik} — элементы матрицы B. Умножение всех матриц из $\mathscr{V}$ на какую-нибудь матрицу X справа дает линейное преобразование пространства $\mathscr{V}$. Показать, что

а) унитарные матрицы имеют в $\mathscr{V}$ длину $\sqrt{n}$;

б) умножение на сопряженно транспонированные матрицы X и X' производят в $\mathscr{V}$ сопряженные преобразования;

в) умножение матриц из $\mathscr{V}$ на унитарную матрицу производит в $\mathscr{V}$ унитарное преобразование;

г) умножение на эрмитову матрицу эрмитов в $\mathscr{V}$ симметрическое, а умножение на эрмитово-кососимметрическую матрицу — кососимметрическое преобразование.

6. Показать, что сумма проекционных преобразований $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}}$, $\mathscr{P}_{\mathfrak{B}}$ тогда и только тогда есть проекционное преобразование, когда $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}}\mathscr{P}_{\mathfrak{B}} = \mathscr{O}$. В последнем случае $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}} + \mathscr{P}_{\mathfrak{B}} = \mathscr{P}_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}$.

7. Произведение проекционных преобразований $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}}$, $\mathscr{P}_{\mathfrak{B}}$ тогда и только тогда проекционное, когда $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathscr{P}_{\mathfrak{B}}$ перестановочны. В этом случае $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}}\mathscr{P}_{\mathfrak{B}} = \mathscr{P}_{\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}}$.

8. Подпространство $\mathfrak{A}$ содержится в $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}}\mathscr{P}_{\mathfrak{B}} = \mathscr{P}_{\mathfrak{A}}$.

9. Доказать формулу $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}} = \mathscr{P}_{\mathfrak{A}} - \mathscr{P}_{\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}}$.

10. Подпространство $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда инвариантно относительно произвольного преобразования $\mathscr{A}$, когда соответствующее проекционное преобразование $\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\mathfrak{A}}$ удовлетворяет соотношению $\mathscr{P}\mathscr{A}\mathscr{P} = \mathscr{P}\mathscr{A}$.

11. Если преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ со спектральными разложениями $\mathscr{A} = \sum\alpha_i\mathscr{P}_i$, $\mathscr{B} = \sum\beta_k\mathscr{Q}_k$ перестановочны, то каждое $\mathscr{P}_i$ перестановочно с каждым $\mathscr{Q}_k$.

12. Если нормальное преобразование $\mathscr{A}$ перестановочно с произвольным линейным преобразованием $\mathscr{B}$, то $\mathscr{A}$ перестановочно и с $\mathscr{B}^*$.

13. Каждое унитарное преобразование $\mathscr{U}$ комплексного унитарного пространства представимо в форме $\mathscr{U} = e^{i\mathscr{A}}$, где $\mathscr{A}$ — эрмитово преобразование. Обратно, при любом эрмитовом $\mathscr{A}$ преобразование $e^{i\mathscr{A}}$ унитарно.

Глава VI

КВАДРАТИЧНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Предполагается, что все пространства, встречающиеся в этой главе, являются пространствами над полем (а не над произвольным кольцом).

§ 21. Билинейные формы

21.1. **Преобразование форм.** Многочлен $F(\xi)$ от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с коэффициентами из некоторого поля K называется *формой p-й степени над K от $\xi_1, \ldots, \xi_n$*, если все члены F имеют одну и ту же степень p относительно совокупности переменных. Формы первой степени называются *линейными*, второй степени — *квадратичными*, третьей степени — *кубическими* и т. д.

Основными задачами теории форм являются задачи изучения законов, по которым меняются коэффициенты форм при линейных преобразованиях переменных, и нахождение простейших видов, к которым могут быть приведены формы такими преобразованиями.

Иногда вместо одной формы рассматривают пару форм от одних и тех же переменных и ставится задача о нахождении такого преобразования переменных, чтобы сразу обе формы приняли возможно более простой вид. Это — задача о паре форм. Можно ставить задачи о тройках форм и т. п.

Геометрическое истолкование задачи о преобразовании форм будет дано в конце этой главы, а сначала задача будет рассмотрена с чисто алгебраической точки зрения и решена для квадратичных форм.

Формулы, связывающие переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с новыми переменными $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$, мы будем писать в соответствии с п. 5.1 в виде

$$\xi_i = \xi'_1 c_{1i} + \xi'_2 c_{2i} + \ldots + \xi'_n c_{ni} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Матрица $T = \|c_{ij}\|$ будет всегда предполагаться обратимой, так что из соотношений (1) всегда можно новые переменные

выразить через старые. Матрица T называется *матрицей преобразования* переменных ξ_i к переменным ξ'_i.

Обычно заданные формы приходится преобразовывать последовательно: сначала вводят новые переменные по формулам (1), затем с помощью аналогичных формул вместо ξ'_i вводят переменные ξ''_i и т. д. Пусть матрица перехода от переменных ξ к переменным ξ' есть $T = T_1$, матрица перехода от ξ' к ξ'' есть T_2 и т. д. Подставляя в формулы (1) вместо ξ_i их выражения через ξ'_i, мы выразим линейно переменные ξ_i через ξ'_i. Непосредственные подсчеты (ср. п. 5.1) показывают, что матрица перехода от ξ к ξ'' будет $T_2 T_1$. Применяя этот результат несколько раз, приходим к следующему выводу: *если переход от переменных ξ к переменным ξ' имеет матрицу T_1, переход от ξ' к ξ'' имеет матрицу T_2 и т. д., то матрица результирующего перехода от переменных ξ к переменным $\xi^{(m)}$ будет равна произведению $T_m T_{m-1} \ldots T_2 T_1$ матриц всех промежуточных переходов.*

Например, пусть нужно преобразовать к простейшему виду квадратичную форму

$$F = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 - 10\xi_1\xi_3.$$

Имеем

$$F = (\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)^2 - \xi_3^2 + 8\xi_2\xi_3.$$

Вводя новые переменные

$$\xi'_1 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \quad \xi'_2 = \xi_2, \quad \xi'_3 = \xi_3,$$

получим

$$F = \xi'^2_1 - \xi'^2_3 + 8\xi'_2\xi'_3 = \xi'^2_1 - (\xi'_3 - 4\xi'_2)^2 + 16\xi'^2_2.$$

Подстановка

$$\xi''_1 = \xi'_1, \quad \xi''_2 = \xi'_3 - 4\xi'_2, \quad \xi''_3 = 4\xi'_2$$

обращает форму F в простейшую

$$F = \xi''^2_1 - \xi''^2_2 + \xi''^2_3.$$

Согласно правилу матрица перехода от ξ'' к ξ будет

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

В качестве второго примера рассмотрим общую задачу о преобразовании произвольной системы m линейных форм

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \xi_1 a_{11} - \xi_2 a_{12} + \ldots + \xi_n a_{1n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m &= \xi_1 a_{m1} + \xi_2 a_{m2} + \ldots + \xi_n a_{mn} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

от n переменных. Матрица $A=\|a_{ij}\|$, прямоугольная при $m\neq n$, называется матрицей этой системы. Подставляя в данные формы вместо переменных ξ_j их выражения через ξ'_i из (1), получим систему m линейных форм от новых переменных ξ'_i. Непосредственный подсчет показывает, что матрица A_1 новой системы связана с матрицей A старой системы зависимостью

$$A_1=TA,$$

т. е. *при переходе к новым переменным матрица системы линейных форм умножается слева на матрицу перехода.*

Чтобы привести систему (2) к простейшему виду, выберем среди форм $f_1, \ldots, f_m, \xi_1, \ldots, \xi_n$ первые n линейно независимых. Пусть это будут формы $f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}, \xi_{j_{n+1}}, \ldots, \xi_{j_m}$. Число r, очевидно, равно рангу матрицы A. Вместо $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можно ввести переменные ξ'_i по формулам

$$\xi'_1=f_{i_1}(\xi), \ldots, \xi'_n=f_{i_n}(\xi), \xi'_{n+1}=\xi_{j_{n+1}}, \ldots, \xi'_m=\xi_{j_m},$$

после чего заданная система (2) примет искомый простейший вид

$$\xi'_1, \ldots, \xi'_r, f'_{r+1}, \ldots, f'_m,$$

где $f'_{r+1}, \ldots, f'_m$ — некоторые линейные формы от $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$. В частности, если все первоначальные формы были линейно независимыми, то указанной заменой переменных они приведутся к каноническому виду $f'_1=\xi'_1, \ldots, f'_m=\xi'_m$.

21.2. **Эквивалентность билинейных форм.** Вместо многочленов от одной системы переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ часто рассматривают многочлены от двух систем переменных, например $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$, а также и от нескольких систем переменных. Многочлен от нескольких систем переменных называется *формой*, если он однороден относительно каждой системы переменных отдельно. Особенный интерес представляют формы, линейные относительно каждой системы переменных. Если систем переменных две, то такие формы называются *билинейными*, если три, — то *трилинейными*, в общем случае — *полилинейными*.

Число переменных в каждой системе может быть различным. Задача о преобразовании форм от нескольких систем переменных может иметь различный смысл в зависимости от того, подвергать ли каждую систему переменных линейному преобразованию независимо от преобразований других систем или же над каждой системой производить преобразования, как-то связанные друг с другом.

Формы, которые можно перевести друг в друга независимым подбором линейных преобразований переменных, называются *эквивалентными*. Если же все системы переменных содержат одно и то же число переменных и формы от этих систем могут быть переведены одна в другую путем линейных преобразований каждой системы, имеющих одну и ту же матрицу, то такие формы называются *конгруэнтными*. Ясно, что конгруэнтные формы всегда эквивалентны. Обратное, конечно, неправедливо в общем случае. Легко привести примеры эквивалентных форм, не являющихся конгруэнтными, даже среди билинейных форм. В настоящем пункте мы рассмотрим простейшую задачу об эквивалентности билинейных форм, а в следующем пункте — задачу о конгруэнтности симметрических билинейных форм.

Билинейная форма от систем переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ имеет вид

$$F=\sum a_{ij}\xi_i\eta_j \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Матрица $A=\|a_{ij}\|$, составленная из коэффициентов формы, называется *матрицей формы*, а ранг матрицы A называется *рангом формы*.

Вводя в рассмотрение однострочные матрицы

$$X=[\xi_1, \ldots, \xi_n], \quad Y=[\eta_1, \ldots, \eta_n],$$

мы можем форму F записать в виде

$$F=XAY'. \qquad (3)$$

Предположим теперь, что нам нужно от переменных ξ, η перейти к новым переменным ξ', η', связанным со старыми следующими формулами:

$$\xi_i=\sum t_{ik}\xi'_k, \quad \eta_j=\sum \eta'_l c_{lj}$$

или, в матричной записи,

$$X=X_1T, \quad Y=Y_1S, \qquad (4)$$

где $T=\|t_{ij}\|$, $S=\|c_{ij}\|$, а

$$X_1=[\xi'_1, \ldots, \xi'_n], \quad Y_1=[\eta'_1, \ldots, \eta'_n].$$

Подставляя в (3) вместо X, Y их выражения из (4), получим

$$F=X_1TASY'_1=X_1A_1Y'_1,$$

где A_1 — матрица преобразованной формы.

Следовательно, если в билинейной форме с матрицей A произвести над первой системой переменных подстановку с матрицей T, а над второй системой — подстановку с матрицей S, то получится билинейная форма с матрицей

$$A_1=TAS. \qquad (5)$$

Как уже было сказано, билинейные формы, получающиеся друг из друга линейными подстановками переменных, называются

эквивалентными. С другой стороны, согласно п. 13.4 матрицы A, A_1 называются эквивалентными в поле K, если существуют неособенные матрицы P, Q с элементами из K, для которых $A_1 = PAQ$. Сравнивая это с формулой (5), видим, что *для эквивалентности билинейных форм над произвольным полем K необходимо и достаточно, чтобы их матрицы были эквивалентны.*

Согласно п. 13.4 все квадратные матрицы данного порядка n и данного ранга r над полем K эквивалентны между собой и эквивалентны матрице вида $E_r \dotplus O_{n-r}$, где E_r — единичная матрица порядка r, а O_{n-r} — нулевая матрица порядка $n-r$. Применяя это к билинейным формам, получаем следующий результат, полностью решающий задачу об эквивалентности билинейных форм:

Для эквивалентности билинейных форм над произвольным полем необходимо и достаточно, чтобы соответственно совпадали порядки и ранги матриц форм.

Формы, определитель которых отличен от нуля, называются *неособенными*, а остальные — *особенными*. Полученный результат об эквивалентности форм показывает, что все неособенные билинейные формы от систем n переменных эквивалентны форме

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n,$$

а особенные формы эквивалентны формам вида

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_r\eta_r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

где r — ранг формы.

Если основное поле — поле комплексных чисел, то наряду с обычными билинейными формами рассматривают также *формы Эрмита*, имеющие вид

$$F = \sum a_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j,$$

где черта сверху означает комплексную сопряженность. Матричная запись эрмитовой билинейной формы с матрицей $A = \|a_{ij}\|$ имеет вид

$$F = XAY',$$

а матрица A_1 новой эрмитовой формы, возникающей из F преобразованием переменных (4), будет

$$A_1 = TA\bar{T}'. \tag{6}$$

Отсюда, как и выше, получаем, что *все эрмитовы билинейные формы от систем n переменных эквивалентны форме*

$$\xi_1\bar{\eta}_1 + \xi_2\bar{\eta}_2 + \ldots + \xi_r\bar{\eta}_r,$$

где r — ранг данных форм.

21.3. **Конгруэнтность симметрических билинейных форм.** Выше было указано, что билинейные формы от двух систем, состоящих из одного и того же числа переменных, называются конгруэнтными, если они возникают друг из друга при некоторых линейных преобразованиях обеих систем переменных с одинаковыми матрицами.

Полагая $S = T$ в формуле (5), приходим к заключению, что *если в билинейной форме с матрицей A над обеими системами переменных произвести линейное преобразование с матрицей T, то новая форма будет иметь матрицу*

$$A_1 = TAT'. \tag{7}$$

Матрицы A, A_1, связанные соотношением вида (7), где T — подходящая неособенная матрица, называются *конгруэнтными*. Поэтому билинейные формы тогда и только тогда конгруэнтны, когда конгруэнтны их матрицы.

Билинейные формы, матрица которых симметрична или кососимметрична, называются также симметрическими или соответственно кососимметрическими.

Если заданная билинейная форма симметрична или кососимметрична, то тем же свойством будут обладать и все конгруэнтные формы.

Действительно, если $A' = \pm A$, то из (7) имеем

$$A_1' = \pm TAT' = \pm A_1.$$

Аналогичным образом, рассматривая эрмитовы билинейные формы, получаем из (6), что матрица A_1 новой эрмитовой формы, возникающей из формы с матрицей A при линейном преобразовании T обеих систем переменных, имеет вид

$$A_1 = TA\bar{T}'. \tag{8}$$

Матрицы A, A_1, связанные при помощи какой-либо неособенной матрицы T соотношением (8), называются *эрмитово-конгруэнтными*. Поэтому конгруэнтность эрмитовых форм равносильна эрмитовой конгруэнтности их матриц.

Эрмитова форма называется *симметрической*, если матрица ее эрмитово-симметрична, т. е. если $A' = \bar{A}$. Из (8) непосредственно следует, что если данная эрмитова форма симметрична, то и все конгруэнтные ей формы также симметричны.

Поскольку из конгруэнтности матриц следует их эквивалентность, то равенство рангов необходимо для конгруэнтности форм. Однако это условие далеко не достаточно. Достаточные условия в общих предположениях будут рассмотрены в п. 23.3, здесь такие условия будут даны лишь в важнейших случаях.

Прежде всего, пусть K — поле вещественных чисел и A — симметрическая матрица. Тогда согласно п. 19.4 найдется вещественная унитарная матрица U такая, что матрица $A_1 = UAU^{-1}$ будет иметь диагональный вид. Но унитарность U означает, что $U\bar{U}^t = E$, откуда в силу вещественности матрицы следует $U^{-1} = U^t$, т. е. $A_1 = UAU^t$. Таким образом, A оказывается конгруэнтной диагональной матрице A_1. Тем самым наша лемма доказана.

Теорема 1. *Каждая вещественная симметрическая билинейная форма подходящим вещественным унитарным преобразованием переменных может быть приведена к виду*

$$\alpha_1\xi_1\eta_1 + \alpha_2\xi_2\eta_2 + \ldots + \alpha_r\xi_r\eta_r, \tag{9}$$

где r — ранг формы, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — отличные от нуля характеристические числа матрицы формы. В частности, для унитарной эквивалентности вещественных симметрических билинейных форм необходимо и достаточно совпадение характеристических многочленов матриц форм.

Эта теорема дает больше, чем первоначально требовалось. Она утверждает, что приведение к диагональной форме осуществимо вещественным *унитарным* преобразованием переменных. Если унитарность преобразования переменных не нужна, то приведение к простейшему виду можно продолжить. Именно пусть форма уже приведена к диагональному виду (9). Изменим так нумерацию переменных, чтобы сначала шли члены с положительными коэффициентами, а затем — с отрицательными. Пусть, например, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ положительны, а $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_r$ отрицательны. Тогда, полагая

$$\xi_j' = \sqrt{\alpha_j}\xi_j \qquad \eta_j' = \sqrt{\alpha_j}\eta_j \qquad (j = 1, \ldots, s),$$
$$\xi_k' = \sqrt{-\alpha_k}\xi_k, \quad \eta_k' = \sqrt{-\alpha_k}\eta_k \quad (k = s+1, \ldots, r),$$

мы приведем форму к виду

$$\xi_1'\eta_1' + \ldots + \xi_s'\eta_s' - \xi_{s+1}'\eta_{s+1}' - \ldots - \xi_r'\eta_r'. \tag{10}$$

Разность

$$c = s - (r - s) = 2s - r$$

называется *сигнатурой* формы (10). Очевидно, форма (10) вполне определяется своими рангом и сигнатурой, ибо $s = \frac{1}{2}(r + c)$. То, что сигнатура не зависит от способа приведения заданной формы к виду (10) и, таким образом, однозначно определяется исходной формой, составляет содержание так называемого *закона инерции*, который подробно будет рассмотрен в п. 22.3.

Совершенно аналогичное положение имеет место и для эрмитовых симметрических форм. Пусть F — эрмитова форма с эрмитово-симметрической матрицей A. Согласно теореме 4а (п. 19.4) существует такая унитарная матрица U, что матрица $A_1 = UAU^{-1}$ будет вещественной диагональной. Из унитарности U следует, что $U^{-1} = \bar{U}^t$, откуда $A_1 = UA\bar{U}^t$. Тем самым доказана

Теорема 2. *Всякая симметрическая эрмитова билинейная форма унитарным преобразованием переменных может быть приведена к диагональному виду*

$$\alpha_1\xi_1\bar{\eta}_1 + \alpha_2\xi_2\bar{\eta}_2 + \ldots + \alpha_r\xi_r\bar{\eta}_r$$

с вещественными коэффициентами. Величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ являются отличными от нуля корнями характеристического многочлена матрицы формы, и потому для унитарной конгруэнтности симметрических эрмитовых форм необходимо и достаточно совпадение характеристических многочленов этих форм.

Если рассматривать не унитарную конгруэнтность, а конгруэнтность относительно произвольных линейных преобразований, то процесс приведения формы можно продолжить указанным выше способом, в результате чего получится форма вида

$$\xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_s\bar{\eta}_s - \xi_{s+1}\bar{\eta}_{s+1} - \ldots - \xi_r\bar{\eta}_r. \tag{11}$$

К одному из этих $r+1$ видов ($r = 0, 1, \ldots, n$) может быть приведена, следовательно, любая симметрическая эрмитова форма. Неконгруэнтность форм (11) при различных s снова вытекает из упоминавшегося выше закона инерции.

Примеры и задачи

1. Показать, что система линейных форм от $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$

$$\xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 - \xi_2, \quad \xi_3 + \xi_4, \quad \xi_3 - \xi_4, \quad \xi_1 + \xi_3$$

эквивалентна системе

$$\xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 - \xi_2, \quad \xi_3 + \xi_4, \quad \xi_3 - \xi_4, \quad 2\xi_1 + \xi_3$$

и не эквивалентна системе

$$\xi_1 - \xi_2 + \xi_3, \quad \xi_4 + \xi_3 - \xi_4, \quad \xi_1 + \xi_3, \quad 2\xi_1 + 2\xi_3 - \xi_4.$$

2. Показать, что система линейных форм

$$f_i = \xi_1\alpha_{i1} + \xi_2\alpha_{i2} + \ldots + \xi_n\alpha_{in} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

эквивалентна системе

$$g_i = \xi_1\beta_{i1} + \xi_2\beta_{i2} + \ldots + \xi_n\beta_{in} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

тогда и только тогда, когда система векторов

$$a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{14}$$

линейного пространства векторов-строк подвергшим невырожденным линейным преобразованием этого пространства переводится в систему векторов

$$b_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in}) \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{15}$$

3. Показать, что система линейных форм (12) может быть переведена *унитарным* преобразованием переменных в систему (13) тогда и только тогда, когда система векторов (14) *унитарного пространства* строк, получающаяся унитарным преобразованием этого пространства, может быть переведена в систему векторов (13).

4. Доказать, что для эквивалентности эрмитовых форм от систем, содержащих различное число переменных, необходимо и достаточно совпадение размерностей (чисел строк и столбцов) в ранг-матрице форм. В частности, эрмитовые формы от систем переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_m$ $(n \geqslant m)$, имеющие ранг r, эквивалентны форме $\xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_r\bar{\eta}_r$.

§ 22. Квадратичные формы

22.1. Конгруэнтность. Согласно общему определению квадратичной формой от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется однородный многочлен второй степени от этих переменных. Каждая квадратичная форма от указанных переменных допускает однозначную запись в следующем симметрическом виде:

$$F(\xi) = \sum a_{ij}\xi_i\xi_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}). \tag{1}$$

Матрица $A = \|a_{ij}\|$ называется матрицей квадратичной формы, а симметрическая билинейная форма

$$F(\xi, \eta) = \sum a_{ij}\xi_i\eta_j$$

от двух систем переменных, имеющая ту же матрицу, что и квадратичная форма, называется *полярной* к ней последней. Отождествляя в полярной форме вторую систему переменных с первой, получим исходную квадратичную форму. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между квадратичными формами и симметрическими билинейными формами. Например, если

$$F(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - 3\xi_1\xi_3 - 6\xi_2\xi_3,$$

то симметричной записью $F(\xi)$ будет

$$F(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \frac{3}{2}\xi_1\xi_3 + \frac{3}{2}\xi_3\xi_1 - 3\xi_2\xi_3 - 3\xi_3\xi_2,$$

и соответствующая полярная форма имеет вид

$$F(\xi, \eta) = \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 + \frac{3}{2}\xi_1\eta_3 + \frac{3}{2}\xi_3\eta_1 - 3\xi_2\eta_3 - 3\xi_3\eta_2.$$

Говорят, что квадратичная форма имеет диагональный вид, если диагональный вид имеет ее матрица, т. е. если форма содержит только члены с квадратами переменных.

Применяя к форме (1) линейную замену переменных с матрицей T, получим новую форму (п. 21.1)

$$F(\xi) = XAX' = X_1TAT'X_1' \qquad (X = [\xi_1, \ldots, \xi_n],\ X_1 = [\eta_1, \ldots, \eta_n])$$

с матрицей

$$A_1 = TAT'.$$

Таким образом, закон изменения матрицы квадратичной формы тот же самый, что и для соответствующей полярной билинейной формы. Отсюда следует, что квадратичные формы тогда и только тогда конгруэнтны, когда конгруэнтны соответствующие полярные формы, и на теоремы 1 предыдущего параграфа непосредственно получаются

Теорема 1. *Каждая вещественная квадратичная форма подходящей вещественной линейной невырожденной подстановкой переменных приводится к диагональному виду*

$$x_1\eta_1^2 + x_2\eta_2^2 + \ldots + x_r\eta_r^2,$$

где r — ранг исходной формы, а $x_1, \ldots, x_r$ — отличные от нуля характеристические числа матрицы формы. В частности, для ортогональной конгруэнтности вещественных квадратичных форм необходимо и достаточно совпадение характеристических многочленов форм.

Если допускаются и несортогональные преобразования переменных, то приведение возможно далее. Именно если $a_1, \ldots, a_p$ положительны, а $a_{p+1}, \ldots, a_r$ отрицательны, то подстановка

$$\xi_i = \sqrt{a_i}\eta_i \quad \xi_j = \sqrt{-a_j}\eta_j \qquad (i = 1, \ldots, s;\ j = s+1, \ldots, r) \tag{2}$$

приводит форму (2) к виду

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \ldots - \xi_r^2.$$

Следовательно, к такому виду может быть приведена любая квадратичная форма в поле вещественных чисел. Другие поля будут рассмотрены в следующем пункте.

Выражение вида

$$F(\xi) = \sum a_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j = XAX' \qquad (X = [\xi_1, \ldots, \xi_n])$$

при условии $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ называют *эрмитовой квадратичной формой* от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с матрицей $A = \|a_{ij}\|$. Эрмитову симметрическую билинейную форму $F(\xi, \eta) = \sum a_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j$ называют *полярной формой для* $F(\xi)$. Законы изменения матрицы эрмитовой квадратичной формы и ее полярной формы совпадают. Поэтому конгруэнтность эрмитовых квадратичных форм равносильна конгруэнтности их полярных форм, и на теоремы о приведении симметрических эрмитовых билинейных форм (п. 21.3) следует

Теорема 2. *Каждая эрмитова квадратичная форма унитарным преобразованием переменных может быть приведена к виду*

$$x_1\xi_1\bar{\xi}_1 + x_2\xi_2\bar{\xi}_2 + \ldots + x_r\xi_r\bar{\xi}_r, \tag{3}$$

где r — ранг, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ — ненулевые характеристические числа матрицы данной формы. Для унитарной конгруэнтности эрмитовых квадратичных форм необходимо и достаточно, чтобы совпадали характеристические множества матриц форм.

Дальнейшим, уже не унитарным, преобразованием переменных по формулам (2) форму (3) можно привести к виду

$$\xi_1\bar{\xi}_1 + \ldots + \xi_j\bar{\xi}_j - \xi_{j+1}\bar{\xi}_{j+1} - \ldots - \xi_r\bar{\xi}_r,$$

который и является простейшим в этом случае.

22.2. Алгоритм Лагранжа. Одним из наиболее простых способов приведения квадратичной формы к диагональному виду является так называемый способ Лагранжа, который здесь и будет рассмотрен. Основное поле можно предполагать произвольным полем характеристики, отличной от 2.

Пусть требуется привести к диагональному виду форму (1). Возможны два случая: а) форма содержит квадрат хотя бы одного переменного, б) форма не содержит квадратов переменных.

а) Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. Представляя форму в виде

$$F = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} a_{ik}x_ix_k =$$

$$= a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 -$$

$$- a_{11}^{-1}(a_{12}^2x_2^2 + 2a_{12}a_{13}x_2x_3 + \ldots + a_{1n}^2x_n^2) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} a_{ik}x_ix_k =$$

$$= a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + F_1(x_2, \ldots, x_n),$$

где F_1 — квадратичная форма от $x_2, \ldots, x_n$ и производя подстановку

$$\xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$\xi_i = x_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

преобразуем форму F к виду

$$F = a_{11}^{-1}\xi_1^2 + F_1,$$

где F_1 не зависит от ξ_1.

б) Пусть $a_{11} = \ldots = a_{nn} = 0$, но, например, $a_{12} \neq 0$. Переписывая форму F в виде

$$F = 2x_1(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + F_1(x_2, \ldots, x_n)$$

и производя замену

$$x_2 = a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_1,$$
$$x_i = x_i \quad (i = 1, 3, 4, \ldots, n),$$

получим форму

$$F = 2x_1(x_2 + x_1) + F_1 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3x_4 + \ldots,$$

содержащую квадрат переменной x_1.

Таким образом, применяя процесс а) и дополняя его в необходимых случаях процессом б), мы сможем привести заданную форму к диагональному виду.

Пример. К диагональному виду требуется привести форму

$$F = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - x_4^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4 - 6x_4^2.$$

Имеем

$$F = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - x_2^2 - x_4^2 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4 - 6x_4^2.$$

Производя подстановку

$$y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3, \quad y_i = x_i \quad (i > 1),$$

получим форму

$$F_1 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_2y_4 - y_4^2 + 6y_3y_4 - 6y_4^2 = y_1^2 - (y_2 - y_4)^2 + 3(y_3 - 6y_4^2.$$

которую заменой

$$z_1 = y_1 - y_2, \quad z_i = y_i \quad (i \neq 3)$$

приводим к

$$F_1 = z_1^2 - z_2^2 + z_3z_4 - z_4^2.$$

Теперь согласно б) произведем подстановку

$$z_1' = z_1 - z_4, \quad z_i' = z_i \quad (i \neq 4),$$

в результате которой получаем форму

$$F_2 = z_1'^2 - z_2^2 + (z_3' + z_4')z_4' - z_4'^2 = z_1'^2 - z_2^2 + \left(z_3' + \frac{1}{2}z_4'\right)^2 - \frac{1}{4}z_4'^2.$$

Эту форму заменами

$$z_3'' = z_3' + \frac{1}{2}z_4', \quad z_i'' = z_i' \quad (i = 1, 2, 4), \quad z_4'' = z_3'$$

приводим к диагональному виду

$$F = z_1''^2 - z_2''^2 + z_3''^2 - \frac{1}{4}z_4''^2.$$

Чтобы найти матрицу T перехода от переменных ζ_i к начальным переменным ξ_i, достаточно согласно п. 21.1 перемножить матрицы проведенных переходов.

Если вместо квадратичной формы требуется привести к диагональному виду симметрическую *билинейную* форму, то билинейную форму заменяем соответствующей квадратичной, приводим последнюю к диагональной форме и выписываем матрицу перехода. Ввиду связи между квадратичными и билинейными формами этот же переход приведет к диагональному виду и заданную билинейную форму.

В заключение рассмотрим задачу о приведении к простейшему виду кососимметрической билинейной формы

$$F = \sum a_{ij}\xi_i\eta_j \qquad (a_{ij} = -a_{ji})$$

с коэффициентами из совершенно произвольного поля.

Если все коэффициенты равны нулю, то форма приведенная. В противном случае пусть, например, $a_{12} \neq 0$. Перепишем форму в виде

$$F = \xi_1(a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n) - \eta_1(a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n) + R(\xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

и произведя замену

$$\xi_2' = a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n, \quad \eta_2' = a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n,$$
$$\xi_i' = \xi_i, \quad \eta_i' = \eta_i \qquad (i = 1, 3, \ldots, n),$$

получим форму

$$F_1 = \xi_1'\eta_2' - \xi_2'\eta_1' + R_1(\xi_1', \ldots, \xi_n', \eta_1', \ldots, \eta_n').$$

Теперь возможны два случая: а) остаток R_1 не содержит ξ_1', а следовательно, и η_1'; б) остаток содержит ξ_1'. В случае а) прочего далее совершаем только над остатком, так как он не зависит от уже выделенного члена $\xi_1'\eta_2' - \xi_2'\eta_1'$. В случае б) переписываем форму в виде

$$F_1 = \xi_1'\eta_2' - \xi_2'\eta_1' + \xi_1'(a_{21}'\eta_1' + \ldots + a_{2n}'\eta_n') - \eta_1'(a_{21}'\xi_1' + \ldots + a_{2n}'\xi_n') + R_2(\xi_2', \ldots) =$$
$$= (\xi_1' - a_{21}'\xi_2' - \ldots - a_{2n}'\xi_n')\eta_2' - (\eta_1' - a_{21}'\eta_2' - \ldots - a_{2n}'\eta_n')\xi_2' + R_2(\xi_2', \ldots),$$

произведем замену

$$\xi_1'' = \xi_1' - a_{21}'\xi_2' - \ldots - a_{2n}'\xi_n', \quad \eta_1'' = \eta_1' - a_{21}'\eta_2' - \ldots - a_{2n}'\eta_n',$$
$$\xi_i'' = \xi_i', \quad \eta_i'' = \eta_i' \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

и в результате получаем разложившуюся форму

$$\xi_1''\eta_2'' - \xi_2''\eta_1'' + R_2(\xi_2'', \ldots, \eta_2'', \ldots).$$

Повторяя изложенный процесс над остатком, затем над новым остатком и т. д., приведем форму к виду

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3 + \ldots + \xi_{2r-1}\eta_{2r} - \xi_{2r}\eta_{2r-1},$$

где $2r$ — ранг приведенной, а следовательно, и первоначальной формы. В частности, снова получаем, что *ранг кососимметрической матрицы всегда числа четное.*

Пример. Преобразовать к простейшему виду форму

$$F = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1 - 2\xi_1\eta_4 + 2\xi_4\eta_1 + 2\xi_2\eta_3 - 2\xi_3\eta_2 + 3\xi_2\eta_4 - 3\xi_4\eta_2 + 4\xi_3\eta_4 - 4\xi_4\eta_3.$$

Согласно правилу произведем первую операцию

$$\xi_2' = \xi_2 + \xi_4 - 2\xi_3, \quad \eta_2' = \eta_2 + \eta_4 - 2\eta_3, \quad \xi_i' = \xi_i, \quad \eta_i' = \eta_i \qquad (i = 1, 3, 4),$$

после которой форма приобретает вид

$$F_1 = \xi_1'\eta_2' - \xi_2'\eta_1' + 3\xi_2'\eta_3' - 3\xi_3'\eta_2' - \xi_1'\eta_3' - \xi_3'\eta_1' - 4\xi_1'\eta_4' + 4\xi_4'\eta_1' - 7\xi_4'\eta_3' + 7\xi_3'\eta_4'.$$

Совершим теперь преобразование

$$\xi_1'' = \xi_1' - 3\xi_3' - \xi_4', \quad \eta_1'' = \eta_1' - 3\eta_3' - \eta_4', \quad \xi_i'' = \xi_i', \quad \eta_i'' = \eta_i' \qquad (i = 2, 3, 4),$$

получим простейшую форму

$$F_2 = \xi_1''\eta_2'' - \xi_2''\eta_1'' - 4\xi_3''\eta_4'' + 4\xi_4''\eta_3''.$$

С практической точки зрения задача о приведении к простейшему виду квадратичных форм распадается на две части: определение окончательного простейшего вида формы и нахождение матрицы преобразования переменных, необходимого для приведения формы к простейшему виду. В случае приведения при помощи произвольных линейных преобразований обе эти частные задачи решались алгоритмом Лагранжа.

Более сложно обстоит дело в случае приведения форм *унитарными* преобразованиями переменных. Пусть дана эрмитова форма с матрицей A. Во вспомогательном унитарном пространстве векторов-строк умножение строк на матрицу A будет симметрическим линейным преобразованием $\mathscr{A}$ с матрицей A в простейшем базисе (п. 4.1). Нужно найти ортонормированный базис, в котором матрица преобразования A приобретает диагональный вид. Для этого ищем характеристические числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ матрицы A, решая характеристическое уравнение для A. Затем, решая системы линейных уравнений

$$[\xi_1, \ldots, \xi_n]A = \alpha_i[\xi_1, \ldots, \xi_n]$$

относительно неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, находим n линейно независимых собственных векторов

$$x_i = [\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}] \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

преобразования $\mathscr{A}$. Нормируя эти векторы, получим ортонормированный базис, в котором матрица A, а следовательно, и исходная эрмитова форма принимают диагональный вид с диагональными элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Если векторы x_i уже нормированы, то искомая матрица перехода будет $T = \|\xi_j^{(i)}\|$.

22.3. **Закон инерции квадратичных форм.** В результатах п. 22.1 о приведении вещественных квадратичных, а также комплексных эрмитовых форм к диагональной форме остался пробел: не было установлено, могут ли быть конгруэнтными формы с различной сигнатурой. Этот пробел заполняет

Теорема 3 (закон инерции). *Каждая вещественная квадратичная форма может быть бесконечным числом подстановок переменных приведена к диагональному виду* $a_1\xi_1^2+\ldots+a_n\xi_n^2$. *Однако, хотя сами коэффициенты* $a_1, \ldots, a_n$ *могут зависеть от употребленной подстановки, число положительных и число отрицательных среди них не зависят от указанных подстановок и, таким образом, однозначно определяются самой исходной формой.*

Допустим, напротив, что вещественная квадратичная форма

$$a_1\xi_1^2+\ldots+a_r\xi_r^2-a_{r+1}\xi_{r+1}^2-\ldots-a_s\xi_s^2 \qquad (a_i>0)$$

подстановкой переменных $\xi_i=\sum_j c_{ij}\eta_j$ приводится также и к диагональной форме

$$\beta_1\eta_1^2+\ldots+\beta_t\eta_t^2-\beta_{t+1}\eta_{t+1}^2-\ldots-\beta_s\eta_s^2 \qquad (\beta_i>0),$$

причем $s<t$. Это значит, что если в равенстве

$$a_1\xi_1^2+\ldots+a_r\xi_r^2-a_{r+1}\xi_{r+1}^2-\ldots-a_s\xi_s^2=$$
$$=\beta_1\eta_1^2+\ldots+\beta_t\eta_t^2-\beta_{t+1}\eta_{t+1}^2-\ldots-\beta_s\eta_s^2$$

заменить переменные ξ_i их выражениями через η_j, то оно обратится в тождество. Перепишем это тождество в виде

$$a_1\xi_1^2+\ldots+a_r\xi_r^2+\beta_{t+1}\eta_{t+1}^2+\ldots+\beta_s\eta_s^2=$$
$$=\beta_1\eta_1^2+\ldots+\beta_t\eta_t^2+\alpha_{s+1}\xi_{s+1}^2+\ldots+a_n\xi_n^2 \qquad (4)$$

и рассмотрим систему уравнений

$$\eta_1=0, \ldots, \eta_t=0, \quad \xi_{r+1}=0, \ldots, \xi_n=0, \qquad (5)$$

где под $\eta_1, \ldots, \eta_t$ понимаются их выражения через $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Система (5) является системой линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, причем число уравнений $s-(n-t)=n-(t-s)$ меньше числа неизвестных, поскольку $t>s$. Но в таком случае система (5) должна иметь хотя бы одно ненулевое решение

$$\xi_1=\gamma_1, \ldots, \xi_r=\gamma_r, \quad \xi_{r+1}=0, \ldots, \xi_n=0. \qquad (6)$$

Подставляя его в тождество (4), получим

$$\beta_1\gamma_1^2+\ldots+\beta_t\gamma_t^2+\alpha_{s+1}\xi_{s+1}^2+\ldots+\alpha_n\xi_n^2=0. \qquad (7)$$

Числа β_i, a_j положительны, γ_i^2, ξ_j^2 неотрицательны, поэтому из (7) следуют $\gamma_1=\ldots=\gamma_t=0$, что противоречит нетривиальности решения (6).

Закон инерции в той же самой формулировке имеет силу и для эрмитовых квадратичных форм. Доказательство его не отличается от изложенного выше.

22.4. Знакопостоянные формы. Вещественная квадратичная форма $F(x)=\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ называется *неотрицательной*, если для всех вещественных значений переменных ξ_i значение формы неотрицательно. Форма называется *положительно определенной*, если для каждой ненулевой системы значений переменных значение формы строго положительно. Аналогично определяются понятия *неположительной* и *отрицательно определенной* форм. Неотрицательные и неположительные формы иногда называются также *знакопостоянными* формами.

Если форма от n переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеет диагональный вид

$$a_1\xi_1^2+\ldots+a_r\xi_r^2-a_{r+1}\xi_{r+1}^2-\ldots-a_s\xi_s^2 \qquad (a_i>0),$$

то легко видеть, что она будет положительно определенной в случае $s=n$, неотрицательной при $s=r<n$, неположительной для $s=0$ и отрицательно определенной в случае $s=0$, $r=n$. При $0<s<r$ форма имеет положительные значения при одних значениях переменных и отрицательные — при подходящих других. Так как знакопостоянство формы не меняется при замене переменных, то можно сказать, что положительно определенными являются те формы, которые приводятся к сумме n положительных квадратов, неотрицательными являются формы, приводящиеся к сумме только положительных квадратов, хотя бы и в меньшем числе, чем число переменных, и соответственно для неположительных и отрицательно определенных форм. В частности, неотрицательная форма положительно определена, если только она неособенная.

Если в обычных квадратичных формах позволять переменным принимать не только вещественные, но и комплексные значения, то введенные понятия теряют смысл, так как тогда любая ненулевая форма становится способной принимать невещественные значения. Дело меняется, если рассматривать эрмитовы формы. Причина состоит в том, что при любых как вещественных, так и комплексных значениях переменных эрмитовы формы имеют вещественные значения. Действительно, из условий $a_{ij}=\overline{a}_{ji}$ следует:

$$F=\sum\overline{a_{ij}\xi_i\xi_j}=\sum a_{ij}\xi_j\xi_i=\sum a_{ji}\xi_j\xi_i=F,$$

т. е. F вещественно. В силу этого понятия неотрицательности, положительной определенности и т. д. непосредственно распространяются на эрмитовы квадратичные формы.

Положительная определенность формы, так же как и ее сигнатура, в общем случае легко устанавливается путем приведения формы к диагональному виду по способу Лагранжа. Однако в отдельных случаях имеют большой интерес и непосредственные

признаки положительной определенности. Из них мы рассмотрим только так называемый

Признак Якоби. *Квадратичная или эрмитова квадратичная форма от n переменных с матрицей A тогда и только тогда положительно определена, когда коэффициент характеристического многочлена A самой старшей степени отличен от нуля, причем коэффициенты при младших членах также должны равняться нулю.*

Действительно, согласно п. 22.1 преобразованием переменных с унитарной матрицей U заданная форма может быть приведена к диагональному виду с вещественной диагональной матрицей $A_1 = UAU^* = UAU^{-1}$. Так как A не только конгруэнтна, но и подобна A_1, то характеристический многочлен A совпадает с характеристическим многочленом A_1 и доказываемый признак остается проверить только для диагональных форм вида $\alpha_1\xi_1\bar{\xi}_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n\bar{\xi}_n$. Характеристический многочлен матрицы последней формы есть

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\ldots(\lambda - \alpha_n) = \lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} - \ldots,$$

Если все α_i положительны, то формулы Виета

$$\sigma_i = \sum \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots\alpha_{k_i} \qquad (k_1 < k_2 < \ldots < k_i)$$

показывают, что коэффициенты $\varphi(\lambda)$ обладают требуемыми свойствами. Обратно, пусть известно, что коэффициенты какого-либо многочлена отличны от нуля, имеют чередующиеся знаки и корни многочлена вещественны. Нужно доказать, что тогда все его корни положительны. Предположим по индукции, что для всех многочленов меньшей степени это уже доказано. Тогда $\varphi'(\lambda)$ будет иметь $n-1$ положительных корней (так как если все предположения для $\varphi(\lambda)$ удовлетворяются, то они заведомо удовлетворяются и для $\varphi'(\lambda)$). Но в таком случае $\varphi(\lambda)$ по теореме Ролля имеет не менее $n-1$ положительных корней, а последний n-й корень $\varphi(\lambda)$ будет положителен в силу того, что по предположению произведение всех корней $\varphi(\lambda)$ положительно.

Примеры и задачи

1. Найти матрицу линейного преобразования переменных, приводящего к простейшему виду билинейную форму

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 + 2\xi_3\eta_4 - 2\xi_4\eta_3.$$

2. Показать, что в вещественном унитарном пространстве каждую вещественную кососимметрическую билинейную форму от n переменных вещественным унитарным преобразованием переменных можно привести к виду

$$\alpha_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + \ldots + \alpha_r(\xi_{2r-1}\eta_{2r} - \xi_{2r}\eta_{2r-1})$$

(ср. п. 19.5).

3. Найти матрицу вещественных ортогональных преобразований переменных, приводящих к диагональному виду формы:

а) $\xi_1^2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3^2$;

б) $6\xi_1^2 - 12\xi_1\xi_2 - 16\xi_1\xi_3 + 13\xi_2^2 - 8\xi_2\xi_3 + 7\xi_3^2$;

в) $11\xi_1\eta_1 + 5\xi_1\eta_2 - 4\xi_1\eta_3 + 12\xi_2\eta_1 - 12\xi_2\eta_2 - 2\xi_2\eta_3 - 14\xi_3\eta_1 - 11\xi_3\eta_2 + \xi_3\eta_3$

и написать эти простейшие формы.

4. Найти матрицу унитарного преобразования, приводящего форму

$$6\xi_1\bar{\eta}_2 - 6\xi_2\bar{\eta}_1 + 2\xi_3\bar{\eta}_3 + 3\xi_4\bar{\eta}_4 + 2\xi_2\bar{\eta}_3 - 2\xi_3\bar{\eta}_2 - 4\xi_3\bar{\eta}_4 + 4\xi_4\bar{\eta}_3$$

к простейшему виду.

5. Найти преобразование переменных, приводящее форму

$$\xi_1\xi_n + \xi_2\xi_{n-1} + \ldots + \xi_n\xi_1 \quad \left(r = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

к сумме квадратов.

§ 23. Пары форм

23.1. Эквивалентность пар форм. В предыдущих пунктах рассмотрена задача приведения к простейшему виду одной квадратичной формы. В настоящем параграфе будет рассмотрена важная задача о совместном приведении двух квадратичных форм.

Напомним, что последовательность билинейных форм $F_1, \ldots, F_k$ от одних и тех же систем переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_m$ называется *эквивалентной* последовательности билинейных форм $G_1, \ldots, G_k$ от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_m$, если линейными обратимыми преобразованиями переменных

$$[\xi] = [\Sigma]\,[\xi'], \quad [\eta] = [\eta']\,S \qquad ([\xi] = [\xi_1, \ldots, \xi_n])$$

формы первой последовательности могут быть приведены в соответствующие формы второй последовательности.

Из результатов п. 21.2 вытекает, что последовательность билинейных форм с матрицами $A_1, \ldots, A_k$ тогда и только тогда эквивалентна последовательности билинейных форм с матрицами $B_1, \ldots, B_k$, когда существуют невырожденные матрицы P, Q с элементами из основного поля такие, что

$$PA_iQ = B_i \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{1}$$

Две последовательности матриц $A_1, \ldots, A_k$ и $B_1, \ldots, B_k$ называются *эквивалентными*, если при некоторых невырожденных матрицах P, Q они связаны соотношениями (1). Таким образом, эквивалентность последовательностей форм и эквивалентность последовательностей их матриц равносильны друг другу.

Пусть λ — независимая переменная, F, G — пара квадратных матриц одного и того же порядка n. Инвариантные множители λ-матрицы $\lambda F - G$ (см. п. 13.2) называются *инвариантными*

эквивалентные пары F, G. Если пара F, G эквивалентна паре F_1, G_1, то из (1) следует:

$$\lambda F_1 - G_1 = U(\lambda F - G)V.$$

Согласно п. 13.3 это показывает, что инвариантные множители λ-матриц $\lambda F_1 - G_1$ и $\lambda F - G$ совпадают. Итак, *для эквивалентности двух пар матриц необходимо, чтобы инвариантные множители этих пар совпадали.* В общем случае это условие не является достаточным [1]). Однако если первые матрицы обеих пар неособенные, то совпадения инвариантных множителей достаточно для их эквивалентности.

Теорема 1. *Пусть заданы две пары квадратных матриц* F, G, F_1, G_1 *одного и того же порядка, из которых* F, F_1 *неособенные. Для эквивалентности пар* F, G *и* F_1, G_1 *необходимо и достаточно, чтобы инвариантные множители матрицы* $\lambda F - G$ *совпадали с инвариантными множителями матрицы* $\lambda F_1 - G_1$.

Необходимость была уже доказана, поэтому установим только достаточность. Пусть инвариантные множители матриц $\lambda F - G$ и $\lambda F_1 - G_1$ одинаковы. Из соотношений

$$F^{-1}(\lambda F - G) = \lambda E - F^{-1}G,$$
$$F_1^{-1}(\lambda F_1 - G_1) = \lambda E - F_1^{-1}G_1$$

видно, что инвариантные множители матриц $\lambda E - F^{-1}G$ и $\lambda E - F_1^{-1}G_1$ также одинаковы. Так как эти матрицы являются характеристическими для $F^{-1}G$ и $F_1^{-1}G_1$, то отсюда следует (п. 15.3), что $F^{-1}G$ и $F_1^{-1}G_1$ подобны, т. е. что существует неособенная матрица T, удовлетворяющая соотношению

$$F_1^{-1}G_1 = T^{-1}F^{-1}GT.$$

Мы имеем теперь

$$\lambda E - F_1^{-1}G_1 = T^{-1}(\lambda E - F^{-1}G)T = T^{-1}F^{-1}(\lambda F - G)T,$$
$$\lambda F_1 - G_1 = F_1 T^{-1} F^{-1}(\lambda F - G)T,$$

откуда

$$F_1 = UFV, \qquad G_1 = UGV,$$

где $U = F_1 T^{-1} F^{-1}$, $V = T$. Таким образом, пары F, G и F_1, G_1 эквивалентны.

23.2. Конгруэнтность пар форм. Последовательность билинейных форм от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ с матрицами $A_1, \ldots, A_k$ называется *конгруэнтной* последовательности билинейных форм с матрицами $B_1, \ldots, B_k$, если одними и теми же преобразованиями обеих систем переменных формы первой последовательности можно перевести в соответственные формы второй последовательности.

Обозначая матрицу преобразования переменных через T, будем иметь

$$B_j = TA_jT' \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{2}$$

Две последовательности произвольных матриц $A_1, \ldots, A_k$ и $B_1, \ldots, B_k$ называются *конгруэнтными*, если существует неособенная матрица T, для которой выполняются условия (2).

Аналогичным образом говорят, что одна последовательность квадратичных или эрмитовых квадратичных форм конгруэнтна другой последовательности форм, если подходящим обратимым преобразованием переменных формы первой последовательности можно одновременно перевести в соответственные формы второй последовательности.

Условие (2) является, очевидно, необходимым и достаточным для конгруэнтности квадратичных форм с матрицами $A_1, \ldots, A_k$ и $B_1, \ldots, B_k$. Для эрмитовых форм это условие запишется следующим:

$$B_j = TA_j\bar{T}' \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Сформулированная общая задача об условиях конгруэнтности последовательностей билинейных форм является весьма сложной уже для пары форм. Для случая, когда обе формы пары симметричны, в частности если формы квадратичные и если одна из форм пары неособенная, необходимые и достаточные условия конгруэнтности были получены во второй половине прошлого века Вейерштрассом. Они будут изложены в конце этого пункта. Общий случай конгруэнтности пар квадратичных форм был изучен Кронекером. Ввиду некоторой громоздкости условий Кронекера они обычно излагаются в более специальных руководствах. И те и другие условия касаются форм над полем комплексных чисел. Случай иных полей рассматривался Диксоном и другими авторами.

Мы сначала рассмотрим наиболее важный случай пары вещественных квадратичных форм, когда одна из них является положительно определенной.

Теорема 2. *Каждая пара вещественных квадратичных форм от* n *переменных, из которых первая является положительно определенной, подходящим вещественным преобразованием переменных может быть переведена в пару форм вида*

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2, \qquad \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \ldots + \alpha_n\xi_n^2. \tag{3}$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *с точностью до порядка следования определяются однозначно первоначальными формами и не зависят от способа приведения.*

[1]) Именно, кроме инвариантных множителей, в общем случае приходится рассматривать еще так называемые минимальные индексы.

В самом деле, пусть заданные квадратичные формы суть $F(\xi)$ и $G(\xi)$. Надлежащим линейным преобразованием переменных первую из этих форм приводим к сумме квадратов переменных, что ввиду положительной определенности первой формы заведомо возможно. В результате получим пару форм вида

$$\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2, \quad \sum a_{ik}\eta_i\eta_k.$$

Теперь ищем подстановку переменных с вещественной *ортогональной* матрицей U, которая приводила бы к диагональному виду вторую форму. Так как матрица первой формы при этом будет в новых переменных равна

$$UEU'=UU'=E,$$

т. е. первая форма сохранит свой единичный вид, то после указанного преобразования заданные формы приобретут требуемый вид (3).

