MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI



N. MAMADALIYEV

VARIATSION HISOB VA OPTIMALLASHTIRISH USULLARI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

N.MAMADALIYEV

VARIATSION HISOB VA OPTIMALLASHTIRISH USULLARI

1 - QISM

DARSLIK

Toshkent
"Ma'rifat"
2024

UO'K: 517.972/.974(075)
KBK: 22.161.8ya7
M 23

Mamadaliyev N. Variatsion hisob va optimallashtirish usullari. I-qism. Darslik. –T.: "Ma'rifat", 2024. 796 bet.

E'tiboringizga havola qilinayotgan mazkur darslik matematikaning muxim bo'limlaridan hisoblangan – "Variatsion hisob va optimallashtirish usullari"ga bag'ishlangan bo'lib, universitetlarning matematika, mexanika, tadbiqiy matematika yo'nalishlarida taxsil olayotgan bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan.

Ushbu darslik ikki qismdan iborat bo'lib, ular asosan "Variatsion hisob va optimallashtirish usullari", "Jarayonlar tadqiqoti va optimal boshqaruv", "Optimal boshqaruv nazariyasi" nomli umumiy kurslarining negizida yozilgan. Darslikning I-qismi "Variatsion hisob va optimallashtirish usullari" o'quv dasturining "Variatsion hisob" bo'limida ko'rsatilgan barcha mavzularni to'la qamrab olgan.

UO'K: 517.972/.974(075)
KBK: 22.161.8ya7
M 23

Taqrizchilar:
Kasimov Sh.G'. – fizika-matematika fanlari doktori, professor

Jamalov S.Z. – fizika-matematika fanlari doktori, professor

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti kengashining 2024 yil 28 mart 6- sonli majlisi qarori asosida nashrga tavsiya etilgan (ro'yhatga olingan raqami 353).

ISBN: 978-9910-765-59-9
© "Ma'rifat" nashriyoti, Toshkent, 2024 y.

SO'ZBOSHI

Fan va texnikaning jadal suratlar bilan rivojlanishi, ayniqsa boshqariladigan jarayonlarning insoniyat hayotiga kirib kelishi bilan yangi turdagi variatsion masalalar vujudga keldi. Xususan, zamonaviy muhandisning kundalik hayotda matematikaning xilma-xil usullarini tadbiq qilishda doimo undan yaxshi matematik tayyorgarlik va qat'iy ko'nikmaga ega bo'lishni talab qiluvchi masalalar bilan ishlashiga tog'ri keladi. Variatsion hisob klassik matematik analizning tadbiq uchun muhim bo'lgan bo'limi hisoblanadi. Ushbu darslikda variatsion hisob va optimallashtirish usullarining asosiy masalalari sodda va ravon tilda yoritishga harakat qilingan. Darslik yetarli darajada asosiy tushunchalar, ta'riflar, teoremalar, masala va misollar bilan boyitilgan.

Optimallashtirish masalalari inson faoliyatining turli sohalarida uchraydi. Differensial va integral hisobning yuzaga kelishi optimallashtirish usullarining rivojlanishiga kuchli ta'sir ko'rsatib, bu hol XVIII asrda variatsion hisobning paydo bo'lishiga olib keldi. Hozirgi zamon ilmiy texnika inqilobi natijasida optimallashtirish nazariyasi va amaliyoti jadal rivojlana boshladi. Qisqa vaqt ichida nazariyaning shunday yangi bo'limlari (chiziqli programmalashtirish, optimal boshqaruv nazariyasi va boshqalar) yaratildiki, ular amalda uchraydigan ko'plab ekstremal masalalarni yechishning qator samarali hisoblash usullarini yaratidishga olib keldi.

E'tiboringizga havola qilinayotgan mazkur darslik matematikaning muhim bo'limlaridan hisoblangan – "Variatsion hisob va optimallashtirish usullari" ga bag'ishlangan bo'lib, u universitetlarning

DENOV TADBIRKORLIK VA PEDAGOGIKA INSTITUTI ARM
№ 34352

matematika, mexanika, tadbiqiy matematika yo'nalishlarida tayyil olayotgan bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan.

Ushbu darslik ikki qismdan iborat bo'lib, ular asosan "Variatsion hisob va optimallashtirish usullari", "Jarayonlar tadqiqoti va optimal boshqaruv", "Optimal boshqaruv nazariyasi" hamda "O'yinlar nazariyasi va jarayonlar tadqiqoti" nomli umumiy kurslarining negizida yozilgan. Darslikning I-qismi "Variatsion hisob va optimallashtirish usullari" fani namunaviy o'quv dasturining "Variatsion hisob" bo'limida ko'rsatilgan barcha mavzularni to'la qamrab olgan.

Shu bilan birga I-IV boblari funksional analiz, differensial hisob va qavariq analizning elementlari, oshkormas funksiyalar va akslantirishlar, ularning differensiallanuvchiligi, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar, ularning uzluksizligi, differensiallanuvchiligi, yuqori tartibli hosilalar, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning shartli va shartsiz ekstremumlariga bag'ishlangan.

Darslikning V-IX boblari Variatsion hisobning umumiy tushunchalari, funksionalning birinchi va ikkinchi variatsiyasi, funksional ekstremumining zaruriy sharti, Eyler tenglamasi va uning umumlashmalari, Eyler tenglamasining integrallari, qo'zg'aluvchan chegarali variatsion hisob masalalari, burchak nuqtali ekstremallar, variatsion hisobning shartli ekstremum masalalari, karrali integrallar uchun variatsion hisob masalalariga bag'ishlangan.

Darslikning X-XIII boblari esa Eyler tenglamasining kanonik formasi va Eyler tenglamasining invariantligi, uzulishga ega bo'lgan variatsion hisob masalalari, Eyler tenglamasini integrallashning Yakobi

usuli, ekstremumning yetarli shartlari, mexanikaning variatsion prinsiplariga bag'ishlangan. Har bir bo'limda zarur nazariy ma'lumotlar (ta'riflar, teoremalar, formulalar) bayon etilgan bo'lib, mavzularning nazariy qismi so'ngida yetarli darajada mavzuga oid tipik misol va masalalarni yechish usullari batafsil tahlil qilingan.

Darslik mustaqil yechish uchun 300 dan ortiq misol va masalalarni o'z ichiga oladi va ba'zi hollarda masalalarni yechish bo'yicha ko'rsatmalar berib borilgan. Masalalar javoblari bilan imkon darajasida ta'minlangan.

Muallif O'zMU "Differensial tenglamalar va matematik fizika" kafedrasi professor-o'qituvchilariga, professorlar Sh.G'.Kasimov va S.Z.Jamalovga kitob haqidagi taqrizlari uchun minnatdorlik bildiradi.

Kitobning birinchi nashri xatolardan xoli bo'lishi amri mahol. Darslikdagi nuqson va kamchiliklar kitob nashrdan chiqqanidan keyin yaqqol ko'zga tashlanadi. Shuning uchun darslikdagi kamchiliklarni bartaraf etish, uni yaxshilashga qaratiladigan tanqidiy mulohazalar va takliflar minnatdorlik bilan qabul etiladi.

2021-2023 yy. Toshkent

ASOSIY BELGILASHLAR

« va » – isbotning boshlanishi va oxiri, # - izoh va misolning oxiri

$a \in A$ – a element A to'plamga tegishli (A to'plam a elementni o'z ichiga oladi)

$A \subset B, B \supset A$ – A to'plam B to'plamning qism to'plami (B to'plam A to'plamni o'z ichiga oladi)

$|AB|, |[AB]|$ – A va B nuqtalarni tutashtiruvchi kesma va uning uzunligi

∂V – normallangan yoki metric fazoda V to'plamning chegarasi

N – natural sonlar to'plami, R – haqiqiy sonlar to'plami, C – kompleks sonlar to'plami, R^n – chiziqli arifmetik fazo

$|a|$ – a vektorning uzunligi (moduli), $\|a\|$ – normallangan fazoda a vektorning normasi

θ – nol vector, (a,b) – a va b vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ – n ta $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qo'shiluvchilarning yig'indisi

$f(a)$ – $f(x)$ funksiyaning x a nuqtadagi qiymati

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ – normallangan $C^1[a,b]$ fazoda normalar

$KC[a,b]$ – $[a,b]$ kesmada bo'lakli - uzluksiz funksiyalarning chiziqli fazosi

$C^n[a,b]$ – n-tartibli hosilaga ega bo'lgan funksiyalarning normallangan fazosi

$L_2(\Omega)$ – $\Omega \subset R^n$ to'plamda jamlanuvchi funksiyalarning Gilbert fazosi

$\delta y, \delta y(x)$ – Funksional argumentining variatsiyasi,

$\delta y' = (\delta y)'$ – δy variatsiyadan olingan hosila

$\delta J[x, \delta y]$ – J funksionalning x nuqtadagi 1-variatsiyasi

$\delta^2 J[y, \delta y]$ – J funksionalning x nuqtadagi 2-variatsiyasi

$J^*[x,u]$ – $J[x,u]$ funksionalga mos yordamchi funksional

$H(t,x,p)$ – Gamilton funksiyasi, $H(w,x,u)$ – Pontriagin funksiyasi

∇ – Gamilton operatori, Δ – Laplas operatori

$D(A)$ – A operatorning aniqlanish sohasi, $R(A)$ – A operatorning qiymatlar sohasi

$X(\cdot)$ – belgilash $X(\cdot)$ funksional fazosini elementi ekanligini ta'kidlaydi

$F \circ G = G$ va F akslantirishlarning superpozitsiyasi: $F = (F \circ G)(x) = F(G(x))$

$\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ – kengaytirilgan sonlar o'qi

$R^n_+ = R^n$ da manfiy bo'lmagan ortant, $R^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$

$B(x, r) = \{y : \|y - x\| < r\}$ – markazi x da, radiusi r bo'lgan yopiq shar

$B(x, r) = \{y : \|y - x\| < r\}$ – markazi x da, radiusi r bo'lgan ochiq shar

$T_x M(U \subset M)$ – M to'plamga x nuqtadagi urinma vektorlar to'plami

$\langle x^*, x \rangle$ – x^* chiziqli funksionalning x elementdagi qiymati

$epi f = \{(\alpha, x) : R \times X, \alpha \geq f(x)\}$ – $f : X \to \bar{R}$ funksiyaning ust grafigi

$Int A$ – A to'plamning chiziqli qobig'i, $co A$ – A to'plamning qavariq qobig'i

$ext A$ – A to'plamning chetki nuqtalari to'plami

$L(X, Y)$ – X fazoni Y fazoga chiziqli uzluksiz akslantirishlar fazosi

I – birlik operator (matritsa)

$A^* = A$ operator bilan qo'shma operator, $\langle Ax^*, x \rangle = \langle x^*, Ax \rangle$

$exp X = X$ fazodagi yopiq to'plamlar to'plami

$C([t_0, t_1]) \quad \|x\| = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |x(t)| \qquad \|x(\cdot)\| = \max\{\|x(\cdot)\|, \ldots, \|x^n(\cdot)\|\}$

$KC([t_0, t_1]) = [t_0, t_1]$ kesmada bo'lakli - uzluksiz funksiyalar fazosi

$F : DF(x) = F$ akslantirish x nuqtada Freshe bo'yicha k ($k \geq 1$) marta differensiallanuvchi

$F : SD(x) = F$ akslantirish x nuqtada Freshe bo'yicha differensiallanuvchi

$\partial F(x) = F$ funksiyaning x nuqtadagi subdifferensiali

$\hat{x} \in abs\min(abs\max, absext)$ – masala $\hat{x}$ nuqtada absolyut minimumga (maksimumga, ekstremumga) erishadi

$\hat{x} \in los\min(los\max, losext)$ – masala $\hat{x}$ nuqtada lokal minimumga (maksimumga, ekstremumga) erishadi

I BOB

EKSTREMAL MASALALAR NAZARIYASINING ASOSIY ELEMENTLARI

1-§. Funksional analiz elementlari, differensial hisob va qavariq analiz elementlari

Ekstremal masalalarning umumiy nazariyasini qurish, variatsion hisob va optimal boshqaruvning asosiy bo'limlari, normallangan va banax fazolarida qarashni talab qiladi.

Normallangan va banax fazolar. *R^n fazo.* R^n – fazo n – o'lchovli vektorlar fazosi $R^n = \{x = x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$; R^n fazosida vektorlarni qo'shish (qoida bo'yicha: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

va haqiqiy songa ko'paytirish mumkin (qoida bo'yicha: $\lambda \in R$ > $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$), $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ vektor *nol vektor* deyiladi. Bu R^n fazosini chiziqli fazoga aylantiradi.

Odatda R^n fazoda masofa quyidagicha kiritiladi:

$$\left.\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n). \end{array}\right\} \Rightarrow d(x, \bar{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Bu evklid masofasi deb ataladi. Buni evklid normasi orqali ifodalash mumkin: $d(x, \bar{x}) = |x - \bar{x}|$ formula bo'yicha

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Evklid normasi quyidagi munosabatlarni qanoatlantirirshini tekshirish qiyin emas: *a)* barcha $x \in R^n$ lar uchun $|x| \geq 0$ va $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; b) ixtiyoriy

$x \in R^n$ va ixtiyoriy $\alpha \in R$ lar uchun $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$; *c)* ixtiyoriy $x, \bar{x} \in R^n$ lar uchun

$$|x + \bar{x}| \leq |x| + |\bar{x}|.$$

Shunga o'xshash xossalarga ega bo'lgan funksiyalarni *norma* deb ataladi. Norma bilan yoritilgan chiziqli fazolar *normallangan* fazolar deb ataladi (aniq ta'rifi keyingi bandda). R^n fazoda normani turlicha aniqlash mumkin. Masalan,

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty)$$

formula bo'yicha yoki $|x|_\infty = \max_i |x_i|$ formula bo'yicha kiritish mumkin. Normalarni kiritish $d(x, \bar{x}) = |x - \bar{x}|$ formula bo'yicha masofani, ochiq va yopiq to'plamlar, yaqinlashish kabi tushunchalarni aniqlash imkonini beradi.

Banax fazosining ta'rifi va unga doir misollar.

1-ta'rif. *X chiziqli fazo normallangan deyiladi, agar X da norma deb ataluvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\|\cdot\| : X \to R$ funksional aniqlangan bo'lsa: a) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|x\| \geq 0$ va $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; b) ixtiyoriy $x \in X$ va ixtiyoriy $\alpha \in R$ lar uchun $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$; c) ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ lar uchun $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$.*

Gohida aynan X da berilgan normani ta'kidlash uchun, $\|\cdot\|_X$ deb yoziladi. X da ikkita $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar *ekvivalent* deyiladi, agar shunday C_1 va C_2 musbat o'zgarmaslar mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1,$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa. Agar unda $d(x,y)=\|x-y\|$ masofa kiritilgan bo'lsa, har qanday normallangan fazo metrik fazo bo'ladi.

2-ta'rif. *X metrik fazoning $\{x_n\}$ nuqtalar ketma-ketligi fundamental deyiladi, agar u Koshi kriteriyasini qanoatlantirsa, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday N_ε soni mavjud bo'lsaki, barcha $n>N_\varepsilon$ va $n'>N_\varepsilon$ sonlar uchun $d(x_n,x_{n'})<\varepsilon$ bo'lsa.*

Agar X fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu fazo to'la deyiladi. Kiritilgan masofaga nisbatan to'la fazo banax fazosi deyiladi.

Banax fazosiga doir misollar.

1. Quyidagi $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ vektorlardan tashkil topgan

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<\infty,$$

normali chekli o'lchamli l_p^n fazo.

2. K kompakt to'plamda $\|x(\cdot)\|_C=\max_{t\in K}|x(t)|$ norma bilan berilgan $x(\cdot):K\to R^n$ uzluksiz vektor-funksiyalar $C(K,R^n)$ fazosi.

3. $[t_0,t_1]\subset R$ chekli kesmada

$$\|x(\cdot)\|_C=\max\left\{\|x(\cdot)\|_C,\|x'(\cdot)\|_C,\dots,\|x^{(r)}(\cdot)\|_C\right\}$$

norma bilan berilgan $x(\cdot):[t_0,t_1]\to R^n$ r marta uzluksiz differensiallanuvchi vektor- funksiyalar $C^{(r)}([t_0,t_1],R^n)$ fazosi.

4. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$, $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty$ ketma-ketlikdan tashkil topgan

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

formula bilan berilgan normali l_2 fazo.

Fazolarning ko'paytmasi. Qo'shma fazo va qo'shma operator. Aytaylik, X va Y normallangan fazolar bo'lsin. $X\times Y$ dekart ko'paytmani

$$\|(x,y)\|_{X\times Y}=\max\left\{\|x\|_X,\|y\|_Y\right\},$$

norma kiritib, normallangan fazoga aylantirish mumkin (normaning barcha aksiomalari bajariladi bu oson teshiriladi). Boshqacha ekvivalent normallashtirilgan bo'lishi ham mumkin. Ravshanki, banax fazolarining dekart ko'paytmasi yana banax fazosi bo'ladi.

Barcha X' chiziqli uzluksiz funksionallar to'plami X da X ga qo'shma fazoni tashkil qiladi. U

$$\|x'\|_{X'}=\sup_{\|x\|_X\le 1}\langle x',x\rangle$$

normaga nisbatan banax fazosi bo'ladi, bu yerda $\langle x',x\rangle$ – x' funksionalning x ga ta'sirini anglatadi [44]. R^n chekli fazoga qo'shma bo'lgan fazo, R^n fazoga izomorf bo'ladi. Ikkita $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n$ va $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\langle y,x\rangle=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i$ yig'indi ko'rinishida ifodalanadi, yana agar $y\in R^{n*}$ va $x\in R^n$ bo'lsa, $\sum_{i=1}^{n}y_ix_i$ yig'indi yx sifatida belgilaymiz, bu yerda x – ustun, y – satr hisoblanadi (u holda yx matritsalar ko'paytmasidan boshqa narsa emas).

Aytaylik, X va Y normallangan fazolar, $A\in L(X,Y)$ – X dan Y ga

o'tkazuvchi chiziqli uzluksiz operator bo'lsin. U holda shunday $A^*: Y^* \to X^*$ qo'shma operatorni aniqlash mumkinki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\langle x, A^* y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Fazolar ko'paytmasida chiziqli uzluksiz funksionallar uchun quyidagi lemma o'rinli.

Lemma. *Har qanday $X = (X_1 \times X_2)^*$ funksional quyidagi ko'rinishda birqiymatli tasvirlanadi*

$$\langle (x_1, x_2), (y_1^*, y_2^*) \rangle = \langle x_1, y_1^* \rangle + \langle x_2, y_2^* \rangle, \quad x_1 \in X_1, \; x_2 \in X_2.$$

1.1. Geometriya va funksional analizning ayrim teoremalari. Maksimum va minimumga erishish haqidagi Veyershtrass teoremasi

1-teorema (Veyershtrass). *Uzluksiz funksiya chekli fazoning bo'lmagan chegaralangan yopiq qism to'plamida o'zining absolyut maksimum va minimumiga erishadi.*

Endi mazkur teoremaning biz doimiy foydalanadigan sodda natijasini keltirib o'tamiz.

Natija. *Agar f funksiya R^n fazoda uzluksiz va*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty, \quad \left[\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = -\infty \right],$$

bo'lsa, u holda f funksiya R^n fazoning ixtiyoriy yopiq qism to'plamida o'zining absolyut minimumiga (maksimumiga) erishadi.

3-ta'rif. *Eslatib o'tamiz. A to'plam metrik fazoda kompakt to'plam deyiladi, agar A to'plamning har qanday elementlar ketma-ketligidan A to'plamning elementiga yaqinlashuvchi qism ketma-*

ketlikni ajratib olish mumkin bo'lsa yoki A to'plamning har qanday ochiq qoplamasidan chekli qoplama ostini tanlash mumkin bo'lsa teng kuchli ta'rif. Ravshanki, chekli fazoning chegaralangan va yopiq qism to'plami kompakt to'plam bo'ladi.

Ajratish teoremalari. Qavariq masalalarda hamda tenglik va tengsizlikli masalalarda ekstremumning zaruriy shartini keltirib chiqarish (Lagranj prinsipi) uchun kesishmaydigan qavariq to'plamlarning ajratish xossalaridan foydalanamiz. Chekli o'lchamli hollarga tegishli bo'lgan natijalarni keltirib o'tamiz.

4-ta'rif. *Ikki B to'plamlar ajratuvchi deyiladi, agar A to'plami o'ziga ekvivalent shunday yarim fazo topilsaki, B to'plamning nuqtalari shu yarim fazoning chegarasida yotsa. Buni analitik ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin: $\lambda \in R^n$ $(\lambda \neq 0)$ vektor mavjudki, uning uchun*

$$\inf_{x \in A} \langle \lambda, x \rangle \geq \sup_{x \in B} \langle \lambda, x \rangle$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

5-ta'rif. *A va B to'plamlar qat'iy ajratuvchi deyiladi, agar A to'plami o'ziga ekvivalent shunday yarim fazo topilsaki, B to'plamdan olingan nuqtalarni o'z ichiga olmasa. Buni analitik ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin: $\lambda \in R^n$ $(\lambda \neq 0)$ vektor mavjudki, uning uchun*

$$\inf_{x \in A} \langle \lambda, x \rangle > \sup_{x \in B} \langle \lambda, x \rangle$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2-teorema (chekli o'lchovli hol uchun 2-ajratish teoremasi).

Aytaylik, A va B to'plamlar R^n fazoda bo'sh bo'lmagan yopiq qavariq to'plamlar bo'lib, $A\cap B=\varnothing$ bo'lsin. U holda A va B lar ajraluvchi to'plamlar bo'ladi.

3-teorema (chekli o'lchovli hol uchun 3-ajratish teoremasi). *Aytaylik, A to'plam R^n fazoda bo'sh bo'lmagan qavariq to'plam va $b\notin A$ bo'lsin. U holda b nuqtani A to'plamdan qat'iy ajratish mumkin.*

3-teoremaning isboti. b nuqtadan A yopiq to'plamgacha bo'lgan masofa haqidagi masalani qaraymiz:

$$|b-x|\to\inf,\quad x\in A. \tag{1}$$

$f(x)=|x|$ funksiya uzluksiz va $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=\infty$ bo'lganligi sababli, Veyershtrass teoremasining natijasiga ko'ra, (1) masalaning yechimi mavjud va uni $\hat{x}$ bilan belgilaymiz. Ravshanki, $\hat{x}\neq b$ (1-rasm).



1-rasm

b nuqta orqali $b\hat{x}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan H gipertekislikni o'tkazamiz. Ko'rsatamizki, bunda A to'plam ochiq yarim fazolarning birida bo'ladi. Shu bilan uchinchi teorema isbot bo'ladi. Haqiqatan, agar H gipertekislikda yotuvchi yoki $\hat{x}$ nuqtani o'ziga olmagan ochiq yarim fazoda biror – bir $a\in A$ nuqta mavjud bo'lganida edi, u holda $[a,\hat{x}]\subset A$ va (to'g'ri burchakli yoki o'tmas burchakli) $b\hat{x}a$ uchburchakdan b nuqtadan $[a,\hat{x}]$ ga tushirilgan perpendikulyar $|b\hat{x}|$ ga nisbatan kichik uzunlikka ega bo'lgan bo'lar edi. Bu esa, $\hat{x}$ nuqtani (1) masalaning yechimi ekanligiga zid.

2-teoremaning isboti. "A va B" to'plamlar ajraluvchan deyilgan

tasdiq "nol nuqta"

$$C=A-B=\{x=a-b: a\in A, b\in B\}$$

to'plamdan ajraluvchi deyilgan tasdiqqa teng kuchli. Haqiqatan,

$$\inf_{a\in A}\langle a,y\rangle\geq\sup_{b\in B}\langle b,y\rangle\Leftrightarrow\inf_{a\in A}\langle a,y\rangle-\sup_{b\in B}\langle b,y\rangle\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\inf_{a\in A}\langle a,y\rangle+\inf_{b\in B}\langle -b,y\rangle\geq 0\Leftrightarrow\inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}}\langle a-b,y\rangle\geq\langle 0,y\rangle.$$

Shuning uchun, teoremani isbot qilish uchun nol nuqtani C to'plamdan ajraluvchan ekanligini isbotlash yetarli. Ravshanki, C qavariq to'plam va $0\notin C$.

Agar $\operatorname{int}C=\varnothing$ bo'lsa, u holda C to'plamning affin qavariq qobig'ining o'lchami n dan kichik bo'ladi, ya'ni $\dim aff\,C<n$. Bu holda $aff\,C$ - R^n ning xos qismfazoni tashkil qiladi, shuning uchun uni o'ziga oluvchi gipertekislik mavjud. Bu esa izlanayotgan gipertekislik bo'ladi.

Aytaylik, $\operatorname{int}C\neq\varnothing$ bo'lsin. U holda shunday ochiq K konus mavjudki,

$$K=K^{(n)}=conv\,C=\left\{x=\sum_{i=1}^{n}t_i x_i: x_i\in C,\ t_i>0,\ i=1,2,\ldots,n,\ x\in V-atrofi\right\}$$

Ravshanki, $-K\cap K=\varnothing$, aks holda $0\in C$ kelib chiqar edi. Ixtiyoriy $\xi\in -K$ nuqtani olamiz. U $\bar{K}$ konusda yotmaydi (K konusning yopig'i), K ni yopiq qavariq to'plam ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Ajraluvchanlikning 3- teoremasiga ko'ra, ξ nuqta va K to'plamni ajratish mumkin, ya'ni $\lambda\neq 0$ vektor mavjudki, uning uchun

$$\inf_{x\in K}\langle\lambda,x\rangle>\langle\lambda,\xi\rangle, \tag{2}$$

tengsizlik bajariladi.

Qandaydir $x \in \bar{K}$ nuqta uchun $(\tilde{x}, x) < 0$ tengsizlik bajarilishi mumkin emas, aks holda (1) tenglikning chap qismidagi infimum $-\infty$ ga teng bo'lib qolgan bo'lar edi. Demak, ixtiyoriy $x \in \bar{K}$ nuqta va demak, ixtiyoriy $x \in C$ uchun $(\tilde{x}, x) \geq 0$ bo'ladi. Bu bilan nol nuqtani C to'plamdan ajratuvchi gipertekislik qurildi.

6- ta'rif. *Bitta o'zgaruvchining haqiqiy funksiyasi uchun ikkita ta'rif:*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(\tilde{x} + h) - F(\tilde{x})}{h}, \tag{3}$$

chekli limitni mavjudligi hamda $h \to 0$ ga intilganda

$$F(\tilde{x} + h) = F(\tilde{x}) + F'(\tilde{x})h + o(h), \tag{4}$$

asimptotik yoyilmaning mumkinligi — aynan bir differensiallanuvchilik tushun-chasiga olib keladi. Lekin, ikki va undan ortiq o'zgaruvchili funksiyalar uchun differensiallanuvchilik (silliqlilik) tushunchasiga olib keluvchi bir qancha turli yondashuvlar mavjud. (3) ta'rif yo'nalish bo'yicha hosila, Lagranj bo'yicha variatsiya va Gato bo'yicha hosila tushunchalariga olib keladi. (4) ta'rif esa, Freshe bo'yicha hosila va qat'iy differensiallanuvchilik tushunchalariga olib keladi.

1.2. Yo'nalish bo'yicha hosila, Lagranj bo'yicha variatsiya va Gato hosilasi.

Aytaylik, X va Y normallangan fazolar, $F: X \to Y$ X fazoning akslantirishi yoki Y fazodagi $\tilde{x}$ nuqtaning qandaydir atrofi bo'lsin.

$$\delta F(\tilde{x}, h) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(\tilde{x} + \lambda h) - F(\tilde{x})}{\lambda},$$

limit mavjud farazi ostida u F ning h *yo'nalish bo'yicha* $\tilde{x}$ *nuqtadagi hosilasi* deb ataladi.

Agar F akslantirish $\tilde{x}$ nuqtada barcha $h \in X$ yo'nalishlar bo'yicha hosilaga ega bo'lsa, u holda F akslantirish $\tilde{x}$ nuqtada Lagranj bo'yicha *variatsiyaga* ega deb aytiladi. Bunda $h \to \delta F(\tilde{x}, h)$ akslantirishni *Lagranj bo'yicha variatsiya* deyiladi.

Agar $\delta F(\tilde{x}, h): X \to Y$ operator chiziqli va $h \in X$ bo'yicha uzluksiz bo'lsa, u holda F akslantirish $\tilde{x}$ nuqtada *Gato bo'yicha differen-siallanuvchi* deyiladi, $\delta F(\tilde{x}, \cdot)$ operator esa F akslantirishning $\tilde{x}$ nuqtadagi *Gato hosilasi* deyiladi va $F'_G(\tilde{x})$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, agar F akslantirish $\tilde{x}$ nuqtada Gato bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy tayinlangan $h \in X$ uchun quyidagi

$$F(\tilde{x} + \lambda h) - F(\tilde{x}) = \lambda F'_G(\tilde{x})[h] + r(h, \lambda),$$

yoyilma o'rinli bo'ladi, bu yerda $h \to 0$ da $\|r(h, \lambda)\| \to 0$ bo'ladi.

Freshe hosilasi, qat'iy differensiallanuvchanlik. Oldingi band-dagi F akslantirish $\tilde{x}$ nuqtada Freshe bo'yicha differensiallanuvchi deb ataladi va $F \in D(\tilde{x})$ kabi yoziladi, agar shunday X dan Y ga o'tkazuvchi, $F'(\tilde{x})$ kabi belgilanuvchi chiziqli uzluksiz operator va $\tilde{x}$ nuqtani qandaydir atrofini Y ga akslantiruvchi r akslantirish mavjud bo'lib, u uchun

$$F(\tilde{x} + h) = F(\tilde{x}) + F'(\tilde{x})[h] + r(h), \qquad \|h\| \to 0 \quad da \quad \|r(h)\| = o(\|h\|). \tag{5}$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

$F'(\tilde{x}): X \to Y$ operator *Freshe hosilasi* deb ataladi. (5) munosabatni qisqacha

DENOV TADBIRKORLIK VA PEDAGOGIKA INSTITUTI ARM
№ 34352

$$F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})=F'(\hat{x})[h]+\alpha(h),$$

ko'rinishda yozish mumkin ($\alpha(h)$ kattalikni Y fazoning elementi sifatida qarab, buning uchun $h\to 0$ da $\|\alpha(h)\|\to 0$ bo'lishligini ko'ramiz). Bu yerda $F'(\hat{x})[h]$ orqali $F'(\hat{x})$ akslantirishning $h\in X$ elementdagi qiymati belgilangan. Agar F ochiq to'plamning har bir x nuqtasida $F\in D(x)$ bo'lib, $x\to F'(x)$ akslantirish uzluksiz bo'lsa, u holda $F\in C^1(U)$ deb yozamiz. Ravshanki, F akslantirishni $\hat{x}$ nuqtada Freshe bo'yicha differensiallanuvchiligidan F akslantirishning $\hat{x}$ nuqtada Gato bo'yicha differensiallanuvchiligi kelib chiqadi. Ikki o'lchovli holda bu ikki tushuncha bir-biridan farq qiladi. Ta'rif bo'yicha Gato bo'yicha differensiallanuvchilikdan Lagranj bo'yicha variatsiyaning mavjudligi kelib chiqadi va yana bu ikki tushuncha ikki o'lchovli holda farq qiladi.

F akslantirishni $\hat{x}$ nuqtada Freshe bo'yicha differensiallanuvchiligi ta'rifi $\varepsilon-\delta$ tilida quyidagicha aytiladi: shunday $F'(\hat{x})\in L(X,Y)$ operator mavjudki, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\delta>0$ topiladiki, barcha h, $\|h\|<\delta$ lar uchun

$$\|F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})-F'(\hat{x})[h]\|\le\varepsilon\|h\|$$

tengsizlik bajariladi.

(5) ifodadan Freshe hosilasi bir qiymatli aniqlanganligi kelib chiqadi yoki $A_1h-A_2h=\alpha(h)$, tenglik A_1 va A_2 chiziqli uzluksiz operatorlar uchun faqat $A_1=A_2$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

Analizning ko'pgina chekli va cheksiz o'lchovli masalalarda $\hat{x}$ nuqtada Freshe bo'yicha differensiallanuvchilik biror-bir natijaga

ershish uchun yetarli emas. Bu, nuqtada differensiallanuvchilikni kuchaytirishga undaydi.

7-ta'rif. *F akslantirishni $\hat{x}$ nuqtada Freshe bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsin. U $\hat{x}$ nuqtada qat'iy differensiallanuvchi deyiladi (bunda $F\in SD(\hat{x})$ deb yoziladi), agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topilib, $\|x_1-\hat{x}\|<\delta$, $\|x_2-\hat{x}\|<\delta$, tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha x_1 va x_2 lar uchun*

$$\|F(x_1)-F(x_2)-F'(\hat{x})[x_1-x_2]\|\le\varepsilon\|x_1-x_2\|,$$

tengsizlik bajarilsa.

Agar $F:R^n\to R^m$ akslantirish R^n chekli o'lchovli fazoda $\hat{x}$ nuqtada differensiallanuvchi akslantirish bo'lsa yoki R^m chekli o'lchovli fazoda $\hat{x}$ nuqtaning qandaydir atrofida differensiallanuvchi akslantirish bo'lsa, u holda $\hat{x}$ nuqtadagi Freshe hosilasi - xususiy hosilalardan tuzilgan

$$F'(\hat{x})=\left(\frac{\partial F_i(\hat{x})}{\partial x_j}\right),\quad (i=1,2,\dots,m,\quad j=1,2,\dots,n),$$

matritsadan iborat bo'ladi. Bu matritsa *Yakobi matritsasi* deyiladi. Agar $m=n$ bo'lsa, u holda Yakobi matritsasining determinanti F akslantirishning $\hat{x}$ nuqtadagi *yakobiani* deb ataladi.

Xususiy hosila va yuqori tartibli hosila. Aytaylik, X,Y,Z – normallangan fazolar, $U=(\hat{x},\hat{y})$ nuqtaning $X\times Y$ dagi atrofi, $F:U\to Z$ aksantirish bo'lsin.

Agar $x\to F(x,\hat{y})$ akslantirish $\hat{x}$ nuqtada Freshe bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning hosilasi F akslantirishning

$(\hat{x},\hat{y})$ nuqtadagi x bo'yicha *xususiy hosilasi* deb ataladi va $f'_x(\hat{x},\hat{y})$ yoki $\frac{\partial f(\hat{x},\hat{y})}{\partial x}$ kabi belgilanadi.

y bo'yicha xususiy hosila ham shunga o'xshash aniqlanadi:

$$f'_y(\hat{x},\hat{y}) = \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y})}{\partial y}.$$

Endi ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ikkinchi tartibli hosilasi ta'rifini berib o'tamiz.

Aytaylik, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ nuqtaning R^n fazodagi atrofi bo'lsin. $f: U \to R$ da aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsin. f funksiyani $\hat{x}$ nuqtada ikki marta differensiallanuvchi deb aytamiz, agar shunday Q kvadrat forma (shakl) mavjud bo'lib, natijada

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) - f'(\hat{x})h = \frac{1}{2}Q(h) + \alpha(h)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bu yerda $\alpha(h) = o(\|h\|^2)$.

Bu kvadratik forma

$$\left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i \partial \hat{x}_j}\right), \quad i,j = 1,2,\ldots,n$$

xususiy hosilalardan tuzilgan simmetrik matritsa orqali aniqlanadi.

Endi cheksiz o'lchovli holga o'tamiz. Aytaylik, X va Y normallangan fazolar, $U \subset X$ – ochiq qism to'plam bo'lsin. Agar $f: U \to Y$ akslantirish har bir $x \in U$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda U to'plamning $x \to f'(x)$ akslantirishi $L(X,Y)$ fazoda aniqlangan bo'ladi. Bundan tashqari $L(X,Y)$ ham normallangan fazo bo'ladi, u holda ikkinchi tartibli hosilaning mavjudligi haqidagi masalani qo'yish mumkin.

$f'(x) \in L(X,Y)$. $f'(x)h \in L(X,L(X,Y))$.

$h_1 \in X$ uchun $f'(x)[h_1] \in L(X,L(X,Y))$ bo'ladi. $h_2 \in X$ ni olamiz, unda

$$f'(x)[h_1,h_2] = f'(x)[h_1][h_2]$$

aniqlanadi. Shunday qilib, har bir argumenti bo'yicha $f'': X \times X \to Y$ chiziqli akslantirish aniqlandi. Yuqori tartibli hosilalar ham shunga o'xshash aniqlanadi.

4-teorema (urinish haqida) [7]. *Agar $f: U \to Y$ akslantirish uchun $f'(x)$ ikkinchi tartibli hosila mavjud bo'lsa, u holda barcha $h_1, h_2 \in X$ lar uchun $f''(x)[h_1,h_2] = f''(x)[h_2,h_1]$ tenglik o'rinli bo'ladi.*

2-§. Normallangan fazolarda differensial hisobning asosiy teoremalari

Ekstremal masalalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan bir necha teoremalarni keltirib o'tamiz.

Superpozitsiya haqidagi teorema. *Aytaylik, X, Y, Z – normallangan fazolar, U – x nuqtaning X dagi atrofi, $\Im$ – $\hat{y}$ nuqtaning Y dagi atrofi, $\varphi(\hat{x}) = \hat{y}$, $\psi: \Im \to Z$, $f = \psi \circ \varphi: U \to Z$ – φ va ψ akslantirishlarning superpozitsiyasi bo'lsin.*

U holda, agar ψ $\hat{y}$ nuqtada Freshe bo'yicha differensiallanuvchi akslantirish, φ esa $\hat{x}$ nuqtada Freshe bo'yicha differensiallanuvchi akslantirish bo'lsa, (Gato bo'yicha differensiallanuvchi. Lagranj

bo'yicha variatsiyaga ega, u holda f φ funksiya kabi $\hat{x}$ nuqtada huddi shunday xossalarga ega bo'ladi va mos ravishda

$$f'(\hat{x}) = \psi'(\hat{y}) \cdot \varphi'(\hat{x}),$$

$$f_h(\hat{x}) = \psi'(\hat{y}) \cdot \varphi_h(\hat{x}), \quad \delta f(\hat{x}, h) = \psi'(\hat{y}) \delta\varphi(\hat{x}, h) + \omega(\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}, \varphi(\hat{x}) - \hat{y})$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Agar ψ $\hat{y}$ nuqtada qat'iy differensiallanuvchi bo'lsa va φ $\hat{x}$ nuqtada qat'iy differensiallanuvchi bo'lsa, u holda f $\hat{x}$ nuqtada qat'iy differensiallanuvchi bo'ladi.

Agar ψ faqat Gato bo'yichagina differensiallanuvchi bo'lsa, superpozitsiya haqidagi teorema umuman aytganda o'rinli emas.

Keling, ikkita ekstremal holatni batafsil ko'rib chiqaylik, ular - Lagranj bo'yicha variatsiya va qat'iy differensiallanuvchilik.

a) Freshe hosilasi ta'rifiga bo'yicha

$$\psi(y) - \psi(\hat{y}) = \psi'(\hat{y})[y - \hat{y}] + \omega(y - \hat{y}),$$

bo'ladi. Bundan,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\psi(\varphi(\hat{x} + \lambda h)) - \psi(\hat{y})}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\psi'(\hat{y})[\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}] + \omega(\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y})}{\lambda}$$

$$= \psi'(\hat{y}) \left[\lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}}{\lambda} \right] + \lim_{\lambda \to 0} \frac{\omega(\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y})}{\lambda} =$$

$$= \psi'(\hat{y}) \left[\varphi'(\hat{x}, h) \right] + \lim_{\lambda \to 0} \frac{\omega(\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y})}{\|\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}\|} \cdot \lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}}{\lambda} \right\|$$

$$= \psi'(\hat{y}) \left[\varphi'(\hat{x}, h) \right] + 0 \cdot \|\varphi'(\hat{x}, h)\| = \psi'(\hat{y}) \left[\varphi'(\hat{x}, h) \right],$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu esa, akslantirishlar superpozitsiyasining Lagranj bo'yicha variatsiyasi uchun formulani isbot qiladi.

b) $\varphi \in SD(\hat{x})$, $\psi \in SD(\hat{y})$ ekanligidan, ixtiyoriy $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ lar uchun shunday $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ sonlar topiladiki, $\|x_i - \hat{x}\| < \delta_1$, $\|y_i - \hat{y}\| < \delta_2$, $i = 0,1$, tengsizliklardan

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - \varphi'(\hat{x})[x_1 - x_2]\| \le \varepsilon_1 \|x_1 - x_2\|, \tag{1}$$

$$\|\psi(y_1) - \psi(y_2) - \psi'(\hat{y})[y_1 - y_2]\| \le \varepsilon_2 \|y_1 - y_2\|. \tag{2}$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ sonlarni shunday tanlaymizki, ular uchun $\varepsilon\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|\varphi'(\hat{x})\| + \varepsilon_1 \|\psi'(\hat{y})\| \le \varepsilon$ tengsizlik bajarilsin. $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ lar bo'yicha $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ larni shunday tanlaymizki, (1) va (2) munosabtlar o'rinli bo'lsin va nihoyat

$$\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\delta_2}{\varepsilon_1 + \|\varphi'(\hat{x})\|}\right\},$$

deb olamiz. Endi, agar $\|x_i - \hat{x}\| < \delta$, $i = 0,1$, bo'lsa, u holda (1) tengliklarga ko'ra,

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \le \varepsilon_1 \|x_1 - x_2\| + \|\varphi'(\hat{x})[x_1 - x_2]\| \le \left(\varepsilon_1 + \|\varphi'(\hat{x})\|\right)\|x_1 - x_2\|. \tag{3}$$

bo'ladi. Bu tengsizlikda navbat bilan $x_i = \hat{x}$, $i = 0,1$ deb olib,

$$\|\varphi(x_i) - \varphi(\hat{x})\| - \|\varphi'(x_i) - \hat{y}\| \le \left(\varepsilon_1 + \|\varphi'(\hat{x})\|\right)\delta \le \delta_2,$$

tengsizlikni olamizki, $y_i = \varphi(x_i)$ uchun (2) bajariladi. Endi (1), (2) va (3) tengsizliklardan foydalanib,

$$\|f(x_1) - f(x_2) - \psi'(\hat{y})[\varphi'(\hat{x})][x_1 - x_2]\| \le \|\psi(\varphi(x_1) - \psi(\varphi(x_2)) - \psi'(\hat{y})[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]\| +$$

$$+ \|\psi'(\hat{y})[\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - \varphi'(\hat{x})[x_1 - x_2]]\| \le \varepsilon_2 \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| +$$

$$+ \|\psi'(\hat{y})\| \cdot \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - \varphi'(\hat{x})[x_1 - x_2]\| \le \varepsilon\varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 + \|\varphi'(\hat{x})\|\right)\|x_1 - x_2\| +$$

$$+\|\varphi'(\xi)\|\|x_2\|\|x_1-x_2\| \le (\varepsilon\|x_1\| + \varepsilon\|\varphi(x_1)\| + \varepsilon\|\varphi(x_1)\|)\|x_1-x_2\| \le \|x_1-x_2\|,$$

bu esa $f \in SD(\varepsilon)$ ni anglatadi.

Bu mulohazalarda $x_1 = x$, $x_2 = x + h$ deb olib, teoremaning φ ni Freshe bo'yicha differensiallanuvchi holi uchun isbotini olamiz. Teoremaning φ ni Gato bo'yicha differensiallanuvchi holi, akslantirishlar superpozitsiyasining Lagranj bo'yicha variatsiya uchun olingan formulani tahlil qilish orqali olinadi.

Bir o'zgaruvchili sonli funksiyalar uchun Lagranj teoremasi yoki o'rta qiymat haqidagi teorema yoki chekli orttirma formulasi deb nomlanuvchi teorema o'rinli ekanligi yaxshi ma'lum: *agar $f:[a,b] \to R$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shunday $c \in (a,b)$ nuqta mavjudki,*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \qquad (4)$$

bo'ladi.

(4) formula argumenting qandaydir normallashgan fazoda yotuvchi sonli funksiyalar uchun ham o'rinliligicha qoladi, bunga ishonch hosil qilish qiyin emas. Bu holda

$$[a,b] = \{x : x = a + t\cdot(b-a), 0 \le t \le 1\},$$

aniqlanadi, xuddi shunga o'xshash (a,b) oralig'ini ham aniqlash mumkin, differensiallanuvchilikni Gato ma'nosida tushunish mumkin. Endi $\varphi(t) = f(a + t\cdot(b-a))$ deb olib, isbotni bir o'zgaruvchili holga keltiramiz. Vektor qiymatli funksiyalar uchun (4) formula o'rinli emas. Shuni aytib o'tish lozimki, analizda qoida tariqasida (4) formulani o'zidan emas, undan kelib chiqadigan

$$|f(b) - f(a)| \le M(b-a),$$

bu yerda $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, bahodan foydalaniladi.

Hozir ko'rsatamizki, bunda ancha kuchsiz ko'rinishdagi tasdiq ixtiyoriy normallashgan fazolarga tatbiq qilinadi.

An'anaga ko'ra, bu teorema "o'rta qiymat haqidagi teorema" nomini saqlab qoladi, garchi bu teoremani "chekli orttirmani baholash haqidagi teorema" deb nomlansa ham maqsadga muvofiq bo'lardi.

1-teorema (o'rta qiymat haqida). *Aytaylik, X, Y – normallangan fazolar, $U \subset X - [a,b]$ kesmani o'ziga oluvchi ochiq to'plam bo'lsin.*

Agar $f: U \to Y$ akslantirish $x \in [a,b]$ nuqtada Gato bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\|f(b) - f(a)\| \le \sup_{x\in[a,b]} \|f'(x)\| \cdot \|b-a\|,$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Xan-Banax teoremasining natijasiga ko'ra ([6] da 7.1 bandga qarang), ixtiyoriy $y \in Y$ uchun, demak, $y = f(b) - f(a)$ uchun ham shunday $y^* \in Y^*$ element topiladiki, $\|y^*\| = 1$ va

$$\langle y^*, y\rangle = \|y\|, \text{ ya'ni } \langle y^*, f(b) - f(a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|$$

bo'ladi.

$\varphi(t) = \langle y^*, f(a + t(b-a))\rangle$ deb belgilaymiz. Bundan tashqari, $y^* \in Y^*$ chiziqli uzluksiz funksional, f akslantirish esa $[a,b]$ kesmaning har bir nuqtasida Gato bo'yicha hosilaga ega bo'lsa, u holda superpozitsiya haqidagi teoremaga ko'ra, ixtiyoriy $t \in [0,1]$ uchun

$$\varphi(t) = \langle y^*, f_1(a + t(b-a))(b-a) \rangle.$$

bo'ladi. φ funksiyaning differensiallanuvchiligidan, uni $[0,1]$ kesmada uzluksizligi kelib chiqadi, bundan unga Lagranj formulasini (chekli orttirmalar) qo'llash mumkin:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta), \quad \theta \in (0,1)$$

Shuning uchun,

$$\|f(b) - f(a)\| = \langle y^*, f(b) - f(a) \rangle = \varphi(1) - \varphi(0)$$

$$= \langle y^*, f_1(a + \theta(b-a))(b-a) \rangle \le \|f_1(a + \theta(b-a))(b-a)\| \le$$

$$\le \|f_1(a + \theta(b-a))\| \|b-a\| \le \sup_{t \in [a,b]} \|f_1(t)\| \|b-a\|$$

Endi o'rta qiymat haqidagi teoremadan kelib chiqqan bir necha natijalarni keltirib o'tamiz.

1-natija. *Aytaylik, o'rta qiymat haqidagi teoremaning barcha shartlari bajarilsin va $A \in L(X,Y)$ bo'lsin. U holda*

$$\|f(b) - f(a) - A(b-a)\| \le \sup_{t \in [a,b]} \|f_1(t) - A\| \|b-a\|$$

bo'ladi.

Buni isbot qilish uchun $g(x) = f(x) - Ax$ akslantirishga o'rta qiymat haqidagi teoremani tatbiq qilish kerak.

2-natija. *Aytaylik, X,Y - normallangan fazolar, U esa, X da $\hat{x}$ nuqtaning atrofi, $f: U \to Y$ akslantirish har bir $x \in U$ nuqtada Gato bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $x \to f_1(x)$ akslantirish $\hat{x}$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda f akslantirish $\hat{x}$ nuqtada qat'iy differensiallanuvchi (bundan o'sha nuqtada Freshe bo'yicha ham differensiallanuvchi) bo'ladi.*

Isboti. $x \to f_1(x)$ akslantirishni uzluksizligiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, $\|x - \hat{x}\| < \delta$ tengsizlikdan

$$\|f_1(x) - f_1(\hat{x})\| < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi.

$B = B(\hat{x}, \delta)$ sharning qavariqliligiga ko'ra, $x_1, x_2 \in B$ shartdan $[x_1, x_2] \in B$ shart kelib chiqadi. O'rta qiymat haqdagi teoremaning $\Lambda = f_1(x)$ li 1-natijasiga ko'ra,

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f_1(\hat{x})(x_1 - x_2)\| \le \sup_{x \in [x_1, x_2]} \|f_1(x) - f_1(\hat{x})\| \times \|x_1 - x_2\| \le \varepsilon \|x_1 - x_2\|,$$

tengsizlikni olamiz, bu f akslantirishni $\hat{x}$ nuqtada qat'iy differensiallanuvchi ekanligini anglatadi. 2-natija bizga aniq funksionallarni differensiallanuvchiligini tekshirishda Gato bo'yicha hosilasini mavjudligini isbotlash va uning uzluksizligini tekshirish yetarli - bu allaqachon qat'iy differensiallanuvchi (va ayniqsa, Freshe hosilasini mavjudligini) ekanligini kafolatlaydi.

2 teorema (Xan-Banax). *X - chiziqli fazo, X_0 - X ning chiziqli qism fazosi, $p(\cdot)$ esa, X da subchiziqli funksiya ($p(\cdot) \in Sl(X)$), $x_0 - X_0$ da $p(\cdot)$ funksiya orqali majorantirlanuvchi funksiyali chiziqli funksional, (ya'ni ixtiyoriy $x \in X_0$ uchun $\langle x_0, x \rangle \le p(x)$) bo'lsin. U holda X da shunday chiziqli funksional mavjud $x^* \in X^*$ bo'ladiki, (ya'ni) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\langle x^*, x \rangle \le p(x)$ va ixtiyoriy $x \in X_0$ uchun $\langle x^*, x \rangle = \langle x_0, x \rangle$ tenglik o'rinli bo'ladi.*

Teoremaning isboti quyidagi Sorn lemmasiga tayanadi. Keling bu lemma qanday ta'riflanishini eslatib o'taylik. Aytaylik, $(M, \le)$ qisman

tartiblangan to'plam bo'lsin. Uning ixtiyoriy ikkita elementini o'zaro taqqoslash (solishtirish) mumkin bo'lgan (M da kiritilgan tartiblanganlik ma'nosida) har qanday A to'plam ostini *zanjir* deb ataymiz. $a\in M$ elementni $M\subset M$ qism to'plamning *yuqori chegarasi* deb ataymiz, agar ixtiyoriy $a'\in M'$ element uchun $a'\le a$ bo'lsa. $a\in M$ ni *maksimal element* deymiz, agar $a\le a$, $a\in M$ shartdan $a=a$ kelib chiqsa.

1-lemma (Sorn). *Agar qisman tartiblangan to'plamda har qanday zanjir yuqori chegaraga ega bo'lsa, u holda bu to'plam maksimal elementga ega.*

Xan-Banax teoremasi va Sorn lemmasini isbotini batafsil o'rganib chiqishni o'quvchiga mustaqil mavzu sifatida qoldiramiz.

2-Xan-Banax teoremasidan natija (Banax lemmasi). *Aytaylik, X – normallangan fazo va $x_0\in X$ bo'lsin. U holda shunday $x^*\in X^*$ chiziqli funksional topiladiki, $\|x^*\|=1$ va $\langle x^*,x_0\rangle=\|x_0\|$ bo'ladi.*

Isboti. Agar $x_0=0$ bo'lsa, u holda $\|x^*\|=1$ bo'lgan ixtiyoriy x^* funksionalni olish mumkin. Agar $x_0\neq 0$ bo'lsa, u holda $L=\{x_0\}$ bir o'lchamli qism fazoni qaraymiz va unda quyidagi chiziqli funksionalni aniqlaymiz:

$$\langle \tilde{x}^*,\alpha x_0\rangle=\alpha\|x_0\|.$$

Ravshanki, ixtiyoriy $x\in L$ uchun $\langle \tilde{x}^*,x\rangle\le\|x\|$. Demak, Xan-Banax teo-remasiga ko'ra, $\tilde{x}^*$ ni davom ettiruvchi shunday x^* funksional topiladiki, ixtiyoriy x uchun $\langle x^*,x\rangle\le\|x\|$ bo'ladi. Bu yerdan darhol, x^* ning chegaralanganligi, bundan ixtiyoriy $x^*\in X^*$ uchun x^* funksio-

nalning uzluksizligi kelib chiqadi, ya'ni $x^*\in X^*$. Uni x^* bilan belgilaymiz. $\langle x^*,x\rangle\le\|x\|$ tengsizlikdan va $\langle x^*,x_0\rangle=\langle \tilde{x}^*,x_0\rangle=\|x_0\|$ tenglikdan $\|x^*\|=1$ ekanligi kelib chiqadi. Banax lemmasi isbot bo'ldi.

3–teorema (ochiqlilik haqida Banax teoremasi). *Aytaylik, X va Y – banax fazolari, $\Lambda: X\to Y$ da chiziqli uzluksiz X ni Y ga o'tkazuvchi ($\Leftrightarrow \Lambda\in L(X,Y)$), sur'ektiv bo'lgan operator bo'lsin($\Leftrightarrow \Lambda X=Y$). U holda X fazodagi har bir ochiq to'plamning obrazi Y da ochiq bo'ladi.*

Isboti. Isboti Ber teoremasiga tayanadi: *to'la metrik fazo sanoqli sondagi hech qayerda to'la bo'lmagan to'plamlarning birlashmasi sifatida tasvirlanishi mumkin emas* (Ber teoremasi).

$B_r=\{x:\|x\|\le r\}$ orqali X dagi r $(r\in N)$, radiusli sharni belgilaymiz, uning Y dagi obrazini yopig'ini C_r deb belgilaymiz: $C_r=\overline{\Lambda B_r}$. Λ ning sur'ektivligidan $\Lambda\Rightarrow\bigcup_{r=1}^{\infty}C_r=Y$ bo'ladi. Natijada, Y ni banax fazosi ekanligidan, shunday $r_0\in N$, $\eta\in Y$ va $\rho>0$ sonlar topiladiki,

$$C_{r_0}\supset B_{r_0}(\eta,\rho):=\{x:\|y-\eta\|\le\rho\}, \tag{5}$$

bo'ladi. Ta'rifdan va (5) munsublikdan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ va Y dagi markazi koordinata boshida, radiusi ρ ga teng bo'lgan shardan olingan ixtiyoriy y uchun, shunday ξ, $\xi\in B_{r_0}$ element topiladiki,

$$(\Leftrightarrow\Lambda\in L(X,Y)).\|y-\eta-\Lambda\xi\|<\varepsilon\Rightarrow\|y-\eta-\Lambda(\xi-\Lambda^{-1}\eta\|<\varepsilon. \tag{6}$$

bo'ladi. Bunda $\|\xi-\Lambda^{-1}\eta\|\le r_1$, bu yerda r_1 – qandaydir tayinlangan son.

Endi y element Y dagi markazi koordinata boshida bo'lgan, radiusi ρ ga teng bo'lgan ochiq shardan olingan bo'lsin. (6) tengsizlikka

ko'ra, shunday x_1, $\|x_1\| \le r_1$ topiladiki, $\|x - Ax_1\| < \frac{r}{2}$ bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, shunday x_2, $\|x_2\| < \frac{r}{2}$ topiladiki, $\|x - A(x_1 + x_2)\| < \frac{r}{4}$ bo'ladi. Bunday qurish jarayonini davom ettirib, shunday $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikka kelamizki, $\|x_n\| \le r_1 \cdot 2^{-n+1}$ va

$$\left\| x - A\sum_{k=1}^{n} x_k \right\| < r \cdot 2^{-n}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Natijada, $\sum_{k=1}^{n} x_k$ yig'indi esa $n \to \infty$ da qandaydir x ga yaqinlashadi. U holda ravshanki,

$$\|x\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \le r_1 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = 2r_1 < 3r_1, \text{ va } \lim_{n\to\infty} A\sum_{k=1}^{n} x_k = x.$$

Demak, Y dagi ixtiyoriy, markazi koordinata boshida, radiusi r ga teng bo'lgan ochiq shar, X dagi markazi nolda radiusi $3r_1$ bo'lgan ochiq sharning obrazida yotadi. Bu yerdan X dagi markazi nolda bo'lgan ixtiyoriy ochiq sharning obrazi Y dagi qandaydir markazi nolda bo'lgan ochiq sharni o'z ichiga oladi va umuman har qanday ochiq sharning obrazi ochiq sharni o'z ichiga olishligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Isbot qilingan teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

3-Natija (teskari operator haqqida Banax teoremasi). *Aytaylik, X va Y – banax fazolari, $A \in L(X,Y)$, $AX = Y$ va $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ bo'lsin. U holda Y dan X ga o'tkazuvchi A^{-1} $\left(\Leftrightarrow A^{-1} \in L(Y,X)\right)$ teskari operator uzluksiz chiziqli akslantirish bo'ladi.*

A teskari operatorni uzluksiz ekanligini isbotlash uchun ixtiyoriy ochiq to'plamning bu akslantirishdagi proobrazi ochiq to'plam ekanligini ko'rsatish kerak. Lekin U to'plamning proobrazi A^{-1} akslantirishda - bu ta'rif bo'yicha AU sifatida boshqa narsa emas, demak, agar $U = Q(X)$ bo'lsa, $AU = Q(Y)$, bundan esa A^{-1} teskari akslantirishni uzluksizligi kelib chiqadi.

Teylor formulasi. To'la differensial haqida teorema. Agar $f^{(n)}(\tilde{x})$ hosila mavjud bo'lsa, u holda

$$f(\tilde{x}+h) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})[h] + \left(\frac{1}{2}\right) f''(\tilde{x})[h,h] + \ldots + \left(\frac{1}{n!}\right) f^{(n)}(\tilde{x})[h,h,\ldots,h] + r(h),$$

formula o'rinli bo'ladi, bu erda $h \to 0$ da $\|r(h)\| = o(\|h\|)$ bo'ladi [7].

4-teorema (to'la differensial haqida). *Aytaylik, X, Y, Z – chiziqli normallangan fazolar, U – X da atrof, $F: U \to Z$ – akslantirish har bir $(x,y) \in U$ nuqtada $F_1(x,y)$ va $F_2(x,y)$ Gato ma'nosida xususiy hosilalarga ega bo'lsin.*

Agar $(x,y) \to F_1(x,y)$ va $(x,y) \to F_2(x,y)$ akslantirishlar tekis operatorli topologiyaning $(\tilde{x},\tilde{y}) \in U$ nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda F o'sha nuqtada qat'iy differensiallanuvchi bo'ladi va buning uchun

$$F'(\tilde{x},\tilde{y})[\xi,\eta] = F_1(\tilde{x},\tilde{y})[\xi] + F_2(\tilde{x},\tilde{y})[\eta]$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $F_1(x,y)$ va $F_2(x,y)$ akslantirishlarning $(\tilde{x},\tilde{y})$ nuqtada uzluksizligiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ ni tanlash mumkinki, $(\tilde{x},\tilde{y})$ nuqtaning $V = B(\tilde{x},\delta) \times B(\tilde{y},\delta)$ to'g'ri to'rtburchakli atrofi U ga kiradi va unda

$$\|F_1(x,y)-F_1(\tilde{x},\tilde{y})\|<\varepsilon, \quad \|F_2(x,y)-F_2(\tilde{x},\tilde{y})\|<\varepsilon \qquad (7)$$

tengsizliklar bajariladi. Endi

$$\Delta = F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)-F_1(\tilde{x},\tilde{y})[x_1-x_2]-F_2(\tilde{x},\tilde{y})[y_1-y_2]$$

$$= F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)-F_1(\tilde{x},\tilde{y})[x_1-x_2]+F(x_2,y_1)-F(x_2,y_2)-F_2(\tilde{x},\tilde{y})[y_1-y_2]$$

tenglikka egamiz. Agar $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ nuqtalar U da yotsa, u holda $(x_2,y_1)\in V$ bo'ladi va $[(x_1,y_1),(x_2,y_1)]$ va $[(x_2,y_1),(x_2,y_2)]$ ikkala kesma ham $V\subset U$ da yotishini ko'rish qiyin emas. Shuning uchun, $(x,y)\to F_1(x,y)$ va $(x,y)\to F_2(x,y)$ akslantirishlar Gato bo'yicha differensiallanuvchi bo'ladi: birinchi $[x_1,x_2]$ kesmada F_1 hosilaga ega bo'ladi, ikkinchisi $[y_1,y_2]$ kesmada F_2 hosilaga ega bo'ladi. Bu akslantirishlarga o'rta qiymat haqidagi teoremaning 1-natijasini qo'llab, (7) tengsizlikka ko'ra, ixtiyoriy $(x_1,y_1)\in V$ va $(x_2,y_2)\in V$ lar uchun

$$\|\Delta\|\le \sup_{\xi=x_2+\theta(x_1-x_2)} \|F_1(\xi,y_1)-F_1(\tilde{x},\tilde{y})\|\,\|x_1-x_2\| +$$

$$+\sup_{\eta=y_2+\theta(y_1-y_2)} \|F_2(x_2,\eta)-F_2(\tilde{x},\tilde{y})\|\,\|y_1-y_2\|<\varepsilon\|x_1-x_2\|+\varepsilon\|y_1-y_2\|.$$

tengsizlikka ega bo'lamiz, bu esa F akslantirishning qat'iy differensiallanuvchi ekanligini anglatadi.

Teskari va oshkormas funksiyalar haqida chekli o'lchovli teoremalar.

5-teorema (teskari funksiya haqida chekli o'lchamli teorema). *Aytaylik, $U\in R^n$ – $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$ nuqtaning atrofi, $F:U\to R^n$ – $C^1(U)$ sinfning akslantirishi, $F(\tilde{x})=\tilde{y}$ bo'lsin. U holda, agar F akslantirishning yakobiani $\tilde{x}$ nuqtada noldan farqli bo'lsa, u holda shunday $\varepsilon>0$, $\delta>0$ va $K>0$ sonlar mavjudki, $|\tilde{y}-y|<\delta$ shardan olingan ixtiyoriy y uchun $|x-\tilde{x}|<\delta$ shardan yagona shunday x topiladiki, $F(x)=y$ bo'ladi va bunda $|x-\tilde{x}|<K|y-\tilde{y}|$ bo'ladi.*

4-Natija (chekli o'lchamli oshkormas funksiya haqidagi teorema). *Aytaylik, $U=R^n\times R^m=(\tilde{x},\tilde{y})=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots,\tilde{y}_m)$ nuqtaning atrofi, $\psi:U\to R^n$, $\psi(\tilde{x},\tilde{y})=0$, $\psi_x'(\tilde{x},\tilde{y})$ – teskarilanuvchan matritsa bo'lsin. Unda $\delta>0$, $K>0$ sonlar va $C^1(B(\tilde{x},\delta))$ sinfdan shunday $\varphi:B(\tilde{x},\delta)\to R^n$, akslantirish mavjud bo'ladiki,*

$$\psi(x,\varphi(x))=0,\ \varphi(\tilde{x})=\tilde{y},\ |\varphi(x)-\tilde{y}|\le K|x-\tilde{x}|,$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isboti. $n=k+s$, $z=(x,y)$, $(x\in R^k, y\in R^s)$, $F(z)=(x,\Psi(z))$ deb olaylik. U holda F funksiya $\tilde{z}=(\tilde{x},\tilde{y})$ nuqtada teskari funksiya haqidagi teoremaning barcha talablarini qanoatlantiradi, yoki

$$F'(\tilde{z})=\begin{vmatrix} I & \Psi_y'(\tilde{z}) \\ 0 & \Psi_y'(\tilde{z}) \end{vmatrix}$$

xosmas matritsa bo'ladi. Teskari funksiya haqidagi teorema bo'yicha shunday $\varepsilon>0$, $\delta>0$ va $K>0$ sonlar mavjud bo'ladiki, agar $|\xi-\tilde{x}|+|\eta|<\delta$ bo'lsa, u holda (x,y) yagona juftlik topiladiki, bu uchun $|x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|<\varepsilon$ va

$$F(x,y)=(\xi,\eta)\Leftrightarrow x=\xi,\ \Psi(x,y)=\eta,$$

$$|x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|\le K\left(|\xi-\tilde{x}|+|\eta|\right),$$

bo'ladi, $\eta=0$ deb olib, agar $|x-\tilde{x}|<\delta$ bo'lsa, u holda bu uchun yagona $y=\varphi(x)$, $|y-\tilde{y}|<\varepsilon$ funksiyaga ega bo'lamizki, u uchun

$$F(x,\varphi(x))=(x,0)\Leftrightarrow x=\xi,\ \Psi(x,\varphi(x))=0,\ |\tilde{y}-y|\le K|x-\tilde{x}|.$$

bo'ladi.

Izoh. *Teskari funksiyaning hosilasi uchun yozilgan formuladan darhol*

$$\varphi'(x) = -[F'_y(x,\varphi(x))]^{-1}F'_x(x,\varphi(x))$$

tenglik kelib chiqadi.

6-teorema (Lyusternik). *Aytaylik, X, Z – banax fazolari, $\Im \subset \Phi(x_0, y_0)$, $F: \Im \to Z$ bo'lsin. Agar $F \in SD(\hat{x})$, va $F'(\hat{x})$ epimorfizm bo'lsa, u holda $\hat{x}$ nuqtaning shunday $U \subset \Im$ atrofi, $K > 0$ son va $\varphi: U \to X$ akslantirish mavjud bo'ladiki,*

$$F(x + \varphi(x)) = F(\hat{x}),$$

$$\|\varphi(x)\| \le K\|F(x) - F(\hat{x})\|,$$

bo'ladi.

Teoremaning isboti Nyuton usulining modifikatsiyasiga asoslanadi.

Aytaylik, X – normallangan fazo, M – uning qandaydir qism to'plami bo'lsin. $h \in X$ element M to'plamga $\hat{x} \in M$ nuqtadagi *bir tomonlama urinma (yarimurinma) vektor* deb ataladi, agar shunday $\varepsilon > 0$ va $r: [0, \varepsilon] \to X$ akslantirish mavjud bo'lsaki, u uchun a) ixtiyoriy $t \in [0, \varepsilon]$ uchun $\hat{x} + th + r(t) \in M$, b) $t \to +0$ ga intilganda $\|r(t)\| = o(t)$ bo'lsa.

h vektor M to'plamga $\hat{x}$ nuqtadagi *urinma* deyiladi, agar h va $-h$ vektorlar M to'plamga $\hat{x}$ nuqtada bir tomonlama urinma vektorlar bo'lsa. M to'plamga $\hat{x}$ nuqtada barcha urinma vektorlar to'plamini $T_{\hat{x}}M$ deb belgilaymiz. Bir tomonlama urinma vektorlar to'plamini $T^+_{\hat{x}}M$ bilan belgilaymiz. Ravshanki, $T_{\hat{x}}M$ va $T^+_{\hat{x}}M$ to'plamlar konus

bo'ladi. Agar $T_{\hat{x}}M$ to'plam X ning qism fazosi bo'lsa, u holda u M to'plamga $\hat{x}$ nuqtadagi *urinma fazo* deb ataladi.

Ko'p hollarda, shu jumladan ekstremal masalalar nazariyasi uchun muhim hisoblangan urinma vektorlar to'plami Lyusternik teoremasining natijasi yordamida ham topishi mumkin.

7-teorema (urinma fazo haqida). *Aytaylik, X, Y – banax fazolari, $U \subset O(\hat{x}, X)$, $F: U \to Z$, $F \in SD(\hat{x})$ va $F(\hat{x})$ – epimorfizm, $M = \{x \in X : F(x) = F(\hat{x})\}$ bo'lsin. U holda $T_{\hat{x}}M = \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$ tenglik o'rinli bo'ladi.*

Isboti. a) $h \in T_{\hat{x}}M$, $r(\cdot)$ – urinma vektor ta'rifidagi akslantirish bo'lsin. $F \in SD(\hat{x})$ bo'lganligi sababli, kichik a sonda

$$F(\hat{x}) - F(\hat{x} + ah + r(a)) = F(\hat{x}) + aF'(\hat{x})[h] + O(a).$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerdan $aF'(\hat{x})[h] + O(a) = 0$ bo'ladi va demak, $F'(\hat{x})[h] = 0$, ya'ni $T_{\hat{x}}M \subset \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$ bo'ladi.

b) Aytaylik, $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$ bo'lsin. $r(a) = \varphi(\hat{x} + ah)$ deb olamiz, bu yerda φ – Lyusternik teoremasida qurilgan akslantirish. U holda

$$F(\hat{x}) - F(\hat{x} + ah + r(a)) = F(\hat{x}),$$

$$\|r(a)\| = \|\varphi(\hat{x} + ah)\| \le K\|F(\hat{x} + ah) - F(\hat{x})\| = O(a),$$

ya'ni $h \in T_{\hat{x}}M$.

3-§. Qavariq analiz elementlari

Qavariq analiz - matematikaning qavariq ob'yektlari: to'plamlar, funksiyalar va ekstremal masalalarni o'rganuvchi bo'limi hisoblanadi.

1-ta'rif. *Aytaylik, X – chiziqli fazo bo'lsin. $A \subset X$ to'plam qavariq deyiladi, agar A to'plamdan olingan ikkita ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalar*

uchun va [0,1] *kesmadan olingan ixtiyoriy* α *son uchun* $\alpha x + (1-\alpha)y$ *element* A *to'plamda yotsa, ya'ni* $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A$.

Tekislikda har qanday uchburchak qavariq, to'rt burchaklar orasida qavariq va qavariq bo'lmaganlari ham uchraydi. Normallangan fazoda sharlar qavariq to'plam bo'ladi. Xususan, l_p^n normallangan fazoning

$$Bl_p^n = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \le 1 \right\}$$

birlik shari $p \ge 1$ qavariq to'plam bo'ladi. Qavariq yarim fazo (ya'ni, $\{x : (x, \xi) \le \beta\}$ ko'rinishdagi to'plam) ularning kesishmasi qavariq to'plam bo'ladi. R^n fazoda chekli sondagi yarim fazolarning kesishmasi qavariq *poliedr* deb ataladi.

K to'plam *konus* deyiladi, agar $x \in K$ shartdan ixtiyoriy musbat α uchun $\alpha x \in K$ kelib chiqsa. Qavariq konuslar - bu qavariq to'plam a bo'lgan konus hisoblanadi.

Qavariq konuslarga misollar. Noldan o'tuvchi gipertekisliklar bilan chegaralangan chekli sondagi yarim fazolarni kesishmasi *uchlari nolda bo'lgan ko'pyoqli burchak* deyiladi.

Aytaylik, $f : X \to \bar{R}\ (\bar{R} = R \cup \{+\infty\})$ funksiya berilgan bo'lsin. Bunday har bir f funksiya bilan ikkita to'plam bilan bog'lanadi:

$$dom\, f := \{x : f(x) < +\infty\}$$

sifatli to'plam, va

$$epi\, f := \{(\alpha, x) \in R \times X : \alpha \ge f(x),\ x \in dom\, f\} -$$

f ning ust grafigi. f funksiya qavariq deyiladi, agar $epi\, f$ qavariq to'plam bo'lsa. $p : X \to R'\ (R' = R \cup \{+\infty\})$ *birjinsli qavariq funksiya* yoki *subchiziqli* deyiladi, agar p ning ust grafigi qavariq konus bo'lsa. Yana shunday deyish mumkin. p funksiya *subchiziqli* deyiladi, agar ixtiyoriy $\alpha > 0,\ x \in X$ lar uchun $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ va $p(x_1 + x_2) \le p(x_1) + p(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in X$, bo'lsa. f *xos funksiya* deyiladi, agar $f(x) > -\infty,\ \forall x (\Leftrightarrow f : X \to R')$ va $dom\, f \ne \emptyset$ bo'lsa.

Qavariq to'plam ta'rifidan darxol kelib chiqadiki, xos funksiya qavariq bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X,\ \alpha \in [0,1]$ lar uchun Iensen

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

tengsizligi bajarilsa.

Bir o'zgaruvchili qavariq funksiyalarga misollar: $e^{\alpha x}, \alpha \in R$, - eksponenta, $|x|^p, p \ge 1$ - darajali funksiyalar. Ixtiyoriy normallangan fazoda norma - subchiziqli funksiyaga misol bo'la oladi. R^n fazoda ixtiyoriy affinli funksiya, ya'ni $a(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0$ albatta qavariq, har qanday chiziqli funksiya subchiziqli bo'ladi. Qandaydir affinli (chiziqli) funksiyalar oilasining maksimumiga teng bo'lgan funksiya qavariq (subchiziqli) bo'ladi. $C = X$ ning qandaydir chekli qism to'plami bo'lsin, ya'ni $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

element C ning qavariq kombinatsiyasi deyiladi. $x = \sum \lambda_i x_i$, $\lambda_i > 0$ element esa kanonik kombinatsiya deb ataladi. A to'plamning barcha chekli qism to'plamlarining qavariq (kanonik) kombinatsiyalari to'plami A to'plamning qavariq qobig'i deyiladi va $co(A)$ ($conv A$) deb yoziladi. Oson ko'rsatish mumkinki, coA to'plam A to'plamni o'z ichiga olgan barcha qavariq to'plamlarning kesishmasi bilan ustma-ust tushadi (gohida bu xossa coA ta'rifi sifatida qabul qilinadi). $conv A$ to'plam A to'plamni o'z ichiga olgan barcha qavariq konuslarning kesishmasi bilan ustma-ust tushadi.

Chekli sondagi nuqtalarning qavariq qobig'i qavariq ko'pyoqli deb ataladi, chekli sondagi nuqtalarning kanonik qobig'i - chekli yaratilgan *konus* deb ataladi. Qavariq ko'pyoqlilarning ichida eng sodda holi (qandaycir ma'noda) simpleks R^n da chekli sondagi affin erkli nuqtalarning qavariq qobig'i tuzulishiga ega, ya'ni R^2 da uchburchaklar, R^3 da uchburchakli piramida.

Qavariq to'plamlarning tuzulishida chetki nuqtalar muhim ahamiyatga ega. x nuqta A qavariq to'plamning chetki nuqtasi deyiladi, agar $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, bo'lgan $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$ va λ son $0 \leq \lambda \leq 1$ lar mavjud bo'lmasa.

Ko'pyoqlilarda chetki nuqtalar - uchlari hisoblanadi. Shu joyda Minkovskiy teoremasi o'rinli: *R^n da kompakt to'plam o'zining chetki nuqtalarining qavariq qobig'i bo'ladi.*

Qavariq ob'yektlar to'plamlar ustida amallar. Qavariq ob'ektlar ustida ayrim algebraik va nazariy – to'plamli amallarni keltirib o'tamiz.

Funksiyalar ustida amallar.

1) yig'indi: $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$;

2) konvolyusiya: $(f_1 @ f_2)(x) := \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) : x_1 + x_2 = x\}$;

3) maksimum: $(f_1 \vee f_2)(x) := \max(f_1(x), f_2(x))$;

4) minimumning qavariq qobig'i:

$(f_1 \alpha\, f_2)(x) := \min\{\alpha f_1(x_1) + (1-\alpha) f_2(x_2) : \alpha \in [0,1], \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x\}$.

Uchinchi amalni tabiiy ravishda qavariq funksiyalarning ixtiyoriy oilasiga tadbiq qilish mumkin.

To'plamlar ustida amallar:

1) yig'indi: $A_1 + A_2 := \{x : x = x_1 + x_2, x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}$;

2) konvolyusiya: $A_1 + A_2 := \cup(\alpha A_1 \cap (1-\alpha)A_2)$, $\alpha \in [0,1]$;

3) kesishma: $A_1 \cap A_2 := \{x : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}$; 4) birlashmaning qavariq qobig'i: $A_1 \alpha \cup A_2 := co(A_1 \cup A_2)$. Bu yerda ham uchinchi amalni tabiiy ravishda qavariq to'plamlarning ixtiyoriy oilasiga tadbiq qilish mumkin. 1), 3) va 4) amallarni funksiyalar ustida ham, to'plamlar ustida ham bajarish to'la oddiy hol; 2) amal ustida biror so'z aytib bo'lmaydi. Ularning mazmun mohiyati qachonki, ikkililik munosabatlar ustida gap borgandagina ochiladi.

Qavariq ob'yektlarni muhim xossalaridan biri, ular ikki xil tavsiflashga imkon beradi. Chekli o'lchovli holda (qachonki $X = R^n$) ikkilik fazosini (chiziqli funksionallar fazosi) R^n fazosi bilan aniqlash mumkin, bu masalasini ancha yengillashtiradi.

Endi ikkilik operatorlarining ta'rifiga o'tamiz.

2-ta'rif. *Aytaylik, $f: X \to \bar{R}$ – qandaydir funksiya bo'lsin. f funksiyaning Lejandr-Yung-Fenxel almashtirishi deb*

$$f^*(y) := \sup\{\langle x, y\rangle - f(x)\}$$

funksiyaga aytiladi. f^* funsiyaning ta'rifidan ko'rinib turibdiki, f^* affin funksiyalar oilasining yuqori chegarasi bo'ladi, ya'ni f^* qavariq

$f^{**}(x) := \sup\{\langle x, y\rangle - f^*(y)\}$ *f funksiyaga ikkinchi qo'shma funksiya deyiladi. Qo'shma funksiyaning ta'rifidan*

$$\langle x, y\rangle \le f(x) + f^*(y)$$

Yung tengsizligi kelib chiqadi.

3-ta'rif. *Aytaylik, $A \subset R^n$ ning bo'sh bo'lmagan qism to'plami bo'lsin. A to'plamning qutbi deb*

$$A^* := \{y \in R^n : \langle x, y\rangle \le 1, \ \forall x \in A\}$$

to'plamga aytiladi.

$$A^{**} := \{x \in R^n : \langle x, y\rangle \le 1, \ \forall y \in A^*\}$$

A to'plam biqutb deb ataladi.

A^{**} to'plamni ta'rifidan ko'rinib turibdiki, u holni o'ziga oluvchi yarim fazolar oilasining kesishmasidan iborat, ya'ni nolni o'z ichiga oluvchi qavariq yopiq to'plam.

$[0,x]$- kesma qutbi $H_x := \{y \in R^n : \langle x, y\rangle \le 1\}$ - yarim tekislik, va aksincha, $H_x = [0,x]$ qutb bo'la olishini tushunish qiyin emas. Ta'kidlash kerakki, $B(0,r) := \{x : \|x\| \le r\}$ - sharning qutbi $B(0,r^{-1})$ – shar bo'ladi.

$K \subset R^n$ fazoda konus bo'lsin. K^* konusga qo'shma konus deb,

$$K^* := \{x \in R^n : \langle x, y\rangle \ge 0, \ \forall y \in K\}$$

to'plamga aytiladi. $K^{**} := \{x \in R^n : \langle x, y\rangle \ge 0, \ \forall y \in K^*\}$ konus K konusga ikkinchi *qo'shma konus* deb ataladi. K^* qo'shma konus ta'rifidan ko'rinib turibdiki, bu to'plam nol orqali o'tuvchi chegarasi gipertekisliklardan iborat bo'lgan yarim fazolarning kesishmasidan iborat bo'ladi. Demak, K^* – qavariq yopiq konus bo'ladi. Bundan darhol aytish mumkinki, $K^{**} = K$.

Subchiziqli p funksiyaning subdifferensiali deb,

$$\partial p := \{y \in R^n : \langle x, y\rangle \le p(x), \ \forall x\},$$

to'plamga aytiladi. R^n fazoda $x \to |x|$ yevklid normasining subdifferensiali

$$B(0,1) := \{x : |x| \le 1\}.$$

shardan iborat bo'ladi.

f qavariq hos funksiyaning $\hat{x}$ nuqtadagi *subdifferensiali deb*, quyidagi

$$\partial f(\hat{x}) := \{y \in R^n : \langle x - \hat{x}, y\rangle \le f(x) - f(\hat{x}), \ \forall x\}$$

to'plamga aytiladi. Ta'rifdan ∂p va $\partial f(\hat{x})$ to'plamlar R^n fazoning qavariq qism to'plamlari ekanligi kelib chiqadi. Ularni yopiq to'plam ekanligini isbotlash qiyin emas.

$A \subset R^n$ fazoda bo'sh bo'lmagan qism to'plam bo'lsin.

$$A(y) := \sup\{\langle x, y\rangle : x \in A\},$$

funksiya A to'plamning *tayanch funksiyasi* deyiladi.

$x \to \langle x, \xi \rangle$ chiziqli funksiyaning subdifferensiali ξ bilan ustma-ust tushadi. ξ elementning tayanch funksiyasi ξ chiziqli funksiyadir. Har bir ta'rifdan so'ng misollar keltirildi. Ba'zi sinfiy ko'rinishi mumkin. Asosida, bu bilan keyingi bandlarda muhokama etilishi kerak bo'lgan munosabatlarga asos solindi. Yana ikkita ta'rifni keltirib o'tamiz.

Ta'rif. $K \subset R^n$ fazoda bo'sh bo'lmagan qism to'plam bo'lsin.

$$\mu(x \mid K) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha K\}$$

Minkovskiy funksiyasi deyiladi,

$$\mu(x \mid K) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ +\infty, & x \neq 0. \end{cases}$$

Funksiya esa identifikatorli funksiya deyiladi. $\mu(\cdot \mid K)$ sharning Minkovskiy funksiyasi l_p^n fazoda norma bo'ladi:

$$\mu(B_p^n \mid x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty; \quad \mu(B_\infty^n \mid x) = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

μ-1 to'plamning ta'rifidan f-1 qavariq bo'lganda va qavariq birjinsli (subchiziqli) funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Ikkilik va kompaktlik teoremalari. Mors-Rokafeller va Dubovitskiy-Milyutin formulalari.

1-teorema (ikkilik teoremasi). *a) $f : R^n \to R$ - funksiya o'zining ikkinchi qo'shmasi bilan ustma-ust tushadi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, u qavariq va yopiq bo'lsa (ya'ni uning ust grafigi qavariq va yopiq to'plam bo'lsa).*

b) $K \subset R^n$ fazoda bo'sh bo'lmagan qism to'plam bo'lsin. K o'zining bipolyari bilan ustma-ust tushadi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, K qavariq, yopiq va nolni o'z ichiga olsa.

v) $K \subset R$ konus o'zining ikkinchi qo'shmasi bilan ustma-ust tushadi qachonki, u qavariq va yopiq bo'lsa.

g) $p : R \to \overline{R}$ bo'sh bo'lmagan subdifferensiali bilan birinchi darajali birjinsli funksiya bo'lsin. $\partial^* p(0) = p$ tenglik bajarilishi uchun p subchiziqli va yopiq bo'lishi zarur va yetarli.

d) $A \subset R^n$ fazoning bo'sh bo'lmagan qism to'plami bo'lsin. $\mathcal{N}(A \mid x) = \{0\}$ munosabat bajarilishi uchun, A to'plamning qavariq va yopiq bo'lishi zarur va yetarli.

a) tasdiq ko'p hollarda Fenchel-Moro teoremasi deb yuritiladi, b) tasdiq esa bipolyar haqidagi teorema deb ataladi.

Teoremadan kelib chiqadigan ayrim natijalarni algebraik yoki nazariy - to'plam tengliklari ko'rinishida ifoda qilamiz.

1-natija. Aytaylik, f qavariq, yopiq xos funksiya bo'lsin. U holda a) tasdiqdan bir tomondan f ni "elementar funksiyalar" birlashmasining qavariq qobig'i ekanligi kelib chiqadi: boshqa tomondan esa

$$\sup\{\langle \cdot, x \rangle - f(x) : x \in dom f\},$$

affin funksiyalar oilasining yuqori chegarasi, aynan

$$\sup\{\langle \cdot, y \rangle - f^*(y) : y \in dom f^*\}$$

ekanligi kelib chiqadi.

2-natija. $K \subset R^n$ fazoda bo'sh bo'lmagan qavariq va yopiq qism to'plam va $0 \in K$ bo'lsin. U holda

$$A = \bigcup_{x \in A} [0, x] = \bigcap_{i} H_i .$$

bo'ladi, bu yerda $H_i = \{x : \langle x, x_i \rangle \le 1\}$.

7) p yopiq subchiziqli funksiya va $\forall p \ne 0$ bo'lsin. U holda

$$p = \sup\{\langle \cdot, x \rangle : x \in \partial p\};$$

bo'ladi.

8) $A \subset R^n$ fazoda bo'sh bo'lmagan qavariq va yopiq qism to'plam bo'lsin. U holda

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x : \langle \cdot, x \rangle \le \sigma(\cdot, A)\} = \bigcap_{x \in A} H(x, \sigma(\cdot, A)) = H(x, \sigma) : \forall x \in A\};$$

bo'ladi. Bu munosabatlar qavariq ob'yektlarning ikki xil tavsiflanishini to'la ochib beradi. Ularni so'zlar bilan qayta ta'riflaymiz.

Yopiq qavariq xos funksiya – affin funksiyalarining yuqori chegarasi, undan oshib ketmaydi (Minkovskiy). Yopiq subchiziqli funksiya bo'sh bo'lmagan subdifferensiali bilan - chiziqli funksiyalarning yuqori chegarasi bo'ladi, undan oshib ketmaydi (Xermander). Yopiq qavariq qism to'plam – uni o'ziga oluvchi yarim fazolarning kesishmasi bo'ladi (Minkovskiy).

Ikkilik teoremasining ikkinchi qismi cheksiz o'lchovli variantda ham to'la isbot qilingan (8.1 b. ga qarang [7]).

Barcha a) - g) tasdiqlarning hammasi ma'nosi bo'yicha teng kuchli hisobla- nadi. b) – g) tasdiqlarning ikkinchi qismi a) Fenxel-Moro teoremasidan keltirib chiqariladi. Bu yerda biz faqat b) tasdiqni – ya'ni biqutb haqidagi teoremani isbot qilish bilan cheklanamiz.

Isboti. Biqutb ta'rifidan

$$A^{\circ\circ} = \bigcup_{x \in A} H_x, \quad H_x = \{x : \langle x, y \rangle \le 1\};$$

ekanligi kelib chiqadi. Ravshanki, H_x – nolni o'z ichiga oluvchi qavariq, yopiq qism to'plam. Shunday qilib, agar $A = A^{\circ\circ}$ bo'lsa, u holda A qavariq, yopiq va nolni o'z ichiga oladi. Teoremani boshqa tomonga isbot qilamiz. Agar $x \in A$ va $y \in A^{\circ}$ bo'lsa, u holda ta'rifdan $\langle x, y \rangle \le 1$ kelib chiqadi, ya'ni $A \subset A^{\circ\circ}$.

Aytaylik, $\hat{x} \in A^{\circ\circ} \setminus A$ elementga ega bo'lsin. U holda (A to'plamning qavariq va yopiqligiga ko'ra) ajraluvchanlikning ikkinchi teoremasiga asosan, shunday $\hat{y} \in R^n$ element topiladiki,

$$\sup_{x \in A} \langle x, \hat{y} \rangle \le 1, \quad \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle > 1,$$

bo'ladi. Birinchi tengsizlikka ko'ra, $\hat{y} \in A^{\circ}$ bo'ladi, demak, $\hat{x} \in A^{\circ\circ}$ uchun $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle \le 1$ tengsizlik bajarilishi kerak, bu esa ikkinchi yozilgan tengsizlikka zid.

2-teorema (Quth va subdifferensiallarni kompaktliligi haqida). *a) A R^n fazoda nolning ochiq atrofi bo'lsin. U holda A quth kompakt bo'ladi. b) p R^n fazoda uzluksiz subchiziqli funksiya bo'lsin. U holda p subdifferensial qavariq kompakt bo'ladi. Agar p yopiq, subchiziqli funksiya bo'lsa, u holda ∂p – yopiq, qavariq to'plam bo'ladi.*

Kompaktlik haqidagi ikkala natija ham cheksiz o'lchovli holga umum- lashtiriladi. Uni isbotini (8.1 b. ga qarang [7]), topish mumkin. Chekli holni isbotlash bilan cheklanamiz u hol ancha sodda isbotlanadi.

Isboti. a) biz qutbning qavariq yopiq to'plam ekanligidan foydalandik. Agar $B(0,r) = \{x : \|x\| \le r\}$ – shar A to'plamda yotsa, u holda quth uchun teskari mansublik o'rinli bo'ladi. Lekin, $(B(0,r))^{\circ} = B(0,r^{-1})$

bo'ladi. Demak, A – to'plam R^n fazoda chegaralangan yopiq to'plam, ya'ni kompakt.

b) Aytaylik, p – uzluksiz, subchiziqli funksiya bo'lsin. Doimo $p \geq 0$ deb hisoblash mumkin. $M = \max\{p(x) : \|x\| = 1\}$ bo'lsin. U holda $p(x)$ funksiyani birjinsli funksiya bo'lganligi sababli, ixtiyoriy x uchun $p(x) \leq M\|x\| = p_0(x)$ bo'ladi va demak, $\partial p = \partial p_0(x)$. Bu M – ∂p ning yopiqligi ravshan, bu yerdan p ning uzluksizligiga ko'ra ∂p yopiq chegaralangan to'plam, ya'ni kompakt.

Mora-Rokafeller va Duboviskiy-Milyutin formulalari. *Aytaylik, p_1, p_2 – subchiziqli funksiyalar, qaysiki p_1 uzluksiz, p_2 yopiq bo'lsin. U holda*

$$\partial(p_1 + p_2) = \partial p_1 + \partial p_2$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Agar $y \in \partial p_1 + \partial p_2$ bo'lsa, ya'ni $y = y_1 + y_2$, $y_i \in \partial p_i$, $i = 1,2$, u holda ixtiyoriy x uchun $\langle x, y_i \rangle \leq p_i(x)$ bo'ladi. U holda ixtiyoriy x uchun $\langle x, y \rangle \leq (p_1 + p_2)(x)$ bo'ladi, ya'ni $y \in \partial(p_1 + p_2)$. Demak, $\partial p_1 + \partial p_2 \subset \partial(p_1 + p_2)$.

Faraz qilaylik,

$$\partial p_1 + \partial p_2 \neq \partial(p_1 + p_2) \text{ va } \hat{y} \in \partial(p_1 + p_2) \setminus (\partial p_1 + \partial p_2)$$

bo'lsin. Kompaktlilik teoremasiga ko'ra, ∂p_1 – qavariq kompakt, ∂p_2 – esa qavariq yopiq to'plam bo'ladi. Unda ravshanki, $\partial p_1 + \partial p_2$ – yopiq qavariq to'plam va ajraluvchanlikning ikkinchi teoremasiga ko'ra, shunday $\hat{x}$ element topish mumkinki,

$$\sup_{x \in \partial p_1} \langle \hat{x}, y_1 + y_2 \rangle < \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle,$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Lekin ta'rifga ko'ra,

$$\sup\{\langle x, y_1 + y_2 \rangle : y_i \in \partial p_i, i = 1,2\} = s(\partial p_1)(\hat{x}) + s(\partial p_2)(\hat{x}) = S(\partial p_1)(\hat{x}) + S(\partial p_2)(\hat{x}) = \text{((g)}$$

ikkilik teoremasi bo'yicha) $= p_1(\hat{x}) + p_2(\hat{x})$ ga teng bo'ladi. Shunday qilib, $p_1(\hat{x}) + p_2(\hat{x}) < \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ tengsizlikni olamiz. Bu esa $\hat{y} \in \partial(p_1 + p_2)$ deb faraz qilinishiga zid (qarama-qarshidir).

Duboviskiy-Milyutin formulasi. *Aytaylik, p_1, p_2 – lar uzluksiz sub chiziqli funksiyalar bo'lsin. U holda $\partial(p_1 \vee p_2) = co(\partial p_1 \cup \partial p_2)$, tenglik o'rinli bo'ladi.*

Isboti. Agar $y \in co(\partial p_1 \cup \partial p_2)$ bo'lsa, ya'ni $y = ay_1 + (1-a)y_2$, $y_i \in \partial p_i$, $i = 1,2$, $0 < a < 1$, bo'lsa, u holda

$$\langle x, y \rangle = a\langle x, y_1 \rangle + (1-a)\langle x, y_2 \rangle \leq a p_1(x) + (1-a) p_2(x) \leq (p_1 \vee p_2)(x),$$

bo'ladi, ya'ni $co(\partial p_1 \cup \partial p_2) \subset \partial(p_1 \vee p_2)$ bo'ladi.

Endi $co(\partial p_1 \cup \partial p_2) \neq \partial(p_1 \vee p_2)$ va $\hat{y} \in \partial(p_1 \vee p_2) \setminus co(\partial p_1 \cup \partial p_2)$ bo'lsin deb faraz qilamiz. p_1 ni uzluksizligidan va kompaktlilik teoremasidan ∂p_1 ni kompaktligi kelib chiqadi. Lekin unda $co(\partial p_1 \cup \partial p_2)$ birlashmaning qavariq qobig'i kompakt to'plam bo'ladi, ya'ni yopiq to'plam bo'ladi. Binobarin, ajratishning ikkinchi teoremasi bo'yicha, shunday x elementni topish mumkinki,

$$a = \sup_{y \in co(\partial p_1 \cup \partial p_2)} \langle \hat{x}, ay_1 + (1-a)y_2 \rangle < \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

ifoda o'rinli bo'ladi. Ta'rifdan darhol

$$a \geq \sup_{y \in \partial p_1} \langle a\hat{x}, y \rangle + \sup_{y \in \partial p_2} \langle (1-a)\hat{x}, y \rangle = \sup_{y \in \partial p_1} (a p_1(\hat{x}) + (1-a) p_2(\hat{x})) = \partial(p_1 \vee p)(\hat{x}).$$

(g) ikkilanganlik teoremasi bo'yicha) tenglik kelib chiqadi. Bu esa $\hat{y} \in \partial(p_1 \vee p_2)$ deb olinishiga zid bo'ladi. Qavariq funksiyalar uchun ham shunga o'xshash formulalarga ega bo'lamiz.

Agar f_1 va f_2 – qavariq yopiq funksiyalar bo'lsa, birinchidan nolgacha f_1 qandaydir x nuqtada uzluksiz, bu yerda $+\infty$ cheksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in R^n$ uchun

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar f_1 va f_2 – qavariq va x nuqtadan uzluksiz funksiyalar, $f_1(x)=f_2(x)$, bo'lsa, u holda

$$\partial(f_1 \vee f_2)(x) = \operatorname{co}\{\partial f_1(x) \cup \partial f_2(x)\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Mone-Rokafeller va Dubovitskiy-Milyutin formulalarining ikkisi ham qavariq funksiyalar uchungina cheksiz o'lchovli fazolarda umumlashmalarga ega qo'yiladi.

3-teorema (subdifferensiallar uchun tenglash teoremasi). *Faraz qilaylik, T – kompakt, $f: T \times R^n \to R$ – quyidagi xossalarga ega bo'lgan funksiya bo'lsin: a) $f(t,\cdot)$ – ixtiyoriy $t \in T$ uchun R^n da qavariq va uzluksiz; b) $f(\cdot,x)$ – funksiyasi ixtiyoriy $x \in R^n$ uchun yuqoridan yarim uzluksiz.*

$$f(x) = \max_{t \in T} f(t,x), \quad y \in \partial f(x)$$

deb olamiz. U holda shunday $r \le n+1$, $t_i \in T$, mavjudki,

$$f(t_i,x) = f(x), \quad y_i \in \partial_x f(t_i,x) \text{ va } f(t,x) = f(t,x) + \langle y - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i, x - x \rangle,$$

bo'ladi.

Bu teoremaning isbotini [8,2 b. Qia qarang [8]] kitobdan topish mumkin.

Nazorat savollari

1. Funksional analiz elementlari haqida nima deya olasiz.

2. Differensial hisob va qavariq analiz haqida nima deya olasiz.
3. Normallangan va banax fazolari haqida gapirib bering.
4. Qo'shma faza va qo'shma operatorni ta'riflang.
5. Maksimum va minimumga erishish haqidagi Veyerstrass teoremasini ifodalang.
6. Ajratish teoremalari haqida gapirib bering.
7. Yo'nalish bo'yicha hosilani ta'riflang.
8. Lagrang bo'yicha variatsiya va Gato hosilasini gapirib bering.
9. Freshe hosilasi, qat'iy differensiallanuvchanlikni ta'riflang.
10. Xususiy hosila va yuqori tartibli hosilani ta'riflang.

II BOB

OSHKORMAS FUNKSIYALAR. AKSLANTIRISHLAR

1-§. Bitta tenglamadan aniqlangan oshkormas funksiyalar

Keling, ikki noma'lumli

$$F(x,y)=0,$$

tenglamani o'rganishdan boshlaylik.

1-ta'rif. *Agar ikki o'zgaruvchili $F(x,y)$ funksiya R_{xy}^2 tekislikning biror $A\subset R_{xy}^2$ qism to'plamida berilgan bo'lsa va A to'plamning Ox o'qiga proeksiyasiga kiruvchi $B\subset R_x$ to'plamda aniqlangan shunday bir o'zgaruvchili $y=f(x)$ funksiya mavjud bo'lib, barcha $x\in B$ lar uchun $(x,f(x))\in A$ tegishlilik o'rinli bo'lsa va $F(x,f(x))\equiv 0$ ayniyat bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiyaga $F(x,y)=0$ tenglamadan aniqlangan oshkormas funksiya deb ataladi.*

Masalan, $x^2+y^2=1$ tenglama berilgan bo'lsa, u holda

$$f_1(x)=\sqrt{1-x^2},\quad f_2(x)=-\sqrt{1-x^2},\quad -1\le x\le 1,$$

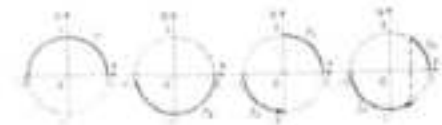
tenglamalar bilan berilgan funksiyalar oshkormas funksiyalar bo'ladi. Ulardan tashqari mazkur tenglamalar bilan berilgan son-sanoqsiz oshkormas funksiyalar mavjud. Masalan, ixtiyoriy $x\in[-1;1]$ uchun

$$f_3(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & agar\quad 0\le x\le 1,\\ -\sqrt{1-x^2}, & agar\quad -1\le x<0,\end{cases}$$

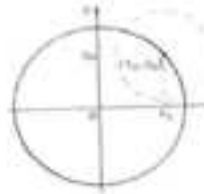
$$f_4(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & agar\quad 1/2\le x\le 1,\\ -\sqrt{1-x^2}, & agar\quad -1\le x<1/2,\end{cases}$$

funksiyalar ham o'sha tenglamadan aniqlangan oshkormas funksiyalarni ifodalaydi (2-rasm). Agar oshkormas funksiyadan biror – bir

qo'shimcha shartni qanoatlantirishi talab etilsa, u holda bunday funksiyalar yagona bo'lib qolishi mumkin. Shunday ekan, agar $[-1,1]$ kesmada $x^2+y^2=1$ tenglamadan aniqlangan oshkormas funksiyani qiymatini manfiy bo'lmasin deb talab qilinsa, u holda faqat bitta, aynan $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $-1\le x\le 1$, ko'rinishdagi oshkormas funksiyaga ega bo'lamiz. Boshqa misol: agar (x_0,y_0) nuqtaning koordinatalari o'sha $x^2+y^2=1$ tenglamani qanoatlantirsa va $U=(x_0,y_0)$ nuqtaning Ox o'qi bilan kesishmaydigan, qandaydir ε atrofi bo'lsa (3-rasm), u holda yana U atrofning Ox o'qidagi proeksiyasida aniqlangan shunday yagona oshkormas f funksiya mavjud bo'ladiki, uning grafigi U atrofda yotadi.



2- rasm



3-rasm

Berilgan tenglamadan aniqlanuvchi yagona oshkormas funksiya mavjudligi haqidagi shartni ifodalovchi tasdiqni lemma ko'rinishida keltiramiz.

1-lemma. *Aytaylik, $F(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning biror to'rtburchakli $U(x_0,y_0)=\{(x,y):|x-x_0|<\varepsilon,|y-y_0|<\eta\}$ atrofida uzluksiz va har bir tayinlangan $x\in(x_0-\xi,x_0+\xi)$ uchun $(y_0-\eta,y_0+\eta)$ oraliqda y bo'yicha qat'iy monoton bo'lsin. Unda, agar $F(x_0,y_0)=0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning $U(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$, va y_0 nuqtaning $U(y_0)=(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$, shunday atroflari mavjud bo'ladiki, har bir $x\in U(x_0)$ uchun $F(x,y)=0$ tenglama faqat yagona $y\in U(y_0)$ yechimga ega bo'ladi. x ning funksiyasi bo'lgan va $y=f(x)$ deb belgilanuvchi bu yechim, x_0*

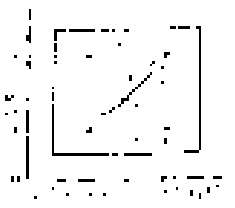
nuqtada uzluksiz va $f(x_0)=y_0$ bo'ladi

Shunday qilib, xususan, lemma qilingan farazlarda $F(x,y)=0$ tenglamadan aniqlangan $y=f(x)$ oshkormas funksiya mavjud va $x\in U(x_0)$, $y\in U(y_0)$ shartlarda $F(x,y)=0$ va $y=f(x)$ tenglikdan iborat kuchli bo'lishlik xossasiga ega deb da'vo qiladi.

Isboti. Lemmaning shartiga ko'ra, $F(x,y)$ funksiya ikki tayinlangan $x\in(x_0-\xi,x_0+\xi)$ da y bo'yicha $(y_0-\eta,y_0+\eta)$ oraliqda qat'iy monoton, xususan, unda $F(x_0,y)$ funksiya qat'iy monoton o'suvchi bo'lsin. Aniqlik uchun $\varepsilon>0$ ni tanlaymiz. Faqat $\varepsilon<\eta$ shartga bo'ysunuvchi ixtiyoriy $\varepsilon>0$ ni tanlaymiz. Chunki $F(x,y)$ funksiya $(y_0-\eta,y_0+\eta)$ oraliqda y bo'yicha qat'iy o'suvchi va $F(x_0,y_0)=0$ shartdan $F(x_0,y_0-\varepsilon)<0$, $F(x_0,y_0+\varepsilon)>0$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Lekin ikki o'zgaruvchili $F(x,y)$ funksiya farazga ko'ra, $U(x_0)$ va

$$(x_0)_1-\varepsilon)\subset U(x_0),\quad (x_0,y_0+\varepsilon)\subset U(x_0,y_0)$$

ochiq to'plamlarda uzluksiz, shuning uchun, shunday $\delta>0$ topiladiki... mavjudki, $(x_0,y_0-\varepsilon)$ nuqtaning δ atrofida $F(x,y)<0$ tengsizlik, $(x_0,y_0+\varepsilon)$ nuqtaning δ atrofida esa $F(x,y)>0$ tengsizlik bajariladi. Xususan, barcha $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ larda



4-rasm

$$F(x,y_0-\varepsilon)<0,\quad F(x,y_0+\varepsilon)>0 \qquad (1)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

$$U(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta),\quad U(y_0)=(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$$

deb olamiz. Tayinlangan $x\in U(x_0)$ da $F(x,y)$ funksiya y o'zgaruvchi

bo'yicha $[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ kesmada uzluksiz bo'ladi. U holda (1) shartdan, uzluksiz funksiyalarning oraliq qiymatlari haqidagi Koshi teoremasiga ko'ra, shunday $y'\in(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ nuqta mavjudki, $F(x,y')=0$ kelib chiqadi (4-rasm). $F(x,y)$ funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha $[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ kesmada qat'iy monotonligi tufayli, ko'rsatilgan $y'\in(y_0,\varepsilon)$ nuqta yagona bo'ladi.

Shunday qilib, quyidagicha $x\to y'$, ya'ni $f(x)=y'$, $y'=f(x)$, birqiymatli moslik olindi, biz uni $y=f(x)$, orqali belgilaymiz. Bu moslikni ta'rifiga ko'ra, har qanday $x\in U(x_0)$ va $y=f(x)$ uchun $F(x,y)=0$, $y\in U(y_0)$ bo'ladi. Bundan tashqari bu xossaga ega bo'lgan y nuqta yagona bo'ladi. Bu bilan izlanayotgan f dastlabki funksiyaning mavjudligi va yagonaligi isbot bo'ldi.

Keyinchalik lemma shartiga ko'ra, $F(x_0,y_0)=0$ bo'ladi va $y_0\in U(y_0)$, $y_0=f(x_0)$ ekanligidan, f funksiyaning yagonaligiga ko'ra, $y=f(x_0)$ tenglikka ega bo'lamiz. Va nihoyat, $\varepsilon>0$ ixtiyoriy tanlanda $\varepsilon>0$ shart ostida tayinlangan edi va u uchun shunday $\delta>0$ topilgan edikki, $|x-x_0|<\delta$ shartdan (ya'ni $x\in U(x_0)$ shartdan) $f(x)\in U(y_0)$ tegishlilik ya'ni, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqqanligini anglab yetamiz. Bu esa f funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini anglatadi. 1-lemma isbot bo'ldi.

Endi qo'llash uchun qulay bo'lgan (x_0,y_0) nuqtaning qandaydir atrofida $F(x,y)=0$ tenglamani birqiymatli yechilishi va u uchun $F(x_0,y_0)=0$ bo'lishligi shartining yetarliligini quyidagi teorema orqali

keltirib o'tamiz.

1-teorema. *Aytaylik, $F(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning qandaydir atrofida uzluksiz va shu atrofning (x_0,y_0) nuqtasida $F_y(x,y)$ uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lsin. Undan tashqari*

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F_y(x_0,y_0)\neq 0$$

bo'lsa, u holda x_0 va y_0 nuqtalarning shunday ravishda shunday $U(x_0)$ va $U(y_0)$ atroflari topiladiki, har bir $x\in U(x_0)$ uchun $F(x,y)=0$ tenglamaning $y=f(x)\in U(y_0)$ faqat yagona yechimi mavjud bo'ladi. Bu yechim $U(x_0)$ atrofning hamma joyida uzluksiz va $y_0=f(x_0)$ bo'ladi.

Agar qo'shimcha $F(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning qandaydir atrofida uzluksiz va shu atrofning (x_0,y_0) nuqtasida $F_x(x,y)$ uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lsin deb faraz qilsak, u holda f funksiya ham x_0 nuqtada hosilaga ega bo'ladi va u uchun quyidagi

$$f'(x_0)=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. $F(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning qandaydir atrofida uzluksiz va $F_y(x,y)$ xususiy hosilaning (x_0,y_0) nuqtada uzluksizligiga ko'ra, (x_0,y_0) nuqtaning to'g'riburchakli shunday

$$U(x_0,y_0)=\{(x,y):|x-x_0|<\xi,\ |y-y_0|<\eta\},$$

atrofi mavjudki, qaysiki, $F(x,y)$ funksiya uzluksiz, $F_y(x,y)$ xususiy hosilaning qiymati esa uning o'sha (x_0,y_0) nuqtadagi qiymatining ishorasiga ega bo'ladi. Shuning uchun, har bir tayinlangan $x\in(x_0-\xi,x_0+\xi)$

nuqtada $x\in(x_0-\xi,x_0+\xi)$ funksiya $(y=\eta,y_0+\eta)$ oraliqda differensiallanuvchi, uning $\varphi(x)=F_y(x,y)$ hosilasi esa doimiy ishorani saqlaydi. Binobarin, $\varphi(y)$ funksiya ko'rsatilgan oraliqda qat'iy monoton bo'ladi.

Shunday qilib, $F(x,y)$ funksiya uchun lemmaning barcha shartlari qanoatlantirilgan $U(x_0,y_0)$ atrofda bajariladi. Binobarin, shunday

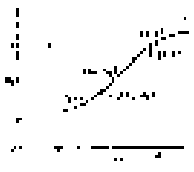
$$U(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta),\ U(y_0)=(y_0-\eta,y_0+\eta)$$

atroflar va $U(x_0)$ atrofda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya mavjudki, har bir $x\in U(x_0)$ da $f(x)\in U(y_0)$ tegishlilik hamda $F(x,f(x))=0$ tenglik o'rinli bo'ladi, bundan tashqari $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz.

Chunki har bir (x,y) nuqta uchun $x\in U(x_0)$, $y\in U(y_0)$, uning atrofiga

$$U(x,y)=\{(x_1,y_1):|x_1-x|<\delta_1,|y_1-y|<\delta_1\}$$

kiruvchi to'g'riburchakli $U(x,y)$ atrofi mavjud bo'lsa (5-rasm), u holda $U(x,y)$ atrof uchun ham lemmaning barcha shartlari bajariladi. O'z navbatida, $f(x)$ funksiya $U_\delta(x_0,y_0)$ atrofda $F(x,y)=0$ tenglamaning yagona yechimi ekanligi tufayli va o'sha lemmaga ko'ra, $y=f(x)$ funksiya har bir $x\in U(x_0)$ da uzluksiz bo'ladi.



5-rasm

Endi teoremaning oxirgi tasdig'ini isbot qilamiz. $F_x(x,y)$, $F_y(x,y)$ xususiy hosilalarning (x_0,y_0) nuqtada uzluksizligiga ko'ra, $F(x,y)$ funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi:

$$F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-F(x_0,y_0)=F_x(x_0,y_0)\Delta x+F_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y. \quad (2)$$

bu yerda $\lim_{\rho\to 0}\alpha_1=\lim_{\rho\to 0}\alpha_2=0$, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. (2) formulada

$x_0+\Delta x\in U(x_0)$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

ifodani olamiz. Unda $F(x,f(x))=0$ shartga ko'ra,

$$F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=F(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))=0,$$

tenglikka ega bo'lamiz, u holda (2) tenglikdan

$$F_x(x_0,y_0)\Delta x+F_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y=0$$

ifodani olamiz. Bu yerdan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1}{F_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2}, \qquad (3)$$

bo'ladi. Endi aytaylik, $\Delta x\to 0$ intilsin, unda $f(x)$ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra, $\Delta y\to 0$ intiladi, demak, $\Delta x\to 0$ intilganda $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ ga intiladi, bu yerdan (3) formuladagi $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1=\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2=0$ bo'ladi. Shuning uchun, $\Delta x\to 0$ intilganda (3) formulaning o'ng qismining limiti mavjud va $-\frac{F_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1}{F_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2}$ ga teng ($F_y(x_0,y_0)\neq 0$ ekanligini eslatib o'tamiz), binobarin, $\Delta x\to 0$ intilganda chap tomonining ham mavjud, ya'ni

$$f'(x_0)=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}, \qquad (4)$$

hosila mavjud. Teorema isbot bo'ldi.

1-izoh. *Agar $F_x(x,y)$, $F_y(x,y)$ funksiyalar (x_0,y_0) nuqtaning $U_\delta(x_0,y_0)$ atrofida uzluksiz bo'lsa, u holda f' hosila $U(x_0)$ intervalda uzluksiz bo'ladi. Haqiqatdan, (4) formulani $x\in U(x_0)$ ixtiyoriy nuqtaga qo'llab,*

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)},$$

formulani olamiz, bu yerdan uzluksiz funksiyalarning kompozitsiyasi

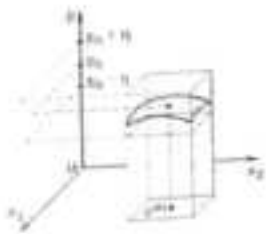
haqidagi teoremaga ko'ra, $f'(x)$ funksiyaning $U(x_0)$ oraliqda uzluksizligi kelib chiqadi.

Shunga o'xshash

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0, \qquad (5)$$

tenglamadan aniqlanuvchi oshkormas funksiyalar tushunchasini kiritiladi va 1 teoremaga o'xshash teorema ifodalanib, isbot qilinadi. Uning ifodasini olish uchun 1-teoremadagi x nuqtani n o'lchovli fazoning nuqtasi deb tushunish yetarli, ya'ni $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$, xususan, $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})\in R^n$.

1'- teorema. *Aytaylik, $F(x,y)=F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$, funksiya $(x^{(0)},y^{(0)})$ nuqta-ning qandaydir atrofida uzluksiz va shu atrofning $(x^{(0)},y^{(0)})$ nuqtasida $F_y(x,y)$ uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lsin. Agar $F(x^{(0)},y^{(0)})=0$, $F_y(x^{(0)},y^{(0)})\neq 0$, bo'lsa, u holda $x^{(0)}$ va $y^{(0)}$ nuqtalarga mos ravishda shunday $U(x_0)$ va $U(y_0)$ atroflar topiladiki, har bir $x\in U(x_0)$ lar uchun $F(x,y)=0$ tenglamaning $y=f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in U_\delta$ faqat yagona yechimi mavjud bo'ladi. Bu $y=f(x)$ yechim $U(x_0)$ atrofda uzluksiz va bo'ladi (6-rasmda $n=2$ va U_δ atrof to'g'ri burchakli bo'lgan hol tasvirlangan).*



6-rasm

Bundan tashqari, agar $(x^{(0)},y^{(0)})$ nuqtaning qandaydir atrofida hamma $F_{x_i}(x,y)$, $i=1,2,\ldots,n$, xususiy hosilalari mavjud, (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda x_0 nuqtada f_{x_i}, $i=1,2,\ldots,n$, funksiyaning xususiy hosilalari mavjud bo'ladi va agar $F_{x_i}(x,y)$, $i=1,2,\ldots,n$, va

f_i, $i=1,2,\dots,n$, xususiy hosilalar (x^0, y^0) nuqtaning qandaydir atrofida uzluksiz bo'lsa, u holda f_i, $i=1,2,\dots,m$, mavjud va x nuqtaning qandaydir atrofida uzluksiz bo'ladi.

Bunda (5) tenglama bilan aniqlanuvchi oshkormas funksiyalarning xususiy hosilalari uchun formula quyidagi

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad i = 1,2,\dots,n, \tag{6}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Misollar. 1. $F(x,y)=0$ (1-teorema) tenglamadan aniqlanuvchi $y=f(x)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada n - tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan shartlarni ifodalang. $f'(x_0)$ va $f''(x_0)$ hosilalar uchun formulalarni toping.

2. 1-teorema va oldingi misolni javobi yordamida $x=f(y)$ funksiyaga teskari va x_0 nuqtada n - tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiyani mavjud bo'lishi uchun yetarli shartlarni toping.

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5},$$

tengliklarni isbot qiling.

2-§. Tenglamalar sistemasidan aniqlangan oshkormas funksiyalar

Quyidagi

$$F_i(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad x \in R^n, \ y \in R^m, \tag{7}$$

tenglamalar sistemasini yoki batafsilroq

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m) = 0, \\ F_2(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

tenglamalar sistemasi (x^0,y^0) nuqtaning qandaydir atrofida $y_1,y_2,\dots,y_m$ o'zgaruvchilarga nisbatan birqiymatli yechilishi uchun shartlarni qanoatlantirsin, qaysiki unda $F_i(x^0,y^0)=0$, $i=1,2,\dots,m$.

2-ta'rif. Aytaylik, qandaydir x^0 nuqtada barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lgan $u_i = u_i(t_1,t_2,\dots,t_n)$, $i=1,2,\dots,m$, funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin. Unda bu funksiyaning t^0 nuqtadagi xususiy hosilalaridan tuzilgan

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial t_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial u_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial t_1} & \dfrac{\partial u_m}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

matritsa yoki qisqacha $\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t_j}\right)$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, mazkur funksiyalar sistemasining Yakobi matritsasi deyiladi.

Agar $m=n$ bo'lsa, u holda Yakobi matritsasining determinanti $t_1,t_2,\dots,t_n$ o'zgaruvchili $u_1,u_2,\dots,u_n$ funksiyalar sistemasining yakobiani

deyiladi va

$$\frac{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{\partial(t_1,t_2,\ldots,t_n)}$$

kabi belgilanadi.

Biz kelgusida ko'ramizki, funksiyalar sistemasining yakobiani tabiiy ravishda ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining turli muammolarida yuzaga keladi.

Endi umumiy holni, ya'ni (8) tenglamalar sistemasini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zga-ruvchilarga nisbatan yechish mumkin bo'lgan shartni keltiramiz. natijada R^n n o'lchovli fazoning $x \in R^n$ nuqtasining qandaydir atrofida $y = f(x)$ akslantirishni beruvchi quyidagi

$$x = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

funksiyalar sistemasini olamiz.

2-teorema. Agar $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1,2,\ldots,n$, *funksiya*

$$(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$$

nuqtaning qandaydir atrofida uzluksiz differensiallanuvchi va

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0, \; i = 1,2,\ldots,n, \qquad \left|\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0,$$

bo'lsa, u holda $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *va* $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ *nuqtalarning mos ravishda* R^n *va* R^n *fazolarda shunday* U_x *va* U_y *atroflari mavjud bo'ladiki, (8) tenglamalar sistemasi* $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *nuqtaning* $U_x \times U_y$ *atrofida* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *o'zgaruvchilarga nisbatan birqiymatli yechiladi.*

Boshqacha qilib aytganda, har qanday $x \in U_x$ *uchun shunday faqat bitgina* $y \in U_y$ *mavjud bo'ladiki,* $F_i(x, y) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, *(7) belgilashga qarangiz, bo'ladi. Agar quyidagi*

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \quad x \in U_x,$$

ko'rsatilgan yechimlar bo'lsa, u holda hamma f_i, $i = 1,2,\ldots,n$, *funksiyalar* U_x *atrofda uzluksiz differensiallanuvchi va* $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ *bo'ladi.*

Shunday qilib, agar teoremaning farazlari bajarilsa, u holda

$$F(x, y) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad (x, y) \in U_x \times U_y,$$

shart $y = f(x)$, $x \in U_x$ va $y \in U_y$, shartga ekvivalent bo'ladi.

Isboti. Eng avvalo, (7) tenglamalar sistemasining $y = f(x)$ yechimi $y = f(x)$ shartni qanoatlantirishi, ravshanki, $x \in U_x$ da $y = f(x) \in U_y$ yechimning yagonaligi haqidagi tasdiqdan va $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, $x \in U_x$, $y \in U_y$ shartdan kelib chiqishligini anglab yetamiz.

Teoremani isbot qilish uchun matematik induksiya usulini qo'llaymiz. Bitta tenglama bo'lgan hol, ya'ni qachonki, $m = 1$ bo'lgan hol uchun teorema keltirib o'tilgan. Endi u $m-1$ $(m > 1)$ ta tenglama bo'lgan holda ham o'rinli (to'g'ri) bo'lsin. Uni m ta tenglama bo'lgan holda ham o'rinli ekanligini isbot qilamiz.

Avval, (8) tenglamaning har biri, masalan,

$$F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$

oxirgisini, $(x^{(0)}, y^{(0)})$ nuqtaning atrofida hech bo'lmaganda bitta o'zga-

ruvchiga nisbatan yechish mumkinligini ko'rsatamiz. Haqiqatda, teoremaning shartiga ko'ra, $(x^{(0)}, y^{(0)})$ nuqtada

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'ladi, shuning uchun, bu nuqtada Yakobi determinantining oxirgi satrida hech bo'lmaganda bitta element noldan farqli bo'ladi. Aytaylik, aniqlik uchun bu oxirgi element bo'lsin:

$$\frac{\partial F_n(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_n} = \alpha \neq 0$$

Bundan, I – teoremaga ko'ra, $F_n(x, y) = 0$ tenglamani $(x^{(0)}, y^{(0)})$ nuqtaning atrofida y_n o'zgaruvchiga nisbatan yechish mumkinligi kelib chiqadi. Buni yanada aniqroq ifoda qilamiz. U^0 orqali $f_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, funksiyani uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan $(x^{(0)}, y^{(0)})$ nuqtaning atrofini belgilaymiz va $\hat{y}^{(0)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ deb olamiz. Unda

$$(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \tag{9}$$

nuqtaning shunday $U^{(n-1)}$ to'g'riburchakli atrofi va $y_n^{(0)}$ nuqtaning $U^{(n-1)} \times U^0 \subset U$ bo'lgan U^0 atrofi topiladi va $U^{(n-1)}$ atrofda aniqlangan quyidagi shartlarni: agar

$$(x, \bar{y}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in U^{(n-1)},$$

bo'lsa, u holda

$$\varphi(x, \bar{y}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in U^{(n-1)}, \tag{10}$$

$$F(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, \varphi(x, \bar{y})) \equiv 0, \tag{11}$$

ayniyatlantiruvchi yagona

$$y_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{12}$$

funksiya mavjud.

Bundan tashqari, I – teoremaga ko'ra, $\varphi(x, \bar{y})$ funksiya $U^{(n-1)}$ atrofda uzluksiz differensiallanuvchi va

$$\varphi(x^{(0)}, \bar{y}^{(0)}) = y_n^{(0)}, \tag{13}$$

bo'ladi. Bundan, agar $(x, \bar{y}) \in U^{(n-1)}$ va $y_n \in U^0$ bo'lsa, (8) tenglamalar sistemasi

$$\begin{aligned} &F_i(x, \bar{y}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ &y_n = \varphi(x, \bar{y}). \end{aligned} \tag{14}$$

sistemaga ekvivalent bo'ladi.

(14) tenglamalar sistemasining birinchi $n-1$ ta tenglamasini (12) ifodaga olib borib qo'yamiz. Unda

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \equiv F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \varphi) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{15}$$

belgilashni kiritib, quyidagi n ta $n-1$ noma'lumli $n-1$ ta tenglamani olamiz:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = 0, \\ &\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Phi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Bunda $(x, \bar{y}) \in U^{(n-1)}$, $y_n \in U^0$ bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} &\Phi_i(x, \bar{y}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ &y_n = \varphi(x, \bar{y}). \end{aligned} \tag{17}$$

tenglamalar sistemasi (14) sistemaga ekvivalent bo'ladi.

(16) sistema (18) sistema qanoatlantiruvchi shartlardan farq qiluvchi, farqi faqat shuginaki, $m-1$ m bilan almashtirilgan shartlarni qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, Φ_k, $k=1,2,\ldots,m-1$, funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalarning kompozitsiyasi sifatida U^{m-1} atrofda uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi $F_i(x^{(m)},y^{(m)})=0$, $i=1,2,\ldots,n$, shartdan va (13), (15) ifodalardan quyidagi $\Phi_k(x^{(m)},y^{(m)})=0$, $k=1,2,\ldots,m-1$, tenglik kelib chiqadi ($x^{(m)},y^{(m)}$) nuqtada ((9) tenglikka qarang)

$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_{m-1})}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_{m-1})}\Big|_{(x^{(m)},y^{(m)})}\neq 0,$$

noldan farqli ekanligini isbot qilamiz. Buning uchun oldindan, (11) va (15) tengliklardan

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial y_i}=\frac{\partial F_i}{\partial y_i}+\frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i},\quad i,k=1,2,\ldots,m-1, \tag{18}$$

(11) ifodadan esa

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k}=\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k},\quad k=1,2,\ldots,m-1, \tag{19}$$

kelib chiqishligini anglab yetamiz.

Endi $\dfrac{\partial(F_1,F_2,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_m)}$ determinantning k- ustuniga $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_k}$, $k=1,2,\ldots,m-1$, ifodaga ko'paytirilgan oxirgi satrni qo'shamiz, ma'lumki, determinantning qiymati o'zgarmaydi. Shuning uchun, (18), (19) ifodalardan foydalanib va olingan determinantni oxirgi satr elementlari bo'yicha yoyib,

$$\frac{\partial(F_1,F_2,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_m)}\Big|_{(x^{(m)},y^{(m)})}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\end{vmatrix}_{(x^{(m)},y^{(m)})}=$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}_{(x^{(m)},y^{(m)})}=\frac{\partial F_m(x^{(m)},y^{(m)})}{\partial y_m}\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_{m-1})}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_{m-1})}\Big|_{(x^{(m)},y^{(m)})}$$

ifodani olamiz. Bu tenglikda chap tomoni noldan farqli bo'lganligi sababli, tenglikning o'ng tomoni ham noldan farqli, bu yerdan

$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_{m-1})}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_{m-1})}\Big|_{(x^{(m)},y^{(m)})}\neq 0.$$

bo'ladi.

Φ_i, $i=1,2,\ldots,m-1$, funksiyalar uchun shartlarning bajarilishi F_i, $i=1,2,\ldots,m$, funksiyalar uchun shunga o'xshash shartlarni bajarilishi tufayli hamda induksiyaning farazlariga ko'ra, (16) tenglamalar sistemasi $(x^{(m)},y^{(m)})$ nuqtaning qandaydir atrofida $y_1,y_2,\ldots,y_{m-1}$ o'zgaruvchilarga nisbatan birqiymatli yechiladi. Aniqroq qilib aytganda, $U^{m-1}=(x^{(m)},y^{(m)})$ nuqtaning $F_m=0$ tenglamani y_m o'zgaruvchiga nisbatan yechishda olingan to'rtburchakli atrofi bo'lsin. Uni $x^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\ldots,x_n^{(m)})$ va $\tilde{y}_k^{(m)}=(y_1^{(m)},y_2^{(m)},\ldots,y_m^{(m)})$ nuqtalarning mos ravishda R_x^n va R_y^m fazolardagi to'g'riburchakli U_x va U_y atroflarining ko'paytmasiga yoyamiz (bu yerda

$$\tilde{y}_k^{(m)}=(y_1,y_2,\ldots,y_{m-1})\colon U^{m-1}=U_x\times U_y,$$

Unda $x^{(0)}$ nuqtaning $U_x \subset U_x$ atrofi, $y^{(0)}$ nuqtaning V atrofi va f atrofda aniqlangan

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m-1} &= f_{m-1}(x) = f_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{20}$$

yagona funksiyalar sistemasi mavjud bo'ladi va u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi: agar $x \in U_x$ bo'lsa, u holda

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \in V, \tag{21}$$

bo'ladi va U_x atrofda (20) tenglamalar sistemasi uzluksiz differensiallanuvchi va (16) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi

$$\Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{22}$$

Bu yerda (16) sistemaning $x \in U_x$, $y \in V$ va $\Phi_k = 0$ larda (20) yechimining yagonaligi tufayli,

$$\begin{aligned} y_k &= f_k(x), \ k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ y_m &= \varphi(x, \vec{p}), \end{aligned} \tag{23}$$

tenglamalar sistemasi (17) sistemaga ekvivalent ekanligini ta'kidlash muhim.

(20) ifodani (10) tenglikka qo'yib, U_x atrofda aniqlangan φ noma'lum funksiyasini olamiz va uni f_m orqali belgilaymiz:

$$y_m = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m-1}(x)) = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_m(x). \tag{24}$$

Endi

$$y_k = f_k(x), \ k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{25}$$

funksiyalar sistemasi ((20), (24) ifodalarga qarang) teoremada ifoda qilingan talablarni qanoatlantiruvchi izlanayotgan funksiya ekanligini

ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_{m-1}$ bo'lsin. Unda, agar $x \in U_x$ bo'lsa, u holda (21), (11) ifodalarga ko'ra, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \in V$, kelib chiqadi (15), (22), (24) va (12) ifodalardan barcha $x \in U_x$ lar uchun $F(x, f(x)) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, ekanligi kelib chiqadi. F – teoremaga va induksiyaning farazlariga, (12) va (20) funksiyalarga ko'ra, (24) uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi.

Shunday qilib, (25) funksiyalar berilgan $f(x)$ akslantirish U_x to'plamda (8) tenglamalar sistemasining uzluksiz differensiallanuvchi yechimi bo'ladi. Bundan tashqari, agar $x \in U_x$ bo'lsa, u holda $x_j = f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, bo'lishligi isbot qilindi. Yana ta'kidlash kerakki, agar $x \in U_x$ bo'lsa, u holda (25) sistema (23) sistemaga ekvivalent bo'ladi.

Endi (8) tenglamalar sistemasi yechimining yagonaligini isbot qilish qoldi halos. Isbotlash uchun bir tenglamalar sistemasidan ularga ekvivalent bo'lgan boshqa sistemaga o'tishni isbotlashdagi analoga o'xshatilgan jarayonni keltirib o'tamiz, ya'ni bir xil yechimga ega bo'lgan sistemalar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned} &F_1(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\ &\Big\} \\ &F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &y_m = \varphi(x, y), \\ &\Big\} \quad \Phi_j(x, y) \equiv F_j(x, \varphi(x, y)) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &\Phi_m(x, y) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &y_m = \varphi(x, y), \\ &\Big\} \\ &y_j = f_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &y_m = \varphi(x, y), \\ &\Big\} \quad f_j(x) \equiv \varphi(x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \\ &y_j = f_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Ikkilik ko'rsatkichlar (strelka) bilan har ehtimolga qarshi $x=\ldots$, $y=\ldots$ lar uchun o'rinli bo'lgan qaralayotgan tenglamalar sistemasining ekvivalentligi belgilangan. Bu ekvivalentliklardan qaralayotgan atroflarda (8) sistemaning (25) yechimining yagonaligi kelib chiqadi. bu yerda, yuqorida ta'kidlanganidek, $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$ shartga ko'ra, $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$, kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Isbot qilingan oshkormas funksiyalar haqidagi teorema matematik analizning asosiy teoremalaridan biri hisoblanadi va turli bo'limlarida har xil tadbiqlarga ega.

Ta'kidlash kerakki, 2- teoremaning shartlari bajarilganda, (8) sistema yechimlarining xususiy hosilalari F_k, $k = 1,2,\ldots,m$ funksiyaning xususiy hosilalari orqali oshkor ko'rinishda oson ifoda qilinadi. Haqiqatda, $\frac{\partial y_i}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$, xususiy hosilalarni topish uchun (8) tenglikni

bo'yicha, aynan ularni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deb hisoblab, differensiallash kerak, (ya'ni ularga ularning $y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1,2,\ldots,m$, yechimlarini qo'yib). Unda

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m,$$

tenglikni olamiz. Bu $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$, ga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi qaralayotgan nuqtada uning determinanti noldan farqli, ya'ni

$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0,$$

bo'lganligi sababli, yagona yechimga ega bo'ladi, qaysiki uni Kramer

qoidasi bo'yicha topish mumkin.

Agar barcha

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,m,$$

hosilalarni topish kerak bo'lsa, u holda yuqorida ko'rsatilgan (8) ayniyatni ikkala qismini differensiallash maqsadga muvofiq bo'ladi. O'zgaruvchilarni tanlashga nisbatan birinchi differensialni invariantligidan foydalanib,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} dy_j = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m,$$

tenglikni olamiz. $dy_1, \ldots, dy_m$ larga nisbatan bu chiziqli sistema

$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0,$$

shartga ko'ra, faqat yagona yechimga ega bo'ladi. Agar buni topish kerak bo'lsa, u holda dx_i dagi koeffitsientlar dy_j uchun $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, xususiy hosiladan iborat bo'ladi.

$y_j = y_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = 1,2,\ldots,m$, funksiyalarning yuqori tartibli hosilasini oldin ko'rsatib o'tilgan ikkita determinantning munosabati ko'rinishidagi

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{26}$$

tenglamalar sistemasidan Kramer formulasi bo'yicha $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ birinchi tartibli hosilalar uchun topilgan ifodadan ketma-ket differensiallash orqali olish mumkin. Bu munosabatni F_k, $k = 1,2,\ldots,m$, funksiya qancha

differensiallanuvchi bo'lsa, shuncha differensiallash mumkin. Bunda, agar F_k, $k=1,2,\dots,m$ funksiyaning r tartibgacha hosilalari uzluksiz bo'lsa, u holda $y_j = y_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $j = 1,2,\dots,m$, funksiyalarning barcha r tartibgacha xususiy hosilalari uzluksiz bo'ladi.

U sohada tartibgacha r marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamini $C^r(G)$ bilan belgilaymiz. Shundan so'ng, agar 2-teorema shartlariga qo'shimcha $F_k \in C^r(U)$, $k = 1,2,\dots,m$, shart qo'yilsa, bu yerda $U = (x^0, y^0)$ nuqtaning qandaydir atrofi, u holda (7) tenglamalar sistemasining $y_j = y_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $j = 1,2,\dots,m$, yechimi ham x^0 nuqtaning qandaydir $U_1 \subset U$ atrofida $C^r(U_1)$ sinfga tegishli bo'ladi.

3-§. Akslantirishlar. Vektorli va chiziqli akslantirishlar

Biz bu bo'limda $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ akslantirishlarni o'rganamiz, ya'ni bu shunday moslikki, qaysiki n o'lchovli R^n arifmetik fazoda yotuvchi X to'plamning har bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtasiga m o'lchovli R^m arifmetik fazoning $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ nuqtasini mos qo'yadi. Shunday qilib, $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \to (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$.

Ravshanki, bunday f akslantirishni berilishi shunday m ta

$$f_j: X \to R,\ f_j: x \to y_j,\ x \in X,\ y_j \in R,\ j = 1,2,\dots,m.$$

funksiyalarni berilishiga ekvivalent bo'ladi. Bu

$$f_j(x) = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n),\ j = 1,2,\dots,m,\ x \in X.$$

funksiyalar f akslantirishning *koordinatali funksiyalari* deb ataladi.

Qaralayotgan akslantirishda *limit* va *uzluksizlik* tushunchalarini umumlashtiriladi. Limitni ta'riflashda x deganda R^n fazoning chekli yoki cheksiz chetlashgan nuqtasini nazarda tutamiz.

3-ta'rif. a nuqta $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ akslantirishning $x \to x^{(0)}$ gat *atrofidagi (yoki $x^{(0)}$ nuqtadagi) limiti deb ataladi, agar* $\lim x^{(k)} = x^{(0)}$ *bo'lgan ixtiyoriy* $x^{(k)} \in X$, $k = 1,2,\dots$ *ketma-ketlik uchun*

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = a. \tag{27}$$

shart bajarilsa. Bu holda $\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = a$ *deb yoziladi.*

Agar $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ bo'lsa, u holda fazoning nuqtalar ketma-ketligining qandaydir nuqtaga yaqinlashishi, nuqta koordinatalarini ko'rsatilgan nuqtaning koordinatasiga yaqinlashishiga ekvivalent, (27) ifoda

$$\lim_{k\to\infty} f_i(x^{(k)}) = a_i,\quad i = 1,2,\dots,k,$$

shunga teng kuchli.

Akslantirishning limiti ta'rifiga atroflar tilida ekvivalent ta'rifni ifodalash mumkin (chekli nuqtaning atrofi deb, uni ichiga oluvchi har qanday ochiq to'plamga aytilishini eslatib o'tamiz).

3'-ta'rif. a *nuqta* $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ *akslantirishning* $x \to x^{(0)}$ *gat atrofidagi limiti (yoki $x^{(0)}$ nuqtadagi) deyiladi, agar a nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun $x^{(0)}$ nuqtaning shunday U atrofi topiladiki, har qanday $x \in U$ atrofi uchun*

$$f(X \cap U) \subset V. \tag{28}$$

munosabatlik o'rinli bo'lsa.

3- va 3' ta'riflarni ekvivalentligi bir o'zgaruvchili funksiya bo'lgan hol kabi isbot qilinadi.

Agar faqat sferik atroflardan foydalansak, u holda qachonki x_0 va

a nuqtalar chekli bo'lsa, limit ta'rifini tengsizliklar tilida quyidagicha ifodalash mumkin:

a nuqta $f: X \to R^n$, $X \subset R^k$ akslantirishning $x \to x^{(0)}$ ga intilgandagi limiti deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lsaki, barcha $x \in X$, lar uchun u uchun $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$ va u $(x \in X \cap U(x^{(0)}))$ bo'lganda $\rho(f(x), a) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa (ya'ni $\rho(f(x) \in U(a, \varepsilon))$ bo'lsa).

Agar $x^{(0)}$ nuqta $f: X \to R^n$, $X \subset R^k$ akslantirishning berilish sohasida yotsa, ya'ni $x^{(0)} \in X$ va $\lim_{x \to x^{(0)}} f(x)$ mavjud bo'lsa, u holda sonli funksiya holiga o'xshash bu limit $f(x^{(0)})$ ga teng bo'ladi.

Agar $x^{(0)} \in X$ nuqtada

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$$

shart bajarilsa, u holda $f: X \to R^n$ akslantirish bu nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

Agar 3 va 3' ta'riflarda $x^{(0)} \in X$ a nuqtani $f(x^{(0)})$ qiymatga almashtirsak, u holda uzluksizlik tushunchasining ketma-ketlik tilidagi va mos ravishda atroflar tilidagi ta'riflari bevosita kelib chiqadi.

Yuqorida ko'rsatib o'tildiki, akslantirishlarning limiti koordinata funk-siyalari limiti bilan bog'liq, shunday ekan, bundan ushbu tasdiq kelib chiqadi: akslantirish biror nuqtada uzluksiz bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, bu nuqtada barcha koordinata funksiyalari uzluksiz bo'lsa.

$f: X \to R^n$ akslantirish X to'plamda uzluksiz deyiladi, agar u X to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa.

2-lemma. *R_x^k fazoning ochiq to'plamini R_y^n fazoga akslantiruvchi f akslantirish bu to'plamda uzluksiz bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, f akslantirishda R_y^n fazoning har bir ochiq to'plamining proobrazi R_x^k fazoning ochiq to'plami bo'ladi.*

Isboti. Zaruriyligi. Aytaylik, f $G \subset R_x^k$ – ochiq to'plamni R_y^n fazoga uzluksiz akslantirsin va aytaylik, $U \subset R_y^n$ – ochiq to'plam bo'lsin. Bu to'plamning $f^{-1}(U)$ proobrazi R_x^k fazoda ochiq to'plam ekanligini ko'rsatamiz. Agar $f^{-1}(U)$ to'plam bo'sh bo'lsa, u holda bo'sh to'plam ochiq to'plam bo'lishligi sababli, lemmaning tasdig'i ravshan.

Aytaylik, $f^{-1}(U)$ to'plam bo'sh bo'lmasin, ya'ni $x^{(0)} \in f^{-1}(U)$ nuqta mavjudki, $f(x^{(0)}) \in U$ bo'ladi. $U \subset R_y^n$ – ochiq to'plam bo'lganligidan, u $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ nuqtaning atrofi bo'ladi. Shuning uchun, f akslantirishni $y^{(0)}$ nuqtada uzluksizligi tufayli (3' ta'rifga qarang), bu nuqtaning shunday U_1 atrofi mavjud bo'ladiki, $f(U_1 \cap G) \subset U$, binobarin, $U_1 \cap G \subset f^{-1}(U)$ bo'ladi. $U_1 \cap G$ ifoda ikkita U_1 va G ochiq to'plamlarning ko'paytmasi sifatida ekan, u ochiq to'plam bo'ladi va $x^{(0)} \in U_1 \cap G$ bo'lsa, u holda $x^{(0)}$ $f^{-1}(U)$ to'plamning ichki nuqtasi bo'ladi.

Shunday qilib, U ochiq to'plam proobrazining har bir nuqtasi bu proobrazning ichki nuqtasi bo'ladi, demak, u ochiq to'plam.

Yetarliligi. Aytaylik, f akslantirish $G \subset R_x^k$ ochiq to'plamni R_y^n fazoga uzluksiz akslantirsin va aytaylik, $U \subset R_y^n$ ochiq to'plam bo'lsin va bu akslantirishda R_y^n fazoning har bir ochiq to'plamning proobrazi

R_n^n fazoda ochiq to'plam bo'ladi. $x^{(0)} \in G$ bo'lsin. f akslantirishni $x^{(0)}$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

Aytaylik, U_{ε}, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ nuqtaning qandaydir atrofi bo'lsin. f ochiq to'plamning proobrazi farazga ko'ra, ochiq to'plam ekanligidan, ravshanki, $x^{(0)} \in f^{-1}(U_{\varepsilon}) \subset G$, bo'ladi, u holda $f^{-1}(U_{\varepsilon})$ to'plam $x^{(0)}$ nuqtaning atrofi bo'ladi, bundan tashqari $f(U_{\delta}) \subset U_{\varepsilon}$. Bu yerdan f akslantirishni $x^{(0)} \in G$ nuqtada uzluksizligi bevosita kelib chiqadi (3 - ta'rifga qarang).

1-misol. $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ formula bilan berilgan $f: R^2 \to R$ akslantirishni qaraymiz. 2- lemmaga ko'ra, $(-\infty, 0)$ ochiq to'plamning proobrazi, ya'ni $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (x, y) nuqtalar to'plami (binobarin, ellipsning ichini tashkil qiluvchi), yana $(0, +\infty)$ ochiq to'plamning proobrazi, ya'ni $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (x,y) nuqtalar to'plami (bu nuqtalar ellipsning tash-qisini tashkil qiladi), ochiq to'plamlarni tashkil qiladi.

Umuman o'ganda, agar $f: R^n \to R$ akslantirish R^n da uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a \in R$ nuqta uchun $\{x: f(x) > a,\ x \in R^n\}$ va $\{x: f(x) < a,\ x \in R^n\}$ to'plamlar $(-\infty, 0)$ va $(0, +\infty)$ ochiq to'plamlarning proobrazi sifatida ochiq to'plamlar bo'ladi.

3-lemma. *$f: A \to R^m$, $A \subset R^n$ – akslantirish A kompakt to'plamni R^m fazoga akslantiruvchi uzluksiz akslantirish bo'lsin. Unda $f(A)$ to'plam ham kompakt bo'ladi.*

Qisqacha qilib aytganda: *kompakt to'plamning uzluksiz obrazi kompakt bo'ladi.*

Isboti. Aytaylik, $y^{(i)} \in f(A)$ – $f(A)$ to'plamning ixtiyoriy nuqtalar ketma-ketligi bo'lsin. Berilgan akslantirishda to'plamning obrazi ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $i = 1, 2, \ldots$ lar uchun shunday $x^{(i)} \in A$ nuqta mavjudki, $f(x^{(i)}) = y^{(i)}$ bo'ladi. A kom-paktligidan, u holda $\{x^{(i)}\}$ ketma-ketlikdan $x^{(0)}$ limiti A kompakt to'plamda yotgan yaqinlashuvchi $\{x^{(i_k)}\}$ qismiy ketma-ketlikni ajratish mumkinki, $\lim_{k \to \infty} x^{(i_k)} = x^{(0)}$.

f funksiyaning $x^{(0)}$ nuqtada uzluksizligi tufayli

$\lim_{k \to \infty} x^{(i_k)} = f(x^{(0)})$, ya'ni $\lim_{k \to \infty} x^{(i_k)} = f(x^{(0)}) \in f(A)$,

ifodalarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $f(A)$ to'plamda yotuvchi ixtiyoriy nuqtalar ketma-ketligidan yaqinlashuvchi, qaysiki limiti o'sha to'plamda yotuvchi nuqtalar ketma-ketlikni ajratish mumkin. Bu esa $f(A)$ to'plamni kompakt ekanligini anglatadi. Lemma isbot bo'ldi.

4-ta'rif. *f $X \subset R_x^n$ to'plamni R_y^m fazoga akslantiruvchi akslantirish tekis uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lsaki, $\rho(x, x') < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x' \in X$ va $x'' \in X$ nuqtalar uchun $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.*

4-lemma. *Kompakt to'plamning uzluksiz akslantirishi tekis uzluksiz bo'ladi.*

5-ta'rif. Agar *$f: X \to R_y^m$, $X \subset R_x^n$, akslantirish X to'plamda bir qiymatli va uzluksiz, unga teskari f^{-1} akslantirish esa $f(X)$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda f akslantirish gomeomorf (gomeomorfizm)*

R_x^n fazoda ochiq to'plam bo'ladi, $x^{(0)} \in G$ bo'lsin. f akslantirishni $x^{(0)} \in G$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

Aytaylik, U_ε $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ nuqtaning qandaydir atrofi bo'lsin. f ochiq to'plamning proobrazi farazga ko'ra, ochiq to'plam ekanligidan, ravshanki, $x^{(0)} \in f^{-1}(U_\varepsilon) \subset G$, bo'ladi, u holda $f^{-1}(U_\varepsilon)$ to'plam $x^{(0)}$ nuqtaning atrofi bo'ladi, bundan tashqari $f(U_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$. Bu yerdan f akslantirishni $x^{(0)} \in G$ nuqtada uzluksizligi bevosita kelib chiqadi (3 - ta'rifga qarang).

1-misol. $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ formula bilan berilgan $f: R^2 \to R$ akslantirishni qaraymiz. 2- lemmaga ko'ra, $(-\infty, 0)$ ochiq to'plamning proobrazi, ya'ni $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (x, y) nuqtalar to'plami (binobarin, ellipsning ichini tashkil qiluvchi), yana $(0, +\infty)$ ochiq to'plamning proobrazi, ya'ni $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (x,y) nuqtalar to'plami (bu nuqtalar ellipsning tash-qisini tashkil qiladi), ochiq to'plamlarni tashkil qiladi.

Umuman olganda, agar $f: R^2 \to R$ akslantirish R^2 da uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a \in R$ nuqta uchun $\{x: f(x) > a,\ x \in R^2\}$ va $\{x: f(x) < a,\ x \in R^2\}$ to'plamlar $(-\infty, 0)$ va $(0, +\infty)$ ochiq to'plamlarning proobrazi sifatida ochiq to'plamlar bo'ladi.

3-lemma. *$f: A \to R^n$, $A \subset R^n$ – akslantirish A kompakt to'plamni R^n fazoga akslantiruvchi uzluksiz akslantirish bo'lsin. Unda $f(A)$ to'plam ham kompakt bo'ladi.*

Qisqacha qilib aytganda: *kompakt to'plamning uzluksiz obrazi kompakt bo'ladi.*

Isboti. Aytaylik, $x^{(*)} \in f(A)$ – $f(A)$ to'plamning ixtiyoriy nuqtalar ketma-ketligi bo'lsin. Berilgan akslantirishda to'plamning obrazi ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $i = 1, 2, \ldots$ lar uchun shunday $x^{(i)} \in A$ nuqta mavjudki, $f(x^{(i)}) = x^{(i)}$ bo'ladi. A kom-paktligidan, u holda $\{x^{(i)}\}$ ketma-ketlikdan $x^{(0)}$ limiti A kompakt to'plamda yotgan yaqinlashuvchi $\{x^{(i_k)}\}$ qismiy ketma-ketlikni ajratish mumkinki, $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(i_k)} = x^{(0)}$.

f funksiyaning $x^{(0)}$ nuqtada uzluksizligi tufayli

$$\lim_{k \to \infty} x^{(i_k)} = f(x^{(0)}),\ \text{ya'ni}\ \lim_{k \to \infty} x^{(i_k)} = f(x^{(0)}) \in f(A),$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $f(A)$ to'plamda yotuvchi ixtiyoriy nuqtalar ketma-ketligidan yaqinlashuvchi, qaysiki limiti o'sha to'plamda yotuvchi nuqtalar ketma-ketlikni ajratish mumkin. Bu esa $f(A)$ to'plamni kompakt ekanligini anglatadi. Lemma isbot bo'ldi.