Предположим, наконец, что формы F, G одним преобразованием переменных приводятся к виду (3), а некоторым другим преобразованием — к виду

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2, \quad \beta_1\xi_1^2+\beta_2\xi_2^2+\ldots+\beta_n\xi_n^2. \tag{4}$$

Тогда подходящее преобразование переменных с матрицей T переведет пару (3) в пару форм (4) и, следовательно, матрицы этих форм будут связаны соотношениями

$$E=TFT', \quad B=TAT', \tag{5}$$

где A — диагональная матрица с элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а B — диагональная матрица с элементами $\beta_1, \ldots, \beta_n$ на главной диагонали. Первое из соотношений (5) дает $TT'=E$, откуда $B=TAT^{-1}$, т. е. матрицы A, B подобны и характеристические числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ первой из них должны совпадать с характеристическими числами $\beta_1, \ldots, \beta_n$ второй.

Для эрмитовых квадратичных форм имеет место совершенно аналогичная

Теорема 2а. *Каждая пара эрмитовых квадратичных форм, из которых первая положительно определенная, подобными комплексным линейным преобразованиям переменных может быть переведена в пару форм вида*

$$\xi_1\bar{\xi}_1+\xi_2\bar{\xi}_2+\ldots+\xi_n\bar{\xi}_n, \quad \alpha_1\xi_1\bar{\xi}_1+\alpha_2\xi_2\bar{\xi}_2+\ldots+\alpha_n\xi_n\bar{\xi}_n,$$

где числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ однозначно определяются заданными формами с точностью до порядка их следования.

Доказательство аналогично предыдущему.

Переходя к рассмотрению общего случая, прежде всего заметим, что из конгруэнтности пар матриц заведомо следует их эквивалентность. Совершенно неожиданно оказывается, что при некоторых условиях верно и обратное утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что в двух парах квадратичных матриц F, G и F_1, G_1 первые матрицы F, F_1 или обе симметричны, или обе кососимметричны, а вторые матрицы G, G_1 тоже или обе симметричны, или обе кососимметричны. Тогда в этом комплексном числе из эквивалентности указанных пар вытекает их конгруэнтность.*

По условию существуют такие неособенные матрицы U, V, что

$$F_1=UFV, \quad G_1=UGV. \tag{6}$$

Переходя к транспонированным матрицам, мы получим отсюда $F_1'=VFU'$, $G_1'=VGU'$. Так как F и F_1 симметричны или кососимметричны, то это дает

$$F_1=VFU', \tag{7}$$

являющееся равенством имеем для G_1. Сравнивая (7) с (6), получаем

$$UFV=VFU', \quad V^{-1}U\cdot F=F\cdot(V^{-1}U)'. \tag{8}$$

Введем обозначение $V^{-1}U=T$. Второе равенство в (8) теперь дает

$$\begin{gathered}TF=FT',\\ T^2F=FT'^2,\\ \ldots\ldots\ldots\\ T^kF=FT'^k,\end{gathered}$$

откуда

$$(\alpha_0E+\alpha_1T+\ldots+\alpha_kT^k)F=F(\alpha_0E+\alpha_1T'+\ldots+\alpha_kT'^k),$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — произвольные числа. В гл. IV (п. 16.3) было показано, что числа $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ возможно подобрать так, чтобы многочлен

$$\varphi(T)=\alpha_0E+\alpha_1T+\ldots+\alpha_kT^k$$

был квадратным корнем из T, т. е. чтобы $\varphi(T)\varphi(T)=T$. Положим $P=V\varphi(T)$, тогда

$$PFP'=V\varphi(T)F\varphi(T)'V'=V\varphi(T)\varphi(T)FV'=VTFV'=UFV',$$

или

$$PFP'=F_1.$$

Повторяя те же рассуждения для матрицы G, мы получим

$$PGP'=G_1.$$

Следовательно, пара F, G конгруэнтна паре F_1, G_1, что и требовалось.

Теоремы 1, 3 позволяют сформулировать следующее условие конгруэнтности пар матриц:

Пусть даны две пары матриц F, G и F_1, G_1. Если F, F_1 невырожденные и либо обе симметрические, либо обе кососимметрические, и если G, G_1 также либо обе симметрические, либо обе кососимметрические, то необходимым и достаточным условием конгруэнтности пар F, G и F_1, G_1 в поле комплексных чисел является совпадение инвариантных множителей матриц $\lambda F - G$ и $\lambda F_1 - G_1$.

Действительно, если инвариантные множители матриц $\lambda F - G$ и $\lambda F_1 - G_1$ совпадают, то согласно теореме 1 пары F, G и F_1, G_1 эквивалентны. Но тогда эти пары в силу теоремы 3 будут также конгруэнтны. Обратно, если F, G и F_1, G_1 конгруэнтны, то они тем более эквивалентны, и, значит, инвариантные матрицы $\lambda F - G$ совпадают с инвариантными множителями матрицы $\lambda F_1 - G_1$.

Приложения теоремы 3 к фактическому нахождению простейших видов пар комплексных форм будут рассмотрены позже, в гл. VII. В следующем пункте с помощью этой теоремы будет решен вопрос о конгруэнтности несимметрических билинейных форм.

Заметим еще, что хотя до теоремы 3 вещественные квадратичные формы и эрмитовы формы вели себя одинаково, теорема 3 уже перестает быть верной для эрмитовых форм. Соответствующий пример будет рассмотрен в начале § 28.

23.3. **Конгруэнтность несимметрических билинейных форм.** Как уже сказано выше, результаты предыдущего пункта позволяют сформулировать необходимые и достаточные условия для конгруэнтности произвольных комплексных невырожденных билинейных форм и тем существенно пополнить результаты п. 21.3.

Теорема 4. *Для того чтобы комплексные невырожденные билинейные формы с матрицами G и G_1 были конгруэнтны, необходимо и достаточно, чтобы совпадали элементарные делители λ-матриц $\lambda G - G'$ и $\lambda G_1 - G_1'$.*

Доказательство. Пусть формы конгруэнтны. Тогда матрицы G и G_1 связаны соотношением

$$G_1 = UGU'.$$

Отсюда

$$G_1' = UG'U'.$$

Следовательно, пара матриц G, G' конгруэнтна паре G_1, G_1' и элементарные делители матрицы $\lambda G - G'$ совпадают с элементарными делителями матрицы $\lambda G_1 - G_1'$.

Пусть, обратно, элементарные делители матриц $\lambda G - G'$ и $\lambda G_1 - G_1'$ совпадают. Тогда на основании теоремы 1 пара G, G' эквивалентна паре G_1, G_1', т. е.

$$G_1 = UGV, \qquad G_1' = UG'V'. \tag{9}$$

Положим

$$G + G' = S, \qquad G - G' = T, \qquad G_1 + G_1' = S_1, \qquad G_1 - G_1' = T_1.$$

Из (9) вытекает, что

$$S_1 = USV', \qquad T_1 = UTV',$$

т. е. пара S, T эквивалентна паре S_1, T_1. Поскольку матрицы S, S_1 симметрические, а T, T_1 кососимметрические, то согласно теореме 3 пары S, T и S_1, T_1 будут конгруэнтны, т. е.

$$S_1 = PSP', \qquad T_1 = PTP'. \tag{10}$$

Но $G = \frac{S+T}{2}$, $G_1 = \frac{S_1+T_1}{2}$, поэтому из (10) вытекает, что

$$G_1 = PGP'.$$

Таким образом, матрица G конгруэнтна G_1.

Теорема 4 показывает, что невырожденные билинейные формы над полем комплексных чисел с точностью до изоморфизма определяются элементарными делителями матрицы $\lambda G - G'$. Поэтому, чтобы решить задачу о классификации таких форм, достаточно указать, какие системы вырожденных вида $(\lambda - a)^m$ могут служить системами элементарных делителей для матриц типа $\lambda G - G'$. Легко видеть, что эти системы не могут быть произвольными. В самом деле, пусть $(\lambda - a)^m$ входит k раз в систему элементарных делителей некоторой матрицы $\lambda G - G'$. Тогда $(\lambda - a)^m$ будет входить k раз и в систему элементарных делителей транспонированной матрицы $\lambda G' - G$. Но $\lambda G' - G$ эквивалентна $G^{-1}(\lambda G - G) = \lambda I - G^{-1}G$; следовательно, $(\lambda - a)^m$ входит k раз в систему элементарных делителей матрицы $\lambda E - G^{-1}G$. Теорема об элементарных делителях функций (гл. VI, § 4) утверждает, что каждый элементарный делитель $(\lambda - a)^m$ матрицы $\lambda E - G^{-1}G$ переходит в элементарный делитель $(\lambda - a^{-1})^m$ матрицы $\lambda E - (G')^{-1}G^{-1}$. Так как последняя матрица эквивалентна $\lambda G - G'$, то $(\lambda - a^{-1})^m$ входит k раз в систему элементарных делителей матрицы $\lambda G - G'$. Следовательно, *если $(\lambda - a)^m$ есть k-кратный элементарный делитель матрицы $\lambda G - G'$, то $(\lambda - a^{-1})^m$ будет также k-кратным элементарным делителем.* При $a = \pm 1$ это условие обращается в тривиальность. С помощью дополнительных рассуждений можно показать, что матрица $\lambda G - G'$ содержит каждый элементарный делитель $(\lambda - 1)^{2m+1}$ обязательно четное число раз, в то время как элементарные делители вида $(\lambda - 1)^{2m}$, $(\lambda + 1)^{2m}$ могут входить в эти матрицы в произвольных комбинациях. Указанные

условия для ε как равных, так и не равных $+1$ не только необходимы, но и достаточны, чтобы степени выражений вида $(\lambda-\varepsilon)^n$ могли быть системой элементарных делителей некоторой матрицы $\lambda G-G'$.

Примеры и задачи

1. Вещественными преобразованиями переменных привести пары форм

а) $x^2+2xy+2y^2$, $5x^2-xy$;

б) $2x^2+3xy+2xz+2y^2+3yz+2z^2$,

$$-8x^2+26xy-16xz+25y^2+19yz+8z^2$$

к простейшему виду.

2. Пара, состоящая из симметрической положительно определенной и кососимметрической вещественных билинейных форм, вещественным преобразованием переменных может быть приведена к виду

$$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n,\quad a_1\xi_1\eta_2-a_1\xi_2\eta_1+\ldots+a_k\xi_{2k-1}\eta_{2k}-a_k\xi_{2k}\eta_{2k-1}.$$

3. Показать, что пара форм с матрицами $\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-6 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ эквивалентна паре форм с матрицами $\begin{bmatrix}2 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-10 & 9\\ 2 & -1\end{bmatrix}$. Для доказательства обобщить теорему 1 п. 20.1 на пары A, B, у которых $|\lambda A-\mu B|\not\equiv 0$, путем рассмотрения многочленов однородных относительно λ, μ.

4. Доказать неполное утверждение п. 23.1.

§ 21. Билинейные функции

Теория билинейных форм геометрически может быть истолкована как теория билинейных функций в линейных пространствах. Истолкование это позволяет глубже понять и основные факты теории форм; изложению его посвящен настоящий параграф.

21.1. Основные определения. Говорят, что на линейном пространстве R задана функция $\varphi(x, y)$ от двух переменных векторов x, y, если каждой паре векторов пространства R поставлен в соответствие определенный элемент $\varphi(x, y)$ из основного поля K рассматриваемого пространства. Функция $\varphi(x, y)$ называется *билинейной*, если она линейна относительно каждой переменной в отдельности, т. е. если она удовлетворяет тождествам

$$\varphi(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y)=\alpha_1\varphi(x_1, y)+\alpha_2\varphi(x_2, y), \tag{1}$$

$$\varphi(x, \beta_1y_1+\beta_2y_2)=\beta_1\varphi(x, y_1)+\beta_2\varphi(x, y_2). \tag{2}$$

Билинейная функция на комплексном линейном пространстве называется *полуторалинейной*, если она линейна относительно первого переменного и полулинейна относительно второго, т. е.

если она удовлетворяет соотношению (1) и соотношению

$$\varphi(x, \beta_1y_1+\beta_2y_2)=\bar\beta_1\varphi(x, y_1)+\bar\beta_2\varphi(x, y_2). \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) непосредственно вытекает общее правило дистрибутивности:

$$\varphi(x_1+x_2+\ldots+x_m, y_1+y_2+\ldots+y_n)=\sum\varphi(x_i, y_j) \tag{4}$$

как для билинейных, так и для эрмитовых билинейных функций.

Выберем в R произвольный координатный базис $e_1, \ldots, e_n$ и пусть

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n,$$
$$y=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\ldots+\eta_ne_n.$$

Формулы (2), (4) дают

$$\varphi(x, y)=\sum\varphi(e_i, e_j)\xi_i\eta_j=\sum a_{ij}\xi_i\bar\eta_j \qquad (a_{ij}=\varphi(e_i, e_j)). \tag{5}$$

Матрица $A=\|a_{ij}\|$ называется *матрицей функции* $\varphi(x, y)$ в указанном базисе. Зная матрицу A, мы, очевидно, знаем и функцию $\varphi(x, y)$, так как формула (5) позволяет находить значения $\varphi(x, y)$ для любой пары векторов x, y.

Соответствие между матрицами и билинейными функциями взаимно однозначно, так как для произвольной матрицы A функция $\varphi(x, y)$, вычисляемая по формуле (5), будет билинейной с матрицей A.

Обозначим через $[x]$, $[y]$ координатные строки векторов x, y; формулу (5) можно записать в краткой матричной форме:

$$\varphi(x, y)=[x]\,A\,[y]', \tag{6}$$

которая позволяет непосредственно вывести следующее *правило преобразования матрицы билинейных функций: если в каком-либо базисе матрица билинейной функции есть A, то в новом базисе матрица функции будет*

$$A_1=TAT', \tag{7}$$

где T — матрица перехода от старого базиса к новому.

Действительно, применяя формулу (6) в старом и новом базисах, получим

$$\varphi(x, y)=[x]\,A\,[y]'=[x]_1\,TAT'\,[y]'_1=[x]_1\,A_1\,[y]'_1,$$

где A_1, $[x]_1$, $[y]_1$ — матрица функции $\varphi(x, y)$ и координатные строки векторов x, y в новом базисе. Поэтому $A_1=TAT'$.

Рассматривая в формуле (5) координаты векторов x, y как независимые переменные, мы видим, что *значение билинейной функции в каждой координатной паре аргументов* билинейной

формой, матрицей которой служит матрица функции в новом базисе.

Согласно (7) переход к новому базису влечет за собой замену билинейной формы соответствующей конгруэнтной формой, в силу чего *конгруэнтные билинейной форме можно рассматривать как билинейные формы той же самой билинейной функции, но записанные в различных координатных базисах.*

Билинейная функция $\varphi(x, y)$ называется *симметрической*, если

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x),$$

и *кососимметрической*, если

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

Очевидно, *симметрическая и кососимметрическая билинейные функции — это такие функции, билинейные формы которых соответственно симметричны или кососимметричны.*

Если $\varphi(x, y)$ — произвольная билинейная функция, то функции

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x, y) + \varphi(y, x)], \quad \varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x, y) - \varphi(y, x)] \tag{8}$$

будут билинейными и соответственно симметрической и кососимметрической. Так как из (8) следует, что

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y),$$

то всякую билинейную функцию можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической функций, причем, как легко видеть, это представление возможно только единственным способом.

Функции вида $\psi(x) = \varphi(x, x)$, где $\varphi(x, y)$ — некоторая билинейная функция, называются *квадратичными*. Таким образом, квадратичные функции — это те функции одного переменного вектора, которые возникают из билинейных путем отождествления переменных векторов. Но если квадратичная функция $\psi(x)$ возникает указанным образом из билинейной функции $\varphi(x, y)$, то $\psi(x)$ возникает путем отождествления переменных и из симметрической билинейной функции $\varphi_1(x, y)$:

$$\varphi_1(x, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x, x) + \varphi(x, x)] = \varphi(x, x).$$

Поэтому при рассмотрении квадратичных функций достаточно брать в качестве порождающих лишь симметрические функции.

С другой стороны, если $\varphi(x, y)$ симметрична и $\psi(x) = \varphi(x, x)$, то

$$\psi(x + y) = \varphi(x + y, x + y) = \psi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y),$$

или

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[\psi(x + y) - \psi(x) - \psi(y)],$$

т. е. *каждая квадратичная функция возникает из одной и только одной симметрической билинейной функции, называемой полярной для соответствующей квадратичной функции.*

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — некоторый базис пространства $\mathfrak{A}$, $\varphi(x) = \varphi(x, x)$, где $\varphi(x, y)$ — симметрическая билинейная функция. Тогда для $x = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n$ имеем

$$\psi(x) = \varphi(x, x) = \sum \varphi(a_i, a_j)\xi_i\xi_j,$$

т. е. *значения квадратичной функции выражаются квадратичной формой от координат переменного вектора, матрица которой совпадает с матрицей соответствующей полярной билинейной формы.*

Рассуждая аналогично, получим, что значения *эрмитовой* билинейной функции $\varphi(x, y)$ выражаются вместе формулы (5) формулой

$$\varphi(x, y) = \sum \varphi(a_i, a_j)\xi_i\bar{\eta}_j,$$

т. е. эрмитовой билинейной формой. При переходе к новому базису матрица эрмитовой функции меняется по закону

$$A_1 = TA\bar{T}'.$$

Эрмитова функция $\varphi(x, y)$ называется *симметрической*, если

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}.$$

Значения эрмитовых симметрических функций выражаются эрмитовыми симметрическими билинейными формами.

Функции одного переменного вектора, возникающие из эрмитовых симметрических билинейных функций отождествлением переменных векторов, называются *эрмитовыми квадратичными формами*. Связь между эрмитовыми квадратичными функциями и соответствующими эрмитовыми симметрическими билинейными функциями устанавливается формулами:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi(x + iy) = \varphi(x + iy, x + iy) = \\
&= \varphi(x, x) + i[\overline{\varphi(x, y)} - \varphi(x, y)] + \varphi(y, y), \\
&\psi(x + y) - \varphi(x, x) - \overline{\varphi(x, y)} - \varphi(x, y) + \varphi(y, y), \\
&2\varphi(x, y) = \psi(x + y) + i\psi(x + iy) - (1 + i)[\psi(x) + \psi(y)].
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Вычисляя значение эрмитовой квадратичной функции $\psi(x)$ для вектора $x = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — базис пространства,

получим

$$\varphi(\xi) = \sum_{i,k=1}^{n} (e_i, e_k)\, \xi^i \bar{\xi}^k,$$

т. е. *значения эрмитовой квадратичной функции выражаются эрмитовой квадратичной формой от координат переменного вектора, матрица которой совпадает с матрицей соответствующей эрмитовой симметрической билинейной функции, вычисленной по формуле* (8).

Отметим еще, что рассмотренные в п. 22.4 знакоопределенные квадратичные формы соответствуют тем квадратичным функциям с вещественным и эрмитовым квадратичным функциям в комплексном пространстве, значения которых не меняют знака.

21.2. **Пространства с билинейной метрикой.** Согласно п. 17.1 вещественное или комплексное линейное пространство называется унитарным, если в нем определена некоторая функция двух переменных векторов, значения которой называются скалярными произведениями этих векторов. Сопровождающие нас аксиомы означают просто, что скалярное произведение есть билинейная эрмитова положительно определенная функция. Изучение свойств унитарных пространств поэтому является изучением свойств положительно определенных билинейных функций с любой точки зрения.

По аналогии с этим мы будем называть линейное пространство $\mathfrak{L}$ *билинейно-метрическим*, если в нем определена некоторая билинейная функция, значения которой мы будем называть скалярными произведениями векторов и обозначать (a, b). Если скалярное произведение является симметрической эрмитовой билинейной функцией, то пространство будет называться пространством с эрмитовой билинейной метрикой.

Если матрица скалярного произведения невырождена, то пространство будет называться *невырожденным*. В противном случае пространство называется *вырожденным*.

Матрица

$$G = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) \dots (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) \dots (a_2, a_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (a_n, a_1) \dots (a_n, a_n) \end{vmatrix},$$

составленная из скалярных произведений векторов $a_1, \dots, a_n$ билинейно-метрического пространства $\mathfrak{L}$, называется матрицей Грама системы $a_1, \dots, a_n$. Матрица Грама, составленная для векторов $a_1, \dots, a_n$, образующих *базис* пространства $\mathfrak{L}$, является просто матрицей скалярной билинейной функции $\varphi(x, y) = (x, y)$, вычисленной в этом базисе. Отсюда следует, что матрица Грама,

составленная для различных базисов пространства, конгруэнтны друг другу и поэтому имеют одинаковый ранг.

В теории унитарных пространств важную роль играло понятие ортогональности векторов. Это понятие непосредственно переносится и в билинейно-метрические пространства.

Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольное или эрмитово билинейно-метрическое пространство. Вектор a из $\mathfrak{L}$ называется ортогональным к b, если $(a, b) = 0$. Из ортогональности a к b еще не следует ортогональность b к a, так как в общем случае $(a, b) \neq (b, a)$. Поэтому тогда для большей определенности говорят, что a *ортогонален слева* к b, а b *ортогонален справа* к a. Из законов дистрибутивности (1), (2) следует, что если a ортогонален к векторам $a_1, \dots, a_m$, то a будет ортогонален и к любой их линейной комбинации. Отсюда в свою очередь вытекает, что *множество всех векторов ортогональных к, ортогональных справа к некоторой системе* $\mathfrak{M}$, *будет линейным подпространством пространства* $\mathfrak{L}$. Это подпространство мы будем обозначать $\mathfrak{M}^{\perp}$. Совокупность векторов из $\mathfrak{L}$, ортогональных слева к $\mathfrak{M}$, будет также некоторым линейным подпространством, которое мы условимся обозначать $^{\perp}\mathfrak{M}$.

Назовем вектор x *левым изотропным* в пространстве $\mathfrak{L}$, если он ортогонален слева ко всем векторам из $\mathfrak{L}$. Подпространство $\mathfrak{L}_0$, состоящее из всех левых изотропных векторов $\mathfrak{L}$, называется *левым изотропным подпространством* в $\mathfrak{L}$. Аналогично определяются *правые изотропные векторы* и *правое изотропное подпространство*[1].

Теорема 1. *Размерности левого и правого изотропных подпространств равны друг другу и совпадают с дефектом матрицы метрической формы* (x, y), *вычисленной в произвольном базисе. Таким образом, разность между размерностью пространства и размерностью подпространства дает ранг матрицы метрической билинейной формы. Билинейно-метрическое пространство тогда и только тогда невырожденное, когда оно не содержит изотропных векторов.*

Для доказательства выберем в $\mathfrak{L}$ какой-нибудь базис. Тогда левые изотропные векторы x должны удовлетворять при произвольном y из $\mathfrak{L}$ соотношению

$$(x, y) = [x] A [y]^T = 0, \tag{10}$$

где A — матрица Грама этого базиса. Но из (10) следует

$$[x] A = 0$$

(здесь 0 — нулевая строка), т. е. левые изотропные векторы образуют ядро линейного преобразования с матрицей A (п. 10.1), а размерность ядра совпадает с дефектом матрицы A.

рицы преобразования. Аналогичным образом убеждаемся, что размерность правого изотропного подпространства равна размерности ядра линейного преобразования с транспонированной матрицей A' и, следовательно, совпадает с дефектом матрицы A, что и требовалось. Всякое линейное подпространство $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{L}$ можно само по себе рассматривать как эрмитов или соответственно обыкновенное билинейно-метрическое пространство относительно того же скалярного произведения, что и в $\mathfrak{L}$. В общем случае из невырожденности $\mathfrak{L}$ еще не вытекает невырожденность его подпространств и, обратно, из невырожденности какого-либо подпространства $\mathfrak{N}$ еще не следует невырожденность всего пространства $\mathfrak{L}$.

Теорема 2. *Если $\mathfrak{N}$ — невырожденное подпространство пространства $\mathfrak{L}$, то для $\mathfrak{L}$ имеют место прямые разложения*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{N}^{\perp} = \mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{N}^{\perp}. \tag{11}$$

Обратно, если хотя бы одно из разложений (11) верно, то подпространство $\mathfrak{N}$ невырожденно.

Действительно, пересечение $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^{\perp}$ есть правое изотропное подпространство в $\mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{N}$ невырожденное, то $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^{\perp} = 0$; следовательно, сумма $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}^{\perp}$ прямая.

Пусть теперь c — произвольный вектор из $\mathfrak{L}$. Введем обозначения

$$(a_j, c) = \gamma_j \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

где $a_1, \ldots, a_m$ — какой-либо базис $\mathfrak{N}$. Вспомогательная система уравнений

$$(a_j, a_1)\xi_1 + (a_j, a_2)\xi_2 + \ldots + (a_j, a_m)\xi_m = \gamma_j \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

разрешима относительно $\xi_1, \ldots, \xi_m$, так как ее определителем служит определитель матрицы Грама системы $a_1, \ldots, a_m$, отличный от нуля вследствие невырожденности $\mathfrak{N}$. Вектор $a = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_m a_m$ принадлежит $\mathfrak{N}$ и, кроме того,

$$(a_j, c - a) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

т. е. $c - a \in \mathfrak{N}^{\perp}$. Поскольку для всякого c имеет место разложение

$$c = a + (c - a) \qquad (a \in \mathfrak{N},\ c - a \in \mathfrak{N}^{\perp}),$$

то $\mathfrak{L}$ есть сумма $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}^{\perp}$, что и требовалось.

Билинейно-метрические пространства над одним и тем же полем коэффициентов называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором сумма векторов переходит в сумму, произведение числа на вектор переходит в произведение того же числа на соответствующий вектор, а скалярные произведения пар соответствующих векторов равны друг другу.

Из последнего условия, в частности, видно, что при изоморфном соответствии матрицы Грама систем соответствующих векторов совпадают. Обратно, если в двух билинейно-метрических пространствах над одним и тем же полем существуют базисы с одинаковыми матрицами, то пространства изоморфны.

Для обычных и для унитарных линейных пространств ранее было показано, что с точностью до изоморфизма существует лишь по одному пространству каждой размерности n. Для билинейно-метрических пространств дело обстоит сложнее.

Прежде всего докажем следующее очевидное утверждение:

Теорема 3. *Билинейно-метрические пространства над одним и тем же полем тогда и только тогда изоморфны, когда матрицы Грама произвольных базисов, выбранных в этих пространствах, конгруэнтны.*

Необходимость ясна, так как матрицы Грама всех базисов данного пространства конгруэнтны, а матрицы Грама соответственных базисов изоморфных пространств одинаковы. С другой стороны, если A, B — матрицы Грама базисов пространств $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ и A конгруэнтна B, то на основании результатов предыдущего пункта в $\mathfrak{L}_1$ найдется базис с матрицей B.

Теорема 3 показывает, что задача классификации неизоморфных билинейно-метрических пространств тождественна задаче классификации билинейных форм с точностью до конгруэнтности, которая уже была рассмотрена в п. 23.3. Мы сформулируем здесь в терминах теории билинейно-метрических пространств только несколько следствий из результатов упомянутого пункта.

Вещественные невырожденные билинейно-метрические пространства с симметричной метрикой $(x, y) = (y, x)$ называются *псевдоевклидовыми*.

Матрица Грама A произвольного базиса псевдоевклидова пространства является вещественной симметрической. В силу теоремы 1 п. 21.3 матрица A конгруэнтна диагональной матрице с числами $+1$ или -1 на главной диагонали. Иными словами, в каждом псевдоевклидовом пространстве размерности n существует базис, в котором скалярное произведение векторов с координатами $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ выражается формулой

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_s\eta_s - \xi_{s+1}\eta_{s+1} - \ldots - \xi_n\eta_n.$$

Число $s = s - (n - s)$ называется *сигнатурой* пространства.

Таким образом, *псевдоевклидовы пространства с точностью до изоморфизма определяются своими размерностью и сигнатурой*. При этом для любого $n \geqslant 0$ и любого s $(0 \leqslant s \leqslant n)$ существует псевдоевклидово пространство размерности n и сигнатуры $s - (n - s)$.

Невырожденные билинейно-метрические пространства с кососимметрической метрикой $(x, y) = -(y, x)$ называются *симплектическими*.

Матрица Грама какого-либо базиса симплектического пространства кососимметрическая и потому в силу п. 18.5 конгруэнтна клеточно-диагональной матрице с клетками вида $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ по главной диагонали. Таким образом, *размерность симплектического пространства — всегда число четное и для каждого n с точностью до изоморфизма существует лишь одно симплектическое пространство размерности $2n$. В каждом симплектическом пространстве размерности $2n$ существует базис, в котором скалярное произведение имеет вид*

$$(x, y) = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \ldots + \xi_{2n-1}\eta_{2n} - \xi_{2n}\eta_{2n-1},$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ — координаты векторов x, y.

Комплексное невырожденное билинейно-метрическое пространство с симметрической метрикой называется *комплексным евклидовым*. Поскольку всякая невырожденная симметрическая билинейная форма приводима в поле комплексных чисел к форме с единичной матрицей, то с точностью до изоморфизма существует лишь по одному комплексному евклидову пространству каждой размерности n. *В каждом евклидовом пространстве размерности n существует базис, в котором скалярное произведение имеет вид*

$$(x, y) = \xi_1\overline{\eta}_1 + \xi_2\overline{\eta}_2 + \ldots + \xi_n\overline{\eta}_n.$$

Наконец, комплексные невырожденные пространства с эрмитовой симметрической метрикой $(x, y) = \overline{(y, x)}$ называются *псевдоунитарными*. Из теоремы 2 п. 21.3 следует, что *в каждом псевдоунитарном пространстве размерности n существует базис, в котором скалярное произведение имеет вид*

$$(x, y) = \xi_1\overline{\eta}_1 + \ldots + \xi_s\overline{\eta}_s - \xi_{s+1}\overline{\eta}_{s+1} - \ldots - \xi_n\overline{\eta}_n.$$

Число $\sigma = s - (n - s)$ называется *сигнатурой* псевдоунитарного пространства. Вместе с размерностью и она, очевидно, определяет псевдоунитарное пространство с точностью до изоморфизма.

Что касается классификации произвольных комплексных невырожденных билинейно-метрических пространств, то она проводится на основе теоремы 4 из п. 23.3. Для характеристики пространства теперь необходимо выписывать набор элементарных делителей, подчиненный условиям, сформулированным в конце п. 23.3.

21.3. Билинейные функции в билинейно-метрических пространствах. В предыдущем пункте геометризация теории одной билинейной функции, заданной на линейном пространстве V, была достигнута тем, что значения билинейной функции рассматривались как скалярные произведения векторов, определяемых самой метрику на V. Подобно этому для геометризации теории пар билинейных функций, заданных на линейном пространстве V, одну из них принимают в качестве метрической функции, а вторую рассматривают как билинейную функцию, заданную на билинейно-метрическом пространстве. Ясно, что теперь пара $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ и пара $\varphi_1(x, y)$, $\psi_1(x, y)$ будут подобны относительно автоморфизмов *линейного* пространства V тогда и только тогда, когда функции $\varphi_2(x, y)$ будет переводиться в функцию $\psi_2(x, y)$ автоморфизмом *билинейно-метрического* пространства $\tilde{V}$ с основной метрической функцией $\varphi_1(x, y)$.

Более того, в невырожденных билинейно-метрических пространствах с каждой билинейной функцией оказывается возможным вполне явно однозначно некоторое линейное преобразование пространства. Поскольку эта связь не зависит от выбора базиса, то тем самым задача изучения билинейных функций становится равносильной изучению линейных преобразований билинейно-метрических пространств. С точки зрения теории линейных пространств это означает, что изучение пар билинейных функций, из которых одна невырожденная, равносильно изучению пар, составленных из невырожденной билинейной функции и линейного преобразования.

Итак, пусть V — эрмитово или обыкновенное билинейно-метрическое невырожденное пространство.

Теорема 4. *Всякая определенная на V линейная функция $f(x)$ может быть представлена одним и только одним способом в виде (x, a).*

Действительно, условие $f(x) = (x, a)$ равносильно системе соотношений

$$(a_j, a) = f(a_j) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — какой-нибудь базис V. Полагая $a = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n$ и рассматривая (12) как систему уравнений относительно $\xi_1, \ldots, \xi_n$, видим, что это — система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, так как он является определителем матрицы основной формы в выбранном базисе. Следовательно, уравнения (12) однозначно разрешимы.

Так же как и в п. 18.2 было сделано для унитарных пространств, теоремой 4 можно воспользоваться, чтобы ввести в V понятие сопряженного преобразования.

Рассмотрим произвольное линейное преобразование $\mathscr{A}$ этого пространства. Для каждого заданного вектора a выражение $(\mathscr{A}x, a)$ представляет собой линейную функцию от x. Согласно теореме 4 в пространстве V найдется определенный вектор b, для

которого

$$(x\mathscr{A}, a) = (x, b) \tag{13}$$

при всех x. Обозначим через $\mathscr{A}^*$ преобразование, переводящее a в b. Тогда $b = a\mathscr{A}^*$, и равенство (13) можно переписать в форме

$$(x\mathscr{A}, a) = (x, a\mathscr{A}^*). \tag{14}$$

Преобразование $\mathscr{A}^*$ называется *правым сопряженным для* $\mathscr{A}$. Правое сопряженное преобразование вполне характеризуется свойством (14). Действительно, если для какого-нибудь преобразования $\mathscr{B}$ при любых a, x $(x\mathscr{A}, a) = (x, a\mathscr{B})$, то, сравнивая это равенство с (14), мы получим соотношение $(x, a\mathscr{A}^* - a\mathscr{B}) = 0$, которое показывает, что $a\mathscr{A}^* - a\mathscr{B}$ есть изотропный вектор пространства $\mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{L}$ ненулевых изотропных векторов не содержит, то $a\mathscr{A}^* - a\mathscr{B} = 0$ и $\mathscr{A}^* = \mathscr{B}$.

Повторяя рассуждения п. 18.2, легко доказать линейность $\mathscr{A}^*$ и справедливость обычных формул

$$(\mathscr{A} - \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*, \tag{15}$$

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*, \tag{16}$$

$$(\alpha\mathscr{A})^* = \alpha\mathscr{A}^* \tag{17}$$

для обыкновенных, а также формул (15), (16) и

$$(a\mathscr{A})^* = a\mathscr{A}^* \tag{18}$$

для эрмитовых билинейно-метрических пространств.

Решим теперь вопрос, как связаны матрицы преобразования $\mathscr{A}$ и его правого сопряженного $\mathscr{A}^*$. Для этого выберем в $\mathfrak{L}$ некоторый базис и обозначим матрицы преобразований $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^*$ соответственно через A, B. Пусть $\mathfrak{L}$ — обыкновенное пространство. На основании формулы (6) п. 24.1 имеем

$$(x\mathscr{A}, a) = [x\mathscr{A}]\,G\,[a]' = [x]\,AG\,[a]',$$

$$(x, a\mathscr{A}^*) = [x]\,G\,[a\mathscr{A}^*]' = [x]\,GB'\,[a]',$$

где G — матрица Грама пространства $\mathfrak{L}$ в выбранном базисе. Отсюда

$$AG = GB', \quad B' = G^{-1}AG \tag{19}$$

В эрмитовых билинейно-метрических пространствах формулы (19) заменяются соотношениями

$$AG = G\bar{B}', \quad \bar{B}' = G^{-1}AG. \tag{20}$$

Мы видели, что в унитарных пространствах существуют ортонормированные системы координат. Матрица Грама в этих системах обращается в единичную, и соотношения (20) дают известный нам результат (п. 18.2): $\bar{B}' = A$.

Пока мы определили только правое сопряженное преобразование. Очевидно, тем же способом можно ввести и левое сопряженное преобразование. Именно, пусть в $\mathfrak{L}$ задано линейное преобразование $\mathscr{A}$. Повторяя приведенные выше рассуждения, мы убедимся, что в $\mathfrak{L}$ существует единственное преобразование $\mathscr{C}$, удовлетворяющее при всех x, a равенству

$$(x, a\mathscr{A}) = (x\mathscr{C}, a).$$

Преобразование $\mathscr{C}$ линейное. Мы условимся называть его *левым сопряженным для* $\mathscr{A}$ и обозначать ${}^*\mathscr{A}$.

Если метрика в $\mathfrak{L}$ симметрична или кососимметрична, то правое и левое сопряженные преобразования для любого линейного преобразования совпадают, так как

$$(x\mathscr{A}^*, y) = \pm(y, x\mathscr{A}^*) = \pm(y\mathscr{A}, x) = (x, y\mathscr{A}) = (x^*\mathscr{A}, y).$$

Переходя к рассмотрению билинейных функций на $\mathfrak{L}$, прежде всего замечаем, что значение выражения $(x\mathscr{A}, y)$, где $\mathscr{A}$ — некоторое линейное преобразование, является билинейной или соответственно эрмитовой билинейной функцией на $\mathfrak{L}$.

Если линейные преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ различны, то и соответственные билинейные функции $(x\mathscr{A}, y)$, $(x\mathscr{B}, y)$ также различны.

В самом деле, противное означало бы, что $(x\mathscr{A}, y) = (x\mathscr{B}, y)$ для всех x, y из $\mathfrak{L}$. Отсюда $(x\mathscr{A} - x\mathscr{B}, y) = 0$ при всех значениях y, т. е. $x\mathscr{A} - x\mathscr{B}$ — левый изотропный вектор. Так как $\mathfrak{L}$ ненулевых изотропных векторов не содержит, то $x\mathscr{A} = x\mathscr{B}$, или $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

Покажем теперь, что *любая билинейная функция $f(x, y)$, определенная на $\mathfrak{L}$, может быть представлена в форме $(x\mathscr{A}, y)$, где $\mathscr{A}$ — линейное преобразование пространства $\mathfrak{L}$.* В этом предложении под $f(x, y)$ следует понимать обыкновенную функцию, если $\mathfrak{L}$ — обыкновенное билинейно-метрическое пространство, и эрмитову, если $\mathfrak{L}$ — эрмитово билинейно-метрическое пространство.

Действительно, $f(x, y)$ при каждом заданном значении y является линейной функцией от x. В силу теоремы 4 это означает, что для каждого y найдется однозначно определенный вектор z такой, что соотношение $f(x, y) = (x, z)$ будет иметь место для любых значений x. Обозначим через $\mathscr{B}$ преобразование, переводящее y в z, тогда

$$f(x, y) = (x, y\mathscr{B}). \tag{21}$$

В случае эрмитова билинейно-метрического пространства имеем

$$f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} f(x, y_1) + \bar{\beta} f(x, y_2) =$$

$$= \bar{\alpha}(x, y_1\mathscr{B}) + \bar{\beta}(x, y_2\mathscr{B}) = (x, \alpha(y_1\mathscr{B}) + \beta(y_2\mathscr{B})),$$

С другой стороны, в силу (21)

$$f(x,\ \alpha y_1+\beta y_2)=(x,\ (\alpha y_1+\beta y_2)\mathscr{A}).$$

Отсюда

$$(\alpha y_1+\beta y_2)\mathscr{A}^*=\alpha(y_1\mathscr{A})+\beta(y_2\mathscr{A}),$$

т. е. $\mathscr{A}$ — линейное преобразование. То же самое имеет место и для обыкновенных билинейно-метрических пространств. Обозначив через $\mathscr{A}^*$ левое сопряженное преобразование для $\mathscr{A}$, мы можем переписать (21) в форме $f(x,\ y)=(x\mathscr{A}^*,\ y)$, что и требовалось. Итак, нами получена следующая

Теорема 5. *Если $\mathfrak{L}$ — обыкновенное или эрмитово невырожденное билинейно-метрическое пространство, то выражение $(x\mathscr{A}^*,\ y)$, где $\mathscr{A}$ — линейное преобразование пространства $\mathfrak{L}$, является обыкновенной или соответственно эрмитовой билинейной функцией на $\mathfrak{L}$. Обратно, для каждой обыкновенной или соответственно эрмитовой билинейной функции $f(x,\ y)$, заданной на $\mathfrak{L}$, существует всегда однозначно определенное линейное преобразование $\mathscr{A}$ этого пространства, при котором $f(x,\ y)=(x\mathscr{A},\ y)$ для любых x, y из $\mathfrak{L}$.*

Теорема 5 устанавливает взаимно однозначное соответствие между билинейными функциями и линейными преобразованиями в невырожденных билинейно-метрических пространствах, позволяющее свести изучение билинейных функций к изучению линейных преобразований этих пространств. С точки зрения теории пар теорема 5 означает, что изучение пар билинейных функций, из которых хотя бы одна несобственная, может быть сведено к изучению смешанных пар, состоящих из несобственной билинейной функции и линейного преобразования.

Посмотрим, как связаны матрицы билинейной функции $f(x,\ y)$ и отвечающего ей линейного преобразования $\mathscr{A}$. Выберем в $\mathfrak{L}$ какой-нибудь базис, и пусть F, A — матрицы функции $f(x,\ y)$ и преобразования $\mathscr{A}$. Согласно формуле (6) п. 24.1

$$f(x,\ y)=[x]F[y]',\quad (x\mathscr{A},\ y)=[x\mathscr{A}]G[y]'=[x]AG[y]',$$

откуда

$$F=AG, \tag{22}$$

где G — матрица Грама пространства $\mathfrak{L}$ в выбранном базисе. Легко проверить, что эта формула имеет место и для случая эрмитовых билинейно-метрических пространств.

Линейное преобразование $\mathscr{A}$ билинейно-метрического пространства $\mathfrak{L}$ называется *симметрическим*, если для любых x, y из $\mathfrak{L}$

$$(x\mathscr{A},\ y)=(x,\ y\mathscr{A}). \tag{23}$$

Преобразование $\mathscr{A}$ называется *кососимметрическим*, если

$$(x\mathscr{A},\ y)=-(x,\ y\mathscr{A}). \tag{24}$$

Сравнивая (23) и (24) с формулами, определяющими правое и левое сопряженные преобразования, получаем вместо (23), (24) равносильные им соотношения

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}^*={}^*\mathscr{A}, \tag{25}$$

$$\mathscr{A}=-\mathscr{A}^*=-{}^*\mathscr{A}. \tag{26}$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — пространство с *симметрической* матрицей, $\mathscr{A}$ — некоторое *симметрическое* линейное преобразование пространства $\mathfrak{L}$. Билинейная функция, отвечающая преобразованию $\mathscr{A}$, имеет вид

$$f(x,\ y)=(x\mathscr{A},\ y).$$

Если $\mathfrak{L}$ обыкновенное, то

$$f(x,\ y)=(x\mathscr{A},\ y)=(y,\ x\mathscr{A})=(y\mathscr{A},\ x)=f(y,\ x).$$

Если $\mathfrak{L}$ эрмитово, то соответственно имеем

$$f(x,\ y)=(x\mathscr{A},\ y)=\overline{(y,\ x\mathscr{A})}=\overline{(y\mathscr{A},\ x)}=\overline{f(y,\ x)}.$$

Таким образом, в обоих случаях $f(x,\ y)$ будет симметрической функцией. Те же рассуждения показывают, что из симметричности $f(x,\ y)$ вытекает симметричность соответствующего линейного преобразования $\mathscr{A}$. Аналогично кососимметричность преобразования $\mathscr{A}$ равносильна кососимметричности соответствующей функции $f(x,\ y)$.

Если метрика пространства $\mathfrak{L}$ кососимметрическая, то отношение между симметричностью и кососимметричностью линейных преобразований и билинейных функций будет обратным: симметрическим преобразованиям будут отвечать кососимметрические функции, а кососимметрическим — симметрические. Действительно, если $\mathscr{A}$ — симметрическое преобразование обыкновенного билинейно-метрического пространства $\mathfrak{L}$ с кососимметрической метрикой, то

$$f(x,\ y)=(x\mathscr{A},\ y)=-(y,\ x\mathscr{A})=-(y\mathscr{A},\ x)=-f(y,\ x).$$

Аналогично доказываются и остальные утверждения. Мы пришли к следующей теореме:

Теорема 6. *Если $\mathfrak{L}$ — обыкновенное или эрмитово невырожденное пространство с симметрической матрицей, то симметрическим билинейным функциям отвечают симметрические линейные преобразования пространства $\mathfrak{L}$, а кососимметрическим — кососимметрические преобразования. Если матрица пространства $\mathfrak{L}$ кососимметрическая, то, наоборот, кососимметрическим функциям отвечают симметрические преобразования, а симметрическим — кососимметрические преобразования.*

Возвращаясь к теории пар, мы видим из теоремы 6, что изучение пар симметрических или кососимметрических билинейных функций равносильно изучению симметрических и кососимметрических линейных преобразований в пространствах с симметрической или кососимметрической метрикой.

Примеры и задачи

1. Матрица Грама билинейно-метрического пространства $\mathcal{R}$ в базисе a_1, a_2, a_3, a_4 равна

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -7 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 8 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Показать, что левое изотропное подпространство $\mathcal{R}$ имеет базис $a_1 + a_2 - a_3$, $5a_2 + 6a_3 - 7a_4$, а правое — базис $2a_1 - 3a_2 - a_3$, $a_1 + a_2 - a_4$.

2. Для того чтобы билинейно-метрическое пространство распадалось в прямую сумму двусторонне ортогональных подпространств, необходимо и достаточно, чтобы его матрица Грама в некотором базисе распадалась.

3. Если матрица Грама невырожденного билинейно-метрического пространства $\mathcal{R}$ есть G, то линейное преобразование пространства $\mathcal{R}$ с матрицей $G'G^{-1}$ будет автоморфизмом этого пространства.

4. Показать, что для произвольного невырожденного подпространства $\mathcal{R}$ билинейно-метрического пространства $\mathcal{R}$ размерности $\mathcal{R}$ и $^{\perp}\mathcal{R}$ равны разности размерностей $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}$. В частности, показать, что $-(\mathcal{R}^{\perp}) = (^{\perp}\mathcal{R})^{\perp} = \mathcal{R}$.

5. Каждое пространство с симметрической или кососимметрической метрикой есть прямая сумма изотропного и неизотропного подпространств.

6. Если в билинейно-метрическом пространстве $\mathcal{R}$ правая и левая ортогональности векторов равносильны, то $\mathcal{R}$ есть либо пространство с симметрической метрикой, либо пространство с кососимметрической метрикой.

7. Функции φ, удовлетворяющие тождеству

$$\varphi(\alpha x + \beta y) + \alpha\beta\varphi(x - y) = (1 + \alpha)\varphi(x) + (1 + \beta)\varphi(y),$$

и только они являются квадратичными на линейном пространстве.

8. Пусть I — фиксированная квадратная матрица. Матрица A называется I-ортогональной, если $AA' = I$, называется I-симметрической, если $AI = IA'$, и I-кососимметрической, если $AI = -IA'$. Показать, что если некоторый базис билинейно-метрического пространства имеет матрицу Грама I, то в этом базисе квазиортогональные преобразования имеют I-ортогональные матрицы, симметрические и кососимметрические преобразования имеют соответственно I-симметрические и I-кососимметрические матрицы.

Глава VII

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БИЛИНЕЙНО-МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В настоящей главе будет рассмотрена классификация основных типов линейных преобразований (симметрических, кососимметрических и квазиметрических) пространств с билинейной метрикой. Связь этой классификации с классификацией пар билинейных форм изложена в § 24 гл. VI, результаты которой при чтении настоящей главы будут предполагаться известными читателю.

В данной главе, как и в предыдущей, предполагается, что все встречающиеся здесь пространства являются пространствами над полем (а не над произвольным телом).

§ 25. Основные типы линейных преобразований

25.1. **Автоморфизмы.** Согласно п. 24.2 линейное неособенное преобразование $\mathcal{U}$ билинейно-метрического пространства $\mathcal{R}$ называется *автоморфизмом* пространства $\mathcal{R}$, если $\mathcal{U}$ не меняет величины скалярного произведения, т. е. если

$$(x\mathcal{U}, y\mathcal{U}) = (x, y) \tag{1}$$

для всех x, y из $\mathcal{R}$. Автоморфизмы пространства $\mathcal{R}$ иногда называются также его *изометриями* преобразованиями. Используя понятия правого и левого сопряженных преобразований, соотношение (1) можно представить в виде

$$(x, y) = (x\mathcal{U}, y\mathcal{U}) = (x, y\mathcal{U}\mathcal{U}^*) = (x\mathcal{U}^*\mathcal{U}, y),$$

откуда

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{E}. \tag{2}$$

Ясно, что из соотношения (2) вытекает, обратно, соотношение (1). Таким образом, *для того чтобы линейное преобразование $\mathcal{U}$ неособенного билинейно-метрического пространства было автоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы оба сопряженных с $\mathcal{U}$ преобразования совпадали с обратным для $\mathcal{U}$.*

Выберем в $\mathcal{R}$ некоторый базис и обозначим через U матрицу преобразования $\mathcal{U}$. Если пространство $\mathcal{R}$ обыкновенное, то соотношение (1) переходит в

$$[x]UGU'[y]' = [x]G[y]',$$

где G — матрица Грама. Отсюда

$$UGU' = G. \tag{3}$$

Если пространство $\mathfrak{L}$ эрмитово, то (1) дает

$$[x]UG\bar{U}'[\bar{y}]' = [x]G[\bar{y}]',$$

или

$$UG\bar{U}' = G. \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) представляют собой условия, которым удовлетворяют *матрицы изометрических преобразований* обыкновенных или соответственно эрмитовых невырожденных билинейно-метрических пространств.

Два линейных преобразования $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ билинейно-метрического пространства $\mathfrak{L}$ называются *изоморфными*, если существует изоморфное отображение $\mathscr{U}$ пространства $\mathfrak{L}$ на себя, которое переводит $\mathscr{A}_1$ в $\mathscr{A}_2$. Согласно п. 10.2 имеем

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{U}^{-1}\mathscr{A}_1\mathscr{U}. \tag{5}$$

Преобразование $\mathscr{U}$ есть автоморфизм пространства $\mathfrak{L}$, поэтому соотношение (5) показывает, что *изоморфизм линейных преобразований билинейно-метрических пространств равносилен их подобию относительно изометрических преобразований*. В силу результатов п. 15.3 отсюда следует, что изоморфные линейные преобразования имеют одинаковые инвариантные множители. В общем случае этот признак не является достаточным для изоморфизма преобразований. Однако если рассматривать симметрические, кососимметрические или изометрические преобразования, то дело меняется.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — обыкновенное невырожденное пространство над полем всех комплексных чисел с симметрической или кососимметрической метрикой. Тогда для изоморфизма симметрических, кососимметрических или изометрических преобразований пространства $\mathfrak{L}$ необходимо и достаточно, чтобы инвариантные множители всех преобразований совпадали.*

Необходимость была установлена выше, поэтому рассмотрим только достаточность. Пусть $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ — заданные линейные преобразования. По условию инвариантные множители $\alpha\mathscr{A}_1$ и $\alpha\mathscr{A}_2$ совпадают, следовательно,

$$\alpha\mathscr{A}_2 = \mathscr{T}^{-1}\alpha\mathscr{A}_1\mathscr{T}, \tag{6}$$

где $\mathscr{T}$ — некоторое неособенное линейное преобразование пространства $\mathfrak{L}$. Переходя в обеих частях к сопряженным преобразованиям, получим *)

$$\alpha\mathscr{A}_2^* = \mathscr{T}^*\alpha\mathscr{A}_1^*\mathscr{T}^{*-1}, \tag{7}$$

*) Матрица в $\mathfrak{L}$ симметрическая или кососимметрическая, поэтому прямые и либо сопряженные преобразования совпадают.