4-ta'rif. *f $X \subset R_x^n$ to'plamni R_y^m fazoga akslantiruvchi akslantirish tekis uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lsaki, $\rho(x, x') < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x' \in X$ va $x'' \in X$ nuqtalar uchun $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.*

4-lemma. *Kompakt to'plamning uzluksiz akslantirishi tekis uzluksiz bo'ladi.*

5-ta'rif. Agar *$f: X \to R_y^n$, $X \subset R_x^n$, akslantirish X to'plamda bir qiymatli va uzluksiz, unga teskari f^{-1} akslantirish esa $f(X)$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda f akslantirish gomeomorf (gomeomorfizm)*

akslantirish deyiladi, $f(X)$ to'plam esa X to'plamning gomeomorf obrazi yoki X to'plamga gomeomorf to'plam deb ataladi.

Ravshanki, agar f X to'plamning gomeomorfizmi bo'lsa, u holda f^{-1} $f(X)$ to'plamning *gomeomorfizmi* deyiladi.

Endi uzluksiz akslantirishlarning kompozitsiyasini qaraymiz.

5-lemma. *Aytaylik, $f: X \to R^n$, $X \subset R^r$, $g: Y \to R^s$, $Y \supset f(X)$, akslantirishlar berilgan bo'lsin. Agar f akslantirish $x^{(0)}$ nuqtada uzluksiz, g akslantirish esa $f(x^{(0)})$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda ularning $g \circ f$ kompozitsiyasi ham $x^{(0)}$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Mazkur bobning nihoyasida biz berilgan akslantirishda egri chiziq obrazi deganda nimani tushunishimiz kerakligini aniqlaymiz hamda chiziqli bog'liq to'plamlarning uzluksiz obrazi haqidagi lemmani isbot qilamiz.

f $X \subset R_r^r$ to'plamni R_r^n fazoga uzluksiz akslantiruvchi akslantirish, Γ esa X to'plamda to'la yotuvchi egri chiziq bo'lsin, ya'ni X to'plamda kesmalarning ekvivalent akslantirishlari sinfi berilgan bo'lsin. Aytaylik, $x(t), a \le t \le b$, Γ egri chiziqning ko'rinishlaridan biri bo'lsin. R_r^n fazoda tasvirlanishi $f[x(t)], a \le t \le b$, akslantirishdan iborat bo'lgan egri chiziq Γ *egri chiziqning obrazi* deyiladi va $f(\Gamma)$ kabi belgilanadi.

6-lemma. *$f: X \to R^n$, $X \subset R^r$, chiziqli bog'liq to'plamning R_r^n fazoga uzluksiz akslantiruvchi akslantirish bo'lsin. U holda $f(X)$ to'plam ham chiziqli bog'liq bo'ladi.*

Qisqacha qilib aytganda: *chiziqli bog'liq to'plamning uzluksiz obrazi chiziqli bog'liq to'plam bo'ladi.*

Isboti. X chiziqli bog'liq to'plam va f R^n fazoning uzluksiz akslantirishi bo'lsin. $f(X)$ to'plamni chiziqli bog'liq ekanligini isbot qilish uchun, uning ixtiyoriy ikkita nuqtasini $f(X)$ to'plamda uzluksiz egri chiziq bilan tutashtirish mumkinligini isbot qilish kerak. Aytaylik, $y^{(1)}, y^{(2)} \in f(X)$ bo'lsin; qandaydir $x^{(1)} \in f^{-1}(y^{(1)})$ va $x^{(2)} \in f^{-1}(y^{(2)})$ nuqtalarni tanlaymiz. $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ va X chiziqli bog'liq to'plam bo'lganligi tufayli, shunday Γ egri chiziq mavjud bo'ladiki, uning boshlanish nuqtasi $x^{(1)}$, oxiri $x^{(2)}$ nuqta bo'ladi va uning hamma nuqtalari X to'plamda yotadi. Γ izlanayotgan egri chiziq bo'ladi. Haqiqatan, uning boshlanishi $y^{(1)} \in f(x^{(1)})$ nuqta, oxiri $y^{(2)} \in f(x^{(2)})$ nuqta bo'ladi. Uning boshqa nuqtalari esa $f(X)$ to'plamda yotadi. Shunday qilib, $f(X)$ chiziqli bog'liq to'plam bo'ladi. Lemma isbot bo'ldi.

$f: X \to R^n$, $X \subset R^r$, differensiallanuvchi akslantirishlarni o'rganishda (ularni ta'rifini "Differensiallanuvchi akslantirishlar" mavzusida keltiramiz) ularni vektorli yevklid fazolari sifatida qarash qulay. Oddiylik uchun, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinatali n o'lchovli vektorni yana o'sha x bilan belgilaymiz (qaysiki, biz n o'lchovli fazoning ham nuqtasini x bilan belgilagan edik). Chunki n o'lchovli fazoning nuqtasi, n o'lchovli vektor o'zida haqiqiy sonlarning tartiblangan to'plamini ifodalagani uchun, albatta, bu tushunmovchilikka olib kelmaydi. $f: X \to R^n$, $X \subset R^r$, bo'lsin, endi bu yerda f akslantirish X ning har bir x $(x \in X)$ vektoriga qandaydir $y = f(x) \in R^n$ vektorni mos qo'yadi. Bunday akslantirishlarni *vektorli akslantirishlar* deb ataladi.

Agar $e_1,e_2,...,e_n$ R^n fazoda vektorning koordinatalari, $x\ x\ \ x\ \ R^n$ fazodagi vektorning koordinatalari

$x=(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$ va $x\ \ f(x)\ \ R^m$

bo'lsa, u holda har bir y vektorning $y_j,\ j=1,2,...,m$ lar ham $x\ \ x)\ f$ vektorning funksiyasi bo'lsa, binobarin, uning koordinatalarini

$$y_j=f_j(x)=f_j(x_1,x_2,...,x_n),\quad j=1,2,...,m. \tag{29}$$

funksiyasi bo'ladi. (29) tenglik nuqtali fazoning funksiyasi kabi f akslantirishning koordinatali funksiyalari deyiladi va $f\ \ f\ \ f_m$ kabi belgilanadi.

$(x_1,x_2,...,x_n)$ n o'lchovli nuqtani vektor sifatida talqin qilish akslantirishning uzluksizlik, tekis uzluksizlik xossalarini o'rganishga halaqit bermaydi. Shuning uchun, oldingi paragrafdagi akslantirish uchun aytilgan fikrlar vektorli akslantirishlar uchun ham saqlanib qoladi. Yana x va y vektorlar orasidagi masofa uchun quyidagi $\rho(x,y)=|x-y|$ formula o'rinli ekanligini eslatib o'tamiz.

Misol o'rnida x ($x\in R^n$) vektorning $|x|$ uzunligi R^n fazoda uzluksiz funksiya bo'ladi. Bu $||x|-|y||\le|x-y|$ tengsizlikdan kelib chiqadi: chunki $x_0,\ x\in R^n$ vektorlar uchun $||x|-|x_0||\le|x-x_0|$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0}|x_0|=\lim_{|x-x_0|\to 0}|x_0|=|x_0|.$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

R^n fazoni R^m fazoga akslantiruvchi chiziqli deb nomlanuvchi maxsus akslantirishlar sinfini qaraymiz.

6-ta'rif. *$f:R^n\to R^m$ chiziqli akslantirish (to'la holda chiziqli bir jinsli deyiladi, agar ixtiyoriy ikkita $x,x'\in R^n$, vektorlar va $\lambda,\lambda'\in R$, sonlar uchun*

$$f(\lambda x+\lambda' x')=\lambda f(x)+\lambda' f(x'). \tag{30}$$

tenglik bajarilsa.

Bu ta'rifdan induksiyaga asosan, f akslantirishda $x^{(j)}\in R^n$ vektorlarning ixtiyoriy chekli chiziqli kombinatsiyasi bu vektorlarning xuddi shunday $f(x^{(j)}),\ j=1,2,...,k,$ obrazlarning chiziqli kombinatsiyasiga akslanadi

$$f\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x^{(j)}\right)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j f(x^{(j)}).$$

Odatda chiziqli birjinsli akslantirishlar *chiziqli operatorlar* deb ataladi. $f:R^n\to R^m$ chiziqli operator haqida u R^n dan R^m ga ta'sir qilyadi deyiladi.

Chiziqli operatorning ta'rifidan $f:R^n\to R^m$ va $g:R^m\to R^k$ chiziqli operatorning $g\ f:R^n\to R^k$ kompozitsiyasi yana chiziqli operator bo'lishligi bevosita kelib chiqadi.

Aytaylik, $f:R^n\to R^m$ chiziqli operator bo'lsin. Har bir $e_i,\ i=1,2,...,n,$ koordinat vektorning obrazi f akslantirishda R^m fazoning vektori bo'ladi, shuning uchun, $\varepsilon_i,\ i=1,2,...,m,$ koordinat vektorlar bo'icha yoyiladi. Bu yoyilmaning koeffitsientlarini a_{ij} orqali belgilaymiz.

U holda $f(e_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\varepsilon_i$ bo'ladi, $y=f(x),\ x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$ va

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i, \qquad (31)$$

bo'lsin. U holda f akslantirishning chiziqliligiga ko'ra, quyidagi

$$y = f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i, \qquad (32)$$

tenglikni olamiz. (31) va (32) tengliklardagi e_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, koordinat vektorlari bo'yicha y vektor yoyilmasining koeffitsientlarini taqqoslab,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (33)$$

ifodani olamiz. Aksincha, oson tekshirish mumkinki, (33) ko'rinishga ega bo'lgan har qanday $f : R^n \to R^m$ akslantirishning koordinat funksiyalari chiziqli operator bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (34)$$

$f : R^n \to R^m$ chiziqli operatorning matritsasi deb ataladi. Ravshanki, agar (34) $f : R^n \to R^m$ chiziqli operatorning matritsasi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ uchun

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i. \qquad (35)$$

yoyilma o'rinli bo'ladi.

2-misol. Aytaylik, π_i – i– koordinat o'qqa proeksiyalash operatori bo'lsin, ya'ni

$$\pi_i(y) = \pi_i(y_1, \ldots, y_m) = y_i. \qquad (36)$$

($i = 1, 2, \ldots, m$ sonlar orasidagi tayinlangan son). Unda π_i bosh diagonalining birga teng bo'lgan i– elementidan tashqari, faqat nollardan tashkil topgan m – tartibli kvadrat matritsali chiziqli operator bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

π_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, proeksiyalash operatori yordamida ixtiyoriy vektorli $f : E \to R^m$, $E \subset R^n$, akslantirish bilan uning f_i koordinat funksiyalari orasidagi bog'liqlikni oson o'rnatish mumkin:

$$f_i = \pi_i \circ f, \qquad (37)$$

ya'ni har bir koordinatali funksiya f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, akslantirishning π_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, proeksiyalash operatori bilan kompozitsiyasidan iborat bo'ladi.

Agar $m = 1$, ya'ni $f : R^n \to R$ chiziqli operator R^n fazoni barcha haqiqiy sonlar to'plamiga akslantirsa, u holda u *chiziqli funksional* deyiladi. (33) ifodaga ko'ra, har qanday chiziqli funksional

$$y = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n, \qquad (38)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, $a_1, \ldots, a_n$ – lar qandaydir haqiqiy sonlar.

a orqali $(a_1,...,a_n)$ koordinatali vektorni belgilaymiz, u holda har qanday $f:R^n \to R$ chiziqli funksional

$$f(x) = (a,x),$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda (a,x) bilan a va x vektorlarning skalyar ko'paytmasi belgilangan. Bu yerdan ko'rinib turibdiki, teskarisi ham o'rinli bo'ladi: $x \to (a,x)$ ko'rinishdagi har qanday akslantirish $f:R^n \to R$ chiziqli funksional bo'ladi.

Endi algebra kursidan ma'lum bo'lgan matritsa ustida amallarning ayrimlarini eslab o'tamiz. Agar $A=\{a_{ij}\}$ va $B=\{b_{ij}\}$ matritsalar bir xil sondagi ustun va satrli $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$ to'g'ri burchakli matritsalar bo'lsa, u holda ularning yig'indisi A va B matritsalarning mos elementlarini yig'indisidan tashkil topgan C matritsa sifatida aniqlanadi, ya'ni

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i=1,2,...,m, \quad j=1,2,...,n$$

A matritsani λ songa ko'paytirish deb, barcha c_{ij} elementlari A matritsaning mos elementlarini λ songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan matritsaga aytiladi

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i=1,2,...,m, \quad j=1,2,...,n$$

Agar $A=\{a_{ij}\}$ matritsaning ustunlar soni $B=\{b_{jk}\}$ matritsaning satrlar soniga teng bo'lsa, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,s$, u holda A va B matritsalarning AB ko'paytmasi c_{ik} elementlari

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \quad i=1,2,...,m, \quad k=1,2,...,s,$$

formula bilan aniqlangan matritsa sifatida topiladi.

Chiziqli operatorlarning muhim bo'lgan ikki xossasini keltirib o'tamiz.

1-xossa. *Agar f va g chiziqli operatorlar, $f:R^n \to R^m$, $g:R^n \to R^m$, λ va μ lar ixtiyoriy sonlar bo'lsa, u holda $\lambda f + \mu g$ yig'indi ham R^n dan R^m ga ta'sir qiluvchi chiziqli operator bo'ladi, bundan tashqari, agar A va B lar f va g chiziqli operatorlarning matritsasi bo'lsa, u holda $\lambda A + \mu B$ yig'indi ham $\lambda f + \mu g$ operatorning matritsasi bo'ladi.*

Bu tasdiqning isboti uni bevosita tekshirish yo'li bilan amalga oshiriladi: agar

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i=1,2,...,m,$$

f akslantirishning koordinatali funksiyasi,

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j, \quad i=1,2,...,m,$$

g akslantirishning koordinatali funksiyasi bo'lsa, u holda $\lambda f + \mu g$ koordinatali funksiyalari uchun

$$\lambda f + \mu g = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \mu \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) x_j,$$

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni, birinchidan, $\lambda f + \mu g$ akslantirishning koordinatali funksiyalari chiziqli funksiyalar bo'ladi, ikkinchidan esa, $\lambda f + \mu g$ akslantirish matritsasining c_{ij} elementlari $c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$, ya'ni $\lambda A + \mu B$ matritsaning elementlari, bu yerda $A=\{a_{ij}\}$, $B=\{b_{ij}\}$. Tasdiq isbot bo'ldi.

2-xossa. *Agar f va g chiziqli operatorlar $f: R^n \to R^m$, $g: R^m \to R^s$, bo'lsa, u holda ularning f g kompozitsiyasi ham $R^n \to R^s$, akslantirishning chiziqli operatori bo'ladi, uning matritsasi esa f va g akslantirishlarning matritsalarini ko'paytmasiga teng.*

Yana mazkur tasdiqni bevosita tekshirishni bajaramiz: agar

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

f akslantirishning koordinatali funksiyasi,

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

g akslantirishning koordinatali funksiyasi bo'lsa, u holda

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} y_i = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right) x_j$$

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni f g kompozitsiyaning koordinatali funksiyalari chiziqli funksiyalar bo'ladi, ikkinchidan esa, uning matritsasini c_{ij} elementlari f va g operatorlar a_{ij} va b_{ij} matritsalarining elementlaridan

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}, \tag{39}$$

qoida bo'yicha olinadi. Aytib o'tganimizdek, bunday matritsa a_{ij} va b_{ij} matritsalarning ko'paytmasi deb ataladi. Tasdiq isbot bo'ldi.

Ta'kidlash lozimki, har bir $f: R^n \to R^m$ chiziqli operator R^n fazoda uzluksiz akslantirish bo'ladi yoki uning barcha (33) koordinatali funksiyalari chiziqli uzluksiz bo'ladi.

$x \in R^n$ vektorning uzunligi oldingi paragrafda aytganimizdek, R^n

fazoda uzluksiz funksiya bo'ladi. Shuning uchun, agar $f: R^n \to R^m$ chiziqli operator bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya ikkita uzluksiz funksiyalarning kompozitsiyasi sifatida R^n fazoda uzluksiz bo'ladi.

$Q = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ birlik sharni kompaktligidan har qanday $f: R^n \to R^m$ chiziqli operator uchun, $|f(x)|: R^n \to R$ uzluksiz funksiyalarning Q^n to'plamda toraymasi, ya'ni $|f|: Q^n \to R$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

$$\sup_{|x|=1} |f(x)| < +\infty. \tag{40}$$

7-ta'rif. *$f: R^n \to R^m$ chiziqli operator uchun (xususan, $m=1$ da chiziqli funksional uchun)*

$$\|f(x)\| = \sup_{|x|=1} |f(x)| \tag{41}$$

son uning normasi deb ataladi va $\|f(x)\|$ orqali belgilanadi.

(40) tengsizlikka ko'ra, har qanday chiziqli operatorning normasi chekli. $x \in R^n$ vektorni va obrazini uzunligini f operatorning normasi orqalibahalaymiz. Ixtiyoriy $x \neq 0, x \in R^n$ lar uchun $\xi = \frac{x}{|x|}$ vektor 1 uzunlikka ega:

$$|\xi| = \left| \frac{x}{|x|} \right| = \frac{1}{|x|} |x| = 1.$$

Shuning uchun, f operatorning chiziqliligidan, (34) vektor uzunligi xossasidan va (41) tenglikdan foydalanib,

$$|f(x)| = \left| f\left(|x| \frac{x}{|x|} \right) \right| = |x| f\left(\frac{x}{|x|} \right) \le |x| \sup_{|\xi|=1} f(\xi) = |x| \|f\|.$$

ifodani olamiz, ya'ni

$$|f(x)| \le \|f\| |x|. \tag{42}$$

Bu tengsizlikdan, $|x|<1$ bo'lganda, $\|f\| \le \|f\|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Kompakt to'plamda uzluksiz funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishishini eslaylik. Shuning uchun, $f: Q^n \to R$ funksiya Q^n kompaktda uzluksiz, unda o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi:

$$\|f\| = \sup_{|x|<1} |f(x)| = \max_{|x|\le 1} |f(x)|,$$

chunki $|x|<1$ bo'lganda, $\|f\| \le \|f\|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda ko'rsatilgan maksimumga $|x|=1$ birlik sferada erishadi, ya'ni $\|f\| \le \|f\|_{S^{n-1}} = \{x : |x| = 1\}$ sferada erishadi. Shunday qilib,

$$\|f\| = \max_{|x|=1} |f(x)|. \tag{43}$$

Chiziqli operatorlarning normasi uchun yana bir foydali ifodani ta'kidlab o'tamiz.

$$\|f\| = \sup_{x \in R^n, x \ne 0} \frac{|f(x)|}{|x|}. \tag{44}$$

Uni isbot qilamiz. Yana vektor uzunligining $|\lambda x| = |\lambda| |x|$ xossasidan, f akslantirishning chiziqliligidan va (41) foydalanib,

$$\|f\| = \sup_{x \in R^n, x \ne 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = \sup_{x \in R^n, x \ne 0} \left| \frac{1}{|x|} f(x) \right| = \sup_{x \in R^n, x \ne 0} \left| f\left(\frac{x}{|x|} \right) \right|$$

$$= \sup_{|\xi|=1} |f(\xi)| = \|f\|.$$

tenglikka ega bo'lamiz.

f chiziqli operatorning $\|f\|$ normasini uning (34) matritsasining elementlari orqali baholash qiyin emas. Vektor uzunligining kvadrati uning koordinatlarini kvadratlarini yig'indisiga tengligini anglagan holda, (35) formula va Koshi-Bunyakovskiy tensizligini tadbiq etib,

$$|f(x)|^2 = \left| \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \le \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) |x|^2,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerdan har bir $x \in R^n, x \ne 0$ lar uchun

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2},$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Shuning uchun, (44) tenglikka ko'ra,

$$\|f\| = \sup_{x \in R^n, x \ne 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}. \tag{45}$$

Endi shu bilan yana bir karra (40) tengsizlik algebraik yo'l bilan isbot qilindi.

4-§. Differensiallanuvchi akslantirishlar

Keling, differensiallanuvchi akslantirishlar tushunchasini ta'rifini berishdan oldin, akslantirish uchun maxsus bizga kerak holda "o maloe" tushunchasini ta'rifini e'tiboringizga havola qilaylik.

Aytaylik, $X \subset R^n$ va $x_0 \in R^n$ bo'lsin.

8-ta'rif. *$\alpha : X \to R^m$ akslantirishni $x \to x_0$ intilganda $|x - x_0|^n$ funksiya bilan solishtirganda cheksiz kichik miqdor deb ataladi va quyidagicha yoziladi*

$$\alpha(x) = o(|x - x_0|), \quad x \to x_0,$$

($|x - x_0|$ - $x - x_0$ vektorning uzunligi) va $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Agar $\alpha(x)$ akslantirish x_0 nuqtada aniqlangan bo'lsa, ya'ni $x_0 \in R^n$ bo'lsa, u holda $\varepsilon(x)$ akslantirish ham bu x_0 nuqtada aniqlangan bo'ladi. Bundan mos ravishda limit ta'rifiga ko'ra, uzluksiz va unda $\varepsilon(0) = 0$ bo'ladi.

n o'lchovli fazoning elementlarini vektor sifatida qaraymiz. Vektorli ifodalar uchun "o maloe" belgisi ular bilan odatdagi amal qilish qoidalarni saqlab qoladi, masalan, $\varepsilon \to 0$ da $o(\varepsilon) + o(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ va h.k.

Endi vektorli akslantirishlarning differensiallanuvchiligi haqidagi ta'rifga o'tamiz. Oldindan eslatib o'tamizki: $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan n o'zgaruvchili $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ funksiya o'sha *nuqtada differensiallanuvchi* deyiladi, agar shunday $a_1, \ldots, a_n$ o'zgarmaslar (ular f funksiyaning o'sha nuqtadagi xususiy hosilalari $a_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ bo'ladi) mavjud bo'lsaki, u uchun

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n + o(h), \quad h \to 0 \qquad (46)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bu yerda $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

(46) formuladagi $(h_1, \ldots, h_n) \to a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n$ chiziqli akslantirish (chiziqli funksional)larga f funksiyaning x nuqtadagi differensiali deb ataladi. Uni $D(x)$ bilan belgilab,

$$D(x)(h) = a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n \qquad (47)$$

ifodani olamiz.

Shunday qilib, (46) differensiallanuvchilik ta'rifini quyidagi

ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$f(x + h) = f(x) + D(x)(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Shunga o'xshash umumiy holda differensiallanuvchi akslantirishlarni ham aniqlanadi.

9-ta'rif. *$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$, akslantirish funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, agar shunday $l: R^n \to R^m$, chiziqli akslantirish (chiziqli operator) mavjud bo'lsaki,*

$$f(x + h) = f(x) + l(h) + o(h), \quad h \to 0, \quad h \in R^n, \qquad (48)$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

$l: R^n \to R^m$, chiziqli operator f akslantirishning x nuqtadagi differensiali deb ataladi va $Df(x)$ yoki $(Df)(x)$ deb belgilanadi.

Mazkur belgilashdan foydalanib, (48) differensiallanuvchilik ta'rifini quyidagi

$$f(x + h) = f(x) + Df(h) + o(h), \quad h \to 0, \quad h \in R^n, \qquad (49)$$

ko'rinishda qayta yozish mumkin.

$Df(x)$ differensialning matritsasi ((34) ga qarang) f akslantirishning x *nuqtadagi hosilasi* deb ataladi va $f'(x)$ deb belgilanadi.

Shuni ta'kidlash lozimki, (48) formuladan f akslantirishning x nuqtada differensiallanuvchi va unda uzluksizligi kelib chiqadi:

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x).$$

3-teorema. *Agar $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$, akslantirish $x \in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi differensiali birqiymatli aniqlanadi.*

Natija. *Chiziqli akslantirishning differensiali o'zining akslantirishi bilan ustma-ust tushadi.*

Teoremaning isboti. Aytaylik, (48) tenglik bilan birga

$$f(x+h) = f(x) + l_1(h) + o(h), \quad h \to 0, \quad h \in R^n \tag{50}$$

tenglik ham bajarilsin, bu yerda $l_1 : R^n \to R^m$, l_1 – chiziqli operator. Bu tenglamalarni biridan boshqasini ayirib,

$$l_1(h) - l_2(h) = o(h), \quad h \to 0, \quad h \in R^n$$

tenglikni olamiz, ya'ni R^n fazoda nolning qandaydir V atrofida aniqlangan shunday $\varepsilon(h)$ funksiya mavjudki, ya'ni $\varepsilon : V \to R$, u uchun $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ bo'ladi va barcha $h \in V$ lar uchun

$$|l_1(h) - l_2(h)| = |\varepsilon(h)||h|, \tag{51}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi ixtiyoriy $k \in R^n$ ni olamiz, unda barcha yetarlicha kichik t lar uchun $tk \in V$ bo'ladi. Shuning uchun, (51) tenglikda shunday t lar uchun $h = tk$ deb olish mumkin:

$$|l_1(tk) - l_2(tk)| = |\varepsilon(tk)||tk|.$$

$|tk| = |t||k|$ ekanligidan va l_1 va l_2 akslantirishlarning chiziqliligidan.

$$l_1(tk) - l_2(tk) = t[l_1(k) - l_2(k)],$$

tenglikka ega bo'lamiz, shuning uchun,

$$|l_1(k) - l_2(k)| = |\varepsilon k||k|. \tag{52}$$

bo'ladi. Lekin, $\lim_{t \to 0} tk = 0$ ekanligidan, $\varepsilon(h)$ funksiyaning xossasiga ko'ra, $\lim_{t \to 0} \varepsilon(tk) = 0$ tenglikka ham ega bo'lamiz. (52) ifodada $t \to 0$ intilganda limitga o'tib, $|l_1(k) - l_2(k)| = 0$ tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni

barcha $k \in R^n$ lar uchun $l_1(k) = l_2(k)$ bo'ladi. Bu $l_1 = l_2$ ekanligini anglatadi. Teorema isbot bo'ldi.

Natijaning isboti. $f : R^n \to R^m$ chiziqli operator bo'lsin. U holda uning chiziqliligiga ko'ra, ixtiyoriy $x \in R^n$ va $h \in R^n$ lar uchun

$$f(x+h) = f(x) + f(h).$$

tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni (48) tenglik $l = f$ va $o(h) = 0$ bo'lganda bajariladi. Differensialning yagonaligiga ko'ra, $Df(x) = f$ bo'ladi.

Natija isbot bo'ldi.

4-teorema (differensialning chiziqliligi). *Agar $f : X \to R^m$, $g : X \to R^m$, $X \subset R^n$, akslantirishlar $x \in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda har qanday λ va μ sonlarda $\lambda f + \mu g$ chiziqli kombinatsiya ham $x \in X$ nuqtada differensiallanuvchi va*

$$D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x).$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. f va g akslantirishlarning $x \in X$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligidan ((49) ga qarang)

$$f(x+h) = f(x) + Df(h) + o(h), \quad h \to 0, \quad h \in R^n,$$

$$g(x+h) = g(x) + Dg(h) + o(h), \quad h \to 0, \quad h \in R^n,$$

tengliklarga ega bo'lamiz. bu yerdan

$$\lambda f(x+h) + \mu g(x+h) = [\lambda f(x) + \mu g(x)] +$$
$$+ [\lambda Df(x) + \mu Dg(x)](h) + o(h), \quad h \to 0,$$

ifodaga ega bo'lamiz. $\lambda Df(x) + \mu Dg(x)$ chiziqli akslantirish ekanligidan (6) ga qarang). (8) ta'rifga ko'ra. $\lambda Df(x) + \mu Dg(x)$ ifoda $\lambda f + \mu g$ akslantirishning differensiali bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

5-teorema. $X=R^n$, $Y\subset R^m$, $f: X\to Y$, $g: Y\to R^k$, g akslantirish esa f nuq-tada, g akslantirishlar esa $f(x)$ da differensiallanuvchi bo'lsin. f bunda $f: g$ kompozitsiya $x\in X$ nuqtada differensiallanuvchi va uning bu nuqtadagi differensiali f va g akslantirishlarning shunga mos differensiallarining kompozitsiyasiga teng bo'ladi:

$$D(g\circ f)(x)=Dg(f(x))\cdot Df(x). \tag{55}$$

Natija. *Agar teoremaning shartlari bajarilsa va bunda A va B akslantirishlarning kompozitsiyasining hosilasi hosilalarning ko'paytmasiga teng:*

$$[g\circ f]'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x). \tag{56}$$

Keltirilgan formulalardan, ta'riflarni va teoremalarni ifodalanishidagi belgilashlarni qulay tanlanishidan ko'rinib turibdiki, bu yerda bir o'lchovli holning to'la analogi o'rinli bo'ladi.

Isboti. f akslantirishlarning $x\in X$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligidan,

$$[g\circ f](x+h)=g(f(x+h))=g(f(x)+Df(x)(h)+\alpha(h)),\quad h\to 0, \tag{55'}$$

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, g funksiyaning argumenti x $(x\in X)$ nuqtada ortirma oldi

$$k=Df(x)(h)+\alpha(h) \tag{56}$$

Shuning uchun, (55) tenglikdan g funksiyani differensiallanuvchi-ligiga ko'ra,

$$[g\circ f](x+h)=g(y+k)=g(y)+Dg(y)(k)+\alpha(k),\quad k\to 0, \tag{57}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Chunki (42) tengsizlikka qaranga

$$k=|Df(x)(h)|\le\|Df(x)\|\,|h|, \tag{58}$$

bu yerda $Df(x)$ chiziqli operatorning $\|Df(x)\|$ normasi manfiy bo'lmagan son bo'ladi, u holda (56) tenglik bilan aniqlangan $k=k(h)$ funksiya uchun

$$\lim_{h\to 0}k=0, \tag{59}$$

tenglikni olamiz. Bundan tashqari

$$|k|\le\|Df(x)\|\,|h|+|\alpha(h)|,\ h\to 0,$$

bo'lishi o'rinli bo'ladi, yetarlicha kichik h lar uchun $|\alpha(h)|\le h$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda bunday h lar uchun

$$|k|\le(\|Df(x)\|+1)|h|. \tag{60}$$

bo'lishi o'rinli bo'ladi. So'ngra, $\alpha(k)$ ni ta'rifidan ((47) ga qarang) shunday $\alpha(k)$ funksiya mavjud bo'ladiki,

$$\lim_{k\to 0}\alpha(k)=0, \tag{61}$$

va $\alpha(k)=\alpha(k)|k|$ bo'ladi. Shuning uchun, (60) tenglikka ko'ra, ko'rsatilgan yetarlicha kichik h lar uchun

$$|\alpha(k)|=|\alpha(k)|\,|k|\le\alpha(k)(\|Df(x)\|+1)|h|. \tag{62}$$

tengsizlik bajariladi. (59) va (61) ifodalardan, $\lim_{h\to 0}\alpha(k)=0$ ekanligi kelib chiqadi va binobarin, $h>0$ intilganda

$$|\alpha(k)|=\alpha(k)(\|Df(x)\|+1)|h|,$$

bo'lishi kelib chiqadi va binobarin, $h\to 0$ intilganda $|\alpha(k)|\le\alpha(h)$ tengsizlikka bo'ladi. u holda (62) ifodadan, $h\to 0$ intilganda $|\alpha(k)|\le\alpha(h)$ kelib chiqadi. Bu ega bo'lamiz, bu yerdan $h\to 0$ intilganda $\alpha(k)=\alpha(h)$ kelib chiqadi. Bu (57) formulani $h\to 0$ intilganda

$$(g\circ f)(x+h)\quad g(y)=g(y)+Dg(y)(k)+\alpha(h). \tag{63}$$

ko'rinishda yozish mumkinligini anglatadi. bu yerda k (56) formula

bo'yicha beriladi. Endi (63) tenglikning o'ng tomonidagi $Dg(y)(k)$ qo'shiluvchini qaraymiz. $Dg(y)$ akslantirishni chiziqliligiga ko'ra, $h \to 0$ intilganda

$$Dg(y)(k) = Dg(y)(Df(x)(h)) + \alpha(h)$$

$$= Dg(y)(Df(x)(h)) + Dg(y)\circ\alpha(h), \qquad (64)$$

bo'ladi. (42) tengsizlik natijasida

$$|Dg(y)\circ\alpha(h)| \le \|Dg(y)\|\,|\alpha(h)|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz, shuning uchun, $h \to 0$ intilganda

$$Dg(y)\circ\alpha(h) = \alpha(h),$$

bo'ladi, binobarin, (64) tenglikdan $h \to 0$ intilganda

$$Dg(y)(k) = Dg(y)(Df(x)(h)) + \alpha(h) = (Dg(y)\circ Df(x))(h) + \alpha(h),$$

tenglikni olamiz. $Dg(y)$ uchun olingan ifodani (63) tenglikka olib borib qo'yib, $y = f(x)$ ekanligini e'tiborga olib, $h \to 0$ intilganda

$$(g\circ f)(x+h) = g(y) = g(f(x)) + (Dg(f(x))(h) + \alpha(h),$$

tenglikni olamiz.

Chiziqli operatorlarning kompozitsiyasi yana chiziqli operator bo'ladi, shuning uchun, differensialning yagonaligiga ko'ra, $Dg(f(x))\circ Df(x)$ operator $g\circ f$ kompozitsiya differensiali bo'ladi, ya'ni (53) formula isbotlandi.

(54) formula undan kelib chiqadi, chunki chiziqli operatorlarning kompozitsiyasida ularning matritsalari ko'paytiriladi.

6-teorema. *$f = (f_1, f_2, \dots, f_m): X \to R^m$, $X \subset R^n$, akslantirish $x \in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki uning barcha $f_i: X \to R$, $i = 1,2,\dots,m$, koordinatali funksiyalari*

shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa. Bu holda $Df(x)$ differensial matritsasining ij elementlari koordinatali funksiyalarning mos xususiy hosilalari bo'ladi

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ hosila $f_i: X \to R$, $i = 1,2,\dots,m$, funksiyalar sistemasining Yakobian matritsasi bo'ladi (oshkormas funksiyalar mavzusining 2-ta'rifiga qarang)

$$f'(x) \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix} \qquad (65)$$

ifoda ham f akslantirishning x nuqtadagi *Yakobi matritsasi* deb ataladi.

Isboti. 1. $f_i = \pi_i \circ f$ koordinatali funksiyalar ((37) ga qarang) ikkita differensiallanuvchi akslantirishlarning kompozitsiyasidan iborat bo'ladi: shartga ko'ra, f akslantirish x nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi, π_i proeksiyalar $R^m \to R$ har qanday chiziqli operator sifatida butun R^m fazoda differensiallanuvchi bo'ladi. Binobarin, 5- teoremaga ko'ra, f_i, $i = 1,2,\dots,m$, funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

2. Aytaylik, barcha $f_i = \pi_i \circ f$ koordinatali funksiyalar x nuqtada diffe-rensiallanuvchi bo'lsin. (46) tenglikka ko'ra, shunday a_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$, o'zgarmaslar mavjudki, $h \to 0$ intilganda

$$f_i(x+h) = f_i(x) + a_{i1}h_1 + \dots + a_{in}h_n + o(h),\ i = 1,2,\dots,m \qquad (66)$$

ekanligini anglatadi. Bu yerdan ma'lumki ((2) ga qarang), a_{ij} koeffitsientlar x_j argumentlarning h_j orttirmalarda f_i, $i = 1,2,\dots,m$ funksiyalarning mos xususiy hosilalari bo'ladi:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j},\quad i = 1,2,\dots,m,\quad j = 1,2,\dots,n \qquad (67)$$

$l: R^n \to R^m$ orqali (a_{ij}) matritsali chiziqli operatorni belgilaymiz.

$(o(h), o(h), \dots, o(h)) = o(h)$ ekanligidan, (66) tenglikni $h \to 0$ intilganda quyidagi $f(x+h) = f(x) + l(h) + o(h)$, ko'rinishda yozish mumkin. Bu f akslantirishni differensiallanuvchi ekanligini anglatadi, qolaversa (67) tenglikdan (65) formulani to'g'riligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

1-izoh. *(54) va (65) formulalarga ko'ra, 5-teoremaning natijasi f va g akslantirishlar kompozitsiyaning matritsasi bu akslantirishlarning Yakobi matritsalarini ko'paytmasiga tengligini anglatadi. Bu murakkab funksiyalarni differensiallash formulasidan bevosita kelib chiqadi: agar*

$z_k = g_k(y_1, y_2, \dots, y_m),\ k = 1,2,\dots,s,\ y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = 1,2,\dots,m.$

bo'lsa, u holda ((26) ga qarang)

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_j},\quad k = 1,2,\dots,s,\quad j = 1,2,\dots,n.$$

matritsalarni ko'paytirish qoidasiga ko'ra ((6) ga qarang), $\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right)$

matritsa $\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right)$ va $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ matritsalarning ko'paytmasi bo'ladi, ya'ni

$$\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$$

10-ta'rif. *$m = n$ holda*

$$\det\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$$

(65) Yakobi matritsasining determinanti Yakobi determinanti yoki $f: X \to R^n$, $X \subset R^n$, akslantirishning $x \in X$ nuqtadagi yakobiani deb ataladi va

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \qquad \text{yoki} \qquad \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

deb belgilanadi.

2-izoh. *Algebra kursidan ma'lumki, kvadrat matritsalarni ko'paytirishda ularni determinantlari qayta ko'paytiriladi, shuning uchun, $m = n = s$ holda 5-teoremaning shartlari bajarilganda f va g akslantirishlar kompozitsiyasining yakobiani f va g akslantirishlar yakobianlarining ko'paytmasiga teng bo'ladi*

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \qquad (68)$$

Haqiqatda,

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

3-izoh. *Aytaylik, $X \subset R^n$, va $id: X \to X$ – X to'plamni o'zini o'ziga akslantiruvchi identifikatsiya akslantirishi bo'lsin. Koordinatali formada u o'sha akslantirishda obrazlarning koordinat nuqtalari va proobrazi teng ko'rinishida yoziladi, ya'ni koordinatali funksiyalar quyidagi*

$$f_i(x) = x_i, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$$

ko'rinishga ega. Agar $x^{(0)}$ nuqta X to'plamning ichki nuqtasi bo'lsa, u holda bu funksiyalarni o'sha nuqtada differensiallash mumkin va bundan tashqari $i \neq j$ bo'lganda, $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$, va $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$ bo'lsa, u holda identifikatsiyali akslantirishning yakobiani birlik matritsa bo'ladi, ya'ni

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mazkur paragrafning oxirida ikkita foydali ta'rifni keltirib o'tamiz.

11-ta'rif. *Har bir $x \in X$ nuqtada differensiallanuvchi $f: X \to R^n$, $X \subset R^n$, akslantirishga X to'plamda differensiallanuvchi akslantirish deb ataladi.*

Ravshanki, agar akslantirish X to'plamda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda akslantirish $x \in X$ nuqta qanday bo'lmasin, 8-ta'rifga ko'ra, f akslantirish uning qandaydir atrofida aniqlangan bo'ladi, ya'ni X ochiq to'plam.

6-teoremaga ko'ra, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ X to'plamda differensiallanuvchi bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, shu to'plamda uning barcha $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ koordinatali funksiyalari differensiallanuvchi

bo'lsa. Agar barcha koordinatali funksiyalari X to'plamda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, ya'ni uning barcha 1-tartibli xususiy hosilalari X to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda f akslantirish X to'plamda uzluksiz differensiallanuvchi akslantirish deb ataladi.

12-ta'rif. *$f: G \to D$ gomeomorf akslantirish diffeomorf akslantirish yoki diffeomorfizm deyiladi, agar uning o'zi va unga teskari $f^{-1}: D \to G$ akslantirish differensiallanuvchi bo'lsa.*

Nazorat savollari

1. Bitta tenglama bilan aniqlanuvchi oshkormas funksiyalar haqida gapirib bering.
2. Tenglamalar sistemasidan aniqlangan oshkormas funksiyalar haqida gapirib bering.
3. Akslantirishlar va vektorli akslantirishlar haqida gapirib bering.
4. Chiziqli akslantirishlar haqida gapirib bering.
5. Differensiallanuvchi akslantirishlar haqida gapirib bering.

III BOB

KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

1-§. *Metrik fazo. Metrik fazoda nuqtalar ketma-ketligining yaqinlashishi*

X to'plamni *metrik fazo deb ataymiz*, agar bu to'plamning har bir x va y juft elementiga x va y elementlar orasidagi masofa deb ataluvchi shunday manfiy bo'lmagan $\rho(x,y)$ son mos qo'yilsaki, X to'plamning ixtiyoriy x,y,z elementlari uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

a) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$; b) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$; c) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (uchburchak tengsizligi).

Metrik fazoning elementi deb, X metrik fazoning juft nuqtalar to'plamida aniqlangan $\rho(x,y)$ funksiyaning nuqtalariga aytamiz. ρ ni metrika, a)- c) shartlarni esa metrikaning aksiomalari deb ataymiz. Masalan, α va β haqiqiy sonlar orasidagi masofani $\rho(\alpha,\beta)=|\beta-\alpha|$ formula yordamida aniqlab metrik fazoni olamiz, uni R orqali belgilaymiz.

$x=(x_1,x_2)$ haqiqiy sonlar juftligini qaraymiz. Agar $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, bo'lsa, u holda

$$\rho(x,y)=\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right)^{1/2}$$

deb olib, metrik fazoni olamiz, uni R^2 orqali belgilaymiz. a)-c) aksiomalarni tekshirish uchun biz evklid tekisligining nuqtalar to'plami *bilan juft haqiqiy sonlar orasida shunday bir qiymatli moslik o'rnatish mumkinki, bunda tekislik nuqtalari orasidagi evklid masofasi shu*

nuqtalarga mos kelgan haqiqiy sonlar juftligi (nuqtalarning dekart koordinatalari) orasidagi yuqorida kiritilgan masofa bilan ustma-ust tushishligidan foydalanamiz. R^2 fazoning bunday geometrik talqinida uchburchak tengsizligining isboti quyidagi tasdiqdan kelib chiqadi: uchburchakning istalgan tomonining uzunligi uning boshqa ikki tomonlarining uzunliklari yig'indisidan oshmaydi.

Xuddi shu to'plamda siz elementlar orasidagi masofani turli yo'llar bilan aniqlashingiz va shu bilan turli metrik fazolarni olishimiz mumkin. Haqiqiy sonlar juftligida nuqtalar orasidagi masofani quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\tilde{\rho}(x,y)=\max\left(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\right). \qquad (1)$$

Ravshanki, metrikaning a) va b) aksiomalari bajariladi. Uchburchak tengsizligini tekshiramiz.

(1) tenglikdan

$$|x_1-y_1|\le\tilde{\rho}(x,y),\quad |x_2-y_2|\le\tilde{\rho}(x,y),$$

kelib chiqadi, shuning uchun $i=1,2$ da

$$|x_i-y_i|\le|x_i-z_i|+|z_i-y_i|\le\tilde{\rho}(x,z)+\tilde{\rho}(z,y),$$

bo'ladi. Bundan, $\tilde{\rho}(x,y)=\max\left(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\right)\le\tilde{\rho}(x,z)+\tilde{\rho}(z,y)$.

1-mashq. Haqiqiy sonlar juftligida nuqtalar orasidagi masofani

$$\tilde{\rho}(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

formula bo'yicha aniqlash mumkinligini ko'rsating.

Agar biz haqiqiy sonlarning barcha mumkin bo'lgan tartiblangan $x=(x_1,x_2,x_3)$ uchliklar to'plamini qarasak, unda $x=(x_1,x_2,x_3)$ va $y=(y_1,y_2,y_3)$ nuqtalar uchun $\rho(x,y)$ masofa

$$\rho(x,y)=\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_n-y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

formula yordamida aniqlansa, u holda R^n metrik fazoni olamiz.

Agar biz evklid fazosida to'g'riburchakli dekart koordinatalar sistemasini tanlasak, u holda bu fazo va R^n fazo o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi, qaysiki, bunda evklid fazosining istalgan ikki nuqtasi orasidagi masofa R^n fazodagi mos nuqtalar orasidagi masofa bilan ustma-ust tushadi. Metrik aksiomalarni tekshirish aynan R^2 fazodagi kabi amalga oshiriladi.

R^n fazo nuqtalari n ta tartiblangan haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'ladi

$$x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n),\quad z=(z_1,\dots,z_n)$$

x va y nuqtalar orasidagi masofa

$$\rho=(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

formula bilan aniqlanadi. Ravshanki, masofaning $a)$ va $b)$ xossasi bajariladi. Uchburchak xossani o'rinli ekanligini tekshirish qiyin.

Avval *Koshi tengsizligi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

istalgan $a_1,b_1,\dots,a_n,b_n$ haqiqiy sonlar uchun o'rinli ekanligini isbot qilaylik.

Quyidagi

$$P(\xi)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+\xi b_i)^2=A+2B\xi+C\xi^2 \qquad (3)$$

kvadratik uchhadni qaraymiz, bu yerda

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\ B=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\ C=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$P(\xi)$ kvadratik uchhad faqat manfiy bo'lmagan qiymatlarni qabul qilganligi sababli, uning diskreminanti musbat bo'lmaydi, aynan, $B^2-AC\le 0$ bo'ladi. A, B va C koeffitsientlarning qiymatlarini tengsizlikka qo'yib, Koshi tengsizligiga ega bo'lamiz.

Minkovskiy tengsizligini isbot qilamiz

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Koshi tengsizligidan foydalanib,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Ushbu tengsizlikni ikkala tomonini kvadrat ildizdan qutqarib, (4) Minkovskiy tengsizligini olamiz.

(4) tengsizlikda $a_i=x_i-z_i$, $b_i=z_i-y_i$, deb olib,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

tengsizlikni olamiz, ya'ni $\rho(x,y)$ masofa uchun (2) formula bilan aniqlanuvchi uchburchak tengsizligini olamiz.

Haqiqiy sonlarning barcha n ta tartiblangan to'plamlari to'plamida elementlar orasidagi masofani boshqa usullar bilan ham aniqlash mumkin.

Masalan,

$$\tilde{\rho}(x,y)=\max_{i=\overline{1,n}}|x_i-y_i|, \quad \rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

deb olish mumkin. Uchburchak tengsizligi bu holda ham $n \geq 2$ holdagi kabi tekshiriladi. (2) formula bilan aniqlangan masofani *evklid* masofasi deb ataymiz.

2- mashq.

$$\frac{\rho(x,y)}{n} \leq \tilde{\rho}(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \tilde{\rho}(x,y)\sqrt{n} \leq n\tilde{\rho}(x,y) \qquad (5)$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaga bag'ishlangan mazkur bobda faqat R^n metrik fazodan foydalaniladi.

Metrik fazoda nuqtalar ketma-ketligining yaqinlashishi.

1-ta'rif. *Aytaylik, $\{x^k\} \subset X$ metrik fazoda nuqtalar ketma-ketligi bo'lsin. $\{x^k\}$ nuqtalar ketma-ketligi a nuqtaga yaqinlashadi (a limitga ega) deyiladi va $\lim_{k\to\infty} x^k = a$ kabi yoziladi, agar $\lim_{k\to\infty}\rho(x^k,a)=0$ bo'lsa $\{x^k\}$ nuqtalar ketma-ketligi chegaralangan deyiladi, agar shunday $c \in R$ va $a \in X$ lar mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $k \in N$ uchun $\rho(x^k,a) \leq c$ tengsizlik bajarilsa.*

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning bir necha oddiy xossalarini keltiramiz.

1-lemma. *Agar $\{x^k\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u holda u chega-ralangan bo'ladi.*

Aytaylik, $\lim_{k\to\infty} x^k = a$, unda $\lim_{k\to\infty}\rho(x^k,a)=0$ bo'ladi. Shuning uchun, $\{\rho(x^k,a)\}$ sonli ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday $c \in R$

mavjudki, istalgan $k \in N$ uchun $\rho(x^k,a) \leq c$ tengsizlik bajariladi.

2-lemma. *$\{x^k\}$ ketma-ketlikning ikkita turli nuqtalarga yaqinlashishi mumkin emas.*

Aytaylik, $\lim_{k\to\infty} x^k = a$ va $\lim_{k\to\infty} x^k = b$ bo'lsin. U holda uchburchak tengsizligiga ko'ra, ixtiyoriy $k \in N$ uchun

$$0 \leq \rho(a,b) \leq \rho\left(a,x^{(k)}\right) + \rho\left(x^{(k)},b\right)$$

tengsizlik bajariladi. $\rho(a,x^k)$ va $\rho(x^k,b)$ sonli ketma-ketliklarning cheksiz kichikligidan $\rho(a,b)=0$ bo'ladi. Shuning uchun, $a=b$.

Markazi $a \in X$ nuqtada, radiusi r bo'lgan shar deb X metrik fazoning quyidagi nuqtalar to'plamiga aytiladi:

$$S_r(a)=\{x : x \in X, \rho(x,a) < r\}.$$

3-lemma. *R^n metrik fazoning $\{x^k\}$ nuqtalar ketma-ketligi $a=(a_1,\dots,a_n)$ limitga yaqinlashishi uchun, bu yerda $x^k=(x_1^k,\dots,x_n^k)$*

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i, \quad i=\overline{1,n}$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

Aytaylik, $\lim_{k\to\infty} x^k = a$ bo'lsin. $i=\overline{1,n}$ da $\lim_{k\to\infty}\rho(x^k,a)=0$ bo'lganligi tufayli, $k \to \infty$ intilganda

$$0 \leq \left|x_i^{(k)} - a_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-a_i)^2\right|^{1/2} = \rho(x^{(k)},a) \to 0$$

ifodani olamiz.

Aksincha, agar ixtiyoriy $i=\overline{1,n}$ da $\lim_{k\to\infty}\left|x_i^{(k)}-a_i\right|=0$ shart bajarilsa, u holda $k \to \infty$ intilganda

$$\rho(x^{(k)},a)=\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-a_i)^2\right|^{\frac{1}{2}}\to 0$$

bo'ladi.

2-ta'rif. *X metrik fazoning $\{x^{(k)}\}$ nuqtalar ketma-ketligi fundamental deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $N\in N$ mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $k\geq N$ va $m\geq N$ larda $\rho(x^{(k)},x^{(m)})<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.*

4-lemma. *Agar X metrik fazoning nuqtalar ketma-ketligi $\{x^{(k)}\}$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda u fundamental bo'ladi.*

Aytaylik, $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=a$ bo'lsin. Unda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $N\in N$ mavjud bo'ladiki, ixtiyoriy $k\geq N$ va $m\geq N$ larda $\rho(x^{(k)},a)<\frac{\varepsilon}{2}$ va $\rho(x^{(m)},a)<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. Shuning uchun, ixtiyoriy $k\geq N$ va $m\geq N$ larda uchburchak tengsizligiga ko'ra,

$$\rho(x^{(k)},x^{(m)})\leq\rho(x^{(k)},a)+\rho(x^{(m)},a)<\varepsilon$$

bo'ladi. Ixtiyoriy metrik fazo uchun tasdiqning teskarisi to'g'ri emas. Chunki fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkin.

X metrik fazo to'la deyiladi, agar uning nuqtalarining har qanday fundamental ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lsa.

Sonli ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishligining Koshi kriteriyasiga ko'ra, R haqiqiy sonlar fazosi to'la bo'ladi.

1-teorema. *R^n fazo to'la.*

Aytaylik, $\{x^{(k)}\}$ - R^n fazoning nuqtalar ketma-ketligi bo'lsin. Agar $x^{(k)}=(x_1^{(k)},...,x_n^{(k)})$ bo'lsa, u holda $i=\overline{1,n}$ da $\{x_i^{(k)}\}$ sonli ketma-ketlik

fundamental bo'ladi. Aslida, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $N\in N$ mavjud bo'ladiki, ixtiyoriy $k\geq N$ va $m\geq N$ larda $\rho(x^{(k)},x^{(m)})<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Lekin,

$$\left|x_i^{(k)}-x_i^{(m)}\right|\leq\rho(x^{(k)},x^{(m)})<\varepsilon,\quad i=\overline{1,n}$$

bo'ladi. $\{x_i^{(k)}\}$ sonli ketma-ketlik $i=\overline{1,n}$ da Koshi kriteriyasiga ko'ra, yaqinlashuvchi bo'ladi. 3- lemmaga ko'ra, $\{x^{(k)}\}$ nuqtalar ketma-ketligi R^n da yaqinlashuvchi bo'ladi.

Metrik fazoda ochiq va yopiq to'plamlar. Limit nuqtalar. Markazi $a\in X$ nuqtada, radiusi r bo'lgan shar

$$S_r(a)=\{x:x\in X,\rho(x,a)<r\},$$

to'plam sifatida aniqlanadi.

R da shar bu - $(a-r,a+r)$ interval bo'ladi, R^2 da shar bu -

$$\{x-a\}=\{x-a\}^2<r^2$$

doira. R^3 da shar bu - quyidagi

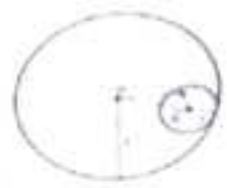
$$S_r(a)=\left\{x:\ x=x_1,...,x_n\in R^n,\sum_{i=1}^{n}x_i-a_i^2<r^2\right\}$$

to'plam.

M X metrik fazoda nuqtalar to'plami bo'lsin. $x^0\in M$ nuqta M to'plamning ichki nuqtasi deyiladi, agar $x^0\in M$ nuqta atrofi bilan yana shu to'plamda yotsa, $S_r(x^0)\subset M$, ya'ni x nuqta markazi x nuqtada bo'lgan qandaydir shar bilan M to'plamda yotadi. Barcha ichki nuqtalarning to'plami uning *ichi* deb ataladi va $\operatorname{int}M$ kabi belgilanadi. Ravshanki, $\operatorname{int}M\subset M$. Agar $\operatorname{int}M=M$, bo'lsa, ya'ni M to'plamning

barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa, u holda M to'plam Λ metrik fazoda ochiq to'plam deb ataladi. Ta'rif bo'yicha bo'sh to'plam ochiq to'plam hisoblanadi.

1-misol. Metrik fazoda shar ochiq to'plam bo'ladi. Haqiqatan, $S_C(a)=\{x:\rho(x,a)<C\}$ va $x\in S_C(a)$, $\rho(x,a)<C$ bo'lsin $\varepsilon=C-\rho(x,a)$ deb olamiz (7-rasm). Shar $S(x)\subset S_C(a)$ bo'ladi. Aslida, agar $x\in S(x)$ bo'lsa, u holda $\rho(x,\bar{x})<\varepsilon$ o'rinli bo'ladi.



7-rasm

Uchburchak tengsizligiga ko'ra,

$$\rho(x,a)\le\rho(x,\bar{x})+\rho(\bar{x},a)<\dots+\rho(\bar{x},a)$$
$$=C-\rho(\bar{x},a)+\rho(\bar{x},a)=C,$$

tenglikni olamiz. Binobarin, $x\in S_C(a)$ bo'ladi. x ni $S(x)$ sharni ixtiyoriy nuqtasi ekanligidan, $S(x)\subset S_C(a)$ munosublik o'rinli bo'ladi. Demak, $S_C(a)$ sharning ixtiyoriy x nuqtasi unga qandaydir $S(x)$ shar bilan tegishli bo'ladi. Shuning uchun, $S_C(a)$ ochiq shar bo'ladi.

2-teorema. *Metrik fazoda ochiq to'plam quyidagi xossalarga ega bo'ladi:*

1) hamma X fazoda $\varnothing$ - bo'sh to'plam ochiq to'plam bo'ladi.

2) ixtiyoriy ochiq to'plamlarning birlashmasi ochiq to'plam bo'ladi;

3) chekli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plam bo'ladi.

1) xossani isboti ravshan. 2) xossani isbot qilamiz. $G=\bigcup_{\alpha}G_\alpha$ bo'lsin.

bu yerda G_α ochiq to'plamlar. a nuqta $a\in G$ bo'lsin. U holda shunday $\alpha\in\Lambda$ mavjud bo'ladiki, u $a\in G_\alpha$ bo'ladi. Lekin, G_α ochiq to'plam. Shuning uchun, $S_\varepsilon(a)$ shar mavjud bo'ladiki, $S_\varepsilon(a)\in G_\alpha$ o'rinli bo'ladi. Hattoki, $S_\varepsilon(a)\subset G$. Demak, a nuqta G to'plamning ichki nuqtasi. a nuqtaning ixtiyoriyligidan, G to'plam ochiq to'plam bo'ladi.

3) xossani isbot qilamiz. $G=\bigcap_{i=1}^{n}G_i$ bo'lsin, bu yerda G_i ochiq to'plamlar. Ixtiyoriy $a\in G$ nuqtani olamiz. Unda $i=\overline{1,n}$ da $a\in G_i$ bo'ladi. G_i to'plamlarni ochiqligidan, $S_{\varepsilon_i}(a)$ shar mavjud bo'ladiki, $S_{\varepsilon_i}(a)\subset G_i$ bo'ladi. $\varepsilon=\min_{i=\overline{1,n}}\varepsilon_i$ bo'lsin. U holda $S_\varepsilon(a)\subset G_i$, $i=\overline{1,n}$ bo'ladi. Shuning uchun,

$$S_\varepsilon(a)\subset\bigcap_{i=1}^{n}G_i=G,$$

tenglik o'rinli bo'ladi va bundan G ochiq to'plam bo'ladi.

3-mashq. Cheksiz sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plam bo'lmasligi mumkinligini ko'rsating.

X metrik fazo bo'lsin. $x^0\in X$ nuqtaning *atrofi* deb, x^0 nuqta ichki nuqta bo'lgan ixtiyoriy to'plamga aytiladi. Masalan, $S(x^0)$ shar x^0 nuqtaning atrofi bo'ladi. x^0 nuqta $M\subset X$ to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi, agar x^0 nuqtaning atrofi M to'plamning x^0 nuqtadan farqli nuqtasi bo'lsa. M to'plamning limit nuqtasi M to'plamda yotishi ham yotmasligi ham mumkin. Masalan, (a,b) intervalning barcha nuqtalari uning limit nuqtalari bo'ladi. Intervalning a va b oxirlari ham uning limit nuqtalari bo'ladi, lekin ular intervalda yotmaydi.

M to'plamning limit nuqta bo'lmagan nuqtasi M to'plamning *ajratilgan nuqtasi* deyiladi. Agar x^0 nuqta M to'plamning ajratilgan nuqtasi bo'lsa, u holda x^0 nuqtaning shunday $O(x^0)$ atrofi mavjudki, qaysiki M to'plamning x^0 nuqtadan farqli nuqtasi bo'lmaydi. M to'plamning har bir nuqtasi yo M to'plamning *limit nuqtasi* yoki M to'plamning *ajratilgan* nuqtasi bo'ladi.

$M \subset X$ *yopiq to'plam* deyiladi, agar u o'zining barcha limit nuqtalarini o'z ichiga olsa. Masalan, R da a,b kesma yopiq to'plam. (a,b) interval esa R da yopiq to'plam emas.

M to'plamga barcha limit nuqtalarni qo'shishdan natijasida hosil qilingan to'plamga M to'plamning *yopilmasi* deb aytiladi va $\overline{M}$ kabi belgilanadi.

4-mashq. $\overline{M}$ yopiq to'plam ekanligini isbot qiling.

5-mashq. To'plam metrik fazoda yopiq bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, u barcha yaqinlashuvchi ketma-ketlikla o'z nuqtalarining limitlarini o'z ichiga olsa.

3- teorema. *F to'plam X metrik fazoda yopiq bo'lishi uchun uning $X \setminus F$ to'ldiruvchisining ochiq bo'lishi zarur va yetarli.*

Zaruriyligi. Faraz qilaylik, $F \subset X$ to'plam barcha limit nuqtalarini o'z ichiga olsin. Uning $G = X \setminus F$ to'ldiruvchisi ochiq to'plam ekanligini isbot qilamiz. Agar bunday bo'lmasa, u holda G to'plamga ichki nuqta bo'lmagan nuqta mavjud bo'ladi. U holda a nuqtaning ixtiyoriy $O(a)$ atrofida G to'plamda yotmaydigan nuqtalar bor, ya'ni F to'plamga tegishli nuqtalar bor. Shuning uchun, a nuqta

F to'plamning ichki nuqtasi bo'ladi. F to'plamning yopiqligidan $a \in F$ bo'ladi. Boshqa tomondan esa, $a \in G = X \setminus F$ va mos ravishda $a \notin F$ bo'ladi. Bu esa farazga zid. Bu ziddiyat $G = X \setminus F$ to'plamning barcha nuqtalari ichki nuqta ekanligini isbot qiladi, ya'ni G – ochiq to'plam.

Yetarliligi. Endi $X \setminus F = G$ bo'lsin. F to'plamni yopiq ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik, a – F to'plamning ichki nuqtasi bo'lsin. Faraz qilaylik, $a \notin F$ bo'lsin. U holda $a \in G$ bo'ladi. G to'plamning ochiq to'plam bo'lganligi sababli, a nuqtaning $O(a)$ atrofi topiladiki, $O(a) \subset G$ bo'ladi. Lekin, bunda $O(a) \cap F = \varnothing$ bo'ladi, bundan a nuqta F to'plamning ichki nuqtasi bo'lmasligi kelib chiqadi. Shuning uchun, F to'plam barcha ichki nuqtalarni o'z ichiga oladi, ya'ni F yopiq to'plam.

4-teorema. *Yopiq to'plam quyidagi xossalarga ega:*

1) butun X fazo va $\varnothing$ bo'sh to'plam yopiq to'plamdir;

2) har qanday yopiq to'plamlarning kesishmasi yopiq to'plam;

3) chekli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plamdir.

X va $\varnothing$ to'plamlar bir-birini to'ldiruvchiligi va ochiq to'plam ekanligidan 1) xossa ravshan. 2) xossani isbotlaymiz. $F = \bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$ bo'lsin, bu yerda F_α yopiq to'plam.

Ikkilanmalik qoidasiga ko'ra,

$$X \setminus F = \bigcup_{\alpha \in \Delta} X \setminus F_\alpha ,$$

bo'ladi. Biroq 3- teoremaga ko'ra, $X \setminus F_\alpha$ to'plam yopiq to'plamlarning

to'ldiruvchisi sifatida ochiq to'plam. Ularning $X \setminus F$ birlashmasi ochiq to'plam bo'ladi. Yana o'sha 3- teoremaga ko'ra, F yopiq to'plam bo'ladi. Shu tariqa 3) – xossa ham oson isbot qilinadi.

1.1. Metrik fazoda kompaktlilik. *R^n fazodagi to'g'ri chiziqlar, nurlar va kesmalar.* X metrik fazoda M kompakt to'plam deyiladi, agar ixtiyoriy $x_n \in M$ nuqtalar ketma-ketligidan M to'plamda yotuvchi nuqtaga yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni ajratib olish mumkin bo'lsa. Masalan, $[a,b]$ kesma R da kompakt, (a,b) interval esa R da kompakt emas.

6-mashq. Metrik fazoda chegaralanmagan to'plamni kompakt bo'la olmasligini isbotlang.

7-mashq. Metrik fazoda kompakt to'plam yopiq to'plam ekanligini isbotlang. R^n fazoda Bolsano-Veyershtrass teoremasi umumlashtiriladi.

5-teorema. *R^n fazosining ixtiyoriy chegaralangan nuqtalar ketma-ketligidan yaqinlashuvchi qismiy nuqtalar ketma-ketligini ajratib olish mumkin.*

R^n fazo holi bilan cheklanamiz. Umumiy holda ham shu kabi isbot qilinadi. Aytaylik, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \in R^2$ fazoda ixtiyoriy chegaralangan nuqtalar ketma-ketligi bo'lsin, $x_1^{(k)}$ ketma-ketlik chegaralangan. Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra, undan yaqinlashuvchi $x_1^{(k_m)}$ ketma-ketlikni ajratib olish mumkin. U holda $x^{(k_m)}$ nuqtalar ketma-ketligining birinchi koordinatalar ketma - ketligi yaqinlashadi, ikkinchi koordinatalar ketma-ketligi esa chegaralangan bo'ladi. Yana bir marta

Bolsano-Veyershtrass teoremasini tadbiq qilamiz va chegaralangan $x_2^{(k_m)}$ sonli ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\left|x_2^{(k_{m_l})}\right|$ ketma-ketlikni ajratib olamiz. $\left|x^{(k_{m_l})}\right|$ nuqtalar ketma-ketligining birinchi va ikkinchi koordinatalar ketma-ketligi yaqinlashadi. 3-lemmaga ko'ra, $\left|x^{(k_{m_l})}\right|$ nuqtalar ketma-ketligi R^2 fazoda yaqinlashadi.

1-natija. *$M \subset R^n$ to'plam kompakt bo'lishi uchun, M to'plamning chegaralangan va yopiq bo'lishi zarur va yetarli.*

Zaruriyligi 7 va 8 mashqlarning natijasidan kelib chiqadi. Yetarliligini isbot qilamiz. M to'plam R^n fazoda chegaralangan va yopiq bo'lsin. Ixtiyoriy $x^{(k)} \in M$ nuqtalar ketma-ketligini olamiz. Bu ketma-ketlik chegaralangan bo'lganligi sababli, undan a nuqtaga yaqinlashuvchi $x^{(k_m)}$ qism ketma-ketlikni ajratib olishimiz mumkin. M to'plamning yopiqliligiga ko'ra, a nuqta $a \in M$ bo'ladi (5-mashqqa qarang).

Quyidagi lemmani isbotsiz keltiramiz. R^n fazo uchun isbotini ko'rish uchun, masalan, [21] ga qarang.

5-lemma (Geyne-Borel). *X metrik fazoda M to'plam kompakt bo'lishi uchun uning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qism qoplamasini ajratish mumkin bo'lsa.*

Keling, Geyne-Borel lemmasini ifoda qilishda ishtirok etgan qoplama tushunchasini tushuntirib o'taylik. $G_\alpha, \alpha \in A$ to'plamlar sistemasi *G to'plamning qoplamasi* deyiladi, agar $G \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ bo'lsa. *Qoplama chekli* deyiladi, agar A to'plam chekli va *ochiq* deyiladi, agar

barcha G_α to'plamlar ochiq bo'lsa. Qoplamaning to'plam ostisi *qoplama osti* deyiladi, agar bu to'plam ostining o'zi qoplama tashkil qilsa.

X metrik fazoning a nuqtasi $M \subset X$ to'plamning *chegaraviy nuqtasi* deyiladi, agar a nuqtaning ixtiyoriy atrofida M to'plamga tegishli nuqtalar sifatida nuqta va M to'plamga tegishli bo'lmagan nuqtalar sifatida nuqta mavjud bo'lsa.

M to'plamning chegaraviy a nuqtasi M to'plamga tegishli bo'lmasligi ham mumkin.

M to'plamning barcha chegaraviy nuqtalar to'plami M *to'plamning chegarasi* deb ataladi va ∂M kabi belgilanadi. Masalan,

$$\partial(a,b) = [a,b], \quad \partial[a,b] = [a,b], \quad a,b \in R,$$

$$\partial\{x : \rho(x,a) < r, x \in R^n\} = \{x : \rho(x,a) = r\}, \quad r > 0.$$

R^n fazodagi to'g'ri chiziqlar, nurlar va kesmalar. Shu paytgacha biz R^n fazodagi shunday ob'yektlarni ko'rib chiqdikki, ularni o'rganishda faqat masofaning xossalaridan foydalandik. Bunday metrik geometriya juda ham maqsadga muvofiq emas. Ularda nuqta, sharlar bor, lekin chiziqlar, vektorlar, tekisliklar va boshqalar yo'q.

Biz ushbu bandda, R^n fazoda chiziqlar, nurlar va kesmalar kabi metrikaga bog'liq bo'lmagan ob'yektlarni kiritish bilan cheklanamiz.

R^n fazoda $a = (a_1,\dots,a_n)$ va $b = (b_1,\dots,b_n)$ nuqtalardan o'tuvchi *to'g'ri chiziq* deb, quyidagi nuqtalar to'plamiga aytamiz:

$$x : x \in R^n,\ x = a_i t + b_i(1-t),\ t \in R,\ i = \overline{1,n}.$$

Uchi a nuqtada bo'lgan $l = (l_1,\dots,l_n)$ yo'nalishdagi *nur* deb, quyidagi

to'plamga aytiladi:

$$x : x \in R^n, x = a_i + tl_i, 0 \le t \le +\infty, i = \overline{1,n},$$

bu yerda $l_1^2 + \dots + l_n^2 = 1$.

a va b nuqtalarni tutashtiruvchi *kesma* deb, quyidagi to'plamga aytiladi:

$$\{x : x \in R^n,\ a_i t + b_i(1-t),\ 0 \le t \le 1,\ i = \overline{1,n}\}.$$

R^n fazosidagi to'plam *qavariq* deyiladi, agar o'zining ixtiyoriy ikki nuqtasi bilan birga o'sha nuqtalarni tutashtiruvchi kesmani ham o'z ichiga olsa.

8-mashq. R^n fazosida sharning qavariq to'plam ekanligini isbotlang.

R^n fazoda egri chiziq

$$x_i = \varphi_i(t), \quad \alpha \le t \le \beta,\ i = \overline{1,n},$$

parametrik tenglama bilan beriladi, bu yerda $\varphi_i(t)$ $[\alpha,\beta]$ kesmada uzluksiz funksiya.

$M \subset R^n$ *to'plam bog'lamli* deyiladi, agar uning ikki nuqtasini to'plamda yotuvchi G egri chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lsa. R^n fazoda *ochiq va bog'lamli to'plam soha* deb ataladi. Sohaning yopilmasi *yopiq soha* deyiladi.

9-mashq. Isbotlang: $G \subset R^n$ ochiq to'plam *soha* bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, uning ixtiyoriy ikkita nuqtasini $L \subset G$ siniq chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lsa.

2-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning limiti

Funksiyaning nuqtadagi limiti. X metrik fazoda x^0 nuqtaning $\dot{O}(x^0)$ atrofi deb, x^0 ichki nuqta bo'lgan ixtiyoriy to'plamga aytilishini eslatib o'tamiz. $\dot{O}(x^0)$ *teshilgan atrof* $O(x^0)$ atrofdan x^0 nuqtani olib tashlash natijasida hosil qilinadi, ya'ni $\dot{O}(x^0) = O(x^0) \setminus \{x^0\}$.

$f: M \to R$ funksiyani qaraymiz, bu yerda M X metrik fazoga tegishli bo'lgan biror bir to'plam. Agar $X = R^n$ bo'lsa, u holda $f: M \to R$ funksiya ko'p o'zgaruvchili funksiya deyiladi va odatda quyidagicha belgilanadi:

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n),\ x \in M.$$

Masalan, $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ funksiya R^2 fazoning markazi $(0,0)$ nuqtada bo'lgan birlik doirasida aniqlangan, $\ln(x_1 + x_2 + x_3)$ funksiya esa, nuqtaning ixtiyoriy tesh k atrofida aniqlangan.

1-ta'rif. *funksiya X metrik fazoda x^0 nuqtaning $\dot{O}(x^0)$ tirnalgan atrofida aniqlangan bo'lsin A son funksiyaning $x \to x^0$ intilgandagi limiti deyiladi agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lsaki, $\rho(x, x^0) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x \in \dot{O}(x^0)$ uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.*

2-ta'rif. *$\dot{O}(x^0)$ tirnalgan atrofda aniqlangan funksiya $x \to x^0$ intilganda limitga ega deyiladi, agar $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^0$ bo'lgan ixtiyoriy $x^{(k)} \in \dot{O}(x^0)$ ketma-ketlik uchun $\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = A$ tenglik bajarilsa.*

3-ta'rif. *$\dot{O}(x^0)$ atrofda aniqlangan funksiya $x \to x^0$ intilganda limitga ega deyiladi, agar*

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^0$$

bo'lgan ixtiyoriy $x^{(k)} \in \dot{O}(x^0)$ ketma-ketlik uchun $\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = A$ tengsizlik bajarilsa.

Limitning bu ikki ta'rifini ekvivalentligi bir o'zgaruvchili funksiya uchun isbot qilingani kabi isbotlanadi.

Agar A son funksiyaning $x \to x^0$ intilgandagi limiti bo'lsa, u holda uni quyidagicha

$$A = \lim_{x\to x^0} f(x),$$

yozamiz.

Agar ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiya $\dot{O}(a,b)$ atrofda aniqlangan bo'lib, A soni uning $(x,y) \to (a,b)$ intilgandagi limiti bo'lsa, u holda u

$$A = \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y)$$

ko'rinishda yoziladi va A soni ikkilangan limiti deyiladi.

Xuddi shunday, n o'zgaruvchiili funksiya uchun $A = \lim_{x\to x^0} f(x)$ belgilash bilan birga quyidagi belgilashdan ham foydalanamiz:

$$A = \lim_{\substack{x_1\to x_1^0 \\ \ldots \\ x_n\to x_n^0}} f(x_1, \ldots, x_n)$$

1-lemma. *va funksiyalar $\dot{O}(x^0)$ atrofda aniqlangan va $\dot{O}(x^0)$ atrofda $|f(x)| \le \varphi(x)$ bo'lsin. Agar $A = \lim_{x\to x^0} \varphi(x) = 0$ bo'lsa, u holda $A = \lim_{x\to x^0} f(x) = 0$ bo'ladi.*

$\lim_{x\to x^0} \varphi(x) = 0$ ekanligidan, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\dot{S}_\delta(x^0)$ shar topiladiki, barcha $x \in \dot{S}_\delta(x^0)$ lar uchun $|\varphi(x)| < \varepsilon$

tengsizlik bajariladi. Ayniqsa barcha $n > N$ lar uchun

tengsizlik bajariladi, ya'ni $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'ladi.

1-misol. Agar $a > 0$ bo'lsa, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ekanligini isbot qiling. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ni olamiz. $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$ deb olamiz $\alpha_n > 0$ bo'lsin, unda

$$a = (1+\alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n,$$

bo'ladi, ya'ni

$$0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n}.$$

2-misol. Agar $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ bo'lsa, $x_n \to 0$ ekanligini ko'rsating.

$n = (1+x_n)^n$, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ekanligidan, $x_n > 0$ deb qaysi ildagi tengsizlikka ega bo'lamiz

$$n = (1+x_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}x_n^2, \quad x_n^2 < \frac{2}{n-1}, \quad 0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

1-misolga ko'ra, $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$ ekanligidan $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'ladi.

1-lemmani qo'llab,

$$\lim_{x\to+\infty,\, y\to+\infty} f(x,y) = 0$$

tenglikni olamiz.

3-misol.

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \tag{1}$$

funksiya $(x,y)\to(0,0)$ intilganda limitga ega bo'lmaydi.

$x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}$ nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz. Unda $f(x_n,y_n) = 1$ va $n\to\infty$ da $(x_n,y_n)\to(0,0)$ bo'ladi. Agarda $x'_n = \frac{1}{n}, y'_n = \frac{1}{n+1}$ nuqtalar ketma-ketligini olsak, u holda $f(x'_n,y'_n) = \frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1} \to 1$ bo'ladi. Shunday qilib, ixtiyoriy $n \in N$ da (x_n,y_n) va (x'_n,y'_n) nuqtalar $(0,0)$ nuqta bilan ustma-ust tushmaydi. (x_n,y_n) va (x'_n,y'_n) nuqtalar ketma-ketligi $(0,0)$ nuqtaga yaqinlashadi, u holda limitning 2- tarifidan foydalanib, $f(x,y)$ funksiyani $(x,y)\to(0,0)$ intilganda limitga erishmasligiga ishonch hosil qilamiz.

4-misol.

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \tag{2}$$

funksiya $(x,y)\to(0,0)$ intilganda limitga ega bo'lmaydi.

3- misoldagi mulohazani takrorlab, ikkita $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ va $(x'_n,y'_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\right)$ nuqtalar ketma-ketligini quramiz. $(x_n,y_n)\to(0,0)$ va $(x'_n,y'_n)\to(0,0)$, $\lim f(x_n,y_n) = 0$ va $\lim f(x'_n,y'_n) = 1$ bo'lganligi uchun $f(x,y)$ funksiyaning ikkilangan limiti $(x,y)\to(0,0)$ intilganda mavjud emas.

To'plam bo'yicha limit. Takroriy limitlar. $\lim_{x\to a} f(x)$ limit $O(a^0)$ atrofdagi funksiyalar uchun 1^0 – bandda aniqlangan. To'plam bo'yicha limit tushunchasini kiritib, limit ta'rifini kengaytiramiz.

4-ta'rif. *to'plam funksiyaning aniqlanish sohasining to'plam ostisi bo'lsin, nuqta to'plamning limit nuqtasi bo'lsin sonni funksiyaning intilganda to'plam bo'yicha limiti deb aytamiz, agar ixtiyoriy uchun shunday mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy tengsizlik bajarilsa*

Bu holda

deb yoziladi.

Aytaylik, ikki o'zgaruvchili funksiya teshik atrofda aniq-langan bo'lsin.

5-ta'rif. *funksiyaning nuqtadagi yo'nalish bo'yicha hosilasi deb, quyidagi ifodaga aytamiz:*

bu yerda - nuqtadan chiquvchi yo'nalishdagi nur

5-misol. $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ funksiyaning nuqtadagi ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha limiti mavjud va u ga teng ekanligini ko'rsating. bo'lganda

tenglik bajariladi, u holda

yo'nalish bo'yicha limiti mavjud va u nolga teng ekanligini ko'rsating.

bo'lganda

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\frac{2t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha},$$

tenglik o'rinli. Agar bo'lsa, $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$ va

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$$

bo'ladi. Agar bo'lsa, u holda

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0,$$

Ravshanki, limitning mavjudligidan limit nuqtasi bo'lgan ixtiyoriy qism to'plam uchun limitning mavjudligi kelib chiqadi. Xususan, intilganda funksiyaning ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha nuqtada limitining mavjudligi va intilganda funksiyaning ikkilangan limitiga tengligi kelib chiqadi.

4- va 6- misollarning natijalaridan, limitlarning ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha nuqtadagi limitining mavjudligi va u limitlarning tengligidan bu nuqtada funksiya limitining mavjudligi kelib chiqmaydi.

funksiyaning yo'nalish bo'yicha nuqtadagi limiti ikki o'zgaruvchili funksiya holidagiga o'xshash aniqlanadi, bu yerda

1-mashq. Quyidagi shartlar bajarilsin:

a) to'plamlar ; b) to'plamlarning

b) har birining limit nuqtasi; v) funksiya $U \cup V$ to'plamda aniqlangan. $A = \lim_{x \to x_0} f(x)$ tenglik faqat va faqat $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ bo'lgan holdagina to'g'ri ekanligini isbotlang.

2-mashq. to'plam M_n to'plamlarning cheksiz birlashmasidan iborat bo'lgan holda, 1-mashqning natijasini umumlashtirish mumkin emasligini ko'rsating.

Ko'rsatma. 4 va 6 misollarni natijalarini yana bir bor tahlil qiling.

Aytaylik, ikki o'zgaruvchili funksiya

$$H = \{(x,y) : 0 < |x - x_0| < a, 0 < |y - y_0| < b\}$$

to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Aytaylik, ixtiyoriy $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, $x \neq x_0$ uchun $\lim_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ mavjud, $\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtaning teshik atrofida aniqlangan. Agar

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda bu limit *takroriy limit* deyiladi. Shunga o'xshash boshqa $\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$ takroriy limitni ham aniqlash mumkin.

Misollar shuni ko'rsatadiki, ikkilangan limitni mavjudligidan takroriy limitni mavjudligi kelib chiqmaydi, va aksincha, takroriy limitni mavjudligidan ikkilangan limitni mavjudligi kelib chiqmaydi.

3- misolning $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ funksiyasi uchun $(x,y) \to (0,0)$ intilganda ikkilangan limit mavjud emas, lekin $\lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} f(x,y) = 0$ bo'lganligi tufayli ikkala takroriy limit mavjud va u nolga teng.

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & agar \quad y \neq 0, \\ 0, & agar \quad y = 0, \end{cases}$$

funksiya uchun $|f(x,y)| \leq |x|$ tengsizlik o'rinli. 1- lemmaga ko'ra, bu funksiyaning limiti $(x,y) \to (0,0)$ intilganda nolga teng. Lekin $x \neq 0$ bo'lganda

$$\lim_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y},$$

limit mavjud emas, shuning uchun, mos takroriy limit mavjud emas.

3-mashq. $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning tirnalgan atrofida aniqlangan va $(x,y) \to (x_0,y_0)$ intilganda $f(x,y)$ funksiyaning ikkilangan limiti mavjud bo'lsin. Mazkur holda, qachonki, y_0 nuqtaning teshik atrofida $\lim_{x \to x_0} f(x,y)$ aniqlangan bo'lsa, $\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$ takroriy limitning mavjudligi va bundan tashqari uni ikkilangan limitga tengligi isbot qilinsin.

4-mashq. Quyidagi belgilarga ma'no bering:

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x,y) = A.$$

7-misol. Quyidagi limitni

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)} = 0$$

ekanligini ko'rsating.

$x > 0$, $y > 0$ bo'lganda

$$0 \leq (x^2 + y^2) e^{-(x+y)} \leq x + y^2 e^{-(x+y)}$$

tengsizlik o'rinli va $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t} = 0$ bo'ladi, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$

uchun shunday $\delta > 0$ mavjudki, ixtiyoriy $x \in U(x^0, \delta)$ da $x \neq x^0$ tengsizlik bajariladi. Lekin, gohida ixtiyoriy $x \to x^0$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $0 < |x^1 - y^1| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi. Murakkab funksiyaning uzluksizligi.

6-ta'rif. *Metrik fazo R^n nuqtasining $\delta > 0$ atrofida aniqlangan $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$ bo'lsa.*

7-ta'rif. *x^0 nuqta R^n atrofida aniqlangan $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada uzluksiz deyiladi, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $S_\delta(x^0)$ atrof mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in S_\delta(x^0)$ uchun $f(x) - f(x^0) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.*

Bu ikki ta'rifning ekvivalentligi limitning atrof tilidagi ta'rifidan kelib chiqadi.

To'plam bo'yicha limit ta'rifidan foydalanib, funksiyaning *to'plam bo'yicha nuqtada uzluksizligi* ta'rifini berish mumkin.

8-ta'rif. *$f(x)$ funksiya $M \subset R^n$ to'plamda aniqlangan. $x^0 \in M$ bo'lsin. x^0 - M to'plamning limit nuqtasi $f(x)$ funksiya M to'plam bo'yicha x^0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agar*

$$\lim_{x \to x^0,\ x \in M} f(x) = f(x^0),$$

bo'lsa.

Agar x^0 nuqta M to'plamning ajratilgan nuqtasi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya M to'plam bo'yicha x^0 nuqtada uzluksiz deb hisoblanadi.

ta

1-misol.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{agar } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{agar } x = y = 0. \end{cases}$$

funksiya istalgan m bo'yicha (0,0) nuqtada uzluksiz, lekin (0,0) nuqtada uzluksiz emas.

2 paragraf 4- misolining natijasidan $(x,y) \to (0,0)$ intilganda $f(x,y)$ funksiya limitga ega emas, mos ravishda (0,0) nuqtada uzluksiz bo'lmaydi. 2 paragraf 6-misolining natijasidan esa, $f(x,y)$ funksiyaning (0,0) nuqtada ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha limiti mavjud va u nolga tengligi kelib chiqadi. Bu yerdan, $f(x,y)$ funksiya (0,0) nuqtada ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha uzluksiz.

Funksiyalarning nuqtada uzluksizligi haqidagi asosiy teoremalar (masalan, uzluksiz funksiyalarning yig'indisini uzluksizligi haqidagi teorema) ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham bir o'zgaruvchili funksiyalardagi kabi isbotlanadi.

1-teorema. *$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ funksiyalar $x^0 \in R^m$ nuqtaning qandaydir atrofida aniqlangan va x^0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. $f(y) = f(y_1, \ldots, y_n)$ funksiya esa $y^0 = \{\varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0)\}$ nuqtaning atrofida aniqlangan va y^0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. Unda x^0 nuqtaning qandaydir atrofida*

$$\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

murakkab funksiya aniqlangan bo'ladi, bu yerda $\Phi(x)$ funksiya x^0

nuqtada uzluksiz bo'ladi.

$f(y)=f(y_1,\dots,y_m)$ funsiya y^0 nuqtada uzluksizligidan, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $S_\delta(y^0)$ shar topiladiki, barcha $y\in S_\delta(y^0)$ lar uchun

$$|f(y)-f(y^0)|=|f(y_1,\dots,y_m)-f(y_1^0,\dots,y_m^0)|<\varepsilon \qquad (1)$$

tengsizlik bajariladi. Ixtiyoriy $i=\overline{1,m}$ larda $\varphi_i(x)$ funksiya x^0 nuqtada uzluksiz bo'lganligidan, σ son uchun shunday $S_\delta(x^0)$ shar topiladiki, barcha $x\in S_\delta(x^0)$ lar uchun

$$|\varphi_i(x)-\varphi_i(x^0)|<\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

tengsizlik bajariladi.

Aytaylik, δ - $\delta_1,\dots,\delta_n$ sonlarning eng kichigi bo'lsin. Unda ixtiyoriy $x\in S_\delta(x^0)$ uchun va ixtiyoriy $i=\overline{1,n}$ uchun (2) tengsizlik bajariladi. Binobarin, ixtiyoriy $x\in S_\delta(x^0)$ uchun qaysiki, $(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))$ nuqtani $S_\sigma(y^0)$ sharda yotishini anglatuvchi

$$\left|\sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(x)-\varphi_i(x^0)|^2\right|^{1/2}<\sigma, \qquad (3)$$

tengsizlik bajariladi. lekin, ixtiyoriy $y\in S_\sigma(y^0)$ uchun funksiyaning qiymati aniqlandi. Demak, $S_\delta(x^0)$ sharda quyidagi murakkab $\Phi(x)=f(\varphi_1(x)-\varphi_1(x))$ funksiya aniqlandi.

Murakkab funksiyani nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $x\in S_\delta(x^0)$ da (1) tengsizlikdagi $y\in S_\sigma(y^0)$ nuqta o'rniga $(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))$ nuqtani qo'yamiz. U holda ixtiyoriy $x\in S_\delta(x^0)$ uchun

qaysiki $\Phi(x)$ murakkab funksiyani (x^0) nuqtada uzluksizligini anglatuvchi $|\Phi(x)-\Phi(x^0)|<\varepsilon$ tengsizlikni bajarilishiga erishamiz.

1-mashq. $\varphi_i(x)$ funksiya $i=\overline{1,n}$ da $M\subset R^m$ to'plam bo'yicha nuqtada uzluksiz bo'lsin. $f(y_1,\dots,y_m)$ funksiya

$$\varphi(M)=\{(y_1,\dots,y_m): y_i=\varphi_i(x), x\in M$$

to'plamda aniqlangan va $y^0=(\varphi_1(x^0),\dots,\varphi_m(x^0))$ nuqtada uzluksiz bo'lsin.

$f(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))$ murakkab funksiyani to'plam bo'yicha nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsating.

Ko'rsatma. Isboti 1-teoremaning isbotidan amalda farq qilmaydi.

2-mashq. Aytaylik: a) $i=\overline{1,n}$ da M_i to'plam $M_i\subset R^m$;

b) $i=\overline{1,n}$ da x^0 nuqta $x^0\in M_i$ bo'ladi; s) $f(x)$ funksiya $M=\bigcup_{i=1}^{n}M_i$ bo'lsin.

$f(x)$ funksiya x^0 nuqtada M to'plam bo'yicha uzluksiz bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, u $i=\overline{1,n}$ da har bir M_i to'plam bo'yicha x^0 nuqtada uzluksiz ekanligini isbotlang.

Ko'rsatma. 24 paragrafdagi 1-mashqqa qarang.

3-mashq. 2-mashqning natijasini qachonki, M to'plam M_i to'plamlarning cheksiz birlashmasi bo'lgan holga umumlashtirib bo'lmasligini ko'rsating.

Ko'rsatma. 24 paragrafdagi 2-mashqqa qarang.

Kompakt to'plamda uzluksiz funksiyaning xossalari. Tekis uzluksizlik. *f(x) funksiya M to'plamda uzluksiz deyiladi, agar M to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, ya'ni, agar to'plamning har bir x^0 limit nuqtasida*

$$\lim_{x\to x^0,\,x\in M} f(x)=f(x^0),$$

shart bajarilsa.

Metrik fazoda kompaktda uzluksiz funksiyalarning xossalari haqidagi quyidagi ikkita teoremaning isbotlari kesmada uzluksiz bo'lgan bir o'zgaruvchili funksiyalarning mos isbotlaridan amalda kam farq qiladi.

2-teorema (Veyershtrass). *Metrik fazoning kompakt to'plamida uzluksiz bo'lgan funksiya o'sha kompakt to'plamda chegaralangan bo'ladi.*

3-teorema (Veyershtrass). *Metrik fazoning kompakt to'plamida uzluksiz bo'lgan funksiya o'sha kompakt to'plamda o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.*

To'plamda funksiyaning tekis uzluksizligi haqidagi asosiy tushunchani kiritamiz.

9-ta'rif. *funksiya X metrik fazoning to'plamida tekis uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x,x'\in G$ lar uchun $\rho(x,x')<\delta$ bo'lganda*

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa.

To'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyaning o'sha to'plamda tekis uzluksiz bo'lishi shart emas. Misollar keltirishdan oldin inkorini quramiz: funksiya G to'plamda tekis uzluksiz bo'lmaydi, agar shunday $\varepsilon_0>0$ mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $\delta>0$ uchun shunday $x,x'\in G$ elementlar mavjud bo'lsaki, $\rho(x,x')<\delta$ bo'lganda

$$|f(x)-f(x')|\geq\varepsilon_0$$

bo'lsa.

2-misol. $f(x)=x^2$ funksiyani $(0,+\infty)$ intervalda tekis uzluksiz bo'lmasligi ko'rsatilsin.

$\varepsilon_0=1$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\delta>0$ uchun $x_\delta=1/\delta$, $x_\delta'=1/\delta+\delta/2$ larni olamiz. U holda $\rho(x_\delta,x_\delta')=|x_\delta'-x_\delta|=\delta/2<\delta$ bo'ladi, lekin

$$|f(x_\delta')-f(x_\delta)|=(x_\delta')^2-x_\delta^2=(x_\delta'-x_\delta)(x_\delta'+x_\delta)=\frac{\delta}{2}\left|\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right|\geq 1.$$

4-mashq. $(0,1)$ intervalda uzluksiz va chegaralangan, lekin, bu intervalda tekis uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

4-teorema. (Kantor). *Metrik fazoda kompakt to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiya bu kompakt to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.*

funksiya kompaktda uzluksiz, lekin bu kompaktda tekis uzluksiz bo'lmasin. U holda shunday $\varepsilon_0>0$ ixtiyoriy n uchun shunday $x_n,x_n'\in M$ nuqtalar topiladiki, ular uchun

$$\rho(x_n,x_n')<\frac{1}{n},\ \text{lekin}\ |f(x')-f(x_n)|\geq\varepsilon_0 \qquad (5)$$

tengsizliklar bajariladi. kompakt bo'lganligi tufayli, x_n ketmaketlikdan qandaydir $x^0\in M$ nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qism ketmaketlikni ajratish mumkin. Uchburchak tengsizligidan foydalanib, $k\to\infty$ ga intilganda

$$0\leq\rho(x_{n_k}',x^0)\leq\rho(x_{n_k}',x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x^0)<$$

$$<\frac{1}{n_k}+\rho(x_{n_k},x^0)\to 0,$$

tengsizlikni olamiz, binobarin,

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x^0.$$

bo'ladi. Lekin $f(x)$ funksiya $\quad$ oraliqda tekis uzluksiz. Shuning uchun

$$\lim_{\quad} f(x_{\quad}) = \lim_{\quad} f(x_{\quad}) = f(\quad)$$

Endi (5) tengsizlikda $n \to \infty$ deb olib,

$$|f(x_0)| \quad f(x_{\quad}) \quad | \qquad (6)$$

ifodaga ega bo'lamiz. (6) tengsizlikda limitga o'tib,

$$0 \quad |f(x^{(n)}) \quad f(x^{(n)})| \quad \quad 0$$

tengsizlikni olamiz. Olingan qarama-qarshilik $f(x)$ funksiyaning $\quad$ to'plamda tekis uzluksiz bo'lishligi kerakligini isbot qiladi.

E to'plamda $f(x)$ funksiya chegaralanmagan bo'lsin. Quyidagi

$$\omega_f(\delta, E) \quad \sup \quad |f(x_{\quad}) \quad f(x_{\quad})|, \qquad (7)$$

ifodaga E to'plamda *$f(x)$ funksiyaning modul uzluksizligi* deb ataladi. Ravshanki, modul uzluksizlik δ oshib borgan sari o'sadi.

5-teorema. *E to'plamda $f(x)$ funksiya tekis uzluksiz bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta, E) \quad 0, \qquad (8)$$

bo'lsa.

Agar $f(x)$ funksiya E to'plamda tekis uzluksiz bo'lsin, u holda

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E, |x - x'| < \delta \quad |f(x^{(n)}) \quad f(x^{(n)})| \quad \varepsilon \qquad (9)$$

bo'ladi. (7) va (9) ifodalardan

$$\omega_f(\delta, E) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ekanligi kelib chiqadi. Chunki modul uzluksizlik δ bo'yicha o'suvchi funksiya, u holda $\quad$ da $\quad$ tengsizlik bajariladi, va (8) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(8) tenglikdan $f(x)$ funksiyaning E to'plamda tekis uzluksizligi kelib chiqadi. (8) tenglikdan

$$\quad \quad \quad \

Shuning uchun, $f(x)$ funksiya va qiymatlar orasida joylashgan barcha qiymatlarni qabul qiladi.

3-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi.

$f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ funksiya $x^0(\dots)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Quyidagi bir o'zgaruvchili $(\dots)$ funksiyani qaraymiz. $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada hosilaga ega bo'lishi mumkin. Ta'rif bo'yicha bunday hosila $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\dots)$ *xususiy hosila* deb ataladi.

Shunday qilib,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,\dots,x_n^0)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(\dots,x_i^0+\Delta x_i,\dots)-f(x^0)}{\Delta x_i},$$

bu yerda $x=x_1\dots x_i\dots x_n^0$.

Xuddi shunga o'xshash

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,\dots,x_n^0),\quad i=\overline{1,n}$$

xususiy hosila aniqlanadi (birinchi tartibli).

Birinchi tartibli xususiy hosilalar uchun boshqa belgilar ham qo'llaniladi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)=f'_{x_i}(x^0)=z'_{x_i}(x^0)=z'_i(x^0)\quad f'_i(x^0)\quad \frac{\partial}{\partial x_i}f(x^0)\quad \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}.$$

Ikki o'zgaruvchili funksiya (x^0,y^0) nuqtada ikkita birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lishi mumkin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0).$$

Uch o'zgaruvchili funksiya uchta birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lishi mumkin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0,z^0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0,z^0),\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x^0,y^0,z^0).$$

Xususiy hosilalarni hisoblashda bittasidan tashqari barcha o'zgaruvchilar tayinlanadi. u holda xususiy hosilalarni hisoblash texnikasi bir o'zgaruvchili funksiyani hosilasini hisoblash kabi amalga oshiriladi.

Masalan.

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Funksiyani nuqtada differensiallanuvchiligi ta'rifini beramiz.

1-ta'rif. *$f(x)\equiv f(x_1,\dots,x_n)$ funksiya $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, agar n ta nuqtaning qandaydir atrofida aniqlangan va shunday sonlar mavjud bo'lsaki, $x=x^0$ ga intilganda quyidagi*

$$f(x)-f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_i^0)+\alpha(|x-x^0|)\cdot|x-x^0| \tag{1}$$

bo'lsa

1-teorema. *$f(x)$ funksiya x^0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki $f(x)$ funksiyani x^0 nuqtaning qandaydir atrofida*

$$f(x)=f(x^0)+\sum_{i=1}^{n}A_i\cdot(x_i-x_i^0), \tag{2}$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lgan x^0 *nuqtada uzluksiz funksiya.*

$f(x)$ funksiya x^0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda (1) shart bajariladi. $x \to x^0$ intilganda $\alpha \to 0$ bo'lgani uchun $x \to x^0$ ekanligini bildiradi, bu yerda $\alpha = \alpha(x)$ funksiya

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(x^0) - \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - x_i^0)}{\rho(x, x^0)}, \quad \alpha(x^0) = 0 \tag{3}$$

bu yerda $\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} \neq 0$ ekanligidan, $x_i - x_i^0 = o(\rho(x, x^0))$, $i = \overline{1, n}$, bo'ladi.

α funksiyalarni x^0 nuqtada bu α ni x^0 deb olib uzluksizligi bo'yicha kengaytiramiz.

U holda (1) va (3) tengliklardan quyidagilarni olamiz

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - x_i^0) + \alpha \rho(x, x^0),$$

$$f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - x_i^0) + \alpha \rho(x, x^0) - f(x) = 0.$$

α funksiyalarni x^0 nuqtada uzluksizligidan $f(x)$ funksiyaning x^0 nuqtada uzluksiz va $f(x^0) = A_1, \ldots, A_n$ bo'ladi. (2) tenglik bajarilsin. U holda $f(x)$ funksiyalarni x^0 nuqtada uzluksizligidan foydalanib,

$$A_i = f_i(x^0), \quad f(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad \sup_{x \to x^0} \alpha = 0,$$

deb olamiz. Natijada $x \to x^0$ ga intilganda

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - x_i^0) + \alpha \rho(x, x^0) \to 0$$

ekanligidan,

$$f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - x_i^0) + \alpha \rho(x, x^0) - f(x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - x_i^0) + o(\rho(x, x^0)) = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz.

1-mashq. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x^0 \in R^n$ nuqtaning atrofida aniqlangan, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada differensiallanuvchi va $f(x^0) \neq 0$, $g(x)$ funksiya esa x^0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. $f(x)g(x)$ funksiyani nuqtada differensiallanuvchi ekanligini isbotlang.

2-mashq. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ funksiyani $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligini isbotlang.

Ko'rsatma. 1-mashqni natijasidan foydalaning.

1-misol. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ funksiyani $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Shunday $C > 0$ soni mavjudki, ixtiyoriy $x \in R$ va $y \in R$ lar uchun

$$|\sqrt[3]{x^3 + y^3}| \leq C\sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

tengsizlik o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

Agar $y = 0$, bo'lsa, u holda (4) tengsizlik istalgan C da o'rinli bo'ladi. Endi $y \neq 0$ bo'lsin. $x = ty$ deb olamiz. U holda (4) tengsizlik

$|\varphi(t)|<\varepsilon$ tengsizlikka ekvivalent bo'ladi, bu yerda

$\varphi(t)$ funksiyani t da uzluksizligi va

ekanligidan, $\varphi(t)$ t da chegaralanmagan funksiya bo'lishi kerak. (4)

tengsizlikni o'rinli ekanligini ko'rsatish kerak. Bundan

ekanligidan, $t\to 0$ $\varphi(t)\to\varphi(0)$ ya'ni

bo'ladi, bundan, $(x,y)\to(0,0)$ ya'ni

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni $f(x,y)$ funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi.

2-misol. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ funksiyani $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi emasligini ko'rsatilsin.

1- usul. Funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra, shunday A va B sonlar mavjud bo'ladiki,

$$f(x,y)-f(0,0)=Ax+By+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

bu yerda $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$, $f(0,0)=0$, $A=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$, $B=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

Shuning uchun, $\sqrt[3]{x^3+y^3}=x+y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ bo'ladi. $x=y=t$

bo'lsin, u holda $\sqrt[3]{2t^3}=2t+o(t)$ yoki $t\neq 0$ ga bo'lganda $\sqrt[3]{2}=2+\frac{o(t)}{t}$

bo'ladi, $o(t)$ belgining ta'rifiga zid. Bundan, $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi emas.

2- usul. Agar $f(x,y)$ funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda u nuqtaning qandaydir atrofida 1-teoremaga ko'ra, quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$f(x,y)=f(0,0)+\alpha_1(x,y)+\alpha_2(x,y). \tag{5}$$

bu yerda $\alpha_1(x,y)$ va $\alpha_2(x,y)$ funksiyalar $(0,0)$ nuqtada uzluksiz.

k - ixtiyoriy son bo'lsin. (5) tenglikda $y=kx$ deb olamiz. U holda

$$\sqrt[3]{1+k^3}\,x=\alpha_1(x,kx)+k\alpha_2(x,kx)=\alpha+k\beta$$

bo'ladi. $x\to 0$ ga intilganda limitga o'tib va $\alpha_1(x,y)$ va $\alpha_2(x,y)$ funksiyalarni $(0,0)$ nuqtada uzluksizligidan foydalanib, istalgan k da

$$\sqrt[3]{1+k^3}=\alpha_1(0,0)+k\alpha_2(0,0)=\alpha+k\beta$$

tenglik bajarilishiga ega bo'lamiz. Bu $\sqrt[3]{1+k^3}$ funksiya chiziqli bo'lmaganligi sababli, noto'g'ri (uning k bo'yicha ikkinchi hosilasi doimo nolga aylanmaydi).

1- teoremadan $f(x)$ funksiyaning x^0 nuqtada differensiallanuvchi va uzluksizligi kelib chiqadi. Tasdiqning aksinchasi o'rinli emas: 2-misolda qaralgan funksiya o'sha nuqtada uzluksiz, lekin $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi emas.

1.1. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchi bo'lishligining zaruriy va yetarli shartlari.

2-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $x^0\in R^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda u x^0 nuqtada barcha $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$, $i=\overline{1,n}$ xususiy hosilalarga ega va $x\to x^0$ ga intilganda*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) + \dots \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$f(x)$ funksiya x^0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bunda shundaylik $A_1, \dots, A_n$ sonlar mavjud bo'ladiki, ... da (1) bajariladi. Aytaylik, bu tenglikda ... bo'lsin. Bu holda (1) quyidagi ko'rinishni oladi: ... yoki aniqlanmas

$$f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x^0) = \dots + 1 \cdot \dots + \dots$$

bo'ladi. Bundan, quyidagi limit mavjud bo'ladi

$$A_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x^0)}{\Delta x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0).$$

$f(x)$ funksiyaning x^0 nuqtadagi qolgan xususiy hosilalarini mavjudligi xuddi shunga o'xshash isbot qilinadi:

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0), \quad i = \overline{2, n}.$$

Bu ifodalarni (1) tenglikka qo'ysak, (6) tenglikni olamiz.

2- misoldagi funksiya nuqtada ikkala birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'ladi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

2- misoldagi $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya nuqtada differensiallanuvchi bo'lmaganligi sababli, bu misol shuni ko'rsatadiki, nuqtada xususiy hosilani mavjudligidan, o'sha nuqtada funksiyaning differensiallanuvchiligi kelib chiqmaydi. Nuqtada xususiy hosilani

mavjudligi xattoki o'sha nuqtada funksiyaning uzluksizligini kafolatlamaydi.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{agar } x^2+y^2 > 0, \\ 0, & \text{agar } x = y = 0. \end{cases}$$

funksiya $(x,y) \to (0,0)$ ga intilganda limitga ega emas, shuning uchun, nuqtada uzluksiz emas. Biroq, bu funksiyaning nuqtadagi ikkala xususiy hosilalari mavjud:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3-teorema. *Agar barcha $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), i = \overline{1,n}$ xususiy hosilalar $x^0 \in R^n$ nuqtaning atrofida aniqlangan va x^0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.*

Uch o'zgaruvchili funksiya bo'lgan holni qaraymiz. Umumiy holga shunga o'xshash qaraladi. Aytaylik, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ funksiyalar qandaydir $S(x^0,y^0,z^0)$ sharda aniqlangan va sharning (x^0,y^0,z^0) markazida uzluksiz bo'lsin.

Funksiyaning ortirmasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$f(x,y,z) - f(x^0,y^0,z^0) = f(x,y,z) - f(x^0,y,z) +$$
$$+ f(x^0,y,z) - f(x^0,y^0,z) + f(x^0,y^0,z) - f(x^0,y^0,z^0),$$

$x^0 < x$ bo'lsin. $t \in [x^0, x]$ da $\varphi(t) = f(t,y,z)$ bir o'zgaruvchili funksiyani qaraymiz. Mazkur kesmada $\varphi(t)$ funksiya

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,y,z).$$

hosilaga ega bo'ladi. x^0, x kesmada Lagrangening chekli orttirmalar formulasini qo'llab, $\dots \quad 0<\theta<1$ tenglikni olamiz. Agar bu ifodaga $\dots$ funksiya uchun ifodani olib kelib qo'ysak, u holda

$$f(x,y,z) - f(x^0,y,z) = f_1(x^0+\theta(x-x^0),y,z)(x-x^0), \quad (7)$$

$$f_1(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0+\theta(x-x^0),y,z)$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ xususiy hosila (x^0,y^0,z^0) nuqtada uzluksizligidan,

$$\lim_{(x,y,z)\to(x^0,y^0,z^0)} f_1(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0,z^0)$$

limit mavjud bo'ladi. Xuddi shuningdek,

$$f(x^0,y,z) - f(x^0,y^0,z) = f_2(x^0,y+\theta(y-y^0),z)(y-y^0),$$
$$f(x^0,y^0,z) - f(x^0,y^0,z^0) = f_3(x^0,y^0,z^0+\theta(z-z^0))(z-z^0), \quad (8)$$

bu yerda $f_2(x,y,z)$ va $f_3(x,y,z)$ funksiyalar $(x,y,z)\to(x^0,y^0,z^0)$ ga intilganda chekli limitga ega bo'ladi. Bu funksiyalarni (x^0,y^0,z^0) nuqtadagi limit qiymatlari bilan to'ldirib, $f(x^0,y^0,z^0)=\dots$ funksiyalarni (x^0,y^0,z^0) nuqtada uzluksizligini ola - miz. Shunday qilib,

$$f(x,y,z) - f(x^0,y^0,z^0)$$
$$= (x-x^0)f_1(x,y,z)+(y-y^0)f_2(x,y,z)+(z-z^0)f_3(x,y,z),$$

$f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$ va $f_3(x,y,z)$ funksiyalarni (x^0,y^0,z^0) nuqtada uzluksizligidan, 1-teoremadan funksiyani (x^0,y^0,z^0) nuqtada differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Xususiy hosilani nuqtada uzluksizligi funksiyaning o'sha nuqtada differensiallanuvchi ekanligi uchun zaruriy shart bo'laolmaydi.

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, agar\ x^2+y^2>0,\\ 0, agar\ x=y=0,\end{cases}$$

funksiya $(x,y)\to(0,0)$ ga intilganda $f(x,y)=0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2})$ bo'lganligi sababli, nuqtada differensiallanuvchi. Lekin, $x^2+y^2>0$ bo'lganda

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

xususiy hosila $(x,y)\to(0,0)$ ga intilganda limitga ega bo'lmaydi, demak, nuqtada uzluksiz emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun, $x\to 0$ nolga intilganda $\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}$ limitga ega bo'lmasligini ko'rsatish yetarli.

3.2. Murakkab funksiyaning differensiallanuvchanligi. Birinchi differensial formaning invariantligi.

4-teorema. *$\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x)$ funksiyalar*

$$x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in R^n,\quad y^0=(\varphi_1(x^0),\dots,\varphi_m(x^0))\in R^m,$$

nuqtada differensiallanuvchi va $f\ y=f(y_1,\dots,y_m)$ funksiya esa y^0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$\Phi(x)=f(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x)),$$

murakkab funksiya nuqtada differensiallanuvchi. bundan tashqari $x\to x^0$ ga intilganda (9)

$$\Phi\ x-\Phi(x^0)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_i^0)+o(\rho(x,x^0)),$$

$$A_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x^0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0), \quad i = \overline{1,n}$$

bo'ladi

Isboti. $f(y)$ funksiya y^0 nuqtada differensiallanuvchi ekanligidan, 1-teoremaga ko'ra, y^0 nuqtada uzluksiz bo'lgan shunday $f(y)$-$j = \overline{1,m}$ funkfunksiyalar topiladiki,

$$f(y) - f(y^0) = \sum_{j=1}^{m} f_j(y)(y_j - y_j^0), \quad f_j(y^0) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) \tag{10}$$

bo'ladi.

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya o'sha nuqtada uzluksiz bo'lishligidan hamda murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremadan foydalanib,

$$\varphi_j(x) - f_j(x) = \varphi_j(x) - y_j^0, \quad j = \overline{1,m} \tag{11}$$

funksiyalar nuqtada uzluksiz ekanligini olamiz.

$$\varphi_j(x^0) - f_j[\varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_m(x^0)] = f_j(y^0) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0). \tag{12}$$

(10) ifodaga $y_j = \varphi_j(x)$, $y_j^0 = \varphi_j(x^0)$ larni qo'yib va (11) belgilashdan foydalanib,

$$\Phi(x) - \Phi(x^0) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x)[\varphi_j(x) - \varphi_j(x^0)] \tag{13}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Lekin, $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, funksiyalar nuqtada differensiallanuvchi, shuning uchun, nuqtada uzluksiz bo'lgan shunday φ_{ij} funksiyalar topiladiki,

$$\varphi_j(x) - \varphi_j(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij}(x)(x_i - x_i^0), \quad \varphi_{ij}(x^0) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0). \tag{14}$$

$i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

(14) ifodani (13) ga qo'yib,

$$\Phi(x) - \Phi(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x)(x_i - x_i^0), \quad \Phi_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x)\varphi_j(x), \tag{15}$$

tengliklarni olamiz.

$\varphi_{ij}(x)$ va $\varphi_j(x)$ funksiyalar nuqtada uzluksizligidan, $\Phi_i(x)$ funksiyalar ham nuqtada uzluksiz bo'ladi. Bu $\Phi(x)$ murakkab funksiyani nuqtada diffrensiallanuvchi ekanligini anglatadi (1-teoremaga qarang).

Differensiallanuvchi $\Phi(x)$ funksiyani (12) va (14) ifodalarga ko'ra,

$$A_i = \Phi_i(x^0) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x^0)\varphi_j'(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x^0),$$

ifodaga teng bo'lgan A_i koeffitsientli (9) ko'rinishida yozish mumkin.

Izoh. *(9) formuladan ikkinchisi bir o'zgaruvchili funksiya uchun qoidaga mos kelgan murakkab funksiyaning xususiy hosilasini topish-ning qoidasini beradi.*

3-misol. funksiya R^2 fazoning barcha nuqtalarida diffrensiallanuvchi bo'lsin. Qutb koordinatalariga o'ting va $\frac{\partial f}{\partial r}$ va $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ lar uchun ifodani toping.

$$F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi), x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

bo'lsin. U holda (9) qoidadan foydalanib.

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

funksiya nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda $x \to x^0$ ga intilganda uni (5) ko'rinishida yozish mumkin

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) + \alpha(x) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)$$

Ta'rif bo'yicha

$$dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0$$

deb olamiz. Agar funksiya nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda erkli o'zgaruvchilarning orttirmalariga nisbatan

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) dx_i \qquad (16)$$

chiziqli forma *funksiyaning* nuqtadagi *differensiali* deb ataladi. U holda $x \to x^0$ ga intilganda

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + o(\rho(x, x^0))$$

bo'ladi. Gohida (16) ifodani funksiyaning nuqtadagi birinchi *differensiali* deb ham ataladi.

Endi murakkab funksiyaning differensialini topamiz. Quyidagi $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_m = \varphi_m(x)$ funksiyalar nuqtada differensiallanuvchi, $f(y_1, \dots, y_m)$ funksiya esa $y^0 = (\varphi_1(x^0), \dots, \varphi_m(x^0))$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda 3- teoremaga ko'ra, murakkab $F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ funksiya nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi. (9) formuladan foydalanib,

$$dF(x^0) = df(\varphi_1(x^0), \dots, \varphi_m(x^0)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0) dx_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0) dx_i \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) dy_j(x^0), \quad dy_j(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0) dx_i.$$

tengliklarni olamiz. Demak,

$$df(y_1(x^0), \dots, y_m(x^0)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) dy_j(x^0). \qquad (17)$$

Agarda $y_1, \dots, y_m$ lar erkli o'zgaruvchilar bo'lganda edi, u holda $df(y^0)$ (17) murakkab funksiyaning differensialidan faqat (17) ifodada $dy_j(x^0)$ ifoda y_j funksiyaning differensiali.

$$df(y^0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) dy_j$$

ifodada dy_j erkli o'zgaruvchilarning differensiali bilan farq qilgan bo'lar edi. Ikkala holda ham differensial yozuvi bir xil. *Birinchi differensial o'zgaruvchilarni almashtirishga nisbatan invariant* deb aytiladi.

Aytaylik, funksiya qandaydir $G \subset R^n$ ochiq to'plamning barcha nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsin. U holda har bir $x \in G$ nuqtada

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$$

differensialni hisoblash mumkin. U ta $x_1, \dots, x_m$, $dx_1, \dots, dx_m$ o'zgaruvchili funksiya bo'ladi, qolaversa, tayinlangan $x_1, \dots, x_m$ larda differensial $dx_1, \dots, dx_m$ larning chiziqli funksiyasi bo'ladi. Differensiallash qoidasi bir o'zgaruvchili funksiyalar kabi:

a) $d(u + v) = du + dv$; b) $d(uv) = udv + vdu$; v) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, v \neq 0$.

Masalan, b) ni isbot qilaylik.

Avvalo, murakkab funksiyani differensiallanuvchiligi haqidagi teoremadan $u(x)v(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'ladi, agar u va $v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa. So'ngra,

$$d(uv) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx_i$$

$$= u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i + v \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = u dv + v du$$

ifodaga ega bo'lamiz.

4-misol. $\arctg \frac{y}{x}$ funksiyaning differensiali topilsin. Aytaylik, $u = \frac{y}{x}$ bo'lsin, unda

$$d\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = d \arctg u = \frac{du}{1+u^2} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Lagranjning chekli orttirmalar formulasi. Ikki o'zgaruvchili funksiya grafigiga urinma tekislik. f funksiya qavariq $G \subset R^n$ sohada differensiallanuvchi bo'lsin. Qavariq sohani ochiq to'plam ekanligini eslatib o'tamiz, ixtiyoriy ikki nuqtasini sohada yotuvchi kesma bilan tutashtirish mumkin. U holda ixtiyoriy

$$x = x_1, \ldots, x_n \in G,\ y = y_1, \ldots, y_n \in G$$

nuqtalar uchun shunday $\theta \in (0,1)$ son topiladiki, u uchun

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x + \theta(y-x)\right)(y_i - x_i) \qquad (18)$$

bo'ladi. (18) formula Lagranjning *chekli orttirmalar formulasi* deb

ataladi. Uni isbot qilamiz.

Nuqtalar $x, y \in G$ qavariqligidan, x, y larni tutashtiruvchi kesma sohada yotadi. Shuning uchun, bir o'zgaruvchili funksiya aniqlanadi.

$$\varphi(t) = f(x_1 + t(y_1 - x_1), \ldots, x_n + t(y_n - x_n)), \quad 0 \le t \le 1. \qquad (19)$$

Ravshanki, $\varphi(0) = f(x)$, $\varphi(1) = f(y)$. $\varphi(t)$ funksiya $[0,1]$ kesmada differensiallanuvchi bo'ladi. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga muvofiq

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + t(y_1 - x_1), \ldots, x_n + t(y_n - x_n))(y_i - x_i). \qquad (20)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

$\varphi(t)$ funksiyaga bir o'zgaruvchili funksiya uchun Lagranjning chekli orttirmalar formulasini qo'llaymiz. Shunday $\theta \in (0,1)$ son topiladiki, $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ bo'lgan natijani olamiz. (19) va (20) formulalardan foydalanib, endi (18) formulani oson olamiz.

f funksiya ochiq $G \subset R^n$ to'plamda differensiallanuvchi bo'lsin. Uning *grafigini* qaraymiz

$$Grf = \left\{ x, y, z : z = f(x,y), (x,y) \in G \right\}$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ nuqta Grf grafikda yotgan bo'lsin, ya'ni $z_0 = f(x_0, y_0)$ va

$$\Gamma = \{ x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta \}$$

silliq egri chiziq (x_0, y_0, z_0) nuqtadan o'tib, grafikda yotsin. Bu

$$z(t) = f(x(t), y(t));\ (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0),\ t_0 \in (\alpha, \beta), \qquad (21)$$

ekanligini anglatadi.

(21) ifodani t_0 differensiallab, birinchi differensial formani invariantligidan foydalanib, quyidagi

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy \qquad (22)$$

tenglikni olamiz. $dr=(dx,dy,dz)$ vektor l egri chiziqqa (x_0,y_0,z_0) nuqtadagi urinma vektor bo'ladi

8-rasm

$$N=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ 1\right) \qquad (23)$$

vektorni kiritamiz.

(22) shart N vektor l egri chiziqning (x_0,y_0) nuqtadagi urinmaga ortogonal ekanligini anglatadi. Bunda N vektor l *nuqtada* l egri chiziq ortogonal deyiladi. Lekin, l Grf grafikda yotuvchi va P nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy silliq egri chiziq. Shuning uchun, N vektor Grf grafikda yotuvchi va P nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy egri chiziqqa ortogonal bo'ladi. U P nuqtada Grf grafikga *normal vektor deb ataladi.*

P nuqtadan o'tuvchi va N normal vektorga ortogonal tekislik Grf grafikka P nuqtadagi *urinma tekislik* deb ataladi. Uning tenglamasi

$$Z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(X-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(Y-y_0). \qquad (24)$$

ko'rinishda bo'ladi. P nuqtadan o'tuvchi va N vektorga parallel to'g'ri chiziq Grf grafikning P nuqtadagi normali deb ataladi. Uning tenglamasi

$$\frac{X-x_0}{-f_x(x_0,y_0)}=\frac{Y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{Z-f(x_0,y_0)}{1}.$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi $P(x_0,y_0,z_0)\in Grf$ nuqtada qurilgan urinma tekislikning applikatasining qiymatini topamiz. (24) tenglamadan

$$Z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ y-y_0=df(x_0,y_0),$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $df(x_0,y_0)$ differensial urinma tekislik applikatasining orttirmasi bo'ladi (8-rasm).

Yo'nalish bo'yicha hosila. Gradient. funksiya $G\subset R^3$ sohada aniq-langan va $P(x_0,y_0,z_0)\in G$ bo'lsin. Nuqtadan o'tuvchi va

$$l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

yo'nalishga parallel nurni qaraymiz, bu yerda

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

P sohaning ichki nuqtasi ekanligidan, shunday t_0 soni topiladiki,

$$x=x_0+t\cos\alpha,\ \ y=y_0+t\cos\beta,\ \ z=z_0+t\cos\gamma,\ \ -t_0\le t\le t_0,$$

kesma sohada yotadi. funksiyaning (x_0,y_0,z_0) nuqtadagi l yo'nalish bo'yicha hosilasi deb,

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

ifodaga aytiladi.

5-teorema. Agar *funksiya $P(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu nuqtadagi l yo'nalish bo'yicha hosilani quyidagi formula orqali hisoblash mumkin:*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma\Big|_{t=0}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma. \qquad (25)$$

(25) formula bu murakkab funksiya hosilasini topish qoidasining natijasi bo'ladi.

$grad f(x_0, y_0, z_0)$ orqali

$$grad f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$$

vektorni belgilaymiz. Unda (25) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = (l, grad f(x_0, y_0, z_0)).$$

Agar simvolik vektorni (*Gamilton operatori*) kiritsak,

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

va ∇ dan chapda turgan vektorlarni ∇ bilan vektor algebra qoidalariga muvofiq ko'paytirilishini kelishsak, o'ng tomonida turuvchi ∇ miqdor differensial operator sifatida ta'sir qiladi, u holda

$$(l, \nabla) = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial}{\partial z}$$

tenglikni olamiz. Unda (25) formulani Gamilton operatori orqali

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = (l, \nabla) f(x_0, y_0, z_0)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

3-mashq. f funksiya to'la R^3 fazoda differensiallanuvchi bo'lsin. $f(x_0, y_0, z_0) = C_0$, $C_0 \in R$, nuqtalar to'plami f funksiyaning sath sirti deyiladi. $grad f(x, y, z)$ vektor sath sirtida yotuvchi va $P(x, y, z)$ nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy Γ silliq egri chiziqqa ortogonal ekanligini ko'rsating.

Ko'rsatma. 8 banddagi mulohazani umumlashtiring.

4-§. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar

Yuqori tartibli xususiy hosilalar. Aralash hosila haqidagi teorema. $G \subset R^n$ ochiq to'plamning barcha nuqtalarida $\partial f(x)/\partial x_i$ xususiy hosila mavjud bo'lsin. Bu hosila x ning funksiyasi sifatida x nuqtaning qandaydir atrofida $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x=x^0}$ hosilaga ega bo'lishi mumkin, qaysiki bu hosila *ikkinchi tartibli xususiy hosila* deb ataladi va

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0), \quad f_{x_j x_i}(x_0), \quad D_{x_j x_i}(x_0), \quad \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i},$$

belgilashlardan biri kabi belgilanadi.

Agar $i = j$ bo'lsa, u holda xususiy hosila uchun

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i^2}$$

belgi tadbiq qilinadi.

Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun (x, y) nuqtada to'rtta ikkinchi tartibli xususiy hosilani yozish mumkin:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

$f_{xy}(x, y)$ va $f_{yx}(x, y)$ lar aralash hosilalar deb ataladi. Umuman olganda ular teng bo'lmasli mumkin.

1-misol.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & agar \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & agar \quad x = y = 0, \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiyada $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ ekanligini ko'rsa-

tamiz. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, ekanligidan,

$x^2 + y^2 \to 0$ da $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dots$

$x^2 + y^2 \to 0$ da $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dots$

bo'ladi, u holda

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f_x(x,0) - f_x(0,0)}{x} = \dots = \lim_{x\to 0}\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \dots$$

bo'ladi. Shunday qilib, $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.

1-teorema (aralash hosila haqida). *Agar $f_{xy}(x,y)$ va $f_{yx}(x,y)$ ikkala aralash hosila (x_0, y_0) nuqtamiz qandaydir atrofida aniqlangan va bu nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$ tenglik o'rinli bo'ladi.*

Isbot. Aytaylik, aralash hosila Π ... to'rtburchakda aniqlangan va (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'lsin. Π to'rtburchakda

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - f(x,y_0) - f(x_0,y) + f(x_0,y_0)$$

funksiyani qaraymiz. Tayinlangan $y = (y_0, y_0 + \eta)$ da $(x_0, x_0 + \dots)$ intervalda

$$\varphi_y(x) = f(x,y) - f(x,y_0).$$

funksiyani qaraymiz. Π $(x_0, x_0 + \dots)$ da differensiallanuvchi va

$$\varphi_y'(x) = f_x(x,y) - f_x(x,y_0).$$

$\varphi(x,y)$ funksiyani

$$\varphi(x,y) = \varphi_y(x) - \varphi_y(x_0),$$

ko'rinishda yozish mumkin. Lagranjning chekli orttirmalar formulasidan foydalanib,

$$\varphi(x,y) = \varphi_y'(x_0 + \theta_1(x - x_0))(x - x_0) =$$

$$= \Delta x\,[f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y) - f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0)],\quad \Delta x = x - x_0,\quad 0 < \theta_1 < 1,$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi y o'zgaruvchi bo'yicha Lagranjning chekli orttirmalar formulasini yana bir marta qo'llab,

$$\varphi(x,y) = \Delta x\Delta y f_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y),\quad \Delta y = y - y_0,\quad 0 < \theta_2 < 1. \qquad (1)$$

ifodani olamiz. Endi

$$c(\tau) = f(x,\tau) - f(x_0,\tau),\quad \tau \in y \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta),$$

deb olamiz. U holda

$$\varphi(x,y) = c(y) - c(y_0) = \frac{dc}{d\tau}(y_0 + \theta_2\Delta y)\Delta y =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_2\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2\Delta y)\Delta y =$$

$$= f_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y),\quad 0 < \theta_3,\quad \theta_4 < 1. \qquad (2)$$

(1) va (2) tengliklardan,

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y).$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ ga intilganda limitga o'tib va (x_0, y_0) nuqtada aralash hosilalarning uzluksizligidan foydalanib,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

tenglikni olamiz.

hosilalari hisoblanganda x_0 *va* x *o'zgaruvchilardan tashqari barcha o'zgaruvchilari tayinlab qo'yilsa u holda umuman olganda ikki o'zgaruvchili funksiya qaraladi va agar ular* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'lsa, ikkala aralash hosila ham* x_0 *nuqtada teng bo'ladi.*

Yuqori tartibli hosilalar induksiya bo'yicha aniqlanadi. Masalan, agar uch o'zgaruvchili $f(x,y,z)$ funksiya bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

Agar $f(x)$ n o'zgaruvchili funksiya bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \tag{3}$$

bo'ladi.

Yuqori tartibli differensiallar. Aytaylik, $u(x)$ funksiya $G \subset R^n$ sohada birinchi va ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$du(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i, \quad x \in G,$$

differensial, $2n$ o'zgaruvchili funksiya, aynan $x_1, \ldots, x_n$ va $dx_1, \ldots, dx_n$.

Agar $dx_1, \ldots, dx_n$ o'zgaruvchilarni tayinlab qo'ysak, u holda $du(x)$ diffe-rensial G sohda uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan x ning funksiyasi bo'ladi. 26 paragrafdagi 3- teoremaga ko'ra [21], $du(x)$ x ning funksiyasi sifatida har bir $x \in G$ nuqtada $du(x)$ differensialga ega bo'ladi. Agar erkli o'zgaruvchilarni orttirmasini $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ lar orqali belgilasak, u holda

$$d(du(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(du(x))\delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{4}$$

bo'ladi. $d(du(x))$ ifoda $dx_1\delta x_1, \ldots, dx_n\delta x_n$ orttirmalarga nisbatan bichiziqli forma bo'ladi. Bu bichiziqli formada $\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_n = dx_n$ deb olib, kvadratik forma deb ataluvchi funksiyaning nuqtadagi *ikkinchi differensialini* olamiz va $d^2u(x)$ orqali belgilaymiz.

Shunday qilib, ikkinchi differensial

$$d^2u(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{5}$$

ko'rinishda bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, barcha uchinchi tartibli xususiy hosi- lalarni uzluksiz deb faraz qilib, $d^2u(x)$ dan birinchi differensialni hisoblash mumkin, so'ngra $\delta x_i = dx_i$ qo'yiladi va olingan uchinchi tartibli birjinsli formani *funksiyaning uchinchi differensiali* deb ataymiz. Uchinchi differensialni $d^3u(x)$ orqali belgilaymiz.

Shunday qilib, uchinchi differensial

$$d^3u(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} dx_i dx_k dx_j$$

ko'rinishda bo'ladi.

$m-$ tartibli xususiy hosilalarni nuqtada uzluksiz deb faraz qilib, induksiya bo'yicha $m-$ tartibli differensial aniqlanadi. Agar $d^{m-1}u(x)$ differensial $dx_1, \ldots, dx_n$ larga nisbatan ning funksiyasi bo'lgan koeffitsientli $m-1$ - tartibli bir jinsli forma sifatida hisoblangan bo'lsa, u holda $d^{m-1}u(x)$ dan birinchi tartibli differensialni hisoblab va $i = \overline{1,n}$ da $\delta x_i = dx_i$ deb olib, $d^m u(x)$ $m-$ tartibli bir jinsli formani olamiz, ya'ni

$$d^m u(x) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}$$

ifodani olamiz.

Ikkinchi tartibli differensial o'zgaruvchilarni almashtirishga nisbatan invariantlik xossasiga ega emasligini ko'rsatamiz. Aytaylik,

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) = F(x),$$

va $\varphi_i(x)$ funksiyalar ikkinchi tartibgacha barcha uzluksiz xususiy hosilalarga ega va $f(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ murakkab funksiya x ning qandaydir atrofida aniqlangan bo'lsin. U holda birinchi differensialning invariantligiga ko'ra,

$$df(x, \varphi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi_j} d\varphi_j(x)$$

tenglikni olamiz.

Ko'paytma va yig'indining differensialini topish qoidasidan foydalanib,

$$d^2 f(x, \varphi(x)) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varphi(x))\right) dx_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi_j}(x, \varphi(x)) d^2 \varphi_j(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x, \varphi(x))}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial \varphi_j} d^2 \varphi_j(x) \qquad (6)$$

tenglikni olamiz. (6) formula (5) formuladan qaysiki, agar erkli o'zgaruvchi bo'lsa nolga aylanuvchi

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_j} d^2 \varphi_j(x)$$

yig'indi borligi hisobiga farq qiladi.

2-izoh. *Agar o'zgaruvchilarni almashtirish chiziqli bo'lsa, u holda* $d^2 x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ *bo'ladi. Shunday qilib,* $d^2 f(x)$ *ikkinchi differensial o'zgaruvchilarni chiziqli almashtirishga nisbatan invariant bo'ladi. Bu barcha tartibdagi differensiallar uchun o'rinli.*

Agar $u(x, y)$ *funksiya ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda aralash hosilalarning tengligi haqidagi teoremadan foydalanib,*

$$d^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} dy dx +$$

$$+ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} dy^2 = u_{xx} dx^2 + 2u_{xy} dx dy + u_{yy} dy^2 \qquad (7)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

3-izoh. *Agar*

$$d = \sum_{i=1}^{n} dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (8)$$

differensial operatorni kiritsak, u holda differensiallarning ifodasi uchun quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$d^2 u(x) = (d^2) u(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 u(x),$$

$$\ldots$$

$$d^m u(x) = (d^m) u(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m u(x)$$

Differensial operatorlarning ko'paytmasi deganda ularni ketma-ket tadbiq qilish tushuniladi. Masalan, agar $D_i = \partial / \partial x_i$ *bo'lsa, u holda*

$$(D_i D_j) u = D_i \left(D_j u \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad D_i D_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \qquad (9)$$

bo'ladi.

(8) ko'rinishdagi differensial operatorlarni qayta ko'paytirganda erkli o'zgaruvchilarning differensiali haqiqiy son sifatida qayta ko'paytiriladi. (9) formuladan foydalanish zarur. Bunda

Endi o'zgaruvchilarni almashtirishlarga doir misollar keltiramiz.

2-misol. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ tenglamada erkli o'zgaruvchini $x=e^t$ ga almashtiring.

Agar $z(t)=y(e^t)$ bo'lsa, u holda murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasini qo'llab,

$$\frac{dz(t)}{dt}=e^t\frac{dy(e^t)}{dx}=x\frac{dy(x)}{dx}$$

tenglikni olamiz, bu yerda $\frac{d}{dt}=x\frac{d}{dx}$.

Shunday qilib,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+y=\frac{d^2z}{dt^2}+z=0$$

Ravshanki, $\frac{d^2z}{dt^2}+z=0$ tenglama oson yechiladi, uning yechimi

$$z=C_1\sin t+C_2\cos t$$

bo'ladi. Shuning uchun, $x>0$ da dastlabki tenglamaning yechimi quyidagi ko'ri- nishda bo'ladi: $y=C_1\sin(\ln x)+C_2\cos(\ln x)$. Tenglamada x ni $-x$ ga almashtirilsa o'z ko'rinishi o'zgarmasligidan, ixtiyoriy $x\in R$, $x\neq 0$ da yechim quyidagi ko'rinishni oladi:

$$y(x)=C_1\sin(\ln|x|)+C_2\cos(\ln|x|).$$

3-misol.

$$\frac{dx}{dt}=y-2kx(x^2+y^2),\quad \frac{dy}{dt}=-x-2ky(x^2+y^2),\ k>0,$$

tenglamalalar sistemasida qutb koordinatasiga o'ting.

Birinchi tenglamani x ga, ikkinchi tenglamani y ga ko'paytirib qo'shamiz. Xuddi shunga o'xshash birinchi tenglamani y ga ko'paytirib undan x ga ko'paytirilgan ikkinchi tenglamani ayiramiz. Natijada, $x^2+y^2>0$ bo'lganda dastlabki tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'lgan yangi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=-2k(x^2+y^2)^2,\quad y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=y^2+x^2. \qquad (1)$$

Lekin, $x^2+y^2=r^2$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Shuning uchun, (1) tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin (26 paragrafdagi 3-misolga qarang) [21]

$$r\frac{dr}{dt}=-2kr^4,\qquad \frac{d\varphi}{dt}=1,\qquad \text{yoki}\quad \frac{dr}{dt}=-2kr^3,\ \frac{d\varphi}{dt}=1. \qquad (2)$$

Bu yerda (2) tenglama oson yechiladi. Demak, yechimni quyidagi ko'rinishda olamiz

$$r=\frac{1}{\sqrt{k(t+t_0)}},\quad \varphi=\varphi_0+t\quad (-t_0<t<\infty).$$

bu yerda t_0 va φ_0 sonlar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

4-misol. y ni erkli o'zgaruvchi, x ni esa noma'lum funksiya deb qabul qilib, $xy''-3(y')^2=x$, tenglamani aylantiring.

$x(y)$ va $y(x)$ - teskari funksiya ekanligidan,

$$\frac{dy}{dx}=y'(x)=\frac{1}{x'(y)},\ \frac{df(x(y))}{dy}=\frac{df(x)}{dx}x'(y)=\frac{1}{y'(x)}\frac{df(x)}{dx},$$

bundan $\frac{d}{dy}=\frac{1}{y'(x)}\frac{d}{dx}$ tenglikni olamiz.

$y'\neq 0$ da $(y')^3$ ga bo'lib, tenglamani aylantiramiz:

$$0=\frac{xy''-3(y')^2}{(y')^3}-\frac{x}{(y')^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{(y')^2}\right)-x(y')^3=$$

2-misol. $x\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ tenglamada erkli o'zgaruvchini $x=e^t$ ga almashtiring.

Agar $z(t)=y(e^t)$ bo'lsa, u holda murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasini qo'llab,

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{dy(e^t)}{dx}\cdot e^t=\frac{dy(x)}{dx}\cdot x$$

tenglikni olamiz, bu yerda $\frac{d}{dt}=x\frac{d}{dx}$.

Shunday qilib,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+y=\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

Ravshanki, $\frac{d^2z}{dt^2}+z=0$ tenglama oson yechiladi, uning umumiy yechimi

$$z=C_1\sin t+C_2\cos t$$

bo'ladi. Shuning uchun, $x>0$ da dastlabki tenglamaning yechimi quyidagi ko'ri- nishda bo'ladi: $y=C_1\sin(\ln x)+C_2\cos(\ln x)$. Tenglamada x ni $-x$ ga almashtirilsa o'z ko'rinishi o'zgarmasligidan, ixtiyoriy $x\in R$, $x\neq 0$ da yechim quyidagi ko'rinishni oladi:

$$y(x)=C_1\sin(\ln|x|)+C_2\cos(\ln|x|).$$

3-misol.

$$\frac{dx}{dt}=y-2kx(x^2+y^2),\quad \frac{dy}{dt}=-x-2ky(x^2+y^2),\ k>0,$$

tenglamalalar sistemasida qutb koordinatasiga o'ting.

Birinchi tenglamani x ga, ikkinchi tenglamani y ga ko'paytirib qo'shamiz. Xuddi shunga o'xshash birinchi tenglamani y ga ko'paytirib

tirib undan x ga ko'paytirilgan ikkinchi tenglamani ayiramiz. Natijada, $x^2+y^2>0$ bo'lganda dastlabki tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'lgan yangi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=-2k(x^2+y^2)^2,\quad x\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=y^2+x^2. \tag{1}$$

Lekin, $x^2+y^2=r^2$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Shuning uchun, (1) tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin (26 paragrafdagi 3-misolga qarang) [21]

$$r\frac{dr}{dt}=-2kr^4,\qquad \frac{d\varphi}{dt}=1,\qquad \text{yoki}\ \frac{dr}{dt}=-2kr^3,\ \frac{d\varphi}{dt}=1. \tag{2}$$

Bu yerda (2) tenglama oson yechiladi. Demak, yechimni quyidagi ko'rinishda olamiz

$$r=\frac{1}{\sqrt{k(t+t_0)}},\quad \varphi=\varphi_0+t\quad (-t_0<t<\infty).$$

bu yerda t_0 va φ_0 sonlar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

4-misol. y ni erkli o'zgaruvchi, x ni esa noma'lum funksiya deb qabul qilib, $x'y'''-3(y'')^2=x$, tenglamani aylantiring.

$x(y)$ va $y(x)$ - teskari funksiya ekanligidan,

$$\frac{dy}{dx}=y'(x)=\frac{1}{x'(y)},\quad \frac{df(x(y))}{dy}=\frac{df(x)}{dx}x'(y)=\frac{1}{y'(x)}\frac{df(x)}{dx},$$

bundan $\frac{d}{dy}=\frac{1}{y'(x)}\frac{d}{dx}$ tenglikni olamiz.

$y'\neq 0$ da $(y')^5$ ga bo'lib, tenglamani aylantiramiz:

$$0=\frac{x'y'''-3(y'')^2}{(x')^5}-\frac{x}{(x')^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y''}{(y')^3}\right)-x(x')^4=$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{y'}\right)\right)-\varphi(x)\cdot\left(-\frac{1}{y'}\right)=-y'\left[\frac{1}{y'}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y'}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\right]+\varphi(x)\cdot\frac{1}{y'}\right]$$

$$=-y'\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y'\right)\cdot\frac{1}{y'}+\varphi(x)\cdot\frac{1}{y'}\right]=-y'\cdot\frac{y''+\varphi(x)y'}{y'}=0$$

Shunday qilib, $y'\neq 0$ da tenglama $y''+\varphi(x)y'=0$ ko'rinishga keladi. Bu R^4 da uzluksiz differensiallanuvchi $\Phi(x,x',x'')$ funksiyali umumiy ko'rinishdagi $x''=\Phi(t,x,x',x'')$ tenglamaning xususiy holidir. Bunday tipdagi tenglamalar oddiy differensial tenglamalar nazariyasida yaxshi o'rganilgan [13].

5-misol. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ deb olib, $u=u(x,y)$ ifodani qutb koordinatasida aylantiring. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$, Laplas tenglamasini faqat qutb radiusi r ga bog'liq bo'lgan yechimini toping.

$$r^2=x^2+y^2,\quad r\,dr=x\,dx+y\,dy,\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\varphi.$$

$$d\varphi=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\varphi}{r}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=\cos^2\varphi\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+$$

$$+\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=\sin^2\varphi\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-$$

$$-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi},\qquad u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}.$$

Aytaylik, $u=v(r)$ faqat r ga bog'liq bo'lgan Laplas tenglamasining yechimi bo'lsin. U holda $u=v(r)$ funksiya

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}=0\quad\text{yoki}\quad\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=0, \tag{3}$$

$$r\frac{dv}{dr}=C_1,\quad v=C_1\ln r+C_2.$$

differensial tenglamaning yechimi bo'lishi kerak, bu yerda C_1 va C_2 - ixtiyoriy o'zgarmaslar.

6-misol.

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,\qquad a>0,\quad -\infty<x,t<+\infty, \tag{4}$$

torning tebranish tengamasida $\xi=x-at$, $\eta=x+at$ almashtirishlarni bajarib, tenglamaning yechimini toping.

Yechish. $w(\xi,\eta)=w(x-at,x+at)=u(x,t)$ bo'lsin. Unda

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{\partial w}{\partial\eta}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)w$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}\cdot z_x+\frac{\partial w}{\partial \eta}\cdot \eta_x,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\right]=\frac{\partial w}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]=\frac{\partial w}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]=$$

$\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \eta}=0$ bo'ladi, bu yerda $\frac{\partial w}{\partial z\,\partial \eta}=0$ tenglamaning yechimi oson topiladi. $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)=0$ ekanligi sababli, $\frac{\partial w}{\partial \eta}=\varphi(\eta)$ bo'ladi, bu yerda $\varphi(\eta)$ - η ning ixtiyoriy uzluksiz funksiyasi.

$\Phi(\eta)$ uning R dagi almashtirilgani bo'lsin. So'ngra, $w=\varphi(\eta)$ tenglamani integrallab, $w=\Phi(\eta)+\Psi(z)$ yechimni olamiz, bu yerda $\Psi(z)$ - ixtiyoriy funksiya.

Agar $\Phi(\eta)$ va $\Psi(z)$ funksiyalarni uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar deb hisoblasak, u holda (4) tenglamaning yechimi quyidagi

$$w(x,y)=\Psi(x+\varphi)+\Phi(x+\varphi)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

7-misol.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \tag{5}$$

differensial tenglamada $u=z$, $v=y+z$ almashtirishlarni bajaring.

Yechish. (5) tenglamani

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1+\frac{\partial z}{\partial y}}=-1 \tag{6}$$

ko'rinishda yozamiz.

$$z=z(u,v(u,v))=w(u,v).$$

bo'lsin, u holda

$$z(x,y)=w(x,y+z(x,y)). \tag{7}$$

bo'ladi.

(7) tenglikning ikkala tomonida x va y bo'yicha xususiy hosilalarni hisoblab,

$$z_x=w_x+w_z z_x,\quad z_y=w_z(1+z_y),\quad z_x=\frac{w_x}{1-w_z},\quad z_y=\frac{w_z}{1-w_z},\quad \frac{1}{1+z_y}=1-w_z,$$

tengliklarni olamiz. Bu ifodalarni (6) tenglamaga olib borib qo'yib,

$$\frac{\partial}{\partial x}w_z=-1,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=-1,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+z_x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=-1,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{w_x}{1-w_z}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=-1,$$

ifodalarga ega bo'lamiz.

8-misol. $n-$ tartibli

$$\Gamma=\begin{vmatrix} a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \dots&\dots&\dots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

determinant a_{ij} o'zgaruvchili n^2 funksiya bo'ladi.

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial a_{ij}}=A_{ij}. \tag{8}$$

ekanligini ko'rsating, bu yerda A_{ij} lar a_{ij} elementlarning to'ldiruvchisi.

Yechish. Determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyamiz:

$$\Gamma=a_{11}A_{11}+\dots+a_{1n}A_{1n}$$

a_i element faqat birinchi qo'shiluvchiga kiradi, bundan tashqari 1 a_i elementga bog'liq emas, shuning uchun $\frac{\partial \Delta}{\partial a_i} = \Delta_i$ bo'ladi (8) Δ tenglikning qolganlari ham shu kabi isbotlanadi.

3-izoh. Δ *determinantning elementlari* $a_{ij} = a_{ij}(t)$ *funksiyalar* α *dan* β *gacha o'zgaruvchi differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. U holda* Δ *determinant* (α, β) *intervalda differensiallanuvchi funksiya bo'ladi. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasidan va (8) formuladan foydalanib, determinantni hosilasini hisoblash uchun qoidani olamiz:*

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(t)$$

bu yerda

$$\Delta_i(t) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t) \frac{da_{ij}(t)}{dt}$$

$\Delta_i(t)$ ni qaysiki, agar Δ determinantning i - satrida turuvchi funksiyalarni ularning hosilalari bilan almashtirganda olingan determinant bo'lishligini ko'rish qiyin emas.

Mustaqil yechish uchun III- bobga doir mashqlar

1. Metrik fazoda bo'sh bo'lmagan ichma-ich joylashgan kompakt to'plar ketma-ketligi hech bo'lmaganda bitta umumiy nuqtaga ega bo'lishligi ko'rsatilsin.

2. To'la metrik fazoda radiusi nolga intiluvchi ichma - ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Markazlarining ketma-ketligi fundamental va bu ketma-ketlikning limiti barcha sharlarda yotuvchi yagona nuqta ekanligini ko'rsating.

3. Ω R^n fazoda chegaralangan to'plam bo'lsin. Ω to'plamning chegarasi R^n fazoda kompakt ekanligini ko'rsating.

4. X metrik fazoning nuqtasining atrofida aniqlangan $f(x)$ funksiya nuqtada yuqoridan (quyidan) yarim uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $S_\delta(x^0)$ shar mavjud bo'lsaki, barcha $x \in S_\delta(x^0)$ lar uchun $f(x) - f(x^0) < \varepsilon$ $\left(f(x) - f(x^0) > \varepsilon\right)$ tengsizlik bajarilsa.

Isbotlansin:

a) $f(x)$ funksiya metrik fazoda kompaktda yuqoridan (quyidan) yarim zluksiz bo'lsa, bu kompaktda yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'ladi;

b) $f(x)$ funksiya metrik fazoda kompaktda yuqoridan (quyidan) yarim uzluksiz bo'lsa, bu kompaktda o'zining eng katta (eng kichik) qiymatlarini qabul qiladi.

5. Ixtiyoriy $\alpha > 0$, $\beta > 0$ larda

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x^2 + y^2\right)^{|x|^\alpha |y|^\beta} = 1$$

tengsizlik bajarilishini isbot qiling.

6. $\sin x^2$ funksiyani $(-\infty, +\infty)$ da tekis uzluksiz bo'lmasligini ko'rsating.

7. R^2 fazoning qandaydir qavariq sohasida $f_x(x,y)$ va $f_y(x,y)$ chega-ralangan xususiy hosilalarga ega $f(x,y)$ funksiya, bu sohada

$$|f(x,y) - f(x',y')| \le C_1|x - x'| + C_2|y - y'|$$

Lipshits shartini qanoatlantirishini va shuning uchun, bu sohada tekis

uzluksiz bo'lishligini ko'rsating.

8. Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya R^2 da uzluksiz birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsin. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ bo'lganda $f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \arctg\frac{y}{x}\right)$ funksiyaning birinchi va ikkinchi differensialini topilsin.

9. $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ $(u,v)\in R^2$ akslantirishlarning yakobianini topilsin. $x=$ const, $y=$ const kesmaning proobrazi topilsin. Akslantirishlar o'zaro bir qiymatli bo'ladimi, aniqlansin.

10. $u=x^2-y^2$, $v=2xy$, $(x,y)\in R^2$ akslantirishlar uchun yakobian, $u=u_0$ va $v=v_0$ to'g'ri chiziqlarning proobrazi topilsin, akslantirishlar o'zaro bir qiymatli bo'ladimi, aniqlang.

11. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ Laplas tenglamasida x va y noma'lum funksiya, x va y larni esa erkli o'zgaruvchilar deb qabul qilib, o'zgaruvchilarni almashtiring.

Nazorat savollari

1. R^n fazo va Metrik fazoni ta'riflang.
2. Metrik fazoda nuqtalar ketma-ketligining yaqinlashishini gapirib bering.
3. Limit nuqtalar. Yopiq to'plamlarni ta'riflang.
4. R^n fazodagi to'g'ri chiziqlar, nurlar va kesmalarni ta'riflang.
5. Funksiyaning nuqtadagi limitini aniqlang.
6. Murakkab funksiyaning uzluksizligi ta'rifini keltiring.
7. Kompakt to'plamda uzluksiz funksiyaning xossalarini keltiring.