Если $\alpha\mathscr{A}_1$, $\alpha\mathscr{A}_2$ симметрические или кососимметрические, то $\alpha\mathscr{A}_1^* = \pm\alpha\mathscr{A}_1$, $\alpha\mathscr{A}_2^* = \pm\alpha\mathscr{A}_2$ и (7) переходит в

$$\alpha\mathscr{A}_2 = \mathscr{T}^*\alpha\mathscr{A}_1\mathscr{T}^{*-1}. \tag{8}$$

Если же $\alpha\mathscr{A}_1$, $\alpha\mathscr{A}_2$ изометрические, то $\alpha\mathscr{A}_1^* = \alpha\mathscr{A}_1^{-1}$, $\alpha\mathscr{A}_2^* = \alpha\mathscr{A}_2^{-1}$. Подставляя эти значения в (7) и возводя результат в степень -1, мы снова получим (8). В силу (6) и (8) имеем $\mathscr{T}^{-1}\alpha\mathscr{A}_1\mathscr{T} = \mathscr{T}^*\alpha\mathscr{A}_1\mathscr{T}^{*-1}$, откуда

$$\alpha\mathscr{A}_1\cdot\mathscr{T}\mathscr{T}^* = \mathscr{T}\mathscr{T}^*\cdot\alpha\mathscr{A}_1. \tag{9}$$

Из (9) непосредственно вытекает, что

$$\alpha\mathscr{A}_1\cdot(\mathscr{T}\mathscr{T}^*)^k = (\mathscr{T}\mathscr{T}^*)^k\cdot\alpha\mathscr{A}_1 \quad (k=1, 2, \ldots)$$

и вообще

$$\alpha\mathscr{A}_1\cdot f(\mathscr{T}\mathscr{T}^*) = f(\mathscr{T}\mathscr{T}^*)\cdot\alpha\mathscr{A}_1,$$

где $f(\lambda)$ — произвольный многочлен (ср. п. 23.2). Согласно теореме об извлечении квадратного корня (п. 16.3) многочлен $f(\lambda)$ можно подобрать так, чтобы

$$f(\mathscr{T}\mathscr{T}^*)\cdot f(\mathscr{T}\mathscr{T}^*) = \mathscr{T}\mathscr{T}^*.$$

Вводя обозначения

$$\mathscr{D} = f(\mathscr{T}\mathscr{T}^*), \quad \mathscr{U} = \mathscr{D}^{-1}\mathscr{T},$$

мы получим

$$\mathscr{D}^* = [f(\mathscr{T}\mathscr{T}^*)]^* = f(\mathscr{T}\mathscr{T}^*) = \mathscr{D},$$
$$\mathscr{U}^* = \mathscr{T}^*\mathscr{D}^{*-1} = \mathscr{T}^*\mathscr{D}^{-1},$$
$$\mathscr{U}\mathscr{U}^* = \mathscr{D}^{-1}\mathscr{T}\mathscr{T}^*\mathscr{D}^{-1} = \mathscr{D}^{-1}f(\mathscr{T}\mathscr{T}^*)^2\mathscr{D}^{-1} = \mathscr{D}^{-1}\mathscr{D}^2\mathscr{D}^{-1} = \mathscr{E}.$$

Таким образом, $\mathscr{U}$ является изометрическим преобразованием. В то же время из $\alpha\mathscr{A}_1\mathscr{D} = \mathscr{D}\alpha\mathscr{A}_1$ следует

$$\mathscr{U}^{-1}\alpha\mathscr{A}_1\mathscr{U} = \mathscr{T}^{-1}\mathscr{D}\alpha\mathscr{A}_1\mathscr{D}^{-1}\mathscr{T} = \mathscr{T}^{-1}\alpha\mathscr{A}_1\mathscr{D}\mathscr{D}^{-1}\mathscr{T} = \mathscr{T}^{-1}\alpha\mathscr{A}_1\mathscr{T} = \alpha\mathscr{A}_2,$$

что и требовалось.

Теорема 1 показывает, что в комплексных евклидовых, а также комплексных симплектических пространствах для классификации с точностью до изоморфизма симметрических, кососимметрических и изометрических преобразований достаточно указать, какие элементарные делители могут содержать эти преобразования.

Теорема 2. *Если изометрическое преобразование $\mathscr{U}$ обыкновенного невырожденного билинейно-метрического пространства $\mathfrak{L}$ содержит k раз элементарный делитель $(\lambda-\alpha)^m$, то $\mathscr{U}$ содержит k раз и элементарный делитель $(\lambda-\alpha^{-1})^m$.*

При $\alpha = \pm 1$ утверждение теоремы бессодержательно. Поэтому мы предполагаем, что $\alpha \neq \pm 1$. Выберем в $\mathfrak{L}$ некоторый базис u

обозначим матрицу преобразования $\mathscr{U}$ через U. Согласно (3) $U'GU=G$, где G — матрица Грама. Отсюда

$$U'=G^{-1}U^{-1}G. \tag{10}$$

Элементарные делители матрицы U' совпадают с элементарными делителями матрицы U. Формула (10) показывает, что в свою очередь элементарные делители матрицы U' совпадают с элементарными делителями матрицы U^{-1} (ср. п. 15.3). Таким образом, элементарные делители матрицы U должны быть теми же самыми, что и у матрицы U^{-1}. Однако согласно теореме об элементарных делителях функций (п. 16.4) элементарные делители матрицы U^{-1} получаются из элементарных делителей $(\lambda-\alpha)^m$ матрицы U заменой α на α^{-1}. Следовательно, если в каждом элементарном делителе матрицы U вида $(\lambda-\alpha)^m$ заменить α на α^{-1}, то получится снова элементарный делитель матрицы U, что нам и требовалось.

Для эрмитовых билинейно-метрических пространств соотношение (10) переходит в

$$U'=G^{-1}UG.$$

Соответственно этому и утверждение об элементарных делителях изменяется: *если $(\lambda-\alpha)^m$ есть k-кратный элементарный делитель изометрического преобразования эрмитова билинейно-метрического невырожденного пространства, то $(\lambda-\bar{\alpha}^{-1})^m$ будет также k-кратным элементарным делителем этого преобразования.* Доказательство то же самое.

Теорема 3. *Пусть a, b — два корневых вектора некоторого изометрического преобразования $\mathscr{U}$ обыкновенного билинейно-метрического пространства $\mathfrak{L}$. Если собственные значения α, β, к которым принадлежат эти векторы, не взаимно обратны, т. е. если $\alpha\beta\neq 1$, то a и b ортогональны. Аналогично, если $\mathfrak{L}$ эрмитово билинейно-метрическое и $\alpha\bar{\beta}\neq 1$, то a, b также ортогональны.*

Доказательство одинаково как для обыкновенных, так и для эрмитовых пространств. Поэтому мы рассмотрим только обыкновенные пространства. Согласно условию

$$a(\alpha\mathscr{E}-\mathscr{U})^s=0,\quad b(\beta\mathscr{E}-\mathscr{U})^t=0 \qquad (\alpha\beta\neq 1), \tag{11}$$

где s, t — некоторые целые неотрицательные числа. Нам нужно показать, что из соотношений (11) вытекает равенство $(a, b)=0$. Доказательство проведем индукцией по значениям суммы $s+t$. Если $s+t=0$, то $s=t=0$ и соотношения (11) дают $a=b=0$, откуда $(a, b)=0$.

Предположим теперь, что нам задано некоторое значение суммы $s+t$ и что для всех меньших значений этой суммы утверждение уже доказано. Введем обозначения

$$a(\alpha\mathscr{E}-\mathscr{U})=a_1,\quad b(\beta\mathscr{E}-\mathscr{U})=b_1.$$

Так как

$$a_1(\alpha\mathscr{E}-\mathscr{U})^{s-1}=a(\alpha\mathscr{E}-\mathscr{U})^s=0,$$
$$b_1(\beta\mathscr{E}-\mathscr{U})^{t-1}=b(\beta\mathscr{E}-\mathscr{U})^t=0,$$

то по индукции

$$(a, b_1)=(a_1, b)=(a_1, b_1)=0.$$

Но равенство $(a, b_1)=0$ дает $(a, b(\beta\mathscr{E}-\mathscr{U}))=0$, или

$$(a, b\mathscr{U})=\beta(a, b). \tag{12}$$

Аналогично из равенства $(a_1, b)=0$ следует:

$$(a\mathscr{U}, b)=\alpha(a, b). \tag{13}$$

Наконец, равенство $(a_1, b_1)=0$ дает

$$0=(a(\alpha\mathscr{E}-\mathscr{U}),\ b(\beta\mathscr{E}-\mathscr{U}))=$$
$$=\alpha\beta(a, b)-\alpha(a, b\mathscr{U})-\beta(a\mathscr{U}, b)+(a\mathscr{U}, b\mathscr{U}),$$

откуда ввиду (12) и (13) получаем

$$0=-\alpha\beta(a, b)+(a, b). \tag{14}$$

Так как $\alpha\beta\neq 1$, то (14) дает искомое соотношение $(a, b)=0$.

Теорема 4. *Если $\mathscr{A}$ — изометрическое, симметрическое или кососимметрическое преобразование пространства $\mathfrak{L}$ и подпространство $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно $\mathscr{A}$, то правое и левое кодополнения, ортогональные к $\mathfrak{M}$, также инвариантны относительно $\mathscr{A}$.*

Пусть $\mathscr{A}$ — изометрическое преобразование пространства $\mathfrak{L}$. Правое ортогональное подпространство $\mathfrak{M}$ — совокупность всех векторов b, которые при любом a из $\mathfrak{M}$ удовлетворяют соотношению $(a, b)=0$. Поскольку $\mathscr{A}$ — невырожденное преобразование, $\mathfrak{M}$ инвариантно и относительно $\mathscr{A}^{-1}$. Следовательно, вектор $a\mathscr{A}^{-1}$ входит в $\mathfrak{M}$, откуда $(a\mathscr{A}^{-1}, b)=0$. Но

$$(a\mathscr{A}^{-1}, b)=(a\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}, b\mathscr{A})=(a, b\mathscr{A}),$$

таким образом, $(a, b\mathscr{A})=0$ для всех a из $\mathfrak{M}$. Следовательно, $b\mathscr{A}$ входит в $\mathfrak{M}^{\perp}$ и $\mathfrak{M}^{\perp}$ инвариантно относительно $\mathscr{A}$. Так же просто доказываются и остальные утверждения.

Теорема 5. *Пусть обыкновенное или эрмитово билинейно-метрическое пространство $\mathfrak{L}$ разлагается в прямую сумму своих попарно ортогональных подпространств $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ..., $\mathfrak{L}_s$. Если все эти подпространства инвариантны относительно некоторого линейного преобразования $\mathscr{A}$ пространства $\mathfrak{L}$ и если $\mathscr{A}$ изометрично или соответственно симметрично или кососимметрично на каждом из подпространств $\mathfrak{L}_1$, ..., $\mathfrak{L}_s$, то $\mathscr{A}$ будет таким же и на $\mathfrak{L}$.*

Эта теорема показывает, каким образом можно воспользоваться каноническими разложениями при изучении свойств указанных типов линейных преобразований. Доказательство ее очевидно и предоставляется читателю.

25.2. Симметрические и кососимметрические преобразования. Напомним, что преобразование $\mathscr{A}$ обыкновенного или эрмитова билинейно-метрического пространства называется симметрическим, если

$$(x\mathscr{A}, y) = (x, y\mathscr{A})$$

для всех x, y из $\mathfrak{L}$.

Теорема 6. *Корневые векторы a, b, принадлежащие различным собственным значениям ρ, τ симметрического преобразования $\mathscr{A}$ обыкновенного или эрмитова билинейно-метрического пространства, ортогональны.*

Действительно, согласно предположению

$$a(\rho\mathscr{E} - \mathscr{A})^s = 0, \quad b(\sigma\mathscr{E} - \mathscr{A})^t = 0, \tag{15}$$

где s, t — некоторые целые неотрицательные числа. Нам нужно показать, что из (15) вытекает ортогональность векторов a и b. Доказательство проведем индукцией по значениям суммы $s + t$. При $s + t = 1$ либо s, либо t равно нулю и, следовательно, либо $a = 0$, либо $b = 0$, откуда $(a, b) = 0$.

Предположим теперь, что нам задано какое-нибудь значение суммы $s + t$ и что при всех меньших значениях этой суммы наше утверждение уже доказано. Пусть

$$a_1 = a(\rho\mathscr{E} - \mathscr{A}), \quad b_1 = b(\sigma\mathscr{E} - \mathscr{A}).$$

Мы имеем

$$a_1(\rho\mathscr{E} - \mathscr{A})^{s-1} = a(\rho\mathscr{E} - \mathscr{A})^s = 0,$$
$$b_1(\sigma\mathscr{E} - \mathscr{A})^{t-1} = b(\sigma\mathscr{E} - \mathscr{A})^t = 0.$$

Поэтому в силу индуктивного предположения

$$(a, b_1) = (a_1, b) = 0$$

или

$$\sigma(a, b) = (a, b\mathscr{A}), \quad \rho(a, b) = (a\mathscr{A}, b).$$

Так как $\mathscr{A}$ симметрично, то правые части этих равенств совпадают и, следовательно, $(\sigma - \rho)(a, b) = 0$, откуда $(a, b) = 0$, что и требовалось.

Преобразование $\mathscr{A}$ общего билинейно-метрического пространства, удовлетворяющее соотношению

$$(x\mathscr{A}, y) = -(x, y\mathscr{A})$$

для всех x, y из $\mathfrak{L}$, называется согласно п. 24.3 *кососимметрическим*.

Теорема 7. *Пусть a, b — корневые векторы какого-нибудь кососимметрического преобразования обыкновенного билинейно-метрического пространства, принадлежащие собственным значениям ρ, τ. Если $\rho + \sigma \neq 0$, то $(a, b) = 0$.*

Доказательство почти дословно совпадает с доказательствами аналогичных теорем 3, 6 и может быть здесь опущено.

Изометрические преобразования произвольного невырожденного билинейно-метрического пространства $\mathfrak{L}$ весьма тесно связаны с его кососимметрическими преобразованиями. Именно имеет место следующая теорема, совершенно совпадающая по своей формулировке с теоремой п. 20.3 о преобразовании Кэли.

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{L}$ — обыкновенное или эрмитово билинейно-метрическое пространство. Если $\mathscr{A}$ — кососимметрическое преобразование пространства $\mathfrak{L}$, не имеющее собственных значений, равных -1, то*

$$\mathscr{U} = (\mathscr{E} - \mathscr{A})(\mathscr{E} + \mathscr{A})^{-1} \tag{16}$$

будет симметрическим преобразованием пространства $\mathfrak{L}$, также не имеющим собственных значений, равных -1, причем $\mathscr{A}$ будет выражаться через $\mathscr{U}$ по формуле

$$\mathscr{A} = (\mathscr{E} - \mathscr{U})(\mathscr{E} + \mathscr{U})^{-1}. \tag{17}$$

Обратно, если $\mathscr{U}$ — симметрическое преобразование пространства $\mathfrak{L}$, не имеющее собственных значений, равных -1, то преобразование $\mathscr{A}$, вычисленное по формуле (17), будет кососимметрическим, не имеющим собственных значений, равных -1, и $\mathscr{U}$ будет выражаться через $\mathscr{A}$ по формуле (16).

Формулы (16) и (17), как и в случае унитарных пространств, носят название *преобразований Кэли*. Их доказательство дословно совпадает с доказательством этих же формул, проведенным в п. 20.3 для унитарных пространств. Поэтому его здесь опустим. Заметим, что аналогичные формулы

$$\mathscr{U} = -(\mathscr{E} - \mathscr{A})(\mathscr{E} + \mathscr{A})^{-1}, \tag{18}$$
$$\mathscr{A} = (\mathscr{E} - \mathscr{U})(\mathscr{E} - \mathscr{U})^{-1} \tag{19}$$

дают соответствие между кососимметрическими преобразованиями пространства $\mathfrak{L}$, не имеющими собственных значений, равных -1, и изометрическими преобразованиями пространства $\mathfrak{L}$, не имеющими собственных значений, равных $+1$.

Преобразования Кэли сводили бы полностью изучение изометрических преобразований к изучению кососимметрических, если бы не было исключительных собственных значений ± 1. Существование этих значений делает необходимым несколько более подробное независимое изучение свойств изометрических преобразований.

Наконец, докажем еще, что имеет место

Теорема 9. *Если $(\lambda - \alpha)^m$ входит k раз в систему элементарных делителей комплексификации $\mathscr{A}^C$ какого-нибудь обыкновенного невырожденного билинейно-метрического пространства X, то $(\lambda - \alpha)^m$ также входит k раз в систему элементарных делителей преобразования $\mathscr{A}$.*

Действительно, матрица B сопряженного преобразования $\mathscr{A}^*$ удовлетворяет соотношению (19) п. 24.3:

$$B' = G^{-1}AG,$$

где G—матрица Грама, A — матрица преобразования $\mathscr{A}$. Отсюда видно, что элементарные делители матрицы B совпадают с элементарными делителями матрицы A. Однако из условия косоэрмитовости следует, что $B = -A$; таким образом, меняя знаки у α в каждом элементарном делителе $(\lambda - \alpha)^m$ преобразования $\mathscr{A}$, мы сразу получим элементарные делители преобразования $\mathscr{A}^*$, что и требовалось.

Примеры и задачи

1. Пусть $\mathscr{U}$—какое-нибудь отображение невырожденного билинейно-метрического пространства X на себя, сохраняющее скалярное произведение: $(\mathscr{U}\xi, \mathscr{U}\eta) = (\xi, \eta)$. Показать, что $\mathscr{U}$—линейное и, следовательно, изометрическое преобразование пространства X.

2. Определители изометрических преобразований обыкновенных невырожденных билинейно-метрических пространств равны ± 1, а определители изометрических преобразований невырожденных эрмитовых билинейно-метрических пространств равны единице по модулю.

3. В каждом невырожденном билинейно-метрическом пространстве X существует линейное преобразование $\mathscr{L}$, удовлетворяющее условию $(x, y) = (\mathscr{L}x, \mathscr{L}y)$, $\forall x$, если X обыкновенное, и условию $(x, y) = -(\mathscr{L}x, \mathscr{L}y)$, $\forall x$, если X эрмитово. Показать, что преобразование $\mathscr{L}$ изометрическое и что его матрица равна GG^* или $\overline{G}G^{-1}$ в зависимости от того, будет ли X обыкновенным или эрмитовым (G—матрица Грама пространства X).

4. Если в обыкновенном невырожденном билинейно-метрическом пространстве X правое и левое сопряженные преобразования для любого линейного преобразования совпадают, то матрица пространства X либо симметрична, либо кососимметрична.

§ 26. Комплексные евклидовы пространства

В настоящем и двух следующих параграфах мы разберем более детально простейшие формы, к которым могут быть приведены матрицы симметрических, кососимметрических и изометрических преобразований в евклидовых, симплектических и псевдоунитарных пространствах над полем комплексных чисел, перечисляющая классификация которых дана в конце п. 24.2. Отметим, что речь здесь будет идти о том, чтобы найти простейшие формы матриц преобразований в некоторых специальных системах координат со вполне определенной матрицей Грама, так как только при таком условии преобразования будут известны с точностью до изоморфизма. Эта задача была решена в гл. V для унитарных и вещественных евклидовых пространств. В качестве специальной системы координат там была выбрана ортонормированная система координат, в которой матрица Грама является единичной. В пространствах более сложных типов в качестве основных или нормальных систем координат удобнее брать системы координат с более сложной матрицей Грама. Мы начнем с изучения комплексного евклидова пространства.

26.1. Симметрические преобразования. Как уже было сказано, комплексным евклидовым пространством называется невырожденное пространство с обыкновенной симметрической метрикой над полем комплексных чисел. Матрица Грама комплексного евклидова пространства является несобственной и симметрической. Обратно, каждое комплексное билинейно-метрическое пространство с несобственной симметрической матрицей Грама является комплексным евклидовым пространством. Но все комплексные евклидовы пространства данной размерности n изоморфны, поэтому в каждом таком пространстве существует система координат с любой наперед заданной несобственной симметрической матрицей Грама. В частности, в каждом комплексном евклидовом пространстве X существует система координат $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в которой матрица Грама имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Мы условимся систему координат с такой матрицей называть *нормальной*. Векторы нормальной системы координат удовлетворяют соотношениям

$$(a_j, a_{n-j+1}) = 1, \quad (a_j, a_k) = 0 \tag{2}$$
$$(j + k \neq n+1;\ j, k = 1, \ldots, n),$$

которые и достаточны для нормальности.

Нормальность нормальных базисов определяется следующим их свойством: *линейное преобразование, которое в нормальном базисе имеет матрицей клетку Жордана, является симметрическим.*

Действительно, согласно п. 24.3 преобразование $\mathscr{A}$ симметрично, если симметрична матрица AG, где G — матрица Грама координатного базиса, а A — матрица преобразования $\mathscr{A}$ в этом базисе. Но, умножая клетку Жордана порядка n на матрицу G,

путем непосредственных вычислений убедимся, что в результате получится симметрическая матрица.

Это замечание позволяет сразу же доказать следующую основную теорему:

Теорема 1. *Пусть задана произвольная система выражений вида* $(\lambda-\rho_1)^{m_1}, \ldots, (\lambda-\rho_s)^{m_s}$. *Тогда в комплексном евклидовом пространстве размерности* $n=m_1+\ldots+m_s$ *заведомо найдется симметрическое преобразование* $\mathscr{A}$, *для которого указанные выражения будут полной системой элементарных делителей.*

В самом деле, положим

$$G_j=\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad A_j=\begin{vmatrix} \rho_j & 1 & 0 & \ldots \\ & \rho_j & 1 & \ldots \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & \rho_j & 1 \\ & & & & \rho_j \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где порядки матриц G_j, A_j равны m_j $(j=1, \ldots, s)$. Пусть

$$G=G_1+\ldots+G_s, \quad A=A_1+\ldots+A_s. \tag{4}$$

В комплексном евклидовом пространстве $\mathfrak{L}$ размерности n найдется базис с матрицей Грама G. Обозначим через $\mathscr{A}$ линейное преобразование с матрицей A в указанном базисе. Согласно приведенному выше замечанию матрица AG симметрическая, а вместе с нею симметрично и преобразование $\mathscr{A}$. В то же время из (3), (4) видно, что $\mathscr{A}$ имеет требуемый набор элементарных делителей.

Ввиду теоремы 1 п. 25.1 доказанная теорема полностью решает вопрос о классификации с точностью до изоморфизма всех симметрических преобразований комплексного евклидова пространства. В частности, из нее вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть* $\mathscr{A}$ *— симметрическое преобразование комплексного евклидова пространства* $\mathfrak{L}$. *Тогда* $\mathfrak{L}$ *можно разложить в прямую сумму попарно ортогональных подпространств, инвариантных относительно* $\mathscr{A}$ *и таких, что в каждом из них найдется нормальный базис, в котором матрица преобразования, индуцированного преобразованием* $\mathscr{A}$, *будет клеткой Жордана.*

Для доказательства обозначим через $(\lambda-\rho_1)^{m_1}, \ldots, (\lambda-\rho_s)^{m_s}$ набор элементарных делителей преобразования $\mathscr{A}$. Выберем в $\mathfrak{L}$ базис $a_1, \ldots, a_n$, матрица Грама которого равна матрице G из (4), и пусть $\mathscr{B}$ — линейное преобразование с матрицей A из (4) в базисе $a_1, \ldots, a_n$. Преобразования $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ симметричны и подобны. В силу упомянутой теоремы 1 п. 25.1 отсюда следует, что найдется изометрическое преобразование U, для которого $\mathscr{A}=U\mathscr{B}U^{-1}$. Тогда матрица преобразования $\mathscr{A}$ в базисе $a_1U, \ldots, a_nU$ будет совпадать с матрицей преобразования $\mathscr{B}$ в базисе

$a_1, \ldots, a_n$, т. е. с матрицей A. В то же время матрица Грама базиса $a_1U, \ldots, a_nU$ есть G, а для преобразования $\mathscr{A}$ утверждения теоремы 2 очевидны.

В ортонормированном базисе матрица симметрического преобразования симметрична. Поэтому из теоремы 1 следует, что существуют комплексные симметрические матрицы с любым набором элементарных делителей.

26.2. **Кососимметрические преобразования.** Пусть $\mathscr{A}$ — кососимметрическое преобразование комплексного евклидова пространства $\mathfrak{L}$. Разложим $\mathfrak{L}$ в прямую сумму корневых подпространств

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_{\lambda_1}+\mathfrak{L}_{\lambda_2}+\ldots+\mathfrak{L}_{\lambda_s}.$$

Объединяя здесь слагаемые, относящиеся к парам противоположных собственных значений, мы получим новое разложение для $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_0+\mathfrak{M}_1+\ldots+\mathfrak{M}_t,$$

где $\mathfrak{M}_0$ — корневое подпространство, отвечающее корню нуль, а $\mathfrak{M}_j$ $(j=1, \ldots, t)$ — сумма вида $\mathfrak{L}_\lambda+\mathfrak{L}_{-\lambda}$. Теорема 7 п. 25.2 показывает, что подпространства $\mathfrak{M}_0, \ldots, \mathfrak{M}_t$ взаимно ортогональны, сверх того, они инвариантны относительно $\mathscr{A}$. Поэтому изучение поведения $\mathscr{A}$ на $\mathfrak{L}$ сводится к изучению поведения этого преобразования в отдельных пространствах $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t$. Рассмотрим более детально $\mathfrak{M}_0$. Допустим, что $\mathfrak{M}_0$ отлично от нуля, и обозначим через $\mathscr{A}_0$ преобразование, индуцируемое преобразованием $\mathscr{A}$ в $\mathfrak{M}_0$. Так как все собственные значения преобразования $\mathscr{A}_0$ равны нулю, то $\mathscr{A}_0^p=\mathscr{O}$, где p — размерность $\mathfrak{M}_0$. Обозначим через m наименьший показатель степени преобразования $\mathscr{A}_0$, обращающейся в нуль: $\mathscr{A}_0^m=\mathscr{O}$, $\mathscr{A}_0^{m-1}\neq\mathscr{O}$. Рассмотрим два случая: m четное и m нечетное. Пусть m четное, тогда $m-1$ нечетное и преобразование $\mathscr{A}_0^{m-1}$ кососимметрическое. Билинейная функция $(x\mathscr{A}_0^{m-1}, y)$ также кососимметрическая. Поскольку эта функция отлична от нуля, в $\mathfrak{M}_0$ найдется пара векторов a, b, для которых

$$(a\mathscr{A}_0^{m-1}, b)=1.$$

Из кососимметричности преобразования $\mathscr{A}_0$ вытекает

$$(a\mathscr{A}_0^k, b\mathscr{A}_0^l)=-(a\mathscr{A}_0^{k-1}, b\mathscr{A}_0^{l+1})=\ldots=(-1)^k(a, b\mathscr{A}_0^{l+k}).$$

В частности, $(a, b\mathscr{A}_0^{m-1})=(-1)^{m-1}(a\mathscr{A}_0^{m-1}, b)=-1$, так что $b\mathscr{A}_0^{m-1}\neq 0$. Положим

$$a_1=a, \ a_2=a_1\mathscr{A}_0, \ \ldots, \ a_m=a_{m-1}\mathscr{A}_0,$$
$$b_1=b, \ b_2=b_1\mathscr{A}_0, \ \ldots, \ b_m=b_{m-1}\mathscr{A}_0.$$

Соотношения

$$(a_k,\ a_{m-j+1}) = (-1)^{k-1}(a_1,\ a_{0}\mathscr{A}_{\varepsilon}^{m-j}) = 0,\ (b_k,\ b_{m+1-j}) = 0,$$
$$(a_j,\ b_{m+1-k}) = (-1)^{m-k},\ (a_k,\ b_j) = 0$$
$$(k+j \geqslant m+1;\ k,\ j = 1,\ \ldots,\ m)$$

показывают, что матрица Грама этого базиса имеет вид

$$\left|\begin{array}{ccccccc} * & \ldots & 0 & * & \ldots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ * & \ldots & -1 & * & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right|,$$

где в каждой из четырех клеток все члены, расположенные под побочной диагональю, равны нулю. Определитель такой матрицы равен ± 1, и, следовательно, подпространство $\mathfrak{N}_1$, натянутое на $a_1,\ \ldots,\ a_m,\ b_1,\ \ldots,\ b_m$, является невырожденным. Ввиду теоремы 2 п. 21.2

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_1^{\perp},$$

причем $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ — снова инвариантное относительно $\mathscr{A}$ подпространство.

Рассмотрим случай, когда m нечетное. Преобразование $\mathscr{A}^{m-1}$ теперь симметрическое, следовательно, симметрична и отвечающая ему билинейная функция $(x\mathscr{A}^{m-1},\ y)$. Поскольку эта функция не равна тождественно нулю, найдется вектор a, для которого $(a\mathscr{A}^{m-1},\ a) \neq 0$. Положим

$$a_1 = a,\ a_2 = a_1\mathscr{A},\ \ldots,\ a_m = a_{m-1}\mathscr{A}.$$

Подпространство $\mathfrak{N}_1$, натянутое на $a_1,\ \ldots,\ a_m$, инвариантно относительно $\mathscr{A}$. Его матрица Грама в системе координат $a_1,\ \ldots,\ a_m$ имеет вид

$$G = \left|\begin{array}{cccc} (a_1,\ a_1) & \ldots & (a_1,\ a_{m-1}) & (a_1,\ a_m) \\ (a_2,\ a_1) & \ldots & (a_2,\ a_{m-1}) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_m,\ a_1) & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right|.$$

Действительно,

$$(a_j,\ a_k) = (a\mathscr{A}^{j-1},\ a\mathscr{A}^{k-1}) = (-1)^{k-1}(a\mathscr{A}^{j+k-1},\ a) = 0$$

для $j+k \geqslant m+1$. При этом

$$(a_1,\ a_m) = -(a_2, a_{m-1}) = \ldots = (a_m,\ a_1) = \alpha \neq 0.$$

Отсюда видно, что матрица G неособенная; значит, подпространство $\mathfrak{N}_1$ невырожденное, и мы снова имеем

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_1^{\perp},$$

где $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ инвариантно относительно $\mathscr{A}$.

Итак, в первом случае мы отщепили от $\mathfrak{M}_n$ подпространство $\mathfrak{N}_1$, представляющее собой сумму двух подпространств четной размерности, а во втором — одно подпространство нечетной размерности. Применяя тот же прием к дополнительному подпространству $\mathfrak{N}_1^{\perp}$, мы расщепим его еще раз в прямую сумму инвариантных подпространств и т. д. В результате пространство $\mathfrak{M}_n$ окажется разложенным в прямую сумму инвариантных подпространств, каждое из которых будет либо прямой суммой двух подпространств четной размерности, либо пространством нечетной размерности. В этом разложении каждому подпространству отвечает элементарный делитель преобразования $\mathscr{A}$, имеющий вид λ^p, где p — размерность подпространства. Следовательно, *кососимметрическое преобразование комплексного евклидова пространства содержит каждый элементарный делитель вида λ^p четное число раз.* Этот результат, а также теорема 7 п. 25.2 накладывают на систему элементарных делителей кососимметрического преобразования известные условия. Покажем, что эти условия являются достаточными для существования кососимметрического преобразования.

Теорема 3. *Кососимметрические преобразования комплексного евклидова пространства содержат элементарные делители, отвечающие ненулевым собственным значениям, парами $(\lambda-\alpha)^m$, $(\lambda+\alpha)^m$, элементарные делители вида λ^p при p четном — тоже парами λ^p, λ^p, а элементарные делители вида λ^p при p нечетном — в произвольных комбинациях. Обратно, каждый набор конечного числа выражений $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$, подчиненный этим условиям, есть система элементарных делителей некоторого кососимметрического преобразования комплексного евклидова пространства подходящей размерности.*

Первая часть этого предложения была уже доказана. Поэтому для полного доказательства теоремы нам надо для произвольной системы выражений, подчиненной условиям теоремы, построить соответствующее кососимметрическое преобразование. По аналогии с предыдущим пунктом это можно сделать следующим образом. Каждой паре выражений $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$, $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$, а тем числе и парам с $\alpha_i = 0$, ставим в соответствие матрицы

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & D_i \\ D_i & 0 \end{bmatrix},\quad A_i = \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & -B_i \end{bmatrix},$$

где D_i — *нормальная* симметрическая матрица вида (1) из п. 26.1, а B_i — клетка Жордана порядка n_i, имеющая собственное значение α_i. Если среди заданных выражений найдутся выражения $\lambda^{2l}-1$, не имеющие себе парных, то таким им в соответствие матрицы

$$G_i=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 1 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad A_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots\\ & 0 & -1 & 0 & \dots\\ & & 0 & 1 & \dots\\ \dots & \dots & & & \\ & & & & 0 & -1\\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

порядка $2s_i-1$. Пусть

$$G=G_1\dotplus\dots\dotplus G_s,\quad A=A_1\dotplus\dots\dotplus A_s. \tag{5}$$

Обозначим через $\mathfrak{L}$ комплексное пространство с матрицей Грама G.

Так как G — симметрическая невырожденная матрица, то $\mathfrak{L}$ — комплексное евклидово пространство. Рассмотрим линейное преобразование $\mathscr{A}$ пространства $\mathfrak{L}$, имеющее своей матрицей A. Билинейная функция, отвечающая преобразованию $\mathscr{A}$, имеет матрицу AG, причем

$$AG=A_1G_1\dotplus\dots\dotplus A_sG_s.$$

Непосредственные вычисления показывают, что клетки A_iG_i, а вместе с ними и матрица AG кососимметричны. Поэтому билинейная функция, отвечающая преобразованию $\mathscr{A}$, также кососимметрична. Из формы матрицы A видно, что элементарные делители преобразования $\mathscr{A}$ имеют требуемые значения.

Согласно теореме 1 п. 25.1 все кососимметрические преобразования комплексного евклидова пространства, имеющие одинаковые системы элементарных делителей, изоморфны. Поэтому из теоремы 3 следует, что для каждого кососимметрического преобразования $\mathscr{A}$ в комплексном евклидовом пространстве $\mathfrak{L}$ существует система координат, в которой матрица Грама G и матрица преобразования A имеют вид (5).

26.3. Комплексные ортогональные преобразования. Изометрические преобразования комплексного евклидова пространства $\mathfrak{L}$ называются обычно *комплексными ортогональными* преобразованиями. Если в $\mathfrak{L}$ выбрана система координат с матрицей Грама G, то матрицы U ортогональных преобразований и только они удовлетворяют соотношению

$$UGU'=G. \tag{6}$$

В частности, если система координат ортонормирована, то $G=E$ и (6) переходит в

$$UU'=E,$$

Иными словами, в ортонормированной системе координат матрицы ортогональных преобразований являются ортогональными.

Согласно теореме 1 п. 25.1 ортогональные преобразования с одинаковыми элементарными делителями изоморфны. Поэтому для классификации ортогональных преобразований достаточно указать, какие системы выражений вида $(\lambda-\alpha_i)^{n_i}$ могут служить системами элементарных делителей ортогональных преобразований. Схема решения этой задачи следующая: элементарные делители кососимметрических преобразований нам известны, ортогональные преобразования нужно выразить через кососимметрические по формулам Кэли (п. 25.2), следовательно, с помощью теорем об элементарных делителях функций от матриц (п. 16.4) можно найти и элементарные делители ортогональных преобразований. Однако при проведении этой схемы нужно учитывать наличие исключительных значений в формулах Кэли, благодаря чему решение принимает следующую, несколько более громоздкую форму.

Пусть $\mathscr{U}$ — ортогональное преобразование комплексного евклидова пространства $\mathfrak{L}$. Представим $\mathfrak{L}$ в виде прямой суммы корневых подпространств преобразования $\mathscr{U}$ и объединим подпространства, относящиеся к взаимно обратным собственным значениям, мы получим разложение

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_{-1}\dotplus\mathfrak{M}_1\dotplus\mathfrak{M}_2\dotplus\dots\dotplus\mathfrak{M}_s,$$

где все $\mathfrak{M}_i$ взаимно ортогональны, причем $\mathfrak{M}_{-1}$, $\mathfrak{M}_1$ — корневые подпространства преобразования $\mathscr{U}$, отвечающие собственным значениям -1, $+1$. В каждом из подпространств $\mathfrak{M}_i$ преобразование $\mathscr{U}$ индуцирует некоторое ортогональное преобразование $\mathscr{U}_i$, и элементарные делители преобразования $\mathscr{U}$ распадаются на системы элементарных делителей этих индуцированных преобразований. Рассмотрим преобразование $\mathscr{U}_1$. Все его собственные значения равны $+1$. Формула Кэли

$$\mathscr{A}_1=(\mathscr{E}-\mathscr{U}_1)(\mathscr{E}+\mathscr{U}_1)^{-1}$$

переводит $\mathscr{U}_1$ в кососимметрическое преобразование $\mathscr{A}_1$. Эту формулу мы представим в виде $\mathscr{A}_1=f(\mathscr{U}_1)$, где $f(\lambda)=(1-\lambda)(1+\lambda)^{-1}$. Так как производная от $f(\lambda)$ при $\lambda=1$ в нуль не обращается, то (п. 16.4), подставляя в каждый элементарный делитель $(\lambda-\alpha)^n$ преобразования $\mathscr{U}_1$ вместо α число $(1-\alpha)(1+\alpha)^{-1}$, получим элементарные делители преобразования $\mathscr{A}_1$. Но элементарные делители преобразования $\mathscr{U}_1$ имеют вид $(\lambda-1)^n$, следовательно, элементарные делители преобразования $\mathscr{A}_1$ будут вида λ^n. Кососимметрические преобразования содержат каждый элементарный делитель λ^n при четном n четное число раз, поэтому преобразование $\mathscr{U}_1$

содержит каждый элементарный делитель $(\lambda-1)^r$ при r четном также четное число раз.

Применяя формулу Кэли

$$\mathscr{A}=(\mathscr{E}+\mathscr{U})(\mathscr{E}-\mathscr{U})^{-1}$$

к преобразованию $\mathscr{U}_1$, как аналогичным образом получим, что преобразование $\mathscr{U}$ содержит каждый элементарный делитель вида $(\lambda-1)^r$ при четном r снова четное число раз.

Теорема 4. *Элементарные делители комплексных ортогональных преобразований, отличающиеся собственными значениями, отличными от ± 1, сходят парами вида $(\lambda-\alpha)^m$, $(\lambda-\alpha^{-1})^m$, элементарные делители вида $(\lambda\pm 1)^m$ сходят четное число раз, и элементарные делители вида $(\lambda+1)^m$ сходят в произвольных комбинациях. Обратно, любая система выражений вида $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$ ($\alpha_i\neq 0$), удовлетворяющая этим требованиям, есть система элементарных делителей некоторого комплексного ортогонального преобразования.*

Первая часть теоремы уже доказана. Предположим поэтому, что нам задана некоторая система элементарных делителей вида $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$ ($\alpha_i\neq 0$), удовлетворяющая условиям теоремы. Из этой системы элементарные делители вида $(\lambda-1)^{2r}$ мы выделяем, а для каждого из оставшихся элементарных делителей $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$ строим выражение $(\lambda-\beta_i)^{m_i}$, где $\beta_i=(1-\alpha_i)(1+\alpha_i)^{-1}$. Система выражений $(\lambda-\beta_i)^{m_i}$ будет удовлетворять требованиям теоремы 3 к, следовательно, будет системой элементарных делителей некоторого кососимметрического преобразования $\mathscr{A}_0$ комплексного евклидова пространства $\mathfrak{L}_0$. Так как мы брали только значения α_i, отличные от -1, то все β_i будут также отличны от -1. Применяя к $\mathscr{A}_0$ преобразование Кэли, мы получим ортогональное преобразование $\mathscr{U}_0$ с элементарными делителями $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$ ($\alpha_i\neq -1$). Аналогичным образом для каждого элементарного делителя вида $(\lambda-1)^{2r}$ берем выражение λ^{2r} и строим кососимметрическое преобразование $\mathscr{A}_1$ некоторого пространства $\mathfrak{L}_1$, имеющее своими элементарными делителями λ^{2r}. Тогда преобразование

$$\mathscr{U}_1=(\mathscr{E}-\mathscr{A}_1)(\mathscr{E}+\mathscr{A}_1)^{-1}$$

будет ортогональным преобразованием пространства $\mathfrak{L}_1$, имеющим элементарные делители $(\lambda-1)^{2r}$. Выберем в $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_1$ ортонормированные системы координат и обозначим через U_0, U_1 матрицы преобразований $\mathscr{U}_0$, $\mathscr{U}_1$. Эти матрицы будут ортогональными, поэтому и прямая сумма их $U_0+U_1=U$ будет также ортогональной матрицей.

Согласно построению элементарные делители матрицы U имеют требуемые значения, и теорема доказана.

Примеры и задачи

1. Построить кососимметрическую матрицу с элементарными делителями λ^2, $(\lambda-1)^2$, $\lambda-\frac{1}{2}$, $\lambda-2$.

2. Показать, что матрицы вида $\lambda A+B$, где A — симметрическая положительная матрица, а B — кососимметрическая, содержат каждый элементарный делитель вида λ^{2m} четное число раз.

3. С помощью теоремы 2 привести к простейшему виду следующую пару квадратичных форм:

$$2\xi_1^2+2\xi_2^2+2\xi_3\xi_4-2\xi_1\xi_3-2\xi_2\xi_4,$$
$$\xi_1^2+3\xi_2^2+2\xi_3^2-2\xi_3\xi_4-4\xi_1\xi_3+4\xi_2\xi_4.$$

Ответ: $2\eta_1\eta_3+5\eta_2\eta_4$, $\eta_1^2+2\eta_3^2+\eta_4^2$.

4. Построить комплексную кососимметрическую матрицу с элементарными делителями $(\lambda-i)^2$, λ^2, $(\lambda-3i)^2$, λ^2, λ^3, λ^3.

5. Построить комплексную симметрическую матрицу с элементарными делителями $(\lambda-2i)^3$, λ^3, λ^3.

§ 27. Симплектические пространства

27.1. **Симметрические преобразования.** Согласно п. 24.2 симплектическими пространствами называются билинейно-метрические пространства с невырожденной кососимметрической метрикой. Размерность симплектического пространства — число четное. Так как все симплектические пространства данной размерности изоморфны друг другу, то в каждом симплектическом пространстве размерности $n=2s$ существует базис, матрица Грама которого равна любой наперед заданной канонической кососимметрической матрице порядка n. В частности, в каждом симплектическом пространстве существуют системы координат, в которых матрица Грама имеет вид

$$S=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\ldots+\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Эти системы мы будем называть *симплектическими*. Аналогично в $\mathfrak{L}$ будут существовать системы координат, в которых матрица Грама имеет вид

$$J=\begin{bmatrix}0&E\\-E&0\end{bmatrix},$$

где E — единичная матрица, а O — нулевая матрица. Такие системы условимся называть *нормальными*. Далее мы будем рассматривать только комплексные симплектические пространства.

Пусть теперь $\mathscr{A}$ — некоторое симметрическое преобразование $\mathfrak{L}$. Разложим $\mathfrak{L}$ в прямую сумму

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{i_1} + \mathfrak{L}_{i_2} + \ldots + \mathfrak{L}_{i_r},$$

где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ — различные собственные значения преобразования $\mathscr{A}$, а $\mathfrak{L}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{L}_{i_r}$ — соответствующие корневые подпространства. Согласно п. 25.2 подпространства $\mathfrak{L}_{i_k}$ попарно ортогональны. Ввиду невырожденности пространства $\mathfrak{L}$ подпространства $\mathfrak{L}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{L}_{i_r}$ также невырождены и, следовательно, симплектические. Возьмем какое-нибудь одно из них, $\mathfrak{L}_{i_k}$, и обозначим через $\mathfrak{M}$. Преобразование, индуцируемое в $\mathfrak{M}$ преобразованием $\mathscr{A}$, пусть будет $\mathscr{A}_1$. Положим, далее, $\mathscr{A}'_1 = \rho_k \mathscr{E} - \mathscr{A}_1$. Так как $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{E}$ — симметрические преобразования, то $\mathscr{A}'_1$ — также симметрическое преобразование. Все собственные значения преобразования $\mathscr{A}_1$ равны ρ_k; поэтому, обозначая через p размерность $\mathfrak{M}$, мы получим

$$(\mathscr{A}_1 - \rho_k \mathscr{E})^p = \mathscr{A}'^p_1 = \mathscr{E}.$$

Пусть m — наименьший показатель, для которого $\mathscr{A}'^m_1 = \mathscr{E}$. Выражение $(x \mathscr{A}'^{m-1}_1, y)$ является кососимметрической билинейной функцией от x, y, отличной преобразованию $\mathscr{A}'^{m-1}_1$. Так как $\mathscr{A}'^{m-1}_1 \neq \mathscr{E}$, то функция $(x \mathscr{A}'^{m-1}_1, y)$ не может обращаться тождественно в нуль и, следовательно, в $\mathfrak{M}$ существует пара векторов a, b, для которых $(a \mathscr{A}'^{m-1}_1, b) = 1$. Введем обозначения

$$a \mathscr{A}'^i_1 = a_{i+1}, \quad b \mathscr{A}'^i_1 = b_{i+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Вследствие симметричности $\mathscr{A}'_1$ мы имеем

$$(a_i, a_k) = (a \mathscr{A}'^{i-1}_1, a \mathscr{A}'^{k-1}_1) = (a \mathscr{A}'^{i+k-2}_1, a) = (a, a \mathscr{A}'^{i+k-2}_1).$$

Однако пространство $\mathfrak{L}$ кососимметрическое, поэтому

$$(a \mathscr{A}'^{i+k-2}_1, a) = -(a, a \mathscr{A}'^{i+k-2}_1).$$

Сравнивая это с предыдущим, мы видим, что

$$(a_i, a_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Аналогично получаются и соотношения

$$(b_i, b_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Далее, из условий $(a \mathscr{A}'^{m-1}_1, b) = 1$, $\mathscr{A}'^m_1 = \mathscr{E}$ следует:

$$(a_{m-i}, b_{i+1}) = (a \mathscr{A}'^{m-i-1}_1, b \mathscr{A}'^i_1) = (a \mathscr{A}'^{m-1}_1, b) = (a_m, b_1) = 1, \tag{4}$$

$$(a_i, b_{k+1}) = (a \mathscr{A}'^{i-1}_1, b \mathscr{A}'^k_1) = (a \mathscr{A}'^{i+k-2}_1, b) = 0 \quad (i + k \geqslant m+1). \tag{5}$$

Составляя теперь матрицу Грама для векторов $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$, мы в силу соотношений (2) — (5) увидим, что она имеет треугольный вид — с нулями под второй диагональю. Так как элементы, лежащие на самой второй диагонали, будут равны ± 1, то определитель этой матрицы отличен от нуля. Следовательно, подпространство $\mathfrak{M}_1$, натянутое на векторы $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$, является невырожденным. Обозначим еще через $\mathfrak{M}_{11}$ и $\mathfrak{M}_{12}$ подпространства, натянутые соответственно на векторы $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_m$. Вследствие соотношений (5) подпространства $\mathfrak{M}_{11}$, $\mathfrak{M}_{12}$ одной и той же размерности с $\mathfrak{M}_1$ есть их прямая сумма. Так как $\mathfrak{M}_1$ невырожденное, то на основании п. 24.2 имеем

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_1^{\perp}.$$

Подпространство $\mathfrak{M}_1$ инвариантно относительно $\mathscr{A}$, поэтому $\mathfrak{M}_1^{\perp}$ также инвариантно относительно $\mathscr{A}$. Поступая теперь с $\mathfrak{M}_1^{\perp}$ таким же образом, как с $\mathfrak{M}$, мы выделим из $\mathfrak{M}_1^{\perp}$ подпространство $\mathfrak{M}_2$, являющееся прямой суммой двух подпространств $\mathfrak{M}_{21}$, $\mathfrak{M}_{22}$, и т. д. Через конечное число шагов мы получим прямое разложение

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_t,$$

где каждые из подпространств $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t$ будет в свою очередь прямой суммой двух подпространств одной и той же размерности. Каждому подпространству размерности m, содержащемуся в этом разложении, отвечает элементарный делитель $(\lambda - \rho_i)^m$ преобразования $\mathscr{A}$. Таким образом, мы приходим к выводу, что в симплектическом пространстве элементарные делители симметрических преобразований встречаются обязательно парами $(\lambda - \rho_i)^m$, $(\lambda - \rho_i)^m$.

Покажем, что и, обратно, для каждой системы выражений $(\lambda - \rho_1)^{m_1}, (\lambda - \rho_2)^{m_2}, \ldots$ существует симметрическое преобразование симплектического пространства $\mathfrak{L}$, имеющее эти выражения своими элементарными делителями.

Каждой паре $(\lambda - \rho_i)^{m_i}, (\lambda - \rho_i)^{m_i}$ ставим в соответствие пару матриц

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix},$$

где E — единичная матрица порядка m_i, а B_i — клетка Жордана порядка m_i с собственным значением ρ_i, и пусть

$$G = G_1 + \ldots + G_s, \quad A = A_1 + \ldots + A_s. \tag{6}$$

Рассмотрим комплексное билинейно-метрическое пространство $\mathfrak{L}$ с матрицей Грама G. Так как G косая, косо-метрическая, то $\mathfrak{L}$ — симплектическое пространство. Непосредственное вычисление показывает, что

$$AG = A_1 G_1 + A_2 G_2 + \ldots + A_s G_s$$

есть матрица кососимметрическая. Поэтому линейное преобразование $\mathscr{A}$ пространства $\mathfrak{L}$, имеющее матрицу A, является симметрическим. В то же время элементарные делители преобразования $\mathscr{A}$ имеют требуемые значения. Итак:

Теорема 1. *Каждый элементарный делитель симметрического преобразования симплектического пространства встречается четное число раз. Обратно, всякая система выражений $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$, обладающая этим свойством, является системой элементарных делителей некоторого симметрического преобразования симплектического пространства.*

Мы уже знаем (п. 25.1), что симметрические преобразования симплектических пространств, имеющие одинаковые элементарные делители, изоморфны. Поэтому теорема 1 полностью решает задачу о классификации симметрических преобразований. В частности, она показывает, что для каждого симметрического преобразования $\mathscr{A}$ в симплектическом пространстве $\mathfrak{L}$ можно выбрать такой базис, в котором матрица Грама G и матрица преобразования A примут вид (6).

27.2. **Косасимметрические преобразования.** Линейное преобразование $\mathscr{A}$ билинейно-метрического пространства $\mathfrak{L}$ *косасимметрично*, если $(x\mathscr{A}, y)=-(x, y\mathscr{A})$ для любых x, y из $\mathfrak{L}$.

В силу теоремы 3 п. 26.2 элементарные делители косасимметрического преобразования $\mathscr{A}$ симплектического пространства $\mathfrak{L}$, *отвечающие ненулевым собственным значениям*, входят парами вида $(\lambda-\rho)^m$, $(\lambda-\gamma)^m$. Покажем, что элементарные делители преобразования $\mathscr{A}$, отвечающие нулевому собственному значению, т. е. имеющие вид λ^m, также должны входить парами λ^m, λ^m, если m нечетное. Доказательство совершенно аналогично доказательству соответствующего утверждения из п. 26.2, и мы укажем только его схему.

Исходим из представления $\mathfrak{L}$ в виде прямой суммы корневых подпространств преобразования $\mathscr{A}$. Объединив в этом представлении подпространства, отвечающие противоположным собственным значениям, мы получим разложение

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_0\dotplus\mathfrak{M}_1\dotplus\ldots\dotplus\mathfrak{M}_s,$$

где все подпространства $\mathfrak{M}_0, \ldots, \mathfrak{M}_s$ инвариантны и взаимно ортогональны, причем $\mathfrak{M}_0$ — корневое подпространство, отвечающее корню нуль. Пусть $\mathscr{A}_0$ — преобразование подпространства $\mathfrak{M}_0$, индуцированное в нем преобразованием $\mathscr{A}$. Все собственные значения преобразования $\mathscr{A}_0$ равны нулю, поэтому $\mathscr{A}_0^p=\mathscr{O}$, где p — размерность $\mathfrak{M}_0$. Обозначим через m соответствующий показатель, для которого $\mathscr{A}_0^m=\mathscr{O}$. Преобразование $\mathscr{A}_0$ косасимметрическое, следовательно, $\mathscr{A}_0^{m-1}$ будет, как и в п. 26.2, симметрическим при m четном и косасимметрическим при m нечетном. Однако

соответствующая билинейная функция $(x\mathscr{A}^{m-1}, y)$ будет теперь симметрической при m четном и косасимметрической при m нечетном, так как метрика в симплектических пространствах косасимметрическая. Дальнейшие рассуждения п. 26.2 сохраняются с той разницей, что пара пространств теперь получится при m нечетном.