IV BOB

KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING EKSTREMUMI

1-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasi

Keyinchalik, ixtiyoriy $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ va $\alpha\in R$ lar uchun

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),\quad \alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n),$$

deb olib, R^n metrik fazo va yana chiziqli fazoni [21] tuzulishini berish qulay bo'ladi. Shunga o'xshash kiritilgan elementlarni qo'shish va elementlarni haqiqiy songa ko'paytirish amallari uchun chiziqli fazoning barcha aksiomalarini oson tekshiriladi. Nol element rolini $0=(0,0,\ldots,0)\in R^n$ vektor bajaradi.

Agar $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$, bo'lsa, u holda ta'rif bo'yicha

$$\Delta x=dx=x-x^0=(x_1-x_1^0,\ldots,x_n-x_n^0)=(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n),$$

$$|\Delta x|=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2}=\rho(x,x^0),$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

1-teorema. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya $U_\delta(x^0)\subset R^n$ sharda m tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x^0+\Delta x\in U_\delta(x^0)$ nuqta uchun shunday $\theta\in(0,1)$ son topiladiki, u uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi (Lagranj formasidagi qoldiq hadli Teylor formulasi):*

$$f(x^0+\Delta x)=f(x^0)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{d^k f(x^0)}{k!}+r_m(x). \tag{1}$$

$$r_m(x) = \frac{1}{m!} d^m f(x^0 + \theta\Delta x)$$

bu yerda $d^m f(x^0 + \theta\Delta x)$ *ifoda* $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ *o'zgaruvchili differensiallarga nisbatan* k *tartibli bir jinsli forma bo'lgan* $f(x)$ *funksiyaning* x^0 *nuqtada hisoblangan* k *tartibli differensiali*

$$d^k f(x^0) = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x^0)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_k}$$

Isboti. Agar nuqta $x^0 + \Delta x \in U(x^0)$ bo'lsa, u holda sharning simmetriyasiga ko'ra, nuqta $x^0 - \Delta x \in U(x^0)$ bo'ladi. Shar qavariq to'plam bo'lganligi sababli, ixtiyoriy $t \in [-1,1]$ kesmada $x^0 + t\Delta x \in U(x^0)$ bo'ladi. Shunga ko'ra, $[-1,1]$ kesmada quyidagi bir o'zgaruvchili funksiya aniqlanadi

$$\varphi(t) = f(x^0 + t\Delta x) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + t\Delta x_n).$$

$\varphi(t)$ funksiya $[-1,1]$ kesmada differensiallanuvchi. Haqiqatdan, murakkab funksiyani hosilasini topish qoidasini qo'llab,

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0 + t\Delta x)}{\partial x_i} \Delta x_i = df(x^0 + t\Delta x)$$

$$= \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x^0 + t\Delta x).$$

ifodani olamiz. Shunga o'xshash

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^0 + t\Delta x)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(x^0 + t\Delta x)$$

$$= \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(x^0 + t\Delta x).$$

Induksiya bo'yicha $k = 1,n$ uchun

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x^0 + t\Delta x)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_k} = d^k f(x^0 + t\Delta x) =$$

$$\left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x^0 + t\Delta x), \tag{2}$$

formula o'rinli bo'ladi.

$\varphi(t)$ funksiyaga Lagranj shaklidagi qoldiq hadli Teylor formulasini qo'llaymiz. Shunday $\theta \in (0,1)$ son topiladiki,

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0) + r_m(t),$$

$$r_m(t) = \frac{t^m}{m!}\varphi^{(m)}(\theta t),$$

bo'ladi. $t = 1$ deb olib,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0) + r_m(1),$$

$$r_m(1) = \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\theta),$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Bu formulaga (2) ifodani qo'yib, $\varphi^{(k)}(t)$ hosila uchun $t = 0$ da (1) formulani olamiz. 1-teorema isbot bo'ldi.

1-izoh. *Ikki o'zgaruvchili* $f(x,y)$ *uchun (1) Teylor formulasi quyidagi oddiy ko'rinishni oladi*

$$f(x,y) = f(x^0,y_0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^k f(x^0,y_0)}{k!} + r_m(x),$$

bu yerda

$$d^{k} f(x^{0}+\theta\Delta x)\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_k}+\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\alpha_{i_1\ldots i_k}(x)\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_k}$$

$$\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^{k} f(x^{0}+\theta\Delta x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_k}+$$

$$r_m(x)=\frac{1}{m!}d^{m} f(x^{0}+\theta\Delta x)+\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\alpha_{i_1\ldots i_m}(x)\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_m}.$$

Natija. *Agar 1-teoremaning shartlari bajarilsa va holda $f(x)$ funksiya uchun Peano shaklidagi qoldiq hadli Teylor formulasi o'rinli bo'ladi. $|\Delta x|\to 0$ da intilganda*

$$f(x)=f(x^{0})+\sum_{k=1}^{m}\frac{d^{k} f(x^{0})}{k!}+o(|\Delta x|^{m}), \tag{3}$$

bo'ladi. bu yerda $|\Delta x|=\sqrt{\Delta x_1^{2}+\Delta x_2^{2}+\cdots+\Delta x_n^{2}}$

Isboti. (1) formuladagi qoldiq hadni qaraymiz

$$r_m(x)=\frac{1}{m!}d^{m} f(x^{0}+\theta\Delta x)=\frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\frac{\partial^{m} f(x^{0}+\theta\Delta x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_m}$$

(4)

Shart bo'yicha $f(x)$ funksiyaning barcha m tartibli hosilalari nuqtada uzluksiz bo'lishligidan

$$\frac{\partial^{m} f(x^{0}+\theta\Delta x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}=\frac{\partial^{m} f(x^{0})}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}+\alpha_{i_1\ldots i_m}(x), \tag{5}$$

bo'ladi. bu yerda $\alpha_{i_1\ldots i_m}(x)$ funksiyalar $|\Delta x|\to 0$ da cheksiz kichik miqdor.

$|\Delta x_i|\le|\Delta x|$ bo'lgani sababli, u holda $|\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_m}|\le|\Delta x|^{m}$. bo'ladi. Binobarin, $|\Delta x|\to 0$ da

$$\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\alpha_{i_1\ldots i_m}(x)\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_m}=o(|\Delta x|^{m}). \tag{6}$$

bo'ladi.

(5) va (6) ifodalarni (4) tenglikka olib borib qo'yib, $|\Delta x|\to 0$ ga intilganda

$$r_m(x)=\frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\frac{\partial^{m} f(x^{0}+\theta\Delta x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_m}+$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\alpha_{i_1\ldots i_m}(x)\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_m}=\frac{1}{m!}d^{m} f(x^{0})+o(|\Delta x|^{m}), \tag{7}$$

qoldiq hadga ega bo'lamiz.

$r_m(x)$ qoldiq had uchun yozilgan (7) ifodani (1) formulaga olib borib qo'yib, (3) formulani olamiz. Natija isbot bo'ldi.

1-mashq. Aytaylik, $F_k(x)$ funksiya $k=\overline{1,n}$ da R^{n} fazoda k – tartibli birjinsli funksiya bo'lsin, ya'ni

$$F_k(x)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\gamma_{i_1\ldots i_k}(x)x_{i_1}\cdots x_{i_k},\ k=\overline{1,n}.$$

va $f(x)$ funksiya 1- teorema shartlarini qanoatlantirsin. $f(x)$ funksiyaning yoyilmasi $|\Delta x|\to 0$ ga intilganda

$$f(x)=f(x^{0})+\sum_{k=1}^{m}F_k(\Delta x)+o\left(|\Delta x|^{m}\right).$$

yagona, shuning uchun

$$F_k(\Delta x)=\frac{1}{k!}d^{k} f(x^{0}),\ k=\overline{1,n}.$$

ekanligini ko'rsating.

Ko'rsatma. Isbot jarayonida bir o'zgaruvchili funksiya uchun mavjud teoremalardan foydalaning.

2-mashq. 1-mashqda natijasidan foydalanib, quyidagi yozilgan

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

ifoda $x = x_0 = 0$ nuqtada Teylor formulasi bo'lishligini ko'rsating.

2-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning shartsiz ekstremumi.

n o'lchovli R^n yevklid fazosining biror D sohasida $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (yoki qisqacha $x(x)$) funksiya berilgan bo'lib, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya x nuqtada o'zining eng katta (mos ravishda eng kichik) qiymatiga erishadi deb aytamiz, agar x nuqta qanday bo'lmasin, $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) tengsizliklar o'rinli bo'lsa.

1-ta'rif. *Agar x_0 nuqtaning shunday $U(x_0) = \{x \in R^n : \rho(x, x_0) < \delta\}$, $\delta > 0$ atrofi mavjud bo'lsaki, barcha $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ uchun $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga (mos ravishda minimumga) ega bo'ladi. $f(x_0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning maksimum (mos ravishda minimumi) qiymati deyiladi.*

2-ta'rif. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ sohada aniqlangan bo'lsin. $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$ nuqta $f(x)$ funksiyaning qat'iy maksimum (mos ravishda qat'iy minimum) nuqtasi deyiladi, agar x^0 nuqtaning shunday $U(x^0)$ atrofi mavjud bo'lsaki, barcha $x \in U(x^0) \setminus \{x^0\}$ lar uchun $f(x) < f(x^0)$ ($f(x) > f(x^0)$) tengsizliklar bajarilsa, $f(x^0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning qat'iy maksimum (mos ravishda qat'iy minimum) qiymati deyiladi.*

Yuqorida keltirilgan ta'riflardagi $x^0 \in D$ nuqta $f(x)$ funksiyaga maksimum (minimum) (1- ta'rifga qarang), qat'iy maksimum (mos ravishda qat'iy minimum) (2- ta'rifga qarang) qiymat beradigan nuqta deb ataladi va funksiyaning maksimum (minimum) qiymati quyidagicha belgilanadi

$$f(x^0) = \max_{x \in D} \{f(x)\}, \quad \left(f(x^0) = \min_{x \in D} \{f(x)\}\right).$$

Funksiyaning maksimumi va minimumi umumiy nom bilan funksiyaning ekstremumi deb ataladi.

1-misol. Quyidagi

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x^2 + y^2 \le 1),$$

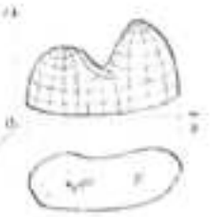
funksiyani qaraylik. Bu funksiya $(0,0)$ nuqtada qat'iy minimumga erishadi. Haqiqatan ham, $(0,0)$ nuqtada ushbu

$$U(0,0) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < \delta^2\}, \ 0 < \delta < 1,$$

atrofi olinsa, u holda ixtiyoriy $(x, y) \in U(0,0) \setminus \{0,0\}$ nuqtalar uchun

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} < f(0,0) = 1,$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Birinchi va ikkinchi ta'riflardan ko'rinib turibdiki, $f(x)$ funksiyaning $x^0 \in D$ nuqtadagi $f(x^0)$ qiymatini uning shu nuqta atrofidagi nuqtalardagi qiymati bilangina solishtiriladi. Shuning uchun, $f(x)$ funksiyaning ekstremumi (maksimumi yoki minimumi) lokal ekstremum (lokal maksimum, lokal minimum) deb ataladi. Shunday qilib, qat'iy maksimum (mos ravishda qat'iy minimum) nuqtalar barcha



9 - rasm

$x \in U_\delta(x^{(0)}) \cap D$, $x \neq x^{(0)}$, lar uchun $\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) < 0$ (mos ravishda $\Delta f > 0$) ifodalar bilan tavsiflanadi (9-rasm).

Agar $x^{(0)}$ nuqtaning shunday $U_\delta(x^{(0)})$ atrofi mavjud bo'lib, barcha $x \in U_\delta(x^{(0)}) \cap D$, $x \neq x^{(0)}$, uchun $f(x) < f(x^{(0)})$ (mos ravishda $f(x) > f(x^{(0)})$) tengsizliklar bajarilsa, u holda $x^{(0)}$ nuqta $f(x)$ funksiyaning oddiy maksimum (mos ravishda oddiy minimum) nuqtasi deb ataladi.

1. Ta'rifdan foydalanib, quyidagi funksiyalarning ekstremum nuqtalari topilsin:

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$; b) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & x_1 \cdot x_2 \neq 0, \\ 1, & x_1 \cdot x_2 = 0; \end{cases}$

c) $D\{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ sohada $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

1-teorema (ekstremumning zaruriy sharti). *Agar differensiallanuvchi funksiya* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar* $x^{(0)}$ *nuqta* $f(x)$ *funksiyaning ekstremum nuqtasi va agar* $x^{(0)}$ *nuqtada* $f(x)$ *funksiyaning* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *xususiy hosilalari mavjud bo'lsa, u holda ular nolga teng bo'ladi:*

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Natija. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $x^{(0)}$ *ekstremum nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning differensiali nolga teng bo'ladi:*

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Aytish lozimki, $f(x)$ funksiyaning $x^{(0)}$ nuqtadadifferensiallanuvchiligidan uning o'sha nuqtada barcha $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ xususiy hosilalarga ega bo'lishi kelib chiqadi. funksiyaning $x^{(0)}$ nuqtada ekstremumga erishishidan teoremaning shartiga ko'ra,

$$f_{x_1}(x^{(0)}) = 0, f_{x_2}(x^{(0)}) = 0, \ldots, f_{x_n}(x^{(0)}) = 0,$$

bo'ladi. Bundan esa $df(x^{(0)}) = 0$ kelib chiqadi. Biroq $f(x)$ funksiyaning biror $x^{(0)} \in R^n$ nuqtada barcha xususiy hosilalarga ega va

$$f_{x_1}(x^{(0)}) = 0, f_{x_2}(x^{(0)}) = 0, \ldots, f_{x_n}(x^{(0)}) = 0,$$

bo'lishligidan, uning $x^{(0)} \in R^n$ nuqtada ekstremumga ega bo'lishi doim ham o'rinli bo'lmaydi (kelib chiqavermaydi). Masalan, R^2 to'plamda $f(x, y) = xy$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $f_x(x, y) = y$, $f_y(x, y) = x$ xususiy hosilalarga ega bo'lib, ular (0,0) nuqtada nolga aylanadi. Ammo $f(x, y) = xy$ funksiya (0,0) nuqtada ekstremumga ega emas (bu funksiyaning grafigi giperbolik paraboloidni tasvirlaydi).

Isboti. Aniqlik uchun $n = 3$ bo'lsin. Agar $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$ nuqta $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa, u holda x_1^0 nuqta bir o'zgaruvchili $f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'ladi. $x^{(0)}$ nuqta $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya aniqlanish sohasining ichki nuqtasi bo'lganligi sababli, x_1^0 nuqta $f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ funksiya uchun aniqlanish sohasining ichki nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun, agar bu nuqtada $\frac{\partial f(x_1^0)}{\partial x}$ hosilasi mavjud bo'lsa, Ferma teoremasiga ko'ra, u nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0$$

bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, bu jarayonni $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ixtiyoriy o'zgaruvchilar uchun ham davom ettirish mumkin.

Agar $f(x)$ funksiya x^* ekstremum nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu nuqtada uning barcha

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

xususiy hosilalari mavjud va isbot qilinganga ko'ra, ularning hammasi nolga teng bo'ladi. Shuning uchun,

$$df(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shu bilan teorema va natija isbot bo'ldi.

2-misol. $z = x^2 + y^2$ funksiyaning ekstremum nuqtasi topilsin.

Yechish. Bu funksiyaning ekstremum nuqtalari $dz = 0$ ni nolga aylantiruvchi nuqtalar ichidan izlanadi. Bizning holda $dz = 2x\,dx + 2y\,dy$ bo'ladi. $dz = 0$ shart yagona $x = 0, y = 0$ nuqtalarda bajariladi.

10-rasm

Haqiqatdan ham, agar $x = y = 0$ bo'lsa, $dz = 0$ bo'ladi. Aksincha, $dz = 0$ bo'lsin, dx, dy differensiallarni ixtiyoriyligidan foydalanib, $dy = 0$ ni tanlaymiz, u holda $0 = dz = 2x\,dx$ bo'ladi va dx ni ixtiyoriyligidan $x = 0$ kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, $y = 0$ ni olamiz. $(0,0)$ nuqtada $z = 0$ ga ega bo'lamiz, lekin boshqa barcha nuqtalarda esa $z = x^2 + y^2 > 0$ bo'ladi. Shuning uchun, $(0,0)$ nuqta $z = x^2 + y^2$ funksiyaning qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi (10-rasm).

Agar alohida nuqtalarda differensiallanmaydigan funksiyalarni kiritish orqali ekstremum qidirilayotgan funksiyalar sinfini kengaytirsak, ekstremumning quyidagi zaruriy shartiga kelamiz.

Agar x^* nuqta $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa, u holda x^* nuqtada har bir xususiy hosila $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nolga teng bo'ladi yoki mavjud emas.

3-misol. $z = x + y$, $x \geq 0$, konusning yuqori pallasini qaraymiz. Ravshanki, $(0,0)$ nuqtada z funksiya minimumga erishadi. Lekin, $(0,0)$ nuqtada $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalar mavjud emas.

3-ta'rif. *$f(x)$ funksiya ekstremumining zaruriy sharti bajarilgan nuqtalar $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari deb ataladi.*

$df(x^*) = 0$ ni nolga aylantiruvchi x^* nuqtalar esa $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi deyiladi.

$df(x^*) = 0$ o'shart $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

shartga ekvivalent.

2-izoh. *Kritik nuqtani mavjudligi funksiyani ekstremumini mavjudligini kafolatlamaydi.*

4-misol. $(0,0)$ nuqta $f(x,y) = xy$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi, lekin $(0,0)$ nuqta bu ekstremum nuqtasi bo'la olmasligini ko'rsating.

$df(x,y) = y\,dx + x\,dy$ ekanligidan $df(0,0) = 0$ bo'ladi. $(0,0)$ nuqta $f(x,y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi. Lekin ixtiyoriy $\delta > 0$

uchun (δ,δ) va $(\delta,-\delta)$ nuqtalar $S_\varepsilon(0,0)$ doira ichida yotadi va

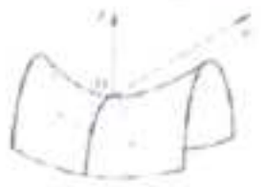
$f(\delta,\delta)=\delta^2>f(0,0)=0$, $f(\delta,-\delta)=-\delta^2<f(0,0)=0$

bo'ladi. Shuning uchun, $(0,0)$ nuqta $z=xy$ funksiyaning statsionar nuqtasi emas. $z=xy$ funksiyaning grafigi 11-rasmda tasvirlangan.



11-rasm

5-misol. $z=x^2-y^2$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bu misolda ham 1-misoldagidek ish tutamiz. $dz=0$ shart yana $(0,0)$ nuqtada bajariladi va bu nuqtada $z=0$ bo'ladi. Biroq ixtiyoriy $x\neq 0$ uchun $y=0$ da $z>0$ ga ega bo'lamiz, ixtiyoriy $y\neq 0$ uchun $x=0$ nuqtada $z<0$ bo'ladi, ya'ni funksiya $(0,0)$ nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida bir vaqtning o'zida ham musbat, ham manfiy qiymatlarni qabul qiladi. $z=xy$ funksiya uchun $(0,0)$ nuqta statsionar nuqta bo'ladi. Lekin $(0,0)$ nuqta ekstremum nuqta bo'lmaydi va $z=x^2-y^2$ funksiya umuman olganda ekstremum nuqtaga ega emas (12-rasm).



12-rasm

1-lemma. *Agar $\varphi(t)$ bir o'zgaruvchili funksiya $t=0$ da birinchi va ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda $\varphi'(0)=0$ bo'ladi.*

Isboti. $t=0$ $\varphi(t)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'lsin. U holda shunday $\varepsilon>0$ son topiladiki, barcha $|t|<\varepsilon$ lar uchun $\varphi(t)-\varphi(0)\geq 0$ tengsizlik bajariladi. $\varphi(t)$ funksiyaning yoyilmasi uchun Peano shaklidagi qoldiq hadli Teylor formulasini qo'llab, $\varphi(0)=0$ ekanligidan foydalanib, $t\to 0$ ga intilganda

$$0\leq\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t^2}=\frac{1}{t^2}\left|\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{\varphi''(0)}{2}t^2+o(t^2)\right|\to\frac{1}{2}\varphi''(0)+o(1),$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu tengsizlikdan $t\to 0$ ga intilganda limitga o'tib, $\varphi''(0)\geq 0$ tengsizlikni olamiz. 1-lemma isbot bo'ldi.

2-teorema (minimumning zaruriy sharti). *Aytaylik, $z=f(x)$ funksiya $x=x^0$ minimum nuqtasining atrofida birinchi va ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. Unda*

$$df(x^0)=0,\quad d^2f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j\geq 0,$$

ifoda o'rinli bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $x=x^0$ nuqta $f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'lsin. Unda shunday $S(x^0)$ shar topiladiki, barcha $x\in S(x^0)$ lar uchun $f(x)-f(x^0)\geq 0$ tengsizlik bajariladi. $x\in R^n$ va $x\neq x^0$ bo'lsin, u holda $|\Delta x|=\rho(x,x^0)>0$ bo'ladi. Ixtiyoriy t da $|t|\leq\frac{\rho}{|\Delta x|}$ $(x^0+t\Delta x)\in S(x^0)$ va shuning uchun $\varphi(t)=f(x^0+t\Delta x)-f(x^0)\geq 0$ bo'ladi. $\varphi(t)$ funksiya $t=0$ atrofida aniqlangan va $t=0$ nuqtada minimumga ega bo'ladi. Oldingi banddagi $\varphi(t)$ va $\varphi''(t)$ uchun yozilgan formulalarga ko'ra, $\varphi(t)$ funksiya $t=0$ nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega, bundan tashqari

$$\varphi'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}dx_i=df(x^0),$$

ifodani olamiz. Shunga o'xshash

$$\varphi''(0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j=d^2f(x^0)$$

1-lemmaga ko'ra, $\varphi''(0) \geq 0$ tengsizlik bajarilishi kerak, bundan $d^2 f(x^0) \geq 0$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

3-izoh. *Xuddi shu kabi, $x^0 \in R^n$ maksimum nuqtaning atrofida ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun*

$$df(x^0) = 0, \quad d^2 f(x^0) < 0,$$

shartlar bajariladi.

$df(x^0) = 0$, $d^2 f(x^0) \geq 0$, zaruriy shartlar, lekin $x^0 \in R^n$ minimum nuqta bo'lishi uchun yetarli emas. Masalan, $f(x,y) = x^3 + y^3$ funksiya yagona $x = y = 0$ statsionar nuqtaga ega va u nuqtada $d^2 f(0,0) = 0$ bo'ladi. Demak, $f(x,y)$ funksiya $(0,0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Ekstremumning yetarli sharti. Biz yuqorida $f(x)$ funksiyaning $x^{(0)}$ nuqtada ekstremumga erishishining zaruriy shartini ko'rib o'tdik. Endi funksiya ekstremumining yetarli shartini o'rganamiz.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x^{(0)} \in R^n$ nuqtaning biror

$$U_\varepsilon(x^{(0)}) = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R : \rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2 + \ldots + (x_n - x_n^{(0)})^2} < \varepsilon\right\}$$

atrofida berilgan bo'lsin. Ushbu $\Delta f = f(x) - f(x^{(0)})$ ayirmani qaraylik. Ravshanki, bu ayirma $x^{(0)}$ nuqtaning $U_\varepsilon(x^{(0)})$ atrofida o'z ishorasini saqlasa, ya'ni har doim $\Delta f \geq 0, (\Delta f \leq 0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x^{(0)}$ nuqtada minimumga (mos ravishda maksimumga) erishadi. Agar bu ayirma $x^{(0)}$ nuqtaning har qanday $U_\varepsilon(x^{(0)})$ atrofida o'z ishorasini saqlamasa, u holda $f(x)$ funksiya $x^{(0)}$ nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi. Demak, masala yuqoridagi ayirma o'z ishorasini saqlaydigan $U_\varepsilon(x^{(0)})$ atrof mavjudmi yoki yo'qmi, shuni aniqlashdan iborat. Algebra

kursidan ma'lum bo'lgan bir necha ta'riflarni eslatib o'tamiz.

Bizga

$$A(x,x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{8}$$

$$df(x^{(0)}) = 0, \quad d^2 f(x^{(0)}) > 0$$

kvadratik formasi (shakli) berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. *(8) kvadratik forma musbat (mos ravishda manfiy) aniqlangan deyiladi, agarda ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ noldan farqli nuqtalar uchun $A(x,x) > 0$, ($A(x,x) < 0$) mos ravishda $A(x,x) = 0$ bo'lsa.*

Agar kvadratik forma musbat yoki manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda bunday kvadratik forma aniqlangan kvadratik forma deb ataladi.

5-ta'rif. *Agar (8) kvadratik forma bir vaqtning o'zida ham musbat, ham manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda bunday kvadratik forma aniqlanmagan kvadratik forma deb ataladi.*

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \Delta x_2 = x_2 - x_2^0, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_n^0, x_i = \frac{\Delta x_i}{\rho}, (i = 1,2,\ldots,n).$$

kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsin. Avvalo yuqoridagi belgilashlardan

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}, \; x_i = \frac{\Delta x_i}{\rho}, (i = 1,2,\ldots,n).$$

tengliklardan $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ ekanligini topamiz. Ma'lumki, R^n fazoda

$$S_1(0) = S_1(0,0,\ldots,0) = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\right\}$$

Markazi $0 = (0,0,\ldots,0)$ nuqtada, radiusi 1 ga teng bo'lgan sferani

ifodalaydi. Sfera yopiq chegaralangan to'plam. Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra, shu sferada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya uzluksiz funksiya sifatida chegaralangan, xususan quyidan chegaralangan bo'ladi:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > C, \quad (C = const)$$

Agar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlanganligini e'tiborga olsak, unda $C > 0$ bo'lishini topamiz. Ikkinchi tomondan Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra, bu $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiya sferada o'zining aniq quyi chegarasiga erishadi, ya'ni biror $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in S(0)$ nuqta uchun

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \min f(x_1, \ldots, x_n)$$

bo'ladi. Yana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formani musbat aniqlanganligini e'tiborga olsak, $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) > 0$ ekanligini topamiz. Demak, $S(0)$ sferada

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > C > 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

bo'ladi. Endi $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ yig'indini baholaymiz. Koshi-Bunyankovskiy tengsizligidan foydalanib,

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) x_i\right| \le \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

topamiz. Ma'lumki, $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$ intilganda barcha $a_{ij} \to 0$

nolga intilishidan foydalanib, x nuqtaning atrofini yetarlicha kichik qilish hisobiga $\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right| < \frac{C}{2}$ tengsizlikka erishish mumkin. Demak,

$$A = \frac{C}{2}\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right|$$

ifodadan

$$A = \frac{C}{2}\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right| > \frac{C}{2}\left(C - \frac{C}{2}\right) = \frac{C^2}{4} > 0$$

natijani olamiz.

Ma'lumki, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ bo'lsa, har qanday kvadratik forma uchun $f(0,0,\ldots,0) = 0$ bo'ladi. Endi boshqa nuqtalarni qaraylik. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1. Barcha $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 0$ nuqtalar uchun $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ bo'ladi. Bu holda kvadratik forma musbat aniqlangan deyiladi.

2. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 0$ nuqtalar uchun $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ bo'ladi. Bu holda kvadratik forma manfiy aniqlangan deyiladi.

3. Ba'zi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtalar uchun $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ bo'lib, ba'zi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtalar uchun $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ bo'sa, u holda kvadratik forma *noaniq* forma deb ataladi.

4. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \ge 0$ nuqtalar uchun $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$ bo'ladi va shunday $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtalar ham borki, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ bo'lsa, u holda $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yarim musbat aniqlangan kvadratik forma deb ataladi.

5. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \ge 0$ nuqtalar uchun $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$ bo'ladi va ular

ifodalaydi. Sfera yopiq chegaralangan to'plam. Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra, shu sferada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya uzluksiz funksiya sifatida chegaralangan, xususan quyidan chegaralangan bo'ladi:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > C, \quad (C = const)$$

Agar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlanganligini e'tiborga olsak, unda $C > 0$ bo'lishini topamiz. Ikkinchi tomondan Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra, bu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya sferada o'zining aniq quyi chegarasiga erishadi, ya'ni biror $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in S(0)$ nuqta uchun

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \min f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

bo'ladi. Yana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formani musbat aniqlanganligini e'tiborga olsak, $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) > 0$ ekanligini topamiz. Demak, $S(0)$ sferada

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \geq C > 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

bo'ladi. Endi $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ yig'indini baholaymiz. Koshi-Bunyankovskiy tengsizligidan foydalanib,

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) x_i\right| \leq \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

topamiz. Ma'lumki, $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$, intilganda barcha $a_{ij} \to 0$

nolga intilishidan foydalanib, x nuqtaning atrofini yetarlicha kichik qilish hisobiga $\left|\sum a_{ij}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlikka erishish mumkin. Demak,

$$A = \frac{\varepsilon^2}{2}\left|\sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_{ij} x_i x_j\right|$$

ifodadan

$$A = \frac{\varepsilon^2}{2}\left|\sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_{ij} x_i x_j\right| > \frac{\varepsilon^2}{2}\left(C - \frac{C}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2 C}{4} > 0$$

natijani olamiz.

Ma'lumki, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ bo'lsa, har qanday kvadratik forma uchun $f(0,0,\ldots,0) = 0$ bo'ladi. Endi boshqa nuqtalarni qaraylik. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1. Barcha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nuqtalar uchun $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ bo'ladi. Bu holda kvadratik forma musbat aniqlangan deyiladi.

2. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 0$ nuqtalar uchun $A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ bo'ladi. Bu holda kvadratik forma manfiy aniqlangan deyiladi.

3. Ba'zi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtalar uchun $A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ bo'lib, ba'zi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtalar uchun $A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ bo'sa, u holda kvadratik forma *noaniq* forma deb ataladi.

4. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$ nuqtalar uchun $A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ bo'ladi va shunday $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtalar ham borki, $A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ bo'lsa, u holda $A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yarim musbat aniqlangan kvadratik forma deb ataladi.

5. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$ nuqtalar uchun $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$ bo'ladi va ular

orasida shunday $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtalar ham borki, $A(x) - A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ bo'lsa, u holda $A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yarim *manfiy aniqlangan* kvadratik forma deb ataladi.

Ravshanki, $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi $x^{(0)}$ nuqta statsionar nuqta bo'ladi, shu holda va faqat shu holdaki, agar $\frac{df(x^{(0)})}{dx_i} = 0, \; i = \overline{1, n}$ bo'lsa.

1-teoremaning natijasiga ko'ra, $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi $x^{(0)}$ ekstremum nuqta statsionar nuqta bo'ladi, teskarisi umuman olganda o'rinli emas, ya'ni $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi har qanday $x^{(0)}$ statsionar nuqta ekstremum nuqta bo'lavermaydi.

2-teorema (ekstremumning yetarli sharti). *Aytaylik, $f(x)$ funksiya aniqlangan hamda $x^{(0)}$ nuqtaning qandaydir atrofida ikkinchi tartibli xosilaga ega bo'lsin. $x^{(0)}$ nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin. U holda, agar*

$$A(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (9)$$

kvadratik forma, ya'ni $f(x)$ funksiyaning $x^{(0)}$ nuqtadagi ikkinchi tartibli differensiali $d^2 f(x^{(0)})$ musbat aniqlangan kvadratik forma (mos ravishda manfiy aniqlangan kvadratik forma) bo'lsa, u holda $x^{(0)}$ nuqta $f(x)$ funksiyaning qat'iy minimum (mos ravishda $f(x)$ funksiyaning qat'iy maksimum) nuqtasi bo'ladi; agarda $d^2 f(x^{(0)})$ aniqlanmagan kvadratik forma bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x^{(0)}$ nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isboti. $n = 2$ bo'lganda oldingi paragrafdagi (3) foydalanamiz.

$df(x^{(0)}) = 0$ ekanligini hisobga olib, $\Delta x \to 0$ da

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} d^2 f(x^{(0)}) + \alpha(|\Delta x|) \cdot |\Delta x|^2,$$

bu yerda $|\Delta x| = \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n$.

Aytaylik,

$$d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$$

musbat aniqlangan kvadratik forma bo'lsin. 2- lemmaga ko'ra, shunday musbat γ son mavjudki, $d^2 f(x^{(0)}) \geq \gamma |\Delta x|^2$ bo'ladi. Bu tengsizlikni (1) formulaga tadbiq qilib,

$$f(x) - f(x^{(0)}) \geq \frac{\gamma}{2} |\Delta x|^2 + \alpha(|\Delta x|) \cdot |\Delta x|^2 = \frac{\gamma}{2} |\Delta x|^2 (1 + \alpha(\Delta x)), \qquad (10)$$

bu yerda $\Delta x \to 0$ da $\alpha(\Delta x) \to 0$ intiladi, bu yerdan, shunday $S_1(x^{(0)})$ shar topiladiki, ixtiyoriy $x \in S_1(x^{(0)})$ uchun, $|\alpha(\Delta x)| < \frac{1}{2}$ tengsizlik bajariladi.

Unda (10) formuladan ixtiyoriy $x \in S_1(x^{(0)})$ uchun,

$$f(x) - f(x^{(0)}) \geq \frac{\gamma}{2} |\Delta x|^2 (1 - |\alpha(\Delta x)|) > \frac{\gamma}{4} |\Delta x|^2 > 0$$

tengsizlikni bajarilishi kelib chiqadi. Binobarin, $x^{(0)}$ nuqta $f(x)$ funksiyaning qat'iy maksimum nuqtasi bo'ladi.

Agar $d^2 f(x^{(0)})$ kvadratik forma aniqlanmagan bo'lsa, u holda minimumning $d^2 f(x^{(0)}) \geq 0$ zaruriy sharti bajarilmaydi (2-teoremaga qarang). Shuning uchun, $x^{(0)}$ nuqta $f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'lmaydi. Shunga o'xshash $x^{(0)}$ nuqta $-f(x)$ funksiyaning ham minimum nuqtasi bo'lmaydi, maksimum nuqtasi bo'ladi.

Mazkur teoremani amaliyotga tadbiq etishda tabiiy savol tug'iladi:

kvadratik formani musbat yoki manfiy aniqlanganligini qanday aniqlash mumkin? Shu maqsadda algebra kursida isbot qilinadigan, kvadratik formani musbat va manfiyligi haqidagi Silvestr nomi bilan ataluvchi kriteriyani keltiramiz. U quyidagicha ifoda qilinadi

6-ta'rif. *Quyidagi*

$$A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun quyidagi

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

shartni bajarilishi zarur va yetarli.

$A(x)$ kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, $-A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} (-a_{ij}) x_i x_j$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'sa, ya'ni determinantning ma'lum xossasidan foydalanib, kvadratik formaning quyidagi manfiy aniqlanganlik haqidagi kriteriyasini keltiramiz.

7-ta'rif. *(11) kvadratik forma, manfiy aniqlangan bo'lishi uchun quyidagi*

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

shartni bajarilishi zarur va yetarli.

2-lemma. *Agar $A(x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsa, u holda shunday musbat α son topiladiki, $A(x) \geq \alpha \|x\|^2$, bu yerda $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$*

Isboti. $S = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : \|x\| = 1\}$ birsferada $A(x)$ kvadratik formani qaraymiz. $0 \notin S$, kvadratik forma musbat aniqlanganligi sababli, u holda ixtiyoriy $x \in S$ nuqtada $A(x) > 0$ bo'ladi.

Ravshanki, S R^n fazoda yopiq chegaralangan to'plam. S kompakt to'plamda uzluksiz bo'lgan $A(x)$ qandaydir $x_0 \in S$ nuqtada S dagi o'zining eng kichik qiymatini qabul qiladi (Veyershtrass teoremasi). Shuning uchun, $\alpha = A(x_0)$ deb olib, $\alpha > 0$ ni olamiz va ixtiyoriy $x \in S$ nuqta uchun $A(x) \geq \alpha$ tengsizlik bajariladi.

Agar $x \neq 0$ bo'lsa, u holda $\frac{x}{\|x\|}$ nuqta S sferada yotadi. Shuning uchun,

$$A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \alpha,$$

bo'ladi. Kvadratik formaning bir jinsliligidan foydalanib,

$$\frac{1}{\|x\|^2} A(x) = A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \alpha,$$

ifodani olamiz. Lemma isbot bo'ldi.

Endi (10) kvadratik formaga qo'yilgan shartlarni aniq ko'rinishdagi ikkinchi tartibli xususiy hosilasi orqali ifodalab, 2-teoremani ikki o'zgaruvchili (ya'ni $n = 2$) bo'lgan hol uchun keltiramiz.

3-teorema. *Aytaylik, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtaning qandaydir*

kvadratik formani musbat yoki manfiy aniqlanganligini qanday aniqlash mumkin? Shu maqsadda algebra kursida isbot qilinadigan, kvadratik formani musbat va manfiyligi haqidagi Silvestr nomi bilan ataluvchi kriteriyani keltiramiz. U quyidagicha ifoda qilinadi:

6-ta'rif. *Quyidagi*

$$A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n \qquad (11)$$

kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun quyidagi

$$a_{11} > 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

shartni bajarilishi zarur va yetarli.

$A(x)$ kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, $-A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} (-a_{ij}) x_i x_j$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'sa, ya'ni determinantning ma'lum xossasidan foydalanib, kvadratik formaning quyidagi manfiy aniqlanganlik haqidagi kriteriyasini keltiramiz.

7-ta'rif. *(11) kvadratik forma, manfiy aniqlangan bo'lishi uchun quyidagi*

$$a_{11} < 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

shartni bajarilishi zarur va yetarli.

2-lemma. *Agar $A(x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsa, u holda shunday musbat m son topiladiki, $A(x) \geq m\|x\|^2$ bu yerda $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.*

Isboti. $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$ birlik sferada $A(x)$ kvadratik formani qaraymiz. $0 \notin S$. kvadratik forma musbat aniqlanganligi sababli, u holda ixtiyoriy $x \in S$ nuqtada $A(x) > 0$ bo'ladi.

Ravshanki, S R^n fazoda yopiq chegaralangan to'plam. S kompakt to'plamda uzluksiz bo'lgan $A(x)$ qandaydir $x_0 \in S$ nuqtada S dagi o'zining eng kichik qiymatini qabul qiladi (Veyershtrass teoremasi). Shuning uchun, $m = A(x_0)$ deb olib, $m > 0$ ni olamiz va ixtiyoriy $x \in S$ nuqta uchun $A(x) \geq m$ tengsizlik bajariladi.

Agar $x \neq 0$ bo'lsa, u holda $\frac{x}{\|x\|}$ nuqta S sferada yotadi. Shuning uchun,

$$A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq m,$$

bo'ladi. Kvadratik formaning bir jinsliligidan foydalanib,

$$\frac{1}{\|x\|^2} A(x) = A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq m,$$

ifodani olamiz. Lemma isbot bo'ldi.

Endi (10) kvadratik formaga qo'yilgan shartlarni aniq ko'rinishdagi ikkinchi tartibli xususiy hosilasi orqali ifodalab, 2-teoremani ikki o'zgaruvchili (ya'ni $n = 2$) bo'lgan hol uchun keltiramiz.

3-teorema. *Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtaning qandaydir*

atrofida aniqlangan va ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin hamda (x_0,y_0) *nuqta* $f(x,y)$ *funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin, ya'ni*

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0.$$

U holda, agar (x_0,y_0) *nuqtada*

$$f_{xx}''f_{yy}''-(f_{xy}'')^2>0 \qquad (12)$$

bo'lsa, u holda (x_0,y_0) *nuqta* $f(x,y)$ *funksiyaning qat'iy ekstremum nuqtasi bo'ladi, aynan: agar* (x_0,y_0) *nuqtada* $f_x'=0,\ f_y'=0$ *bo'lsa (12) shartdan* (x_0,y_0) *nuqtada* $f_{xx}''\neq 0$ *bo'lishligi kelib chiqadi. u holda* $f(x,y)$ *funksiya qat'iy maksimumga, agar* (x_0,y_0) *nuqtada* $f_{xx}''<0$ *bo'lsa, u holda* $f(x,y)$ *funksiya qat'iy minimumga erishadi.*

Agar (x_0,y_0) *nuqtada*

$$f_{xx}''f_{yy}''-(f_{xy}'')^2<0 \qquad (13)$$

bo'lsa, u holda (x_0,y_0) *nuqtada* $f(x,y)$ *funksiyaning ekstremumi yo'q. Va nihoyat, agar* (x_0,y_0) *nuqtada*

$$f_{xx}''f_{yy}''-(f_{xy}'')^2=0 \qquad (14)$$

bo'lsa, u holda (x_0,y_0) *nuqtada* $f(x,y)$ *funksiyaning ekstremumi bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Umuman olganda, bu holda funksiyani ekstremumga tekshirish jarayoni davom ettiriladi.*

Haqiqatdan, agar $f_{xx}''\neq 0$ bo'lsa, u holda (x_0,y_0) nuqtada (11) kvadratik formani bizning holimizda quyidagicha yozish mumkin.

$$A(dx,dy)=f_{xx}''+2f_{xy}''dxdy+f_{yy}''dy^2=$$

$$=\frac{1}{f_{xx}''}\left[\left(f_{xx}''dx+f_{xy}''dy\right)^2+\left(f_{xx}''f_{yy}''-\left(f_{xy}''\right)^2\right)dy^2\right]. \qquad (15)$$

Bu yerda va quyida keltiriladigan xususiy hosilalar (x_0,y_0) nuqtada olingan. Bevosita amin bo'lamizki, (12) shart bajarilganda, (15) formulada kvadrat qavs ichidagi ifoda $dx^2+dy^2>0$ holda musbat bo'ladi, ya'ni $f(dx,dy)$ aniqlangan kvadratik forma bo'ladi, aynan: $f_{xx}''>0$ bo'lganda musbat aniqlangan, $f_{xx}''<0$ bo'lganda esa manfiy aniqlangan. Bu albatta yuqorida keltirilgan Silvestr kriteriyasidan kelib chiqadi. Birinchi holda 2-teoremaga ko'ra, (x_0,y_0) nuqta qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi, ikkinchi holda esa, qat'iy maksimum nuqtasi bo'ladi.

Agarda (13) shart bajarilgan va $f_{xx}''\neq 0$ bo'lganda edi, u holda $dy=0, dx\neq 0$ bo'lganda, (15) ifodadan $\operatorname{sgn} f(dx,0)=\operatorname{sg} f_{xx}''$ tenglikka, $dx=-f_{xy}''dy=f_{xx}''dy$ bo'lganda esa, $\operatorname{sgn} f(f_{xy}''-f_{xx}'',f_{xx}'')=-\operatorname{sg} f_{xx}''$ tenglikka ega bo'lamiz. bu yerdan $f(dx,dy)$ kvadratik formani (13) shart bajarilganda aniqlanmagan kvadratik forma bo'lishliligi kelib chiqadi. Demak, $f_{xx}''\neq 0$ va $f_{xx}''f_{yy}''-(f_{xy}'')^2\neq 0$ bo'lgan hollar to'la hal qilindi. $f_{xx}''=0$, $f_{xy}''\neq 0$, va $f_{xx}''f_{yy}''-(f_{xy}'')^2\neq 0$ bo'lgan hol shunga o'xshash tadqiq qilinadi.

Agarda $f_{xx}''=f_{xy}''=0$ bo'lib, lekin avvalgidek $f_{xx}''f_{yy}''-(f_{xy}'')^2\neq 0$ bo'lsa, u holda ravshanki, $f_{yy}''\neq 0$ bo'ladi, binobarin bu hol uchun (13) shart bajariladi va kvadratik forma $f(dx,dy)=2f_{xy}''dxdy$ bo'ladi. Bu yerdan darhol ko'rinadiki, $f(dx,dy)$ kvadratik forma qilingan farazlarda aniqlanmagan bo'ladi yoki $f(dx,dy)=-\operatorname{sgn} f(dx,-dy)$ bo'ladi. Shuning uchun, boshida dx,dy larni bir xil ishora bilan olish yetarli, keyin esa kvadratik formani har xil ishorali qiymatini olish maqsadida.

dx, dy larni har xil ishora bilan olish kerak bo'ladi. 2-teoremaga asosan bu holda (x_0, y_0) estremum nuqta bo'lmaydi.

Va nihoyat, $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ bo'lgan hol $f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 \geq 0$ tarafga mos kelmaydi. Shunday qilib, $f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$ tengsizlik bajarilgandagi barcha mumkin bo'lgan hollar batafsil qarab chiqildi.

Isbotni yakunlash uchun misol orqali (14) munosabatni qachon o'rinli bo'lishligini, ya'ni ekstremum bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkinligini ko'rsatish biz uchun yetarli.

6-misol. Quyidagi funksiyani

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8xz + 5yz + 9z^2$$

ekstremumga tadqiq qiling.

Yechish. $f(x,y,z)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani tuzib olamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 4z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 10y + 8z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4x + 8y + 18z = 0$$

Bu sistemaning determinanti

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 = 0.$$

Shuning uchun bir jinsli sistemaning yagona yechimi yechib. $x = y = z = 0$ bo'ladi.

Demak, $f(x,y,z)$ funksiya yagona $(0,0,0)$ statsionar nuqtaga ega bo'ladi. $d^2 f(0,0,0)$ ni topamiz.

$$d^2 f(0,0,0) = 2dx^2 + 4dxdy + 8dxdz + 16dydz + 10dy^2 + 18dz^2$$

ifodaga ega bo'lamiz.

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 16 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 = 0,$$

bo'ladi, u holda Silvestr kriteriyasiga asosan, $d^2 f(0,0,0)$ musbat aniqlangan kvadratik forma. Unda $(0,0,0)$ nuqta $f(x,y,z)$ funksiyaning qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi.

1-masala. (11) kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki uning bosh minorlari uchun quyidagi shart $\Delta_k (-1)^k > 0, \ k = \overline{1,n}$ bajarilishini ko'rsating.

Ko'rsatma. $-a(x)$ kvadratik forma musbat aniqlanishi uchun Silvestr kriteriyasidan foydalanish kerak.

2-masala. (x_0, y_0) nuqtaning atrofida ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiya uchun

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0,$$

$$f_{xx}''(x_0, y_0) - f_{xy}''(x_0, y_0) f_{yy}''(x_0, y_0) < 0,$$

shartlar (x_0, y_0) nuqta $f(x,y)$ funksiyaning qat'iy minimum nuqtasi bo'lishi uchun yetarli ekanligini ko'rsating.

7-misol. $z = x^2 + 2y + y^2$ funksiya uchun $(0,0)$ nuqta statsionar nuqta bo'ladi va unda $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 2$ bo'ladi va demak, (14) shart bajariladi. $z = (x+y)^2$ ekanligini anglagan holda, deyarli hamma joyda $z > 0$ ekanligini ko'ramiz. bundan tashqari $x + y = 0$ to'g'ri chiziqda $z = 0$ bo'ladi, shuning uchun $(0,0)$ nuqta ekstremum nuqtasi bo'ladi (to'g'risi

qat'iy ekstremum nuqtasi emas).

8-misol. $z=y^2$ funksiya uchun ham $(0,0)$ nuqta statsionar nuqta bo'ladi, shuning uchun (14) shart bajariladi. Biroq, bu funksiyani ifodalovchi x va y lar toq darajada bo'lganligi sababli, funksiya nolning ixtiyoriy atrofida ishorasini o'zgartiradi, demak, $(0,0)$ nuqta ekstremum nuqtasi emas.

9-misol. $a)\ z=x^2+y^2$, $b)\ z=-x^2-y^2$, $c)\ z=x^2-y^2$ funksiyalarni qaraymiz. $(0,0)$ nuqta har bir funksiya uchun statsionar nuqta bo'ladi va bu nuqtada har bir funksiya uchun $f_x=f_y=0$ tenglik bajariladi. $(0,0)$ nuqta $a)$ funksiya uchun minimum nuqta, $b)$ funksiya uchun maksimum nuqta va $c)$ funksiya uchun ekstremum nuqta bo'lmasligini ko'rish qiyin emas. As'lda uchala holda ham $\Delta(0,0)=0$ bo'ladi, lekin $a)$ holda $(0,0)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida, $(0,0)$ nuqtaning o'zidan tashqari) funksiyaning qiymati musbat, $b)$ holda manfiy va $c)$ holda esa $z=x^2-y^2$ funksiya koordinata boshining ixtiyoriy yaqinida musbat bo'ladi (masalan, $x\neq 0, y=0$) nuqtalarda), manfiy (masalan, $x=0, y\neq 0$ nuqtalarda) qiymatlarni qabul qiladi.

Endi shartsiz ekstremum mavzusiga doir turli misollarni ko'rib o'taylik.

10-misol. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$ uch o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish. $f(x,y,z)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani tuzib olamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y+1=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z-2=0.$$

uni yechib, $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=1$ nuqtalarga ega bo'lamiz.

Endi $(x_0+\alpha,y_0+\beta,z_0+\gamma)$ $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ nuqtada kvadratik formani tuzib olamiz. Bundan

$$f_{x^2}=2,\ f_{xy}=-1,\ f_{xz}=0,\ f_{y^2}=2,\ f_{yz}=0,\ f_{z^2}=2$$

larga ega bo'lamiz. $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ nuqtada $a_{11}=2$, $a_{12}=-1$, $a_{13}=0$, $a_{22}=2$, $a_{23}=0$, $a_{33}=2$

$$a_1=2>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=6>0$$

$a_1>0, \Delta_2>0, \Delta_3>0$ qiymatlarni olamiz. Silvestr kriteriyasidan foydalanib, kvadratik forma musbat aniqlangan degan xulosaga kelamiz, demak, 2-teoremaga asosan $f(x,y,z)$ funksiya $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ nuqtada qat'iy minimumga ega bo'ladi va $f_{min}(A)=f_{min}\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)=-\frac{4}{3}$

11-misol. $z=xy(6-x-y)$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish. Statsionar nuqtalarni topish uchun quyidagi sistemani tuzib,

$$z_x=18x^2y^2-4x^3y^2-5x^4y=0,\quad z_y=12x^3y-2x^4y-3x^5y^2=0,$$

uni yechamiz, bundan $x=0$, $y=0$ va $x=3$, $y=2$ ya'ni ikkita $(0,0)$ va $A(3,2)$ statsionar nuqtalarni topamiz. $\Delta(A)=z_{xx}''\cdot z_{yy}''-(z_{xy}'')^2$, $i=1,2$, shartni tekshirish uchun funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$z_{xx}''=36xy^2-12x^2y^2-6xy^3,\quad z_{xy}''=12x^3-2x^4-6x^5y,\quad z_{yy}''=36x^2y-8x^3y-9x^4y^2.$$

qat'iy ekstremum nuqtasi emas).

8-misol. $z = y^2$ funksiya uchun ham $(0;0)$ nuqta statsionar nuqta bo'ladi, shuning uchun (14) shart bajariladi. Biroq, bu funksiyani ifodalovchi x va y lar toq darajada bo'lganligi sababli, funksiya nolning ixtiyoriy atrofida ishorasini o'zgartiradi, demak, $(0;0)$ nuqta ekstremum nuqtasi emas.

9-misol. $a)\ z = x^2 + y^2$, $b)\ z = -x^2 - y^2$, $c)\ z = x^2 - y^2$ funksiyalarni qaraymiz. $(0;0)$ nuqta har bir funksiya uchun statsionar nuqta bo'ladi va bu nuqtada har bir funksiya uchun $f_x' = f_y' = 0$ tenglik bajariladi. $(0;0)$ nuqta $a)$ funksiya uchun minimum nuqta, $b)$ funksiya uchun maksimum nuqta va $c)$ funksiya uchun ekstremum nuqta bo'lmasligini ko'rish qiyin emas. Aslida uchala holda ham $z(0;0) = 0$ bo'ladi, lekin $a)$ holda $(0;0)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida, $(0;0)$ nuqtaning o'zidan tashqari) funksiyaning qiymati musbat, $b)$ holda manfiy va $c)$ holda esa $z = x^2 - y^2$ funksiya koordinata boshining ixtiyoriy yaqinida musbat bo'ladi (masalan, $x \neq 0, y = 0$ nuqtalarda), manfiy (masalan, $x = 0, y \neq 0$ nuqtalarda) qiymatlarni qabul qiladi.

Endi shartsiz ekstremum mavzusiga doir turli misollarni ko'rib o'taylik.

10-misol. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ uch o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish. $f(x,y,z)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani tuzib olamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2 = 0$$

uni yechib, $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = 1$ nuqtalarga ega bo'lamiz.

Endi $(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y;\ z_0 + \Delta z) = \left(-\frac{2}{3} + \Delta x;\ -\frac{1}{3} + \Delta y;\ 1 + \Delta z\right)$ nuqtada kvadratik formani tuzib olamiz. Bundan

$$f_0 = \frac{2}{3}, \quad A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = 2$$

larga ega bo'lamiz. $\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ 1\right)$ nuqtada $\Delta = 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1 < 0$ va $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ qiymatlarni olamiz. Silvestr kriteriyasidan foydalanib, kvadratik forma musbat aniqlangan degan xulosaga kelamiz, demak, 2-teoremaga asosan $f(x,y,z)$ funksiya $\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ 1\right)$ nuqtada qat'iy minimumga ega bo'ladi va $f_{min}(x,y,z) = f_{min}\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ 1\right) = -\frac{4}{3}$.

11-misol. $z = xy(6 - x - y)$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish. Statsionar nuqtalarni topish uchun quyidagi sistemani tuzib,

$$z_x' = 18xy^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \quad z_y' = 12x^2y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0$$

uni yechamiz. bundan $x = 0, y = 0$ va $x = 3, y = 2$ ya'ni ikkita $(0;0)$ va $A(3;2)$ statsionar nuqtalarni topamiz. $\Delta(A) = z_{xx}'' \cdot z_{yy}'' - (z_{xy}'')^2, A = 1,2$, shartni tekshirish uchun funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$z_{xx}'' = 36xy^2 - 12x^2y^3 - 6xy^3, \quad z_{xy}'' = 12x^3 - 2x^4 - 6x^2y, \quad z_{yy}'' = 36x^2 - 8x^3 - 9x^2y$$

qat'iy ekstremum nuqtasi emas.

8-misol. $z=xy$ funksiya uchun ham $O(0,0)$ nuqta statsionar nuqta bo'ladi, shuning uchun (14) shart bajariladi. Biroq bu funksiyani ifodalovchi x va y lar toq darajada bo'lganligi sababli, funksiya noldning ixtiyoriy atrofida ishorasini o'zgartiradi, demak, $O(0,0)$ nuqta ekstremum nuqtasi emas.

9-misol. $z=x^2+y^2$, $z=-x^2-y^2$, $z=x^2+y^3$ funksiyalarni qaraymiz. $O(0,0)$ nuqta har bir funksiya uchun statsionar nuqta bo'ladi va bu nuqtada har bir funksiya uchun $r=t=s=0$ tenglik bajariladi. $O(0,0)$ nuqta $z=x^2+y^2$ funksiya uchun minimum nuqta, $z=-x^2-y^2$ funksiya uchun maksimum nuqta va $z=x^2+y^3$ funksiya uchun ekstremum nuqta bo'lmasligini ko'rish qiyin emas. Aslida uchala holda ham $O(0,0)=0$ bo'ladi, lekin O holda $(0,0)$ nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida, $O(0,0)$ nuqtanning o'zidan tashqari funksiyaning qiymati musbat, z_1 holda manfiy va z_2 holda esa $z=x^2+y^3$ funksiya koordinata boshining ixtiyoriy ε atrofida musbat bo'ladi (masalan, $x=0$, $y=\frac{\varepsilon}{2}$ nuqtalarda), manfiy (masalan, $x=\frac{\varepsilon}{2}$, $y=-\frac{\varepsilon}{2}$ nuqtalarda) qiymatlarni qabul qiladi.

Endi shartsiz ekstremum mavzusiga doir turli misollarni ko'rib o'taylik.

10-misol. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$ uch o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish. $f(x,y,z)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani tuzib olamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y+1=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z-2=0.$$

uni yechib, $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=1$ nuqtalarga ega bo'lamiz.

Endi $f(x,y,z)$ funksiyaning $A\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ nuqtada kvadratik formasini tuzib olamiz. Bundan

$$a_{11}=r=2,\ a_{12}=s=-1,\ a_{13}=0,\ a_{22}=t=2,\ a_{23}=0,\ a_{33}=2$$

larga ega bo'lamiz. $A\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ nuqtada $a_{11}=2$, $a_{12}=-1$, $a_{13}=0$, $a_{22}=2$, $a_{23}=0$, $a_{33}=2$.

$$\Delta_1=a_{11}=2>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=6>0$$

$\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$ qiymatlarni olamiz. Silvestr kriteriyasidan foydalanib, kvadratik forma musbat aniqlangan degan xulosaga kelamiz, demak, 2-teoremaga asosan $f(x,y,z)$ funksiya $A\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ nuqtada qat'iy minimumga ega bo'ladi va $f_{min}(A)=f_{min}\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)=-\frac{4}{3}$.

11-misol. $z=x^3+y^3-3xy$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish. Statsionar nuqtalarni topish uchun quyidagi sistemani tuzib,

$$z_x'=3x^2-3y=0,\quad z_y'=3y^2-3x=0$$

uni yechamiz, bundan $x=0$, $y=0$ va $x=1$, $y=1$, ya'ni ikkita $A(0,0)$ va $B(1,1)$ statsionar nuqtalarni topamiz. $\Delta(A)=z_{xx}''\cdot z_{yy}''-(z_{xy}'')^2$, $i=1,2$, shartni tekshirish uchun funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$z_{xx}''=6x,\quad z_{xy}''=-3,\quad z_{yy}''=6y,\quad z_{xxx}'''=6,\quad z_{xxy}'''=0,\quad z_{xyy}'''=0,\quad z_{yyy}'''=6.$$

bo'ladi. $A(0,0)$ nuqtada $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = 0$, bo'lganligi uchun

$$\Delta(A) = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$$

bo'ladi, bu nuqtada ekstremum masalasi ochiq qoladi. Buni hal etish uchun yuqori tartibli hosilaga murojaat etib, jarayonni davom ettirish zarur.

Endi $A(3,2)$ nuqtada $\Delta(A) = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$ ifodani ishorasini tekshiramiz, buning uchun $z''_{xx} = 144$, $z''_{xy} = 162$, $z''_{yy} = 108$ qiymatlarni topib,

$$\Delta(A) = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$$

ega bo'lamiz, $z''_{xx} > 0$ ekanligidan z funksiyaning $x = 3$, $y = 2$ nuqtada maksimumga erishishligi kelib chiqadi va $z_{max} = z(3,2) = 108$.

12-misol. $f = 2x^3 + y^3 - x^2 - 2y^2$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish. Zaruriy shartni yozamiz (boshqacha qilib aytganda berilgan funksiyadan barcha o'zgaruvchilari bo'yicha hosila olib, nolga tenglab, sistema hosil qilamiz va uni yechamiz):

$$z'_x = 8x^2 - 2x = 0, \quad z'_y = 4y^2 - 4y = 0.$$

statsionar nuqtalarni topamiz: $A_1(0,0)$, $A_2(0,1)$, $A_3(0,\frac{1}{2})$, $A_4(1,0)$, $A_5(1,1)$, $A_6(\frac{1}{2},0)$, $A_7(\frac{1}{2},1)$, $A_8(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $A_9(-\frac{1}{2},0)$, $A_{10}(-\frac{1}{2},1)$, $A_{11}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Yetarli shartni tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz va statsionar nuqtalarda qiymatlarini hisoblab,

$$\Delta(A_i) = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2, \; i = 1,2,3,\ldots,9$$

ifodani ishorasini tekshiramiz. Demak,

$$z''_{xx} = 24x - 2, \quad z''_{xy} = 12y - 4,$$

u holda $\Delta(A_1) = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 8 \cdot 12 > 0$, $-16 < 0$, bundan quyidagilarni topamiz:

$\Delta(A_1(0,0)) = 8 \cdot (-4) < 0$, $\Delta(A_2) = \Delta(A_3) = \Delta(A_4) = \Delta(A_5) = -16 < 0$, $\Delta(A_6) = \Delta(A_7) = \Delta(A_8) = \Delta(A_9) = \Delta(A_{10}) = \Delta(A_{11}) = 32 > 0$.

Bulardan, A_2, A_3, A_4, A_5 va A_8 nuqtalar ekstremal bo'la olmaydi, chunki $\Delta < 0$. A_6, A_7, A_9, A_{10} va A_{11} – ekstremal nuqtalar. $A_1(0,0)$ nuqtada maksimumga erishadi (chunki $z''_{xx}(0,0) = -2 < 0$) va $z_{max} = 0$ bo'ladi; A_6, A_7, A_9, A_{10} nuqtalarda minimumga erishadi (chunki $z''_{xx}\left(-\frac{1}{2},1\right) = 4 > 0$) va $z_{min} = -\frac{9}{8}$ bo'ladi.

Quyidagi funksiyalarning maksimum va minimumlari topilsin:

2. $f(x,y) = 2y - x^2 - y^2$. **3.** $f = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 4$. **4.** $f = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $(x > 0, y > 0)$.

5. $f = \frac{1+x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. **6.** $f = x + \frac{y}{4x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

7. $f = x^3 - xy + y^2 - 2x - 1$. **8.** $f = \sin x \sin y \sin(x+y)$, $(0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$.

9. $f = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1 + x + y^2)$. $m(1,0)$, $(x > 0, y > 0)$.

10. $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ funksiyaning cheksiz ko'p maksimumga ega bo'lishi va bironta ham minimumga ega bo'lmasligi ko'rsatilsin.

11. M_0 nuqtadan o'tuvchi har bir to'g'ri chiziq bo'ylab $f(x,y)$ funksiyaning minimumga ega bo'lishi sharti. $f(x,y)$ funksiyani $M(x_0,y_0)$ nuqtada minimumga ega bo'lishi uchun yetarlimi? Ko'rsatma: $f(x,y) = (x-y)^2(2x-y^2)$ misoliga qaralsin.

12. Бир ўзгарувчили функциядан фарқли ўлароқ, икки ўзгарувчили функция учун D соҳада ягона экстремумнинг

мавжудлиги - албатта, бу экстремум функциянинг бутун соҳада энг катта ёки энг кичик қийматга эришишлигини англатмаслигини кўрсатинг.

Қуйидаги мисолларни кўриб чиқинг:

a) $z = x^2 - y^2 + 2e^z$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$

b) $z = x^2 - 4x + 2y - y^2$, D: $-5 \le x \le 5$, $-1 \le y \le 1$

13. Davri 2π ga teng bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Barcha n- tartibli trigonometrik $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ko'phadlar ichidan a_k, b_k koeffitsientlarni tanlash yo'li bilan shunday ko'phadni topish talab etiladiki,

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]^2 dx$$

tenglik bilan aniqlangan o'rtacha kvadratik chetlashish eng kichik qiymatga ega bo'lsin.

Tez tushish (gradientlar) usuli. $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaning minimumini topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. Biron bir $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nuqtani olib $f(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi gradientini hisoblaymiz

$$grad f(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_k}e_k,$$

bu yerda $e_1, e_2, \ldots, e_n$ lar R^n fazosining ortonormal bazislari. Agar $grad f(x^{(0)})$ bo'lsa, u holda $x_1^1 = x_1^0 - h_1 \cdot (grad f(x^{(0)}), e_1)$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, deb olamiz. bu yerda $h_1 > 0$ yetarlicha kichik son. Agar $grad f(x^1) \neq 0$ bo'lsa, u holda $x_2^1 = x_2^1 - h_2$, $x_k^2 = x_k^1 - h_2 \cdot (grad f(x^1), e_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $h_2 > 0$, deb

olamiz, va nihoyat, agar $grad f(x^{(n)}) \neq 0$ bo'lsa, u holda $x_k^n = x_k^{n-1} - h_n \cdot (grad f(x^{(n)}), e_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $h_n > 0$, deb olamiz. Aniq qonuniyat asosida $\{f(x^n)\}$ monoton kamayuvchi ketma-ketlikni hosil qilamiz. Agar $x^* = x$ va $x = f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} x^n = x^*$, $\lim_{n\to\infty} grad f(x^n) = 0$ bo'ladi.

13-misol. $f(x) = x$ funksiyaning minimum nuqtasi topilsin.

Yechish. $x = 1$ nuqtani olamiz, u holda $grad f(x) = 2x$, $x = 2x \neq 0$ ga ega bo'lamiz. Shuning uchun, $x^1 = x^0 - 2h = 1 - 2h$, bu yerda $h > 0$. So'ngra, $grad f(x)$ ni hisoblaymiz, u $grad f(x) = 2(1 - 2h)$ bo'ladi. Agar $h = \frac{1}{2}$ bo'lsa, unda $grad f(x) = 0$ bo'ladi va $x^2 = x^1 - 2h(1 - 2h) = (1 - 2h)^2$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, quyidagiga $x^n = (1 - 2h)^n$ ega bo'lamiz. Ravshanki, agar $0 < h < 1$ bo'lsa, u holda $n \to \infty$ ga intilganda $x^n \to 0$ bo'ladi. U holda $x = 0$ nuqta $f(x) = x$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi. Agarda $h = \frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda $x^n = (1 - 2h)^n = 0$ bo'lib, limiti nolga teng bo'lgan yig statsionar ketma-ketlikni hosil qilamiz.

14-misol. $z = x^2 + y^2$ funksiyaning minimum nuqtasi topilsin.

Yechish. Masalan (1,1) nuqtani olaylik, ya'ni $x^{(0)} = 1, y^{(0)} = 1$. Bundan $grad(1,1) = 2i + 2j$. Bu yerda $grad(1,1) \neq 0$ bo'lganligi uchun,

$$x^1 = x^{(0)} - 2x^{(0)}h = 1 - 2h, \quad y^1 = y^{(0)} - 2y^{(0)}h = 1 - 2h, \quad (h > 0),$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Quyidagiga egamiz

$$grad(x^1, y^1) = 2(1 - 2h)i + 2(1 - 2h)j \neq 0, \left(h \neq \frac{1}{2}\right),$$

shuning uchun,

$$x^2 = x^1 - 2x^1 \cdot h = (1-2h)\cdot \qquad x^2 = x^1 - 2\cdot 1 \cdot \tfrac{1}{8} = (1-2\cdot\tfrac{1}{8})\cdot\tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{32}$$

deb olamiz. Bu jarayonni davom ettirib, quyidagiga

$$x^n = (1-2h)^n \cdot x^0, \qquad x^n = (1-2h)^n \cdot x^0$$

ega bo'lamiz. $0 < h < 1$ bo'lganligi uchun, berilgan funksiyaning minimum $M(0,0)$ nuqtasiga yaqinlashuvchi $\{x^n\}$ ketma-ketliklar nuqtasiga ega bo'lamiz. Ravshanki, $h = \tfrac{1}{2}$ da

$$grad f(x^n, y^n) = 2(1-2h)^n x^0 - 2(1-2h)^n y^0 = 0.$$

Demak, $(0,0)$ nuqta $z = x^2 + y^2$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi.

Gradientli tushish usuli yordamida $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y$ funksiyaning minimum nuqtasi topilsin.

3-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumi

R^n fazoning qandaydir D R^n ochiq sohasida aniqlangan n o'zgaruvchili

$$y_i = f_i(x), \quad i = \overline{1,2,\ldots,m}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \tag{1}$$

funksiya berilgan bo'lsin. E orqali barcha $f_i(x) = 0$, $i = \overline{1,2,\ldots,m}$ funksiyalarning nolga aylanadigan $x \in D$ nuqtalar to'plamini belgilaymiz, ya'ni

$$E = \{x \in D : f_i(x) = 0, \ i = \overline{1,2,\ldots,m}\}$$

Quyidagi

$$f_i(x) = 0, \quad i = \overline{1,2,\ldots,m} \tag{2}$$

tenglamani *bog'lanish* tenglamasi deb ataymiz.

1-ta'rif. *D sohada $z = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. $x^0 \in E$ nuqta $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ (2) bog'lanish tenglamasiga nisbatan (yoki (2) bog'lanish tenglamasi bajarilganda) $f(x)$ funksiyaning shartli*

ekstremum nuqtasi deyiladi, agar x^0 nuqta qandaydir ε-to'plamda $f(x)$ funksiyaning oddiy ekstremum nuqtasi bo'lsa.

Boshqacha so'z bilan aytganda, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nuqta (2) bog'lanish tenglamasiga nisbatan (yoki (2) bog'lanish tenglamasi bajarilganda) $f(x)$ funksiyaning shartli ekstremum nuqtasi deyiladi, agar x^0 nuqtaning shunday $\varepsilon > 0$ atrofi topilsaki, barcha $x \in D \cap S(x^0, \varepsilon)$ lar uchun $f(x) - f(x^0)$ ayirma o'zgarmas ishorali bo'lsa.

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nuqta (2) bog'lanish tenglamasiga nisbatan (yoki (2) bog'lanish tenglamasi bajarilganda) $f(x)$ funksiyaning qat'iy shartli ekstremum nuqtasi deyiladi, agar x^0 nuqtaning shunday $\varepsilon > 0$ atrofi topilsaki, barcha $x \in D \cap S(x^0, \varepsilon)$ lar uchun $f(x) - f(x^0)$ ayirma o'zgarmas ishorali bajarilsa.

Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ funksiyaning x^0 nuqtadagi qiymati, bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofidagi barcha nuqtalaridagi qiymatlari bilangina emas, faqat bir vaqtning o'zida nuqtaning ko'rsatilgan yetarlicha kichik atrofida va E to'plamda yotuvchi nuqtalardagi qiymatlari bilan taqqoslanadi. Odatdagi ekstremumlarda bo'lgani kabi, tabiiy holda oddiy shartli ekstremum va qat'iy shartli ekstremumlarni qarashimiz mumkin.

Shartli ekstremum nuqtasini izlashning to'g'ridan-to'g'ri usuli. (1) tenglamalar sistemasidan istalgan m ta o'zgaruvchi x_i ni qolgan o'zgaruvchilar orqali ifodalash mumkin deb faraz qilamiz. So'ngra, x_i ga mos o'zgaruvchilarni o'rniga ularni $f(x)$ funksiyadagi qolgan $n-m$ ta ifodasini olib borib qo'yib, $n-m$ ta o'zgaruvchili f funksiyani ola-

miz.

Shunday qilib, (2) bog'lanish tenglamali $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumini topish haqidagi masala n ta o'zgaruvchiga bog'liq f funksiyani oddiy (shartsiz) ekstremumini topish masalasiga keltiriladi.

15-misol.

$$f(x,y)=x+y \qquad (3)$$

funksiya va

$$x^2+y^2=1 \qquad (4)$$

bog'lanish tenglamasini qaraylik. (3) funksiyani (4) bog'lanish tenglamasi bajarilganda shartli ekstremumini topamiz. (4) tenglamadan $y=\sqrt{1-x^2}$ ifodani topamiz, unda $f(x,y)=x+\sqrt{1-x^2}$ bo'ladi. Shunday qilib, (4) bog'lanishli shart bajarilganda (3) funksiya bir o'zgaruvchining funksiyasiga keladi.



13 - rasm

Buning ekstremumini topish oson: hosilani nolga tenglab (ekstremumning zaruriy sharti), $2x-1=0$ ega bo'lamiz, bundan $x=\frac{1}{2}$ ni topamiz. Bu nuqtada qaralayotgan funksiya ravshanki, minimumga ega bo'ladi. $x=\frac{1}{2}$ qiymatga (4) bog'lanish tenglamaga ko'ra, $y=\frac{1}{2}$ mos keladi.

Bundan, (3) funksiya (4) bog'lanish tenglamasiga nisbatan $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ nuqtada minimumga erishadi. Bu geometrik nuqtai nazardan $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ nuqtaga *pracksiyalovchi* $f(x,y)=x^2+y^2$ paraboloid nuqtasi (4) to'g'ri chiziqdan pastda yotuvchi barcha nuqtalar ichidan eng pastdagisi

bo'lishligini anglatadi. Bu misol shuni ko'rsatadiki, funksiyaning shartli ekstremumga erishtiruvchi nuqtasi umuman olganda bu funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lmaydi (13-rasm).

16-misol. $z=x^2+y^2$ funksiya va $x+y=2$ bog'lovchi tenglama berilgan bo'lsin. y ni olib borib funksiyaga qo'ysak, $z=2x^2-4x+4$ bo'ladi. x ni qaralayotgan funksiya yana bir o'zgaruvchining funksiyasiga aylanadi, ravshanki, bu funksiya $x=1$ da minimumga erishadi. $x=1$ qiymatga bog'lovchi tenglamaga ko'ra, $y=1$ qiymat mos keladi (14-rasm). Shuning uchun, $z=x^2+y^2$ funksiya $(1;1)$ nuqtada $x+y=2$ bog'lovchi tenglamaga nisbatan shartli minimumga erishadi. Bundan esa, bu holda $z=x^2+y^2$ funksiyaning o'zi tekislikning hech bir nuqtasida na maksimumga na minimumga erishmasligi kelib chiqadi.



14 - rasm

Shunday qilib, ushbu misol shuni ko'rsatadiki, funksiya ekstremumga erishmasligi mumkin, lekin biror bog'lanish tenglamasida shartli ekstremumga ega bo'lishi mumkin.

Umumiy holda ham xuddi shunday yondashishimiz mumkin. $z=f(x,y)$ funksiyaning $\varphi(x,y)=0$ bog'lanishli shartda shartli ekstremumi topilsin. Aytaylik, x va y larning qaralayotgan qiymatlarida $\varphi(x,y)=0$ tenglama y ni bir qiymatli differensiallanuvchi $y=\psi(x)$ funksiya sifatida aniqlasin. Buni olib borib $z=f(x,y)$ funksiyadagi y ni o'rniga $\psi(x)$ funksiyani qo'ysak, bir o'zgaruvchili $z=f(x,\psi(x))=F(x)$ funksiyani olamiz. $F(x)$ funksiyaning ekstremumi (shartsiz) $\varphi(x,y)=0$ bog'lanishli shartli $f(x,y)$ funksiyaning dastlabki ekstremum sharti bo'ladi. Bu yerda

har doim $\varphi(x,y)=0$ tenglamani qaysidir o'zgaruvchiga nisbatan yechish talab etilganligi sababli, mazkur usul har doim ham qulay emas.

$z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyaning (2) bog'lanishli shart ostida ekstremal qiymatlarini topish uchun Lagranjning noma'lum ko'paytuvchilar usulidan foydalaniladi.

Lagranjning noma'lum ko'paytuvchilar usuli. Kelgusida faraz qilamiz:

a). $f, f_1, f_2, \dots, f_m$ funksiyalarning hammasi ochiq D sohada uzluksiz differensiallanuvchi;

b). qaralayotgan x^0 nuqtada $\nabla f, \nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ vektorlar chiziqli erkli, ya'ni, Yakobi matritsasining rangi

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{m\times n}$$

m ga teng, bu yerda m uning satrlar soni. (Yakobi matritsasining satrlari $\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_m$ gradientlarning kompanentalari bo'ladi).

Oldingi paragrafning natijasiga ko'ra, bu (1) funksiyalar sistemasi x^0 nuqtaning qandaydir atrofida erkli ekanligini anglatadi. Chunki n o'lchovli fazoda erkli vektorlar n ta chiziqli erkli vektorlardan katta bo'lishi mumkin emas va matritsaning rangi ustunlar sonidan katta bo'lishi ham mumkin emas, u holda $b)$ shartdan $m \le n$ ekanligi kelib chiqadi.

$b)$ shartga ko'ra, x^0 nuqtada

$$\left(\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}\right),$$

ko'rinishidagi determinantlarning hech bo'lmaganda bittasi noldan

farqli bo'ladi. Aytaylik, aniqlik uchun x^0 nuqtada

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)} \neq 0$$

bo'lsin. U holda $m=n$ bo'lganda oshkormas funksiya haqidagi teoremaga asosan (1) tenglamalar sistemasini x^0 nuqtaning qandaydir atrofida $x_1, x_2, \dots, x_m$ o'zgaruvchilarga nisbatan yechish mumkin:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases} \tag{5}$$

(5) formula bilan topilgan $x_1, x_2, \dots, x_m$ qiymatlarni $z=f(\dots)$ tenglamaga qo'yib, ya'ni f va $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ funksiyalarning kompozitsiyasini qarab, quyidagi $n-m$ o'lchovli R^{n-m} fazoda $x^0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtaning qandaydir atrofida aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi $n-m$ ta $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ o'zgaruvchili funksiyani olamiz:

$$y = f(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \varphi_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = g(x_{m+1}, \dots, x_n). \tag{6}$$

Oshkormas funksiya haqidagi teoremaga ko'ra, (2) va (5) shartlar tengkuchli, u holda quyidagi tasdiq o'rinli bo'ladi.

x^0 nuqta (2) bog'lanish tenglamalar sistemasiga nisbatan $z=f(x)$ funksiya uchun shartli ekstremum (qat'iy) nuqtasi bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, x^0 nuqta (6) funksiyaning oddiy (qat'iy) ekstremum nuqtasi bo'ladi.

Agar x^0 nuqta g funksiyaning oddiy ekstremum nuqtasi bo'lsa, u holda u bu funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi:

$$dg(x^0)=0 \tag{7}$$

(7) shart $x^* \in E$ nuqtada shartli ekstremum mavjud bo'lishligining zaruriy shartini ifodalaydi.

Eslatib o'tamizki, chiziqli bir jinsli funksiyaning differensiali va uning nolga tengligi, uning argumentlarini ixtiyoriy qiymatlarida bu funksiyaning nolga tengligini anglatadi, mazkur holda ixtiyoriy $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$ larda nolga teng bo'lishligini anglatadi. Ravshanki, bu hol faqat va faqat shu holda qachonki, hamma koeffitsientlar bu argumentlarda, ya'ni $\frac{\partial g}{\partial x_{m+i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-m$ hosilalar x^* nuqtada nolga aylanadi. (7) shart x^* nuqtadagi shartli ekstremum uchun zarur.

Shunday qilib, (2) tenglamalar sistemasini yechishga asoslangan usul, shartli ekstremumni topish haqidagi muammoni odatdagi o'rganilgan ekstremumni topish muammosiga keltirish uchun imkon beradi. Aynan biz, yuqorida ko'rilgan misollarda shunday yo'l tutdik. Biroq, (2) tenglamalar sistemasining yechimini elementar funksiyalar orqali ifodalash mumkin emas yoki o'ta qiyin masala, shuning uchun (2) bog'lanish tenglamalar sistemasini yechmasdan turib shartli ekstremumni topish usuliga imkon darajasida ega bo'lsa maqsadga muvofiq bo'ladi. Quyida ana shunday usulga to'xtalib o'tamiz.

3.1. Shartli ekstremum nuqtalarni topish uchun Lagranjning noma'lum ko'paytuvchilar usuli.

Bu bandda barcha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ funksiyalar $(x \in E_1, n > m)$ ochiq to'plamda uzluksiz differensiallanuvchi deb faraz qilamiz.

1-teorema. *Aytaylik, x^* nuqta (2) bog'lanishli tenglamalar sistemasi bajarilganda f funksiyaning shartli ekstremum nuqtasi bo'lsin. U holda bu nuqtada $\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2, \ldots, \nabla\varphi_m$ gradientlar chiziqli bog'liq, ya'ni hammasi nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sonlar mavjudki, ular uchun*

$$\lambda_1 \nabla\varphi_1 + \lambda_2 \nabla\varphi_2 + \ldots + \lambda_m \nabla\varphi_m = 0 \qquad (8)$$

bo'ladi.

Natija. *Agar x^* bog'lanishli tenglamalar sistemasiga nisbatan f funksiya shartli ekstremumining x^* nuqtasida $\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2, \ldots, \nabla\varphi_m$ gradientlar chiziqli bog'liq erkli bo'lsa va Yakobi matritsasining*

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

rangi m ga teng bo'lsa, u holda shunday $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sonlar mavjud bo'ladiki, bu nuqtada

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla\varphi_i = 0 \qquad (9)$$

bo'ladi, ya'ni ∇f, $\nabla\varphi_1$, $\nabla\varphi_2$, $\ldots$, $\nabla\varphi_m$ gradientlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

Bu shart, ixtiyoriy $i = 1, 2, \ldots, n$ lar uchun x^* nuqtada koordinatalar shaklida quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0. \qquad (10)$$

Quyidagi yangi funksiyani qaraymiz

$$F(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x), \qquad (11)$$

bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sonlar (10) shartni qanoatlantiradi, qaralayotgan masalaning Lagranj funksiyasi deb ataladi, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sonlarning o'zi esa Lagranj ko'paytuvchilari deyiladi.

(10) shart, agar x^0 nuqta (2) bog'lanishli tenglamalar sistemasiga nisbatan $f(x)$ funksiyaning shartli ekstremum nuqtasi bo'lsa, u holda u Lagranj funksiyasi uchun statsionar nuqta bo'lishligini anglatadi, ya'ni

$$\frac{\partial F(x^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

Teoremani isbot qilishdan oldin, uning mazmun-mohiyatini tushuntirib o'tamiz va shartli ekstremum nuqtalarni topish uchun undan qanday qilib foydalanish mumkinligini ko'rsatamiz.

Eng avvalo e'tiboringizni quyidagiga qaratamiz: (11) ko'rinishdagi funksiyaning ixtiyoriy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sonlarda uning har bir shartli ekstremum nuqtasi dastlabki $f(x)$ funksiyaning ham shartli ekstremum nuqtasi bo'ladi va aksincha. Biz $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sonlarning qiymatlarini shunday tanlaymizki, natijada (10) shart bajarilsin, ya'ni bu mazkur shartli ekstremum nuqta (9) funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin.

Shartli ekstremum nuqtalarni topish uchun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ va $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ noma'lumlarga nisbatan $n+m$ ta (2) va (8) tenglamalar sistemasini qarashimizga va uni yechib (agar yechish mumkin bo'lsa), iloji boricha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sonlarni iloji boricha yo'qotishga erishib, $x^0, x^1, \ldots$ nuqtalarni topishga to'g'ri keladi.

Yuqorida keltirilgan teorema barcha shartli ekstremum nuqtalar shu tariqa topilgan $x^0, x^1, \ldots$ nuqtalar orasida joylashganligini tasdiqlaydi. Endi bu topilgan nuqtalarning qaysi biri shartli ekstremum nuqtasi bo'ladi degan savol qo'shimcha tadqiqotni talab etadi. Bu masalaga shartli ekstremum nuqtalar uchun yetarli shartlar mavzusida batafsil to'xtalib o'tamiz.

Isboti. Teoremaga teng kuchli bo'lgan quyidagi tasdiqni isbot qilamiz: agar

(13)

bog'lanishli tenglamasini qanoatlantiruvchi $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nuqtada $\nabla f_1, \nabla f_2, \nabla f_3, \ldots, \nabla f_m$ gradientlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda x^0 shartli ekstremum nuqta bo'lmaydi. Demak, aytaylik $\nabla f_1, \nabla f_2, \nabla f_3, \ldots, \nabla f_m$ gradientlar chiziqli erkli va

Yakobi matritsasining rangi m ga teng bo'lsin. Unda bu matritsada noldan farqli bo'lgan m-tartibli minor mavjud bo'ladi. Aniqlik uchun uni birinchi m ta ustundan tashkil topgan deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{14}$$

bo'ladi. D ochiq to'plam, shuning uchun shunday $\delta > 0$ soni mavjudki, barcha δ soni $0 < \delta < \delta$ uchun

$$Q = \{x : |x - x^0| < \delta, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

kub D to'plamda yotadi, bundan unda barcha $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ funksiyalar aniqlangan bo'ladi.

Endi $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, $x^1 \neq x^0$ nuqtalarni tayinlaymiz va quyidagi

$$x^1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} : Q = \{x : |x - x^1| < \delta, \ i = 1, 2, \ldots, m+1\}$$

belgilashlarni kiritamiz. Ravshanki,

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = f_i, \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

funksiyalar Q to'plamning hamma joyida aniqlangan va uzluksiz differen-siallanuvchi bo'ladi. Quyidagi formulalar

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \end{cases} \quad (15)$$

bilan berilgan $\Phi: Q^n \to R^n$ akslantirishni qaraymiz.

(14) ifodaga ko'ra, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nuqtalar uchun

$$\left|\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x^0} = \left|\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x^0} \neq 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. (13) tenglikka ko'ra, $\Phi(x^0) = y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$. Shuning uchun, shunday $\alpha > 0$ mavjud bo'ladiki,

$$V = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : |y_1 - f_1(x^0)| < \alpha, |y_2 - x_2^0| < \alpha, \ldots, |y_n - x_n^0| < \alpha\}$$

atrofda Φ akslantirishga teskari akslantirish aniqlanadiki, atrofning ixtiyoriy nuqtasiga Q^n to'plamdan qandaydir x nuqta akslanadi (15 -rasm). $(m = 1, n = 2)$ Xususan, $|f(x^0) - \eta_0| < \varepsilon$ ixtiyoriy η, $0 < \eta < \varepsilon$, da $|f(x^0 + \eta, 0) - \eta_0| < \varepsilon$ tegishlilik

15 - rasm

o'rinli bo'ladi, u holda Q^n kubda Φ akslantirishda x^0 atrofining ko'rsatilgan uqtalariga akslanuvchi shunday $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ va $x'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ nuqtalar topiladiki,

$$\Phi(x') = (f_1(x^0) + \eta, 0, \ldots, 0), \quad \Phi(x'') = (f_1(x^0) - \eta, 0, \ldots, 0)$$

bo'ladi. Agar qisqalik uchun

$x' = (x_1', x_2', \ldots, x_m', x_{m+1}', \ldots, x_n')$ va $x'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_m'', x_{m+1}'', \ldots, x_n'')$ deb olsak, u holda ((15) ifodaga qarang) koordinatalar bo'yicha yozuvdan quyidagi

$$f_k(x') = f_k(x^0) + \eta = f(x^0) + f_k(x'') = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad x'' \in Q^n$$

va

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in Q^n$$

ifodalarni olamiz. x^0 nuqta $x_{m+1}, \ldots, x_n$ sonlarni ixtiyoriyligiga ko'ra, bu x^0 nuqtani shartli ekstremum nuqtasi emasligini anglatadi. Teorema isbot bo'ldi.

Natijaning isboti. Agar $\nabla f_1, \nabla f_2, \ldots, \nabla f_m$ vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda (8) tenglikdan $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ ga ega bo'lamiz. $\lambda_0 = 0$ bo'lgan holda ko'rsatilgan vektorlar (8) tenglikka ko'ra, chiziqli bog'liq bo'lgan bo'lar edi. (8) tenglikni ikkala tomonini λ_0 bo'lib, (9) ko'rinishdagi tenglikni olamiz. Natija isbot bo'ldi.

Lagranj usulining geometrik talqini. Endi 1-teoremaga ayrim geometrik nuqtai nazardan tushuntirishlarni berib o'tamiz. Oddiylik uchun $z = f(x, y)$ ikki o'zgaruvchi funksiyani $\varphi(x, y) = 0$ bog'lanishli tenglama bajarilganda shartli ekstremumini topish masalasini qaraymiz. Aytaylik, $f(x, y)$ va $\varphi(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtaning atrofida

$$\nabla\varphi(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \neq 0$$

uzluksiz differensiallanuvchi va $\varphi(x_0, y_0) = 0$ bo'lsin. $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ shartga va oshkormas funksiya haqidagi teoremaga ko'ra, $\varphi(x, y) = 0$ tenglama (x_0, y_0) nuqtaning atrofida qandaydir $y = \psi(x)$ yoki $x = \psi(y)$ ko'rinishiga ega bo'lgan silliq egri chiziqni beradi. Bizni (x_0, y_0) nuqtaga yetarli darajada yaqin bo'lgan nuqtalar qiziqtiradi, u holda ko'rsatilgan egri chiziqni shunchaki $\varphi(x, y) = 0$ egri chiziq deb ataymiz (ya'ni shunchaki aytganda, keyinchalik hamma joyda (x_0, y_0) nuqtaning ko'rsatilgan atrofida $f(x, y)$

va $\varphi(x,y)$ funksiyalarning torayishini qaraymiz.

$\nabla\varphi(x,y)$ gradient (x,y) nuqtada $\varphi(x,y)=0$ egri chiziqqa normal bo'ladi. τ orqali $\varphi(x,y)=0$ egri chiziqning (x,y) nuqtadagi birlik urinma vektorni belgilaymiz. Aniqlik uchun, qaralayotgan egri chiziq $\varphi(x,y)=0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar (x,y) shartli ekstremum nuqta bo'lsa, u holda x nuqta $g(x)=f(x,g(x))$ funksiyaning oddiy ekstremum nuqtasi bo'ladi va shuning uchun $g'(x)=0$ bo'ladi, ya'ni $f(x,y)$ funksiyaning $\varphi(x,y)=0$ egri chiziq yo'nalish bo'yicha (x,y) nuqtadagi hosilasi yoki τ vektor yo'nalishidagi hosilasi

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \tau}=(\nabla f(x,y),\tau)=0$$

nolga teng bo'ladi. Bu $\nabla f(x,y)$ gradientni τ urinma vektor bilan ortogonalligini, bu $\nabla f(x,y)$ va $\nabla\varphi(x,y)$ vektorlarni o'zaro kollinearligiga teng kuchli ekanligini anglatadi, $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla\varphi(x,y)$ ya'ni (9) shart bajariladi. Shartli ekstremum nuqtasida bu shartni bajarilishini boshqa yo'l bilan ham tushuntirish mumkin. Aytaylik, $f(x,y)=c$ bo'lsin. Agar bu (x,y) nuqtada (9) shart



16-rasm

bajarilmasa, ya'ni $\nabla f(x,y)$ va $\nabla\varphi(x,y)$ gradientlar kollinear bo'lmasa, u holda bu (x,y) nuqtada $\nabla f(x,y)\neq 0$ va $f(x,y)=c$ sath chizig'i va $\varphi(x,y)=0$ egri chiziq noldan va π sonidan farqli qandaydir α burchak ostida kesishishligini bildiradi (16-rasm).

Shuning uchun, (x,y) nuqtaning yetarlicha kichik atrofida $\varphi(x,y)=0$ egri chiziqning qismi $f(x,y)<c$ sohada, boshqa qismi $f(x,y)>c$ sohada joylashgan bo'ladi.

Bu esa (x,y) nuqtada qaralayotgan shartli ekstremum yo'q ekanligini anglatadi. $\nabla f(x,y)$ va $\nabla\varphi(x,y)$ vektorlar kollinear $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla\varphi(x,y)$ bo'lgan holda $\varphi(x,y)=0$ egri chiziqning bir qismi (x,y) nuqtaning biror atrofida yotishi mumkin (ya'ni $f(x,y)<c$ sohada (17-rasm) yoki $f(x,y)>c$ sohada). Bu holda (x,y) nuqtada shartli ekstremumga erishadi.



17-rasm



18-rasm

Biroq, $\nabla f(x,y)$ va $\nabla\varphi(x,y)$ vektorlar o'zaro kollinear bo'lgan holda $\varphi(x,y)=0$ egri chiziq xususan, $f(x,y)$ funksiyaning sohada kichik, sohada katta qiymatlarida yana (x,y) nuqtaning yetarlicha kichik ixtiyoriy atrofida joylashgan bo'lib qolishi mumkin. Bunday holatlar masalan, qachonki $f(x,y)=c$ va $\varphi(x,y)=0$ egri chiziqlar (x,y) nuqtada umumiy urinmaga ega bo'lgan hollarda sodir bo'ladi (18-rasm).

Yuqoridagi mulohazalar (8) shart shartli ekstremumning zaruriy sharti, lekin yetarli sharti bo'la olmasligini tushuntiradi.

Shartli ekstremum nuqtalar uchun yetarli shart. Biz bu bandda ham f va φ_i $(i=\overline{1,m})$ funksiyalarga qo'yilgan barcha farazlar bajariladi deb faraz qilamiz. Aytaylik,

$$F(x) = f(x) + \sum \lambda_i \varphi_i(x)$$

f va (2) bog'lanish tenglamasi uchun Lagranj funksiyasi bo'lsin (113 ga qarang). x^0 nuqta (2) bog'lanish tenglamasini qanoatlantirsin va Lagranj funksiyasining statsionar nuqtasi bo'lsin, ya'ni koordinatalari (10) va (2) tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi nuqta. Bizning maqsadimiz, shunday usulni topishimiz kerakki, qaysiki uning yordamida x^0 nuqta qaralayotgan masalaning shartli ekstremum nuqtasi bo'lishi uchun yetarli bo'lgan shartlarni ko'rsatish.

Eng avvalo, agar x^0 nuqta (2) bog'lanish tenglamasini qanoatlantirsa, u holda quyidagi

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) > 0 \qquad (16)$$

tenglikni o'rinli bo'lishligini anglab yetamiz. Bu yerdan darhol, agar x^0 nuqta $F(x,\lambda)$ funksiya uchun oddiy ekstremum nuqta bo'lsa, ya'ni ΔF nuqtaning biror atrofida o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda x^0 nuqta f funksiya uchun shartli ekstremum nuqta bo'ladi.

Haqiqatan, bu holda (16) ifodadan x o'zgaruvchining joiz nuqtalari uchun f funksiyaning Δf orttirmasi ya'ni bog'lanish tenglamasini qanoatlantiruvchilarda ham o'z ishorasini o'zgartirmasligi kelib chiqadi.

Bu yetarli shart, biroq qaralayotgan nuqtada $F(x)$ Lagranj funksiyasining harakatiga nisbatan juda kuchli cheklov qo'yilgan. U ham bo'lsa - Lagranj funksiyasi oddiy ekstremumga ega bo'lishi kerakligi, bu masalani yechishdagi ko'rsatilgan shartni tadbiq etish mumkin bo'lgan sohani o'ta toraytirib yuboradi. Shuning uchun, shartli

ekstremum uchun ancha umumiy bo'lgan shartni olish maqsadga muvofiq bo'ladi.

$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ nuqta (2) bog'lanish tenglamasini qanoatlantirsin. (6) funksiyani o'rganishga qaytamiz, ya'ni $x_1, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar x^0 nuqtaning biror atrofida (2) bog'lanish tenglama bilan aniqlangan $x_{m+1}, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lishligi sharti ostida $f = f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyadan olingan $\varphi(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}(x_1, \dots, x_m), \dots, x_n(x_1, \dots, x_m))$ funksiyani qaraymiz. Qo'shimcha f va φ_i $(i = \overline{1,m})$ funksiyalarni x^0 nuqtada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar deb faraz qilamiz.

Yuqorida, x^0 nuqta (2) bog'lanish tenglamasiga nisbatan f funksiya uchun shartli ekstremum (qat'iy) nuqtasi bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ nuqta $\varphi(x)$ funksiya uchun odatiy ekstremum(qat'iy) bo'lsa deb ta'kidlab o'tgan edik. Shuning uchun, masalan, agar $\varphi(x)$ funksiya x^0 nuqtada qat'iy ekstremum mavjud bo'lishligining yetarli shartini qanoatlantirsa, u holda bu nuqtada f funksiya (2) bog'lanish tenglamasiga nisbatan qat'iy shartli ekstremumga ega bo'ladi. Oddiy qat'iy ekstremum uchun yetarli shartni oldin ko'rib o'tganmiz. Bizning mazkur holimizda esa oddiy qat'iy ekstremum uchun yetarli shart quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a)\ \frac{\partial \varphi(x^{(m)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{m+1, \dots, n};$$

$$b)\ d^2\varphi(x^{(m)}) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 \varphi(x^{(m)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

kvadratik forma musbat yoki manfiy aniqlangan bo'ladi.

Bu shartlar bajarilganda x nuqta $f(x)$ funksiya uchun qat'iy minimum yoki qat'iy maksimum nuqta bo'ladi. Yuqorida aytib o'tilgan mulohazalarga ko'ra, ko'rsatib o'tilgan shartlar (2) bog'lanish tenglamasiga nisbatan $f(x)$ funksiya uchun shartli qat'iy minimum (maksimum) nuqtasi bo'lishida yetarli shart bo'lib xizmat qiladi. Biroq $g(\tilde{x}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyani bilish talab etilganligi sababli, undan amaliyotda foydalanish noqulaylik tug'diradi.

Avvalo (12) shartga ko'ra,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (17)$$

tenglamalar sistemasi ixtiyoriy tayinlangan $dx_3, dx_4, \ldots, dx_n$ larda $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ o'zgaruvchilarga nisbatan bir qiymatli yechilishini anglab yetamiz. $f(x)$ funksiyalarni x nuqtadagi differensialini nolga tengligini ifodalovchi sistemani: $df(x^{(i)}) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ (2) shart bajarilganda, qisqacha

$$df = 0, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \quad (18)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Aytaylik, $\tilde{x}^{(0)}$ nuqta $F(x)$ Lagranj funksiyasi uchun statsionar nuqta bo'lsin ((11) ga qarang). Bu $dF(x^{(0)}) = 0$ ya'ni $x^{(0)}$ nuqtada $\nabla F = \sum_{i=1}^{m} \nabla f_i = 0$ ekanligini anglatadi. 2-teoremada ko'rsatib o'tilganki [21], bu holda $\tilde{x}^{(0)}$ nuqta $g(x)$ funksiya uchun statsionar nuqta bo'ladi, ya'ni

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0. \quad (19)$$

Endi (19) formulani yana bir bor tahlil qilamiz va

$$d^2 g(\tilde{x}^{(0)}) = (d^2 F(\tilde{x}^{(0)}))_{dx_i = \ldots} \quad (20)$$

tenglikni o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

Bu tenglikni $x = x^{(0)}$ da $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ o'zgaruvchilarning tengligi deb tushunish kerak. (20) tenglikning o'ng tomonidagi differensial ifodaga kiruvchi qolgan $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ o'zgaruvchilar (33) tenglamalar sistemasidan aniqlanadi yoki

$$dx_i = d\varphi_i(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

ifodaga teng kuchli (oldingi paragrafdagi (6) formulaga qarang) bo'ladi. O'zgaruvchilarni tanlashga nisbatan birinchi differensial formaning invariantligidan va (19) formulaga ko'ra,

$$dg(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Bu tenglikga $f(x)$ Lagranj funksiyasiga kiruvchi λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ o'zgarmaslarga mos ravishda ko'paytirilgan (17) ayniyatni chap tomoni yig'indisini (nolga teng bo'lgan), olib kelib qo'shamiz, (aniqrog'i, (17) tenglikning i-sini λ_i o'zgarmasga ko'paytiriladi). U holda (11) shartdan foydalanib, quyidagi

$$dg(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \right] dx_i \Big|_{x = x^{(0)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0,$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu esa (19) tenglikni o'rinli ekanligini isbot qiladi.

(20) tenglik ham shu usulga o'xshash isbot qilinadi. Eng avvalo $g(x)$ funksiya uchun $\tilde{x}^{(0)}$ nuqtadagi ikkinchi differensialni yozamiz:

$$d^2 g(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} d^2 x_i \quad (21)$$

So'ngra, (2) bog'lanish tenglamalarini differensiallash natijasida hosil

bo'lgan ayniyatni differensiallab, ya'ni quyidagi ayniyatdan

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial f}{\partial \lambda_1}d\lambda_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \lambda_m}d\lambda_m = 0, \quad i = 1,2,\dots,m$$

$x^{(0)}$ nuqtada quyidagi

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial \lambda_i}d\lambda_i = 0, \quad i = 1,2,\dots,m \qquad (22)$$

tenglikka kelamiz.

(22) formulada x_i sini Lagranj funksiyasida ishtirok etuvchi $\lambda_j, j=1,2,\dots,m$ o'zgarmasga ko'paytirib, hosil bo'lgan ifodaga (21) tenglikni o'ng tomonini qo'shib, quyidagi tenglikni

$$d^2 g(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}dx_i$$

olamiz, bu yerda $dx_i, i=1,2,\dots,n$, (18) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. $x^{(0)}$ nuqta Lagranj funksiyasining statsionar nuqtasi bo'lganligidan, oxirgi tenglikning ikkinchi qo'shiluvchisi nolga aylanadi, bu bilan (20) formulaning isbotiga kelamiz.

2-ta'rif. *$dx_i, i=1,2,\dots,n$, o'zgaruvchili $d^2F(x^{(0)})$ kvadratik forma bu o'zgaruvchilar (18) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi sharti ostida musbat (mos ravishda manfiy) aniqlangan kvadratik forma deyiladi, agar (18) tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $dx_i, i=1,2,\dots,n$, $\sum dx_i \neq 0, i=1,2,\dots,n$ bo'lgan o'zgaruvchilar uchun $d^2F(x^{(0)}) > 0$ (mos ravishda $d^2F(x^{(0)}) < 0$) tengsizlik bajarilsa.*

Aytaylik, $x^{(0)}$ nuqta (2) bog'lanish tenglamasini qanoatlantirsin va (11) Lagranj funksiyasining statsionar nuqtasi bo'lsin. Aytaylik, Lagranj funksiyasining $x^{(0)}$ nuqtadagi ikkinchi differensiali (18)

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi sharti ostida $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ o'zgaruvchili musbat (mos ravishda manfiy) aniqlangan kvadratik forma bo'ladi. U holda (19) va (20) tengliklardan $x^{(0)}$ nuqta $g(x)$ funksiya uchun statsionar nuqta va bu funksiyaning $x^{(0)}$ nuqtadagi ikkinchi tartibli differensiali $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ o'zgaruvchili musbat (mos ravishda manfiy) aniqlangan kvadratik forma bo'lishliligi kelib chiqadi va demak, $g(x)$ funksiya $x^{(0)}$ nuqtada qat'iy minimum (mos ravishda qat'iy maksimum-ga) ga ega bo'ladi, demak, $f(x)$ funksiya $x^{(0)}$ nuqtada (2) bog'lanish tenglamasiga nisbatan qat'iy shartli minimum (qat'iy shartli maksimum) ga ega bo'ladi.

Olingan natijani teorema ko'rinishida ifoda qilamiz.

2-teorema (qat'iy shartli ekstremumning yetarli sharti). *Agar $x^{(0)}$ nuqta (2) bog'lanish tenglamasini qanoatlantirsa va (11) Lagranj funksiyasining statsionar nuqtasi bo'lsa va agar bu $x^{(0)}$ nuqtada Lagranj funksiyasining ikkinchi differensiali (18) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi sharti ostida $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ o'zgaruvchili musbat aniqlangan (mos ravishda manfiy aniqlangan) kvadratik forma bo'lsa, u holda $x^{(0)}$ nuqta (2) bog'lanish tenglamasiga nisbatan $f(x)$ funksiya uchun shartli qat'iy minimum (shartli qat'iy maksimum) nuqta bo'ladi.*

Shunday qilib, (11) Lagranj funksiyasining statsionar nuqtasini shartli ekstremumga tadqiq qilish uchun, (20) kvadratik formani aniqlanganligini (musbat yoki manfiy) tadqiq qilish kerak, ya'ni (2) bog'lanish sharti bajarilishi ostida $x^{(0)}$ nuqtada Lagranj funksiyasining ikkinchi differensiali (qachonki, $dx_i, i=1,2,\dots,n$, differensial (17) ifoda

bilan bog'liq bo'lganda). Shuni ta'kidlash kerakki, agar qaralayotgan $x^{(0)}$ nuqtada Lagranj funksiyasining ikkinchi differensiali bog'lanish tenglamasi bajarilmaganda musbat (manfiy) aniqlangan bo'lsa, u holda, albatta u bog'lanish tenglamasi bajarilganda ham shunday bo'ladi.

17-misol. $f = x + 2y + 2z$ funksiyaning $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferada ekstremumi topilsin.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$F(x, y, z, \lambda) = x + 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Bu Lagranj funksiyasini statsionar nuqtalarini aniqlaymiz. Buning uchun

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

tenglamalar sistemasini yechamiz. Bu sistemada x, y, z o'zgaruvchilarni yo'qotish orqali $\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Buni yechib, $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ larni olamiz. Shunga ko'ra, Lagranj funksiyasining ikkita $M_1\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ va $M_2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ statsionar nuqtalari bo'ladi. Bu yerda $dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0$ uchun $d^2F(M_1) = 3(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$ va $d^2F(M_2) = -3(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0$ bo'lgani uchun $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ nuqta shartli qat'iy minimum nuqtasi, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ nuqta esa $f(x, y, z) = x + 2y + 2z$ funksiyaning $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ shart ostidagi shartli qat'iy maksimum nuqtasi bo'ladi, $f_{min} = -3$, $f_{max} = 3$.

18-misol. $f_a(x, y) = e^{ax}$, $a \neq 0$ funksiyaning $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + x + y - 4$

shart ostida shartli ekstremumi topilsin.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$F(x, y, \lambda) = e^{ax} + \lambda(x^2 + y^2 + x + y - 4).$$

Lagranj funksiyasining statsionar nuqtalari quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlanadi:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ae^{ax} + \lambda(2x + 1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda(2y + 1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0. \tag{23}$$

Birinchi tenglamani x o'zgaruvchiga, ikkinchi tenglamani y o'zgaruvchiga ko'paytirib ayirsak,

$$\lambda(2x - 2y) = ae^{ax}. \tag{24}$$

Agar $\lambda = 0$ bo'lsa, u holda (23) birinchi va ikkinchi tenglamalaridan $a = 0$ hosil bo'ladi. Lekin $a \neq 0$ bog'lanish tenglamasini qanoatlantirmaydi. Demak, $\lambda \neq 0$ bo'ladi. (24) tenglamada ikkinchi ko'paytuvchi hamma vaqt $2x - 2y + 1 = 0$ musbbat bo'lganligi uchun faqat $a > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bog'lanish tenglamasiga $y = x + \frac{1}{2}$ ifodani qo'ysak, u holda $x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{a}{2}$ ekanligini hosil qilamiz. (11) sistemaning birinchi tenglamasidan $a > 0$ bo'lgani uchun $\lambda = -\frac{a}{4}e^{ax}$ hosil bo'ladi.

Demak, Lagranj funksiyasi yagona $\left(1, 1, -\frac{a}{4}e^{a}\right)$ statsionar nuqtaga ega bo'ladi.

$$d(e^{ax}) = ae^{ax}dx, \quad d^2(e^{ax}) = a^2e^{ax}dx^2,$$
$$d^2(x^2 + y^2 + x + y - 4) = 6\lambda dx^2 + 6\lambda dy^2$$

tengliklarga ko'ra, $\lambda_0 = -\frac{a}{4}e^{a}$ va $x = y = 1$ uchun Lagranj funksiyasining

ikkinchi tartibli differensiali uchun,

$$d^2F(L,L,\lambda_0) = ae^{\lambda_0}\left|adx + dy\right|^2 + 2dxdy + \frac{1}{y}dx^2 + dy^2\Big| \qquad (25)$$

ifoda hosil bo'ladi.

Bog'lanish tenglamasini $x = -1$ nuqtada differensiallab, $dx + dy = 0$ tenglikni hosil qilamiz. $dx = -dy$ ifodani (25) ifodaga olib borib qo'ysak, u holda

$$d^2F(L,L,\lambda_0) = 5ae^{\lambda_0}dx^2$$

ifoda hosil bo'ladi.

Shuning uchun, agar $a > 0$ bo'lsa, u holda $(-1;-1)$ nuqta $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ bog'lanish tenglamasini qanoatlantirgani uchun $f_0(x,y) = e^{ax}$, $a \neq 0$ funksiyaning shartli qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi.

Xuddi shuningdek, agar $a < 0$ bo'lsa, u holda $(-1;-1)$ nuqta $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ bog'lanish tenglamasini qanoatlantirgani uchun $f_0(x,y) = e^{ax}$, $a \neq 0$ funksiyaning shartli qat'iy maksimum nuqtasi bo'ladi.

Izoh. *Agar $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ bog'lanish tenglamasini biror bir o'zgaruvchiga nisbatan yechmoqchi bo'lsak, u holda qiyinchilikka duch kelamiz. Shuning uchun, Lagranj usuli o'zgaruvchilarni yo'qotishning to'g'ridan-to'g'ri usulidan qulay usul hisoblanadi.*

Lagranj ko'paytuvchilari usuli haqida ayrim izohlar. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning (yoki tabiatan boshqacha bo'lgan funksionallarning) ekstremumini ma'lum bir shartlar bilan izlash

haqidagi masala keng tarqalgan masalalardan biridir. Ekstremal masalalar nazariyasi jadal sur'atlarda rivojlanayotgan va keng doiradagi tadbiqlarga ega bo'lgan sohadir. Biz shartlar tengliklar bilan berilgan ekstremal masalalarni bu bog'lanish shartlari yetarlicha silliq bo'lgan funksiyalar bilan berilgan holda qarab chiqdik. Lagranj ko'paytuvchilar usuli keng umumlashmalarga ega va agar shartlar oddiy ma'noda differensial funksiyalar yordamida tenglik va tengsizliklar sistemasi bilan berilgan bo'lsa ham uni qo'llash imkoniyatlari mavjud.

Aniq bir amaliy masalalarda Lagranj ko'paytuvchilari o'z ma'nosiga ega. Masalan, mexanikada Lagranj ko'paytuvchilari bog'lanish variatsiyasini beradi, matematik iqtisodiyotda esa ishlab chiqarilgan mahsulotning bahosini beradi. Ekstremal masalalarni yechishda zamonaviy hisoblash texnikalaridan foydalaniladigan taqribiy yechish usullari ham keng rivojlangan.

19-misol. Qachonki $(x;y)$ nuqtalar $x + y = 0$ to'g'ri chiziqda yotganda $f(x,y) = 0$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz $F(x,y) = xy - \lambda(x + y)$. Hosilalari

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda,$$

bo'lganligi sababli, $F(x,y)$ funksiyaning bog'lanish tenglamasini qanoatlantiruvchi statsionar nuqtalarini aniqlash uchun $y - \lambda = 0$, $x + \lambda = 0$, $x + y = 0$ tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu sistemani yechib, $x = y = \lambda = 0$ nuqtalarni topamiz.

Bog'lanish tenglamasi bajarilganda $f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi ikkinchi differensialini tadqiq qilamiz, ya'ni qachonki $dx=dx_0$ bo'lganda

$$d^2f(x_0,y_0)=2Adx^2 \tag{26}$$

ifodaga ega bo'lamiz, demak, bog'lanish sharti bajarilganda

$$d^2f(x_0,y_0)=2Adx^2>0 \tag{27}$$

tenglikni olamiz, ya'ni (26) ikkinchi differensial ifoda aniqlanmagan kvadratik forma bo'ladi, bog'lovchi shart bajarilganda esa (27) musbat aniqlangan kvadratik formaga aylanadi. Shuning uchun, (x_0,y_0) nuqta qaralayotgan masalaning qat'iy shartli minimum nuqtasi bo'ladi. Ammo mazkur holda buni darhol ko'rish mumkin: $x+y=0$ to'g'ri chiziq bo'yicha $f(x,y)=0$ funksiya $f(x,y)=x^2$ ko'rinishni oladi. Ravshanki, $x=0$ nuqta qat'iy minimumga erishadi.

Shartli ekstremumni tadqiq qilishga doir misollar keltirib o'tamiz.

20-misol.

$$f(x,y)=xy \tag{28}$$

funksiyaning

$$\varphi(x,y)=x+y-2=0,\quad \varphi(x,y)=x^2+y^2-8=0 \tag{29}$$

shartlarda shartli ekstremumi topilsin.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz ((28),(29) tengliklarga qarang)

$$\Phi(x,y,z)=xy+\lambda_1(x+y-2)+\lambda_2(x^2+y^2-8),$$

va λ_1,λ_2 parametrlarni aniqlash, ekstremum mumkin bo'lgan nuqtalarning koordinatalarini aniqlash uchun mos tenglamalar sistemasini yozamiz

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=y+\lambda_1+2\lambda_2x=0, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=x+\lambda_1+2\lambda_2y=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}=x+y-2=0, & x^2+y^2-8=0.\end{cases} \tag{30}$$

(30) sistemani yechib, quyidagilarni topamiz:

$$x=-\frac{11}{4},\quad y=\frac{5}{2},\quad \lambda_1=-\frac{11}{4},\quad \lambda_2=\frac{11}{12},\quad z=\frac{231}{32}.$$

$\Phi(x,y,z)$ funksiyaning 2-differensiali quyidagiga teng bo'ladi

$$d^2\Phi(x,y,z)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}dydz.$$

Bizning holda

$$d^2\Phi(x,y,z)=2\lambda_2dx^2+2\lambda_2dy^2+2dxdy \tag{31}$$

(29) bog'lanish shartlaridan foydalanib,

$$\begin{cases}dx+dy-dz=0,\\ dx+dy-dz=0,\end{cases}$$

ni olamiz. Bundan $dx=dz=dy$. Bularni (31) ga qo'yib, $B(x_0,y_0)=2\lambda_2dx^2$ ni olamiz. Statsionar nuqtada $B(x_0,y_0)=5dx^2>0$ ya'ni $A\left(-\frac{11}{4},\frac{5}{2},-\frac{11}{4}\right)$ nuqtada $f_{max}(A)=\frac{605}{32}$ ga teng bo'lgan maksimumga ega bo'ladi.

21-misol. $z=\cos^2x+\cos^2y$ funksiyaning $y-x=\frac{\pi}{4}$ shartda shartli ekstremumi topilsin.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$\Phi(x,y,z)=\cos^2x+\cos^2y+\lambda\left(y-x-\frac{\pi}{4}\right)$$

λ va ekstremum mumkin bo'lgan nuqtalarning koordinatalarini aniqlash uchun mos sistemasini yozamiz

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-2\cos x\sin x-\lambda=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-2\cos y\sin y+\lambda=0,\quad y-x-\frac{\pi}{4}=0,$$

yoki

$$\sin 2x = -\lambda \qquad (32)$$

$$\sin 2y = -\lambda, \qquad (33)$$

$$x = y = \frac{\pi}{4} \qquad (34)$$

(32) va (33) dan $\sin 2x - \sin 2y = 0$, yoki

$$2\sin(x-y)\cos(x+y) = 0, \qquad (35)$$

ga ega bo'lamiz. (34) dan $\cos(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ga egamiz. (35) dan esa $\sin(x-y) = 0$, bundan

$$x - y = k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (36)$$

ni topamiz. (34) va (36) tenglamalarni birgalikda yechib,

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \quad y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ga ega bo'lamiz. $\Phi(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini topamiz

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -2\cos 2x, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -2\cos 2x, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 0.$$

$A_k\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$ nuqtada

$$\Phi_k = \Phi(A_k) = 4\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos k\pi = 2(-1)^k$$

ega bo'lamiz. Demak, $A_k\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$ nuqtada shartli ekstremum mavjud. So'ngra, $k = 2n$ da $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\Big|_{A_{2n}} = -2\sqrt{2} < 0$ bo'ladi, shuning uchun A_{2n} nuqtada shartli maksimum $z_{max} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ga teng, $k = 2n+1$ da $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\Big|_{A_{2n+1}} = 2\sqrt{2} > 0$ bo'ladi, ya'ni A_{2n+1} nuqtada shartli minimum $z_{min} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ga teng

bo'ladi.

22-misol. $z = xy$ funksiyaning $x + y = 1$ shartda shartli ekstremumi topilsin.

Yechish. Har doimgidek Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$\Phi(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$$

va λ sonni hamda ekstremum bo'lgan nuqtalarni topish uchun

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = x + \lambda = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = x + y - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = x + y - 1 = 0, \quad x + y = 1,$$

sistemani yozib olamiz. Bu sistemadan sakkizta statsionar nuqtalarni topamiz:

$\lambda = -\frac{1}{2}$ uchun $x = \frac{1}{2}, \ y = \frac{1}{2}$, ya'ni $A_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

$\lambda = \frac{1}{2}$ uchun $x = -\frac{1}{2}, \ y = \frac{3}{2}$, ya'ni $A_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Lagranj funksiyasining ikkinchi differensialini topamiz

$$d^2\Phi = 2\lambda dx^2 + dx\,d\lambda + dx\,d\lambda + 2\lambda dy^2 + dy\,d\lambda + dy\,d\lambda = 2\lambda dx^2 + 2dx\,d\lambda + 2\lambda dy^2 + 2dy\,d\lambda. \qquad (37)$$

A_1 nuqta va $\lambda = -\frac{1}{2}$ uchun

$$d^2\Phi(A_1, \lambda_1) = -dx^2 - dx\,d\lambda - dx\,d\lambda + 2dy^2 + dy\,d\lambda + dy\,d\lambda = -(dx^2 + 2dx\,d\lambda + d\lambda^2) + d\lambda^2 + 2dy^2 + 2dy\,d\lambda.$$

Oxirgi qo'shiluvchida differensialni uning qiymati bilan almashtirsak, bog'lovchi tenglamadan A_1 nuqtada $d\lambda = -(dx + dy)$ bo'lib, quyidagi

$$d^2\Phi(A_1, \lambda_1) = -(dx + dy)^2 + d\lambda^2 + 2(dy + dy)^2 > 0$$

tengsizlikni olamiz. Bundan A_1 nuqtada z funksiya maksimumga ega bo'ladi. Xuddi shuningdek, z funksiyani A_2 va A_3 nuqtalarda ham maksimumga erishishligini ko'rish mumkin.

A_0 nuqta va $\lambda = \frac{1}{2}$ uchun (37) va bog'lovchi tenglamadan

$$d^2\Phi(A_0, \lambda_0) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz = dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$d^2\Phi(A_0, \lambda_0) = (dx - dy)^2 + dz^2 + 2dz(dx + dy) > 0$$

tengsizlik kelib chiqadi, natijada A_0 nuqtada u funksiya minimumga ega bo'ladi. u funksiyani A_1, A_2 va A_3 nuqtalarda ham minimumga erishishligini ko'rish qiyin emas.

23-misol. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ ($a_i > 0, x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

Gilbert tengsizligini isbotlang.

Yechish. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 1$ shartda $u = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)$ funksiyani shartli ekstremumga tekshiramiz. Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$\Phi = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right) + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

birinchi tartibli hosilasini olamiz

$$\Phi_{x_j} = x_j^{q-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right) - \lambda a_j = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (38)$$

va sistemani hosil qilamiz. Umumiylikka ziyon keltirmagan holda $\lambda \neq 0$ va $a_i > 0, (i = 1, 2, \ldots, n)$ deb hisoblaymiz. (38) tenglamalar sistemasidagi j-tenglikni shu sistemadagi m- tenglikka bo'lib, $\left(\frac{x_j}{x_m}\right)^{q-1} = \frac{a_j}{a_m}$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerdan tayinlangan m larda

$$x_j = x_m\left(\frac{x_j}{x_m}\right)^{\frac{1}{q-1}} = \left(\frac{a_j}{a_m}\right)^{\frac{1}{q-1}} x_m, \quad (j = 1, 2, \ldots, n, \; j \neq m). \qquad (39)$$

ifodaga ega bo'lamiz. (39) tenglikni bog'lanish tenglamasiga qo'yib,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \left[\frac{a_j}{a_m}\right]^{\frac{1}{q-1}} x_m a_j + \sum_{i \neq m} a_i \left[\frac{a_i}{a_m}\right]^{\frac{1}{q-1}} x_m = 1$$

tenglikka ega bo'lamiz. $x_m > 0$, $\frac{1}{q-1} > 0$ ekanliklaridan foydalanib, ekstremum nuqtalarning koordinatalarini topamiz

$$x_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{q}{q-1}}}, \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Yetarli shartni topish uchun ikkinchi differensialni hisoblaymiz

$$d\Phi = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{q-1} dx_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i = 0$$

$$d^2\Phi = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\left[(q-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^{q-2} dx_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i^{q-1} dx_j\right] = (q-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{q-2} dx_i^2\right)$$

bo'ladi. Bog'lanish tenglamasiga ko'ra, $\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i = 0$ bo'ladi. Shuning uchun, statsionar nuqtada

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{q-2} dx_i^2\right) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{q}{q-1}}}\right)^{q-2} \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i^2 = 0,$$

bo'ladi, bundan esa $d^2\Phi = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, u funksiya statsionar nuqtalarda minimumga ega bo'ladi, $u_{min} = A$, shuning uchun bo'ladi, bu esa Gelder tengsizligiga ekvivalent bo'ladi. Tengsizlik isbot bo'ldi.

24-misol. $u = x^m y^n z^p$ funksiyaning

$$x + y + z = a, (x > 0, y > 0, z > 0, m > 0, n > 0, p > 0, a > 0)$$

shart ostida shartli ekstremumi topilsin.

Yechish. Ravshanki, u va $v = \ln u$ funksiyalarning ekstremum nuqtalari ustma-ust tushadi. Shuning uchun $v = \ln u = m\ln x + n\ln y + p\ln z$ funksiyani $x + y + z = a$ shart ostida shartli ekstremumini tadqiq qilish bilan shug'ullanamiz. Buning uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$\Phi(x, y, z) = m\ln x + n\ln y + p\ln z + \lambda(x + y + z - a)$$

va

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{m}{x} + \lambda = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{n}{y} + \lambda = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{p}{z} + \lambda = 0,\quad x + y + z = a$$

sistemadan ekstremum bo'lishi mumkin bo'lgan nuqtalarning koordinatalarini topamiz: nuqtalarda $x = mt$, $y = nt$, $z = pt$, bu yerda $t = \frac{a}{m+n+p}$, (mt, nt, pt) nuqtada Φ funksiyaning ikkinchi differensiali

$$d^2\Phi = -\frac{m\,dx^2}{x^2} - \frac{n\,dy^2}{y^2} - \frac{p\,dz^2}{z^2}$$

quyidagi

$$d^2\Phi = -\left(\frac{m\,dx^2}{x^2} + \frac{n\,dy^2}{y^2} + \frac{p\,dz^2}{z^2}\right) < 0$$

tengsizlikni qanoatlantiradi, u holda u funksiya $v = \ln u$ funksiya bilan birgalikda (mt, nt, pt) nuqtada maksimumga erishadi va

$$u_{max} = \frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}$$

bo'ladi.

25-misol. $f = xyz$ funksiyaning $x + y + z = 6$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) shartlarda shartli ekstremumi topilsin.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$\Phi(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$$

va barcha o'zgaruvchilar bo'yicha birinchi tartibli hosilalarini olib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0,\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,\quad x + y + z = 0.$$

bu tenglamalarni bog'lanish tenglamalari bilan birgalikda sistema qilib yechib, oltita ekstremum bo'lishi mumkin bo'lgan nuqtalarni topamiz:

$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ uchun $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$ uchun $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Lagranj funksiyasining $d^2\Phi$ ikkinchi tartibli differensialini topamiz va bog'lanish

$$d^2\Phi = 2\lambda_1(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2dx\,dy + 2dx\,dz + 2dy\,dz \tag{40}$$

tenglamalaridan quyidagi munosabatni olamiz

$$dx + dy + dz = 0,\quad dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz = 0. \tag{41}$$

A_1 va A_2 nuqtalar uchun yetarli shartni bajarilishini tekshiramiz. U nuqtalar uchun

$$x = y = 2z,\quad z = -4z. \tag{42}$$

bo'ladi. U holda (40), (41) va (42) tengliklardan

$$d^2\Phi = 3\lambda_1(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$$

bo'ladi. Bu yerdan $\lambda_1 > 0$ bo'lganda (ya'ni A_1 nuqtada) ikkinchi tartibli differensiali $d^2\Phi > 0$ bo'lib, bu nuqtada f funksiya maksimumga ega bo'ladi, $f_{max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$. $\lambda_2 > 0$ bo'lganda (ya'ni A_2 nuqtada) ikkinchi tartibli

differensial $d^2\Phi > 0$ bo'lib, shuning uchun f funksiya bu nuqtada minimumga erishadi. $f_{min} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Shunga o'xshash x va z nuqtalarda f funksiya maksimumga, $f_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ va z nuqtalarda esa funksiya minimumga $f_{min} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ erishishligini ko'ramiz.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

Quyidagi funksiyalarning shartli ekstremum nuqtasi topilsin.

14. $f(x, y)$, agar $x + y = 1$. **15.** $f(x, y) = xy$, agar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **16.** $f(x, y)$, agar $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$. **17.** $f(x, y)$, agar $x + y = 1$. **18.** $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, agar $x^2 + y^2 = 1$. **19.** $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, agar $x + y + z = 1$. **20.** $f(x, y, z) = \cos x + \cos y + \cos z$, agar $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. **21.** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$, agar $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$.

tengsizlikni isbotlang.

22. Manfiy bo'lmagan x, y, z sonlar yig'indisi o'zgarmas $x + y + z = k$ doimiy kattalikni saqlaydi sharti ostida $x^n y^m z^p$ ko'paytmaning eng katta qiymati topilsin.

23. $M(x_0, y_0)$ nuqtadan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsgacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

24. $y = x^2$ parabola bilan $x - y - 2 = 0$ to'g'ri chiziq orasidagi masofa topilsin.

25. $x^2 + y^2 = R^2$ aylanaga ichki chizilgan eng katta yuzaga ega bo'lgan to'rtburchakning tomonlari topilsin.

26. R radiusli sharga eng katta to'la sirtga ega bo'lgan silindr ichki chizilsin.

Nazorat savollari

1. Funksional analiz, differensial hisob va qavariq analiz elementlari haqida gapirib bering.
2. Yo'nalish bo'yicha hosila. Lagranj bo'yicha variatsiya va Gato hosilasi ta'rifini keltiring.
3. Bitta va tenglamalar sistemasidan tenglamadan aniqlangan oshkormas funksiyalarni qanday tushunasiz.
4. Akslantirishlar. Vektorli va chiziqli akslantirishlarni tushuntirib bering.
5. Qavariq ob'yektlar va to'plamlar ustida amallar misollar keltiring.
6. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumlari. Shartsiz ekstremumini ta'riflang.
7. Ekstremumning zaruriy va yetarli shartlarini keltiring.
8. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning shartli ekstremumi haqida nima bilasiz.

V BOB

VARIATSION HISOBNING UMUMIY TUSHUNCHALARI VA USULLARI

1-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumidan variatsion masalalarga o'tish.

Klassik variatsion hisob funksional fazolarda integral ko'rinishda berilgan funksionallarning ekstremumlarini topishning umumiy usullarini o'rganadi. Boshqacha qilib aytganda, hisob funksionallarni ekstremumga erishish shartlarini belgilaydi. Kelgusida ko'ramizki, integral ko'rinishdagi funksionallar matematika, matematik fizika, kvant mexanikasi, tutash muhitlar mexanikasi masalalarida va boshqa fanlarning bo'limlarida keng qo'llaniladi.

Aytish lozimki, *variatsion hisob* cheksiz o'lchovli fazolarda maksimum va minimumlarni topishga imkon beruvchi - differensial hisobning umumlashmasi hisoblanadi. Shunday qilib, klassik variatsion hisob cheksiz o'lchovli fazolardagi funksionallar uchun ekstremal masalalar umumiy nazariyasining asosiy qismi hisoblanadi. Ekstremal masalalar nazariyasi bo'lim sifatida variatsion hisobdan tashqari matematik va chiziqli dasturlash, optimal boshqaruv nazariyalarini ham o'z ichiga oladi. Ekstremal masalalar nazariyasi hozirgi kunda ham jadal sur'atlar bilan rivojlanmoqda.

Ma'lumki, klassik analizning taraqqiy etishi uchun bir yoki ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumlarini topish masalasi qanchalik muhim ahamiyatga ega bo'lgan. Biroq, qadimgi zamonlardan chekli o'lchovli matematik analiz masalalariga qo'shib bo'lmaydigan

ekstremal masalalar ham ma'lum bo'lgan. Bunday masalalardan eng qadimgisi klassik *izoperimetrik* masala hisoblanadi.

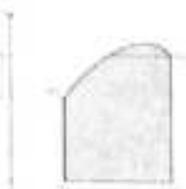
Variatsion hisob 1696 yildan asta sekin rivojlana boshlagan Sankt-Peterburg Fanlar akademiyasining haqiqiy a'zosi L. Eyler (1707-1783) fundamental tadqiqotlari natijasida, o'zining tadqiqot usullari bilan variatsion hisob mustaqil matematik fan sifatida shakllandi. Shuning uchun, L. Eylerni haqli ravishda variatsion hisob fanining asoschisi deb hisoblash mumkin.

Variatsion hisob masalalari to'g'risida kengroq tasavvurga ega bo'lish uchun ulardan ayrimlarini ko'rib o'tamiz. Bu masalalar variatsion hisobning rivojiga katta ta'sir ko'rsatgan masalalardan hisoblanadi.

1. Didona masalasi. Masalaning matematik bayoni quyidagicha: berilgan uzunlikdagi barcha silliq yopiq chiziqlar ichidan shunday chiziqni topingki, u qamrab olishi mumkin bo'lgan yuza eng katta bo'lsin.

Yuqoridagi masalani ozgina o'zgartirilgan holda ham qo'yish mumkin. Mazkur masala ham klassik masala hisoblanib, shartli ekstremum masalalari sinfiga kiradi.

Masalaning qo'yilishi. Berilgan P va P_1 nuqtalarni tutashtiruvchi l uzunlikdagi $(l > |PP_1|)$ silliq egri chiziqlar ichidan mumkin bo'lgan eng katta yuzani qamrab oluvchi egri chiziqni toping.



1- rasm

P va P_1 nuqtalardan berilgan o'qqa qarab ketuvchi ikki perpendikulyar kesmalar orasida

joylashgan nuqtalarni $P\ P(x_1, y_1)$ $P\ P(x_2, y_2)$ deb olamiz. Aytaylik, $y = y(x), y > 0$ izlanayotgan egri chiziq bo'lsin (1-rasm). Bu holda masala quyidagicha qo'yiladi: shunday $y = y(x), y > 0$ funksiyani topish kerakki, natijada

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad \int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx = I$$

bo'lsin va

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

integral eng katta qiymatga erishsin.

Mazkur masala rivoyatlarda keltirilishicha Kartagenlik malika Didonaga tegishli deb hisoblanadi.

2. Izoperimetrik masala. Bu masalada berilgan uzunlikdagi eng katta S maydonini chegaralovchi yopiq chiziqni topish talab qilinadi. boshqacha qilib aytganda, berilgan uzunlikdagi silliq yopiq egri chiziqlar orasidan eng katta maydonni chegaralovchi egri chiziqni topish talab qilinadi.

Ushbu muammo ustida Yunon faylasuflari miloddan avvalgi V-VII asrlardayoq bosh qotirishgan, mashhur yunon faylasufi Aristotel shular jumlasidandir. Unga bunday egri chiziq doiradan iborat ekanligi ma'lum bo'lgan. Bu masalada o'ziga xos qo'shimcha shart - egri chiziqning uzunligi o'zgarmas bo'lishi kerakligi sharti ostida S funksionalning ekstremumini aniqlash talab qilinadi - ya'ni.

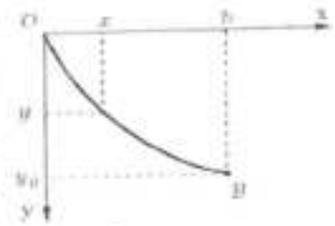
$$l = \int_0^t \sqrt{1 + \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt$$

funksional o'zgarmas qiymatli (yoki doimiylikni saqlaydi) bo'lganda S funksionalning ekstremumini topish talab qilinadi. Bunday ko'rinishdagi shartlar *izoperimetrik shartlar* deb ataladi. Izoperimetrik shartli masala -

larni umumiy yechish usullari L.Eyler tomonidan ishlab chiqilgan.

Klassik analizga taalluqli bo'lmagan yana bir ekstemum masalasi-bu 1696 yili mashhur matematik logan Bernulli tomonidan qo'yilgan *brahistoxrona haqidagi masala*, ya'ni *tez tushish chizig'i* masalasidir.

3. Brahistoxrona haqidagi masala. 1696 yilda logann Bernulli dunyo matematiklari e'tiboriga eng qisqa tushish chizig'i - braxistoxrona haqidagi masalani bayon qiladi. Bu masalada vertikal tekislikning turli sathlarida O va B nuqtalar berilgan bo'lsa, bu nuqtalarni shunday silliq egri chiziq bilan tutashtirish kerakki, boshlang'ich tezligi nol bo'lganda og'ir moddiy shar shu egri chiziq bo'ylab O nuqtadan B nuqtaga minimal (eng qisqa) vaqtda yetib kelishini topish talab etiladi (2- rasm).



2 - rasm

Bu masalani brahistoxrona haqidagi masala deb nomlanishi yunoncha "brahistos"- eng qisqa, "xronos"- vaqt so'zlaridan kelib chiqqanligidadir. Shuning uchun, ayrim hollarda bu masala "eng qisqa vaqt" haqidagi masala deb ham yuritiladi. Ko'rish mumkinki, O va B nuqtalarni birlashtiruvchi eng tez pastga tushish chizig'i to'g'ri chiziq bo'la olmaydi, garchi u O va B nuqtalari orasidagi eng qisqa masofa bo'lsa ham, chunki moddiy shar to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlana-

yotganda harakat tezligi nisbatan sekin o'sib boradi. Agar egri chiziqni olsak, O nuqtadan tushib kelayotgan yo'l uzunroq bo'lsada, yo'lning ko'proq qismi kattaroq tezlik bilan bosib o'tiladi. Ma'lum bo'lishicha bunday egri chiziq sikloidaning yoyi bo'ladi. Brayxistoxrona haqidagi masala yechimi I.Bernulli, Ya.Bernulli, G.Leybnis, I.Nyuton va G.Lopitallar tomonidan taqdim etilgan.

Masalani matematika tiliga ko'chiraylik. Tushayotgan nuqtaning boshlang'ich tezligi nolga teng, ishqalanish kuchini esa hisobga olmaymiz deb faraz qilaylik. Qachonki, O nuqta boshlang'ich holatidan Ox to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining Oy vertikal o'qi bo'yicha masofasi y ga teng bo'lgan momentgacha nuqta potensial energiyasini yo'qotadi, qaysiki energiya mgy ga kamayadi. Bunda kinetik energiya $\frac{mv^2}{2}$ ga ortadi, yerda v – nuqtaning tezligi. Energiyaning saqlanish qonuniga ko'ra (ishqalanish yo'qligi tufayli),

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = 0,$$

tenglikka ega bo'lamiz, bundan $v = \sqrt{2gy}$ ni topamiz.

So'ngra, $y = y(x)$ egri chiziqni xarakat tracktoriyasi deb faraz qilib,

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{dt} dx,$$

tenglikni olamiz, ds – egri chiziq yoyining uzunligi, t – vaqt.

Shunday qilib,

$$\sqrt{2gy}dt = \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

tenglik o'rinli bo'lib, biz quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Bu tenglamadan O nuqtadan A nuqtaga kelishi uchun zarur bo'lgan vaqtni topamiz:

$$t = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \qquad (1)$$

Boshlang'ich va oxirgi nuqtalarning ma'lum koordinatalari $y(x)$ funksiya

uchun chegaraviy shartlarni beradi:

$$y(0) = 0, \quad y(b) = a. \qquad (2)$$

Shunday qilib, chegaraviy shartlar ostida t vaqtga minimum beruvchi $y(x)$ silliq funksiyani topish kerak bo'ladi.

Variatsion hisobning asosiy masalasi brahistoxrona haqidagi masala-ning bevosita umumiy holi sifatida yuzaga keldi. Bu masala matematik masalalarning xususiyatlarini mujassamlashtirgan bo'lib, variatsion hisobning butun tarixi davomida yangi usullarni sinab ko'rish ob'yekti hamda juda ko'p qiziqarli va muhim umumlashmalarning bevosita asosi bo'lib xizmat qildi. Brahistoxrona haqidagi masalaga kelgusida batafsil to'xtalib o'tamiz.

4. *Yorug'likning sinishi haqidagi masala.* Ferma prinsipiga ko'ra, A nuqtadan chiqib B nuqtaga tushuvchi yorug'lik nuri, o'tish vaqti eng kichik bo'lgan yo'lni tanlaydi. Birjinsli muhitda yorug'lik tezligi o'zgarmas, yorug'lik esa to'g'ri chiziq bo'yicha tarqaladi.

Agarda muhit birjinsli bo'lmasa, u holda yorug'lik tezligi nuqtadan nuqtaga o'zgaradi, yorug'lik nurining trayektoriyasi esa endi to'g'ri chiziq bo'lmaydi. Aytaylik, muhit atmosfera bo'lsin. Chunki xavoning zichligi dengiz satxidan y balandlikga bog'liq bo'ladi, u holda yorug'lik tezligi v ham y balandlikga bog'liq bo'ladi, ya'ni $v(y)$ deb faraz qilishga haqlimiz. U $v(y)$ ma'lum funksiya orqali ifodalanadi. Endi A nuqtadan chiqib B nuqtaga tushuvchi yorug'lik nurining trayektoriyasini aniqlaymiz. A va B nuqtalardan o'tuvchi vertikal tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, natijada Ox o'q dengiz sathiga gorizontal joylashgan bo'lsin. Bizga $A(a,y_a)$ va $B(b,y_b)$ nuqtalarning koordinatalari ma'lum. Yorug'lik nuri $[a,b]$ kesmada aniqlangan $y(x)$ silliq funksiyaning grafigi bo'lgan egri chiziq bo'yicha tarqaladi deb faraz qilamiz (3 - rasm).



3 - rasm

Qilingan farazlarga ko'ra, $v(y)=\frac{ds}{dt}$ bo'ladi, bu yerda $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$ – $y=y(x)$ egri chiziq yoyi uzunligining differensiali.

Shuning uchun $dt=\frac{ds}{v(y)}$ va yorug'lik nurining A nuqtadan B nuq-taga o'tishi uchun zarur bo'lgan vaqt

$$t=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}dx, \qquad (3)$$

integral orqali ifoda qilinadi.

Masala $y(a)=y_a$ va $y(b)=y_b$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi va (3) integralga eng kichik qiymat beruvchi $y=y(x)$ silliq funksiyani topishdan iborat bo'ladi.

(1) va (3) integrallarni solishtirib shuni aytish lozimki, brakistoxrona haqidagi masala yorug'lik nurining sinishi haqidagi masalaning xususiy holidan iborat. Bu tasdiqni birinchi bo'lib I.Bernulli payqagan.

5. Geodezik chiziq haqidagi masala. To'g'ri burchakli $Oxyz$ koordinatalar sistemasida $\varphi(x,y,z)=0$ tenglama bilan berilgan sirda A va B nuqtalarni tutashtiruvchi eng qisqa uzunlikka ega bo'lgan egri chiziq o'tkazamiz (4 - rasm). Qandaydir sirtning ikki nuqtasi orasidagi uzunligi bo'yicha eng qisqa chiziq *geodezik chiziq* deb ataladi. Masalan, tekislikning geodezik chiziqlari to'g'ri chiziqlardir, sferada, katta doiraning yoyi geodezik chiziq bo'ladi. Bu holda biz, aslida shartli ekstremum deb ataluvchi odatiy variatsion masalani o'rganayotgan bo'lamiz va funk-siyalarni topish kerak bo'ladi.

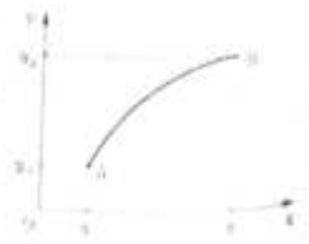
$\varphi(x,y,z)=0$ sirtni silliq deb faraz qilamiz, izlanayotgan egri chiziq-lar esa $y=y(x)$ va $z=z(x)$ silliq funksiyalar yordamida $x=x(t)$, $z=z(x)$, $x\in[a,b]$, tenglamalar bilan berilishi mumkin. U holda uning uzunligi

$$L=\int_a^B \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}dx, \qquad (4)$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Masalada, $[a,b]$ kesmada shunday $y=y(x)$, $z=z(x)$, silliq funksiyalarni aniqlash kerakki, ular quyidagi berilgan shartlarni

Agarda muhit birjinsli bo'lmasa, u holda yorug'lik tezligi nuqtadan nuqtaga o'zgaradi, yorug'lik nurining trektoriyasi esa endi to'g'ri chiziq bo'lmaydi. Aytaylik, muhit atmosfera bo'lsin. Chunki xavoning zichligi dengiz satxidan y balandlikga bog'liq bo'ladi, u holda yorug'lik tezligi v ham y balandlikga bog'liq bo'ladi, ya'ni $v(y)$ deb faraz qilishga haqlimiz. U $v(y)$ ma'lum funksiya orqali ifodalanadi. Endi A nuqtadan chiqib B nuqtaga tushuvchi yorug'lik nurining trektoriyasini aniqlaymiz. A va B nuqtalardan o'tuvchi vertikal tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, natijada Ox o'q dengiz sathiga gorizontal joylashgan bo'lsin. Bizga $A(a,y_a)$ va $B(b,y_b)$ nuqtalarning koordinatalari ma'lum. Yorug'lik nuri $[a,b]$ kesmada aniqlangan $y(x)$ silliq funksiyaning grafigi bo'lgan egri chiziq bo'yicha tarqaladi deb faraz qilamiz (3 - rasm).



3 - rasm

Qilingan farazlarga ko'ra, $v(y)=\frac{ds}{dt}$ bo'ladi, bu yerda $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ – $y=y(x)$ egri chiziq yoyi uzunligining differensiali.

Shuning uchun $dt=\frac{ds}{v(y)}$ va yorug'lik nurining A nuqtadan B nuq-taga o'tishi uchun zarur bo'lgan vaqt

$$t=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}dx, \qquad (3)$$

integral orqali ifoda qilinadi.

Masala $y(a)=y_a$ va $y(b)=y_b$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi va (3) integralga eng kichik qiymat beruvchi $y=y(x)$ silliq funksiyani topishdan iborat bo'ladi.

(1) va (3) integrallarni solishtirib shuni aytish lozimki, braxistoxrona haqidagi masala yorug'lik nurining sinishi haqidagi masalaning xususiy holidan iborat. Bu tasdiqni birinchi bo'lib I.Bernulli payqagan.

5. Geodezik chiziq haqidagi masala. To'g'ri burchakli $Oxyz$ koordinatalar sistemasida $\varphi(x,y,z)=0$ tenglama bilan berilgan sirtda A va B nuqtalarni tutashtiruvchi eng qisqa uzunlikka ega bo'lgan egri chiziq o'tkazamiz (4 - rasm). Qandaydir sirtning ikki nuqtasi orasidagi uzunligi bo'yicha eng qisqa chiziq *geodezik chiziq* deb ataladi. Masalan, tekislikning geodezik chiziqlari to'g'ri chiziqlardir, sferada, katta doiraning yoyi geodezik chiziq bo'ladi. Bu holda biz, aslida shartli ekstremum deb ataluvchi odatiy variatsion masalani o'rganayotgan bo'lamiz. va funk-siyalarni topish kerak bo'ladi.

$\varphi(x,y,z)=0$ sirtni silliq deb faraz qilamiz, izlanayotgan egri chiziq-lar esa $y(x)$ va $z(x)$ silliq funksiyalar yordamida $y=y(x)$, $z=z(x), x\in[a,b]$, tenglamalar bilan berilishi mumkin. U holda uning uzunligi

$$L=\int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \qquad (4)$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Masalada, $[a,b]$ kesmada shunday $y=y(x)$, $z=z(x)$, silliq funksiyalarni aniqlash kerakki, ular quyidagi berilgan shartlarni

$\varphi(x, y(x), z(x)),\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,\ z(x_1) = z_1,\ z(x_2) = z_2$

qanoatlantirsin va (4) integralga minimal qiymat bersin.

Tuzilgan masalalarning o'ziga xosligi shundaki, ulardagi noma'lumlar integralning qiymatini eng kichik qilishlari kerak bo'lgan funksiyalardir. Ushbu masala 1698 yilda Ya. Bernulli tomonidan yechilgan, lekin mazkur turdagi masalalarni yechish ning umumiy usullari L. Eyler va J.Lagranjning tadqiqot ishlarida uchraydi.

Yuqorida keltirilgan masalalarning yechish usullariga keyingi boblarda batafsil to'xtalib o'tamiz.

Fizika masalalarida ba'zi $z = f(x)$ funksiyalarning maksimal va minimal qiymatlarini aniqlash zarur bo'lgan masalalar bilan bir qatorda, ko'pincha funksional deb ataluvchi maxsus turdagi miqdorlarning maksimal va minimal qiymatlarini topish kerak bo'ladi.

Qiymatlari bir yoki bir nechta funksiyalar yordamida aniqlanadigan o'zgaruvchi miqdor *funksional* deb ataladi. Funksionallarning maksi-mumini yoki minimumini tadqiq qilish talab qilingan masalalar *variatsion masalalar* deb ataladi.

Masalan, berilgan ikkita A va B nuqtalarni tutashtiruvchi tekis (yoki fazoviy) egri chiziqning l uzunligi funksional bo'ladi, agar $y = y(x)$ egri chiziqning tenglamasi berilgan bo'lsa, u holda l miqdorni qiymatini hisoblash mumkin bo'ladi, ya'ni

$$l = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Biror sirtning S yuzasi ham funksional bo'la oladi, chunki bu yuza $z = z(x, y)$ sirt tenglamasiga kiruvchi $z = z(x, y)$ funksiyani, ya'ni sirtni tanlash yordamida aniqlanadi. Ma'lumki,

$$S(z(x,y)) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

bu yerda D – berilgan sirtning xOy tekislikka proyeksiyasi.

Inertsiya momentlari, statik momentlar, biror birjinsli chiziq yoki sirtning og'irlik markazi koordinatalari ham funksionallarga misol bo'la oladi. Barcha misollarda biz funksionallarga xos xususiyatni ko'ramiz: bunda funksiya (yoki vektor funksiya) ga biror son mos qo'yiladi.

Mexanika va fizikaning ko'pgina qonunlari o'rganilayotgan jarayonda ba'zi bir funksionalning minimumga yoki maksimumga erishishi kerakligini tasdiqlaydi. Qonunlarning bunday ifodalanishi mexanika va fizikaning *variatsion prinsiplari* deb ataladi. Ushbu variatsion prinsiplarga quyidagilarni: eng kam harakat prinsipi, energiyaning saqlanish qonuni, impulsning saqlanish qonuni, harakat miqdorining saqlanish qonuni, klassik va relyativistik maydon nazariyasining turli xil variatsion prinsiplari, optikada Ferma prinsipi, Yakobi prinsipi, elastiklik nazariyasida Kastiliyano prinsiplarini misol qilib keltirish mumkin.

Keyingi paragraflarda turli xildagi variatsion masalalarning yechish usullarini keltirib o'tamiz, bundan tashqari, asosan, amaliyotda ko'p uchraydigan, variatsion hisobda muhim hisoblangan integrallar yordamida beriluvchi quyidagi funksionallarini ekstremumga tekshi-

rish bilan shug'ullanamiz:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \quad \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x))dx,$$

$$\iint_{(D)} F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy,$$

bu yerda F berilgan funksiya, $y(x), y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), z(x, y)$ lar funksionallarning argumentlari hisoblanadi. Bunday funksionallar *integrall* funksionallar, integral ostidagi funksiya esa integralning *integrant* deb ataladi.

1.1. Variatsion masalalarga olib keluvchi muammolar. Variatsion masalalar to'g'risida yanada kengroq tasavvurga ega bo'lish maqsadida variatsion masalalarga olib keluvchi masalalarning ayrimlarini ko'rib o'taylik.