Теорема 2. *Элементарные делители косасимметрических преобразований симплектических пространств, отвечающие ненулевым собственным значениям, входят парами $(\lambda-\rho)^m$, $(\lambda+\rho)^m$, элементарные делители вида λ^m при m нечетном входят также парами λ^m, λ^m, а элементарные делители λ^m при m четном могут входить в произвольных комбинациях. Обратно, всякая система выражений $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$, обладающая этими свойствами, есть система элементарных делителей некоторого косасимметрического преобразования симплектического пространства.*

Требуется доказать только вторую часть этой теоремы. Для этого каждой паре выражений $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$, $(\lambda+\rho_i)^{m_i}$, в том числе и паре с $\rho_i=0$, ставим в соответствие пару матриц

$$G_i=\begin{bmatrix}0 & E_i\\ -E_i & 0\end{bmatrix},\qquad A_i=\begin{bmatrix}B_i & 0\\ 0 & -B_i'\end{bmatrix},$$

где E_i — единичная матрица порядка m_i, а B_i — клетка Жордана порядка m_i с собственным значением ρ_i. Оставшимся выражениям вида λ^{m_i} с четным m_i ставим в соответствие пары матриц

$$G_i=\begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad A_i=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & 0 & 1\\ & & & & & 0\end{bmatrix}.$$

Пусть

$$G=G_1\dotplus\ldots\dotplus G_s,\quad A=A_1\dotplus\ldots\dotplus A_s.$$

Рассмотрим комплексное билинейно-метрическое пространство $\mathfrak{L}$ с матрицей Грама G. Матрица G косасимметрическая и невырожденная, поэтому $\mathfrak{L}$ симплектическое. Линейное преобразование $\mathscr{A}$ с матрицей A имеет заданные элементарные делители. В то же время $\mathscr{A}$ косасимметрическое, так как непосредственные вычисления показывают, что матрица

$$AG=A_1G_1\dotplus A_2G_2\dotplus\ldots\dotplus A_sG_s$$

симметрическая. Теорема доказана.

27.3. **Симплектические преобразования.** Изометрические преобразования симплектического пространства $\mathfrak{L}$ обыкновенно

называются *симплектическими* преобразованиями этого пространства. Таким образом, если $\mathscr{U}$ — симплектическое преобразование пространства $\mathfrak{L}$, то $(x\mathscr{U}, y\mathscr{U}) = (x, y)$ для всех x, y из $\mathfrak{L}$. В матричной форме это равенство переходит в

$$[x]UGU'[y]' = [x]G[y]',$$

откуда

$$UGU' = G, \tag{7}$$

где G — матрица Грама, U — матрица преобразования $\mathscr{U}$. Выбирая в $\mathfrak{L}$ симплектическую систему координат, мы перепишем соотношение (7) в

$$USU' = S, \tag{8}$$

где S — симплектическая матрица вида (1). Матрицы U, удовлетворяющие условию (8), мы будем называть *симплектическими*. Следовательно, чтобы некоторое линейное преобразование симплектического пространства было симплектическим, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в симплектической системе координат была симплектической. Из (8) также непосредственно вытекает, что прямая сумма симплектических матриц является симплектической матрицей.

Пусть $\mathscr{U}$ — произвольное симплектическое преобразование симплектического пространства $\mathfrak{L}$. Представляя $\mathfrak{L}$ в виде прямой суммы корневых подпространств преобразования $\mathscr{U}$ и объединяя затем слагаемые, относящиеся к взаимно обратным собственным значениям преобразования $\mathscr{U}$, мы получим разложение

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_{-1} \dotplus \mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{M}_n,$$

где $\mathfrak{M}_{-1}$, $\mathfrak{M}_1$ — корневые подпространства, принадлежащие собственным значениям -1, $+1$. На основании теоремы 7 п. 25.2 подпространства $\mathfrak{M}_{-1}, \ldots, \mathfrak{M}_n$ взаимно ортогональны.

Исследование поведения $\mathscr{U}$ на $\mathfrak{L}$ теперь приводится к последованию поведения $\mathscr{U}$ на каждом подпространстве $\mathfrak{M}_i$ отдельно. Повторяя рассуждения п. 26.3 и пользуясь вместо теоремы об элементарных делителях кососимметрических преобразований комплексных евклидовых пространств соответственной теоремой для симплектических пространств, получим следующее предложение:

Теорема 3. *Элементарные делители симплектических преобразований, относящиеся к собственным значениям, отличным от $+1$, входят парами $(\lambda - \rho)^m$, $(\lambda - \rho^{-1})^m$, элементарные делители вида $(\lambda \pm 1)^{2m}$ входят также парами $(\lambda + 1)^{2m+1}$, $(\lambda + 1)^{2m+1}$ или $(\lambda - 1)^{2m+1}$, $(\lambda - 1)^{2m+1}$, а элементарные делители вида $(\lambda \pm 1)^{2n}$ могут входить произвольное число раз. Обратно, всякая система выражений вида $(\lambda - \rho_i)^{m_i}$, $\rho_i \neq 0$, обладающая этими свойствами,*

есть система элементарных делителей некоторого симплектического преобразования.

Согласно теореме 1 п. 25.1 симплектические преобразования, имеющие одинаковые элементарные делители, изоморфны. Поэтому теорема 3 дает полную классификацию симплектических преобразований с точностью до изоморфизма. Эта теорема, в частности, показывает, что если -1 есть собственное значение симплектического преобразования, то кратность этого собственного значения обязательно четная. Так как все остальные собственные значения либо равны $+1$, либо входят парами взаимно обратных одинаковой кратности, то произведение всех собственных значений симплектического преобразования равно $+1$ [*]). Это произведение равно определителю матрицы преобразования, и мы приходим к выводу, что *определители матриц симплектических преобразований равны единице*.

Примеры и задачи

1. Построить симплектическую матрицу с элементарными делителями $\lambda+1$, $\lambda+1$, $(\lambda-1)^2$.

2. Показать, что матрицы вида $\begin{vmatrix} A & B \\ C & A' \end{vmatrix}$, где B, C кососимметрические, квадратные, одной и той же степени, содержат каждый элементарный делитель четное число раз.

3. Сформулировать теорему 1 как теорему о парах кососимметрических билинейных форм.

§ 28. Псевдоунитарные пространства

Псевдоунитарными пространствами мы назвали в п. 24.2 эрмитовы билинейно-метрические пространства над полем комплексных чисел, метрика которых невырожденная и эрмитова: $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Там же было показано, что все эти пространства с точностью до изоморфизма определяются своей размерностью n и сигнатурой s, причем s при данном n может принимать значения n, $n-2$, $\ldots$, $-n$. Как и раньше, нас будут интересовать свойства симметрических, кососимметрических и изометрических преобразований. Классификация этих преобразований в комплексных евклидовых и симплектических пространствах основывалась нами на теореме 1 п. 25.1. В псевдоунитарных пространствах такая теорема, вообще говоря, места не имеет. Рассмотрим, например, двумерное эрмитово билинейно-метрическое пространство $\mathfrak{L}$ с базисом e_1, e_2 и матрицей Грама $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.

[*]) Каждое собственное значение считается столько раз, какова его кратность.

Линейные преобразования $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$, определяемые равенствами

$$e_1\mathscr{U}_1 = 2e_1, \quad e_2\mathscr{U}_1 = \frac{1}{2}e_2,$$

$$e_1\mathscr{U}_2 = \frac{1}{2}e_2, \quad e_2\mathscr{U}_2 = 2e_2,$$

будут, очевидно, геометрическими преобразованиями этого пространства. Элементарные делители преобразований $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$ одни и те же, именно $\lambda - 2$, $\lambda - \frac{1}{2}$. Тем не менее $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ не изоморфны. В самом деле, если бы $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ были изоморфны, то их корневые подпространства, отвечающие собственному значению 2, можно было бы перевести одно в другое некоторым автоморфизмом пространства $\mathscr{V}$. Корневое подпространство, отвечающее корню 2 преобразования $\mathscr{U}_1$, есть прямая $\mathscr{V}_1$, а аналогичное подпространство для $\mathscr{U}_2$ есть прямая $\mathscr{V}_2$. В то же время все ненулевые векторы первой прямой имеют положительный квадрат, а ненулевые векторы второй — отрицательный квадрат. Таким образом, никакой автоморфизм пространства $\mathscr{V}$ не может первую прямую перевести во вторую, что и требовалось.

Этот пример показывает, что для изучения преобразований псевдоунитарных пространств чисто геометрический путь становится в известной мере необходимым.

28.1. Симметрические преобразования. Пусть $\mathscr{V}$ — какое-нибудь псевдоунитарное пространство размерности n и сигнатуры $\varkappa$. Рассмотрим произвольное линейное подпространство $\mathscr{V}'$ из $\mathscr{V}$. Систему координат в $\mathscr{V}'$ мы условимся называть *положительной нормалью*, если ее матрица Грама имеет вид

$$N = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

и *отрицательной нормалью*, если ее матрица Грама имеет вид

$$N = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Очевидно, не всякое подпространство допускает нормальную систему координат. Это зависит от сигнатуры подпространства и его размерности. Подпространства четной размерности, допускающие положительную или отрицательную нормальную систему координат, имеют сигнатуру нуль; подпространства нечетной размерности с положительной нормальной системой координат имеют сигнатуру 1, с отрицательной — сигнатуру -1. Доказательства легко вытекают из определения сигнатуры (п. 24.2).

Исследуем элементарное деление симметрического преобразования $\mathscr{A}$ псевдоунитарного пространства $\mathscr{V}$. Разложим $\mathscr{V}$ в прямую сумму корневых подпространств преобразования $\mathscr{A}$ и объединим слагаемые, отвечающие комплексно сопряженным собственным значениям. В результате получится разложение $\mathscr{V}$ в прямую сумму инвариантных подпространств

$$\mathscr{V} = \mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2 + \dots + \mathscr{W}_s. \tag{3}$$

На основании п. 25.2 эти подпространства взаимно ортогональны, поэтому изучение преобразования $\mathscr{A}$ сводится к изучению поведения $\mathscr{A}$ внутри каждого $\mathscr{W}_i$. Пространство $\mathscr{V}$ невырожденное, поэтому все $\mathscr{W}_i$ также невырожденные. Заметим теперь, что подпространства $\mathscr{W}_i$ могут быть двух типов: 1) $\mathscr{W}_i$ — прямая сумма двух корневых подпространств, отвечающих сопряженным несобственным собственным значениям *), и 2) $\mathscr{W}_i$ — корневое подпространство, отвечающее собственному собственному значению. Рассмотрим первый случай: пусть

$$\mathscr{W}_i = \mathscr{W}_i' + \mathscr{W}_i'',$$

где $\mathscr{W}_i'$, $\mathscr{W}_i''$ — корневые подпространства, отвечающие собственным значениям α, $\bar{\alpha}$, где $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Рассуждая, как в п. 25.1, получим

$$(a_1', a_2'') = 0, \quad (a_1', a_2'') = 0, \tag{4}$$

где a_1', a_2' — любые векторы из $\mathscr{W}_i'$, a_1'', a_2'' — любые векторы из $\mathscr{W}_i''$. Если бы какой-нибудь вектор a' из $\mathscr{W}_i'$ оказался ортогональным ко всем векторам из $\mathscr{W}_i'$, то a' был бы изотропным в $\mathscr{W}_i$. Ввиду невырожденности подпространства $\mathscr{W}_i$ это дает $a' = 0$. Итак, для каждого ненулевого вектора подпространства $\mathscr{W}_i'$ найдется неортогональный вектор в подпространстве $\mathscr{W}_i''$.

Мы предположили, что $\mathscr{W}_i'$ есть корневое подпространство преобразования $\mathscr{A}$, отвечающее корню α. Следовательно, при некотором натуральном m будем иметь

$$\mathscr{W}_i'(\mathscr{A} - \alpha\mathscr{E})^m = 0, \quad \mathscr{W}_i'(\mathscr{A} - \alpha\mathscr{E})^{m-1} \neq 0. \tag{5}$$

Выберем в $\mathscr{W}_i'$ вектор a, для которого $a(\mathscr{A} - \alpha\mathscr{E})^{m-1} \neq 0$. Так как $a(\mathscr{A} - \alpha\mathscr{E})^{m-1}$ отлично от нуля, то в $\mathscr{W}_i''$ найдется вектор b,

*) Если α — собственное значение, а $\bar{\alpha}$ не есть собственное значение, то мы формально будем считать, что $\mathscr{V}_{\bar{\alpha}}$ — нулевое подпространство. Из дальнейших рассуждений следует, впрочем, что этот случай невозможен.

не ортогональный к $a(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1}$. Нормируем b так, чтобы

$$(a(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1},\ b)=1.$$

Введем теперь обозначения

$$a(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^j=a_j,\quad b(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^j=b_{j-1}\qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Преобразование $\mathscr{A}$ симметрическое, поэтому

$$(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^*=\mathscr{A}^*-\alpha\mathscr{E},\quad (\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{s^*}=(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^s.$$

Следовательно, при $j+k=m-1$ имеем

$$\begin{aligned}(a_j,\ b_k)&=(a(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^j,\ b(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^k)=\\&=(a(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{j+k},\ b)=1,\end{aligned}\tag{6}$$

а при $j+k>m+1$

$$(a_j,\ b_k)=(a(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{j+k},\ b)=0.\tag{7}$$

В частности, из (6) следует, что $b(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1}\neq 0$. Далее, если a' принадлежит $\mathfrak{M}_1$, то

$$(a',\ b(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^m)=(a'(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^m,\ b)=0.$$

Иными словами, вектор $b(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^m$ из подпространства $\mathfrak{M}_1'$ ортогонален ко всем векторам из $\mathfrak{M}_1$. Согласно сделанному выше замечанию это дает $b(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^m=0$. Обозначим через $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_1'$ подпространства, натянутые соответственно на векторы a_1, a_2, ..., a_m и b_1, b_2, ..., b_m.

Пусть

$$c_1=a_1+\varkappa_2a_2+\ldots+\varkappa_ma_m$$

$$c_{j+1}=c_j(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})\qquad (j=1,\ \ldots,\ m-1).$$

Из формул (6), (7) следует, что при любых значениях $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_m$ имеем $(c_1(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1},\ b_1)=1$, откуда снова

$$(c_j,\ b_{m+1-j})=1,\quad (c_jb_k)=0\ (j+k>m-1;\ j,\ k=1,\ \ldots,\ m).\tag{8}$$

Легко видеть, что коэффициенты $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_m$ можно подобрать так, чтобы выполнялись дополнительные условия

$$(c_1,\ b_{m-1})=(c_1,\ b_{m-2})=\ldots=(c_1,\ b_1)=0.$$

Тогда при $j+k<m+1$ будем иметь

$$(c_j,\ b_k)=(c_1,\ b_1(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{j+k-2})=(c_1,\ b_{j+k-1})=0.\tag{9}$$

Пусть $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}_1'+\mathfrak{N}_1''$. Соотношения (4), (8), (9) показывают, что система c_1, ..., c_m, b_1, ..., b_m есть *подходящая нормальная* система координат в $\mathfrak{N}_1$. В то же время матрица преобразования $\mathscr{A}$ в этой системе координат распадается на пару клеток Жордана с элементарными делителями $(\lambda-\alpha)^m$, $(\lambda-\alpha)^m$.

Подпространство $\mathfrak{N}_1$ невырожденное, следовательно,

$$\mathfrak{M}_1=\mathfrak{N}_1\dotplus\mathfrak{N}_1^\perp,$$

где $\mathfrak{N}_1^\perp$ — снова инвариантное относительно $\mathscr{A}$ подпространство. Если $\mathfrak{N}_1^\perp\neq 0$, то, применяя к $\mathfrak{N}_1^\perp$ изложенный процесс, мы выделим из него инвариантное подпространство $\mathfrak{N}_2$ и т. д. В результате получим для $\mathfrak{M}_1$ представление вида

$$\mathfrak{M}_1=\mathfrak{N}_1\dotplus\mathfrak{N}_2\dotplus\ldots\dotplus\mathfrak{N}_s,$$

где $\mathfrak{N}_1$, ..., $\mathfrak{N}_s$ — инвариантные взаимно ортогональные подпространства, в каждом из которых существует положительная нормальная система координат, в которой матрица преобразования $\mathscr{A}$ распадается на две клетки Жордана с элементарными делителями вида $(\lambda-\alpha)^m$, $(\lambda-\alpha)^m$.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — корневое подпространство, отвечающее вещественному собственному значению α. Снова имеем такое натуральное число m, чтобы

$$\mathfrak{M}_1(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^m=0,\quad \mathfrak{M}_1(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1}\neq 0.$$

Так как $(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^*=\mathscr{A}^*-\overline{\alpha}\mathscr{E}=\mathscr{A}-\overline{\alpha}\mathscr{E}$, то преобразование $\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E}$, а вместе с ним и преобразование $(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1}$ — симметрические. Соответствующая эрмитова билинейная функция $(x(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1},\ y)$ также симметрична и не равна тождественно нулю на $\mathfrak{M}_1$. Поэтому в $\mathfrak{M}_1$ найдется вектор a, для которого

$$(a(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1},\ a)=\beta\neq 0.\tag{10}$$

Из симметричности функции следует, что β вещественное. Полагая $a_1=\sqrt{|\beta|^{-1}}\,a$, мы вместо (10) получим соотношение

$$(a_1(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1},\ a_1)=\varepsilon,\quad \varepsilon=\pm 1.\tag{11}$$

В этом соотношении знак у единицы зависит от свойств самого преобразования $\mathscr{A}$, и, во всяком случае, нормировкой мы его изменить не можем. Введем обозначения

$$a_{j+1}=a_j(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})\qquad (j=1,\ \ldots,\ m-1).$$

Из (11) следует:

$$(a_j,\ a_{m+1-j})=(a_1(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m-1},\ a_1)=\varepsilon.\tag{12}$$

Аналогично из условия $\mathfrak{M}_1(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^m=0$ получим

$$(a_j,\ a_k)=(a_1(\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{j+k-2},\ a_1)=0\ (j+k\geqslant m+1).\tag{13}$$

Пусть

$$b_1=a_1+\varkappa_2a_2+\ldots+\varkappa_ma_m,$$

где $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — пока произвольные числа. Положим

$$b_{j+1} = b_j(\mathscr{A} - \alpha\mathscr{E}) \quad (j = 1, \ldots, m-1). \tag{14}$$

Равенства (12), (13) дают

$$(b_j, b_{m+1-j}) = \varepsilon, \ (b_j, b_k) = 0 \quad (j + k \geqslant m+1;\ j, k = 1, \ldots, m). \tag{15}$$

Легко видеть, что числа $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ можно так подобрать, чтобы выполнялись соотношения

$$(b_1, b_{m-1}) = (b_2, b_{m-2}) = \ldots = (b_{m-1}, b_1) = 0.$$

Тогда при $j + k \leqslant m-1$ будем иметь

$$(b_j, b_k) = (b_j, b_1(\mathscr{A} - \alpha\mathscr{E})^{j+k-2}) = (b_1, b_{j+k-1}) = 0. \tag{16}$$

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{N}_1$, натянутое на $b_1, \ldots, b_m$. Из (14) следует, что $\mathfrak{N}_1$ инвариантно относительно $\mathscr{A}$ и матрица преобразования $\mathscr{A}$ в этой системе координат равна клетке Жордана с элементарным делителем $(\lambda - \alpha)^m$. С другой стороны, из (15), (16) видно, что $b_1, \ldots, b_m$ есть *нормальная* система координат в $\mathfrak{N}_1$, притом *положительная*, если $\varepsilon = +1$, и *отрицательная*, если $\varepsilon = -1$. Пространство $\mathfrak{N}_1$ невырожденное, поэтому, если $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{o}$, то

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_1',$$

где $\mathfrak{N}_1'$ — инвариантное подпространство низшей размерности. Применяя к $\mathfrak{N}_1'$ тот же процесс, мы выделим из $\mathfrak{N}_1'$ инвариантное подпространство $\mathfrak{N}_2$ и т. д., пока не получим разложение $\mathfrak{M}_1$ в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.

Применяя теперь наши результаты к каждому подпространству $\mathfrak{M}_j$, мы представим пространство $\mathfrak{L}$ в форме

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{P}_1 \dotplus \mathfrak{P}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{P}_t, \tag{17}$$

где $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_t$ — взаимно ортогональные подпространства, каждое из которых либо отвечает вещественному элементарному делителю $(\lambda - \alpha)^m$ преобразования $\mathscr{A}$, либо — прямая сумма двух подпространств, отвечающих сопряженным комплексным элементарным делителям $(\lambda - \alpha)^m, (\lambda - \bar{\alpha})^m$; при этом в подпространствах первого рода найдутся нормальные *положительные* или *отрицательные* системы координат, в которых матрица преобразования $\mathscr{A}$ будет клеткой Жордана, а в подпространствах второго рода найдутся *положительные* нормальные системы координат, в которых матрица преобразования $\mathscr{A}$ будет прямой суммой двух сопряженных клеток Жордана.

Каждому подпространству $\mathfrak{P}_j$, отвечающему вещественному корню α, соответствует элементарный делитель $(\lambda - \alpha)^m$ преобразования $\mathscr{A}$. Условимся подпространству $\mathfrak{P}_j$ относить элементарный делитель $+(\lambda - \alpha)^m$, если в $\mathfrak{P}_j$ существует *положительная нормальная* система координат, в которой матрица преобразования $\mathscr{A}$ имеет вид клетки Жордана, и относить элементарный делитель $-(\lambda - \alpha)^m$, если в $\mathfrak{P}_j$ существует *отрицательная нормальная* система координат, обладающая указанным свойством. С помощью этого правила мы, исходя из разложения (17), получим систему элементарных делителей преобразования $\mathscr{A}$, в которой каждый вещественный элементарный делитель будет снабжен определенным знаком. Условимся называть такую систему элементарных делителей *знакоопределенной*. Повторяя рассуждения, проведенные в конце п. 26.1, получим, что симметрические преобразования пространства $\mathfrak{L}$, имеющие одинаковые знакоопределенные системы элементарных делителей, будут изоморфны.

Предположим теперь, что нам дана произвольная система выражений вида $\pm(\lambda - \alpha_j)^{m_j}$, в которой все невещественные выражения встречаются парами комплексно сопряженных и имеют знак плюс. Спрашивается, существует ли такое псевдоунитарное пространство $\mathfrak{L}$ и такое его симметрическое преобразование $\mathscr{A}$, чтобы заданная система $\pm(\lambda - \alpha_j)^{m_j}$ была знакоопределенной системой элементарных делителей преобразования $\mathscr{A}$? Ответ, очевидно, утвердительный. Построение пространства $\mathfrak{L}$ и преобразования $\mathscr{A}$ можно выполнить тем же путем, что и в п. 26.1. Так как ничего нового это построение не требует, то мы его предоставляем читателю.

Нам остается доказать несколько более тонкий факт, что знакоопределенная система элементарных делителей преобразования $\mathscr{A}$ не зависит от выбора разложения (17) и целиком определяется самим преобразованием.

Разложение (17) было получено в результате расщепления подпространства $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t$ на циклические подпространства $\mathfrak{P}_j$. Так как сами подпространства $\mathfrak{M}_j$ являются либо корневыми, либо суммами корневых и определяются, таким образом, однозначно, то неоднозначность могла произойти только при разложении каждого $\mathfrak{M}_j$. Подпространства $\mathfrak{M}_j$, являющиеся суммами двух корневых, нас интересовать не могут, так как при их расщеплении получаются пары циклических подпространств с парами комплексно сопряженных элементарных делителей вида $(\lambda - \alpha)^m, (\lambda - \bar{\alpha})^m$. Остается, следовательно, только доказать, что, каким бы способом мы ни раскладывали корневое подпространство $\mathfrak{M}_j$ с вещественным корнем α в сумму взаимно ортогональных неразложимых подпространств, знакоопределенная система элементарных делителей вида $\pm(\lambda - \alpha)^m$ будет одна и та же.

Пусть

$$\mathfrak{M}_j = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \ldots + \mathfrak{N}_r \tag{18}$$

$$\mathfrak{M}_j = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_s \tag{19}$$

— сна разложены $\mathfrak{M}_j$ в ортогональные суммы неразложимых подпространств. Обозначим через $\varepsilon_1(\lambda-\alpha)^{m_1}, \ldots, \varepsilon_k(\lambda-\alpha)^{m_k}$ знакоопределенные элементарные делители, отвечающие подпространствам $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{P}_1(j=1, \ldots, l)$; $\varepsilon_i = \varepsilon_j = \pm 1$). Мы расположим слагаемые в суммах (18), (19) так, чтобы $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_k$. Допустим, что у нас есть несколько слагаемых высшей размерности: $m_1 = \ldots = m_s > m_{s+1}$. Докажем, что тогда системы высших элементарных делителей $\varepsilon_1(\lambda-\alpha)^{m_1}, \ldots, \varepsilon_s(\lambda-\alpha)^{m_s}$ и $\delta_1(\lambda-\alpha)^{m_1}, \ldots, \delta_s(\lambda-\alpha)^{m_s}$ будут состоять из тех же самых членов. Рассмотрим билинейную функцию $f_1(x, y) = (x, (\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m_1-1} y)$. Преобразование $\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E}$ симметрическое, поэтому и функция $f_1(x, y)$ симметрическая. Подсчитаем ее сигнатуру с помощью разложения (18) и с помощью разложения (19). Все подпространства в разложении (18) ортогональны относительно функции $f_1(x, y)$. Поэтому сигнатура функции $f_1(x, y)$ на $\mathfrak{M}_j$ будет равна сумме ее сигнатур, вычисленных на каждом слагаемом отдельно. Однако при $p \geqslant k$ имеем

$$\mathfrak{N}_p (\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m_1-1} = 0,$$

следовательно, $f_1(x, y)$ на $\mathfrak{N}_p$ обращается в нуль. Рассмотрим теперь подпространства $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k$. Пусть $a_1, \ldots a_m$ — базис в $\mathfrak{N}_1$, для которого

$$a_{j+1} = a_j (\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E}) \quad (j = 1, \ldots, \nu_1 - 1).$$

Так как $a_i (\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{\nu_1} = 0$, то при $j + k \geqslant 2$ имеем

$$f_1(a_j, a_k) = (a_j, (\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m_1-1} a_k) = 0.$$

С другой стороны, согласно определению знака элементарного делителя

$$f_1(a_1, a_1) = (a_1, (\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m_1-1} a_1) = \delta_1.$$

Следовательно, матрица функции $f_1(x, y)$ в базисе $a_1, \ldots, a_m$ будет содержать единственный ненулевой элемент, который равен δ_1 и стоит в начале главной диагонали. Отсюда видно, что сигнатура функции $f_1(x, y)$ на $\mathfrak{N}_1$ также равна δ_1. Аналогичные рассуждения применимы и к подпространствам $\mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$. В результате мы получим, что сигнатура функции $f_1(x, y)$ на $\mathfrak{M}_j$ равна $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s$. Используя вместо разложения (18) разложение (19), придем к заключению, что сигнатура функции $f_1(x, y)$ на $\mathfrak{M}_j$ равна $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s$. Таким образом,

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s. \tag{20}$$

Так как $\delta_j, \varepsilon_j = \pm 1$, то из (20) вытекает, что обе системы чисел $\delta_1, \ldots, \delta_s$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ могут отличаться только порядком следования и, значит, обе системы высших элементарных делителей $\varepsilon_1(\lambda-\alpha)^{m_1}, \ldots, \varepsilon_s(\lambda-\alpha)^{m_s}$ и $\delta_1(\lambda-\alpha)^{m_1}, \ldots, \delta_s(\lambda-\alpha)^{m_s}$ совпадают.

Рассмотрим теперь билинейную функцию

$$f_2(x, y) = (x, (\mathscr{A}-\alpha\mathscr{E})^{m_1-1} y).$$

На всех подпространствах размерности, меньшей m_{s+1}, эта функция обращается в нуль. Поэтому для сигнатуры $f_2(x, y)$ на $\mathfrak{M}_j$ имеем такие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &\text{сигн. } \mathfrak{M}_j = \\ &= \text{сигн. } \mathfrak{N}_1 + \ldots + \text{сигн. } \mathfrak{N}_s + \text{сигн. } \mathfrak{N}_{s+1} + \ldots + \text{сигн. } \mathfrak{N}_{p_j}, \\ &\text{сигн. } \mathfrak{M}_j = \\ &= \text{сигн. } \mathfrak{P}_1 + \ldots + \text{сигн. } \mathfrak{P}_s + \text{сигн. } \mathfrak{P}_{s+1} + \ldots + \text{сигн. } \mathfrak{P}_{p_j}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где принято, что $m_{s+1} = \ldots = m_{p_j} > m_{p_j+1}$. Так как сигнатуры функции f_2 на соответственных подпространствах высшей размерности по доказанному совпадают, то из (21) следует, что

$$\text{сигн. } \mathfrak{N}_{s+1} + \ldots + \text{сигн. } \mathfrak{N}_{p_j} = \text{сигн. } \mathfrak{P}_{s+1} + \ldots + \text{сигн. } \mathfrak{P}_{p_j}$$

или

$$\delta_{s+1} + \ldots + \delta_{p_j} = \varepsilon_{s+1} + \ldots + \varepsilon_{p_j}. \tag{22}$$

Из (22) видно, что элементарные делители преобразования $\mathscr{A}$, имеющие степень m_{s+1}, также совпадают. Продолжая этот процесс дальше, мы получим, что системы знакоопределенных элементарных делителей преобразования $\mathscr{A}$, вычисленные из разложений (18) и (19), совпадают.

Посмотрим теперь, что можно сказать о сигнатуре основного пространства $\mathfrak{L}$, если известна знакоопределенная система элементарных делителей какого-либо симметрического преобразования $\mathscr{A}$ этого пространства. Разложение (17) показывает, что сигнатура пространства $\mathfrak{L}$ равна сумме сигнатур подпространств $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_l$. В тех из подпространств $\mathfrak{P}_j$, которые отвечают парам сопряженных собственных значений, существует положительная нормальная система координат. Однако размерность их четная и, значит, сигнатура есть нуль.

Также равна нулю и сигнатура подпространств, отвечающих вещественным элементарным делителям, не четной степени. Поэтому остаются только подпространства, отвечающие вещественным элементарным делителям четной степени. Их сигнатура равна ± 1 в зависимости от того, положителен или отрицателен соответствующий элементарный делитель. Следовательно,

$$s = s_1 - s_2 \tag{23}$$

где s — сигнатура пространства $\mathfrak{L}$, s_1 — число положительных, s_2 — число отрицательных вещественных элементарных делителей нечетной степени преобразования $\mathscr{A}$.

Из формулы (23), в частности, вытекает, что *каждое симплектическое преобразование псевдоунитарного пространства сигнатуры s имеет по меньшей мере $|s|$ вещественных элементарных делителей нечетной степени.*

Изучение кососимметрических преобразований псевдоунитарных пространств непосредственно приводится к изучению симметрических, так как если $\mathscr{A}$ симметрическое, то $i_0\mathscr{A}$ будет кососимметрическим, и наоборот.

28.2. **Псевдоунитарные преобразования.** Изометрические преобразования псевдоунитарных пространств называются *псевдоунитарными* преобразованиями. Пусть $\mathscr{U}$ — псевдоунитарное преобразование пространства $\mathfrak{L}$. Представляя $\mathfrak{L}$ в виде прямой суммы корневых подпространств преобразования $\mathscr{U}$ и объединяя слагаемые, относящиеся к корням α, β, связанным соотношением $\alpha\beta = 1$, мы получим новое разложение для $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_{-1} + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_s,$$

где подпространства $\mathfrak{M}_j$ инвариантны относительно $\mathscr{U}$ и в силу теоремы 3 п. 25.1 взаимно ортогональны. К каждому из этих подпространств можно применить одну из формул Кэли (п. 25.2):

$$\mathscr{A} = i(\mathscr{U} - \mathscr{E})(\mathscr{U} + \mathscr{E})^{-1} \tag{24}$$

или

$$\mathscr{A} = i(\mathscr{U} + \mathscr{E})(\mathscr{U} - \mathscr{E})^{-1}. \tag{25}$$

В результате получим симметрические преобразования подпространств $\mathfrak{M}_j$. Из (24), (25) имеем

$$\mathscr{U} = (\mathscr{E} + i_0\mathscr{A})(\mathscr{E} - i_0\mathscr{A})^{-1}$$

или соответственно

$$\mathscr{U} = -(\mathscr{E} + i_0\mathscr{A})(\mathscr{E} - i_0\mathscr{A})^{-1}.$$

В первом случае каждый элементарный делитель преобразования $\mathscr{A}$ вида $(\lambda - \alpha)^m$ перейдет в элементарный делитель $(\lambda - \gamma)^m$, где $\gamma = (1 + i\alpha)(1 - i\alpha)^{-1}$, а во втором — в $(\lambda - \gamma)^m$, где $\gamma = -(1 + i\alpha)(1 - i\alpha)^{-1}$. Так как $\mathscr{A}$ — симметрическое преобразование, то его невещественные элементарные делители вида $(\lambda - \alpha)^m$ будут встречаться парами $(\lambda - \alpha)^m$, $(\lambda - \bar{\alpha})^m$. Однако $(1 + i\alpha)(1 - i\alpha)^{-1} = (1 - i\bar{\alpha})(1 + i\bar{\alpha})^{-1}$, поэтому соответственные элементарные делители преобразования $\mathscr{U}$ также будут встречаться парами, но уже вида $(\lambda - \gamma)^m$, $(\lambda - \bar{\gamma}^{-1})^m$. Если же α вещественное, то для $\gamma = (1 - i\alpha)(1 + i\alpha)^{-1}$ мы получим соотношение $\gamma\bar{\gamma} = 1$. Обратно, из $\gamma\bar{\gamma} = 1$ следует, что α вещественное. Таким образом, формулы (24), (25) устанавливают соответствие между элементарными делителями псевдоунитарного преобразования $\mathscr{U}$ и элементарными делителями симметрического преобразования $\mathscr{A}$. Мы видели, что

симметрические преобразования с точностью до изоморфизма задаются своими знакоопределенными системами элементарных делителей. Поэтому псевдоунитарные преобразования определяются с точностью до изоморфизма своими знакоопределенными системами элементарных делителей. Только в этих системах знаки ± 1 должны быть теперь расставлены у элементарных делителей, отвечающих собственным значениям, по модулю равным единице.

Примеры и задачи

1. Провести полностью доказательства всех утверждений пп. 28.1, 28.2.

2. Пусть $\mathfrak{L}$ — четырехмерное псевдоунитарное пространство с сигнатурой 2 (комплексное пространство Лоренца). Выбором в качестве базисной системы координат в $\mathfrak{L}$ системы e_1, e_2, e_3, e_4, в которой скалярный квадрат вектора $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$ имеет вид $(x, x) = \xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 + \xi_3\bar{\xi}_3 - \xi_4\bar{\xi}_4$. Показать, что матрица каждого симметрического преобразования пространства $\mathfrak{L}$ может быть в подходящей базисной системе посредством перехода к одному из следующих видов:

$$\begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \\ & & & \delta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \delta \\ & & -\delta & \gamma \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & 0 & 1 \\ & 0 & \beta & 1 \\ & -1 & & \beta \end{bmatrix},$$

где α, β, γ, δ — вещественные числа. Решить аналогичную задачу для матриц псевдоунитарных преобразований пространства $\mathfrak{L}$.

3. Если n — размерность пространства, s — сигнатура эрмитовой билинейной функции f, то *характеристикой* χ называют выражение $\chi = \frac{n - |s|}{2}$. Показать, что характеристика псевдоунитарного пространства $\mathfrak{L}$, в котором имеется симметрическое преобразование $i_0\mathscr{A}$, удовлетворяет неравенству

$$\chi \geqslant h + \sum \left[\frac{k}{2}\right],$$

где h равно половине суммы показателей комплексных элементарных делителей преобразования $i_0\mathscr{A}$, а k пробегает все показатели его вещественных элементарных делителей. Символ $\left[\frac{k}{2}\right]$ означает максимальное целое число, не превосходящее $\frac{k}{2}$.

4. В условиях предыдущей задачи пусть $f(x, y) = (x, \mathscr{A}y)$. Показать, что характеристика функции f удовлетворяет неравенству

$$\chi \geqslant h + \sum \left[\frac{k'}{2}\right] + \sum \left[\frac{k'' - 1}{2}\right],$$

где h — сокупность показателей комплексных элементарных делителей преобразования $i_0\mathscr{A}$, k' пробегает показатели элементарных делителей, отвечающих ненулевым вещественным корням, k'' — те же для нулевого собственного значения.

Глава VIII

АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие трехмерного вещественного векторного пространства естественно возникает при описании основных свойств обычного физического пространства, если в этом пространстве выделена какая-то точка в качестве начала координат. Поскольку все точки физического пространства считаются равноправными, то наряду с понятием векторного пространства желательно иметь и математическую модель, отвечающую понятию пространства, в котором предварительно не фиксируется никаких точек. Примерами этих моделей являются аффинное пространство и евклидово точечное пространство. Элементы теории таких пространств и будут изложены в этой главе.

§ 29. Общие аффинные пространства

29.1. Аксиоматика. Пусть задано какое-нибудь векторное пространство $\mathfrak{L}$ над полем K. *Аффинным пространством* $\mathfrak{A}$ *над вектором пространством* $\mathfrak{L}$ называется произвольная совокупность, каждой паре элементов которой X, Y поставлен в соответствие некоторый вектор из $\mathfrak{L}$, обозначаемый далее через $\overline{XY}$, при условии, что выполнены следующие требования:

A_1: *для каждых* $X \in \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{L}$ *существует один и только один элемент* $Y \in \mathfrak{A}$, *удовлетворяющий соотношению* $\overline{XY} = a$;

A_2: *для любых* X, Y, $Z \in \mathfrak{A}$ *всегда верно равенство* $\overline{XY} + \overline{YZ} = \overline{XZ}$.

Элементы аффинного пространства называются его *точками*, а векторы из $\mathfrak{L}$ называются *свободными векторами* пространства $\mathfrak{A}$.

Для *любых* $X \in \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{L}$ будем через $X + a$ обозначать ту точку $Y \in \mathfrak{A}$, для которой $\overline{XY} = a$. Согласно аксиоме A_1 такая точка в $\mathfrak{A}$ существует и единственна. Отсюда, в частности, вытекает, что для любых X, $Y \in \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{L}$

$$X + \overline{XY} = Y, \quad X + (a + b) = (X + a) + b. \tag{1}$$

Вследствие аксиомы A_2 $\overline{XX} + \overline{XY} = \overline{XY}$, и потому

$$\overline{XX} = 0, \quad X + a = X \quad (X \in \mathfrak{A},\ a \in \mathfrak{L}).$$

Вследствие этой же аксиомы $\overline{XY} + \overline{YX} = \overline{XX}$, и потому

$$\overline{XY} = -\overline{YX}. \tag{2}$$

Наконец, для *любых* X, O, B, C, $D \in \mathfrak{A}$ имеем

$$(X + \overline{OB}) + \overline{CD} = X + (\overline{OB} + \overline{CD}). \tag{3}$$

В самом деле, пусть $X + \overline{OB} = Y$, $Y + \overline{CD} = Z$. В силу A_2 и (1)

$$\overline{OB} = \overline{XY}, \quad \overline{CD} = \overline{YZ}, \quad \overline{OB} + \overline{CD} = \overline{XZ},$$

и потому

$$(X + \overline{OB}) + \overline{CD} = Z = X + \overline{XZ} = X + (\overline{OB} + \overline{CD}).$$

Каждой паре (O, B) точек пространства $\mathfrak{A}$ поставим в соответствие отображение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$, обозначаемое через $\overline{OB}$ и определяемое формулой

$$\overline{OB}: X \to X + \overline{OB} \quad (X \in \mathfrak{A}), \tag{4}$$

т. е. положим $X + \overline{OB} = X + \overline{OB}$. Отображения $\overline{OB}$ $(O, B \in \mathfrak{A})$ называются *сдвигами* (а также *смещениями* и *переносами*) пространства $\mathfrak{A}$. Суперпозицию сдвигов $\overline{OB}$, $\overline{CD}$ называют обычно суммой этих сдвигов, т. е. по определению полагают

$$X + (\overline{OB} + \overline{CD}) = (X + \overline{OB}) + \overline{CD} = X + (\overline{OB} + \overline{CD}). \tag{5}$$

Произведение элемента $\lambda \in K$ на сдвиг $\overline{OB}$ определяют формулой

$$X + (\lambda \overline{OB}) = X + (\lambda \overline{OB}). \tag{6}$$

Совокупность всех сдвигов пространства $\mathfrak{A}$, снабженную операциями сложения и умножения на все $\lambda \in K$, обозначим через $L(\mathfrak{A})$. Равенства (3), (6) показывают, что отображение $OX \to \overline{OX}$ является изоморфизмом $\mathfrak{L}$ на $L(\mathfrak{A})$, и потому $L(\mathfrak{A})$ есть *векторное пространство над* K.

Фиксируем теперь в $\mathfrak{A}$ какую-нибудь точку O. Тогда отображение $X \to \overline{OX}$ $(X \in \mathfrak{A})$ будет устанавливать взаимно однозначное соответствие между точками $\mathfrak{A}$ и векторами $\mathfrak{L}$. Вектор $\overline{OX}$ обычно называется *радиусом-вектором* точки X относительно начальной точки O. Радиус-вектор сдвинутой точки $X + \overline{BC}$ выражается через радиус-вектор первоначально заданной точки X при помощи формулы

$$\overline{O(X + \overline{BC})} = \overline{OX} + (\overline{OC} - \overline{OB}). \tag{7}$$

Действительно, полагая $X + \overline{BC} = Y$, будем иметь $\overline{XY} = \overline{BC}$ и, следовательно,

$$\overline{O(X + \overline{BC})} = \overline{OY} = \overline{OX} + \overline{XY} = \overline{OX} + \overline{BC}.$$

Пусть теперь нам задано какое-либо векторное пространство $\vec{\mathfrak{A}}$ над полем K. Назовем векторы $\vec{x}$ точками и каждой паре их (a, b) поставим в соответствие вектор $\vec{ab}=b-a$. Ясно, что при этом условия требования A_1, A_2 заведомо будут удовлетворены и тем самым векторное пространство $\vec{\mathfrak{A}}$ обратится в аффинное пространство над самим собою. Это аффинное пространство мы обозначим через $A(\vec{\mathfrak{A}})$. Так как равенство $\vec{xy}=\vec{u}$ равносильно соотношению $y-x=u$, то для элементов пространства $A(\vec{\mathfrak{A}})$ получаем формулу

$$x+\vec{bc}=x+(c-b). \tag{8}$$

Наряду с понятием *аффинного пространства над векторным пространством* с чисто алгебраической точки зрения иногда удобно рассматривать еще понятие аффинного пространства *над полем*, возникающее следующим путем.

Совокупность всех точек аффинного пространства $\mathfrak{A}$ над векторным пространством $\vec{\mathfrak{A}}$ над основным полем K обозначим через $\boldsymbol{A}$. Вводим в $\boldsymbol{A}$ новые операции $S(X, Y, Z)$, $P_\lambda(X, Y)$, полагая по определению

$$S(X, Y, Z)=Z+\vec{XY}, \quad P_\lambda(X, Y)=X+(\lambda\vec{XY}) \tag{9}$$

и обращая тем самым $\mathfrak{A}$ в новую алгебру

$$\mathfrak{A}^*=(\boldsymbol{A};\ S,\ \{P_\lambda\}) \qquad (\lambda\in K).$$

Легко проверить, что операции S, P_λ в алгебре $\mathfrak{A}^*$ обладают следующими свойствами:

A_1^*: *Для каких бы* O, B, C, $X\in\mathfrak{A}^*$

$$S(B, C, S(O, B, X))=S(O, C, X); \tag{10}$$

A_2^*: *Для каких бы* O, B, $X\in\mathfrak{A}^*$, $\lambda\in K$

$$S(O, B, P_\lambda(O, X))=P_\lambda(B, S(O, B, X)); \tag{11}$$

A_3^*: *Фиксируем в* $\mathfrak{A}^*$ *произвольную точку* O *и с помощью операций* S, P_λ *вводим для элементов* $\mathfrak{A}^*$ *новые операции*

$$X+_OY=S(O, X, Y), \quad \lambda\cdot_OX=P_\lambda(O, X), \tag{12}$$

позволяющие складывать элементы и складывать (умножать) элементы $\mathfrak{A}^*$ *на числа* λ *(в точке* O*). Относительно введенных операций* $+_O$ *и* $\lambda\cdot_O$ *элементы* $\mathfrak{A}^*$ *образуют векторное пространство над* K, *обозначаемое далее через* $\mathfrak{A}_O$.

В самом деле, мы видели, что отображение $X\to\vec{OX}$ $(X\in A)$ является взаимно однозначным соответствием между точками A и векторами из $\vec{\mathfrak{A}}$. Перенесем согласно этому соответствию векторные операции из $\vec{\mathfrak{A}}$ в A, т. е. положим по определению

$$X+Y=Z\Leftrightarrow\vec{OX}+\vec{OY}=\vec{OZ}, \quad \lambda X=Z\Leftrightarrow\lambda\vec{OX}=\vec{OZ}. \tag{13}$$

В результате A обратится в линейное пространство над K и точка O будет нулевым элементом этого пространства. Так как

$$X-\lambda\vec{AB}=Y\Leftrightarrow\vec{XY}=\lambda\vec{AB}\Leftrightarrow\vec{OY}-\vec{OX}=\lambda(\vec{OB}-\vec{OA}),$$

а из (13) следует, что

$$\vec{OY}-\vec{OX}=\lambda(\vec{OB}-\vec{OA})\Leftrightarrow Y-X=\lambda(B-A),$$

то

$$X-\lambda\vec{AB}=Y\Leftrightarrow Y=X+\lambda(B-A),$$

откуда

$$X-\lambda\vec{AB}=X+\lambda(B-A) \tag{14}$$

и, следовательно,

$$S(X, Y, Z)=Y+Z-X,$$
$$P_\lambda(X, Y)=\lambda(Y-X)+X,$$
$$X+_OY=X+Y, \quad \lambda\cdot_OX=\lambda X.$$

После этого утверждения A_1', A_2', A_3' становятся очевидными.

Аффинным пространством над полем K *называется множество элементов* A, *снабженное одной трехместной операцией* $S(X, Y, Z)$ *и серией бинарных операций* $P_\lambda(X, Y)$ $(\lambda\in K)$, *удовлетворяющих по* A *требованиям* A_1^*, A_2^*, A_3^*.

Аффинное пространство над полем K, сводящееся к векторному пространству над K, является *алгеброй* (см. сноску второй главы) из K и с общей точки бесконечной. Поэтому для аффинных пространств над полем K оказываются автоматически определенной серия понятий, рассмотренных в «Лекциях», таких, как изоморфизм, автоморфизм, конгруэнция и т. п.

Мы уже видели, каким образом каждое аффинное пространство $\mathfrak{A}$ над векторным пространством $\vec{\mathfrak{A}}$ над полем K можно обратить в аффинное пространство $\mathfrak{A}^*$ над полем K. Теперь мы хотим показать, что этим способом можно получить любое аффинное пространство над K.

Итак, пусть $\mathfrak{A}=(A, S, P_\lambda)$ — какое-либо аффинное пространство над полем K. Записывая тождество (10) в виде

$$C+_S(B-_OX)=C+_CX \tag{15}$$

и полагая $B=O$, получим

$$C-_O(O+_OX)=C+_OX.$$

Это — уравнение в векторном пространстве $\mathfrak{A}_O$, и легко

$$O+_OX=X, \tag{16}$$

т. е. точка O есть нуль пространства $\mathfrak{A}_O$.

Для любых фиксированных точек O, B отображение

$$X\to S(O, B, X) \quad (X\in\mathfrak{A})$$

пространства $\mathfrak{A}$ в себя назовем сдвигом $\mathfrak{A}$ и обозначим его через $\overrightarrow{OB}$. Таким образом, по определению полагаем

$$X \cdot \overrightarrow{OB} = S(O, B, X) = X +_O B. \tag{17}$$

Переписывая соотношение (15) в форме $X \cdot \overrightarrow{OO} = X$, видим, что сдвиг $\overrightarrow{OO}$ является тождественным отображением $\mathfrak{A}$ на себя и, в частности, $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{XX}$ для любых $O, X \in \mathfrak{A}$.

Как и выше, суммой сдвигов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{CD}$ назовем их суперпозицию, т. е. полагаем

$$X \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CD}) = (X \cdot \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{CD} = S(C, D, S(O, B, X)). \tag{18}$$

Тождество (10) означает, что для сдвигов справедливо *правило треугольника*

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}, \tag{19}$$

из которого, в частности, следует, что $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OO}$, т. е. что сдвиги $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{BO}$ являются *взаимно обратными* отображениями.

Из (15), (17) получаем

$$X \cdot \overrightarrow{CD} = X +_O D = X +_O (C +_B (D -_O C)) = X +_B (D -_B C),$$

или

$$\overrightarrow{CD} = B(D -_B C). \tag{20}$$

Комбинируя формулы (20) и (19), приходим к соотношению

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B(D -_B C)} = \overrightarrow{O(D -_B C)},$$

показывающему, что *сумма сдвигов есть сдвиг*.

Определим, наконец, еще операцию умножения числа $\lambda \in K$ на сдвиг $\overrightarrow{OB}$, полагая

$$\lambda \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O(\lambda \cdot_O B)} = \overrightarrow{OP_\lambda(O, B)},$$

т. е. полагая, что

$$X \cdot (\lambda \overrightarrow{OB}) = S(O, P_\lambda(O, B), X) = P_\lambda(X, X \cdot \overrightarrow{OB}). \tag{21}$$

Из формулы (21) видно, что если $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$, то $\lambda \cdot \overrightarrow{OB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$, т. е. операция умножения числа на сдвиг определена однозначно.

Теорема 1. *Совокупность $L(\mathfrak{A}^*)$ всех сдвигов аффинного пространства $\mathfrak{A}^*$ над полем K является векторным пространством над K относительно операций сложения сдвигов и умножения числа на сдвиг. Пространство $L(\mathfrak{A}^*)$ изоморфно любому из пространств $\mathfrak{V}_O$. Отнеся каждой паре точек X, Y из $\mathfrak{A}^*$ в соответствие сдвиг $\overrightarrow{XY} \in L(\mathfrak{A}^*)$, мы обратим $\mathfrak{A}^*$ в аффинное пространство $\mathfrak{A}$ над векторным пространством $L(\mathfrak{A}^*)$. Если в пространстве $\mathfrak{A}$ ввести*

по формулам (9) операции S, P_λ, мы получим снова пространство $\mathfrak{A}^*$.

Последние два утверждения очевидны, так как, например, формулы (9) применительно к пространству $\mathfrak{A}$ просто переходят в формулы (17) и (21). Докажем первые два утверждения.

Выберем произвольную точку $O \in \mathfrak{A}^*$ и рассмотрим отображение

$$A : X \to \overrightarrow{OX} \qquad (X \in \mathfrak{V}_O).$$

Так как любой сдвиг можно представить в форме $\overrightarrow{OX}$, то A есть отображение $\mathfrak{V}_O$ на $L(\mathfrak{A}^*)$. Проверим, сохраняет ли отображение A операции сложения и умножения на числа. Имеем

$$Z \cdot \overrightarrow{O(X +_O Y)} = Z +_O (X -_O Y) = (Z -_O X) -_O Y = Z \cdot (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY}),$$

т. е. $\overrightarrow{O(X +_O Y)} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$ и, следовательно,

$$(X -_O Y) A = XA + YA.$$

Аналогичным путем из (21) получаем $(\lambda \cdot_O X) A = \lambda \cdot XA$. Таким образом, отображение A является изоморфизмом $\mathfrak{V}_O$ на $L(\mathfrak{A}^*)$ относительно операций сложения и умножения на числа, и потому $L(\mathfrak{A}^*)$ вместе с $\mathfrak{V}_O$ является векторным пространством над K.

Поставим, наконец, вопрос: при каких условиях два аффинных пространства изоморфны?

Понятие изоморфизма введено в «АС» для произвольных алгебр, имеющих одинаковую сигнатуру. Аффинные пространства над полем K были определены как алгебры, сигнатура которых зависит от поля K. Поэтому для аффинных пространств над разными полями определено и понятие изоморфизма. Что касается аффинных пространств над данным векторным пространством, то они были определены нами как алгебры фиксированной сигнатуры, и их система более сложной природы, для которых понятие изоморфизма нам пока не нужно.

Введем следующее определение:

Гомоморфизмом аффинного пространства $\mathfrak{A}$ над векторным пространством $\mathfrak{V}$ в аффинное пространство $\mathfrak{B}$ над тем же векторным пространством $\mathfrak{V}$ называется точечное отображение $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, при котором

$$XY = X^\varphi Y^\varphi \qquad (X, Y \in \mathfrak{A}). \tag{22}$$

Ясно, что это условие равносильно следующему:

$$(X \cdot v)^\varphi = X^\varphi \cdot v \qquad (X \in \mathfrak{A},\ v \in \mathfrak{V}).$$

Из (22) видно, что отображение φ переводит различные точки в различные и что если φ есть гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, то обратное отображение φ^{-1} — гомоморфизм $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$.

Гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ называется *изоморфизмом*, если обратное отображение есть гомоморфизм $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$. Таким образом, *понятия изоморфизма и изоморфности для аффинных пространств над фиксированным векторным пространством равносильны.*

Изоморфизм аффинного пространства $\mathfrak{A}$ над векторным пространством $\mathfrak{L}$ на себя называется *автоморфизмом* $\mathfrak{A}$ над $\mathfrak{L}$.

Теорема 2. *Все аффинные пространства над одним и тем же векторным пространством изоморфны. Автоморфизмы аффинного пространства над векторным пространством — это его сдвиги.*

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — аффинные пространства над векторным пространством $\mathfrak{L}$. Выберем произвольные точки $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ и рассмотрим отображение φ: $A^v \to B^v$ $(v \in \mathfrak{L})$. Из аксиом A_1, A_2 непосредственно заключаем, что φ — изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Далее, если φ — автоморфизм аффинного пространства $\mathfrak{A}$ над векторным пространством $\mathfrak{L}$, то из формулы (22) получаем $\overline{AX} = \overline{A^\varphi X^\varphi}$, откуда $X^\varphi = A^\varphi + AX$, и потому

$$X^\tau = X + XA^\varphi + AX = X + (AX + XA^\varphi) = X + \overline{AA^\varphi},$$

т. е. τ — сдвиг $\mathfrak{A}$ на вектор $\overline{AA^\varphi}$. Обратно, если τ — сдвиг, то φ имеет вид $X^\varphi = X + v$, где v — произвольный фиксированный вектор из $\mathfrak{L}$, и потому

$$\overline{X^\varphi Y^\varphi} = (X + v)(Y + v) = XY.$$

Аффинное пространство над полем K есть алгебра сигнатуры S, P_λ $(\lambda \in K)$.

Изоморфизм φ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ над полем K на аффинное пространство $\mathfrak{B}$ над тем же полем K — это взаимно однозначное отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, удовлетворяющее условиям

$$S(X, Y, Z)^\varphi = S(X^\varphi, Y^\varphi, Z^\varphi),$$
$$P_\lambda(X, Y)^\varphi = P_\lambda(X^\varphi, Y^\varphi)$$

или, что равносильно, условиям

$$(Z + \overline{XY})^\varphi = Z^\varphi + \overline{X^\varphi Y^\varphi}, \tag{23}$$
$$(X + \lambda\overline{XY})^\varphi = X^\varphi + \lambda\overline{X^\varphi Y^\varphi}. \tag{24}$$

Теорема 3. *Для того чтобы отображение $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ над полем K на аффинное пространство $\mathfrak{B}$ над тем же полем было изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы отображение ψ: $\overline{XY} \to \overline{X^\varphi Y^\varphi}$ $(X, Y \in \mathfrak{A})$ было изоморфизмом векторного пространства $L(\mathfrak{A})$ на векторное пространство $L(\mathfrak{B})$.*

Необходимость. Прежде всего установим однозначность отображения ψ. Пусть $\overline{XY} = \overline{UV}$ $(X, Y, U, V \in \mathfrak{A})$ и, следовательно, $Z + XY = Z + UV$. Из (23) получаем $Z^\varphi + X^\varphi Y^\varphi = Z^\varphi + U^\varphi V^\varphi$,

Так как Z^φ пробегает все пространство $\mathfrak{B}$, то из последнего равенства имеем $X^\varphi Y^\varphi = U^\varphi V^\varphi$, а потому отображение ψ однозначно. Перепишем теперь соотношение (23) в форме $(Xa)^\varphi = X^\varphi a^\psi$, получаем для произвольных v, $u \in L(\mathfrak{A})$

$$X^\varphi (v + u)^\psi = (X(v + u))^\varphi = ((Xv) + u)^\varphi = (Xv)^\varphi + u^\psi = X^\varphi v^\psi + u^\psi,$$

откуда

$$(v + u)^\psi = v^\psi + u^\psi, \tag{25}$$

Аналогично, переписывая (24) в виде $(X + \lambda a)^\varphi = X^\varphi + \lambda a^\psi$, получаем

$$X^\varphi + (\lambda a)^\psi = (X + (\lambda a))^\varphi = X^\varphi + \lambda a^\psi,$$

откуда

$$(\lambda a)^\psi = \lambda a^\psi. \tag{26}$$

Соотношения (25), (26) означают, что ψ есть изоморфизм $L(\mathfrak{A})$ на $L(\mathfrak{B})$.

Достаточность. Пусть для отображения $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ множества $\mathfrak{A}$ на множество $\mathfrak{B}$ отображение ψ: $\overline{XY} \to \overline{X^\varphi Y^\varphi}$ есть изоморфизм $L(\mathfrak{A})$ на $L(\mathfrak{B})$. Так как при изоморфизме векторных пространств нулевой вектор отвечает нулевому вектору, то из $X^\varphi = Y^\varphi$ следует $\overline{X^\varphi Y^\varphi} = 0$, и потому $XY = 0$, $X = Y$, т. е. отображение φ взаимно однозначное. Далее, чтобы доказать истинность для φ соотношения (24), берем в $\mathfrak{A}$ ту точку U, для которой $\overline{XY} = \overline{ZU}$. Тогда

$$(Z + \overline{XY})^\varphi = U^\varphi = Z^\varphi + \overline{ZU}^\psi = Z^\varphi + \overline{X^\varphi Y^\varphi} \tag{27}$$

и, в частности,

$$(Za)^\varphi = Z^\varphi a^\psi \qquad (a \in L(\mathfrak{A})).$$

Из (26) теперь имеем

$$(X + \lambda XY)^\varphi = X^\varphi + (\lambda XY)^\psi = X^\varphi + \lambda XY^\psi = X^\varphi + \lambda\overline{X^\varphi Y^\varphi},$$

что и требовалось.

Следствие 1. *Аффинные пространства над бесконечным полем тогда и только тогда изоморфны, когда их векторные пространства сдвигов имеют одинаковую размерность.*

Действительно, согласно теореме 3 изоморфизм аффинных пространств над полем равносилен изоморфизму векторных пространств сдвигов, а изоморфизм векторных пространств (см. п. 4.5) равносилен совпадению их размерностей.

Следствие 2. *Автоморфизмы аффинного пространства $\mathfrak{A}$ над полем, оставляющие на месте какую-нибудь точку $O \in \mathfrak{A}$, —*

всех преобразований вида φ_l: $X \to O \cdot \overrightarrow{OX}^l$, *где* φ — *произвольный фиксированный автоморфизм векторного пространства* $L(\mathfrak{A})$.

В самом деле, если φ — автоморфизм пространства $\mathfrak{A}$, оставляющий на месте точку O, то

$$X^\varphi = O \cdot \overrightarrow{OX}^\varphi = O \cdot \overrightarrow{O^\varphi X^\varphi} = O \cdot \overrightarrow{OX}^\varphi.$$

Обратно, если ψ — автоморфизм $L(\mathfrak{A})$, то

$$\overrightarrow{X^\psi Y^\psi} = \overrightarrow{(O \cdot \overrightarrow{OX}^\psi)(O \cdot \overrightarrow{OY}^\psi)} = \overrightarrow{OY}^\psi - \overrightarrow{OX}^\psi = (\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX})^\psi = \overrightarrow{XY}^\psi,$$

и точку согласно теореме 3 φ — автоморфизм пространства $\mathfrak{A}$.

Теорема 4. *Для произвольной точки* O *аффинного пространства* $\mathfrak{A}$ *над полем* K *каждый автоморфизм* φ *пространства* $\mathfrak{A}$ *над* K *может быть представлен в виде*

$$\varphi = \tau_{\overrightarrow{OO^\varphi}} \varphi_0, \tag{25}$$

где φ_0 — *подходящий автоморфизм* $\mathfrak{A}$, *а* $\tau_{\overrightarrow{OO^\varphi}}$ — *автоморфизм* $\mathfrak{A}$, *оставляющий точку* O *на месте. Для любого автоморфизма* φ *равенство вида* (25) *однозначно.*

Пусть φ — автоморфизм пространства $\mathfrak{A}$. Тогда преобразование $\varphi_0 = \varphi \cdot \overrightarrow{O^\varphi O}$ есть автоморфизм $\mathfrak{A}$ и из соотношений

$$O \cdot \varphi_0 = O^\varphi \cdot \overrightarrow{O^\varphi O} = O$$

видно, что φ_0 оставляет точку O на месте. Полагая $\varphi_1 = \overrightarrow{OO^\varphi}$, получим равенство (25). Пусть теперь

$$\varphi = \varphi_0 \varphi_1 = \varphi_0 \tau_{\overrightarrow{a}}^{\varphi_0},$$

где $\tau^{\overrightarrow{a}}$ — сдвиг, $\tau_{\overrightarrow{a}}^{\varphi_0}$ — автоморфизм $\mathfrak{A}$, оставляющий на месте O. Тогда

$$O \cdot \varphi_0^{-1} \varphi_1^{-1} = O \cdot \tau_{\overrightarrow{a}}^{\varphi_0} \varphi_0^{-1} = O.$$

Так как сдвиг $\tau_{\overrightarrow{a}}^{\varphi_0} \tau^{\overrightarrow{a}}$ оставляет на месте точку O, то $\tau_{\overrightarrow{a}}^{\varphi_0} \tau^{\overrightarrow{a}} = \tau_{\overrightarrow{OO}}$, откуда $\varphi_1^{-1} = \tau_{\overrightarrow{a}}$ и $\varphi_0^{-1} = \tau_{\overrightarrow{a}}^{\varphi_0}$.

29.2. **Линейные многообразия.** Пусть $\mathfrak{A}$ — аффинное пространство над некоторым полем K. Векторное пространство $L(\mathfrak{A})$ сдвигов $\mathfrak{A}$ обозначим через $\mathfrak{L}$. Тогда каждой паре точек $X, Y \in \mathfrak{A}$ будет отвечать в $\mathfrak{L}$ вектор $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XY}$, и это соответствие удовлетворяет аксиомам A_1, A_2 из п. 29.1. *Размерностью* аффинного пространства $\mathfrak{A}$ называется размерность соответствующего векторного пространства $\mathfrak{L}$. В частности, аффинное пространство размерности 0 состоит лишь из одной точки.

Точки $X_0, X_1, \ldots, X_m$ пространства $\mathfrak{A}$ называются *линейно независимыми*, если линейно независимы векторы $\overrightarrow{X_0X_1}, \overrightarrow{X_0X_2}, \ldots, \overrightarrow{X_0X_m}$. Точка $X \in \mathfrak{A}$ называется *линейно зависимой от последовательности точек* $X_0, X_1, \ldots, X_m$, если вектор $\overrightarrow{X_0X}$ может быть линейно выражен через векторы $\overrightarrow{X_0X_1}, \ldots, \overrightarrow{X_0X_m}$.

В этих определениях точка X_0 играет особую роль. На самом деле, линейная зависимость не связана с порядком точек в последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Пусть O — произвольная точка пространства $\mathfrak{A}$. Тогда

$$\overrightarrow{X_0X_i} = \overrightarrow{OX_i} - \overrightarrow{OX_0} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

и свойство системы точек $X_1, \ldots, X_m$ быть линейно независимой равносильно тому, что для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ из соотношения

$$\lambda_1(\overrightarrow{OX_1} - \overrightarrow{OX_0}) + \ldots + \lambda_m(\overrightarrow{OX_m} - \overrightarrow{OX_0}) = 0$$

следует $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Полагая $\lambda_0 = -\lambda_1 - \ldots - \lambda_m$, видим, что точки $X_0, X_1, \ldots, X_m$ тогда и только тогда линейно независимы, когда при любых $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ из соотношений

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0,$$
$$\lambda_0\overrightarrow{OX_0} + \lambda_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{OX_m} = 0$$

вытекает: $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

В это утверждение точки $X_1, X_2, \ldots, X_m$ входят уже равноправно, и потому, если последовательность точек $X_1, X_2, \ldots, X_m$ линейно зависима, то линейно зависима и последовательность $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m}$ при любой перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ чисел $1, 2, \ldots, m$. Это же относится и к понятию линейной зависимости точки X от последовательности точек $X_0, X_1, \ldots, X_m$.

В указанных определениях предполагалось, что последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_m$ имеет не менее двух членов ($m \geqslant 1$). По определению полагают, что *система, состоящая из одной точки, линейно зависима и что линейная зависимость точки* X *от системы* X_1 означает, что $X = X_0$.

Из теорем п. 4.2 о линейной зависимости векторов непосредственно получаем, что

а) последовательность точек $X_0, X_1, \ldots, X_m$ $(m \geqslant 1)$ *тогда и только тогда линейно зависима, когда хотя бы один из ее членов линейно зависит от остальных;*

б) если точки X *линейно зависят от точек* $X_0, \ldots, X_m$, *а каждая из точек* X_i *линейно зависит от точек* $Y_1, \ldots, Y_n$, *то точка* X *линейно зависит от точек* $Y_1, \ldots, Y_n$;

в) если точка X *линейно зависит от точек* $X_1, \ldots, X_m$, *то* X *линейно зависит и от точек* $X_0, X_1, \ldots, X_m$, *где* X_0 — *любая точка пространства.*

Из свойства в) следует, что если система точек $X_0, X_1, \ldots, X_m$ линейно независима, то и каждая ее подсистема, содержащая

более одной точки, также линейно независимо. Это позволяет ввести следующее определение: произвольная (конечная или бесконечная) совокупность точек $\mathfrak{M}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ называется *линейно независимой*, если каждая ее конечная подсовокупность, содержащая более одной точки, линейно независима.

Аналогично говорят, что точка $X \in \mathfrak{A}$ *линейно зависит* от совокупности точек $\mathfrak{M}$, если X линейно зависит от какой-то конечной подсовокупности точек из $\mathfrak{M}$.

Линейной оболочкой произвольной непустой совокупности $\mathfrak{M}$ точек аффинного пространства $\mathfrak{A}$ называется множество всех точек $X \in \mathfrak{A}$, линейно зависящих от совокупности $\mathfrak{M}$. Совокупность $\mathfrak{M}$ называется *линейно замкнутой*, если $\mathfrak{M}$ совпадает со своим линейным замыканием.

Линейно замкнутые совокупности точек аффинного пространства называются его *плоскостями* или *линейными многообразиями*. Иными словами, некоторая совокупность $\mathfrak{M}$ точек аффинного пространства $\mathfrak{A}$ называется плоскостью в $\mathfrak{A}$, если для любых $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{M}$ совокупность содержит и любую линейно зависящую от $X_1, \ldots, X_m$ точку пространства $\mathfrak{A}$.

Отсюда следует непосредственно, что плоскостями заведомо являются каждая точка и само пространство $\mathfrak{A}$.

Плоскости $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ называются *параллельными*, если одна из них содержится в другой. Если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, то говорят также, что $\mathfrak{M}$ *лежит* на $\mathfrak{N}$ (или $\mathfrak{N}$ *проходит через* $\mathfrak{M}$).

Между плоскостями аффинного пространства $\mathfrak{A}$ и линейными подпространствами векторного пространства $L(\mathfrak{A})$ существует весьма простая связь, которая всюду используется и для определения понятия плоскости.

Теорема 1. *Если для какой-то совокупности $\mathfrak{M}$ точек аффинного пространства $\mathfrak{A}$ и некоторой точки $P \in \mathfrak{M}$ множество $L(\mathfrak{M})$ векторов вида $\overrightarrow{PX}$ $(X \in \mathfrak{M})$ является линейным подпространством векторного пространства $L(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{M}$ — плоскость в $\mathfrak{A}$. Для любой непустой плоскости $\mathfrak{M}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ и любой точки $P \in \mathfrak{M}$ совокупность $L(\mathfrak{M})$ всех векторов вида $\overrightarrow{PX}$ $(X \in \mathfrak{M})$ является линейным подпространством в $L(\mathfrak{A})$, не зависящим от выбора точки $P \in \mathfrak{M}$.*

Действительно, пусть $P \in \mathfrak{M}$ и $L(\mathfrak{M})$ — подпространство в $L(\mathfrak{A})$. Если $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{M}$ и точка $X \in \mathfrak{A}$ линейно зависит от $X_1, \ldots, X_m$, то для подходящих $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$

$$\overrightarrow{PX} = \lambda_1 \overrightarrow{PX_1} + \ldots + \lambda_m \overrightarrow{PX_m} \in L(\mathfrak{M}),$$

т. е. для подходящей точки $Y \in \mathfrak{M}$ имеем $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PY}$, откуда $X = Y \in \mathfrak{M}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{M}$ — плоскость в $\mathfrak{A}$ и P, $X, Y \in \mathfrak{M}$, $\lambda, \mu \in K$. Полагая

$$Q = P + (\lambda \overrightarrow{PX} + \mu \overrightarrow{PY}),$$

видим, что

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PX} + \mu \overrightarrow{PY},$$

т. е. точка Q линейно зависит от P, X, Y и потому $Q \in \mathfrak{M}$, $\overrightarrow{PQ} \in L(\mathfrak{M})$; т. е. $L(\mathfrak{M})$ — линейное подпространство в $L(\mathfrak{A})$. Для любых P, P_1, $X \in \mathfrak{M}$ имеем $\overrightarrow{P_1X} = \overrightarrow{PX} - \overrightarrow{PP_1}$, и, следовательно, совокупность векторов вида $\overrightarrow{P_1X}$ $(X \in \mathfrak{M})$ совпадает с совокупностью векторов вида $\overrightarrow{PX}$ $(X \in \mathfrak{M})$.

Отметим два важных следствия, вытекающих из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть O — фиксированная точка аффинного пространства $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$ — какая-нибудь плоскость, проходящая через O, и P — произвольная точка $\mathfrak{A}$. Тогда совокупность $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} + \overrightarrow{OP}$ всех образов точек плоскости $\mathfrak{M}$ является плоскостью в $\mathfrak{A}$, проходящей через P. Обратно, если $\mathfrak{N}$ — плоскость, проходящая через P, но $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \overrightarrow{PO}$ — плоскость, проходящая через O.*

В самом деле, из $O \in \mathfrak{M}$ следует $P = O + \overrightarrow{OP} \in \mathfrak{N}$ и для каждой точки $X \in \mathfrak{N}$ существует точка $Y \in \mathfrak{M}$, для которой $X = Y + \overrightarrow{OP}$. Отсюда $\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OY}$, и потому $L(\mathfrak{N}) = L(\mathfrak{M}) + \overrightarrow{OP}$).

Следствие 2. *Для каждой фиксированной точки O аффинного пространства $\mathfrak{A}$ соответствие $X \to \overrightarrow{OX}$ $(X \in \mathfrak{A})$ определяет взаимно однозначное соответствие между линейными подпространствами векторного пространства $L(\mathfrak{A})$ и плоскостями пространства $\mathfrak{A}$, проходящими через O.*

Доказательство очевидно.

В п. 29.1 было указано, что если каждый вектор v векторного пространства V назвать точкой и положить $v + a = v - a$, то получится аффинное пространство $A(V)$ над V. Какие совокупности векторов V будут плоскостями в $A(V)$?

Выделяя в $A(V)$ в качестве фиксированной точки O нулевой вектор, видим, что отображение $X \to \overrightarrow{OX}$, о котором идет речь в следствии 2, оказывается в тождественное отображение $v \to v$. Поэтому плоскостями пространства $A(V)$, проходящими через O, будут все линейные подпространства пространства V и только они. Согласно следствию 1 плоскостями, проходящими через произвольную точку $p \in V$, будут совокупности векторов вида $p + \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — какое-нибудь линейное подпространство пространства V.

Базисом произвольной плоскости $\mathfrak{M}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ называется линейно независимое множество точек, линейное замыкание которого совпадает с $\mathfrak{M}$. Ясно, что совокупность точек A_i

$(i \subset I)$ плоскости $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда является базисом плоскости $\mathfrak{M}$, когда совокупность векторов $\overrightarrow{A_0A_i}$ $(i \subset I)$ для произвольной фиксированной точки A_0 $(\alpha \subset I)$ является базисом векторного пространства $L(\mathfrak{M})$. В силу теоремы о базисах векторных пространств п. 4.2 получаем:

а) каждая плоскость аффинного пространства обладает базисом;

б) если плоскость $\mathfrak{M}$ содержится в плоскости $\mathfrak{N}$, то каждый базис плоскости $\mathfrak{M}$ является частью подходящего базиса $\mathfrak{N}$;

в) все базисы любой фиксированной плоскости $\mathfrak{M}$ имеют одну и ту же мощность, равную разм. $L(\mathfrak{M})+1$.

Размерностью плоскости $\mathfrak{M}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ называется размерность отвечающего ей векторного пространства $L(\mathfrak{M})$. Из свойства в) следует, что размерность плоскости равна мощности любого ее базиса, уменьшенной на 1. Пустое множество векторов аффинного пространства $\mathfrak{A}$ иногда называется *пустой плоскостью* $\mathfrak{A}$, имеющей пустой базис. Размерность пустой плоскости считают, по определению, равной -1.

0-мерные плоскости — это точки пространства $\mathfrak{A}$. 1-мерные плоскости называются *прямыми* (прямыми линиями) пространства $\mathfrak{A}$. Любые две различные точки прямой образуют ее базис, и через любые две различные точки пространства $\mathfrak{A}$ проходит одна и только одна прямая. Вообще, любые $k+1$ линейно независимых точек плоскости размерности k образуют базис этой плоскости, и потому через любые $k+1$ линейно независимых точек (k конечно) аффинного пространства $\mathfrak{A}$ проходит одна и только одна k-мерная плоскость этого пространства.

Для любых двух плоскостей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ условимся обозначать через $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ линейное замыкание множества $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$. Плоскость $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ может быть также определена как пересечение всех плоскостей пространства $\mathfrak{A}$, содержащих в себе плоскости $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Операция $\vee$, рассматриваемая в качестве бинарной операции, определенной на совокупности всех плоскостей аффинного пространства, является коммутативной, ассоциативной, идемпотентной (т. е. $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$), и для любых плоскостей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \vee \mathfrak{N} = \mathfrak{N}.$$

Например, если $X_1, \ldots, X_m$ — конечная совокупность точек пространства $\mathfrak{A}$, то

$$\mathfrak{M} = X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_m$$

является линейным замыканием указанной совокупности, т. е. наименьшей плоскостью, проходящей через точки $X_1, \ldots, X_m$.

Размерность $\mathfrak{M}$ равна максимальному числу линейно независимых точек в совокупности $X_1, \ldots, X_m$, уменьшенному на 1. В частности,

$$\text{разм.}(X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_m) \leqslant m-1.$$

Легко убедиться, что справедлива

Теорема 2. *Для любых плоскостей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$*

$$\text{разм.}(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) \leqslant \text{разм.}\,\mathfrak{M} + \text{разм.}\,\mathfrak{N} + 1. \tag{1}$$

Если плоскости $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ имеют общую точку, то

$$\text{разм.}(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) + \text{разм.}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) = \text{разм.}\,\mathfrak{M} + \text{разм.}\,\mathfrak{N}. \tag{2}$$

Докажем сначала равенство (2). Пусть $O \subset \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$. Тогда при отображении $X \to \overrightarrow{OX}$ пространства $\mathfrak{A}$ на векторное пространство $L(\mathfrak{A})$ плоскости из $\mathfrak{A}$, проходящие через точку O, будут переходить в линейные подпространства векторного пространства $L(\mathfrak{A})$ с сохранением размерностей и отношения включения. Поэтому формула (2) является непосредственным следствием аналогичной формулы для линейных подпространств векторных пространств (см. п. 6.1, теорема 1).

Оценка (1) вытекает из формулы (2). Действительно, если плоскости $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ имеют общую точку, то согласно (2)

$$\text{разм.}(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) \leqslant \text{разм.}\,\mathfrak{M} + \text{разм.}\,\mathfrak{N}. \tag{3}$$

Пусть $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{D}$. Присоединяя точку $O \subset \mathfrak{M}$ к базису плоскости $\mathfrak{D}$, получим базис $O \vee \mathfrak{D}$, т. е.

$$\text{разм.}(O \vee \mathfrak{D}) = \text{разм.}\,\mathfrak{D} + 1. \tag{4}$$

Так как плоскости $\mathfrak{M}$ и $O \vee \mathfrak{N}$ имеют общую точку O, то на основании (3)

$$\text{разм.}(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) = \text{разм.}(\mathfrak{M} \vee O \vee \mathfrak{N}) \leqslant \text{разм.}\,\mathfrak{M} + \text{разм.}(O \vee \mathfrak{N}),$$

откуда в силу (4) получаем (1).

Итак, если плоскости $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ не имеют общих точек, то размерность $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ лежит в следующих границах:

$$\max(\text{разм.}\,\mathfrak{M}, \text{разм.}\,\mathfrak{N}) < \text{разм.}(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) \leqslant \text{разм.}\,\mathfrak{M} + \text{разм.}\,\mathfrak{N} + 1.$$

На примерах легко убедиться, что размерность $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ на самом деле может принимать любое значение, лежащее в этих границах.

Каждой плоскости $\mathfrak{M}$ произвольного аффинного пространства $\mathfrak{A}$ отвечает линейное подпространство $L(\mathfrak{M})$ векторного пространства $L(\mathfrak{A})$. Согласно § 6 (см. задачу 3 на стр. 109) в $L(\mathfrak{A})$ найдется *дополнительное подпространство* $\mathfrak{F}$, удовлетворяющее

условиям

$$L(\mathfrak{M}) + \mathfrak{N}_1 = L(\mathfrak{N}), \quad L(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{N}_1 = 0,$$

где 0 — нулевой вектор пространства $L(\mathfrak{M})$. Размерность $\mathfrak{N}_1$, одинаковая у всех дополнительных подпространств, называется *кораз-мерностью* $L(\mathfrak{M})$ в $L(\mathfrak{N})$. По определению *коразмерностью плоскости* $\mathfrak{M}$ *в пространстве* $\mathfrak{N}$ называется коразмерность векторного подпространства $L(\mathfrak{M})$ в векторном подпространстве $L(\mathfrak{N})$.

Этому определению можно придать и другой вид. Для каждой плоскости $\mathfrak{M}$ назовем некоторую плоскость $\mathfrak{N}$ *дополнительной к* $\mathfrak{M}$ *в пространстве* $\mathfrak{A}$, *если* $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N} = \mathfrak{A}$ и пересечение $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ состоит лишь из одной точки. Ясно, что в этих условиях подпространство $L(\mathfrak{N})$ будет дополнительным к $L(\mathfrak{M})$ в $L(\mathfrak{A})$, и потому *коразмерность плоскости* $\mathfrak{M}$ *в пространстве* $\mathfrak{A}$ *равна размерности любой дополнительной плоскости.*

Так как взятые дополнительные плоскости имеют общую точку, то, применяя к ним формулу (2), получим равенство

$$\text{разм. } \mathfrak{M} + \text{коразм. } \mathfrak{M} = \text{разм. } \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Если пространство $\mathfrak{A}$ имеет конечную размерность, то из (5) получаем

$$\text{коразм. } \mathfrak{M} = \text{разм. } \mathfrak{A} - \text{разм. } \mathfrak{M}. \tag{6}$$

Из формул (2) и (6) для конечномерного пространства $\mathfrak{A}$ непосредственно получается

Теорема 3. *Для любых пересекающихся плоскостей* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *аффинного пространства* $\mathfrak{A}$

$$\text{коразм. } (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) = \text{коразм. } (\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) + \text{коразм. } \mathfrak{M} + \text{коразм. } \mathfrak{N}. \tag{7}$$

Однако нетрудно убедиться, что формула (7) справедлива и для бесконечномерных пространств.

Следствие. *Если в произвольном аффинном пространстве* $\mathfrak{A}$ *пересечение плоскостей* $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_s$ *не пусто, то*

$$\text{коразм. } (\mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s) \leqslant \text{коразм. } \mathfrak{N}_1 + \ldots + \text{коразм. } \mathfrak{N}_s. \tag{8}$$

При $s = 2$ формула (8) вытекает из (7) непосредственно, в общий случай получается повторным применением указанного частного случая.

Если плоскость $\mathfrak{M}$ лежит в плоскости $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{A}$, то, рассматривая $\mathfrak{N}$ как аффинное пространство над $L(\mathfrak{N})$ и обозначая через $\text{коразм.}_{\mathfrak{N}} \mathfrak{M}$ коразмерность плоскости $\mathfrak{M}$ в пространстве $\mathfrak{N}$, получаем формулу

$$\text{коразм.}_{\mathfrak{N}} \mathfrak{M} = \text{коразм. } \mathfrak{N} = \text{коразм. } \mathfrak{M}, \tag{9}$$

легко устанавливаемую путем перехода к подпространствам векторного пространства $L(\mathfrak{A})$. Из формулы (9), в частности,

следует, что если коразмерность плоскости $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ конечна и $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}$, то

$$\text{коразм. } \mathfrak{N} < \text{коразм. } \mathfrak{M} - 1. \tag{10}$$

Плоскости, коразмерность которых равна 1, называются *гиперплоскостями*. Иными словами, в аффинном пространстве конечной размерности n гиперплоскостями называются плоскости размерности $n-1$. Поэтому в таком пространстве через каждые n линейно независимых точек проходит одна и только одна гиперплоскость.

Рассмотрим теперь какую-нибудь конечную совокупность гиперплоскостей $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ в произвольном аффинном пространстве $\mathfrak{N}$. Согласно формуле (8) имеем

$$0 \leqslant \text{коразм. } (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s) \leqslant s. \tag{11}$$

Говорят, что гиперплоскости $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ (для s, не превосходящего размерности $\mathfrak{N}$) находятся *в общем положении*, если имеет место точное равенство

$$\text{коразм. } (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s) = s. \tag{12}$$

Покажем, что из (12) для каждого $t \leqslant s$ следует, что

$$\text{коразм. } (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_t) = t.$$

В самом деле, если бы оказалось, что

$$\text{коразм. } (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_t) < t,$$

то в силу (8) и (11) мы имели бы

$$\text{коразм. } ((\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_t) \cap (\mathfrak{P}_{t+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s)) < t + (s-t) = s$$

в противоречие с (12).

Теорема 4. *Каждая плоскость* $\mathfrak{M}$ *конечной коразмерности является множеством пересечения подходящих ее гиперплоскостей.*

Выбираем какой-нибудь базис $\mathfrak{M}$ и дополняем его некоторыми точками $A_1, \ldots, A_s$ до базиса всего пространства $\mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{P}_i$ есть линейное замыкание множества $\mathfrak{M} \cup \{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_s\}$. Так как $\mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}_i \vee A_i = \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{P}_i$ — гиперплоскость ($i = 1, \ldots, s$) и

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s.$$

Из $A_i \notin \mathfrak{P}_i$ получаем

$$\mathfrak{N} \supset \mathfrak{P}_1 \supset \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s,$$

откуда согласно (10)

$$\text{коразм. } (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s) \geqslant s.$$

Сравнивая это неравенство с (11), получаем

$$\text{коразм.}\,(\mathfrak{P}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathfrak{P}_s) = s.$$

Поскольку коразмерности плоскостей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{P}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathfrak{P}_s$ совпадают и первая содержится во второй, то в силу (11) обе плоскости совпадают, что и требовалось.

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу принятого выше определения понятия плоскости. Это определение может быть переформулировано следующим образом: совокупность $\mathfrak{M}$ точек аффинного пространства $\mathfrak{A}$ называется плоскостью, если для каждого натурального s и каждой последовательности $A_1, \ldots, A_s$ точек из $\mathfrak{M}$ любая точка пространства $\mathfrak{A}$, линейно зависящая от точек упомянутой последовательности, принадлежит $\mathfrak{M}$. На самом деле, в этом определении достаточно принять $s=3$, а для ряда типов основных полей K достаточно принять и $s=2$. Именно справедлива

Теорема 5. *Если совокупность $\mathfrak{M}$ точек аффинного пространства $\mathfrak{A}$ вместе с любыми своими тремя точками содержит и все линейно зависящие от них точки $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{M}$ — плоскость. Если $\mathfrak{A}$ — аффинное пространство над полем K, характеристика которого отлична от 2, и некоторая совокупность $\mathfrak{M}$ вместе с любыми своими двумя точками содержит и все линейно зависящие от них точки $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{M}$ — плоскость в $\mathfrak{A}$.*

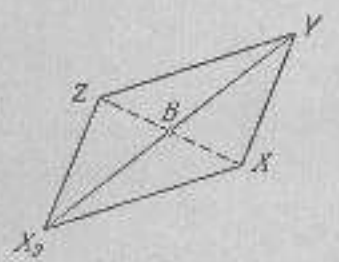


Рис. 5.

Докажем второе утверждение. Пусть множество $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям этого утверждения и $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — последовательность каких-то точек $\mathfrak{M}$. Надо доказать, что для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ соотношение

$$\overrightarrow{X_1X} = \lambda_1\overrightarrow{X_1X_1} + \ldots + \lambda_s\overrightarrow{X_1X_s}$$

влечет $X \subseteq \mathfrak{M}$. Для $s=1$ это истинно в силу условий теоремы. Далее, применяя индукцию, полагаем, что сформулированная импликация истинна для какого-то $s \geqslant 1$. Пусть

$$\overrightarrow{X_1Y} = \lambda_1\overrightarrow{X_1X_1} + \ldots + \lambda_{s+1}\overrightarrow{X_1X_{s+1}}.$$

Рассмотрим точки X, Z, удовлетворяющие соотношениям

$$\overrightarrow{X_1X} = \lambda_1\overrightarrow{X_1X_1} + \ldots + \lambda_s\overrightarrow{X_1X_s}, \quad \overrightarrow{X_1Z} = \lambda_{s+1}\overrightarrow{X_1X_{s+1}}.$$

Согласно индукции из этих соотношений следует, что $X \subseteq \mathfrak{M}$, $Z \subseteq \mathfrak{M}$. Теперь, полагая (рис. 5)

$$\overrightarrow{X_1B} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{X_1X} + \overrightarrow{X_1Z}),$$

видим, что точка B линейно зависит от X и Z, а точка Y линейно зависит от точек X_1 и B. В силу условий теоремы отсюда последовательно находим $B \subseteq \mathfrak{M}$, $Y \subseteq \mathfrak{M}$, что и требовалось. Первое утверждение теоремы 5 доказывается аналогично, но без использования точки B, и потому для его истинности характеристика поля K безразлична. Нетрудно видеть, что второе утверждение для полей характеристики 2 неверно.

В п. 29.1 были введены два основных понятия: аффинное пространство над векторным пространством и аффинное пространство над полем. До сих пор в этом пункте мы рассматривали аффинные пространства над некоторым пространством. Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — аффинное пространство над полем K и $S(X, Y, Z)$, $P_\lambda(X, Y)$ — основные операции в $\mathfrak{A}$. Мы уже видели в п. 29.1, что сдвиги $\mathfrak{A}$ — это автоморфизмы частного вида пространства $\mathfrak{A}$ над K. Покажем теперь, что *точки X пространства $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда линейно зависят от каких-то точек $X_0, X_1, \ldots, X_m$ из $\mathfrak{A}$, когда X выражается в виде полинома от $X_0, \ldots, X_m$ с помощью операций S, P_λ.*

В самом деле, если для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$

$$\overrightarrow{X_0X} = \lambda_1\overrightarrow{X_0X_1} + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{X_0X_m},$$

то согласно п. 7.1

$$X = (\ldots(X_0 \cdot \lambda_1 X_0 X_1) \ldots) \cdot \lambda_m \overrightarrow{X_0X_m}. \tag{13}$$

Но для любых $B, C, Z \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in K$

$$Z \cdot \lambda BC = S(B, P_\lambda(B, C), Z).$$

Преобразуя с помощью этой формулы правую часть равенства (13), получим требуемое выражение X в виде полинома от точек $X_0, X_1, \ldots, X_m$. Обратно, из

$$X = S(Y_1, Y_2, Y_3), \quad Z = P_\lambda(Y_1, Y_2)$$

следует, что

$$\overrightarrow{Y_3X} = \overrightarrow{Y_1Y_2}, \quad \overrightarrow{Y_3Z} = \lambda\overrightarrow{Y_1Y_2},$$

т. е. что X, Z линейно зависят от Y_1, Y_2, Y_3, и потому если X выражается в виде полинома от $X_0, X_1, \ldots, X_m$, то X линейно зависит от $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Согласно определению совокупность $\mathfrak{M}$ точек пространства $\mathfrak{A}$ называется плоскостью, если вместе с произвольными своими точками $X_1, \ldots, X_m$ совокупность $\mathfrak{M}$ содержит и все линейно зависимые от них точки $\mathfrak{A}$, т. е. содержит значения всевозможных полиномов от $X_1, \ldots, X_m$. Иначе говоря, плоскости в пространстве $\mathfrak{A}$ — это просто подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, а линейные замыкания суть подалгебры, порождаемые элементами соответствующих множеств.

29.3. Параллельные плоскости. Мы уже видели, что для каждой плоскости $\mathfrak{M}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ совокупность $L(\mathfrak{M})$ всех векторов вида $\overrightarrow{XY}$ $(X, Y \in \mathfrak{M})$ является подпространством векторного пространства $L(\mathfrak{A})$. Подпространство $L(\mathfrak{M})$ часто называют *касательным подпространством* к плоскости $\mathfrak{M}$.

Определение. *Плоскости $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{A}$ называются параллельными (символически $\mathfrak{M} \parallel \mathfrak{N}$), если их касательные векторные пространства $L(\mathfrak{M})$ и $L(\mathfrak{N})$ инцидентны, т. е. $L(\mathfrak{M}) \subseteq L(\mathfrak{N})$ или $L(\mathfrak{N}) \subseteq L(\mathfrak{M})$.*

Из этого определения сразу вытекают несколько важных следствий.

Следствие 1. *Пересекающиеся плоскости $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ тогда и только тогда параллельны, когда одна из них содержится в другой.*

Действительно, если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ имеют общую точку O, то $L(\mathfrak{M}_i)$ $(i = 1, 2)$ есть совокупность векторов вида $\overrightarrow{OX}$ $(X \in \mathfrak{M}_i)$, и потому инцидентность касательных пространств $L(\mathfrak{M}_1)$ и $L(\mathfrak{M}_2)$ равносильна инцидентности плоскостей $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$.

Следствие 2. *Если плоскости $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ имеют одну и ту же конечную размерность (или одну и ту же конечную коразмерность) и $\mathfrak{M}_1 \parallel \mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_2 \parallel \mathfrak{M}_3$, то $\mathfrak{M}_1 \parallel \mathfrak{M}_2$.*

По условию размерности (коразмерности) касательных пространств $L(\mathfrak{M}_i)$ конечны и одинаковы. Поэтому инцидентность $L(\mathfrak{M}_1)$, $L(\mathfrak{M}_3)$ эквивалентна их совпадению, и утверждение следствия сводится к тривиальному замечанию, что из $L(\mathfrak{M}_1) = L(\mathfrak{M}_3)$, $L(\mathfrak{M}_2) = L(\mathfrak{M}_3)$ следует $L(\mathfrak{M}_1) = L(\mathfrak{M}_2)$.

Следствие 2 показывает, что для каждого конечного k все k-мерные плоскости произвольного аффинного пространства $\mathfrak{A}$ распадаются на пучки параллельных между собою плоскостей. Эти пучки иногда называются *k-мерными направлениями в $\mathfrak{A}$*.

Следствие 3. *В аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ для любой плоскости $\mathfrak{M}$ и любого сдвига $u \in L(\mathfrak{A})$*

$$\mathfrak{M} \parallel \mathfrak{M} \cdot u.$$

Действительно, касательное пространство $L(\mathfrak{M} \cdot u)$ состоит из векторов вида $\overrightarrow{XuYu}$ $(X, Y \in \mathfrak{M})$. Но

$$\overrightarrow{XuYu} = \overrightarrow{XuX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YYu} = -u + XY - u = \overrightarrow{XY},$$

и потому $L(\mathfrak{M} \cdot u) = L(\mathfrak{M})$.

Следствие 4. *В аффинном пространстве через каждую точку B проходит одна и только одна гиперплоскость $\mathfrak{N}$, параллельная произвольной наперед заданной гиперплоскости $\mathfrak{M}$.*

Если $B \in \mathfrak{M}$, то из следствия 1 видно, что единственной гиперплоскостью, проходящей через B и параллельной $\mathfrak{M}$, будет сама гиперплоскость $\mathfrak{M}$. Поэтому можно предполагать, что $B \notin \mathfrak{M}$. Согласно следствию 3 гиперплоскость $\mathfrak{M} \cdot \overrightarrow{OB}$ $(O \in \mathfrak{M})$ проходит через B и параллельна $\mathfrak{M}$. Если еще какая-нибудь гиперплоскость $\mathfrak{N}$ проходит через B и $\mathfrak{N} \parallel \mathfrak{M}$, то согласно следствию 2 $\mathfrak{N} \parallel \mathfrak{M} \cdot \overrightarrow{OB}$, и в силу следствия 1 $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M} \cdot \overrightarrow{OB}$ инцидентны. Но инцидентные гиперплоскости совпадают, что и требовалось.

Теорема 1. *Если в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ гиперплоскость $\mathfrak{P}$ и какая-нибудь плоскость $\mathfrak{N}$ не пересекаются, то $\mathfrak{P}$ параллельна $\mathfrak{N}$.*

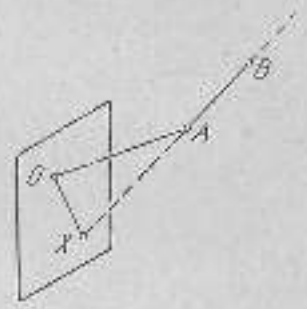


Рис. 6.

Мы хотим показать, что $L(\mathfrak{N}) \subset L(\mathfrak{P})$. Пусть, напротив, для некоторых A, $B \in \mathfrak{N}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ не принадлежит $L(\mathfrak{P})$. Выбираем произвольную точку $O \in \mathfrak{P}$ (рис. 6) и рассматриваем вектор OA. Так как $\mathfrak{P}$ — гиперплоскость, то

$$L(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{P}) + L(A \vee B)$$

и потому для подходящих $X \in \mathfrak{P}$, $U \in A \vee B$ имеем $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{AU}$, откуда $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OX}$ и, следовательно, $U = X$ в противоречии с условием $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N} = \emptyset$.

Теорема 2. *Для того чтобы непересекающиеся плоскости $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы одна из них была гиперплоскостью в пространстве $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$.*

Достаточность непосредственно содержится в теореме 1. Докажем необходимость. Пусть $L(\mathfrak{N}) \subset L(\mathfrak{M})$, $A \in \mathfrak{N}$. Достаточно показать, что $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N} = \mathfrak{M} \vee A$. Плоскость $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ состоит из тех точек X, которые зависят линейно от каких-то точек $A, X_1, \ldots, X_s$ из $\mathfrak{N}$ и точек $Y_1, \ldots, Y_r$ из $\mathfrak{M}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AY_1} + \ldots + \nu_p \overrightarrow{AY_r} + \mu_1 \overrightarrow{AX_1} + \ldots + \mu_s \overrightarrow{AX_s} =$$
$$= \overrightarrow{AY} + (\nu_1 + \ldots + \nu_p) \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OZ} \qquad (Y \in \mathfrak{M},\ O, Z \in \mathfrak{M}).$$

По предположению $\overrightarrow{AY} \in L(\mathfrak{N}) \subseteq L(\mathfrak{M})$, и, следовательно, $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{OU}$ $(U \in \mathfrak{M})$. Отсюда вытекает, что $\overrightarrow{AX} \in L(\mathfrak{M} \vee A)$, и потому $X \in \mathfrak{M} \vee A$.

Следствие 1. *Если плоскости $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ конечномерные и не пересекаются, то они параллельны тогда и только тогда, когда*

$$\text{разм.}\,(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) = \max(\text{разм.}\,\mathfrak{M}, \text{разм.}\,\mathfrak{N}) + 1. \qquad (1)$$

Доказательство очевидно. Из этого следствия, в частности, заключаем, что две непересекающиеся прямые параллельны тогда

и только тогда, когда один лежит в одной двумерной плоскости. Аналогично пересекающиеся прямая и двумерная плоскость параллельны тогда и только тогда, когда они лежат в трехмерной плоскости, и т. д.

Следствие 2. *Для каждого конечного $k \geqslant 0$ в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ через каждую точку B проходит одна и только одна k-мерная плоскость $\mathfrak{P}$, параллельная наперед заданной k-мерной плоскости $\mathfrak{M}$.*

Можно ограничиться случаем, когда $B \notin \mathfrak{M}$. В силу формулы (1) плоскость $\mathfrak{P}$ должна быть совершенностью о пространстве $\mathfrak{M} \vee B$, и потому дело сводится к следствию 4 из определения параллельных плоскостей).

20.4. **Линейные функционалы.** Функция $f: \mathfrak{A} \to K$, определенная на множестве всех точек аффинного пространства $\mathfrak{A}$ со значениями в основном поле K, называется *функционалом* на $\mathfrak{A}$.

Понятие функционала на $\mathfrak{A}$ является частным случаем общего понятия функции, определенной на произвольном множестве, значения которой принадлежат заданному полю K. Для таких функций в п. 4 определены понятия суммы и произведения числа на функцию, причем оказывается, что относительно этих операций совокупность всех функций образует линейное пространство, размерность которого совпадает с мощностью множества, служащего областью определения.

Функционал f, определенный на аффинном пространстве $\mathfrak{A}$, называется *линейным* (или *аффинным*) на $\mathfrak{A}$, если для любых O, P, Q, $R \in \mathfrak{A}$ и $\lambda, \mu \in K$, удовлетворяющих соотношению

$$\overrightarrow{OR} = \lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ}, \tag{1}$$

имеет место равенство

$$f(R) = \lambda (f(P) - f(O)) + \mu (f(Q) - f(O)) + f(O). \tag{2}$$

Покажем, что для любого линейного функционала f для произвольных $X_1, X_2, \ldots, X_s, X \in \mathfrak{A}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ всегда выполнена импликация

$$\overrightarrow{X_1 X} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{X_1 X_i} \Rightarrow f(X) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i (f(X_i) - f(X_1)) + f(X_1). \tag{3}$$

Для $s = 2$ импликация (3) совпадает с импликацией (1) $\Rightarrow$ (2), определяющей линейность f. Далее по индукции получается, что импликация (3) верна для какого-то фиксированного $s \geqslant 2$. Пусть $\overrightarrow{X_1 Y} = \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i \overrightarrow{X_1 X_i}$. Рассматривая точку X, удовлетворяющую условию $\overrightarrow{X_1 X} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{X_1 X_i}$, получим (3). Далее из соотношения $\overrightarrow{X_1 Y} = \lambda_1 \overrightarrow{X_1 X} + \lambda_{s+1} \overrightarrow{X_1 X_{s+1}}$ и импликации (1) $\Rightarrow$ (2) получаем

$$f(Y) - f(X_1) = f(X) - f(X_1) + \lambda_{s+1} (f(X_{s+1}) - f(X_1)) = f(X_1) = \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i (f(X_i) - f(X_1)) + f(X_1),$$

что и требовалось.

Ясно, что все постоянные функционалы являются линейными. Также очевидно, что сумма линейных функционалов и произведение числа на линейный функционал являются снова линейными функционалами. Поэтому совокупность всех линейных функционалов на аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ есть линейное пространство. Это пространство обозначается через $\mathfrak{A}_1$ и называется *сопряженным* к $\mathfrak{A}$. Множество всех постоянных функционалов является одномерным линейным подпространством пространства $\mathfrak{A}_1$.

Лемма. *Если f — линейный функционал на аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ и о некоторых точках $A, B \in \mathfrak{A}$ имеем $f(A) \neq f(B)$, то для любого $\alpha \in K$ на прямой $A \vee B$ найдется точка X, в которой $f(X) = \alpha$.*

Для произвольной точки $X \in A \vee B$ имеем

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \qquad (\lambda \in K), \tag{4}$$

откуда согласно (2)

$$f(X) = \lambda (f(B) - f(A)) + f(A).$$

Поэтому, беря для λ значение

$$\lambda = (\alpha - f(A)) (f(B) - f(A))^{-1},$$

получим по (4) искомую точку $X \in A \vee B$, для которой $f(X) = \alpha$.

Теорема 1. *Для каждого непостоянного линейного функционала f на аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ совокупность всех точек $X \in \mathfrak{A}$, в которых f имеет фиксированное значение $\alpha \in K$, является гиперплоскостью в $\mathfrak{A}$. Обратно, для любой гиперплоскости $\mathfrak{M}$ и произвольного $\alpha \in K$ существует только один линейный функционал f, множество которого равно α на $\mathfrak{M}$ и отлично от α вне $\mathfrak{M}$.*

Докажем первое утверждение. Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность тех точек $X \in \mathfrak{A}$, для которых $f(X) = \alpha$. Так как функционал f не постоянен на $\mathfrak{A}$, то для подходящих $A, B \in \mathfrak{A}$ будет $f(A) \neq f(B)$. Согласно лемме отсюда следует, что на прямой $A \vee B$ найдется точка X, принадлежащая $\mathfrak{M}$, и потому совокупность $\mathfrak{M}$ не пустая. Если $X_0, X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{M}$ и X — линейно зависящая от них точка, то

$$f(X_0) = f(X_1) = \ldots = f(X_s) = \alpha \tag{5}$$

и для подходящих $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$

$$\overrightarrow{X_1X} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{X_1X_1} + \ldots + \lambda_s \cdot \overrightarrow{X_1X_s}. \tag{6}$$

Из формул (5), (3), (5) находим $f(X) = \alpha$, т. е. $X \subset \mathfrak{M}$. Иначе говоря, совокупность $\mathfrak{M}$ есть плоскость в $\mathfrak{X}$. Остается проверить, что коразм. $\mathfrak{M} = 1$. Поскольку функционал f не постоянен, то найдется точка A, для которой $f(A) \neq \alpha$, и потому $A \notin \mathfrak{M}$. Выберем произвольную точку $X \subset \mathfrak{X}$ и покажем, что $X \in A \vee \mathfrak{M}$. Если $f(X) = \alpha$, то $X \in \mathfrak{M}$ и доказывать нечего. Поэтому пусть $f(X) \neq \alpha$ и пусть $M \in \mathfrak{M}$. Согласно лемме на прямой $A \vee M$ (рис. 7) найдется точка B, в которой $f(B) = f(X)$, и потому на прямой $B \vee X$ найдется точка $N \in \mathfrak{M}$. Мы видим, что X линейно зависит от B, N, а B линейно зависит от A, M. Поэтому X линейно зависит от A, M, N и $X \in \mathfrak{M} \vee A$.

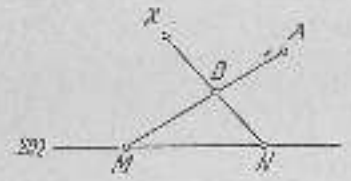


Рис. 7.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \vee A$, $M \subset \mathfrak{M}$. Тогда для произвольной точки $X \subset \mathfrak{N}$ найдется разложение вида

$$\overrightarrow{MX} = \lambda \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MU} \quad (\lambda \in K,\ U \in \mathfrak{M})$$

и только одно. Ввиду функционала $f_0(X) = \alpha$, видим, что он равен 0 на $\mathfrak{M}$ и отличен от 0 вне $\mathfrak{M}$, а функционал $f(X) - f_0(X)$ равен α на $\mathfrak{M}$ и отличен от α вне $\mathfrak{M}$. Поэтому о проверке нуждается только линейность функционала f_0. Пусть

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X_0X_{s+1}} &= \lambda_1 \cdot \overrightarrow{X_0X_1} + \ldots + \lambda_s \cdot \overrightarrow{X_1X_s}, \\ \overrightarrow{MX_i} &= \alpha_i \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MU_i} \qquad (U_i \subset \mathfrak{M};\quad i = 0, 1, \ldots, s) \end{aligned} \tag{7}$$

и, следовательно, $f_0(X_i) = \alpha_i$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$. Так как $\overrightarrow{X_iX_j} = \overrightarrow{MX_j} - \overrightarrow{MX_i}$, то из формул (7) получаем

$$\overrightarrow{MX_{s+1}} = \overrightarrow{MX_1} + \sum \lambda_i (\overrightarrow{MX_i} - \overrightarrow{MX_0}) = \left(\sum (\lambda_i \alpha_i - \lambda_i \alpha_0) - \alpha_0\right) \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MU},$$

откуда

$$f_0(X_{s+1}) = \sum \lambda_i (f(X_i) - f(X_0)) + f(X_0),$$

что и требовалось.