1. Tekislikda va ixtiyoriy sirtda geodezik chiziqni topish. Mulohazamizni quyidagi oddiy savolga javob topishdan boshlaymiz: tekislikda tayinlangan ikkita nuqtani tutashtiruvchi eng kichik uzunlikka ega bo'lgan egri chiziq nimani anglatadi?

Mazkur masalani matematik ifodalash uchun σ tekislikda ikkita $P_1(x_1, y_1)$ va $P_2(x_2, y_2)$ nuqtalarni tayinlaymiz va $x_1 < x_2$ deb hisoblab, P_1 va P_2 nuqtalarni tutashtiruvchi

$$y = y(x), x \in [x_1, x_2]. \tag{5}$$

$$\begin{cases} y_1 = y(x_1), \\ y_2 = y(x_2), \end{cases}$$

silliq egri chiziqni qaraymiz. Yaxshi ma'lumki, (5) egri chiziq soyining uzunligi

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{6}$$

ifoda orqali aniqlanadi. Demak, masala quyidagi masalaga keltirildi: $y(x)$ funksiyani shunday tanlash kerakki, natijada (6) integralning qiymati mumkin bo'lganlaridan eng kichigiga erishsin.

Masalani qo'yilishida biz x ning bir qiymatli funksiyasi deb qo'shimcha (5) cheklovni qo'ydik. Bu cheklovni egri chiziqni

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1, t_2] \quad \begin{cases} x = x(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad \begin{cases} y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

parametrik ko'rinishda ifodalash orqali olib tashlash mumkin.

a). Aytaylik, quyidagi

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

tenglama bilan berilgan qandaydir (silliq) sirtda ikkita nuqta tayinlangan bo'lsin.

Savol tug'iladi: sirtda yotuvchi va tayinlangan nuqtalarni tutashtiruvchi eng kichik uzunlikka ega bo'lgan egri chiziq nimani anglatadi? Aynan ana shunday egri chiziqlarni *geodezik chiziqlar* deb aytib o'tgan edik. Masalan, tekislikda geodezik chiziq to'g'ri chiziqdan, sferada geodezik chiziq – katta doiraning yoyidan iborat bo'ladi.

Mazkur masalani matematik ifodalash uchun (7) sirtni parametrik ko'rinishda berilgan deb hisoblaymiz

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

bu yerda u va v – sirtda parametr rolini o'ynovchi parametrlar. Endi yoy uzunligi differensialining kvadratini u va v parametrlarning differensiallari tilida ifodalashimiz mumkin, ya'ni

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,dv, \\ z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,dv. \end{cases}$$

bu yerdan

$$(ds)^2 = P(u,v)(du)^2 + 2Q(u,v)dudv + R(u,v)(dv)^2$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerda

$$\begin{cases} P = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ Q = \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ R = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{cases}$$

Ta'kidlash lozimki, agar (u,v) koordinatalar sirtga ortogonal bo'lsa, u holda

$$Q = 0 \qquad \text{(ortogonallik)}$$

sharti bajariladi. Haqiqatan, sirtda to'r koordinatalari $u = const, v = const$ egri chiziqlar bilan beriladi. $u = u_0$ egri chiziq esa parametrik ko'rinishda quyidagicha

$$\begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v), \\ z = z(u_0, v), \end{cases}$$

beriladi, bu yerda parametr rolini faqat v o'zgaruvchi o'ynaydi. Bunda quyidagi

$$\bar{r} = \left\{\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right\}, \quad z = z(v),$$

vektor urinma bo'ylab shu egri chiziqqa yo'naltirilgan bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash parametr ko'rinishda berilgan

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

$v = v_0$ egri chiziqqa

$$\bar{s} = \left\{\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right\}, \quad y = y(u),$$

vektor urinma vektor bo'ladi. $\bar{r}$ va $\bar{s}$ vektorlarning (u_0, v_0) umumiy nuqtasiga tirkalgan koordinatalari ortogonal bo'lgan holda, ta'rif bo'yicha ular bir-biriga perpendikulyar bo'ladi, bu yerda (u_0, v_0) – $u = u_0$ va $v = v_0$ egri chiziqlarning kesishish nuqtasi deyiladi. Biroq, $Q = \bar{s}\cdot\bar{r} = 0$ (ortogonal vektorlarning skalyar ko'paytmasi) bo'ladi (5-rasm). Endi sirtdagi $P(u_1, v_1)$ va $P_1(u_1, v_2)$ nuqtalarni tayinlaymiz $u_1 = u_0$ deb hisoblab, va sirtda yotuvchi $P(u, v_1)$ va $P_1(u_1, v_2)$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqni oshkor holda,



5-rasm

$$v = v(u), \quad v_1 = v(u_1), \quad v_2 = v(u_2), \quad u \in [u_1, u_2]. \tag{8}$$

berilgan deb qaraymiz. U holda egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{P + 2PQv' + Rv'^2}\,du \tag{9}$$

integral orqali beriladi. Demak, yuqoridagi masala quyidagi masalaga keltirildi: $v=v(u)$ funksiyani shunday tanlash kerakki, natijada (9) integral mumkin bo'lgan eng kichik qiymatga ega bo'lsin.

Oshkor ko'rinishdagi (8) egri chiziqqa qo'yilgan chekloviy, ham egri chiziqni parametrik ko'rinishda

$$\begin{cases} u=u(t), & t\in[t_0,t_1], \\ v=v(t), \\ u_0=u(t_0), & v_0=v(t_0), \\ u_1=u(t_1), & v_1=v(t_1), \end{cases}$$

ifodalash orqali olib tashlash mumkin.

b). Aytaylik, sirt

$$r=r(u,v)$$

vektor ko'rinishidagi tenglama orqali berilgan bo'lsin.

Geodezik chiziq tenglamasini sirtda berilgan ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofani topish haqidagi variatsion masalaga mos kelgan Eyler tenglamasi kabi olish mumkin. Yuqorida ko'rganimiz kabi $r=r(u,v)$ sirtda yotuvchi chiziq

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} t\in[t_0,t_1], \quad \begin{cases} x_0=x(t_0), & y_0=y(t_0), \\ x_1=x(t_1), & y_1=y(t_1). \end{cases}$$

ko'rinishda parametrik tenglamalar orqali berilishi mumkin. t parametrning t_0 va t_1 nuqtalardagi qiymatlariga mos keluvchi nuqtalar orasidagi kesmasining uzunligi

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt \qquad (10)$$

ifodaga teng bo'ladi, bu yerda E,F va G – (1) sirtning birinchi kvadratik formasining koeffitsientlari, ya'ni

$$E=\left(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial u}\right), \quad F=\left(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right), \quad G=\left(\frac{\partial r}{\partial v},\frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

Bu yerda (a,b) – a va b vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Bu holda (10) funksional uchun Eyler tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} \dfrac{Eu'+Fv'}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}=c_1, \\ \dfrac{Fu'+Gv'}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}=c_2. \end{cases}$$

1-misol. R radiusli sferada berilgan ikki nuqtani tutashtiruvchi egri chiziqlar orasidan eng qisqa uzunlikka ega bo'lgan egri chiziq (geodezik egri chiziq) topilsin.

Yechish. Aytaylik, sferadagi nuqtaning θ – uzunligi, φ – kengligi, $\varphi=\varphi(\theta)$ – izlanayotgan egri chiziq bo'lsin. Bu holda quyidagiga ega bo'lamiz: $r=r(\varphi,\theta)=\{x(\varphi,\theta),y(\varphi,\theta),z(\varphi,\theta)\}$. Shuning uchun,

$$E=\left(r_\varphi,r_\varphi\right)=R\sin^2\theta, \quad F=\left(r_\varphi,r_\theta\right)=0, \quad G=\left(r_\theta,r_\theta\right)=R^2.$$

bo'ladi. Bu yerdan (10) formulaga asosan

$$J[\varphi,\theta]=R\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{d\theta^2+2F\sin^2\theta\,d\varphi^2}\,d\theta=R\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi'^2(\theta)}\,d\theta$$

Integral ostidagi ifoda izlanayotgan $\varphi=\varphi(\theta)$ funksiyani ichiga olmaydi, shuning uchun Eyler tenglamasi

$$\frac{d}{d\theta}f_{\varphi'}=0, \text{ bu yerda } f_{\varphi'}=\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi'(\theta)}{\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi'^2(\theta)}}.$$

ko'rinishda bo'ladi. shunday ekan,

$$\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi(\theta)}{\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi^2(\theta)}}=C_1$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bundan

$$\varphi(\theta)=\frac{C_1}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta-C_1^2}}=\frac{C_1}{\sin^2\theta\sqrt{1-\frac{C_1^2}{\sin\theta}}}=\frac{C_1}{\sin^2\theta\sqrt{(1-C_1^2)-C_1^2\operatorname{ctg}^2\theta}}$$

$$=-\frac{C_1\,d(\operatorname{ctg}\theta)}{\sin^2\theta\sqrt{(1-C_1^2)-C_1^2\operatorname{ctg}^2\theta}}$$

tenglikka kelamiz. Oxirgi ifodani integrallab,

$$\varphi(\theta)=\arccos\frac{C_1\operatorname{ctg}\theta}{\sin^2\theta\sqrt{1-C_1^2}}+C$$

yoki $\varphi(\theta)=\arccos(C_2\operatorname{ctg}\theta)+C$, bu yerda $C_2=\frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}$ Bundan quyidagi

$$C_2\operatorname{ctg}\theta=\cos[\varphi(\theta)-C]\text{ yoki }\operatorname{ctg}\theta=A\cos\varphi(\theta)+B\sin\varphi(\theta),$$

ifodaga kelamiz bu yerda $A=\frac{\cos C}{C_2}$ va $B=\frac{\sin C}{C_2}$ (11) ifodani ikkala tomonini $R\cdot\sin\theta$ ko'paytmaga ko'paytirib,

$$R\cos\theta=AR\cos\varphi\sin\theta+BR\sin\varphi\sin\theta,$$

ifodani olamiz va undan dekart koordinatalariga o'tib quyidagiga ega bo'lamiz

$$z=Ax+By,$$

Bu, sfera markazidan o'tuvchi va sferani katta doira bo'yicha kesuvchi tekislik tenglamasidir. Shunday qilib, eng qisqa chiziq (geodezik) bu katta doiraning yoyi bo'ladi.

2-misol. Aylanma sirt ixtiyoriy chizig'ining har bir nuqtasidagi parallel radiusning geodezik chiziq bilan meridian orasidagi burchak sinusiga ko'paytmasi o'zgarmas miqdor ekanligi ko'rsatilsin (Klero teoremasi).

Yechish. Aylanma sirtning silindrik koordinatalar sistemasidagi tenglamasi quyidagi

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=f(\rho)$$

ko'rinishga ega. E, F va G koeffitsientlarni topamiz, ular

$$E=1+f_\rho^2,\quad F=0\text{ va }G=\rho^2,$$

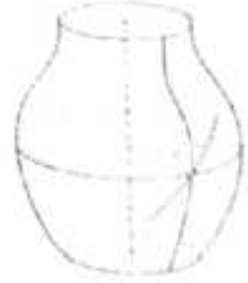
bo'ladi. Shuning uchun, aylanma sirtdagi yoy uzunligining differensiali

$$ds=\sqrt{\rho^2+(1+f_\rho^2)\rho^2}\,d\varphi$$

ko'rinishga ega bo'ladi. U holda aylanma sirtdagi geodezik chiziq quyidagi

$$\int\sqrt{\rho^2+(1+f_\rho^2)\rho^2}\,d\varphi$$

funksionalning ekstremallari bo'ladi. Bu yerda ham integral ostidagi ifoda φ funksiyani oshkor holda o'z ichiga olmaydi, shuning uchun biz bundan darhol quyidagiga


6 – rasm

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+(1+f_\rho^2)\rho^2}}=const,$$

ega bo'lamiz yoki

$$\rho^2\frac{d\varphi}{ds}=const.$$

Endi $\rho\frac{d\varphi}{ds}=\sin\omega$ ekanligini e'tiborga olib (6-rasm), $\rho\sin\omega=const$ teng-

likka ega bo'lamiz, bundan esa ko'rsatilishi talab qilingan tasdiqni isbotiga ega bo'lamiz.

27. $x+y+z=0$ sirtda yotuvchi $A(1,0,1)$ va $B(0,1,1)$ nuqtalar orasidagi eng qisqa masofa topilsin.

28. $r=R$ doiraviy silindrning geodezik chizig'i topilsin.

2. Geodezik chiziqlar va aylanalar egiluvchanlikda invariant sifatida. Geodezik masofa va uning hosilasi. Aytaylik, sirtni cho'zmasdan egilishga majbur qilaylik, ya'ni egilishda yoy uzunliklari o'zgarmaydi. Boshqacha qilib aytganda chiziqning geodezik bo'lishlik xossasi o'zgarmaydi. Geodezik chiziqlar cho'zilmasdan egiluvchanlikning invariantlari bo'ladi. Xuddi shuningdek, l radiusli geodezik aylanalar shunday egiluvchanliklarda yana l radiusli geodezik aylanalarga o'tadi. Shunday aylanalarning uzunliklarini hisoblab, biz egiluvchanlikda o'zgarmaydigan miqdorlarga ega bo'lamiz.

Bu yerda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi:

1-teorema. *l radiusli geodezik aylananing uzunligi*

$$2\pi l+\frac{\pi l^3}{6}\left(\frac{1}{r_1r_2}+\varepsilon\right),$$

ifodaga teng bo'ladi, bu yerda $\varepsilon\to 0$ l bilan birga nolga intiladi, r_1,r_2 — aylananing A markazidagi sirt egriligining bosh radiuslari.

Isboti. Az o'q deb sirtning A nuqtasidagi normani qabul qilamiz. Ax, Ay – o'qlar deb $f=0$ sirtning egrilik chiziqlarining A nuqtasiga o'tkazilgan urinmalarni olamiz.

Axy tekislikda dekart koordinatalar sistemasidan ρ,φ qutb koordinatalar sistemasiga o'tamiz, natijada, biz uch o'lchovli fazoda

silindrik koordinatalar sistemasiga ega bo'lamiz. $\rho(\varphi)z$ fazoda yoy differensiali quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$ds^2=\rho^2d\varphi^2+d\rho^2+dz^2. \tag{12}$$

A nuqtadan Ax o'qqa α burchak ostida l uzunlikka ega bo'lgan AB radiusni tushiramiz. Uning egriligi A nuqtada $\frac{1}{r}$ ga teng bo'lib, Eyler teoremasiga asosan

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}=\dfrac{\cos^2\alpha}{r_1}+\dfrac{\sin^2\alpha}{r_2},\\[2mm] \dfrac{d}{d\alpha}\dfrac{1}{r}=2\sin\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right),\end{cases} \tag{13}$$

kabi ifodalanadi.

B nuqta A nuqtadagi geometrik radius bilan kesishuvchi tekislikdan l^3 tartibli miqdorga chetlashadi, ya'ni Ax o'qi bilan α burchak tashkil qiluvchi normal kesimdan yuqoridagi miqdorcha chetlashadi. Binobarin, B nuqtaning φ koordinatasi α burchakdan l^2 tartibli miqdorda farq qiladi:

$$\varphi=\alpha+\beta l^2,\quad d\varphi=\left(1+l^2\frac{d\beta}{d\alpha}\right)d\alpha. \tag{14}$$

Ravshanki, β α ning funksiyasi sifatida 2π davrga ega. l bilan yuqori tartibli aniqlikgacha taqqoslaganda

$$\begin{cases}z=\dfrac{l^2}{2r},\quad dz=\dfrac{l^2}{2}\left(\dfrac{d}{d\alpha}\dfrac{1}{r}\right)d\alpha,\\[2mm] \rho=l-\dfrac{l^3}{6r^2},\quad d\rho=-\dfrac{l^3}{6}\left(\dfrac{d}{d\alpha}\dfrac{1}{r^2}\right)d\alpha,\end{cases} \tag{15}$$

ifodaga ega bo'lamiz.

(15) formuladan z va ρ miqdorlarni aniqlash uchun biz talab

qilgan aniqlik darajasi kelib chiqadi. Endi biz uzunligi l bo'lgan geodezik yoyni u bilan kesishuvchi r radiusli doira bilan almashtirishimiz mumkin. bundan tashqari l uzunlikdagi bu doira yoyi uchun

$$z = r\left(1-\cos\frac{l}{r}\right) = \frac{l}{2r} - \ldots \qquad \rho = r\sin\frac{l}{r} = l - \frac{l}{6r}$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

ds^2 uchun yozilgan (12) ifodadagi yuqori tartibli hadlarga e'tiborni qaratib, (14) va (15) ifodalarga ko'ra, geodezik aylana yoyining differensiali uchun quyidagi

$$ds^2 = dz^2 + \rho^2 d\varphi = \left| l\left(1-\frac{l}{6r}\right)\left(1+\frac{df}{dz}l\right) + \frac{l^2}{4}\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{r}\right) \right| dz =$$

$$= l^2\left|1 + l\left| 2\frac{df}{dz} - \frac{1}{3r} + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{r}\right) \right|\right| dz$$

tenglikni olamiz. Bundan

$$ds = l\left|1 + l\left| \frac{df}{dz} - \frac{1}{6r} + \frac{1}{8}\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{r}\right) \right|\right| dz$$

$\frac{1}{r}$ va $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)$ hadlarni o'rniga (13) tengliklardagi ifodasini olib kelib qo'ysak:

$$ds = l\,dz + l\,dz\left| \frac{df}{dz} + \frac{3\cos^2\alpha\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{6r} + \frac{3\cos^2\alpha\sin^2\alpha - \sin^2\alpha}{6r} - \frac{1}{6r^2}\sin^2 2\alpha \right|$$

bo'ladi. Bu ifodani bo'laklab integrallab,

$$\int \sin^2\alpha\,d\alpha = \int \cos^2\alpha\,d\alpha = \int \cos^2\alpha\,d\sin\alpha = -\int \cos\alpha\sin^2\alpha\,d\alpha.$$

ifodaga ega bo'lamiz. Binobarin, oxirgi ifodani $[0, 2\pi]$ oraliqda bo'laklab integrallaganda maxrajdagi r_1^2 va r_2^2 larni o'z ichiga oluvchi hadlar

yo'qoladi, xuddi shunga o'xshash, 2π davrga ega bo'lganligi sababli, quyidagi integral α bo'yicha $[0, 2\pi]$ oraliqda integrallanganda

$$\int \frac{df}{dz}\,dz = 0$$

bo'ladi. s geodezik aylana uzunligini l yuqori tartibli miqdorgacha aniqlikda aniqlash uchun (13) ifodani $[0, 2\pi]$ oraliqda α bo'yicha integrallash kerak. Hozirgina bildirilgan eslatmaga ko'ra,

$$s = \int_0^{2\pi}\left| l - \frac{l}{6r}\sin^2 2\alpha \right| d\alpha = 2\pi l - \frac{\pi l}{6r^2}$$

tenglikni olamiz, bundan esa isbot qilinishi talab etilgan ifodaga ega bo'lamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Bu yerdan natija sifatida Gaussning quyidagi mashhur teoremasi kelib chiqadi.

Gauss teoremasi. *Sirtning bosh egriligi*

$$K = \lambda_1\lambda_2$$

cho'zilishsiz egiluvchanlikda o'zgarmaydi

Geodezik masofa va uning hosilasi.

1-ta'rif.

$$J[y] = \int_A^B F(x, y, y')\,dx \qquad (16)$$

integralning γ chiziq bo'ylab A nuqtadan B nuqtagacha bo'lgan qiymati γ chiziqning J – uzunligi deb ataladi. Agar γ – chiziq ekstremal bo'lsa, u holda $J[y]$ qiymatga A va B nuqtalar orasidagi geodezik masofa yoki J – masofa, γ – ekstremalni esa J – to'g'ri chiziq deb ataladi, bu erda

$$y=\{y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)\},\ x=\{x_1(x),x_2(x),\dots,x_n(x)\}$$

Agar t tayinlangan bo'lsa, u holda (16) funksional uchun

$$dJ=-Hdx+\sum_{i=1}^{n}p_i dy_i,$$

formula geodezik masofaning hosilasi uchun

$$\frac{\partial J}{\partial x}=-H(x,y,p),\qquad \frac{\partial J}{\partial y_i}=p_i,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{17}$$

formula o'rinli bo'ladi.

$$\frac{\partial J}{\partial x}+H\left(x,y_1,y_2,\dots,y_n,\frac{\partial J}{\partial y_1},\frac{\partial J}{\partial y_2},\dots,\frac{\partial J}{\partial y_n}\right)=0.$$

Gamilton-Yakobi tenglamasidan B nuqtaning koordinatalarining funksiyasi sifatida A nuqtadan hisoblanuvchi geodezik masofa Gamilton-Yakobi tenglamasini qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Agar $(n+1)$ o'lchovli fazoda S gipersirt $\varphi(x,y_1,y_2,\dots,y_n)=0$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, u holda S gipersirtdan tashqarida yotuvchi B nuqtadan bu sirtgacha bo'lgan masofa deb, B nuqtadan S sirtda yotuvchi A nuqtagacha bo'lgan shunday masofaga aytiladiki, bunda funksional statsionar qiymatni qabul qiladi, ya'ni $\delta J=0$ bo'ladi. Bu A va B nuqtalarni tutashtiruvchi γ — ekstremal boy'lab hisoblashni anglatadi, bunda γ ekstremal S sirtni A nuqtada transversal kesadi. S sirtgacha hisoblanuvchi masofa ham Gamilton-Yakobi tenglamasini qanoatlantiradi, geodezik masofani S sirtgacha hosilasi ham (17) formula boy'icha topiladi.

3-misol. Agar masofa $J[A,B]=\int_A^B ds$ funksional yordamida aniqlangan bo'lsa, $A(0,0)$ va $B(1,1)$ nuqtalar orasidagi geodezik masofa topilsin.

Yechish. A nuqtadan B nuqtagacha bo'lgan geodezik masofa - bu nuqtalarni tutashtiruvchi ekstremaldagi funksionalning qiymati bo'ladi. Bu hol uchun Eyler tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$2y''-\frac{d}{dx}(2y'\cdot y')=0 \qquad \text{yoki} \qquad y''+y'=0$$

Ko'rish mumkinki, bundan

$$y''\cdot y'=-\frac{d}{dx}(y'\cdot y),$$

bo'ladi, shuning uchun, $2y'=C_1$ va $y=C_1x+C_2$ bo'ladi. $y(0)=0$, $y(1)=1$ chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1=1, C_2=0$ o'zgarmaslarni topamiz.

Shunday qilib, A va B nuqtalarni tutashtiruvchi ekstremal $y=x$ paraboladan iborat bo'ladi. So'ngra, $2y'=1, y'=1/2$ tenglamadan $(y')^2=1/4$ bo'ladi. U holda ta'rifga ko'ra, A nuqtadan B nuqtagacha bo'lgan geodezik masofa

$$J[A,B]=\int_0^1\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4},\quad \text{demak,}\quad J[A,B]=\frac{1}{4}\quad \text{ga}$$

teng bo'ladi.

4-misol. $\int_{(0,0)}^{(1,1)}y'^2+y^2\,dx$ funksionalni solishtirish chizig'iining

o'ng oxiri $y=\frac{1}{2}(3-x)$ to'g'ri chiziqda xarakatlanadi sharti ostida tadqiq qiling.

Qaysiki mumkin bo'lgan ekstremallar Ox o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq bilan bittadan ortiq nuqtada kesishganligi sababli, bu masalani parametrik formada qaraymiz. Tadqiq qilinayotgan funksional

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} y^2\,\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\,dt, \quad \text{bu yerda} \quad \dot{x}=\frac{dx}{dt}, \quad \dot{y}=\frac{dy}{dt}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}-F_x=0,$$

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{y}}-F_y=0.$$

Eyler tenglamalar sistemasining 2-tenglamasidan

$$\frac{d}{dt}\left(y\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=0,$$

kelib chiqadi, bundan

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)=p, \qquad \left(\text{chun} \quad y'=p\left(\frac{dx}{dx}\right)\right)$$

tengliklar kelib chiqadi. Oxirgi tenlamani integrallagandan so'ng ekstremal uchun $y^2=2px+c$ tenglamani olamiz, ekstremalni koordinata boshidan o'tishlik shartidan $c=0$ ni olamiz. Unda ekstremal $y^2=2px$ ko'rinishda bo'ladi.

Endi $y=\frac{1}{2}(3-x)$ to'g'ri chiziq tenglamasini $x=\tau$, $y=\frac{1}{2}(3-\tau)$ ko'rinishda yozamiz. Unda

$$F_{\dot{x}}\varphi'(\tau)+F_{\dot{y}}\psi'(\tau)\Big|_{t_0}=0,$$

transversallik shartidan

$$-\frac{y^2-\dot{y}^2}{\dot{x}^2}+y^2\cdot\frac{2\dot{y}}{\dot{x}}\left(-\frac{1}{2}\right)\Big|_{t=t_0}=0,$$

yoki

$$y^2y'+y^2\dot{y}'\Big|_{t=t_0}=0,$$

tenglikni olamiz va $y'=p$ ekanligini xisobga olib,

$$p(p+x)=0,$$

tenglamaga ega bo'lamiz, bu yerdan yoki $p=0$ yoki $p=-x$ kelib chiqadi. Agar $p=0$ bo'lsa, u xolda $y^2=2px$ tenglamadan $x=0$, demak, $x_0=3$ kelib chiqadi. Bu xolda funksional nolga teng bo'lgan statsionar qiymatga ega bo'ladi, uni Ox o'qining $(0,0)$ va $(3,0)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmada qabul qiladi. Agarda $p=-x$ bo'lsa, u xolda $y^2=2(-y)x$, va $x=\frac{1}{2}(3-x)$ tenglamalarga ko'ra, $x=1$, $x=-2$ bo'ladi, funksional $(0,0)$ va $(-1,2)$ nuqtalarni tutashtiruvchi yoyida parabolaning -4 ga teng bo'lgan statsionar qiymatini qabul qiladi (to'g'ri oxiri koordinata boshidan chaproqda ekan).

Boshqacha qilib aytganda, 4- misol ko'rsatadiki, $y=\frac{1}{2}(3-x)$ to'g'ri chiziqdan koordinata boshigacha bo'lgan geodezik masofa bu qiymatli aniqlanmaydi, demak, mavjud emas. Biroq, agar bu to'g'ri chiziqni $-2\le x\le 2$ kesmasini qarasak, u holda koordinata boshidan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa -4 ga teng bo'ladi.

Aytaylik, $\Im$ chiziq berilgan bo'lsin: $\varphi(x,y)=0$. $\Im$ chiziqdan tashqarida yotuvchi B nuqtaning shu chiziqqacha bo'lgan geodezik masofasi deb, B nuqtaning $A\in\Im$ nuqtagacha bo'lgan shunday geodezik masofaga aytiladiki, (16) funksional A va B nuqtalarni tutashtiruvchi γ ekstremal bo'yicha hisoblanadi, bundan tashqari γ ekstremal $\Im$ chiziqni A nuqtada transversal kesadi.

1-ta'rif. $J-$ aylana (geodezik aylana) deb barcha nuqtalari berilgan nuqtadan bir xil geodezik masofada bo'lgan chiziqqa aytiladi. Shunga o'xshash $J-$ ellips va $J-$ giperbola tushunchalarini ham kiritish mumkin, biz unga kelgusida to'xtalib o'tamiz.

5-misol. Agar geodezik masofa

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

funksional yordamida aniqlangan bo'lsa, markazi $(0;0)$ nuqtada bo'lgan R radiusli J – aylana topilsin.

Yechish. Funksionalning ekstremali geodezik aylanani transversal kesadi. Ekstremallar uchun $2y = C_1$ va $y = C_1$ tenglamalarga ega bo'lamiz (3-misolga qarang) va bundan $x = \frac{y^2}{2C_1}$ tenglamaga ega bo'lamiz. Transversallik shartidan $y'(2y - x) = 0$ J aylanaga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti $C_1 = \frac{1}{2}$ bo'ladi. Demak, J – aylananing differensial tenglamasi $x = \frac{y^2}{4x}$ bo'ladi, bundan J – aylananing tenglamasi $x^2 + y^2 = C^2$ bo'ladi. C o'zgarmasni topish uchun, $(C;0)$ nuqta geodezik aylanada yotishligini, o'sha nuqtadan o'tuvchi geodezik radius tenglamasi (ya'ni ekstremal) $x = \frac{y^2}{C}$ bo'lishligini anglab yetamiz. Bu yerdan $y_1 = \frac{1}{2C}$ bo'ladi, demak, radius uchun

$$R = \int_0^C (y - y_1)^2\,dx = \int_0^C \frac{1}{4C^2}\,dx = \frac{C^2}{4}$$

ifodaga ega bo'lamiz, bundan $C^2 = 4R$ bo'ladi. Bu ifodalardan markazi koordinata boshida, radiusi R ga teng bo'lgan $x^2 + y^2 = 4Rx$ geodezik aylana tenglamasiga ega bo'lamiz.

6-misol. Agar geodezik masofa

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y')\,dx$$

funksional bilan aniqlangan bo'lsa, markazi $(0;0)$ nuqtada bo'lgan R radiusli J – aylana topilsin.

Yechish. Bu funksionalning ekstremallari $y = C_1x + C_2$ to'g'ri chiziqlar bo'ladi. Ekstremallarni $(0;0)$ nuqtadan o'tish shartidan $C_2 = 0$ o'zgarmasni topamiz. Shuning uchun, bundan $y = C_1x$ bo'ladi. Demak, $y = \frac{y_1}{x_1}$ tenglamani olamiz. Bu holda transversallik sharti ortogonallik sharti bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun J aylanaga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti $C_1 = \frac{1}{x_1}$ bo'ladi. Binobarin, J – aylananing differensial tenglamasi $y' = -\frac{x}{y}$ bo'ladi. Bu yerdan $x^2 + y^2 = C^2$ J – aylananing tenglamasi ekanligi kelib chiqadi. $(C;0)$ nuqta geodezik aylanada yotadi. Shuning uchun, ushbu nuqtadan o'tuvchi geodezik radiusning tenglamasi $y = 0$ bo'lganligi sababli, $y = 0$ va R radius uchun

$$R = \int_0^C dx = C$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, $C = R$ bo'ladi va bu izlanayotgan R radiusli geodezik aylananing tenglamasi, ya'ni odatdagi $x^2 + y^2 = R^2$ aylananing tenglamasidan iborat bo'ladi.

Izoh. *Bu kiritilgan tushinchalar $ds = F(x, y, y')dx$ yoyning differensialli noevklid geometriya to'g'risida gapirishga imkon beradi.*

Agar $F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}/y$ ko'rinishda bo'lsa, u holda biz ko'rib o'tdikki, J – to'g'ri chiziq odatdagi to'g'ri chiziqqa aylanadi. Bizning geometriya esa odatdagi yevklid geometriyasiga o'tadi.

$F(x,y,y')$ barcha argumentlari bo'yicha odatdagi faqat uzluksiz va differensiallanuvchi shartlarini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya bo'lsa, bu kiritilgan geometriyaning odatdagi geometriyaga o'xshashligi juda kam bo'ladi: ikki nuqta orqali har doim ham J – to'g'ri chiziq o'tkazib bo'lmaydi, shunday hol bo'lishi mumkinki, ikki nuqta orqali bir necha J – to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin bo'ladi, binobarin, ikki nuqta orasidagi J – masofa koordinataning bir qiymatli funksiyasi bo'lmaydi.

29. Agar bu masofa

$$J[y] = \int (y'^2 + y^2)dx$$

funksional yordamida aniqlangan bo'lsa, $A(0,0)$ nuqtadan $B(1,2)$ nuqtagacha bo'lgan geodezik masofa topilsin.

30. Agar bu masofa

$$J[y] = \int (12xy + y^2)dx$$

funksional bilan aniqlangan bo'lsa, $A(0,0)$ nuqtadan $B(1,1)$ nuqtagacha bo'lgan geodezik masofa topilsin.

31. Agar geodezik masofa

$$J[y] = \int y'^2(x)dx$$

funksional bilan aniqlangan bo'lsa, markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan $R=8$ radiusli J – aylana topilsin.

3. n o'lchovli fazoda geodezik chiziqlar. n o'lchovli haqiqiy

fazoda qandaydir metrika

$$ds^2 = \sum_{i,j} a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_i dx_j \qquad (18)$$

aniqlangan bo'lsin, bu yerda a_{ij} – x_i argumentlarning berilgan funksiyalari. Biz bu funksiyalarni birinchi tartibli xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz deb hisoblaymiz. (18) metrikani berilishi $x_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ egri chiziq uzunligini

$$J = \int ds = \int \sqrt{\sum a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j}\,dt \qquad (19)$$

integral bilan ifodalanishiga teng kuchli, bundan tashqari, agar $\dot{x}_i$ larning hammasi bir vaqtda nol bo'lmasa, ildiz ostida turgan ifodani $\dot{x}_i$ va x_i argumentlarning ixtiyoriy qiymatlarida musbat deb hisoblaymiz, ya'ni (18) berilgan kvadratik forma musbat aniqlangan deb hisoblaymiz. Biz albatta, bir xil differensiallarning ko'paytmasi oldida turgan a_{ik} va a_{ki} koeffitsientlarni ham bir xil deb hisoblashga huquqimiz bor, ya'ni $a_{ik} = a_{ki}$.

(19) integralning ekstremallari geodezik chiziqlar deb ataladi. Bu tushuncha berilgan sirtdagi geodezik chiziqlar tushunchasining bevosita umumlashmasi hisoblanadi, biz bu xaqda yuqorida aytib o'tganmiz. Endi qisqalik uchun φ orqali ildiz ostidagi yig'indini

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j \qquad (20)$$

belgilaymiz. U holda biz ekstremallar uchun quyidagi Eyler tenglamalar sistemasiga

$$\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varphi_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varphi_i\right) = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{21}$$

ega bo'lamiz. Bu tenglamalar sistemasining bitta tenglamasi qolganlarining natijasi bo'ladi. Bunga biz yana bitta, aynan,

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = 1 \tag{22}$$

tenglamani qo'shamiz. Aytaylik, $s = s_0$ parametrning shu qo'shimcha tenglamadan aniqlanuvchi qiymati bo'lsin. (19) ifodadan bevosita (20) tenglamani t parametr sifatida n o'lchovli fazoda yoy uzunligini tanlashimizga teng kuchli ekanligi kelib chiqadi. (22) sistema tufayli (21) Eyler tenglamalar sistemasi soddalashadi va

$$\varphi_i - \frac{d}{dt}\varphi_i = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{23}$$

ko'rinishni oladi. Sistemaning $\varphi = const$ integralga ega bo'lishligini tekshirish qiyin emas. Haqiqatan,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i x_i' + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i' x_i.$$

bo'ladi. Lekin φ funksiyani x_i' argumentga nisbatan birjinsli ikkinchi tartibli ko'phad ekanligini e'tiborga olsak,

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i' x_i = 2\varphi,$$

tenglikka ega bo'lamiz va binobarin,

$$2\frac{d\varphi}{ds} = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i x_i' + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{d}{ds}\varphi_i'.$$

bo'ladi. So'ngra bu tenglikdan foydalanib, $d\varphi/ds$ ifoda uchun yozilgan ifodani

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i' x_i' + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i x_i'$$

ko'rinishda qayta yozishimiz mumkin va (23) tenglamaga ko'ra, $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni $\varphi = const$. (23) tenglamalar sistemasining integrali bo'ladi va ixtiyoriy o'zgarmasni birga teng deb olsak, (22) qo'shimcha shartga ega bo'lamiz.

Endi (6) tenglamalar sistemasini ochib yozsak,

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}x_j' + \sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}'x_j = 0,$$

bo'ladi yoki bu yerga (20) ifodani olib kelib qo'ysak,

$$\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}x_j x_k' - \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}x_j x_k' = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j'' = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ikkinchi yig'indiga e'tiborni qaratamiz. Bunda koeffitsientlar $x_j x_k'$ va $x_j x_k'$ larda bir xil emas, lekin biz ularni har birini

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}\right)$$

yarim yig'indilar bilan almashtirib, bir xil qilishimiz mumkin.

Endi birinchi yig'indi bilan ikkinchi yig'indini birlashtirib, va teskari ishorani qo'llab, sistemani yakuniy ko'rinishdan quyidagi ko'rinishiga kelamiz

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j'' + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}\right)x_j' x_k' = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{24}$$

bu tenglamalarda hosila s yoy uzunligi bo'yicha olinyapdi. (24) sistemada ikkinchi yig'indida qavs ichidagi ifoda differensial geometriyada birinchi tur Kristoffel belgisi nomi bilan yuritiladi va quyidagicha bel-

gilanadi:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} \right) \quad \begin{Bmatrix} ij \\ k \end{Bmatrix}$$

(24) tenglamani x_i argumentga nisbatan yechilgan holda yozishimiz mumkin. a^{ij} orqali $\|a_{ij}\|^{-1}$ matritsaga nisbatan transponirlangan matritsaning elementlarini belgilaymiz, ya'ni

$$a^{ij} = \frac{A_{ij}}{D} \text{ yoki } \|a^{ij}\| = \left(\|a_{ij}\|^{-1}\right)^{T},$$

bu yerda $D = \|a_{ij}\|$ matritsaning determinanti, qaysiki (18) kvadratik formani aniqlanganligiga ko'ra noldan farqli bo'ladi va A_{ij} bu determinantning a_{ij} lementlarining algebraik to'ldiruvchisi. Biz a^{ij} elementlar uchun quyidagi asosiy tenglikka ega bo'lamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} a^{ij} a_{ik} = \begin{cases} 0, & (j \neq k), \\ 1, & (j = k). \end{cases} \tag{25}$$

(25) tenglikni ikkala tomonini a^{ij} elementga ko'paytirib, i bo'yicha yig'amiz va ikkinchi qo'shiluvchida yig'ish tartibini o'zgartirib, (8) tenglikka asosan

$$x_k + \sum_{p,q=1}^{n} \begin{Bmatrix} pq \\ j \end{Bmatrix} x_p x_q = 0, \tag{26}$$

tenglikni olamiz, bu yerda

$$\begin{Bmatrix} pq \\ j \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a^{ij} \left[\begin{matrix} pq \\ i \end{matrix} \right]$$

(22) munosabatdan foydalangandan so'ng Eyler tenglamasi (23) ko'rinishni oldi va bu tenglamalar bir - biri bilan bog'liq bo'lmaydi. Biz ularni x_i ga nisbatan yechishga muvaffaq bo'ldik.

Misol sifatida ixtiyoriy silindrda geodezik chiziqni topish masalasini qaraymiz. Silindrning tashkil qiluvchisiga parallel bo'lgan z o'qini tanlaymiz va aytaylik, (x, y) tekislikda x yo'naltiruvchining tenglamasi $x = \varphi(\sigma)$ va $y = \psi(\sigma)$ bo'lsin, bundan tashqari σ parametr sifatida yo'naltiruvchining yoy uzunligi qabul qilmadi, shuning uchun $\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) = 1$ bo'ladi. Silindrda nuqtaning holatini aniqlovchi koordinatli parametr sifatida yuqorida ko'rsatilgan σ parametrni va z koordinatani tanlaymiz. Bunda

$$ds^2 = d\sigma^2 + dz^2,$$

bo'ladi, shuning uchun hozirgi holda biz $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, bo'ladi. (26) tenglama bizga $j = 1$ da $\sigma'' = 0$ ni, $j = 2$ da $z'' = 0$ ni beradi, bu yerda hosila s yoy uzunligi bo'yicha olingan. Shunday qilib, biz quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sigma = As + B, \quad z = Cs + D, \quad A^2 + C^2 = 1.$$

Agar $AC \neq 0$ bo'lsa, u holda biz bu chiziqlarning tenglamalarini $z = C_1\sigma + C_2$ ko'rinishida yozishimiz mumkin, bu yerda C_1, C_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bu chiziqlar, qaysiki to'la tenglamasi

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad z = C_1\sigma + C_2,$$

Ko'rinishda ifodalangan vint chizig'ini tenglamasini beradi. Bu yerda z ning ifodasida ishtirok etuvchi o'zgarmas qo'shiluvchi hech qanday rol o'ynamaydi.

4. Geometrik optika va navigatsiya masalasi. a) Ferma prinsipiga ko'ra, ikki nuqta orasidagi yorug'lik yo'li bir jinsli muhitda

to'g'ri chiziqning kesmasidan iborat bo'ladi. Bir jinsli muhitda yorug'lik tezligining o'zgarmasligini e'tiborga olib, bu prinsipni so'z bilan ifodalasa bo'ladi: Bir jinsli muhitda ikki nuqta orasidagi yorug'lik yo'li harakat vaqtining eng kichik qiymati haqida ma'lumot beradi. Bir jinsli bo'lmagan muhitda bu prinsip γ yorug'lik nuri harakatining yo'lidan

$$t = \int \frac{ds}{v}$$

vaqt funksionali uchun minimumini topish talab etiladi, bu yerda ds – yoy uzunligining elementi, v – yorug'lik tezligi.

xy – tekislikda (x_0, y_0) nuqtadan (x_1, y_1) nuqtagacha yorug'lik nurini harakatini qaraymiz. Yorug'lik tezligi $v = v(y)$ funksiya bilan yoziladi.

Bu esa bizni quyidagi $t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)} dx$ funksionalni ekstremumini topishga olib keladi. $F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}$ Lagranj funksiyasi x o'zgaruvchiga oshkor holda bog'liq bo'lmaganligi sababli, harakatning $y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = C_1$ birinchi integraliga kelamiz, ya'ni

$$\frac{y'^2}{v\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)} = C_1,$$

bundan

$$\frac{1}{v\sqrt{1+y'^2}} = C, \quad \text{bu yerda } C = -C_1 \text{ deb oldik.} \tag{27}$$

u holda ekstremal

$$x = \int \frac{C v\,dy}{\sqrt{1 - C^2 v^2}}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (27) tenglik rasmiy holda hammamizga yaxshi tanish bo'lgan

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

Snelliusning sinish qonuniga olib kelishligini aytib o'tish lozim. Haqiqatan, agar $v = 0$ — 7- rasm chegara ikkita bir jinsli muhitga bo'lsa, u holda

$$v(y) = \begin{cases} v_1, y > 0, \\ v_2, y < 0, \end{cases}$$

bo'ladi, u holda har bir muhitda egilish burchagi tangensining ekstremali (ya'ni $y' = tg\varphi$). (27) tenglikka ko'ra, u o'zgarmas bo'ladi, bunda

$$\sin\theta = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}}$$

bo'ladi, bu esa bizni $\frac{\sin\theta}{v} = C$ tenglikka olib keladi (7- rasm).

b) Ushbu masalada eni h ga teng bo'lgan parallel to'g'ri qirg'oqli daryoni ko'rib chiqamiz. Daryoning bir qirg'og'i x o'qi bilan ustma-ust tushadi deb hisoblab, daryo oqimining $v = v(x)$ tezligini kiritamiz. Doimiy c (c – tezlik miqdori) tezlikli qayiq $c > \max_{x\in[0,h]} v(x)$, $O(0,0)$ nuqtadan chiqib eng qisqa vaqtda daryoni kesib o'tishi kerak. α – orqali qayiqning yo'nalishiga bog'liq bo'lgan burchakni belgilaymiz. Unda qayiq harakatining haqiqiy tezligi

$$\frac{dx}{dt} = c\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v + c\sin\alpha,$$

tengliklar bilan aniqlanadi, bu yerda

$$\frac{dx}{dy} = \tan\alpha$$

ifoda α burchakni $\alpha = \frac{dx}{dy}$ orqali ifodalash imkonini beradi

$$\left(v - \frac{v}{c\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{\cos^2\alpha}\right),$$

$$+\frac{2v}{c}\frac{1}{\cos\alpha}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\frac{v}{c}\sin^2\alpha + \sqrt{\frac{v^2}{c^2}\sin^2\alpha + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \sin^2\alpha\right)}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\frac{v}{c}\sin^2\alpha + \sqrt{c^2\left(1 - \sin^2\alpha\right) - v^2 + v^2\sin^2\alpha}}{c^2 - v^2}$$

bo'ladi. Daryodan o'tish vaqti uchun

$$t = \int_0^h \frac{dt}{dx}dx = \int_0^h \frac{dx}{c\cos\alpha} = \int_0^h \frac{\sqrt{c^2\left(1 - \sin^2\alpha\right) - v^2 + v^2\sin^2\alpha}}{c^2 - v^2}dx,$$

tenglikni topamiz. Oxirgi integral

$$v(0) = 0 \tag{28}$$

shart ostida $v(x)$ funksiyani tanlash hisobiga minimallashtirilishi kerak. Ko'rib turganimizdek, oldingi masalalardan farqli o'laroq o'ng oxiri oldindan aniqlanmagan (8-rasm). Haqiqatda, qayiq harakatining boshlang'ich nuqtasi optimal yo'nalishning tuzulishiga hech qanday ta'sir qilmaydi va (28) shart juda muhim emas. Shunday qilib, biz oxirlari



8 -rasm

qo'zg'aluvchi masalaga keldik.

1.2. Variatsion hisob masalalariga ayrim izohlar. Yuqorida keltirilgan misollar aynan variatsion hisob o'rganadigan masalalarni ifoda qiladi. Aytish mumkinki, variatsion hisob masalasi (yoki qisqacha variatsion masala) – bu ma'lum chegaralanishlarni qanoatlantiruvchi funksiyalarning M to'plamida berilgan funksionalni ekstremumini topishdan iborat. Variatsion masalalarga yana funksionalni aniqlash soxasida ekstremumning zaruriy sharti bajariladigan nuqtalarni izlash, ya'ni funksionalning 1-variatsiyasini nolga aylantiruvchi nuqtani topish (bunday nuqtalarni funksionalning statsionar nuqtalari deb atay miz) masalalari kiradi.

Variatsion hisob masalalarida ekstremumni topish jarayonida qaralayotgan funksionalni aniqlanish sohasini yopiq to'plam emasligi natijasida qiyinchiliklar yuzaga kelishi mumkin. Bunday hollarda masala yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Albatta, bunday qiyinchiliklardan tabiiy ravishda chekli o'lchovli hollarda ko'p o'zgaruvchi funksiyalarni ekstremumini izlash masalalari bundan mustasno emas. Lekin, cheksiz o'lchovli holda, qachonki, funksionalning aniqlanish soxasi cheksiz o'lchovli chiziqli fazo bo'lganda, to'plamni yopiqlik shartini tekshirish ancha qiyin masala. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, variatsion masala funksionalning aniqlanish soxasi hattoki yopiq to'plam bo'lgan holda ham yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Cheksiz o'lchovli normallangan fazoda har qanday yopiq chegaralangan to'plam uchun bu to'plamda berilgan funksiya uzluksiz chegaralangan hamda maksimal va minimal qiymatlarga erishadi deb aytib bo'lmaydi.

tengliklar bilan aniqlanadi, bu yerda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha-c}.$$

ifoda α burchakni $y'=\frac{dy}{dx}$ orqali ifodalash imkonini beradi:

$$\left(y'-\frac{v}{c\cos\alpha}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\Rightarrow\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{\cos^2\alpha}+$$

$$+\frac{2vy'}{c}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}-(1+y'^2)=0\Rightarrow\frac{1}{\cos\alpha}=$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{v}{c}y'\pm\sqrt{\frac{v^2}{c^2}y'^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(1+y'^2)}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{-vy'\pm\sqrt{c^2(1+y'^2)-v^2}-v^2y'}{c^2-v^2},$$

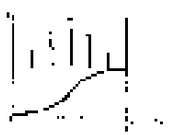
bo'ladi. Daryodan o'tish vaqti uchun

$$t=\int_a^b\frac{dt}{dx}dx=\int_a^b\frac{ds}{v\cos\alpha}=\int_a^b\frac{\sqrt{c^2(1+y'^2)-v^2}-v^2y}{c^2-v^2}dx.$$

tenglikni topamiz. Oxirgi integral

$$y(0)=0 \tag{28}$$

shart ostida $y(x)$ funksiyani tanlash hisobiga minimallashtirilishi kerak. Ko'rib turganimizdek, oldingi masalalardan farqli o'laroq o'ng oxiri oldindan aniqlanmagan (8-rasm). Haqiqatda, qayiq harakatining boshlang'ich nuqtasi optimal yo'nalishning tuzulishiga hech qanday ta'sir qilmaydi va (28) shart juda muhim emas. Shunday qilib, biz oxirlari



8-rasm

qo'zg'aluvchi masalaga keldik.

1.2. Variatsion hisob masalalariga aytlm izohlar. Yuqorida keltirilgan misollar aynan variatsion hisob o'rganadigan masalalarni ifoda qiladi. Aytish mumkinki, variatsion hisob masalasi (yoki qisqacha variatsion masala) – bu ma'lum chegaralanishlarni qanoatlantiruvchi funksiyalarning M to'plamida berilgan funksionalni ekstremumini topishdan iborat. Variatsion masalalarga yana funksionalni aniqlash soxasida ekstremumning zaruriy sharti bajariladigan nuqtalarni izlash, ya'ni funksionalning I-variatsiyasini nolga aylantiruvchi nuqtani topish (bunday nuqtalarni funksionalning statsionar nuqtalari deb ataymiz) masalalari kiradi.

Variatsion hisob masalalarida ekstremumni topish jarayonida qaralayotgan funksionalni aniqlanish sohasini yopiq to'plam emasligi natijasida qiyinchiliklar yuzaga kelishi mumkin. Bunday hollarda masala yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Albatta, bunday qiyinchiliklardan tabiiy ravishda chekli o'lchovli hollarda ko'p o'zgaruvchi funksiyalarni ekstremumini izlash masalalari bundan mustasno emas. Lekin, cheksiz o'lchovli holda, qachonki, funksionalning aniqlanish soxasi cheksiz o'lchovli chiziqli fazo bo'lganda, to'plamni yopiqlik shartini tekshirish ancha qiyin masala. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, variatsion masala funksionalning aniqlanish soxasi hattoki yopiq to'plam bo'lgan holda ham yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Cheksiz o'lchovli normallangan fazoda har qanday yopiq chegaralangan to'plam uchun bu to'plamda berilgan funksiya uzluksiz chegaralangan hamda maksimal va minimal qiymatlarga erishadi deb aytib bo'lmaydi.

(a,b) da 2 marta uzluksiz differensiallanuvchi, $[a,b]$ da uzluksiz, oxirgi a va b nuqtalarda $y(a)=y(b)=0$ nol qiymatlarga va $y'(a)=\infty$, $y'(b)=\infty$, tik urinmalarga ega funksiyalar sinfida quyidagi

$$J[y]=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min$$

variatsion masalani qaraymiz. Bu yo'lning oxirgi nuqtalarida xarakatning tik yo'nalishi berilganlik sharti ostida $(a,0)$ nuqtadan $(b,0)$ nuqtagacha bo'lgan eng qisqa yo'lni topish masalasi hisoblanadi. 9-rasmdan ko'rinib turibdiki, funksiyani qaralayotgan sinfdan shunday tanlash kerakki, grafigining uzunligi $(a,0)$ va $(b,0)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaning Ox o'qidagi uzunligidan xoxlagancha oz farq qilsin, qaysiki, oxirlarini tutashtiruvchi egri chiziqlar orasida eng kichik uzunlikka ega bo'lgan egri chiziq. Biroq, y kesmaning o'zi, grafigi aynan nolga teng bo'lgan joiz funksiyalar to'plamiga mansub bo'lmagan funksiyadan iborat bo'ladi. Shunday qilib, funksional qaralayotgan funksiyalar to'plamida minimumga erishmaydi.



9-rasm

Variatsion xisobda berilgan masalaning ekstremumni izlash masalasining yechimini mavjudligi aloxida isbot talab etadi, va bu esa ko'plab variatsion hisob masalalarini yechishda muxim qiyinchiliklarni tug'diradi.

Keyingi paragraflarda ko'rsatiladiki, qandaydir funksionalni statsionar nuqtalarini topish masalasi oddiy differensial tenglama yoki differensial tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi (qaralayotgan

funksionalga bog'liq holda oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglama bo'lishi mumkin).

Masalan,

$$J[y]=\int_a^b f(x,y,y')dx \to ekst,\quad y(a)=y_a,\qquad y(b)=y_b,$$

variatsion masala qandaydir farazlarda qo'shimcha $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$ shartli

$$y''=\varphi(x,y,y')$$

ko'rinishdagi oddiy differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

$$y''=\varphi(x,y,y'),\quad y(a)=y_a,\ y(b)=y_b$$

masala differensial tenglamalar nazariyasida chegaraviy masala deb yuritiladi. $n-$ tartibli oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masala to'g'ri qo'yilgan bo'lishi uchun, n-tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi n ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq bo'lganligi sababli, chegaraviy shartlarning soni tenglamaning tartibi n ga teng bo'lishi zarur. Xattoki, agar masala to'g'ri qo'yilgan bo'lsa ham yechim mavjud bo'lmasligi mumkin, mavjud bo'lsa ham u yagona bo'lmasligi mumkin.

$$\begin{cases} y''+y=0, \\ y(a)=y_a,\ y(b)=y_b,\ \ a<x<b, \end{cases}$$

chegaraviy masalani qaraymiz.

Bu masalada differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

ko'rinishda bo'ladi. Chegaraviy shartlar C_1 va C_2 noma'lum o'zgarmaslarga nisbatan quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga olib

keladi:

$$\begin{cases} C_1\cos a + C_2\sin a = y_a, \\ C_1\cos b + C_2\sin b = y_b. \end{cases}$$

Bu chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining determinanti

$$\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos b & \sin b \end{vmatrix} = \cos a\cdot\sin b - \cos b\cdot\sin a = \sin(b-a),$$

ifodaga teng bo'ladi. Agar $b-a \neq n\pi$, $n\in N$, bo'lsa, sistema birgalikda va u yagona yechimga ega bo'ladi. Aytaylik, $b-a=\pi$ bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} C_1\cos a + C_2\sin a = y_a \\ C_1\cos(a+\pi) + C_2\sin(a+\pi) = y_b \end{cases}$$

sistemani olamiz. Trigonometrik funksiyalarning keltirish formulasiga ko'ra, sistemaning 2- tenglamasi

$$-C_1\cos a - C_2\sin a = y_b$$

tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Bundan ko'ramizki, algebraik tenglamalar sistemasining yechimi faqat $y_a=-y_b$ bo'lgandagina mavjud bo'ladi. Agar bu tenglik to'g'ri bo'lsa, sistemaning 2-tenglamasi 1-tenglamasidan kelib chiqqanligi sababli, algebraik tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi, 1- tenglama esa,

$$C_1 = y_a\cos a + t\cdot\sin a, \quad C_2 = y_a\sin a - t\cdot\cos a, \quad t\in R,$$

ko'rinishdagi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

2-§. Funksional. Umumiy tushunchalar

Variatsion hisobning predmetini aniqlash uchun Y haqiqiy chiziqli normallangan fazoni $y\in Y$ elementini $\|y\|$ normasi bilan qaraymiz. U holda $\rho(z,y)=\|y-z\|$ ifoda $z,y\in Y$ elementlar orasidagi masofani aniqlaydi, ya'ni Y fazo $\rho(z,y)$ metrikali metrik fazo bo'ladi. Masalan,

$\|\varphi(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|$ norma chiziqli normallangan $C[a,b]$ fazoda metrikani ifodalaydi. Chiziqli normallangan fazoga $[a,b]$ kesmada k marta uzluksiz differensiallanuvchi haqiqiy $\varphi(x)$ funksiyalar $C^k[a,b]$ fazoda

$$\|\varphi(x)\|_{C^k[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|\varphi(x)| + \sum_{i=1}^{k}\max_{x\in[a,b]}|\varphi^{(i)}(x)|,$$

norma bilan misol bo'la oladi.

Aytaylik, Y chiziqli normallangan fazo bo'lsin. M Y fazosining qandaydir elementlar to'plami, R– esa haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'lsin.

1-ta'rif. *Aytaylik biror-bir M funksiyalar to'plami berilgan bo'lsin. M to'plamda J funksional deb M to'plamni R haqiqiy sonlar to'plamiga $J: M\to R$ akslantirishga aytiladi. Boshqacha qilib aytganda, Y fazoning M to'plamida $J[y]$ funksional berilgan deyiladi, agarda har bir $y\in M$ elementga biror J qonuniyat asosida biror haqiqiy son bir qiymatli mos qo'yilgan bo'lsa. U holda M to'plamda J funksional aniqlangan deyiladi va $J=J[y(x)]$ kabi yoziladi.*

Bu yerda $J[y(x)]$ funksional aniqlangan $y(x)$ funksiyalarning M sinfi funksionalning *aniqlanish sohasi* deyiladi. Funksionalning aniqlanish sohasidan olingan funksiyalarga *joiz funksiyalar* deb ataladi.

Funksional tushunchasini funksiya tushunchasining bevosita umumlashmasi deb qarashimiz mumkin, qaysiki, maxsus turdagi funksiya, erkin o'zgaruvchini rolini boshqa funksiya o'ynaydi.

Funksionallarga doir ayrim misollarini keltirib o'tamiz.

1-misol. *a*) Quyidagi aniq integral

$$J[y(x)]=\int_a^b y(x)dx, \qquad -\infty<a<b<+\infty,$$

qaralayotgan $M=\{y(x)\in C[a,b]: y(a)=A, y(b)=B\}$ funksiyalar to'plamida. M berilish sohasi bilan $C[a,b]$ fazoda funksional bo'ladi, bu yerda A va B lar berilgan sonlar. Variatsion hisobda asosan $J: C^1[a,b]\to R$ funksionallar qaraladi.

b) funksionalga eng sodda misol sifatida

$$J=\int_a^b y(x)dx$$

aniq integralni olish mumkin, bu yerda $y=x$ ning qandaydir funksiyasi. Har bir integrallanuvchi funksiyaga funksionalning qiymati – son mos qo'yiladi. Masalan, agar $y=x$ bo'lsa $J=\frac{1}{2}$; agar $y=x^2$ bo'lsa $J=\frac{1}{3}$ va h. k.

2-misol. Egri chiziqning uzunligi funksional bo'ladi. x, y tekislikda $x=0, y=0$ va $x=1, y=1$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqlarni qaraylik. Aytaylik bu egri chiziqlarning tenglamasi $y=y(x)$ ko'rinishda bo'lsin. U holda egri chiziqning cheksiz kichik elementi ds

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2(x)}dx,$$

egri chiziqning uzunligi quyidagi

$$J=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

integralga teng bo'ladi. Bunda funksional nafaqat $y(x)$ funksiyaning qiymatiga, uning y' hosilasiga ham bog'liq bo'ladi.

3-misol. Aytaylik, $M=C[0,1]$, $[0,1]$ kesmada berilgan $y(x)$ uzluksiz funk-siyalar to'plami bo'lsin va funksional

$$J[y(x)]=\int_0^1 y(x)dx \qquad (1)$$

ifodadan iborat bo'lsin. U holda $J[y(x)]$ $y(x)$ funksiyada funksional bo'ladi, ya'ni, har bir $y(x)\in C[0,1]$ funksiyaga $J[y]$ aniq qiymat mos keladi. (1) dagi $y(x)$ funksiyaning o'rniga aniq bir funksiyalarni qo'yib, $J[y]$ funksionalning shu funksiyadagi mos qiymatlarini olamiz. Shunday qilib, agar $y(x)=1$ bo'lsa, u holda $J[1]=\int_0^1 1\cdot dx=1$ bo'ladi; agar $y(x)=e^x$ bo'lsa, u holda

$$J[e^x]=\int_0^1 e^x dx=e-1=1,718...$$

bo'ladi; agar $y(x)=\cos\pi x$ bo'lsa, u holda

$$J[\cos\pi x]=\int_0^1\cos\pi x dx=0$$

bo'ladi va h.k.

4-misol. $M=C^1[a,b]$, $[a,b]$ kesmada uzluksiz hosilaga ega bo'lgan $y(x)$ funksiyalar sinfi va funksional

$$J[y(x)]=y'(x_0),$$

bo'lsin, bu yerda $x_0\in[a,b]$, ifodadan iborat bo'lsin. Ravshanki, $J[y(x)]$ ko'rsatilgan funksiyalar sinfida aniqlangan funksional bo'ladi; ya'ni bu sinfning har bir funksiyasiga x_0 nuqtadagi qiymati mos qo'yiladi, u ham bo'lsa funksiya hosilasining tayinlangan x_0 nuqtadagi qiymati mos qo'yiladi.

Agar, masalan, $a=1, b=3$ va $x_0=2$ bo'lsa, u holda $y(x)=x^2$ funksiya uchun $J[x^2]=2x|_{x=2}=4$, $y(x)=x^2+1$ funksiya uchun $J[x^2+1]=4$; $y(x)=\ln(x+1)$

funksiya uchun $J[y(x)]=\frac{1}{3}$ qiymatlarga ega bo'lamiz.

5-misol. *a*) $M=C^1[a,b]$ to'plamda

$$J[y]=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2(x)}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx}$$

formula yordamida funksionalni aniqlash mumkin (integrallar nisbati $y=y(x)$ egri chiziqning massalar markazining absissasidir).

b) $M=C[-1,1]$. $[-1,1]$ kesmadagi uzluksiz $y(x)$ funksiyalar sinfi bo'lsin hamda barcha $-1\le x\le 1$ lar va barcha haqiqiy y lar uchun aniqlangan uzluksiz $\varphi(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin. U holda

$$J[y(x)]=\int_{-1}^{1}\varphi[x,y(x)]dx$$

ifoda ko'rsatilgan funksiyalar sinfida funksional bo'ladi. Masalan, agar $\varphi(x,y)=\frac{x}{1+y^2}$ bo'lsa, u holda $y(x)=x$ funksiya uchun

$$J[y(x)]=\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+y^2(x)}dx=0$$

tenglikka ega bo'lamiz. a $y(x)=x+1$ da

$$J[1+x]=\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{1+(1+x)^2}=\ln\sqrt{5}-arctg2$$

ega bo'lamiz.

c) $M=C^1[a,b]$. $[a,b]$ kesmada $y'(x)$ uzluksiz hosilaga ega bo'lgan $y(x)$ funksiyalar sinfi bo'lsin. U holda

$$J[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}dx \qquad (2)$$

aniqlangan funksiyalar sinfida funksional bo'ladi. (2) funksional

oxirlari $A(a,y(a))$ va $B(b,y(b))$ nuqtalarda bo'lgan $y=y(x)$ egri chiziq yoyning uzunligini ifodalaydi.

. Yuqoridagi misollardan umumiyroq bo'lgan quyidagi misolni qarab o'taylik. Aytaylik, $F(x,y,z)$ – uch o'zgaruvchili uzluksiz funksiya bo'lsin.

Quyidagi ko'rinishdagi

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \qquad (3)$$

aniq integralni qaraylik, ya'ni unda x – erkin o'zgaruvchi, $y(x)$ noma'lum funksiya va uning $y'(x)$ hosilasiga bog'liq bo'lgan biror ifodaning aniq integrali. Bu yerda biz F – funksiyani u yoki bu ko'rinishda tanlash orqali turli ko'rinishdagi funksionallarga ega bo'lamiz. Yuqorida aytib o'tilganidek, kelgusida faqat (3) ko'rinishidagi funksionallarni qaraymiz. Shuni ta'kidlash lozimki, umuman olganda shunday funksionallar mavjudki, ularni (3) ko'rinishda ifodalab bo'lmaydi.

1-izoh. *Yuqorida keltirilgan misollardan ko'rinib turibdiki, funksionalni berilishiga yordam beruvchi integral yetarli darajada murakkab bo'lishi mumkin. Bunday integrallarni yozilishini soddalashtirish maqsadida integral ostidagi ifodadalarda noma'lum funksiyaning argumentini tashlab yozamiz. Shunday qilib, masalan, yuqorida ko'rsatilgan integrallarning birini quyidagi ko'rinishda*

$$\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx,$$

yozish mumkin. Kelgusida biz ushbu qoidaga amal qilishga harakat qilamiz, batafsil yozuvdan esa, faqat qachonki, funksional bog'liqlik

xarakterini ta'kidlash talab etilgan hollardagina foydalanamiz.

Ta'kidlash kerakki, funksionalning aniqlanish sohasi bo'lgan M to'plam turli tuzulishlarga ega bo'lishi mumkin. Faraz qilaylik, M - normallangan fazo bo'lsin, unda ixtiyoriy x elementning normasini $\|x\|$ deb belgilaymiz.

Agar berilgan normallangan fazoda turli normalar qaralsa, u holda ularning indeksiga qo'shimcha belgi qo'yish bilan ajratamiz, masalan, $\|x\|_0$.

6-misol. *a*) Normasi $\|f\|_C = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$ formula bilan aniqlangan $[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyalarning $C[a,b]$ banax fazosi.

b) $[a,b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyalarning $C^1[a,b]$ banax fazosi. Bu fazoda normani

$$\|f\|_{C^1} = \max_{x\in[a,b]}\left\{|f(x)|+|f'(x)|\right\}$$

ko'rinishda aniqlash mumkin.

c) $[a,b]$ kesmada kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning $L_2[a,b]$ Gilbert fazosi. Bu fazoda norma

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

ko'rinishda aniqladi.

Funksionallarni o'rganish davomida funksiyalar uchun kiritilgan bir qator (uzluksizlik, differensiallanuvchanlik, ekstremum) tushunchalari kabi funksionallar uchun ham shunga o'xshash tushunchalar kiritiladi.

Variatsion hisobning va boshqa bir qator turdosh fanlarning

murakkabligi shundan iboratki, biror-bir argumentning qiymatiga mos keluvchi funksiyalarning o'zlari boshqa funksionallarning argumentlari sifatida qaraladi. Bunda funksiya ifoda qiladigan bog'liqlikning tabiati muhim emas. Shu murakkablikni hisobga olib, keyinchalik biz qarala-yotgan biror bir to'plamning elementi sifatida funksiyalarni nuqtalar deb ataymiz va ularni funksionalning argumenti sifatida olamiz.

Normallangan fazoda sonli funksiyalardagi kabi mos ravishda nuqtaning atrofi va akslantirishning uzluksizligi tushunchalarini kiritish mumkin. Shunday qilib, x_0 nuqtaning X normallangan fazodagi ε-*atrofi deb,*

$$O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\},$$

to'plamga aytiladi. Agar mazkur normallangan fazoda bir qancha norma qaralsa, u holda har bir normaga fazoning tayinlangan nuqta-sining ε- atrofi mos keladi. Oldingi misolda keltirilgan $C^1[a,b]$ Banax fazosini qaraymiz. Bu fazoda oldin kiritilgan $\|\cdot\|_{C^1}$ norma bilan bir qatorda $\|x\|_C = \max_{x\in[a,b]}|x(x)|$ normadan ham foydalaniladi. Ta'kidlab o'tish lozimki, $C^1[a,b]$ chiziqli fazo $\|\cdot\|_C$ norma bilan banax fazosi bo'la olmaydi.

2-ta'rif. *Aytaylik, ε - musbat son bo'lsin. $x_0 \in C^1[a,b]$ funksiyaning ε kuchli atrofi deb,*

$$\|x - x_0\|_{C^1} = \max_{x\in[a,b]}|x(x) - x_0(x)| < \varepsilon,$$

tengsizlik o'rinli bo'lgan $x \in C^1[a,b]$ funksiyalar to'plamiga aytiladi. $x_0 \in C^1[a,b]$ funksiyaning kuchsiz ε atrofi deb,

$$\|x - x_0\|_{C^1} = \max_{x\in[a,b]}\left\{|x(x) - x_0(x)| + |x'(x) - x_0'(x)|\right\} < \varepsilon,$$

xarakterini ta'kidlash talab etilgan hollardagina foydalanamiz.

Ta'kidlash kerakki, funksionalning aniqlanish sohasi bo'lgan U to'plam turli tuzulishlarga ega bo'lishi mumkin. Faraz qilaylik, M – normallangan fazo bo'lsin, unda ixtiyoriy x elementning normasini $\|x\|$ deb belgilaymiz.

Agar berilgan normallangan fazoda turli normalar qaralsa, u holda ularning indeksiga qo'shimcha belgi qo'yish bilan ajratamiz, masalan, $\|x\|_*$.

6-misol. *a*) Normasi $\|f\|_C = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$ formula bilan aniqlangan $[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyalarning $C[a,b]$ banax fazosi.

b) $[a,b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyalarning $C^1[a,b]$ banax fazosi. Bu fazoda normani

$$\|f\|_{C^1} = \max_{x\in[a,b]}\left\{|f(x)|+|f'(x)|\right\},$$

ko'rinishda aniqlash mumkin.

c) $[a,b]$ kesmada kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning $L_2[a,b]$ Gilbert fazosi. Bu fazoda norma

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

ko'rinishda aniqladi.

Funksionallarni o'rganish davomida funksiyalar uchun kiritilgan bir qator (uzluksizlik, differensiallanuvchanlik, ekstremum) tushunchalari kabi funksionallar uchun ham shunga o'xshash tushunchalar kiritiladi.

Variatsion hisobning va boshqa bir qator turdosh fanlarning

murakkabligi shundan iboratki, biror-bir argumentning qiymatiga mos keluvchi funksiyalarning o'zlari boshqa funksionallarning argumentlari sifatida qaraladi. Bunda funksiya ifoda qiladigan bog'liqlikning tabiati muhim emas. Shu murakkablikni hisobga olib, keyinchalik biz qarala-yotgan biror bir to'plamning elementi sifatida funksiyalarni nuqtalar deb ataymiz va ularni funksionalning argumenti sifatida olamiz.

Normallangan fazoda sonli funksiyalardagi kabi mos ravishda nuqtaning atrofi va akslantirishning uzluksizligi tushunchalarini kiritish mumkin. Shunday qilib, x_0 nuqtaning N normallangan fazodagi ε–*atrofi deb,*

$$O_\varepsilon(x_0) = \{x\in N : \|x-x_0\|<\varepsilon\},$$

to'plamga aytiladi. Agar mazkur normallangan fazoda bir qancha norma qaralsa, u holda har bir normaga fazoning tayinlangan nuqta-sining ε– atrofi mos keladi. Oldingi misolda keltirilgan $C^n[a,b]$ Banax fazosini qaraymiz. Bu fazoda oldin kiritilgan $\|\cdot\|_{C^n}$ norma bilan bir qatorda $\|y\|_C = \max_{x\in[a,b]}|y(x)|$ normadan ham foydalaniladi. Ta'kidlab o'tish lozimki, $C^n[a,b]$ chiziqli fazo $\|\cdot\|_C$ norma bilan banax fazosi bo'la olmaydi.

2-ta'rif. *Aytaylik, ε– musbat son bo'lsin. $y_0\in C^n[a,b]$ funksiyaning ε kuchli atrofi deb,*

$$\|y-y_0\|_{C^n} = \max_{x\in[a,b]}|y(x)-y_0(x)|<\varepsilon,$$

tengsizlik o'rinli bo'lgan $y\in C^n[a,b]$ funksiyalar to'plamiga aytiladi. $y_0\in C^n[a,b]$ funksiyaning kuchsiz ε atrofi deb,

$$\|y-y_0\|_{C^n} = \max_{x\in[a,b]}\left\{|y(x)-y_0(x)|+|y'(x)-y_0'(x)|\right\}<\varepsilon.$$

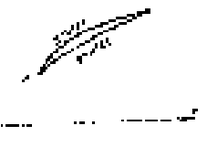
tengsizlik o'rinli bo'lgan $x \in C^1[a,b]$ funksiyalar to'plamiga aytiladi

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $y(x)$ funksiyaning kuchsiz ε atrofiga tushgan $y(x)$ funksiya, $y(x)$ funksiyaning kuchli ε atrofiga ham tushadi. Boshqacha qilib aytganda, kuchsiz ε atrof doimo kuchli ε atrof ichiga kiradi.

3-ta'rif. *M normallangan fazoda aniqlangan $J[y]$ funksional $y_0 \in M$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun y_0 nuqtaning shunday ε atrofi mavjud bo'lsaki, shu atrofdan olingan ixtiyoriy y nuqta uchun $|J[y]-J[y_0]| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.*

Variatsiya tushunchasi. Funksionalning uzluksizligi. Chiziqli funksional.

4-ta'rif. *Normallangan fazoning y funksiyalar to'plamidan biror bir $y_0(x)$ funksiyani tanlaymiz, $y(x) \in M$ to'plamning ixtiyoriy funksiyasi bo'lsin. $y(x)-y_0(x)$ ayirmaga $y_0(x)$ funksiyaning variatsiyasi deyiladi. Boshqacha so'z bilan aytganda, normallangan fazoda aniqlangan $J[y]$ funksional $y(x)$ argumentini $\delta y(x)$ orttirmasi yoki variatsiyasi deb, tanlangan M sinfga tegishli bo'lgan ikkita $y(x)$ va $y_0(x)$ funksiyalarning ayirmasiga aytiladi va $\delta y(x)$ kabi belgi kiritadi (10- rasm).*



10 - rasm

Bu yerda nuqtadagi variatsiya tushunchasi bilan funksiyaning orttirmasini farqlash lozimligini ta'kidlab o'tish kerak.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi - bu ikkita funksiyaning qiymatlari ayirmasiga teng bo'lgan son, variatsiya esa — bu funksionalning argumenti sifatida qaralayotgan ikkita funksiyaning ayirmasiga

teng bo'lgan funksiya. y aniqlanish sohali $J[y]$ funksional va berilgan $y(x) \in M$ funksiya uchun bu funksiyaning δy variatsiyasini *joiz variatsiya* deb ataymiz, agarda $y+\delta y \in M$ bo'lsa. Differensiallanuvchi funksiya uchun $\delta y = dy$ variatsiya hosilasidan va $\delta(y')$ hosilaning variatsiyasini farqlash kerakligi kelib chiqadi. Tushunchaning birinchi ahamiyati faqat joiz variatsiyaning hosilasi berilgan funksiya bo'lishi mumkin, ikkinchisining ahamiyati esa ixtiyoriy joiz variatsiya bo'ladi.

Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ funksiyaning ekstremumga tadqiq qilishda Δx orttirma qanday rol o'ynagan bo'lsa, funksiyaning δy variatsiyasi ham variatsion masalalarda shunday rol o'ynaydi. Funksiyaning variatsiyasi δy bu x ning funksiyasi. Shuning uchun, bu funksiyani bir yoki bir necha marta differensiallash mumkin,

$$(\delta y)' = y'(x) - y_0'(x) = \delta y'$$

bo'ladi, ya'ni variatsiyaning hosilasi hosilaning variatsiyasiga teng, huddi shuningdek, k marta differensiallasak

$$(\delta y(x))^{(k)} = y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x) = \delta y^{(k)}(x)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Funksionalning uzluksizligi. Funksionalning uzluksizligi ta'rifini keltirishdan oldin funksiyani uzluksizligi ta'rifini eslab o'taylik.

5-ta'rif. *$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agarda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ soni topilsaki, $|x-x_0| < \delta$ bo'lganda $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ bo'lsa.*

Bunga o'xshash ta'rifni funksionallar uchun ham kiritishimiz zarur. E'tibor bergan bo'lsangiz funksiyani uzluksizligiga berilgan

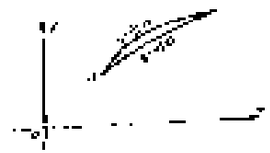
tengsizlik o'rinli bo'lgan $y\in C^1[a,b]$ funksiyalar to'plamiga aytiladi

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $x_0(x)$ funksiyaning kuchsiz ε atrofiga tushgan $y(x)$ funksiya, $x_0(x)$ funksiyaning kuchli ε atrofiga ham tushadi. Boshqacha qilib aytganda, kuchsiz ε atrof doimo kuchli ε atrof ichiga kiradi.

3-ta'rif. *M normallangan fazoda aniqlangan $J[y]$ funksional $y_0\in M$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar har qanday $\varepsilon>0$ son uchun, y_0 nuqtaning shunday ε atrofi mavjud bo'lsaki, shu atrofdan olingan ixtiyoriy y nuqta uchun $|J[y]-J[y_0]|<\varepsilon$, tengsizlik bajarilsa*

Variatsiya tushunchasi. Funksionalning uzluksizligi. Chiziqli funksional.

4-ta'rif. *Normallangan fazoning M funksiyalar to'plamidan biror bir $y_0(x)$ funksiyani tanlaymiz. $\forall y\in M$ to'plamning ixtiyoriy funksiyasi bo'lsin. $y(x)-y_0(x)$ ayirmaga $y_0(x)$ funksiyaning variatsiyasi deyiladi. Boshqacha so'z bilan aytganda, normallangan fazoda aniqlangan $J[y]$ funksional $y(x)$ argumentini $\delta y(x)$ orttirmasi yoki variatsiyasi deb, tanlangan M sinfga tegishli bo'lgan ikkita $y(x)$ va $y_0(x)$ funksiyalarning ayirmasiga aytiladi va $\delta y(x)$ kabi belgi lamadi (10- rasm).*



10 - rasm

Bu yerda nuqtadagi variatsiya tushunchasi bilan funksiyaning orttirmasini farqlash lozimligini ta'kidlab o'tish kerak.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi - bu ikkita funksiyaning qiymatlari ayirmasiga teng bo'lgan son, variatsiya esa – bu funksionalning argumenti sifatida qaralayotgan ikkita funksiyaning ayirmasiga

teng bo'lgan funksiya. x aniqlanish sohali $J[y]$ funksional va berilgan $y=y_0(x)$ funksiya uchun bu funksiyaning δy variatsiyasini *joiz variatsiya* deb ataymiz, agarda $y=y_0+\varepsilon\eta\in M$ bo'lsa. Differensiallanuvchi funksiya uchun $\eta(x)=\delta y$ variatsiya hosilasidan va $\delta(y')$ hosilaning variatsiyasini farqlash kerakligi kelib chiqadi. Tushunchaning birinchi ahamiyati faqat joiz variatsiyaning hosilasi bo'lgan funksiya bo'lishi mumkin. ikkinchisining ahamiyati esa ixtiyoriy joiz variatsiya bo'ladi.

Boshqacha qilib aytganda, $J(x)$ funksiyaning ekstremumga tadqiq qilishda Δx orttirma qanday rol o'ynagan bo'lsa, funksiyaning δy variatsiyasi ham variatsion masalalarda shunday rol o'ynaydi. Funksiyaning variatsiyasi δy bu x ning funksiyasi. Shuning uchun, bu funksiyani bir yoki bir necha marta differensiallash mumkin.

$$\delta(y')=y'(x)-y_0'(x)=\delta y'(x)$$

bo'ladi, ya'ni variatsiyaning hosilasi hosilaning variatsiyasiga teng. huddi shuningdek, k marta differensiallasak

$$(\delta y(x))^{(k)}=y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)=\delta y^{(k)}(x)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Funksionalning uzluksizligi. Funksionalning uzluksizligi ta'rifini keltirishdan oldin funksiyani uzluksizligi ta'rifini eslab o'tmylik.

5-ta'rif. *$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agarda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ soni topilsaki, $|x-x_0|<\delta$ bo'lganda $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ bo'lsa.*

Bunga o'xshash ta'rifni funksionallar uchun ham kiritishimiz zarur. E'tibor bergan bo'lsangiz funksiyani uzluksizligiga berilgan

ta'rifda sonlar o'qida ikki nuqta orasidagi masofa ishtirok etadi. Demak, funksionallarni uzluksizligiga ta'rif berish uchun funksionallar orasidagi masofa (metrika) ni kiritish talab etilar ekan.

Chiziqli funksional. Chiziqli funksionalga ta'rif berishdan oldin chiziqli funksiyaning ta'rifini berib o'tilsa maqsadga muvofiq bo'ladi.

6-ta'rif. *Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $l(x)$ funksiyaga chiziqli funksiya deb ataladi: a) $l(Cx)=Cl(x)$, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas; b) $l(x_1+x_2)=l(x_1)+l(x_2)$.*

$l(x)=kx$ bir o'zgaruvchili funksiya chiziqli funksiyaga misol bo'ladi. Xuddi shuningdek, funksional uchun quyidagi ta'rifni keltiramiz.

7-ta'rif. *M $y(x)$ funksiyalarning chiziqli normallangan fazosi bo'lsin. M fazoda aniqlangan $J[y(x)]$ funksional chiziqli deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa: a) $J[Cy(x)]=CJ[y(x)]$, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas; b) $J[y(x_1)+y(x_2)]=J[y(x_1)]+J[y(x_2)]$, bu yerda $y_1(x)\in M$ va $y_2(x)\in M$.*

7-misol. $C[a,b]$ da aniqlangan $J[y(x)]=\int_a^b[y(x)+y(x)]dx$ funksional ravshanki, chiziqli bo'ladi.

8-misol. $J[y(x)]=\int_a^b[p(x)y+q(x)y]dx$ funksional ham chiziqli funksionalga misol bo'ladi.

9-misol. $J[y(x)]=\int_a^b f(x)y(x)dx$ funksional $C[a,b]$ fazoda chiziqli funksionalga misol bo'la oladi, bu yerda $f(x)$ – tayinlangan funksiya.

Chiziqli funksionalning boshqa ta'rifi. *$J[y(x)]$ funksional chiziqli deyiladi, agar u: a) uzluksiz; b) har qanday $y_1(x)\in M$ va $y_2(x)\in M$ funksiyalar uchun $J[y_1(x)+y_2(x)]=J[y_1(x)]+J[y_2(x)]$ shartni qanoatlantirsa.*

2-izoh. *Yuqorida chiziqli fazo va unda aniqlangan funksionallar haqida so'z bordi. Biroq, ko'pgina variatsion masalalarda chiziqli fazo tashkil qilmaydigan funksiyalar to'plamida aniqlangan funksionallarni ham o'rganishga to'g'ri keladi, masalan, tekislikdagi tayinlangan ikki nuqtadan o'tuvchi egri chiziqlar to'plami. Lekin shunga qaramasdan, chiziqli normallangan fazo tushunchasi va u bilan bog'liq funksiyalar orasidagi masofa, funksionalning uzluksizligi va boshqa tushunchalar variatsion hisobda muhim rol o'ynaydi.*

3-§. Egri chiziqlar orasidagi masofa va ularning yaqinlilik tartiblari

Endi egri chiziqlar orasidagi masofa va ularning yaqinlilik tartiblarining ta'riflari bilan tanishib chiqamiz.

1-ta'rif. *$C[a,b]$ fazoda ikkita $f(x)$ va $g(x), a\le x\le b$, uzluksiz funksiyalar berilgan bo'lsin. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar orasidagi masofa (C – metrikada) quyidagicha aniqlanadi*

$$\|f(x)-g(x)\|_{C[a,b]}=\rho_{C[a,b]}(f(x),g(x))=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|.$$

$f(x)$ funksiyaning atrofi $C[a,b]$ fazo metrikasida funksiyaning kuchli atrofi deb, barcha $g(x)$ uzluksiz funksiyalarning shunday to'plamiga aytiladiki, u uchun

$$\rho_{C[a,b]}(f(x),g(x))=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bu holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar C – da

ta'rifda sonlar o'qida ikki nuqta orasidagi masofa ishtirok etadi. Demak, funksionallarni uzluksizligiga ta'rif berish uchun funksionallar orasidagi masofa (metrika) ni kiritish talab etilar ekan.

Chiziqli funksional. Chiziqli funksionalga ta'rif berishdan oldin chiziqli funksiyaning ta'rifini berib o'tilsa maqsadga muvofiq bo'ladi.

6-ta'rif. *Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $l(x)$ funksiyaga chiziqli funksiya deb ataladi: a) $l(Cx)=Cl(x)$, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas; b) $l(x_1+x_2)=l(x_1)+l(x_2)$.*

$l(x)=kx$ bir o'zgaruvchili funksiya chiziqli funksiyaga misol bo'ladi. Xuddi shuningdek, funksional uchun quyidagi ta'rifni keltiramiz.

7-ta'rif. *M $y(x)$ funksiyalarning chiziqli normallangan fazosi bo'lsin. M fazoda aniqlangan $J[y(x)]$ funksional chiziqli deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa: a) $J[Cy(x)]=CJ[y(x)]$, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas; b) $J[y(x_1)+y(x_2)]=J[y(x_1)]+J[y(x_2)]$, bu yerda $y_1(x)\in M$ va $y_2(x)\in M$.*

7-misol. $C^1[a,b]$ da aniqlangan $J[y(x)]=\int_a^b[y'(x)+y(x)]dx$ funksional ravshanki, chiziqli bo'ladi.

8-misol. $J[y(x)]=\int_a^b[p(x)y+q(x)y']dx$ funksional ham chiziqli funksionalga misol bo'ladi.

9-misol. $J[y(x)]=\int_a^b f(x)h(x)dx$ funksional $C[a,b]$ fazoda chiziqli funksionalga misol bo'la oladi, bu yerda $f(x)$ – tayinlangan funksiya.

Chiziqli funksionalning boshqa ta'rifi. *$J[y(x)]$ funksional chiziqli deyiladi, agar u: a) uzluksiz; b) har qanday $y_1(x)\in M$ va $y_2(x)\in M$ funksiyalar uchun $J[y_1(x)+y_2(x)]=J[y_1(x)]+J[y_2(x)]$ shartni qanoatlantirsa.*

2-izoh. *Yuqorida chiziqli fazo va unda aniqlangan funksionallar haqida so'z bordi. Biroq, ko'pgina variatsion masalalarda chiziqli fazo tashkil qilmaydigan funksiyalar to'plamida aniqlangan funksionallarni ham o'rganishga to'g'ri keladi, masalan, tekislikdagi tayinlangan ikki nuqtadan o'tuvchi egri chiziqlar to'plami. Lekin shunga qaramasdan, chiziqli normallangan fazo tushunchasi va u bilan bog'liq funksiyalar orasidagi masofa, funksionalning uzluksizligi va boshqa tushunchalar variatsion hisobda muhim rol o'ynaydi.*

3-§. Egri chiziqlar orasidagi masofa va ularning yaqinlilik tartiblari

Endi egri chiziqlar orasidagi masofa va ularning yaqinlilik tartiblarining ta'riflari bilan tanishib chiqamiz.

1-ta'rif. *$C[a,b]$ fazoda ikkita $f(x)$ va $g(x), a\le x\le b$, uzluksiz funksiyalar berilgan bo'lsin. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar orasidagi masofa (C – metrikada) quyidagicha aniqlanadi*

$$\|f(x)-g(x)\|_{C[a,b]}=\rho_{C[a,b]}(f(x),g(x))=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|.$$

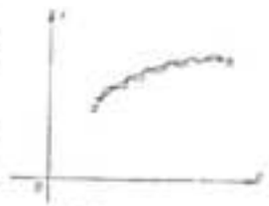
$f(x)$ funksiyaning atrofi $C[a,b]$ fazo metrikasida funksiyaning kuchli atrofi deb, barcha $g(x)$ uzluksiz funksiyalarning shunday to'plamiga aytiladiki, u uchun

$$\rho_{C[a,b]}(f(x),g(x))=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bu holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar C – da

yaqin deb aytiladi.

2-ta'rif. *$[a,b]$ kesmada berilgan $f(x)$ va $g(x)$ egri chiziqlar nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin deyiladi, agarda $|f(x)-g(x)|$ farq $[a,b]$ kesmada kichik bo'lsa. Bu egri chiziqlarning $[a,b]$ kesmadagi ordinatasi bo'yicha yaqinligi uning geometrik ma'nosini anglatadi (11- rasm).*



11 - rasm

$C^1[a,b]$ fazoda ikkita $f(x)$ va $g(x), a\le x\le b$, uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar orasidagi masofa C^1 – (metrikada) quyidagicha aniqlanadi

$$|f(x)-g(x)|_{C^1[a,b]}=\rho_{C^1[a,b]}(f(x),g(x))=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|+\max_{a\le x\le b}|f'(x)-g'(x)|.$$

$f(x)$ funksiyaning atrofi $C^1[a,b]$ fazo metrikasida yoki funksiyaning kuchsiz atrofi deb, barcha $g(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalarning shunday to'plamiga aytiladiki, u uchun

$$\rho_{C^1[a,b]}(f(x),g(x))=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|+\max_{a\le x\le b}|f'(x)-g'(x)|<\varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu holda aytiladiki, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar C^1 – ma'nosida yaqin.

3-ta'rif. *$[a,b]$ kesmada berilgan $f(x)$ va $g(x)$ egri chiziqlar birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin deyiladi, agarda $|f(x)-g(x)|$ va $|f'(x)-g'(x)|$ modullar – $[a,b]$ kesmada kichik bo'lsa.*



12 - rasm

Bu egri chiziqlarning $[a,b]$ kesmada ham ordinatasi bo'yicha, ham mos nuqtalardagi urinmalarining yo'na-lishlari bo'yicha yaqinligi uning geometrik ma'nosini anglatadi (12- rasm).

$C^k[a,b]$ fazoda ikkita $f(x)$ va $g(x), a\le x\le b$, k marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar orasidagi masofa (C^k – metrikada) quyidagicha aniqlanadi

$$|f(x)-g(x)|_{C^k[a,b]}=\rho_{C^k[a,b]}(f(x),g(x))=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|+\max_{a\le x\le b}|f'(x)-g'(x)|+$$

$$+\max_{a\le x\le b}|f''(x)-g''(x)|+\ldots+\max_{a\le x\le b}|f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)|.$$

$f(x)$ funksiyaning atrofi $C^k[a,b]$ fazo metrikasida funksiyaning kuchsiz atrofi deb, barcha k marta uzluksiz differensiallanuvchi $g(x)$ funksiyalarning shunday to'plamiga aytiladiki, natijada quyidagi

$$|f(x)-g(x)|_{C^k[a,b]}=\rho_{C^k[a,b]}(f(x),g(x))=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|+\max_{a\le x\le b}|f'(x)-g'(x)|+$$

$$+\max_{a\le x\le b}|f''(x)-g''(x)|+\ldots+\max_{a\le x\le b}|f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)|<\varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bu holda aytiladiki, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar C^k – ma'nosida yaqin. Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ va $g(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar orasidagi n – tartibli masofa deb, $[a,b]$ kesmada quyidagi miqdorlar

$$|f(x)-g(x)|,\ |f'(x)-g'(x)|,\ldots,|f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)|$$

maksimumlarning eng kattasiga aytiladi. Bu masofani quyidagicha belgilaymiz:

$$\rho_{C^n[a,b]}(f(x),g(x))=\max_{0\le k\le n}\max_{a\le x\le b}|f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)|.$$

$[a,b]$ kesmada berilgan $f(x)$ va $g(x)$ egri chiziqlar k – tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin deyiladi, agarda

$$|f(x)-g(x)|,\quad |f'(x)-g'(x)|,\ldots,|f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)|$$

modullar $[a,b]$ kesmada kichik bo'lsa.

Agar egri chiziqlar k – tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin bo'lsa, u

holda ular ixtiyoriy kichik tartibli yaqinlikda ham yaqin bo'ladi.

1-misol. [0,1] kesmada $f(x)=x$ va $g(x)=x^2$ egri chiqlar orasidagi ρ_0 masofa topilsin (13-rasm).



13 - rasm

Yechish. Ta'rifga ko'ra,

$$\rho_0 = \max_{0\le x\le 1}\left|x^2-x\right| = \max_{0\le x\le 1}(x-x^2)$$

[0,1] kesmaning oxirlarida $y=x-x^2$ funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi. $y=x-x^2$ funksiyaning [0,1] kesmada maksimumini topamiz. $x=\frac{1}{2}$ da $y'=1-2x$ ifoda $y'=0$ bo'ladi, bundan

$$\rho_0(f(x),g(x)) = \max_{0\le x\le 1}\left|x-x^2\right| = (x-x^2)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

2-misol. $0\le x\le 1$ kesmada $f(x)=x^3$ va $g(x)=x^2$ funksiyalar orasidagi 1-tartibli masofa topilsin.

Yechish. Ushbu berilgan funksiyalarning hosilalarini topamiz $g'(x)=3x^2$, $f'(x)=2x$ va $y_1(x)=x^2-x^3$, $y_2(x)=2x-3x^2$ funksiyalarni qaraymiz. Ularning [0,1] kesmadagi eng katta qiymatlarini topamiz, $y_1(x)=2x-3x^2$, ga ega bo'lamiz. Hosilani nolga tenglab, $y_1(x)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz $x_1=0, x_2=\frac{2}{3}$. So'ngra,

$$y_1(x)\Big|_{x=0}=0,\quad y_1(x)\Big|_{x=\frac{2}{3}}=\frac{4}{27};$$

$y_1(x)$ funksiyaning o'ng oxiridagi qiymati $y_1(1)=0$ bo'ladi. Bundan

$$\rho_1 = \max_{0\le x\le 1}\left|x^2-x^3\right| = \max_{0\le x\le 1}(x^2-x^3) = \frac{4}{27}.$$

Endi $f'(x)=2x$ va $g'(x)=3x^2$ hosilalar orasidagi nolinchi tartibli masofani topamiz

$$\tilde{\rho}_0 = \max_{0\le x\le 1}\left|y_1(x)\right| = \max_{0\le x\le 1}\left|2x-3x^2\right|.$$

$y_1(x)=\left|2x-3x^2\right|$ funksiyaning grafigini chizamiz (14-rasm). Rasmdan ko'rinib turibdiki, $\tilde{\rho}_0=1$. Shunday $0\le x\le 1$ qilib, kesmada $g(x)=x^2$ va $f(x)=x^3$ funksiyalar orasidagi birinchi tartibli ρ_1 masofa $\rho_1=\max(\rho_0,\tilde{\rho}_0)=1$ ga teng bo'ladi.



14- rasm

3-misol. $f_n(x)=\frac{\sin n^2 x}{n}$ funksiyalar ketma-ketligi berilgan, bu yerda $n-$ yetarlicha katta son, va $g(x)=0$, $x\in[0,\pi]$. Aniqlash kerakki, $f_n(x)\to 0$: a) $C[0,\pi]$ metrikaga nisbatan; b) $C^1[0,\pi]$ metrikaga nisbatan to'g'rimi?

Yechish. Berilgan egri chiziqlar $[0,\pi]$ kesmada nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin, chunki

$$\left|f_n(x)-g(x)\right| = \left|\frac{\sin n^2 x}{n}-0\right| \le \frac{1}{n},$$

bo'ladi, ya'ni butun $[0,\pi]$ oraliqda bu ayirma modul bo'yicha yetarlicha katta n larda kichik, ya'ni $f_n(x)\to 0$ bo'ladi, demak, a) shart bajariladi. Ushbu ayirmani qaraylik, $\left|f_n(x)-g'(x)\right| = n\left|\cos n^2 x-0\right| = n\left|\cos n^2 x\right|$, bo'lganligi sababli, birinchi tartibli yaqinlik yo'q, masalan, $x=\frac{2\pi}{n^2}$ nuqtada $\left|f_n(x)-g'(x)\right|=n$ ga ega bo'lamiz, demak, $\left|f_n(x)-g'(x)\right|$ ayirmaning modulini n ning katta qiymatiga qarab yetarlicha katalashtirish mumkin, ya'ni $f_n(x)\to 0$ bo'lmaydi, demak, b) shart bajarilmaydi. Boshqacha qilib aytganda, nolinchi tartibli yaqinlikdan birinchi tartibli yaqinlik kelib chiqmaydi.

4-misol. $[0,\pi]$ kesmada $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n^2}$, funksiyalar ketma-ketligi

berilgan, bu yerda n yetarlicha katta son, va $g(x)=0$. egri chiziqlar $[0,\pi]$ kesmada 1- tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin, chunki

$$|f_n(x)-g(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n^2}-0\right|\le\frac{1}{n},\quad \text{va}\quad |f_n(x)-g'(x)|=\left|\frac{\cos n^2x}{n}\right|\le\frac{1}{n},$$

ya'ni birinchi tartibli ma'nosida yaqin.

5-misol. $f_n(x)=\frac{\sin n^2x}{n}$, funksiyalar ketma-ketligi berilgan, bu yerda $n-$ yetarlicha katta son, $x\in[0,2\pi]$. Aniqlash kerakki, $f_n(x)\to 0$: a) $C[0,2\pi]$ metrikaga nisbatan; b) $C^1[0,2\pi]$ metrikaga nisbatan to'g'rimi?

Yechish. a) $C[0,2\pi]$ fazoda masofani ta'rifiga asosan

$$\rho_C(f_n(x),0)=\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\frac{\cos nx}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\to 0,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bundan $f_n(x)\to 0$ bo'ladi. Shunday qilib, $C[0,2\pi]$ fazoda $f_n(x)\to 0$ bo'ladi, bu bilan a) tasdiq bajariladi. b) $C^1[0,2\pi]$ fazoda masofani ta'- rifiga asosan

$$\rho_{C^1}(f_n(x),0)=\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\frac{\cos nx}{n}-0\right|+\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\frac{-n\sin nx}{n}-0\right|=\frac{1}{n}+1\ge 1,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, barcha n larda $\rho_{C^1}(f_n(x),0)\ge 1$ bo'ladi, shuning uchun, b) tasdiq noto'g'ri.

Quyidagi misollarda egri chiziqlarning yaqinlilik tartiblari aniqlansin.

32. $[0,2\pi]$ kesmada $y(x)=\frac{\cos nx}{n^2+1}$, $y_1(x)=0$. **33.** $[0,\pi]$ kesmada $y(x)=\frac{\sin nx}{n}$, $y_1(x)=0$. **34.** $[0,1]$ kesmada $y(x)=\sin\frac{x}{n}$, $y_1(x)=0$.

Quyida berilgan misollarda ko'rsatilgan kesmada egri chiziqlar orasidagi masofa topilsin.

35. $[0,2]$ kesmada $f(x)=xe^{-x}$, $f_1(x)=0$.

36. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada $f(x)=\sin 2x$, $f_1(x)=\sin x$.

37. $[e^{-1},e]$ kesmada $f(x)=\ln x$ va $f_1(x)=\ln(x)$.

38. $[e^{-1},e]$ kesmada $f(x)=\ln x$ va $f_1(x)=x$ egri chiziqlar orasidagi 1-tartibli masofa topilsin.

39. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ kesmada $f(x)=x$ va $f_1(x)=-\cos x$ egri chiziqlar orasidagi 2-tartibli masofa topilsin.

40. $[0,1]$ kesmada $f(x)=e^x$ va $f_1(x)=x$ egri chiziqlar orasidagi 1001-tartibli masofa topilsin.

4-ta'rif. *$y=f(x)$ egri chiziqning $n-$ tartibli ε atrofi deb, shunday $y=f_1(x)$ $a\le x\le b$, egri chiziqlar to'plamiga aytiladiki, $y=f(x)$ egri chiziq bilan uning orasidagi $n-$tartibli masofa ε dan kichik bo'ladi, ya'ni*

$$\rho_n=\rho_n[f(x),f_1(x)]<\varepsilon.$$

Nolinchi tartibli ε atrof $y=f(x)$ funksiyaning kuchli ε atrofi deb aytiladi.

$y=f(x)$ egri chiziqning kuchli ε atrofi, $y=f(x)$ egri chiziqning eni 2ε ga teng polosaning atrofiga joylashgan egri chiziqlardan iborat.

Birinchi tartibli ε atrof deb, $y=f(x)$ funksiyaning kuchsiz ε atrofiga aytiladi.

Yuqqorida keltirilgan ta'riflardan foydalanib, funksionalning uzuksizligi to'g'risidagi ta'rifni turli xil ko'rinishda keltirish mumkin, ularni ayrimlari bilan tanishib o'tamiz.

5-ta'rif (funksionalning uzluksizligi). *$J:M\subset C[a,b]\to R$ funksio-*

nal C– da uzluksiz deyiladi, agar ixtyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun, shunday $\delta>0$ soni mavjud bo'lsaki, $\rho_{C[a,b]}(f,f_0)<\delta$ bo'lganda $|J[f]-J[f_0]|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.

$J:M\subset C^1[a,b]\to R$ funksional C^1– uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun, shunday $\delta>0$ soni mavjud bo'lsaki, $\rho_{C^1[a,b]}(f,f_0)<\delta$ bo'lganda $|J[f]-J[f_0]|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.

$C[a,b]$($C^1[a,b]$)– fazolarda uzluksiz bo'lmagan funksionallarni *uzulishli (uzilishga ega bo'lgan) funksionallar* deb ataladi.

Ma'lumki, $\rho_{C[a,b]}(f,f_0)\le\rho_{C^1[a,b]}(f,f_0)$. Shuning uchun, $\rho_{C^1[a,b]}(f,f_0)<\varepsilon$ tengsizlikdan $\rho_{C[a,b]}(f,f_0)<\varepsilon$ kelib chiqadi, biroq. teskari tasdiq o'rinli emas. Boshqacha qilib aytganda, f_0 funksiyaning kuchli ε atrofi *kuchsiz* atrofga nisbatan ko'proq funksiyani o'z ichiga oladi. Qiymatlari f_0 funksiyaning qiymatlariga yaqin bo'lgan funksiyalar kuchsiz atrofga tushmaydi, lekin hosilasi bu funksiyalarning hosilasidan kuchli farq qiladi.

6-misol. Aytaylik $C^1[a,b]$ fazoda $J[f]=f(x_0)$ funksional berilgan bo'lsin, bu yerda $x_0\in[a,b]$, ya'ni $C^1[a,b]$ fazoning har bir funksiyasiga aniq son – bu funksiya hosilasining fiksirlangan x_0 nuqtadagi qiymati mos qo'yilgan. Tekshirib qo'yish kerakki: a) C– metrikaga nisbatan; b) $C^1[a,b]$– fazoda C^1– metrikaga nisbatan bu funksional uzluksiz bo'ladimi?

Yechish. $[a,b]$ kesmada $\varphi(x_0)=1$ va $|\varphi(x)|<\delta$ bo'lgan $\varphi(x)$ funksiyani qaraymiz. Quyidagi funksiyani olamiz $f(x)=f_0(x)+\varphi(x)$, bu yerda

$x_0\in C^1[a,b]$. U holda $f(x)=f_0(x)+1$ bo'ladi. Ma'lumki, $\rho_{C[a,b]}(f,f_0)<\delta$, ya'ni f va f_0 funksiyalar C– metrikada yaqin. Shu vaqtning o'zida $J[f]-J[f_0]=1$, ya'ni shunday $\varepsilon>0$ (aynan $\varepsilon<1$) soni mavjudki, ixtiyoriy $\delta>0$ soni qanday bo'lishidan qat'iy nazar, shunday $f(x)$ funksiya topiladiki, $\rho_{C[a,b]}(f,f_0)<\delta$, va $|J[f]-J[f_0]|\ge\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa, qaralayotgan funksionalni $C[a,b]$ da nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzlulishga ega ekanligini bildiradi. b) ixtiyoriy $\varepsilon>0$ ni olamiz, ko'rsatamizki, shunday $\delta>0$ soni topiladiki, $\rho_{C^1[a,b]}(f,f_0)<\delta$, bo'lganda $|J[f]-J[f_0]|<\varepsilon$ bo'ladi. $\delta=\varepsilon$ deb olaylik. U holda

$$|J[f]-J[f_0]|=|f(x_0)-f_0(x_0)|\le\max_{x\in[a,b]}|f(x_0)-f_0'(x_0)|\le\max_{x\in[a,b]}|f(x_0)-f_0'(x_0)|+$$

$$+\max_{x\in[a,b]}|f(x_0)-f_0(x_0)|=\rho_{C^1[a,b]}(f,f_0)=\varepsilon.$$

Bundan ko'rinadiki, funksional $C^1[a,b]$ fazoda uzluksiz.

1-izoh. *Mazkur misol C^1– metrikaga nisbatan funksionalni uzluksizligidan, umuman olganda, uni C– metrikaga nisbatan uzluksizligi kelib chiqmasligini ko'rsatadi.*

6-ta'rif. *$y(x)$ funksiyalar sinfi M to'plamda aniqlangan $J[y(x)]$ funksional $y=y_0(x)$ nuqtada n– tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun, shunday $\eta>0$ soni topilsaki,*

$$|y(x)-y_0(x)|<\eta,\ |y'(x)-y_0'(x)|<\eta,\ |y''(x)-y_0''(x)|<\eta,\ldots,|y^{(n)}(x)-y_0^{(n)}(x)|<\eta,$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha joiz $y=y(x)$ funksiyalar uchun

$$|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa. Boshqacha so'z bilan aytganda, $|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon$ bo'ladi, agarda $\rho_n[y(x),y_0(x)]<\eta$ tengsizlik bajarilsa.

n– tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz bo'lmagan funksional n– tartibli yaqinlik ma'nosida uzilishga ega bo'lgan funksional deb ataladi.

$y^{(k)}(x)=y_0^{(k)}(x)+\alpha\omega^{(k)}(x),\quad (k=0,1,2,\ldots,n)$, deb olamiz, bunda α – qandaydir parametr, $\omega(x)$ esa $-M$ sinfdan olingan ixtiyoriy funksiya, bu yerda $\lim_{\alpha\to 0} y^{(k)}(x)=y_0^{(k)}(x),\ (k=0,1,2,\ldots,n)$, ekanligini hisobga olib, funksionalni $y(x)=y_0(x)$ funksiyadagi uzluksizlik ta'rifini quyidagicha

$$\lim_{\alpha\to 0} J[y_0(x)+\alpha\omega(x)]=J[y_0(x)]$$

yozishimiz mumkin.

7-misol. $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J[y(x)]=\int_0^1 [y(x)+2y'(x)]dx$$

funksionalni $y_0(x)=x$ funksiyada birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini ko'rsating.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonini olamiz. U holda shunday $\eta>0$ soni mavjudki, faqat $|y(x)-x|<\eta$ va $|y'(x)-1|<\eta$ bajarilganda, $|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon$ munosabat o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

$$|J[y(x)]-J[x]|=\left|\int_0^1 [y(x)+2y'(x)-x-2]dx\right|\le\int_0^1|y(x)-x|dx+2\int_0^1|y'(x)-1|dx,$$

ifodaga egamiz. Endi $\eta=\frac{\varepsilon}{3}$ deb tanlaymiz. U holda barcha $y(x)\in C^1[0,1]$ funksiyalarda $|y(x)-x|<\frac{\varepsilon}{3}$, $|y'(x)-1|<\frac{\varepsilon}{3}$, bo'lib, $|J[y(x)]-J[x]|<\varepsilon$ ga ega bo'lamiz. Demak, har qanday $\varepsilon>0$ soni uchun, $\eta>0$ son mavjudki,

masalan, shunday $\eta=\frac{\varepsilon}{3}$ borki, $\rho[y(x),x]<\eta$ bo'lsa, u holda $|J[y(x)]-J[x]|<\varepsilon$ bajariladi. Bu esa ta'rifga ko'ra, berilgan funksionalning $y_0=x$ funksiyada birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini anglatadi. Ko'rish mumkinki, bu funksionalni ixtiyoriy $y(x)\in C^1[0,1]$ egri chiqlarda birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini ko'rish qiyin emas.

8-misol. $C^1[0,\pi]$ fazoda aniqlangan $J[y(x)]=\int_0^{\pi} y'^2(x)dx$ funksionalni ko'rib chiqamiz. Mazkur funksionalni $y_0(x)=0$ funksiyada nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzilishga ega ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, aytaylik, $[0,\pi]$ kesmada $y_0(x)=0$ va $y_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ bo'lsin. U holda $\rho_1[y_n(x),y_0(x)]=\frac{1}{n}$ va $n\to\infty$ intilganda $\rho_n\to 0$ bo'ladi. Boshqa tomondan esa,

$$|J[y_n(x)]-J[y_0(x)]|=\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 nx}{n}dx=\frac{\pi}{2}$$

farq (ayirma) n ga bog'liq bo'lmaydi. Shunday qilib, $J[y_n(x)]$ funksional, $n\to\infty$ intilganda $J[y_n(x)]=0$ funksionalga intilmaydi, bundan berilgan funksional $y_0(x)=0$ funksiyada nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzilishga ega bo'ladi.

Qaralayotgan funksionalni $y_0(x)=0$ funksiyada birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzuluksiz ekanligini isbotlash o'quvchiga havola qilinadi.

9-misol. $y(x)\in C^0[0,1]$ funksiyalar to'plamida aniqlangan

$$J[y(x)]=\int_0^1 x^3\sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

funksional $y_0(x)=x^2$ funksiyada nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini ko'rsating.

Yechish. $y_\alpha(x)=x^2+\alpha\mu(x)$ deb olamiz, bu yerda $\mu(x)\in C[0,1]$, α – yetarlicha kichik son,

$$J[y(x)]=J[x^2+\alpha\mu(x)]+\int_0^1 x^3\sqrt{1+(x^2+\alpha\mu(x))'^2}dx=\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4+2\alpha x^2\mu(x)+\alpha^2\mu'^2(x)}dx$$

$\alpha\to 0$ intilganda limitga o'tib bu tenglikdan quyidagi ifodani olamiz

$$\lim_{\alpha\to 0}J[y(x)]=\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}dx=J[x^2].$$

bu funksionalni $y_0(x)=x^2$ funksiyada uzluksiz ekanligini bildiradi.

Quyidagi funksionallar uzluksizlikka tadqiq qilinsin.

41. $J[y(x)]=y(x_1)$, bu yerda $y(x)\in C[a,b]$ va $x_1\in[a,b]$, nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida.

42. $J[y(x)]=\max|y(x)|$, bu yerda $y(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz (nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida).

43. Quyidagi funksionalni

$$J[y(x)]=\begin{cases}0, & agar\ y(x)\ hech\ bo'lmaganda\ bitta\ manfiy\ qiymatni\ qabul\ qilsa,\\ \frac{1}{2}, & agar\ y(x)\equiv 0\ bo'lsa,\\ 1, & agar\ y(x)\ge 0,\ y(x)\not\equiv 0\ bo'lsa,\end{cases}$$

nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksizlikka tekshirilsin.

44. $J[y(x)]=\int_0^1|y'(x)|dx$, bu yerda $y(x)$ funksiya $[0,1]$ kesmada uzluksiz 1- tartibli hosilaga ega: a) nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida; b) 1-tartibli yaqinlik ma'nosida.

45. $J[y(x)]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2(x)}dx$ funksional $y(x)\equiv 0$ funksiyada, bu yerda $y(x)\in C^1[0,1]$ funksiya: a) nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida; b) 1-tartibli yaqinlik ma'nosida.

46. $J[y(x)]=\int_0^\pi(1+2y'^2(x))dx$ funksional $y_0(x)\equiv 0$ funksiyada, bu yerda $y(x)\in C^1[0,\pi]$, 1- tartibli yaqinlik ma'nosida.

47. Funksionalning chiziqliligi to'g'risidagi yuqorida keltirilgan ta'riflarni ekvivalent ekanligi ko'rsatilsin.

48. $J[y(x)]=y(x_1)$ – funksionalning chiziqliligi ko'rsatilsin.

49. Agar $l[y(x)]$ – chiziqli funksional va $\|y(x)\|\to 0$ intilganda $\frac{l[y(x)]}{\|y(x)\|}\to 0$ nisbat nolga intilsa, u holda $l[y(x)]\equiv 0$ bo'ladi.

4-§. Funksionalning birinchi va ikkinchi variatsiyasi. Funksional ekstremumining zaruriy sharti

Endi funksionalning variatsiyasi tushunchasini kiritish bilan shug'ullanamiz. Funksional variatsiyasi tushunchasini kiritishdan avval differensial hisobdagi ayrim ma'lumotlarni eslab o'taylik.

Aytaylik, $f:R^n\to R$ akslantirish berilgan bo'lsin, boshqacha so'z bilan aytganda, $f(x),\ x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya berilgan bo'lsin. Ma'lumki, $f(x)$ hosila tushunchasini ikki xil usul bilan kiritish mumkin.

Birinchi usul bir o'zgaruvchili funksiyaning differensiali tushunchasining umumlashmasi bo'ladi. Bu yerda funksional argumentining δy variatsiyasi (o'zgarishi), funksiyalarining ekstremumini tadqiq qilishdagi Δx orttirmaga o'xshash ekanligini aytib o'tish lozim.

Funksionalni differensiallash tushunchasi funksiyani differensiallash tushunchasiga o'xshaydi. Aytaylik, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ – R^n fazosidagi norma bo'lsin.

1-ta'rif. *$f(x)$ funksiya $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, agar shunday $A_{x_0}(h)$ chiziqli funksiya mavjud bo'lsaki, n uchun*

$$A_{x_0} : h \to A_{x_0}(h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n$$

munosabat o'rinli bo'lsa, bu yerda $A_{x_0}(h)$ funksiyani aniqlovchi $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sonlar, albatta, x_0 nuqtaga bog'liq, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $h \to 0$ intilganda

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A_{x_0}(h) + o(\|h\|)$$

bo'lsa. Bu ifoda chiziqli funksiya va $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi: $f'(x_0) = A_{x_0}$, kabi belgilanadi, bu yerda A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ koeffitsientlar x_0 nuqtada quyidagi $A_i(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ xususiy hosila bilan ustma-ust tushadi.

Bu *Freshe bo'yicha hosila ta'rifi* deyiladi.

Hosila tushunchasini kiritishning ikkinchi usuli – bu vektor (yo'nalish) bo'yicha hosila.

2-ta'rif. *$f(x)$ funksiya $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nuqtada h vektor bo'yicha differensiallanuvchi deyiladi, agar t bo'yicha bir o'zgaruvchili haqiqiy $\varphi(t) = f(x_0 + th), t \in R$, funksiya $t = 0$ da differensiallanuvchi bo'lsa:*

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \frac{df(x_0 + th)}{dt}\Big|_{t=0} = \varphi'(0).$$

Bunda: $\varphi'(0)$ funksiya hosilasining 0 (nol) nuqtadagi qiymati $f(x)$ funk-

siyaning x_0 nuqtadagi h vektor bo'yicha hosilasi deyiladi va $D_h f(x_0)$ kabi belgilanadi: $D_h f(x_0) = \varphi'(0)$.

Bu *Gato yoki yo'nalish bo'yicha hosilaning ta'rifi* deyiladi.

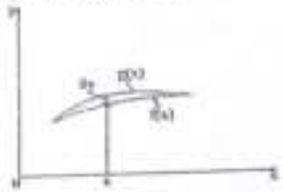
1-izoh. *Funksiyaning Gato bo'yicha differensiallanuvchi ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqmaydi, funksiya x_0 nuqtada ixtiyoriy h vektor bo'yicha differensiallanuvchi bo'lishi ham, x_0 nuqtada uzulishga ega bo'lishi ham mumkin.*

Masalan, quyidagi

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(y - x^2)^2 + x^6}, & agar\ (x, y) \neq (0, 0),\ bo'lsa, \\ 0, & agar\ (x, y) = (0, 0),\ bo'lsa. \end{cases}$$

funksiya ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha differensiallanuvchi, lekin shu bilan birga $(0,0)$ nuqtada uzulishga ega.

Agar $f(x)$ funksiya Freshe bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsa, u holda Gato bo'yicha ham differensiallanuvchi bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasi (Freshe bo'yicha) yo'nalish bo'yicha hosila (Gato bo'yicha) bilan o'zaro $f'(x, h) = f'(x)$ tenglik orqali bog'langan.



15 - rasm

Endi xuddi shunga o'xshash funksional variatsiyasining ham ikki ko'rinishdagi ta'rifini keltirib o'tamiz. Funksional argumentining δy o'zgarishi (variatsiyasi) funksiyalarni ekstremumga tadqiq qilishdagi erkli o'zgaruvchining Δx orttirmasiga o'xshaydi.

J funksionalni qaraymiz. J funksionalni aniqlanish sohasidan olingan f funksiyani tayinlaymiz. U holda shu sohadan olingan

ixtiyoriy g funksiyani $g = f + \delta y$ ko'rinishga ifodalash mumkin (15-rasm).

3-ta'rif. *$J[f]$ funksional f nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, agar shunday δy orttirmaga nisbatan chiziqli $A[f, \delta y]$ funksional mavjud bo'lsaki, natijada $J[f + \delta y] = J[f] + A[f, \delta y] + o(\delta y)$ tenglik o'rinli bo'lsa. U holda funksionalning δy orttirmaga nisbatan $A[f, \delta y]$ chiziqli qismi funksionalning variatsiyasi deyiladi, ya'ni $\delta J = A[f, \delta y]$ kabi belgilanadi.*

Bu Freshe bo'yicha hosila ta'rifining o'xshashidir. Xuddi shuningdek, funksional variatsiyasining ta'rifini Gato bo'yicha hosila tilida ham berish mumkin.

4-ta'rif. *Agar $J[y]$ funksional*

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)]$$

orttirmasini $\Delta J = L[y(x), \delta y(x)] + \beta(y(x), \delta y) \|\delta y\|$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bu yerda $L[y(x), \delta y(x)]$ δy ga nisbatan chiziqli funksional va $\|\delta y\| \to 0$ da $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ bo'ladi, u holda $L[y(x), \delta y(x)]$ ifoda funksional orttirmasining chiziqli qismi bo'ladi, ya'ni $L[y(x), \delta y(x)]$ funksional variatsiasi deb ataladi va δJ kabi belgilanadi. Bu holda $J[y(x)]$ funksional $y(x)$ nuqtada diffrensiallanuvchi funksional deyiladi.

5-ta'rif (funksional variatsiyasining ikkinchi ta'rifi). *$J[y]$ funksionalning y argumentini tayinlaymiz hamda y argumentning biror δy variatsiyasini beramiz va uni ham tayinlaymiz. Bir parametrli $y + t\delta y$ funksiyalar to'plamida qaralayotgan $J[y + t\delta y]$ funksional. tayinlangan y va δy variatsiyada t parametrning $\varphi(t) = J[y + t\delta y], t \in R$,*

funksiyasiga aylanadi. $J[y]$ funksionalning y nuqtadagi $\delta J[y]$ variatsiyasi deb, $\varphi(t) = J[y + t\delta y], t \in R$, funksiyaning $t = 0$ nuqtadagi t parametr bo'yicha olingan hosilasiga aytiladi

$$\delta J[y, \delta y] = \lim_{t \to 0} \frac{J[y + t\delta y] - J[y]}{t} = \frac{d}{dt} J[y + t\delta y]\Big|_{t=0} = \varphi'(0),$$

kabi belgilanadi.

Bu Gato bo'yicha hosila ta'rifining o'xshashi hisoblanadi. Bu yerda $\frac{d}{dt} J[y + t\delta y]\Big|_{t=0}$ ifoda ham funksionalning *birinchi variatsiyasi* deb yuritiladi.

Bu limit har bir δy variatsiyasiga (tayinlangan y *da*) sonni mos qo'yuvchi funksionalni ifodalaydi. Agar bu funksional δy bo'yicha chiziqli bo'lsa, u holda uni y nuqtadagi kuchsiz differensiali (Gato differensiali) deyiladi.

Agar funksionalning variatsiyasi orttirmaning chiziqli bosh qismi sifatida mavjud bo'lsa u holda variatsiya hosilaning t parametr bo'yicha hosilasining $t = 0$ dagi qiymati sifatida mavjud bo'ladi va u variatsiyalar ustma-ust tushadi.

2-izoh. *Variatsion hisobda birinchi variatsiya deganda Gato differensiali tushuniladi. Boshqacha qilib aytganda, funksionalning birinchi variatsiyasi funksiyaning variatsiyasiga nisbatan chiziqli hisoblanadi.*

Agar funksional variatsiyasi uning orttirmasini chiziqli bosh qismi ma'nosida mavjud bo'lsa, u holda funksional variatsiyasi parameter bo'yicha hosila ma'nosida ham mavjud bo'ladi.

1-teorema. *Agar $J[y]$ funksional y nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning y nuqtadagi Gato differensiali mavjud va u Freshe differensiali bilan ustma-ust tushadi.*

Isboti. y nuqtadagi qandaydir δy variatsiyani tanlaymiz va uning limitini hisoblaymiz, u quyidagi

$$\delta J[y,\delta y]=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J[y+\alpha\delta y]-J[y]}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J[y,\alpha\delta y]-o(\alpha\delta y)}{\alpha},$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha J_1[y,\delta y]}{\alpha}+0=J_1[y,\delta y].$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda ikkinchi tenglik $J[y]$ funksional differensiallanuvchi bo'lganligi tufayli o'rinli bo'ladi, uchinchi tenglik esa δy variatsiyaga nisbatan J_1 funksionalning chiziqliligiga ko'ra, o'rinli bo'ladi. Bunda $\alpha\to 0$ da $\|\alpha\delta y\|=|\alpha|\|\delta y\|\to 0$ bo'lishligidan

$$\lim_{\alpha\to 0}\left|\frac{o(\alpha\delta y)}{\alpha}\right|=\|\delta y\|\lim_{\alpha\to 0}\left|\frac{o(\alpha\delta y)}{\|\alpha\delta y\|}\right|=\|\delta y\|\cdot 0=0,$$

ekanligini hisobga olish kerak bo'ladi. Isbot qilingan tenglik, $\delta J[y,\delta y]$ birinchi variatsiyaning δy variatsiya bo'yicha chiziqli ekanligini ko'rsatadi. Shuning uchun, ta'rifga ko'ra, bu funksional Freshe differensialiga teng bo'lgan Gato differensialini beradi. Teorema isbot bo'ldi.

Teoremada keltirilgan tasdiqning aksinchasi o'rinli emas: differensiallanmaydigan funksionallarning Gato bo'ycha differensiali mavjud bo'lishi mumkin. Buni ko'rsatish uchun quyidagiga e'tiborni qaratamiz. Freshe va Gato differensiali tushunchasi normallangan fazoning aniq bir ko'rinishi bilan bog'liq emas, ularni masalan, chekli o'lchovli chiziqli arifmetik fazoda ko'rib chiqish ham mumkin. Bu

holda funksional ko'p o'zgaruvchili funksiya bo'ladi, bunday funksionalning differensiali esa ko'p o'zgaruvchi funksiyaning differensiali sifatida ustma-ust tushadi. Chekli o'lchovli holda funksionalning birinchi variatsiyasi yo'nalish bo'yicha olingan hosila bilan ustma-ust tushadi. Birinchi variatsiya chekli o'lchovli fazoda yo'nalish bo'yicha hosilaga mos keladi. Haqiqatan, agar $J:R^n\to R$ funksional berilgan bo'lsa, u holda y argumentning variatsiyasi ixtiyoriy δy vektor bo'ladi. Agar bu vektor $\|\delta y\|=1$ birlik normaga ega bo'lsa, u holda funksional birinchi variatsiyasining qiymati o'sha orttirmada

$$J_1[y,\delta y]=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J[y+\alpha\delta y]-J[y]}{\alpha}=\frac{\partial J}{\partial n},$$

teng bo'ladi, ya'ni J funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasi $n=\delta y$ bo'ladi. Umumiy holda $J_1[y,\delta y]=\|\delta y\|\cdot\frac{\partial J}{\partial n}$, bu yerda $n=\frac{\delta y}{\|\delta y\|}$ Birinchi variatsiyaning δy ga nisbatan chiziqliligi, birinchi variatsiya

$$J_1[y,\delta y]=(a,\delta y), \tag{1}$$

skalyar ko'paytma orqali ifoda qilinishini anglatadi, bu yerda a qandaydir vektor. Differensiallanuvchi J funksiya uchun a vektor bu funksiyaning gradienti bilan ustma-ust tushishini ta'kidlash lozim.

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & x_1=x_2^2, \quad (x_1,x_2)\neq(0,0),\\ 0, & x_1\neq x_2^2, \quad (x_1,x_2)=(0,0).\end{cases}$$

ikki o'zgaruvchili funksiya $(0,0)$ nuqtada ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha nolga teng bo'lgan hosilaga ega, bundan agar a vektor sifatida nol vektor olsak, yo'nalish bo'yicha hosilani (1) ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lganligi tufayli, bu nuqtada Gato differensialiga ega bo'ladi. Ayni paytda, bu funksiya $(0,0)$ nuqtada uzluksiz bo'lmaydi,

shuning uchun bu nuqtada differensiallanuvchi emas, ya'ni Freshe differensialiga ega emas.

Yuqoridagi funksional variatsiyasi ikkinchi ta'rifidan foydalanib, integral ko'rinishdagi funksionalni variatsiyasini hisoblaylik. Fizika va kimyo masalalarida quyidagi integral ko'rinishdagi

$$J[f]=\int_a^b F(x,f(x),f'(x))dx \qquad (2)$$

funksionallar ko'p uchraydi. (2) ifodadagi integral ostidagi x funksiyani uch o'zgaruvchili funksiya sifatida qarashimiz mumkin, shuning uchun (1) funksionalni qisqacha

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx,$$

bu yerda $y=f(x)$, sodda ko'rinishga yozib olamiz. Funksional variatsiyasining ikkinchi ta'rifiga asosan (2) funksionalni bir parametrli $y+t\delta y$ funksiyalar to'plamida quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$J[y+t\delta y]=\int_a^b F(x,y(x)+t\delta y(x),y'(x)+t\delta y'(x))dx. \qquad (3)$$

Tayinlangan $y(x)$ va $\delta y(x)$ larda (3) integral t parametrga bog'liq bo'lgan $\varphi(t)$ xosmas integralga keladi, ya'ni

$$J[y(x)+t\delta y]=\int_a^b F(x,y(x)+t\delta y,y'(x)+t\delta y')dx=\varphi(t). \qquad (4)$$

bu $\varphi(t)-t$ parametrning sonli funksiyasi. (4) funksionalni variatsiyasini hisoblaymiz. Funksional variatsiyasini ikkinchi ta'rifini qo'llasak,

$$\delta J=\frac{d}{dt}J[y+t\delta y]=\varphi'(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b F(x,y(x)+t\delta y(x),y'(x)+t\delta y'(x))dx. \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi bizga matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan Leybnisning integralni parametr bo'yicha differensiallash formulasini esga olaylik. Aytaylik, $f(x,y)$ – funksiya uzluksiz va $[a;b]\times[c;d]$ to'rtburchakda differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $I(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$ integralni $[c;d]$ kesmada t parametr bo'yicha differensiallaymiz va uning differensiali

$$\frac{dI(t)}{dt}=f(b(t),t)\frac{db(t)}{dt}-f(a(t),t)\frac{da(t)}{dt}+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx$$

ifodaga teng bo'ladi. Agar integrallash t parametrga bog'liq bo'lmasa, u holda oxirgi formula sodda ko'rinishga keladi:

$$\frac{dI(t)}{dt}=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx.$$

Shu bilan bir qatorda, $F(x,y,z)$ – bunda $y=Y(x,t)$, $z=Z(x,t)$, murakkab funksiyani differensiallash formulasini yodga olamiz:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dy}\frac{dY}{dt}+\frac{dF}{dz}\frac{dZ}{dt}.$$

U holda yuqorida keltirilgan formulalardan va 4'–ta'rifdan foydalanib, (5) ifodaning o'ng tomonini hisoblab,

$$\delta J[y(x)]=\frac{d}{dt}J[y(x)+t\delta y]=\varphi'(0)=\frac{d}{dt}\int_a^b F(x,y(x)+t\delta y,y'(x)+t\delta y')dx\Big|_{t=0}=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F(x,y(x)+t\delta y,y'(x)+t\delta y')}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F(x,y(x)+t\delta y,y'(x)+t\delta y')}{\partial y'}\delta y'\right]_{t=0}dx=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'}\delta y'\right]dx \qquad (6)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu ifoda $J[y]$ funksionalning *birinchi vari-*

atsiyasi deyiladi.

Shuni aytish lozimki, $J[y]$ funksionalning $\delta J[x,\delta y]$ birinchi variatsiyasi $\bar{\delta}y$ va δy larga chiziqli bog'liq. Variatsion hisob kursida variatsiya ko'p hollarda (6) formula bilan aniqlanadi. Shuning uchun, kelgusidagi masalalarda (6) natijadan tayyor formula sifatida foydalanish mumkin.

3-izoh. *Funksional variatsiyasining ikkinchi ta'rifi birinchi ta'rifiga nisbatan ancha keng tushuniladi, bu shu ma'nodaki, shunday funksionallar mavjudki, qaysiki ularning orttirmasidan chiziqli bosh qismini ajratib bo'lmaydi, lekin ikkinchi ta'rif bo'yicha ularning variatsiyasi mavjud. Buni aytilgan tasdiqni, ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha olingan hosilasining mavjudligi, funksiyaning differensialini mavjud bo'lishi uchun yetarli emasligiga teng kuchli ekanligini quyidagi funksiya misolida ko'rsatamiz*

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\rho}{2}\sin 2\alpha,\quad (x^2+y^2\neq 0),$$

bu yerda ρ *va* $\varphi-(x,y)$ *nuqtalarning qutb koordinatalari. Funksiyaning xususiy hosilalari* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ *va* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *har bir nuqtada mavjud va* $(0,0)$ *nuqtada (koordinata boshida) nolga teng, ya'ni* $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0,$ *lekin koordinata boshida* $df=0$ *differensial mavjud emas. Aslida, bu holda,* f *funksiyaning gradienti* $df(0,0)=0$ *bo'lganda edi, unda ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha olingan hosila nolga teng bo'lar edi. Shunga qaramasdan,* $\frac{df(0,0)}{dl}=\frac{1}{2}\sin 2\varphi$ *ifodaga ishonch hosil qilamiz (noldan farqli). Bu yerda* $\varphi-l$ *vektorning* Ox *o'qi bilan tashkil qilgan*

burchagi.

1-misol. $J[y]=\int_a^b y^2(x)dx$ funksionalning variatsiyasi topilsin. Bu misolni ikki xil usul bilan yechamiz.

Yechish. 1-usul. $J[y]$ funksionalni orttirmasini hisoblaymiz

$$\Delta J=\int_a^b (y(x)+\delta y)^2 dx-\int_a^b y^2(x)dx=\int_a^b (2y(x)\delta y+(\delta y)^2)dx.$$

$$\int_a^b (\delta y)^2 dx\le\int_a^b (\max_{x\in[a,b]}|\delta y|)^2 dx=(b-a)\left(\max_{x\in[a,b]}|\delta y|\right)^2=(b-a)\|\delta y\|^2,$$

ekanligidan, u holda

$$\Delta J=2\int_a^b y(x)\delta y dx+\beta(y(x),\delta y)\|\delta y\|,$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda $\|\delta y\|\to 0$ intilganda

$$(b-a)\|\delta y\|\to 0$$

ekanligidan, funksionalning variatsiyasi quyidagi

$$\delta J[y(x)]=2\int_a^b y(x)\delta y dx,$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda $\Delta J[y]$ orttirma ikki qo'shiluvchidan iborat, birinchisi tayinlangan $y(x)$ funksiyalarda funksional argumentining δy variatsiyasiga nisbatan chiziqli funksionalni tashkil qiladi, ikkinchi qo'shiluvchi esa funksional argumentining δy variatsiyasiga nisbatan kvadratik funksional bo'ladi.

2-usul. Endi $\frac{d}{d\alpha}J[y(x)+\alpha\delta y]\big|_{\alpha=0}$ formuladan foydalanamiz u holda

$$\delta J[y(x)] = \frac{d}{d\alpha} J[y(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b (y(x)+\alpha\delta y)^2\,dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\int_a^b 2(y(x)+\alpha\delta y)\delta y\Big|_{\alpha=0} dx = 2\int_a^b y(x)\delta y\,dx,$$

ga teng bo'ladi. Shubhasiz ikkala usul ham bir xil natijaga olib keldi.

2-misol. $J[y(x)] = \int_0^1 (y^2(x)+y'^2(x))dx$ funksional variatsiyasi topilsin.

Yechish. 1-usul. Funksionalning orttirmasini yozamiz

$$\Delta J = \int_0^1 \left[(y(x)+\delta y)^2 + (y'(x)+\delta y'(x))^2\right]dx - \int_0^1 (y^2(x)+y'^2(x))dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2y(x)\delta y + 2y'(x)\delta y' + (\delta y)^2\right]dx,$$

$$\int_0^1 \left[(\delta y)^2 + (\delta y')^2\right]dx \le \int_0^1 \left[(\max_{x\in[0,1]}|\delta y|)^2 + (\max_{x\in[0,1]}|\delta y'|)^2\right]dx \le$$

$$\le \left[\max_{x\in[0,1]}|\delta y| + \max_{x\in[0,1]}|\delta y'|\right]^2 = \|\delta y\|^2.$$

u holda

$$\Delta J = 2\int_0^1 \left[y(x)\delta y + y'(x)\delta y'(x)\right]dx + \beta(y(x),\delta y)\|\delta y\|,$$

bu yerda $\|\delta y\|\to 0$ intilganda $|\beta(y(x),\delta y)|\to 0$ ekanligidan, funksionalning variatsiyasi quyidagi

$$\Delta J = 2\int_0^1 \left[y(x)\delta y + y'(x)\delta y'(x)\right]dx,$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

2-usul. Endi $\frac{d}{d\alpha} J[y(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$ formuladan foydalanamiz

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha}\int_0^1 \left[(y(x)+\alpha\delta y)^2 + (y'(x)+\alpha\delta y')^2\right]dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$\delta J = \int_0^1 \left[2(y(x)+\alpha\delta y)\delta y + 2(y'(x)+\alpha\delta y')\delta y'\right]dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= 2\int_0^1 \left[y(x)\delta y + y'(x)\delta y'\right]dx.$$

bo'ladi. Shuni ta'kidlash lozimki, shunday funksionallar mavjudki, ular uchun chiziqli qismni ajratib bo'lmaydi, lekin ikkinchi ta'rif ma'nosida variatsiya mavjud. Shuning uchun, variatsiyaning ikkinchi ta'rifi variatsiyaning birinchi ta'rifiga nisbatan ancha keng.

3-misol. $J[y(x)] = \int_a^b \sqrt[3]{y^3(x)+y'^3(x)}dx$ funksional berilgan bo'lsin.

Unda $y(x)=0$ da va ixtiyoriy δy variatsiyada

$$\delta J[y(x)] = \frac{d}{d\alpha} J[y(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b \sqrt[3]{(\alpha\delta y)^3+(\delta y')^3}dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \sqrt[3]{(\alpha\delta y)^3+(\alpha\delta y')^3}dx\Big|_{\alpha=0} = \int_a^b \sqrt[3]{(\delta y)^3+(\delta y')^3}dx,$$

δy variatsiyaga nisbatan chiziqsiz, ya'ni 18 - ta'rif ma'nosida funksional variatsiyasi bo'lmaydi.

4-misol. $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y'e^{y'} + xy'^2\right)dx$ funksional variatsiyasi topilsin.

Yechish. $F(x,y,y') = y'e^{y'} + xy'^2$ funksiya barcha x,y,y' o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz, y,y' o'zgaruvchilar bo'yicha barcha tartibdagi xususiy hosilaga ega, y,y' o'zgaruvchilarning ixtiyoriy chegaralangan o'zgarish sohasida chegaralangan. Shuning uchun, berilgan funksional

$C[-1,1]$ fazoda differensiallanuvchi va uning variatsiyasi (6) formulaga ko'ra,

$$\delta J[y]=\int_{-1}^{1}\left(y'e^{x}+2xy+e^{x}\delta y'\right)dx$$

ifodaga teng bo'ladi.

Ta'kidlab o'tish lozimki, funksiya differensiali bilan funksional variatsiyasining yuqorida keltirilgan ta'riflariga deyarli ekvivalent bo'lgan ta'riflarni berish ham mumkin. Ularning ayrimlari bilan tanishib o'tamiz.

6-ta'rif. *Aytaylik, $y(x)$ funksiyalarning M to'plamida $J[y(x)]$ funksional berilgan bo'lsin. $\delta y(x)$ argument orttirmasiga javob beruvchi $J[y(x)]$ funksionalning orttirmasi deb,*

$$\Delta J=\Delta J[y(x)]=J[y+\delta y(x)]-J[y(x)]$$

($\delta y(x)=\tilde{y}(x)-y(x)$ bu yerda $\tilde{y}(x), y(x)\in M$) kattalikka aytiladi.

5-misol. Agar $y(x)=x, y_1(x)=x^2$ bo'lsa, $C^1[a,b]$ fazoda aniqlangan

$$J[y(x)]=\int_{0}^{1}y(x)y'(x)dx$$

funksionalning orttirmasi topilsin.

Yechish. Yuqorida keltirilgan 5 - ta'rifga ko'ra,

$$\Delta J=J[x^2]-J[x]=\int_{0}^{1}x^2\cdot 2xdx-\int_{0}^{1}x\cdot 1\cdot dx=\int_{0}^{1}(2x^3-x)dx=0$$

tenglikga ega bo'lamiz. Demak, berilgan funksionalning orttirmasi $\Delta J=0$ bo'ladi.

50. $y(x)=e^x, y(x)=1$ deb olib, 13-misolda berilgan funksionalning orttirmasi topilsin.

7-ta'rif. *Agar $\Delta J=\Delta J[y(x)]=J[y+\delta y(x)]-J[y(x)]$ funksional orttirmasini quyidagi $\Delta J=L[y+\delta y(x)]+\beta(y,\delta y(x))\|\delta y(x)\|$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, u holda δy variatsiyaga nisbatan orttirmaning chiziqli qismi, ya'ni $L[y(x),\delta y(x)]$ funksionalning variatsiyasi deyiladi va δJ kabi belgilanadi, bu yerda $L[y(x),\delta y(x)]$ δy variatsiyaga nisbatan chiziqli funksional va $\|\delta y\|\to 0$ nolga intilganda $\beta(y,\delta y(x))\to 0$, ya'ni nolga intiladi. Bu holda $J[y(x)]$ funksional $y(x)$ nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi.*

Demak, funksionalning variatsiyasi δy munosabatga nisbatan funksional orttirmasining chiziqli qismi.

51. $J[y(x)]$ funksionalning δJ variatsiyasi (agar u mavjud bo'lsa) yagona tarzda aniqlanishi ko'rsatilsin.

6-misol. $C[a,b]$ fazoda berilgan $J[y(x)]=\int_{a}^{b}y(x)dx$ funksionalning o'sha fazoning har bir $y(x)$ nuqtasida differensiallanuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. 5-ta'rifga ko'ra,

$$\Delta J=J[y+\delta y]-J[y]=\int_{a}^{b}[y(x)+\delta y(x)]dx-\int_{a}^{b}y(x)dx=\int_{a}^{b}\delta y(x)dx$$

bo'ladi. Shunday qilib, $\Delta J=\int_{a}^{b}\delta y(x)dx$ tenglikga ega bo'lamiz. Bu $\delta y(x)$ ga nisbatan chiziqli funksional. Ushbu holatda funksionalning barcha orttirmalari $\delta y(x)$ ga nisbatan chiziqli funksionalga keltirildi. Qaralayotgan funksional har bir $y(x)$ nuqtada differensiallanuvchi va uning variatsiyasi

$$\delta J = \int_a^b \delta y(x)dx$$

ifodaga teng bo'ladi.

52. Har qanday chiziqli uzluksiz $J[y(x)]$ funksionalning har doim differensial-lanuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

7-misol $C[a,b]$ fazoda berilgan $J[y]=\int_a^b y^2(x)dx$ funksionalning har bir $y(x)$ nuqtasida differensiallanuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Quyidagiga egamiz

$$\Delta J = \int_a^b (y(x)+\delta y(x))^2 dx - \int_a^b y^2(x)dx = 2\int_a^b y(x)\delta y(x)dx + \int_a^b (\delta y(x))^2 dx \qquad (7)$$

(7) tenglikning o'ng tomonidagi 1-integral tayinlangan har bir $y(x)$ funksiyada $\delta y(x)$ munosabatga nisbatan chiziqli funksional bo'ladi. (7) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi integralni baholaymiz:

$$\int_a^b (\delta y(x))^2 dx = \int_a^b \|\delta y(x)\|^2 dx \le \max_{a\le x\le b}|\delta y(x)|^2 \int_a^b dx = (b-a)\|\delta y(x)\|^2 = o(b-a)\|\delta y\|\|\delta y\|$$

$\|\delta y(x)\|\to 0$ intilganda $(b-a)\|\delta y\|\to 0$ bo'ladi. Shunday qilib, funksionalning ΔJ orttirmasi $L[y(x),\delta y(x)]$ ifoda va $\|\delta y(x)\|$ munosabatga nisbatan ikkinchi tartibli kichiklikka ega bo'lgan qo'shimcha yig'indisi ko'rinishida ifoda qilinadi. Ta'rifga ko'ra, berilgan funksional $y(x)$ nuqtada differensiyallanuvchi va uning variatsiyasi

$$\delta J = 2\int_a^b (y(x),\delta y(x))dx$$

ifodaga teng bo'ladi.

53. $J[y(x)]=\int_a^b y^2(x)dx$ funksional uchun $y=2x, \delta y=\alpha x^2$ larni qo'yib va $\alpha = 1; -0,1; 0,01$ larda δJ bilan ΔJ orttirmani taqqoslang.

54. $J[y(x)]=\int_a^b xy^2(x)dx$ funksional uchun $y=e^x, \delta y=\alpha x$ larni qo'yib va $\alpha = 1; 0,1; 0,01$ larda δJ bilan ΔJ orttirmani taqqoslang.

55. Quyidagi funksionallarni differensiallanuvchi ekanligi tekshirilsin:

a) $C[a,b]$ fazoda $J[y]=y(a)$. b) $C^n[a,b]$ fazoda $J[y]=y(a)$.

v) $C^n[a,b]$ fazoda $J[y]=\sqrt{1+y'(a)}$. g) $C[a,b]$ fazoda $J[y]=|y(a)|$.

56. Agar $J[y(x)]$ funksional differensiallanuvchi bo'lsa, $J^2[y(x)]$ funksionalni differensiallanuvchi ekanligini ko'rsating va $J^2[y(x)]$ funksionalning variatsiyasini yozing.

57. $C[a,b]$ fazoda aniqlangan

$$J[y]=\int_a^b f(x,y(x))dx$$

funksionalning differensiallanuvchi ekanligi va uning variatsiyasi

$$\delta J = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\delta y(x)dx$$

ko'rinishga ega ekanligi ko'rsatilsin, bu yerda $f(x,y)$ o'zining argumentlari bo'yicha uzluksiz hamda $a\le x\le b, -\infty < y < +\infty$, sohada 2-tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan funksiya.

8-misol. 1-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan, $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyalarning $C^1[a,b]$ fazosida aniqlangan

$$J[y]=\int_a^b f(x,y(x),y'(x))dx$$

funksionalni qaraymiz. $f(x,y)$ o'zining barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz va $a\le x\le b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty$, sohada ikkinchi tartibgacha

uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan funksiya. Funksional argumentining $\delta y(x)$ orttirmasiga mos ΔJ orttirmani topamiz, bu yerda $\delta y(x) \in C^1[a,b]$,

$$\Delta J[y] = \int_a^b [f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x, y, y')]dx \qquad (8)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Teylor formulasiga ko'ra,

$$f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x, y, y') = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y'}\delta y' + R(x, y, y', \delta y, \delta y') \qquad (9)$$

formulani olamiz, bu yerda $\delta R(x, y, y', \delta y, \delta y')$ Teylor formulasining qoldiq hadi. (9) ifodani (8) formulaga qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\Delta J[y(x)] = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx + \int_a^b R(x, y, y', \delta y, \delta y')dx. \qquad (10)$$

(10) formulaning o'ng tomonidagi 1-qo'shiluvchi argumentning $\delta y(x)$ va $\delta y'(x)$ orttirmalarga nisbatan chiziqli. Aytaylik, $f(x, y, y')$ funksiyaning barcha y va y' o'zgaruvchilar bo'yicha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari y va y' o'zgaruvchilarning chegaralangan sohasida absolyut qiymati bo'yicha biror o'zgarmas $M > 0$ sondan oshib ketmasin. U holda quyidagi baho o'rinli bo'ladi

$$\int_a^b |R(x, y, y', \delta y, \delta y')|dx \le 2M\int_a^b \|\delta y\|^2 dx = 2M(b-a)\|\delta y\|^2.$$

Bu yerda $\|\delta y\| = \max_{a \le x \le b}\{|\delta y|, |\delta y'|\}$. Shunday qilib, (10) formulaning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi ifoda $\|\delta y\|$ orttirmalarga nisbatan 2-tartibli cheksiz kichik miqdor. Bundan, ta'rifga ko'ra, $J[y]$ funksional $C^1[a,b]$ fazoda differensiallanuvchi va uning variatsiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx$$

58. $J[y(x)] = \int_0^1 (y' + xy')dx$ funksional uchun $y = \ln x$, $\delta y = \frac{k(x-1)}{e-1}$, larni qo'yib, $k = 1; 0.1; 0.01$ da $\Delta J[y(x)]$ orttirma bilan $\delta J[y(x)]$ variatsiyani taqqoslang.

59. $J[y(x)] = \int_0^1 (x^2y' - y^2)dx$ funksional uchun $y = x^2, \delta y = kx^5$ larni qo'ying va $k = 1; 0.1; 0.01$ da $\Delta J[y(x)]$ orttirma bilan $\delta J[y(x)]$ variatsiyani taqqoslang.

60. $J[y(x)] = \int_0^{\pi} y^2 \sin x dx$ funksional uchun $y = \sin x, \delta y = k\cos x$ larni qo'ying va $k = -1; 0.3; 0.03$ da $\Delta J[y(x)]$ orttirma bilan $\delta J[y(x)]$ variatsiyani taqqoslang.

61. Agar $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_{m+1})$ funksiya $a < x < b, -\infty < z_k < +\infty$, $(k = 1, 2, \ldots, m+1)$ sohada barcha argumentlari bo'yicha 2-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$\delta J = \int_a^b f\left[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m)}(x)\right]dx$$

funksional $C^m[a,b]$ fazoda differensiallanuvchi va uning variatsiyasi

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\delta y^{(m)}\right)dx$$

ko'rinishga ega bo'lishi ko'rsatilsin.

Funksionalning ikkinchi variatsiyasi. Qandaydir chiziqli fazoga tegishli ikki o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan $J[x, y]$ funksional *bichiziqli* deyiladi, agarda $J[x, y]$ funksionalni tayinlangan x o'zgaruvchida y o'zgaruvchili chiziqli funksional ko'rinishida ifodalansa,

tayinlangan y o'zgaruvchida x o'zgaruvchining chiziqli funksionali bo'lsa. Shunday qilib, $J[x,y]$ funksional bichiziqli deyiladi, agarda

$$J[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 J[x_1, y] + \alpha_2 J[x_2, y],$$

$$J[x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2] = \beta_1 J[x, y_1] + \beta_2 J[x, y_2],$$

tengliklar o'rinli bo'lsa. Bichiziqli funksionalda $y = x$ deb olib, kvadratik funksional deb ataluvchi $J[x,x]$ funksional ifodasini olamiz. Bichiziqli funksional chekli o'lchovli fazoda *bichiziqli forma* deb ataladi. $J[x,x]$ kvadratik funksional musbat aniqlangan deyiladi, agarda ixtiyoriy nol bo'lmagan x element uchun $J[x,x] > 0$ munosabat o'rinli bo'lsa.

Misollar. 1. $J[y] = \int_a^b A(t)x(t)y(t)dt$, funksional bichiziqli funksionalni ifodalaydi, bu yerda $A(t)$ – tayinlangan uzluksiz funksiya, $\int_a^b A(t)x^2(t)dt$ – esa $C[a,b]$ fazoda kvadratik funksionalni ifodalaydi, hattoki, agar barcha $t \in [a,b]$ uchun $A(t) > 0$ bo'lsa, u holda kvadratik funksional musbat aniqlangan bo'ladi.

2. $\int_a^b [A(t)x^2(t) + B(t)x(t)x'(t) + C(t)x'^2(t)]dt$ ifoda $C^1[a,b]$ fazodan olingan barcha funksiyalar uchun kvadratik funksionalga misol bo'ladi.

3. $\int_a^b \int_a^b AK(s,t)x(s)y(t)dsdt$, $C[a,b]$ fazoda bichiziqli funksional bo'ladi, bu yerda $K(s,t)$ – tayinlangan ikki o'zgaruvchili funksiya.

8-ta'rif. *Aytaylik, $J[y]$ qandaydir normallangan chiziqli fazoda aniqlangan funksional bo'lsin. $J[y]$ funksional ikkinchi variatsiyaga ega deyiladi, agarda uning $\Delta J = \Delta J[y(x)] = J[y + \delta y(x)] - J[y(x)]$ orttirmasini*

quyidagi

$$\Delta J = L_1[\delta y(x)] + \frac{1}{2} L_2[\delta y(x)] + \beta \|\delta y(x)\|^2$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bu yerda $L_1[\delta y(x)]$ – chiziqli funksional, $L_2[\delta y(x)]$ – kvadratik funksional, oxirgi holda $\beta \to 0$ intilganda $\|\delta y(x)\| \to 0$ bo'ladi. Kvadratik $L_2[\delta y(x)]$ funksionalni $J[y]$ funksionalning ikkinchi variatsiyasi (ikkinchi differensiali) deb ataladi va $\delta^2 J$ kabi belgilanadi.

Funksionalning ikkinchi variatsiyasi (agar u mavjud bo'lsa) u bir qiymatli aniqlanadi.

9-misol. $y(x)$ funksiyalar $C^1[a,b]$ fazosida aniqlangan

$$J[y] = \int_a^b (xy'^2 + y^2)dx$$

funksionalining ikkinchi variatsiyasi topilsin.

Yechish. Quyidagiga ega bo'lamiz

$$\Delta J = \Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b [x(y + \delta y)'^2 + (y + \delta y)^2 - xy'^2 - xy^2]dx =$$

$$= \int_a^b [2xy'\delta y' + x(\delta y')^2 + 2y\delta y + (\delta y)^2]dx =$$

$$= \int_a^b [2xy'\delta y' + 2y\delta y]dx + \int_a^b [x(\delta y')^2 + (\delta y)^2]dx. \qquad (11)$$

(11) ifodaning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi tayinlangan $y(x)$ funksiyalarda $\delta y(x)$ munosabatga nisbatan chiziqli funksional; o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi esa kvadratik funksional bo'ladi. Va nihoyat, o'ng tomonidagi uchinchi qo'shiluvchi uchun quyidagi baho o'rinli

$$\left|\int_a^b (\delta y')^2 dx\right| \le (\max|\delta y'|)^2 \int_a^b |\delta y'|dx \le \int_a^b |\delta y'|dx \|\delta y\|^2 .$$

bu yerda norma $C^1[0,1]$ ma'nosida, bundan ko'rinib turibdiki, ushbu qo'shiluvchi $\beta\|\delta y\|^2$ ko'rinishida ifodalanadi, bu yerda $\beta \to 0$ intilganda $\|\delta y\| \to 0$, ya'ni nolga intiladi. Ta'rifga ko'ra, berilgan funksional $\delta^2 J$ ikkinchi variatsiyaga ega va u quyidagiga teng

$$\delta^2 J = 2\int_a^b [\alpha(\delta y)^2 + \beta y'(\delta y')]dx$$

Xuddi shuningdek, $J[y]$ funksionalning ikkinchi variatsiyasini quyidagicha ta'riflash mumkin.

9-ta'rif. *$J[y]$ funksionalning ikkinchi variatsiyasi deb, $\varphi(t)$ funksiyaning $t=0$ nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasiga aytiladi va $\delta^2 J = \frac{d^2 J}{dt^2}\Big|_{t=0}$ kabi belgilanadi*

Agar 8-ta'rifni (2) funksional uchun qo'llasak quyidagi ifodaga ega bo'lamiz

$$\delta^2 J = \frac{d^2}{dt^2} J[y+t\delta y] = \frac{d^2}{dt^2}\int_a^b F(x, y(x)+t\delta y(x), y'(x)+t\delta y'(x))dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y^2}\delta y^2(x) + 2\frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y \partial y'}\delta y(x)\delta y'(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'^2}\delta y'^2(x) \right\} dx.$$

(2) ko'rinishdagi funksional uchun yuqorida keltirilgan 7 va 8- ta'riflar ustma-ust tushadi.

Quyidagi funksionallarning tegishli fazolardagi 2-ta'rif ma'nosidagi variatsiyasi topilsin.

62. $J[y(x)] = \int_0^1 (x+y)dx$ **63.** $J[y(x)] = \int_0^1 (y^2+y')dx$

64. $J[y(x)] = y'(0) + \int_0^1 (xy+y')dx$ **65.** $J[y(x)] = \int_0^1 y\sin y dx$

66. $J[y, y_1, \dots, y_n] = \int_a^b f[x, y, y(x), y_1(x), \dots, y_n(x), y'(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)]dx,$

funksionalning variatsiyasi topilsin, bu yerda f – qandaydir chegaralangan (x) sohada o'zining argumentlari bo'yicha xususiy hosilaga ega bo'lgan o'z argumentlarining uzluksiz funksiyasi.

Funksional ekstremumning zaruriy sharti. Har doimgidek funksional ekstremumini ta'rifini berishdan oldin bir o'zgaruvchili funksiya ekstremumi ta'rifini eslab o'taylik.

10-ta'rif. *x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi deb ataladi, agarda shunday $\delta > 0$ soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in D(f)$ uchun $|x-x_0|<\delta$ bo'lganda $f(x) \le f(x_0)$ bo'lsa.*

Xuddi shuningdek, minimum nuqta ham shunday aniqlanadi. Maksimu va minimum nuqta ham shunday aniqlanadi. Maksimum va minimum nuqtalar funksiyaning ekstremum nuqtalari deyiladi. Variatsion hisobda funksional ekstremumining ta'rifi shunday kiritiladi, unda faqat nuqtalar rolini funksiyalar o'ynaydi.

10¹-ta'rif. *C^1 fazoda $J[y]$ funksional y funksiyada maksimumga erishadi deyiladi, agarda shunday $\delta > 0$ soni mavjud bo'lib, ixtiyoriy y funksiya uchun $|y-y_0|<\delta$ bo'lganda $J[y] \le J[y_0]$ bo'lsa. Agarda funksional $y=y_0$ da $J[y]=J[y_0]$ bo'lsa, u holda $J[y]$ funksional y funksiyada qat'iy maksimumga erishadi.*

Xuddi shuningdek, qat'iy minimum uchun ham yuqoridagi ta'rifni keltirish mumkin.

10-misol. $J[y]=\int_0^1 (x^2+y^2)dx$ funksionalning $y(x)=0$ egri chiziqda qat'iy minimumga erishishi ko'rsatilsin.

Yechish. $[0,1]$ kesmadagi har qanday bir $y(x)$ funksiya uchun $\Delta J[y]\geq 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz bundan tashqari faqat $y(x)=0$ funksiyadagina tenglik belgisiga erishiladi.

Kuchli va kuchsiz ekstremumlar. *$J[y(x)]$ funksional $y=y_0(x)$ egri chiziqda kuchli nisbiy maksimumga erishadi deyiladi, agarda $y=y_0(x)$ egri chiziqning nolinchi tartibli ε atrofida joylashgan barcha joiz $y(x)$ egri chiziq uchun $J[y(x)]\leq J[y_0(x)]$ tengsizlik bajarilsa.*

Kuchli nisbiy minimum ham xuddi shunday aniqlanadi.

$J[y(x)]$ funksional $y_0(x)$ egri chiziqda kuchsiz nisbiy maksimumga erishadi deyiladi, agarda $y=y_0(x)$ egri chiziqning birinchi tartibli ε atrofida joylashgan barcha joiz $y(x)$ egri chiziq uchun $J[y(x)]\leq J[y_0(x)]$ tengsizlik bajarilsa.

Kuchsiz nisbiy minimum ham xuddi shunday aniqlanadi.

$J[y(x)]$ funksionalning kuchli va kuchsiz nisbiy maksimum va minimumlari *nisbiy ekstremumlar* deb ataladi. Har qanday kuchli ekstremum shu vaqtning o'zida kuchsiz ekstremum hamdir, lekin aksinchasi o'rinli emas.

Endi $\|\cdot\|_1$ normali $C^1[a,b]$ normallangan fazoda

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx,$$

funksionalning kuchli va kuchsiz differensiali mavjud bo'lishligining yetarli shartlari bilan shug'ullanamiz. F – uch o'zgaruvchili ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsin. Biror $y(x)\in C^1[a,b]$ funksiyada qandaydir birinchi variatsiyaga mos keluvchi

$$\delta J[y,\delta y]=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b\frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx$$

integralni parametr bo'yicha differensiallashga keltiruvchi funksional orttirmasini yozamiz. Bunday differensiallash qonuniy bo'lishi uchun qo'yilgan shartlarni ta'minlovchi integral ostidagi funksiya va uning parametr bo'yicha xususiy hosilasi uzluksiz bo'lishi yetarli. Olingan birinchi variatsiya δy ga nisbatan chiziqli funksional bo'ladi, ya'ni u Gato differensialini tasvirlaydi.

11-ta'rif. *$C^1[a,b]$ chiziqli fazoda aniqlangan $J[y]$ funksional $y_0(x)\in C^1[a,b]$ funksiyada (nuqtada) kuchli (kuchsiz) minimumga (yoki y_0 nuqta $J[y]$ funksionalga minimum beradi) deyiladi, agar $y_0(x)$ funksiyaning shunday kuchli (kuchsiz) ε – atrofi topilsaki, shu atrofda $J[y]\geq J[y_0]$ tengsizlik bajarilsa. Agar shu atrofning $y_0(x)$ funksiyadan farqli ixtiyoriy funksiyasi uchun $J[y]>J[y_0]$ qat'iy tengsizlik bajarilsa, u holda bunday minimum qat'iy minimum deyiladi.*

Mazkur ta'riflarni lokal minimum(lokal maksimum), global minimum (global maksimum) tilida ham keltirish mumkin. Lokal minimum (lokal maksimum) tushunchalar funksionallarni yaqinlik ma'nosida yaqin egri chiziqlarda hatti-harakatlarini tatqiq qilish bilan bog'liq.

12-ta'rif. *M sinfning y(x) funksiyalar sinfida aniqlangan $J[y(x)]$ funksionalni $y_0(x)$ funksiyada global minimum (global maksimum) ga erishadi deb aytamiz, agar barcha $y(x) \in M$ lar uchun $J[y_0(x)] \le J[y(x)]$ (mos ravishda $J[y_0(x)] \ge J[y(x)]$) tengsizliklar bajarilsa.*

11-misol. $M = \{y(x) \in C^1[0,1]: y(0) = 0, y(1) = 1\}$ funksiyalar sinfida quyidagi $J[y(x)] = \int_0^1 y'^2(x)dx$ funksionalni $y_0(x) = x$ funksiyada global minimumga erishishligi isbotlansin.

Yechish. Ravshanki, $y_0(x) = x \in M$, $\delta y(0) = 0$, $\delta y(1) = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\delta y \in C^1[0,1]$ variatsiyani qaraymiz. Orttirmani ishorasini tatqiq qilamiz:

$$\Delta J = J[y_0(x) + \delta y] - J[y_0(x)] = \int_0^1 (y_0'(x) + \delta y')^2 dx - \int_0^1 (y_0'(x))^2 dx =$$

$$= \int_0^1 2\delta y' dx + \int_0^1 (\delta y')^2 dx = 2\delta y\Big|_0^1 + \int_0^1 (\delta y')^2 dx = \int_0^1 (\delta y')^2 dx \ge 0.$$

$y(x) = y_0(x) + \delta y \in M$ variatsiyaning ixtiyoriyligidan va isbot qilingan tengsizlikka ko'ra,

$$J[y(x)] = J[y_0(x) + \delta y] \ge J[y_0(x)],$$

bo'ladi, u holda $y_0(x) = x$ funksiyada funksional global minimumga erishadi.

12-misol. $M = \{y(x) \in C^2[0,1]: y(0) = y(1) = y'(0) = 0, y'(1) = 1\}$ funksiyalar sinfida aniqlangan $J[y(x)] = \int_0^1 y''^2(x)dx$ funksionalni $y_0(x) = x^3 - x^2$ funksiyada global minimumga erishishi isbotlansin.

Yechish. Ravshanki, $y_0(x) = x^3 - x^2 \in M$, $\delta y(0) = \delta y(1) = \delta y'(0) = \delta y'(1) = 0$

shartlarni qanoatlantiruvchi $\delta y \in C^2[0,1]$ variatsiyani qaraymiz. Orttirmani ishorasini tatqiq qilamiz:

$$\Delta J = J[x^3 - x^2 + \delta y] - J[x^3 - x^2] = \int_0^1 (x^3 - x^2 + \delta y)''^2 dx - \int_0^1 (x^3 - x^2)''^2 dx =$$

$$= \int_0^1 [(6x - 2 + \delta y')^2 - (6x - 2)^2]dx = \int_0^1 [(12x - 4 + \delta y')\delta y' dx =$$

$$= \int_0^1 (12x - 4)\delta y' dx + \int_0^1 (\delta y')^2 dx.$$

Birinchi integralni chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda bo'laklab integrallaymiz, natijada quyidagi

$$\int_0^1 (12x - 4)\delta y' dx = \left| \begin{matrix} u = 12x - 4, & du = 12dx, \\ dv = \delta y' dx, & v = \delta y \end{matrix} \right| = (12x - 4)\delta y\Big|_0^1 - 12\int_0^1 \delta y dx =$$

$$-12\int_0^1 \delta y dx = -12\delta y\Big|_0^1 = 0,$$

tenglikga ega bo'lamiz. Unda

$$\Delta J = \int_0^1 (\delta y')^2 dx \ge 0,$$

bo'ladi.

$y(x) = y_0(x) + \delta y \in M$ variatsiyaning ixtiyoriyligidan va isbot qilingan tengsizlikka ko'ra,

$$J[y(x)] = J[y_0(x) + \delta y] \ge J[y_0(x)],$$

bo'ladi, u holda $y_0(x) = x^3 - x^2$ funksiyada funksional global minimumga erishadi.

13-ta'rif. *$J[y(x)]$ funksional $y = y_0(x)$ egri chiziqda lokal minimumga erishadi, agar $J[y(x)]$ funksionalning qiymati $y = y_0(x)$ egri chiziqqa*

yaqin ixtiyoriy egri chiziqlarda $J[y_0(x)]$ dan katta emas, ya'ni

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \le 0,$$

bo'lsa.

Agar $\Delta J \le 0$ bo'lsa, $\Delta J = 0$ bo'ladi, faqat $y(x) = y_0(x)$ bo'lganda, u holda funksional $y = y_0(x)$ egri chiziqda qat'iy maksimumga erishadi deyiladi.

Xuddi shunga o'xshash, qaysiki, lokal minimum amalga oshadigan $y = y_0(x)$ egri chiziq aniqlanadi. Bu holda $y = y_0(x)$ egri chiziqqa yaqin barcha egri chiziqlar uchun $\Delta J \ge 0$ bo'ladi.

Lokal ekstremum tushunchasi izohni talab etadi. Lokal maksimum yoki lokal minimum haqida gapirganda, biz funksionalni faqat yaqinlikda bo'lgan egri chiziqlardagi qiymatlariga nisbatan funksio-nalni eng katta va eng kichik qiymatlarini nazarda tutamiz. Lekin yuqorida ko'rsatilganidek, egri chiziqlarni yaqinligini turlicha tushu-nish mumkin, shuning uchun, lokal maksimum yoki minimum ta'riflarida qanday yaqinlilik tartiblari nazarda tutilyotganligini albatta ko'rsatish kerak bo'ladi.

14-ta'rif. *Agar $J[y(x)]$ funksional $y(x) - y_0(x)$ ayirmaning moduli kichik bo'lgan barcha $y = y(x)$ egri chiziqlarga nisbatan $y = y_0(x)$ egri chiziqda lokal maksimum yoki minimumga erishsa, ya'ni nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin bo'lgan egri chiziqqa nisbatan lokal maksimum yoki minimumga erishsa, u holda kuchli maksimum yoki minimum deyiladi.*

Agarda $J[y(x)]$ funksional birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida

yaqin bo'lgan barcha $y = y(x)$ egri chiziqlarga nisbatan, $y = y_0(x)$ egri chiziqda lokal maksimum yoki minimumga erishsa, ya'ni egri chiziqlarga nisbatan $y = y_0(x)$ egri chiziqqa nafaqat ordinatasi, urinmalar yo'nalishi bo'yicha ham yaqin bo'lsa, u holda kuchsiz maksimum yoki kuchsiz minimum deyiladi.

Ravshanki, agar $y = y_0(x)$ egri chiziqda kuchli maksimum (yoki minimum-ga) erishsa, agar egri chiziqlar $y = y_0(x)$ egri chiziqqa birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin bo'lsa, u holda u nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin bo'lganligi tufayli, bundan ham ko'proq kuchsiz maksimum (yoki minimum) ga erishadi.

Biroq, $y = y_0(x)$ egri chiziqda kuchsiz maksimum (yoki minimumga) erishishi mumkin, ya'ni ordinatasi, urinmalar yo'nalishi bo'yicha $y = y_0(x)$ egri chiziqqa yaqin barcha $y = y(x)$ egri chiziqlar uchun $J[y_0(x)] \ge J[y(x)]$ (maksimum bo'lgan holda), $J[y_0(x)] \le J[y(x)]$ (minimum bo'lgan holda), tengsizliklar bajariladi. Faqat ordinatasi bo'yicha yaqin, lekin urinmalar yo'nalishi bo'yicha yaqin bo'lmagan $y = y(x)$ egri chiziqlar orasidan shunday egri chiziq topiladiki, u uchun $J[y(x)] > J[y_0(x)]$ (mos ravishda $J[y(x)] < J[y_0(x)]$) tengsizliklar bajariladi.

Kuchli (kuchsiz) maksimumlar ham aynan shunday kiritiladi. Kuchli (kuchsiz) maksimumlar birgalikda kuchli (kuchsiz) ekstremumlar deb ataladi. $J[y]$ funksionalga kuchli va kuchsiz ekstremum beruvchi $y_0(x) \in C^1[a,b]$ funksiya funksionalning *ekstremum nuqtasi* deyiladi. Chunki kuchsiz ε – atrofida yotuvchi har qanday $y_1(x)$ funksiya

albatta, uning kuchli ε- atrofiga kiradi, u holda har qanday kuchli ekstremum bir vaqtning o'zida kuchsiz ekstremum ham bo'ladi.

Haqiqatan, aytaylik, $y_*(x)$ funksiya funksionalning kuchli minimum nuqtasi bo'lsin. Bu qandaydir $\varepsilon>0$ son va ixtiyoriy $y(x)$ funksiya uchun $\|y-y_*\|<\varepsilon$ bo'lganda $J[y]\geq J[y_*]$ tengsizlik bajarilishini anglatadi. Agar $\|y-y_*\|<\varepsilon$ bo'lsa, u holda $\|y-y_*\|<\varepsilon$ ham bajariladi. Shuning uchun, $J[y]\geq J[y_*]$ tengsizlik $y_*(x)$ funksiyaning kuchsiz ε- atrofidagi ixtiyoriy $y(x)$ funksiya uchun to'g'ri, ya'ni $y_*(x)$ funksiya $J[y]$ funksionalning kuchsiz minimum nuqtasi bo'ladi. Biroq $J[y]$ funksionalning kuchsiz ekstremumi uning kuchli ekstremumi bo'lishi shart emas. Bu quyidagicha tushuntiriladi: o'zining qiymatlari bo'yicha yaqin bo'lgan funksiyalar (kuchli ε- atrofga tushuvchi) hosilada tarqoqlikka ega bo'lishi mumkin, bu esa o'z navbatida funksionalning qiymatiga ta'sir ko'rsatishi mumkin.

13-misol. $\int_a^b\left[(y')^2-(y')^4\right]dx$, funksionalni qaraymiz. $f(x)=t^2-t^4$ funksiya $t=0$ da nolga teng bo'gan lokal minimumga ega bo'ladi. Bu minimum $(-1,1)$ oraliqda qat'iy bo'ladi. Demak, agar $y(x)\in C^1[a,b]$ bo'lsa, $\|y(x)\|_{C^1[a,b]}<1$ tengsizlikka bo'ysunadi, u holda bizni funksionalning integranti manfiy bo'lmaydi, funksional esa manfiy bo'lmagan qiymatga ega bo'ladi. Bundan, $y_*(x)=0$ funksionalning kuchsiz minimumi bo'lishligi kelib chiqadi. Biroq, oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shartni qanoatlantiruvchi $\|y\|_1<\varepsilon$ funksiyani o'ylab topish mumkinki, funksionalning qiymati manfiy bo'ladi

(masalan, k parametrni mos tanlab, $y(x)=0,5\varepsilon\sin(kx)$ ko'rinishda olish mmkin). Binobarin, y_* funksiya funksionalning kuchli ekstremumi bo'lmaydi.

4-izoh. *Barcha funksiyalar to'plamida aniqlangan $J[y(x)]$ funksionalning ekstremumi absolyut ekstremum deb ataladi. Har qanday absolyut ekstremum kuchli va kuchsiz nisbiy ekstremum bo'ladi, lekin har qanday nisbiy ekstremum absolyut ekstremum bo'la olmaydi.*

Shuni ta'kidlash lozimki, funksionalning kuchsiz ekstremumini topish masalasi kuchli ekstremumini topish masalasiga qaraganda yengil masala hisoblanadi. Funksionalning ekstremumini izlash, haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumini izlash kabi turli ko'rinishdagi zaruriy va yetarli shartlarga asoslanadi. Bu xususan, variatsion hisobda qaralayotgan funksionallar odatda, $C^1[a,b]$ fazoning $\|\cdot\|_1$ "kuchsiz" normasiga nisbatan uzluksiz bo'lishi bilan izohlanadi. Masalan, yuqorida qaralgan funksional.

Yuqoridagi mulohazalardan, kuchsiz ekstremumning har qanday zaruriy sharti bir vaqtning o'zida kuchli ekstremumning zaruriy sharti ham bo'ladi, kuchli ekstremumning ixtiyoriy yetarli sharti esa kuchsiz ekstremumning ham yetarli sharti bo'ladi. Shuning uchun quyida kuchsiz ekstremumlar uchun isbotlangan teorema funksional ekstremumining zaruriy sharti deb nomlanadi, lekin undan kuchli va kuchsiz ekstremumlarni topish uchun ham foydalanish mumkin.

2-teorema (ekstremumning zaruriy sharti). *Agar*

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx,$$

funksional o'z aniqlanish sohasining $y_*(x)$ *ichki nuqtasida kuchsiz ekstremumga erishsa, bundan tashqari bu nuqtada Gato differensiali mavjud bo'lsa, u holda bu differensial (birinchi variatsiya)* $y_*(x)$ *nuqtada nolga aylanadi, ya'ni* $\delta J[y_*, \delta y] = 0$.

Isboti. Aytaylik, $J[y]$ funksional $y_*(x)$ funksiyada kuchsiz minimumga erishsin. δy variatsiyani tayinlanganligini e'tiborga olib, $\varphi(\alpha) = J[y_* + \alpha\delta y]$ funksiyani qaraymiz. Teorema shartidan, bu funksiyani $\alpha = 0$ nuqtada ekstremumga ega bo'lishligi kelib chiqadi. Haqiqatan, shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'ladiki, kuchsiz ε atrofda $J[y] \geq J[y_*]$ tengsizlik bajariladi. Agar $y = y_* + \alpha\delta y$ bo'lsa, u holda $y = y_* + |\alpha| < \varepsilon / \|\delta y\|_*$ bo'lganda

$$\|y - y_*\|_* = \|\alpha\delta y\|_* = |\alpha| \cdot \|\delta y\|_* < \varepsilon,$$

ya'ni $y(x)$ funksiya $y_*(x)$ funksiyaning kuchsiz ε atrofiga tushadi. Bundan, $J[y] \geq J[y_*]$ yoki $\varphi(\alpha) \geq \varphi(0)$ bo'ladi.

$J[y]$ funksionalning y_* nuqtada Gato differensialini mavjudligidan $\varphi(\alpha)$ funksiyaning $\alpha = 0$ nuqtada differensiallanuvchiligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, δy variatsiyani tayinlaymiz. Unda

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{J[y_* + \alpha\delta y] - J[y_*]}{\alpha} = \delta J[y_*, \delta y].$$

mavjud bo'ladi. δy variatsiya bo'yicha $\delta J[y_*, \delta y]$ chiziqliligiga ko'ra,

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{J[y_* + \alpha\delta y] - J[y_*]}{\alpha} = \lim_{\beta \to +0} \frac{J[y_* - \beta\delta y] - J[y_*]}{-\beta} =$$

$$= -\lim_{\beta \to +0} \frac{J[y_* + \beta(-\delta y)] - J[y_*]}{\beta} = -\delta J[y_*, -\delta y] = \delta J[y_*, \delta y].$$

hosila mavjud bo'ladi. Bir tomonlama hosilalar ustma-ust tushadi. Mos

ravishda $\varphi'(0)$ hosila ham mavjud bo'ladi.

$\varphi(\alpha)$ funksiya $\alpha = 0$ nuqtada minimumga ega va shu nuqtada differensiallanuvchiligi bo'lganligi tufayli, u holda $\varphi'(0) = 0$ bo'ladi (bir o'zgaruvchili funksiya uchun lokal ekstremumning zaruriy sharti). Lekin bu, $\delta J[y_*, \delta y] = 0$ shartga teng kuchli. δy variatsiyani ixtiyoriy tanlash mumkinligidan, Gato differensiali nolga teng bo'ladi degan xulosaga kelamiz. Teorema isbot bo'ldi.

14-misol. $y(0) = y(\pi) = 0$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $y(x) \in C^1[0, \pi]$ funksiyalar fazosida $J[y] = \int_0^\pi y^2(1 - y')\,dx$ funksionalni qaraymiz.

Yechish. Ox o'qidagi $[0, \pi]$ kesma $J[y(x)]$ funksionalga kuchsiz minimum beradi. Haqiqatdan ham $y = 0$ uchun $J = 0$ ga ega bo'lamiz. Bu kesmaning birinchi tartibli ε atrofida joylashgan egri chiziqlar uchun $|y| < 1$ bo'ladi, bu yerda ε – ixtiyoriy birdan kichik musbat son. Shuning uchun, integral ostidagi ifoda $y \neq 0$ bo'lganda musbat, va bundan $J > 0$ holat faqat $y = 0$ bo'lgandagina bajariladi. Demak, $J[y(x)]$ funksional $y = 0$ funksiyada kuchsiz minimumga erishadi, kuchli minimumga esa erisha olmaydi. Buni ko'rsatish uchun $y(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$ deb olish yetarli. U holda

$$J[y(x)] = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx (1 - n\cos^2 nx)\,dx = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx\,dx - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2 2nx\,dx = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}$$

va yetarlicha katta n larda egri chiziqlar uchun $J < 0$ bo'ladi, boshqa tomon dan, barcha bu egri chiziqlar yetarlicha katta n larda $y = 0$ egri chiziqning yetarlicha kichik nolinchi tartibli atrofida yotadi. Demak,

funksional $y=0$ egri chiziqda kuchli minimumga erishmaydi.

3-teorema. *Agar* $J[y(x)]$ *differensiallanuvchi funksional* $x=x_0(x)$ *nuqtada ekstremumga erishsa, bu yerda* $x_0(x)$ *funksional aniqlanish sohasining ichki nuqtasi, u holda* $x_0(x)$ *nuqtada*

$$\delta J[y_0(x)]=0, \tag{12}$$

bo'ladi.

(12) tenglik bajarilgan funksiyalarni *statsionar funksiyalar* deb ataymiz.

Isboti. $x_0(x)$ va δy argument orttirmasida $J[y_0(x)+t\delta y]$ bir parametrli funksiyaga aylanadi, qaysiki, $t=0$ da farazga (teorema shartida) ko'ra, funksional maksimum yoki minimumga erishadi. bundan $\varphi(0)=0$ yoki $\frac{\partial}{\partial t}J[y_0(x)+t\delta y]_{t=0}=0$ bo'ladi, ya'ni $\delta J=0$.

Demak, funksionalning variatsiyasi ekstremumga erishadigan egri chiziqlarda nolga teng bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Birinchi variatsiyani $\delta J=0$ nolga aylantiruvchi funksiyalar statsionar funksiyalar deb ataladi. Funksional fazolarda (masalan, $C^1[a,b]$ fazoda) funksionallarning statsionar funksiyalarini topishda variatsion hisobning asosiy lemmasidan foydalaniladi.

Quyida o'sha lemmani va uning umumlashmalarini keltiramiz.

67. Kvadratik funksionalni differensiallanuvchi ekanligini isbotlang va uning 2-variatsiyasini toping.

68. $e^{F(x)}$ funksionalning 2-variatsiyasi yozilsin, bu yerda $F(x)$- ikki marta differensiallanuvchi funksional.

69. Agar integral ostidagi F funksiya 3-tartibgacha uzluksiz hosilaga

ega bo'lsa, u holda $C^1[a,b]$ fazoda $J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ ko'rinishdagi funksionalni ikki marta differensiallanuvchi ekanligi ko'rsatilsin va 2-variatsiyasi uchun ifoda topilsin.

70. $J[y]=\int_a^b f\left[x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x)\right]dx$ **71.** $J[y]=\iint_G F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy$.

72. $J[y_1,y_2,\dots,y_n]=\int_a^b f\left[x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n'\right]dx$.

Ekstremumning zaruriy shartidan va variatsion hisobning asosiy lemmasidan foydalanib, quyidagi funksionallarning statsionar funksiyalarni aniqlash uchun funksional tenglamalari topilsin.

73. $J[\varphi]=\int_a^b\int_a^b K(x,t)\varphi(x)\varphi(t)dxdt+\int_a^b\varphi^2(x)dx-2\int_a^b\varphi(x)f(x)dx$, bu yerda $K(x,t)$- G $a\le x\le b$, $a\le t\le b$ sohadagi x va t larning uzluksiz simmetrik funksiyasi; $f(x)$- $[a,b]$ kesmada berilgan uzluksiz funksiya, $\varphi(x)$- izlanayotgan uzluksiz funksional argumenti.

74. $J[\varphi]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[p(x)\varphi'^2(x)+2q(x)\varphi(x)-\varphi^2(x)-2\varphi(x)f(x)\right]dx$, bu yerda $\varphi(x)$ uzluksiz funksional argumenti va barcha $-\infty<x<+\infty$ butun intervalda bo'lakli- uzluksiz hosilaga ega; $p(x)$- uzluksiz hosilaga ega, $f(x)$- uzluksiz funksiya.

75. $J[\varphi]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[p(x)\varphi'^2(x)+2q(x)\varphi^2(x)-2\varphi(x)f(x)\right]dx$, $\varphi(x_0)=\varphi_0$, $\varphi(x_1)=\varphi_1$, bu yerda $p(x)$ uzluksiz hosilaga ega, $q(x)$ va $f(x)$ uzluksiz va funksional argumenti $\varphi(x)$ ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.

5-§. Variatsion hisobning asosiy lemmasi va uning umumlashmalari

Ushbu paragrafda kelgusida keng foydalanadigan bir necha (variatsion hisobning asosiy lemmalari deb nomlanuvchi) tasdiqlarni isbot qilamiz.

$\overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$– orqali $y(a)=y(b)=0$ shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x)\in C^1[a,b]$ sinfga tegishli bo'lgan funksiyalar fazosini belgilaymiz.

1-lemma (Lagranj). *Agar*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx=0$$

tenglik uzluksiz $f(x), x\in[a,b]$ *funksiya va* $h(x)\in\overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ *variatsiyalar uchun bajarilsa, u holda* $f(x)=0, x\in[a,b]$ *bo'ladi.*

Isboti. Lemmani teskarisidan faraz qilish orqali isbot qilamiz. ya'ni $[a,b]$ oraliqdan shunday ξ nuqta topiladiki, $a<\xi<b$, o'sha nuqtada funksiyaning qiymati uchun $f(\xi)=\alpha\neq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Aniqlik uchun $\alpha>0$ deb olaylik (agar $f(\xi)=\alpha<0$ bo'lsa, u holda $f(\xi)$ ni $-f(\xi)$ ga almashtiramiz). U holda $f(x)$ funksiyani uzluksizligidan ξ nuqtaning shunday atrofi

$$\xi_1<\xi<\xi_2,\ (\xi_1,\xi_2)\subset[a,b]$$

topiladiki, unda $f(x)>0$ bo'ladi. $h(x)$ funksiyani quyidagicha tanlab olamiz: *a)*

$$h(x)=\begin{cases}(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2, & agar\ x\in(\xi_1,\xi_2),\ bo'lsa,\\ 0, & agar\ x\notin(\xi_1,\xi_2),\ bo'lsa.\end{cases}$$

Ravshanki, $h(x)$ funksiya lemma shartlarini qanoatlantiradi. Shu vaqtning o'zida bulardan

$$\int_a^b f(x)h(x)dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2dx>0,$$

ifodani hosil qilamiz, ya'ni integral ostidagi funksiya uzluksiz. Demak, farazimiz noto'g'ri, ya'ni $[a,b]$ oraliqning qayeridadir $\alpha\neq 0$ deb faraz qilishimiz qarama-qarshilikka olib keldi, bundan kelib chiqadiki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda $f(x)=0$ teng bo'ladi.

Lemma isbotini quyidagi funksiyalar orqali ham amalga oshirish mumkin.

a) Endi quyidagi funksiyani qaraylik

$$h(x)=\begin{cases}\sin^2[n(x-\xi_1)], & agar\ x\in\left[\xi_1,\xi_1+\frac{\pi}{4}\right],\ bo'lsa,\\ 0, & agar\ x\notin\left[\xi_1,\xi_1+\frac{\pi}{4}\right],\ oraliqdan\ tashqarida\ bo'lsa.\end{cases}$$

Bu funksiya uchun ham yuqoridagi mulohazalarni yuritgan holda quyidagi natijaga kelamiz. Lemma shartiga ko'ra, $h(x)$ uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega, $h(x)\in\overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Bundan biz

$$\int_a^b f(x)h(x)dx=0$$

bo'lishligiga ega bo'lishimiz kerak, lekin

$$\int_a^b f(x)h(x)dx=\int_{\xi_1}^{\xi_1+\frac{\pi}{4}} f(x)\sin^2[n(x-\xi_1)]dx>m\int_{\xi_1}^{\xi_1+\frac{\pi}{4}}\sin^2[n(x-\xi_1)]dx=\frac{\pi m}{2n}>0,$$

ifodaga kelamiz. Bundan, farazimiz noto'g'ri, ya'ni $[a,b]$ oraliqning qayeridadir $\alpha\neq 0$ deb faraz qilishimiz qarama-qarshilikka olib keldi. 1-lemma isbot bo'ldi.

1-izoh. *Ushbu lemma, qandaydir chegaraviy shartlarni (masalan,* $h(a)=h(b)=0$*) qanoatlantiruvchi* $h(x)$ *funksiya* $C^1[a,b]$ *sinfdan (hattoki*

$C^{\infty}[a,b]$) *deb hisoblanganda ham to'g'riligini saqlab qoladi. (ya'ni* $\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$ *munosabat uzluksiz funksiyalar sinfidangina emas, balki tor sinfdan olingan* $h(x)$ *funksiyalar uchun ham bajarilishi mumkin).*

b) Agar $h(x)$ funksiyani quyidagi $h(a) = h(b) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $C^1[a,b]$ sinfdan olingan funksiya deb hisoblasak, u holda lemmaning isbotida $[a,b]$ oraliqda aniqlangan $h(x)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda olish mumkin

$$h(x) = \begin{cases} 1 + \cos\dfrac{\pi(x - x_0)}{\delta}, & agar\ \ x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ bo'lsa, \\ 0, & agar\ x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ oraliqdan\ tashqarida\ bo'lsa \end{cases}$$

Shunga o'xshash mazkur lemma ikki va undan ortiq o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham o'rinli, bunda faqat integrallash biror-bir chegaralangan yopiq D sohada amalga oshiriladi.

Biz birinchi variatsiyani tadqiq qilganda Lagranj almashtirishi noqonuniy ekanligi, u yerda kamchilikka yo'l qo'yilganligi, mazkur kamchilik Dyubua-Reymon tomonidan bartaraf etilganligi to'g'risida fikr, mulohaza yuritgan edik (2° – bandga qarang). Shu munosabat bilan ushbu lemmani keltiramiz.

2-lemma (Dyubua-Reymon). *Agar uzluksiz* $f(x)$ *funksiya uchun ixtiyoriy* $h(x) \in C^1[a,b]$ *– funksiyada* $\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$ *bo'lsa, u holda butun* $[a,b]$ *oraliqda* $f(x) = \text{const}$ *bo'ladi.*

Isboti. Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni $[a,b]$ oraliqdan shunday η_1, η_2 nuqtalar topiladiki, natijada $f(\eta_1) \neq f(\eta_2)$ bo'lsin. Aniqlik uchun $f(\eta_1) > f(\eta_2)$ deb olaylik. Aytaylik d_1 va d_2 – sonlar quyidagi tengsizlikni

$f(\eta_1) > d_1 > d_2 > f(\eta_2)$ qanoatlantirsin. Yetarlicha katta n uchun $[a,b]$ oraliqda yotuvchi bir juft o'zaro kesishmaydigan shunday $\left[\eta_1, \eta_1 + \frac{\pi}{4}\right], \left[\eta_2, \eta_2 + \frac{\pi}{4}\right]$ intervallarni tuzish mumkinki, $\left[\eta_1, \eta_1 + \frac{\pi}{4}\right]$ oraliqda $f(\eta_1) > d_1$ tengsizlik, keyingi $\left[\eta_2, \eta_2 + \frac{\pi}{4}\right]$ oraliqda esa $f(\eta_2) > d_2$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Endi $h(x)$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$h(x) = \begin{cases} \sin^2[n(x - \eta_1)], & agar\ \ x \in \left[\eta_1, \eta_1 + \frac{\pi}{4}\right],\ bo'lsa, \\ -\sin^2[n(x - \eta_2)], & agar\ \ x \in \left[\eta_2, \eta_2 + \frac{\pi}{4}\right],\ bo'lsa, \\ 0, & oraliqning\ qolgan\ nuqtalarida. \end{cases}$$

$h(x) = \int_a^x h(x)dx$ uzluksiz va uzluksiz $h(x)$ hosilaga ega bo'lgan funksiya, bundan tashqari $h(a) = 0$ bo'lib,

$$h(a) = \int_a^b h(x)dx = \int_{\eta_1}^{\eta_1 + \frac{\pi}{4}} \sin^2[n(x - \eta_1)]dx = \int_{\eta_2}^{\eta_2 + \frac{\pi}{4}} \sin^2[n(x - \eta_2)]dx = 0$$

bo'ladi. Lemma shartiga ko'ra,

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$$

bo'ladi, lekin boshqa tomondan

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = \int_{\eta_1}^{\eta_1 + \frac{\pi}{4}} \sin^2[n(x - \eta_1)]dx - \int_{\eta_2}^{\eta_2 + \frac{\pi}{4}} \sin^2[n(x - \eta_2)]dx > (d_1 - d_2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 nz\,dx > 0$$

bo'ladi, bu esa $\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$ shartga zid. Demak, farazimiz qarama-qarshilikka olib keldi. Lemma isbot bo'ldi.

Lagranj va Dyubua-Reymon lemmalari bir necha turdagi umumlashmalarga ega. Hozir shu umumlashmalarning ayrimlarini

e'tiboringizga havola etamiz. Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

Aytaylik, $Q=R^2_{x,y}$ to'g'ri burchakli dekart koordinatalar tekisligida chegaralangan Jordan ma'nosida o'lchovli soha bo'lsin. $\bar{Q}$ bilan Q sohanig yopig'ini belgilaymiz. $C^1(\bar{Q})$ orqali barcha $\bar{Q}$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Ixtiyoriy $u(x,y)\wedge v(x,y)\in C^1(\bar{Q})$ funksiyalar uchun quyidagi

$$\|u(x,y)-v(x,y)\|_{C^1(\bar{Q})}=\max_{(x,y)\in\bar{Q}}|u(x,y)-v(x,y)|+$$

$$+\max_{(x,y)\in\bar{Q}}\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|+\max_{(x,y)\in\bar{Q}}\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|$$

formula bo'yicha ular orasidagi masofani kiritamiz. $C^1(\bar{Q})$ to'plam kiritilgan masofa bilan normallangan chiziqli fazoni tashkil qiladi. Q sohaning chegarasini ∂Q deb belgilaymiz va ∂Q chegarani kelgusida bo'lakli silliq egri chiziq deb hisoblaymiz. $C^m(\bar{Q})$ orqali shunday $u(x,y)\in C^1(\bar{Q})$ funksiyalar to'plamini belgilaymizki, qaysiki, u funksiya $u|_{\partial Q}=0$, $C(\bar{Q})$ orqali sohadagi barcha uzluksiz funksiyalar to'plamini belgilaymiz.

3-lemma (Lagranj). *Agar* $f(x,y)\in C^1(\bar{Q})$ *funksiya va ixtiyoriy* $h(x,y)\in C^1(\bar{Q})$ *funksiya uchun*

$$\iint_Q f(x,y)h(x,y)dxdy=0$$

bo'lsa, u holda $\bar{Q}$ *sohada* $f(x,y)\equiv 0$ *bo'ladi.*

Isboti. Teskarisidan mulohaza yuritamiz. Aytaylik, $(\xi,\eta)\in Q$ nuqtalar mavjudki, $f(x,y)$ funksiyaning o'sha nuqtadagi qiymati $f(\xi,\eta)>0$ bo'lsin. $f(x,y)$ funksiyaning uzluksizligiga asosan Q sohadan

markazi $(\xi,\eta)\in Q$ nuqtada bo'lgan r radiusli $K_r(\xi,\eta)$ doira topiladiki, ixtiyoriy $(x,y)\in K_r(\xi,\eta)$ nuqtalar uchun $f(x,y)>0$ bo'lsin. $h(x,y)$ funksiyani quyidagi

$$h(x,y)=\begin{cases}[(x-\xi)^2+(x-\eta)^2-r^2], & (x,y)\in K_r(\xi,\eta),\\ 0, & (x,y)\notin K_r(\xi,\eta),\end{cases}$$

ko'rinishda olamiz. $h(x,y)\in C^1(\bar{Q})$ ekanligini tekshirish qiyin emas. Lekin,

$$\iint_Q f(x,y)h(x,y)dxdy=\iint_{K_r(\xi,\eta)} f(x,y)h(x,y)dxdy>0$$

bo'ladi, bu esa 3-lemmaning shartiga qarama-qarshi. Demak, bizning farazimiz ziddiyatga olib keldi, bu ziddiyat esa lemmani isbot qiladi.

4-lemma. *$\varphi_k(x),(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ - tayinlangan, haqiqiy, $a\le x\le b$ oraliqda bo'lakli silliq funksiyalar bo'lsin. Agar $N(x)$ - o'sha sinfga tegishli bo'lgan biror funksiya bo'lib, agar*

$$\int_a^b \varphi_k(x)\xi(x)dx=0,\ (k=0,1,2,\ldots,n-1),$$

shartni qanoatlantiruvchi bo'lakli - uzluksiz $\xi(x)$ funksiya qanday bo'lmasin $\int_a^b N(x)\xi(x)dx=0$ bo'lsa, u holda $N(x)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\varphi_k(x)$, $a\le x\le b$, bo'ladi, bu yerda c_k – qandaydir o'zgarmaslar.

Isboti. Eng avvalo $\varphi_k(x),(k=0,1,2,\ldots,n-1)$, funksiyalarni chiziqli erkli deb hisoblash mumkin. So'ngra c_k aniqmas koeffitsientli

$$\zeta_\alpha(x)=N(x)-\sum_{k=0}^{n-1}c_k\varphi_k(x),$$

funksiyani quramiz. c_k koeffitsientlarni shunday aniqlashimiz kerakki, natijada quyidagi ifoda nolga teng bo'ladi

$$\int_a^b \zeta_0(x)\varphi_j(x)dx = N_j(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}c_k = 0, \quad (j = 0,1,\ldots,n-1),$$

bu yerda

$$N_j = \int_a^b N(x)\varphi_j(x)dx, \quad a_{jk} = \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x)dx.$$

Shunday qilib, n ta noma'lumli c_k ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'ldik. Bilamizki, bu chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bir qiymatli yechiladi. Endi $\zeta(x)$ funksiya sifatida c_k koeffitsientlar yordamida qurilgan $\zeta_0(x)$ funksiyani olamiz. Bunda

$$\int_a^b \left[N(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k(x) \right]^2 dx = \int_a^b N(x)\zeta_0(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_a^b \varphi_k(x)\zeta_0(x)dx,$$

ekanligini anglaymiz. Buni o'ng tomoni nolga teng. Chap qismidagi integral ostidagi ifoda esa manfiy emas, u holda uzluksiz nuqtalaring barchasida u nolga teng, boshqa nuqtalarda esa ular lemma shartiga ko'ra, birinchi tur uzulishga ega bo'ladi. Lemma isbot bo'ldi.

2-izoh. *Agar biz $N(x)$ va $\varphi_k(x)$ funksiyalarni kvadrati bilan integrallanuvchi deb faraz qilganimizda edi, u holda oldingi shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $\xi(x)$ funksiyalar uchun*

$$\int_a^b N(x)\xi(x)dx = 0$$

bajarilganda

$$N(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k(x),$$

tenglik (a,b) oraliqning hamma joyida o'rinli bo'lar edi.

4-lemmaning xususiy holi bu Dyubua-Reymon (2-lemmaga qarang) lemmasi hisoblanadi.

5-lemma (Xaar). *Aytaylik, $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ ikkita (x,y) tekislikning bir bog'lamli D sohasida uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Agar kompakt tashuvchili D sohada har bir silliq $\zeta(x,y)$ funksiyalar uchun*

$$\iint_D \left(P(x,y)\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

bo'lsa, u holda $\gamma \subset D$ qanday bo'lakli-silliq kontur bo'lmasin

$$\int_\gamma Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0$$

bo'ladi.

Isboti. Lemmaning sharti, boshqa so'z bilan aytganda, D sohada aniqlangan va o'zining hosilalari bilan uzluksiz qandaydir $\omega(x,y)$ funksiya uchun $Q(x,y) = -\frac{\partial\omega(x,y)}{\partial x}$ va $P(x,y) = \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial y}$ tengliklarni anglatadi. $\omega(x,y)$ funksiyani qurish uchun $\int_\gamma Q(x,y)dx - P(x,y)dy$ integralni nolga tengligini isbotlash yetarli, bu yerda $\gamma \subset D$ sohada yotuvchi koordinata o'qlariga paralel bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning chegarasi. Uchlari (x_0,y_0), (x_1,y_0), (x_1,y_1), (x_0,y_1) nuqtalarda bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni qaraymiz, $\zeta(x,y)$ funksiya sifatida to'g'ri to'rtburchakdan tashqarisida nolga aylanuvchi, uning ichida esa $\zeta(x,y) = \xi(x)\eta(y)$ ko'rinishga ega bo'lgan funksiyani olamiz, bu yerda

$$\xi(x_0) = \xi(x_1) = \eta(y_0) = \eta(y_1) = 0.$$

$$\int_{x_0}^{x_1} Q(x,y_0)dx - \int_{y_0}^{y_1} P(x_1,y)dy - \int_{x_0}^{x_1} Q(x,y_1)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0,y)dy = 0 \qquad (3)$$

bo'lishini isbot qilishimiz kerak.

Lemma shartiga ko'ra.

$$\int_c^d \int_a^b P(x,y)\xi'(x)\eta(y)dxdy - \int_c^d \int_a^b Q(x,y)\xi(x)\eta'(y)dxdy = 0,$$

tenglikga ega bo'lamiz, bu ifodani bo'laklab integrallash yordamida quyidagi

$$\int_a^b \xi(x)dx \int_c^d \eta(y)dy \left[\int_a^b P(x,y)dx + \int_c^d Q(x,y)dy \right] = 0,$$

ko'rinishda qayta yozish mumkin. Dyuhpa-Reymon (2-lemmaga qarang) lemmasiga asosan

$$\int_c^d \eta(y)dy \left[\int_a^b P(x,y)dx + \int_a^b Q(x,y)dy \right] = C_1,$$

bo'ladi. Endi $y = x$ deb olib, C_1 o'zgarmasni topamiz. shundan so'ng olingan natija quyidagi ko'rinishni oladi

$$\int_c^d \eta(y)dy \left[\int_a^b P(x,x)dx - \int_a^b P(x,x)dx + \int_a^b Q(x,y)dy \right] = 0$$

Bu yerda yana bir marta Dyubua-Reymon lemmasiga murojaat qilsak,

$$\int_a^b P(x,x)dx - \int_a^b P(x,x)dx + \int_a^b Q(x,y)dy = C_2(x)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Endi $y = x$ deb olib, $C_2(x)$ funksiyani topamiz. U holda biz olgan natija qayta quyidagi

$$\int_a^b P(x,x)dx - \int_a^b P(x,x)dx + \int_a^b Q(x,y)dy - \int_a^b Q(x,y)dy = 0$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerdan $x = x_1$ va $y = y_1$ nuqtalarda (3) tenglikka ega bo'lamiz. Lemma isbot bo'ldi.

6-lemma (Xatar, Shander). *Aytaylik, D– tekislikning bir bog'lamli sohasi bo'lsin. Agar ixtiyoriy bo'laklı-silliq $\gamma \subset D$ konturda*

$$\int_\gamma (P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

bo'lsa, u holda D– sohaning chegarasida nolga teng bo'lgan D sohadagi ixtiyoriy $\xi(x,y)$ silliq funksiya uchun

$$\iint_{(D)} \left[P(x,y)\frac{\partial \xi(x,y)}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial \xi(x,y)}{\partial y} \right] dxdy = 0,$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. D sohaning chegarasi γ bo'laklı - silliq bo'lgan konturdan iborat bo'lgan hol uchun isbotni keltiramiz. Eng avvalo D sohadan lemmaning shartiga ko'ra, shunday $\omega(x,y)$ silliq funksiya mavjud bo'ladiki, $Q(x,y) = \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial x}$ va $P(x,y) = \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial y}$ tenglikkami o'rinli bo'lishligini anglab yetamiz. Agar biz

$$\iint_{(D)} \left[\frac{\partial \omega(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \xi(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \xi(x,y)}{\partial y} \right] dxdy = \int_\gamma \xi(x,y) \left(\frac{\partial \omega(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial y}dy \right). \quad (4)$$

teng ekanligini isbot qilsak, u holda lemma isbot bo'ladi. Agar $\omega(x,y)$ funksiya aralash $\frac{\partial^2 \omega(x,y)}{\partial x \partial y}$ hosilaga ega bo'lsa, u holda (4) ifoda Grin funksiyasining natijasi bo'lib qoladi, u holda (4) tenglikning o'ng tomoni Grin formulasiga ko'ra, quyidagiga

$$\int_\gamma \xi(x,y) \left(\frac{\partial \omega(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial y}dy \right) = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\xi(x,y)\frac{\partial \omega(x,y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\xi(x,y)\frac{\partial \omega(x,y)}{\partial y} \right) \right] dxdy.$$

ega bo'lamiz. Umumiy holda Veyershtrassning aproksimatsiya teoremasiga asosan, shunday $\omega_n(x,y)$ ko'phadlar kema-ketligini tuzish mumkinki, ular D sohada $n \to \infty$ da

$$\frac{\partial}{\partial x}\omega_n(x,y) \to \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial x} \text{ va } \frac{\partial}{\partial y}\omega_n(x,y) \to \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial y}$$

tekis yaqinlashadi. Shuning uchun, (4) tenglikdan ko'phad uchun $\varepsilon(x,y)$ funksiya sifatida limitini olsak, kerakli ayniyatni olgan bo'lamiz. Lemma isbot bo'ldi.

VI BOB.

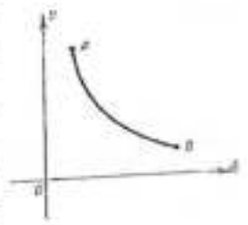
EYLER TENGLAMASI VA UNING UMUMLASHMALARI

1-§. Variatsion hisobning asosiy masalasi va uning umumlashmalari

v bobning kirish qismida variatsion hisobning fan sifatida yuzaga kelishida turtki bo'lgan beshta masala bilan tanishib o'tgan edik. Ushbu masalalar ichida variatsion hisob fanini rivojlanishida katta rol o'ynagan, alohida o'z o'rniga ega bo'lgan masala bu I.Bernulli tomonidan 1696 yilda birinchi bor e'lon qilingan "braxistoxrona haqidagi masala" hisoblanadi. Zamonaviy tasavvurimiz bo'yicha variatsion hisob masalalariga mansub masalalar qadimiy yunon matematiklariga ma'lum bo'lgan, masalan, izoperimetrik masala, biroq, aynan Bernulli tomonidan taklif qilingan masala - mazkur masalaga o'xshash masalalarni yuzaga kelishida va umumiy tadqiqot usullarini rivojlanishiga asos bo'lib xizmat qildi. Bu tadqiqotlar eng avvalo L.Eyler va J.L.Lagranj nomlari bilan bevosita bog'liq bo'lib, qaysiki, biz kelgusida bu tadqiqotlar bilan batafsil tanishib o'tamiz.

Mavzuni variatsion hisobning ikkita sodda, lekin muhim bo'lgan masalalari bilan tanishib o'taylik.

Braxistoxrona haqidagi masala. Vertikal tekislikning turli sathlarida joylashgan ikkita $A(x_0,y_0)$ va $B(x_1,y_1)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalarni shunday silliq chiziq bilan tutashtirish kerakki, boshlang'ich tezligi nol bo'lganda og'ir moddiy shar shu chiziq bo'ylab $A(x_0,y_0)$ nuqtadan $B(x_1,y_1)$



16 - rasm

nuqtaga eng qisqa vaqtda yetib kelsin (16- rasm).

Albatta bu yerda shunday chiziq mavjud bo'lsa, uni qanday topiladi degan savolning tug'ilishi tabiiydir. Bu qo'yilgan masala qandaydir funksionalning ekstremumga tadqiq qilish masalasiga olib kelinadi. Agar $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalar bir vertikal (tik) biror to'g'ri chiziqda yotganda edi, u holda ushbu masalaning yechimi to'g'ri chiziq kesmasidan iborat bo'lar edi. Masalaga fizik nuqtai nazardan yondashsak, izlanayotgan chiziq to'g'ri chiziqning kesmasi bo'la olmaydi, agar bo'lsa u holda jismning tezligi sekin ortadi, natijada jismning $A(x_0, y_0)$ nuqtadan $B(x_1, y_1)$ nuqtaga kelishi uchun ko'p vaqt talab qilinadi. $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziq $y = y(x)$, $x \in [0, x_1]$, bo'lsin. Agar og'ir moddiy jism $A(x_0, y_0)$ nuqtadan boshlang'ich tezliksiz harakatlansa, u holda tushayotgan jismning vertikal (ordinatasi) bo'yicha y masofa o'tgandan keyingi tezligi quyidagi munosabat bilan bog'langan $v^2 = 2gy$, bu yerda g – og'irlik kuchining tezlanishi, yoki $v = \sqrt{2gy}$ bo'ladi. Bilamizki, egri chiziqning elementar yoyi

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right),$$

ifodaga teng bo'ladi. Boshqa tomondan esa nuqta harakatining tezligi

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{dt}dx,$$

bu yerda dt – vaqt elementi. Bulardan

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}dx = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}dx,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Oxirgi ifodani integrallab, $y = y(x)$ egri chiziq

bo'ylab $A(x_0, y_0)$ nuqtadan $B(x_1, y_1)$ nuqtaga kelishi uchun talab qilingan T vaqtga ega bo'lamiz, ya'ni

$$T = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}dx. \tag{1}$$

Ravshanki, bu funksional $y(x)$ funksiyaga bog'liq. Shunday qilib, braxistoxrona haqidagi masala quyidagi: $[0, x_1]$ kesmaning chetlarida $y(0) = 0$ va $y(x_1) = y_1$ qiymatlarni qabul qiluvchi va (1) funksionalga minimum beradigan $y = y_*(x)$, $x \in [0, x_1]$ silliq chiziqni topish masalasiga keltirildi. Bu masalaning yechimini kelgusi paragraflarda keltiramiz.

Eng kichik yuzali aylanma sirt haqidagi masala. xOy tekislikda ikkita $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$, $x_0 < x_1$, nuqtalar berilgan. $y = y(x)$ $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziq tenglamasi bo'lsin, ya'ni $y(x_0) = y_0$ va $y(x_1) = y_1$.

Hosil bo'lgan sirtning yuzasi eng kichik bo'lishi uchun egri chiziq qanday bo'lishi kerak ?

Yechish. $y = y(x)$ egri chiziqning kesmasi (aylanma sirtni hosil qiluvchi) quyidagi

$$S[y] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1,$$

variatsion masalaning yechimi bo'ladi. Bu yerda $S[y]$ – oxirlari $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarda bo'lgan sirtning yuzasi. Ko'rish mumkinki, $F = y\sqrt{1 + y'^2}$ funksiya x o'zgaruvchiga oshkor holda bog'liq emas. Mazkur holda Eyler tenglamasining (keying paragraflarda Eyler tenglamasiga batafsil to'xtalamiz) birinchi integrali $F - yF_{y'} = C_1$, ya'ni

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

bu yerdan ma'lum almashtirishlardan so'ng

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

ifodaga ega bo'lamiz. $y=sht$ deb, t parametrni kiritamiz. U holda

$$y=C_1cht,\ dx=\frac{dy}{y'}=\frac{C_1shtdt}{sht}=C_1dt\Rightarrow x=C_1t+C_2,$$

bo'ladi. Oxirgi ifodadan t parametrni yo'qotib, quyidagi ko'rinishga ega bo'lgan

$$y=C_1ch\left(\frac{x-C_2}{C_1}\right),$$

zanjir chiziqlar oilasini topamiz, bu chiziqni aylanishidan *katenoit sirtni* hosil qilamiz. C_1,C_2 – o'zgarmaslar chegaraviy shartlar orqali aniqlanadi. Yechim (x_1,y_1) va (x_2,y_2) nuqtalarning koordinatalariga bog'liqligidan bitta, ikkita yoki birorta ham bo'lmasligi mumkin.

Ushbu keltirilgan masalalar shuni ko'rsatdiki, variatsion hisobning tadbiq qilish sohasi juda kengligiga qaramay eng muhim masalalar geometrik va fizik xarakterga ega ekanligini aytib o'tish lozim.

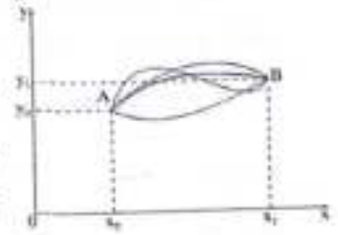
Variatsion hisobning asosiy masalasi. $[a,b]$ kesmada aniqlangan va o'zining 1-tartibli hosilalari bilan birga uzluksiz bo'lib, $[a,b]$ kesmaning chetlarida berilgan $y(a)=c,$ va $y(b)=d,$ qiymatlarni qabul qiluvchi skalyar $y=y(x),\ x\in[a,b],$ funksiya *joiz egri chiziq* deb ataladi.

Aytaylik, $F(x,y,p)$ – ixtiyoriy $x\in[a,b]$ va ixtiyoriy $(y,p)\in R^2_{y,p}$ – o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsin, bunda $(y,p)\in R^2_{y,p}$ – (y,p) to'g'ri burchakli dekart koordinatalar tekisligi.

M to'plamning $y(a)=A$ va $y(b)=B$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x)\in C^1[a,b]$ funksiyalarida aniqlangan

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx, \tag{2}$$

integralni qaraylik, bu yerda A va B lar berilgan sonlar. $y(x)\in M$ funksiyani joiz funksiya deb ataymiz.



17- rasm

1-ta'rif. *(2) funksionalni kuchsiz lokal ekstre-mumini topish masalasi variatsion hisobning sodda masalasi deyiladi. Joiz egri chiziq $R^2_{x,y}$ tekislikning ikkita tayinlangan nuqtalaridan o'tishi lozim bo'l-ganligi sababli variatsion hisobning sodda masalasi ba'zan tayinlangan oxirli masala ham deb yuritiladi (17- rasm).*

Ayrim man'balarda variatsion hisobning sodda masalasiga quyidagicha ta'rif beriladi:

$C^1[a,b]$ fazoda quyidagi ekstremal

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx\to extr,\quad y(a)=A,\quad y(b)=B,$$

masalaga variatsion hisobning *sodda (asosiy, klassik) masalasi* deb ataladi.

Geometrik nuqtai nazardan, variatsion hisobning sodda masalasi: ikki nuqtani tutashtiruvchi barcha silliq egri chiziqlar to'plamida (2) ko'rinishdagi funksionalni kuchsiz ekstremumini topishdan iboratdir. Yuqorida ko'rib o'tilgan braxistoxrona haqidagi masala mazkur tipga tegishli masalalardan hisoblanadi.

Ma'lumki, funksionalning birinchi variatsiyasi

$$\delta J = \int_a^b \left\{ \frac{dF(x,y(x),y'(x))}{dy}\delta y(x) + \frac{dF(x,y(x),y'(x))}{dy}\delta y'(x) \right\} dx$$

ko'rinishda ekanligini biz sizlar bilan ko'rib o'tgan edik. Shuning uchun, birinchi variatsiya orqali variatsion hisob sodda masalasining ekstremumini zaruriy shartini isbot qilishimiz mumkin.

1-teorema. *Agar* $\tilde{y}(x) \in M$ *funksiya variatsion hisob sodda masalasining yechimi bo'lsa, u holda ixtiyoriy joiz* $\eta(x) \in \dot{C}^1[a,b]$ *funksiya uchun* $\delta[\tilde{y},\eta(x)]=0$ *ya'ni birinchi variatsiyaning nolga teng bo'lishi zarur.*

Isboti. Aniqlik uchun $\tilde{y}(x) \in M$ funksiyada $J[y]$ funksional kuchsiz lokal minimumga erishsin, ya'ni shunday $\varepsilon > 0$ soni mavjud bo'lsaki, qaysiki ixtiyoriy $h(x) \in C^1[a,b]$, $\|h(x)\| < \varepsilon$ funksiya uchun $J[\tilde{y}+h] \geq J[\tilde{y}]$ bo'lsin. $h(x) = \alpha\eta(x)$, $\alpha \in R$ deb olamiz, bu yerda $\eta(x) \in \dot{C}^1[a,b]$. U holda yetarlicha kichik $|\alpha|$ va tayinlangan $\eta(x)$ funksiyada

$$\|h(x)\|_{C^1[a,b]} = |\alpha|\left\{\max_{a\le x\le b}|\eta(x)| + \max_{a\le x\le b}|\eta'(x)|\right\} \le \varepsilon,$$

$$\Phi(\alpha) = J[\tilde{y}+\alpha h(x)] \geq J[\tilde{y}] = \Phi(0),$$

bo'ladi. Demak, bu $\Phi(\alpha)$ differensiallanuvchi funksiya, $\alpha = 0$ da minimumga erishadi. Demak, $\Phi'(0)=0$, u holda ixtiyoriy $h(x) \in C^1[a,b]$ funksiya uchun quyidagi $\delta J[y,\eta(x)] = \Phi'(0) = 0$ tenglikka ega bo'lamiz.

1-izoh. *1-teorema amaliyotda foydalanish uchun noqulay hisoblanadi. Shuning uchun, integral ko'rinishidagi (2) funksionalning*

ekstremumini topish uchun zaruriy shartlarni aniqlash masalasi bilan shug'ullanamiz.

2-ta'rif. *Agar biror* $\varepsilon > 0$ *son uchun* $|y(x)-y_*(x)| \le \varepsilon$, $x \in [a,b]$, *tengsizlikni qanoatlantiruvchi joiz* $y(x)$, $x \in [a,b]$, *egri chiziqlar va joiz* $y_*(x)$, $x \in [a,b]$, *egri chiziq uchun* $J[y] \ge J[y_*]$ *tengsizlik bajarilsa, u holda* $y_*(x)$, $x \in [a,b]$, *egri chiziq (2) funksionalning (asosiy masalaning) kuchli minimali deb ataladi.*

Agar $J[y] \ge J[y_*]$ *tengsizlik* $|y(x)-y_*(x)| \le \varepsilon$, $x \in [a,b]$, *tensizlikdan tashqari* $|y'(x)-y_*'(x)| \le \varepsilon$, $x \in [a,b]$, *shartni ham qanoatlantiruvchi* $y(x)$, $x \in [a,b]$, *joiz egri chiziqlar uchun bajarilsa, u holda* $y_*(x)$, $x \in [a,b]$, *egri chiziq (2) funksionalning (asosiy masalaning) kuchsiz minimali deb ataladi.*

Shunday qilib, kuchli minimal unga o'zlarining qiymatlari bo'yicha yaqin bo'lgan barcha egri chiziqlar ichida eng yaxshisi bo'lib, kuchsiz minimal esa egri chiziqlarning ham o'z qiymatlari ham o'z hosilalarining qiymatlari bo'yicha yaqin bo'lganlari ichida eng yaxshisidir.

Ravshanki, kuchli minimal kuchsiz minimal ham bo'ladi, shuning uchun kuchsiz minimumning zaruriy shartlari kuchli minimumning ham zaruriy shartlari bo'ladi.

Kuchsiz minimallarni tekshirganda $y(x)$, $x \in [a,b]$, joiz egri chiziqning variatsiyasini $\delta y(x) = \varepsilon \cdot h(x)$, $x \in [a,b]$, ko'rinishda qarash qulay hisoblanadi, bu yerda ε – haqiqiy son. Bundan buyon $h(x)$, $x \in [a,b]$, funksiyani ham agar u $\delta y(x)$, $x \in [a,b]$, variatsiyaga mos kelsa, $y(x)$, $x \in [a,b]$,

egri chiziqning variatsiyasi deb ataymiz. Joiz egri chiziqning ta'rifidan kelib chiqadiki, $h(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya $h(x)\in C^1[a,b]$, $x\in[a,b]$, $h(a)=h(b)=0$, bo'lgandagina va faqat shu holdagina joiz $y(x)$, $x\in[a,b]$, egri chiziqning variatsiyasi bo'ladi.

Endi funksional variatsiyasi atamasi orqali kuchsiz minimumning zaruriy shartini quyidagi teorema orqali keltiraylik. Kuchsiz minimalning ta'rifidan kelib chiqadiki, $y_0(x)$, $x\in[a,b]$, joiz egri chiziq biror $M<\infty$, $\varepsilon>0$ sonlarda barcha $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, $|h(x)|\le M$, $|h'(x)|\le M$, $x\in[a,b]$, uchun $J[y_0+\varepsilon h]\ge J[y_0]$ tengsizlik bajarilganda va faqat shu holatdagina kuchsiz minimal bo'ladi.

Zarur bo'lgan hisoblashlar hajmi katta bo'lgani uchun $J[y_0+\varepsilon h]\ge J[y_0]$ tengsizlikni amaliyotda qo'llanish uchun noqulay. Nazariy izlanishlarning maqsadi tekshirish uchun qulay bo'lgan minimum shartlarni olishdan iborat.

2-teorema. *M to'plamdan olingan $y_0(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya*

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx,$$

funksionalga kuchsiz minimum berishi uchun bu funksiyada quyidagi shartlarni bajarilishi zarur:

a) funksionalning birinchi variatsiyasi nolga teng: $\delta J=0$, (statsionarlik sharti);

b) funksionalning ikkinchi variatsiyasi manfiy bo'lmaydi: $\delta^2 J\ge 0$, ixtiyoriy $h(x)$, $x\in[a,b]$, variatsiyada, $h(a)=h(b)=0$.

2-§. Eyler tenglamasi va uning integrallari

Variatsion hisob sodda masalasini yechishda oldingi paragrafda olingan ekstremumning zaruriy shartini tadbiq qilish uchun 1-paragrafdagi (2) ko'rinishdagi funksionallarning variatsiyasini hisoblashni bilish zarur. Variatsion hisob masalalarini o'rganishdan oldin biz variatsion hisob sodda masalasini o'rganishdan boshlaylik. Bizga variatsion hisobning sodda masalasi berilgan bo'lsin.

$y(x)$ funksiyaga qandaydir $\delta y(x)$ orttirma beraylik. $y(x)+\delta y(x)$ funksiya har doimgidek chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi uchun $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$ bo'lishi kerak. U holda 1- paragrafdagi (2) funksionalning orttirmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\Delta J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x)+\delta y(x),y'(x)+\delta y'(x))dx-\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[F(x,y(x)+\delta y(x),y'(x)+\delta y'(x))dx-F(x,y(x),y'(x))\right]dx=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{dF(x,y(x),y'(x))}{dy}\delta y(x)+\frac{dF(x,y(x),y'(x))}{dy'}\delta y'(x)\right\}dx+R,$$

bu yerda R – qoldiq had, u δy va $\delta y'$ larga nisbatan cheksiz kichik miqdor. Demak, biz quyidagi ifodaga ega bo'ldik

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{dF(x,y(x),y'(x))}{dy}\delta y(x)+\frac{dF(x,y(x),y'(x))}{dy'}\delta y'(x)\right\}dx, \qquad (3)$$

bu $J[y]$ funksional orttirmasining bosh qismini ifodalaydi, ma'lumki, bu ifoda funksional variatsiyasi (ya'ni differensial).

1-teoremaga ko'ra, agar $y(x)$ funksiya variatsion hisob sodda masalasining yechimi bo'lsa, u holda ixtiyoriy joiz $\delta y(x)$ variatsiya

uchun $J[\bar{y},\eta(x)]=0$ bo'lishi zarur.

Endi $(\delta y)'=\delta y'$ va $\delta y\big|_{x=x_0}=y'(x_0)-\bar{y}(x_0)=0$ $\delta y\big|_{x=x_1}=y'(x_1)-\bar{y}(x_1)=0$ tengliklarni e'tiborga olib, $\delta y'$ qatnashgan ikkinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallaymiz, albatta bu qonuniy, chunki quyidagi

$$\frac{d}{dx}\frac{dF(x,y(x),y'(x))}{dy'}=\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''\right]$$

ifoda $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiya bo'ladi, shuning uchun, uni integrallab,

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'dx=\left[F_{y'}\delta y\right]_{x=x_0}^{x=x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\delta y(x)\frac{d}{dx}F_{y'}dx,$$

tenglikka ega bo'lamiz, bundan

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'dx=-\int_{x_0}^{x_1}\delta y(x)\frac{d}{dx}F_{y'}dx,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Qaralayotgan variatsion hisob sodda masalasida barcha joiz egri chiziqlar tayinlangan chegaraviy shartlardan o'tadi. shu sababli quyidagi

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}\delta ydx,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bundan kelib chiqadiki, funksionalning ekstremumi, δy va $\delta y'$ kichik miqdorlar bo'lganda, δJ variatsiyaning ishorasi bilan aniqlanadi. Ammo δJ variatsiya δy va $\delta y'$ kichik miqdorlar hisobiga turli ishoraga ega ham bo'lishi mumkin, shuning uchun integralning qiymati nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\delta ydx=0 \qquad (4)$$

bu ifoda $J[y]$ funksionalning ekstremumga erishishi uchun zaruriy shart bo'ladi.

Shunday qilib, biz quyidagi teoremani o'rinli ekanligini keltirib chiqardik:

3-teorema. *Aytaylik,* $F(x,y,p)$ *– ikki marta ixtiyoriy* $x\in[a,b]$ *va ixtiyoriy* $(y,p)\in R^2_{y,p}$ *– o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsin. Agar ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi* $y(x)$ *funksiya variatsion hisob sodda masalasining yechimi bo'lsa, u holda* $y(x)$ *funksiya* $[x_0,x_1]$ *oraliqda*

$$\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

Eyler tenglamasini qanoatlantirishi zarur.

Oxirgi (4) tenglikni soddalashtirish uchun Lagranj lemmasini qo'llaymiz, natijada quyidagi

$$\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0. \qquad (5)$$

ikkinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo'lamiz Bu tenglama *Eyler tenglamasi* deb ataladi. Eyler tenglamasining integral egri chiziqlari $y=y(x,C_1,C_2)$ *ekstremallar* deb ataladi. Bu tenglama 1744 yilda L.Eyler tomonidan topilgan bo'lib, variatsion hisobda markaziy rolni o'ynaydi. Uning muhimligi shundaki, u tenglama yordamida funksional ekstremumga erishishi mumkin bo'lgan funksiyani aniqlanishidadir. (2) funksional faqat Eyler tenglamasini qanoatlatiruvchi ekstremallardagina ekstremumga erishadi.

Shunday qilib, biz variatsion hisobning sodda masalasi uchun

kuchsiz minimumning asosiy zaruriy sharti Eyler tenglamasi yordamida ifodalanishini ko'rib o'tdik.

Biz yuqorida asosiy zaruriy shartni Lagranj lemmasini qo'llash orqali keltirib chiqardik. Shuni alohida ta'kidlash lozimki, Lagranj lemmasini qo'llanilganda $y(x)$ funksiyadan ikkinchi tartibli uzluksiz hosilasini mavjud bo'lishligini talab etadi. Dyubua -Reymon lemmasini qo'llanilganda esa bunday cheklovchi faraz talab qilinmaydi. Biz ushbu holni ko'rib o'taylik. Quyidagi $N(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F}{\partial y}dx$ belgilashni kiritamiz. U holda $(\delta y)'=\delta y'$ va $\delta y\big|_{x=x_0}=y(x_0)-y(x_0)=0$ $\delta y\big|_{x=x_1}=y(x_1)-y(x_1)=0$ tengliklarni e'tiborga olib, bo'laklab integrallaymiz, natijada quyidagi

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{dN}{dx}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right\}dx=N\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-N\right\}\delta y\,dx=0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Endi Dyubua – Reymon lemmasini qo'llab, $[x_0,x_1]$ kesmada

$$\frac{\partial F}{\partial y'}-N\equiv const \qquad (6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Yuqoridagi belgilashni hisobga olib, qaysiki $J[y]$ funksionalga kuchsiz minimum beruvchi $y(x)$ funksiya $[x_0,x_1]$ kesmada

$$\frac{\partial F}{\partial y'}-N\equiv const$$

tenglamani qanoatlantirishi zarurligiga ishonch hosil qilamiz. (6) tenglama *Eyler tenglamasining integral ko'rinishi* deb ataladi.

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\equiv\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F}{\partial y}dx+const,$$

ayniyatni x bo'yicha differensiallab, quyidagi Eyler

$$\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

tenglamasini olamiz.

Shunday qilib, quyidagi teoremani o'rinli ekanligini o'rnatdik.

4-teorema. *M sinfdan olingan $y(x)$ funksiya $J[y]$ funksionalga kuchsiz minimum berishi uchun u (5) Eyler tenglamasini qanoatlantirishi zarur.*

Aytib o'tganimizdek, Eyler tenglamasi - bu zaruriy shartni beradi, lekin, umuman aytganda yetarli emas. Biroq, qator hollarda Eyler tenglamasi qo'yilgan variatsion masalaga har tomonlama javob berishga qodir. Agar $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ ifoda aynan noldan farqli bo'lsa, u holda Eyler tenglamasi ikkinchi tartibli differensial tenglamani aks ettiradi. Ayni paytda ekstremal ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lmasligi mumkin. Quyidagi teorema ekstremal $C^2[x_0,x_1]$ sinfga tegishli bo'lishi uchun F funksiyaga qo'yilgan shartni ifodalaydi.

5-teorema (Gilbert). *Aytaylik, $y(x)$ (5) Eyler tenglamasining yechimi bo'lsin. Agar $F(x,y,y')$ funksiya ikkinchi tartibgacha xususiy hosilaga ega bo'lsa, u holda $F_{y'y'}(x,y,y')\neq 0$ bo'lgan barcha (x,y) nuqtalarda $y'(x)$ mavjud va uzluksiz bo'ladi.*

(5) Eyler tenglamasida $y(x)$ ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi deb faraz qilinganda Eyler tenglamasini umumiy holda y o'zgaruvchiga nisbatan ikkinchi tartibli chiziqsiz differensial tenglama ko'rinishida ifodash mumkin:

$$\frac{dF}{dy} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0,$$

yoki

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0, \tag{7}$$

Agar hamma joyda $F_{y'y'}(x,y,y') \neq 0$ bo'lsa, u holda Eyler tenglamasini $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ qo'shimcha shartli $y'(x) = \varphi(x,y,y')$ ko'rinishdagi differensial tenglamani yechishga keltiriladi. Bunday masalalar differensial tenglamalar nazariyasida *chegaraviy masalalar* deb ataladi. $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ chegaraviy shart ostida $y'(x) = \varphi(x,y,y')$ tenglamaning yechimini mavjudligi haqidagi muammoni odatdagi differensial tenglamalar uchun aytilgan mavjudlik haqidagi teoremaga keltirib bo'lmaydi (Koshi masalasi yechimini mavjudligi). Chegaraviy masalalarning xususiyatiga bog'liq holda yechimlar to'plami, bo'sh, cheksiz, chekli va yagona yechimni o'z ichiga olishi mumkin.

Chegaraviy masalalar yechimining mavjudligi haqidagi muammo umuman olganda yetarli darajada murakkab bo'lishi mumkin. Biroq, qator xususiy hollar borki, Eyler tenglamasi to'la integrallanishi mumkin. Bunday hollar (2) funksional integrantining tuzilishi va xususiyatiga bog'liq bo'ladi (eslatib o'tamiz: integral ostidagi $F(x,y,y')$ funksiya, funksionalning integranti deyiladi).

(7) tenglamaning chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $y(x)$ funksionalni minimallashtiruvchi funksiya bo'ladi.

6-teorema (Bernshteyn). *Quyidagi*

$$y'(x) = \varphi(x,y,y') \tag{8}$$

tenglamaga ega bo'laylik. Agar $\varphi(x,y,y'), \varphi_y(x,y,y'), \varphi_{y'}(x,y,y')$ funksiyalar har qanday chekli y' uchun har bir chekli (x,y) nuqtalarda uzluksiz bo'lsa va agar shunday $k>0$ o'zgarmas va tekislikning chekli chegaralangan qismida shunday $\alpha = \alpha(x,y) \geq 0$, $\beta = \beta(x,y) \geq 0$, funksiyalar

$$\varphi_{y'}(x,y,y') > k, \tag{9}$$

$$\left|\varphi(x,y,y')\right| \leq \alpha y'^2 + \beta, \tag{10}$$

mavjud bo'lsa, u holda tekislikning turli absissalarga $(a \neq \beta)$ ega bo'lgan ixtiyoriy ikkita (a,A) va (b,B) nuqtasidan (8) tenglamaning bitta va faqat bitta $y = y(x)$ integral egri chiziq o'tadi.

1-misol. Tekislikning turli absissali ikkita nuqtasidan quyidagi funksionalning

$$J[y(x)] = \int e^{-2x^2}(y'^2 - 1)dx,$$

bitta va faqat bitta ekstremali o'tishi isbotlansin.

Yechish. Berilgan funksional uchun Eyler tenglamasi $y''(x) = 2y(1+y'^2)$ ko'rinishda bo'ladi. Bu misolga yuqoridagi teoremani qo'llasa bo'ladi. Haqiqatan, berilgan hol uchun

$$\varphi(x,y,y') = 2y(1+y'^2) \quad \text{va} \quad \varphi_{y'}(x,y,y') = 2(1+y'^2) \geq 2 = k.$$

So'ngra,

$$\left|\varphi_y(x,y,y')\right| = \left|2(1+y'^2)\right| \leq 2|y|y'^2 + 2|y|,$$

bo'lgani uchun $\alpha = \beta = 2|y| \geq 0$ bo'ladi.

2-misol. Tekislikning turli absissali har qanday ikkita nuqtasi orqali

$$J[y]=\int\left(y'^2+\sqrt{1+y'^2}\right)dx,$$

funksionalning ekstremalini o'tkazib bo'lmasligi ko'rsatilsin.

Yechish. Berilgan funksional uchun Eyler tenglamasi

$$y'(x)=2y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} \tag{11}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda (10) shart bajarilmaganligi sababli yuqoridagi teoremani tadbiq qilib bo'lmaydi. Biroq bundan, tekislikning turli absissali har qanday ikkita nuqtasi orqali ekstremal o'tkazib bo'lmasligi kelib chiqmaydi ($\varphi(x,y,y')$ funksiya y' bo'yicha x ning ikkinchi darajasiga nisbatan tez o'sadi). (11) tenglamada $y=p,\ y'=p\frac{dp}{dy}$, parametr kiritish orqali quyidagi

$$p\frac{dp}{dy}=2y(1+p^2)^{\frac{3}{2}},\quad \text{yoki}\quad \frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=2ydy,$$

tenglamaga kelamiz va uni integrallash orqali

$$-\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}=y^2-C,\quad \text{yoki}\quad (C-y^2)\sqrt{1+p^2}=1,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-(y^2-C)}}{y^2-C}, \tag{12}$$

bu yerda C – haqiqiy o'zgarmas, (12) ifodada masalan, y ning $0\le x\le b$, bu yerda $b>\sqrt{2}$, shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun C – o'zgarmasning hech qanday joiz qiymatlarida (12) ifodaning o'ng qismini haqiqiy bo'lmasligini tekshirib ko'rish qiyin emas.

3-misol. Har qanday (8) ko'rinishdagi tenglama biror

$$J[y(x)]=\int F(x,y,y')dx$$

funksional uchun Eyler tenglamasi bo'lishligi isbotlansin.

a) $F(x,y,y')$ funksiya $\varphi(x,y,y')$ funksiya bo'yicha qanday aniqlanadi?

b) ekstremallari $y=C_1x+C_2$ to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan barcha funksionallar topilsin;

c) ekstremallari barcha $y=C_1x+C_2x^2$ parabolalardan iborat bo'lgan funksional topilsin.

Yechish.

$$\frac{\partial^2F}{\partial y'^2}\cdot y''+\frac{\partial^2F}{\partial y\partial y'}\cdot y'+\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0, \tag{13}$$

Eyler tenglamasi (8) tenglama bilan ustma-ust tushuvchi funksionalni izlash bilan shug'ullanamiz. Bu x,y,y' o'zgaruvchilar bo'yicha

$$\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial^2F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2F}{\partial y\partial y'}\cdot y'-\frac{\partial^2F}{\partial y'^2}\cdot\varphi(x,y,y')=0,$$

ayniyat o'rinli bo'lishi kerakligini anglatadi. Bu ayniyatni y' bo'yicha dif-ferensiallab,

$$\frac{\partial^2F}{\partial y'\partial y\partial x}+\frac{\partial^2F}{\partial y'\partial y\partial y'}\cdot y'+\frac{\partial^2F}{\partial y'\partial y'\partial y'}\cdot\varphi(x,y,y')+\frac{\partial^2F}{\partial y'\partial y'}\cdot\varphi_{y'}(x,y,y')=0,$$

tenglamaga ega bo'lamiz. $u=\frac{\partial^2F}{\partial y'\partial y'}$ deb olib, u funksiyaga nisbatan xususiy hosilali

$$\frac{\partial u}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\varphi(x,y,y')\cdot\frac{\partial u}{\partial y'}+\frac{\partial\varphi(x,y,y')}{\partial y'}\cdot u=0, \tag{14}$$

differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, funksionalni izlash, ya'ni $F(x,y,y')$ funksiyani qidirish (14) xususiy hosilali chiziqli

differensial tenglamani integrallashga keltiriladi.

Endi ikkinchi masala bilan shug'ullanamiz. Bu holda Eyler tenglamasi $y'=0$ ko'rinishga ega bo'lishi kerak va u funksiya uchun (14) tenglamaga ko'ra,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (15)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallaymiz. Xarakteristik tenglamasi

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{y'}=\frac{dy'}{0}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu sistemani integrallab,

$$y'=C_1,\quad y=C_1x+C_2,$$

yechimlarni olamiz. Bundan $C_2=y-xy'$ tenglikni olamiz. Shuning uchun (15) tenglamaning yechimi

$$u(x,y,y')=\Phi(y',y-xy'),$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $\Phi(y',y-xy')$ – o'zining barcha o'zgaruvchilari bo'yicha differensiallanuvchi funksiya. Bu yerdan

$$F(x,y,z)=\alpha(x,y)+z\beta(x,y)+\int_a^x(z-t)\Phi(t,y-tx)dt, \qquad (16)$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerda $\alpha(x,y)$ va $\beta(x,y)$ – lar o'zining barcha argu-mentlari bo'yicha

$$\frac{\partial\alpha(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\beta(x,y)}{\partial x}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiyalar. Yechimdan ko'rinib turibdiki, (8) Eyler tenglamasi bo'ladigan cheksiz ko'p variatsion masalalar mavjud ekan. Masalaning c) bandini yechimini

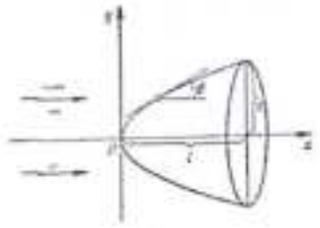
topishni o'quvchining e'tiboriga havola etamiz.

4-misol (oqimga eng kam qarshilik). Eng kichik qarshilik bilan gaz oqimida harakatlanayotgan qattiq jismni shaklini aniqlang. Oddiylik uchun aylanma jismni qaraymiz (18- rasm).

Yechish. Gazning zichligini yetarli darajada va molekulalar jism sirtidan oynadek akslanadi deb hisoblab, normal bosimni tashkil etuvchisi (komponenti) uchun quyidagi

$$p=2\rho v^2\sin^2\theta$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda ρ – gazning zichligi, v – jismga nisbatan gazning tezligi, θ – tezlik va uning tangensli tashkil etuvchisi orasidagi burchak. Bosim sirtga perpendikulyar, shuning uchun, halqa eniga $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ va $y(x)$ radiusga ta'sir etuvchi kuchning Ox o'qi bo'yicha tashkil



18 - rasm

etuvchini $dF=2\rho v^2\sin^2\theta[2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}]\sin\theta dx$ ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. O'qning musbat yo'nalishiga ta'sir etuvchi to'la kuch

$$F=\int_a^b 4\rho v^2\sin^2\theta\cdot y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

ifodaga teng. Masalani soddalashtirish uchun

$$\sin\theta=\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}=y',$$

deb faraz qilamiz. U holda qarshilik

$$F=4\rho v^2\int_a^b y'^2y dx \qquad (17)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Demak, masala quyidagidan iborat:

$$y(0)=0,\quad y(l)=R \tag{18}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi shunday $y(x)$ funksiyani topishimiz kerakki, natijada (17) integral mumkin bo'lgan eng kichik qiymatni qabul qilsin. (17) funksional uchun Eyler tenglamasi

$$y''-3\frac{d}{dx}(yy')=0 \tag{19}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (18) chegaraviy shartga ko'ra, $y=0$ xususiy yechimni qabul qilish mumkin emas. (19) Eyler tenglamasini

$$y''+3yy'y''=0 \tag{20}$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. (20) tenglamaning ikkala tomonini y' ga ko'paytirib, tenglamaning chap tomoni $\left(y'(x)y(x)\right)'$ ekanligini payqaymiz. Uni integrallab, $y'(x)y(x)=C_1$ tenglikni olamiz. Bundan

$$y'=\frac{C_1}{\sqrt[3]{y}} \quad \text{va} \quad y=(C_1x+C_2)^{\frac{1}{3}} \tag{21}$$

ifodalarni topamiz. (18) chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1=\frac{R^{\frac{1}{3}}}{l}$, $C_2=0$, bundan $y=R\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$, ekstremalga ega bo'lamiz, ya'ni jismning qarshiligi minimum bo'ladigan oxirgi nuqtalari bilan berilgan kontur $\frac{3}{4}$ darajali paraboladan iborat bo'ladi.

2-izoh. *1. (9) tenglamani quyidagicha yozish mumkin*

$$y''=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot y'}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}. \tag{22}$$

lekin barcha funksionallar uchun (xos funksionallardan tashqari) $F_{y'y'}(x,y,y')$ funksiya aynan noldan farqli bo'ladi, alohida nuqtalarda nol bo'lishi mumkin. Bu nuqtalarni chigirib tashlab, (22) tenglama bo'yicha ikkinchi tartibli hosilaning qiymatini hisoblash mumkin. Shunday qilib, xosmas funksionalning ekstremali doimo ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan silliq chiziqlardan iborat bo'ladi ekan. Ekstremum berishi mumkin bo'lgan egri chiziqlarning sinishi alohida nuqtalarda bo'lishi mumkin, bu yerda $F_{y'y'}(x,y,y')=0$ funksiya yoki $F(x,y,y')$ funksiyaning o'zi uzilishga ega bo'lishi mumkin. Alohida nuqtalarni chiqarib yuborish hisobiga ekstremum doimo silliq egri chiziqda bo'lishi mumkin.

2. *Ekstremallar gohida maksimumga ham minimumga ham erishtirmasligi mumkin, differensial hisobdagi singari hosila nolga aylanadigan nuqta ekstremum bo'lmasligi mumkin, masalan, bu sinish nuqtasi bo'ladi. Biroq, Eyler tenglamasi hech bir funksiyada bajarilmasa, u holda bu bo'lakli-silliq funksiyalar sinfida berilgan funksionalni ekstremumi mavjud emasligini ko'rsatadi. Masalan,*

$$J[y(x)]=\int_0^1 y\,dx,$$

funksional uchun Eyler tenglamasi $1=0$ ko'rinishga ega bo'ladi va uni hech qanday funksiya qanoatlantirmaydi. Bu tabiiy, chunki bu integralning mumkin bo'lgan eng katta qiymati ∞ (cheksiz)ga teng, eng

kichigi $-\infty$ (minus cheksiz)ga teng bo'ladi, ekstremum esa yo'q. Bundanda murakkab, qachonki, ekstremumni darhol aniqlash qiyin bo'lgan hollarda Eyler tenglamasi bunday hollarni qo'shimcha tadqiq qilish uchun imkon beradi.

Asosiy (2) funksionalni ekstremumini ta'minlovchi egri chiziqni topish uchun Eyler tenglamasini integrallaymiz va tenglamani umumiy yechimida ishtirok etuvchi ikki ixtiyoriy o'zgarmasni chegaraviy $y(a)=y_0, y(b)=y_1$, shartlardan aniqlaymiz. Aytish lozimki, faqat chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremallardagina funksional ekstremum erishishi mumkin. Biroq, funksiyalarni ekstremumga tadqiq qilgani singari, ekstremum (maksimum yoki minimum) qanday tavsifga (xarakterga) ega va u haqiqatdan amalga oshirilayotganligini bilish uchun yechimni qo'shimcha tahlil qilish talab etiladi. Bunda ekstremumning yetarli shartlaridan foydalanish kerak bo'ladi. Quyidagi

$$\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad y(a)=y_0, y(b)=y_1,$$

chegaraviy masalani eslatib o'tamiz. Mazkur masala har doim ham yechimga ega bo'lavermaydi, agar yechimi mavjud bo'lsa ham u yagona bo'lmasligi mumkin.

Ko'plab variatsion masalalarda yechimning mavjudligi masalaning geometrik yoki fizik ma'nosidan olinishi ravshan, agar chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi Eyler tenglamasining yechimi yagona bo'lsa, u holda bu yagona ekstremal qaralayotgan variatsion masalaning yechimi bo'lishligini aytib o'tish lozim.

3-izoh. *Agar chegaraviy masala Eyler tenglamasi uchun yechim-*

ga ega bo'lsa, bu funksionalning ekstremumi mavjudligini anglatmaydi, ekstemal bu – funksional ekstremumga erishishi mumkin bo'lgan egri chiziq.

5-misol. Qanday egri chiziqda

$$J[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2-y^2)dx, \quad y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

funksional ekstremumga erishadi?

Yechish. Eyler tenglamasi orqali berilgan funksionalning ekstremumini topamiz. Eyler tenglamasi $y''+y=0$, ko'rinishda bo'ladi, uning umumiy yechimi $y=C_1\cos x+C_2\sin x$, bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1=0, C_2=1$, o'zgarmaslarni topamiz. Bundan berilgan funksional $y=\sin x$ egri chiziqda ekstre-mumga erishadi.

6-misol. Qanday egri chiziqda

$$J[y(x)]=\int_0^1(y''^2+12xy)dx, \quad y(0)=0, y(1)=1,$$

funksional ekstremumga erishadi?

Yechish. Eyler tenglamasi $y^{IV}=6x$ ko'rinishda bo'ladi, uning umumiy yechimi $y=x^5+C_1x+C_2$, bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1=0, C_2=0$, o'zgarmaslarni topamiz. Bundan berilgan funksional $y=x^5$ egri chiziqda ekstremumga erishadi.

Yuqorida keltirilgan ikki misolda Eyler tenglamasi oson integrallandi, ikkinchi tartibli differensial tenglama yakuniy ko'rinishda kamdan kam hollarda integrallanuvchi bo'lganligi sababli, buday holat doim ham bo'lavermaydi. Shuning uchun, Eyler tenglamasini integrallanuvchi sodda hollarini ko'rib o'taylik.

Eyler tenglamasining integrallari. Eyler tenglamasi har doim ham kvadraturalarda integrallanmaydi. Shuning uchun, Eyler tenglamasini qanday hollarda integrallash mumkin ekanligini aniqlash juda muhim. Keling, Eyler tenglamasi integrallanuvchi bo'lishligining ayrim sodda hollarini ko'rib o'taylik.

Birinchi hol. Integrant y' ga bog'liq emas, ya'ni $F = F(x,y)$. Bu holda $F_{y'} = 0$ bo'lganligi sababli Eyler tenglamasi

$$F_y(x,y) = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi, ya'ni, $y(x)$ noma'lum funksiyaga nisbatan algebraik tenglamadan iborat bo'ladi. Bu tenglamaning yechimi, ya'ni, ekstremal ixtiyoriy, o'zgarmaslarni o'z ichiga olmaydi. Shuning uchun, umuman olganda $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ chegaraviy shartlarni qanoatlantirmaydi. Shu sababli qaralayotgan variatsion masala yechimga ega emas. Faqat kamdan-kam hollardagina ekstremumga erishish mumkin bo'lgan $y(x,y) = 0$ egri chiziq mavjud va u $A(x_0,y_0), B(x_1,y_1)$ nuqtalardan o'tadi.

7-misol. $J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y)dx, \quad y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$ funksionalning ekstremali topilsin.

Yechish. Eyler tenglamasi $y = x$ ko'rinishga ega, u chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi, u holda $y = x$ to'g'ri chiziqda $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y)dx$ integral ekstremumga erishishi mumkin. Boshqa chegaraviy shartlarda, masalan, $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ da $y = x$ ekstremal $(0,0), (\frac{\pi}{2}, 0)$ chegaraviy

nuqtalardan o'tmaydi. Shuning uchun, ushbu chegaraviy shartlarda variatsion masala yechimga ega emas.

8-misol. $J[y] = \int_0^1 y\,dx$ funksionalni $y(0) = y_0, y(1) = y_1$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Qaralayotgan funksionalning $3y^2 = 0$ tenglamasi yagona $y(x) = 0$ yechimga ega bo'ladi. Agar y_0 va y_1 sonlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda funksional $C^1[a,b]$ to'plamda qo'yilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremalga ega bo'lmaydi.

9-misol. Qanday egri chiziqda

$$J[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)y\,dx, \quad y(1) = 1, y(3) = 4\frac{1}{2},$$

funksional ekstremumga erishadi?

Yechish. Integrant $F(x,y,y') = (3x - y)y$ bo'lgani uchun Eyler tenglamasi $3x - 2y = 0$ ko'rinishda bo'ladi, uning yechimi $y = \frac{3}{2}x$ bo'ladi. $y = \frac{3}{2}x$ ekstremal $y(1) = 1$ chegaraviy shartni qanoatlantirmaydi. Shuning uchun, variatsion masala yechimga ega emas.

Ikkinchi hol. Integrant y' ga chiziqli bog'liq, ya'ni

$$F(x,y,y') = P(x,y) + Q(x,y)y',$$

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')dx = \int_a^b \left[P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx}\right]dx,$$

bu holda Eyler tenglamasi

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y' - \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

$$=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y'-\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y'=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0,$$

bundan

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu olingan tenglama ham birinchi holga o'xshab, chekli tenglama, lekin differensial tenglama emas. $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$, tenglama bilan aniqlanuvchi egri chiziq umuman olganda olganda chegaraviy shartlarni qanoatlantirmaydi, shu sababli variatsion masala uzluksiz funksiyalar sinfida yechimga ega bo'lmaydi. Agar xOy tekislikning biror D sohasida $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$, bo'lsa, u holda $F(x,y,y')=P(x,y)+Q(x,y)y'$ ifoda to'la differensial bo'ladi va

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx=\int_{(a,y_0)}^{(b,y_1)}\left[P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}\right]dx;$$

funksional integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi (barcha joiz egri chiziqlarda $J[y]=const$ bo'ladi), funksionalning qiymati joiz egri chiziqda o'zgarmas. Va nihoyat, variatsion masala o'z ma'nosini yo'qotadi.

Bu hol uchun qo'shimcha ravishda yana quyidagi mulohazalarni aytish mumkin. Bu holdagi $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$, Eyler tenglamasi $F-$ funksiyaning to'la differensiallik sharti bo'ladi, bunda $P=\frac{\partial G}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial G}{\partial y}=0$, bu yerda $G(x,y)-$ funksiyani ikki marta uzluksiz

differensiallanuvchi funksiya deb hisoblaymiz. Demak, biz Eyler tenglamasini aynan bajarilishi uchun zaruriy va yetarli shartni oldik: $F=\frac{d}{dx}G(x,y)$. Bundan quyidagi foydali natijaga ega bo'lamiz.

7-teorema. *Aytaylik,*

$$I=\int_a^b F(x,y,y')dx \quad va \quad I=\int_a^b H(x,y,y')dx,$$

funksionallar berilgan bo'lsin, bu yerda F va H ikki marta uzluksiz differen-siallanuvchi funksiyalar. I va J integrallar uchun Eyler tenglamasi ekvivalent bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki

$$H-F=\frac{d}{dx}G(x,y)$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

10-misol. $J[y(x)]=\int_a^b(y^2+2xyy')dx$, $y(a)=A, y(b)=B$, funksional ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. Bu yerda F y' ga chiziqli bog'liq:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2y, \quad va \quad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0,$$

ega bo'lamiz. Demak, integral ostidagi y^2+2xyy' ifoda to'la differensial. Shu sababli

$$J[y(x)]=\int_a^b(y^2+2xyy')dx=\int_{(a,A)}^{(b,B)}d(xy^2)=xy^2\Big|_{x=a}^{x=b}=bB^2-aA^2,$$

integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi. Demak, (a,A) va (b,B) nuqtalardan o'tuvchi egri chiziq $y(x)$ qanday bo'lishidan qat'iy nazar biz uni integrallaganimiz yo'q. U holda variatsion masala ma'noga ega

emas.

11-misol.

$$J[y(x)]=\int_0^1 (y'^2+x^2y)\,dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=a,$$

funksionalning ekstremumi topilsin.

Yechish. Eyler tenglamasi $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$, yoki $y-x=0$. Birinchi chegaraviy shartni $y(0)=0$ qanoatlantiradi, lekin ikkinchi chegaraviy $y(1)=a$ shartni faqat $a=1$ bo'lgandagina qanoatlantiradi. Agarda $a\neq 1$ bo'lsa, u holda chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremal mavjud emas.

12-misol. $J[y(x)]=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[y^2\cos x+2yy'\sin x\right]dx$ funksionalning $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1, y\left(\frac{\pi}{6}\right)=2,$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Integrant

$$F(x,y,y')=y^2\cos x+2yy'\sin x=P(x,y)+Q(x,y)y',$$

ko'rinishiga ega,

$$P(x,y)=y^2\cos x,\quad Q(x,y)=2y\sin x,\quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2y\cos x,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2y\cos x,$$

demak, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Eyler tenglamasi o'rinli bo'ladi. Integrant $y^2\sin x$ funksiyaning to'la differensiali. Funksionalning qiymati integrallash yo'liga bog'liq emas,

$$J=\int_{(\frac{\pi}{6};1)}^{(\frac{\pi}{2};2)}\left[y^2\cos x+2yy'\sin x\right]dx=\int_{(\frac{\pi}{6};1)}^{(\frac{\pi}{2};2)}\left[d(y^2\sin x)\right]=y^2\sin x\Big|_{(\frac{\pi}{6};1)}^{(\frac{\pi}{2};2)}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

Demak, variatsion hisob masalasi ma'noga ega emas.

13-misol. $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y+xy')\,dx,\quad y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1,$ funksionalning ekstremumi topilsin.

Yechish. Bu yerda Eyler tenglamasi $1=1$ ayniyatga aylanadi. Integral ostidagi ifoda to'la differensial, biz qanday qilib integrallashimizdan qat'iy nazar integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi:

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} d(xy)=x_1y_1-x_0y_0.$$

Demak, variatsion masala ma'noga ega emas.

Uchinchi hol. Integrant faqat y' ga bog'liq, ya'ni $F=F(y')$. Bu holda Eyler tenglamasi $F_y=F_{yx}=F_{yy}=0$ bo'lganligi sababli

$$F_{y'y'}\cdot y''=0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdan $y''=0$ yoki $F_{y'y'}=0$. Agar $y''=0$ bo'lsa, u holda uning umumiy yechimi $y=C_1x+C_2$ ikki parametrli to'g'ri chiziqlarning oilasi bo'ladi. Agarda $F_{y'y'}(y')=0$ bo'lsa, bir yoki bir nechta haqiqiy ildizlarga $y'=k_i$ ega bo'ladi, u holda $y=k_ix+C$ bo'lib, yuqorida olingan ikki parametrli to'g'ri chiziqlarning $y=C_1x+C_2$ oilasiga kiruvchi bir parametrli to'g'ri chiziqlar oilasini olamiz. Shunday qilib, $F=F(y')$ bo'lgan holda ekstremal barcha mumkin bo'lgan $y=C_1x+C_2$ to'g'ri chiziqlar bo'ladi.

14-misol. $J[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad y(a)=A, y(b)=B,$ funksionalni ekstremumi topilsin. Bu funksional (a,A) va (b,B) nuqtalarni tutashtiruvchi yoy

uzunligini aniqlaydi. Bu geometrik masala berilgan nuqtalarni tutashtiruvchi eng qisqa chiziqni topish masalasiga keltiriladi.

Yechish. Eyler tenglamasi $y'=0$ bo'lib, uning umumiy yechimi $y=C_1x+C_2$ bo'ladi. $y(a)=A$, $y(b)=B$, chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal - bu (a,A) va (b,B) nuqtalarni tutashtiruvchi

$$y=\frac{B-A}{b-a}(x-a)+A$$

to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

15-misol. $A(x_0,y_0)$ nuqtadan $B(x_1,y_1)$ nuqtaga qandaydir $y=y(x)$ egri chiziq bo'ylab harakatlanishga sarflangan $t[y(x)]$ vaqt, agar tezlik $\frac{ds}{dt}=v(y')$ faqat y' hosilaga bog'liq bo'lsa, u holda u

$$t[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}dx,$$

funksionaldan iborat bo'ladi, bu yerda

$$\frac{ds}{dt}=v(y'),\quad dt=\frac{ds}{v(y')}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}dx,\quad t=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}dx.$$

Shu sababli, bu funksional ekstremallari to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi.

To'rtinchi hol. Integrant y ga bog'liq emas, ya'ni $F=F(x,y')$. Bu holda Eyler tenglamasi $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$. ko'rinishda bo'ladi, shu sababli $F_{y'}(x,y')=C_1$ *impuls* integrali ko'rinishdagi birinchi integralga ega bo'lamiz, chunki olingan birinchi tartibli tenglamada y qatnashmaydi. U holda tenglamani bevosita y' hosilaga nisbatan yechib,

integrallash mumkin bo'lgan yo'l bilan yoki unga mos parametr kiritish yo'li bilan yechish mumkin.

16-misol. $A(1,3)$ va $B(2,5)$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqlar ichidan shunday egri chiziqni topingki, natijada

$$J[y(x)]=\int_1^2 y'(1+x^2y')dx,$$

funksional ekstremumga erishsin.

Yechish. F y ga bog'liq emas, shuning uchun Eyler tenglamasi $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$ yoki $\frac{d}{dx}(1+2x^2y')=0$. ko'rinishga ega bo'ladi, bundan $1+2x^2y'=C_1$. U holda $y'=\frac{C_1}{2x^2}$. bo'ladi, shuning uchun $y=\frac{C_1}{x}+C_2$ bu yerda $C_1=\frac{1-C_2}{2}$. Shunday qilib, ekstremal giperbolalar oilasi bo'ladi. Endi berilgan nuqtalardan o'tuvchi ekstremalni ajratib olamiz. C_1,C_2 o'zgarmaslarni topish uchun chegaraviy shartlardan foydalanib, quyidagi sistemaga kelamiz

$$C_1+C_2=3,\ \frac{C_1}{2}+C_2=5.$$

va uni yechib, $C_1=-4, C_2=7$ larga ega bo'lamiz. Izlanayotgan ekstremal, $y=7-\frac{4}{x}$ ko'rinishda bo'ladi.

17-misol. $t[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx$ funksionalni qaraymiz, ($t[y(x)]$ — bir nuqtadan boshqa nuqtaga $y=y(x)$ egri chiziq bo'ylab harakatlanishga sarflangan vaqt, agar harakat tezligi $v=x$ bo'lsa, agar

$\frac{ds}{dt} = x$ bo'lsa, u holda $dt = \frac{ds}{x}$ va $t = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$ bo'ladi). Eyler tenglamasining birinchi integrali

$$F_{y'} = C_1, \quad \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Agar tenglamada $y' = tgt$ deb parametr kiritilsa, bu tenglama oson integrallanadi, u holda

$$x = \frac{1}{C_1}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1}\cdot\sin t, \text{ yoki } x = C_2 \sin t, \text{ bu yerda } C_2 = \frac{1}{C_1},$$

$$\frac{dy}{dx} = tgt, \quad dy = tgt \cdot C_2 \cdot \cos t \cdot dt = C_2 \cdot \sin t \cdot dt$$

bo'ladi. Integrallab, $y = -C_2 \cos t + C_3$ ifodani olamiz. Demak,

$$x = C_2 \sin t, \quad y - C_3 = -C_2 \cos t$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Bu yerdan t parametrni yo'qotish orqali markazi ordinata o'qida bo'lgan $x^2 + (y - C_3) = C_2^2$ aylanalar oilasini olamiz.

Beshinchi hol. Integrant x ga oshkor holda bog'liq emas, ya'ni $F = F(y, y')$, u holda, $F_y = 0$ bo'lganligi sababli Eyler tenglamasi

$$F_y - F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0,$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu olingan tenglamani ikkala tomonini y' hosilaga ko'paytirsak, u holda tenglamaning chap tomoni

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' \cdot F_{y'}\right) = 0$$

ko'rinishga kelishini ko'rish qiyin emas. Haqiqatda,

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' \cdot F_{y'}\right) = F_x \cdot x' + F_y \cdot y' - y' \cdot F_y - F_{y'x} \cdot y' - F_{y'y} \cdot y'y'' =$$

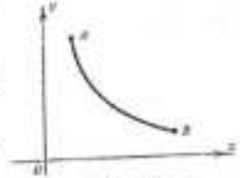
$$= y'\left(F_y - F_{y'x} \cdot y' - F_{y'y} \cdot y''\right).$$

Shu sababli, Eyler tenglamasi *energiya* integrali ko'rinishidagi birinchi integralga $F - y' \cdot F_{y'} = C_1$ ega bo'ladi, chunki bu birinchi tartibli differensial tenglama x o'zgaruvchini o'z ichiga olmaydi. Demak, bu tenglamani y' hosilaga nisbatan yechish yo'li bilan, o'zgaruvchilarni ajratish yo'li bilan yoki parametr kiritish yo'li bilan integrallash orqali yechish mumkin.

Bu ikkala (impuls va energiya integrali) atamalari klassik mexanikadan olingan. Bu yozilgan munosabatni isbot qilish uchun x bo'yicha differensiallash va Eyler tenglamasidan foydalanish yetarli.

18-misol (braxistoxrona haqidagi masala, 1-paragrafga qarang): vertikal tekislikning turli sathlarida berilgan A va B nuqtalarni shunday silliq chiziq bilan tutashtirish kerakki, boshlang'ich tezligi nol bo'lganda og'ir moddiy nuqta shu chiziq bo'ylab A nuqtadan va B nuqtaga eng qisqa vaqtda yetib kelsin (muhitning ishqalanishi va qarshiligini e'tiborga olmaymiz).

Yechish. Koordinata boshini A nuqtaga joylashtiramiz, Ox o'qini gorizontal, Oy o'qni vertikal pastga yo'naltiramiz.



19- rasm

Moddiy nuqtaning tezligi $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gv}$ ga teng bo'ladi, bu yerdan moddiy nuqtani $A(0,0)$ holatdan $B(x_1, y_1)$ holatga o'tkazish uchun sarf qilingan vaqtni topamiz:

$$J[y(x)]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx,\quad y(0)=0,\ y(x_1)=y_1$$

ekstremumini topish masalasiga kelib to'xtagan edik.

Funksional sodda ko'rinishdagi funksionallar toifasiga kirganligi tufayli, uning integral ostidagi ifodasi x o'zgaruvchiga bog'liq emas. u holda Eyler tenglamasi

$$\frac{d}{dx}\left(F-y'\cdot F_{y'}\right)=0,$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamaning birinchi integrali $F-y'\cdot F_{y'}=C_1$ yoki bizning holimizda

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C_1,$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerdan ma'lum soddalashtirishlardan so'ng

$$\frac{y}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C_1\ \text{ yoki }\ y(1+y'^2)=C_2,\quad C_2=\frac{1}{C_1^2},$$

ifodalarga ega bo'lamiz. t parametrni kiritib, $y=ctgt$ deb olamiz. u holda

$$y=\frac{C_2}{1+ctg^2t}=C_2\sin^2t=\frac{C_2}{2}(1-\cos 2t),$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_2\sin t\cdot\cos t\cdot dt}{ctgt}=2C_2\sin^2t\cdot dt=C_2(1-\cos 2t)dt,$$

bundan

$$x=C_2\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_1=\frac{C_2}{2}(2t-\sin 2t).$$

Bu ifodalardan izlanayotgan chiziqning parametrik ko'rinishdagi

$$x-C_1=\frac{C_2}{2}(2t-\sin 2t),\quad y=\frac{C_2}{2}(1-\cos 2t),$$

tenglamasiga ega bo'lamiz.

Agar parametrni $2t=t_1$ deb almashtirsak va $x=0, y=0$ bo'lganda $C_2=0$ bo'lishini e'tiborga olsak, odatdagi ko'rinishga ega bo'lgan sikloidalar oilasining tenglamasiga kelamiz

$$x=\frac{C_2}{2}(t_1-\sin t_1),\quad y=\frac{C_2}{2}(1-\cos t_1),$$

bu yerda $\frac{C_2}{2}$ – dumalovchi aylananing radiusi, sikloidaning $B(x_1,y_1)$ nuqta orqali o'tish shartidan aniqlanadi. Shunday qilib, braxistoxrona masalasining yechimi - *sikloida* bo'ladi (19-rasm).

19-misol. Eng kichik aylanma sirt haqidagi masala: chegaraviy nuqtalar bilan berilgan, absissa o'qi atrofida aylanishi natijasida eng kichik yuzali aylanma sirtni tashkil qiluvchi egri chiziq topilsin (20-rasm).

Yechish. Ma'lumki aylanma sirtnig yuzasi

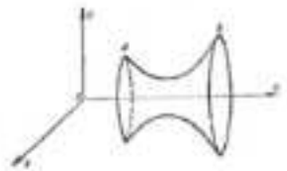
$$S[y(x)]=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

formula bilan aniqlanadi. Integrant faqat y va y' larga bog'liq bo'lganligi sababli, Eyler tenglamasining birinchi integrali

$$F-y'\cdot F_{y'}=C_1$$

ko'rinishga yoki mazkur holda

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$



20– rasm

ko'rinishda bo'ladi. Soddalashtirishlardan so'ng, $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$, tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglamani $y = sht$ almashtirishni qo'yib integrallasak, ancha sodda integrallanadi, unda $y = C_1 cht$ bo'ladi. Quyidagi

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 shtdt}{sht} = C_1 dt,$$

tenglamadan esa $x = C_1 t + C_2$ yechimga ega bo'lamiz.

Demak, izlanayotgan sirt tenglamasi parametrik ko'rinishga ega bo'lgan

$$x = C_1 t + C_2,$$

$$y = C_1 cht$$

chiziqlarni aylanishidan hosil bo'ladi. t parametrni yo'qotib, $y = C_1 ch\frac{x - C_2}{C_1}$ zanjir chiziqlarga ega bo'lamiz. qaysiki, aylanishi *katenoid* deb nomlanuvchi, sirtni hosil qiladi. C_1, C_2 o'zgarmaslar izlanayotgan chiziqni chegaraviy nuqtalardan o'tish shartidan aniqlaymiz (A va B nuqtalarni joylashishiga qarab, bitta, ikkita yoki bitta ham yechim bo'lmasligi mumkin).

20-misol. $J[y(x)] = \int_0^1 y(x)y'^2(x)dx$ funksionalning $y(0) = 1, y(1) = \sqrt[3]{4}$, chega-raviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Eyler tenglamasini tuzamiz. Integral ostidagi funksiya x o'zgaruvchiga bog'liq emas, ya'ni $F(x, y, y') = y^2 y'$. Eyler tenglamasi

$$F - y' \cdot F_{y'} = 2yy'^2 - 2yy'^2 = C_1$$

birinchi integralga ega bo'ladi yoki

$$F - y' \cdot F_{y'} = yy'^2 = C_1 = C, y' = \frac{dy}{dx} = \tau$$

almashtirish qilamiz, u holda $y\tau^2 = C$ $y\tau^2 = C$ ko'rinishga keladi. $y = \frac{C}{\tau^2}$ ni dy differensialini topamiz: $dy = -\frac{2C}{\tau^3}d\tau$. U holda $dx = \frac{dy}{\tau} = -\frac{2C}{\tau^4}d\tau$ bo'ladi. Bu yerdan

$$x = \frac{2C}{3\tau^3} + C_2, \quad \tau^3 = \frac{2C}{3(x - C_2)}, \quad y = \frac{C}{\tau^2}$$

ekanligidan Eyler tenglamasining quyidagi

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt[3]{\frac{2}{3}\frac{C}{(x - C_2)^2}}} = C\sqrt[3]{\frac{9}{4}\frac{(x - C_2)^2}{C}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot (x - C_2)^2 \cdot C},$$

umumiy yechimiga ega bo'lamiz. Chegaraviy shartlardan foydalanib, C_1, C_2 – o'zgarmaslarni topamiz

$$y(0) = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot C_2^2 \cdot C} = 1, \qquad y(1) = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot (1 - C_2)^2 \cdot C} = \sqrt[3]{4},$$

bulardan

$$\frac{9}{4} \cdot C_2^2 \cdot C = 1, \quad \frac{9}{4} \cdot (1 - C)^2 \cdot C = 4, \quad C = \frac{4}{9C_2^2}, \quad \frac{(1 - C_2)^2}{C_2^2} = 4, \quad 3C_2^2 + 2C_2 - 1 = 0.$$

Nihoyat, $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = 4$, qiymatlarga ega bo'lamiz. Bularni olib borib umumiy yechimga qo'ysak, izlanayotgan ekstremalning aniq

$$y_1(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^2} \quad \text{va} \quad y_2(x) = \sqrt[3]{(3x - 1)^2},$$

ko'rinishiga ega bo'lamiz.

21-misol. $J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 - y^2\right)dx$ funksionalning $y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Berilgan masalani ikki xil usul bilan yechamiz.

Yechish. 1-usul. Eyler tenglamasini tuzamiz.

$$F(x,y,y')=y^2-y'^2,\ F_y=2y,\ F_{y'}=-2y',\ \frac{d}{dx}(2y')=2y'',$$

bo'lgani uchun

$$F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}=2y-2y''=0 \quad \text{yoki} \quad y''-y=0.$$

Tenglamaning umumiy yechimini topamiz, buning uchun avvalo $\lambda^2-1=0$ xarakteristik tenglamaning $\lambda=\alpha\pm i\beta$ $(\alpha=0,\beta=1)$ ildizlarini topamiz. Shuning uchun, umumiy yechim

$$y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x,$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi chegaraviy shartlardan $C_1=1, C_2=0$ o'zgarmaslarni aniqlaymiz, u holda izlanayotgan ekstremal $y=\cos x$ bo'ladi.

2-usul. Integral ostidagi funksiya $F(x,y,y')=y^2-y'^2$ x o'zgaruvchiga bog'liq emas. Eyler tenglamasi birinchi integralga ega bo'ladi

$$F-y'\cdot F_{y'}=y^2-y'^2-y'(2y')=C_1 \quad \text{yoki} \quad y^2+y'^2=C_1=C^2.$$

Differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Buning uchun $y'=\frac{dy}{dx}=r$ deb almashtirish qilamiz, u holda bu yerdan $y^2=C^2-r^2$ va bundan $y=\sqrt{C^2-r^2}$, dy differensialni topamiz:

$$dy=-\frac{2r}{2\sqrt{C^2-r^2}}dr, \quad \text{biroq,} \quad dx=\frac{dy}{r}=-\frac{dr}{\sqrt{C^2-r^2}},$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ikkala tomonini integrallab, bu yerdan

$$x=-\arcsin\frac{r}{C}+C_1.$$

U holda

$$\arcsin\frac{r}{C}=C_1-x,\ \frac{r}{C}=\sin(C_1-x),\ r=C\cdot\sin(C_1-x)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shuning uchun Eyler tenglamasining umumiy yechimi

$$y=\sqrt{C^2-r^2}=\sqrt{C^2-C^2\sin^2(C_1-x)}=C\cos(C_1-x),$$

ko'rinishda bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1=1, C_2=0$, o'zgarmaslarni topamiz. Buларni olib borib umumiy yechimga qo'ysak, izlanayotgan ekstremal $y(x)=\cos x$ ko'rinishiga ega bo'ladi.

Endi variasion hisobning asosiy masalasiga (asosiy masalaning zaruriy shartiga) doir misollar keltiramiz.

22-misol. $J[y(x)]=\int_0^1(y^2+y'^2+2ye^x)dx$ funksionalning $y(0)=0, y(1)=0$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Eyler tenglamasini tuzamiz: $F(x,y,y')=y^2+y'^2+2ye^x$,

$$F_y(x,y,y')=2y+2e^x,\ F_{y'}(x,y,y')=2y',\ \frac{d}{dx}(2y')=2y'',$$

bo'lgani uchun $F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}=2y+2e^x-2y''=0$, yoki $y''-y=e^x$. Eyler tenglamasini umumiy yechimini topamiz. buning uchun avvalo $y''-y=0$ bir jinsli qismini umumiy yechimini aniqlaymiz. $\lambda^2-1=0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$, haqiqiy va har xil. Shuning uchun, yechim

$$y_u=C_1e^{x}+C_2e^{-x}=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Endi bir jinsli bo'lmagan dastlabki $y'' - y = e^x$ ko'rinishdagi tenglamani xususiy yechimini $y_1 = Axe^x$ ko'rinishda tanlaymiz, bu yerda A – noma'lum parametr. U holda

$$y_1' = Ae^x + Axe^x,\ y_1'' = 2Ae^x + Axe^x,$$

bo'ladi. Bularni olib borib tenglamaga qo'ysak, $2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x$ bo'ladi, bundan $A = \frac{1}{2}$, shuning uchun xususiy yechimning ko'rinishi $y_1 = \frac{1}{2}xe^x$ bo'ladi. Umumiy yechimni yozamiz $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$. C_1, C_2 – o'zgarmaslarni chegaraviy shartlardan aniqlaymiz

$$C_1 + C_2 = 0,\ C_1e + C_2e^{-1} + \frac{1}{2}e = 0.$$

Bu sistemadan

$$C_1 = -\frac{e^2}{2(e^2-1)},\ C_2 = \frac{e^2}{2(e^2-1)},$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bularni olib borib umumiy yechimga qo'ysak, izlanayotgan ekstremal

$$y = -\frac{e^2}{2(e^2-1)}e^x + \frac{e^2}{2(e^2-1)}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x,$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

23-misol. $J[y(x)] = \int_0^1 [4y(x) - y'^2(x) + 12xy']dx$ funksionalning $y(0) = 1, y(1) = 4$, chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Eyler tenglamasini tuzamiz.

$$F(x, y, y') = 4y - y'^2 + 12xy',\ F_y(x, y, y') = 4y,$$

$$F_{y'}(x, y, y') = -2y' + 12x,\ \frac{d}{dx}(-2y' + 12x) = -2y' + 12,$$

bo'lgani uchun

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}F_{y'} = 4 + 2y' - 12 = y' - 4 = 0,$$

yoki $y' = 4$. Hosil bo'lgan tenglamani ketma-ket integrallash orqali Eyler tenglamasini umumiy yechimini topamiz $y = 4x + C_1$, $y = 2x^2 + C_1x + C_2$. Chegaraviy shartlardan foydalanib, C_1, C_2 – o'zgarmaslarni topamiz $C_1 = C_2 = 1$, qiymatlarga ega bo'lamiz. Bularni olib borib umumiy yechimga qo'ysak, natijada izlanayotgan ekstremal $y(x) = 2x^2 + x + 1$, ko'rinishga ega bo'ladi.

24-misol. Qanday egri chiziqda

$$J[y(x)] = \int_1^2 [y'^2 - 2xy]dx,\ y(1) = 0, y(2) = -1,$$

funksional ekstremumga erishadi?

Yechish. Integrant $F(x, y, y') = y'^2 - 2xy$, bo'lgani uchun Eyler tenglamasi $y' + x = 0$ ko'rinishda bo'ladi, uning umumiy yechimi $y = -\frac{x^2}{6} + C_1x + C_2$, bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanib,

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{6},\quad 2C_1 + C_2 = \frac{2}{6},$$

bulardan $C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = 0$, o'zgarmaslarni topamiz. Bundan berilgan funksional $y = \frac{x}{6}(1 - x^2)$, egri chiziqda ekstremumga erishadi.

25-misol. Qanday egri chiziqda

$$J[y(x)] = \int_0^{2\pi} [y'^2 - y^2]dx,\ y(0) = 1, y(2\pi) = 1,$$

funksional ekstremumga erishadi?

Yechish. Integrant $F(x, y, y') = y'^2 - y^2$, bo'lgani uchun Eyler tengla-

masi $y''+y=0$ ko'rinishda bo'ladi, uning $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ umumiy yechimi bo'ladi, chegaraviy shartlardan foydalanib,

$$y=\cos x+C\sin x,$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas. Shunday qilib, qo'yilgan variatsion masala sanoqsiz yechimlar to'plamiga ega.

26-misol. $J[y(x)]=\int_{-1}^{1}y^2(1-y')^2dx$, $y(-1)=0$, $y(1)=1$, chegaraviy shartlarda o'zining nolga teng minimumiga

$$v(x)=\begin{cases}0, & agar\ x\le 0,\\ x, & agar\ x>0,\end{cases}$$

funksiyada erishadi. Funksiya $v(x)$ ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lmasada u funksiya Eyler tenglamasini qanoatlantiradi. Haqiqatan, $F(x,y,y')=y^2(1-y')^2$, bo'lganligi uchun, $y=v(x)$ deb, Eyler tenglamasini olamiz

$$2v(1-v')^2+\frac{d}{dx}[2v^2(1-v')]=0.$$

Lekin $v(x)$ funksiyaning ta'rifiga ko'ra, $[-1,1]$ oraliqda $F_{y'}=-2v^2(1-v')=0$, ifodaga ega bo'lamiz. Demak, $\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ va Eyler tenglamasi ikkinchi tartibga ega bo'lsada, $v''(x)$ mavjud emas. $v(x)$ funksiyani Eyler tenglamasiga olib borib qo'ysak, uni ayniyatga aylantiradi. Bu misolda $F_{y'y'}=2y^2$ ifoda Ox o'qining nuqtalarida nolga aylanadi, ekstremal $x=0$ nuqtada sinishga ega bo'ladi. Shuning uchun, $y=y(x)$ ekstremal $F_{y'y'}=0$ bo'lgan nuqtalardagina sinishga ega bo'ladi.

Bu bandda, misollarda variatsion hisob klassik masalasining yechimi bilan ekstremal orasidagi turli munosabatlarni qarab chiqamiz.

27-misol (joiz ekstremal mavjud, yagona va global ekstremum beradi). $J[y(x)]=\int_0^1 y'^2dx$ funksionalning $y(0)=1, y(1)=1$, chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Eyler tenglamasi $y''=0$ ko'rinishda bo'ladi. Tenglamaning umumiy yechimini topamiz, $y=C_1x+C_2$. Endi chegaraviy shartlardan $C_1=1, C_2=0$, o'zgarmaslarni aniqlaymiz, u holda izlanayotgan ekstremal $y^*=x$ ko'rinishda bo'ladi. Ekstremal masalaga global minimum beradi. Haqiqatan, $h(x)\in C_0^1[0,1]$ bo'lsin. U holda $y^*(x)+h(x)$ – masalada joiz funksiya bo'ladi va

$$J[y^*(x)+h(x)]-J[y^*(x)]=\int_0^1\left(y^{*\prime}(x)+h'(x)\right)^2dx-\int_0^1 y^{*\prime 2}(x)dx=$$

$$=2\int_0^1 h'(x)dx+\int_0^1 h'^2(x)dx=\int_0^1 h'^2(x)dx.$$

Ushbu misolda hamma narsa joyida. Keyingi misollarda turli xildagi murakkabliklar uchraydi.

28-misol (joiz ekstremal mavjud, yagona va global ekstremum beradi, lekin uzluksiz differensiallanuvchi emas).

$J[y(x)]=\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}y'^2dx$ (Gilbert misoli) funksionalning $y(0)=0, y(1)=1$, chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Eyler tenglamasi $\frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{2}{3}}y'\right)=0$, ko'rinishda bo'ladi, bundan $2x^{\frac{2}{3}}y'=C$, $y'=C2x^{-\frac{2}{3}}$. Tenglamaning umumiy yechimini topamiz, $y=C_1x^{\frac{1}{3}}+C_2$. Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yagona ekstremal

$y^* = x^{\frac{1}{3}}$ bo'ladi. Ravshanki, $y^*(x) \in C[0,1]$ bo'lganligi sababli ekstremal $C^1[0,1]$ sinfning funksiyasi bo'lmaydi. Shunga qaramay u chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi absolyut uzluksiz funksiya, masalaga global minimum berganda integral chekli bo'lishini ko'ramiz. Haqiqatan, har qanday $h(x)$ uchun bo'lsin

$$J[y^*(x)+h(x)]-J[y^*(x)]=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}\right)+h(x)\right)^2dx-$$

$$-\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}\right)^2dx=\int_0^1\frac{2}{3}h'(x)dx+\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}h'^2(x)dx\geq 0.$$

29-misol (Veyershtrass).

$$J[y]=\int_{-1}^{1}x^2y'^2dx,\quad y(-1)=-1,\quad y(1)=1,$$

funksionalni ko'rib chiqamiz. $[-1,1]$ kesmada $J[y]\geq 0$ ga egamiz, chunki bunda $J[y]=0$ bo'ladi, faqat $y'(x)=0$ bo'lgandagina, ya'ni $y(x)=c=const$. $y(x)=c$ funk-siya $[-1,1]$ kesmada birinchi tartibli uzliksiz xosilaga ega bo'lgan, biroq berilgan chegaraviy shartlarni qoniqtirmaydigan $C^1[-1,1]$ funksiyalar sinfiga mansub. Binobarin, $y(-1)=-1,\ y(1)=1$ shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $y(x)\in C^1[-1,1]$ funksiyalar uchun $J[y]>0$ bo'ladi.

Shunday qilib, funksional quyi chegaraga ega, biroq u $y(x)\in C^1[-1,1]$ egri chiziqlarda erishmaydi. Bir parametrli egri chiziqlar oilasini ko'raylik

$$y_\alpha(x)=\frac{arctg\frac{x}{\alpha}}{arctg\frac{1}{\alpha}},\qquad(\alpha>0)$$

Bu egri chiziqlar $y_\alpha(-1)=-1, y_\alpha(1)=1$ chegaraviy shartlarni qonoatlantiradi. Chegarada $\alpha\to 0$ intilganda limitga o'tib, quydagi funksiyaga ega bo'lamiz

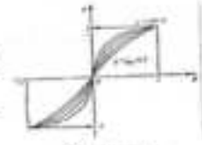
$$y(x)=\begin{cases}-1, & agar\quad -1\leq x<0,\\ 0, & agar\quad x=0,\\ +1, & agar\quad 0<x\leq 1.\end{cases}$$

yoki $y(x)=signx$ (21-rasm).

Bu funksiya $[-1,1]$ kesmada bo'lakli differensiallanuvchi funksiyalar sinfiga mansub. Quyidagiga ega bo'lamiz

$$J[y_\alpha]=\int_{-1}^{1}\frac{\alpha x^2dx}{(\alpha^2+x^2)arctg^2\frac{1}{\alpha}}=\frac{2\alpha}{arctg^2\frac{1}{\alpha}}\int_0^1\frac{x^2dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{2\alpha}{arctg^2\frac{1}{\alpha}}\left(1-\alpha arctg\frac{1}{\alpha}\right).$$

Ma'lumki, $\alpha\to 0$ intilganda $J[y_\alpha]\to 0$ ga intiladi. $y(-1)=-1,\ y(1)=1$ chegaraviy shartlarni qoniqtiruvchi $y(x)$ limit funksiyada $J[y]$ funksional nolga teng qiymatni qabul qiladi, ya'ni $J[y]=0$.



21-rasm

Shunday qilib, $J[y]$ funksiyonal o'zining minimumiga $[-1,1]$ kesmada bo'lakli-differensiallanuvchi funksiyalar sinfiga mansub bo'lgan $y(x)=signx$ egri chiziqda erishadi, lekin u $C^1[-1,1]$ sinfga mansub emas.

30-misol (hattoki, absolyut uzluksiz funksiyalar orasida ham masalaning yechimi va joiz ekstremali mavjud emas).

$J[y(x)]=\int_0^1 x^2y'^2dx$ (Veyershtrass misoli) funksionalning $y(0)=0, y(1)=1$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Eyler tenglamasi $\frac{d}{dx}(2x^2y')=0$, bundan $x^2y'=C,\ y'=\frac{C}{x^2}$, ko'rinishda bo'ladi. Tenglamaning umumiy yechimini topamiz,

$y=\frac{C_1}{x}+C_2$, $y(0)=0$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremal mavjud emas. Ravshanki, $J[y(x)]\ge 0$ va har qanday $y(x)\equiv 0$ absolyut uzluksiz funksiya uchun $J[y(x)]>0$. Masalada quyi chegara nolga teng emasligini ko'rsatamiz. Quyidagi joiz funksiyalar $y_n(x)=\frac{\arctg nx}{\arctg n}$ ketma-ketligini qaraymiz.

$$J[y_n(x)]=\int_0^1 x^2\frac{n^2}{(1+n^2x^2)\operatorname{arctg}^2 n}dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{dx}{\operatorname{arctg}^2 n}+\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{dx}{n^2x^2\operatorname{arctg}^2 n}\to 0.$$

31-misol (joiz ekstremal mavjud, yagona, lekin ekstremum bermaydi).

$J[y(x)]=\int_0^{\pi}\left(y'^2-y^2\right)dx\to\inf$. funksionalning $y(0)=y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$. chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Eyler tenglamasi $y''+y=0$ ko'rinishda bo'ladi. Tenglamaning umumiy yechimini topamiz, $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. yagona ekstremal $y'=0$ bo'ladi. $y_n(x)=\frac{1}{n}\sin x\frac{2x}{3}$. funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz. Ravshanki, $y_n(x)$- funksiyalar ketma-ketligi $C^1\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ fazoda $y_n(x)\to y'=0$ bo'ladi, lekin bunda

$$J[y_n(x)]=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3\pi}{2}\left(\frac{4}{9}-1\right)=-\frac{5\pi}{12n^2}<0=J[y'(x)].$$

Xususan, ushbu misoldan ko'rinib turibdiki, Eyler tenglamasi ekstremal mavjud bo'lishligining zaruriy sharti, biroq yetarli sharti emas.

32-misol. $J[y]=\int_0^1\left[(y-x)^2+y'^2\right]dx\to\inf$. funksionalning $y(0)=y(1)=0$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Bu yerda funksionalning quyi chegarasi nolga teng. Bunga ishonch hosil qilish uchun, $AC^1[0,1]$ fazodan olingan minimallashtiruvchi funksiyalar

$$y_n(x)=\int_0^x\operatorname{sgn}\sin 2\pi n t\,dt,\quad n=1,2,\ldots$$

ketma-ketligini qarash yetarli. bu yerda $AC^1[a,b]$- $[0,b]$ bo'lakli-uzluksiz funksiyalar fazosi, ya'ni chekli sonda birinchi tur uzilishga ega bo'lgan funksiyalar (uzilish nuqtalarida o'ng va chap limitlari mavjud). Bu $y_n(x)$ funksiyalar nolga tekis yaqinlashadi. a $|y_n(x)|=1$. cheklangan sonlar bundan mustasno, ya'ni $J[y_n(x)]\to 0$. Boshqa tomondan, agar $y_n(x)=0$ bo'lsa, u holda $J[y_n(x)]=1$ bo'ladi, agar $y_n(x)\ne 0$ bo'lsa, u holda

$$J[y_n(x)]>\int_0^1 y^2dx>0$$

bo'ladi. Shunday qilib, funksional biroq ham joiz funksiyada quyi chegaraga erishmaydi.

Lagranj va Dyuamel-Reymon almashtirishlari. Birinchi variatsiya ifodasining integrali ostida $\delta y(x)$ va $\delta y'(x)$ argument orttirmalari (variatsiyasi) ga nisbatan chiziqli funksiya turganligini bilamiz ((4) ga qarang). Maqsadimiz, bo'laklab integrallash yo'li bilan birinchi variatsiyada shunday almashtirish qilishimiz kerakki, integral ostidagi ifodada faqat $\delta y(x)$ ning chiziqli funksiyasi (bu Lagranj almashtirishi deyiladi) yoki integral ostida faqat $\delta y'(x)$ ning chiziqli funksiyasi bo'li-

shini (bu *Dyubua-Reymon almashtirishi* deyiladi) ta'minlashdan iborat.

Lagranj almashtirishi quyidagicha amalga oshiriladi: (4) variatsiya ifodasi integrali ostidagi ifodaning ikkinchi qo'shiluvchisini bo'laklab integrallab,

$$\int_a^b \frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} \delta y'(x)dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \dfrac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)}, & du = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} \right)dx, \\ dv = \delta y'(x)dx, & v = \delta y(x) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} \delta y(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} \right) \delta y(x)dx,$$

tenglikga ega bo'lamiz. Agar a va b nuqtalarda $\delta y(x)$ variatsiya nolga teng deb qabul qilsak, u holda

$$\int_a^b \frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} \delta y'(x)dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} \right) \delta y(x)dx,$$

tenglikni olamiz. Oxirgi ifodani olib borib birinchi variatsiya ifodasiga qo'ysak,

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} \right) \right] \delta y(x)dx,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Biz $y(x)$ funksiyani uzluksiz hosilaga ega deb hisobladik. Biroq, $y'(x)$ funksiyani esa differensiallanuvchi deb hisoblamadik, shuning uchun, bu yerda Lagranj almashtirishi noqonuniy (o'rinli) emas, chunki $F_y(x,y(x),y(x))$ funksiya differensiallanuvchi bo'lmasligi ham mumkin.

Ikkinchi tartibli $y''(x)$ hosilani mavjudligi haqidagi qo'shimcha

tasdiqni bartaraf etish maqsadida Dyubua-Reymon variatsiyani boshqacha ko'rinishdagi almashtirishini taklif qiladi.

Aytaylik,

$$N(x) = \int_a^x F_y(x,y(x),y'(x))dx,$$

deb belgilab, quyidagi

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \left[\frac{dN(x)}{dx}\delta y + \frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} \delta y' \right] dx,$$

tenglikka ega bo'lamiz. So'ngra birinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallab,

$$\left| \begin{matrix} u = \delta y, & du = (\delta y)'dx = \delta y'dx, \\ dv = \dfrac{dN(x)}{dx}dx, & v = N(x) \end{matrix} \right|$$

$$\delta J[y(x)] = N(x)\delta y\Big|_a^b - \int_a^b N(x)\delta y'dx + \int_a^b \frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} \delta y'dx.$$

ifodani olamiz. Yuqorida aytganimizdek, a va b nuqtalarda $\delta y(x)$ variatsiya nolga teng bo'lganligi sababli u yo'q bo'lib ketadi, natijada

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'(x)} - N(x) \right] \delta y'dx,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu almashtirish $y(x)$ funksiyadan tuzilishi haqida qo'shimcha shart (usdiq) talab qilmaydi.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

Quyidagi funksionallarning ekstremallari topilsin.

76. $J[y]=\int_0^1 (12xy-y^2)dx,\ y(0)=1,\ y(0)=0.$ **77.** $J[y]=\int_0^1 (y'+2y(1+x))dx,\ y(0)=1,\ y(2)=0$

78. $J[y]=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx,\ y(0)=y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$ **79.** $J[y]=\int_0^1 y(1-y')dx,\ y(0)=1,\ y(1)=\sqrt{1}.$

80. $J[y]=\int_0^{\pi/2}(4y\cos x+y'^2-y^2)dx,\quad y(0)=y(\pi/2)=0.$

81. $J[y]=\int_0^1 (y'^2-y^2-y)e^{x}dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=e^{-1}.$

82. $J[y]=\int_{-1}^{1}(y'^2-2xy)dx,\quad y(-1)=1,\ y(1)=1.$

83. $J[y]=\int_0^1 (y'^2-2y)dx,\ y(-1)=0,\ y(0)=2$ **84.** $J[y]=\int_0^1 (y'^2-y)^2dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$

85. Tekislikning ixtiyoriy ikki nuqtasi orqali $J[y]=\int\sqrt{1+y'^2}+\overline{y'}\,dx$ funksionalning faqat bitta ekstremali o'tishligi ko'rsatilsin.

86. $J[y]=\int_0^{\pi/4}(2y+(e^x-e^{-x})y')dx,\ y(0)=\alpha,\ y(\pi/4)=\beta.$ **87.** $J[y]=\int_0^1 (e^x+xy')dx,\ y(0)=0,\ y(1)=\alpha.$

88. $J[y]=\int_0^{\pi/4}(y'^2-y^2)dx,\ y(0)=1,\ y(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}.$ **89.** $J[y]=\int_0^1 (y'^2-y^2)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=-1.$

90. $J[y]=\int_0^1 (x+y')^2dx,\quad y(0)=1,\ y(1)=2.$ **91.** $J[y]=\int_0^1 (y'^2+y^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$

92. $J[y]=\int_0^1 (4y^2+y'^2)dx,\ y(0)=e^2,\ y(1)=1.$ **93.** $J[y]=\int_0^1 (2e^x-y')^2dx,\ y(0)=1,\ y(1)=e.$

94. $J[y]=\int_0^1 (xy+y'^2)dx.$ **95.** $J[y]=\int_0^1\left(y+\frac{y'^3}{3}\right)dx.$

$$\int_a^b F_{y'}\cdot\delta y'dx=\left[F_{y'}\cdot\delta y\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}F_{y'}\cdot\delta y\cdot dx.$$

endi uchinchi qo'shiluvchini ekstremumga erishsin ikki marta bo'laklab integrallaymiz:

$$\int_a^b F_{y''}\cdot\delta y''dx=\left[F_{y''}\cdot\delta y'\right]_a^b-\left[\frac{d}{dx}F_{y''}\cdot\delta y\right]_a^b+\int_a^b\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\cdot\delta y\cdot dx.$$

va nihoyat oxirgi qo'shiluvchini n marta bo'laklab integrallab, natijada:

$$\int_a^b F_{y^{(n)}}\cdot\delta y^{(n)}dx=\left[F_{y^{(n)}}\cdot\delta y^{(n-1)}\right]_a^b-\left[\frac{d}{dx}F_{y^{(n)}}\cdot\delta y^{(n-2)}\right]_a^b+\ldots+(-1)^n\int_a^b\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\cdot\delta y\cdot dx,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Chegaraviy shartlarni e'tiborga olib, qaysiki, $x=a$ va $x=b$ nuqtalarda variatsiyalarni $\delta y=\delta y'=\delta y''=\ldots=\delta y^{(n-1)}=0$ bo'lishligidan, yuqorida olingan ifodalarni (9) tenglikka olib borib qo'yib, quyidagi

$$\delta J=\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right)\delta y\,dx=0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik xususiy holda $[a,b]$ kesmaning chetlarida nol qiymatlarni qabul qiluvchi cheksiz marta differensiallanuvchi har qanday $\delta y(x)$ funksiyalar uchun ham to'g'ri (o'rinli). Ixtiyoriy $\delta y(x)$ funksiyalarda va integral ostidagi birinchi ko'paytuvchi $y=y(x)$ egri chiziqda x o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasi ekanligini hisobga olsak, ekstremumga erishadigan egri chiziqlarda

$$\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right)\delta y\,dx=0$$

bo'ladi. Shuning uchun, variatsion hisobning asosiy lemmasiga (Lagranj lemmasi) ko'ra, birinchi ko'paytuvchi aynan nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

ifodaga kelamiz. bu yerdan qo'shiluvchilarning tartibini o'zgartirib,

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F_{y^{(n-1)}} + \ldots - \frac{d}{dx}F_{y'} + F_y = 0,$$

tenglikni olamiz. Demak (7) funksional ekstremumga erishadigan $y = y(x)$ funksiya quyidagi

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

tenglamaning yechimi bo'lishi kerak. Bu $n-$ tartibli differensial tenglama *Eyler-Puasson tenglamasi* deb ataladi. uning integral egri chiziqlari qaralayotgan variatsion masalaning *ekstremallari* deb ataladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi $2n$ ta o'zgarmasni o'z ichiga oladi, ular umuman olganda (8) yuqorida keltirilgan $2n$ ta chegaraviy shartlardan aniqlanadi.

Demak, quyidagi tasdiq isbotlandi.

8-teorema. *Agar $C^n[a,b]$ fazodan olingan, (8) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamida aniqlangan (7) ko'rinishdagi funksional qandaydir $y(x) \in C^{2n}[a,b]$ funksiyada ekstremumga erishsa, u holda bu funksiya $J[y]$ funksionalning ekstremali bo'ladi.*

1-izoh. *Funksionalga ekstremum beruvchi $y(x)$ funksiyaga qo'shimcha silliq bo'lishlik $y(x) \in C^{2n}[a,b]$ sharti qo'shimcha qo'yilganligi bilan 7-teorema $n=1$ xususiy holda oldin isbot qilingan Eyler tenglamasi zaruriy shart ekanligi haqidagi teoremadan farq qiladi Bu teorema talablarini Dyubua-Reymon lemmasi yordamida*

bajarilishi kerak. Leybnisning aniq integralni parametr bo'yicha differensiallash formulasidan foydalanib [21],

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \int_a^b (F_{y_1}\delta y_1 + F_{y_2}\delta y_2)dx,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}\Big|_{\alpha=0} = \int_a^b (F_{y_2}\delta y_2 + F_{y_1}\delta y_1)dx.$$

tengliklarni olamiz. Bu munosabatlar $[a,b]$ kesmaning chetlarida nol qiymatlarni qabul qiluvchi, cheksiz marta differensiallanuvchi ixtiyoriy δy_1 va δy_2 funksiyalar uchun ham bajariladi. Dyubua-Reymon lemmasiga ko'ra. funksional ekstremumining quyidagi zaruriy shartini olamiz:

$$\frac{d}{dx}F_{y_1'} - F_{y_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}F_{y_2'} - F_{y_2} = 0.$$

Funksional ekstremumining bu zaruriy shartini n ta funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksionallar uchun umumlashtirish qiyin emas.

Barcha $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyalarning berilgan

$$\begin{cases} y_1(a) = y_{1a}, y_2(a) = y_{2a}, y_3(a) = y_{3a}, \ldots, y_n(a) = y_{na}, \\ y_1(b) = y_{1b}, y_2(b) = y_{2b}, y_3(b) = y_{3b}, \ldots, y_n(b) = y_{nb} \end{cases}$$

qiymatlarida quyidagi

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx.$$

ko'rinishdagi funksionalni qaraylik. Endi $y_i(x), i = 1,2,\ldots,n,$ funksiyalardan birini olib, qolganlarini o'zgartirmagan holda variatsiyalaymiz. U holda $J[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ funksional bitta variatsialangan funksiyaga bog'liq bo'lgan funksionalga aylanadi, masalan, $J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = J[y_1]$ va

funksionalga ekstremum beruvchi funksiya quyidagi Eyler tenglamalar sistemasini

$$\frac{d}{dx}F_{y_i'} - F_{y_i} = 0,$$

qanoatlantirishi kerak. Bu mulohazani har qanday $y_i(x), i = 1,2,\ldots,n$. funksiyalarga qo'llash mumkinligidan, biz quyidagi ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\frac{d}{dx}f_{y_i'} - f_{y_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

Umuman olganda bu tenglama $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ o'zgaruvchilar fazosida $2n$ ta integral egri chiziqning parametrik oilasi - berilgan variatsion hisob masalasining ekstremallar oilasi bo'ladi.

7-teorema. Agar

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx. \qquad (3)$$

funksional, bu yerda F – ikki marta differensiallanuvchi funksiya, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiyalar sistemasida ekstremumga erishsa, u holda ular quyidagi

$$\frac{d}{dx}F_{y_i'} - F_{y_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (4)$$

tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

(4) tenglamalar sistemasining har qanday silliq yechimi (Eyler tenglamalar sistemasining) (3) funksionalning ekstremallari deyiladi. Yuqoridagiga o'xshash "ekstremal" deb na faqat Eyler tenglamalar sistemasining yechimi bo'lgan $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyalar sistemasini, balki, R^{n+1} - fazoda

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$$

tenglamalar bilan tavsiflanuvchi egri chiziqlarni ham aytamiz.

1-misol. $J[y_1, y_2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1' - y_2')dx$ funksionalning ekstremallari topilsin.