Совокупность тех точек $X \subset \mathfrak{X}$, в которых данный функционал f или система функционалов f_i обращается в нуль, называется *корневым многообразием* функционала (системы функционалов). Поэтому теорема 1 равносильна утверждению, что корневое многообразие непостоянного линейного функционала есть гиперплоскость и каждая гиперплоскость есть корневое многообразие подходящего линейного функционала. Если функционал постоянен, то корневое многообразие его, очевидно, либо пусто, либо совпадает с $\mathfrak{X}$ (нулевой функционал). Корневое многообразие системы функционалов есть пересечение корневых многообразий, принадлежащих данной системе функционалов. Поэтому корневое многообразие произвольной системы линейных функционалов является плоскостью (возможно, пустой или совпадающей со всем пространством $\mathfrak{X}$).

В п. 29.2 было показано, что каждая плоскость $\mathfrak{M}$, имеющая конечную коразмерность $s \geqslant 1$, может быть представлена в виде $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s$, где $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ — подходящие гиперплоскости. Обозначая через f_i линейный функционал, для которого $\mathfrak{P}_i$ является корневым многообразием, видим, что $\mathfrak{M}$ будет совокупностью тех $X \subset \mathfrak{X}$, для которых

$$f_1(X) = 0, \ldots, f_s(X) = 0. \tag{8}$$

Обратим вопрос, спросим себя, для каких линейных функционалов $f_1, \ldots, f_s$ соответствующее корневое многообразие (8) будет плоскостью коразмерности s?

Теорема 2. *Для того чтобы корневое многообразие системы линейных функционалов $f_1, \ldots, f_s$ было плоскостью коразмерности s, необходимо и достаточно, чтобы функционалы $f_1, \ldots, f_s$ были линейно независимы (в $\mathfrak{X}_*$) и имели хотя бы одну общую корневую точку.*

Необходимость. Обозначим через $\mathfrak{P}_i$ корневое многообразие функционала f_i. Если

$$f_s(X) = \alpha_1 f_1(X) + \ldots + \alpha_{s-1} f_{s-1}(X) \qquad (X \in \mathfrak{X}),$$

то $\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_{s-1} \subset \mathfrak{P}_s$. Поэтому коразм. $(\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s) =$ коразм. $(\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s) \geqslant s$, т. е., следовательно, условия теоремы необходимы.

Достаточность. Положим

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_{s-1} \cap \mathfrak{P}_s.$$

Согласно п. 29.2 коразм. $\mathfrak{M} \geqslant s$. Пусть коразм. $\mathfrak{M} < s$. Тогда в $\mathfrak{X}$ найдутся точки $A_1, \ldots, A_{s-1}$, для которых

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \vee A_1 \vee \ldots \vee A_{s-1} \tag{9}$$

Рассмотрим вещественные функции, определенные на множестве $\{A_1, \ldots, A_{s-1}\}$ со значениями в поле K. Эти функции образуют линейное пространство, размерность которого равна

если точки $A_1, \ldots, A_{s-1}$ различны, а меньше $s-1$, если хотя бы две из этих точек совпадают. Таким образом, пространство значений, определенных на $\{A_1, \ldots, A_{s-1}\}$, имеет размерность не больше $s-1$, и потому среди любых s функций, определенных на указанном множестве, хотя бы одна может быть выражена линейно через остальные. В частности, если мы будем рассматривать функционалы $f_1, \ldots, f_s$ лишь на множестве $\{A_1, \ldots, A_{s-1}\}$, то один из них заведомо можно будет выразить линейно через остальные. Пусть, например,

$$f_s(X) = \alpha_1 f_1(X) + \ldots + \alpha_{s-1} f_{s-1}(X). \qquad (10)$$

Это равенство истинно для всех точек $X = A_1, \ldots, A_{s-1}$. Пользуясь линейностью рассматриваемых функционалов, равенством их нулю на плоскости $\mathfrak{M}$ и соотношением (9), легко обнаружить, что равенство (10) истинно для всех точек $X \in \mathfrak{A}$, т. е. функционалы $f_1, \ldots, f_s$ линейно зависимы, и достаточность условий установлена. В самом деле, из (9) следует, что для каждой точки $X \in \mathfrak{A}$ найдутся такие $O, Y \in \mathfrak{M}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}$, что

$$\overrightarrow{OX} = \lambda_1 \overrightarrow{OA}_1 + \ldots + \lambda_{s-1} \overrightarrow{OA}_{s-1} + \overrightarrow{OY},$$

поэтому $f_i(O) = f_i(Y) = 0$, и в силу (3)

$$f_i(X) = \lambda_1 f_i(A_1) + \ldots + \lambda_{s-1} f_i(A_{s-1}) \qquad (i = 1, \ldots, s). \qquad (11)$$

Принимая во внимание, что равенство (10) истинно для $X = A_j$ ($j = 1, \ldots, s-1$), из (11) получаем

$$f_s(X) = \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j f_s(A_j) = \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k f_k(A_j) =$$
$$= \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j f_k(A_j) = \alpha_1 f_1(X) + \ldots + \alpha_{s-1} f_{s-1}(X),$$

что и требовалось.

Следствие 1. *Пусть плоскость $\mathfrak{M}$ в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ имеет конечную коразмерность s. Тогда совокупность $\mathfrak{M}^\perp$ всех линейных функционалов на $\mathfrak{A}$, равных 0 на $\mathfrak{M}$, является векторным пространством размерности s.*

Действительно, если $\mathfrak{M}^\perp$ содержит линейно независимые функционалы $f_1, \ldots, f_{s+1}$, то, обозначая через $\mathfrak{U}_i$ ядерную гиперплоскость функционала f_i, получим

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{U}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{U}_{s+1}$$

и потому

$$\text{коразм. } \mathfrak{M} \geqslant s+1.$$

Если же все линейные функционалы из $\mathfrak{M}^\perp$ выражаются линейно через $f_1, \ldots, f_{s-1}$, то

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{U}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{U}_{s-1}$$

и, следовательно, коразм. $\mathfrak{M} \leqslant s-1$.

Следствие 2. *Для любого аффинного пространства $\mathfrak{A}$ размерность сопряженного пространства $\mathfrak{A}_f$ на 1 больше размерности $\mathfrak{A}$.*

Пусть $\mathfrak{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — базис пространства $\mathfrak{A}$, а F — какая-нибудь функция, определенная на $\mathfrak{B}$ со значениями в K. Фиксируем какую-нибудь точку $O \in \mathfrak{B}$. Для любой точки $X \in \mathfrak{A}$ существует однозначно определенная система $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_s} \in K$, удовлетворяющая условию

$$\overrightarrow{OX} = \lambda_{i_1} \overrightarrow{OA}_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_s} \overrightarrow{OA}_{i_s}.$$

Для функции F определяем функционал

$$f(X) = \sum \lambda_{i_k} (F(A_{i_k}) - F(O)) + F(O).$$

Легко проверяется, что функционал f линейный на $\mathfrak{A}$ и что $F \to f$ есть изоморфизм векторного пространства функций на $\mathfrak{B}$ на векторное пространство $\mathfrak{A}_f$. Поэтому размерность $\mathfrak{A}_f$ равна мощности базиса $\mathfrak{A}$, т. е. равна размерности $\mathfrak{A}$, увеличенной на единицу.

Дополнения и примеры

1. Пусть $\mathfrak{A}$ — аффинное пространство над векторным пространством $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{B})$. Для каждой плоскости $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ обозначим $\mathfrak{M}^\perp$ совокупность линейных функционалов на $\mathfrak{A}$, обращающихся в 0 на $\mathfrak{M}$. Обратно, для каждой совокупности Π линейных функционалов обозначим через $\Pi^\perp$ общее подпространство всех $\mathfrak{M}$, для которых $\mathfrak{M}^\perp = \Pi$. Тогда для пространства $\mathfrak{A}$ произвольной размерности справедлива следующая *теорема двойственности*: для каждой вполне плоскости $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$ имеем $(\mathfrak{M}^\perp)^\perp = \mathfrak{M}$ и размерность $\mathfrak{M}$ равна коразмерности $\mathfrak{M}^\perp$ в линейном пространстве $\mathfrak{A}_f$ всех линейных функционалов на $\mathfrak{A}$. Обратно, если линейное подпространство $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}_f$ не содержит отличных от нуля постоянных функционалов, то $\mathfrak{U}^\perp \neq \emptyset$, $(\mathfrak{U}^\perp)^\perp = \mathfrak{U}$ и размерность $\mathfrak{U}$ равна коразмерности $\mathfrak{U}^\perp$ в $\mathfrak{A}$.

2. Гомоморфизмы аффинных пространств. Аффинные пространства над полем K являются алгебрами финитарной сигнатуры, а потому можно говорить о гомоморфизмах, конгруэнциях и факторпространствах аффинных пространств над K (см. «Алгебра»). Легко видеть, что ядра $\mathfrak{h}$ — конгруэнций на аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ то отношениями классами по $\mathfrak{h}$ будут плоскости, получающиеся одна из другой сдвигами и потому параллельные между собой. Обратно, если $\mathfrak{M}$ — плоскость, то все параллельные ей плоскости, получающиеся из $\mathfrak{M}$ сдвигами, образуют систему смежных классов некоторой конгруэнции $\eta_{\mathfrak{M}}$ на $\mathfrak{A}$. Размерность факторпространства $\mathfrak{A}/\eta_{\mathfrak{M}}$ равна коразмерности $\mathfrak{M}$.

3. Из систем A_0^1, A_1^1, A_2^1 видно, что класс всех аффинных пространств над фиксированным полем K определяется построением тождеств, т. е. этот класс является *многообразием алгебр*. Поэтому можно говорить о *свободных* аффинных пространствах над полем K с данной системой свободных порождающих. Так как базис конечномерного пространства является его системой порождающих, число его элементов, уменьшенное на 1, совпадает с размерностью $\mathfrak{A}$ и все пространства данной размерности изоморфны, то каждое аффинное пространство $\mathfrak{A}$ над K является свободным пространством, и множество любого базиса $\mathfrak{A}$ является системой порождающих $\mathfrak{A}$.

4. Обозначим через $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ декартово произведение аффинных пространств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ над фиксированным полем K (в смысле «АС» — как декартово произведение *алгебр* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$). Покажем, что векторное пространство связей $L(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$ изоморфно прямой сумме пространств $L(\mathfrak{A})$ и $L(\mathfrak{B})$. В частности, аффинное пространство конечной размерности n изоморфно декартову произведению n одномерных аффинных пространств.

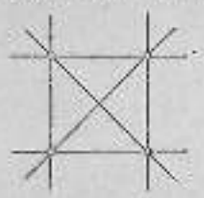


Рис. 8.

5. Обозначим через G группу автоморфизмов аффинного пространства $\mathfrak{A}$. Для любой точки $O \in \mathfrak{A}$ обозначим через G_O совокупность всех тех автоморфизмов $\mathfrak{A}$, которые оставляют точку O неподвижной. Покажем, пусть D — совокупность всех сдвигов $\mathfrak{A}$. Легко проверить, что G_O — подгруппа в G, а D — абелева инвариантная подгруппа в G. Согласно теореме 4 п. 29.1 имеет полупрямое разложение

$$G = G_O \cdot D \qquad (G_O \cap D = \varepsilon),$$

из которого, в частности, следует, что фактор-группа G/D изоморфна G_O. Если пространство $\mathfrak{A}$ одномерно, то группа G_O изоморфна мультипликативной группе поля K и потому абелева, а группа G метабелева.

6. В обозначениях предыдущего дополнения проверить равенство

$$\overline{AO} \cdot G_O \cdot O\dot{A} = \overline{OA}^{-1} \cdot G_O \cdot O\dot{A} = G_A.$$

7. Согласно теореме 5 п. 29.2, если поле K имеет характеристику, отличную от 2, то каждое множество точек $\mathfrak{M}$ аффинного пространства над K, содержащее вместе с любыми двумя различными своими точками и всю проходящую через них прямую, является плоскостью. Для характеристики 2 это, вообще говоря, неверно. Пусть K — поле, состоящее из двух элементов 0, 1; $\mathfrak{P}$ — некоторое пространство пар (x, y) $(x, y \in K)$ и $\mathfrak{A}$ — аффинное пространство над $\mathfrak{P}$ (рис. 8). Легко проверяется, что в $\mathfrak{A}$ имеется всего 4 точки и 6 прямых. Совокупность $\mathfrak{M} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ плоскостью не является, в то же время вместе с любой парой своих точек содержит и проходящую через них прямую (совпадающую с этой парой).

§ 30. Аффинные координаты

30.1. **Координаты точки.** Пусть $\mathfrak{A}$ — аффинное пространство конечной размерности n над каким-то полем K. Согласно п. 29.2 любая последовательность $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$, состоящая из $n+1$ линейно независимых точек пространства $\mathfrak{A}$, называется *базисом* $\mathfrak{A}$.

Последовательность $(A_0, e_1, \ldots, e_n)$, образованная произвольной точкой $A_0 \in \mathfrak{A}$ и линейно независимыми векторами $e_1, \ldots, e_n$ из векторного пространства $L(\mathfrak{A})$, называется *репером* (точнее, n-мерным репером) в $\mathfrak{A}$. Точка A_0 называется началом репера. Ясно, что каждому базису $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ соответствует репер $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ и каждому реперу $(A_0, e_1, \ldots, e_n)$ отвечает базис $(A_0, A_0e_1, \ldots, A_0e_n)$. Поэтому часто не делают различий между понятиями базиса и репера.

Фиксируем в пространстве $\mathfrak{A}$ какой-нибудь репер $R = (O, \overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n})$ и будем называть его *координатным репером*. Тогда для каждой $X \in \mathfrak{A}$ ее радиус-вектор $\overrightarrow{OX}$ будет однозначно представим в виде

$$\overrightarrow{OX} = \xi^1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \xi^n \cdot \overrightarrow{OA_n} \quad (\xi^i \in K). \tag{1}$$

Числа $\xi^1, \ldots, \xi^n$ называются *координатами точки* X в репере R (или в базисе $(O, A_1, \ldots, A_n)$), а строка $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ называется *координатной строкой* точки X в указанном репере. Эти координаты иногда называются аффинными координатами. При изменении координатного репера (например, даже при изменении порядка векторов, в котором они записываются) изменяется и координатная строка точки. Закон изменения будет рассмотрен ниже, в п. 30.4.

Пусть X_1, X_2, X_3 — произвольные точки пространства. Говорят, что точка X_1 делит пару точек (X_0, X_2) в отношении λ $(\lambda \in K)$, если $\overrightarrow{X_0X_1} = \lambda \overrightarrow{X_1X_2}$. Отсюда, в частности, следует, что если точка X_1 делит пару (X_0, X_2) в каком-нибудь отношении, то все три точки лежат на одной прямой. Обратно, если точки X_0, X_1, X_2 лежат на одной прямой и $X_1 \neq X_2$, то X_1 заведомо делит пару (X_0, X_2) в отношении $\lambda = X_0X_1 : \overrightarrow{X_1X_2}$, так как векторы $\overrightarrow{X_0X_1}$ и $\overrightarrow{X_1X_2}$ должны быть линейно зависимы.

Как по данному числу $\lambda \in K$ и заданным координатам $(\xi_0^1, \ldots, \xi_0^n)$, $(\xi_2^1, \ldots, \xi_2^n)$ точек X_0, X_2 найти координаты $(\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n)$ точки X_1, делящей пару (X_0, X_2) в отношении λ? По условию имеем

$$\overrightarrow{OX_i} = \xi_i^1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \xi_i^n \cdot \overrightarrow{OA_n} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

откуда

$$\overrightarrow{X_iX_{i+1}} = \overrightarrow{OX_{i+1}} - \overrightarrow{OX_i} = (\xi_{i+1}^1 - \xi_i^1) \cdot \overrightarrow{OA_1} + \ldots + (\xi_{i+1}^n - \xi_i^n) \cdot \overrightarrow{OA_n}.$$

Соотношение $\overrightarrow{X_0X_1} = \lambda \overrightarrow{X_1X_2}$ дает

$$\xi_1^i - \xi_0^i = \lambda (\xi_2^i - \xi_1^i),$$

и потому

$$\xi'_j=\frac{\xi'_j+\lambda\xi''_j}{1+\lambda} \qquad (j=1,\ldots,n).$$

Ясно, что заданное число λ должно быть отлично от -1, так как в противном случае из $\overrightarrow{X_0X_1}=-X_1X_2$ получим $X_0=X_2$. Полагая $\lambda=1$, получим формулы

$$\xi_j=\frac{\xi'_j+\xi''_j}{2} \qquad (j=1,\ldots,n)$$

для координат *середины* X_1 пары (X_0, X_2).

Посмотрим теперь, как линейная независимость произвольных точек $X_1,\ldots,X_s$ пространства $\mathfrak{A}$ отражается на их координатных строках. Пусть

$$OX_i=\xi_i^1\cdot\overrightarrow{OA}_1+\ldots+\xi_i^n\cdot\overrightarrow{OA}_n \qquad (i=1,\ldots,s) \tag{2}$$

и, следовательно, $(\xi_i^1,\ldots,\xi_i^n)$ есть координатная строка точки X_i в выбранном репере. Линейная независимость точек по определению равносильна линейной независимости векторов $\overrightarrow{X_1X_2},\ldots,\overrightarrow{X_1X_s}$. Из равенств (2) имеем

$$X_1X_i=\overrightarrow{OX_i}-\overrightarrow{OX_1}=(\xi_i^1-\xi_1^1)\cdot\overrightarrow{OA}_1+\ldots+(\xi_i^n-\xi_1^n)\cdot\overrightarrow{OA}_n,$$

т. е. строка $(\xi_i^1-\xi_1^1,\ldots,\xi_i^n-\xi_1^n)$ является координатной строкой вектора $\overrightarrow{X_1X_i}$ в базисе $\overrightarrow{OA}_1,\ldots,\overrightarrow{OA}_n$. Поэтому максимальное число линейно независимых точек в системе $X_1,\ldots,X_s$, равное увеличенному на единицу максимальному числу линейно независимых векторов в системе $\overrightarrow{X_1X_2},\ldots,\overrightarrow{X_1X_s}$, равно

$$1+\operatorname{ранг}\begin{bmatrix}\xi_2^1-\xi_1^1 & \ldots & \xi_2^n-\xi_1^n\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \xi_s^1-\xi_1^1 & \ldots & \xi_s^n-\xi_1^n\end{bmatrix}=1+\operatorname{ранг}\|\xi'_i-\xi''_i\|$$

Легко убедиться, что

$$1+\operatorname{ранг}\begin{bmatrix}\xi_2^1-\xi_1^1 & \ldots & \xi_2^n-\xi_1^n\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \xi_s^1-\xi_1^1 & \ldots & \xi_s^n-\xi_1^n\end{bmatrix}=\operatorname{ранг}\begin{bmatrix}1 & \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^n\\ 1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_2^n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & \xi_s^1 & \ldots & \xi_s^n\end{bmatrix},$$

Действительно, вычитая из 2-й, ..., s-й строки правой матрицы ее первую строку, мы не изменим ее ранга, и потому

$$\operatorname{ранг}\begin{bmatrix}1 & \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^n\\ 1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_2^n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & \xi_s^1 & \ldots & \xi_s^n\end{bmatrix}=\operatorname{ранг}\begin{bmatrix}1 & \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^n\\ 0 & \xi_2^1-\xi_1^1 & \ldots & \xi_2^n-\xi_1^n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \xi_s^1-\xi_1^1 & \ldots & \xi_s^n-\xi_1^n\end{bmatrix}=$$
$$=1+\operatorname{ранг}\|\xi'_i-\xi''_i\|,$$

что и требовалось.

Пусть $(\xi^1,\ldots,\xi^n)$ — координатная строка точки X. Тогда строку $(1,\xi^1,\ldots,\xi^n)$ часто называют *расширенной* координатной строкой точки X. Полученный выше результат теперь можно высказать такими словами: *максимальное число линейно независимых точек в системе $X_1,\ldots,X_s$ равно рангу матрицы, составленной из расширенных координатных строк точек этой системы.*

В частности, *для того чтобы точки $X_1,\ldots,X_n$, X_{n+1} n-мерного аффинного пространства были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{vmatrix}1 & \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^n\\ 1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_2^n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & \xi_{n+1}^1 & \ldots & \xi_{n+1}^n\end{vmatrix}\neq 0, \tag{3}$$

где $\xi_i^1,\ldots,\xi_i^n$ — координаты точки X_i $(i=1,\ldots,n+1)$.

Определитель, стоящий в (3) слева от знака $\neq$, иногда называется *объемным определителем* системы точек $X_1,\ldots,X_{n+1}$. Обращение его в нуль означает, что точки $X_1,\ldots,X_{n+1}$ лежат в одной гиперплоскости пространства $\mathfrak{A}$.

В п. 29.4 было введено понятие линейного функционала $f(X)$ в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$. Посмотрим, как значения этого функционала выражаются через координаты точки X. Пусть $(\xi^1,\ldots,\xi^n)$ — координатная строка точки X в каком-то репере $R=(O,\overrightarrow{OA}_1,\ldots,\overrightarrow{OA}_n)$. Тогда из (1) и соотношения, характеризующего линейность $f(X)$, получаем

$$f(X)=a_1\xi^1+\ldots+a_n\xi^n+a_0, \tag{4}$$

где $a_i=f(A_i)-f(O)$, $a_0=f(O)$ — фиксированные числа, зависящие лишь от функционала f и репера R. Обратно, беря совершенно произвольные $a_0, a_1,\ldots,a_n\in K$ и вводя функционал f формулой (4), легко проверить, что f будет линейным на $\mathfrak{A}$.

Говорят, что полином $a_1\xi^1+\ldots+a_n\xi^n+a_0$ *от переменных $\xi_1,\ldots,\xi_n$ представляет функционал f в репере R.* Из сказанного

видно, что соответствие между линейными полиномами от n переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n$ и линейными функционалами на $\mathfrak{A}$ взаимно однозначное, причем если функционалу f представляется полиномом $\alpha_1\xi^1 + \ldots + \alpha_n\xi^n + \alpha_0$, а функционал g — полиномом $\beta_1\xi^1 + \ldots + \beta_n\xi^n + \beta_0$, то

$$\lambda f(X) + \mu g(X) = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)\xi^1 + \ldots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)\xi^n + \lambda\alpha_0 + \mu\beta_0. \quad (5)$$

Иначе говоря, ставя в соответствие каждому линейному функционалу на $\mathfrak{A}$ представляющий его полином от $\xi_1, \ldots, \xi_n$, мы получаем *изоморфное отображение* векторного пространства $\mathfrak{A}_f$ всех линейных функционалов на $\mathfrak{A}$ на векторное пространство всех (неоднородных) линейных полиномов от $\xi^1, \ldots, \xi^n$ с коэффициентами из основного поля K.

Из (5) видно, что действия сложения линейных функционалов и умножения их на числа сводятся к соответствующим действиям над строками коэффициентов линейных полиномов. Отсюда, в частности, заключаем, что максимальное число линейно независимых линейных функционалов, содержащихся в системе $f_1(X), \ldots, f_s(X)$, равно рангу матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм, представляющих указанные функционалы.

30.2. Уравнения плоскостей. В n-мерном пространстве $\mathfrak{A}$ над полем K будем считать фиксированным какой-то координатный репер $R = (O, OA_1, \ldots, OA_n)$ и далее под координатами точек $\mathfrak{A}$ будем понимать их координаты в репере R.

Пусть $P(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — некоторое *условие*, связывающее произвольные числа $\xi^1, \ldots, \xi^n$ из K. Таким образом, для каждых конкретных значений переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n \in K$ условие P может быть истинным или ложным. Говорят, что *условие P определяет в пространстве $\mathfrak{A}$ множество точек $\mathfrak{M}$, если произвольная точка $X \in \mathfrak{A}$ тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{M}$, когда координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ точки X удовлетворяют условию P.*

Отсюда, в частности, следует, что если условия $P(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $Q(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ определяют в пространстве $\mathfrak{A}$ соответственно множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, то конъюнкция этих условий $P(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $Q(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ определяет пересечение указанных множеств, дизъюнкция P или Q определяет их объединение $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$, а отрицание *не* P определяет дополнение $\complement\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{M}$.

Пусть $f(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — какая-нибудь функция, определенная на K со значениями в K. Условие вида

$$f(\xi^1, \ldots, \xi^n) = 0 \quad (1)$$

называется *уравнением* от переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n$, а конъюнкция уравнений

$$f_i(\xi^1, \ldots, \xi^n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \quad (2)$$

называется *системой уравнений* от переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Если система уравнений (2) определяет в пространстве $\mathfrak{A}$ множество $\mathfrak{M}$, то говорят также, что (2) есть *система уравнений для множества* $\mathfrak{M}$. Согласно приведенному выше указанию множество точек $\mathfrak{M}$, определяемое системой уравнений (2), является пересечением множеств, определяемых каждым уравнением системы (2) в отдельности.

В противоположном полю условию $x^1 = 0$ равносильно дизъюнкция $x = 0$ *или* $y = 0$. Поэтому, если уравнения

$$f(\xi^1, \ldots, \xi^n) = 0, \quad g(\xi^1, \ldots, \xi^n) = 0$$

(каждое в отдельности) определяют в пространстве $\mathfrak{A}$ соответственно множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, то уравнение

$$f(\xi^1, \ldots, \xi^n) \cdot g(\xi^1, \ldots, \xi^n) = 0 \quad (3)$$

определяет в $\mathfrak{A}$ объединение множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Множество $\mathfrak{M}$ точек аффинного пространства $\mathfrak{A}$ называется *алгебраической гиперповерхностью*, если существует такой многочлен $f(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ от переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n$ с коэффициентами в поле K, что $\mathfrak{M}$ определяется уравнением (1).

Степень многочлена f по совокупности переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n$ называется *степенью* гиперповерхности $\mathfrak{M}$. Так как одно и то же множество $\mathfrak{M}$ может иметь много различных уравнений, то одна и та же алгебраическая гиперповерхность может иметь различные степени. Нетрудно сообразить, в частности, что если какая-то гиперповерхность имеет степень n, то любое большее число также будет ее степенью. Наименьшая из степеней заданной алгебраической гиперповерхности называется ее *порядком*.

Поскольку степень произведения полиномов равна сумме степеней сомножителей, то из формулы (3) следует, что объединение алгебраических гиперповерхностей порядков s и t есть снова алгебраическая гиперповерхность, порядок которой не больше $s + t$.

Алгебраическая гиперповерхность $\mathfrak{M}$ называется *распадающейся*, если она есть объединение каких-то двух отличных от нее непустых алгебраических гиперповерхностей.

Пересечение конечного числа алгебраических гиперповерхностей называется *алгебраическим многообразием*.

Понятия алгебраической гиперповерхности и ее порядка мы определили с помощью вида уравнений, которым удовлетворяют координаты произвольной точки гиперповерхности. С изменением координатного репера будут изменяться координаты точки, вместе с ними будут изменяться и уравнения рассматриваемого множества. Поэтому было бы точнее говорить не об алгебраической гиперповерхности порядка n, а *об алгебраической гиперповерхности порядка n в данном координатном репере*, аналогично о

распадении в данном координатном репере и т. д. Однако далее будет показано, что на самом деле свойство множества точек быть алгебраической гиперповерхностью данного порядка не зависит от выбора координатного репера.

Свойства произвольных алгебраических многообразий составляют предмет изучения особой дисциплины — алгебраической геометрии. В этой книге будут изучены свойства лишь гиперповерхностей 1-го порядка (гиперплоскостей) и их пересечений (плоскостей).

Отмеченная выше зависимость определений *алгебраичности* и *порядка* от выбора координатного репера не очень удобна. Чтобы обойти эту зависимость, употребляется следующий прием. Пусть в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ размерности n задан некоторый функционал $f(X)$. Выбираем в $\mathfrak{A}$ какой-нибудь координатный репер $\boldsymbol{R}=(O, \overrightarrow{OA}_1, \ldots, \overrightarrow{OA}_n)$ и каждой последовательности $\xi^1, \ldots, \xi^n$ чисел из K ставим в соответствие число $f(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, равное $f(X)$, где X — точка с координатами $\xi^1, \ldots, \xi^n$. В результате каждому функционалу оказывается поставленной в соответствие функция от n переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n$, *представляющая* функционал f в данном координатном репере $\boldsymbol{R}$. Обратно, определяя для функции $f(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ функционал $f(X)$ равенством

$$f(X)=f(\xi^1, \ldots, \xi^n),$$

видим, что любая функция от n переменных представляет в указанном репере некоторый функционал. Ясно, что *корневое многообразие функционала* $f(X)$, состоящее из тех точек $X \in \mathfrak{A}$, для которых $f(X)=0$, совпадает с множеством, определяемым уравнением $f(\xi^1, \ldots, \xi^n)=0$ в данном координатном репере. Однако в определении понятия функционала и его корневого многообразия координатные реперы не участвуют, и потому уравнения координатные реперы не участвуют, и потому уравнения множеств точек выгоднее писать в виде $f(X)=0$, где f — некоторый функционал. Спрашивается, как же при этом охарактеризовать те функционалы, значения которых представляются полиномами? Ответ следующий. Мы уже видели в п. 30.1, что *линейными* полиномами представляются линейные функционалы. Далее рассматриваем функционалы $F(X_1, \ldots, X_s)$ от s переменных точек. Функционал $F(X_1, \ldots, X_s)$ называется *линейным по* i-*му аргументу* X_i, если он обращается в линейный функционал от X_i при любых фиксированных значениях остальных переменных. Функционал $F(X_1, \ldots, X_s)$ называется *полилинейным*, если он линеен по каждому своему аргументу. Теперь мы подошли к главному пункту: функционал $f(X)$ от одной переменной X называется *функционалом* (или *формой*) s-*го порядка* (или *степени* s), если существует такой полилинейный функционал $F(X_1, \ldots, X_s)$ от s переменных, что

$$f(X)=F(X, \ldots, X).$$

Легко проверяется, что при любом фиксированном координатном репере функционал $f(X)$ тогда и только тогда имеет порядок s, когда значения его представляются подходящим полиномом степени s от координат точки X. Доказательство ввиду его очевидности мы здесь опустим.

После этих общих соображений мы теперь перейдем к главному вопросу этого параграфа — изучению уравнений плоскостей.

Итак, пусть в заданном аффинном пространстве конечной размерности n фиксирован какой-то координатный репер $\boldsymbol{R}=(O, OA_1, \ldots, OA_n)$. Уравнение от переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n$ степени 1 — это уравнение вида

$$\alpha_1\xi^1 + \ldots + \alpha_n\xi^n=\beta, \tag{4}$$

где по меньшей мере один из коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ отличен от 0. Вводя функционал

$$f(X)=\alpha_1\xi^1+\ldots+\alpha_n\xi^n-\beta,$$

видим, что множество точек $\mathfrak{M}$, представляемое уравнением (4), — это корневое многообразие функционала $f(X)$. Согласно п. 30.1 функционал $f(X)$ линейный и непостоянный, поэтому $\mathfrak{M}$ есть гиперплоскость в $\mathfrak{A}$. Итак, *произвольное линейное уравнение от переменных* $\xi^1, \ldots, \xi^n$ *представляет гиперплоскость в аффинном пространстве*.

Рассмотрим какую-нибудь систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^1\xi^1 + \alpha_2^1\xi^2 + \ldots + \alpha_n^1\xi^n &= \beta^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_1^s\xi^1 + \alpha_2^s\xi^2 + \ldots + \alpha_n^s\xi^n &= \beta^s. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Обозначая через $\mathfrak{M}_i$ совокупность точек, координаты которых удовлетворяют i-му уравнению из (5), видим, что система уравнений (5) определяет пересечение гиперплоскостей $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_s$. Согласно п. 29.2 это пересечение либо пустое, либо плоскость, коразмерность которой не превышает s, а размерность $\mathfrak{M}$, следовательно, не меньше $n-s$. Каково же точное значение размерности $\mathfrak{M}$?

Введем линейные функционалы

$$f_i(X)=\alpha_1^i\xi^1+\ldots+\alpha_n^i\xi^n-\beta^i \qquad (i=1, \ldots, s).$$

Плоскость $\mathfrak{M}$ есть корневое многообразие системы этих функционалов. Согласно теореме 2 п. 29.4, если $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{C}$, то размерность $\mathfrak{M}$ равна максимальному числу линейно независимых

функционалов в системе $f_1, \ldots, f_s$, т. е. (см. п. 29.4) равна $\mathfrak{M}$ рангу матрицы $\|a_j^i\|$, составленной из коэффициентов при переменных системы уравнений (5).

Остается выяснить, когда $\mathfrak{M}=\emptyset$ и когда $\mathfrak{M}\neq\emptyset$, т. е. при каких условиях система (5) совместна. Но ответ на последний вопрос дается теоремой Кронекера—Капелли (см. п. 5.3): для совместности системы уравнений (5) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы этой системы совпадал с рангом ее расширенной матрицы. Таким образом, нами получена

Теорема. В n-мерном аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ в любой координатной репере произвольная $(n-r)$-мерная плоскость $\mathfrak{M}$ $(0\leqslant r\leqslant n)$ может быть представлена системой уравнений вида

$$a_1^i\xi^1+a_2^i\xi^2+\ldots+a_n^i\xi^n=\beta^i \qquad (i=1, \ldots, r), \tag{6}$$

у которой ранг основной матрицы $\|a_j^i\|$ равен r. Произвольная система линейных уравнений вида (4) представляет в $\mathfrak{A}$ $(n-r)$-мерную плоскость, если ранги основной и расширенной матриц системы (4) совпадают и равны r. Если же указанные ранги различны, то система (4) несовместна и потому представляет пустую плоскость.

Рассмотрим следующую задачу. В пространстве $\mathfrak{A}$ даны координатные строки $(\beta_0^1, \ldots, \beta_0^n)$ точек B_i $(i=0, 1, \ldots, s)$. Найти уравнения минимальной плоскости $\mathfrak{M}=B_0\vee B_1\vee\ldots\vee B_s$, проходящей через заданные точки.

Решим ее сначала в векторной форме. Согласно п. 29.2 плоскость $\mathfrak{M}$ состоит из тех точек $X\in\mathfrak{A}$, у которых вектор $\overrightarrow{B_0X}$ может быть представлен в форме

$$\overrightarrow{B_0X}=\lambda_1\overrightarrow{B_0B_1}+\ldots+\lambda_s\overrightarrow{B_0B_s} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_s\in K)$$

или

$$\overrightarrow{OX}-\lambda_1(\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OB_0})+\ldots+\lambda_s(\overrightarrow{OB_s}-\overrightarrow{OB_0})=\overrightarrow{OB_0}. \tag{7}$$

Уравнение (7) иногда называют уравнением плоскости *в векторной параметрической форме*. Подставляя в него вместо радиусов-векторов $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OB_j}$ соответствующие координатные строки, получим соотношения

$$\xi^i=(\beta_1^i-\beta_0^i)\lambda_1+\ldots+(\beta_s^i-\beta_0^i)\lambda_s+\beta_0^i \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{8}$$

Вводя обозначения $\beta_j^i-\beta_0^i=\gamma_j^i$, перепишем эти соотношения в форме

$$\xi^i=\gamma_1^i\lambda_1+\ldots+\gamma_s^i\lambda_s+\beta_0^i \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{9}$$

выражающей координаты произвольной точки $X\in\mathfrak{M}$ через вспомогательные независимые параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Уравнения (9) называются *координатными параметрическими уравнениями* плоскости $\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}=B_0\vee B_1\vee\ldots\vee B_s$, то размерность $\mathfrak{M}$ равна максимальному числу линейно независимых точек, содержащихся в системе $B_0, B_1, \ldots, B_s$, уменьшенному на 1, т. е. равна рангу матрицы $C=\|\gamma_j^i\|$, составленной из коэффициентов при переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ в параметрических уравнениях.

Чтобы из параметрических уравнений (9) плоскости $\mathfrak{M}$ получить ее общие уравнения вида (5), достаточно из системы (9) исключить параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Это можно сделать, например, следующим образом. Итак, ранг матрицы $\|\gamma_j^i\|$. Пусть он равен r и, следовательно, среди уравнений (9) найдутся какие-то i_1-е, i_2-е, $\ldots$, i_r-е уравнения и среди параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ такие параметры $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_r}$ $(j_1<\ldots<j_r;\ i_1<\ldots<i_r)$, что $\det\left\|\gamma_{j_\varkappa}^{i_\varkappa}\right\|\neq 0$. Решая эти уравнения относительно неизвестных $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_r}$, получим для них линейные выражения через $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и остальные параметры λ_j $(j\notin\{j_1, \ldots, j_r\})$. Подставим теперь полученные значения параметров в каждое из оставшихся уравнений системы (9). В результате получатся линейные соотношения между переменными $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и параметрами λ_j, $j\notin\{j_1, \ldots, j_r\}$. На самом деле, в эти соотношения параметры λ_j войдут с коэффициентами нуль (в силу того, что r — ранг матрицы $\|\gamma_j^i\|$), и потому полученные соотношения будут являться соотношениями вида (5), представляющими плоскость $\mathfrak{M}$.

В приведенных рассуждениях предполагалось, что $0\leqslant r\leqslant n$. Если $r=n$, то плоскость $\mathfrak{M}$, проходя через линейно независимые $n+1$ точек, будет совпадать со всем пространством $\mathfrak{A}$ и при желании ее общее уравнение можно написать в виде

$$0\cdot\xi^1+\ldots+0\cdot\xi^n=0. \tag{10}$$

Рассмотрим обратную задачу: как для плоскости $\mathfrak{M}$, заданной общими уравнениями вида (5), найти параметрические уравнения? Пусть размерность $\mathfrak{M}$ равна $r<n$. Тогда система (5) содержит лишь r независимых уравнений и в этих уравнениях коэффициенты при каких-то r переменных образуют матрицу, детерминант которой отличен от 0. Для определенности предположим, что независимы первые r уравнений и отличен от нуля детерминант, образованный коэффициентами при переменных $\xi^1, \ldots, \xi^r$. Тогда, решая первые r уравнений относительно переменных $\xi^1, \ldots, \xi^r$, получим систему уравнений вида

$$\xi^i=\gamma_{r+1}^i\xi^{r+1}+\ldots+\gamma_n^i\xi^n+\gamma^i \qquad (i=1, \ldots, r). \tag{11}$$

равносильную системе (9). Ясно, что система (11) равносильна параметрическим уравнениям

$$\xi^i = \gamma^i_{i-1}\lambda_1 + \ldots + \gamma^i_{n-r}\lambda_{n-r} + \beta^i \quad (i = 1, \ldots, r),$$
$$\xi^j = \lambda_{j-r} \quad (j = r+1, \ldots, n).$$

Мы подробно рассмотрели задачу о нахождении уравнений минимальной плоскости, проходящей через заданные точки. Ясно, что эта задача представляет собой частный случай более общей задачи о нахождении минимальной плоскости, проходящей через заданные плоскости $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Однако указанная более общая задача формальным путем может быть сведена к первой задаче. В самом деле, плоскости $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ могут быть представлены в виде

$$\mathfrak{M} = B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_s \quad (\text{разм. } \mathfrak{M} = s),$$
$$\mathfrak{N} = C_0 \vee C_1 \vee \ldots \vee C_t \quad (\text{разм. } \mathfrak{N} = t),$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_s$ — какие-то линейно независимые точки из $\mathfrak{M}$, а $C_0, C_1, \ldots, C_t$ — линейно независимые точки из $\mathfrak{N}$. Тогда

$$\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N} = B_0 \vee \ldots \vee B_s \vee C_0 \vee \ldots \vee C_t,$$

и задача привелась к проведению минимальной плоскости через точки $B_0, \ldots, B_s, C_0, \ldots, C_t$. Спрашивается, как найти точки $B_0, \ldots, B_s$, если плоскость $\mathfrak{M}$ задана своими общими уравнениями вида (5)? Один из способов (не самый короткий) следующий. Приводим систему (5) к виду (11). Тогда в качестве точек B_i заведомо можно взять точки с координатными строками

$$(B_0) = (\beta^1, \quad \beta^2, \quad \ldots, \quad \beta^r, \quad 0, 0, \ldots, 0),$$
$$(B_1) = (\beta^1 + \gamma^1_{r+1}, \beta^2 + \gamma^2_{r+1}, \ldots, \beta^r + \gamma^r_{r+1}, \quad 1, 0, \ldots, 0),$$
$$(B_2) = (\beta^1 + \gamma^1_{r+2}, \beta^2 + \gamma^2_{r+2}, \ldots, \beta^r + \gamma^r_{r+2}, \quad 0, 1, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(B_s) = (\beta^1 + \gamma^1_{n}, \quad \beta^2 + \gamma^2_{n}, \quad \ldots, \beta^r + \gamma^r_{n}, \quad 0, 0, \ldots, 1) \quad (s = n - r).$$

Рассмотрим еще один частный вопрос. Пусть в пространстве $\mathfrak{A}$ выбран координатный репер $R = (O, \overline{OA_1}, \ldots, \overline{OA_n})$. Тогда плоскости вида $O \vee A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_r}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n)$ называются *r-мерными координатными плоскостями*. Полагая

$$\mathfrak{P}_1 = O \vee A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n, \tag{12}$$

видим, что $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ суть всевозможные *координатные гиперплоскости*. Из (12) следует, что точка X с координатами $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{P}_i$, когда

$$\xi^i = 0. \tag{13}$$

Иначе говоря, *уравнение* (13) *есть уравнение гиперплоскости* $\mathfrak{P}_i$. Координатная плоскость $O \vee A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_r} = \mathfrak{N}$ является пересечением всех тех гиперплоскостей $\mathfrak{P}_j$, индекс которых отличен от $i_1, \ldots, i_r$. Поэтому уравнения плоскости $\mathfrak{N}$ можно записать в форме

$$\xi^\alpha = \xi^\beta = \ldots = \xi^\gamma = 0,$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ — это последовательность тех натуральных чисел совокупности $1, 2, \ldots, n$, которые не входят в множество $\{i_1, \ldots, i_r\}$. Например, уравнения i-й координатной оси $O \vee A_i$ можно записать в виде

$$\xi^1 = \ldots = \xi^{i-1} = \xi^{i+1} = \ldots = \xi^n = 0.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий числовой пример. В обыкновенном вещественном трехмерном аффинном пространстве R^3 задано линейное многообразие $\mathfrak{M}$ двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 + 2\xi^2 - \xi^3 &= 1, \\ \xi^1 + 2\xi^2 - 2\xi^3 &= 2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Какова размерность $\mathfrak{M}$? Составляем расширенную матрицу этой системы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

и видим, что она содержит отличный от нуля определитель 2-го порядка, элементы которого выделены жирным шрифтом. Более того, указанный определитель принадлежит основной матрице системы. Поэтому ранг расширенной матрицы, равный двум, совпадает с рангом основной матрицы. Отсюда заключаем, что коразмерность $\mathfrak{M}$ равна 2, а размерность $\mathfrak{M}$ равна 1, т. е. $\mathfrak{M}$ есть прямая.

Решая систему (14) относительно ξ^1, ξ^2, получаем

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= -1, \\ \xi^2 &= -2\xi^3. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Здесь ξ^3 можно считать параметром, и потому (15) можно рассматривать как параметрические уравнения прямой $\mathfrak{M}$. Придавая параметру ξ^3 значения 0, 1, получаем из (15), что точки с координатами $(0, 0, -1)$ и $(-2, 1, -1)$ лежат на прямой $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим еще один пример. Какие множества точек в пространстве R^3 представляются уравнениями:

а) $\xi^1\xi^2 = 0$,

б) $(\xi^1)^2 - \xi^1\xi^2 + (\xi^2)^2 + \xi^1 - \xi^2 + \xi^3 = 0$?

Ясно, что в случае а) искомое множество есть совокупность трех координатных гиперплоскостей с уравнениями 1) $\xi^1=0$, 2) $\xi^2=0$ и 3) $\xi^3=0$. В случае б) левая часть разлагается на множители ξ^1-1 и $\xi^2+\xi^3$, и потому искомое множество есть совокупность гиперплоскостей, имеющих уравнения $\xi^1-1=0$ и $\xi^1-\xi^2+\xi^3=0$.

30.3. Уравнения гиперплоскостей и прямых. Мы хотим здесь рассмотреть более подробно уравнения гиперплоскостей, прямых, а также условия их параллельности, выраженные в координатной форме.

Теорема 1. *Каждая гиперплоскость в n-мерном аффинном пространстве может быть представлена уравнением* 1-й *степени*

$$a_1\xi^1+\ldots+a_n\xi^n+a_0=0. \tag{1}$$

Для того чтобы гиперплоскость, представляемая уравнением (1), *совпадала с гиперплоскостью, представляемой уравнением*

$$b_1\xi^1+\ldots+b_n\xi^n+b_0=0, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы их соответственные коэффициенты были пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_0}{b_0}. \tag{3}$$

Гиперплоскости, представляемые уравнениями (1), (2), *тогда и только тогда параллельны, когда пропорциональны соответствующие старшие коэффициенты:*

$$\frac{a_1}{b_1}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}. \tag{4}$$

Теорема содержит три утверждения. Первое из них уже было доказано в п. 30.2. Чтобы гиперплоскости (1), (2) совпадали, необходимо и достаточно, чтобы совокупность уравнений (1), (2) определяла гиперплоскость. Согласно теореме п. 30.2 это равносильно тому, что

$$\operatorname{ранг}\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n & a_0 \\ b_1 & \ldots & b_n & b_0 \end{bmatrix}=1,$$

а это и означает (3).

Гиперплоскости (1), (2) параллельны, если они либо совпадают — и тогда имеем (3), — либо не пересекаются. В последнем случае уравнения (1), (2) должны быть несовместны и потому, в силу теоремы Кронекера — Капелли,

$$\operatorname{ранг}\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_n \end{bmatrix}=1,$$

т. е. имеем (4). Итак, в обоих случаях условие (4) истинно.

Рассмотрим задачу: *дано уравнение* (1) *какой-то гиперплоскости $\mathfrak{P}$ и координаты $\xi_0^1,\ldots,\xi_0^n$ некоторой точки A. Найти уравнение гиперплоскости, параллельной $\mathfrak{P}$ и проходящей через A.*

Пусть (2) — уравнение искомой гиперплоскости $\mathfrak{P}'$. Так как эта гиперплоскость параллельна гиперплоскости (1), то должны выполняться условия (4). Поэтому, умножая уравнение (2) на подходящий множитель пропорциональности, мы можем представить уравнение искомой гиперплоскости $\mathfrak{P}'$ в виде

$$a_1\xi^1+\ldots+a_n\xi^n+b_0=0. \tag{5}$$

По условию точка A лежит на $\mathfrak{P}'$. Поэтому

$$a_1\xi_0^1+\ldots+a_n\xi_0^n+b_0=0. \tag{6}$$

Вычитая из (5) почленно (6), получим искомое уравнение

$$a_1(\xi^1-\xi_0^1)+\ldots+a_n(\xi^n-\xi_0^n)=0.$$

Ясно, что гиперплоскость, определяемая уравнением (1), тогда и только тогда проходит через начало $(0,\ldots,0)$ координатного репера, когда $a_0=0$. Рассмотрим случай, когда $a_0\neq 0$. Деля все коэффициенты уравнения (1) на $-a_0$, мы приведем его к виду

$$\frac{\xi^1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{\xi^n}{\gamma_n}=1. \tag{7}$$

Числа $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ допускают простое геометрическое истолкование. Действительно, найдем точку пересечения гиперплоскости (7) с координатной осью $O\vee A_i$. Уравнения этой оси имеют вид

$$\xi^1=\ldots=\xi^{i-1}=\xi^{i+1}=\ldots=\xi^n=0. \tag{8}$$

Решая совместно (7) и (8), находим $\xi^i=\gamma_i$. Таким образом, гиперплоскость (7) отсекает на оси $O\vee A_i$ вектор γ_iOA_i. По этой причине уравнение (7) обычно называют *уравнением гиперплоскости в отрезках*.

Рассмотрим еще один вопрос: *при каких условиях уравнение (1) представляет гиперплоскость, проходящую через координатную плоскость $O\vee A_1\vee\ldots\vee A_r$ $(1\leqslant r\leqslant n)$?* Плоскость эта состоит из точек с координатами $(\xi^1,\ldots,\xi^r,0,\ldots,0)$. Подставим эти координаты в уравнение (1), получим $a_1\xi^1+\ldots+a_r\xi^r+a_0=0$. Это соотношение должно выполняться для таких чисел $\xi^1,\ldots,\xi^r$ поля K. Следовательно, $a_1=\ldots=a_r=a_0=0$. Аналогично убеждаемся, что гиперплоскость (1) тогда и только тогда проходит через r-мерную координатную плоскость $O\vee A_{i_1}\vee\ldots\vee A_{i_r}$, когда $a_{i_1}=\ldots=a_{i_r}=a_0=0$.

Оставляя в уравнении (1) неизменными старшие коэффициенты $a_1,\ldots,a_n$ и придавая различные значения свободному члену a_0, мы получим уравнения параллельных гиперплоскостей. Поэтому,

если в уравнении (1) $a_{i_1} = \ldots = a_{i_r} = 0$, *а свободный член* a_0 *произвольный, то гиперплоскость* (1) *параллельна координатной плоскости* $O \vee A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_r}$. В частности, гиперплоскость (1) тогда и только тогда параллельна координатной оси $O \vee A_i$, когда $a_i = 0$, т. е. когда уравнение (1) не содержит явно i-й текущей координаты.

Мы знаем, что через каждые n линейно независимых точек $B_1, \ldots, B_n$ n-мерного аффинного пространства проходит гиперплоскость $B_1 \vee \ldots \vee B_n$ и только одна. Как написать уравнение этой гиперплоскости, если координатные строки точек $B_1, \ldots, B_n$ известны? Пусть $(\beta_1^1, \ldots, \beta_1^n), \ldots, (\beta_n^1, \ldots, \beta_n^n)$ — координатные строки точек $B_1, \ldots, B_n$. Чтобы произвольная точка X с координатами $\xi^1, \ldots, \xi^n$ лежала на гиперплоскости $B_1 \vee \ldots \vee B_n$, необходимо и достаточно, чтобы система точек $X, B_1, \ldots, B_n$ была линейно зависимой. Согласно п. 30.1 указанная система точек тогда и только тогда линейно зависима, когда координаты этих точек удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi^1 & \ldots & \xi^n \\ 1 & \beta_1^1 & \ldots & \beta_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \beta_n^1 & \ldots & \beta_n^n \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, видим, что уравнение (9) является линейным относительно переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n$ и потому представляет искомую плоскость.

Свободный член уравнения (9) равен $\det \|\beta_i^j\|$. Следовательно, гиперплоскость, проходящая через линейно независимые точки $B_1, \ldots, B_n$, тогда и только тогда проходит через начало координат, когда $\det \|\beta_i^j\| = 0$.