Yechish. Yuqoridagi teoremaga mos ravishda Eyler tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$\begin{cases} y_1' - z = 0, \\ z' - y = 0. \end{cases}$$

ikkinchi tenglamadan $y_1 = z'$ tenglikni topamiz va bu ifodani birinchi tenglamadagi y_1 o'rniga qo'ysak,

$$y_2^{(IV)} - 2y_2'' + y_2 = 0,$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bu to'rtinchi tartibli bir jinsli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglama. Buning umumiy yechimi

$$y_2(x) = C_1\sin x + C_2 x\sin x + C_3\cos x + C_4 x\cos x. \qquad (5)$$

bo'ladi. Demak,

$$y_1(x) = -(C_1 + C_2)\sin x + (2C_2 - C_4)\cos x - C_2 x\sin x - C_4 x\cos x. \qquad (6)$$

bo'ladi. (5) va (6) munosabatlar qaralayotgan funksionalning barcha ekstremallarini ifodalaydi.

2-misol. $J[y,z] = \int_0^{\pi} (y'z' + 2y - 2z)dx$, $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1, z(0) = 0, z(\frac{\pi}{2}) = -1$. funksionalning ekstremallari topilsin.

Yechish. Berilgan funksional uchun Eyler differensial tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$\begin{cases} y' - z = 0, \\ z' - y = 0. \end{cases}$$

Noma'lum funksiyalardan birini yo'qotib, masalan, z funksiyani yo'qotib, $y''-y=0$ o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli differensial tenglamaga kelamiz. Uni integrallab,

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x,$$

$$z = y'(x): z(x) = C_1e^x - C_2e^{-x} - C_3\sin x + C_4\cos x$$

yechimlarni topamiz. Chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = 1$ o'zgarmaslarni topamiz. Unda $y(x) = \sin x$, $z(x) = \cos x$ ekstremallarga ega bo'lamiz.

3-misol. $J[y,z] = \int_0^{\pi/2} (y'z + yz)\,dx$ funksionalning ekstremallari topilsin.

Yechish. Berilgan funksional uchun Eyler tenglamalar sistemasini yozarhiz:

$$\begin{cases} F_{y'} - y' + F_y - z = 0, \\ F_{z'} - z' + F_z - y = 0. \end{cases}$$

Bu yerda $F_{y'z'} - F_{z'z'} = \left(F_{z'y'}\right)^2 \neq 0$ deb hisoblab, $y' = 0$, $z' = 0$ yoki $y(x) = C_1x + C_2$, $z(x) = C_3x + C_4$ – fazoda to'g'ri chiziqlar oilasini olamiz.

4-misol. Bir jinsli bo'lmagan optik muhitda qaysiki, yorug'lik tarqalish tezligi $v(x,y,z)$ ga teng bo'lganda yorug'lik tarqalish chizig'ining differensial tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Ferma qonuniga ko'ra, biror $A(x_0,y_0)$ nuqtadan boshqa bir $B(x_1,y_1)$ nuqtaga egri chiziq bo'ylab yorug'lik tarqalishida yorug'likning o'tish vaqti T eng kichik bo'ladi.

Agar izlanayotgan egri chiziqlarning tenglamasi $y = y(x)$, $z = z(x)$ ko'rinishda bo'lsa, u holda ketgan vaqt

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x,y,z)}\,dx$$

ifodaga teng bo'ladi. Bu funksional uchun (5) Eyler tenglamalar sistemasi quyidagi

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{z'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi va bu sistema yorug'lik tarqalish chizig'ini aniqlovchi sistema bo'lishligini ko'ramiz.

5-misol. $J[y(x),z(x)] = \int_1^2 (y'^2 - z'^2 - z^2)\,dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $z(1) = 0$, $z(2) = 1$, funksionalning ekstremallari topilsin.

Yechish. Berilgan funksional uchun (5) Eyler differensial tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} y'' = 0, \\ z - z'' = 0. \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Sistemani yechib,

$$y(x) = C_1x + C_2,$$

$$z(x) = C_3e^x + C_4e^{-x},$$

yechimlarni topamiz. Chegaraviy shartlardan foydalanib,

$$C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{e^2-1}, C_4 = -\frac{e^2}{e^2-1},$$

o'zgarmaslarni olamiz va ularni o'rniga olib borib qo'yib, natijada

$y(x)=x$, $z(x)=\frac{x(\lambda x-1)}{x\lambda}$ izlanayotgan ekstremallarga ega bo'lamiz. Ular ikkita silindrik sirtlarni kesishishidan iborat bo'lgan egri chiziqlar bo'ladi.

6-misol. Agar chegaraviy shartlar quyidagi $y(0)=z(0)=0$, $y(\pi)=1$, $z(\pi)=-1$ ko'rinishga ega bo'lsa, $J[y,z]=\int_0^{\pi}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx=\max$ funksionalning ekstremallari topilsin.

Yechish. Berilgan funksional uchun Eyler differensial tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} y''+2y-z=0, \\ z''+y=0 \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda z funksiyani yo'qotib,

$$y^{IV}+2y''+y=0,$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x(C_3\cos x+C_4\sin x)$$

bo'ladi. $y(0)=0, y(\pi)=1$ chegaraviy shartlarga ko'ra $C_1=0$, $C_3=-\frac{1}{\pi}$ qiymatlarni topamiz. Demak, $y(x)=C_2\sin x+C_4x\sin x-\frac{x\cos x}{\pi}$ funksiyani $z=-y''-2y$ shartdan topamiz. Bundan

$$z(x)=-C_2\sin x-C_4(2\cos x-x\sin x)+\frac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x).$$

yechimga ega bo'lamiz. C_2, C_4 o'zgarmaslarni $z(0)=0, z(\pi)=-1$ chegaraviy shartlardan topamiz, bu shartlar $C_4=0$, C_2- ixtiyoriy qiymatlarni beradi. Unda

$$z(x)=C_2\sin x+\frac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x).$$

bo'ladi. Natijada

$$y(x)=C_2\sin x-\frac{x}{\pi}\cos x, \quad z(x)=-C_2\sin x+\frac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x).$$

ekstremallarga ega bo'lamiz, bu yerda C_2- ixtiyoriy o'zgarmas.

4-§. Yuqori tartibli hosilaga bog'liq bo'lgan funksionallar

$y(x)\in C^{n}[a,b]$ — funksiyalar to'plamida quyidagi funksionalni

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})dx. \tag{7}$$

qaraymiz, bu yerda F funksiyani barcha argumenlari bo'yicha $n+2$ marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya deb hisoblaymiz va chegaraviy shartlar quyidagi

$$\begin{cases} \delta y(a)=0, \delta y'(a)=0,\ldots,\delta y^{(n-1)}(a)=0, \\ \delta y(b)=0, \delta y'(b)=0, \ldots,\delta y^{(n-1)}(b)=0, \end{cases} \tag{8}$$

ko'rinishga ega bo'lsin deb faraz qilamiz, ya'ni (8) chegaraviy shartlarda nafaqat funksiyaning qiymatlari berilgan, balki ularning $n-1$ tartibli hosilalaridagi qiymatlari ham berilgan. Faraz qilaylik, funksional $2n$ marta uzluksiz differensiallanuvchi $y=y(x)$ egri chiziqda ekstremumga erishsin va aytaylik, qandaydir $y=\bar{y}(x)-$ taqqoslanuvchi egri chiziq ham $2n$ marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Bu holda joiz variatsiya quyidagi bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\begin{cases} \delta y(a)=y_{10}, \delta y'(a)=y_{11}, \delta y''(a)=y_{12},\ldots,\delta y^{(n-1)}(a)=y_{1,n-1}, \\ \delta y(b)=y_{20}, \delta y'(b)=y_{21}, \delta y''(b)=y_{22},\ldots,\delta y^{(n-1)}(b)=y_{2,n-1}, \end{cases}$$

$\delta y\in C^{n}[a,b]-$ (sinfga tegishli) bo'lgan har qanday funksiyadan iborat bo'ladi.

Quyidagi bir parametrli funksiyalar oilasini qaraymiz

$$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha[\bar{y}(x)-y(x)] \quad \text{yoki} \quad y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y.$$

Bu funksiya $\alpha=0$ da $y(x,\alpha)=y(x)$, $\alpha=1$ da $y(x,\alpha)=\bar{y}(x)$ bo'ladi. Agar $J[y(x)]$ funksional qiymatini faqat $y(x,\alpha)$ egri chiziqlar oilasida qarasak, u holda $J[y(x)]$ funksional $\alpha=0$ qiymatda ekstremumga erishuvchi α parametrning bir o'zgaruvchili funksiyasiga aylanadi, ya'ni bu funksiya

$$\varphi(\alpha)=J[y+\alpha\delta y]=\int_a^b F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y',y''+\alpha\delta y'',\dots,y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)})dx,$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $\delta y^{(k)}=(\delta y)^{(k)}$, δy variatsiyaning k-tartibli hosilasini ifodalaydi. Ma'lumki, bu hosila J funksionalning variatsiyasi deb ataladi va δJ orqali belgilanadi:

$$\varphi'(\alpha)=\delta J[y+\alpha\delta y]=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b F(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha),\dots,y^{(n)}(x,\alpha))dx$$

$$=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y',\dots,y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)})dx.$$

Bu yerda integral ostidagi F funksiyaning xususiy hosilalari

$$F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y',\dots,y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)})$$

nuqtada hisoblanadi. Shuning uchun,

$$\varphi'(0)=\frac{d}{d\alpha}J[y+\alpha\delta y]_{\alpha=0}=\int_a^b\left(F_y\cdot\delta y+F_{y'}\cdot\delta y'+\dots+F_{y^{(n)}}\cdot\delta y^{(n)}\right)dx=0 \qquad (9)$$

bo'ladi, bu yerda integral ostidagi F funksiyaning xususiy hosilalari

$$(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)})$$

nuqtada hisoblanadi. Faraz qilaylik, $y(x)\in C^{2n}[a,b]$ bo'lsin. U holda bu integralning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchini bir marta bo'laklab integrallaymiz:

96. $J[y]=\int_0^{\pi}[p(x)y'^2+q(x)y^2+xy(x)]dx$ chiziqli funksionalni ekstremumga ega bo'lmasligi ko'rsatilsin, bu yerda $p(x)\in C^1[0,\pi]$, $q(x)\in C[0,\pi]$, $y(x)\in C[0,\pi]$.

97. $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ funksional va $y(a)=A$, $y(b)=B$ chegaraviy shartlar berilgan bo'lsin. Agar integral ostidagi $F(x,y,y')$ ifodaga ixtiyoriy $u=\omega(x,y)$ funksiyaning to'la differensialini qo'shsak, u holda Eyler tenglamasi oldingi holda o'zgarmasdan qolishligi ko'rsatilsin.

98. $J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2+2ye^x)dx$. **99.** $J[y]=\int_0^{\pi}(y'^2-y^2-8y\cos x)dx$, $y(0)=2$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi+\frac{\pi}{2}$.

100. $J[y]=\int_a^b y'y''dx$ funksionalning ekstremali topilsin va $n\ge 1$ bo'lganda, Ox o'qiga nisbatan turli tomonlarda yotuvchi ikki nuqtani ekstremal orqali tutashtirish mumkin emasligi ko'rsatilsin.

Quyidagi bir parametrli funksiyalar oilasini qaraymiz

$$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha[\bar{y}(x)-y(x)] \quad \text{yoki} \quad y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y.$$

Bu funksiya $\alpha=0$ da $y(x,\alpha)=y(x)$, $\alpha=1$ da $y(x,\alpha)=\bar{y}(x)$ bo'ladi. Agar $J[y(x)]$ funksional qiymatini faqat $y(x,\alpha)$ egri chiziqlar oilasida qarasak, u holda $J[y(x)]$ funksional $\alpha=0$ qiymatda ekstremumga erishuvchi α parametrning bir o'zgaruvchili funksiyasiga aylanadi, ya'ni bu funksiya

$$\varphi(\alpha)=J[y+\alpha\delta y]=\int_a^b F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y',\dots,y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)})dx,$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $\delta y^{(k)}=(\delta y)^{(k)}$ — δy variatsiyaning k-tartibli hosilasini ifodalaydi. Ma'lumki, bu hosila J funksionalning variatsiyasi deb ataladi va δJ orqali belgilanadi:

$$\delta J[y+\alpha\delta y]=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b F(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha),\dots,y^{(n)}(x,\alpha))dx$$

$$=\int_a^b\frac{d}{d\alpha}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y',\dots,y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)})dx.$$

bu yerda integral ostidagi F funksiyaning xususiy hosilalari

$$(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y',\dots,y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)})$$

nuqtada hisoblanadi. Shuning uchun,

$$\varphi'(0)=\frac{d}{d\alpha}J[y+\alpha\delta y]_{\alpha=0}=\int_a^b\left(F_y\cdot\delta y+F_{y'}\cdot\delta y'+\dots+F_{y^{(n)}}\cdot\delta y^{(n)}\right)dx=0 \qquad (9)$$

bo'ladi, bu yerda integral ostidagi F funksiyaning xususiy hosilalari

$$(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)})$$

nuqtada hisoblanadi. Faraz qilaylik, $y(x)\in C^{(2n)}[a,b]$ bo'lsin. U holda bu integralning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchini bir marta bo'laklab integrallaymiz:

96. $J[y]=\int_a^b[p(x)y'^2+q(x)y^2+2\gamma(x)y]dx$ chiziqli funksionalni ekstremumga ega bo'lmasligi ko'rsatilsin, bu yerda $p(x)\in C^1[a,b]$, $q(x)\in C[a,b]$, $\gamma(x)\in C[a,b]$.

97. $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ funksional va $y(a)=A$, $y(b)=B$ chegaraviy shartlar berilgan bo'lsin. Agar integral ostidagi $F(x,y,y')$ ifodaga ixtiyoriy $u=u(x,y)$ funksiyaning to'la differensialini qo'shsak, u holda Eyler tenglamasi oldingi holda o'zgarmasdan qolishligi ko'rsatilsin.

98. $J[y]=\int_0^{\pi}(y'^2+y^2+2ye^x)dx$. **99.** $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2-y^2-8x\cos x)dx$, $y(0)=2$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi-\frac{\pi}{2}$.

100. $J[y]=\int_a^b xy'^2dx$ funksionalning ekstremali topilsin va $a\ge 1$ bo'lganda, Oy o'qiga nisbatan turli tomonlarda yotuvchi ikki nuqtani ekstremal orqali tutashtirish mumkin emasligi ko'rsatilsin.

3-§. n ta funksiyaga bog'liq bo'lgan funksionallar

Aytaylik, funksionalning integranti ikkita x o'zgaruvchining funksiyalariga bog'liq bo'lsin, ya'ni funksional

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\,dx, \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'lsin, bu yerda F – besh o'zgaruvchi bo'yicha ikki marta differensiallanuvchi funksiya. Funksionalning aniqlanish sohasi sifatida quyidagi

$$y_1(a) = y_{11},\ y_1(b) = y_{12},\ y_2(a) = y_{21},\ y_2(b) = y_{22}, \qquad (2)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi, $C^1[a,b]$ – sinfdan olingan bir juft $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarni qaraymiz. Joiz $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmaning chetlarida tayinlangan qiymatlarga ega bo'lganligi sababli, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar uchun δy_1 va δy_2 joiz variatsiyalar $C^1[a,b]$ sinfdan olingan bo'lishi va quyidagi

$$\delta y_1(a) = \delta y_2(a) = \delta y_1(b) = \delta y_2(b) = 0$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi kerak. δy_1 va δy_2 lar ixtiyoriy joiz variatsiyalar uchun

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \delta J[y_1 + \alpha \cdot \delta y_1, y_2 + \alpha \cdot \delta y_2]$$

deb olamiz. Ravshanki, agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar $J[y_1, y_2]$ funksionalga ekstremum bersa, u holda ikki o'zgaruvchili $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ funksiya $(0,0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'ladi. Bu holda ekstremumning zaruriy sharti

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = 0$$

kuchsizlantirishga erishish mumkin (7-teoremaning isbotida bundan foydalanilgani yo'q).

1-misol. $J[y] = \int_0^{\pi} (y'^2 + y^2 - 2x^2 y)\,dx$, funksionalning ekstremallari topilsin.

Yechish. Berilgan funksional uchun Eyler-Puasson tenglamasi quyidagi

$$-y'' + 2y - 3x^2 = 0,$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu oltinchi tartibli maxsus o'ng tomonga ega bo'lgan o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglama. Uni yechib,

$$y(x) = x^2 + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(C_3 e^{\frac{x}{2}} + C_4 e^{-\frac{x}{2}}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(C_5 e^{\frac{x}{2}} + C_6 e^{-\frac{x}{2}}\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

ychimga ega bo'lamiz. Bu egri chiziqlar oilasining har bir funksiyasi berilgan funksionalning ekstremali bo'ladi.

2-misol. $J[y,z] = \int_{-1}^{1} (\frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y)\,dx$, $y(-1) = y'(-1) = 0$, $y(1) = y'(1) = 0$, funksionalning ekstremallari topilsin.

Yechish. Agar balka birjinsli bo'lsa, u holda ρ va μ o'zgarmas bo'lib, berilgan funksional uchun Eyler-Puasson tenglamasi quyidagi

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2}(\mu y'') = 0, \text{ yoki } y^{(IV)} = -\frac{\rho}{\mu},$$

ko'rinishda bo'ladi. Bundan

$$y = -\frac{\rho x^4}{24\mu} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4,$$

yechimini olamiz. Chegaraviy shartlardan foydalanib, ekstremalni topamiz, ular quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$y=-\frac{\rho x^2}{24\mu}\left(x^2-2l^2x^2+l^4\right)$ yoki $v=-\frac{l^2}{24\mu}\left(x^2-l^2\right)^2$ bo'ladi.

Agar J funksional

$$J[y,z]=\int_a^b F(x,y,y',\dots,y^{(n)},z,z',\dots,z^{(m)})dx$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda $z(x)$ funksiyani tayinlangan deb hisoblab, faqat $y(x)$ funksiyani variatsiyalab, ekstremumni amalga oshiruvchi $y(x)$ va $z(x)$ funksiyalar

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0$$

Eyler – Puasson tenglamasini qanoatlantirishi kerak ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Endi $y(x)$ funksiyani tayinlangan deb hisoblab, faqat $z(x)$ funksiyani variatsiyalab, yuqoridagi kabi ekstremumni amalga oshiruvchi $y(x)$ va $z(x)$ funksiyalar

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{z''}+\dots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0$$

Eyler – Puasson tenglamasini qanoatlantirishi kerak ekanligiga ega bo'lamiz. Demak, $y(x)$ va $z(x)$ funksiyalar quyidagi ikkita

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0,$$

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{z''}+\dots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0,$$

differensial tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi kerak ekanligiga erishamiz.

Xuddi shu mulohazalarni yuritish orqali ixtiyoriy sondagi funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksionallarni ekstremumga tadqiq qilish mumkin:

$$J[y_1,y_2,\dots,y_m]=\int_a^b F(x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n_1)},y_2,y_2',\dots,y_2^{(n_2)},\dots,y_m,y_m',\dots,y_m^{(n_m)})dx.$$

Endi qaysidir bitta $y_i(x)$ funksiyani variatsiyalab, qolganlarini o'zgartirmasdan saqlagan holda quyidagi ko'rinishdagi funksional ekstremumining

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y_i''}+\dots+(-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}}=0,$$

zaruriy shartini olamiz.

3-misol. $J[y]=\int_0^1(1+y'')^2dx$, funksionalning $y(0)=0, y'(0)=1, \quad y(1)=1,$ $y'(1)=1,$ shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Mazkur funksional uchun Eyler-Puasson tenglamasi $\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0,$ yoki $y^{(4)}=0$ ko'rinishda bo'ladi. uning umumiy yechimi

$$y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4,$$

bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1=0, C_2=0, C_3=1, C_4=0,$ o'zgarmaslarni topamiz. Demak, funksional ekstremumga faqat $y=x$ togri chiziqda erishishi mumkin.

4-misol. $J[y]=\int_0^{\pi}(y''^2-y^2+x^2)dx,$ funksionalning $y(0)=1, y'(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$ $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1,$ shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Mazkur funksional uchun Eyler-Puasson tenglamasi $y^{(4)}-y=0$ ko'rinishda bo'ladi. uning umumiy yechimi

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x,$$

bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1=0, C_2=0, C_3=1, C_4=0,$ o'zgarmaslarni topamiz. Demak, funksional ekstremumga faqat $y=\cos x$

egri chiziqda erishishi mumkin.

5-misol. $J[y(x)]=\int_0^1(360x^2y-y'^2)dx$ funksionalni $y(0)=y(0)=2,\ y(1)=0,\ y(1)=2.5$ shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. Mazkur funksional uchun Eyler-Puasson tenglamasi

$$360x^2-\frac{d}{dx}(-2y')=0 \text{ yoki } y''''=180x^2,$$

ko'rinishga ega bo'ladi, uning umumiy yechimi

$$y(x)=\frac{x^5}{2}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4,$$

ko'rinishda bo'ladi, chegaraviy shartlardan foydalanib,

$$C_1=\frac{3}{2},\ C_2=-3,\ C_3=1,\ C_4=0$$

o'zgarmaslarni topamiz. U holda izlanayotgan ekstremal

$$y(x)=\frac{x^5}{2}+\frac{3}{2}x^3-3x^2+x,$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi hamma chegaraviy shartlari berilmagan, ularni soni 02 bo'lgan masalani qaraymiz. Shuning uchun Eyler tenglamasining umumiy yechimida chegaraviy shartlardan foydalanganimizdan so'ng yana ozod o'zgarmaslar qoladi. Bunday masalalarni yechish uchun berilgan (7) funksionalni variatsiyasini topish, uni chegaraviy shartlarni hisobga olib, o'zgartirib, variatsiyani nolga tenglab, chegarada qo'shimcha shartlarni olish zarur bo'ladi.

6-misol. Quyidagi

$$J[y(x)]=\frac{1}{2}\int_a^b y'^2dx$$

funksionalning $y(a)=y(a)=0$ chegaraviy shartlar ostida ekstremal qiymatini amalga oshiruvchi $y=y(x)$ funksiya topilsin.

Yechish. Eyler-Puasson tenglamasi $y''(x)=0$ ko'rinishga ega bo'ladi. Uning umumiy yechimi to'rtta ixtiyoriy o'zgarmaslarni o'z ichiga oluvchi

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3$$

funksiya bo'ladi, bularni aniqlash uchun chegaraviy shartlar yetarli emas. Shuning uchun, yuqorida aytilgan mulohazaga ko'ra, berilgan funksionalning variatsiyasini topamiz. U holda

$$\delta J[y(x)]=\int_a^b y'(\delta y)'dx$$

ifodaga bo'ladi. Buni ikki marta bo'laklab integrallab,

$$\delta J[y(x)]=[y'(\delta y)(x)]_a^b-\int_a^b y''(\delta y)(x)dx=[y'(\delta y)(x)]_a^b-[y''(\delta y)(x)]_a^b+\int_a^b y^{(4)}\delta y(x)dx$$

ifodaga ega bo'lamiz. Oxirgi tenglik, berilgan funksionalning $y=y(x)$ ekstremalida nolga aylanishi kerak. $\delta y(x)$ variatsiyani ixtiyoriyligidan $y^{(4)}(x)=0$ kelib chiqadi. Bu berilgan funksional uchun Eyler-Puasson tenglamasi bo'ladi. Lekin, oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi integral nolga aylansa, u holda quyidagi chegaraviy ifoda ham

$$[y'(\delta y(x))-y''(\delta y(x))]_a^b$$

nolga aynan aylanishi kerak. $\delta y(a)-\delta y(b)=0$ ekanligidan (oxirlari mahkamlangan), $y'(b)\delta y(b)-y'(a)\delta y(a)=0$ bo'lishi kerak. $\delta y(b)$ va $\delta y(a)$ miqdorlarning ixtiyoriyligidan $\delta y(a)=0,\ \delta y(b)=0$ ifodalarni olish zarur. Bu shart berilgan chegaraviy shartlar bilan birga ekstremallar oilasidan (umumiy yechimdan) $y(x)=0$ ekstremalni ajratadi.

2-izoh. *Bo'laklab integrallashda biz, qaralayotgan funksiya-larning uchinchi va to'rtinchi tartibli hosilalarini borligidan foydalandik. Agarda ma'lum Lagranj almashtirishini Dyubua-Raymon almashtirishiga almashtirsak, bundan xalos bo'lishimiz mumkin.*

Eyler-Puasson tenglamasining tartibini pasaytirish. Ayrim hollarda tartibi $2n$ bo'lgan Eyler-Puasson tenglamasini tartibini bittaga pasaytirish mumkin.

1. Aytaylik integral ostidagi funksiya y ga bog'liq bo'lmasin. U holda Eyler-Puasson tenglamasi quyidagi

$$-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-...+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0,$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu tenglamani integrallab,

$$F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}+...\mp\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F_{y^{(n)}}=C,$$

ifodani olamiz. Bu izlanayotgan birinchi integral bo'ladi.

2. Aytaylik, integral ostidagi funksiya x ga oshkor holda bog'liq bo'lmasin:

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(y,y',y'',....,y^{(n)})dx. \qquad (10)$$

O'zgaruvchilarni almashtirishni amalga oshiramiz. t ni erkin o'zgaruvchi deb hisoblaymiz, x ni esa y ning noma'lum funksiyasi deb qabul qilamiz. Qisqalik uchun x' hosilani $\frac{dx}{dy}$ va umuman

$x''=\frac{d^2x}{dy^2},....,x^{(n)}=\frac{d^nx}{dy^n}$, deb belgilashlarni kiritamiz, u holda

$$dx=x'dy,\ y'=\frac{1}{x'},\ y''=-\frac{x''}{x'^3},\ y'''=\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5},...$$

ifodalarni olamiz. Bu yerdan J integral yangi o'zgaruvchilarda

$$J=\int_{y_0}^{y_1}F(y,\frac{1}{x'},-\frac{x''}{x'^3},\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5},...)x'dx$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu almashtirish bilan biz variatsion hisobning (10) masalasini qaysiki, integral ostidagi ifodaga $x=x(y)$ noma'lum funksiya kirmagan yangi masalaga olib keldik. Bundan, agar integral ostidagi funksiyani

$$F\left(y,\frac{1}{x'},-\frac{x''}{x'^3},\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5},....\right)x'dx=\Phi\left(y,x',x'',.....x^{(n)}\right),$$

deb olsak, u holda izlanayotgan birinchi integral

$$\Phi_{x'}+\frac{d}{dy}\Phi_{x''}+...\mp\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\Phi_{x^{(n)}}=C,$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

3. Va nihoyat, qachonki Eyler-Puasson tenglamasini umumiy integralini darhol yozish mumkin bo'lgan yana bir holni ko'rib o'tamiz. Integral ostidagi $y^{(n)}$ ga bog'liq bo'lmasin. Bu holda tenglama $\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0$, yoki $F_{y^{(n)}}=P_{n-1}(x)$, ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $P_{n-1}(x)-n-1-$ darajali ko'phad. f funksiya orqali $F_{y^{(n)}}$ funksiyaning teskarisini belgilab,

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f(P_{n-1}(x)),$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerdan uni n marta integrallab,

$$y = \int\int \dots \int f(x)dx^n + Q_{n-1}(x).$$

ifodani olamiz, bu yerda $Q_{n-1}(x)$ – $n-1$ – darajali ixtiyoriy ko'phad.

Quyidagi funksionallarning ekstremali topilsin:

101. $J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 2y^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = -\sin 1$.

102. $J[y(x)] = \int_0^1 (240y - y'^2)dx$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$, $y'(-1) = -45$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 16$, $y'(0) = 0$

103. $J[y(x)] = \int_a^b (y + y'^2)dx$, $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, $y'(a) = y'_0$, $y'(0) = y'_1$.

104. $J[y(x)] = \int_a^b (x^2 + y'^2)dx$, $y(a) = A_0$, $y'(a) = A_1$, $y(b) = B_0$, $y'(b) = B_1$.

105. $J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = \sin 1$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = \cos 1$.

Berilgan chegaraviy shartlar asosida quyidagi funksionalning ekstremali topilsin

106. $J[y] = \frac{1}{2}\int_1^2 (y'')^2 dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 0$, $y'(2) = 1$

107. $J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2z - 4y^2 + y'^2 - z'^2)dx$, $y(0) = z(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = z(\frac{\pi}{4}) = 1$

108. $J[y[y(x), z(x)]] = \int_{-1}^1 (2xy - y^2 + \frac{z'^2}{2})dx$, $y(1) = 0$, $y(-1) = 2$, $z(1) = 1$, $z(-1) = -1$.

109. $J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4y^2 + z'^2 - 2yz)dx$, $y(0) = z(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = z(\frac{\pi}{2}) = 1$.

110. $J[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2y)dx$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, $y(1) = \frac{3}{2}$, $z(1) = 1$.

111. $J[z(x, y)] = \int\int F(x, y, z, z', z')dxdy$ funksional uchun Eyler tenglamasini

quyidagi birinchi integrallarni berishi ko'rsatilsin:

a) $\frac{\partial F}{\partial y'} = c$, agar x ni o'z ichiga olmasa. b) $F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c$. c) $F - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = C$, agar F x

ni o'z ichiga olmasa.

$$y = \int\int\ldots\int f[P_{n-1}(x)]dx^n + Q_{n-1}(x),$$

ifodani olamiz, bu yerda $Q_{n-1}(x) - n-1-$ darajali ixtiyoriy ko'phad.

Quyidagi funksionallarning ekstremali topilsin:

101. $J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2)dx$, $y(0) = 0, y(1) = 0$, $y'(0) = 1, y'(1) = -sh1$.

102. $J[y(x)] = \int_{-1}^{0} (240y - y''^2)dx$, $y(-1) = 1, y(0) = 0$, $y(-1) = -4.5, y'(0) = 0$, $y''(-1) = 16$, $y''(0) = 0$

103. $J[y(x)] = \int_a^b (y + y'^2)dx$, $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, $y'(a) = y'_a$, $y'(b) = y'_b$.

104. $J[y(x)] = \int_a^b (y'^2 + yy'')dx$, $y(a) = A$, $y'(a) = A_1$, $y(b) = B$, $y'(b) = B_1$.

105. $J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y''^2)dx$, $y(0) = 0, y(1) = sh1$, $y'(0) = 1, y'(1) = ch1$.

Berilgan chegaraviy shartlar asosida quyidagi funksionalning ekstremali topilsin

106. $J[y] = \frac{1}{2}\int_0^1 (y'')^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

107. $J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2z - 4y^2 + y'^2 - z'^2)dx$, $y(0) = z(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = z(\frac{\pi}{4}) = 1$.

108. $J[J[y(x), z(x)] = \int_{-1}^{1} (2xy - y'^2 + \frac{z'^2}{3})dx$, $y(1) = 0$, $y(-1) = 2$, $z(1) = 1$, $z(-1) = -1$.

109. $J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 - 2yz)dx$, $y(0) = z(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = z(\frac{\pi}{2}) = 1$.

110. $J[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2y)dx$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, $y(1) = \frac{3}{2}$, $z(1) = 1$.

111. $J[z(x, z)] = \int_a^b F(x, y, y', z, z')dx$ funksional uchun Eyler tenglamasini

quyidagi birinchi integrallarni berishi ko'rsatilsin:

a) $\frac{\partial F}{\partial y} = C$, agar F x ni o'z ichiga olmasa, b) $F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = C$, agar F x ni o'z ichiga olmasa.

VII BOB

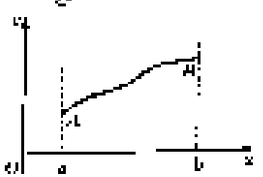
QO'ZG'ALUVCHAN CHEGARALI VARIATSION HISOB MASALALARI

1-§. Oxirlari qo'zg'aluvchan variatsion masala

Biz hozirgacha ko'rib o'tgan variatsion masalalarda joiz funksiyalar $[a,b]$ tayinlangan kesmada aniqlandi, bundan tashqari funksiya grafigining $A(a,y_a)$ va $B(b,y_b)$ oxirgi nuqtalari mahkamlangan edi, shu kabi masalalar bilan bir qatorda juda ko'p hollarda boshqa turdagi masalalarni yechish zarurati tug'iladi, qaysiki, integral orqali berilgan funksionalning ekstremumi har - xil oraliqlarda aniqlangan funksiyalar orasidan izlanadi, shu bilan birga bu funksiyalarning oraliqlarning oxirlaridagi qiymatlari mahkamlanmagan bo'ladi. Bunday masalalar uchun oldingi olingan natijalardan foydalanish mumkin. Bu ko'rinishdagi masalalar *oxirlari qo'zg'aluvchan variatsion masalalar* deb ham yuritiladi.

Aniqlanish sohasi $C^1[a,b]$ funksiyalar sinfidan bo'lgan

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \qquad (1)$$



22- rasm

funksionalni ekstremumini topish haqidagi masalani qaraymiz. Joiz funkyalarga chegaraviy shartlar ko'rinishidagi cheklovlar bo'lmaganligi sababli, bu masala oldingi ko'rilgan masalalardan farq qiladi. Geometrik nuqtai nazardan bu masala, oxirlari $x=a$ va $x=b$ tik to'g'ri chiziqlarda joylashgan funksiya grafigidan va unga mos funksionalning qiymati ekstremal bo'ladigan egri chiziqni topish masalasidan iborat (22-rasm). Bunday

masalani biz *oxirlari qo'zg'aluvchan variatsion masala* deb ataymiz.

Qaralayotgan funksionalning integrantini ikki marta differensiallanuvchi funksiya deb hisoblaymiz. Ta'kidlash lozimki, bu holda joiz variatsiya $\delta y(x)\in C^1[a,b]$ sinfga tegishli bo'lgan ixtiyoriy funksiya bo'ladi. Yuqoridagiga o'xshash Teylor formulasidan foydalanib, (1) funksionalning birinchi variatsiyasini quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkinligiga ishonch hosil qilamiz

$$\delta J[y,\delta y]=\int_a^b\left(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'\right)dx. \qquad (2)$$

Agar $y=y(x)$ funksiya $J[y]$ funksionalga ekstremum bersa, u holda funksionalning birinchi variatsiyasi bu funksiyada nolga teng bo'ladi (1.2-teoremaga qarang [56]). Demak, ixtiyoriy $\delta y(x)\in C^1[a,b]$ funksiya uchun

$$\int_a^b\left(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'\right)dx=0 \qquad (3)$$

bo'ladi. Bu tenglik hattoki $[a,b]$ kesmada nol qiymatli cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun ham to'g'riligini ta'kidlash lozim. Demak, Dyubua-Reymon lemmasiga ko'ra, $y(x)$ funksiya

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \qquad (4)$$

Eyler tenglamasining yechimi bo'ladi, ya'ni qaralayotgan funksionalning ekstremali bo'ladi. Biroq, oxirlari qo'zg'aluvchan masaladagi (3) shart Dyubua-Reymon lemmasining shartidan kuchli va u funksionalga ekstremum beruvchi funksiyaga qo'shimcha zaruriy shart uchun imkon beradi. Agar $J[y]$ funksional aynimagan bo'lsa,

ya'ni integrant $F_{y'y'} \neq 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda ekstremal ikki marta differensiallanuvchi funksiya bo'ladi. Bu holda bo'laklab integrallash qoidasiga ko'ra,

$$\delta J[y,\delta y] = \int_a^b \left(F_y + \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx + \left(F_{y'} \delta y \right)_a^b =$$

$$= \int_a^b \left(F_y + \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx + \left(F_{y'} \right)_{x=b} \delta y(b) - \left(F_{y'} \right)_{x=a} \delta y(a), \qquad (5)$$

ifodaga ega bo'lamiz. (5) tenglikning o'ng tomonidagi integral ekstremalda nolga aylanadi. Shuning uchun, $y(x)$ funksiya $J[y]$ funksionalga ekstremum bersa, u holda

$$\left(F_{y'} \right)_{x=b} \delta y(b) - \left(F_{y'} \right)_{x=a} \delta y(a) = 0, \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. $\delta y(a)$ va $\delta y(b)$ lar qaralayotgan masalada mutlaqo bir-biriga nisbatan bog'liq bo'lmagan holda o'zgarsa, u holda oxirgi tenglik quyidagi

$$\left(F_{y'} \right)_{x=b} \delta y(b) = 0, \quad \left(F_{y'} \right)_{x=a} \delta y(a) = 0. \qquad (7)$$

ifodalarga teng kuchli deb xulosa qilamiz.

Demak, $J[y]$ funksionalning ekstremum nuqtalari oxirlari qo'zg'aluvchan masalada (4) Eyler tenglamasini qanoatlantiradi va bundan tashqari, *tabiiy chegaraviy shartlar* deb ataluvchi (7) ko'rinishdagi ikki qo'shimcha shartni ham qanoatlantiradi. Bu nuqtalarni topish uchun Eyler tenglamasining yechimlari (funksionalning ekstremumlari) orasidan shunday yechimni ajratish kerakki, qaysiki ular tabiiy chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

(1) ko'rinishdagi funksional uchun "uralash" masalani ham

qo'yish mumkin. masalan, yechim grafigini chap tomoni - $A(a,y_a)$ nuqta tayinlangan, o'ng oxiri esa, $x = b$ tik to'g'ri chiziq bo'ylab erkin harakat qiladi. Bu holda joiz funksiyalar to'plamini torayтiruvchi bitta chegaraviy shart bor. Joiz variatsiya barcha joiz funksiyalar $x = a$ da bir xil qiymatga ega bo'lganliklari sababli, $\delta y(a) = 0$ shartni qanoatlantirishi kerak. (6) tenglikda bitta qo'shiluvchi nolga aylanadi va bu tenglik (7) ning birinchi shartiga keltiriladi. Demak, ekstremallar orasidan shunday $y(x)$ funksiyani izlash kerakki, qaysiki u

$$y(a) = y_a, \quad \left(F_{y'} \right)_{x=b} = 0, \qquad (8)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

1-misol. Quyidagi o'ng tomoni qo'zg'aluvchi bo'lgan variatsion masalada

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 - y^2 + 4y\cos x \right) dx, \quad y(0) = 0,$$

funksionalning ekstremali topilsin.

Mazkur masalaning qo'yilishi funksional ekstremallari orasidan shunday ekstremalni ajratish kerakki, qaysiki u chap oxiriga qo'yilgan chegaraviy shartni va o'ng oxirida tabiiy chegaraviy shartni qanoatlantirishini anglatadi.

Qaralayotgan funksional uchun Eyler tenglamasi quyidagi $y'' + y = 2\cos x$ ko'rinishda bo'ladi. Uning umumiy yechimini

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x,$$

ko'rinishda yozish mumkin. Chap tomoni uchun qo'yilgan chegaraviy shartdan $C_1 = 0$ o'zgarmasni topamiz. O'ng oxirida tabiiy chegaraviy

shart

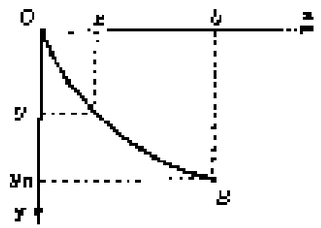
$$(y')_{x=\frac{\pi}{4}}=0.$$

yoki $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ ko'rinishda bo'ladi. Undan foydalanib, C_2 o'zgarmasni $C_2=-1-\frac{\pi}{4}$ aniqlaymiz. Shunday qilib, qo'yilgan chegaraviy shartlarni funksionalning yagona

$$y=\left(x-1-\frac{\pi}{4}\right)\sin x$$

ekstremali qanoatlantiradi.

2-misol. xOy tik tekislikda shunday egri chiziq topish kerakki, og'ir nuqta ishqalanishsiz harakatlanib berilgan tik to'g'ri chiziqqa eng qisqa vaqtda yetib kelsin. Nuqtaning boshlang'ich holati koordinata boshi, tik to'g'ri chiziq esa $x=b$ tenglama bilan berilgan deb faraz qilamiz (23- rasm). Bu masalani braxistoxrona masalasining o'zgartirilgan ko'rinishi deb aytsa bo'ladi, undan farqi shundaki, izlanayotgan egri chiziqning o'ng oxiri $x=b$ to'g'ri chiziqni qandaydir oldindan ma'lum bo'lmagan nuqtada kesadi. Bizga ma'lumki, qaralayotgan funksionalning ekstremallari



23 - rasm

$$\begin{cases} x=\tilde{C}_1(\theta-\sin\theta), \\ y=\tilde{C}_1(\theta-\cos\theta), \end{cases}$$

sikloidalar oilasidan iborat bo'ladi, bu yerda parametrning $\theta=0$ dagi qiymati boshlang'ich $x=0$ va $y=0$ nuqtalariga mos keladi. $\tilde{C}_1$ – o'zgarmasni topish uchun (8) ifodaning ikkinchi chegaraviy shartidan foydalanamiz:

$$(F_{y'})_{x=b}=\left(\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}\right)_{x=b}=0,$$

bo'ladi. Bu yerdan $y'(b)=0$ bo'ladi, ya'ni izlanayotgan egri chiziqning o'ng oxiri tik to'g'ri chiziqni to'g'ri burchak ostida kesadi. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$y'=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{\tilde{C}_1\sin\theta}{\tilde{C}_1(1-\cos\theta)},$$

bo'ladi, θ parametr esa faqat $(0,2\pi)$ oraliqning ichida o'zgarishi mumkin. U holda yoki $\theta=0$ yoki $\theta=\pi$ bo'ladi. Birinchi qiymat funksiya grafigining chap oxiriga mos keladi, shuning uchun o'ng oxiri uchun $\theta=\pi$ bo'ladi. $x(\theta)=b$ shartdan $\tilde{C}_1\pi=b$ ni olamiz, bundan $\tilde{C}_1=b/\pi$ bo'ladi.

Shunday qilib, funksional ekstremumining zaruriy shartini parametrik ko'rinishga ega bo'lgan

$$\begin{cases} x=\frac{b}{\pi}(\theta-\sin\theta), \\ y=\frac{b}{\pi}(\theta-\cos\theta), \end{cases}$$

yagona funksiya qanoatlantiradi.

2-§. Qo'zg'aluvchan chegarali variatsion masala

Yuqorida qarab o'tilgan oxirlari qo'zg'aluvchan masala juda oson umumlashtiriladi. Haqiqatan, agar bu masalani geometrik nuqtai nazardan qarasak, variatsion masalani oson ifodalashimiz mumkin, funksiya grafigining oxirlari vertikal tik chiziqlarda emas, balki

ixtiyoriy egri chiziqlarda yotadi yoki hech qanday chegaralanishlarga bo'ysunmaydi, ya'ni ular erkin bo'ladi. Bunga o'xshash masalalarning xususiyati shundan iboratki, bunda joiz funksiyalarning aniqlanish sohasi tayinlanmagan. Bu funksiyadan funksiyaga o'zgaradi. Bunday masalalarni birlashtirib, umumiy nomda: *chegaralari qo'zg'aluvchan masalalar* deb ataymiz.

Agar

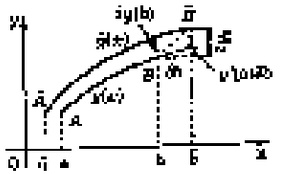
$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \qquad (9)$$

funksional aniqlangan ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi F integranti $[a,b]$ kesmaning turli aniqlanish sohalariga ega bo'lgan $y(x)$ funksiyalar to'plamida qaralsa, mazkur masalani qanday qilib korrekt qo'yish mumkin degan savol tug'iladi? Bu haqda quyidagilarni ta'kidlab o'tamiz. Agar $y(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, hamda kesmaning chetki nuqtalarida bir tomonlama hosilalari mavjud bo'lsaki, u holda bu funksiyani $[a_0,b_0]$ katta kesmagacha shunday davom ettirish mumkinki, davom ettirilgan $\tilde{y}(x)$ funksiya $[a_0,b_0]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi. Shuni hisobga olib, masalani quyidagicha qo'yish mumkin: quyidagi

$$J[y,a,b]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

funksionalni $C^1[a_0,b_0]$ sinfda va parametrlarning $a_0\le a\le b\le b_0$ qiymatlarida ekstremumini toping.

Biz variatsion masalani shunday qo'yishga erishdikki, qaysiki, funksionalning aniqlanish sohasi avvalgidek chiziqli fazo bo'ladi. Biroq bu fazo normallashgan fazo bo'la olmaydi. $C^1[a_0,b_0]$ fazoning tabiiy normasi funksiyalarning haqiqiy yaqinlik darajasini aks ettirmaydi, qaysiki u funksiyalar graflklarining oxirlarini yaqinlik darajasini aks ettirishi kerak. Mazkur holda funksiyalarning yaqinligini masofa yordamida berish mumkin. Oxirlari $A(a,y(a))$ $B(b,y(b))$ va $\tilde{A}(\tilde{a},y(\tilde{a}))$ $\tilde{B}(\tilde{b},y(\tilde{b}))$ nuqtali $y(x)$ va $\tilde{y}(x)$ ixtiyoriy funksiyalar uchun masofani



24 - rasm

$$\rho(\tilde{y},y)=\max_{x\in T}\{|\tilde{y}(x)-y(x)|+|\tilde{y}'(x)-y'(x)|\}+|\tilde{a}-a|+|\tilde{b}-b|.$$

ko'rinishda deb o'lamiz, bu yerda $T=[a,b]\cup[\tilde{a},\tilde{b}]$ (24-rasm). Oxiri $(b,y(b))$ nuqtali funksiyaning atrofi bu holda $(\tilde{a},y(\tilde{a}))$, $(\tilde{b},y(\tilde{b}))$ oxiri nuqtali $\rho(\tilde{y},y)<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\tilde{y}(x)$ funksiyalar to'plamidan iborat bo'ladi, bu yerda $\varepsilon>0$.

Qo'yilgan masalani 1.2-teorema [56] doirasida yozib bo'lmasligiga va biz oldin kiritilgan Gato yoki Freshe differensiali tushunchalaridan to'g'ridan-to'g'ri foydalana olmasligimizga qaramasdan, funksional ekstremumining zaruriy shartini olishning asosiy sxemasini bu yerda ham qo'llasa bo'ladi. Bu yerda funksionalning orttirmasi na faqat $\delta y=\tilde{y}-y$ funksiya variatsiyasiga bog'liq bo'ladi, balki, qo'zg'aluvchan chegaralarning $\delta a=\tilde{a}-a$ va $\delta b=\tilde{b}-b$ variatsiyalariga ham bog'liq bo'ladi. Ta'kidlash lozimki, agar $J[y,a,b]$ funksional uchun $\delta y,\delta a,\delta b$ – lar joiz variatsiyalar uchligi bo'lsa, u holda yetarlicha

– variatsion hisobning sodda masala uchun $\delta y_a - \delta y_b \cdot \delta a \quad \delta b$ da birinchi variatsiya uchun formula.

(11) formulani xulosasiga o'xshash formulani qo'zg'aluvchan $[a,b]$ kesmada aniqlangan bir necha funksiyaga bog'liq bo'lgan umumiy holdagi funksionallar uchun ham olish mumkin:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

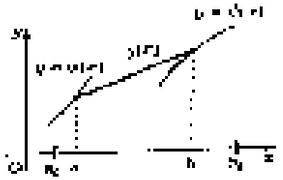
bu yerda $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in C^1[a,b]$. $F(x, y, y')$ esa ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya. Bu holda funksionalning variatsiyasi uchun

$$\delta J[y, \delta y, \delta a, \delta y_a, \delta b, \delta y_b] = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right) \delta y_i dx + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \delta y_{i\,a} +$$

$$+ \left(F - \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} y_i' \right)_{x=a} \delta b - \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \delta y_{i\,b} - \left(F - \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} y_i' \right)_{x=b} \delta a.$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Yana bir masalani qaraymiz. Aytaylik $J[y]$ funksional grafigining oxirlari $[a_1, b_1]$ kesmada aniqlangan ikkita tayinlangan $y = \varphi(x)$ va $y = \phi(x)$ funksiyalarda yotuvchi silliq funksiyalarda aniqlangan bo'lsin (25-rasm). Bunday aniqlanish sohali funksional variatsion masalasiga misol ikki egri chiziq orasidagi masofani hisoblash masalasini beradi.



25 - rasm

Agar qandaydir $y(x)$ funksiya $J[y]$ funksionalga ekstremum bersa, u holda u: grafigi $y(x)$ funksiyaning grafigi bilan umumiy oxirgi nuqtaga ega bo'lgan barcha funksiyalar ichida ekstremum nuqta

bo'ladi. Demak. ko'rsatilgan $y(x)$ funksiya Eyler tenglamasini qanoatlantiradi. ya'ni qaralayotgan funksionalning ekstremali bo'ladi. Binobarin. funksional variatsiyasi uchun umumiy (12) formulada birinchi qo'shiluvchi nolga teng bo'ladi. Shuning uchun mazkur holda funksional ekstremumining zaruriy sharti

$$\left(F_{y'} \right)_{x=a} \delta y_a + \left(F - F_{y'} y' \right)_{x=a} \delta b - \left(F_{y'} \right)_{x=b} \delta y_b + \left(F - F_{y'} y' \right)_{x=b} \delta a = 0.$$

ko'rinishni oladi. Joiz funksiyalar graflklarining oxirlari tayinlangan egri chiziqlarda yotganligi uchun

$$\delta y_a = \phi'(b)\delta b, \quad \delta y_b = \phi'(a)\delta a.$$

bo'ladi. Shuning uchun.

$$\delta J[y, \delta y, \delta a, \delta b] = \left(F + (\phi' - y')F_{y'} \right)_{x=a} \cdot \delta b - \left(F + (\varphi' - y')F_{y'} \right)_{x=a} \cdot \delta a = 0.$$

bo'ludi. δa va δa variatsiyalar bog'liq bo'lmaganligi sababli

$$\left(F + (\phi' - y')F_{y'} \right)_{x=a} = 0, \quad \left(F + (\varphi' - y')F_{y'} \right)_{x=b} = 0. \tag{13}$$

mazkur masala uchun chegaraviy shartlarga ega bo'lamiz. (13) chegaraviy shart *transversallik* sharti deb ataladi. (13) transversallik shartini qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiya haqida aytiladiki. u $y = \phi(x)$ va $y = \varphi(x)$ egri chiziqlarga transversal.

1-misol. Agar $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqta mahkamlangan bo'lib, boshqa $B(x_1, y_1, z_1)$ nuqta esa, $z = \varphi(x, y)$ sirtda yotsa, ya'ni $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$ bo'lsa. u holda quyidagi

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx. \tag{14}$$

ko'rinishdagi funksional uchun transversallik sharini toping.

Yechish. Mazkur holda transversallik sharti

– variatsion hisobning sodda masala uchun $\delta y_0 = \delta y_1 = \delta a = \delta b$ da birinchi variatsiya uchun formula.

(11) formulani xulosasiga o'xshash formulani qo'zg'aluvchan $[a,b]$ kesmada aniqlangan bir necha funksiyaga bog'liq bo'lgan umumiy holdagi funksionallar uchun ham olish mumkin:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

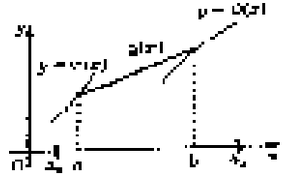
bu yerda $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in C^1[a,b]$. $F(x, y, y')$ esa ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya. Bu holda funksionalning variatsiyasi uchun

$$\delta J[y, \delta y, \delta a, \delta y_0, \delta b, \delta y_1] = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right) \delta y_i dx + \sum_{i=1}^n F_{y_i'} \delta y_{i0} +$$

$$+ \left(F - \sum_{i=1}^n F_{y_i'} y_i' \right)_{x=a} \delta b - \sum_{i=1}^n F_{y_i'} \delta y_{i1} - \left(F - \sum_{i=1}^n F_{y_i'} y_i' \right)_{x=a} \delta a,$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Yana bir masalani qaraymiz. Aytaylik $J[y]$ funksional grafigining oxirlari $[a,b]$ kesmada aniqlangan ikkita tayinlangan $y = \varphi(x)$ va $y = \psi(x)$ funksiyalarda yotuvchi silliq funksiyalarda aniqlangan bo'lsin (25-rasm). Bunday aniqlanish sohali funksional variatsion masalasiga misol ikki egri chiziq orasidagi masofani hisoblash masalasini beradi.



25 – rasm

Agar qandaydir $y(x)$ funksiya $J[y]$ funksionalga ekstremum bersa, u holda u. grafigi $y(x)$ funksiyaning grafigi bilan umumiy oxirgi nuqtaga ega bo'lgan barcha funksiyalar ichida ekstremum nuqta

bo'ladi. Demak. ko'rsatilgan $y(x)$ funksiya Eyler tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni qaralayotgan funksionalning ekstremali bo'ladi. Binobarin, funksional variatsiyasi uchun umumiy (12) formulada birinchi qo'shiluvchi nolga teng bo'ladi. Shuning uchun mazkur holda funksional ekstremumining zaruriy sharti

$$\left(F_{y'}\right)_{x=a} \delta y_0 + \left(F - F_{y'} y'\right)_{x=a} \delta b - \left(F_{y'}\right)_{x=b} \delta y_1 + \left(F - F_{y'} y'\right)_{x=b} \delta a = 0,$$

ko'rinishni oladi. Joiz funksiyalar grafiklarining oxirlari tayinlangan egri chiziqlarda yotganligi uchun

$$\delta y_0 = \varphi'(a)\delta b, \quad \delta y_1 = \psi'(a)\delta a.$$

bo'ladi, Shuning uchun,

$$\delta J[y, \delta y, \delta a, \delta b] = \left(F - (\varphi - y')F_{y'}\right)_{x=a} \delta b - \left(F + (\psi' - y')F_{y'}\right)_{x=b} \delta a = 0.$$

bo'ladi. δa va δa variatsiyalar bog'liq bo'lmaganligi sababli

$$\left(F + (\varphi' - y')F_{y'}\right)_{x=a} = 0, \quad \left(F + (\psi' - y')F_{y'}\right)_{x=b} = 0. \tag{13}$$

mazkur masala uchun chegaraviy shartlarga ega bo'lamiz. (13) chegaraviy shart *transversallik* sharti deb ataladi. (13) transversallik shartini qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiya haqida aytiladiki. u $y = \varphi(x)$ va $y = \psi(x)$ egri chiziqlarga transversal.

1-misol. Agar $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqta mahkamlangan bo'lib, boshqa $B(x_1, y_1, z_1)$ nuqta esa, $z = \omega(x, y)$ sirtda yotsa. ya'ni $z_1 = \omega(x_1, y_1)$ bo'lsa, u holda quyidagi

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx, \tag{14}$$

ko'rinishdagi funksional uchun transversallik sharini toping.

Yechish. Mazkur holda transversallik sharti

$$\begin{cases}(1+\varphi_x'^2)\Big|_{x_0} = 0,\\ (y'+\varphi_x'z')\Big|_{x_0} = 0.\end{cases}$$

yoki

$$\left(\frac{1}{\varphi_x'}\right)_{x_0} = \left(\frac{y}{\varphi_x'}\right)_{x_0} = \left(\frac{z}{-1}\right)_{x_0},$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu izlanayotgan ekstremalning $B(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadagi $\eta(y',z')$ urinma vektori bilan $z=\varphi(x,y)$ sirtning o'sha nuqtadagi $n(\varphi_x',\varphi_y',-1)$ normal vektoriga parallellik sharti bo'ladi. Shunday qilib, (14) ko'rinishdagi funksional uchun transversallik sharti ortogonallik shartiga keltiriladi.

2-misol. $z=\varphi(x,y)$ va $z=\psi(x,y)$ ikkita sirtlar orasidagi ekstremal masofa topilsin. Boshqacha qilib aytganda

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

funksionalning ekstremumini chegaraviy nuqtalardan birining (x_0,y_0,z_0) koordinatasi $z_0=\varphi(x_0,y_0)$ tenglamani qanoatlantiradi, boshqa chegaraviy nuqtalardan birining (x_1,y_1,z_1) koordinatasi $z_1=\psi(x_1,y_1)$ tenglamani qanoatlantiradi shartlari ostida topilsin.

Yechish. Integral ostidagi funksiya faqat y',z' largagina bog'liq bo'lganligi sababli, ekstremallar to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi.

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

funksional oldingi misoldagi

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}f(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx.$$

funksionalning xususiy holi bo'lganligi sababli, (x_0,y_0,z_0) nuqtadagi ham (x_1,y_1,z_1) nuqtadagi ham transversallik shartlari ortogonallik shartiga o'tadi. Bundan, funksional ekstremumga faqat (x_0,y_0,z_0) nuqtadan $z=\varphi(x,y)$ sirtga ortogonal bo'lgan, (x_1,y_1,z_1) nuqtadan $z=\psi(x,y)$ sirtga ortogonal bo'lgan to'g'ri chiziqlardagina erishishi mumkin.

3-misol. Quyidagi

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2+2yz\right)dx,$$

funksionalni $y(0)=0$, $z(0)=0$ va $B(x_1,y_1,z_1)$ nuqta $x=x_1$ tekislik bo'ylab harakat qilishi shartlari ostida ekstremumga tekshiring.

Yechish. Mazkur funksional uchun Eyler tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases}z''-y=0,\\ y''-z=0.\end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerdan $y^{IV}-y=0$, bo'lib, uning umumiy yechimi

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x,$$

bo'ladi. $z=y''$ ekanligidan,

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x,$$

bo'ladi. $y(0)=0$, $z(0)=0$, shartdan $C_1+C_3=0$, $C_1-C_3=0$, ekanligidan, $C_1=C_3=0$, kelib chiqadi.

Qo'zg'aluvchan chegaraviy nuqtadagi shart

$$\left(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\right)_{x_1,y_1,z_1}\cdot\delta x_1 + \left(F_{y'}\right)_{x_1,y_1,z_1}\cdot\delta y_1 + \left(F_{z'}\right)_{x_1,y_1,z_1}\cdot\delta z_1 = 0.$$

ko'rinishda bo'ladi. $\delta x_1 = 0$, δy_1 va δz_1 variatsiyalarning ixtiyoriyligidan quyidagi

$$\left(F_{y'}\right)_{x_1,y_1,z_1} = 0, \quad \left(F_{z'}\right)_{x_1,y_1,z_1} = 0,$$

Shartga ega bo'lamiz. Qaralayotgan masalada $F_{y'} = 2y'$, $F_{z'} = 2z'$ bo'lganligi uchun $y'(x_1) = 0$, $z'(x_1) = 0$, yoki

$$C_2\sinh x_1 + C_4\cos x_1 = 0, \quad C_3\sinh x_1 + C_4\cos x_1 = 0.$$

bo'ladi. Agar $x_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda $C_4 = C_3 = 0$ bo'ladi va ekstremumga faqat $y = 0, z = 0$ to'g'ri chiziqlardagina erishishi mumkin. Agarda $\cos x_1 = 0$, bo'lsa, ya'ni $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, bo'ladi, bu yerda n – butun son, u holda $C_2 = 0$, C_1 - ixtiyoriy o'zgarmas bo'lib, natijada $y = C_1\sin x$, $z = -C_1\sin x$ ekstremallarga ega bo'lamiz. Oxirgi holda ixtiyoriy C_1 da $J[y,z] = 0$ bo'lishligini tekshirish qiyin emas.

112. $A(1,0)$ nuqtadan $4x^2 + 9y^2 = 36$ ellipsgacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

113. $A(-1,5)$ nuqtadan $y^2 = x$ paraboloagacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

114. $x^2 + y^2 = 1$ aylanadan $x + y = 4$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

115. $A(-1,3)$ nuqtadan $y = 1 - 3x$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

116. $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $A(x,y) \neq 0$. ko'rinishdagi funksional

uchun chegaraviy nuqtalarda transversallik sharti

4- misol. Quyidagi ko'rinishdagi

$$J[y] = \int_a^b f(x,y)e^{\varphi(x,y)}\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad f(x,y) \neq 0.$$

funksional uchun transversallik sharti topilsin.

Yechish. Aytaylik ekstremalning chap uchi $A(x_0,y_0)$ nuqtaga, o'ng uchi $B(x_1,y_1)$ esa $y = \phi(x)$ egri chiziqda joylashgan bo'lsin. U holda

$$\left(F + (\phi' - y')F_{y'}\right)_{x_1} = 0$$

ifodani olamiz. Bizning holimizda

$$F = f(x,y)e^{\varphi(x,y)}\sqrt{1+y'^2}, \quad F_{y'} = f(x,y)e^{\varphi(x,y)}\cdot\frac{1+y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

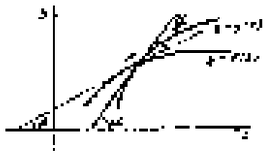
bo'ladi. Transversallik shartlari esa quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left[f(x,y)e^{\varphi(x,y)}\sqrt{1+y'^2} + (\phi' - y')e^{\varphi(x,y)}\frac{1+y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x_1} = 0.$$

Bu yerdan, $f(x,y) \neq 0$ shartga ko'ra.

$$\frac{\phi' - y'}{1 + \phi' y'} = -1, \tag{15}$$

ifodaga ega bo'lamiz. (15) shart geometrik nuqtai nazardan, $y = y(x)$ ekstremal $\frac{\pi}{4}$ burchak ostida $B(x_1,y_1)$ chegaraviy nuqta harakatlanadigan $y = \phi(x)$ egri chiziqni kesishi kerakligini anglatadi. Aslida (15) shartni quyidagicha tasavvur qilish mumkin: $y = \phi(x)$ egri chiziqda yotuvchi $B(x_1,y_1)$ chegaraviy nuqtada ekstremalga o'tkazilgan urinma Ox o'qini



26 - rasm

α burchak ostida kesadi, berilgan $y=\phi(x)$ egri chiziqqa o'tkazil gan urinma esa Ox o'qini β burchak ostida kesadi (26-rasm). U holda $tg\alpha=y'$, $tg\beta=\phi'$ va (15) formulaning chap tomoni $tg(\beta-\alpha)$ ifodani beradi, lekin $-1=tg(-\frac{\pi}{4})$, bo'ladi, shuning uchun $\beta-\alpha=-\frac{\pi}{4}$ ga teng bo'ladi, bu yerdan $\alpha=\beta-\frac{\pi}{4}$ bo'lib, bu bilan talab qilingan tasdiq isbot bo'ldi.

5-misol. Amaliyotda ko'p uchraydigan

$$J[y]=\int_a^b A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

funksional uchun transversallik shartini geometrik ma'nosini tahlil qilaylik, bu yerda $A(x,y)$ ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya. Aytaylik, bu funksionalni grafigining oxirlari ikkita tayinlangan $y=\varphi(x)$ va $y=\phi(x)$ funksiyalarda harakat qiluvchi silliq funksiyalarda ekstremumga tekshirishni talab etilsin, bu yerda $y=\varphi(x)$ va $y=\phi(x)$ funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi. Mazkur holda

$$F(x,y,y')=A(x,y)\sqrt{1+y'^2}$$

va

$$f_{y'}(x,y,y')=A(x,y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{A\cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Shuning uchun,

$$A+(\phi'-y')f_{y'}=A+\frac{A\cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}}(\phi'-y')=A\cdot\left(1+\frac{y'\phi'-y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=\frac{A(1+y'\phi')}{\sqrt{1+y'^2}},$$

bo'ladi.

Bundan ko'ramizki, bunday tipdagi funksionallar uchun transversallik sharti sodda ifodalanadi ekan: b nuqtada $y'(b)=-1/\phi'(x)$ va a nuqtada $y'(a)=1/\varphi'(a)$ bo'ladi. Shunday qilib, mazkur chegaralari qo'zg'aluvchan masalada $y=\alpha(x)$ va $y=\phi(x)$ egri chiziqlarga qaraluvchi funksional ekstremallarining transversallik sharti - ularning bu egri chiziqlarga ortogonalligidadir.

6-misol. $y=x^2$ parabola bilan $x-y=5$ to'g'ri chiziq orasidagi masofa topilsin.

Yechish. Masala

$$J=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

integralni ekstremal qiymatini ekstremalning chap oxiri $y=x^2$ egri chiziqda, o'ng oxiri esa $x-y=5$ egri chiziqda harakat qilishi sharti ostida topishga keltiriladi. Shunday qilib, bizning holda $\alpha(x)=x^2, \beta(x)=x-5$. Eyler tenglamasining umumiy yechimi $y(x)=C_1x+C_2$ bo'ladi, bu yerda C_1 va C_2 – aniqlanishi kerak bo'lgan ixtiyoriy o'zgarmaslar. Ushbu masala uchun (11) transversallik sharti

$$\left.\sqrt{1+y'^2}+(2x-y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=a}=0,$$

$$\left.\sqrt{1+y'^2}+(1-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=b}=0$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $y'=C_1$. (12) tenglama bizning holda

$$\begin{cases}C_1x_0+C_2=x_0^2,\\ C_1x_1+C_2=x_1-5.\end{cases}$$

shunday qilib, to'rt C_1, C_2, x_0, x_1 noma'lumli to'rtta tenglamalar sistemasiga ega bo'ldik:

$$\begin{cases} \left| \sqrt{1+(-1)^2} + (1)(x_0) - C_1 \right| \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}} \\ \sqrt{1-x_0^2} + (1)(-x_0) - C_2 \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \\ y_0 = x_0 + C_1 \\ y_1 = x_1 + C_1 \end{cases}$$

bu sistemani yechib, $C_1 = -1, C_2 = \frac{3}{4}, x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{23}{8}$ qiymatlarni topamiz. Demak, ekstremal tenglamasi $y = x - \frac{3}{4}$ bo'ladi va parabola va to'g'ri chiziq orasidagi masofa

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1+1^2}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1+(-1)^2}\,dx = \left(\sqrt{2}x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} = \frac{19\sqrt{2}}{8}$$

qiymatga teng bo'ladi.

$$y(x) = -\frac{1}{\varphi'(x)}, \quad \text{va} \quad y(x) = -\frac{1}{\phi'(x)}$$

bo'lishligini isbot qiling, ya'ni transversallik sharti ortogonallik shartiga keltiriladi.

2.1. Ikki o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan funksional uchun qo'zg'aluvchan chegarali masala.

(9) funksionalni ekstremumga tadbiq qila turib, $A(x_0, y_0, z_0)$ va $B(x_1, y_1, z_1)$ chegaraviy nuqtalarning hech bo'lmaganda bittasi berilgan egri chiziqda harakat qiladi deb hisoblaymiz.

$J[y, z]$ funksional ekstremumga faqat quyidagi Eyler tenglamalar sistemasining

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0, \end{cases}$$

integral egri chiziqlaridagina erishadi.

Aytaylik, $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqta mahkamlangan, boshqa chegaraviy $B(x_1, y_1, z_1)$ nuqta esa,

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \phi(x), \end{cases}$$

tenglamalar bilan berilgan qandaydir egri chiziqda harakatlanadi. Bu holda transversallik sharti quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left(F + (\bar{\varphi}' - y')F_{y'} + (\bar{\phi}' - z')F_{z'}\right)\Big|_{x=x_1} = 0,$$

Xuddi shunga o'xshash transversallik shartini chap oxiri uchun ham yozish mumkin (agar u ham

$$\begin{cases} y = \bar{\varphi}(x), \\ z = \bar{\phi}(x), \end{cases}$$

tenglamalar bilan berilgan qandaydir egri chiziqda harakatlansa):

$$\left(F + (\bar{\varphi}' - y')F_{y'} + (\bar{\phi}' - z')F_{z'}\right)\Big|_{x=x_0} = 0,$$

4-misol. $M(x_1, y_0, z_0)$ nuqtadan $\begin{cases} y = ax + \beta, \\ z = \alpha x + \gamma \end{cases}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

Yechish. Masala

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx \qquad (16)$$

integralni ekstremumini ekstremalning o'ng oxiri

$$\begin{cases} y = mx + p, \\ z = nx + q. \end{cases} \qquad (17)$$

egri chiziqda harakat qiladi sharti ostida topishga keltiriladi, bizning holimizda $\varphi(x), \psi(x)$ funksiyalar mos ravishda $\varphi(x) = mx + p, \psi(x) = nx + q$, ko'rinishga ega bo'ladi. Eyler tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$\begin{cases} y(x) = C_1 x + C_2, \\ z(x) = C_3 x + C_4. \end{cases} \qquad (18)$$

bo'ladi, bu yerda $C_i, i = 1,2,3,4$, lar aniqlanishi kerak bo'lgan ixtiyoriy o'zgarmaslar. O'ng oxiriga qo'yilgan transversallik sharti

$$\left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + (m - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + (n - z') \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right]_{x = x_1} = 0.$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerdan $y'(x) = C_1$, $z'(x) = C_3$ ekanligini hisobga olib,

$$1 - mC_1 + nC_3 = 0. \qquad (19)$$

tenglikni olamiz. (17) munosabat (18) izlanayotgan to'g'ri chiziqni berilgan (17) to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ekanligini ifodalaydi. Izlanayotgan (18) to'g'ri chiziq $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tishligidan foydalanib,

$$\begin{cases} y_0 = C_1 x_0 + C_2, \\ z_0 = C_3 x_0 + C_4. \end{cases} \qquad (20)$$

tenglikka ega bo'lamiz, yana o'ng oxir (17) chiziqda harakatlanishidan.

$$\begin{cases} C_1 x_1 + C_2 = mx_1 + p, \\ C_3 x_1 + C_4 = nx_1 + q, \end{cases} \qquad (21)$$

sistemaga ega bo'lamiz. Endi bu (19), (20) va (21) beshta tenglamadan $C_i, i = 1,2,3,4$ va x_1 ($x_0, y_0, z_0, m, n, p, q$ – berilgan sonlar) larni topish kerak bo'ladi. (16) integralni topish uchun x_1, C_1 va C_3 ni bilish yetarli. U holda

$$x_1 = \frac{x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)}{1 + m^2 + n^2},$$

$$C_1 = \frac{mx_0 + m(z_0 - q) - (1 + n^2)(y_0 - p)}{n(y_0 - p) + m(z_0 - q) - x_0(m^2 + n^2)},$$

$$C_3 = \frac{nx_0 + n(y_0 - p) - (1 + m^2)(z_0 - q)}{n(y_0 - p) + m(z_0 - q) - x_0(m^2 + n^2)}.$$

munosabatlarga ega bo'lamiz, bu miqdorlarni (13) ifodaga qo'yib,

$$I_0 = \min J[y, z] = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - p)^2 + (z_0 - q)^2} - \frac{|x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)|}{1 + m^2 + n^2},$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqta qo'zg'almas bo'lib, boshqa chegaraviy $B(x_1, y_1, z_1)$ nuqta esa, biror $z = \varphi(x, y)$ sirtda harakat qilsa, u holda transversallik sharti

$$\begin{cases} \left(F - y' F_{y'} + (\varphi_x - z') F_{z'} \right)_{x = x_1} = 0, \\ \left(F_{y'} + F_{z'} \varphi_y \right)_{x = x_1} = 0. \end{cases} \qquad (22)$$

ko'rinishda bo'ladi. (22) shart $z = \varphi(x, y)$ tenglama bilan birgalikda, umuman aytganda Eyler tenglamasining ikkita ixtiyoriy o'zgarmaslarini aniqlashga imkon beradi (ikki boshqa o'zgarmuslar esa ekstremal $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tish shartidan topiladi). Agar qo'zg'aluvchi nuqta $A(x_1, y_1, z_1)$ chegaraviy nuqta bo'lsa, u holda $x = x_0$ da mutlaqo (22) shartga o'xshash shartni olamiz.

funksiyani $\varphi(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ *ko'rinishda olgan edik.* $\varphi(x,y)=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ *ko'rinishda olsak ham (24) shart saqlanib qolishligini tekshirish qiyin emas.*

2. Geometrik mulohazalardan ko'rinib turibdiki, (29) ekstremal $x^2+y^2+z^2=1$ *sferaga ortogonal.*

6-misol. Oldingi misoldagi

$$J=\int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

funksionalni ekstremallari tadqiq qilish masalasini qaraymiz, faqat A nuqta sifatida $O(0,0,0)$ sfera markazini olamiz.

Yechish. Funksionalning ekstremumlari (25) to'g'ri chiziqlar bo'ladi va ekstremalning $A(0,0,0)$ nuqtadan o'tish sharti $C_2=C_4=0$ qiymatlarni beradi.

Transversallik shart hali - hamon

$$\begin{cases} z_1-C_3x_1=0, \\ C_2y_1-C_3y_1=0. \end{cases} \tag{30}$$

ko'rinishda bo'ladi. Qo'zg'aluvchi oxirda esa

$$\begin{cases} y_1=C_1x_1, \\ z_1=C_3x_1, \end{cases} \tag{31}$$

va nihoyat,

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=1, \tag{32}$$

ko'rinishda bo'ladi. C_1,C_3,x_1,y_1 va z_1 miqdorlarni aniqlash uchun biz beshta (29) , (31) va (32) munosabatlarga egamiz, ulardan erkin bog'liqmaslari uchta:

$$\begin{cases} y_1=C_1x_1, \\ z_1=C_3x_1, \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2=1. \end{cases} \tag{33}$$

(33) munosabatdan foydalanib,

$$x_1=\pm\frac{1}{\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}},\quad y_1=\pm\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}},\quad z_1=\pm\frac{C_3}{\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}},$$

topamiz, bu yerda C_1,C_3 – ixtiyoriy o'zgarmaslar. Bu ixtiyoriylik geometrik nuqtai nazardan tushunarli albatta: $O(0,0,0)$ nuqtadan (23) sferagacha bo'lgan masofa ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha bir xil, ya'ni C_1,C_3 – o'zgarmaslarning ixtiyoriy qiymatlarida.

$J[y,z]$ funksionalning

$$\begin{cases} y=C_1x, \\ z=C_3x, \end{cases}$$

ekstremallardagi qiymati

$$J[y,z]=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}}}\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}\,dx=1,$$

ga teng bo'ladi.

117. Agar transversallik sharti barcha boshlang'ich berilganlarda ortogonallik sharti bilan ustma-ust tushsa, u holda integral ostidagi F ifoda quyidagi

$$F=f(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

tuzulishga ega bo'lishini ko'rsating, bu yerda $f(x,y,z)$ barcha x,y,z – argumentlari bo'yicha ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiya.

118. $M(0,0,3)$ nuqtadan $z=x^2+y^2$ sirtgacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

119. $M(2,0,5)$ nuqtadan $z=x^2+y^2$ sirtgacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

120. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ va $x^2+y^2+z^2=4$ sirtlar orasidagi eng qisqa masofa topilsin.

121. Quyidagi

$$J[y,z]=\int_a^b (y'^2+z'^2+2yz)dx$$

funksionalni $y(0)=z(0)=0$ va $B(x_1,y_1,z_1)$ nuqta $x=x_1$ bo'yicha harakat qiladi shartlari ostida ekstremumga tekshiring.

3-§. Burchak nuqtali ekstremallar. Ekstremallarning aks etishi va sinishi haqidagi masalalar

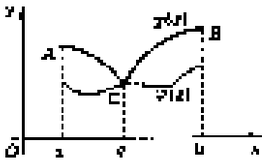
Variatsion hisobda shunday masalalar uchraydiki, qaysiki, funksionalning aniqlanish sohasi $C^1[a,b]$ sinf bilangina chegaralanib qolmaydi. Masalaning qo'yilishidan funksionalga ekstremum beruvchi funksiya ayrim nuqtalarda differensiallanuvchilikni yo'qotishi mumkinligi kelib chiqadi, agar bu nuqtalarda bir tomonlama hosilaga ega bo'lsa, u holda bu hosilalar farqlanadi. Bunday masalalar qatoriga yorug'lik nurining aks etishi va sinishi haqidagi masalalarning umumlashmasi hisoblangan ekstremallarning aks etishi va sinishi masalalari kiradi.

Ekstremallarning aks etishi haqidagi masalasi. Bu masala quyidagicha qo'yiladi. Tayinlangan $A(a,y_a)$ va $B(b,y_b)$ nuqtalarni tutashtiruvchi va $y=\varphi(x)$ egri chiziqda joylashgan $C(c,y_c)$ burchak nuqtasiga ega bo'lgan $y=y(x)$ egri chiziqni topish talab etilsin.

bundan tashqari, $y=y(x)$ funksiya

$$J[y]=\int_a^b f(x,y,y')dx$$

funksionalga ekstremum beradi (27- rasm).



27 - rasm

Bu holda $J[y]$ funksionalning aniqlanish sohasi bitta burchak nuqtasi bo'lishi mumkin bo'lgan nuqtadan tashqari, $[a,b]$ kesmaning hamma joyida uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamidan iborat, ya'ni, bu nuqtada bir tomonlama hosila mavjud. Ta'kidlashimiz lozimki, agar $y(x)$ funksiya $J[y]$ funksionalga ekstremum bersa va uning burchak nuqtasi $C(c,y_c)$ bo'lsa, u holda funksiyaning $[a,c]$ va $[c,b]$ kesmalardagi torayishi funksionalga ekstremali bo'ladi. Haqiqatan, $C(c,y_c)$ nuqtani va funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi qiymatini tayinlab, qaysiki o'zgarmas qiymati ($[a,b]$ kesma bo'yicha integralning qiymati) bilan dastlabki funksionaldan farq qiluvchi va $y(x)$ funksiyada minimumga erishuvchi

$$J_1[y]=\int_a^c f(x,y,y')dx.$$

funksionalni $C^1[a,c]$ funksiyalar sinfida qarashimiz mumkin. Demak, $y(x)$ funksiya $[a,c]$ kesmada Eyler tenglamasining yechimi bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash mulohazalarni $[c,b]$ kesma uchun ham keltirishimiz mumkin.

$J[y]$ funksionalni ikkita integral yig'indisi ko'rinishida tasvirlash qulay

$$J[y]=\int_a^c f(x,y,y')dx+\int_c^b f(x,y,y')dx=J_1[y]+J_2[y].$$

U holda funksional ekstremumining zaruriy sharti

$$\delta J_1[y;\delta y]+J_2[y;\delta y]=0$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Mohiyatidan biz ikkita variatsion masalaga ega bo'lamiz: birinchisi $[a,c]$ kesmada chap oxiri tayinlangan va o'ng bilan $y=\varphi(x)$ egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi masala; ikkinchisi - $[c,b]$ kesmada chap oxiri $y=\varphi(x)$ egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi o'ng oxiri tayinlangan masala. Biz $[a,c]$ va $[c,b]$ kesmalarda faqat tadqiq qilinayotgan funksionalning ekstremallarinigina qaraymiz. Mazkur holda $J_1[y]$ va $J_2[y]$ funksionallarning birinchi variatsiyasi quyidagi

$$\delta J_1[y;\delta y]=\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}'\right)_{x=c}\delta c,\qquad \delta J_2[y;\delta y]=-\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}'\right)_{x=c}\delta c.$$

ko'rinishga ega bo'ladi (V-bob 4 paragrafga qarang). U holda δc ixtiyoriyligiga ko'ra, funksional ekstremumining zaruriy sharti $\delta J_1[y;\delta y]+J_2[y;\delta y]=0$,

$$\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}'\right)_{x=c}-\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}'\right)_{x=c}=0.$$

yoki

$$\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}'\right)_{x=c}=\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}'\right)_{x=c}. \tag{34}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (34) shartni *aks etish sharti* deb aytamiz.

Endi amaliyotda ko'p uchraydigan

$$J[y]=\int_a^b A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{35}$$

fuksional uchun aks etish shartini fizik ma'nosini tahlil qilaylik. Aks

etish sharti ushbu fuksional uchun oddiy ko'rinishni oladi. Mazkur holda

$$f(x,y,y')=A(x,y)\sqrt{1+y'^2},\quad f_{y'}'(x,y,y')=A(x,y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{f\cdot y'}{1+y'^2}.$$

Shuning uchun,

$$f+(\varphi-y')f_{y'}'=f+\frac{f\cdot y'}{1+y'^2}(\varphi-y')=f+\left[1+\frac{y'\varphi-y'^2}{1+y'^2}\right]=\frac{f(1+y'\varphi)}{1+y'^2}.$$

(34) tenglikka ko'ra,

$$F+(\varphi-y')F_{y'}'=f+\frac{A\cdot(1+y'\varphi')}{1+y'^2}=\frac{A(1+y'\varphi)}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

bo'ladi, $A(x,y)\neq 0$ bo'lganda

$$\frac{1+y'\varphi}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=c}=\frac{1+y'\varphi'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=c} \tag{36}$$

ifodani olamiz.

Aytaylik, β_1,β_2 - lar $y=y(x)$ egri chiziqqa C nuqtadan (o'ngdan va chapdan) o'tkazilgan bir tomonlama urinmalarning og'ish burchaklari, α - $y=\varphi(x)$ egri chiziqqa o'sha nuqtadan o'tkazilgan urinmaning og'ish burchagi bo'lsin (28-rasm). U holda tushish burchagi, ya'ni AC yoy bilan $y=\varphi(x)$ egri chiziq orasidagi o'tkir burchak, $\pi-\beta_1+\alpha$ - aks etish burchagiga teng, ya'ni CB yoy bilan $y=\varphi(x)$ egri chiziq orasidagi o'tkir burchak $\beta_2+\alpha$ ga teng.

Bunda

$$tg\beta_1=y'(c-0),\quad tg\beta_2=y'(c+0),\quad tg\alpha=\varphi'(c),$$

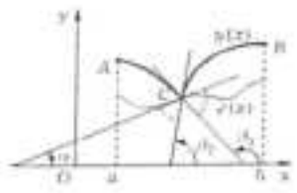
bo'lganligidan, (4) shartni quyidagicha

$$\frac{1+tg\alpha\cdot tg\beta_1}{|\sec\beta_1|}=\frac{1+tg\alpha\cdot tg\beta_2}{|\sec\beta_2|}$$

yozish mumkin. β_1 va β_2 larning burchak kosinuslari har xil ishoralarga ega (bu burchaklarning biri o'tkir, ikkinchisi o'tmas) bo'lganligini hisobga olsak,

$$\cos\beta_1(1+tg\alpha\cdot tg\beta_1)+\cos\beta_2(1+tg\alpha\cdot tg\beta_2)=0,$$

ifodaga ega bo'lamiz yoki ma'lum almashtirishlardan so'ng quyidagi



28 - rasm

$$\cos(\beta_1-\alpha)+\cos(\beta_2-\alpha)=0,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Olingan tenglik, qaralayotgan burchaklarning o'zgarish diapazonida $\pi-\beta_1+\alpha=\beta_2-\alpha$ tenglik o'rinli ekanligini anglatadi, ya'ni, $y=y(x)$ egri chiziqning tushish burchagi aks etish burchagiga tengligini anglatadi. Agar yorug'lik nuri $y=\varphi(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan bir jinsli bo'lmagan yassi muhitda $v(x,y)$ tezlik bilan tarqalsa, u holda nurning $A(a,y_a)$ nuqtadan $B(b,y_b)$ nuqtaga o'tish vaqti (sarf qilgan vaqti) quyidagi

$$T=\int_a^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}dx \qquad (37)$$

integral orqali ifodalanadi. Yorug'lik shunday tarqaladiki, nur bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga minimal vaqtda o'tadi. Shunday qilib biz, (35) ko'rinishdagi variatsion masala bilan ish yuritamiz. Nurning haqiqiy trayektoriyasi variatsion masalaning yechimi bo'ladi, biz ma'lum fizik qonunning tasdig'ini olamiz: *yorug'lik nurining aks etuvchi sirtga tushish burchagi aks etish burchagiga teng.*

Ekstremallarning sinishi haqidagi masala. Aytaylik, variatsion

hisobning quyidagi sodda masalasida

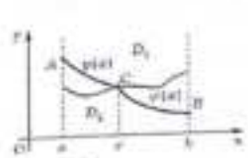
$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx, \qquad (38)$$

$$y(a)=c,\quad y(b)=d, \qquad (39)$$

joiz funksiya grafigining $A(a,y_a)$ va $B(b,y_b)$ oxirlari $\{(x,y):a\le x\le b\}$ yo'lakni ikkita D_1 va D_2 sohalarga bo'luvchi $y=\varphi(x)$ silliq egri chiziqning turli tomonlalarida bo'lsin (29 -rasm), uning uchun

$$F(x,y,y')=\begin{cases}F_1(x,y,y'), & (x,y)\in D_1;\\ F_2(x,y,y'), & (x,y)\in D_2,\end{cases}$$

ko'rinishda bo'lsin, bu yerda $F_1(x,y,y')$ va $F_2(x,y,y')$ funksiyalar o'zining barcha argumentlari bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar. Bu masa-lada ham oldingi masalaga o'xshash, funksionalning aniqlanish sohasi sifatida qaysiki grafigi $y=\varphi(x)$ egri chiziq bilan kesishish nuqtasida sinishga ega bo'lgan funksiyalar sinfidan tanlashga to'g'ri keladi. Joiz funksiya uzluksiz, ko'rsatilgan nuqtalarda esa chekli bir tomonlama hosilaga ega deb faraz qilamiz. Funksional ekstremumini shunday funksiyalar ichidan izlash kerakki, qaysiki, ular silliq bo'lgan oraliqlarda bu funksionalning ekstremali bo'lsin. $C(c,y_c)$ nuqta qo'zg'aluvchi, uning koordinatalari $y_c=\varphi(c)$ munosabat bilan bog'langan. Shuning uchun, bundan oldingi banddagi ekstremallarni aks etishi holidagi kabi,



29 - rasm

$$\delta J=\left(F_1+(\varphi'-y')(F_1)'_y\right)_{x=a}\delta c-\left(F_2+(\varphi'-y')(F_2)'_y\right)_{x=a}\delta c,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ekstremumning $\delta J=0$ zaruriy shartini

ko'rsatilgan ko'rinishdagi funksiyalarda quyidagicha yozish mumkin:

$$\left(F_1+(\varphi'-y')(F_1)_{y'}\right)_{x=a}=\left(F_2+(\varphi'-y')(F_2)_{y'}\right)_{x=a}. \qquad (40)$$

(40) shart ekstremallarning *sinish sharti* deb ataladi. Kengaytirilgan holda uni quyidagi

$$F_1(c,\varphi(c),y'(c-0))+(\varphi'(c)-y'(c-0))(F_1)_{y'}\left(c,\varphi(c),y'(c-0)\right)=$$

$$=F_2(c,\varphi(c),y'(c+0))+(\varphi'(c)-y'(c+0))(F_2)_{y'}\left(c,\varphi(c),y'(c+0)\right),$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Ekstremallarini sinishi haqidagi masalasini yechish uchun, tadqiq etilayotgan funksionalning ekstremallarini D_1 va D_2 sohalarda $F_1(x,y,y')$ va $F_2(x,y,y')$ integrantlar uchun yozilgan ikkita Eyler tenglamasini yechib topish kerak bo'ladi. D_1 va D_2 sohalardagi ekstremallar ichidan shunday $y_1(x)$ va $y_2(x)$ juftligini tanlash kerakki, ular quyidagi chegaraviy

$$y_1(a)=y_a,\quad y_1(c)=\varphi(c),\quad y_2(a)=\varphi(c),\quad y_2(b)=y_B,$$

shartlarni hamda (40) sinish shartini qanoatlantirsin. Funksionalning ekstremumi faqat shunday funksiyalardagina erishishi mumkin.

Endi s inish shartini fizik ma'nosini tahlil qilamiz, buning uchun oldingi bandda (35) ko'rinishdagi, qaysiki, $A(x,y)$ funksiya $y=\varphi(x)$ uzulish chizig'iga ega bo'lgan funksionalni qaraymiz. D_1 sohada $A(x,y)=A_1(x,y)$ va D_2 sohada $A(x,y)=A_2(x,y)$ deb belgilab va oldingi banddagi (36) tenglikdan foydalanib,

$$A_1(x,y)\frac{1+y'\varphi'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=a}=A_2(x,y)\frac{1+y'\varphi'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=a}$$

ko'rinishdagi sinish shartini yozishimiz mumkin. Ekstremallarni aks etish holidagiga o'xshash β_1,β_2,α belgilashlarni kiritib va o'xshash almashtirishlarni amalga oshirgandan so'ng,

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)}=\frac{A_2(c,\varphi(c))}{A_1(c,\varphi(c))}, \qquad \text{yoki} \qquad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right)}=\frac{A_2(c,\varphi(c))}{A_1(c,\varphi(c))},$$

tenglikni olamiz.

Yorug'likning tarqalishi oldingi banddagi (38) funksional bilan tavsiflanadi, buning uchun

$$A_1(x,y)=\frac{1}{v_1(x,y)},\quad A_2(x,y)=\frac{1}{v_2(x,y)},$$

va mazkur holda sinish sharti quyidagi

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right)}=\frac{v_2(c,\varphi(c))}{v_1(c,\varphi(c))},$$

ko'rinishga aylantiriladi. Bu munosabat *Snelliusning yorug'likning sinish* qonunini ifodalaydi, qaysiki: *tushish burchagining sinusini sinish burchagining sinusiga nisbati ikki muhitdagi yorug'likni tarqalish tezliklarini nisbatiga teng.*

Ekstremallarni aks etishi va sinishi masalalarida ekstremumga erishtiruvchi funksiyalarning grafigida sinish nuqtasining borligi masalaning qo'yilishidan kelib chiqadi. Lekin, hattoki, silliq integrantli masalalarda ham har qanday qo'shimcha shartlarning ishtirokisiz funksional uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar sinfida ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin, variatsion masalaning yechimini esa kengroq funksiyalar sinfidan, qaysiki, masalan, grafigi sinish nuqtasiga

ega bo'lgan funksiyalar orasidan qidirishga to'g'ri keladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, burchak nuqtali ekstremallar faqat aks etish yoki ekstremallarning sinishi haqidagi masalalardagina paydo bo'ladi deb o'ylash kerak emas. Ekstremumga burchak nuqtali ekstremallarda, xattoki, (34) funksionalning ekstremumini topish masalasida ham erishish mumkin. Joiz egri chiziqlar qo'imcha shartlar qanday bo'lmasin, A va B nuqtalardan o'tishi shart.

1-misol. Quyidagi

$$J[y]=\int_0^2 y'^2(1-y')^2dx, \tag{41}$$

funksionalni $y(0)=0,\ y(2)=1$ chegaraviy shartlar ostida ekstremumga tek-shiring.

Yechish. Integrant $y'^2(1-y')^2\geq 0$ bo'lganligi sababli, har qanday joiz $y=y(x)$ funksiyada funksional $J[y]\geq 0$ bo'ladi. Bu yerda funksionalni $J[y]=0$ qiladigan har qanday $y=y(x)$ funksiyani hattoki, u $[0,2]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lmasa ham funksionalning ekstremum nuqtasi deb qarash mumkin. Bunday funksiya sifatida quyidagi funksiyani olishimiz mumkin



30 -rasm

$$y(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x\leq 1,\\ 1, & 1\leq x\leq 2.\end{cases}$$

Albatta, bunday funksiyalar yagona emas. Bunday funksiyaga hosilasi faqat ikkitagina 0 va 1 qiymatlarnigina qabul qiluvchi har qanday bo'laklichiziqli funksiya to'g'ri keladi (bitta yoki bir nechta sinish nuqtalaridan tashqari) (30- rasm).

Agar $y=y(x)$ funksiya $[0,2]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $y=y(x)$ funksiya $[0,2]$ kesmada uzluksiz bo'ladi va shuning uchun ikkitagina 0 va 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin emas. Binobarin, (41) integral ostidagi manfiy bo'lmagan funksiya kamida bitta nuqtada noldan farqli. Demak, uzluksiz differensiallanuvchi $y=y(x)$ funksiya uchun $J[y]>0$ ifodaga ega bo'lamiz. Ayni vaqtda ko'rsatish mumkinki, funksiyaning har qanday atrofi shunday silliq egri chiziqlarga ega, qaysiki, funksionalning qiymati uzluksizligiga ko'ra, funksionalning $y=y_1(x)$ funksiyadagi qiymatidan kichik farq qiladi, ya'ni 0 qiymatidan. Shunday qilib, 0 qiymat funksional qiymatining aniq quyi chegarasi bo'ladi, bu qiymatga uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalarda erishib bo'lmaydi.

Endi agar uning aniqlanish sohasibu $[a,b]$ kesmada bo'lakli-silliq funksiyalar to'plamidan iborat bo'lsa, u holda (38) funksionalning ekstremum nuqtalari qanoatlantirishi kerak bo'gan shartni topamiz. Funksiyani T oraliqda bo'lakli-silliq deb ataymiz, agarda u o'sha oraliqda uzluksiz, funksiya chekli bir tomonlama hosilaga ega bo'lishi mumkin bo'lgan chekli sondagi nuqtalardan tashqari, oraliqning hamma joyida uzluksiz hosilaga ega funksiya bo'lsa. Birinchidan, funksiyani ekstremum nuqta bo'ladigan har bir silliq bo'lagida Eyler tenglamasini qanoatlatirishi kerak (ya'ni ekstremal bo'lishi uchun). Ikkinchidan, funksional ekstremumining zaruriy shartidan kelib chiqib, funksiyaning ekstremum bo'lgan har bir x, burchak nuqtasida, quyidagi

$$\left(f-y'f_{y'}\right)_{x,y}=\left[f-y'f_{y'}\right]_{x,y},\quad \left(f_{y'}\right)_{x,y}=\left[f_{y'}\right]_{x,y}.$$

Veyershtrass-Erdmon sharti bajariladi deb xulosa qilishimiz mumkin. Bu shartlar to'laligicha $y(x-0)=y(x+0)$ funksiyalarning uzluksizligi talabi bilan birgalikda burchak nuqtalarining koordinatalarini (agar ular bor bo'lsa) topish imkonini beradi.

2-misol. Quyidagi

$$J[y]=\int_a^b (y'^2-y^2)\,dx,$$

funksional va uning uchun Veyershtrass-Erdmon shartini qaraymiz.

Yechish. Mazkur misolda Veyershtrass-Erdmon shartining $f_{y'}|_{x=\xi}=f_{y'}|_{x=\xi}$ ikkinchisi $y'(\xi-0)=2y'(\xi+0)$ ko'rinishda bo'ladi, ya'ni tenglik ixtiyoriy nuqtadagi bir tomonlama hosilani anglatadi. Demak, funksionalning barcha ekstremum nuqtalari, xattoki bo'lakli-silliq funksiyalar sinfida burchak nuqtalarga ega bo'lmaydi, ular uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo'ladi.

$f_{y'y'}\neq 0$ shart funksional ekstremumini ikki marta differensiallanuvchi bo'lishi uchun yetarli ekanligini eslatib o'tamiz (2.2-teoremaga qarang [56]). Bu holda ekstremal burchak nuqtaga ega bo'lmaydi (f funksiya argumentlarining ixtiyoriy qiymatlari uchun $f_{y'y'}=2$ bo'ladi).

Quyidagi funksionalning burchak nuqtali ekstremali topilsin.

122. $J[y]=\int_0^2 y'(y'-x)\,dx,\quad y(0)=0,\ y(2)=1,$ funksionalning burchak nuqtali ekstremali topilsin.

123. $J[y]=\int_0^2 (y'-1)^2(y'+1)^2\,dx,\quad y(0)=0,\ y(4)=2,$ funksionalning minimumi haqidagi masalada bitta burchak nuqtali yechim topilsin.

124. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2yy'-y^2)\,dx,\quad y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,$ funksionalning ekstremumini haqidagi masalada burchak nuqtali yechim mavjudmi?

125. $J[y]=\int_{-1}^{1} y'^2(1-y')^2\,dx,\quad y(-1)=0,\ y(1)=1,$ funksionalning ekstremumini topish haqidagi masalada burchak nuqtali yechim topilsin.

126. $J[y]=\int_a^b (y'^2-y^2)\,dx$ funksionalning ekstremumi haqidagi masalada burchak nuqtali yechim topilsin.

127. $\int_{y(0)=0}^{y(x_1)=y_1} \sin y'\,dx,$ funksionalning ekstremumi haqidagi masalada uzluksiz hamda burchak nuqtali yechim topilsin.

VIII BOB

VARIATSION HISOBNING SHARTLI EKSTREMUM MASALALARI

Shartli ekstremum masalalarining asosiy turlari. Mazkur bo'limgacha ko'rilgan masalar shu bilan xarakterlanadiki, ularning yechimi integrallash sohasining chegarasida qandaydir shartlarni (chegaraviy shartlarni) qanoatlantirishi kerak bo'lgan. Biroq, variatsion hisobning juda ko'plab tadbiqlarida masalaning yechimiga qo'shimcha shartlarni qo'yishga to'g'ri keladi. Shu munosabat bilan Didona masalasini eslaylik (v-bob 1-§ ga qarang). Yer uchastkasini qamrab oluvchi kontur (buqa terisidan tayyorlangan kamar) aniq uzunlikka ega bo'lgan. Demak, Didona masalasini yechimini beruvchi funksiya na faqat chegaraviy shartlarni balki, qo'shicha shrtni ham qanoatlntirishi kerak bo'ladi: *funksiya grafigining uzunligi berilgan*. Masalani umumiy holda qo'yilishini bayon qilamiz. qaysiki joiz funksiyaga *bog'lanish sharti* deb nomlanuvchi qo'shimcha shart qo'yiladi.

Aytaylik, quyidagi

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx, \qquad y=(y_1,y_2,\dots,y_n) \tag{1}$$

funksionalni $C^1([a,b],R^n)$ sinfdan olingan

$$y(a)=y_a, y(b)=y_b, \tag{2}$$

chegaraviy shartlarni hamda

$$g_j=(x,y,y')=0, \quad j=\overline{1,m}, \quad (k<n), \quad x\in[a,b], \tag{3}$$

differensial tenglama bilan yoki

$$J[y(x)]=\int_a^b h_i(x,y,y')dx=L_i, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{4}$$

integral tenglamalar bilan ifodalanuvchi bog'lanish shartini qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiyalar to'plamida ekstremumini topish talab etilsin. Bu yerda va bundan keyin $F, g_j, \ j=\overline{1,m}, \ h_i, \ i=\overline{1,n}$, funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi va (2) chegaraviy shartlar (3) bog'lanishli shartga qaramu-qarshi emas deb faraz qilinadi. Differensialli (3) munosabat differensialli bog'lanish, (4) munosabatga esa integralli (izoperimetrik) *bog'lanishli shartlar* deb ataladi. (3) munosabatda $g_j, \ j=\overline{1,k}$, funksiyani y' ga bog'liq bo'lmagan holini alohida ta'kidlab o'tamiz. Variatsion hisobda bunday masalalar holati chegaralanishli mexanikada *golonomli* bog'lanishli variatsion masalalar deb ataladi.

Yuqorida qo'yilgan masalalar umumiy ko'rinishdagi shartli ekstremumli *variatsion hisob masalalari* deyiladi. Masalaning xususiy holi, qachonki faqat (3) differensial bog'lanishli holida uning chegaraviy shartlardan farq qiluvchi turli modifikatsiyalari (gohida (4) ko'rinishdagi integral bog'lanishli) Lagranj masalasi deb ataladi. Bu masala J.L.Lagranj tomonidan 1744 yilda chop etilgan "Analitik mexanika" asarida bayon qilingan. (1), (2), (4) integral bog'lanishli masala izoperimetrik masala deb ataladi. Bu masala bir xil parametrga ega bo'lgan yassi figura (izoperimetrik figura) lar ichidan eng katta yuzaga ega bo'lgan figurani topish masalasining umumlashmasi sifatida qaralgan ((4) shartga qarang).

(1), (2), (4) integral bog'lanishli masala izoperimetrik masalani

$$\psi_i(x) = \int_a^x h_i(x, y, y')dx, \quad i = 1,2,...,s. \tag{5}$$

Yangi funksiya kitish orqali Lagranj masalasiga olib kelish mumkin. Unda (4) integral munosabat o'rniga

$$\psi_i'(x) = h_i(x, y, y'), \quad i = 1,2,...,s. \tag{6}$$

differensialli munosabatni olamiz. Bunda (4) shartga ko'ra.

$$\psi_i(a) = 0, \quad \psi_i(b) = L_i, \quad i = 1,2,...,s. \tag{7}$$

shartlarga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, izoperimetrik masala quyidagi Lagranjning: *(1) funksionalga ekstremum beruvchi (6) munosabat bilan bog'langan va* $y_i(x)$, $i = 1,2,...,s$, *funksiyalar uchun (2) chegaraviy shartlarni,* $\psi_i(x)$, $i = 1,2,...,s$, *funksiyalar uchun (7) shartlarni qanoatlantiruvchi* $y_1, y_2, ..., y_n, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_s$, $n+s$ *ta funksiyalar sistemasini topish* masalasiga ekvivalent bo'ladi.

Lagranj masalasiga yana yuqori tartibli hosilalarga bog'liq bo'lgan funksionalning ekstremumi haqidagi masala ham keltiriladi.

Quyidagi

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})dx,$$

funksional uchun

$$y_0 = y, y_1 = y', y_2 = y'', ..., y_n = y^{(n)},$$

yangi funksiyalarni kiritish zarur. Unda dastlabki funksional

$$\begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}' = y_n, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan bog'liq bo'ladi.

1-§. Izoperimetrik masala

Masalaning qo'yilishi. Klassik variatsion hisobda izoperimetrik masala (chegaralari qo'zg'almas) deb, $C^1[a,b]$ fazodagi quyidagi

$$J_0[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \to extr, \tag{1}$$

$$J_i[y(x)] = \int_a^b G_i(x, y(x), y'(x))dx = \alpha_i, \quad i = 1,2,...,m, \tag{2}$$

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1, \tag{3}$$

masalasiga aytiladi, bu yerda $a, b, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ – berilgan tayinlangan sonlar. (2) ko'rinishdagi cheklov izoperimetrik (yoki bog'lanishli) shart deb ataladi. $G_i, i = 0,1,2,...,m,$ – integrantlar deb ataladi. (2) izoperimetrik shartlarni va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x) \in C^1[a,b]$ funksiyalarga joiz funksiyalar deb ataladi. Masalani boshqacha qilib ta'riflash ham mumkin: (3) chegaraviy va (2) izoperimetrik shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiyalar ichidan (1) funksionalga ekstremum beruvchi funksiya topilsin.

Variatsion hisobning (1) - (3) izoperimetrik masalasi shartli ekstremum masalalari sinfiga mansub bo'lib, uni Lagranj ko'paytuvchilarini kiritish orqali shartsiz ekstremum masalasiga keltiriladi.

1-ta'rif. *$y^*(x)$ joiz funksiya (1) funksionalga kuchsiz lokal minimum (maksimum) beradi deb aytamiz va $y^*(x) \in \text{loc}\min(1)(\text{loc}\max(1))$ kabi yozamiz, agar shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, har qanday $y(x)$ joiz funksiya uchun $\|y(x) - y^*(x)\|_{C^1[a,b]} < \delta$ bo'lganda $J[y] \geq J[y^*]$ $(J[y] \leq J[y^*])$ tengsizlik bajarilsa.*

Izoperimetrik masalaning yechish usuli.

1. Lagranj (lagranjian) funksiyasini tuzamiz:

$$L = L(x, y, y') = F(x, y, y') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m).$$

2. Lagranjian uchun ekstremumning zaruriy sharti hisoblangan – Eyler tenglamasini yozish.

$$\frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} = 0,$$

yoki

$$-\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \frac{\partial G_i(x, y, y')}{\partial y'}\right) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \frac{\partial G_i(x, y, y')}{\partial y} = 0.$$

3. Joriy ekstremallarni topish, ya'ni L Lagranj funksiyasi uchun Eyler tenglamasining, Lagranj ko'paytuvchilari vektori $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ nolga teng bo'lmaganda joriy yechimlarini topish. Bunda $\lambda_0 = 0$ va $\lambda_0 \neq 0$ bo'lgan hollarning har birini alohida qarab chiqish maqsadga muvofiq bo'ladi.

4. Topilgan joiz ekstremallar ichidan yechimni izlab topish yoki yechim mavjud emasligini isbotlash.

1-teorema (Ekstremumning zaruriy sharti). *Aytaylik, $y^*(x) \in C^1[a,b]$ funksiya (1)-(3) izoperimetrik masalasiga kuchsiz lokal minimum*

bersin ya'ni $y^*(x) \in \text{loc}\min(1)$. $G_i, i = 0,1,2,\ldots,m$, funksiyalar o'zining G_{ix} va G_{iy} xususiy hosilalari bilan birga $\{(x, y^*(x), y^{*'}(x)) : x \in [a,b]\}$ to'plamning qandaydir atrofida uzluksiz (silliqlik shart) bo'lsin. U holda barchasi bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_m$ Lagranjning noma'lum ko'paytuvchilari topiladiki.

$$L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i G_i^*(x, y(x), y'(x)), \quad L_{y'}^*(x, y^*(x), y^{*'}(x)) \in C^1[a,b],$$

lagranjian uchun

$$-\frac{d}{dx}\frac{\partial L^*(x, y^*(x), y^{*'}(x))}{\partial y^{*'}} + \frac{\partial L^*(x, y^*(x), y^{*'}(x))}{\partial y^*} = 0,$$

Eyler tenglamasi bajariladi (qanoatlantiradi).

Agar

$$-\frac{d}{dx}\frac{\partial G_i^*(x, y^*(x), y^{*'}(x))}{\partial y^{*'}} + \frac{\partial G_i^*(x, y^*(x), y^{*'}(x))}{\partial y^*}, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

funksiyalarning chiziqli bo'lmaganligidan iborat regulyarlik sharti bajarilsa, u holda $\lambda_0 \neq 0$ bo'ladi.

Isboti. *J_i funksionallarning Lagranj bo'yicha variatsiyasini* yozamiz. Ma'lumki, J funksionalning $y^*(x) \in C^1[a,b]$ nuqtadagi Lagranj bo'yicha variatsiyasi quyidagi

$$\delta J[y^*(x), y(x)] \overset{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \frac{J[y^*(x) + \lambda y(x)] - J[y^*(x)]}{\lambda}$$

formula bo'yicha aniqlanganligini eslatib o'tamiz. Demak,

$$\delta J_i[y^*(x), y(x)] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial G_i^*(x, y^*(x), y^{*'}(x))}{\partial y'} y'(x) + \frac{\partial G_i^*(x, y^*(x), y^{*'}(x))}{\partial y} y(x) \right\} dx,$$

$i = 1,2,\ldots,m$, $y(x) \in C^{*1}[a,b]$.

B. Chekli o'lchovli akslantirishlarni qurish va aynan regulyar hollarni ajratish. $C^1[a,b]$ fazoni R^{m-1} fazoga akslantiruvchi quyidagi

$$\Delta y(x) = \{\Delta J_1[y'(x),y(x)],\Delta J_2[y'(x),y(x)],\dots,\Delta J_{m-1}[y'(x),y(x)]\}$$

chiziqli akslantirishni qaraymiz.

Bunda ikki hol bo'lishi mumkin:

a) A akslantirish R^{m-1} fazoga qismiga akslantirishdan iborat (aynan bo'lgan hol);

b) A akslantirish R^{m-1} fazoga to'la akslantirishdan iborat, ya'ni $\operatorname{Im} A = R^{m-1}$ (regulyar bo'lgan hol).

C. Aynan bo'lgan hol uchun teoremaning isboti. Ma'lumki, chiziqli akslantirishda chiziqli fazoning aksi (obrazi) qism fazo bo'ladi. Demak, aynan bo'lgan holda $\operatorname{Im} A$ R^{m-1} fazoda xos qism fazo bo'ladi. Lekin, bu holda barchasi bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{m-1}$ sonlar topiladiki, ixtiyoriy $z=(z_1,z_2,\dots,z_{m-1}) \in \operatorname{Im} A$ uchun $\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i z_i = 0$ bo'ladi.

Endi operator ta'rifini va variatsiya uchun ifodalarni esga olsak, u holda ixtiyoriy $y(x) \in C^1[a,b]$ funksiya uchun

$$\int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \left(\frac{\partial G_i^*(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))}{\partial y} y(x) + \frac{\partial G_i^*(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))}{\partial y'} y'(x) \right) \right\} dx = 0.$$

bo'ladi. Lekin, bu holda, Dyubua-Reymon lemmasiga ko'ra,

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \frac{\partial G_i^*(x,y,y')}{\partial y} \in C^1[a,b]$$

va demak,

$$-\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial G_i^*(x,y,y')}{\partial y'} \right) + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial G_i^*(x,y,y')}{\partial y} = 0.$$

munosabatlar o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

D. Regulyar bo'lgan hol. Agar $y^*(x) \in \{\text{ekstremal}\}$ bo'lsa, u holda regulyar bo'lgan hol mumkin emas. Endi $y_j^*(x) \in C^1[a,b]$ funksiyalarni shunday tanlab olamizki, $\Delta y_j(a) = \varepsilon_j$ bo'lsin, ya'ni $\Delta J_i[y^*(x),y(x)] = \alpha_i$ bo'lsin, $0 \le i,j \le m$. bu yerda

$$\varepsilon_1 = (1,0,\dots,0),\ \varepsilon_2 = (0,1,\dots,0),\dots,\varepsilon_m = (0,0,\dots,0,1)$$

R^{m-1} fazodagi kanonik bazisdir.

$$\Phi(\beta) = \left(J_1[y^*(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j(x)], J_2[y^*(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j(x)], \dots, J_m[y^*(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j(x)] \right)$$

formulaga asoslangan $\Phi: R^{m-1} \to R^{m-1}$ akslantirishni qaraymiz. Φ funksiyani nolning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi ekanligini tekshirish qiyin emas va $\Phi(0) = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m) = \alpha' (\alpha_i = J_i[y^*(x)])$ bo'ladi. Shu sababli $\Phi: R^{m-1} \to R^{m-1}$ akslantirishning Yakobi matritsasi nolda regulyar $(\Phi'(0) = \|\partial J_i[y^*(x),y'(x)]\|_{i,j=1}^{m} = E -$ birlik matritsa bo'ladi), u holda teskari funksiya haqidagi teoremani qo'llasak bo'ladi, α' nuqtaning qandaydir atrofida Φ^{-1} teskari akslantirishning mavjudligiga asosan $K > 0$ o'zgarmas son topiladiki, $|\Phi^{-1}(\alpha)| \le K|\alpha - \alpha'|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Xususiy holda, moduli bo'yicha yetarli kichik ε uchun shunday $\beta(\varepsilon) = \Phi^{-1}(\alpha_1+\varepsilon,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ vektor topiladiki, $\Phi(\beta(\varepsilon)) = \Phi^{-1}(\alpha_1+\varepsilon,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ bo'ladi, ya'ni

$$J_1\left[y^*(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(\varepsilon) y_j(x) \right] = \alpha_1 + \varepsilon,\quad J_i\left[y^*(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(\varepsilon) y_j(x) \right] = \alpha_i,\quad i = 1,2,\dots,m$$

bo'ladi va bunda $|\beta(\varepsilon)| = |\Phi^{-1}(\alpha_1+\varepsilon,\alpha_2,\dots,\alpha_m)| \le K|\varepsilon|$.

Shunday qilib, $y^*(x)$ funksiyaning har qanday atrofida $(C^1[a,b]$

fazoda) funksionalning qiymati $J_0[y^*(x)]$ dan katta ham kichik ham bo'lishi mumkin bo'lgan joiz funksiya (xususan $y^*(x)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i(x)$ mavjud bo'lishi sodir bo'ldi. Natijada, $y^*(x)\in\{\min(y),\max(y)\}$ degan farazimizga qarama-qarshilikka keldik. Teorema isbot bo'ldi.

Transversallik sharti. Izoperimetrik masalani quydagicha qo'yish mumkin: barcha bo'laklı-silliq vektor-funksiyalar ichidan shundayni topish kerakki, qaysiki

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

funksionalga

$$J_i[y]=g_i[a,y(a),b,y(b)]+\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx=0,\quad i=1,2,\dots,k,$$

bog'lanishlar ostida ekstremum bersin. Bu holda shunday $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_k$ o'zgarmaslar mavjud bo'ladiki, izlanayotgan ekstremal

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx,\qquad F=\lambda_0F_0+\lambda_1F_1+\dots+\lambda_kF_k,$$

funksionalning shartsiz ekstremali bo'ladi. Bundan tashqari ekstremal-ning oxirgi nuqtalari dx_1,dy_1,dx_2,dy_2 differensiallarda

$$\left(F_{y'}-\sum_{i=1}^{k}\lambda_iF_{i,y'}\right)dx+\left(\sum_{i=1}^{k}F_{i,y'}\delta y_i\right)_1^2+dK=0,$$

tenglik bajariladi. Bu yerda $K=\lambda_1g_1+\lambda_2g_2+\dots+\lambda_kg_k$. K funksiyalarga nisbatan uchunchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega deb faraz qilinadi,

$$\left\|\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\right\|$$

matritsaning rangi ko'rsatilgan sohaning barcha nuqtalarida k ga teng bo'ladi.

Klebsh va Yakobining zaruriy sharti. Agar $y(x)$ vektor-funksiya izoperimetrik masalada shartli ekstremum bo'lsa, u holda

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

funksionalning ikkinchi variatsiyasi manfiy emas, ya'ni $\delta^2J\ge0$. bo'ladi, bundan kelib chiqadiki, barcha $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\neq(0,0,\dots,0)$ lar uchun $\sum_{i,j}F_{y_iy_j}\xi_i\xi_j\ge0$ bo'ladi. Bu shart *Klebshning zaruriy sharti* deb ataladi.

Yakobining zaruriy sharti. Izoperimetrik ekstremal

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx,\qquad F=\lambda_0F_0+\lambda_1F_1+\dots+\lambda_kF_k,$$

funksionalning shartsiz ekstremali bo'ldi. Agar $\bar y(x)=y(x)+\delta y(x)$, $\bar y(a)=l_1,\bar y(b)=l_2$, joiz egri chiziqlar qaralayotgan ekstremalning birinchi tartibli ε- atrofida joylashgan bo'lsa, u holda

$$J_0[\bar y]-J[y_1]=\frac12\int_a^b\sum_{i,k}\left(F_{y_iy_k}\cdot\eta_i\eta_k+2F_{y_ix}\cdot\eta_i\eta_k'+F_{y_ix}\cdot\eta_i'\eta_k'\right)dx+\sigma=$$

$$=\frac12\int_a^b\omega dx+\sigma,$$

tenglik o'rinli bo'ladi. bu yerda $\varepsilon\to0$ ga intilganda $\sigma\to0$ intiladi.

Aytaylik, R_1 orqali elementlari

$$\bar{y}(a)=\bar{y}(b)=0 \text{ va } \int_a^b \mu_i y_i dx=0, \quad \mu_i=(F'_{y'})_i-\frac{d}{dx}(F'_{y''})_i. \tag{4}$$

$$\int_a^b y^2(x)dx=1, \tag{5}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi bo'lakli-silliq funksiyalardan iborat bo'lgan funksional fazoni belgilaymiz. R fazoda

$$\int_a^b 2\omega dx, \tag{6}$$

funksionalga ekstremum beruvchi egri chiziqlar

$$\delta\int_a^b\left(\omega+\mu y^2+2\sum_{i=1}^{n}\nu^i\mu_i y_i\right)dx=0,$$

yoki

$$\frac{d}{dx}\omega_j-\omega_i=\mu y+\sum_{i=1}^{n}\nu^i\mu_i. \tag{7}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

(7) tenglamaning yechimini $x=a$ da nolga aylantiruvchi va $x=b$ da ham nolga aylantiruvchi μ ning qiymatlariga (6) funksionalning R_1 fazodagi xos qiymatlari deb ataladi. Har bir xos qiymatga eng kami bilan $[a,b]$ kesmada aynan nolga teng bo'lmagan bitta $y(x)$ xos vektor-funksiya mos keladi va kuzatuvchi vektor ν^i, qaysiki, (7) tenglamani va (4) shartni qanoatlantiradi.

Har bir μ xos qiymatga $k+1$ tadan ko'p bo'lmagan chiziqli bog'liq bo'lmagan funksiyalar mos keladi. Bu chiziqli bog'liq bo'lmagan funksiyalar soni xos qiymatlarning karraliligi deyiladi. Barcha $\mu_i(b)$ funksiyalar b ortishi bilan kamayadi, bundan tashqari $\mu_i(b)\geq\mu_i(b)$,

$i\geq j$ b nuqta a nuqtaga yetarlicha yaqin bo'lganda, barcha μ lar musbat bo'ladi. $\mu_i(x_i)=0, i\geq j$ bo'lganda $x_i^j\geq x_i^j$ bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra, qo'shma qiymatlar l karrali bo'ladi, agar

$$x_i^1=x_{i+1}^2=\ldots=x_{i+l-1}^l \quad (j=i+l-1),$$

bo'lsa. R_1 fazoda 2ω shaklining manfiymas bo'lishligi uchun (a,b) oraliqda a bilan birorta ham nuqtani qo'shma bo'lmasligi zarur va yetarli. y ekstremal, qaysiki u bo'yicha $\sum_{i,j}^{n}F_{y_iy_j}\eta_i\eta_j>0$ bo'lgan J_0 integralga $J_1=L, (t=1,2,\ldots,k)$ shart ostida kuchsiz minimum berishi uchun (x_1,x_2) ochiq oraliq $\int_a^b 2\omega dx$ funksional uchun a nuqtaga qo'shma bo'lgan qiymatlar bo'lmasligi zarur.

Izoperimetrik ekstremal $k-$ tartibga ega bo'ladi, agar u uchun R_1 fazodagi ikkinchi tartibli variatsiya k ta manfiy xos qiymatlarga ega bo'lsa.

$y(x)$ ekstremal $k-$tartibga ega bo'lishi uchun $[a,b]$ kesma ichida joylashgan, A nuqtaga qo'shma bo'lgan barcha nuqtalarning karrallilik yig'indisi k ga teng bo'lishi zarur va yetarli (Mors teoremasi).

1-misol. $\int_0^1 y'^2dx\to extr$, funksionalning $\int_0^1 ydx=0$, izoperimetrik shartni hamda $y(0)=0$, $y(1)=1$, chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal topilsin.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz: $L=\lambda_1y'^2+\lambda_2y$. Zaruriy

shart - Eyler tenglamasini yozamiz. u

$$-\frac{d}{dx}\frac{\partial L(x,y(x),y'(x))}{\partial y'}+\frac{\partial L(x,y(x),y'(x))}{\partial y}=-2y''+\lambda=0$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $\lambda_0=0$ bo'lsa, u holda $\lambda=0$ bo'lib, hamma Lagranj ko'paytuvchilari noldan iborat bo'ladi. Bu holda joiz ekstremallar yo'q. $\lambda_0=\frac{1}{2}$ deb olamiz. U holda Eyler tenglamasi $y''=\lambda$ ko'rinishda bo'lib, uning umumiy yechimi $y=\frac{\lambda}{2}x^2+C_1x+C_2$ ko'rinishda bo'ladi. Umumiy yechimdagi C_1,C_2,λ o'zgarmas-larni, chegaraviy va izoperimetrik shartlardan topamiz:

$$\begin{cases} y(0)=0, C_2=0, \\ y(1)=1, C_1+\frac{\lambda}{2}. \end{cases} \qquad \int_0^1 y\,dx=0,\ \lambda=6,\ C_1=-2.$$

Masalada yagona $y=3x^2-2x$ joiz ekstremal mavjud. Endi $y(x)$ funksiya funksionalga absolyut minimum berishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, $v(x)$ joiz funksiyani olamiz. U holda $w(x)=y(x)-h(x)\in C^1[0,1]$ va $\int_0^1 h\,dx=0$. So'ngra,

$$J[w(x)]-J[y(x)]=\int_0^1(y'-h')^2dx-\int_0^1 y'^2dx=\int_0^1 2y'h\,dx+\int_0^1 h'^2dx\ge 2\int_0^1 y'h\,dx.$$

Bu ifodani bo'laklab integraltab,

$$\int_0^1 y'h'dx=\int_0^1 y'dh=y'(x)h(x)\Big|_0^1-\int_0^1 y''h\,dx=-12\int_0^1 h\,dx=0$$

ekanligini olamiz. Shunday qilib, ixtiyoriy $w(x)$ joiz funksiya uchun, $J[y(x)]\le J[y'(x)]$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, bu munosabatdan

$$S_{min}=\int_0^1 y'^2dx=\int_0^1(6x-2)^2dx=4$$

Ga teng ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, $y=3x^2-2x$ funksiya masalaga absolyut minimum berdi, masalaning qiymati $S_{min}=4$, ravshanki, $S_{max}=+\infty$.

2-misol. Yuqoridagi misolni quyidagi $y(0)=1$, $y(\pi)=-1$, chegaraviy va $\int_0^{\pi} y\cos x\,dx=\frac{\pi}{2}$ izoperimetrik shartlarda berilgan funksionalni ekstremalini topamiz.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz: $L=y'^2-\lambda y\cos x$. Zaruriy shart - Eyler tenglamasi

$$-\frac{d}{dx}\frac{\partial L(x,y(x),y'(x))}{\partial y'}+\frac{\partial L(x,y(x),y'(x))}{\partial y}=-2y''+\lambda\cos x=0$$

ko'rinishda bo'ladi. U holda Eyler tenglamasi $\lambda\cos x-2y''=0$ ko'rinishda bo'lib, uning umumiy yechimi $y=-\frac{\lambda}{2}\cos x+C_1x+C_2$ ko'rinishda bo'ladi. Umumiy yechimdagi C_1,C_2,λ o'zgarmaslarni, chegaraviy va izoperimetrik shartlardan topamiz:

$$\int_0^{\pi}(-\frac{\lambda}{2}\cos x+C_1x+C_2)\cos x\,dx=-\frac{\pi}{4}\lambda-2C_1=\frac{\pi}{2},$$

Bu yerdan $\lambda=-2-\frac{8}{\pi}C_1$. Shunday qilib, Eyler tenglamasining umumiy yechimi $y=\cos x+\frac{4}{\pi}C_1\cos x+C_1x+C_2$ ko'rinishda bo'ladi. Umumiy yechimdagi C_1,C_2 o'zgarmaslarni, chegaraviy shartlardan topamiz:

$$\begin{cases} y(0)=1+\frac{4}{\pi}C_1+C_2=1, \\ y(\pi)=-1+(\pi-\frac{4}{\pi})C_1+C_2=-1. \end{cases}$$

bu yerdan $C_1 = C_2 = 0$ bo'ladi. Demak, funksional $y^* = \cos x$ funksiyada ekstremumga erishishi mumkin.

3-misol. Yuqoridagi misolni quyidagi $y(0) = y(\pi) = 0$, chegaraviy va $\int_0^{\pi} y(x)\sin x\,dx = 1$ izoperimetrik shartlarda berilgan funksionalning ekstremali topilsin.

Yechish. Bu yerda Lagranj funksiyasi $L = y'^2 + \lambda y \sin x$ ko'rinishda bo'ladi. Zaruriy shart - Eyler tenglamasi

$$-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} + \frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y} = y' - \frac{\lambda}{2}\sin x = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. U holda Eyler tenglamasining umumiy yechimi quyidagi $y = -\frac{\lambda}{2}\sin x + C_1 x + C_2$ ko'rinishda bo'ladi. Umumiy yechimdagi C_1, C_2, λ o'zgarmaslarni, chegaraviy va izoperimetrik shartlardan $C_1 = C_2 = 0$, $\lambda = -\frac{4}{\pi}$ topamiz.

Masala yagona $y^* = \frac{2}{\pi}\sin x$ joiz ekstremalga ega. Endi $y^*(x)$ funksiyani funksionalga absolyut minimum berishligini ko'rsatamiz. Haqiqatan, $y(x)$ joiz funksiyani olamiz. U holda

$$y(x) = y^*(x) + h(x) \in C^1[0, \pi] \quad \text{va} \quad \int_0^{\pi} h\sin x\,dx = 0.$$

So'ngra,

$$J[y(x)] - J[y^*(x)] = \int_0^{\pi}(y'^2 - h'^2 - y'^2)dx = 2\int_0^{\pi} y'h'dx + \int_0^{\pi} h'^2 dx =$$

$$= 2y'(x)h(x)\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} y''(x)h(x)dx + \int_0^{\pi} h'^2 dx = 2\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\sin x\,h(x)dx + \int_0^{\pi} h'^2 dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,h(x)dx + \int_0^{\pi} h'^2 dx = \int_0^{\pi} h'^2 dx \geq 0.$$

ifodaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, ixtiyoriy $y(x)$ joiz funksiya uchun, $J[y(x)] \geq J[y^*(x)]$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$S_{min} = \int_0^{\pi} y'^2 dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\sin x\right)^2 dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{4}{2\pi^2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{2}{\pi}$$

bo'lishini ko'ramiz. Demak, $y^* = \frac{2}{\pi}\sin x$ funksiya masalaga absolyut minimum beradi, masalaning qiymati $S_{min} = \frac{2}{\pi}$ ravshanki, $S_{max} = +\infty$.

1-izoh. *Agar $y^*(x)$ funksiya $J[y(x)]$ funksionalning ham, $K[y(x)]$ funksionalning ham ekstremali bo'lmasa, u holda o'zarolik prinsipi o'rinli bo'ladi, ya'ni: $y^*(x)$ – $J[y(x)]$ funksionalning $K[y(x)] = l$ sharti ostida ekstremumi masalasida ekstremal va bir vaqtning o'zida $K[y(x)]$ funksionalning $J[y(x)] = l$ sharti ostida ekstremumi masalasida ekstremal. Buni F va G funksiyalarni $L = \lambda_1 F + \lambda_2 G$ lagranjian ko'rinishiga simmetrik holda kirganligidan ham ko'rish mumkin.*

4-misol. Didon masalasiga qaytamiz (5-bob 1-§ ga qarang). U quyidagi izoperimetrik masalani ifodalaydi:

$J[y] = \int_{-a}^{a} y\,dx$ funksionalni $y(-a) = y(a) = 0$, chegaraviy shartlarni va

$$K[y] = \int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx = L, \quad (L > 2a),$$

izoperimetrik shartni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

Yechish. 1- teoremaga mos ravishda yordamchi funksionalni tuzamiz

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}\left[y+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right]dx,$$

va uning uchun

$$\lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)-1=0,$$

Eyler tenglamasini tuzamiz. Ko'rinib turibdiki, tenglamani tartibini pasaytirish mumkin, ya'ni oxirgi tenglikni integrallab,

$$\lambda\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)-x=C_1,$$

yoki

$$\lambda^2\frac{y'^2}{1+y'^2}=(x+C_1)^2,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglamadan y' ni topamiz:

$$y'=\pm\frac{x+C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x+C_1)^2}}.$$

O'zgaruvchilari ajraladigan bu 1- tartibli differensial tenglamani yechib,

$$y=\pm\sqrt{\lambda^2-(x+C_1)^2}+C_2,$$

yechimni topamiz yoki unga teng kuchli bo'lgan

$$(x+C_1)^2+(y-C_2)^2=\lambda^2,$$

tenglamani yozamiz. Chegaraviy shartlardan foydalanib,

$$(-a+C_1)^2+C_2^2=\lambda^2,\quad (a+C_1)^2+C_2^2=\lambda^2,$$

tengliklarni topamiz, bu yerdan $C_1=0,\ \lambda^2=C_2^2+a^2$, o'zgarmaslarni topamiz. Shunday qilib, egri chiziq tenglamasi

$$x^2+(y-C_2)^2=C_2^2+a^2,$$

tenglamaga keltiriladi. Bu yerdan aylana yoyining uzunligi bevosita hisoblab topiladi, bunda biz yana bitta tenglamaga ega bo'lamiz

$$2\sqrt{C_2^2+a^2}\arcsin\frac{a}{\sqrt{C_2^2+a^2}}=L,$$

bu tenglama

$$t=\frac{L}{2\sqrt{C_2^2+a^2}},\quad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right],$$

almashtirish orqali $L\sin t=2at$ transsendent tenglamaga keltiriladi. Bu tenglamaning $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda $L\le\pi a$ bo'lganda C_2 o'zgarmasni aniqlash imkonini beradi.

5-misol. $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferaning (x_1,y_1,z_1) va (x_2,y_2,z_2) nuqtalaridan o'tuvchi egri chiziqlar orasidan eng qisqa uzunlikdagi egri chiziqni tanlash masalasini qaraymiz.

Yechish. Egri chiziqning parametri sifatida x koordinatani tanlash mumkin (bu chetki nuqtalarning ma'lum holatlarida shunday qilish mumkin) deb faraz qilamiz. U holda izlanayotgan egri chiziqlar $y(x),z(x)$ funksiyalar juftligi bilan tavsiflanadi, egri chiziqlarning uzunligi esa

$$J[y,z]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

integral orqali ifoda qilish mumkin. Shunday qilib, biz

$$y(x_1)=y_1,\quad z(x_1)=z_1,\quad y(x_2)=y_2,\quad z(x_2)=z_2, \tag{8}$$

chegaraviy shartlar va

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0,$$

bog'lanishli shart ostida $J[y,z]$ funksionalni minimumini topish haqidagi variatsion masalaga kelamiz.

Yordamchi funksionalni tuzamiz:

$$J[y,z]=\int_0^1\left\{\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)(x^2+y^2+z^2-a^2)\right\}dx$$

Ikkita Eyler tenglamasi va bog'lanishli shart birgalikda yordamchi funksional uchun uchta $(y(x),z(x),\lambda(x))$ noma'lum funksiyalarga nisbatan uchta tenglamalar sistemasini tashkil qiladi:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)-2\lambda(x)y=0,\\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)-2\lambda(x)z=0,\\ x^2+y^2+z^2-a^2=0.\end{cases}$$

Masalaning yechimini shu sistemaning (8) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar orasidan izlash zarur. Biroq, bu sistemani yechish ancha murakkab.

6-misol. Quyidagi izoperimetrik masalada

$$J[y(x),z(x)]=\int_0^1\left(y^2+z^2-4xz-4z\right)dx,$$

$$y(0)=z(0)=0,\quad y(1)=z(1)=1,\quad \int_0^1\left(y^2+xy-z^2\right)dx=2$$

funksionalning ekstremumini toping.

Yechish. Yordamchi funksionalni qaramiz

$$\Phi[y(x),z(x)]=\int_0^1\left[\left(y^2+z^2-4xz-4z\right)+\lambda\left(y^2+xy-z^2\right)\right]dx.$$

va uning uchun Eyler tenglamasini yozamiz:

$$\begin{cases}-\dfrac{d}{dx}\left(2y'+2\lambda y'+\lambda x\right)=0,\\ -4-\dfrac{d}{dx}\left(2z'-4x-2\lambda z'\right)=0.\end{cases}$$

Bu tenglamalarni yechib,

$$\begin{cases}y(x)=\dfrac{\lambda x^2+2C_1x}{4(1+\lambda)}+C_2,\\ z(x)=\dfrac{C_1x}{2(1-\lambda)}+C_3.\end{cases}$$

Chegaraviy shartlardan

$$C_1=\frac{3\lambda+4}{2(1-\lambda)},\quad C_2=0,\quad C_3=2(1-\lambda),\quad C_4=0,$$

o'zgarmas miqdorlarni topamiz, bular orqali

$$\begin{cases}y(x)=\dfrac{\lambda x^2+(3\lambda+4)x}{4(1+\lambda)},\\ z(x)=x.\end{cases}$$

tengliklarni olamiz. λ ni topish uchun izoperimetrik shartdan foydalanamiz,

$$\begin{cases}y'(x)=\dfrac{2\lambda x+3\lambda+4}{4(1+\lambda)},\\ z'(x)=1,\end{cases}$$

ekanligidan

$$\int_0^1\left[\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)^2}{16(1+\lambda)^2}-\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)x}{4(1+\lambda)}-1\right]dx=2,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Lekin murakkab hisoblashlardan so'ng quyi-

dagi λ ga nisbatan tenglamaga kelamiz:

$$\frac{1}{3}(23\lambda^2+46\lambda+24)=48(\lambda^2+2\lambda+1).$$

bu yerdan $\lambda_1=-\frac{10}{11}$ va $\lambda_2=-\frac{12}{11}$ ni topamiz. Bularni izoperimetrik shartga qo'yib, $\lambda_2=-\frac{12}{11}$ bu sharni qanoatlantirmasligiga, $\lambda_1=-\frac{10}{11}$ miqdor esa qanoatlantirishiga ishonch hosil qilamiz. Demak, izlanayotgan ekstremal

$$\begin{cases} y(x)=\dfrac{7x-5x^2}{2}, \\ z(x)=x, \end{cases}$$

tenglamalardan aniqlanadi.

7-misol. Aytaylik, uzunligi l bo'lgan sterjen (x_0,y_0) va (x_1,y_1) nuqtalarga biriktirilgan bo'lsin. Elastiklik nazariyasidan ma'lumki, deformatsiyalangan holatdagi sterjenning potensial energiyasi, uning egriligining kvadratidan sterjen bo'ylab olingan integralga proporsional. (x_0,y_0) nuqtadan hisoblangan sterjen uzunligini s erkin o'zgaruvchiga qabul qilib, $\theta(s)$ orqali sterjenga o'tkazilgan urinmaning Ox o'qi bilan tashkil qilgan burchagini belgilaymiz. Egrilik $\theta'(s)$ hosila bilan ifodalanadi va ekstremumi izlanayotgan integral

$$J=\int_0^l[\theta'(s)]^2\,ds$$

ko'rinishda bo'ladi.

Yechish. Ma'lumki, $dx=\cos\theta ds$, $dy=\sin\theta ds$, demak, biz quyidagi bog'lanishli tenglamalarga

$$\int_0^l\cos\theta ds=x_1-x_0,\quad \int_0^l\sin\theta ds=y_1-y_0, \tag{9}$$

ega bo'lamiz. Bundan tashqari sterjenga biriktirilganlik $s=0$ va $s=l$ da $\theta(s)$ funksiyani berilishiga teng kuchli:

$$\theta(0)=a,\quad \theta(l)=b, \tag{10}$$

Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$\Phi[\theta,\theta']=[\theta'(s)]^2+\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\sin\theta.$$

Φ funksiya s erkin o'zgaruvchi o'z ichiga olmaydi, shuning uchun Eyler tenglamasining birinchi integralini yozishimiz mumkin:

$$\theta'^2=C+\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\sin\theta. \tag{11}$$

Yangi o'zgarmaslarni kiritamiz

$$h=C+\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2},\quad k^2=\frac{2\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{C+\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}},$$

va θ o'rniga yangi o'zgaruvchilarni kiritamiz

$$\varphi=\frac{\theta-\theta_0}{2},\ \text{bu yerda}\ \theta_0=arctg\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Endi (11) tenglik quyidagi ko'rinishga o'tadi

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\sqrt{h}}{2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

bundan

$$s=\frac{2}{\sqrt{h}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+s_0.$$

h, k^2, θ va s_0 o'zgarmaslar (9) va (10) shartlardan aniqlanadi. Sterjenning dekart koordinatasi nuqtalari quyidagicha topiladi:

$$dx=\cos\theta ds=\cos(2\varphi+\theta_0)ds,\quad dy=\sin\theta ds=\sin(2\varphi+\theta_0)ds,$$

bo'ladi yoki

$$ds = \frac{2d\varphi}{\sqrt{h(1-k^2\sin^2\varphi)}},$$

tenglikdan

$$dx = \frac{2\cos(2\varphi+\theta_0)}{\sqrt{h(1-k^2\sin^2\varphi)}}d\varphi, \quad dy = \frac{2\sin(2\varphi+\theta_0)}{\sqrt{h(1-k^2\sin^2\varphi)}}d\varphi,$$

bu yerdan x va y lar oxirgi tengliklarni integrallash orqali aniqlanadi.

Izoperimetrik masalada o'zarolik prinsipi. Izoperimetrik masalalarda Lagranj ko'paytuvchisining o'zgarmasligi o'zarolik prinsipiga yoki ikkilanmalik prinsiplariga olib keladi.

Aytaylik, quyidagi asosiy yoki maqsad funksionali deb ataluvchi

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \tag{12}$$

funksionalni $C^1_{[a,b]}$ sinfdan olingan, quyidagi

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \tag{13}$$

chegaraviy shartlarni va biror

$$g_j(x, y, y') = 0, \quad j = 1,2,\ldots,k, \quad (k < n), \quad x \in [a,b], \tag{14}$$

ko'rinishdagi differensial tenglamalar bilan ifodalanuvchi (bog'lanishli shart) munosabat yoki

$$\int_a^b h_i(x, y, y')dx = l_i, \quad i = 1,2,\ldots,s, \tag{15}$$

integral bog'lanishli shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi $y = y(x)$ vektor - funksiyalar to'plamida ekstremumini topish talab etilgan izoperimetrik masala berilgan bo'lsin.

Bu yerda $F, g_j, \ j = 1,2,\ldots,k, \ h_i, i = 1,2,\ldots,s,$ funksiyalar ikki marta uzluksiz

differensiallanuvchi va (13) chegaraviy shart (14) bog'lanishli shartga zid emas deb faraz qilinadi. Biz (12), (13) va (15) izoperimetrik masalada (12) funksionalni ekstremumini boshqa s ta funksionallar berilgan l_i, $i = 1,2,\ldots,s$, qiymatlarni qabul qiladi sharti ostida izlagan edik. Agar integral ostidagi ifodani biror o'zgarmas songa ko'paytirsak, u holda Lagranjning ko'paytuvchilar usulidagi yordamchi funksional uchun yozilgan Eyler tenglamasi o'zgarmaydi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$F_0 = F, \quad F_j = h_j, \quad \mu_j = \mu_0\lambda_j, \quad j = 1,2,\ldots,m,$$

va quyidagiga ega bo'lamiz

$$\mu_0 J^* = \int_a^b \sum_{j=0}^{m} \mu_j F_j dx.$$

Bu ifodaga barcha F_j simmetrik ravishda kiradi. Bu asosiy funksionalning integral ostidagi funksiyasi sifatida F_j funksiyalardan ixtiyoriysini tanlash mumkinligini, qolganlari esa (15) izoperimetrik shartga tegishli ekanligini bildiradi. Boshqacha aytganda, ekstremumga tadqiq masalasida ekstemumlar, qaysiki asosiy funksionalning integranti F_0 funksiya bo'ladi, qolgan F_j funksiyalar esa (15) integralli bog'lanishga tegishli bo'ladi (A masala), ekstremumga tadqiq masalasida ekstemumlar ustma-ust tushadi (B masala), qaysiki asosiy funksionalning integranti F_m funksiya bo'ladi, qolgan F_j funksiyalarni esa

$$\int_a^b F_j(x, y, y')dx = l_j, \quad j = 0,1,2,\ldots,m-1,m+1,\ldots,s,$$

izoperimetrik shartlar aniqlaydi. Bunda l_0 o'zgarmas (A) masaladagi

funksionalning ekstremal qiymatiga teng bo'ladi, qolgan l esa (15) integral bog'lanishdagilar. F_n funksiya sifatida $F_1, F_2, \ldots, F_n$ funksiyalarning ixtiyoriysini olish mumkin. Tavsiflangan ekstremallarning ustma-ust tushishi o'zarolik prinsipi (ikkilanmalik prinsipi) deyiladi. Masalan, berilgan perimetrda figuraning eng katta yuzasini topishdan iborat bo'lgan Didona masalasi, boshqa bir, berilgan yuzada eng kichik perimetrni aniqlashdan iborat bo'lgan variatsion masalaga ikkilanma masala bo'ladi. Agar birinchi masalada eng katta yuza ikkinchi masalaga chegara sifatida bo'lsa, ikkala masala ham bir xil ekstremalga ega bo'ladi.

Ko'rsatish mumkinki, yuqoridagi 4- misolda topilgan $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ aylana yoyi berilgan

$$K[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \pi a,$$

uzunlikda

$$J[y] = \int_{-a}^{a} y dx,$$

funksionalning ekstremumi sifatida bu funksionalga maksimum beradi. Bunda $J[y] = \pi a^2 / 2$ bo'ladi. Xuddi shu $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ funksiya berilgan $J[y] = \pi a^2 / 2$ yuzada $K[y]$ funksionalga minimum beradi.

2-izoh. *(14) differensialli munosabat – differensial bog'lanish, (15) munosabat esa, integralli (izoperimetrik shart) bog'lanish deb ataladi. (14) munosabatda g, funksiya y' hosilaga bog'liq bo'lmagan xususiy holini alohida ta'kidlab o'tishimiz lozim. Variatsion hisobda bunday bog'lanishlar nazariy mexanikada golonomli bog'lanish deb yuritiladi.*

Yuqoridagi bandda aytib o'tganimizdek, mazkur (12)-(15) masalalar umumiy holda shartli ekstremumning masalalari hisoblanadi. Masalaning faqat (14) differensial bog'lanishli shart ostida qo'yilgan xususiy holi, chegaraviy shartlardan farq qiluvchi (gohida (15) integral bog'lanishli) turli xildagi modifikatsiyalari Lagranj masalasi deyiladi.

Bu masala Lagranj tomonidan 1788 yilda chop etilgan "Analitik mexanika" kitobida bosilib chiqqan. Integral bog'lanishli (12), (13) va (15) masalani tekislikdagi bir xil parametrga ega bo'lgan figuralar (izoperimetrik figuralar) ichidan eng katta yuzaga ega bo'lganini aniqlash haqidagi klassik masalani umumlashmasi sifatida qarab, bu izoperimetrik masala deb ataladi.

1. Tortishish kuchlari ta'siri ostidagi bir jinsli og'ir iplarning muvozanat holati haqidagi masala. Uzunligi l, oxirlari berilgan $M_0(x_0, y_0)$ va $M_1(x_1, y_1)$ nuqtalarda yotuvchi tekis chiziqlar orasidan shundayini topinki, unda tortishish markazining ordinatasi minimal bo'lsin.

Quyidagi izoperimetrik masalalarda ekstremal topilsin:

128. *Og'irlik kuchi ta'siridagi bir jinsli og'ir ipning muvozanat holati haqidagi masala.*

Uzunligi l bo'lgan, oxirlari berilgan $M_0(x_0, y_0)$ va $M_1(x_1, y_1)$ nuqtalarda yotuvchi barcha yassi chiziqlar orasidan og'irlik markazining ordinatasi minimal bo'lgan chiziq topilsin.

129. $\int_0^1 y(x)dx = 3$, shart ostida $J[y(x)] = \int_0^1 y'^2(x)dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$.

130. $\int_0^1 y^2(x)dx = 2$ shart ostida $J[y(x)] = \int_0^1 (x^2 + y'^2(x))dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

131. $\int_0^1 (y(x)-y'(x))dx - \frac{1}{12}$ shart ostida $J[y(x)] = \int_0^1 x^2 dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$ ni $\frac{1}{4}$.

132 $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x dt = 1$, $\int_0^1 t x dt = 0$, $x(0) = x(1) = 0$.

133 $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x dt = -\frac{3}{2}$, $\int_0^1 t x dt = -2$, $x(0) = 2$, $x(1) = -14$.

134 $\int_0^{\pi} (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^{\pi} x\cos(t) dt = \frac{\pi}{2}$, $x(0) = 1$, $x(\pi) = -1$

135 $\int_0^{\pi} (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^{\pi} x\sin(t) dt = 0$, $x(0) = 1$, $x(\pi) = -1$.

136 $\int_0^{\pi} x\sin(t) dt \to extr$, $\int_0^{\pi} (x')^2 dt = \frac{3\pi}{2}$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = \pi$.

137 $\int_0^{\pi} (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^{\pi} x\cos(t) dt = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\pi} x\sin(t) dt = \pi + 2$, $x(0) = 2$, $x(\pi) = 0$.

2-§. Lagranj masalasi

2.1. $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ ***ko'rinishdagi bog'lanishli (golonom) bo'lgan hol.*** Variatsion hisobning shartli ekstremum masalasi deb, $J[y(x)]$ funksional bog'liq bo'lgan funksiyalarga qandaydir bog'lanishlar qo'yilgan hollarda $J[y(x)]$ funksionalning ekstremumini topish masalasiga aytiladi. Boshqacha qilib aytganda, variatsion hisobning shartli ekstremum masalasida funksional aniqlangan egri chiziqlar chegaraviy shartlardan tashqari yana boshqa qo'shimcha shartlarni ham qanoatlantirishi kerak bo'ladi. Bu shartlar bog'lanishlar tenglamasi deb ham yuritiladi. Bu tenglamalar turli xil ko'rinishda

bo'lib, biz ularning tenglamalar ko'rinishida berilgan ayrim hollari bilan tanishib o'tamiz. ya'ni bog'lanish tenglamasida funksiyalarning hosilalari ishtirok etmagan (golonom bo'lgan bog'lanish) holi bilan. so'ngra bog'lanish tenglamasida funksiyalarning hosilalari ishtirok etgan (golonom bo'lmagan bog'lanish) hollarini batafsil ko'rib o'tamiz.

Masalan, quyidagi n ta funksiyaga bog'liq bo'lgan

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))dx \tag{1}$$

funksionalni $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $m < n$, shart ostida ekstremumga tekshirish talab etilgan masala. Endi ko'p o'zgaruvchili $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyani $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $m < n$, bog'lanishli shart ostida ekstremumga tekshirish talab etilgan masalani yechaylik. Mazkur masalani yechishning eng tabiiy yo'li, biz qandaydir m ta o'zgaruvchilarga, masalan $x_1, x_2, \dots, x_m$ o'zgaruvchilarga nisbatan erkli deb hisoblangan $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, tenglamalar sistemasini yechib,

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \\ x_2 = x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m = x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \end{cases}$$

topilgan $x_1, x_2, \dots, x_m$ larni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaga olib borib qo'yishdan iborat edi. Bunda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya faqat $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ta o'zaro iborat edi. Bunda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya faqat $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ta o'zaro bog'liq bo'lmagan $n-m$ ta o'zgaruvchili $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$ funksiyaga keladi va demak, dastlabki qo'yilgan masala $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$ funksiyani

shartsiz ekstremumga tekshirish masalasiga keladi. Albatta, bu yo'l bilan yuqorida qo'yilgan variatsion masalani ham yechish mumkin.

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, (i = 1, 2, \ldots, m), \quad m < n,$$

tenglamalar sistemasini $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (yoki qandaydir boshqa m ta y funksiyalarga nisbatan) o'zgaruvchilaga nisbatan yechib, ularni $J[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ funksionalga olib borib qo'yib, $n-m$ ta argumentlarga bog'liq bo'lmagan $\Pi[y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n]$ funksionalni hosil qilamiz va bu $\Pi[y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n]$ funksionalga ko'p o'zgaruvchi funksiyalarning shartli ekstremumini topishda keltirib o'tilgan usulni qo'llash mumkin bo'ladi. Biroq, funksiyalarni va funksionallarni ekstremumga tekshirganda odatda eng qulayi (o'zgaruvchilarni to'la teng huquqiyligini saqlovchi) usul *noma'lum ko'paytuvchilar usuli* (Lagranj usuli) deb nomlanuvchi usul hisoblanadi.