Рассмотрим теперь более подробно уравнения прямых. Пусть в n-мерном аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ задана пара различных точек $B_0(\beta_0^1, \ldots, \beta_0^n)$ и $B_1(\beta_1^1, \ldots, \beta_1^n)$, где в скобках указаны координаты этих точек в фиксированном координатном репере $R = (O, \overline{OA}_1, \ldots, \overline{OA}_n)$. Точка X принадлежит прямой $B_0 \vee B_1$ тогда и только тогда, когда для некоторого числа λ будет $\overline{B_0X} = \lambda \overline{B_0B_1}$, т. е. когда

$$\xi^i - \beta_0^i = \lambda(\beta_1^i - \beta_0^i) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Определяя λ из каждого уравнения (10) и приравнивая результаты, получим

$$\frac{\xi^1 - \beta_0^1}{\beta_1^1 - \beta_0^1} = \frac{\xi^2 - \beta_0^2}{\beta_1^2 - \beta_0^2} = \ldots = \frac{\xi^n - \beta_0^n}{\beta_1^n - \beta_0^n}. \tag{11}$$

Обратно, если координаты $\xi^1, \ldots, \xi^n$ какой-то точки X удовлетворяют равенствам (11), то, обозначая через λ общую величину отношений (11), получим (10), и потому $X \in B_0 \vee B_1$. Таким образом, *уравнения* (11) *являются уравнениями прямой, проходящей через две заданные точки.*

Заметим, что в отношениях (11) некоторые из знаменателей могут равняться нулю. Так как мы хотим, чтобы соотношения (11) были равносильны условиям (10), то в случае $\beta_1^i - \beta_0^i = 0$ надо полагать $\xi^i - \beta_0^i = 0$.

Вводя обозначения $\beta_1^i - \beta_0^i = \alpha^i$, $\beta_0^i = \beta^i$, мы можем переписать уравнения (11) в виде

$$\frac{\xi^1 - \beta^1}{\alpha^1} = \frac{\xi^2 - \beta^2}{\alpha^2} = \ldots = \frac{\xi^n - \beta^n}{\alpha^n}. \tag{12}$$

Числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ называются *направляющими коэффициентами* прямой, а уравнения (12) называются *уравнениями прямой с направляющими коэффициентами.*

Теорема 2. *Для того чтобы прямая* (12) *была параллельна прямой*

$$\frac{\xi^1 - \gamma^1}{\nu^1} = \frac{\xi^2 - \gamma^2}{\nu^2} = \ldots = \frac{\xi^n - \gamma^n}{\nu^n}, \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы их направляющие коэффициенты были пропорциональны:

$$\frac{\alpha^1}{\nu^1} = \frac{\alpha^2}{\nu^2} = \ldots = \frac{\alpha^n}{\nu^n}. \tag{14}$$

Прямые (12) *и* (13) *тогда и только тогда совпадают, когда выполнены условия пропорциональности* (14) *и условия*

$$\frac{\beta^1 - \gamma^1}{\nu^1} = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\nu^2} = \ldots = \frac{\beta^n - \gamma^n}{\nu^n},$$

выражающие, что точка с координатами $\beta^1, \ldots, \beta^n$, *принадлежащая прямой* (12), *лежит на прямой* (13).

Из уравнений (12) видно, что на прямой, представляемой этими уравнениями, лежат точки $B_0(\beta^1, \ldots, \beta^n)$ и $B_1(\beta^1 + \alpha^1, \ldots, \beta^n + \alpha^n)$. Аналогично на прямой (13) лежат точки $C_0(\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ и $C_1(\gamma^1 + \nu^1, \ldots, \gamma^n + \nu^n)$. Согласно п. 29.3 прямые $B_0 \vee B_1$ и $C_0 \vee C_1$ тогда и только тогда параллельны, когда $\overline{C_0C_1} = \lambda \overline{B_0B_1}$ для некоторого $\lambda \in K$, т. е. когда координаты векторов $\overline{B_0B_1}$ и $\overline{C_0C_1}$ пропорциональны. Так как координаты указанных векторов равны $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ и соответственно $\nu^1, \ldots, \nu^n$, то отсюда получаем (14). Поскольку для совпадения прямых достаточно, чтобы они имели общую точку и были параллельны, то второе утверждение теоремы 2 непосредственно вытекает из ее первого утверждения.

Покажем уравнения вида (13) прямой в n-мерном аффинном пространстве может быть задана в общей системой линейных уравнений вида

$$a_1^i\xi^1+\ldots+a_n^i\xi^n+a_0^i=0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ s), \tag{15}$$

у которой ранги основной и расширенной матриц равны $n-1$. Как, зная уравнения прямой в общем виде (15), найти ее уравнения в каноническом виде (13)? Для этого достаточно найти координаты каких-то двух различных точек прямой (15) и затем воспользоваться формулой (11); но можно поступить и следующим образом. По условию ранг системы (15) равен $n-1$. Поэтому $n-1$ текущих координат допустим $\xi^1,\ \ldots,\ \xi^{n-1}$ можно выразить через оставшуюся текущую координату ξ^n. В результате получим выражения вида

$$\xi^i=\alpha^i\xi^n+\beta^i \qquad (i=1,\ \ldots,\ n-1),$$

откуда

$$\frac{\xi^1-\beta^1}{\alpha^1}=\ldots=\frac{\xi^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}}=\frac{\xi^n}{1}.$$

Это и будут канонические уравнения прямой (15).

В заключение найдем еще условия параллельности прямой и гиперплоскости в координатной форме.

Теорема 3. *Гиперплоскость, заданная уравнением*

$$a_1\xi^1+\ldots+a_n\xi^n+a_0=0, \tag{16}$$

тогда и только тогда параллельна прямой, заданной уравнениями

$$\frac{\xi^1-\beta^1}{\alpha^1}=\ldots=\frac{\xi^n-\beta^n}{\alpha^n}, \tag{17}$$

тогда

$$a_1\alpha^1+\ldots+a_n\alpha^n=0. \tag{18}$$

Обозначая общую величину отношений в (17) через λ, получим

$$\xi^i=\alpha^i\lambda+\beta^i \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{19}$$

Подставляя вместо текущих координат ξ^i эти значения в (16), приходим к уравнению

$$(a_1\alpha^1+\ldots+a_n\alpha^n)\lambda=-(a_1\beta^1+\ldots+a_n\beta^n+a_0). \tag{20}$$

Если окажется $a_1\alpha^1+\ldots+a_n\alpha^n\neq 0$, то из (20) найдем единственное значение для λ, а с помощью (19) и единственные значения для координат ξ^i точки пересечения прямой (17) и гиперплоскости (16). Таким образом, в указанном случае прямая и гиперплоскость заведомо не параллельны.

Пусть $a_1\alpha^1+\ldots+a_n\alpha^n=0$. Если правая часть в (20) отлична от нуля, то уравнение (20) решений для λ не имеет, прямая (17) и гиперплоскость (16) не пересекаются и потому они параллельны. Если же правая часть в (20) равна нулю, то (20) удовлетворяется при любых значениях λ, т. е. все точки прямой лежат на гиперплоскости и потому прямая и гиперплоскость снова параллельны.

30.4. Преобразование аффинных координат. Как изменяются координаты $\xi^1,\ \ldots,\ \xi^n$ произвольной точки X n-мерного аффинного пространства $\mathfrak{A}$, если мы от фиксированного координатного репера $R=(O,\ OA_1,\ \ldots,\ OA_n)$ перейдем к какому-нибудь другому реперу $R'=(O',\ O'A_1',\ \ldots,\ O'A_n')$? Рассмотрим сначала случай, когда репер R' получается из репера R посредством сдвига на вектор $\overline{OO'}$. В этом случае

$$\overline{O'A_i'}=\overline{OA_i} \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

По предположению

$$\overline{OX}=\xi^1\cdot\overline{OA_1}+\ldots+\xi^n\cdot\overline{OA_n}. \tag{2}$$

Обозначая через $x^1,\ \ldots,\ x^n$ координаты нового начала O' (в старом репере R) и через $\xi'^1,\ \ldots,\ \xi'^n$ новые координаты точки X (в репере R'), получим

$$\overline{OO'}=x^1\cdot\overline{OA_1}+\ldots+x^n\cdot\overline{OA_n}, \tag{3}$$

$$\overline{O'X}=\xi'^1\cdot\overline{O'A_1'}+\ldots+\xi'^n\cdot\overline{O'A_n'}. \tag{4}$$

Складывая почленно равенства (3), (4), пользуясь соотношениями (1) и сравнивая результат с формулой (2), приходим к искомым формулам

$$\xi^i=\xi'^i+x^i \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{5}$$

выражающим *закон преобразования координат при переносе начала*.

Рассмотрим теперь случай, когда начало нового координатного репера совпадает с началом старого репера. Системы компланарных векторов $OA_1,\ \ldots,\ OA_n$ и $O'A_1',\ \ldots,\ O'A_n'$ представляют собой два базиса векторного пространства $L(\mathfrak{A})$, и потому новые координатные векторы $\overline{O'A_i'}$ должны выражаться через старые по формулам вида

$$\overline{OA_i'}=\tau_i^1\cdot\overline{OA_1}+\ldots+\tau_i^n\cdot\overline{OA_n} \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{6}$$

где определитель матрицы $T=\|\tau_i^j\|$ отличен от нуля (п. 8.3).

Заметим, что $O=O'$, подставляя в формулу (4) вместо векторов $\overline{OA_i'}$ их выражения (6). Сравнивая результат подстановки с равенством (2), приходим к соотношениям

$$\xi^i=\xi'^1\tau_1^i+\ldots+\xi'^n\tau_n^i \qquad (i=1,\ \ldots,\ n),$$

которые нами короче переписать в знакомой матричной форме

$$(\xi^1, \ldots, \xi^n) = (\xi'^1, \ldots, \xi'^n) \cdot T, \tag{7}$$

Наконец, переход от репера $\boldsymbol{R} = (O, \overline{OA}_1, \ldots, \overline{OA}_n)$ к произвольному другому реперу $\boldsymbol{R}' = (O', \overline{O'A'_1}, \ldots, \overline{O'A'_n})$ можно осуществить в два шага (см. рис. 9 для $n=2$): 1) сдвигаем первоначальный репер на вектор $\overline{OO'}$; в результате получим репер $\boldsymbol{R}''$ с началом в точке O'; 2) от репера $\boldsymbol{R}''$ переходим к реперу $\boldsymbol{R}'$; при этом не меняется начало координат. Пользуясь последовательно формулами (5) и (7), получаем окончательные соотношения

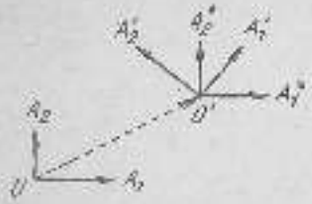


Рис. 9.

$$(\xi^1, \ldots, \xi^n) = (\xi'^1, \ldots, \xi'^n) \cdot T + (\alpha^1, \ldots, \alpha^n), \tag{8}$$

где $T = \|\tau_i^j\|$ — матрица перехода от базиса $\overline{OA}_1, \ldots, \overline{OA}_n$ к базису $\overline{O'A'_1}, \ldots, \overline{O'A'_n}$ (составленная из коэффициентов линейных выражений векторов $\overline{O'A'_i}$ через векторы $\overline{OA}_1, \ldots, \overline{OA}_n$), $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ — координаты нового начала, $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $(\xi'^1, \ldots, \xi'^n)$ — старые и новые координаты произвольной точки X.

По чисто формальным причинам в п. 30.1 строка $(1, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ была названа расширенной координатной строкой точки X, где $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — строка ее обычных координат. Из формулы (8) вытекает непосредственно, что

$$(1, \xi^1, \ldots, \xi^n) = (1, \xi'^1, \ldots, \xi'^n) \cdot T_{R'R}, \tag{9}$$

где

$$T_{R'R} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha^1 & \ldots & \alpha^n \\ 0 & \tau_1^1 & \ldots & \tau_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \tau_1^n & \ldots & \tau_n^n \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Матрица $T_{R'R}$ называется *матрицей перехода от репера* $\boldsymbol{R}$ *к реперу* $\boldsymbol{R}'$. Из (10) видно, что определитель матрицы $T_{R'R}$ совпадает с определителем матрицы $\|\tau_i^j\|$, являющейся матрицей перехода от старого координатного базиса в векторном пространстве $L(\mathfrak{M})$ к новому базису. Обратно, для любой матрицы T_1 вида (10) с отличным от нуля определителем и любого наперед заданного репера $\boldsymbol{R}$ формулы (6) и числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ позволяют однозначно найти такой репер $\boldsymbol{R}'$, чтобы матрица T_1 была матрицей перехода от $\boldsymbol{R}$ к $\boldsymbol{R}'$.

Из формулы (9) вытекает следующее важное

Следствие. Пусть задано три произвольных репера $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{R}''$, *и пусть* $T_{R'R}$ *— матрица перехода от* $\boldsymbol{R}$ *к* $\boldsymbol{R}'$, $T_{R''R'}$ *— матрица перехода от* $\boldsymbol{R}'$ *к* $\boldsymbol{R}''$. *Тогда матрицей перехода от* $\boldsymbol{R}$ *к* $\boldsymbol{R}''$ *будет произведение* $T_{R''R'}T_{R'R}$. *В частности, если* $T_{R'R}$ *есть матрица перехода от репера* $\boldsymbol{R}$ *к реперу* $\boldsymbol{R}'$, *то матрицей перехода от* $\boldsymbol{R}'$ *к* $\boldsymbol{R}$ *служит обратная матрица* $T_{R'R}^{-1}$.

В самом деле, обозначая через $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, $(\xi'^1, \ldots, \xi'^n)$, $(\xi''^1, \ldots, \xi''^n)$ координаты произвольной точки X соответственно в реперах $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{R}''$, согласно (9) получаем

$$(1, \xi^1, \ldots, \xi^n) = (1, \xi'^1, \ldots, \xi'^n) \cdot T_{R'R}$$

и в то же время

$$(1, \xi^1, \ldots, \xi^n) = (1, \xi''^1, \ldots, \xi''^n) \cdot T_{R''R} = (1, \xi''^1, \ldots, \xi''^n) \cdot T_{R''R'} T_{R'R}.$$

Таким образом, для произвольных $\xi''^1, \ldots, \xi''^n \in K$ имеем

$$(1, \xi''^1, \ldots, \xi''^n) \cdot T_{R''R} = (1, \xi''^1, \ldots, \xi''^n) \cdot T_{R''R'} T_{R'R}.$$

Подставляя сюда в качестве $\xi''^1, \ldots, \xi''^n$ координаты в реперe $\boldsymbol{R}''$ вершин этого репера, получим

$$T_{R''R} = T_{R''R'} T_{R'R}. \tag{11}$$

Если репер $\boldsymbol{R}''$ совпадает с репером $\boldsymbol{R}$, то матрица $T_{R''R}$ очевидно, будет единичной и соотношение (11) обращается в

$$E = T_{RR'} T_{R'R},$$

откуда

$$T_{R'R} = T_{RR'}^{-1}. \tag{12}$$

До сих пор мы интересовались только законом изменения координат точек. Спрашивается, как изменяются уравнения множеств точек при переходе от одного координатного репера к другому?

Пусть задано уравнение

$$f(\xi^1, \ldots, \xi^n) = 0 \tag{13}$$

какого-то множества $\mathfrak{M}$ в некотором репере $\boldsymbol{R}$. По определению это означает, что произвольная точка X тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{M}$, когда ее координаты $\xi^1, \ldots, \xi^n$ удовлетворяют соотношению (13). При переходе к новому координатному реперу $\boldsymbol{R}'$ получаем согласно (6)

$$\xi^i = \sum_{j=1}^{n} \xi'^j \tau_j^i + \alpha^i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Подставляя эти выражения для $\xi^1, \ldots, \xi^n$ в (13), получим

$$f\left(\sum \xi'^j \tau_j^1 + \alpha^1, \ldots, \sum \xi'^j \tau_j^n + \alpha^n\right) = 0. \tag{14}$$

Так как новые координаты $\xi'^1, \ldots, \xi'^n$ произвольной точки X тогда и только тогда удовлетворяют соотношению (14), когда $X \subset \mathfrak{M}$, то (14) является искомым уравнением множества $\mathfrak{M}$ в новых координатах теперь. Левая часть равенства (14) является некоторой функцией $g(\xi'^1, \ldots, \xi'^n)$ от переменных $\xi'^1, \ldots, \xi'^n$, вид которой, вообще говоря, отличается от вида первоначальной функции f. Однако если f есть полином от $\xi^1, \ldots, \xi^n$ какой-то степени s, то из (14) видно, что g будет также полиномом степени s от $\xi'^1, \ldots, \xi'^n$.

Как и в случае векторных пространств (см. п. 5.1), вопрос о преобразовании аффинных координат оказывается тесно связанным с задачей нахождения всех автоморфизмов аффинного пространства $\mathfrak{A}$ над фиксированным полем K. Пусть n — размерность пространства $\mathfrak{A}$ и $\mathscr{A}$ — некоторый автоморфизм $\mathfrak{A}$ над K (см. п. 29.1). Выбираем в $\mathfrak{A}$ какой-нибудь координатный репер $R = (O, OA_1, \ldots, OA_n)$. Вершины его $O, A_1, \ldots, A_n$ образуют линейно независимую систему точек в $\mathfrak{A}$. Отношение линейной независимости сохраняется при изоморфизмах, и потому точки $O\mathscr{A}, A_1\mathscr{A}, \ldots, A_n\mathscr{A}$ можно принять за вершины нового координатного репера $R\mathscr{A} = (O\mathscr{A}, \overline{O\mathscr{A}A_1\mathscr{A}}, \ldots, \overline{O\mathscr{A}A_n\mathscr{A}})$. Обозначим через $(X)^1_R, \ldots, (X)^n_R$ координаты произвольной точки X, вычисленные в репере R, и пусть

$$[X]_R = (1, (X)^1_R, \ldots, (X)^n_R)$$

— расширенная координатная строка точки X в репере R. Тогда формула (2) примет следующий вид:

$$\overline{OX} = (X)^1_R \cdot OA_1 + \ldots + (X)^n_R \cdot \overline{OA_n}. \tag{15}$$

При изоморфизмах линейные зависимости между векторами сохраняются, и потому из (15) получаем

$$\overline{O\mathscr{A}X\mathscr{A}} = (X)^1_R \cdot \overline{O\mathscr{A}A_1\mathscr{A}} + \ldots + (X)^n_R \cdot \overline{O\mathscr{A}A_n\mathscr{A}}. \tag{16}$$

Иными словами, координаты $X\mathscr{A}$ в репере $R\mathscr{A}$ совпадают с координатами X в репере R, т. е. в новой сокращенной записи

$$[X\mathscr{A}]_{R\mathscr{A}} = [X]_R.$$

Применяя формулу (9), получаем

$$[X]_R = [X\mathscr{A}]_{R\mathscr{A}} = [X\mathscr{A}] \cdot T_{R\mathscr{A}R}$$

и потому, в силу (12),

$$[X\mathscr{A}]_R = [X]\, T_{R\mathscr{A}R}. \tag{17}$$

Матрица $T_{R\mathscr{A}R}$ называется матрицей автоморфизма $\mathscr{A}$ в репере R и обозначается через $[\mathscr{A}]_R$ или просто через $[\mathscr{A}]$, если репер R заранее известен. В силу этого соотношение (17) можно переписать в окончательной форме:

$$[X\mathscr{A}] = [X]\,[\mathscr{A}]. \tag{18}$$

Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — какие-нибудь два заданных автоморфизма пространства $\mathfrak{A}$. Применяя формулу (18), получаем

$$[X(\mathscr{A}\mathscr{B})] = [X]\,[\mathscr{A}\mathscr{B}],$$

$$[(X\mathscr{A})\mathscr{B}] = [X\mathscr{A}]\,[\mathscr{B}] = [X]\,[\mathscr{A}]\,[\mathscr{B}],$$

откуда

$$[X]\,[\mathscr{A}\mathscr{B}] = [X]\,[\mathscr{A}]\,[\mathscr{B}].$$

Так как это равенство должно выполняться для любой точки X, то

$$[\mathscr{A}\mathscr{B}] = [\mathscr{A}]\,[\mathscr{B}]$$

и, следовательно,

$$[\mathscr{A}^{-1}] = [\mathscr{A}]^{-1}.$$

Рассмотрим пример. Пусть $\mathscr{A}$ есть сдвиг $\mathfrak{A}$ на вектор $\overline{OU}$ с координатами $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ в репере $R = (O, OA_1, \ldots, OA_n)$. Тогда из формул (9) и (5) получаем

$$[\mathscr{A}] = T_{R\mathscr{A}R} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \ldots & \alpha^n \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Если же автоморфизм $\mathscr{A}$ оставляет неподвижной начало координатного репера R, то матрица $[\mathscr{A}]$ распадается на 1 и матрицу $\|\alpha^i_j\|$ перехода в векторном пространстве $L(\mathfrak{A})$.

Примеры и задачи

1. Найти необходимые и достаточные условия пересечения двух прямых, заданных уравнениями с вещественными коэффициентами.

2. Найти параметрические уравнения плоскости, заданной системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3, \\ x_1 \quad x_2 \quad 3x_3 \quad 5x_4 &= 8. \end{aligned}\right\}$$

3. Доказать, что любая плоскость $\mathfrak{M}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ является аффинным пространством, размерность которого равна размерности $\mathfrak{M}$.

4. Доказать, что плоскость $\mathfrak{M}$ аффинного пространства, отличная от точки, тогда и только тогда параллельна любой не пересекающей ее плоскости, когда $\mathfrak{M}$ является гиперплоскостью.

§ 31. Выпуклые тела

До сих пор мы не рассматривали такие существенные геометрические понятия, как отношение «лежать между», полуплоскости, выпуклость. Причина в том, что в аффинных пространствах над произвольным полем они не могут быть введены естественным путем. Для их трактовки надо сузить класс полей и перейти к рассмотрению аффинных пространств над упорядоченными полями, например над полем вещественных чисел. Основные свойства таких пространств и составляют предмет изучения в этом параграфе.

31.1. Лучи. Напомним, что поле K называется *упорядоченным* (см. «Алгебра»), если помимо операций сложения и умножения для элементов K введено еще отношение порядка $\leqslant$, подчиняющееся двум условиям:

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma, \tag{1}$$

$$0 \leqslant \alpha \text{ и } 0 \leqslant \beta \Rightarrow 0 \leqslant \alpha\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma \in K). \tag{2}$$

Важнейшим примером упорядоченного поля может служить поле вещественных чисел, которое в первую очередь и следует иметь в виду во всех дальнейших рассуждениях этого и следующего параграфов.

Отметим на всякий случай, что из (1), (2) прямо вытекают следующие свойства:

Для любого элемента α упорядоченного поля

$$0 \leqslant \alpha^2, \quad -\alpha^2 \leqslant 0 \tag{3}$$

и, в частности, $0 \leqslant 1$, $-1 \leqslant 0$.

Для произвольных элементов α, β, γ упорядоченного поля

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow -\beta \leqslant -\alpha, \tag{4}$$

$$0 \leqslant \alpha \text{ и } \beta \leqslant \gamma \Rightarrow \alpha\beta \leqslant \alpha\gamma. \tag{5}$$

По определению полагают, что отношение $\alpha < \beta$ равносильно конъюнкции $\alpha \leqslant \beta$ и $\alpha \neq \beta$, а отношения $\alpha \geqslant \beta$, $\alpha > \beta$ означают то же, что и отношения $\beta \leqslant \alpha$, $\beta < \alpha$. Неотрицательный из элементов α, $-\alpha$ называется *абсолютной величиной* α и обозначается через $|\alpha|$. Из (1)—(5) легко следует, что

$$|-\alpha| = |\alpha|, \quad |\alpha+\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|, \quad |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Рассмотрим теперь какое-нибудь аффинное пространство $\mathfrak{A}$ над *упорядоченным* полем K. Говорят, что в пространстве $\mathfrak{A}$ точка X *лежит между* точками A и B, если

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad (\lambda \in K). \tag{6}$$

Ясно, что если X лежит между A и B, то A, X, B лежат на одной прямой. Далее, отношение «лежать между» симметрично: если X лежит между A и B, то X лежит между B и A. Действительно, из (6) получаем

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{XB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{XB},$$

и потому

$$\overrightarrow{BX} = (1-\lambda) \cdot \overrightarrow{BA}, \quad 0 \leqslant 1-\lambda \leqslant 1.$$

Пусть A, B, C — попарно различные точки, лежащие на одной прямой. Тогда для подходящего $\lambda \in K$ имеем $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$. Число λ удовлетворяет одному и только одному из условий: а) $\lambda < 0$; б) $0 < \lambda < 1$; в) $\lambda > 1$. Легко проверяется, что в случае а) точка A лежит между B и C; в случае в) B лежит между A и C; в случае б), по определению, C лежит между A и B.

Таким образом, *на любых лежащих на одной прямой трех различных точках одна и только одна лежит между двумя другими.*

Легко также устанавливается и второе основное свойство отношения «лежать между»: *если точки X лежат между точками A, B, а точка Y лежит между A и X, то Y лежит между A и B.*

При помощи понятия «между» на каждой прямой можно ввести два естественных отношения порядка, называемых также направлениями прямой. Выберем на заданной прямой $\mathfrak{M}$ какие-нибудь различные точки A, B и для точек $\mathfrak{M}$ введем бинарное отношение $\leqslant_{AB}$, зависящее от A, B, полагая, по определению, $X \leqslant_{AB} Y$ истинным, если

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AY} = \mu \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{и} \quad \lambda \leqslant \mu \quad (\lambda, \mu \in K), \tag{7}$$

т. е. упорядочивая точки прямой $\mathfrak{M}$ в соответствии с порядком, в котором находятся их координаты в репере $(A, \overrightarrow{AB})$.

Ясно, что порядки $\leqslant_{AB}$ и $\leqslant_{BA}$ двойственны, т. е. что

$$X \leqslant_{AB} Y \Leftrightarrow Y \leqslant_{BA} X.$$

С другой стороны, порядок $\leqslant_{PQ}$, определяемый на $\mathfrak{M}$ какой-нибудь другой парой точек P, Q, в случае $P \leqslant_{AB} Q$ совпадает с порядком $\leqslant_{AB}$, а в случае $Q \leqslant_{AB} P$ совпадает с порядком $\leqslant_{BA}$. Таким образом, *на прямой $\mathfrak{M}$ среди порядков вида $\leqslant_{PQ}$ имеются лишь два различных порядка. Они называются естественными порядками или направлениями прямой.* При автоморфизмах пространства $\mathfrak{A}$ над K отношение «лежать между» сохраняется и естественные порядки также сохраняются. Однако благодаря наличию на прямой двух естественных порядков автоморфизм пространства $\mathfrak{A}$ могут один из естественных порядков на прямой $\mathfrak{M}$ переводить в другой естественный порядок той же прямой. Поэтому

инвариантом является не отношение порядка, а пара двойных отношений порядков.

Теорема. *Если линейный функционал $f(X)$ не постоянен на прямой $\mathfrak{M}$, то отображение $f(X) \to X$ $(X \in \mathfrak{M})$ является взаимно однозначным отображением K на $\mathfrak{M}$, при котором порядок $\leqslant$, заданный на поле K, переходит в один из двух естественных порядков, определенных на $\mathfrak{M}$.*

Фиксируем на прямой какие-нибудь точки O, A, для которых $f(O) \neq f(A)$, и пусть

$$OX = \lambda \cdot OA \qquad (X \in \mathfrak{M},\ \lambda \in K).$$

В силу (7) отображение $\lambda \to X$ является взаимно однозначным отображением K на $\mathfrak{M}$, переводящим заданный порядок на K в естественный порядок на $\mathfrak{M}$. Из линейности f следует:

$$f(X) = \lambda (f(A) - f(O)) + f(O) = \alpha\lambda + \beta.$$

Так как $\alpha \neq 0$, то отображение $f(X) \to \lambda$ является взаимно однозначным отображением K на K, либо сохраняющим порядок, либо обращающим порядок. Отображение $f(X) \to X$, как композиция отображений $f(X) \to \lambda$ и $\lambda \to X$, также является взаимно однозначным и переводящим порядок на K в естественный порядок на $\mathfrak{M}$.

Для любых двух точек A, B пространства $\mathfrak{R}$ *отрезком* $[A, B]$ называется совокупность всех точек, лежащих между A и B. Точки A, B называются *концами отрезка* $[A, B]$. Из определения отношения «лежать между» следует, что концы отрезка принадлежат отрезку, а из симметричности отношения следует, что $[A, B] = [B, A]$. Ясно, что отрезок $[A, A]$ состоит лишь из точки A.

Говорят, что число λ лежит между числами α, β $(\alpha, \beta, \lambda \in K)$, если $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$ или $\beta \leqslant \lambda \leqslant \alpha$. Совокупность чисел, лежащих между α и β, называется *числовым отрезком* и обозначается через $[\alpha, \beta]$. Из предыдущей теоремы получаем

Следствие. *Совокупность значений линейного функционала $f(X)$ на отрезке $[A, B]$ есть числовой отрезок $[f(A), f(B)]$. Совокупность значений f на прямой $\mathfrak{M}$ либо совпадает со всем полем K (если f не постоянен на $\mathfrak{M}$), либо состоит из одного числа (если f постоянен на $\mathfrak{M}$).*

Введем теперь понятие полупрямой или луча. Говорят, что точка X лежит по ту же сторону от точки O, что и точка A, если X лежит между O, A или A лежит между O, X.

Совокупность точек $\mathfrak{M}_0$ пространства $\mathfrak{R}$ называется *лучом*, если в $\mathfrak{M}_0$ существуют такие различные точки O, A, что $\mathfrak{M}_0$ состоит из всех точек X, лежащих от O по ту же сторону, что и точка A. Точка O называется *вершиной* луча, который мы теперь обозначим $\mathfrak{M}_{OA}$.

Из этого определения следует, что все точки луча $\mathfrak{M}_{OA}$ принадлежат прямой $O \vee A$. Если на прямой $O \vee A$ взять репер (O, OA) в качестве координатного репера, то каждому $\lambda \in K$ будет отвечать точка X с линейной координатой λ, для которой $\overline{OX} = \overline{\lambda OA}$. Ясно, что луч $\mathfrak{M}_{OA}$ состоит из точек прямой $O \vee A$, имеющих неотрицательную координату. Отсюда, в частности, видно, что каждый луч имеет лишь одну вершину O и если на луче $\mathfrak{M}_{OA}$ взять какую-нибудь точку B, отличную от O, то лучи $\mathfrak{M}_{OA}$ и $\mathfrak{M}_{OB}$ совпадают. Легко также убедиться, что если на некоторой прямой взять произвольную точку O, то прямая будет распадаться в точности на два различных луча с вершиной O.

Пусть линейный функционал $f(X)$ на прямой $\mathfrak{M}$ не постоянен. В силу теоремы 1 на прямой $\mathfrak{M}$ найдется точка O и только одна такая точка, в которой функционал f обращается в нуль. Так как при отображении $f(X) \to X$ порядок в K переходит в естественный порядок на $\mathfrak{M}$, то совокупности точек $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ из $\mathfrak{M}$, в которых $\lambda \leqslant 0$ и соответственно $\lambda \geqslant 0$, являются как раз теми лучами, на которые точка O делит прямую $\mathfrak{M}$.

31.2. Полупространства. Аналогом понятия луча для многомерных плоскостей пространства $\mathfrak{R}$ служит понятие полуплоскости и, в частности, понятие полупространства, к определению которого мы теперь и перейдем.

Пусть снова $\mathfrak{R}$ — какое-нибудь аффинное пространство над упорядоченным полем K, а $\mathfrak{P}$ — произвольная гиперплоскость в $\mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{P}$ содержит точки X, Y, то $\mathfrak{P}$ содержит и все точки прямой $X \vee Y$. Поэтому любой отрезок $[A, B]$ из $\mathfrak{R}$ либо целиком содержится в $\mathfrak{P}$, либо содержит не более одной точки из $\mathfrak{P}$. Говорят, что точки A, B *лежат по разные стороны* от гиперплоскости $\mathfrak{P}$, если обе они не принадлежат $\mathfrak{P}$, но отрезок $[A, B]$ содержит некоторую точку из $\mathfrak{P}$. Во всех остальных случаях говорят, что точки A, B *лежат по одну сторону* от $\mathfrak{P}$, символически: $A \equiv B\ (\mathfrak{P})$. В частности, $A = A\ (\mathfrak{P})$ и из $A \equiv B\ (\mathfrak{P})$ следует $B = A\ (\mathfrak{P})$ для любых A, B. Далее, если $A \in \mathfrak{P}$, то $A \equiv B\ (\mathfrak{P})$ для любой точки B.

Теорема 1. *Пусть $f(X)$ — какой-нибудь неравномерный линейный функционал на пространстве $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{P}$ — гиперплоскость, состоящая из точек X, в которых $f(X) = 0$. Тогда для любых A, B*

$$A \equiv B\ (\mathfrak{P}) \Longleftrightarrow f(A) \cdot f(B) > 0. \qquad (1)$$

Пусть A, B лежат по разные стороны от $\mathfrak{P}$. Совокупность значений, принимаемых $f(X)$ в точках отрезка $[A, B]$, есть числовой отрезок $[f(A), f(B)]$. По условию $f(A) \neq 0$, $f(B) \neq 0$ и $0 \in [f(A), f(B)]$. Следовательно, $f(A) \cdot f(B) < 0$. Обратно, пусть для каких-то точек A, B имеем $f(A) \cdot f(B) < 0$. Тогда $0 \in [f(A),$

$f(B)]$, т. е. для некоторой точки $X \subset [A, B]$ имеем $f(X) = 0$, откуда $X \subset \mathfrak{P}$, и потому A, B лежат по разные стороны от $\mathfrak{P}$.

Следствие. *Если точки A не лежит на гиперплоскости $\mathfrak{P}$ и $A \equiv B(\mathfrak{P})$, $A \equiv C(\mathfrak{P})$, то $B \equiv C(\mathfrak{P})$.*

Действительно, если точки A, B, C удовлетворяют перечисленным требованиям, то согласно теореме 1

$$f(A) \neq 0, \quad f(A)f(B) \geqslant 0, \quad f(A)f(C) \geqslant 0,$$

откуда $(f(A))^2 f(B)f(C) \geqslant 0$, и потому $f(B)f(C) \geqslant 0$.

Введем теперь основное понятие: для любой гиперплоскости $\mathfrak{P}$ и произвольной точки $A \notin \mathfrak{P}$ совокупность тех точек, которые лежат вместе с точкой A по одну сторону от $\mathfrak{P}$, называется *полупространством, определяемым гиперплоскостью $\mathfrak{P}$ и точкой A*. Это полупространство условимся временно обозначать $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}A}$.

Из определения видно, что $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}A}$ заведомо содержит A и гиперплоскость $\mathfrak{P}$. Множество, получаемое из $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}A}$ выбрасыванием гиперплоскости $\mathfrak{P}$, называется *открытым полупространством*, определяемым гиперплоскостью $\mathfrak{P}$ и точкой A.

Теорема 2. *Если точки A, B не принадлежат гиперплоскости $\mathfrak{P}$ и отрезок $[A, B]$ не содержит точек $\mathfrak{P}$, то полупространства $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}A}$, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}B}$ совпадают. Если точки A, C лежат по разные стороны от $\mathfrak{P}$, то $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}A} \neq \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}C}$ и каково полупространство $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}D}$ совпадает либо с $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}A}$, либо с $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}C}$.*

Рассмотрим неоднородный линейный функционал $f(X)$, обращающийся в 0 на $\mathfrak{P}$. Так как отрезок $[A, B]$ не содержит точек $\mathfrak{P}$, то ввиду формулы (1) числа $f(A)$ и $f(B)$ имеют одинаковые знаки. Аналогично устанавливаем, что числа $f(A)$ и $f(C)$ имеют разные знаки. Из теоремы 1 следует, что для любой точки $D \notin \mathfrak{P}$, если $f(D) > 0$, то $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}D}$ совпадает с совокупностью $\mathfrak{A}^+$ тех точек X, для которых

$$f(X) \geqslant 0; \tag{2}$$

а если $f(D) < 0$, то $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}D}$ совпадает с совокупностью $\mathfrak{A}^-$ тех точек X, для которых

$$f(X) \leqslant 0. \tag{3}$$

Таким образом, произвольное полупространство $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}D}$ совпадает либо с $\mathfrak{A}^+$, либо с $\mathfrak{A}^-$. Если $f(A) > 0$, то из упомянутых выше соотношений получаем

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}A} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}B} = \mathfrak{A}^+, \quad \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}C} = \mathfrak{A}^-;$$

если же $f(A) < 0$, то

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}A} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}B} = \mathfrak{A}^-, \quad \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}C} = \mathfrak{A}^+.$$

Следствие 1. *Для каждого неоднородного линейного функционала $f(X)$ совокупность точек X, удовлетворяющих неравенству*

$$f(X) \geqslant 0,$$

и совокупность точек X, удовлетворяющих неравенству

$$f(X) \leqslant 0,$$

являются двумя полупространствами, определяемыми гиперплоскостью

$$f(X) = 0. \tag{4}$$

Совокупности точек X, определяемых строгими неравенством

$$f(X) > 0 \tag{5}$$

и соответственно строгим неравенством

$$f(X) < 0, \tag{6}$$

являются открытыми полупространствами, на которые гиперплоскость (4) делит заданное аффинное пространство $\mathfrak{A}$.

В самом деле, согласно п. 29.4 уравнение (4) определяет некоторую гиперплоскость $\mathfrak{P}$, которая определяет полупространства (2) и (3). Совокупности точек, определяемых строгими неравенствами (5) и (6), получаются из полупространств (2), (3) отбрасыванием решений уравнения (4) и потому являются открытыми полупространствами.

Следствие 2. *Пусть в пространстве $\mathfrak{A}$ конечной размерности n выбран произвольный координатный репер. Тогда совокупность точек X, координаты которых $\xi^1, \ldots, \xi^n$ удовлетворяют фиксированному неравенству*

$$a_1\xi^1 + \ldots + a_n\xi^n \geqslant a_0,$$

у которого хотя бы один из старших коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ отличен от нуля, является полупространством, определяемым гиперплоскостью

$$a_1\xi^1 + \ldots + a_n\xi^n = a_0. \tag{7}$$

Совокупность точек X, координаты которых удовлетворяют строгому неравенству

$$a_1\xi^1 + \ldots + a_n\xi^n > a_0,$$

является открытым полупространством, определяемым гиперплоскостью (7).

Согласно п. 30.1 функционал, определяемый формулой

$$f(X) = a_1\xi^1 + \ldots + a_n\xi^n - a_0,$$

является линейной и неотрицательной на $\mathfrak{M}$. Применяя к f следствие 1, получим требуемые утверждения.

Пока мы рассматривали лишь в известном смысле крайние случаи: пучи или полупрямые и полупространства. Однако легко определить понятие полуплоскости и для любой плоскости $\mathfrak{M}$, содержащейся в пространстве $\mathfrak{A}$. В каком духе, мы знаем, что $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как подпространство над тем же полем K, что и пространство $\mathfrak{A}$. Применяя сказанное выше к аффинному пространству $\mathfrak{M}$ над K, получим понятие полупространства пространства $\mathfrak{M}$. Эти полупространства называются *полуплоскостями* плоскости $\mathfrak{M}$.

Теорема 3. *Пусть плоскость $\mathfrak{M}$ и гиперплоскость $\mathfrak{P}$ не параллельны и A — какая-нибудь точка на $\mathfrak{M}$, не лежащая на $\mathfrak{P}$. Тогда пересечение полупространства $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$ и плоскости $\mathfrak{M}$ будет полуплоскостью в $\mathfrak{M}$, определяемой точкой A и гиперплоскостью $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{P}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.*

Каждая полуплоскость в $\mathfrak{M}$ есть пересечение $\mathfrak{M}$ с подходящим полупространством $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$, проходящим через $\mathfrak{M}$.

Пусть $f(X)$ — упомянутый линейный функционал, обращающийся в нуль на $\mathfrak{P}$, и пусть $f(A)>0$. Тогда полупространство $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$ будет совокупностью решений неравенства $f(X)\geqq 0$, а пересечение $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$ будет совокупностью точек $Y\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющих неравенству $f(Y)\geqq 0$. Так как ограничение f на $\mathfrak{M}$ есть линейный функционал на $\mathfrak{M}$, то согласно следствию 1 множество $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$ есть полуплоскость в $\mathfrak{M}$. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы 3.

Возвращаясь снова к полупространствам пространства $\mathfrak{A}$, поставим вопрос: *каковы способы, какими могут располагаться друг относительно друга два полупространства $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}$?*

Рассмотрим отдельно каждый из трех возможных здесь случаев:

1) Гиперплоскости $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ совпадают. Тогда полупространства $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}$ либо совпадают, либо их объединение есть все пространство $\mathfrak{A}$, а пересечение — гиперплоскость $\mathfrak{P}$.

2) Гиперплоскости $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ не пересекаются и, следовательно, параллельны. Здесь возможны следующие подслучаи:

а) $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}$, $A\subset\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$. Тогда $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}\cup\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}=\mathfrak{A}$.

б) $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}$, $B\not\subset\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$. Тогда $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}\supset\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$.

в) $\mathfrak{P}\not\subset\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}$, $B\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$. Тогда $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}\supset\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}$.

г) $\mathfrak{P}\not\subset\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}$, $B\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}$. Тогда $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}\cup\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}\neq\mathfrak{A}$.

Множества последнего вида иногда называются *интервалами*. Пересечение любой прямой с гиперплоскостью, как легко убедиться, либо пусто, либо совпадает со всей прямой, либо есть отрезок прямой.

3) Гиперплоскости $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ пересекаются. Согласно п. 29.2 $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{Q}$ есть плоскость, коразмерность которой равна 2. Пересечение полупространств $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},A}\cap\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},B}$ называется в рассматриваемом случае *интервалом* с ребром $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{Q}$.

§ 31.3. **Выпуклые множества.** Множество точек $\mathfrak{S}$ аффинного пространства $\mathfrak{A}$ над упорядоченным полем K называется *выпуклым* или *опуклым*, если

$$X\in\mathfrak{S}\text{ и }Y\in\mathfrak{S}\Rightarrow[X,Y]\subset\mathfrak{S}. \tag{1}$$

Отсюда следует, что плоскости пространства $\mathfrak{A}$, а также отрезки, лучи, полуплоскости и открытые полупространства в $\mathfrak{A}$ являются выпуклыми множествами.

Из определения (1) непосредственно видно, что *пересечение любого семейства выпуклых множеств является выпуклым множеством*. В частности, пересечение любого семейства полупространств есть выпуклое множество.

Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих какое-нибудь фиксированное множество точек $\mathfrak{M}$, называется *выпуклым замыканием* множества $\mathfrak{M}$ и обозначается через $\mathrm{Conv}\,\mathfrak{M}$. Из сделанного выше замечания вытекает, что выпуклое замыкание произвольного множества $\mathfrak{M}$ есть наименьшее выпуклое множество, содержащее в себе $\mathfrak{M}$. Ясно, что $\mathfrak{M}$ выпукло тогда и только тогда, когда $\mathrm{Conv}\,\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$. Также очевидно, что из $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$ следует $\mathrm{Conv}\,\mathfrak{M}\subseteq\mathrm{Conv}\,\mathfrak{N}$. Каждая точка $X\in\mathfrak{A}$ сама по себе образует выпуклое множество, и потому $\mathrm{Conv}\,X=X$. Однако уже для двух точек X, Y, как легко убедиться, имеем формулу

$$\mathrm{Conv}\,\{X,Y\}=[X,Y]. \tag{2}$$

Выражения для выпуклого замыкания произвольного множества дает

Теорема 1. *Выберем в пространстве $\mathfrak{A}$ какую-нибудь точку O. Выпуклое замыкание $\mathrm{Conv}\,\mathfrak{M}$ произвольного множества точек $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех точек $X\in\mathfrak{A}$, для каждой из которых в $\mathfrak{M}$ найдется конечная система точек $M_1,\ldots,M_s$, связанных с X соотношением*

$$\overrightarrow{OX}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{OM_1}+\ldots+\lambda_s\cdot\overrightarrow{OM_s}, \tag{3}$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ — подходящие числа из K, подчиненные условиям

$$\lambda_1\geqq 0,\ \ldots,\ \lambda_s\geqq 0, \tag{4}$$

$$\lambda_1+\ldots+\lambda_s=1. \tag{5}$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность точек X, удовлетворяющих требованиям (3), (4), (5), и покажем, что $\mathfrak{N}$ выпукло. Пусть A,

$B \in \mathfrak{M}$, и, следовательно, для подходящих $M_i \in \mathfrak{M}$, α_i, $\beta_j \in K$

$$OA = \alpha_1 \cdot \overline{OM_1} + \ldots + \alpha_s \cdot \overline{OM_s},$$
$$OB = \beta_1 \cdot \overline{OM_1} + \ldots + \beta_s \cdot \overline{OM_s},$$

причем

$$\alpha_i \geq 0, \ \beta_i \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, s),$$
$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = \beta_1 + \ldots + \beta_s = 1.$$

Для произвольной точки $X \in [A, B]$ имеем

$$\overline{OX} = \lambda \cdot \overline{OA} + \mu \cdot \overline{OB} \qquad (\lambda \geq 0, \ \mu \geq 0, \ \lambda + \mu = 1),$$

и потому

$$\overline{OX} = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) \cdot \overline{OM_1} + \ldots + (\lambda\alpha_s + \mu\beta_s) \cdot \overline{OM_s}.$$

Так как здесь

$$\lambda\alpha_i + \mu\beta_i \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

и, кроме того,

$$\sum (\lambda\alpha_i + \mu\beta_i) = \lambda \sum \alpha_i + \mu \sum \beta_i = 1,$$

то $X \in \mathfrak{M}$, и множество $\mathfrak{M}$ выпукло.

Остается показать, что каждое выпуклое множество $\mathfrak{N}$, содержащее множество $\mathfrak{M}$, содержит и все точки X, удовлетворяющие условиям (3), (4), (5). В эти условия входит натуральное число s, и при $s = 1$ только что сформулированное утверждение тривиально. Далее применяем индукцию по s. Пусть для какого-то фиксированного s любая точка X, удовлетворяющая условиям (3), (4), (5), принадлежит $\mathfrak{N}$. Рассмотрим точку Y, удовлетворяющую условиям

$$\overline{OY} = \alpha_1 \cdot \overline{OM_1} + \ldots + \alpha_s \cdot \overline{OM_s} + \alpha_{s+1} \cdot \overline{OM_{s+1}} \qquad (M_i \in \mathfrak{M}),$$
$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_s + \alpha_{s+1} = 1, \ \alpha_i \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, s+1).$$

Если здесь $\alpha_s = 0$ или $\alpha_{s+1} = 0$, то по индуктивному предположению $Y \in \mathfrak{N}$. Поэтому пусть $\alpha_s \cdot \alpha_{s+1} \neq 0$, и, следовательно, полагая $\mu = \alpha_s + \alpha_{s+1}$, имеем $\mu > 0$. Точка X, определенная соотношением

$$\overline{OX} = \frac{\alpha_s}{\mu} \overline{OM_s} + \frac{\alpha_{s+1}}{\mu} \overline{OM_{s+1}},$$

удовлетворяет условиям (3), (4), (5) с фиксированным s, и потому $X \in \mathfrak{N}$. Теперь имеем

$$\overline{OY} = \mu \cdot \overline{OX} + \alpha_{s+1} \cdot \overline{OM_{s+1}} \qquad (\lambda = \alpha_{s+1} = 1, \ \lambda \geq 0, \ \lambda_{s+1} \geq 0),$$

и потому $Y \in [X, M_{s+1}]$. Так как $\mathfrak{N}$ выпукло и $X, M_{s+1} \in \mathfrak{N}$, то $Y \in \mathfrak{N}$, что и требовалось.

В каждом из условий (4) участвует лишь конечное число точек множества. Поэтому из теоремы 1 вытекает, что *выпуклая*

замыкание бесконечного множества точек есть объединение выпуклых замыканий всевозможных конечных подмножеств данного множества.

Говорят, что *размерность выпуклого множества* $\mathfrak{L}$ *равна* r, если $\mathfrak{L}$ содержится в некоторой r-мерной плоскости $\mathfrak{E}$ и не содержится ни в какой плоскости меньшей размерности. Аналогично определяется и коразмерность выпуклого множества.

Следствие. *Если максимальное число линейно независимых точек в множестве* $\mathfrak{M}$ *равно* $r+1$, *то размерность* $\operatorname{Conv} \mathfrak{M}$ *равна* r.

Пусть, например, все точки множества $\mathfrak{M}$ линейно зависят от линейно независимых точек $A_0, A_1, \ldots, A_r$ этого множества. Тогда $\mathfrak{M}$ содержится в плоскости $\mathfrak{N} = A_0 \vee A_1 \vee \ldots \vee A_r$, имеющей размерность r, и потому $\operatorname{Conv} \mathfrak{M} \subseteq \operatorname{Conv} \mathfrak{N}$. Но плоскость — множество выпуклое, и, следовательно, $\operatorname{Conv} \mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

Выпуклое множество $\mathfrak{L}$ называется *собственным* в пространстве $\mathfrak{N}$, если коразмерность $\mathfrak{L}$ равна нулю. Остальные выпуклые множества называются *несобственными* в $\mathfrak{N}$. Примерами собственных выпуклых множеств могут служить сами пространство $\mathfrak{N}$, а также его полупространства и открытые полупространства. Плоскости искусственной коразмерности и их полуплоскости являются несобственными выпуклыми множествами в $\mathfrak{N}$. Ясно, что каждое выпуклое множество $\mathfrak{L}$ является собственным выпуклым множеством в плоскости, служащей линейным замыканием $\mathfrak{L}$.

Говорят, что точка S лежит *строго внутри* отрезка $[A, B]$, если S отлична от A, B и $S \in [A, B]$. Точка S называется внутренней для некоторого выпуклого множества $\mathfrak{L}$, если на каждой прямой, проходящей через S, найдется отрезок, содержащий S строго внутри себя и целиком принадлежащий $\mathfrak{L}$.

Говорят, что точка S *касается* выпуклого множества $\mathfrak{L}$, если существует такая проходящая через S прямая, что любой ее отрезок, содержащий точку S строго внутри себя, содержит хотя бы одну точку из $\mathfrak{L}$. В частности, все точки множества $\mathfrak{L}$ касаются $\mathfrak{L}$. Однако могут существовать и точки, касающиеся $\mathfrak{L}$, но не принадлежащие $\mathfrak{L}$. Если все точки, касающиеся $\mathfrak{L}$, принадлежат $\mathfrak{L}$, то $\mathfrak{L}$ называется *замкнутым* множеством. Выпуклое множество $\mathfrak{L}$ называется *открытым*, если каждая точка X — внутренняя для $\mathfrak{L}$.

Теорема 2. *Пересечение произвольного семейства замкнутых выпуклых множеств есть замкнутое выпуклое множество. Пересечение любого конечного семейства открытых выпуклых множеств есть открытое выпуклое множество.*

Первое утверждение непосредственно следует из определения замкнутых множеств. Докажем второе утверждение. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — выпуклые открытые множества. Тогда множество $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$

выпуклое. Если оно пусто, то доказывать нечего, так как пустые множества по определению открытые. Пусть $S \subset \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}$ — произвольная прямая в пространстве $\mathfrak{A}$, проходящая через точку S. Согласно предположению на этой прямой найдутся отрезки, содержащие S строго внутри себя и принадлежащие соответственно множествам $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Но тогда пересечение этих отрезков будет некоторым отрезком, принадлежащим $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ и содержащим точку S строго внутри себя.

Введем еще одно важное понятие. Точка S называется *границей* для выпуклого множества $\mathfrak{S}$, если S касается $\mathfrak{S}$, но не является внутренней для $\mathfrak{S}$. Иначе говоря, точка S называется граничной для $\mathfrak{S}$, если существует такая проходящая через S прямая, на которой каждый отрезок, содержащий строго внутри себя точку S, содержит по меньшей мере одну точку из $\mathfrak{S}$ и одну точку не из $\mathfrak{S}$. Совокупность всех точек, граничных для выпуклого множества $\mathfrak{S}$, называется *границей* множества $\mathfrak{S}$.

Теорема 3. *Произвольное полупространство $\mathfrak{A}_{\Psi A}$, определяемое в пространстве $\mathfrak{A}$ какой-нибудь гиперплоскостью Ψ и не лежащей на Ψ точкой A, а также соответствующее открытое полупространство $\mathfrak{A}^0_{\Psi A} = \mathfrak{A}_{\Psi A} \setminus \Psi$ являются соответственно замкнутым и открытым выпуклыми множествами в $\mathfrak{A}$. Границей того и другого множества служит полуплоскость Ψ. Каждое необходимое выпуклое множество $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{A}$ не содержит внутренних точек.*

Пусть $P \in \Psi$. Рассмотрим прямую $A \vee P$ и на ней произвольный отрезок $[B, C]$, содержащий точку P строго внутри себя. Так как прямая $A \vee P$ не лежит в Ψ, то концы отрезка $[B, C]$ также не принадлежат Ψ, и поскольку $P \subset [B, C]$, то точки B, C лежат по разные стороны от гиперплоскости Ψ. Следовательно, один из концов B, C принадлежит открытому полупространству $\mathfrak{A}^0_{\Psi A}$, а другой конец не принадлежит $\mathfrak{A}_{\Psi A}$. Таким образом, точка P граничная как для $\mathfrak{A}_{\Psi A}$, так и для $\mathfrak{A}^0_{\Psi A}$.

Покажем, что любая точка $D \in \mathfrak{A}_{\Psi A}$ не касается $\mathfrak{A}_{\Psi A}$, а потому не касается и $\mathfrak{A}^0_{\Psi A}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная прямая, проходящая через точку D. Если эта прямая не пересекает Ψ, то она целиком лежит в полупространстве $\mathfrak{A}_{\Psi D} = \mathfrak{A}_{\Psi D} \setminus \Psi$ и потому произвольный ее отрезок не содержит точек из $\mathfrak{A}_{\Psi A}$. Если же $\mathfrak{M}$ пересекает Ψ в какой-то точке P, то на $\mathfrak{M}$ найдутся точки B, C, отличные от D, P и такие, что $D \subset [B, P]$, $C \in [D, P]$. Таким образом, отрезок $[B, C]$ лежит на $\mathfrak{M}$, содержит строго внутри себя D и не содержит точек полупространства $\mathfrak{A}_{\Psi A}$. Поэтому точка D не касается $\mathfrak{A}_{\Psi A}$. Одновременно мы доказали, что все точки открытого полупространства $\mathfrak{A}^0_{\Psi A}$ внутренние и потому любое открытое полупространство есть открытое выпуклое множество.

Для доказательства последнего утверждения теоремы достаточно обозначить через Ψ ту гиперплоскость, в которой по предположению содержится множество $\mathfrak{S}$, и заметить, что отрезок прямой $A \vee P$ ($P \in \mathfrak{S}$, $A \notin \Psi$), содержащий строго внутри себя точку P, непременно содержит и точки, не принадлежащие гиперплоскости Ψ.

Из теорем 2, 3 получаем важное

Следствие 1. *Пересечение любого семейства полупространств пространства $\mathfrak{A}$ есть замкнутое выпуклое множество в $\mathfrak{A}$. Пересечение любого конечного семейства открытых полупространств пространства $\mathfrak{A}$ есть открытое выпуклое множество в $\mathfrak{A}$.*

Вспомним, что для любого неотрицательного линейного функционала $f(X)$ совокупность решений неравенства $f(X) \geqslant 0$ есть полупространство, а совокупность решений строгого неравенства $f(X) > 0$ есть открытое полупространство, получаем

Следствие 2. *Пусть $f_1(X), \ldots, f_s(X)$ — какие-нибудь неоднородные линейные функционалы на аффинном пространстве $\mathfrak{A}$. Тогда совокупность решений X системы неравенств*

$$f_i(X) \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

есть замкнутое выпуклое множество в $\mathfrak{A}$, а совокупность решений системы строгих неравенств

$$f_i(X) > 0 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

есть открытое выпуклое множество в $\mathfrak{A}$.

Гиперплоскость Ψ называется *опорной* гиперплоскостью выпуклого множества $\mathfrak{S}$, если $\Psi \cap \mathfrak{S} \neq \varnothing$ и все точки $\mathfrak{S}$ лежат по какую-нибудь одну сторону от Ψ. Пересечения опорных гиперплоскостей с множеством $\mathfrak{S}$ называются *гранями* $\mathfrak{S}$. Из этих определений непосредственно следует, что грани выпуклых множеств принадлежат границам этих множеств и сами являются выпуклыми множествами. Грани замкнутых выпуклых множеств замкнуты.

Дополнения и примеры

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное аффинное пространство конечной размерности $n \geqslant 1$ над упорядоченным полем K.

1. Выпуклое замыкание линейно независимых точек $A_0, \ldots, A_{k-1}$ называется *k-мерным симплексом* в $\mathfrak{A}$. Если $k \leqslant n$, то этот симплекс лежит в k-мерной плоскости $A_0 \vee \ldots \vee A_{k-1}$ и поэтому является необходимым выпуклым множеством в $\mathfrak{A}$. n-мерные симплексы называются просто *симплексами* в $\mathfrak{A}$. Точки $A_0, \ldots, A_{k-1}$ называются вершинами симплекса $\mathrm{Conv}\{A_0, \ldots, A_{k-1}\}$.

2. Описать симплексы одномерных, двумерных и трехмерных пространств.

3. Для каждого r, $0 \leqslant r \leqslant n-1$, все r-мерные грани симплекса $A = \mathrm{Conv}\{A_0, \ldots, A_{n+1}\}$ — это симплексы $\mathrm{Conv}\{A_{i_0}, \ldots, A_{i_{r+1}}\}$ $(1 \leqslant i_0 < \ldots < i_{r+1} \leqslant n+1)$.

4. Каждое выпуклое множество $\mathscr{C}_1$ состоящее более чем из одной точки системы $\mathscr{A}$, целиком содержится в некотором $(n-1)$-мерном симплексе $A' = \mathrm{Conv}\{A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{n+1}\}$.

5. Если точки $A_0, \ldots, A_{n-1}$ линейно независимы и для некоторых точек $B_0, \ldots, B_{n-1}$

$$\mathrm{Conv}\{A_0, \ldots, A_{n-1}\} = \mathrm{Conv}\{B_0, \ldots, B_{n-1}\},$$

то множество $\{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$ и множество $\{B_0, \ldots, B_{n-1}\}$ совпадают.

6. *Замкнутым многогранником* в $\mathscr{A}$ называется выпуклое замыкание $\mathscr{C} = \mathrm{Conv}\{C_0, \ldots, C_s\}$ произвольной конечной системы точек $C_0, \ldots, C_s$ из $\mathscr{A}$.

Система точек называется *выпукло независимой*, если ни одна точка системы не содержится в выпуклом замыкании остальных точек.

Показать, что если $\mathscr{C} = \mathrm{Conv}\{C_0, \ldots, C_s\}$ — выпуклый многогранник, то существуют точки $C_{i_0}, \ldots, C_{i_l}$, $0 \leqslant i_0 < \ldots < i_l \leqslant s$, такие, что система точек $C_{i_0}, \ldots, C_{i_l}$ выпукло независима и

$$\mathrm{Conv}\{C_0, \ldots, C_s\} = \mathrm{Conv}\{C_{i_0}, \ldots, C_{i_l}\}.$$

7. Симплекс S назовем *диагональным симплексом* выпуклого n-мерного многогранника $\mathscr{C}$, построенного выпуклой оболочкой системой точек $C_0, \ldots, C_{n+1}$, если вершины симплекса принадлежат множеству $\{C_0, \ldots, C_{n+1}\}$. Говорят, что r-мерный и s-мерный симплексы A и B расположены правильно друг относительно друга, если они либо совсем не пересекаются, либо пересекаются по множеству, служащему гранью и того и другого симплекса.

Имеет место следующее утверждение:

Существует такое множество диагональных симплексов многогранника $\mathscr{C}$, что любая точка многогранника принадлежит объединению точек этих симплексов, и любые два симплекса из этого множества расположены правильно.

§ 32. Евклидовы точечные пространства

В предыдущих параграфах мы изучали свойства аффинных пространств над заданным векторным пространством $\mathscr{V}$. Допустим теперь, что векторное пространство $\mathscr{V}$ является унитарным или евклидовым. Аффинное пространство над унитарным (евклидовым) векторным пространством $\mathscr{V}$ называется унитарным (евклидовым) точечным пространством над $\mathscr{V}$. Размерностью унитарного точечного пространства над $\mathscr{V}$ называется размерность соответствующего унитарного векторного пространства $\mathscr{V}$. Основное внимание ниже будет уделено изучению свойств евклидовых точечных пространств над полем всех вещественных чисел. Так как поле вещественных чисел упорядоченное, то в евклидовых точечных пространствах определено понятие выпуклости (п. 31.3).

32.1. Длина ломаной. Пусть $\mathscr{U}_n$ обозначает n-мерное унитарное точечное пространство над унитарным векторным пространством $\mathscr{V}$ над полем K. Каждой паре A, B точек $\mathscr{U}_n$ отвечает однозначно определенный вектор $\overrightarrow{AB}$ из $\mathscr{V}$. Поскольку векторное пространство $\mathscr{V}$ унитарное, то в $\mathscr{V}$ определено понятие длины вектора $\overrightarrow{AB}$. Эту длину мы будем обозначать через $\rho(A, B)$ и называть *расстоянием* от точки A до точки B. Таким образом, по определению

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}. \tag{1}$$

Из свойств длин векторов (п. 17.2) вытекает, что для любых точек A, B

1° $\quad \rho(A, B) = \rho(B, A)$;

2° $\quad \rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

Так как для произвольных точек A, B, C из $\mathscr{U}_n$ имеем $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, то согласно оценке длины суммы векторов имеем

3° $\quad \rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$.

Произвольное множество M, каждой паре элементов A, B которого поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число $\rho(A, B)$, удовлетворяющее требованиям 1°, 2°, 3°, называется *метрическим пространством* с метрикой ρ. Поэтому определение (1) обращает унитарное точечное пространство в метрическое пространство.

Применяя повторно неравенство 3°, легко приходим к более общему неравенству

$$\rho(A_1, A_2) + \rho(A_2, A_3) + \ldots + \rho(A_{s-1}, A_s) \geqslant \rho(A_1, A_s), \tag{2}$$

справедливому для произвольной конечной последовательности точек $A_1, A_2, \ldots, A_s$ унитарного точечного пространства.

Если точечное пространство $\mathscr{U}_n$ евклидово, то основное поле K — поле вещественных чисел — упорядочено, и потому в $\mathscr{U}_n$ каждая пара точек A, B определяет отрезок $[A, B]$ (п. 31.1). Число $\rho(A, B)$ называется *длиной* отрезка $[A, B]$. Для любой последовательности точек $A_1, A_2, \ldots, A_s$ последовательность отрезков

$$[A_1, A_2], \quad [A_2, A_3], \ldots, [A_{s-1}, A_s]$$

называется *ломаной*, соединяющей A_1 с A_s, а отрезок $[A_1, A_s]$ называется *замыкающим* ломаную. Сумма длин отрезков ломаной называется *длиной ломаной*. Неравенство (2) означает, что в любом евклидовом пространстве длина ломаной не меньше длины замыкающего отрезка.

При каких условиях в неравенстве (2) имеет место знак равенства? Согласно п. 17.2 (для $s = 2$) в унитарном векторном пространстве из соотношений $\overrightarrow{A_1A_2} \neq 0$ и

$$\|\overrightarrow{A_1A_2}\| + \|\overrightarrow{A_2A_3}\| + \ldots + \|\overrightarrow{A_{s-1}A_s}\| = \|\overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{s-1}A_s}\| \tag{3}$$

следует, что все векторы $\overrightarrow{A_1A_{i+1}}$ линейно зависят от $\overrightarrow{A_1A_2}$ и потому

$$\overrightarrow{A_2A_{i+1}}=\lambda_i\cdot\overrightarrow{A_1A_2} \qquad (i=1,\ldots,s-1).$$

Подставляя эти значения в (3) и сокращая на A_1A_2, приходим к равенству

$$|\lambda_1|+|\lambda_2|+\ldots+|\lambda_{s-1}|=|\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{s-1}|. \qquad (4)$$

Если пространство евклидово, то числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_{s-1}$ вещественные и равенство (4) истинно тогда и только тогда, когда эти числа имеют одинаковый знак. Ясно, что в этом случае точки $A_1, A_2, \ldots, A_s$ лежат на одной прямой и последовательные отрезки ломаной $[A_1, A_2], [A_2, A_3], \ldots, [A_{s-1}, A_s]$ пересекаются лишь по соответствующим концевым точкам. Итак, *в евклидовом точечном пространстве длина каждой ломаной всегда больше длины замыкающего отрезка, если только ломаная не является разбиением замыкающего отрезка.*

Рассмотрим теперь, как найти расстояние между точками A, B унитарного точечного пространства Π_n, зная координаты этих точек. Пусть $(O, e_1, \ldots, e_n)$ — координатный репер в Π_n, векторы которого образуют ортонормированную систему в векторном пространстве V. Обозначая через $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ и $\beta_1,\ldots,\beta_n$ координаты точек A, B в указанном репере, будем иметь

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\beta_1-\alpha_1)e_1+\ldots+(\beta_n-\alpha_n)e_n$$

и потому

$$\rho(A,B)=\sqrt{(\beta_1-\alpha_1)^2+\ldots+(\beta_n-\alpha_n)^2}. \qquad (5)$$

Если пространство Π_n евклидово, то координаты точек будут вещественными числами и, следовательно, формулу (5) можно будет переписать и более просто вида:

$$\rho(A,B)=\sqrt{(\beta_1-\alpha_1)^2+\ldots+(\beta_n-\alpha_n)^2}. \qquad (6)$$

При выводе этих формул мы предполагали, что векторы координатного репера образуют ортонормированную систему. Такие реперы мы будем называть *ортонормированными*. Если вместо ортонормированного координатного репера взять произвольный, то формула для расстояния между двумя точками приобретет более сложный вид, который мы здесь не будем выписывать.

32.2. Угол между прямыми. Рассмотрим произвольные прямые $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ в n-мерном унитарном точечном пространстве Π_n. Выберем на этих прямых по паре различных точек A_1, A_2 и соответственно A_3, A_4. Отвечающие этим парам векторы A_1A_2 и A_3A_4

удовлетворяют неравенству Коши—Буняковского

$$\frac{|(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_3A_4})|}{\|\overrightarrow{A_1A_2}\|\cdot\|\overrightarrow{A_3A_4}\|}\leqslant 1.$$

Поэтому найдется вещественное число φ, удовлетворяющее требованиям

$$\cos\varphi=\frac{|(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_3A_4})|}{\|\overrightarrow{A_1A_2}\|\cdot\|\overrightarrow{A_3A_4}\|} \qquad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right). \qquad (1)$$

Это число φ не зависит от выбора указанных пар точек на прямых $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$. Действительно, если B_1, B_2 и B_3, B_4 — какие-нибудь другие аналогичные пары, то

$$\overrightarrow{B_1B_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{A_1A_2} \qquad \overrightarrow{B_3B_4}=\mu\cdot\overrightarrow{A_3A_4}$$

для подходящих $\lambda, \mu\in K$ и потому

$$\frac{|(\overrightarrow{B_1B_2},\overrightarrow{B_3B_4})|}{\|\overrightarrow{B_1B_2}\|\cdot\|\overrightarrow{B_3B_4}\|}=\frac{|\lambda\mu|\cdot|(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_3A_4})|}{|\lambda|\cdot|\mu|\cdot\|\overrightarrow{A_1A_2}\|\cdot\|\overrightarrow{A_3A_4}\|}=\cos\varphi.$$

Таким образом, вещественное число φ, удовлетворяющее требованиям (1), зависит лишь от самих прямых $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и называется *величиной угла* между прямыми $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ или просто *углом* между прямыми $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$.

Прямые $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен $\pi/2$. Из соотношений (1) следует, что *прямые $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ тогда и только тогда перпендикулярны, когда любой вектор, лежащий на одной из этих прямых, ортогонален к любому вектору, лежащему на другой прямой.*

Отметим также, что *угол между прямыми $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ тогда и только тогда равен нулю, когда прямые параллельны.*

В самом деле, если прямые параллельны, то векторы, лежащие на этих прямых, линейно зависимы и потому в формуле (1) имеем $\overrightarrow{A_3A_4}=\lambda\cdot\overrightarrow{A_1A_2}$, откуда прямыми сокращениями получаем $\cos\varphi=1$, $\varphi=0$. Обратно, пусть $\varphi=0$ и, следовательно,

$$|(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_3A_4})|=\|\overrightarrow{A_1A_2}\|\cdot\|\overrightarrow{A_3A_4}\|.$$

Это случай, когда в неравенстве Коши—Буняковского имеет место знак равенства. Следовательно, $\overrightarrow{A_3A_4}=\lambda\cdot\overrightarrow{A_1A_2}$ и потому прямые $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ параллельны.

Фиксируем в унитарном пространстве Π_n какой-нибудь ортонормированный координатный репер $(O, e_1, \ldots, e_n)$. Мы знаем,

что уравнения прямых X, Y можно представить в виде

$$\frac{\xi_1-\eta_1}{l_1}=\ldots=\frac{\xi_n-\eta_n}{l_n}=t, \tag{2}$$

$$\frac{\xi_1-\zeta_1}{m_1}=\ldots=\frac{\xi_n-\zeta_n}{m_n}=t, \tag{3}$$

где t — параметр, а $l_1, \ldots, l_n$ и $m_1, \ldots, m_n$ — условные коэффициенты. Пусть точка A_i получается при значении $t=t_i$ ($i=1, 2, 3, 4$). Обозначив через $x_{i1}, \ldots, x_{in}$ координаты точки A_i ($i=1, 2, 3, 4$), будем иметь

$$x_{is}=l_s t_i+\eta_s \quad (i=1, 2; \ s=1, \ldots, n),$$
$$x_{is}=m_s t_i+\zeta_s \quad (i=3, 4; \ s=1, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(t_2-t_1)\{l_1e_1+\ldots+l_ne_n\},$$
$$\overrightarrow{A_3A_4}=(t_4-t_3)\{m_1e_1+\ldots+m_ne_n\}.$$

Подставляя эти значения в формулу (1), получим

$$\cos\varphi=\frac{|l_1m_1+\ldots+l_nm_n|}{\sqrt{|l_1|^2+\ldots+|l_n|^2}\sqrt{|m_1|^2+\ldots+|m_n|^2}}. \tag{4}$$

Это стандартная формула для косинуса угла между прямыми, записанная в ортонормированной системе координат каноническими уравнениями (2) и (3). Беря в качестве прямой (3) s-ю координатную прямую, определяемую уравнением

$$\frac{\xi_1}{0}=\ldots=\frac{\xi_s}{1}=\ldots=\frac{\xi_n}{0},$$

и обозначая через φ_s угол прямой (1) с этой координатной прямой, получим

$$\cos\varphi_s=\frac{|l_s|}{\sqrt{|l_1|^2+\ldots+|l_n|^2}}$$

и, в частности,

$$\cos^2\varphi_1+\ldots+\cos^2\varphi_n=1. \tag{5}$$

В п. 30.3 мы уже видели, что условие параллельности прямых (2) и (3) можно записать в виде

$$\frac{l_1}{m_1}=\ldots=\frac{l_n}{m_n}.$$

Полагая в формуле (4) $\varphi=\pi/2$, приходим к соотношению

$$l_1m_1+\ldots+l_nm_n=0, \tag{6}$$

представляющему собою условие перпендикулярности прямых, заданных канонически, в ортонормированной координатной системе.

В евклидовых точечных пространствах наряду с понятием угла между прямыми имеет смысл и понятие угла между лучами. Канонические уравнения луча в n-мерном евклидовом точечном пространстве записываются также в виде (2) и (3), где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — координаты вершины этих лучей, а координаты $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ произвольной точки луча получаются из указанных уравнений при произвольных неотрицательных значениях параметра t. Так как скалярное поле теперь — поле вещественных чисел, то найдется единственное вещественное число φ, удовлетворяющее требованиям

$$\cos\varphi=\frac{l_1m_1+\ldots+l_nm_n}{\sqrt{l_1^2+\ldots+l_n^2}\sqrt{m_1^2+\ldots+m_n^2}}, \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \tag{7}$$

которое и называется углом между упомянутыми лучами. Согласно этому определению угол между любыми прямыми лежит в пределах $0, \frac{\pi}{2}$, а угол между лучами может быть и тупым. Например, пусть задан луч своими каноническими уравнениями

$$\frac{\xi_1-\eta_1}{l_1}=\ldots=\frac{\xi_n-\eta_n}{l_n}=t \qquad (t\geqslant 0).$$

Тогда уравнения противоположного луча, составляющего вместе с заданным лучом целую прямую, будут иметь вид

$$\frac{\xi_1-\eta_1}{l_1}=\ldots=\frac{\xi_n-\eta_n}{l_n}=t \qquad (t\leqslant 0)$$

или, в канонической форме,

$$\frac{\xi_1-\eta_1}{-l_1}=\ldots=\frac{\xi_n-\eta_n}{-l_n}=t \qquad (t\geqslant 0).$$

Вычисляя угол между этими противоположными лучами по формуле (7), получим $\cos\varphi=-1$ и поэтому $\varphi=\pi$.

82.3. Ортогональные проекции. При помощи понятия перпендикулярности прямых легко определить отношение перпендикулярности k-мерной и l-мерной плоскостей унитарного пространства U_n. Именно говорят, что прямая X пространства U_n перпендикулярна k-мерной плоскости $\mathfrak{M}$ из U_n, символически $X\perp\mathfrak{M}$, если X перпендикулярна каждой прямой, принадлежащей $\mathfrak{M}$.

Так как перпендикулярность прямых равносильна ортогональности всех сжащих на них ненулевых векторов, то

$$X\perp\mathfrak{M}\Longleftrightarrow\overline{X}\perp\overline{\mathfrak{M}}, \tag{1}$$

где $\overline{\mathfrak{M}}$ означает касательное подпространство к плоскости $\mathfrak{M}$ (в обозначениях п. 29.3 $\overline{\mathfrak{M}}=L(\mathfrak{M})$).

Прямая $\mathfrak{X}$ называется перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{X}$ проходит через A, перпендикулярна $\mathfrak{M}$ и пересекает $\mathfrak{M}$ в какой-то точке P. Точка P называется основанием перпендикуляра, опущенного из A на $\mathfrak{M}$, или проекцией A на $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *В k-мерном аффинном пространстве Π_n из каждой точки A, не лежащей на произвольной k-мерной плоскости $\mathfrak{M}$ ($1 \leqslant k \leqslant n-1$), можно опустить один и только один перпендикуляр на $\mathfrak{M}$.*

Единственность. Допустим, что существуют различные прямые $A \vee B$ и $A \vee C$ ($B \neq C$; $B, C \notin \mathfrak{M}$), перпендикулярные $\mathfrak{M}$. В таком случае эти прямые были бы перпендикулярны прямой $B \vee C$, лежащей в плоскости $\mathfrak{M}$.

Пусть прямые $A \vee B$, $A \vee C$ и $B \vee C$, лежащие очевидно, в 2-мерной плоскости $A \vee B \vee C$, имеют направляющие коэффициенты (l_1, l_2), (m_1, m_2), (n_1, n_2) соответственно в некотором ортонормированном репере плоскости $A \vee B \vee C$. Условие ортогональности прямых $A \vee B$ и $B \vee C$ влечет равенство $l_1 n_1 + l_2 n_2 = 0$ (см. (6)); аналогично ортогональность $A \vee C$ и $B \vee C$ влечет равенство $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$. Мы видим, что система

$$\begin{aligned} l_1 x_1 + l_2 x_2 &= 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение (n_2, n_1). Следовательно,

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или $\frac{l_1}{n_1} = \frac{l_2}{n_2}$. Таким образом, прямые $A \vee B$ и $A \vee C$ параллельны (см. п. 30.3) и имеют общую точку A. Отсюда вытекает, что они совпадают. Полученное противоречие заканчивает доказательство единственности.

Существование. Предположим сначала, что $\mathfrak{M}$ — гиперплоскость, т. е. $k = n-1$. Согласно п. 17.5 в Π_n найдется одномерное векторное подпространство $\overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$, ортогональное к $\overline{\mathfrak{M}}$. Совокупность $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ является прямой, проходящей через A и перпендикулярной $\mathfrak{M}$. Остается лишь убедиться, что $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ пересекает $\mathfrak{M}$. Однако это очевидно, так как в противном случае прямая $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ была бы параллельна $\mathfrak{M}$ и потому в $\mathfrak{M}$ нашлась бы прямая, параллельная (и не перпендикулярная) $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$.

Если теперь $\mathfrak{M}$ не гиперплоскость в Π_n, то рассмотрим подпространство $\mathfrak{N} = A \vee \mathfrak{M}$. В удобном пространстве $\mathfrak{N}$ совокупность $\mathfrak{M}$ является гиперплоскостью. Поэтому, согласно предыдущему, из A можно опустить внутри $\mathfrak{N}$ перпендикуляр на $\mathfrak{M}$. Ясно, что этот перпендикуляр будет перпендикуляром и внутри основного пространства Π_n.

В теореме 1 решается задача о проведении перпендикуляра через точку A так, чтобы он *пересекал* плоскость $\mathfrak{M}$. Посмотрим, как будет обстоять дело, если опустить последнее требование. Согласно п. 17.5 совокупность $\overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ всех векторов пространства $\overline{\Pi}_n$, ортогональных к $\mathfrak{M}$, является векторным подпространством размерности $n-k$. Поэтому совокупность $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ будет множеством точек, лежащих на всевозможных прямых, перпендикулярных $\mathfrak{M}$ и проходящих через точку A. Поскольку $\overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ — векторное подпространство размерности $n-k$, то множество $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ есть $(n-k)$-мерная плоскость. Пересечение $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ и $\mathfrak{M}$ не может содержать никакой прямой $\mathfrak{X}$, так как в противном случае любой вектор, лежащий на $\mathfrak{X}$, принадлежал бы одновременно пространствам $\overline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$, что невозможно. Следовательно, пересечение $\mathfrak{M}$ и $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ либо пусто, либо состоит из одной точки. Если $A \in \mathfrak{M}$, то пересечение $\mathfrak{M}$ и $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ состоит, очевидно, из точки A. Если же $A \notin \mathfrak{M}$, то основание перпендикуляра, опущенного из A на $\mathfrak{M}$, принадлежит одновременно $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ и $\mathfrak{M}$, и потому $\mathfrak{M} \cap A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ состоит лишь из упомянутого основания перпендикуляра. Плоскость $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ иногда называют *ортогональным дополнением к $\mathfrak{M}$, проведенным через точку A*. В частности, если $\mathfrak{M}$ — гиперплоскость и $A \notin \mathfrak{M}$, то ортогональное дополнение $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$ есть прямая, перпендикулярная гиперплоскости $\mathfrak{M}$ и пересекающая ее в точке A. Эта прямая называется перпендикуляром к гиперплоскости $\mathfrak{M}$, восстановленным в точке A.

Проекцией (более точно, *ортогональной проекцией*) точки A на произвольную плоскость $\mathfrak{M}$ называется точка пересечения плоскостей $\mathfrak{M}$ и $A \cdot \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}$. Иначе говоря, если $A \notin \mathfrak{M}$, то проекцией A на $\mathfrak{M}$ называется основание перпендикуляра, опущенного из A на $\mathfrak{M}$. Если же $A \in \mathfrak{M}$, то проекцией A на $\mathfrak{M}$ называется сама точка A. Проекция A на $\mathfrak{M}$ иногда обозначается через $\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}} A$ или $A_{\mathfrak{M}}$. Отображение $\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}} \colon \Pi_n \to \mathfrak{M}$ называется (ортогональным) проектированием пространства Π_n на плоскость $\mathfrak{M}$.

Посмотрим, каким образом вычисляются координаты проекции точки A на плоскость $\mathfrak{M}$ через координаты A. Выберем в подпространстве $\mathfrak{M}$ какую-либо ортонормированную базу $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ и дополним ее векторами $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ до ортонормированной базы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_n$ всего пространства Π_n. Фиксируем в $\mathfrak{M}$ произвольную точку O и в качестве координатного репера в Π_n примем репер $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Пусть точка A в этом репере имеет координаты $a_1, \ldots, a_n$. Покажем, что проекцией A на $\mathfrak{M}$ будет

точка P с координатами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0$ (см. рис. 10 для $k=2$). В самом деле, плоскость $\mathfrak{M}$ состоит из точек, координатные строки которых имеют вид $(\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots, 0)$. Поэтому любой вектор x, принадлежащий $\mathfrak{M}$, представим в форме $\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_k e_k$. Но $PA = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n$ и поэтому $(x, PA) = 0$, т. е. прямая $P \vee A$ перпендикулярна плоскости $\mathfrak{M}$, что и требовалось. Итак, если

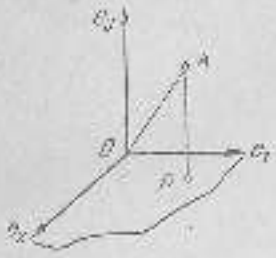


Рис. 10.

$$\overrightarrow{OA} = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k + \ldots + \alpha_n e_n,$$

то

$$OA_{\mathfrak{M}} = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k, \qquad (2)$$

где $\mathfrak{M} = O \vee Oe_1 \vee \ldots \vee Oe_k$.

Из формулы (2) непосредственно вытекает важная

Теорема 2. *Ортогональное проектирование $\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}}: \Pi_n \to \mathfrak{M}$ является линейным преобразованием, т. е. для него для любых точек $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, $A^{(5)}$, $A^{(6)}$ и любых чисел $\lambda, \mu \in K$ выполнено равенство*

$$A^{(5)}A^{(6)} = \lambda \cdot \overrightarrow{A^{(3)}A^{(4)}} + \mu \cdot \overrightarrow{A^{(1)}A^{(2)}} \qquad (3)$$

влечет

$$\overrightarrow{A^{(5)}_{\mathfrak{M}}A^{(6)}_{\mathfrak{M}}} = \lambda \cdot \overrightarrow{A^{(3)}_{\mathfrak{M}}A^{(4)}_{\mathfrak{M}}} + \mu \cdot \overrightarrow{A^{(1)}_{\mathfrak{M}}A^{(2)}_{\mathfrak{M}}}. \qquad (4)$$

Действительно, обозначая координаты точки $A^{(i)}$ через $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, 6$) и принимая во внимание условие (3), получаем равенства

$$x_j^{(5)} - x_j^{(6)} = \lambda (x_j^{(3)} - x_j^{(4)}) + \mu (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \qquad (j = 1, \ldots, n). \qquad (5)$$

С другой стороны, согласно (2) имеем

$$\overrightarrow{A^{(6)}_{\mathfrak{M}}A^{(5)}_{\mathfrak{M}}} = (x_1^{(5)} - x_1^{(6)} - x_1^{(5)})e_1 + \ldots + (x_k^{(5)} - x_k^{(6)} - x_k^{(5)})e_k \quad (i = 2, 4, 6). \qquad (6)$$

Сравнивая (6) и (5), приходим к соотношению (4).

Проекцией $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}}$ произвольного множества точек $\mathfrak{L}$ на плоскость $\mathfrak{M}$ называется совокупность проекций на $\mathfrak{M}$ всех точек $\mathfrak{L}$.

Теорема 3. *Проекция прямой $\mathfrak{X}$ на произвольную плоскость $\mathfrak{M}$ есть прямая или точка. Если $\mathfrak{X}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{X}^{(s)}$ — какие-то прямые евклидова пространства Π_n и $\mathfrak{M}$ — произвольная плоскость в Π_n, то*

$$(\mathfrak{X}^{(1)} \vee \ldots \vee \mathfrak{X}^{(s)})_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{X}^{(1)}_{\mathfrak{M}} \vee \ldots \vee \mathfrak{X}^{(s)}_{\mathfrak{M}}. \qquad (7)$$

На каждой прямой $\mathfrak{X}^{(i)}$ выберем пару различных точек $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, s$). Плоскость $\mathfrak{X}^{(1)} \vee \ldots \vee \mathfrak{X}^{(s)}$ состоит из тех

точек C, для которых

$$\overrightarrow{A^{(0)}C} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{A^{(1)}B^{(1)}} + \ldots + \lambda_s \cdot \overrightarrow{A^{(s)}B^{(s)}} + \mu_1 \cdot \overrightarrow{A^{(1)}A^{(2)}} + \ldots + \mu_s \cdot \overrightarrow{A^{(0)}A^{(s)}} \qquad (8)$$

при подходящих $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_s \in K$ (см. п. 20.2). На основании (4) отсюда получаем

$$\overrightarrow{A^{(0)}_{\mathfrak{M}}C_{\mathfrak{M}}} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{A^{(1)}_{\mathfrak{M}}B^{(1)}_{\mathfrak{M}}} + \ldots + \lambda_s \cdot \overrightarrow{A^{(s)}_{\mathfrak{M}}B^{(s)}_{\mathfrak{M}}} + \mu_1 \cdot \overrightarrow{A^{(1)}_{\mathfrak{M}}A^{(2)}_{\mathfrak{M}}} + \ldots + \mu_s \cdot \overrightarrow{A^{(0)}_{\mathfrak{M}}A^{(s)}_{\mathfrak{M}}}, \qquad (9)$$

и потому $C_{\mathfrak{M}} = (A^{(0)}_{\mathfrak{M}} \vee B^{(1)}_{\mathfrak{M}}) \vee \ldots \vee (A^{(s)}_{\mathfrak{M}} \vee B^{(s)}_{\mathfrak{M}})$.

Обратно, если $D \in (A^{(0)}_{\mathfrak{M}} \vee B^{(1)}_{\mathfrak{M}}) \vee \ldots \vee (A^{(s)}_{\mathfrak{M}} \vee B^{(s)}_{\mathfrak{M}})$, то для подходящих $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_s \in K$ имеем

$$\overrightarrow{A^{(0)}_{\mathfrak{M}}D} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{A^{(1)}_{\mathfrak{M}}B^{(1)}_{\mathfrak{M}}} + \ldots + \lambda_s \cdot \overrightarrow{A^{(s)}_{\mathfrak{M}}B^{(s)}_{\mathfrak{M}}} + \mu_1 \cdot \overrightarrow{A^{(1)}_{\mathfrak{M}}A^{(2)}_{\mathfrak{M}}} + \ldots + \mu_s \cdot \overrightarrow{A^{(0)}_{\mathfrak{M}}A^{(s)}_{\mathfrak{M}}}. \qquad (10)$$

Берем в пространстве $\mathfrak{X}^{(1)} \vee \ldots \vee \mathfrak{X}^{(s)}$ точку C, для которой верно равенство (8). Сравнивая (9) и (10), видим, что $C_{\mathfrak{M}} = D$ и потому $D \in (\mathfrak{X}^{(1)} \vee \ldots \vee \mathfrak{X}^{(s)})_{\mathfrak{M}}$. Мы видим, следовательно, что

$$(\mathfrak{X}^{(1)} \vee \ldots \vee \mathfrak{X}^{(s)})_{\mathfrak{M}} = (A^{(0)}_{\mathfrak{M}} \vee B^{(1)}_{\mathfrak{M}}) \vee \ldots \vee (A^{(s)}_{\mathfrak{M}} \vee B^{(s)}_{\mathfrak{M}}).$$

При $s = 1$ получаем $\mathfrak{X}^{(1)}_{\mathfrak{M}} = A^{(1)}_{\mathfrak{M}} \vee B^{(1)}_{\mathfrak{M}}$. Поэтому $\mathfrak{X}^{(1)}_{\mathfrak{M}} = A^{(2)}_{\mathfrak{M}} \vee B^{(2)}_{\mathfrak{M}}$, т. е. утверждение теоремы 3 доказано.

Следствие. *В евклидовом пространстве проекция плоскости $\mathfrak{N}$ на какую-нибудь плоскость есть снова плоскость, размерность которой не превышает размерности $\mathfrak{N}$.*

Для доказательства достаточно представить плоскость $\mathfrak{N}$ в виде линейного замыкания проходящих через одну точку независимых прямых и применить формулу (7).

В евклидовых точечных пространствах определение понятия отрезка и выпуклого тела. С помощью формулы (4) легко проверяется

Теорема 4. *В евклидовом точечном пространстве проекцией произвольного отрезка $[A, B]$ на плоскость $\mathfrak{M}$ является отрезок $[A_{\mathfrak{M}}, B_{\mathfrak{M}}]$ и поэтому проекция любого выпуклого множества является выпуклым множеством.*

В самом деле, если $C \in [A, B]$, то $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Согласно (4) отсюда следует, что $\overrightarrow{A_{\mathfrak{M}}C_{\mathfrak{M}}} = \lambda \cdot \overrightarrow{A_{\mathfrak{M}}B_{\mathfrak{M}}}$, и потому $C_{\mathfrak{M}} \in [A_{\mathfrak{M}}, B_{\mathfrak{M}}]$, $[A, B]_{\mathfrak{M}} = [A_{\mathfrak{M}}, B_{\mathfrak{M}}]$. Обратно, если

$D \in [A_{\mathfrak{M}}, B_{\mathfrak{N}}]$, то для подходящего $\lambda (0 < \lambda < 1)$ имеем $\overline{A_{\mathfrak{M}}D} = \lambda \cdot \overline{A_{\mathfrak{M}}B_{\mathfrak{N}}}$. Верно ли обратное: для точки C, для которой $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{AB}$, и сравнивая (4) с равенством $\overline{A_{\mathfrak{M}}D} = \lambda \cdot \overline{A_{\mathfrak{M}}B_{\mathfrak{N}}}$, получим $D = C_{\mathfrak{M}}$, и значит, $[A_{\mathfrak{M}}, B_{\mathfrak{N}}] = [A, B]_{\mathfrak{M}}$, что и требовалось.

Посмотрим, как можно вычислять координаты проекции заданной точки на заданную гиперплоскость, если координаты точки и уравнение гиперплоскости известны. Пусть $(O, e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный координатный репер в унитарном пространстве, B — точка с координатами $\beta_1, \ldots, \beta_n$ и

$$\alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n = \alpha \tag{11}$$

— уравнение заданной гиперплоскости. Рассмотрим какие-либо две различные точки C, D с координатами $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и соответственно $\delta_1, \ldots, \delta_n$, лежащие на гиперплоскости (11). Тогда

$$\overline{CD} = (\delta_1 - \gamma_1)e_1 + \ldots + (\delta_n - \gamma_n)e_n. \tag{12}$$

Координаты C, D должны удовлетворять уравнению (11). Подставляя их в уравнение (11) и вычитая почленно получающиеся два равенства, получим

$$\alpha_1(\delta_1 - \gamma_1) + \ldots + \alpha_n(\delta_n - \gamma_n) = 0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) видим, что прямая

$$\frac{\xi_1 - \gamma_1}{\alpha_1} = \ldots = \frac{\xi_n - \gamma_n}{\alpha_n} \tag{14}$$

перпендикулярна любому вектору $\overline{CD}$, лежащему в плоскости (11), и потому перпендикулярна этой плоскости. Так как прямая (14) проходит через точку B, то *равенства* (14) *дают каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку B с координатами $\beta_1, \ldots, \beta_n$ и перпендикулярной заданной плоскости* (11).

Решая совместно уравнения (11) и (14), найдем координаты

$$\xi_i = \frac{\alpha - (\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n)}{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}\alpha_i + \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

проекции B на гиперплоскость (11).

32.4. Угол между плоскостью и прямой. Рассмотрим произвольную k-мерную плоскость $\mathfrak{M}$, лежащую в n-мерном унитарном пространстве $\mathfrak{U}$, и какую-нибудь прямую $\mathfrak{X}$ этого пространства, пересекающую плоскость $\mathfrak{M}$ в точке A. Проекцией прямой $\mathfrak{X}$ на плоскость $\mathfrak{M}$ будет прямая $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$, проходящая через точку A. *Углом между прямой $\mathfrak{X}$ и ее проекцией $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ называется угол между прямой $\mathfrak{X}$ и плоскостью $\mathfrak{M}$* (рис. 11). Если прямая $\mathfrak{X}$ лежит в плоскости $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ и угол между $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ равен нулю.

Если же $\mathfrak{X}$ не лежит в плоскости $\mathfrak{M}$, то существует единственная $(k+1)$-мерная плоскость $\mathfrak{N}$, проходящая через $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$. Плоскость $\mathfrak{M}$ в пространстве $\mathfrak{N}$ является гиперплоскостью, и потому через точку A в пространстве $\mathfrak{N}$ можно провести лишь единственный перпендикуляр $\mathfrak{Y}$ к $\mathfrak{M}$. Пусть B — произвольная точка на $\mathfrak{X}$, отличная от A и пусть C — проекция B на $\mathfrak{M}$. Прямая $B \vee C$ лежит в пространстве $\mathfrak{N}$ и перпендикулярна $\mathfrak{M}$. Все перпендикуляры к одной и той же гиперплоскости параллельны (см. п. 32.3), и потому прямые $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$, $A \vee C$ (см. рис. 11) лежат в одной двумерной плоскости. Отсюда *следует, что угол φ между $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ и угол ψ между $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ в сумме дают $\pi/2$.*

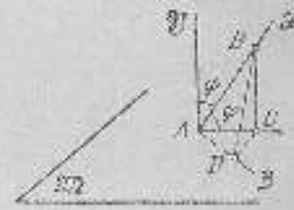


Рис. 11.

Остается рассмотреть случай, когда k-мерная плоскость $\mathfrak{M}$ и прямая $\mathfrak{X}$ не пересекаются. Берем на плоскости $\mathfrak{M}$ произвольную точку A. Согласно п. 30.3 в пространстве $\mathfrak{U}$ существует единственная прямая $\mathfrak{X}'$, проходящая через точку A и параллельная прямой $\mathfrak{X}$. Угол между прямой $\mathfrak{X}$ и плоскостью $\mathfrak{M}$ называется в рассматриваемом случае углом между прямой $\mathfrak{X}$ и плоскостью $\mathfrak{M}$. Легко проверяется, что так определенный угол между прямой $\mathfrak{X}$ и плоскостью $\mathfrak{M}$ не зависит от выбора вспомогательной точки A.

Пусть в пространстве $\mathfrak{U}$ фиксирован некоторый ортонормированный репер $(O, e_1, \ldots, e_n)$ и в этом репере заданы гиперплоскость $\mathfrak{M}$ уравнением

$$\alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n = \alpha \tag{1}$$

и прямая $\mathfrak{X}$ каноническими уравнениями

$$\frac{\xi_1 - \beta_1}{\gamma_1} = \ldots = \frac{\xi_n - \beta_n}{\gamma_n}. \tag{2}$$

Выбираем на гиперплоскости $\mathfrak{M}$ точку A, координаты которой пусть будут $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Тогда прямая $\mathfrak{X}'$, параллельная $\mathfrak{X}$ и проходящая через A, будет иметь уравнения

$$\frac{\xi_1 - \varepsilon_1}{\gamma_1} = \ldots = \frac{\xi_n - \varepsilon_n}{\gamma_n}, \tag{3}$$

а перпендикуляр $\mathfrak{Y}$, восстановленный в точке A к гиперплоскости $\mathfrak{M}$, будет иметь уравнения

$$\frac{\xi_1 - \varepsilon_1}{\alpha_1} = \ldots = \frac{\xi_n - \varepsilon_n}{\alpha_n}. \tag{4}$$

Согласно п. 32.2 для угла ψ между $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ имеем

$$\cos\psi=\frac{|x_1y_1+\ldots+x_ny_n|}{\sqrt{|x_1|^2-\ldots+|x_n|^2}\sqrt{|y_1|^2+\ldots+|y_n|^2}},$$

и, следовательно, угол ψ между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$ удовлетворяет соотношениям

$$\sin\psi=\frac{|z_1-\ldots+z_nx_n|}{\sqrt{|x_1|^2-\ldots+|x_n|^2}\sqrt{|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2}}\quad\left(0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).\quad(5)$$

Как и в обычном евклидовом пространстве, угол между прямой и плоскостью в унитарном пространстве обладает свойством экстремальности.

Теорема. *Пусть в унитарном n-мерном пространстве U_n прямая $\mathfrak{X}$ пересекает k-мерную плоскость $\mathfrak{M}$ в точке A под углом φ, лежащим от 0 и $\pi/2$. Тогда угол между $\mathfrak{X}$ и любой прямой $\mathfrak{Z}$, проведенной в плоскости $\mathfrak{M}$ через A и отличной от проекции $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{M}$, больше φ.*

Берем на $\mathfrak{X}$ какую-нибудь точку B, отличную от A, и опускаем из B на $\mathfrak{M}$ перпендикуляр, основание которого обозначим через C. Основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую $\mathfrak{Z}$, обозначим через D (см. рис. 11). Так как прямая $B\vee C$ перпендикулярна плоскости $\mathfrak{M}$, то углы BCD и BCA прямые. Угол BDA прямой по построению. Из прямоугольных треугольников BCA, BDA, BCD соответственно получаем

$$\sin\varphi=\frac{BC}{BA},\quad\sin(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})=\frac{BD}{BA},\quad BD=\sqrt{BC^2+DC^2}>BC.$$

Поэтому $\sin\varphi<\sin(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})$, $\varphi<\angle(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})$, что и требовалось.

Примеры и задачи

В приведенных ниже задачах предполагается, что в каждом случае выбрана и зафиксирована ортонормированный репер аффинного точечного пространства и точки этого пространства заданы координатами относительно этого репера.

1. Найти ортогональную проекцию отрезка $[0, 0, 0, 0; 4, -1, -3, 1]$ на плоскость $\mathfrak{M}=A_0\vee A_1\vee A_2\vee A_3$, где координатные строки точек A_0, A_1, A_2, A_3 соответственно $(0, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 0, 0, 1)$.

2. Расположен от точки A до плоскости $\mathfrak{M}$ называется множество расстояний от данной точки до точек из $\mathfrak{M}$. Доказать, что это расстояние равно длине вектора $\overline{AH}$, где $H\in\mathfrak{M}$.

3. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника, вершинами которого служат концы векторов $(2, 1, 2, 1)$, $(2, 0, 4, 4)$, $(6, 1, 5, 1)$, $(2, 0, 4, 4)$, $(6, 1, 5, 1)$, $(2, 0, 4, 4)$, $(6, 1, 5, 1)$.

4. Найти угол между прямой $A_0\vee B$ и плоскостью $A_0\vee A_1\vee A_2$, если координатные строки точек A_0, A_1, A_2, B равны соответственно $(0, 0, 0, 0)$, $(3, 4, -4, -1)$, $(0, 1, -1, 2)$, $(2, 2, -1, 1)$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиоматика 193, 203, 382
— метод 8
— — Вейля 9
— — Гильберта 9
— — Лобачевского 9
— — Паша 9
— — Пеано 9
— — Фреше 9
Вала 72, 81, 103, 200
Вейль 78, 317, 351

Вектор 86
— изотропный 253
— нормали 317
— — параллельного 2 243
— нулевой 226
— собственный 144

Гиперболоид 340, 344, 364, 382
Гиперповерхность 2-го порядка 357
Гильберт 9, 381, 384

Длина вектора 135
— — евклидова 163
Дуфо 7, 317, 351
— преобразование 127

Ортис-Мендес 2, 8
Количество пространственное 212
— — Евклидово 8, 9

Квадратичная форма 70, 71, 195, 330
Конус асимптотический 344
— направляющий 201, 353
Кристоффель 67К, 351

Коэффициенты — смешанного метрического тензора 264
— Ламе 9
— линейных преобразований 118, 225, 234
— — инвариантные 59, 232
— Римановой кривизны 317

Матрица 20
— Вейля 78, Кармана 158
— — обобщенная 163
Конструирование матриц 230, 275
— — 292, 297
Вырожденность 246
Вращение собственное значение 142

Линейная кривизна 58
Соленоид 287
Узел 276

Матрица 20
— Вейерштрасса 202
— единичная 45
— Кармана 158
— — обобщенная 163
— конструирование 230, 275
— — 292, 297
— Лапласа 146, 171
— — обобщенная 202
— нулевая 45
— ортогональная 98
— — матрица ортогонального преобразования 102
— — ортогональная дополнительная 162
— — симметрическая 92
— — — кососимметрическая 92
— — — положительно-определенная 93
— — — — полуопределенная 93
— — — — — отрицательно-определенная 93
— — — — — — полуопределенная 93
— — — — — — — неположительно-определенная 93
— — — — — — — — полуопределенная 93
— — — — — — — — — неотрицательно-определенная 93
— — — — — — — — — — полуопределенная 93
— — — — — — — — — — — неопределенная 93
— — — — — — — — — — — — полуопределенная 93
— — — — — — — — — — — — — неопределенная 93
— — — — — — — — — — — — — — полуопределенная 93
— — — — — — — — — — — — — — — неопределенная 93
— — — — — — — — — — — — — — — — полуопределенная 93
— — — — — — — — — — — — — — — — — неопределенная 93
— — — — — — — — — — — — — — — — — — полуопределенная 93
— — — — — — — — — — — — — — — — — — — неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— неопределенная 93
— полуопределенная 93
— —

Подпространство векторное 147
— линейное 35
— нулевое 35
— тривиальное 36
Подстановка 114, 115
Поле вещественных 261
Полуплоскость 240
Полуэллипсоид 334
Порядок группы 369
— — относительно по степеням 173
Правила вторых частей 322
Представление функциональное 363
Преобразование 114, 117
— как типа вырождения 238
— линейное 112, 118
— — вырождения 240
— — невырожденное 240
— — ортогональное 240
— — самосопряженное 242
— — унитарное 241, 261, 264
— — эрмитово 261, 264
— линейное 114, 121
— — комплексное 261
— — обратное 124
— — произведение 124
— — сумма 124
— ортогональное 240, 246
— подобия 284
— проективное 148
— самосопряженное 241
— — симметрическое 171, 175, 221, 229
— сингулярное 241
— унитарное 261, 264
— — эрмитово 261
— эрмитово самосопряженное 262
Принцип инерции 270
Принципы экстремальные вариационные 218, 249
— — составленные 249
Пространство векторное 11
— — вещественное 11
— — комплексное 261, 270
Пространство эффективное вещественных чисел-участков 31
— — — — 329, 341
— — комплексных чисел 382
— — линейное 261, 264, 272, 286
— — многомерное 11
— — — евклидово 16, 54
— — — эрмитово 16, 54
— — метрическое 287
— — нормированное 286
— — псевдоевклидово 248, 249
— — евклидово многомерное 239, 250
— — эрмитово 239, 250
— — эрмитово многомерное 239
Прямая 102, 303

Разложение Шмидта 209
Разложение на линии 627
Разложение полярное 241
— спектральное 240
Размерность эффективного пространства 334
— линейного множества 264
— линейного пространства 78
Ранг матрицы 56
— квадратичной формы 168
— прибора 1-го 169
— числа 267
Расстояние в линейном векторном... 280
— — — — пространстве 287
Ребро 258, 259
Решение правило 1-го

Решение системы линейных уравнений 50, 53
Ряд степенной от матрицы 190

Сетка 266
Симплекс прямолинейный 306, 356
— — — 356
Симплекс 258, 306
Симплекс векторно линейно зависимых 70
— — ортогональных 219
— — — нормированных 306
— — положительный 71
— — — 264, 269
— — — линейных элементов 280
— — отрицательный 71
— — — конец вектора отрицательного 303
— — — 287
— — — 54, 56, 256
Сила натяжения 57
— приведенная 133
Сложение 269
Собственное значение матрицы 68
— — — преобразования 111
Спектр линейного преобразования 238
Степень 88
— вещественная 55, 338, 345
Сумма матриц прямая 36
— — — 120, 133, 211
— — — 124
— — — 180
Теорема Гильберта—Кнезера 59
— Крамера—Капелли 54
— Пуре 351
Тождество Лагранжа 47

Угол между лучами 321
— — — — 326
— — — 328

Формы 278
— билинейные 151, 154, 158, 161
— — — 171, 175
— — — 195, 197
— — — 162
— — — 261, 263
— — — 254
— — — 264
— — — 268, 286, 288
— — — 335
Формулы Кронекера 54
Функционал линейный 146
— — — 268
— — — 287
Функциональное полное решений 106
Функция 61
— — — 78, 101, 104
— — — 290, 291
— — — 226
— — — 45
— — — 155, 133

Характеристика комплексной функции 105
— — — 101
— — — 104
Характеристический определитель матрицы 67
— — — — 147

Ц. скорости 61

Число характеристическое 59
Эквивалентность матриц сложения 120, 121, 122
— — — 156, 271
— — — 51
Эллипсоид 252
— — — 252

Эффект преобразования 68