Ma'lumki, bu usul $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, (i = 1, 2, \ldots, m), \ m < n,$ bog'lanishli shart ostida $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyani ekstremumga tekshirish shundan iborat ediki, buning uchun yordamchi

$$z^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i$$

Lagranj funksiyasi tuzilib, z^* funksiya shartsiz ekstremumga tekshirilar edi, bu yerda λ_i – lar qandaydir o'zgarmas ko'paytuvchilar. endi bu, $n+m$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ y

a

Aynan shu usul bilan $J[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ funksional uchun shartli ekstre-

ffium masalasini yechish mumkin, aynan: agar bizga

i

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x))dx$$

funksionalni $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, (i = 1, 2, \ldots, m; m < n),$ shart ostida shartli ekstremumga tekshirish masalasi qo'yilgan bo'lsa, u holda

$$J^*[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i \right) dx, \text{ yoki } J^*[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F^* dx, \quad (2)$$

funksional tuziladi va bu funksional shartsiz ekstremumga tekshiriladi. (2) yordamchi funksionalning integranti

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i. \quad (3)$$

Lagranj funksiyasi (yoki lagranjian) deb ataladi. (3) Lagranj funksiyasining chap tomoniga kiruvchi bog'lanishning $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x) \in C^1[a,b]$– koeffitsientlari *Lagranj ko'paytuvchilari* deb ataladi. Bu funksionalni shartsiz ekstremumga tekshirish uchun quyidagi

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\varphi_i = 0, (i = 1, 2, \ldots, m). \quad (4)$$

Eyler tenglamasi tuziladi va qo'shimcha $\varphi_i = 0, (i = 1, 2, \ldots, m).$ bog'lanish tenglamasi bilan birgalikda yechiladi. $n+m$ ta tenglamalar soni, umuman aytganda, $m+n$ ta $y_1, y_2, \ldots, y_n$ va $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ noma'lum funksiyalarni aniqlash uchun yetarli. Bu yerda $y_j(a) = y_{j0}, y_j(b) = y_{j1}, \ j = 1, 2, \ldots, n,$ chegaraviy shartlar bog'lanish tenglamasiga zid bo'lmasligi kerak, aksincha ular Eyler tenglamasining umumiy yechimidagi $2n$ ta ixtiyoriy o'zgarmaslarni aniqlashga imkon beradi.

Ravshanki, mazkur yo'l bilan topilgan, J funksionalni maksimumga yoki minimumga erishtiruvchi egri chiziqlar dastlabki variatsion masalaning yechimi bo'ladi.

Agar (2) funksional $y_i(x)(i=1,2,\dots,n)$ egri chiziqlarda shartsiz ekstremumga erishsa, u holda (1) funksional $y_i(x)(i=1,2,\dots,n)$ funksiyalarda shartli ekstremumga ham erishadi. Haqiqatan, agar $y_i(x)$ funksiyalarda (2) funksional shartsiz ekstremumga erishgan bo'lsa, u holda u (1) – Eyler tenglamasini qanoatlantiradi. Demak, $J^* = J$ bo'ladi. Shu bilan birga, agar $y_i(x)$ funksiyalar (2) funksionalga shartsiz ekstremum bersa, u holda $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ bog'lanishni qanoatlantiruvchi tonnoq bo'lgan funksiyalar sinfida (1) funksionalga ham ekstremum beradi.

Shunday qilib, Lagranj masalasini qo'yilishini ko'rib o'taylik: quyidagi

$$y_i(a) = y_{i0}, y_i(b) = y_{i1}, \quad i = 1,2,\dots,n, \tag{5}$$

chegaraviy shartlar va

$$\varphi_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \ (j = 1,2,\dots,m), \ m < n, \tag{6}$$

bog'lanishli bo'lganda

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))dx \tag{7}$$

funksionalni ekstremumini topish masalasiga *golonom bog'lanishli Lagranj* masalasi deb ataladi.

Shunday qilib, (7) funksional nafaqat (5) chegaraviy shartlarni, shu bilan birga (6) ko'rinishdagi bog'lanishli tenglamani qanoatlantiruvchi joiz funksiyalar ustida qaraladi. Lagranj masalasi ham yuqorida ko'rib o'tganimizdek ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning shartli ekstremumi masalasi kabi yechiladi. Lagranj masalasini yechishda (7) funksional ekstremumining quyidagi zaruriy shartidan foydalanamiz.

Biroq bu mulohazalardan dastlabki masalaning shartli ekstremumdagi barcha yechimlari J^* funksionalga shartsiz ekstremum beradi deb aytib bo'lmaydi. Demak, bu yerda barchu yechimlarni shu usul bilan topish mumkinmi degan savol ochiq qolyapdi. Biz bundanda kuchsizroq tasdiqni isboti bilan chegaralanamiz.

1-teorema. *$y_i(x)$, $(i=1,2,\dots,n)$ funksiyalar $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, $(i=1,2,\dots,m)$, $m<n$, shartlar ostida*

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))dx$$

funksional ekstremumini amalga oshiruvchi funksiyalar $\lambda_j(x)(j=1,2,\dots,m)$, mos ko'paytuvchilarni tanlash bilan

$$J^*[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b \left(F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\varphi_j \right) dx = \int_a^b F^* dx, \tag{8}$$

funksional uchun tuzilgan Eyler tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. $\lambda_j(x)$ va $y_i(x)$ funksiyalar

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i'}^* = 0, \quad (i = 1,2,\dots,n),$$

Eyler tenglamasidan va $\varphi_j = 0, (j=1,2,\dots,m), m<n$, tenglamalardan aniqlanadi

Agar J funksional argumentlarini faqat $y_j(x)$ funksiyalardangina emas, $\lambda_i(x)$ funksiyalardan ham iborat deb hisoblasak, u holda $\varphi = 0$ tenglamani J funksional uchun Eyler tenglamasi deb hisoblash mumkin.

(8) funksional (5)-(7) masalaning yordamchi funksionali deyiladi. (5) chegaraviy shartlarni hamda (6) bog'lanish tenglamasini qanoatlantiruvchi (7) funksional ekstremallarini Lagranj masalasining ekstremallari deb atayniz. Aslida teorema. Lagranj masalasining barcha ekstremallari (2) yordamchi funksionalning ekstremallar to'plamida yotishligini tasdiqlaydi.

Demak, ularni topish uchun (2) yordamchi funksionalning ekstremumlari ichidan shunday ekstremallarni tanlab olish kerakki, natijada ular (5) chegaraviy shartlarni hamda (6) bog'lanish tenglamasini qanoatlantirsin. Boshqacha so'z bilan aytganda, (2) yordamchi funksionalning (5) chegaraviy shartlarni hamda (6) bog'lanish tenglamasini qanoatlantiruvchi ekstremallari Lagranj masalasining ekstremallari bo'ladi.

Aytilganlarni hisobga olib, teoremadan Lagranj masalasi uchun shartlarning to'la sistemasini olish mumkin, ya'ni noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lgan sistemani olish mumkin. Haqiqatan, $y_j(x), (j = 1,2,\ldots,n)$, hamda $\lambda_i(x)\ (i = 1,2,\ldots,m)$, $(n+k)$ ta noma'lum funksiyalar uchun biz (2) funksional uchun va k ta bog'lanishli tenglama uchun n ta

$$F_{y_j}' - \frac{d}{dx} F_{y_j'}' = 0, \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{9}$$

Eyler tenglamasini olamiz. Bu sistemaning yechimlari ichidan shundayini tanlash kerakki, u (5) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin va bundan tashqari bu shartlar boshlang'ich shartlarga zid bo'lmasin.

Izoh. Ushbu (3) lagranjian funksiyasi sifatida

$$F' = \lambda F_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i,$$

funksiyadan foydalaniladi, bu yerda $\lambda_0 = const$. Bu holda agar (5)-(7) masalasida minimum qidirilsa, $\lambda_0 \geq 0$ deb olinadi, agar (5)-(7) masalasida maksimum qidirilsa, $\lambda_0 \leq 0$ deb olinadi. Umuman olganda lagranjianga yana bitta λ_0 ko'paytuvchining qo'shilishi, aslida lagranjianni biror songa ko'paytirish bilan teng kuchli bo'lganligi sababli, jiddi kuchli ta'sir ko'rsatmaydi.

Agar $\lambda_0 \neq 0$ bo'lsa, bunday ko'paytma Eyler tenglamalar sistemasining yechimlar to'plamini o'zgartirmaydi. $\lambda_0 = 0$ qiymat esa buzilgan hol hisoblanadi, qaysiki, bu holda (2) yordamchi funksionalning ekstremalini (bu ekstremallar maqsad funksionali bilan hech qanday bog'liq bo'lmaganligi sababli) izlash masalasi o'z ma'nosini yo'qotadi.

Agar funksionalning argumentini $y_j(x), (j = 1,2,\ldots,n)$, funksiyalargagina emas, balki $\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$, funksiyalar ham deb hisoblasak, u holda $\varphi_i = 0, (i = 1,2,\ldots,m)$, tenglamani ham Eyler tenglamasi deb qarash mumkin. Bu yerda $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, (i = 1,2,\ldots,m), m < n$, tenglamani bog'liqsiz deb faraz qilinadi, ya'ni bu tenglamalar bog'liqsiz bo'lishligi uchun, ixtiyoriy $y_j(x), (j = 1,2,\ldots,n)$, funksiyalarda $m-$ tartibli yakobian-

laridan biri noldan farqli bo'lishligini talab qilish yetarli. masalan.

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_m)}\neq 0 \quad \text{yoki} \quad \text{rang}\left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\right\|=m.$$

Isboti. Mazkur masala uchun ekstremumning asosiy zaruriy sharti $\delta J=0$ ifodani yozamiz:

$$\int_a^b\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}\delta y_j+F_{y'_j}\delta y'_j\right)dx=0. \tag{10}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda δJ funksiyaning variatsiyasi bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi $\delta y_j(a)=\delta y_j(b)=0,\ j=1,2,\ldots,n$. (10) ifodada chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda har bir qavs ichidagi ikkinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallab.

$$\int_a^b\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}+\frac{d}{dx}F_{y'_j}\right)\delta y_j dx=0,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda $\varphi_i(x,y_j),\ i=1,2,\ldots,m$ funksiyalar $\varphi_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0,\ i=1,2,\ldots,m,\ m<n$, bog'lanish tenglamasini qanoatlantiradi, shu sababli δy_j variatsiyalar ixtiyoriy emas. Shuning uchun, hozircha variatsion hisobning asosiy lemmasi (Lagranj lemmasi) ni qo'llab bo'lmaydi. δy_j variatsiyalar $\varphi_i=0,\ i=1,2,\ldots,m$, bog'lanish tenglamasini variatsiyalash yo'li bilan olingan quyidagi shartni qanoatlantirishi kerak, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j=0,\quad i=1,2,\ldots,m, \tag{11}$$

va bundan faqat δy_j variatsiyani $n-m$ tasinigina ixtiyoriy deb hisoblash mumkin, $\delta y_1,\ldots,\delta y_{1+m},\ldots,\delta y_n$ qolganlarini yuqoridagi olingan tenglamalardan aniqlaymiz. Aniqroq qilib aytadigan bo'lsak,

$\varphi_i(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\ldots,y_n+\delta y_n)=0$ va $\varphi_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0$,

tenglamalarning chap tomonlarining ayirmasi hisoblangan

$$\varphi_i(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\ldots,y_n+\delta y_n)-\varphi_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

ifodani Teylor qatoriga yoyib quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j+R_i=0,$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerda $R_i=0,\delta y_j,(j=1,2,\ldots,m)$ variatsiyaga nisbatan birdan yuqori tartibga ega. Biroq, funksionalni variatsiyasini hisoblaganda bizni faqat $\delta y_j,(j=1,2,\ldots,m)$ variatsiyalarga nisbatan birinchi tartibli chiziqli qismi qiziqtirganligi sababli, $R_i=0$ ifodani keyinchalik yuritiladigan mulohazalarga muhim ta'sir qilmasligini ko'rsatish qiyin emas. (11) ifoda $\delta y_j,(j=1,2,\ldots,m)$ variatsiyalarga nisbatan bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasini tashkil qiladi. Endi (11) tenglamalar sistemasining har bir tenglamasini $\lambda_i(x),(i=1,2,\ldots,m)$ ifodaga ko'paytirib, $[a,b]$ oraliqda integrallab, quyidagi

$$\int_a^b\lambda_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j dx=0,\quad i=1,2,\ldots,m,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu m ta tenglamani $\delta y_j,(j=1,2,\ldots,m)$, joiz variatsiya qanoatlantiruvchi

$$\int_a^b\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}+\frac{d}{dx}F_{y'_j}\right)\delta y_j dx=0,$$

tenglama bilan qo'shib,

$$\int_a^b\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}+\lambda_i(x)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}F_{y'_j}\right)\delta y_j dx=0,$$

tenglikka ega bo'lamiz yoki $F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i$ – deb belgilash kiritsak.

yuqoridagi tenglik quyidagi

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j dx = 0.$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda ham $\delta y_j (j = 1,2,\ldots,m)$ variatsiyalar ixtiyoriy bo'lmaganligi sababli variatsion hisobning asosiy lemmasini qo'llab bo'lmaydi. Endi m ta $\lambda_i(x) (i = 1,2,\ldots,m)$ ko'paytuvchilarni shunday tanlaymizki, natijada ular m ta

$$F^*_{y_i} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m.$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantirsin yoki boshqacha qilib aytganda integral ostidagi m ta qo'shiluvchi nolga aylansin

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_i} = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,m).$$

Bu ifoda $\lambda_i(x) (i = 1,2,\ldots,m)$ noma'lum ko'paytuvchilarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini tashkil qiladi, bundan tashqari determinant

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0.$$

shuning uchun bu sistema $\lambda_i(x) (i = 1,2,\ldots,m)$ noma'lumlarga nisbatan yagona yechimga ega. $\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$ funksiyalarni shunday tanlash hisobiga ekstremumning asosiy zaruriy sharti bo'lgan

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j dx = 0.$$

ifoda quyidagi ko'rinishni oladi

$$\int_a^b \sum_{j=m+1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j dx = 0,$$

$y_j (x) (j = 1,2,\ldots,n)$ funksiyalarda J funksional ekstremumga erishganligi sababli, oxirgi funksional tenglama ixtiyoriy $\delta y_j (j = m+1,\ldots,n)$ variatsiyalarda ayniyatga aylanadi. u holda variatsion hisobning asosiy lemmasini qo'llash mumkin. Endi barcha $\delta y_j (j = m+1,\ldots,n)$ variatsiyalarni birtasidan tashqari navbat bilan nolga tenglab va asosiy lemmani qo'llab.

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad (j = m+1,\ldots,n).$$

ifodani olamiz. Bu olingan tenglamani e'tiborga olib, va nihoyat

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} = 0, \quad (j = 1,\ldots,n).$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bundan J funksional ekstremumga erishuvchi $y_j(x) (j = 1,2,\ldots,n)$ funksiyalar va $\lambda_i(x) (i = 1,2,\ldots,m)$ ko'paytuvchilar

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} = 0, \quad (j = 1,\ldots,n).$$

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,m).$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi kerak ekanligi kelib chiqadi.

Teorema isbot bo'ldi.

Lagranj masalasi haqida to'laroq tushunchaga ega bo'lish uchun $n = 2$ bo'lgan hamda bitta fazali chegaralanganlik $k = 1$ bo'lgan holda quyidagi masalani (Lagranj) yechaylik:

$$J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx \tag{12}$$

$$y(a) = y_a, \; y(b) = y_b, \; z(a) = z_a, \; z(b) = z_b. \tag{13}$$

$$g(x,y,z)=0 \qquad (14)$$

Bu masalaning xususiy holi sifatida geodezik chiziq haqidagi masalani aytish mumkin, unda: berilgan sirtda eng kichik uzunlikdagi egri chiziq topish talab etiladi. (12) - (14) masalada $g(x,y,z)=0$ sirtda yotuvchi $y=y(x), z=z(x)$ funksiyalarning $y(x), z(x)\in C^1_{[a,b]}$ sinfdan olingan funksiyalar juftligi joiz funksiyalar bo'ladi.

Faraz qilamizki, bu sirt maxsus nuqtalarga ega emas. $g_y^2(x)+g_z^2(x)+g_t^2(x)\neq 0$. Bu holda yuqoridagi 1-teorema quyidagi holga keltiriladi.

2-teorema. *Agar $y^*(x), z^*(x)\in C^1_{[a,b]}$ funksiyalar juftligi (12)-(14) masalaning yechimi va bundan tashqari $g_y^2(x)+g_z^2(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $\lambda(x)$ funksiya mavjud bo'ladiki, $y^*(x), z^*(x), \lambda^*(x)\in C^1_{[a,b]}$ funksiyalar juftligi*

$$J[y,z]=\int_a^b\left\{F(x,y,z,y',z')+\lambda(x)g(x,y,z)\right\}dx,$$

funksionalning ekstremumi bo'ladi.

Isboti. Yuqorida aytganimizdek xususiy holni qaraymiz, qachonki, $g(x,y,z)=0$ bog'lanishli tenglamasini o'zgaruvchilarning biriga nisbatan yechilgan, masalan, z o'zgaruvchiga nisbatan yechilgan bo'lsin. U holda u tenglama $z=\varphi(x,y)$ tenglamaga teng kuchli bo'ladi, bu yerda farazga ko'ra $g(x,y,z)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lganligi sababli, $\varphi(x,y)$ funksiya ham ikki marta differensiallanuvchi.

Chegaraviy shartlarni bog'lanish tenglamaga zid bo'lmaslik sharti

bu hol uchun quyidagi ko'rinishdagi

$$z_a=\varphi(a,y_a) \text{ va } z_b=\varphi(b,y_b)$$

tengliklarni anglatadi.

$z=\varphi(x,y)$ tenglama qaralayotgan masalani bir noma'lumli funksiya masalasiga keltirishga imkon beradi. Haqiqatan, agar $y^*(x), z^*(x)\in C^1_{[a,b]}$ funksiyalar (12)-(14) masalaning yechimi bo'lsa, u holda $y^*(x)$ funksiya variatsion hisob asosiy masalasining yechimi bo'ladi, ya'ni:

$$J[y,z]=\int_a^b F(x,y,\varphi,y',\varphi_x+\varphi_y y')dx\to\text{extr},\quad y(a)=y_a,\ y(b)=y_b. \qquad (15)$$

Shuning uchun 2-teoremaga ko'ra, $y^*(x)$ funksiya bu masalaning funksionali uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'lgan Eyler tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}-F_{z'}\cdot\varphi_y\right)-F_y-F_z\varphi_y-F_{z'}(\varphi'_{xy}+\varphi'_{yy}\cdot y')=0 \qquad (16)$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_{z'}\cdot\varphi_y\right)=\frac{d}{dx}\left(F_{z'}\right)\cdot\varphi_y+F_{z'}\varphi'_{xy}+F_{z'}\frac{d}{dx}\left(\varphi_y\right)=\frac{d}{dx}\left(F_{z'}\right)\cdot\varphi_y+F_{z'}(\varphi'_{xy}+\varphi'_{yy}\cdot y')$$

ekanligidan (16) tenglama quyidagi tenglamaga teng kuchli bo'ladi

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)-F_y-F_z\varphi_y-\frac{d}{dx}\left(F_{z'}\right)\varphi_y=0$$

yoki

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)-F_y+\left[\frac{d}{dx}\left(F_{z'}\right)-F_z\right]\varphi_y=0 \qquad (17)$$

φ_y funksiyani xususiy hosilasini g funksiyaning xususiy hosilasi orqali quyidagicha $\varphi_y=-\frac{g_y}{g_z}$ ifodalash mumkin. (17) tenglamada mos almashtirishlarni bajaramiz:

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y = \left[\frac{d}{dx}(F_{z'}) - F_z\right]\frac{g_y}{g_z} \quad (18)$$

(18) tenglama

$$\lambda = \frac{1}{g_z}\left[\frac{d}{dx}(F_{z'}) - F_z\right]$$

almashtirish orqali

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y - \lambda g_y = 0, \quad (19)$$

ko'rinishga keltiriladi, formulada almashtirishni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dx}(F_{z'}) - F_z - \lambda g_z = 0. \quad (20)$$

(19) va (20) munosabatlar

$$J^*[y,z] = \int_a^b (F(x,y,z,y',z') + \lambda(x)g(x,y,z))dx,$$

yordamchi funksional uchun Eyler tenglamalarini ifodalaydi.

Demak, agar $y^*(x), z^*(x)$ funksiyalar (12)–(14) masalaning yechimi bo'lsa, u holda $y^*(x)$ (15) masalaning yechimi bo'ladi, binobarin, (16) tenglamaning ham yechimi bo'ladi. Lekin, u holda $y^*(x)$ va $z^*(x)$ funksiyalar (19) va (20) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi, ya'ni yordamchi funksional uchun Eyler tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. Teorema xususiy holda, qachonki, $g(x,y,z)=0$ bog'lanish tenglamasi z o'zgaruvchiga nisbatan yechilgan holda isbot qilindi.

Ta'kidlab o'tish kerakki, 2-teoremaning isboti Dyubua-Reymon lemmasiga, qaysiki, o'z navbatida Lagranj lemmasiga tayanadi, oxirida faqat lokal variatsiyadan foydalanadi, ya'ni $\|\delta\|_1$ kichik norma bo'yicha

variatsiyaga va noldan farqli bo'lgan $x_0 \in [a,b]$ nuqtaning atrofigagina tayanadi. $\delta(x)$ variatsiyaning grafigi variatsiyalangan $y^*(x)$ funksiyaning grafigidan $(x, y^*(x))$ nuqtaning kichik atrofida farq qiladi. Bunday atrofni shunchalar kichik olish mumkinki, $g_z(x,y,z) \neq 0$ bo'lganda $g(x,y,z)=0$ tenglama oshkormas funksiyaning ta'rifiga ko'ra, z o'zgaruvchiga nisbatan yechimga ega. Agar $(x_0, y^*(x_0), z^*(x_0))$ nuqtada $g_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ ga ega bo'lsak, u holda bu nuqtada va uning atrofida $g_z(x,y,z) \neq 0$ bo'ladi, shuning uchun biz $g(x,y,z)=0$ tenglamani z o'zgaruvchiga nisbatan yechishimiz mumkin. Teorema isbot bo'ldi.

1-misol. $15x-7y+z-22=0$ sirtda yotuvchi $A(1,-1,0)$ va $B(2,1,-1)$ nuqtalar orasidagi eng qisqa masofa topilsin.

Yechish. Ma'lumki, $\varphi(x,y,z)=0$ sirtdagi $A(x_0,y_0,z_0)$ va $B(x_1,y_1,z_1)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $y=y(x)$, $z=z(x)$, l integralning minimumini $\varphi(x,y,z)=0$ shart ostida topish kerak. Bizning holimizda

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad \varphi(x,y,z) = 15x-7y+z-22.$$

Yordamchi funksionalni tuzamiz

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x)(15x-7y+z-22)\right]dx,$$

va bu funksional uchun Eyler tenglamasini yozamiz:

$$\lambda(x)\cdot(-7) - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0, \quad (21)$$

$$\lambda(x)\cdot 1-\frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0. \tag{22}$$

Endi

$$\varphi(x,y,z)=15x-7y+z=-22 \tag{23}$$

bog'lanish shartidan foydalanib, (21)-(22) tenlamalar sistemasini yechamiz. Izlanayotgan $y=y(x)$, $z=z(x)$ funksiyalar quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi:

$$y(1)=-1,\quad y(2)=1,\quad z(1)=0,\quad z(2)=-1, \tag{24}$$

(22) tenglamani 7 ga ko'paytirib, (21) tenglamaga qo'shsak.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'+z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0.$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan

$$\frac{y'+z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=C_1. \tag{25}$$

(23) tenglamadan

$$z=7y+15 \tag{26}$$

tenglamani olamiz. z ni bu qiymatini (25) tenglamaga olib borib qo'yib, olingan differensial tenglamani yechib, $y(x)=C_1x+C_2$ umumiy yechimni olamiz. (24) chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1=2$, $C_2=-3$ qiymatlarni topamiz. Bundan

$$y(x)=2x-3 \tag{27}$$

yechimni topamiz. (27) tenglikni hisobga olib, (26) dan

$$z(x)=1-x \tag{28}$$

funksiyani topamiz. ravshanki, (28) funksiya uchun, ravshanki chegaraviy shartlar bajariladi. (21) yoki (22) dan $\lambda(x)=0$ ni olamiz. Qidirilayotgan masofa quyidagi miqdorga

$$l=\int_1^2\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx=\sqrt{6}$$

teng bo'ladi. Bu natija geometrik mulohazalardan darhol kelib chiqadi.

2-misol. $\varphi(x,y,z)=0$ sirtda yotuvchi ikkita $A(x_0,y_0,z_0)$ va $B(x_1,y_1,z_1)$ nuqtalar orasidagi eng qisqa masofa topilsin(geodezik chiziq haqidagi masalaga qarang). Sirtda yotuvchi ikkita $A(x_0,y_0,z_0)$ va $B(x_1,y_1,z_1)$ nuqtalar orasidagi masofa ma'lumki,

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

formula bilan aniqlanadi. Mazkur holda $\varphi(x,y,z)=0$ shart ostida $l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ funksionalni minimumini topish kerak bo'ladi. Oldingi misoldagidek, quyidagi yordamchi

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)\varphi(x,y,z)\right]dx$$

funksionalni qaraymiz va bu funksional uchun Eyler tenglamasini tuzamiz

$$\lambda(x)\cdot\varphi_y(x,y,z)-\frac{d}{dx}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0$$

$$\lambda(x)\cdot\varphi_z(x,y,z)-\frac{d}{dx}\cdot\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0.$$

$$\varphi(x,y,z)=0.$$

Bu uchta tenglamadan I funksional shartli minimumga erishishi mumkin bo'lgan, izlanayotgan $y=y(x)$ va $z=z(x)$ funksiyalarni hamda $\lambda(x)$

ko'paytuvchini aniqlaymiz.

3-misol. Ostrogradskiy-Gamilton prinsipidan foydalanib, quyidagicha $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$ bog'lanishli, U – quvvat funksiyasiga ega bo'lgan (x_i, y_i, z_i) koordinata va $m_i, (i = 1,2,\ldots,n)$ massali material nuqtalar sistemasining harakat tenglamasini toping.

Yechish. Ostrogradskiy-Gamilton integrali

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt$$

ko'rinishga ega. Bu holda funksional quyidagi

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left((\dot{x}_i)^2 + (\dot{y}_i)^2 + (\dot{z}_i)^2 \right) - U \right| dt$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left((\dot{x}_i)^2 + (\dot{y}_i)^2 + (\dot{z}_i)^2 \right) - U + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\varphi_i \right| dt.$$

Material nuqtaning harakat tenglamasi J^* funksional uchun yozilgan Eyler tenglamasidan iborat bo'ladi. Ular quyidagi ko'rinishga

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i};$$

$$m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i};$$

$$m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i}, \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

ega bo'ladi.

2.2. $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$ ***ko'rinishdagi bog'lanishli (golonom bo'lmagan) bo'lgan hol.***

Biz oldingi bandda quyidagi

$$y_i(a) = y_{i0}, y_i(b) = y_{i1}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

chegaraviy shartlar va

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, (i = 1,2,\ldots,m), m < n, \tag{29}$$

chekli bog'lanishli bo'lganda

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x))dx$$

funksionalni ekstremumga tekshirish masalasini ko'rib o'tgan edik. Faraz qilaylik, bog'lanish tenglamalari

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, (i = 1,2,\ldots,m),$$

differensial tenglamalardan iborat bo'lsin. Mexanikada bunday ko'rinishga ega bo'lgan bog'lanishlar golonom bo'lmagan. (29) ko'rinishdagi bog'lanishlar golonom bo'lgan bog'lanishlar deb ataladi.

Bu holda ham J funksionalni J^* funksional

$$J^*[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i \right) dx = \int_a^b F^* dx,$$

bu yerda $F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i$, shartsiz ekstremumga erishadigan egri chiziqlarda shartli ekstremumga erishishligini ko'rsatuvchi Lagranj ko'paytuvchilar usulini isbot qilish mumkin. Biroq, isboti chekli bog'lanishli holga nisbatan aytarli darajada murakkab hisoblanadi.

Agar ma'lum ma'noda kuchsiz bo'lgan quyidagi: $\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$, funksiyalarni tanlash bilan J funksionalga shartli ekstremum beruvchi egri chiziqlar J^* funksional uchun ham ekstremal bo'ladi degan tasdiqni isbotlash bilan chegaralansak, u holda oldingi paragrafdagi isbot qaralayotgan masala uchun muhim bo'lmagan o'zgarishlar bilan qayta-

riladi.

Demak, bu hol uchun Lagranj masalasi quyidagicha qo'yiladi:

$$y_j(a) = y_{j0}, y_j(b) = y_{j1}, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{30}$$

chegaraviy shartlar va

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,m) \tag{31}$$

bog'lanishli bo'lganda

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x))dx \tag{32}$$

funksionalning ekstremumi topilsin.

Bu masala ham xuddi avvalgi masala kabi (30)-(32) shartlar ostidagi shartli ekstremum masalasi hisoblanadi, bu masalada ham $\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$. Lagranj ko'paytuvchilari yordamida

$$J^*[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b \left(F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') \right) dx =$$

$$= \int_a^b F^* dx.$$

bu yerda

$$F^* = F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n').$$

funksionalni shartsiz ekstremumga tekshirish masalasiga keltiriladi.

Haqiqatan, faraz qilaylik m tartibli funksionalli determinantlardan biri noldan farqli bo'lsin, masalan

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0 \quad \text{yoki} \quad rank\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right) = k$$

bo'lishligi talab etiladi. Bu shart bog'lanishni bog'liqsizligini kafolatlaydi. Endi $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$, tenglamani $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ larga nisbatan yechib,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_m')} \neq 0$$

ekanligidan, $y_i' = \psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{m+1}', \ldots, y_n'), (i = 1,2,\ldots,m)$. ifodani olamiz. Agar $y_{m+1}, \ldots, y_n$ funksiyalarni ixtiyoriy berilgan funksiyalar deb hisoblasak, u holda bu differensial tenglamalar sistemasidan $y_1, \ldots, y_m$ funksiyalar aniqlanadi. Shunday qilib, $y_{m+1}, \ldots, y_n$ funksiyalar tayinlangan chegaraviy qiymatli ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiyalar bo'ladi va ularning variatsiyasi mos ravishda shu ma'noda ixtiyoriy bo'ladi.

Aytaylik, $y_1, \ldots, y_m$ – funksiyalar $\varphi_i = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,m)$. bog'lanishli tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy joiz funksiyalar bo'lsin. Bog'lanish tenglamasini variatsiyalab, quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'}\delta y_j' = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,m).$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Olingan har bir tenglamani hadlari bo'yicha hozircha aniqlanmagan $\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$. ko'paytuvchilarga ko'paytirib, $[a,b]$ oraliqda integrallab yuborsak, u holda

$$\lambda_i(x)\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j dx + \int_a^b \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'}\delta y_j' dx = 0,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Endi ikkinchi integralni har bir qo'shiluvchisini bo'laklab integrallab, $y_j(a) = y_{j0}, y_j(b) = y_{j1}, \quad j = 1,2,\ldots,n,$ ekanligini e'tiborga olib,

riladi.

Demak, bu hol uchun Lagranj masalasi quyidagicha qo'yiladi:

$$y_i(a) = y_{ia}, y_i(b) = y_{ib} \quad i = 1,2,\dots,n, \tag{30}$$

chegaraviy shartlar va

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \tag{31}$$

bog'lanishli bo'lganda

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))dx \tag{32}$$

funksionalning ekstremumi topilsin.

Bu masala ham xuddi avvalgi masala kabi (30)-(32) shartlar ostidagi shartli ekstremum masalasi hisoblanadi, bu masalada ham $\lambda_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,m)$ Lagranj ko'paytuvchilari yordamida

$$J^*[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b \left[F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') \right] dx =$$

$$= \int_a^b F^* dx,$$

bu yerda

$$F^* = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')$$

funksionalni shartsiz ekstremumga tekshirish masalasiga keltiriladi.

Haqiqatan, faraz qilaylik m tartibli funksionalli determinantlardan biri noldan farqli bo'lsin, masalan

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \dots, y_m')} \neq 0 \quad \text{yoki} \quad \operatorname{rank}\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \right\| = k$$

bo'lishligi talab etiladi. Bu shart bog'lanishni bog'liqsizligini kafolatlaydi. Endi $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0$ tenglamani $y_1', y_2', \dots, y_m'$ larga nisbatan yechib,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \dots, y_m')} = 0$$

ekanligidan, $y_i' = \psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{m+1}', \dots, y_n')$, $(i = 1,2,\dots,m)$ ifodani olamiz. Agar $y_{m+1}, \dots, y_n$ funksiyalarni ixtiyoriy berilgan funksiyalar deb hisoblasak, u holda bu differensial tenglamalar sistemasidan $y_1, \dots, y_m$ funksiyalar aniqlanadi. Shunday qilib, $y_{m+1}, \dots, y_n$ funksiyalar tayinlangan chegaraviy qiymatli ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiyalar bo'ladi va ularning variatsiyasi mos ravishda shu ma'noda ixtiyoriy bo'ladi.

Aytaylik, $y_1, \dots, y_n$ – funksiyalar $\varphi_i = 0$ $(i = 1,2,\dots,m)$ bog'lanishli tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy joiz funksiyalar bo'lsin. Bog'lanish tenglamasini variatsiyalab, quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \delta y_j' = 0, \quad i = 1,2,\dots,m,$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Olingan har bir tenglamani hadlari bo'yicha hozircha aniqlanmagan $\lambda_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,m)$ ko'paytuvchilarga ko'paytirib, $[a,b]$ oraliqda integrallab yuborsak, u holda

$$\lambda_i(x)\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j dx + \int_a^b \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \delta y_j' dx = 0.$$

tenglikka ega bo'lamiz. Endi ikkinchi integralni har bir qo'shiluvchisini bo'laklab integrallab, $y_i(a) = y_{ia}, y_i(b) = y_{ib}$ $i = 1,2,\dots,n$, ekanligini e'tiborga olib,

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\left(\lambda_i(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \right) \right] \delta y_j dx = 0, \tag{33}$$

ifodaga ega bo'lamiz. $\delta J = 0$ ekstremumning asosiy zaruriy shartidan

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0, \tag{34}$$

tenglikni olamiz,

$$\delta J = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} \delta y_j + F_{y_j'} \delta y_j' \right) dx = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0,$$

Endi olingan barcha (33) tenglamalarni (34) tenglamaga qo'shib,

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i.$$

belgilashni kiritib,

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0, \tag{35}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda ham $\delta y_j, (j = 1,2,\ldots,n)$, variatsiyalar ixtiyoriy bo'lmaganligi uchun variatsion hisobning asosiy lemmasini qo'llab bo'lmaydi. Endi $\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$, m ta ko'paytuvchini shunday tanlaymizki, natijada ular

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0, (j = 1,2,\ldots,m).$$

Eyler tenglamasini qanoatlantirsin. Agar bu tenglamalarni kengaytirilgan ko'rinishda yozsak, u holda ular $\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$, va $\frac{d\lambda_i(x)}{dx}, (i = 1,2,\ldots,m)$, funksiyalarga nisbatan, chiziqli differensial tenglamalar sistemasini tashkil qiladi, qaysiki, bu tenglamalar sistemasi aytilgan fazolar ostida m ta ixtiyoriy o'zgarmaslarga bog'liq bo'lgan

$\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$, noma'lumlarga nisbatan yagona yechimga ega bo'ladi.

$\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$, funksiyalarni bunday tanlashda (35) tenglama

$$\int_a^b \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0,$$

ko'rinishga keltiriladi, bu yerda $\delta y_j, (j = 1,2,\ldots,n)$, variatsiyalar ixtiyoriy bo'ladi va bundan qandaydir bitta δy_j, variatsiyadan tashqari barcha δy_j, variatsiyalar nolga teng bo'ladi, ya'ni $\delta y_j = 0$. Demak, variatsion hisobning asosiy lemmasini qo'llab,

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0, \quad (j = m+1,\ldots,n).$$

ifodani olamiz. Shunday qilib, J funksionalni shartli ekstremumga erishtiruvchi $y_j(x), (i = 1,2,\ldots,n)$, va $\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$, ko'paytuvchilar $m+n$ ta tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi kerak ekan:

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0, \quad (j = 1,\ldots,n),$$

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,m).$$

ya'ni $y_j(x), (i = 1,2,\ldots,n)$, va $\lambda_i(x), (i = 1,2,\ldots,m)$, ko'paytuvchilar $m+n$ ta $y_j(x)$ va $\lambda_i(x)$ funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksional deb qaralayotgan J^* funksional uchun yozilgan Eyler tenglamasini qanoatlantirishi kerak ekan.

3-§. Bolsa masalasi

Masalaning qo'yilishi. Bols masalasi deb, quyidagi $C^1[a,b]$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosidagi cheklovli bo'lmagan ekstremal masalaga aytiladi:

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx + f(y(a), y(b)), \qquad (1)$$

Bu yerda $a,b-$ berilgan sonlar, $a<b$, $F=F(x,y(x),y'(x))-$ uch o'zgaruvchili, $f(a,b)-$ esa ikki o'zgaruvchili funksiyalar. $[a,b]-$ kesma tayinlangan, lekin $-\infty<b<+\infty$ chekli. Bols masalasi variatsion hisobning sodda masalasi hisoblanadi. Bunda $F=F(x,y(x),y'(x))-$ integrant, $f(a,b)-$ terminant. (1) funksional esa *Bols funksionali* deyiladi. Agar ixtiyoriy $y(x)\in C^1[a,b]$ funksiya va $y^*(x)\in C^1[a,b]$ funksiya uchun shunday $\delta>0$ son topilib,

$$\|y(x)-y^*(x)\|<\delta \quad \left(\|y(x)-y^*(x)\|_{C[a,b]}<\delta, \|y'(x)-y^{*'}(x)\|_{C[a,b]}<\delta\right)$$

bo'lganda quyidagi tengsizlik $J[y]\geq J[y^*]$ $(J[y]\leq J[y^*])$ bajarilsa, u holda $y^*(x)\in C^1[a,b]$ funksiya (1) masalaga yoki Bols funksionaliga $C^1[a,b]$ fazoda kuchsiz lokal minimum (maksimum) beradi deyiladi va $y^*(x)\in loc\min(loc\max)$ ko'rinishda yoziladi (ikkalasi bir xil narsa).

Eslatib o'tamizki, agar $y(x)\in C^1[a,b]$ bo'lsa, uning normasi quyidagi

$$\|y(x)\|=\max_{a\leq x\leq b}\max\{|y(x)|,|y'(x)|\}$$

tenglik yordamida aniqlanadi.

Klassik variatsion hisobda kuchsiz ekstremum bilan bir qatorda an'anaviy ravishda kuchli ekstremum ham o'rganiladi. Shu bilan birga (1) funksional qaralayotgan funksiyalar sinfi ham kengaytiriladi. Masalada ekstremum $KC^1[a,b]$ fazoga tegishli $y(x)$ funksiyalar orasidan

qidiriladi. Variatsion hisob masalani yechishda "absolyut ekstremum" yoki "global ekstremum" tushunchalaridan foydalanamiz.

Ma'lumki, Eyler tenglamasi ikkinchi tartibli differensial tenglamadan iborat bo'lib, uning yechimi bo'lgan ekstremallar ikkita ixtiyoriy o'zgarmaslarga bog'liq bo'ladi. Bu o'zgarmaslar transversallik shartlaridan aniqlanadi.

Masalani yechish usuli.

1. Masalani matematik ifodalash, ya'ni (1) ko'rinishga keltirish.

2. Zaruriy shartlarni yozish:

a) Eyler tenglamasini yozish:

$$\frac{\partial F(x,y(x),y'(x)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y(x),y'(x)}{\partial y'}=0,$$

b) Transversallik shartlarini yozish:

$$\frac{\partial F(a,y(a),y'(a))}{\partial y'}=\frac{\partial f(y(a),y'(b)}{\partial y(a)},$$

$$\frac{\partial F(b,y(b),y'(b))}{\partial y'}=-\frac{\partial f(y(a),y'(b)}{\partial y(b)}.$$

transversallik shartlaridan Eyler tenglamasining umumiy $y=y(x,C_1,C_2)$ yechimidagi C_1 va C_2 o'zgarmaslarni aniqlash uchun foydalaniladi.

3. Chegarada transversallik shartlarini qanoatlantiruvchi ekstremallarni aniqlash.

4. Joiz ekstremallardan bittasi masalaning yechimidan iborat ekanligini isbotlash yoki yechim mavjud emasligini ko'rsatish.

Bols masalasini yechish uchun keltirilgan shartlar majmuasi to'la. Haqiqatan ham, Eyler tenglamasi - ikkinchi tartibli differensial

Ekstremumning zaruriy sharti. (1) Bols masalasini ekstremumga erishishining zaruriy shartini ta'minlovchi teoremani keltiramiz.

Ekstremumning zaruriy sharti.

1-teorema. *Aytaylik, $y^*(x)\in C^1[a,b]$ funksiya (1) Bols masalasiga kuchsiz lokal minimum bersin. F integrant $\{(x,y^*(x),y^{*'}(x)): x\in[a,b]\}$ to'plamning qandaydir atrofida o'zining $\frac{\partial F}{\partial y}$ va $\frac{\partial F}{\partial y'}$ xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz va J terminant $\{y^*(a),y^*(b)\}$ nuqtaning atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda $F(x,y(x),y'(x))\in C^1[a,b]$ bo'ladi va: a) Eyler teng-lamasi*

$$\frac{\partial F(x,y^*(x),y^{*'}(x))}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y^*(x),y^{*'}(x))}{\partial y'}=0;$$

b) transversallik sharti

$$\frac{\partial F(a_k,y^*(a_k),y^{*'}(a_k))}{\partial y'}=(-1)^k\partial f(y(a_k),y'(a_k)),\quad (k=0,1),$$

bajariladi.

Teoremaning isbotini bir necha bosqichga bo'lamiz.

A. *Lagranj bo'yicha variatsiyani aniqlash.* Ixtiyoriy, lekin tayinlangan $y(x)\in C^1[a,b]$ funksiyani olamiz. Bundan tashqari teoremaning shartiga ko'ra, $y^*(x)\in locextr$, ya'ni (1) masalaga ekstremum beradi, u holda bir o'zgaruvchili

$$\varphi(\lambda):J[y^*(b)+\lambda y(b)]=\int_a^b F(x,y^*(a)+\lambda y(a),y^{*'}(b)+\lambda y'(b))dx+$$

$$+f(y^*(a)+\lambda y(a),y^*(b)+\lambda y(b))$$

funksiya $\lambda=0$ nuqtada ekstremumga erishadi.

$$\Phi(x,\lambda)=F(x,y^*(x)+\lambda y(x),y^{*'}(x)+\lambda y'(x))$$

deb olamiz. $F, y^*(x), y(x)$, funksiyalarga qo'yilgan silliqlik shartidan $\varphi(\lambda)$ funksiyaning nol nuqtada differensiallanuvchiligi kelib chiqadi. Haqiqatan, Φ va Φ_x funksiyalar $[a,b]\times[-\lambda_0,\lambda_0]$ to'g'ri to'rtburchakda uzluksiz bo'ladi va demak, analizdagi ma'lum teoremaga ko'ra, integral ishorasi ostida differensiallash mumkin, lekin bu holda Ferma teoremasiga asosan $\varphi'(0)=0$ bo'ladi. $\varphi(\lambda)$ funksiyani differensiallab, $\lambda=0$ nuqtada hisoblasak, ixtiyoriy $y(x)\in C^1[a,b]$ funksiyalarda quyidagi

$$\varphi'(0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{J[y^*(x)+\lambda y(x)]-J[y^*(x)]}{\lambda}\overset{def}{=}\delta J[y^*(x),y(x)]=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}y(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}y'(x)\right]dx+f_{x_0}(y^*(a),y^*(b))y^*(a)+f_{x_1}(y^*(a),y^*(b))y^*(b)=0, \tag{2}$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, J Bols funksionalining Lagranj bo'yicha variatsiyasini hisobladik va $y^*(x)$ funksiyadagi bu funksionalning kuchsiz lokal ekstremumining zaruriy sharti – bu uning Lagranj bo'yicha variatsiyasining nolga teng ekanligini aniqladik.

B. Lemma (Dyubua-Reymon). *Aytaylik, $a_0(x)$ va $a_1(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va $y(a)=y(b)=0$ chegaraviy shartlarni qanoatlan-*

tenglamadan iborat. Uning umumiy yechimi ikkita noma'lum o'zgarmaslarga bog'liq. Bu o'zgarmaslarni aniqlash uchun ikkita tenglama transversallik shartlariga ega.

Ekstremumning zaruriy sharti. (1) Bolz masalasini ekstremumga erishishining zaruriy shartini ta'minlovchi teoremani keltiramiz.

Ekstremumning zaruriy sharti.

1-teorema. *Aytaylik, $y^*(x)\in C^1[a,b]$ funksiya (1) Bolz masalasiga kuchsiz lokal minimum bersin. F funksiya $\{(x,y^*(x),y^*(x)): x\in[a,b]\}$ to'plamning qandaydir atrofida o'zining $\frac{\partial F}{\partial y}$ va $\frac{\partial F}{\partial y'}$ xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz va f terminant $\{y^*(a),y^*(b)\}$ nuqtaning atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda $F(x,y(x),y'(x))\in C^1[a,b]$ bo'ladi va: a) Eyler tenglamasi*

$$\frac{\partial F(x,y^*(x),y^*(x))}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y^*(x),y^*(x))}{\partial y'}=0;$$

b) *transversallik sharti*

$$\frac{\partial F(a_k,y^*(a_k),y^*(a_k))}{\partial y}=(-1)^k\frac{\partial f(y^*(a_0),y^*(a_1))}{\partial a_k},\quad (k=0,1).$$

bajariladi.

Teoremaning isbotini bir necha bosqichga bo'lamiz.

A. *Lagranj bo'yicha variatsiyani aniqlash.* Ixtiyoriy, lekin tayinlangan $y(x)\in C^1[a,b]$ funksiyani olamiz. Bundan tashqari teoremaning shartiga ko'ra, $y^*(x)+\lambda y(x)$ *lineer*, ya'ni (1) masalaga ekstremum beradi, u holda bir o'zgaruvchili

$$\varphi(\lambda):J[y^*(b)+\lambda y(b)]=\int_a^b F(x,y^*(a)+\lambda y(a),y^*(b)+\lambda y'(b))dx+$$

$$+f(y^*(a)+\lambda y(a),y^*(b)+\lambda y(b))$$

funksiya $\lambda=0$ nuqtada ekstremumga erishadi.

$$\Phi(x,\lambda)=F(x,y^*(x)+\lambda y(x),y^*(x)+\lambda y'(x))$$

deb olamiz. $F, y^*(x), y(x)$ funksiyalarga qo'yilgan silliqlik shartidan $\varphi(\lambda)$ funksiyaning nol nuqtada differensiallanuvchiligi kelib chiqadi. Haqiqatan, Φ va Φ_λ funksiyalar $[a,b]\times[-\lambda_0,\lambda_0]$ to'g'ri to'rtburchakda uzluksiz bo'ladi va demak, analizdagi ma'lum teoremaga ko'ra, integral ishorasi ostida differensiallash mumkin. Lekin bu holda Fermа teoremasiga asosan $\varphi'(0)=0$ bo'ladi. $\varphi(\lambda)$ funksiyani differensiallab, $\lambda=0$ nuqtada hisoblasak, ixtiyoriy $y(x)\in C^1[a,b]$ funksiyalarda quyidagi

$$\varphi'(0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{J[y^*(x)+\lambda y(x)]-J[y^*(x)]}{\lambda}=\delta J[y^*(x),y(x)]=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}y(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}y'(x)\right]dx+f_{a_0}(y^*(a),y^*(b))y^*(a)+f_{a_1}(y^*(a),y^*(b))y^*(b)=0, \tag{2}$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, J Bolz funksionalining Lagranj bo'yicha variatsiyasini hisobladik va $y^*(x)$ funksiyadagi bu funksionalning kuchsiz lokal ekstremumining zaruriy sharti – bu uning Lagranj bo'yicha variatsiyasining nolga teng ekanligini aniqladik.

B. Lemma (Dyubua–Reymon). *Aytaylik, $q_0(x)$ va $q_1(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va $\int_a^b q_0(x)dx=\int_a^b q_1(x)dx=0$ chegaraviy shartlarni qanoatlan-*

tiruvchi ixtiyoriy uzluksiz differensiallanuvchi $v(x)$ funksiya uchun

$$\int_a^b [a_1(x)y(x) + a_0(x)y(x)v(x)]dx = 0.$$

tenglik bajarilsin. U holda $a_1(x)$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi va

$$-\frac{da_1(x)}{dx} + a_0(x) = 0$$

bo'ladi.

Isboti. Endi $p(x) = a_1(x)$ va $\int_a^x p(x)dx = \int_a^x a_1(x)dx$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi shunday $p(x) \in C^1[a,b]$ funksiyani tanlaymiz. U holda $y(a) = y(b) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $y(x) \in C^1[a,b]$ funksiya uchun lemmaning shartiga ko'ra,

$$0 = \int_a^b \left[a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)y(x)\right]dx = \int_a^b a_1(x)y'(x)dx + \int_a^b y(x)dp(x) =$$

$$= \int_a^b [a_1(x) - p(x)]y'(x)dx. \qquad (3)$$

bo'lishi shart. $y_1(x) \in C^1[a,b]$ funksiyani shunday tanlaymizki, u quyidagi $y_1'(x) = a_1(x) - p(x)$, $y_1(a) = 0$ munosabatlarni qanoatlantirsin. U holda $p(x) \in C^1[a,b]$ funksiyani tanlanishiga ko'ra

$$y_1(x) = \int_a^x y_1'(x)dx = \int_a^x (a_1(x) - p(x))dx = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, $a_1(x) = p(x)$ funksiya uchun (3) bajarilishi shart, ya'ni

$$\int_a^b (a_1(x) - p(x))^2 dx = 0.$$

Oxirgi munosabatdan $a_1(x) = p(x)$, ya'ni $a_1(x) \in C^1[a,b]$

$$-\frac{da_1(x)}{dx} + a_0(x) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

C. Isbotning yakuni. (2) tenglik ixtiyoriy $y(x) \in C^1[a,b]$ funksiya uchun bajariladi, demak, barcha funksiyalar uchun

$$C^1[a,b] = \{y(x) \in C^1[a,b] : y(a) = y(b) = 0\}$$

bajariladi. Shu sababli, (2) tenglikdan ixtiyoriy $y(x) \in C^1[a,b]$ funksiya uchun

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}y'(x)\right]dx = 0$$

o'rinli bo'ladi. Dyubua-Reymon lemmasiga ko'ra, $F_{y'}(x,y,y') \in C^1[a,b]$ va

$$\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial x} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} = 0 \qquad (4)$$

bo'ladi. (3) tenglikni bo'laklab integrallab, (u yuqoridagi isbotlangan $F_{y'}(x,y,y') \in C^1[a,b]$ tegishlilikka ko'ra bu mumkin bo'lganligi sababli) va (3) tenglikni e'tiborga olib, ixtiyoriy $y(x) \in C^1[a,b]$ funksiya uchun

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}y'(x)\right]dx + f_a \cdot y(a) + f_b \cdot y(b) =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]y(x)dx + \left[y(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial y'}\right]_a^b + f_a \cdot y(a) + f_b \cdot y(b) =$$

$$= \left[\frac{\partial F(b, y(b), y'(b))}{\partial y} + f_y \right] y(b) + \left[\frac{\partial F(a, y(a), y'(a))}{\partial y'} + f_a \right] y(a) \quad 0. \qquad (5)$$

munosabatni olamiz. $y(x) = x \quad a, y(x) \quad x-b,$ ifodalarni ketma-ket (5) ifodaga qo'yib, $= F(x, y(x), y'(x)) \quad f_x + F_y(x, y(x), y'(x)) \cdot f_y$, transversallik shartlariga kelamiz.

1-ta'rif. *(1) funksional uchun Eyler tenglamasining har qanday yechimi Bols masalasining ekstremali deb ataladi. Bols masalasining har qanday ekstremali Bols masalasining joiz ekstremali deb ataladi.*

Teoremadan Bols masalasining har qanday ekstremali (1) masalasining joiz ekstremali bo'lishi zarur ekanligi kelib chiqadi.

Izoh. *Teorema isbotining bu usuli boshqarish klassik variatsion hisob va optimal boshqarishning boshqa teoremalari isbotlarida ham, u yoki bu shaklda uchrashi mumkinligini e'tirof etamiz.*

Biz yuqorida teoremani bir o'lchovli Bols masalasi uchun keltirdik. Vektorli bo'lgan hol uchun Bols masalasini yechishda keltirilgan qoidaga kiritilishi zarur bo'lgan o'zgartirishlarni ko'rsatib o'tamiz.

(1) masalada

$$(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \quad F = F(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)) -$$

$2n+1$ o'zgaruvchili funksiya, $f = f(y_{1a}, y_{2a}, \ldots, y_{na}, y_{1b}, y_{2b}, \ldots, y_{nb})$ $2n$ o'zgaruvchili funksiya. Vektor ko'rinishdagi Bols masalasi uchun zaruriy shart Eyler

$$\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y_i} \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

tenglamalar sistemasidan va tenglamalar sistemasi ko'rinishida berilgan

$$\frac{\partial F(a_k, y(a_k), y(a_k))}{\partial y'} = (-1)^k \partial f_{y_i}(y(a_1), y'(a_1)), \quad (i = 1, 2, \ldots, n, k = 0, 1),$$

transversallik shartlaridan iborat bo'ladi.

3.1. Bolsa masalasining ayrim turlari. Bolsaning 1-masalasi. $y = (y_1, \ldots, y_n)$ bo'lakli-silliq vektor-funksiyalar ichidan shundayini topish kerakki,

$$\varphi_\beta(x, y, y) = 0, \quad (\beta = 1, 2, \ldots, m_1$$

bog'lanishlarda va oxirlarida

$$\psi_\mu(a, y(a), b, y(b)) = 0, (\mu = 1, 2, \ldots, p \le 2n + 2,$$

shartlar ostida

$$J_0[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx + f(a, y(a), b, y(b)),$$

funksionalga ekstremum bersin.

Faraz. *φ_β va F funksiyalar $(2n+1)$- o'lchovli fazoning qandaydir ochiq sohasida o'zining barcha argumentlari bo'yicha uchinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega. Yuqorida ko'rsatilgan sohaning barcha nuqtalarida*

$$\left\| \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i} \right\|, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

matritsaning rangi α ga teng.

ψ_μ va f funksiyalar $(a, y(a), b, y(b))$ nuqtalar fazosining $(2n+2)$-o'lchovli qandaydir ochiq sohasida o'zining barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega.

$$\left\| \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_{11}} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_{12}} \right\|,$$

matritsaning rangi ko'rsatilgan sohaning barcha nuqtalarida p ga teng. Bundan tashqari shunday taqqoslama vektor-funksiyalar qaraladiki, qaysiki

$$\left\| \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_i} y_i(x_1) \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_i} y_i(x_2) \right|,$$

matritsaning rangi ikkiga teng (*tenginmaslik sharti* deb nomlangan shart bajarilishi kerak).

Bolsning 1-masalasida *ikkinchi variatsiya* quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\delta^2 J = 2\gamma[\xi_1, \eta_1(\xi_1), \xi_2, \eta_1(\xi_2)] + 2\int_a^b \omega(x, \eta, \eta')dx,$$

bu yerda

$$2\omega(x, \eta, \eta') = \sum_{i,k} \left(F_{y_i y_k} \eta_i \eta_k + 2F_{y_i y_k'} \eta_i \eta_k' + F_{y_i' y_k'} \eta_i' \eta_k' \right),$$

$$2\gamma = \left[\left(F_{y'} - \sum y_i' F_{y_i'} \right) dx^2 + 2\sum F_{y_i'} dy_i dx \right]_1^2 + 2q + 2\sum e_\alpha q_\alpha,$$

$$da = ab(0)db = \frac{\xi_1}{\xi_1'} db, \quad db = bb(0)db = \frac{\eta}{\xi_2'} db,$$

$$\delta y_i = ab(x,0)db = \eta_i db,$$

g funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasiga teng bo'lgan, koeffisientli, da, db, dy_{i1}, dy_{i2} larga nisbatan $2q$ ta kvadratik forma, $2q_\alpha$ – esa ψ_α uchun ham huddi shunday bo'ladi.

Agar E egri chiziq xosmas bo'lib, burchak nuqtaga ega bo'lmasa va Bols masalasida funksionalga minimum bersa, u holda $y(x)$ ekstremal bo'yicha ikkinchi variatsiya E egri chiziq bo'ylab manfiy

bo'lmaydi: $\delta^2 J \geq 0$ bo'ladi.

Transversallik sharti. Bolsning 1-masalasi uchun transversallik sharti quyidagicha ifoda qilinadi. Shunday e_α o'zgarmaslar mavjudki, ekstremallarning oxirlarida quyidagi

$$\left[\left(F_{y'} - \sum y_i' F_{y_i'} \right) dx + \sum F_{y_i'} dy_i \right]_1^2 + \lambda_0 dg + e_\alpha d\psi_\alpha = 0, \quad \psi_\alpha = 0,$$

munosabat, da, db, dy_{i1}, dy_{i2} differensiallar har qanday tanlanganda ham bajariladi.

Bolsaning 2-masalasi. $\omega_k = a_k (k = 1,2,...,r)$ parametrlar va $\omega_{r+i} = y_i(x)$, $(a \leq x \leq b)$, funksiyalar sistemasi ichidan shundayini topish kerakki,

$$\varphi_j(a, x, y, y') = 0, \quad (j = 1,2,...,m < n), \quad a = (a_1, a_2, ..., a_r),$$

$$J_k = g_k(a, y(a), b, y(b)) + \int_a^b F(a, x, y(x), y'(x))dx = 0, k = 1,2,...,p,$$

bog'lanishlarda

$$J = g(a, y(a), b, y(b)) + \int_a^b F(a, x, y(x), y'(x))dx,$$

funksionalga ekstremum bersin.

Transversallik sharti. Bolsning 2-masalasi uchun transversallik sharti quyidagicha ifoda qilinadi. Ekstremallarning oxirgi nuqtalari shundayki, da, db, dy_{i1}, dy_{i2} differensiallar uchun quyidagi

$$\left[\left(F_{y'} - \sum y_i' F_{y_i'} \right) dx + \sum F_{y_i'} dy_i \right]_1^2 + dG + \int_a^b \sum F_{a_k} da dx = 0,$$

munosabat aynan bajariladi.

Bolsaning 3-masalasi. $\omega_k = a_k, (k = 1,2,...,r)$, parametrlar va $\omega_{r+i} = y_i(x)$, $(i = 1,2,...,n)$, va $\omega_{r+n+j} = \theta_j(x), (j = 1,2,...,m, a \leq x \leq b)$, funksiyalar sistemasi ichi-

dan shundayini topish kerakki.

$$y_i = Y_i(a, x, y, \theta).$$

$$x_1 = x_1(a), \quad y_i(x_1) = Y_{ai}(a), s = 1, 2, J_s = g_s(a) + \int_a^b F_s(a, x, y, \theta)dx,$$

bog'lanishlarda

$$J = g(a) + \int_a^b F(a, x, y, \theta)dx,$$

funksionalga ekstremum bersin.

Shuni ta'kidlash lozimki, Bols masalasining ikkinchi va uchinchi masalalarida ishtirok etuvchi parametrlar va funksiyalarga qo'yilgan chegaralanishlar Bolsning birinchi masalasidagi chegaralanishlardan sezilarli darajada farq qilmaydi.

Transversallik sharti. Bolsning 3-masalasi uchun transversallik sharti quyidagicha ifoda qilinadi. Ekstremallarning oxirgi nuqtalari shundayki, quyidagi

$$\left[HX_{ab} - \sum z_i Y_{iab}\right] + G_b + \int_a^b H_a dx = 0,$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bu yerda quyi indeks b a, bo'yicha xususiy hosilani anglatadi.

1-misol. $J[y(x)] = \int_0^1 (y'' - y)dx + y'(1) \to extr$ funksional uchun Bols masalasi yechilsin.

Yechish. Zaruriy shartlar: a) Eyler tenglamasi

$$\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} = 2y - 1 = 0;$$

b) transversallik shartlari

$$f_{1a}(0) = f_{1xa}, \ f_{1b}(1) = -f_{1yb}, \ \ y'(0) = 0, \ \ y'(1) = -y(1).$$

Eyler tenglamasining umumiy yechimi $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2$ ko'rinishga ega bo'ladi. Transversallik shartlaridan $C_1 = 0, C_2 = \frac{3}{4}$ o'zgarmaslarni topamiz.

Shunday qilib, yagona $y^*(x) = -\frac{3 - x^2}{4}$ joiz ekstremalga ega bo'lamiz. Ushb ekstremal (1) masalaga absolyut minimum berishligini ko'rsatamiz. Haqiqatan, agar $h(x) \in C^1[x_0, x_1]$ bo'lsa, u holda

$$J[y^*(x) + h(x)] - J[y^*(x)] = \int_0^1 2y^* h(x)dx - \int_0^1 h^2(x)dx -$$

$$-\int_0^1 h(x)dx + 2y^*(1)h(1) + h^2(1)$$

bo'ladi. $y = -\frac{3 - x^2}{4}$ ifodani e'tiborga olib, bo'laklab integrallasak,

$$J[y^*(x) + h(x)] - J[y^*(x)] = 2y^* h\Big|_0^1 - \int_0^1 (2y^{*\prime} + 1)h dx +$$

$$+\int_0^1 h^2 dx + 2y^*(1)h(1) + h^2(1) = \int_0^1 h^2 dx + h^2(1) \geq 0$$

bo'ladi. Demak, javob: $y^*(x) = \frac{3 - x^2}{4} \in abs\min, \ S_{min} = +\infty$.

2-misol. $J[y(x)] = \int_1^2 x^2 y'' dx - 2y(1) + y'(2) \to extr$ funksional uchun Bols masalasi yechilsin.

Yechish. Zaruriy shartlar: a) Eyler tenglamasi

$$\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} = xy' + 2y' = 0;$$

$$\varphi_i(a, y(a), b, y(b)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda s - tenglamalar soni n o'lchovli fazo bilan $s \le 2n+2$ ko'rinishdagi tengsizlik orqali bog'langan. Gohida aralash maqsadli funksionallar chegaralanishsiz (bog'lanishli shartsiz) Bolsning elementar masalasi deb ataladi. Bols masalasi ham, Mayer masalasi ham Lagranj masalasiga olib kelinishi mumkin. Buni

$$B[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx - T[y(a)]. \tag{3}$$

ko'rinishdagi, (2) differensial bog'lanishli va

$$y(a) = y^0, \tag{4}$$

chegaraviy shartli maqsadli funksionalli Bols masalasi uchun ko'rsatamiz. $[a,b]$ kesmani tayinlangan deb hisoblaymiz. $T[y]$ funksiya esa ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi.

Mazkur masalada a, b, y^0 lar tayinlangan bo'lganligi sabahli, qaralayotgan masala uchun

$$\frac{T[y(a)]}{b-a} = \frac{T[y^0]}{b-a} = const,$$

bo'ladi. Shuni hisobga olib, (3) ning o'ng tomonidagi $T[y(b)]$ terminal qo'shiluvchini

$$T[y(b)] = \int_a^b \left[\frac{T[y(a)]}{b-a} + \frac{d}{dx} T[y(x)] \right] dx,$$

ko'rinishga almashtirish mumkin. Bu (3) maqsad funksionalini quyidagi

$$B[y] = \int_a^b \left[F(x, y, y') + \frac{T[y(a)]}{b-a} + \frac{d}{dx} T[y(x)] \right] dx, \tag{5}$$

ko'rinishda yozishga imkon beradi. Ko'ramizki, (3), (2), (4) Bols masalasi (5) funksional uchun o'sha bog'lanishli va chegaraviy shartlar bilan Lagranj masalasiga ekvivalent. Mazkur ekvivalentlikka asoslanib, quyidagi tasdiqni isbot qilamiz.

1-teorema. Agar $y^*(x) \in C^1([a,b], R^n)$ joiz funksiya (2) differensial bog'lanish va (4) chegaraviy shartlar bilan (3) funksionalga ekstremum bersa, u holda k va $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)$, funksiyalar sistemasi mavjudki, qaysiki $y^*(x)$ funksiya

$$\frac{d}{dx} L_{y_i'} - L_{y_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, n,$$

Eyler tenglamalar sistemasini va

$$\left(L_{y_i'}\right)_{x=a} = -\left(T_{y_i}\right)_{x=a}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ko'rinishdagi transversallik shartini qanoatlantiradi, bu yerda

$$L = F + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i,$$

(2), (3), (4) masalalarning lagranjiani.

Isboti. Aytaylik, $y^*(x)$ vektor-funksiya (3), (2), (4) Bols masalasining ekstremum nuqtasi bo'lsin. U holda (5), (2), (4) Lagranj masalasining ham ekstremum nuqtasi bo'ladi. Lagranj masalasiga 1-teoremani tadbiq qilamiz. Bu teoremaga muvofiq shunday $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)$ funksiyalar topiladiki, $y^*(x)$ vektor-funksiya quyidagi

$$B^*[y] = \int_a^b \left[L + \frac{T[y^0]}{b-a} + \frac{d}{dx} T[y(x)] \right] dx, \tag{6}$$

yordamchi funksional uchun ekstremum nuqta bo'ladi. bu yerda

$L = F + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i$ (6) funksional uchun Eyler tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$\frac{d}{dx}\left(F^{y'}\right)_i - \left(F^{y}\right)_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

bu yerda

$$F^{y'} = L + \frac{T[y^1]}{b-a} + \frac{d}{dx}T[y(x)].$$

Bu sistemaning tenglamasini almashtiramiz, natijada quyidagiga

$$\left(F^{y'}\right)_i = L_{y'_i} + \frac{d}{dx}T_i, \quad \left(F^{y}\right)_i = L_{y_i} + T_i', \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{8}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda $\left(F^{y'}\right)_i$ ifodani hisoblashda quyidagi

$$\frac{d}{dx}T[y(x)] = \sum T_i y_i'$$

tenglikdan foydalanildi. Endi $\left(F^{y'}\right)_i$ va $\left(F^{y}\right)_i$ lar uchun yozilgan ifodalarni (7) tenglamalar sistemasiga qo'yamiz:

$$\frac{d}{dx}L_{y'_i} - L_{y_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

qaysiki (2) differensial bog'lanishlar to'plami bilan $y_i(x), i = 1,2,\ldots,n$ va $\lambda_j(x), j = 1,2,\ldots,k$ $n+k$ ta noma'lum funksiyalarga nisbatan $n+k$ ta tenglamalar sistemasini tashkil qiladi. O'ng oxiriga transversallik shartini yozamiz. b ma'lum bo'lganligi, $\delta(b)$ qiymatgina o'zgarishini hisobga olib, tabiiy chegaraviy shartli

$$\left(F^{y'}\right)_{i,x=b} = 0.$$

masalaga kelamiz. (8) ifodani hisobga olib,

$$\left(L_{y'_i}\right)_{x=b} = \left(-T_i\right)_{x=b}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{10}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Izoh. 1. Quyidagi

$$B[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx + \tilde{T}[y(a)] + T[y(b)],$$

funksional uchun $[a,b]$ kesma tayinlangan holda va $y(a), y(b)$ larning funksional uchun $[a,b]$ kesma tayinlangan holda va $y(a), y(b)$ larning ixtiyoriy qiymatlarida tekislikning oxirlari $x=a, x=b$ gipertekislik bo'yicha sirpanadi) o'ng tomondagi transversallik shartiga kelamiz, ya'ni $x=b$ da 1-teoremaga qo'shimcha chap tomondagi

$$\left(L_{y'_i}\right)_{x=a} = -\left(\tilde{T}_i\right)_{x=a}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{11}$$

transversallik shartini qo'yish kerakligi kelib chiqadi.

2. Agar (1) funksionalda integral qo'shiluvchi Mayer masalasi qaralayapdi ishtirok etmasa, u holda 1-teoremadagi L lagranjian qaralayapdi ishtirok etmasa, u holda 1-teoremadagi L lagranjian $L = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i$ ko'rinishga ega bo'ladi.

1-misol. $B[y] = \int_1^2 x^2 y'^2 dx - 2y(1) + y^2(2)$. funksionalning $C^1[1,2]$ funksiyalar sinfida ekstremali topilsin.

Yechish. Bu Bolsning bog'lanish shart va chegaraviy shartlarsiz qo'yilgan elementar masalasi hisoblanadi. Bu holda Lagranj funksiyasi maqsad funksiyaning integranti bilan ustma-ust tushadi va $L = F = x^2 y'^2$ bo'ladi. Berilgan funksional uchun Eyler tenglamasini yozamiz.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 y'\right) = 0.$$

bu yerdan $2x^2y = C_1 = const$ bo'ladi. Bu tenglamadan $y = -\frac{1}{x^2}C_1$, ni topamiz, bu yerda C_1 – ixtiyoriy o'zgarmas. Oxirgi tenglamani yechib va $x \in [1.2]$ ekanligini hisobga olib, Eyler tenglamasini umumiy yechimini topamiz:

$$y = \frac{1}{x}C_1 + C_2. \tag{12}$$

C_1 – va C_2 o'zgarmaslarni topish uchun (8) va (9) transversallik shartlaridan foydalanamiz:

$$\left(2x^2y\right)_{x=2} = (-2y)_{x=2},$$

$$\left(2x^2y\right)_{x=1} = -2.$$

Bu tenglamalarga (12) ifodani qo'yib, sistemani C_1 – va C_2 o'zgarmaslarga nisbatan yechib, $C_1 = 1$ va $C_2 = \frac{1}{2}$ larni topamiz.

Shunday qilib, qaralayotgan funksional

$$y = \frac{1}{x} + 1/2,$$

yagona ekstremalga ega bo'ladi.

Transversallik sharti. Quyidagi

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

integralni

$$y(x_1) = y_1, \tag{13}$$

deb hisoblab, integrallashning yuqori x_2 chegarasini $y = y(x)$, egri chiziqni berilgan

$$g(x, y) = 0, \tag{14}$$

egri chiziq bilan kesishish nuqtasining absissasi sifatida aniqlab, ekstremumini topish bilan shug'ullanamiz. Biz $g(x,y)$ – funksiyani uzluksiz differensiallanuvchi, F va y larni ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar deb hisoblaymiz. Aytaylik, y (13)-(14) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal bo'lsin, xususan, $g(x_2, y_2) = 0$, $y(x_1) = y_1$.

Har doimgidek $Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$, bir parametrli taqqoslash funksiyalari oilasini kiritamiz, bu yerda $\eta(x)$ – uzluksiz differensiallanuvchi funksiya deb hisoblaymiz. $y = Y(x)$ egri chiziq ham (13)-(14) chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi kerak, bu birinchidan $\eta(x_1) = 0$, ikkinchidan

$$g(X_2, Y_2) = 0, \tag{15}$$

bo'lishligini anglatadi, bu yerda $Y_2 = y(x_2) + \alpha\eta(x_2)$. (15) tenglama tayinlangan η variatsiyada α parametr bo'yicha aynan bajarilishi kerak, shunday qilib,

$$\frac{dg}{d\alpha} = \frac{\partial g}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\alpha} + \frac{\partial g}{\partial Y_2}\frac{dY_2}{d\alpha} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\alpha} + \frac{\partial g}{\partial Y_2}\left[\frac{\partial g}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\alpha} + \eta(X_2) + \frac{\partial \eta}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\alpha}\right] = 0,$$

bundan

$$\frac{dX_2}{d\alpha} = -\frac{\eta(X_2)\frac{\partial g}{\partial Y_2}}{\frac{\partial g}{\partial X_2} + y'(X_2)\frac{\partial g}{\partial Y_2} + \alpha\eta'(X_2)\frac{\partial g}{\partial Y_2}},$$

$\alpha = 0$ da esa

$$\frac{dV}{d\alpha}\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha}+\frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial x} \end{array}\right|_{\alpha=0} \qquad (16)$$

bo'ladi. J funksionalda y o'rniga Y taqqoslashni qo'ysak.

$$J[\alpha]=\int_a^b F(x,Y,Y')dx.$$

bo'ladi. J integralning ekstremallik sharti $\alpha=0$ da doimgidek. $J'(0)=0$ bo'ladi.

Parametrga bog'liq integralni differensiallash formulasidan foydalanib,

$$J'[\alpha]=\left(\frac{dX}{d\alpha}\cdot F\right)_{x=b}+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\cdot\eta+\frac{\partial F}{\partial Y'}\cdot\eta'\right)dx=$$

$$J'[\alpha]=\left(\frac{dX}{d\alpha}\cdot F+\frac{\partial F}{\partial Y'}\cdot\eta\right)_{x=b}-\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial Y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial Y'}\right)\right)\eta dx.$$

tenglikni topamiz va $\alpha=0$ da quyidagi

$$J'[0]=\left[\left(\frac{dF}{dy'}-\frac{\frac{dg}{dy_2}F}{\frac{dg}{dh}+y'\frac{dg}{dy_2}}\right)\eta\right]_{x=b}+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta dx. \qquad (17)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Boshida $\eta(b)=0$ deb olamiz. U holda quyidagi Eyler

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0.$$

tenglamasi o'rinli bo'ladi. Endi Eyler tenglamasini bajarilgan deb. (17) ifodada

$\eta(b)=1$ deb olamiz. U holda

$$\left(\frac{dF}{dy'}-\frac{\frac{dg}{dy_2}F}{\frac{dg}{dh}+y'\frac{dg}{dy_2}}\right)_{x=b}=0. \qquad (6)$$

shartni olamiz. Bu shart ekstremalning va (14) egri chiziqning transversallik sharti deb ataladi. Agar (14) egri chiziq oshkor holda berilsa.

$$x=\varphi(y):\quad g(x,y)=\varphi(y)-x,\quad \frac{\partial g}{\partial x}=\varphi',\quad \frac{\partial g}{\partial y}=-1.$$

bo'lib, u holda transversallik sharti quyidagi ko'rinishni

$$\left(\frac{dF}{dy'}+\frac{F}{\varphi-y'}\right)_{x=b}=0$$

yoki

$$[F(x,y,y')+(\varphi-y')F'_{y'}(x,y,y')]_{x=b}=0.$$

ko'rinishini olishini anglaymiz. Transversallik sharti (14) egri chiziqni kesib o'tuvchi ekstremallar uchun bajarilishini, uning urinmaydiganlari esa $y'=\varphi'$ bo'lishligini takidlash lozim. Bu yerdan nomi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o'xshash chap oxiri uchun ham, agar unga chap oxirini biror-bir egri chiziq bilan almashtirishga ruxsat berilsa, transversallik sharti kelib chiqadi.

Endi Lagranj funksiyasi F

$$F(x,y,y')=H(x,y)\sqrt{1+y'^2}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda transversallik sharti nimani anglatishini ko'rib chiqamiz. Egri chiziqni oshkor berilishi bilan chegaralanamiz. Bu holda erkin oxirning nuqtasida

$$\delta I(\varepsilon_1) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\delta I(\varepsilon_1)}{x^2-1} = 0.$$

bo'ladi, bundan $\delta I = 0$ deb hisoblab,

$$\varphi(x) \cdot y' + 1 \cdot x = 0$$

ya'ni

$$\varphi' x = -1.$$

ifodaga ega bo'lamiz. Lekin bu tenglik $x = \varphi(x)$ ekstremalni va erkin oxirning $y = \varphi(x)$ egri chiziq'ining ortogonallik shartini ifodalaydi.

IX BOB

KARRALI INTEGRALLAR UCHUN VARIATSION HISOB MASALALARI

1-§. Ikki karrali integralning ekstremali

Endi ikki karrali integral uchun ekstremumning zaruriy shartini keltiramiz. xy tekislikning D sohasida quyidagi ikki karrali

$$J[z(x,y)] = \iint_D F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy. \tag{1}$$

integralni qaraymiz. Bu yerda $F(x,y,z,z_x,z_y)$ ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya deb hisoblanadi. D chegarasi bilan chegaralangan, standart yo'naltirilgan chekli sondagi silliq yopiq egri chiziqlardan tashkil topgan soha deb hisoblanadi (ya'ni sirtning tashqi tomoni tayinlangan). Bizni (1) integraliga ekstremal qiymat beruvchi ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $z = z(x,y)$ funksiyasi qanoatlantirishi kerak bo'lgan differensial tenglama (xususiy hosilali) qiziqtiradi. Shuning uchun, $z = z(x,y)$ funksiya sohaning D chegarasida berilgan qiymatlarni qabul qiladi deb faraz qilinadi, ya'ni

$$z = z(x,y)\big|_{\partial D} = f(x,y), \quad (x,y) \in \partial D. \tag{2}$$

Boshqacha qilib aytganda, ushbu masalada (1) funksionalga ekstremum beruvchi va sohaning chegarasida berilgan qiymatlarni qabul qiluvchi $z = z(x,y)$ funksiya qidiriladi. Xuddi avvalgidek $z = z(x,y)$ funksiyani qo'yilgan masalaning yechimi deb hisoblab, bir parametrli taqqoslash funksiyalari

$$Z(x,y) = z(x,y) + \alpha \cdot \xi(x,y),$$

oilasini kiritamiz. bu yerda $\xi(x,y)$ funksiya variatsiyasi, bu nolli

$$\zeta(x,y)\big|_{\partial D} = 0, \tag{3}$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.

$Z(x,y)$ funksiyalar oilasida J funksional $\alpha = 0$ da ekstremumga erishuvchi bir o'zgaruvchili funksiyaga aylanadi, ya'ni (1) integraldagi z ni Z funksiyaga almashtirsak (qolgan hadlarni ham mos ravishda almashtiramiz), (1) integral $\alpha = 0$ da $J(0) = 0$ ekstremallik sharti ostida quyidagi ko'rinishga keladi

$$J[\alpha] = \iint_D F(x,y,Z,Z_x,Z_y)dxdy,$$

bu yerda

$$Z(x,y) = z(x,y) + \alpha\cdot\zeta(x,y),$$
$$Z_x(x,y) = z_x(x,y) + \alpha\cdot\zeta_x(x,y),$$
$$Z_y(x,y) = z_y(x,y) + \alpha\cdot\zeta_y(x,y),$$

parametrga bog'liq integralni differensiallash haqidagi teoremaga asosan, quyidagiga

$$J'[\alpha] = \iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\cdot\zeta + \frac{\partial F}{\partial Z_x}\cdot\zeta_x + \frac{\partial F}{\partial Z_y}\cdot\zeta_y \right)dxdy.$$

ega bo'lamiz. Bundan $\alpha = 0$ da

$$\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\cdot\zeta + \frac{\partial F}{\partial Z_x}\cdot\zeta_x + \frac{\partial F}{\partial Z_y}\cdot\zeta_y \right)dxdy = 0. \tag{4}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_{z_x}\cdot\zeta\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{F_{z_x}\right\}\cdot\zeta + F_{z_x}\cdot\zeta_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{F_{z_y}\cdot\zeta\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_{z_y}\right\}\cdot\zeta + F_{z_y}\cdot\zeta_y,$$

ekanligini inobatga olsak,

$$\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot\zeta_x + \frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot\zeta_y \right)dxdy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_{z_x}\cdot\zeta\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_{z_y}\cdot\zeta\right\} \right]dxdy -$$
$$-\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_{z_x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_{z_y}\right\} \right]\cdot\zeta\cdot dxdy.$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerda $\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_{z_x}\right\}, \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_{z_y}\right\}$ ifodalar x va y o'zgaruvchilar bo'yicha to'la xususiy hosilalar deb ataladi. Uni hisoblashda y tayinlangan deb hisoblanadi, lekin z, z_x, z_y ifodalarni x ga bog'liqligi hisobga olinadi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_{z_x}\right\} = F_{z_x x} + F_{z_x z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + F_{z_x z_x}\frac{\partial z_x}{\partial x} + F_{z_x z_y}\frac{\partial z_y}{\partial x},$$

va shunga o'xshash

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{F_{z_y}\right\} = F_{z_y y} + F_{z_y z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + F_{z_y z_x}\frac{\partial z_x}{\partial x} + F_{z_y z_y}\frac{\partial z_y}{\partial y},$$

bo'ladi. Yuqoridagi ikkinchi integralni hisoblash uchun quyidagi Grin formulasidan

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)dxdy = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy$$

foydalanamiz, bu yerda $Q = \frac{\partial}{\partial x}\left\{F_{z_x}\cdot\zeta\right\}, P = \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_{z_y}\cdot\zeta\right\}$ deb olamiz, natijada

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot\zeta \right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot\zeta \right\} \right] dxdy = \oint_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot\zeta\, dy - \frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot\zeta\, dx,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan ζ funksiya uchun (3) chegaraviy shartdan (sohaning chegarasi bo'yicha integralni nolga aylanishidan)

$$\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\zeta + \frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot\zeta_x + \frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot\zeta_y \right) dxdy = -\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_y} \right\} \right]\cdot\zeta\, dxdy,$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (4) tenglikni hisobga olsak, oxirgi tenglik

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_y} \right\} \right]\zeta\, dxdy = 0,$$

ifodaga olib keladi va variatsion hisobning asosiy lemmasiga asosan (ζ ning ixtiyoriyligidan) quyidagi

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_y} \right\} = 0,$$

tenglamaga kelamiz, uni yoyilgan holatda yozsak, quyidagi

$$F_{zz}\cdot z_{xx} + 2F_{z_x z_y}\cdot z_{xy} + F_{z_y z_y}\cdot z_{yy} + F_{xz_x} + F_{yz_y} + F_{zz_x}\cdot z_x + F_{zz_y}\cdot z_y - F_z = 0,$$

tenglamaga kelamiz. Binobarin, $z = z(x,y)$ funksiya oxirgi tenglamani yechimi bo'ladi. Bu tenglama (1) funksionalning ekstremumga erishishligining zaruriy shartini ifodalaydi.

Bu ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama, qaysiki uni $z = z(x,y)$ funksiya qanoatlantiradi va (1) integralga ekstremum qiymat beradi. Bu tenglamani birinchi bo'lib, buyuk rus olimi M.V.Ostrogradskiy 1834 yilda keltirib chiqargan, shuning uchun ushbu tenglama Ostrogradskiy tenglamasi deb ataladi, biroq D to'g'ri to'rtburchakli soha bo'lgan hollar L.Eylerning ishlarida uchraydi.

Shuning uchun mazkur tenglama Eyler–Ostrogradskiy tenglamasi nomi bilan ham yuritiladi.

Chegaradagi tabiiy shartlar. Biz chegaraviy shartlar ishtirokisiz oldingi bandda olingan natijalarni oson kengaytirishimiz mumkin. Integralning variatsiyasini quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot\zeta\, dy - \frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot\zeta\, dx + \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{ \frac{\partial F}{\partial z_y} \right\} \right]\cdot\zeta\, dxdy = 0.$$

Eyler tenglamasini bajarilgan deb hisoblab, ∂D integrallash konturini $x = x(s),\quad y = y(s),\ z = z(s),\quad s\in[s_1,s_2]$, parametrlashtirib, quyidagi tenglikka kelamiz

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot\zeta\, dy - \frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot\zeta\, dx = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot\frac{dy}{ds} \right)\cdot\zeta\, ds dy = 0,$$

bu yerdan variatsion hisobning asosiy lemmasiga ko'ra,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot\frac{dx}{ds} - \frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot\frac{dy}{ds} \right)_{\partial D} = 0,$$

bo'ladi. Agar shart chegaraning faqat bir qismini o'z ichiga olsa, u holda

$$\frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot\frac{dx}{ds} = 0.$$

tenglik, ravshanki, qolgan qismi uchun ham bajariladi. Aytib o'tish lozimki, olingan shartning geometrik ma'nosi

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_x}, \frac{\partial F}{\partial z_y} \right)$$

$(\dot{x},-\dot{y})$ unga perpendikulyar bo'lganligi sababli, bu vektor ∂D chegara-

ga urinma bo'lishligini anglatadi.

Ikki karrali integral uchun ikkinchi zaruriy shart (Lejandr shartining analogi)

$u(x,y)$ funksiya

$$J[u(x,y)] = \iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy,$$

funksionalga kuchsiz ekstremum berishi uchun D sohaning har bir ichki nuqtasida

$$F_{uu}\cdot F_{vv} - \left(F_{uv}\right)^2 \geq 0$$

tengsizlikning bajarilishi zarur. Bunda minimum uchun $F_{vv} \geq 0$ tengsizlikning bajarilishi zarur, maksimum uchun esa $F_{vv} \leq 0$. bu yerda $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ va $q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ belgilashlardan foydalanilgan.

1.1. Integrallanishi o'zgaruvchan sohali funksionalning variatsiyasi. Eyler-Ostrogradskiy mavzusida faqat $u(x,y)$ funksiyani variatsiyalagan edik, integrallash sohasi esa o'zgarishsiz qolgan edi. Aytaylik, α parametrni o'z ichiga oluvchi (α parametrga bog'liq)

$$x^* = X(x,y,0) = x,\ y^* = Y(x,y,0) = y,$$

bo'lgan, o'zaro bir qiymatli va uzluksiz differensiallanuvchi

$$x^* = X(x,y,\alpha),\ y^* = Y(x,y,\alpha), \tag{5}$$

almashtirishlar berilgan bo'lsin. Bu yerda yakobian $x^* = \dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)} \neq 0$ va α para-metrning yetarlicha birga yaqin bo'lgan kichik qiymatlari uchun ahamiyatga ega bo'lishi kelib chiqadi.

(5) almashtirish D sohani qandaydir D^* sohaga o'tkazadi va yangi tayqoslama funksiya

$$u^* = u^*(x^*,y^*) \tag{6}$$

yoki dastlabki o'zgaruvchilar

$$u^* = U(x,y,\alpha),\quad u^*(X,Y,\alpha) = U(x,y,\alpha).$$

bo'ladi. Endi quyidagi

$$J[u(x,y)] = \iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy,$$

funksionalni qaraymiz. Aytaylik, dastlabki funksiya $u = u(x,y),(x,y) \in D$. bo'lsin. Bu $u = u(x,y),\ (x,y) \in D$, sirt α parametrning $\alpha = 0$ qiymatidagi (5) va (6) bir parametrli sirt oilasiga kiradi deb faraz qilamiz.

$$J = \iint_{D^*} F(x^*,y^*,u^*(x^*,y^*,\alpha),u_{x^*}(x^*,y^*,\alpha),u_{y^*}(x^*,y^*,\alpha))dx^*dy^*, \tag{7}$$

funksional parametrning $\alpha = 0$ qiymatida dastlabki funksionalni beradi. Oxirgi ifodani o'zgaruvchilarini bevosita almashtirish orqali

$$J = \iint_D F(X,Y,u^*(X,Y,\alpha),u_x(X,Y,\alpha),u_Y(X,Y,\alpha))\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}dxdy,$$

bu yerda integral dastlabki (o'zgarmagan) D soha bo'yicha olingan funksionalga kelamiz.

$$\delta x = \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\cdot\alpha,\quad \delta x = \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\cdot\alpha,\quad \delta u = \left(\frac{\partial u^*(X,Y,\alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\cdot\alpha,$$

$$\delta u_x = \left(\frac{\partial u_x^*(X,Y,\alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\cdot\alpha,\quad \delta u_y = \left(\frac{\partial u_y^*(X,Y,\alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\cdot\alpha, \tag{8}$$

deb olib, quyidagi ko'rinishda dastlabki variatsiyani olamiz

$$J=\iint_D\left[F_1\cdot\delta x+F_2\cdot\delta y+F_3\cdot\delta u-F_1\cdot\delta u_x+F_3\cdot\delta u_y+F(\delta u)+F(\delta u)_1\right]dxdy. \quad (9)$$

$$\bar{\delta}u_1=\left[\frac{\partial u'(x_1,y_1,\alpha)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0}\cdot\alpha,$$

deb belgilab, (x,y) o'zgarmaydi, faqat α o'zgaradi), quyidagi tengliklarni olamiz

$$\delta u=\bar{\delta}u+u_x\cdot\delta x+u_y\cdot\delta y,$$

$$\delta u_x=(\bar{\delta}u)_x+u_{xx}\cdot\delta x+u_{xy}\cdot\delta y,$$

$$\delta u_y=(\bar{\delta}u)_y+u_{yx}\cdot\delta x+u_{yy}\cdot\delta y,$$

bundan, so'ngra (9) tenglik

$$\bar{\delta}J=\iint_D\left\{\left[F_3-\frac{\partial}{\partial x}F_4-\frac{\partial}{\partial y}F_5\right]\bar{\delta}u+\left[Fx,\bar{\delta}u\right]_x+\left[Fu\,\delta u\right]_y-\left[F\cdot\delta x\right]_x+\left[F\cdot\delta y\right]_y\right\}dxdy.$$

ko'rinishni oladi yoki Grin-Ostrogradskiy formulasini tadbiq qilib.

$$\delta J=\iint_D\left(F_3-\frac{\partial}{\partial x}F_4-\frac{\partial}{\partial y}F_5\right)\bar{\delta}u\,dxdy+$$

$$+\int_L\left(F_1\cdot\frac{\partial x}{\partial n}+F_2\cdot\frac{\partial y}{\partial n}\right)\bar{\delta}u\,ds+\int_L F\left(\delta x\frac{\partial x}{\partial n}+\delta y\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds \quad (10)$$

tenglikka ega bo'lamiz. (7) va (8) formulalar oxirgi (10) formulaning xususiy holi ekanligini ko'rish qiyin emas.

Agar $u=u(x,y),(x,y)\in D$ funksiya ekstremal bo'lsa, u holda (10) formulaning birinchi hadi yo'qoladi va δJ variatsiya

$$\delta J=\int_L\left(F_1\cdot\frac{\partial x}{\partial n}+F_2\cdot\frac{\partial y}{\partial n}\right)\bar{\delta}u\,ds+\int_L F\left(\delta x\frac{\partial x}{\partial n}+\delta y\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

1-misol. Quyidagi

$$J[\varphi(x,y)]=\iint_{(D)}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

funksional uchun Eyler–Ostrogradskiy tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Bu holda

$$F(x,y,\varphi,p,q)=p^2-q^2,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=q,$$

bo'ladi. Shuning uchun, Eyler-Ostrogradskiy tenglamasiga ko'ra,

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(2p)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(-2q)=0,$$

yoki

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

bo'ladi.

2-misol. Quyidagi

$$J[\varphi(x,y)]=\iint_{(D)}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)-2\varphi f(x,y)\right]dxdy,$$

funksional uchun Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi tuzilsin.

Yechish.

$$F=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)-2\varphi f(x,y),$$

ifodaga egamiz. Bundan,

$$-2f(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)=0,$$

yoki

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=f(x,y),$$

bo'ladi. Oxirgi tenglama qisqacha

$$\Delta\Delta\varphi=f(x,y),$$

ko'rinishda yoziladi.

Quyidagi

$$J[x,y]=\int_a^b F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})dx$$

funksional uchun Eyler tenglamasi quyidagi birinchi integrallarga yo'l qo'yishliligi ko'rsatilsin: a) $\Delta\Delta\varphi-\frac{\partial F}{\partial y}=C_1$ agar F funksiya x ga bog'liq bo'lmasa; b) $F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\frac{\partial F}{\partial z'}=C_1$ agar F funksiya x ga bog'liq bo'lmasa.

Quyidagi funksionallar uchun Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi tuzilsin.

138. $J[\varphi(x,y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+12\varphi f(x,y)\right]dxdy.$

139. $J[\varphi(x,y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy.$

140. $J[\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)]=\iint_D\ldots\int\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\right]-$

$$-C_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)z^2+2zf(x_1,x_2,\ldots,x_n)\Big]dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

141. Minimal sirtlarning differensial tenglamasini keltirib chiqaring.

142. Quyidagi

$$J[\varphi(x,y)]=\int_0^1\int_0^1 e^{x^2}\sin\varphi_x dxdy,$$

funksionalning $\varphi(x,0)=0,\ \varphi(x,1)=0$ shartlar ostida ekstremali topilsin.

2-§. Uch karrali integralning ekstremali

Endi uch karrali integral uchun ekstremumning zaruriy shartini keltiramiz. xyz fazoning D sohasi bo'yicha quyidagi

$$J[u(x,y,z)]=\iiint_D F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)dxdydz. \qquad (11)$$

integralni qaraymiz. Bu yerda uch karrali integralni qaraymiz. Bu yerda $F(x,y,z,u,u_x,u_y)$ ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya, D chegarasi bilan chegaralangan, standart yo'naltirilgan chekli sondagi silliq yopiq sirtlardan tashkil topgan soha deb hisoblanadi (ya'ni sirtning tashqi tomoni tayinlangan). Bizni differensial tenglama (xususiy hosilali) qiziqtiradi, qaysiki uni (11) funksionalga ekstremal qiymat beruvchi va ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $u=u(x,y,z)$ funksiya qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun $u=u(x,y,z)$ funksiya sohaning ∂D chegarasida berilgan qiymatlarni qabul qiladi deb faraz qilamiz, ya'ni

$$u=u(x,y,z)\big|_{\partial D}=f(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\partial D. \qquad (12)$$

Boshqacha qilib aytganda ushbu masalada (1) funksionalga ekstremum beruvchi va sohaning chegarasida berilgan qiymatlarni qabul qiluvchi $u=u(x,y,z)$ funksiya qidiriladi. Xuddi avvalgidek, $u=u(x,y,z)$

funksiyani qo'yilgan masalaga yechim beruvchi funksiya deb hisoblaymiz va bir parametrli taqqoslash funksiyalari oilasini

$$U(x,y,z) = u(x,y,z) + \alpha \cdot v(x,y,z).$$

kiritamiz. bu yerda $v(x,y,z)$ funksiyaning variatsiyasi quyidagi

$$v(x,y,z)\big|_{\Gamma} = 0 \tag{13}$$

nolli chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi. (11) integralda $u = u(x,y,z)$ funksiyani $U(x,y,z)$ funksiyaga almashtirib, $\alpha = 0$ da $J(0) = 0$ ekstremallik sharti ostidagi bir o'zgaruvchili haqiqiy funksiyaga kelamiz:

$$J[\alpha] = \iiint_{\Omega} F(x,y,z,U,U_x,U_y,U_z)dxdydz.$$

ya'ni J funksional $\alpha = 0$ da $U(x,y,z)$ funksiyalar oilasida ekstremumga erishuvchi bir o'zgaruvchili funksiyaga aylanadi. bu yerda

$$U(x,y,z) = u(x,y,z) + \alpha \cdot v(x,y,z),$$

$$U_x(x,y,z) = u_x(x,y,z) + \alpha \cdot v_x(x,y,z),$$

$$U_y(x,y,z) = u_y(x,y,z) + \alpha \cdot v_y(x,y,z),$$

$$U_z(x,y,z) = u_z(x,y,z) + \alpha \cdot v_z(x,y,z),$$

parametrga bog'liq integralni differensiallash haqidagi teoremaga ko'ra, quyidagi

$$J'[\alpha] = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial U}v + \frac{\partial F}{\partial U_x}v_x + \frac{\partial F}{\partial U_y}v_y + \frac{\partial F}{\partial U_z}v_z\right)dxdydz.$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bundan $\alpha = 0$ da

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial U}v + \frac{\partial F}{\partial U_x}v_x + \frac{\partial F}{\partial U_y}v_y + \frac{\partial F}{\partial U_z}v_z\right)dxdydz = 0. \tag{14}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Gauss-Ostrogradskiy formulasidan foydalanib,

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy,$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial u_x}\cdot v,\ P = -\frac{\partial F}{\partial u_x}\cdot v,\ R = -\frac{\partial F}{\partial u_z}\cdot v.$$

deb olamiz, natijada

$$\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_x}\cdot v\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_y}\cdot v\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_z}\cdot v\right\}\right]dxdydz =$$

$$\iint_{\Gamma}\frac{\partial F}{\partial u_x}\cdot vdydz + \frac{\partial F}{\partial u_y}\cdot vdxdz + \frac{\partial F}{\partial u_z}\cdot vdxdy,$$

ifodaga ega bo'lamiz. bundan v funksiya uchun (13) nol chegaraviy shartdan (sohaning chegarasi bo'yicha integralni nolga aylanishidan)

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\cdot v_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\cdot v_y + \frac{\partial F}{\partial u_z}\cdot v_z\right)dxdydz =$$

$$= -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_y}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_z}\right\}\right]\cdot vdxdydz.$$

tenglikka ega bo'lamiz. (14) tenglikdagi oxirgi tenglikni hisobga olsak,

$$\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_y}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_z}\right\}\right]\cdot vdxdydz = 0.$$

tenglikka olib keladi va variatsion hisobning asosiy lemmasiga ko'ra (v ning ixtiyoriyligidan) quyidagi

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_y}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_z}\right\} = 0. \tag{15}$$

Eyler tenglamasiga kelamiz.

Agar integral ostidagi ifodaga $u = u(x, y)$ funksiyaning hosilasi $n-$ tartibgacha ishtirok etsa, u holda Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi quyidagi ko'rinishda

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_x}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_y}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\right\} +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_{yy}}\right\} - \ldots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_{yy\ldots y}}\right\} = 0. \qquad (16)$$

bo'ladi.

Chegaradagi tabiiy shartlar. Oldingi bandda olingan natijalarni sohaning chegarasida shartlar ishtirok etmagan holda oson kengaytirishimiz mumkin.

Quyidagi tenglikka kelamiz

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u_x} \cdot v dy dz + \frac{\partial F}{\partial u_y} \cdot v dx dz + \frac{\partial F}{\partial u_z} \cdot v dx dy\right] \cdot v dx dy dz =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u_x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial u_y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial u_z}\cos\gamma\right] \cdot v dS = 0,$$

bo'ladi, bu yerdan variatsion hisobning asosiy lemmasiga ko'ra,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial u_y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial u_z}\cos\gamma\right]_{\partial D} = 0,$$

ifodaga ega bo'lamiz.

2.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya bo'lgan hol. Biz oldingi paragraflarda bir o'zgaruvchili funksyalarga bog'liq bo'lgan funksionallami ekstremumga tadqiq qilgan edik. Endi biz ikki, uch va n ta

o'zgaruvchili funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksionallarning ekstremumini topish masalasi bilan shug'ullanamiz.

Masalaning qo'yilishi. n o'lchovli fazoda Q soha berilgan bo'lsin. Oddiylik uchun mazkur sohani chegaralangan deb hisoblaymiz. Q sohada aniqlangan, uzluksiz va sohaning ∂Q chegarasida $\varphi_i = \varphi_{x_i}$ uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaning C^1 sinfini tashkil qilaylik. C^1 sinfda ikkita φ va ψ funksiyalar berilgan bo'lsin. Bu φ va ψ funksiyalar orasidagi masofa deb

$$\rho(\varphi, \psi) = \max\left\{\left|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right|, \left|\varphi_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \psi_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right|\right\},$$

ifodaga aytamiz. Qaysiki masofasi $\rho(\varphi, \psi) < \varepsilon$ bo'lgan ψ funksiyalar to'plami φ funksiyaning $\varepsilon-$ atrofini tashkil qiladi. C^1 sinfda quyidagi

$$\iint_Q \ldots \int F(x_i, \varphi, \varphi_i) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

funksionalni aniqlaymiz, bu yerda $F-$ berilgan $2n+1$ ta $x_i, \varphi, \varphi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ argumentlari bo'yicha uchinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lgan uzluksiz funksiya.

$\tilde{C}^1$ – orqali C^1 sinfning shunday φ funksiyalar to'plamini belgilaymizki, qaysiki, u Q sohaning ∂Q chegarasida berilgan qiymatlar sistemasini qabul qiladi

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big|_{\partial Q} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \partial Q.$$

Demak, Q sohaning ∂Q chegarasida $f(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \partial Q$ funksiya aniqlandi va φ funksiya Q sohani ∂Q chegarasining har bir $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtasida

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \partial Q.$$

bo'ladi. Shunday qilib, $\bar{C}^1$ sinfning funksiyalari orasidan shunday funksiyani izlashimiz kerakki, qaysiki u $J[\varphi]$ funksionalga ekstremum bersin.

Aytaylik, $\bar{C}^1$ sinfning φ funksiyasi $J[\varphi]$ funksionalda ekstremumni amalga oshirsin, xuddi shu sinfning $\varphi + \delta\varphi$ funksiyasi esa φ funksiyaning biror atrofida joylashgan bo'lsin. Ravshanki, ∂Q chegaraning barcha nuqtalarida $\delta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ bo'ladi. Endi $\frac{\partial}{\partial x_i}\delta\varphi = \delta\varphi_{x_i} = \delta\varphi_i$ deb olib,

$$J[\varphi + \delta\varphi] - J[\varphi] = \iint\limits_Q \ldots \int \left[F(x_i, \varphi + \delta\varphi, \varphi_i + \delta\varphi_i) - F(x_i, \varphi, \varphi_i) \right] dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_Q \ldots \int \left(F_\varphi \delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{\varphi_i} \delta\varphi_i \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n + \eta, \qquad (17)$$

tenglikni olamiz, bu yerda η $\rho(\varphi, \varphi + \delta\varphi)$ masofa bilan taqqoslaganda yuqori tartibli miqdor.

$$\delta J = \iint\limits_Q \ldots \int \left(F_\varphi \delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{\varphi_i} \delta\varphi_i \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

bu $J[\varphi + \delta\varphi] - J[\varphi]$ orttirmaning chiziqli bosh qismi va u $J[\varphi]$ funksionalning variatsiyasi deb ataladi. $J[\varphi]$ funksional ekstremumga erishgan φ funksiyadagi zaruriy shart, uning variatsiyasini aynan nolga aylanishidir:

$$\delta J = \iint\limits_Q \ldots \int \left(F_\varphi \delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{\varphi_i} \delta\varphi_i \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad (18)$$

(18) ayniyat Q sohaning ∂Q chegarasida nolga aylanuvchi $\bar{C}^1$ sinfning barcha $\delta\varphi$ variatsiyalari uchun o'rinli bo'lishi kerak.

Lagranj almashtirishi. Ravshanki, δJ ifodani bo'laklab integrallash yo'li orqali sodda ko'rinishga keltirish mumkin. Ox_i o'qiga parallel bo'lgan barcha to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz, Q sohaning ichida, oxirlari ∂Q chegarada yotgan to'g'ri chiziqlarning birida yotuvchi AB intervalni qaraymiz. U holda

$$\delta J = \int_A^B F_{\varphi_i} \delta\varphi_i dx_i = \left(F_{\varphi_i} \delta\varphi \right)_A^B - \int_A^B \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i}) \delta\varphi dx_i = -\int_A^B \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i}) \delta\varphi dx_i, \qquad (19)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda $\frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})$ ifoda

$$F_{\varphi_i}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

x_i bo'yicha to'la differensiali, ya'ni

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i}) = F_{x_i \varphi_i} + F_{\varphi\varphi_i}\varphi_i + \sum_{j=1}^{n} F_{\varphi_i \varphi_j}\varphi_{jx_i}.$$

Endi biz (18) va (19) ifodalarga asoslanib, quyidagi

$$\iint\limits_Q \ldots \int F_{\varphi_i} \delta\varphi_i dx_1 dx_2 \ldots dx_n = -\iint\limits_Q \ldots \int \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i}) \delta\varphi dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

va

$$\delta J = \iint\limits_Q \ldots \int \left(F_\varphi \delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{\varphi_i} \delta\varphi_i \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_Q \ldots \int \left(F_\varphi \delta\varphi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i}) \right) \delta\varphi \cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 0 \qquad (20)$$

tenglikka kelamiz.

Lemma (Lagranj). *Agar Q sohada uzluksiz bo'lgan M funksiya va Q soha-ning ∂Q chegarasida nolga aylanuvchi C^1 sinfdan olingan ixtiyoriy η funksiya uchun ushbu integral*

$$\iint_{Q} \dots \int M\eta \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

bo'lsa, u holda Q sohada $M = 0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisidan faraz qilamiz. Aytaylik, Q sohaning x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, nuqtasida $M(x_i) = c \neq 0$ bo'lsin, aniqlik uchun $c > 0$ bo'lsin. x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, nuqtaning atrofida R to'g'ri to'rt burchakni qaymiz: bu to'laligicha Q sohaga kiruvchi, R dan olingan har qanday x' nuqta uchun $M(x') > c/2$ bo'lgan $a_i < x_i < b_i$ soha. Q sohada η funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta R to'g'ri to'rt burchakda bo'lsa, u holda

$$\eta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{\pi(x_i - a_i)}{b_i - a_i},$$

agar $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta R to'g'ri to'rt burchakdan tashqarida bo'lsa, u holda

$$\eta(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Oson ishonch hosil qilish mumkinki, η funksiya Q sohaning ∂Q chegarasida nolga aylanuvchi C^1 sinfdan olingan ixtiyoriy η funksiya-shuning uchun biz

$$\iint_{Q} \dots \int M\eta \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

tenglikka ega bo'lishimiz kerak, boshqa tomondan esa,

$$\iint_{Q} \dots \int M\eta \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = \iint_{R} \dots \int M\eta \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n >$$

$$> \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{\pi(x_i - a_i)}{b_i - a_i} dx_1 dx_2 \dots dx_n > 0,$$

bo'ladi, biz bu bilan qarama-qarshilikka keldik. Lemma isbot bo'ldi.

Lagranj lemmasi va (20) tenglikdan quyidagi xulosaga kelamiz: agar $J[\varphi]$ funksional $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyada ekstremumga erishsa, u holda Q sohada $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya Eylerning xususiy hosilali

$$F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{\varphi_{x_i}} = 0. \tag{21}$$

tenglamasini qanoatlantirishi zarur. (21) tenglikni ochib yozsak,

$$F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} \left(F_{\varphi_{x_i}} \cdot \varphi_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{\varphi_{x_i x_j}} \cdot \varphi_{x_i x_j} \right) = 0, \tag{22}$$

ko'rinishni oladi. Bundan tashqari, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya n o'lchovli Q sohasining ∂Q chegarasida berilgan chegaraviy

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial Q,$$

shartni qanoatlantirishi kerak.

Masalan: a) quyidagi ko'rinishdagi

$$D[\varphi(x, y, z)] = \iiint_{Q} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

funksional uchun Eyler–Ostrogradskiy tenglamasi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Lemma (Lagranj). *Agar Q sohada uzluksiz bo'lgan M funksiya va Q soha-ning $\bar{c}Q$ chegarasida nolga aylanuvchi C^1 sinfdan olingan ixtiyoriy η funksiya uchun ushbu integral*

$$\iint_Q \dots \int M\eta \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

bo'lsa, u holda Q sohada $M = 0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisidan faraz qilamiz. Aytaylik, Q sohaning $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, nuqtasida $M(x_i) = c \neq 0$ bo'lsin, aniqlik uchun $c > 0$ bo'lsin. $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, nuqtaning atrofida R to'g'ri to'rt burchakni qaraniz: bu to'laligicha Q sohaga kiruvchi. R dan olingan har qanday x_i nuqta uchun $M(x_i) > c/2$ bo'lgan $a_i < x_i < b_i$ soha. Q sohada η funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta R to'g'ri to'rt burchakda bo'lsa, u holda

$$\eta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{\pi(x_i - a_i)}{b_i - a_i},$$

agar $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta R to'g'ri to'rt burchakdan tashqarida bo'lsa-u holda

$$\eta(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Oson ishonch hosil qilish mumkinki, η funksiya Q sohaning ∂Q chegarasida nolga aylanuvchi C^1 sinfdan olingan ixtiyoriy η funksiya. shuning uchun biz

$$\iint_Q \dots \int M\eta \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

tenglikka ega bo'lishimiz kerak. boshqa tomondan esa,

$$\iint_Q \dots \int M\eta \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = \iint_R \dots \int M\eta \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n >$$

$$> \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{\pi(x_i - a_i)}{b_i - a_i} dx_1 dx_2 \dots dx_n > 0.$$

bo'ladi, biz bu bilan qarama-qarshilikka keldik. Lemma isbot bo'ldi.

Lagranj lemmasi va (20) tenglikdan quyidagi xulosaga kelamiz: agar $J[\varphi]$ funksional $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyada ekstremumga erishsa, u holda Q sohada $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya Eylerning xususiy hosilali

$$F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{\varphi_{x_i}} = 0, \tag{21}$$

tenglamasini qanoatlantirishi zarur. (21) tenglikni ochib yozsak,

$$F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} \left(F_{\varphi_{x_i}} + F_{\varphi_{x_i}} \cdot \varphi_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{\varphi_{x_i x_j}} \cdot \varphi_{x_i x_j} \right) = 0, \tag{22}$$

ko'rinishni oladi. Bundan tashqari, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya n o'lchovli Q sohasining ∂Q chegarasida berilgan chegaraviy

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial Q,$$

shartni qanoatlantirishi kerak.

Masalan: a) quyidagi ko'rinishdagi

$$D[\varphi(x, y, z)] = \iiint_Q \left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right| dx dy dz,$$

funksional uchun Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Lemma (Lagranj). *Agar Q sohada uzluksiz bo'lgan M funksiya va Q soha-ning ∂Q chegarasida nolga aylanuvchi C^1 sinfdan olingan ixtiyoriy η funksiya uchun ushbu integral*

$$\iint\limits_{Q}\dots\int M\eta\cdot dx_1dx_2\dots dx_n=0$$

bo'lsa, u holda Q sohada $M=0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisidan faraz qilamiz. Aytaylik, Q sohaning $x_i, i=1,2,\dots,n.$ nuqtasida $M(x_i)=c\neq 0$ bo'lsin, aniqlik uchun $c>0$ bo'lsin. $x_i, i=1,2,\dots,n.$ nuqtaning atrofida R to'g'ri to'rt burchakni quramiz: bu to'laligicha Q sohaga kiruvchi, R dan olingan har qanday x_i nuqta uchun $M(x_i)>c/2$ bo'lgan $a_i\le x_i\le b_i$ soha. Q sohada η funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ nuqta R to'g'ri to'rt burchakda bo'lsa, u holda

$$\eta(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\sin^2\frac{\pi(x_i-a_i)}{b_i-a_i},$$

agar $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ nuqta R to'g'ri to'rt burchakdan tashqarida bo'lsa, u holda

$$\eta(x_1,x_2,\dots,x_n)=0.$$

Oson ishonch hosil qilish mumkinki, η funksiya Q sohaning ∂Q chegarasida nolga aylanuvchi C^1 sinfdan olingan ixtiyoriy η funksiya. shuniag uchun biz

$$\iint\limits_{Q}\dots\int M\eta\cdot dx_1dx_2\dots dx_n=0$$

tenglikka ega bo'lishimiz kerak, boshqa tomondan esa,

$$\iint\limits_{Q}\dots\int M\eta\cdot dx_1dx_2\dots dx_n=\iint\limits_{R}\dots\int M\eta\cdot dx_1dx_2\dots dx_n>$$

$$>\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\dots\int_{a_n}^{b_n}\prod_{i=1}^{n}\sin^2\frac{\pi(x_i-a_i)}{b_i-a_i}dx_1dx_2\dots dx_n>0.$$

bo'ladi, biz bu bilan qarama-qarshilikka keldik. Lemma isbot bo'ldi.

Lagranj lemmasi va (20) tenglikdan quyidagi xulosaga kelamiz: agar $J[\varphi]$ funksional $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyada ekstremumga erishsa, u holda Q sohada $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiya Eylerning xususiy hosilali

$$F_\varphi-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_{\varphi_{x_i}}=0, \tag{21}$$

tenglamasini qanoatlantirishi zarur. (21) tenglikni ocib yozsak,

$$F_\varphi-\sum_{i=1}^{n}\left(F_{x_i\varphi_{x_i}}+F_{\varphi\varphi_{x_i}}\cdot\varphi_{x_i}+\sum_{j=1}^{n}F_{\varphi_{x_j}\varphi_{x_i}}\cdot\varphi_{x_ix_j}\right)=0, \tag{22}$$

ko'rinishni oladi. Bundan tashqari, $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiya n o'lchovli Q sohasining ∂Q chegarasida berilgan chegaraviy

$$\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_n),\ (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\partial Q,$$

shartni qanoatlantirishi kerak.

Masalan: a) quyidagi ko'rinishdagi

$$D[\varphi(x,y,z)]=\iiint\limits_{Q}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz,$$

funksional uchun Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar $J[\varphi(x,y)]$ funksionalning integrali ostidagi funksiya yuqori tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda Eyler-Ostrogradskiy tenglamasini keltirib chiqarishda foydalanilgan almashtirishlarni bir necha bor tadbiq qilib, ekstremumning zaruriy sharti sifatida ekstremum beruvchi funksiya Eyler-Puasson tenglamasiga o'xshash tenglamani qanoatlantirishi kerakligiga ishonch hosil qilamiz.

b) quyidagi

$$J[\varphi(x,y)] = \iint_{(D)} F\left(x, y, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dxdy,$$

funksional uchun

$$F_\varphi - \frac{\partial}{\partial x}(F_p) - \frac{\partial}{\partial y}(F_q) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F_r) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(F_s) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(F_t) = 0,$$

bu yerda

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}.$$

Bu to'rtinchi tartibli xususiy hosilali tenglama uni $J[\varphi(x,y)]$ funksionalga ekstremum beruvchi funksiya qanoatlantirishi kerak.

s) quyidagi

$$J[\varphi(x,y)] = \iint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

funksionalni ekstremumini topish masalasi bigarmonik tenglamaga olib keladi, bu yerda μ — parametr.

3–misol. Berilgan

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{23}$$

chiziqlarga tortilgan eng kichik yuzali sirt topilsin.

Yechish. Aytaylik, $z = \varphi(x,y)$ sirt tenglamasi bo'lsin. Sirtning (23) chiziq-larga tortilganlik sharti

$$\varphi[x(t), y(t)] = z(t).$$

bo'ladi. Sirtning yuzasi

$$J[\varphi] = \iint_{(D)} \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}\,dxdy.$$

integral orqali ifodalanadi. Bu uchun Eyler tenglamasi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\varphi_x}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\varphi_y}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}\right] = 0, \tag{24}$$

bo'ladi. (24) shart ko'rsatadiki, izlanayotgan eng kichik yuzali sirt (minimal sirt deb ataluvchi) hamma joyda nolga teng bo'lgan egrilikka ega bo'lar ekan.

4–misol. n o'lchovli fazoning Q sohasi bo'yicha φ funksiyaning Dirixle integrali deb quyidagi

$$D(\varphi) = \iint_{(Q)} \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^2\,dx_1\ldots dx_n. \tag{25}$$

integralga aytiladi. Q sohasining berilgan ∂Q chegarasida berilgan qiymatlarni qabul qiluvchi (25) Dirixle integraliga minimum beruvchi $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya uchun shartni aniqlang.

Yechish. Bu holda (22) Eyler tenglamasi

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i x_i} = 0,$$

ko'rinishda bo'ladi. Aslida bu holda $F=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2$, ya'ni F oshkor holda $x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi$ larga bog'liq bo'lmaydi. Binobarin,

$$F_{\varphi}-F_{\varphi\varphi}=F_{\varphi x_i}=0, \quad F_{\varphi\varphi}=\begin{cases}2 & agar \quad i=j,\\ 0 & agar \quad i\neq j,\end{cases}$$

bo'ladi. Laplas operatoridan foydalanib, (22) formulaga ko'ra,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi^2}{\partial x_i^2}=0$$

yoki $\Delta\varphi=0$ n o'lchovli Laplas tenglamasiga ega bo'lamiz. Demak, Laplas tenglamasi Dirixle integrali uchun Eyler tenglamasidan iborat bo'ladi.

X BOB

EYLER TENGLAMASINING KANONIK FORMASI

1-§. Eyler va Ostrogradskiy tenglamalarining invariantligi

$y=f(x)$ bir o'zgaruvchili funksiyalarni ekstremumga tekshira turib, x erkin o'zgaruvchini $x=g(\xi)$ almashtirishimiz mumkin, bu yerda ξ – yangi erkin o'zgaruvchi. $g(\xi)$ funksiya monoton va $g'(\xi)\neq 0$ noldan farqli hosilaga ega bo'lsin. U holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga mos ravishda

$$\frac{dy}{d\xi}=f'(x)\varphi'(\xi). \tag{1}$$

ifodani yozamiz. $y(\xi)=f(\varphi(\xi))$ funksiya ekstremumning zaruriy sharti $f'(x)\varphi'(\xi)=0$ ko'rinishda bo'ladi. $g'(\xi)\neq 0$ bo'lganligi sababli, u $y=f(x)$ funksiya ekstremumning zaruriy shartiga $f'(x)=0$ teng kuchli. O'zgaruvchilarni almashtirishning bunday invariantlik xossasiga Eyler tenglamasi ham ega.

Quyidagi sodda ko'rinishdagi

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx. \tag{2}$$

funksionalni qaraylik.

Agar (2) funksional bevosita erkin o'zgaruvchilar orqali yoki bir vaqtning o'zida izlanayotgan funksiyani erkin o'zgaruvchilar orqali o'zgartirilsa, u holda funksionalning ekstremali hali hamon o'zgartirilgan yangi integrant uchun tuzilgan Eyler tenglamasi orqali topiladi. Eyler tenglamasining invariantligi shundan iborat.

Yozishga qulay bo'lishligi uchun Eyler tenglamasining chap tomonida maxsus belgilash kiritamiz:

$$[F]_x = F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}.$$

Yangi ξ erkin o'zgaruvchi kiritib,

$$F(x, y, y') dx = F\left[x(\xi), y(\xi), \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\xi}{d\xi}\right] d\xi\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right).$$

va J integral yangi erkin o'zgaruvchilarda

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}d\xi.$$

ko'rinishni oladi. Unga yaqin bo'lgan $y + \alpha\eta$ taqqoslash funksiyasini kiritib, odatdagi hisoblashlarni olib borgandan so'ng,

$$\left(\int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')dx\right)'_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \cdot \eta dx.$$

munosabatni olamiz. Bu ifodani yangi erkin o'zgaruvchilarda

$$\left(\int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi\left(\xi, y + \alpha\eta, \frac{dx}{d\xi} + \alpha\frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}d\xi\right)'_{\alpha=0} = \int_{\xi_0}^{\xi_1}\left[\Phi\cdot\frac{dx}{d\xi}\right]_y \cdot \eta dx.$$

ko'rinishda yozish mumkin. Olingan ikki natijani tenglashtirib,

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{[F]_y - \left[\Phi\cdot\frac{dx}{d\xi}\right]_y \cdot \frac{d\xi}{dx}\right\}\eta dx,$$

munosabatni yozishimiz mumkin. Bu yerdan η funksiyaning ixtiyoriyligidan variatsion hisob asosiy lemmasiga ko'ra,

$$[F]_y = \left[\Phi\cdot\frac{dx}{d\xi}\right]_y \cdot \frac{d\xi}{dx}. \qquad (3)$$

tenglikka ega bo'lamiz, bundan tashqari o'ng tomonda turgan belgi

farazga ko'ra, yoyib yozilishi kerak, bunda ξ noma'lum o'zgaruvchi bo'ladi, ya'ni

$$\left[\Phi\cdot\frac{dx}{d\xi}\right]_y = \frac{d\xi}{dx}\Phi_y - \frac{d}{d\xi}\left(\Phi_{y'}\cdot\frac{dx}{d\xi}\right).$$

(3) formula (1) formulaga mutlaqo o'xshash, yuqorida aytganimizdek, (3) $\left[\Phi\cdot\frac{dx}{d\xi}\right]_y = 0$ Eyler tenglamasi, ravshanki, $[F]_y = 0$ Eyler tenglamasiga teng kuchli.

Bularning barchasi ancha umumiy bo'lgan holga, qachonki, integral ostidagi funksiya bir qancha noma'lum funksiyalarni o'z ichiga olgan hol uchun ham umumlashtiriladi.

Ikki erkin o'zgaruvchili hol uchun

$$J = \iint_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy.$$

funksionalni qaraymiz. (x, y) o'zgaruvchilar o'rniga yangi (ξ, η) erkin o'zgaruvchilarni kiritamiz:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

bundan tashqari bu funksiyalar uzluksiz hosilalarga ega va ularga mos funksionalning determinanti

$$\begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} \neq 0$$

nolga aylanmaydi deb hisoblaymiz. Integral ostidagi funksiyani yangi o'zgaruvchiga o'zgartiramiz, u holda quyidagi

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u, u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x, u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y] = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

tenglikka ega bo'lamiz. Yuqoridagi holga o'xshash yaqin bo'lgan $u=\alpha\eta$ taqqoslash funksiyasini kiritib, α parametr bo'yicha differensiallab, $\alpha=0$ qiymatda

$$\iint_{D}[F]_{y}\cdot\eta dxdy \quad \iint_{D_1}\left[\Phi\cdot\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]_{y}\eta\,d\xi d\eta. \tag{4}$$

ifodaga ega bo'lamiz. bu yerda D_1 - D sohani yuqoridagi yangi erkin o'zgaruvchilar yordamida o'zgartirish natijasida olingan soha, $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ - funksional determinanti uchun odatdagi $[\ ]_y$ - belgi Eyler - Ostrogradskiy tenglamasini chap tomonini anglatadi, ya'ni

$$[F]_y=F_y-\frac{\partial}{\partial x}F_{y'}-\frac{\partial}{\partial y}F_{y''}.$$

ifodani anglatadi. (4) formulaning o'ng tomonidagi integralda o'zgaruvchilarni almashtirishlarini bajarib hamda η funksiyaning ixtiyoriyligidan foydalanib, Eyler-Ostrogradskiy tenglamasini chap tomonini yangi o'zgaruvchiga nisbatan o'zgartirib, quyidagi

$$[F]_y=\left[\Phi\cdot\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]_{\eta}\cdot\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}.$$

formulani olamiz. Bunga o'xshash formulani ko'p sonli erkin o'zgaruvchili hol uchun ham olish mumkin. Ostrogradskiyning $[F]_y=0$ tenglamasi uning yangi erkin o'zgaruvchi orqali ifodalangan $\left[\Phi\cdot\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]_{\eta}=0$ tenglamasiga teng kuchli.

Endi bir vaqtning o'zida erkin o'zgaruvchilarni va funksiyaarni almash-tirishni amalga oshirish mumkin. Masalan. agar (2)

funksionalda (x,y) o'zgaruvchilar o'rniga yangi (ξ,η) erkin o'zgaruvchilarni kiritsak: ya'ni

$$x=x(\xi,\eta),\quad y=y(\xi,\eta).$$

bo'lsa, u holda $y=y(x)$ funksiya o'rniga yangi o'zgaruvchiga nisbatan $\eta=\eta(\xi)$ funksiyaga ega bo'lamiz. (2) funksionalni yangi o'zgaruvchilarga o'zgartirib.

$$J=\int_{\xi_0}^{\xi_1}F\left[\varphi(\xi,\eta),\varphi(\xi,\eta),\frac{\varphi_\xi-\varphi_\eta\cdot\eta'}{\varphi_\xi+\varphi_\eta\cdot\eta'}\right](\varphi_\xi+\varphi_\eta\cdot\eta')d\xi=\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Phi(\xi,\eta,\eta')d\xi,$$

funksionalga ega bo'lamiz. yuqoridagidek, $[F]_\eta=0$ Eyler tenglamasi $[\Phi]_\eta=0$ ko'rinishdagi Eyler tenglamasiga teng kuchli bo'ladi.

1-misol. Quyidagi

$$J[r]=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi.$$

bu yerda $r=r(\varphi)$. funksionalni ekstremali topilsin.

Yechish. Bu funksional uchun Eyler tenglamasi

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}-\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}\right]=0.$$

bo'ladi. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ deb o'zgaruvchilarni almashtirish

$$\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi=\sqrt{1+y'^2}dx.$$

tenglikni beradi, shunday qilib, biz quyidagi

$$J[r]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx.$$

ko'rinishdagi funksionalga kelamiz. Ushbu funksionalning Eyler tenglamasi $y''=0$ bo'ladi. Shuning uchun umumiy yechimi $y=c_1x+c_2$ bo'ladi. Demak, dastlabki funksionalning ekstremali $r\sin\varphi=c_1r\cos\varphi+c_2$.

tenglikka ega bo'lamiz. Yuqoridagi bandga o'xshash yaqin bo'lgan $x+\alpha\eta$ taqqoslash funksiyasini kiritib, α parametr bo'yicha differensiallab, $\alpha=0$ qiymatda

$$\iint_{D}[F]_{y}\cdot\eta\,dxdy=\iint_{D_1}\left[\Phi\cdot\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]_{y}\eta(\xi,\eta)\cdot \tag{4}$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerda D_1-D sohani yuqoridagi yangi erkin o'zgaruvchilar yordamida o'zgartirish natijasida olingan soha, $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}-$ funksional determinanti uchun odatdagi $|\ |-$ belgi Eyler - Ostrogradskiy tenglamasini chap tomonini anglatadi, ya'ni

$$[F]_{y}=F_{y}-\frac{\partial}{\partial x}F_{y'}-\frac{\partial}{\partial y}F_{y''}.$$

ifodani anglatadi. (4) formulaning o'ng tomonidagi integralda o'zgaruvchilarni almashtirishlarini bajarib hamda η funksiyaning ixtiyoriyligidan foydalanib, Eyler-Ostrogradskiy tenglamasini chap tomonini yangi o'zgaruvchiga nisbatan o'zgartirib, quyidagi

$$[F]_{y}=\left[\Phi\cdot\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]_{\eta}\cdot\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$$

formulani olamiz. Bunga o'xshash formulani ko'p sonli erkin o'zgaruvchili hol uchun ham olish mumkin. Ostrogradskiyning $[F]_{y}=0$ tenglamasi uning yangi erkin o'zgaruvchi orqali ifodalangan $\left[\Phi\cdot\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]_{\eta}=0$ tenglamasiga teng kuchli.

Endi bir vaqtning o'zida erkin o'zgaruvchilarni va funksiyaarni almash-tirishni amalga oshirish mumkin. Masalan, agar (2)

funksionalda (x,y) o'zgaruvchilar o'rniga yangi (ξ,η) erkin o'zgaruvchilarni kiritsak: ya'ni

$$x=x(\xi,\eta),\quad y=y(\xi,\eta),$$

bo'lsa, u holda $y=y(x)$ funksiya o'rniga yangi o'zgaruvchiga nisbatan $\eta=\eta(\xi)$ funksiyaga ega bo'lamiz. (2) funksionalni yangi o'zgaruvchilarga o'zgartirib,

$$J=\int_{\xi_0}^{\xi_1}F\left[\varphi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta),\frac{\psi_\xi+\psi_\eta\cdot\eta'}{\varphi_\xi+\varphi_\eta\cdot\eta'}\right](\varphi_\xi+\varphi_\eta\cdot\eta')d\xi=\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Phi(\xi,\eta,\eta')d\xi,$$

funksionalga ega bo'lamiz. yuqoridagidek, $[F]_{\eta}=0$ Eyler tenglamasi $[\Phi]_{\eta}=0$ ko'rinishdagi Eyler tenglamasiga teng kuchli bo'ladi.

1-misol. Quyidagi

$$J(r)=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi,$$

bu yerda $r=r(\varphi)$. funksionalni ekstremali topilsin.

Yechish. Bu funksional uchun Eyler tenglamasi

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}-\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}\right]=0,$$

bo'ladi, $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$. deb o'zguruvchilarni almashtirish

$$\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

tenglikni beradi. shunday qilib, biz quyidagi

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

ko'rinishdagi funksionalga kelamiz. Ushbu funksionalning Eyler tenglamasi $y''=0$ bo'ladi. Shuning uchun umumiy yechimi $y=c_1x+c_2$ bo'ladi. Demak, dastlabki funksionalning ekstremali $r\sin\varphi=c_1r\cos\varphi+c_2$

bo'ladi, bu yerda c_1, c_2 – lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

2-misol. Quyidagi

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left(e^{-x}y'^2-e^{-x}y^2\right)dx$$

bu yerda $r=r(\varphi)$. funksionalni ekstremali topilsin.

Yechish. Mazkur funksional uchun Eyler tenglamasi

$$y''-y'+e^{-x}y=0,$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi

$$\begin{cases} x=\ln u, \\ y=v, \end{cases}$$

deb o'zgaruvchilarni almashtiramiz. U holda dastlabki funksional

$$J[v]=\int\left(e^{-\ln u}u'^2-e^{-\ln u}v^2\right)du/u=\int\left(v'^2-v^2\right)du.$$

ko'rinishga o'zgaradi va bu funksional uchun Eyler tenglamasi $v''+v=0$. bo'ladi. Uning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda $v=c_1\cos u+c_2\sin u$ bo'ladi. Bundan dastlabki (x,y) o'zgaruvchilarga o'tib, $y=c_1\cos e^x+c_2\sin e^x$ ekstremal ko'rinishdagi tenglamasini olamiz.

3-misol. Qutb koordinatalar sistemasida quyidagi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \qquad (5)$$

Laplas tenglamasini yozing.

Yechish.

$$J[z(x,y)]=\iint_D\left(z_x^2+z_y^2\right)dxdy$$

funksionalni qaraymiz. Bu funksional uchun Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi (5) tenglamaning aynan o'zi bo'ladi. Funksionalda (x,y)

o'zgaruvchilardan (ρ,φ) qutb koordinatalariga o'tamiz: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$.

Bundan

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos\varphi,\ \frac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{\rho},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{\rho},$$

ifodalarga ega bo'lamiz. U holda bundan

$$J[z(\rho,\varphi)]=\iint_D\left[\left(z_\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}+z_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(z_\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\iint_D\left[\left(\rho z_\rho^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{1}{\rho}z_\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]d\rho d\varphi,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi integral uchun Eyler - Ostrogradskiy formulasini tuzib, qutb koordinatalaridagi Laplas tenglamasiga kelamiz.

143. $J=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$ funksionalning ekstremali topilsin.

144. $J=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}f(r\sin\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$ funksionalning ekstremali doimo kvadratturalash orqali topilishi ko'rsatilsin.

145. $J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ funksionalning ekstremali topilsin.

2-§. Parametrik ko'rinishdagi variatsion masalalar

Ko'plab variatsion masalalarda yechimni parametrik ko'rinishda izlash qulay hisoblanadi. Masalan, izoperimetrik masalada: berilgan l uzunlikdagi eng katta S yuzani qamrab oluvchi yopiq egri chiziqni topish haqidagi masala, masalaning yechimini $y=y(x)$ ko'rinishida izlash noqulay, chunki masalaning mazmun mohiyatidan $y=y(x)$ funksiya bir qiymatli emas (31-rasm), shuning uchun qaralayotgan

bo'ladi, bu yerda c_1, c_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

2-misol. Quyidagi

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,dx$$

ko'rinishdagi funksionalni ekstremali topilsin.

Yechish. Mazkur funksional uchun Eyler tenglamasi

$$F_y - F_{y'x} - F_{y''x^2} = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi

$$\begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

deb o'zgaruvchilarni almashtiramiz. U holda dastlabki funksional

$$J[r] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} F(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r'\cos\varphi - r\sin\varphi, r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi)\,d\varphi$$

ko'rinishga o'zgaradi va bu funksional uchun Eyler tenglamasi $r'' + r = 0$ bo'ladi. Uning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda $r = c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi$ bo'ladi. Bundan dastlabki (x, y) o'zgaruvchilarga o'tib, $x = c_1\cos^2\varphi + c_2\sin\varphi\cos\varphi$ ekstremal ko'rinishdagi tenglamasini olamiz.

3-misol. Qutb koordinatalar sistemasida quyidagi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{5}$$

Laplas tenglamasini yozing.

Yechish.

$$J[z(x, y)] = \iint_D \left(z_x^2 + z_y^2\right)dx\,dy$$

funksionalni qaraymiz. Bu funksional uchun Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi (5) tenglamaning aynan o'zi bo'ladi. Funksionalda (x, y)

o'zgaruvchilardan (ρ, φ) qutb koordinatalariga o'tamiz: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Bundan

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial\rho}{\partial x} - \sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

ifodalarga ega bo'lamiz. U holda bundan

$$J[z(\rho, \varphi)] = \iint_D \left[\left(z_\rho\frac{\partial\rho}{\partial x} + z_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(z_\rho\frac{\partial\rho}{\partial y} + z_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \iint_D \left[\left(\rho z_\rho^2\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho}z_\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]d\rho\,d\varphi,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi integral uchun Eyler – Ostrogradskiy formulasini tuzib, qutb koordinatalaridagi Laplas tenglamasiga kelamiz.

143. $J = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r\sin\varphi\sqrt{r'^2 + r^2}\,d\varphi$ funksionalning ekstremali topilsin.

144. $J = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r\cos\varphi\sqrt{r'^2 + r^2}\,d\varphi$ funksionalning ekstremali doimo kvadratlarga ajratish orqali topilishi ko'rsatilsin.

145. $J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\sqrt{1 + y''^2}\,dx$ funksionalning ekstremali topilsin.

2-§. Parametrik ko'rinishdagi variatsion masalalar

Ko'plab variatsion masalalarda yechimni parametrik ko'rinishda izlash qulay hisoblanadi. Masalan, izoperimetrik masalada: berilgan l uzunlikdagi eng katta S yuzani qamrab oluvchi yopiq egri chiziqni topish haqidagi masala, masalaning yechimini $y = y(x)$ ko'rinishda izlash noqulay, chunki masalaning mazmun mohiyatidan $y = y(x)$ funksiya bir qiymatli emas (31-rasm), shuning uchun qurilayotgan

bo'ladi, bu yerda c_1, c_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

2-misol. Quyidagi

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + y^2 + 2xy)\,dx$$

bu yerda $y = y(x)$ funksionalni ekstremali topilsin.

Yechish. Mazkur funksional uchun Eyler tenglamasi

$$y'' - y - x = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi

$$\begin{cases} t = \ln x, \\ y = u, \end{cases}$$

deb o'zgaruvchilarni almashtiramiz. U holda dastlabki funksional

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} (u'^2 - u^2 + e^t u)\,dt$$

ko'rinishga o'zgaradi va bu funksional uchun Eyler tenglamasi $u'' + u = 0$ bo'ladi. Uning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda $u = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ bo'ladi. Bundan dastlabki (x, y) o'zgaruvchilarga o'tib, $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$ ekstremal ko'rinishdagi tenglamasini olamiz.

3-misol. Qutb koordinatalar sistemasida quyidagi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \qquad (5)$$

Laplas tenglamasini yozing.

Yechish.

$$J[z(x,y)] = \iint_D [z_x^2 + z_y^2]\,dx\,dy$$

funksionalni qaraymiz. Bu funksional uchun Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi (5) tenglamaning aynan o'zi bo'ladi. Funksionalda (x, y)

o'zgaruvchilardan (ρ, φ) qutb koordinatalariga o'tamiz: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Bundan

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

ifodalarga ega bo'lamiz. U holda bundan

$$J[z(\rho,\varphi)] = \iint_D \left[\left(z_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} + z_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(z_\rho \frac{\partial \rho}{\partial y} + z_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \iint_D \left[\left(\rho z_\rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} z_\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right] d\rho\, d\varphi$$

tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi integral uchun Eyler - Ostrogradskiy formulasini tuzib, qutb koordinatalaridagi Laplas tenglamasiga kelamiz.

143. $J = \int_{x_0}^{x_1} y \sin\varphi \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$ funksionalning ekstremali topilsin.

144. $J = \int_{x_0}^{x_1} y(x \sin\omega \sqrt{x^2 - y^2})\,dx$ funksionalning ekstremali doimo kvadratlar farqini differensiallash orqali topilishi ko'rsatilsin.

145. $J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 - y'^2}\,dx$ funksionalning ekstremali topilsin.

2-§. Parametrik ko'rinishdagi variatsion masalalar

Ko'plab variatsion masalalarda yechimni parametrik ko'rinishda izlash qulay hisoblanadi. Masalan, izoperimetrik masalada: berilgan l uzunlikdagi eng katta S yuzani qamrab oluvchi yopiq egri chiziqni topish haqidagi masala, masalaning yechimini $y = y(x)$ ko'rinishida izlash noqulay, chunki masalaning mazmun mohiyatidan $y = y(x)$ funksiya bir qiymatli emas (31-rasm), shuning uchun qaralayotgan

masalada yechimni $x=x(t), y=y(t)$ parametrik ko'rinishda izlash maqsadga muvofiqdir. Binobarin, bu holda

$$S[x(t), y(t)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(xy' - yx')\,dt$$

funksionalni

$$l = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

bu yerda l - o'zgarmas, izoperimetrik shart ostida ekstremumini izlash kerak bo'ladi.

Aytaylik, biror bir

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx,$$

funksionalni ekstremumga tadqiq etishda yechimni $x=x(t), y=y(t)$ parametrik ko'rinishda izlash maqsadga muvofiq bo'lsin, u holda funksional quyidagi



31 - rasm

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)\,dt.$$

ko'rinishga o'tadi. Bundan ko'ramizki, o'zgartirishdan so'ng olingan integral ostidagi funksiya

$$F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)$$

oshkor holda t ga bog'liq bo'lmaydi va u $\dot{x}$ va $\dot{y}$ larga nisbatan birinchi darajali bir jinsli funksiya bo'ladi.

Shunday qilib, $J[x(t), y(t)]$ funksional quyidagi

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt,$$

ko'rinishdagi ikkita $x=x(t), y=y(t)$ funksiyalarga bog'liq bo'lgan ixtiyoriy funksional bo'lmaydi, integral ostidagi funksiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmaydi va u $\dot{x}$ va $\dot{y}$ larga nisbatan birinchi darajali bir jinsli funksiya bo'lganligi sababli, faqat bu funksionallarning xususiy holi bo'ladi.

Agar biz, qandaydir boshqa qandaydir parametrik $x=x(t), y=y(t)$ ko'rinishda izlanayotgan egri chiziqqa kelib qolganimizda edi, u holda funksional

$$\int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\dot{x}\,dt$$

ko'rinishga kelib qolgan bo'lar edik. Binobarin, J funksionalning integral ostidagi funksiyasi egri chiziqlarini parametrik ko'rinishdagi tasvirlanishi ham u o'z ko'rinishini o'zgartirmaydi. Shunday qilib, J funksional egri chiziqning parametrik ko'rinishiga emas, egri chiziqning ko'rinishiga bog'liq bo'ladi.

Quyidagi tasdiqni to'g'riligiga ishonch hosil qilish qiyin emas: agar

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1}\Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt,$$

funksionalning integral ostidagi funksiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmay, u $\dot{x}$ va $\dot{y}$ o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali birjinsli funksiya bo'lsa, u holda $J[x(t), y(t)]$ funksional $x=x(t), y=y(t)$ funksiyalarning parametrik tasvirlanishiga emas, balki faqat ularning

masalada yechimni $x=x(t), y=y(t)$. parametrik ko'rinishda izlash maqsadga muvofiqdir. Binobarin, bu holda

$$S[x(t),y(t)]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}y-x\dot{y})dt$$

funksionalni

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

bu yerda l – o'zgarmas, izoperimetrik shart ostida ekstremumini izlash kerak bo'ladi.

Aytaylik, biror bir

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,$$

funksionalni ekstremumga tadqiq etishda yechimni $x=x(t), y=y(t)$. parametrik ko'rinishda izlash maqsadga muvofiq bo'lsin, u holda funksional quyidagi



31 - rasm

$$J[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}F\left(x(t),y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)dt,$$

ko'rinishga o'tadi. Bundan ko'ramizki, o'zgartirishdan so'ng olingan integral ostidagi funksiya

$$F\left(x(t),y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)$$

oshkor holda t ga bog'liq bo'lmaydi va u $\dot{x}$ va $\dot{y}$ larga nisbatan birinchi daralali bir jinsli funksiya bo'ladi.

Shunday qilib, $J[x(t),y(t)]$ funksional quyidagi

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))dt,$$

ko'rinishdagi ikkita $x=x(t), y=y(t)$. funksiyalarga bog'liq bo'lgan ixtiyoriy funksional bo'lmaydi. integral ostidagi funksiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmaydi va u $\dot{x}$ va $\dot{y}$ larga nisbatan birinchi daralali bir jinsli funksiya bo'lganligi sababli. faqat bu funksionallarning xususiy holi bo'ladi.

Agar biz, qandaydir boshqa qandaydir parametrik $x=x(\tau), y=y(\tau)$. ko'rinishda izlanayotgan egri chiziqqa kelib qolganimizda edi, u holda funksional

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}F\left(x,y,\frac{\dot{y}_\tau}{\dot{x}_\tau}\right)\dot{x}_\tau d\tau,$$

ko'rinishga kelib qolgan bo'lar edik. Binobarin, J funksionalning integral ostidagi funksiyasi egri chiziqlarini parametrik ko'rinishdagi tasvirlanishi ham u o'z ko'rinishini o'zgartirmaydi. Shunday qilib, J funksional egri chiziqning parametrik ko'rinishiga emas, egri chiziqning ko'rinishiga bog'liq bo'ladi.

Quyidagi tasdiqni to'g'riligiga ishonch hosil qilish qiyin emas: agar

$$J[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))dt,$$

funksionalning integral ostidagi funksiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmay, u $\dot{x}$ va $\dot{y}$ o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi daralali birjinsli funksiya bo'lsa, u holda $J[x(t),y(t)]$ funksional $x=x(t), y=y(t)$. funksiyalarning parametrik tasvirlanishiga emas, balki faqat ularning

masalada yechimni $x = x(t), y = y(t)$ parametrik ko'rinishda izlash maqsadga muvofiqdir. Binobarin, bu holda

$$S[x(t), y(t)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y} - y\dot{x})\,dt$$

funksionalni

$$l = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt,$$

bu yerda l – o'zgarmas. izoperimetrik shart ostida ekstremumini izlash kerak bo'ladi.

Aytaylik, biror bir

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

funksionalni ekstremumga tadqiq etishda yechimni $x = x(t), y = y(t)$ parametrik ko'rinishda izlash maqsadga muvofiq bo'lsin, u holda funksional quyidagi



31 - rasm

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)\,dt,$$

ko'rinishga o'tadi. Bundan ko'ramizki, o'zgartirishdan so'ng olingan integral ostidagi funksiya

$$F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)$$

oshkor holda t ga bog'liq bo'lmaydi va u $\dot{x}$ va $\dot{y}$ larga nisbatan birinchi daralali bir jinsli funksiya bo'ladi.

Shunday qilib, $J[x(t), y(t)]$ funksional quyidagi

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt.$$

ko'rinishdagi ikkita $x = x(t), y = y(t)$ funksiyalarga bog'liq bo'lgan ixtiyoriy funksional bo'lmaydi, integral ostidagi funksiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmaydi va u $\dot{x}$ va $\dot{y}$ larga nisbatan birinchi daralali bir jinsli funksiya bo'lganligi sababli. faqat bu funksionallarning xususiy holi bo'ladi.

Agar biz, qandaydir boshqa qandaydir parametrik $x = x(t), y = y(t)$ ko'rinishda izlanayotgan egri chiziqqa kelib qolganimizda edi, u holda funksional

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\dot{x}\,dt.$$

ko'rinishga kelib qolgan bo'lar edik. Binobarin, J funksionalning integral ostidagi funksiyasi egri chiziqlarini parametrik ko'rinishdagi tasvirlanishi ham u o'z ko'rinishini o'zgartirmaydi. Shunday qilib, J funksional egri chiziqning parametrik ko'rinishiga emas, egri chiziqning ko'rinishiga bog'liq bo'ladi.

Quyidagi tasdiqni to'g'riligiga ishonch hosil qilish qiyin emas: agar

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1}\Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt,$$

funksionalning integral ostidagi funksiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmay, u $\dot{x}$ va $\dot{y}$ o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi daralali birjinsli funksiya bo'lsa, u holda $J[x(t), y(t)]$ funksional $x = x(t), y = y(t)$ funksiya bo'lsa, u holda funksionalning parametrik tasvirlanishiga emas. balki faqat ularning

ko'rinishiga bog'liq bo'ladi.

Haqiqatan, aytaylik,

$$J[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})dt,$$

bu yerda

$$\Phi(x,y,k\dot{x},k\dot{y})=k\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

bo'lsin. Endi $\tau=\varphi(t)$, $\varphi(t_0)=\tau_0$, $\varphi(t_1)=\tau_1$ deb olib, yangi ko'rinishdagi parametrik formaga o'tamiz. U holda yuqoridagi funksional quyidagi ko'rinishga keladi

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))dt=\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Phi(x(\tau),y(\tau),\dot{x}_\tau(\tau)\dot{\varphi}(\tau),\dot{y}_\tau(\tau)\dot{\varphi}(\tau))\frac{d\tau}{\dot{\varphi}(\tau)}.$$

Φ funksiya $\dot{x}$ va $\dot{y}$ o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali bir jinsli funksiya bo'lganligi sababli.

$$\Phi(x,y,\dot{x}\dot{\varphi},\dot{y}\dot{\varphi})=\dot{\varphi}\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

ifodaga ega bo'lamiz, bundan

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})dt=\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Phi(x,y,\dot{x}_\tau,\dot{y}_\tau)d\tau,$$

ya'ni parametrik ko'rinishning o'zgarishida integral ostidagi funksiya o'zgarmay qoldi.

Yuzasi $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-\dot{x}y)dt$, egri chiziq bilan chegaralangan $\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$ yoyning uzunligi shunday funksionallarga misol bo'la oladi ($\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ funksiya birjinslilikning musbat bir jinsli funksiyasi, ya'ni uning uchun $F(kx,ky)=kF(x,y)$ shart faqat musbat k lardagina bajariladi, lekin bu $\tau=\varphi(t)$ almashtirishda $\dot{\varphi}(t)>0$ deb hisoblash mumkin bo'lganligi, mazkur

kur paragrafda bayon etilgan nazariyaning to'g'riligi uchun yetarli).

Quralayotgan turdagi

$$J[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})dt$$

funksionallarni ekstremallarini topish uchun, bu yerda $\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})$- $\dot{x}$ va $\dot{y}$ o'zgaruvchilargalarning birinchi darajali bir jinslilikgiga nisbatan bir jinsli funksiya va integral ostidagi ixtiyoriy $\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})$ funksiya uchun quyidagi Eyler tenglamalar sistemasini

$$\Phi_x(x,y,\dot{x},\dot{y})-\frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}}(x,y,\dot{x},\dot{y})=0,\quad \Phi_y(x,y,\dot{x},\dot{y})-\frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y})=0,$$

yechish kerak bo'ladi.

Quyidagi funksionallarning ekstremali topilsin:

146. $J_1=\int_{(1,0)}^{(1,1)}\frac{y^2-x^2\dot{x}}{x^2}dt$. **147.** $J_2=\int_{(0,0)}^{(1,2)}\frac{\dot{y}^2-3e^{y/x}\dot{x}^2}{x}dt$.

148. $J_3=\int_{(1,0)}^{(0,0)}\left(K\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-\dot{x}y\right)dt$, $K>0-const$.

3-§. Eyler tenglamasining kanonik (gamiltonian) formasi

Bizga ma'lumki.

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1}F(x,x',t)x'(t)dt \tag{1}$$

funksional uchun, bu yerda $x=x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$- silliq vektor-funksiya, F ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya, Eyler tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}=0,\quad (i=1,2,\dots,n) \tag{2}$$

Umuman olganda bu sistema ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

sistemasini ifodalaydi. Bunday tenglamalar sistemasini qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish orqali birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin. Shunday ekan yangi o'zgaruvchilar kiritamiz $z_i = y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. U holda $\dot{y}_i = \dot{z}_i$ va biz dastlabki (2) sistemaga ekvivalent bo'lgan quyidagi

$$\begin{cases} \dot{z}_i = \dfrac{\partial H}{\partial x_i}, & i = 1, 2, \ldots, n \\ \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, & i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{3}$$

$2n$ ta birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga kelamiz. Bu olingan oddiy differensial tenglamalar sistemasi normal sistema emas. shuning uchun, u bilan ishlash noqulay. Aytaylik,

$$p_i = \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

bo'lsin, $y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ o'zgaruvchi barcha x integralning

$$\frac{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} & \frac{\partial p_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial p_2}{\partial y_1} & \frac{\partial p_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial p_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial y_1} & \frac{\partial p_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Gess matritsasi (ikkinchi tartibli xususiy hosilali matritsa) determinanti yakobian bilan usma-ust tushadi. Agar ushbu determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial y_n} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y_n \partial y_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_n \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial y_n^2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

noldan farqli bo'lsa, u holda teskari funksiya haqidagi teoremaga ko'ra,

$p_i = \varphi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ tenglamalar sistemasi eski $y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ o'zgaruvchilar to'plamini $p_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ o'zgaruvchilarning funksiyasi sifatida aniqlaydi, ya'ni

$$y_i = f_i(x, p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad i = 1, n; \quad p = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

Quyidagi funksiyani qaraymiz

$$H(x, y, p) = -F(x, y, f(x, y, p)) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x, y, p) \cdot p_i. \tag{7}$$

bu yerda $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Bu berilgan (1) funksionalning *Gamilton funksiyasi* deyiladi, eski x, y, p o'zgaruvchilar bilan bog'liq bo'lgan (6) yoki (7) munosabatlardagi x, y, p o'zgaruvchilar esa berilgan (1) funksionalning *kanonik o'zgaruvchilari* deb ataladi.

Gamilton funksiyasi ta'rifidan

$$dH(x, y, p) = -df + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i dp_i = -f_x dx - \sum_{i=1}^{n} f_{y_i} dy_i - \sum_{i=1}^{n} f_{p_i} dp_i + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i dp_i. \tag{8}$$

tenglik kelib chiqadi. (4) tenglikka asosan, (8) tenglikning o'ng tomonidagi uchinchi va to'rtinchi qo'shiluvchi o'zaro qisqarib ketadi. Shuning uchun,

$$dH(x, y, p) = -f_x dx - \sum_{i=1}^{n} f_{y_i} dy_i - \sum_{i=1}^{n} y_i dp_i.$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, Gamilton funksiyasining x, y, p o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilasi uchun

$$H_x = -f_x, \quad H_{y_i} = -f_{y_i}, \quad H_{p_i} = y_i$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu yerdan, $f_x = -H_x$, $y_i = H_{p_i}$ tengliklarga ega bo'lamiz. Huddi shuningdek, kiritilgan $f_{y_i} = f_{z_i} = p_i$ va $y_i = \dot{x}_i$ belgilashlarga ko'ra, (3) oddiy differensial tenglamalar sistemasidan Eylerning (2) tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'lgan oddiy differensial

tenglamalar sistemasining quyidagi ko'rinishdagi normal formasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

(9) sistema (1) funksional uchun Eyler tenglamalar sistemasining *kanonik* yoki *gamiltonian formasi* deb ataladi. Bu sistemada $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ o'zgaruvchilar *kanonik o'zgaruvchilar* deyiladi. Ma'lumki, oddiy differensial tenglamalar sistemasining birinchi integrali deb o'sha sistemaning har bir egri chizig'i bo'ylab doimiy qiymatni saqlovchi funksiyaga aytiladi. Berilgan sifliq chiziq oddiy differensial tenglamalar sistemasining birinchi integrali bo'lishi uchun bu funksiyaning to'la hosilasi oddiy differensial tenglamalar sistemasiga ko'ra, aynan nolga teng bo'lishi zarur va yetarli. Ayrim xususiy hollarda (10) tenglamalar sistemasining birinchi integralini ko'rsatish mumkin. bundan demak, (3) sistemaning ham birinchi integralini ko'rsatish mumkin.

Aytaylik, $F = F(x, p, t)$ integrant x o'zgaruvchiga oshkor holda bog'liq bo'lmasin. U holda Gamilton funksiyasi ham x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmaydi. Demak, $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ ekanligidan,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} H_{p_i} \frac{dp_i}{dx} - \sum_{i=1}^{n} H_{x_i} \frac{dx_i}{dx} \tag{10}$$

bo'ladi. (9) sistemadan H_{p_i} va H_{x_i} hosilalar uchun yozilgan ifodalarni (10) munosabatga olib borib qo'ysak, $\frac{dH}{dt} = 0$ tenglikka ega bo'lamiz. Demak, har bir ekstremalda H funksiya o'zgarmas ekan. Shunday qilib,

agar integrant oshkor holda x erkin o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmasa, u holda Gamilton funksiyasi Eyler tenglamalar sistemasining birinchi integrali bo'ladi.

1-izoh. 1. *(5) shart* $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$ *funksional uchun* $[a,b]$ *kesmada* $F_{y'y'} \neq 0$ *shartni beradi.*

2. *Umuman holda* $\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$ *tenglik o'rinli, bu yerda tenglikning chap tomonida (9) sistemaga ko'ra, Gamilton funksiyasining to'la hosilasi turibdi.*

Endi quyidagicha savol qo'yamiz: x erkin o'zgaruvchiga oshkor holda bog'liq bo'lmagan $\Phi(p, H)$ funksiya qanday shartlar ostida (9) sistemaning birinchi integrali bo'ladi? (9) sistemaga ko'ra, $\Phi(p, H)$ funksiyaning x bo'yicha to'la hosilasini hisoblaymiz:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \left(\Phi_{p_i} \frac{dp_i}{dx} + \Phi_{H} \frac{dH}{dx} \right) = \sum_{i=1}^{n} (\Phi_{p_i} H_{x_i} - \Phi_H H_{p_i})$$

Quyidagi ifoda

$$[\psi, H] = \sum_{i=1}^{n} (\Phi_{p_i} H_{x_i} - \Phi_{x_i} H_{p_i})$$

ψ va H funksiyalarning *Puasson qavsi* deyiladi. Shunday qilib, quyidagi

$$\frac{d\Phi}{dx} = [\Phi, H]$$

tenglikka ega bo'ldik. Agar na faqat H funksiya, Φ funksiya ham x ga oshkor holda bog'liq bo'lsa, u holda quyidagi

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + [\Phi, H].$$

formula o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, quyidagi tasdiqni isbot qildik.

1-teorema. *Agar φ differensiallanuvchi funksiya (9) sistemaning birinchi integrali bo'ladi shu holda va faqat shu holdaki, qachonki, $[a,a]$ da bo'lsa, ya'ni Puasson qavsi aynan nolga teng bo'lsa.*

Quyidagi funksionallar uchun Eyler tenglamasining kanonik sistemasini tuzing:

149. $J=\int xy\sqrt{y'}dx$. **150.** $J=\int xyy'dx$. **151.** $J=\int x\sqrt{x^2-y^2}\sqrt{1+y'^2}dx$.

152. $J=\int_0^1\left(y_1'^2+y_2'^2-y_1y_2\right)dx$. **153.** $J=\int\left(y'^2+2y_1-y_2y'\right)dx$.

154. $J=\int\left(2xy_1-y_1'^2+\frac{y_2'}{3}\right)dx$.

4-§. Gamilton-Yakobi tenglamasi.

t,x parametrlarga bog'liq bo'lgan

$$J_{t,x}[x(\cdot)]=\int_t^{\cdot}L(s,x(s),x'(s))ds,\quad x(t)=x,\quad x(\cdot)=x(\cdot)$$

variatsion hisob masalasini qaraymiz. $\tilde{x}(s,t,x),s\in[a,t]$, orqali $J_{t,x}[x(\cdot)]$ funksionalga minimum beruvchi funksiyani, $S(t,x)$ – orqali esa funksional minimumini o'zini belgilaymiz. Unda funksional minimumi

$$S(t,x)=\int_a^{t-\Delta t}L(s,\tilde{x}(s,t,x),\tilde{x}'(s,t,x))ds+\int_{t-\Delta t}^{t}L(s,\tilde{x}(s,t,x),\tilde{x}'(s,t,x))ds+$$

$$+\int_{t-\Delta t}^{t}L(s,\tilde{x}(s,t,x),\tilde{x}'(s,t,x))ds=S(t-\Delta t,\tilde{x}(t,t-\Delta t,x))+$$

$$+\int_{t-\Delta t}^{t}L(s,\tilde{x}(s,t,x),\tilde{x}'(s,t,x))ds=S(t-\Delta t,\tilde{x}(t,t-\Delta t,x))+$$

$$+L(t,\tilde{x}(t,t,x),\tilde{x}'(t,t,x))\Delta t+o(|\Delta t|).$$

ko'rinishni oladi. Ikkala tomonini Δt ga bo'lib, $\Delta t\to 0$ intilganda limitga o'tsak, natijada

$$\frac{dS(t,x)}{dt}=L(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t)).\qquad(11)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

$$\frac{dS(t,x)}{dt}=\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt},$$

tenglikni hisobga olib. (11) tenglamani quyidagi

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}-L(t,x,x_1)+\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\cdot x_1=0,$$

ko'rinishda yozish mumkin. Agar x,p kanonik o'zgaruvchilarga o'tsak, u holda (11) tenglama

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}+H\left(t,x,\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}\right)=0,$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu xususiy hosilali tenglama *Gamilton – Yakobi tenglamasi* deyiladi. Eylerning kanonik tenglamasi – bu Gamilton – Yakobi tenglamasining *xarakteristik* tenglamasidir.

Endi Gamilton – Yakobi tenglamasining yechimi bilan Eyler tenglamalar sistemasining 1-integrallari orasidagi o'zaro bog'liqlikni ko'rib o'tamiz.

1-teorema (Yakobi). *Aytaylik, $S=S(t,x,\alpha)\in C^2[t_0,t_1]$ – Gamilton – Yakobi tenglamasining to'la integrali va yechimi $\frac{\partial S(t,x,\alpha)}{\partial\alpha\partial x}\neq 0$ bo'lsin.*

U holda

$$p(t,\alpha,\beta)=\frac{\partial S(t,x(t),\alpha,\beta)}{\partial x}$$

funksiya bilan

$$\frac{\partial S(t,x,\alpha)}{\partial \alpha}=\beta$$

tenglamadan aniqlanuvchi $\alpha(t,x,\beta)\in C^1[t_0,t_1]$ *funksiya Eyler tenglamasining kanonik sistemasini umumiy yechimini tashkil qiladi.*

Isboti. Ilng avval $\frac{\partial S(t,x,\alpha)}{\partial \alpha}=\beta$ kanonik sistemaning 1-integrali ekanligini ko'rsatamiz. ya'ni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S(t,x,\alpha)}{\partial \alpha}\right)=0$$

tenglik o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial S(t,x,\alpha)}{\partial \alpha}=\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial t\partial \alpha}+\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial x\partial \alpha}\cdot\frac{dx}{dt}. \qquad (12)$$

tenglikni yozib olamiz. Endi

$$\frac{\partial S(t,x,\alpha)}{\partial t}+H\left(t,x,\frac{\partial S(t,x,\alpha)}{\partial x}\right)=0. \qquad (13)$$

tenglikni α parametr bo'yicha differensiallaymiz. Natijada.

$$\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial t\partial \alpha}=-\frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial x\partial \alpha}. \qquad (14)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Endi bu tenglamani (12) tenglikka qo'yib. Eyler tenglamasining kanonik sistemasidan foydalanib.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p}=\dfrac{dx}{dt},\\ \dfrac{\partial H}{\partial x}=-\dfrac{dp}{dt},\end{cases} \qquad (15)$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. U holda (12) tenglikdan

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S(t,x,\alpha)}{\partial \alpha}=\left(-\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{dx}{dt}\right)\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial x\partial \alpha}=0,$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Endi $p(t,\alpha,\beta)$ va $x(x,t,\alpha_1)$ funksiyalar (15) kanonik tenglamalar sistemasini qanoatlantirishini tekshiramiz. $x(x,t,\alpha_1)$ funksiya ta'rifidan va (14) tenglikdan

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\dfrac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial \alpha\partial t}}{\dfrac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial \alpha\partial x}}=\frac{\partial H}{\partial p},$$

tenglik kelib chiqadi. Bu esa (15) kanonik sistemaning 1-tenglamasini ifodalaydi. (15) kanonik sistemaning 2-tenglamasini keltirib chiqarish uchun (13) tenglikni x bo'yicha differensiallab, quyidagi

$$\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial x\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial x^2}=0,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Mos ravishda $p(t,\alpha,\beta)$ funksiya ta'rifidan va (15) tenglamalar sistemasidan

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 S(t,x,\alpha)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial p},$$

tenglikni olamiz. Oxirgi ikki tenglikdan (15) kanonik sistemaning 2-tenglamasini keltirib chiqaramiz. Teorema isbot bo'ldi.

Agar $J[x_1(\cdot),x_2(\cdot),\ldots,x_n(\cdot)]$ funksional n ta vektor-funksiyaga bog'liq bo'lsa, u holda 1- teoremaga o'xshash quyidagi 2-teorema o'rinli bo'ladi.

2- teorema (Yakobi). *Aytaylik, S – Gamilton – Yakobi tenglamasining to'la integrali bo'lsin. Agar quyidagi shartlar bajarilsa:*

a) S funksiya a_k, $k=\overline{1,n}$ parametrlar bo'yicha differensiallanuvchi.

b) $\frac{\partial S}{\partial a_k}$, $\frac{\partial S}{\partial x_i}$, $k, i=\overline{1,n}$ xususiy hosilalar ham ko'rsatmalarda bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi.

c) agar

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial a_k \partial x_i}\right|_{\substack{k=1,n \\ i=1,n}} \neq 0,$$

bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = b_k, \quad \frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i, \quad k, i=\overline{1,n},$$

tengliklar, bu yerda b_k - har ixtiyoriy o'zgarmaslar.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = \dfrac{dx_k}{dt}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_k} = -\dfrac{dp_k}{dt}, \end{cases} \quad k=\overline{1,n}.$$

tenglamalar kanonik sistemasining $2n$ ta o'zgaruvchisiga bog'liq bo'lgan yechimini beradi.

Kanonik sistemaning birinchi integrallari. Biror bir differensial tenglamalar sistemasining birinchi integrali deb har biri integral egri chiziq bo'lib, o'zgarmas qiymatni saqlovchi funksiyalarga aytilishini eslatib o'tamiz. Ma'lumki, n funksiyaga bog'liq bo'lgan

$$\int_a^b F(x, y_i, y_i')dx.$$

funksional uchun

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0, \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Eyler tenglamasi ikkinchi tartibli n ta tenglamalar sistemasini tashkil qiladi. Bunday sistemani turli usullar bilan birinchi tartibli $2n$ ta differensial tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin, masalan, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ larni n ta yangi o'zgaruvchilar deb,

$$\begin{cases} F_{y_i} - \dfrac{d}{dx}F_{y_i'} = 0, \\ \dfrac{dy_i}{dx} = y_i', \end{cases} \quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{16}$$

tenglamalar sistemasini qarash mumkin. bu yerda $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'$ lar noma'lum funksiyalar, x esa erkin o'zgaruvchi. Endi biz (9) kanonik tenglamalar sistemasi (binobarin, unga ekvivalent bo'lgan (16) tenglama) qanday birinchi integrallarga ega bo'lishi mumkinligini tahlil qilamiz.

Avvalo, funksionalni aniqlovchi F funksiyani x ga oshkor holda bog'liq bo'lmagan holni qaraymiz. $F(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$. U holda

$$H = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}$$

funksiya ham x ni oshkor holda o'z ichiga olmaydi, binobarin,

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}.$$

bo'ladi. Eylerning (9) kanonik tenglamasidan foydalanib,

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dp_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx} = 0,$$

ifodaga ega bo'lamiz, bundan har bir ekstremal bo'ylab,

$$\frac{dH}{dx} = 0 \quad \text{yoki} \quad H = const$$

tenglikka ega bo'lamiz. Agar H funksiya ham x ga oshkor holda bog'liq bo'lsa, u holda

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, $H = const$ Eyler kanonik tenglamalar sistemasining birinchi integrali bo'ladi, ya'ni $H(y, F)$ funksiya Eyler kanonik tenglamalar sistemasining birinchi integrali bo'ladi.

Endi qandaydir

$$\Phi(x, y_1, \ldots, y_n, F_1, \ldots, F_n)$$

ko'rinishdagi funksiyani qaraylik va qanday shartlar ostida bu funksiya Eyler kanonik tenglamalar sistemasining birinchi integrali bo'lishligini aniqlaylik. Bunda F funksiyani (integrant) x ga oshkor holda bog'liq emas deb faraz qilmay, umumiy holni qaraymiz. (9) sistemaning har bir ekstremali bo'ylab

$$\frac{d\Phi}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} - \frac{\partial\Phi}{\partial F_i}\frac{dF_i}{dx}\right) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial F_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial F_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\right)$$

ifodaga egamiz. Bizga ma'lumki,

$$\frac{d\Phi}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial F_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial F_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\right),$$

ifoda Φ, H funksiyalarning Puasson qavsi deb ataladi. Demak, biz quyidagi $\frac{d\Phi}{dx} = [\Phi, H]$ formulani oldik. Shunday qilib, $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n, F_1, \ldots, F_n)$ funksiya (9) Eyler kanonik tenglamalar sistemasining birinchi integrali

bo'lishi uchun Puasson qavsini nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekanligiga ega bo'ldik.

Agar H faqat H funksiya, Φ funksiya ham x ga oshkor holda bog'liq bo'lishi mumkin, u holda

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{dx} + [\Phi, H].$$

tenglik to'g'ri ekanligini tekshirib ko'rish qiyin emas.

4-misol. Quyidagi

$$J[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2}\left(2y_1y_2 - 2y_1^2 - y_2^2 + x^2\right)dx$$

funksional uchun Eyler tenglamasining kanonik sistemasi tuzilsin.

Yechish. Bizning holda

$$F = F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_2^2 - x^2.$$

Endi $y_1 = p_1$, $F_1 = p_2$ deb olamiz. U holda $p_1' = 2y_2 - 4y_1$, $p_2' = -2p_2$ bo'ladi. Bu yerda quyidagi determinant

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'} & F_{y_2'} \\ F_{y_1'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

bo'ladi. Olingan munosabatlarni y_1', y_2' hosilalarga nisbatan yechib,

$$y_1' = \frac{p_2}{2} + y_1, \quad y_2' = -\frac{p_2}{2}$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Mazkur funksionalning gamiltonianini topamiz:

$$H = \left(-F + y_1'F_{y_1'} + y_2'F_{y_2'}\right)\Big|_{\substack{y_1' = \frac{p_2}{2} + y_1 \\ y_2' = -\frac{p_2}{2}}} = \left(-2y_1y_2 + 2y_1^2 + y_2^2 - x^2 + y_1'p_1 + y_2'p_2\right)\Big|_{\substack{y_1' = \frac{p_2}{2} + y_1 \\ y_2' = -\frac{p_2}{2}}} = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4} - x^2.$$

bo'ladi. (10) munosabatdan foydalanib,

$$\begin{cases} \frac{dh}{dx} = \frac{p_1}{2} & \frac{dh_1}{dx} = p_1 \\ \frac{dp_1}{dx} = -h_1 + \varepsilon h_1 & \frac{dx}{dx} = 1 \end{cases}$$

ko'rinishdagi Eyler kanonik tenglamalar sistemasini olamiz. Bu yerda $x, h(x), h_1(x), p_1(x), p_1(x)$ lar x ning noma'lum funksiyalari bo'ladi.

5-misol. Quyidagi

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

funksional uchun Eyler tenglamasining kanonik sistemasi tuzilsin.

Yechish. Bizning holda

$$F = F(x, y, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(x, y)$$

$F_p = p(x)$, $F_y = -V_y(x)$ xususiy hosilalarni topamiz. U holda $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = -V_y(x)$ deb olamiz. Bu munosabat $y(x), p(x)$ noma'lum funksiyalarning $V(x, y)$ hosilalarini o'z ichiga olmaydi. Shuning uchun $y(x), p(x)$ funksiyalarni x, y o'zgaruvchilar orqali ifodalab bo'lmaydi. Binobarin, bu funksional uchun gamiltonianni tuzib bo'lmaydi. Bu misol uchun (5) shart bajarilmaydi:

$$\begin{vmatrix} F_{pp} & F_{py} \\ F_{yp} & F_{yy} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \neq 0 \\ p \neq 0 \end{vmatrix} \quad 0.$$

6-misol. Quyidagi

$$J[y] = \int_a^b y\,dx$$

funksional uchun Eyler tenglamasining kanonik sistemasi tuzilsin.

Yechish. Bizning holda

$$F = F(x, y, p) = y, \quad p = y'$$

Bu yerda $F_y = 1 \neq 0$ bo'ladi. $p = y'$ deb olamiz. Bu yerdan quyidagi

$$y = -\sqrt{\frac{p}{3\varepsilon}}, \quad x = -\sqrt{\frac{p}{3\varepsilon}}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Mazkur funksional ikkita gamiltoniangа ega:

$$H_1 = \left(-F + yF_y\right)_{y=-\sqrt{\frac{p}{3\varepsilon}}} = \left(2\varepsilon y^3\right)_{y=-\sqrt{\frac{p}{3\varepsilon}}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{p^3}{\varepsilon}},$$

$$H_2 = \left(-F + yF_y\right)_{y=\sqrt{\frac{p}{3\varepsilon}}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{p^3}{\varepsilon}}.$$

Bularga mos ravishda biz Eylerning ikkita kanonik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial p} = -\sqrt{\frac{p}{3\varepsilon}}, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{p}{3\varepsilon}}, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{p^3}{3\varepsilon}} \end{cases}$$

7-misol. Energiyaning saqlanish qonuni.

$$T = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

funksiya

$$\int_a^b (T - U)\,dt, \qquad T = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

bu yerda m_i massali material nuqtalar sistemasining kinetik energiyasi, U – potensial energiya, funksional uchun H quyidagi ko'rinishga

$$H = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - (T - U) = T + U.$$

ega bo'ladi, bu esa sistemaning to'la energiyasidir. Statsionar ta'sir prinsipini qo'llaymiz. Agar U potensial energiya t ga bog'liq bo'lmasa, ya'ni sistema konservativ bo'lsa, u holda Eyler tenglamasi $\int_a^b (T - U)\,dt$ funksionali uchun $H = T + U = C$, birinchi integrallarga ega bo'ladi. Demak, konservativ sistemaning to'la energiyasi harakat davo-

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{p}{2} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{r}{2} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} & -1 & \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} & 0 \end{array}\right| = 0$$

ko'rinishdagi Eyler kanonik tenglamalar sistemasini olamiz. Bu yerda $z = z(x, y)$, $p = p(x, y)$, $r = r(x, y)$ lar z ning noma'lum funksiyalari bo'ladi.

5-misol. Quyidagi

$$J[z] = \int_D \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx\, dy$$

funksional uchun Eyler tenglamasining kanonik sistemasi tuzilsin.

Yechish. Bizning holda

$$F = F(x, y, z, p, q) = p^2$$

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalarni topamiz. U holda $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$ deb olamiz. Bu munosabat $z = z(x, y)$ noma'lum funksiyalarning $p(x, y)$, $q(x, y)$ hosilalarini o'z ichiga olmaydi, shuning uchun, $p(x, y)$, $q(x, y)$ hosilalarni x, y, z o'zgaruvchilar orqali ifodalab bo'lmaydi. Binobarin, bu funksional uchun gamiltonianni tuzib bo'lmaydi. Bu misol uchun (5) shart bajarilmaydi:

$$\left|\begin{array}{cc} F_{pp} & F_{pq} \\ F_{qp} & F_{qq} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right| = 0$$

6-misol. Quyidagi

$$J[z] = \int_D z\, dx\, dy$$

funksional uchun Eyler tenglamasining kanonik sistemasi tuzilsin.

Yechish. Bizning holda

$$F = F(x, y, z, p, q) = z$$

Bu yerda $F_z = 1 \neq 0$ bo'ladi. $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ deb olamiz. Bu yerdan quyidagi

$$r = -\sqrt{\frac{p}{3x}},\quad s = -\sqrt{\frac{p}{3x}}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Mazkur funksional ikkita gamiltonianga ega:

$$H_1 = [-r + sF_z]_{r=-\sqrt{\frac{p}{3x}}} = \left[2sz\right]_{r=-\sqrt{\frac{p}{3x}}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{p^3}{x}}$$

$$H_2 = [-r + sF_z]_{r=\sqrt{\frac{p}{3x}}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{p^3}{x}}$$

Bularga mos ravishda biz Eylerning ikkita kanonik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial p} = -\sqrt{\frac{p}{3x}}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial H_1}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\frac{p}{3x}}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial H_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

7-misol. Energiyaning saqlanish qonuni.

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i g z_i = C$$

funksiya

$$\int_D (r - r_0)\, dx\, dy\, dz \qquad r = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

bu yerda m_i massali material nuqtalar sistemasining kinetik energiyasi, U – potensial energiya, funksional uchun H quyidagi ko'rinishga

$$H = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) - (r - U) = r + U$$

ega bo'ladi, bu esa sistemaning to'la energiyasidir. Stasionar ta'sir prinsipini qo'llaymiz. Agar U potensial energiya t ga bog'liq bo'lmasa, ya'ni sistema konservativ bo'lsa, u holda Eyler tenglamasi $\int_D (r - U)\, dt$ funksional uchun $H = C$, $T + U = C$, birinchi integrallarga ega bo'ladi. Demak, konservativ sistemaning to'la energiyasi harakat davo-

midn o'zgarmas bo'lib qoladi.

(9) kanonik sistemaning integrallash quyidagi

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[H\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\frac{\partial S}{\partial \alpha_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial \alpha_n}\right)\right]=0 \tag{17}$$

bu yerda

$$H\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\frac{\partial S}{\partial \alpha_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial \alpha_n}\right)$$

xususiy hosilali differensial tenglamani integrallash bilan teng kuchli. Bu yerda (17) ifoda *Gamilton – Yakobi tenglamasi* deb ataladi.

Agar uning $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ bir parametrli yechimlar oilasi ma'lum bo'lsa, u holda (90) tenglamalar sistemasining $\frac{\partial S}{\partial \alpha}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\beta$ birinchi integrali ma'lum bo'ladi, bu yerda β- ixtiyoriy o'zgarmas. Haqiqatan,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right]=\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial \alpha}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial \alpha}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}=\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial \alpha}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial \alpha}\frac{\partial H}{\partial \beta_i} \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}H\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\frac{\partial S}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)=H'_{\beta_1}\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\frac{\partial S}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial \alpha}$$

ayniyatni α bo'yicha differensiallab, quyidagi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial \alpha}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial \beta_i}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial \alpha} \tag{19}$$

ifodani olamiz. Endi (19) ifodani (18) ga olib borib qo'yib, (18) tenglikning o'ng tomonini aynan nolga teng bo'lishiga erishamiz. Demak,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right]=0$$

bundan

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\beta$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Binobarin, agar Gamilton – Yakobi tenglamasining to'la integrali

$$S=S(x,x_1,x_2,\ldots,x_n,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

ma'lum bo'lsa, u holda (9) tenglamalar sistemasining quyidagi n ta

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i,\quad i=1,2,\ldots,n \tag{20}$$

birinchi integrallari ma'lum bo'ladi.

Agar (20) sistemaning yakobiani noldan farqli

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial \alpha_j}\right|\neq 0$$

bo'lsa, u holda (20) sistema x_i ni qolgan argumentlarning funksiyasi sifatida aniqlaydi:

$$x_i=\varphi_i(x,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n),\quad i=1,2,\ldots,n \tag{21}$$

Bu bilan biz ekstremallarning $2n$ ta parametrik sistemasiga ega bo'ldik. Bu yerda (21) ifodani Eyler tenglamalar sistemasining umumiy yechimi,

$$y_i(x,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\text{va } p_i=\frac{\partial L(x,y,y')}{\partial y_i},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

funksiyalar esa (9) tenglamalar sistemasining umumiy yechimi ekanligini isbot qilish mumkin.

8-misol. Egri chiziq uzunligining elementi

$$ds^2=[\varphi_1(x)+\varphi_2(y)]^k(dx^2+dy^2)$$

ko'rinishda bo'lgan sirtda geodezik chiziqning tenglamasi topilsin, ya'ni

$$S=\int_a^b\sqrt{[\varphi_1(x)+\varphi_2(y)]^k(1+y'^2)}dx$$

funksionalning ekstremali topilsin.

Yechish.

$$\dots \frac{\sqrt{[\varphi_1(x)]^2+[\varphi_2(x)]^2}}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]}\sqrt{1+y^2}\,dx,$$

$$\dots \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}=\dots \quad \dots \quad \varphi(x)=\varphi(x),$$

ekanligidan, Gamilton-Yakobi tenglamasi quyidagi

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2=\varphi(x_1)-\varphi(x_2)$$

yoki

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2-\varphi(x_1)=\varphi(x_2)-\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bunday turdagi tenglamalar (o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar) uchun

$$\varphi\left(x_1,\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)=\varphi_1\left(x_2,\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)$$

birinchi integrallar oson topiladi. Endi

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2-\varphi(x_1)=\alpha \quad \dots \quad \varphi(x_2)+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2=\alpha$$

yoki

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=\sqrt{\varphi(x_1)+\alpha} \quad \text{va} \quad \frac{\partial v}{\partial x_2}=\sqrt{\varphi(x_2)-\alpha}$$

deb olib, ulardan

$$v=\int\sqrt{\varphi(x_1)+\alpha}\,dx_1+\int\sqrt{\varphi(x_2)-\alpha}\,dx_2$$

ifodani topamiz, binobarin, mazkur holda $\frac{\partial v}{\partial \alpha}=\beta$ geodezik chiziq tenglamasi quyidagi ko'rinishga

$$\int\frac{dx_1}{\sqrt{\varphi(x_1)+\alpha}}+\int\frac{dx_2}{\sqrt{\varphi(x_2)-\alpha}}=\beta$$

ega bo'ladi.

9-misol. Quyidagi

$$J[y(x)]=\int\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

funksional uchun Eylerning kanonik tenglamalar sistemasi tuzilsin.

Yechish. Bizning holda

$$F=F(x,y,y')=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}, \quad F_{y'}=p=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y'=\frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}, \quad y'=\frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}},$$

$$H=\left(-F+yF_{y'}\right)_{y'=\frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}}=-\sqrt{x^2+y^2-p^2}.$$

Bu yerdan izlanayotgan sistema

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}},\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}},\end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. (6) tenglikdan

$$dt=\left(-F+\sum_{i=1}^{n}y'F_{y'}\right)dx+\left(\sum_{i=1}^{n}F_{y'}dy\right)_{x_1}^{x_2}=-Hdx+\left(\sum_{i=1}^{n}pdy\right)_{x_1}^{x_2}$$

ifodani yozishimiz mumkin. U holda ekstremum chiziqning oxirlarida ekstremum beruvchi quyidagi

$$\left(F-\sum_{i=1}^{n}y'F_{y'}\right)dx+\sum_{i=1}^{n}F_{y'}dy=0$$

ko'rinishdagi transversallik sharti

$$-Hdx+\sum_{i=1}^{n}pdy=0$$

ko'rinishni oladi.

2-izoh. *Gamilton-Yakobi tenglamasiga boshqa mulohazalardan ham kelish mumkin.*

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

funksional uchun markazi (x_0, y_0) *nuqtada bo'lgan ekstremallarning markaziy maydonini qaraymiz.* $J[y(x)]$ *funksional ekstremallar maydonida ikkinchi chegaraviy* (x_1, y_1) *nuqtaning koordinatasi bo'lgan* $v(x, y)$ *funksiyaga aylanadi. Oldin ko'rsatilganidek,*

$$\frac{\partial v}{\partial x} = H(x, y, p) = \frac{\partial v}{\partial y} = p$$

tenglamalardan p *ni yo'qotsak,*

$$\frac{\partial v}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

bo'ladi. Demak, $v(x, y)$ *funksiya Gamilton-Yakobi tenglamasining yechimi bo'ladi. Bu mulohazalar shunga o'xshash quyidagi*

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x))dx$$

ko'rinishdagi funksionallar uchun ham o'rinli.

10-misol. Gamilton – Yakobi tenglamasining yechimi yordamida quyidagi

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x^2 - y^2}\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

funksfonalning ekstremumi topilsin.

Yechish. Gamilton - Yakobi tenglamasini olish uchun mazkur funksionalning gamiltonianini topamiz: $H = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}$.

U holda Gamilton-Yakobi tenglamasi

$$\frac{\partial W}{\partial x} - \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2} = 0.$$

yoki

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2. \qquad (22)$$

ko'rinishni oladi. Oxirgi tenglamani qayta quyidagi

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - x^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - y^2 = 0.$$

ko'rinishda yozamiz va o'zgaruvchilarni ajratish usulini qo'llaymiz.

Ravshanki, agar

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - x^2 = -C, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - y^2 = C,$$

bo'lishligini talab qilsak, u holda (22) tenglama qanoatlantiriladi, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas. Bu yerdan

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \sqrt{x^2 - C}, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) = \sqrt{y^2 + C},$$

ifodalarni olamiz. (1) tenglamaning to'la integrali

$$W = \int \sqrt{x^2 - C}dx + \int \sqrt{y^2 + C}dy = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - C} - \frac{C}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - C}\right| +$$

$$+ y\sqrt{y^2 + C} + \frac{C}{2}\ln\left|y + \sqrt{y^2 + C}\right| + C_0.$$

bu yerda C va C_0 – ixtiyoriy o'zgarmaslar. Mazkur funksional uchun Eyler tenglamasining umumiy yechimini $\frac{\partial W}{\partial C} = \left(\frac{\overline{A}}{2}\right)$, munosabatdan topamiz, bu yerda $\overline{A}$ – ixtiyoriy o'zgarmas. U holda quyidagiga

$$-\frac{x}{4\sqrt{x^2 - C}} - \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - C}\right| + \frac{C}{4}\frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - C})\sqrt{x^2 - C}} +$$

$$+\frac{1}{4}\frac{y}{\sqrt{y^2 + C}} + \frac{1}{2}\ln\left|y + \sqrt{y^2 + C}\right| + \frac{C}{4}\frac{1}{(y + \sqrt{y^2 - C})\sqrt{y^2 - C}} = \frac{\overline{A}}{2},$$

ifodaga ega bo'lamiz. Murakkab bo'lmagan soddalashtirishlardan so'ng

$$\ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2-C^2}}{x+\sqrt{x^2-C^2}}\right| = \bar{A}, \quad \text{yoki} \quad \frac{y+\sqrt{y^2-C^2}}{x+\sqrt{x^2-C^2}} = A, \qquad (A = \pm e^{\bar{A}}).$$

tenglikka ega bo'lamiz. bu yerdan ixtiyoriy

$$\ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2-C^2}}{x+\sqrt{x^2-C^2}}\right| = \bar{A}, \quad x^2 - \frac{1-A^2}{A}xy + y^2 = C^2\left(\frac{A^2+1}{2A}\right).$$

ifodani olamiz. Bu – *giperbola* oilasini ifodalaydi.

Quyidagi funksionallarning ekstremallari topilsin.

155. $J = \int_{x_0}^{x_1} xy\sqrt{y'}\,dx$. **156.** $J = \int_0^1 xy'\,dx$, $y(1) = 0$, $y(e) = 1$.

157. $J = \int_{x_0}^{x_1} G(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

158. Agar intervalning chetlaridagi qiymatlari berilmagan bo'lsa,

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y'^2 + xy' + y + 1\right)dx$$

funksionalning minimumini topilsin.

159. $J = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$, $(y > 0)$. funsionalning koordinata boshidan o'tuvchi $p(x,y)$ maydon funksiyasi va ekstremallar maydonining o'zi topilsin.

160. $M(x_1, y_1)$, bu yerda $x_1 > 0$, $y_1 > 0$. nuqta bilan $x = 0$ to'g'ri chiziqni tutashtiruvchi chiziqlar ichidan shunday chiziqni toping-ki, qaysiki u

$$J = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx, \quad (y > 0).$$

funksionalga minimum bersin.

Quyidagi

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx.$$

funksionalga ega bo'laylik va uning $y = \varphi(x, C)$ ekstremallar maydoni berilgan bo'lsin. U holda maydonning har bir nuqtasida o'sha nuqtalardan o'tuvchi maydon transversalining yo'nalishi ma'lum. Barcha maydon transversallari quyidagi

$$F'_{y'}[x, \varphi(x,C), \varphi'_x(x,C)]\frac{dy}{dx} = H[x, \varphi(x,C), \varphi'_x(x,C)].$$

birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimlari sifatida olinadi, bu yerda maydon ekstremalini aniqlovchi C parametr o'rniga uning maydon nuqtalarining koordinatalari orqali ifodasini qo'yish kerak. Bu yerda H – gamiltonian.

11-misol. $y = Cx$ maydon ekstremallari uchun $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx$.

funksio-nalning transversali topilsin.

Yechish. Berilgan funksional uchun gamiltonianni topamiz.

$$F = y^2, \quad F'_{y'} = 2y', \quad (F'_{y'})' = 2 \neq 0),$$

ifodalarga egamiz. $p = F'_{y'}$ deb olib, $y' = \frac{p}{2}$ ni topamiz. U holda

$$H = \left(-y^2 + 2y' \cdot y'\right)_{y'=\frac{p}{2}} = \frac{p^2}{4}.$$

tenglikni olamiz. Endi quyidagi

$$F = y' \cdot \left[F_{y'}\right]_{y=Cx} = \frac{dy}{dx} \cdot (y)_{y=Cx} = C.$$

birinchi tartibli differensial tenglamani yechib, transversallarni olamiz. bu yerda C parameti o'rniga uning maydon nuqtalarining koordinatalari orqali $C = \frac{y}{x}$ ifodasini qo'yish kerak. Unda biz

$$(2y')_{y=Cx} \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y^2}{4}\right)_{y=Cx} \qquad \text{yoki} \qquad 2C \cdot \frac{dy}{dx} = C^2,$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. $C \neq 0$ ekanligidan $2\frac{dy}{dx} = C$, yoki $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, tenglamani olamiz. Bu yerdan, transversallar oilasi $y^2 = Cx$ – ga ega bo'lamiz_ bu parabola.

161. $y = Cx$ maydon ekstremallari uchun $J[y] = \int_0^1 F(x,y')dx$ funksionalning transversali topilsin.

162. $y = x + t$ maydon ekstremallari uchun $J[y] = \int_0^1 (xy' - 2y')dx$ funksionalning transversali topilsin.

163. $y = x - \frac{x^2}{C}$ maydon ekstremallari uchun $J[y] = \int_0^1 \sqrt{y(1-y')}dx$ funksionalning transversali topilsin.

$$J[y] = \int_0^1 F(x,y,y')dx.$$

funksional uchun

$$\frac{\partial W}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial W}{\partial y}\right) = 0,$$

Gamilton - Yakobi tenglamasini bilib turib, integral ostidagi $F(x,y,y')$ funksiyani tiklash mumkin. Oxirgi tenglik quyidagi birinchi tartibli

$$F - z \cdot F_z = -H(x,y,F_z), \tag{23}$$

differensial tenglamaning yechimi bo'ladi, bu yerda $H(x,y,p)$ – izlanayotgan funksionalning gamiltoniani, $F(x,y,z)$ – izlanayotgan funksiya (x va y lar parametr sifatida qaraladi). $F(x,y,z)$ funksiya topilgandan so'ng undagi z o'rniga y' hosilani olib borib qo'yish kerak.

3-izoh. (23) tenglama Klero tenglamasi bo'ladi. (23) tenglamaning umumiy yechimi bu holda integral ostidagi $F(x,y,y')$ funksiya y' ga nisbatan chiziqli bo'lganligi uchun tashlab yuborriladi, bunday holatda variatsion masala har doim ham yechimga ega bo'lavermaydi. Shuning uchun, Klero tenglamasining maxsus yechimi olinadi, qaysiki x izlanayotgan $F(x,y,z)$ funksiya bo'ladi.

12-misol. Gamilton - Yakobi tenglamasi $J[y] = \int_0^1 F(x,y,y')dx$ funksionalning ekstremumi haqidagi masalada

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2,$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $F(x,y,y')$ funksiya topilsin.

Yechish. Mazkur tenglamani $\frac{\partial W}{\partial x}$ ga nisbatan yechib,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2},$$

yoki

$$F - y \cdot \left(F_{y'}\right)_{x=x_0} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (II)_{x=x_0}$$

birinchi tartibli differensial tenglamani yechib, transversallarni olamiz. bu yerda C parametr o'rniga uning maydon nuqtalarining koordinatalari orqali $C = \frac{y}{x}$ ifodasini qo'yish kerak. Unda biz

$$\left(2y\right)_{x=x_0} \cdot \frac{dy}{dx} = \left[\frac{y^2}{+}\right]_{x=x_0} \qquad \text{yoki} \qquad 2x \cdot \frac{dy}{dx} = C^2.$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. $C \neq 0$ ekanligidan $2\frac{dy}{dx} = C$, yoki $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, tenglamani olamiz. Bu yerdan, transversallar oilasi $y^2 = Cx -$ ga ega bo'lamiz, bu parabola.

161. $y = Cx$ maydon ekstremallari uchun $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(y')dx$, funksionalning transversali topilsin.

162. $y = x + 1$ maydon ekstremallari uchun $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' - 2y')dx$, funksionalning transversali topilsin.

163. $y = x - \frac{x^2}{C}$ maydon ekstremallari uchun $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x(1-y')}dx$, funksionalning transversali topilsin.

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,$$

funksional uchun

$$\frac{\partial W}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial W}{\partial y}\right) = 0,$$

Gamilton - Yakobi tenglamasini bilib turib, integral ostidagi $F(x,y,y')$ funksiyani tiklash mumkin. Oxirgi tenglik quyidagi birinchi tartibli

$$F - z \cdot F_z = -H(x, y, F_z), \tag{23}$$

differensial tenglamaning yechimi bo'ladi. bu yerda $H(x,y,p)$ – izlanayotgan funksionalning gamiltoniani, $F(x,y,z)$ – izlanayotgan funksiya (x va y lar parametr sifatida qaraladi). $F(x,y,z)$ funksiya topilgandan so'ng undagi z o'rniga y hosilani olib borib qo'yish kerak.

3-izoh. (23) tenglama Klero tenglamasi bo'ladi. (23) tenglamaning umumiy yechimi bu holda integral ostidagi $F(x,y,y')$ funksiya y' ga nisbatan chiziqli bo'lganligi uchun tashlab yuboriladi, bunday holatda variatsion masala har doim ham yechimga ega bo'lavermaydi. Shuning uchun, Klero tenglamasining maxsus yechimi olinadi, ya'niki z izlanayotgan $F(x,y,z)$ funksiya bo'ladi.

12-misol. Gamilton - Yakobi tenglamasi $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ funksionalning ekstremumi haqidagi masalada

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2,$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $F(x,y,y')$ funksiya topilsin.

Yechish. Mazkur tenglamani $\frac{\partial W}{\partial x}$ ga nisbatan yechib,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2},$$

yoki

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2} = 0.$$

tenglikka ega bo'lamiz. Binobarin, gamiltonian quyidagi

$$H = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}$$

ko'rinishda bo'ladi. $F(x, y, z)$ funksiyani topish uchun (2) tenglama

$$F = z \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \qquad (24)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (24) tenglamani ikkala tomonini z bo'yicha differensiallab,

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial z} + z \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}}{\sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$$

tenglikka kelamiz. $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$ bo'lgan holini tashlab yuborib (u umumiy yechimni beradi),

$$z = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$$

tenglikni olamiz. Bu munosabatni $\frac{\partial F}{\partial z}$ hosilaga nisbatan yechib, quyidagi

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + z^2}}. \qquad (25)$$

ifodani topamiz. (25) ifodani (24) tenglikka qo'yib, $F(x, y, z)$ funksiyani

$$F = z \cdot \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + z^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - \frac{z^2(x^2 + y^2)}{1 + z^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + z^2},$$

ko'rinishdagi ifodasini topamiz. Shunday qilib, integral ostidagi funksiya

$$F = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + z^2},$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Quyidagi misollarda agar Gamilton – Yakobi tenglamasi ma'lum bo'lsa funksionallarni toping:

164. $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 1$, **165.** $4\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = x^3 y^2$,

166. $4xy\frac{\partial W}{\partial x} + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 0$, **167.** $\left(x\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2$.

168. $A(a, y_0)$ nuqta bilan $B(b, y_1)$ nuqtani tutashtiruvchi egri chiziqlar ichidan shundayini toping-ki, qaysiki

$$J = \int_a^b \frac{y\sqrt{1 + y'^2}}{y'}dx, \quad (y > 0).$$

funksionalga $y \geq 0, 1 - y^2 y'^2 \geq 0$, shartlar ostida ekstremal qiymat bersin.

Nazorat savollari

1. Ekstremal masalalar deganda nimani tushunasiz.
2. Variatsion hisobning asosiy masalasi va uning umumlashmalari to'g'risida nimani bilasiz.
3. Variatsion hisobning shartli ekstremum masalalari haqida gapirib bering.
4. Maydonlar nazariyasi va ekstremumning yetarli shartlari haqida gapirib bering.
5. Karrali integrallar uchun variatsion masalalar qanday qo'yiladi.
6. Mexanikaning variatsion prinsiplari haqida nimani bilasiz.
7. Uzilishli variatsion masala deganda nimani tushunasiz.
8. Eyler tenglamasini keltirib chiqaring.

XI BOB

UZILISHGA EGA BO'LGAN VARIATSION HISOB MASALALARI

1-§ Uzilishli masalalar

Quyidagi

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx. \tag{1}$$

funksionalni qaraymiz. Bizga ma'lumki, agarda $F_{y'}(x,y,y')$ hosila nolga aylana-masa, u holda (1) funksionalning $y=y(x)$ ekstremali ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi. Shuni takidlash lozimki, variatsion masalalar orasida faqat bo'lakli-silliq egri chiziqlardagina ekstremumga erishadigan variatsion masalalar ham uchraydi.

1.1. Birinchi va ikkinchi tur uzilishga ega bo'lgan variatsion masalalar. Jozz egri chiziqlar

$$y(a)=c,\quad y(b)=d. \tag{2}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi va shu bilan birga absissa bilan birga qandaydir $c\,(a<c<b)$, nuqtada sinishga ega bo'lishi mumkin deb hisoblab, (1) funksionalni ekstremumini topish masalasini qaraymiz. Bu sinish faqat $F_{y'}(x,y,y')=0$ bo'lgandagina bo'ladi. Ekstremal sinish nuqtalarda

$$\begin{aligned}&\left(F_{y'}\right)_{x=c-0}-\left(F_{y'}\right)_{x=c+0}=0\\&\left(x\cdot F_{y'}\right)_{x=c-0}-\left(x\cdot F_{y'}\right)_{x=c+0}=0.\end{aligned} \tag{3}$$

Veyershtrass-Erdmon shartini qanoatlantirishi kerak. (3) shart izlanayotgan ekstremalning uzluksizlik sharti bilan birgalikda sinish

nuqtalarining koordinatalarini topishga imkon beradi. Ekstremal $[a,c]$ va $[c,b]$ kesmalarning har birida Eyler tenglamasini qanoatlantirishi kerak, ya'ni ikkinchi tartibli differensial tenglamani qanoatlantirishi kerak. Bu ikki tenglamani yechish davomida to'rta ixtiyoriy o'zgarmaslar olinadi, umuman olganda ular, sinish nuqtalarda (2) chegaraviy va (3) Veyershtrass-Erdmon shartidan topiladi.

1-misol. Quyidagi

$$J[y]=\int_0^2\left(y'^2-y^2\right)dx.$$

funksionalni singan ekstremali (agar ular mavjud bo'lsa) topilsin.

Yechish. Sinish nuqtasida qanoatlantirilishi kerak bo'lgan (3) shartning birinchisini yozamiz:

$$\left(F_{y'}\right)_{x=c-0}=\left(F_{y'}\right)_{x=c+0},\quad (0<c<2),$$

mazkur holda u quyidagi

$$y'(c-0)=y'(c+0),$$

ko'rinishni oladi. Bu $x=c$ da $y'(x)$ hosila uzluksiz ekanligini anglatadi. Binobarin sinish nuqtasi yo'q. Bu esa $F_{y'y'}(x,y,y')\equiv 2$ ekanligidan ko'rinib turibdi. Shuning uchun, mazkur qaralayotgan masalada faqat silliq chiziqlardagina ekstremumga erishish mumkin.

2-misol. Quyidagi

$$J[y]=\int_0^2\left(y'^2-6y^2\right)dx.$$

funksionalni, $y(x)$ hosila $x=c$ absissaga javob beruvchi bitta uzulish nuqtasiga ega bo'lishi mumkinligiga yo'l qo'yib, singan ekstremali (agar ular mavjud bo'lsa) topilsin.

Yechish. Bu holda $F(x, y, y') = 12y - 12$ ifoda nolga aylanishi mumkin, shuning uchun bu funksionalning ekstremallari sinishga ega bo'lishi mumkin. Integral ostidagi ifoda faqat y ga bog'liq bo'lganligi sababli uning ekstremallari $y(x) = cx + c_1$ to'g'ri chiziqlar oilasi bo'ladi. Endi

$$y = mx + n, \quad (0 \le x < c), \qquad y = px + q, \quad (c < x \le 2).$$

deb olamiz. Chegaraviy shartlardan $n = 0, q = -2p$ tengliklarni topamiz, shuning uchun

$$y = mx, \quad y = p(x - 2), \tag{4}$$

bo'ladi. Ekstremallarning uzluksizlik sharti

$$mc = p(c - 2). \tag{5}$$

tenglikni beradi. Veyershtrass-Erdmon shartini yozib,

$$\begin{cases} F_{y'} = 4y' - 12, \\ F - y'F_{y'} = -3y'^2 + 6y', \end{cases}$$

shartlarga ega bo'lamiz. $y = mx$, $y' = p$ ekanligidan,

$$\begin{cases} 4m - 12m = 4p - 12p, \\ -3m^2 + 6m^2 = -3p^2 + 6p^2, \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} 4(p - m)(m^2 + mp + p^2 - 3) = 0, \\ (m^2 - p^2)(m^2 + p^2 - 2) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

(6) sistemadagi ikkinchi tenglama $m = p$ yoki $m = -p$ ni beradi yoki

$$m^2 + p^2 - 2 = 0.$$

tenglikni beradi.

$m = p$ yechim tashlab yuborilishi kerak, chunki unda ekstremal uzluksiz hosilaga ega bo'ladi. (5) shartdan esa, $m = 0$ ni olamiz. ya'ni ekstremal – Ox o'qining kesmasi bo'ladi.

Shunday qilib. (6) tenglamalar sistemasining yechimi quyidagi

$$\begin{cases} m = -p, \\ m^2 + p^2 - 2 = 3, \end{cases} \tag{7}$$

va

$$\begin{cases} m^2 + p^2 = 2, \\ m^2 + mp + p^2 = 3, \end{cases} \tag{8}$$

tenglamalar sistemasining yechimiga keltiriladi. (7) tenglamalar sistemasining yechimi $m = \sqrt{3}$, $p = -\sqrt{3}$ va $m = -\sqrt{3}$, $p = \sqrt{3}$ bo'ladi. (8) sistema $m = p$ yechimni beradi, u tashlab yuborilishi kerak. Demak, $m = -p$ va (5) uzluksizlik sharti $c = 1$ ni beradi. Binobarin, izlanayotgan ekstremallar:

$$y = \begin{cases} \sqrt{3}x, & 0 \le x < 1, \\ -\sqrt{3}(x - 2), & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

va

$$y = \begin{cases} -\sqrt{3}x, & 0 \le x < 1, \\ \sqrt{3}(x - 2), & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi.

169. $J[y] = \int_0^2 y^2(y' - 1)^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(2) = 1$ funksional uchun burchak nuqtali ekstremal topilsin.

170. $J[y] = \int_0^4 (y - 1)^2 (y' + 1)^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(4) = 2$ funksionalning minimumi

haqidagi masalada bitta burchak nuqtali yechim topilsin.

171. $J[y]=\int_0^{\cdot}(\quad)dx$, $y(0)=\quad$, $y(1)=\quad$ funksionalning ekstremumi masalasida burchak nuqtali yechim mavjudmi?

172. $J[y]=\int_0^{\cdot}(\quad)dx$, $y(0)=\quad$, $y(1)=\quad$ funksionalning ekstremumi masalasida burchak nuqtali yechim topilsin.

173. $J[y]=\int_0^{\cdot}(y'^2+2y)\,dx$ funksionalning minimumi haqidagi masalasining burchak nuqtali yechimi topilsin.

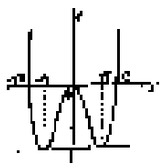
174. $J[y]=\int_0^{\cdot}\sin y\,dx$ funksionalning ekstremumi masalasida uzluksiz hamda burchak nuqtali yechim topilsin.

1-izoh. (3) Veyershtrass-Erdman sharti qanday geometrik xossalikka ega? (x,y) qo'zg'aluvchi figuratrisani quramiz, $F=F(x,y,y')$ egri chiziq, y' ning funksiyasi sifatida. U holda (3) shart parametrlarning burchak nuqtalariga javob beruvchi $x=c, y=c_1$ qiymatlarida figuratrisa esa $\lim_{y'\to+0}F(c,y)=\lim_{y'\to-0}F(c,y)$ abtsissali nuqtalarda umumiy urinmaga ega bo'lishligini anglatadi.

Bir vaqtning o'zida singan ekstremalni bo'lishligini yo'q qiluvchi $F_{y'y'}\neq 0$ sharnir olamiz. Haqiqatan, agar, masalan, $F_{y'y'}>0$ bo'lsa, figuratrisa qavariq bo'ladi, unga ikkita turli nuqtalardan o'tkazilgan urinmalar ustma-ust tushmasligi mumkin. Shuning uchun, bunday hollarda ekstremal sinish nuqtalariga ega bo'lmaydi. Endi yana

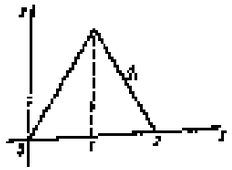
$$J[y]=\int_a^b(y'^2-6y^2)\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=0.$$

funksionalni singan ekstremallarini topish masalasini qaraylik. Ekstremallari to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Figuratrisa $F=y'^2-6y^2$ mazkur holda (x,y) nuqtalarga bog'liq bo'lmaydi. U abssissa bilan $y=\pm\sqrt{3}$ nuqtalarda umumiy urinmaga ega bo'ladi (32-rasm).



32-rasm

Shuning uchun, agar singan ekstremallar sifatida Ox o'qi bilan $\pm\frac{\pi}{3}$ burchak tashkil qiluvchi singan bo'lagi olinsa, u holda Veyershtrass-Erdmon sharti bajariladi. Bitta burchak nuqtali x_1 siniq ekstremalda funksional $J[y_1]=-18$ qiymatga ega bo'ladi (33-rasm).

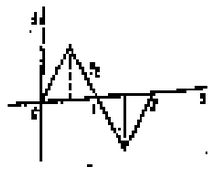


33-chizma

Shu qiymatga $J[y]$ funksional ikki burchak nuqtali x_2 siniq ekstremalda erishadi (34-rasm). Shu qiymatga $J[y]$ funksional uch burchak nuqtali x_3 siniq ekstremalda erishadi (35-rasm) va h.k.

Ikkinchi tur uzilishga ega bo'lgan variatsion masalalar. Ikkinchi tur uzulishga ega bo'lgan masalalar deb integranti uzulishli

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx \qquad (9)$$



34-rasm

funksionalni

$$y(a)=c,\quad y(b)=d, \qquad (10)$$

chegaraviy shartlar ostida ekstremumini topish masalasiga aytiladi, bunda (9) funksionalning integranti uzulishli funksiya deb faraz qilinadi.

haqidagi masalada bitta burchak nuqtali yechim topilsin.

171. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\dots$ funksionalning ekstremumi masalasida burchak nuqtali yechim mavjudmi?

172. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\dots$ funksionalning ekstremumi masalasida burchak nuqtali yechim topilsin.

173. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\dots dx$ funksionalning minimumi haqidagi masalasining burchak nuqtali yechim topilsin.

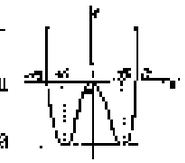
174. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\dots dx$ funksionalning ekstremumi masalasida uzluksiz hamda burchak nuqtali yechim topilsin.

1-izoh. *(3) Veyershtrass-Erdmon sharti qanoatlangan geometrik xarakterga yo'l qo'yadi: figuratrisani qarimiz. $Y=F(x,y,y')$ egri chiziq, y' ning funksiyasi sifatida. U holda (3) shart parametrlarning burchak nuqtalariga javob beruvchi $x=c, y=c_1$ qiymatlarida figuratrisa esa $y=y(c-0), y=y(c+0)$ abtsissali nuqtalarda umumiy urinmaga ega bo'lishligini anglatadi.*

Bir vaqtning o'zida singan ekstremalni bo'lishligini yo'q qiluvchi $F_{y'y'}\neq 0$ shartni olamiz. Haqiqatan, agar, masalan, $F_{y'y'}>0$ bo'lsa, figuratrisa qavariq bo'ladi, unga ikkita turli nuqtalardan o'tkazilgan urinmalar usma-ust tushmasligi mumkin. Shuning uchun, bunday hollarda ekstremal sinish nuqtalariga ega bo'lmaydi. Endi yana

$$J[y]=\int_0^2(y'^2-6y^2)dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=0$$

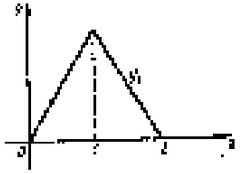
funksionalni singan ekstremallarini topish masalasini qaraylik. Ekstremalluri to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Figuratrisa $Y=y'^2-6y^2$ mazkur holda (x,y) nuqtalarga bog'liq bo'lmaydi. U abtsissa bilan $y=\pm\sqrt{3}$ nuqtalarda umumiy urinmaga ega bo'ladi (32-rasm).



32-rasm

Shuning uchun, agar singan ekstremallar sifatida Ox o'qi bilan $\pm\frac{\pi}{3}$ burchak tashkil qiluvchi singan bo'lagi olinsa, u holda Veyershtrass-Erdmon sharti bajariladi. Bitta burchak nuqtali y_1 siniq ekstremalda funksional $J[y_1]=-18$ qiymatga ega bo'ladi (33-rasm).

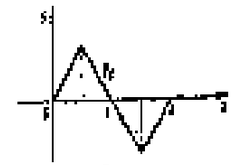
Shu qiymatga $J[y]$ funksional ikki burchak nuqtali y_2 siniq ekstremalda erishadi (34-rasm). Shu qiymatga $J[y]$ funksional uch burchak nuqtali y_3 siniq ekstremalda erishadi (35-rasm) va h.k.



33 – chizma

Ikkinchi tur uzilishga ega bo'lgan variatsion masalalar. Ikkinchi tur uzulishga ega bo'lgan masalalar deb integranti uzulishli

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \qquad (9)$$



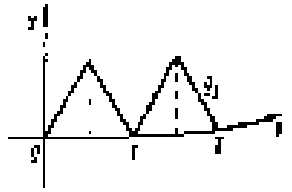
34-rasm

funksionalni

$$y(a)=c,\quad y(b)=d, \qquad (10)$$

chegaraviy shartlar ostida ekstremumini topish masalasiga aytiladi, ya'ni, bunda (9) funksionalning integranti uzulishli funksiya deb faraz qilinadi.

Aytaylik, masalan, $F(x,y,y')$ funksiya $y=\Phi(x)$ chiziq bo'ylab uzulishga ega bo'lsa va aytaylik, $F(x,y,y')$ funksiya $y=\Phi(x)$ chiziqning bir tomonida $F_1(x,y,y')$ funksiyaga, $y=\Phi(x)$ chiziqning ikkinchi tomonida esa $F_2(x,y,y')$ funksiyaga teng bo'lsin.



35- rasm

U holda

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F_1(x,y,y')dx+\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx+\int_{x_2}^{x_3}F_2(x,y,y')dx \tag{11}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Mazkur funksionalni variatsiyalash $J_1(y)$ va $J_2(y)$ funksionallarni variatsiyalashga keltiriladi, bundan tashqari ulardan birining taqqoslash chizig'i (funksiyasi) qo'zg'aluvchan o'ng oxirga, ikkinchisining taqqoslash chizig'i esa qo'zg'aluvchan chap oxirga ega bo'ladi. (11) tenglikdan

$$\delta J=F_1+\left[(\Phi'-y')\cdot F_{1y'}\right]_{x=x_1}\delta x-F_2+\left[(\Phi'-y')\cdot F_{2y'}\right]_{x=x_1}\delta x \tag{12}$$

ifoda kelib chiqadi. Ekstremumning zaruriy sharti $\delta J(y)=0$ o'zining quyidagi

$$F_1+\left[(\Phi'-y')\cdot F_{1y'}\right]_{x=x_1}=F_2+\left[(\Phi'-y')\cdot F_{2y'}\right]_{x=x_1} \tag{13}$$

natijaviy tengligiga ega bo'ladi.

Bu shartlar umuman aytganda singan ekstremallarni topish uchun yetarli.

Singan ekstremallarni aniqlash uchun Eylerning umumiy yechimi ixtiyoriy to'rtta o'zgarmaslarni o'z ichiga olgan differensial tenglamasini olamiz. Bu o'zgarmaslarni topish uchun, yana ekstremalni $y=\Phi(x)$ egri chiziq bilan uchrashgan c nuqtasining abssissasini topish

uchun quyidagilarga egamiz: 1) (10) ko'rinishdagi ikkita chegaraviy shartga, 2) ekstremallarning oxirlarining ordinatalari kesishish nuqtasida $y=\Phi(x)$ egri chiziqning ordinatasiga teng bo'lishini talab qiluvchi ikkita shart, va nihoyat, 3) kesishishdagi (13) shartga.

Bir tomonlama variatsiyalar.

Bu yerda

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx, \tag{14}$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \tag{15}$$

funksionalning

$$y-\varphi(x)\geq 0 \quad \text{yoki} \quad y-\varphi(x)\leq 0 \tag{16}$$

shartlar asosida ekstremumga izlanadi (chegaralovchi shartlar bundan ham murakkab ko'rinishda bo'lishi mumkin).

Bu holda, izlanayotgan ekstremallar (16) sohada yotuvchi ekstremallarning bo'laklaridan iborat bo'lishi mumkin va bu sohada bo'laklarning chegarasi $y=\varphi(x)$ bo'ladi. Ko'rsatilgan bo'laklarning ulanish nuqtasida izlanayotgan ekstremal silliq bo'lishi mumkin, lekin burchakli nuqtalarga ega bo'lishi ham mumkin.

Ulanish nuqtasida shart quyidagicha bo'ladi:

$$\left[F(x,y,y')-F(x,y,\varphi')-(\varphi'-y')F_{y'}(x,y,y')\right]_{x=\xi}=0.$$

Agar $F_{y'y'}\neq 0$ bo'lsa, u holda ekstremal $M(\xi,\eta)$ ulanish nuqtasida sohaning $y=\varphi(x)$ chegarasiga urinadi.

3-misol. $y\leq x^2$ sohada joylashgan $A(-2,3)$ nuqtadan $B(2,3)$ nuqtagacha bo'lgan eng qisqa yol topilsin.

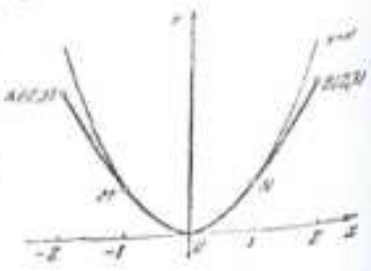
Yechish. Masala $y\leq x^2$, $y(-2)=3$, $y(2)=3$, shartlar ostida

$$J[y] = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (17)$$

funksionalning ekstremumini topish masalasiga keltiriladi. (17) funksionalning ekstremali $y = c_1 x + c_2$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Bu holda

$$k_{x=\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(\bar{x})}} \neq 0$$

va qidirilayotgan ekstremal $y = x^2$ parabolaga o'tkazilgan AM va NB urinmalarning bo'laklaridan va parabolaning MON bo'lagidan iborat bo'ladi (36-rasm). Urinish nuqtalarining absissalarini $x_1 = \bar{x}$ deb belgilaymiz. Urinish nuqtasida to'g'ri chiziqning ordinatasi va burchak koeffisienti hamda parabolaga o'tkazilgan urinmaning ordinatasi va burchak koeffisienti ustma-ust tushadi. Shuning uchun,



36 - rasm

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \bar{x} = \bar{x}^2, \\ c_2 = 2\bar{x}. \end{cases} \qquad (18)$$

ga ega bo'lamiz. Boshqa tomondan esa, urinma $B(2,3)$ nuqtadan o'tishi kerak, shuning uchun,

$$c_1 + 2c_2 = 3 \qquad (19)$$

bo'ladi. (18) va (19) tengliklardan c_1, c_2 o'garmaslarni yo'qotib, $\bar{x}^2 - 4\bar{x} + 3 = 0$ tenglikni topamiz, bu yerda $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 3$. $\bar{x}$ ning ikkinchi qiymati to'g'ri kelmaydi. Demak, $\bar{x}_1 = 1$. Bu yyerdan $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ larni topamiz. Izlanayotgan ekstremal (yagona)

$$y = \begin{cases} 2x - 1, & agar \quad -2 \le x \le -1, \\ x^2, & agar \quad -1 \le x \le 1, \\ 2x - 1, & agar \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Ravshanki, bu ekstremal (17) funksionalga minimum beradi.

175. Joiz egri chiziqlar $(x-5)^2 + y^2 = 9$ aylana bilan chegaralangan doiraning ichidan o'tmaslik sharti ostida

$$J[y] = \int_0^{10} y^3\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(10) = 0,$$

funksionalga ekstremum beruvchi egri chiziq topilsin.

176. $A(a, y_a)$ va $B(b, y_b)$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqlar orasidan shunday egri chiziqni topingki, $y \ge 0$, $1 - y^2 y'^2 \ge 0$ shart ostida

$$J[y] = \int_a^b y\sqrt{1 + y^2 y'^2}\, dx$$

funksionalga ekstremum qiymat bersin.

1.2. Bir necha funksiyaga bog'liq funksional uchun uzilishli masala.

Bu masala uchun quyidagi ko'rinishdagi

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx, \qquad (1)$$

funksionalni qaraymiz.

Agar $F(x, y, y') = F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$ funksiya barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz va uchinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda burchak nuqtalarda siniq ekstremallar mavjud bo'lishida Veyershtrass-Erdmon sharti bajarilishi kerak ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big|_{x=a} = \frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big|_{x=a}, \qquad (2)$$

va

$$F-\sum_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big|_{x=x_0}=F-\sum_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big|_{x=x_1} \tag{3}$$

agar $F(x,y,y')$ funksiya $\Phi(x,y_1,y_2,\dots,y_n)=0$ sirtning turli tomonlarida har xil ko'rinishga ega va

$$J[y_1,y_2,\dots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')dx+\int_{x_1}^{x_2} F_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')dx,$$

$$\Phi(x_1,y_1(x_1),y_2(x_1),\dots,y_n(x_1))=0,$$

bo'lsa, u holda $\delta J[y]=0$ shartdan quyidagi shart

$$\frac{\left[F_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial y_i'}\cdot y_i'\right]_{x=x_0}-\left[F_2-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial y_i'}\cdot y_i'\right]_{x=x_1}}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x_1}}=\dots=\frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_n'}\right)_{x=x_0}-\left(\frac{\partial F_2}{\partial y_n'}\right)_{x=x_1}}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}\right)_{x_1}}, \tag{5}$$

kelib chiqadi.

4-misol (Yorug'lik nurini sinishi haqidagi masala). Yorug'lik A muhitda v_1 o'zgarmas tezlik bilan, B muhitda esa v_2 o'zgarmas tezlik bilan, tarqaladi. A muhit B muhit bilan $y=\Phi(x)$ egri chiziq bilan ajralgan. Birinchi muhitning A_1 nuqtasidan ikkinchi muhitning B_1 nuqtasiga tushuvchi yorug'lik nurining sinish qonunini, nur bu yo'lni vaqtning eng kichik oralig'ida bosib o'tishini bilgan holda keltirib chiqaring.

Yechish. Masala quyidagi integralning

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1}dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2}dx=J_1(y)+J_2(y), \tag{14}$$

minimumini topish masalasiga keltiriladi. (12) ifodadagi birinchi va ikkinchi integrallar nurning A_1 nuqtasidan ajratish chizig'igacha, ajratish chizig'idan B_1 nuqtasiga o'tishining kerak vaqtini beradi.

Bu bilan biz ikkinchi tur uzulishga ega bo'lgan masalaga ega bo'lamiz, bu yerda

$$F_1(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1},\quad F_2(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2}.$$

Ekstremallarning bo'laklarini topish

$$\int\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

integralni ekstremumini topish masalasiga keltiriladi, ma'lumki bu funksionalning ekstremallari to'g'ri chiziqlardan iborat. Binobarin,

$$y_1=mx+n,\quad y_2=px+q.$$

(13) shartni yozamiz:

$$F_1(x,y_1,y_1')-y_1'\cdot\frac{\partial F_1(x,y_1,y_1')}{\partial y_1'}=\frac{\sqrt{1+y_1'^2}}{v_1}-\frac{y_1'^2}{v_1\cdot\sqrt{1+y_1'^2}}=\frac{1}{v_1\cdot\sqrt{1+y_1'^2}},$$

$$F_2(x,y_2,y_2')-y_2'\cdot\frac{\partial F_2(x,y_2,y_2')}{\partial y_2'}=\frac{1}{v_2\cdot\sqrt{1+y_2'^2}}.$$

Bu ifodalarni (13) ifodaga qo'yib,

$$\frac{1+\Phi'y_1'}{v_1\cdot\sqrt{1+y_1'^2}}=\frac{1+\Phi'y_2'}{v_2\cdot\sqrt{1+y_2'^2}}, \tag{15}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Aytaylik, $\gamma-$ ajratish chizig'iga c nuqtadan o'tkazilgan urinmaning Ox o'qi bilan tashkil qilgan burchak, $\alpha-$ chap nurning burchagi, $\beta-$ o'ng nurning burchagi bo'lsin. U holda $\Phi'=tg\gamma$, $y_1'=tg\alpha$, $y_2'=tg\beta$, va (15) shart quyidagi

$$\frac{1+tg\alpha\cdot tg\gamma}{v_1\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1+tg\alpha\cdot tg\gamma}{v_2\sqrt{1+tg^2\alpha}},$$

ko'rinishni oladi yoki

$$\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{v_1}=\frac{\cos(\gamma-\beta)}{v_2},$$

bo'ladi, bu yerda $(\gamma-\alpha)$ va $(\gamma-\beta)$ – nurlar bilan ajratish chizig'i urinmasi orasidagi burchak. Ularning o'rniga ajratish chizig'i normali bilan nurlar tushuvchi va singan ekstremallar orasidagi φ va θ burchaklarni kiritib,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\frac{v_1}{v_2}=const,$$

munosabatni olamiz, ya'ni ma'lum bo'lgan yorug'lik nurini sinish qonunini (Snellius qonuni) olamiz.

2-§. Asosiy masala integralining invariantligi va Eyler tenglamasining birinchi integrallari orasidagi bog'liqlik

Biz F funksiyani (integrant) x ga oshkor holda bog'liq bo'lmagan holda

$$\int_a^b F(y_i,y_i')dx \tag{16}$$

funksionalga mos keluvchi Eyler tenglamalar sistemasining quyidagi

$$-Hdx+\sum_{i=1}^{n}p_i dy_i,$$

ko'rinishdagi birinchi integralga ega bo'lishini ko'rib o'tgan edik. F funksiyani x erkin o'zgaruvchiga oshkor holda bog'liq emasligi quyidagi tasdiqqa teng kuchli: agar

$$x^*=x+\alpha \tag{17}$$

deb olib, yangi o'zgaruvchi kiritsak, u holda F funksiya, (16) integral bu almashtirishda o'zgarmaydi. Shunday qilib, H funksiya Eyler tenglamalar sistemasining birinchi integrali bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki, agar $\int_a^b F_i dx$ integral (17) almashtirishda o'zgarmasa ($\frac{dH}{dx}=\frac{\partial H}{\partial x}$ formuladan ko'rinib turibdiki, H birinchi integrali bo'ladi, faqat shu holdaki, $\frac{\partial H}{\partial x}=0$ bo'ladi, faqat agar $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ bo'lsagina).

Biz hozir Eyler tenglamalar sistemasining birinchi integrali bilan x va $y_1,y_2,\ldots,y_n$ o'zgaruvchilarning aniqlangan almashtirishlarga nisbatan mos kelgan funksionalning invariantligi orasidagi bog'liqlikni ko'rsatamiz.

Eng avvalo u yoki bu almashtirishlarning majmuiga nisbatan funksionalni invariantligi tushunchasini o'zini aniqlab olaylik.

$$\int_a^b F(x_i,y_i')dx$$

funksional berilgan bo'lsin. Nuqtalarning $n+1$ o'lchovli fazodagi

$$\begin{cases}x^*=\varphi_0(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\ y^*=\varphi_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\end{cases} \tag{18}$$

almashtirishlarini qaraylik.

Bu almashtirish biron bir $y_i=\eta_i(x)$, $(i=1,2,\ldots,n)$, tenglama bilan berilgan γ egri chiziqni, γ^* egri chiziqqa o'tkazadi, qaysiki, (18) tenglikka x,y larni x^*,y^* lar bilan bog'lovchi $y_1,y_2,\ldots,y_n$ larni o'rniga γ egri chiziqni beruvchi $\eta_1(x),\eta_2(x),\ldots,\eta_n(x)$, funksiyalarni qo'yib, olingan $n+1$ ta tenglikdan x ni yo'qotib topiladi. Bunday jarayondan so'ng,

natijada $y_i^* = \eta^*(x^*)$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lamiz. Bu γ^* egri chiziqning tenglamasi bo'ladi.

$J[y]$ funksional mazkur *almashtirishga nisbatan invariant* deyiladi, agar $J[\gamma] = J[\gamma^*]$ bo'lsa, ya'ni

$$\int_a^b F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx = \int_{a^*}^{b^*} F(x^*, y^*, \frac{dy^*}{dx^*})dx^*$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

Sodda misollar keltiramiz.

1-misol. Quyidagi

$$\int_a^b y'\,dx,$$

funksional

$$x^* = x + c, y^* = y, \tag{19}$$

almashtirishga nisbatan invariant. Haqiqatda, agar γ egri chiziq $y = \eta(x)$, $(a \le x \le b)$, tenglama bilan berilgan bo'lsa, u holda almashtirishdan keyingi γ^* egri chiziq $y^* = \eta(x-c) = \eta^*(x^*)$, $(a \le x^* - c \le b)$, bo'ladi. Bundan

$$J[\gamma^*] = \int_{a^*}^{b^*}\left(\frac{d\eta^*(x^*)}{dx^*}\right)^2 dx^* = \int_{a+c}^{b+c}\left(\frac{d\eta^*(x^*-c)}{dx^*}\right)^2 dx^* = \int_a^b\left(\frac{d\eta(x)}{dx}\right)^2 dx = J[\gamma],$$

tenglikka ega bo'lamiz.

2-misol. Quyidagi

$$\int_a^b xy'\,dx,$$

integral (19) almashtirishga nisbatan invariant bo'lmagan funksionalga misol bo'lib xizmat qilishi mumkin. Bu almashtirishni qo'llash

natijasida u qanday o'zgarishini ko'rib o'tamiz. Oldingi misollardagi o'xshash hisoblashlarni olib borgandan so'ng

$$J[\gamma^*] = \int_{a^*}^{b^*} x^*\left(\frac{d\eta^*(x^*)}{dx^*}\right)^2 dx^* = \int_{a+c}^{b+c}\left(\frac{d\eta^*(x^*-c)}{dx^*}\right)^2 dx^* = \int_a^b (x+c)\left(\frac{d\eta(x)}{dx}\right)^2 dx =$$

$$= J[\gamma] + c\int_a^b\left(\frac{d\eta(x)}{dx}\right)^2 dx,$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Aytaylik, a parametrga bog'liq bo'lgan x va $y_1, y_2, \ldots, y_n$ o'zgaruvchili teskarilanuvchan almashtirishlar to'plamiga ega bo'laylik:

$$\begin{cases} x^* = \varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha), \\ y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha), \ (i = 1,2,\ldots,n). \end{cases} \tag{20}$$

bundan tashqari φ_0 va φ_i funksiyalar differensiallanuvchi, $\alpha = 0$ qiymati

$$\begin{cases} \varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, 0) = x, \\ \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, 0) = y_i, \end{cases}$$

aynan almashtirishga mos keladi.

1-teorema (E.Neter). *(16) integralni invariant qoldiruvchi (20) ko'rinishdagi har bir almashtirishga Eyler tenglamalar sistemasining qandaydir birinchi integrali mos keladi.*

Bu birinchi integralning oshkor ko'rinishi quyida ko'rsatiladi.

Teoremaning isbotini xususiy holda almashtirish

$$\begin{cases} x^* = x, \\ y_i^* = \varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha), \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'lgan hol uchun keltiramiz (Neter teoremasini umumiy holda, qachonki, funksional bir necha erkin o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan holni keyingi paragraflarda keltiramiz. Bir necha erkin

o'zgaruvchilar uchun teoremaning o'zi bir qancha o'zgarishini anglaymiz). α parametrni cheksiz kichik miqdor deb hisoblab,

$$y_i^* - y_i = \varphi_i(x, y, 0)\alpha + o(\alpha),$$

ifodaga ega bo'lamiz.

$$\left(\frac{\partial \varphi_i(x, y, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \varphi_i(x, y).$$

deb olamiz. ya'ni $y_i^* - y_i = \alpha\varphi_i + o(\alpha)$. $y_i = y_i(x)$ tenglama bilan aniqlanuvchi egri chiziqni ekstremal deb hisoblab, y_i dan $y_i + \alpha\varphi_i$ ga o'tishga mos kelgan (16) funksionalning variatsiyasi uchun ifodani yozamiz. Endi quyidagicha olingan

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \cdot \delta y_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right)\delta x\Big|_{x_0}^{x_1},$$

variatsiya formulasidan foydalanamiz. Bizning holimizda x variatsiyalanmaydi, ya'ni $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$, ekanligini hisobga olib, $\delta y_i = \alpha\varphi_i$, tenglikdan

$$\delta J = \alpha \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \cdot \psi_i\Big|_{x_0}^{x_1},$$

tenglikni olamiz (bu yerda biz δy_i ni y_i orttirmaning o'zini emas yuqorida bo'lgani kabi, α ga nisbatan chiziqli bosh qismini tushunamiz. Buni natijaga ta'sir ko'rsatmasligini ko'rish qiyin emas, lekin bu bizni yuqori tartibli kichik miqdorlar tashvishidan halos etadi). (16) funksional (20) almashtirishga nisbatan invariantlik sharti (17) bo'yicha bu funksionalning $\delta y_i = \alpha\varphi_i$ ga mos keluvchi δJ variatsiyasi nolga teng bo'ladi.

δJ variatsiyasi nolga tenglab,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \cdot \psi_i\Big|_{x_0}^{x_1} = 0,$$

tenglikni olamiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \cdot \psi_i\Big|_{x=x_1} = \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \cdot \psi_i\Big|_{x=x_0}.$$

Bu tenglikni ixtiyoriy ikkita x_0 va x_1 nuqtalar uchun o'rinliligi tufayli har bir ekstremal bo'ylab,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \cdot \psi_i = const, \quad \text{ya'ni} \quad \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_i(x, y_i, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = const,$$

bo'ladi.

Demak biz, (16) integralni invariantlikda qoldiruvchi (18) almashtirish orqali har bir ekstremal bo'yicha o'zgarmas qiymatni saqlovchi ifodani qurdik, ya'ni Eyler tenglamalar sistemasining qandaydir birinchi integralini qurdik. Teorema isbot bo'ldi.

Endi integral ostidagi F funksiya x erkin o'zgaruvchiga oshkor holda bog'liq bo'lmaganda Neter teoremasi bizga nima beradi, biz shuni qarab chiqamiz. F funksiyani x erkin o'zgaruvchiga oshkor holda bog'liq emasligi (16) integralni

$$\begin{cases} x^* = x + \alpha, \\ y_i^* = y_i. \end{cases} \tag{21}$$

almashtirishga nisbatan invariant ekanligini anglatadi. Haqiqatda, u

$$\int_a^b F(y_i, y_i')dx$$

integralni

$$\int_a^b F(x + \alpha, y_i, y_i')dx$$

integralga o'tkazadi. Bu ikki integral (a,b) ixtiyoriy intervalda o'zaro teng bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, λ funksiyani x erkin o'zgaruvchiga oshkor holda bog'liq bo'lmasa. (2) almashtirishga mos keluvchi (16) integralni variatsiyasini hisoblab,

$$\delta J = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} F_{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_{y_i} \right] \eta_i \, dx - H(x,\alpha) \Big|_a^b,$$

tenglikni olamiz. Bu ifodani nolga tenglab va uni faqat Eyler tenglamasini qanoatlantiruvchi egri chiziqlarda qarab, quyidagi

$$H(x,\alpha) \Big|_a^b = H(x,\alpha)\Big|_{x=b} - H(x,\alpha)\Big|_{x=a},$$

ya'ni, integral egri chiziqlar bo'yicha $H = const$ tenglikka erishamiz.

Shunday qilib, biz yana oldingi paragrafda o'rnatilgan natijani oldik: ya'ni, vaqtga oshkor holda bog'liq bo'lmagan funksionallar uchun H funksiya Eyler tenglamalar sistemasiga mos kelgan birinchi integralni ifodalaydi.

Lejandr almashtirishi. Kanonik almashtirishlar. Eyler tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirishning oldingi paragrafda bayon etilgan usuldan farqli o'laroq yana bir usulni qaraymiz. Bu yangi topilmaning g'oyasi shundan iboratki, qaralayotgan variatsion masala unga ekvivalent bo'lgan shunday masala bilan almashtiriladiki, yangi masalaning Eyler tenglamasi dastlabki qo'yilgan masalaning Eyler kanonik tenglamalar sistemasi bilan ustma-ust tushadi.

1. Dastlab chekli sondagi o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumini topish haqidagi masalaga aloqador ayrim mulohazalarni qarab o'taylik. Bir o'zgaruvchili holdan boshlaymiz. Aytaylik, $t = f(\xi)$ funksiyaning ekstremumi (aytaylik, minimumi) qidirilayotgan bo'lsin,

bundan tashqari $f(\xi)$ funksiya qavariq, ya'ni

$$f''(\xi) > 0. \tag{1}$$

Yangi p erkin o'zgaruvchini (tangensial koordinatali deb nomlanuvchi)

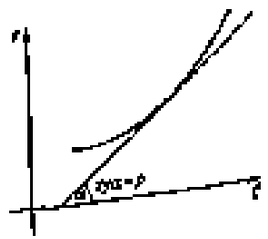
$$p = f'(\xi) > 0 \tag{2}$$

kiritamiz. Shunday qilib, erkin o'zgaruvchi sifatida egri chiziqning berilgan nuqtasi orqali o'tuvchi urinmaning burchak koeffitsientini qabul qilamiz (37-rasm). Agar egri chiziq qavariq bo'lsa, u holda undagi nuqta urinmaning burchak koeffitsienti bo'yicha birqiymatli aniqlanadi. Bu botiq egri chiziqlar uchun ham o'rinli.

Shartga ko'ra, $\frac{dp}{d\xi} = f''(\xi) \neq 0$ bo'lsa, u holda (2) tenglikdan ξ ni p orqali ifodalash mumkin. Endi yangi funksiyani kiritamiz

$$H(p) = -f(\xi) + p\xi. \tag{3}$$

(bu yerda ξ (2) tenglik bilan aniqlanuvchi p ning funksiyasi). (2) va (3) formulalar bilan aniqlanuvchi almashtirishlar *Lejandr almash-tirishlari* deb ataladi. Shunday qilib, Lejandr almashtirishi – bu ξ o'zgaruvchi va $f(\xi)$ funksiyadan p o'zgaruvchiga va $H(p)$ funksiyaga o'tish demakdir (almashtirishni ikki marta takrorlash ayniy almashtirish yoki odatda *involyutiv almashtirish* deb ataladi). Shunday qilib, Lejandr almashtirishi involyutiv. Bu yerda $f(\xi)$ funksiyaning qavariqligidan $H(p)$ funksiyani qavariqligi kelib chiqishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan,



37-rasm

$$dH = -f'(\xi)d\xi + pd\xi + \xi dp.$$

bu yerdan

$$\frac{dH}{dp} = \xi$$

va bundan

$$\frac{d^2H}{dp^2} = \frac{d\xi}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{d\xi}} = \frac{1}{f''(\xi)} > 0,$$

bo'ladi, chunki $f''(\xi) > 0$.

1-misol. $f(\xi) = \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha}$, $(\alpha > 0)$, bo'lsin. U holda $f'(\xi) = p = \xi^{\alpha-1}$, ya'ni $\xi = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$, va binobarin,

$$H = -\frac{\xi^{\alpha}}{\alpha} + p\xi = -\frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha} + p \cdot p^{\frac{1}{\alpha-1}} = p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(-\frac{1}{\alpha} + 1\right),$$

ya'ni $H(p) = \frac{p^{b}}{b}$, bo'ladi, bu yerda b parametr α bilan quyidagi $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b} = 1$ munosabat orqali bog'langan.

(3) tenglik bilan aniqlangan $H(p)$ funksiya qoldida $f(\xi)$ funksiyaga Yung bo'yicha ikkilanma funksiya deb ataladi. p va $H(p)$ funksiyalarga qo'llanilgan Lejandr almashtirishi yana ξ o'zgaruvchi va $f(\xi)$ funksiyaga olib keladi. Haqiqatda, (4) ifodaga ko'ra $\frac{dH}{dp} = \xi$ bo'ladi va bundan tashqari

$$-H(p) + pH'(p) = f(\xi) - pH(p) + pH'(p) = f(\xi). \qquad (5)$$

bo'ladi.

Endi $f(\xi)$ funksiyaning $H(p)$ funksiyaga o'tishi $f(\xi)$ funksiyaning ekstremumini topish masalasi o'rtasida qanday bog'liqlik borligini ko'rib o'tamiz.

$$-H(p) + \xi p, \qquad (6)$$

qaysiki, $\xi = H'(p)$ da $f(\xi)$ funksiya bilan ikki o'zgaruvchili funksiya sifatida ustma-ust tushuvchi ifodani qaraymiz.

$$\min_{p}[-H(p) + \xi p] = f(\xi). \qquad (7)$$

tenglikni ko'rsatamiz. Haqiqatda,

$$\frac{\partial}{\partial p}(-H(p) + \xi p) = -H'(p) + \xi,$$

shartdan, $\xi = H'(p)$ ifodani olamiz, bu yerdan (5) tenglikka ko'ra, (7) ifoda kelib chiqadi. Shunday qilib, $f(\xi)$ funksiyaning ekstremumini topish masalasi ikki o'zgaruvchi funksiya sifatida $-H(p) + \xi p$ ifodani minimumini topish masalasi bilan teng kuchli. Aniqroq qilib aytadigan bo'lsak, biz (7) tenglikdan

$$\min_{\xi} f(\xi) = \min_{p,\xi}[-H(p) + \xi p].$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu formula bizga $H(p)$ funksiyadan $f(\xi)$ funksiyaga o'tish imkonini beradi.

Shunga o'xshash mulohazalarni ko'p erkin o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham keltirishimiz mumkin. Aytaylik, $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ n – o'zgaruvchili funksiya, hosilalaridan tuzilgan determinant

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_k}$$

nolga aylanmasin.

$$p_i = F_{\xi_i} \qquad (8)$$

va

$$H = -F - \sum_{1}^{n} \xi_i p_i \tag{9}$$

deb olib, yangi o'zgaruvchilar kiritamiz. (8) tenglikdan ξ_i ni p_i orqali ifodalab va bu ifodalarni (9) ga olib borib qo'ysak, quyidagi funksiyani

$$H = H(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

olamiz. Bir erkin o'zgaruvchili hol kabi bevosita tekshirish

$$\min_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n} \left| -H(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \sum_{1}^{n} p_i \xi_i \right| = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

va $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ funksiyani minimumini qidirish

$$-H(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \sum_{1}^{n} p_i \xi_i$$

ifodani minimumini qidirishga teng kuchli ekanligini ko'rsatadi. bu yerda ξ_i va p_i lar erkin o'zgaruvchi sifatida qaraladi.

Izoh. *Biz ko'rsatib o'tdikki,*

$$\min_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n} \left| -H(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \sum_{1}^{n} p_i \xi_i \right| = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

ifoda, binobarin, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ larning ixtiyoriy qiymatlarida

$$-H(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \sum_{1}^{n} p_i \xi_i \geq F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

ya'ni $\sum_{1}^{n} p_i \xi_i \geq H(p_1, p_2, \ldots, p_n) + F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, *bo'ladi. bu yerda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ va $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ lar (8) va (9) formulalar orqali aniqlanadi. Olingan bu tengsizlik Yung tengsizligi deb ataladi.*

2. Endi mazkur mulohazalarni funksionallarga tadbiq qilamiz. Aytaylik,

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx \tag{10}$$

funksional berilgan bo'lsin.

$$p = F_{y'}(x, y, y'), \tag{11}$$

va

$$H(x, y, p) = -F + py', \tag{11'}$$

deb olamiz (bu tenglikning o'ng tomonida turgan y' (11) tenglik bilan aniqlangan $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ funksiyani x, y va p larning funksiyasi deb hisoblaymiz).

Yangi

$$J[y] = \int_a^b \left(-H(x, y, p) + py' \right) dx \tag{12}$$

funksionalni kiritamiz, qaysiki y va p lar ikkita erkin funksiyalar qaraladi. y' esa y ning hosilasi. Agar p sifatida (11) ifodani olsak, u holda bu funksional ravshanki, dastlabki (10) funksional bilan ustma-ust tushadi. (12) funksional uchun Eyler tenglamasini yozamiz. Natijada

$$-\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{dp}{dx} = 0, \qquad -\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{dy}{dx} = 0, \tag{13}$$

bo'ladi, bu $\int_a^b F(x, y, y')dx$ funksional uchun Eyler tenglamasidan boshqa narsa emas. Biz bu tenglamani

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{14}$$

tenglama bilan ekvivalent ekanligini ko'rsatamiz. agar (10) va (12) funksionallar bir xil ekstremallarda ekstremal qiymatlar qabul qilsa.

Buning uchun eng avvalo (11) va (11') formulalar bilan aniqlanuvchi x, y, p o'zgaruvchili funksiyadan x, y, p o'zgaruvchili H funksiyaga o'tish involyutiv ekanligini anglaymiz, ya'ni H funksiya uchun Lejandr almashtirishini amalga oshirib, biz yana $F(x,y,y')$ funksiyaga qaytamiz. Haqiqatda, (oldingi paragrafdagi (7) formulaga qarang)

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \frac{\partial F}{\partial y}dy + y\,dp,$$

bo'ladi, u holda

$$\frac{\partial H}{\partial p} = y,$$

shuning uchun,

$$H - p\frac{\partial H}{\partial p} = F(x, y, y'),$$

tenglikka ega bo'lamiz. Endi (10) va (12) variatsion masalalarning ekvivalentligini ko'rsatamiz. Bu isbotlangan bo'ladi, agar $J[y]$ funksionalning p bo'yicha minimumi tayinlangan y da $J[y]$ bo'lishini isbot qilsak. Haqiqatan, $\min_p J[y,p] = J[y]$ ekanligini isbot qilamiz. $J[y,p]$ funksional p ni bog'liq emasligi sababli, $J[y,p]$ funksionalni minimumini topish uchun integral ostidagi ifodani har bir nuqtadagi minimumini topish yetarli, ya'ni

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[-H + py'\right] = 0.$$

Bu yerdan $y' = \frac{\partial H}{\partial p}$, bo'ladi. Lekin, (15) ga ko'ra,

$$-H + p\frac{\partial H}{\partial p} = F,$$

bo'ladi, demak, $\min_p J[y,p] = J[y]$.

Demak, (10) va (12) variatsion masalalar ham va ularga mos kelgan Eyler tenglamalarining ham ekvivalentligi isbot qilindi. Biz hozirgacha bitta funksiyaga bog'liq funksiyalarni qaradik. Bu mulohazalar n ta funksiyalarga bog'liq funksionallar uchun ham o'z kuchida qoladi.

Misol. Quyidagi

$$J[y] = \int_a^b \left(Py'^2 + Qy^2\right)dx, \tag{16}$$

funksionalni qaraymiz, bu yerda P va Q lar x ning funksiyalari. Bular uchun $p = 2Py'$, $H = Py'^2 - Qy^2$, bo'ladi, bu yerdan

$$H = \frac{p^2}{4P} - Qy^2.$$

Mos kanonik tenglamalar

$$\frac{dp}{dx} = 2Qy, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2P},$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (16) funksional uchun odatdagi

$$2yQ - \frac{d}{dx}(2Py') = 0,$$

ko'rinishda bo'ladi.

3. Quyidagi savolni qaraymiz: o'zgaruvchilarni qanday almashtirishda Eylerning kanonik tenglamasi kanonik formasini saqlab qoladi?

Eyler tenglamasi invariantligi haqida

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

Eyler tenglamasi koordinatalarini almashtirishga nisbatan invariant bo'lishligini biz ko'rsatib o'tgan edik, ya'ni x, y o'zgaruvchilardan boshqa ixtiyoriy $\xi = \xi(x,\eta = \eta(y)$ o'zgaruvchilarga J funksionalda $\frac{dy}{dx}$ ga almashadi. Invariantlikni bu xossasiga Eylerning kanonik tenglamasi ham ega. Biroq kanonik tenglamalar ega bo'lgan y va p o'zgaruvchilar orasidagi simmetriyaga ko'ra bu yerda o'zgaruvchilarni almashtirishni kengroq ma'noda tushunish mumkin, ayttan x va y o'zgaruvchilardan yangi

$$Y_i = Y_i(x, y_i, p_i, x) \qquad P_i = P_i(x, y_i, p_i, x), \tag{17}$$

bo'ladi, biroq, har qanday (17) ko'rinishidagi almashtirishda ham kanonik tenglama o'z ko'rinishini saqlab qolmaydi.

Endi (17) ko'rinishdagi funksiyalarga qanday shartlarni qo'yishimiz kerakki, natijada Eyler tenglamasi yana kanonik ko'rinishga ega bo'lsin, ya'ni bu yangi o'zgaruvchilar

$$\frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i}, \qquad \frac{dP_i}{dx} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Y_i}, \tag{18}$$

tenglamalarni qanoatlantirsin, bu yerda $\bar{H} = \bar{H}(x, Y_i, P_i)$ – qandaydir yangi funksiya. Eyler tenglamasini kanonik ko'rinishda saqlab qoluvchi (17) ko'rinishdagi almashtirishlar *kanonik almashtirishlar* deb ataladi.

Kanonik almashtirishlarni topish uchun quyidagi

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \tag{19}$$

kanonik tenglamalar

$$J[y_i, p_i] = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i' - H \right) dx, \tag{20}$$

funksional uchun Eyler tenglamasini ifodalashligidan foydalanamiz, qaysiki, y_i va p_i lar $2n$ ta erkin o'zgaruvchilar sifatida qaraladi. Biz hohlayimizki, Y_i va P_i yangi o'zgaruvchilar biror $\bar{H}$ funksiya bilan birga (18) tenglamani qanoatlantirsin. Endi o'sha (18) Eyler tenglamasi bo'lib xizmat qiluvchi funksionalni yozamiz. Bu funksional

$$J[Y_i, P_i] = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} P_i Y_i' - \bar{H} \right) dx, \tag{21}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu yerda Y_i va P_i – lar (17) tenglik orqali aniqlanuvchi x, p_i va y_i larning funksiyalari, Y_i' esa Y_i dan hosila.

Shunday qilib, (20) va (21) ko'rinishdagi funksionallar bir xil y_i va p_i o'zgaruvchilar uchun ikkita variatsion masalani tasvirlaydi.

Endi biz (18) yangi sitema biror bir almashtirish orqali eski (19) sistemadan olinishini talab qilamiz. U (21) va (20) variatsion masalalarni ekvivalentligiga teng kuchli. Ko'rsatish mumkinki, mos funksionallarning integrali bir-biridan to'la differensialga farq qilsa, ya'ni, agar

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dy_i - H dx = \sum_{i=1}^{n} P_i dY_i - \bar{H} dx + d\Phi(x, y_i, p_i),$$

bu yerda Φ – qandaydir funksiya, bo'lsa, bu ikki variatsion masala ekvivalent bo'ladi (ya'ni bir xil ekstremallarga ega bo'ladi).

Shunday qilib, agar x, p_i va y_i o'zgaruvchili (17) almashtirish x, P_i va Y_i o'zgaruvchilarda shundayki, (22) shartni qanoatlantiruvchi Φ funksiya mavjudki, natijada (17) kanonik almashtirish bo'ladi. (22) shart bilan aniqlanuvchi Φ funksiya "*hosilaviy funksiya*" deyiladi.

Ko'rsatamizki, *"hosilaviy funksiya"* nomi bu yerda haqiqatda o'zini oqlaydi, aynan ko'rsatamizki, berilgan Φ *"hosilaviy funksiya"* bo'yicha kanonik almashtirishni topamiz. Buning uchun (22) tenglikni quyidagi ko'rinishda

$$d\Phi(x,y_i,p_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i dy_i-\sum_{i=1}^{n}P_i dY_i+\left(\tilde{H}-H\right)dx,$$

qayta yozamiz. Bu yerdan

$$p_i=\frac{\partial\Phi}{\partial y_i},\quad P_i=-\frac{\partial\Phi}{\partial Y_i},\qquad \tilde{H}=H+\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{23}$$

tengliklarni olamiz. Bu o'sha mos kanonik almashtirish bo'ladi. Haqiqatda, (23) $2n+1$ ta tenglik (y_i,p_i) va (Y_i,P_i) o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni o'rnatadi hamda yangi $\tilde{H}$ Gamilton funksiyasi uchun ifoda ham beradi. Ravshanki, (22) shart bajariladi ya'ni (23) almashtrish haqiqatdan ham kanonik almashtirish bo'ladi.

Biz *"hosilaviy funksiya"* eski y_i koordinata, Y_i yangi koordinata va x o'zgaruvchilarning funksiyasi sifatida berilgan deb hisobladik, ya'ni $\Phi=\Phi(y_i,Y_i,x)$. Shunday bo'lishi mumkinki, *"hosilaviy funksiya"*ni y_i va Y_i o'zgaruvchilar bilan emas, balki masalan, y_i va P_i o'zgaruvchilar orqali ifodalash qulay bo'lishi mumkin. Buning uchun (22) munosabatni

$$d\left(\Phi(x,y_i,p_i)+\sum_{i=1}^{n}P_iY_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i dy_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i dP_i+\left(\tilde{H}-H\right)dx,$$

ko'rinishda qayta yozamiz. Bu yerda $\Phi(x,y_i,p_i)+\sum_{i=1}^{n}P_iY_i$ ifoda yangi hosilaviy funksiya bo'ladi. Uni $\Psi(x,y_i,P_i)$ orqali belgilab, unga mos kelgan kanonik almashtirishni quyidagi ko'rinishda

$$p_i=\frac{\partial\Psi}{\partial y_i},\quad Y_i=-\frac{\partial\Psi}{\partial P_i},\qquad \tilde{H}=H+\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \tag{24}$$

yozishimiz mumkin.

Agar kanonik almashtirishning hosilaviy funksiyasi vaqtga bog'liq bo'lmasa, u holda $\tilde{H}=H$ bo'ladi, ya'ni bu holda yangi Gamilton funksiyasini olish uchun H dagi y_i va p_i larni o'rniga ularni Y_i va P_i orqali ifodalarini olib borib qo'yish yetarli.

3-§. Eyler tenglamasini integrallashning Yakobi usuli

3.1. Geodezik ellips va J – giperbola. J – ellips deganda, biz ikkita berilgan Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlar orasidagi J – masofalarning yig'indisi o'zgarmas miqdor (bu egri chiziqlar nuqtaga aylanishi ham mumkin) bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rnini tushunamiz. Bu yerda Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlar *ellipsning fokal egri chiziqlari* deb ataladi.

Aytaylik, C_1 sinfdan olingan ikkita Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlar berilgan bo'lsin. A nuqta egri chiziqda ham, Γ_2 egri chiziqda ham yotmasin. A nuqta orqali Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlarga transversal bo'lgan γ_1 va γ_2 ekstremallarni o'tkazamiz. B_1 va B_2 nuqtalar γ_1 va γ_2 ekstremallarning mos ravishda Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlar bilan kesishgan nuqtalar bo'lsin (A nuqtaga yaqin). $J_1(A)$ – orqali A nuqtadan Γ_1 egri chiziqqacha bo'lgan J – masofani belgilaymiz, $J_2(A)$ – orqali A nuqtadan Γ_2 egri chiziqqacha bo'lgan J – masofani belgilaymiz. Bu belgilashlarda Γ_1 va Γ_2 fokal egri chiziqli ellipslar oilasining tenglamasi $J_1(A)+J_2(A)=C=const$ ko'rinishida bo'ladi. Shu ellipsda $A(x,y)$ nuqtadan yaqin $A'(x+dx,y+dy)$ nuqtaga o'tamiz. Unda quyidagi-

ga ega bo'lamiz:

$$dJ_1(A) + dJ_2(A) = 0, \tag{1}$$

lekin,

$$dJ_1(A) = H_1dx + p_1dy, \quad dJ_2(A) = H_2dx + p_2dy, \tag{2}$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda H_i va p_i lar $H_i = F - yF_y'$ va $p_i = F_y'$ A nuqtasidagi funksiyalarning i qiymatdagi γ_i ekstremalga A nuqtadan o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'lgan qiymatlari. H_i va p_i lar ham A nuqtasidagi funksiyalar bo'lib, faqat γ_i ekstremalga mos kelishi bilan farq qiladi. (1) va (2) tengliklardan berilgan fokus egri chiziqlari bo'lgan ellipslar oilasining quyidagi differensial tenglamasini olamiz:

$$(H_1 + H_2) + \frac{dy}{dx}(p_1 + p_2) = 0, \tag{3}$$

bu yerda $\frac{dy}{dx}$ – bu A nuqtadan J – ellipsga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti.

Agar $F = \sqrt{1 + y'^2}$ bo'lsa, u holda H va p quyidagilarga

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad p = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

teng bo'ladi, γ_1 va γ_2 ekstremallar to'g'ri chiziqlar - ular Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlarga normallar bo'ladi.

β_1 va β_2 lar γ_1 va γ_2 to'g'ri chiziqlarning Ox o'qi bilan hosil qilgan burchaklarini belgilaymiz, u holda (3) tenglama

$$\cos\beta_1 + \sin\beta_1\frac{dy}{dx} = -\cos\beta_2 - \sin\beta_2 = 0, \tag{4}$$

ko'rinishni oladi. α_1 va α_2 lar orqali esa mos ravishda γ_1 va γ_2 ekstremallar bilan A nuqtadan J – ellipsga o'tkazilgan urinmalarning xosil qilgan burchaklarini belgilaymiz, u holda (4) tenglama $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$ ko'rinishni olishi mumkin.

Oxirgi tenglama J – ellipsning quyidagi geometrik xossasini ifodalaydi: ellipsning ixtiyoriy A nuqtadagi normali bilan A nuqtadan fokal egri chiziqlarga tushirilgan normallar tashkil qilgan burchaklar o'zaro teng bo'ladi.

Aynan shu mulohazalarni sirtlar uchun ham aytish o'rinli.

2-ta'rif. *Sirtda J – ellips deganda ikkita berilgan Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlar orasidagi (sirtdagi) J – masofalarning yig'indisi doimiy miqdor bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni tushuniladi. Bu yerda Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlar ellipsning fokal egri chiziqlari deb ataladi. Bu Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlarga ixtiyoriy A nuqtasidan (sirtda) amalga oshirilgan geodezik normallar, bizning geometrik o'rnimiz bu nuqtada uning urinmalari bilan teng burchaklar tashkil qiladi.*

Xususan, agar sirtda geodezik ellipsni qarasak, ya'ni ikkita berilgan nuqtalar (fokuslar) orasidagi masofaning yig'indisi doimiy miqdor bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni bo'lsa, u holda geodezik radius-vektorlar (ellips nuqtasini fokuslar bilan tutashtiruvchi geodezik yoy) geodezik ellips urinmasi bilan teng burchaklar tashkil qiladi.

J – giperbola. Ikkita berilgan G_1 va G_2 egri chiziqlar orasidagi J – masofalarning ayirmasi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni J – *giperbola* deyiladi.

Aytaylik, ikkita G_1 va G_2 egri chiziqlar berilgan bo'lsin. A J – giperbolaning nuqtasi bo'lsin. γ va $\gamma - A$ nuqtadan G_1 va G_2 egri chiziqlarga transversal o'tkazilgan ekstremallar yoyi bo'lsin. $J(\gamma)$ va $J(\gamma_1)$ orqali ularning J – uzunligini belgilaymiz. Ta'rifga ko'ra.

$$J(\gamma_1) - J(\gamma) = C = const, \tag{5}$$

tenglikka egamiz. Bundan keyin A nuqtadan G_1 va G_2 egri chiziqlargacha bo'lgan masofani aniqlaydigan ekstremallar oilasi: *har bir A nuqta orqali bitta va faqat bitta oilaning yoyi o'tadi* shartini qanoatlantiradi deb faraz qilamiz. U holda γ va γ_1 yoylar oxirlarining funksiyasi sifatida qaralayotgan $J(\gamma_1)$ va $J(\gamma)$ J – uzunliklar to'la differensialga ega bo'ladi. Bundan tashqari tekislikning qaralayotgan qismida $F_{y'} \neq 0$ va ko'rib chiqilishi kerak bo'lgan har bir ekstremal bo'ylab $F(x, y, y') \neq 0$ bo'ladi deb faraz qilamiz.

G_1 va G_2 egri chiziqlarni giperbolaning fokal egri chiziqlari deb ataymiz. J - giperbola bo'ylab

$$dJ(\gamma_1) - dJ(\gamma) = 0,$$

bo'ladi, bundan J ning variatsiyasi G_1 va G_2 egri chiziqlarda yotuvchi har bir yoyning ichida va uchlarida nolga teng bo'lishini e'tiborga olib. A nuqtada

$$H_1 dx + p_1 dy - (H_2 dx + p_2 dy) = 0,$$

yoki

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{H_1 - H_2}{p_1 - p_2} \tag{6}$$

tenglikni topamiz, bu yerda H_1, H_2, va p_1, p_2 – γ_1 va γ ekstremallar uchun A nuqtada $H = F - y'F_{y'}$ va $p = F_{y'}$ funksiyalarning qiymatlari, $\frac{dy}{dx}$ – A nuqtadan giperbolaga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti.

Biz H_1 va H_2larni x, y, p larning funksiyasi sifatida qarashimiz mumkin. Bu holda $H_1 = H(x, y, p_1)$ va $H_2 = H(x, y, p_2)$ deb olish mumkin, bu yerda (x, y) lar A nuqtaning koordinatalari. U holda (1) tenglama

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{H_1(x, y, p_1) - H_2(x, y, p_2)}{p_1 - p_2} \tag{7}$$

ko'rinishini oladi. Aytaylik endi, $s(G_1, G_2)$ tayinlangan A_0 nuqta orqali o'tuvchi G_1, G_2 fokal egri chiziqli giperbolaning yoyi bo'lsin. Agar G_1 egri chiziq G_2 egri chiziqqa cheksiz yaqinlashsa, ε qanchalik kichik bo'lmasin, ma'lum vaqtdan boshlab G_1 egri chiziq G_2 egri chiziqdan birinchi tartibli ε – yaqinlikda bo'ladi. unda bu holda $s(G_1, G_2)$ giperbolaning yoyi A_0 nuqta orqali o'tuvchi va G_1 egri chiziqqa transversal bo'lgan ekstremallarga cheksiz yaqinlashadi. Boshqacha qilib aytganda, fokal egri chiziqlarning birlashishida har bir giperbolaning yoyi ekstremallar yoyida buziladi. J – giperbolaning bu xossasi oddiy giperbola buzilish holining tabiiy umumlashmasi bo'ladi.

Isbot qilish uchun e'tiboringizni quyidagiga qaratamiz: agar G_2 o'zining o'zgarishi davomida G_1 ga birlashsa, u holda γ_2 ham γ_1 ga birlashib ketadi, bundan, p_2 p_1 ga intiladi, (7) tenglamani

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial p} \tag{8}$$

tenglamaga o'tishiga e'tiborni qaratamiz. Bu tenglamadagi $p = F_1(x, y, y')$ ifodadagi x, y – A nuqtaning koordinatalari, y' – A nuqtadan γ_1 ga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti. (8) tenglama Eylerning kanonik formadagi klassik tenglamalaridan biri.

Ikkinchi tenglamani olish uchun G_1 egri chiziqqa transversal bo'lgan $\{\gamma\}$ ekstremallar dastasini quramiz. Ravshanki, γ_1 chiziq shu dastada yotadi. Oldingidek, $J(x,y)$ orqali $A(x,y)$ nuqtadan G_1 egri chiziqqacha bo'lgan J – masofani belgilaymiz.

$$dJ = \left| H(x, y, y')dx + p(x, y, y')dy \right| \quad \left| H(x + \Delta x, y + \Delta y, y')dx + p(x + \Delta x, y + \Delta y, y')dy \right|$$

formulaga ko'ra

$$dJ = Hdx + pdy$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda $H = H(x, y, p)$ va $p = F_1(x, y, y')$. $A(x,y)$ nuq-tadan $\{\gamma\}$ dastaning ekstremallariga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti. Bu yerdan to'la differensialning shartiga ko'ra.

$$\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

tenglikni olamiz. (4) ko'ra $-\frac{\partial y'}{\partial x}$ ni $\frac{\partial H}{\partial p}$ orqali almashtirib.

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy'}{dx} \qquad (9)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Agar (8) tenglamani o'ng tomonini $\frac{dy'}{dx}$ to'la differensial bilan almashtirsak, u holda u (8) tenglama bilan birgalikda izlanayotgan kanonik formadagi Eyler tenglamasini beradi.

Shunday qilib, keltirilgan mulohazalar bizni quyidagi natijaga

olib keldi.

2-teorema. Agar G_1 fokal egri chiziq G_1 fokal egri chiziqqa birlashsa, u holda $A(x,y)$ nuqta orqali o'tuvchi J – giperbolaning shohi. $A(x,y)$ nuqta orqali o'tuvchi va G_1 ga transversal bo'lgan ekstremalga aylanadi.

Agar G_1 va G_2 egri chiziqlar nuqtalarga (fokuslarga) aylansa, ekstremallar to'g'ri chiziqlar bo'lsa, u holda isbot qilingan teorema oddiy gipebolani buzilishiga nisbatan ma'lum bo'lgan natijani beradi.

Agar ekstremallar sirtda geodezik bo'lsa, u holda isbot qilingan teorema oddiy giperbolaning xossasini sirtdagi J– giperbola geometriyasidagi tabiiy umumlashmasini beradi.

Isbot qilingan teoremaning natijasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

3- teorema. Agar $J(x,y)$ $A(x,y)$ nuqtadan $G_2(x,y): y = \varphi(x)$, bu yerda α parametr, chiziqqacha bo'lgan J– masofa bo'lsa va agar α o'zining xususiy xosilalari bilan birga uzluksiz bo'lsa, u holda bu yerda β da

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta$$

ekstremal tenglamasi bo'ladi.

Aslida (10)

$$J(x, y, \alpha') - J(x, y, \alpha) = const$$

qandaydir J– giperbolani aniqlaydi. (10) tenglikdagi o'zgarmas miqdorni $\beta(\alpha' - \alpha)$ ga teng deb tanlaymiz. U holda J– giperbola tenglamasi

$$\frac{J(x,y,\alpha+\Delta\alpha)-J(x,y,\alpha)}{\Delta\alpha}\to\beta. \qquad (11)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Agar $\alpha\to\alpha_0$ intilsa, ya'ni γ_α egri chiziq G_1 ga intilsa, u holda giperbola ekstremlga o'tadi. (11) tenglamadan bu ekstremal bo'ylab

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha}=\beta$$

ekanligi kelib chiqadi.

Yakobining integrallash usuli. Yuqoridagi mulohazalardan Eyler tenglamasini (oddiy tenglamalar) integrallash masalasi bilan xususiy hosilali tenglamalar orasida bog'lanishni juda oson o'rnatish mumkin.

Oldindan quyidagi ikki teoremani isbot qilamiz.

4-teorema. *Agar γ egri chiziq $C^1[a,b],R^n)$ sinfdan olingan bo'lsa, u holda $A(x,y)$ nuqtadan γ egri chiziqqacha bo'lgan J– masofa quyidagi xususiy hosilali differensial tenglamani*

$$\frac{\partial J}{\partial x}=H\left(x,y,\frac{\partial J}{\partial y}\right) \qquad (12)$$

qanoatlantiradi, bu yerda H oldingi paragraflarda aniqlangan x,y,P o'zgaruvchilarning funksiyasi.

Aslida J– masofa $A(x,y)$ nuqta bilan G egri chiziqni tutashtiruvchi va G egri chiziqqa transversal bo'lgan γ ekstremalning yoyi. Aytaylik, B nuqta γ ekstremal yoyining G egri chiziqda yotuvchi oxirgi uchi bo'lsin. Endi $A(x,y)$ nuqtadan unga yaqin bo'lgan $A'(x+dx,y+dy)$ nuqtaga o'tamiz. γ' orqali B nuqtani G egri chiziq bilan transversal tutashtiruvchi $A'B'$ ekstremalni belgilaymiz. γ ekstremalning G egri chiziqda yotuvchi oxirgi B uchining koordinatalari γ' yoyiga o'tishda dx_0,dy_0 orttirmalarni olsin. J– masofaning $A(x,y)$ nuqtadan A' nuqtaga o'tishdagi orttirmasi

$$dJ=\left[H(x,y,y')dx+p(x,y,y')dy\right]-\left[H_0(x_0,y_0,y_0')dx_0+p_0(x_0,y_0,y_0')dy_0\right]$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Lekin γ ekstremalni G egri chiziqqa transversalligi natijasida ikkinchi qavs yo'qoladi. Binobarin, $dJ=Hdx+pdy$ tenglikga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$H=\frac{\partial J}{\partial x},\quad p=\frac{\partial J}{\partial y},$$

tengliklarga ega bo'lamiz. H ni x,y,p o'zgaruvchilarning funksiyasi deb qarab, dastlabki

$$\frac{\partial J}{\partial x}=H\left(x,y,\frac{\partial J}{\partial y}\right)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

5- teorema (teskari). *Agar $J(x,y)=\varphi(x,y)$ o'zgaruvchili funksiya o'zining xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz, (1) tenglamani qanoatlantirsa, u holda shunday K soni topiladiki, $J(x,y)=K$ oyirma qanoatlantirsa, u holda shunday K soni topiladiki, $J(x,y)=K$ egri chiziqqacha bo'lgan J– masofani $A(x,y)$ nuqtadan $J(x,y)=K$ egri chiziqqacha bo'lgan J– masofani ifodalaydi (K shunday o'zgarmaski, $J(x,y)=K$ tenglama haqiqatda $C^1[a,b],R^n)$ sinfdan olingan egri chiziqni ifoda qiladi).*

Aslida, G orqali $J(x,y)=K$ tenglama bilan ifodalangan egri chiziqni belgilasak, 1-teoremaga ko'ra, $A(x,y)$ nuqtadan $J(x,y)=K$ egri chiziqqacha bo'lgan J– masofa, biz uni J_1 bilan belgilaymiz. (1) tenglamani qanoatlantiradi. J (12) tenglamaga oshkor holda bog'liq

bo'lmaganligi sababli, $J^* = J(x,y) - K$ ham (12) tenglamaning integrali bo'ladi. $J^*(x,y)$ ning geometrik ma'nosiga ko'ra va G bo'yicha teoremaning shartiga ko'ra, $J_1 = J^* = 0$ tenglikka ega bo'lamiz. Lekin (12) ko'rinishdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumki, agar integrallar biror egri chiziq bo'ylab ustma-ust tushsa, u holda ular butun hamma joyda ustma-ust tushadi, binobarin, $J_1(x,y) = J^*(x,y)$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremani xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasiga murojaat qilmasdan isbot qilsa ham bo'ladi. Masalan, $J(x,y) = K$ oilaning barcha chiziqlarini transversal kesuvchi har qanday chiziq ekstremal bo'lishligini o'rnatish mumkin. Bu yerdan kelib chiqadiki, $J(x,y) = K$ oila transversal maydon bo'ladi. Endi $J = K_1$ va $J = K_2$ transversallar orasidagi J- masofani $K_2 - K_1$ ayirmaga aniq teng bo'lishini ko'rsatish qoldi halos.

Bizga ma'lumki (12) tenglama Gamilton-Yakobi tenglamasi deb ataladi. Yakobi birinchi bo'lib, (12) tenglamani integrallash masalasi Eyler tenglamasini integrallashga kelishi va aksincha ekanligini ko'rsatgan.

6-teorema. *(12) Gamilton-Yakobi tenglamasini to'la integralini bila turib,*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \qquad (13)$$

Eyler tenglamasini umumiy integralini topish mumkin va aksincha. (13) Eyler tenglamasini umumiy integralini bila turib, Gamilton-Yakobi tenglamasining to'la integralini topish mumkin.

Aytaylik, biz Eyler tenglamasining ikki parametrga bog'liq bo'lgan

$$y = y(x, \alpha, \beta) \qquad (14)$$

umumiy integralini topgan bo'laylik. Har bir (x,y) nuqtadan ixtiyoriy yo'nalishga (13) oilaning ekstremalini o'zkazish mumkin. $C^1([a,b], R^1)$ sinfdan olingan ixtiyoriy egri chiziqqa ega bo'laylik. Bu egri chiziqning har bir nuqtasida G egri chiziqqa transversal bo'lgan yo'nalishni belgilash mumkin. Shu yo'nalish bo'yicha G egri chiziqqa transversal bo'lgan (14) oilaning ekstremalini o'tkazish mumkin, demak, ixtiyoriy (x,y) nuqtadan G egri chiziqqacha J- masofa tushunchasini aniqlash kerak. Bu J- masofa Gamilton-Yakobi tenglamasini

$$\frac{\partial J}{\partial x} = H\left(x, y, \frac{\partial J}{\partial y}\right)$$

qanoatlantiradi. Gamilton-Yakobi tenglamasiga oshkor holda J ning o'zi emas, uning faqat hosilasi kirganligi sababli, u holda ixtiyoriy o'zgarmas K da $J(x,y)+K$ funksiya ham Gamilton-Yakobi tenglamasini yechimi bo'ladi. Endi bir parametrli G_α yassi egri chiziqlarning qaysiki, tekislikning hech bir qismida transversal maydon tashkil etmaydigan oilasini qaraylik. $J(x,y,\alpha)$ orqali $A(x,y)$ nuqtadan G_α egri chiziqqacha bo'lgan J- masofani belgilaymiz. Eyler tenglamasini yechishni bila turib, biz hozir ko'rgan $J(x,y,\alpha)$ funksiyani aniqlashimiz mumkin. β o'zgarmasni qo'shib, Yakobi tenglamasini $J(x,y,\alpha)+\beta$ ikki parametrga bog'liq bo'lgan yechimini olamiz (Gamilton-Yakobi tenglamasining to'la integrali deb nomlanuvchi). G_α transversal maydon tashkil etmasligi shartidan α, β ixtiyoriy o'zgarmaslarni bittaga keltirish mum-

kin emasligi kelib chiqadi.

Haqiqatda, teskarisidan faraz qilamiz. Ravshanki, β o'zgarmas α ga bog'liq emas, u holda α va β ni bitta o'zgarmasga faqat shu holda keltiriladiki, qachonki, α additiv o'zgarmas bo'lsa, ya'ni qachonki,

$$J(x,y,\alpha)=J(x,y,\alpha)+\alpha,$$

bo'lsa. U holda, agar G_α va G_{α_1} oilaning ikkita ixtiyoriy egri chizig'i bo'lsa, u holda ular orasidagi masofa $J(x,y,\alpha_1)-J(x,y,\alpha)=\alpha_1-\alpha$ ga teng bo'ladi ((x,y) orqali tekislikning ixtiyoriy $A(x,y)$ nuqtasining koordinatalarini belgilaymiz), ya'ni G_{α_1} va G orasidagi J- masofa o'zgarmas, binobarin, bundan G_α oila transversallar oilasi bo'ladi. bunday bo'lishi mumkin emas.

Aytaylik, teskarisi bo'lsin, ya'ni Gamilton-Yakobi tenglamasining to'la integrali berilgan bo'lsin. Bu integralni Gamilton-Yakobi tenglamasiga oshkor holda J ning o'zi emas, uning faqat hosilasi kirganligidan, uni

$$J=J(x,y,\alpha)+\beta$$

formada olish mumkin. 2- teoremaga ko'ra, berilgan α da $J(x,y,\alpha)=K$ funksiya $A(x,y)$ nuqtadan $J(x,y,\alpha)=K$ egri chiziqqacha bo'lgan J- masofani ifodalaydi, bunda K – qandaydir o'zgarmas. Oldingi paragrafdagi 3-teoremaga ko'ra, $\frac{\partial J}{d\alpha}$ ifodani o'zgarmasga tenglab,

$$\frac{\partial J}{d\alpha}=\beta \qquad (15)$$

ekstremalni olamiz. Bu ekstremal ikkita α va β parametrlarga bog'liq-

Shunday qilib, (15) formula bizga Eyler tenglamasining umumiy integralini beradi.

3-izoh. *Ko'rish mumkinki, (14) tenglamada ishtirok etayotgan α va β ixtiyoriy o'zgarmaslarni bitta ixtiyoriy o'zgarmasga keltirib bo'lmaydi, aks holda mazkur Gamilton-Yakobi tenglamasining integrali $J(x,y)=\varphi(\alpha)+\beta$ ko'rinishga ega bo'lishi mumkin edi, ya'ni to'la integral bo'lmas edi.*

Qo'shimcha. Ma'lumki, birinchi tartibli xususiy hosilali tenglamaning umumiy integrali deb, ifodasida ixtiyoriy funksiya ishtirok etgan integral tenglamaga aytiladi.

$A(x,y)$ nuqtadan $C^1([a,b],R^2)$ sinfdan olingan ixtiyoriy G egri chiziqgacha bo'lgan J- masofani qaraymiz. $J(x,y)$ funksiya ixtiyoriy G egri chiziqqa bog'liq bo'lgan Gamilton-Yakobi tenglamasining integrali bo'lsin. Bundan, umumiy integralning ta'rifiga ko'ra, $J(x,y)$ funksiya Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integrali bo'ladi.

Shunday qilib, Eyler tenglamasining umumiy integralini bilib, biz mos ravishda Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integralini qurishimiz mumkin.

6-misol. Aytaylik, $F=\sqrt{1+y'^2}$ ko'rinishda bo'lsin. Bu holda

$$H=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=\sqrt{1-p^2}, \qquad p=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

bo'ladi. Gamilton-Yakobi tenglamasi

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2=1,$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi G_α chiziq sifatida koordinata boshidan o'tuv-

kin emasligi kelib chiqadi.

Haqiqatda. teskarisidan faraz qilamiz. Ravshanki. β o'zgarmas α ga bog'liq emas, u holda α va β ni bitta o'zgarmasga faqat shu holda keltiriladiki, qachonki. α additiv o'zgarmas bo'lsa, ya'ni qachonki,

$$J(x,y,\alpha) = J(x,y,\alpha) + \alpha.$$

bo'lsa. U holda, agar G_1 va G_2 oilaning ikkita istiyoriy egri chizig'i bo'lsa, u holda ular orasidagi masofa $J(x_1,y_1,\alpha)-J(x_0,y_0,\alpha) = \alpha - \alpha$, ga teng bo'ladi ($(x,y)$ orqali tekislikning ixtiyoriy $A(x,y)$ nuqtasining koordinatalarini belgilaymiz), ya'ni G_1 va G_2 orasidagi J- masofa o'zgarmas, binobarin, bundan G_α oila transversallar oilasi bo'ladi. bunday bo'lishi mumkin emas.

Aytaylik, teskarisi bo'lsin, ya'ni Gamilton-Yakobi tenglamasining to'la integrali berilgan bo'lsin. Bu integralni Gamilton-Yakobi tenglamasiga oshkor holda J ning o'zi emas. uning faqat hosilasi kirganligidan, uni

$$J = J(x,y,\alpha) + \beta$$

formada olish mumkin. 2- teoremaga ko'ra. berilgan α da $J(x,y,\alpha)=K$ funksiya $A(x,y)$ nuqtadan $J(x,y,\alpha)=K$ egri chiziqqacha bo'lgan J- masofani ifodalaydi. bunda K – qandaydir o'zgarmas. Oldingi paragrafdagi 3-teoremaga ko'ra, $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$ ifodani o'zgarmasga tenglab,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta \qquad (15)$$

ekstremalni olamiz. Bu ekstremal ikkita α va β parametrlarga bog'liq.

Shunday qilib. (15) formula bizga Eyler tenglamasining umumiy integralini beradi.

3-izoh. *Ko'rish mumkinki. (14) tenglamada ishtirok etayotgan α va β ixtiyoriy o'zgarmaslarni bitta ixtiyoriy o'zgarmasga keltirib bo'lmaydi. aks holda mazkur Gamilton-Yakobi tenglamasining integrali $J(x,y) = \varphi(\alpha) + \beta$ ko'rinishga ega bo'lishi mumkin edi. ya'ni to'la integral bo'lmas edi.*

Qo'shimcha. Ma'lumki. birinchi tartibli xususiy hosilali tenglamaning umumiy integrali deb. ifodasida ixtiyoriy funksiya ishtirok etgan integral tenglamaga aytiladi.

$A(x,y)$ nuqtadan $C^1([a,b],R^2)$ sinfdan olingan ixtiyoriy G egri chiziqgacha bo'lgan J- masofani qaraymiz. $J(x,y)$ funksiya ixtiyoriy G egri chiziqqa bog'liq bo'lgan Gamilton-Yakobi tenglamasining integrali bo'lsin. Bundan, umumiy integralning ta'rifiga ko'ra, $J(x,y)$ funksiya Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integrali bo'ladi.

Shunday qilib, Eyler tenglamasining umumiy integralini bilib, biz mos ravishda Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integralini qurishimiz mumkin.

6-misol. Aytaylik. $F = \sqrt{1+y'^2}$ ko'rinishda bo'lsin. Bu holda

$$H = -\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} = \sqrt{1-p^2}, \qquad p = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

bo'ladi. Gamilton-Yakobi tenglamasi

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi G_α chiziq sifatida koordinata boshidan o'tuv-

chi to'g'ri chiziqlarni olamiz: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$. Bunday holda $A(x,y)$ nuqtadan G_α gacha bo'lgan $J(x,y,\alpha)$ J- masofa: $A(x,y)$ nuqtadan

$$J(x,y,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

to'g'ri chiziqqacha bo'lgan odatdagi masofa bo'ladi. 1-teoremaga ko'ra, (16) tenglamaning integrali

$$J(x,y,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha + \beta,$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda α va β ixtiyoriy o'zgarmaslar.

7-misol. Aytaylik,

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)},$$

ko'rinishga ega bo'lsin. Bu holda

$$H = \frac{y'}{v\cdot\sqrt{1+y'^2}}, \qquad H'_{y'} = p = \frac{1}{[v(x,y)]^2},$$

bo'ladi. Gamilton-Yakobi tenglamasi

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2},$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunday holda $A(x,y)$ nuqtadan ixtiyoriy G egri chiziqqacha bo'lgan masofa, $A(x,y)$ nuqtadan G egri chiziqqacha bo'lgan optik masofani ifodalaydi. $v = v$ xususiy holini qaraymiz. bu holda masalaning ekstremallari Ox o'qiga ortogonal bo'lgan aylanalarni beradi. Yana G_α egri chiziq sifatida

$$J(x,y,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

to'g'ri chiziqlarni olamiz, u holda $A(x,y)$ nuqtadan G_α egri chiziqqacha bo'lgan $J(x,y,\alpha)$

$$J(x,y,\alpha) = \rho\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \varphi\right),$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda α va φ – $A(x,y)$ nuqtaning qutb koordinatalari. Bu yerdan $v = v$ da (12) tenglamaning quyidagi to'la integralini olamiz

$$J = \sqrt{x^2+y^2}\left(\alpha_1 - arctg\frac{y}{x}\right) + \beta,$$

bu yerda α_1 va β – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

O'zgaruvchilari ajraladigan hol. Biz hozirgacha quyidagi teoremani isbot qilamiz:

7-teorema. *Agar Gamilton-Yakobi tenglamasini*

$$\Phi\left(x, \frac{\partial J}{\partial x}\right) + \tilde{\Phi}\left(y, \frac{\partial J}{\partial y}\right) = 0,$$

ko'rinishga keltirish mumkin bo'lsa, u holda Gamilton-Yakobi va Eyler tenglamalarini integrallab (kvadraturada) yechish mumkin.

$$\Phi\left(x, \frac{\partial J}{\partial x}\right) = \alpha, \qquad \text{va} \qquad \tilde{\Phi}\left(y, \frac{\partial J}{\partial y}\right) = -\alpha,$$

deb olamiz, bu yerda α – ixtiyoriy o'zgarmas. Bu tenglamalarni mos ravishda $\frac{\partial J}{\partial x}$ va $\frac{\partial J}{\partial y}$ hosilalarga nisbatan yechib,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \Phi_1(x,\alpha), \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = \tilde{\Phi}(y,\alpha).$$

tengliklarni olamiz. Bu yerdan birdaniga Gamilton-Yakobi tenglamasining quyidagi to'la integralini olamiz:

$$J = \int \frac{\partial \Phi_1(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx + \int \frac{\partial \tilde{\Phi}_1(x,\alpha)}{\partial \alpha} dy,$$

oldingi paragrafdagi 5-teoremani qo'llab, mos ravishda Eyler tenglamasining umumiy integralini olamiz:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\int\frac{\partial\Phi_1(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+\int\frac{\partial\Phi_2(x,\alpha)}{\partial\alpha}dy=\beta.$$

3.2. Liuvillning geodezik tenglamani integrallash holi. Aytaylik, sirtda chiziq uzunligining elementi

$$ds^2=[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]\left(dx^2+dy^2\right).$$

ko'rinishga ega bo'lsin. Gamilton-Yakobi tenglamasi

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2=\varphi_1(x)+\varphi_2(y).$$

ko'rinishda bo'ladi. J geodezik uzunlik bo'ladi, ya'ni

$$J=\int ds=\int\sqrt{[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]\left(dx^2+dy^2\right)}.$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2=\varphi_1(x)-\alpha,\quad\left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2=\alpha+\varphi_2(y).$$

deb olamiz, bu yerdan Gamilton-Yakobi tenglamasining to'la integralini olamiz:

$$J=\int\sqrt{\varphi_1(x)-\alpha}dx+\int\sqrt{\alpha+\varphi_2(y)}dy. \tag{16}$$

Geodezik tenglama

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\varphi_1(x)-\alpha}}+\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\varphi_2(y)}}=\beta. \tag{17}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu formulalar Liuvill tomonidan topilgan.

Shunday qilib, (17) geodezik tenglama v (16) ifoda uning uzunligi uchun integrallash yo'li bilan topiladi.

Agar uzunlik elementi

$$ds^2=[\varphi_1(x)+\varphi_2(y)]\left(\psi_1(x)dx^2+\psi_2(y)dy^2\right).$$

ko'rinishga ega bo'lsa, geodezik tenglamani integrallash Liuvill holiga keltiriladi. Aslida

$$\psi_1(x)dx^2=du^2,\qquad\psi_2(y)dy^2=dv^2,$$

deb olib, so'ngra x ni u orqali, y ni v orqali ifoda qilib,

$$ds^2=\{\varphi_1[x(u)]+\varphi_2[y(v)]\}\left(du^2+dv^2\right),$$

tenglikni olamiz. Biz Liuvill holiga keldik. Geodezik uzunlik

$$J=\int\sqrt{\varphi_1[x(u)]-\alpha}du+\int\sqrt{\alpha+\varphi_2[y(v)]}dx=$$

$$=\int\sqrt{\varphi_1(x)-\alpha}\sqrt{\psi_1(x)}dx+\int\sqrt{\alpha+\varphi_2(y)}\sqrt{\psi_2(y)}dy,$$

integral orqali ifoda qilinadi. $\frac{\partial J}{\partial\alpha}=\beta$ geodezik tenglama esa

$$\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)-\alpha}}dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{\psi_2(y)}{\alpha+\varphi_2(y)}}dy=\beta,$$

ko'rinishni oladi.

Ellipsoidda geodezik uzunlik va chiziq tenglamasi. Elliptik koordinatalar. Aytaylik, a_1,a_2,a_3 – ixtiyoriy turli haqiqiy sonlar $a_1>a_2>a_3>0$ bo'lsin. Ikkinchi tartibli S_k sirtlar sistemasini qaraymiz:

$$\frac{x^2}{k_1-a_1}+\frac{y^2}{k_1-a_2}+\frac{z^2}{k_1-a_3}=1,\quad k_1>a_1\ge a_2\ge a_3>0, \tag{18}$$

Hozircha $k_1>a_1$. S_k – ellipsoid bo'ladi. (18) ellipsoidda (k_2,k_3) elliptik koordinatalar sistemasini qaraymiz $(k_1>a_1\ge a_2\ge a_3>0)$. Bu koordinatalar sistemasida ds egri chiziqning yoyi ellipsoidda quyidagicha bo'ladi

$$ds^2=\frac{1}{4}\left[\frac{(k_2-k_3)(k_2-k_3)}{(k_2-a_1)(k_2-a_2)(k_2-a_3)}dk_2^2+\frac{(k_3-k_2)(k_3-k_2)}{(k_3-a_1)(k_3-a_2)(k_3-a_3)}dk_3^2\right],$$

ko'rinishda bo'ladi. $\varphi_1=k_2,\quad\varphi_2=-k_3$, deb olib,

oldingi paragrafdagi 5-teoremani qo'llab, mos ravishda Eyler tenglamasining umumiy integralini olamiz:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial \Phi_1(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx + \int \frac{\partial \Phi_2(x,\alpha)}{\partial \alpha} dy = \beta.$$

3.2. Liuvillning geodezik tenglamani integrallash holi. Aytaylik, sirtda chiziq uzunligining elementi

$$ds^2 = [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)](dx^2 + dy^2),$$

ko'rinishga ega bo'lsin. Gamilton-Yakobi tenglamasi

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

ko'rinishda bo'ladi. J geodezik uzunlik bo'ladi, ya'ni

$$J = \int ds = \int \sqrt{[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)](dx^2 + dy^2)}.$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 = \varphi_1(x) - \alpha, \quad \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = \alpha + \varphi_2(y),$$

deb olamiz, bu yerdan Gamilton-Yakobi tenglamasining to'la integralini olamiz:

$$J = \int \sqrt{\varphi_1(x) - \alpha}\, dx + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2(y)}\, dy. \qquad (16)$$

Geodezik tenglama

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi_1(x) - \alpha}} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{\alpha + \varphi_2(y)}} = \beta. \qquad (17)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu formulalar Liuvill tomonidan topilgan.

Shunday qilib, (17) geodezik tenglama v (16) ifoda uning uzunligi uchun integrallash yo'li bilan topiladi.

Agar uzunlik elementi

$$ds^2 = [\varphi_1(x) + \varphi_2(y)](\psi_1(x)dx^2 + \psi_2(y)dy^2),$$

ko'rinishga ega bo'lsa, geodezik tenglamani integrallash Liuvill holiga keltiriladi. Aslida

$$\psi_1(x)dx^2 = du^2, \qquad \psi_2(y)dy^2 = dv^2,$$

deb olib, so'ngra x ni u orqali, y ni v orqali ifoda qilib,

$$ds^2 = \{\varphi_1[x(u)] + \varphi_2[y(v)]\}\left(du^2 + dv^2\right),$$

tenglikni olamiz. Biz Liuvill holiga keldik. Geodezik uzunlik

$$J = \int \sqrt{\varphi_1[x(u)] - \alpha}\, du + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2[y(v)]}\, dx =$$

$$= \int \sqrt{\varphi_1(x) - \alpha}\sqrt{\psi_1(x)}dx + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2(y)}\sqrt{\psi_2(y)}dy,$$

integral orqali ifoda qilinadi. $\frac{\partial J}{\partial a} = \beta$ geodezik tenglama esa

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x) - \alpha}}dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{\psi_2(y)}{\alpha + \varphi_2(y)}}dy = \beta,$$

ko'rinishni oladi.

Ellipsoidda geodezik uzunlik va chiziq tenglamasi. Elliptik koordinatalar. Aytaylik, a_1, a_2, a_3 – ixtiyoriy turli haqiqiy sonlar $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, bo'lsin. Ikkinchi tartibli S_k sirtlar sistemasini qaraymiz:

$$\frac{x^2}{k_1 - a_1} + \frac{y^2}{k_1 - a_2} + \frac{z^2}{k_1 - a_3} = 1, \quad k_1 > a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0. \qquad (18)$$

Hozircha $k_1 > a_1$. S_k – ellipsoid bo'ladi. (18) ellipsoidda (k_2, k_3) elliptik koordinatalar sistemasini qaraymiz $(k_1 > a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0)$. Bu koordinatalar sistemasida ds egri chiziqning yoyi ellipsoidda quyidagicha bo'ladi

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)}{(k_2 - a_1)(k_2 - a_2)(k_2 - a_3)}dk_2^2 + \frac{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)}{(k_3 - a_1)(k_3 - a_2)(k_3 - a_3)}dk_3^2\right],$$

ko'rinishda bo'ladi. $\varphi_1 = k_2$, $\varphi_2 = -k_3$, deb olib,

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\frac{(k_2-k_1)(k_2-k_3)}{(k_2-\alpha_1)(k_2-\alpha_2)(k_2-\alpha_3)}, \quad \psi_2 = -\frac{1}{4}\frac{(k_1-k_3)}{(k_1-\alpha_1)(k_1-\alpha_2)(k_1-\alpha_3)},$$

tengliklarni olamiz, bundan $ds^2 = (\varphi_1+\varphi_2)\left(\psi_1 dk_1^2 + \psi_2 dk_2^2\right)$, ifodani olamiz. Oldingi natijaga ko'ra, ellipsoidda geodezik uzunlik

$$J = \int \sqrt{\varphi_1 - \alpha}\sqrt{\psi_1}dk_1 + \int \sqrt{\alpha+\varphi_2}\left[\chi(v)\right]dk_2,$$

yoki

$$J = \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{(k_1-\alpha)(k_2-k_3)}{(k_1-\alpha_1)(k_1-\alpha_2)(k_1-\alpha_3)}}dk_1 + \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{(\alpha+k_2)(k_2-k_3)}{(k_2-\alpha_1)(k_2-\alpha_2)(k_2-\alpha_3)}}dk_2.$$

Xuddi shuningdek geodezik tenglama

$$\frac{1}{4}\int \sqrt{\frac{k_1-k_3}{(k_1-\alpha_1)(k_1-\alpha_2)(k_1-\alpha_3)(k_1-\alpha)}}dk_1 +$$

$$+\frac{1}{4}\int \sqrt{\frac{k_2-k_3}{(k_2-\alpha_1)(k_2-\alpha_2)(k_2-\alpha_3)(k_2+\alpha)}}dk_2 = \beta = const,$$

ko'rinishni oladi.

XII BOB

EKTREMUMNING YETARLI SHARTLARI

Bizning hozirgacha bo'lgan qarashlarimiz asosan ekstremumning zaruriy shartlari bilan bog'liq bo'ldi. Endi ekstremumning yetarli shartlariga to'xtalamiz, keyinchalik zaruriy shartlarga ham to'xtalib o'tamiz. Ekstremumning yetarli shartlarini o'rganish ekstremumning zaruriy shartlariga qaraganda ancha murakkab tuzilishni talab etadi. Xususan, endi alohida olingan ekstremalni emas, ekstremallar oilasini qaraymiz. Variatsion masalalarni tahlil qilishda ekstremallar oilasi tushun-chasi muhim rol o'ynaydi.

1-§. Ekstremallar maydoni nazariyasidan ayrim ma'lumotlar

1-ta'rif. *$y=y(x,C)$ egri chiziqlar oilasi xOy tekislikning berilgan D sohasida xos maydon (maydon) tashkil etadi deyiladi, agar shu sohaning har bir (x,y) nuqtasidan $y=y(x,C)$ oilaning bitta va faqat bitta egri chizig'i o'tsa.*

Bu yerda parametr C (x,y) nuqtalarning funksiyasi sifatida tavsiflanishi mumkin: (x,y) nuqtadan o'tuvchi $y(x,c)$ ekstremal $C=C(x,y)$ funksiyani qiymatini aniqlaydi.

$y=y(x,C)$ egri chiziqlar oilasining egri chiziqlariga (x,y) nuqtasidan o'tuvchi urinmaning $p(x,y)$ burchak koeffitsienti maydonning (x,y) nuqtasidagi *og'ishi* deyiladi. $p(x,y)=y'_x(x,C(x,y))$ funksiya $y=y(x,C)$ oilaning og'ish funksiyasi deb ataladi. Oilaning ekstremallarini $y'=p(x,y)$ differensial tenglamaning yechimi sifatida yozish mumkin.

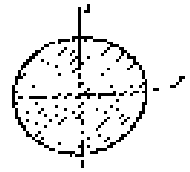
2-ta'rif. $y=y(x,C)$ egri chiziqlar oilasi xOy tekislikning D sohasida **markaziy maydon** (maydon) tashkil etadi deyiladi, agar bu egri chiziqlar D sohada yotmagan bitta $A(x_0,y_0)$ nuqtadan chiqib, o'zaro kesishmasdan butun D sohani qoplasa. $A(x_0,y_0)$ nuqta egri chiziqlar dastasining markazi deyiladi.

1-misol. a) $x^2+y^2\le 1$ aylana ichida $y=Cx$, bu yerda C - ixtiyoriy o'zgarmas, xususan $C=0$ da egri chiziqlar oilasi xos maydon tashkil etadi, bu egri chiziqlar hech qayerda kesishmaydi va bu aylananing har bir (x,y) nuqtasi orqali bu oilaning bitta va faqat bitta egri chizig'i o'tadi (38-rasm). Bu maydonning $p(x,y)$ og'ishi ixtiyoriy (x,y) nuqtada $p(x,y)=C'=1$ ifodaga teng bo'ladi.



38 - rasm

b) $x^2+y^2\le 1$ aylana ichida $y=x+C$ parallel to'g'ri chiziqlar xos maydon tashkil etadi. Bu maydonning og'ishi 39 - rasm $p(x,y)=1$ ga teng bo'ladi (39-rasm).



2-misol. a) Aksincha, $y=x^2+C$ parabolalar oilasi $x^2+y^2\le 1$ aylana ichida xos maydon tashkil etmaydi, chunki qaralayotgan parabolalar oilasi aylana ichida kesishadi (40-rasm).

40 - rasm

b) $x^2+y^2\le 1$ aylana ichida $y=(x+C)^2$ parabolalar oilasining turli egri chiziqlari kesishadi va butun sohani qoplay olmaganliklari sababli ular xos maydon tashkil etmaydi (41-rasm).



41 - rasm

3-ta'rif. Agar xos yoki markaziy maydon biror ekstremal masalaning ekstremallar oilasidan tashkil etilgan bo'lsa, u holda u ekstremallar maydoni deyiladi. Boshqacha aytganda tekislikda yotgan ekstremallar oilasi ekstremallar maydoni deyiladi.

3-misol. $J[y]=\int_0^1 y'^2\,dx$ funksionalni qaraymiz. Uning ekstremallari $y=c_1x+c_2$ bo'ladi, $y=c_2$ ekstremallar oilasi xos maydonni tashkil etadi, $y=c_1x$ ekstremallar oilasi esa markazi koordinata boshida bo'lgan markaziy maydonni tashkil etadi.

Quyidagi egri chiziqlar oilalasi berilgan sohada (xos yoki markaziy) maydon tashkil qiladimi?

177. $y=C\cdot\operatorname{tg}x$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.

178. $y=C\cdot\cos x$; a) $|x|<\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$; v) $|x|\le\pi$.

179. $y=(x-C)^2$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$.

180. $y=C\cdot(x^3-2x)$; a) $0\le x<1$; b) $-1\le x\le 3$; v) $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$.

181. $y=C\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; a) $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{3}\le x\le\pi$; v) $\frac{\pi}{4}\le x\le 2\pi$

182. $y=e^{Cx}$; $x^2+y^2\le 1$.

183. $J[y]=\int_0^a(y^2+y'^2)dx$, $a>0$ funksional uchun xos va markaziy ekstre- mallar maydoni ko'rsatilsin.

184. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1} \ldots dx$ funksional uchun xos va markaziy ekstremallar maydoni ko'rsatilsin.

Maydon tushunchasi ixtiyoriy o'lchamdagi fazo bo'lgan holga ham o'zgarishsiz o'tkaziladi. $y=\varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)$ $(i=\overline{1,n})$ oila $x,y_1,y_2,\ldots,y_n$ fazoning D sohasida maydon hosil qiladi, agar D sohaning har bir nuqtasidan $y=\varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)$ oilaning bitta va faqat bitta egri chizig'i o'tsa. Maydonning $p_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ $(i=\overline{1,n})$ og'ish funksiyalari deb, $y=\varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)$ funksiyalaridan c_i bo'yicha $(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ nuqtalarda hisoblangan xususiy hosilalarga aytiladi. Binobarin, $p_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ funksiyalarni olish uchun $\frac{\partial\varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)}{\partial c_i}$ xususiy hosilani topish va $c_1,c_2,\ldots,c_n$ elementlarni $(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ koordinatalardagi ifodalari orqali almashtirish kerak. Markaziy maydon ham xuddi shu kabi aniqlanadi.

Aytaylik, $n=xOy$ tekislikda chegaralangan bog'lamli sohu bo'lsin. $p(x,y)$ funksiya D sohada $J[y]$ funksional uchun $(1,p(x,y))$ yo'nalishlar maydonini aniqlaydi deyiladi, agarda $y'=p(x,y)$ differensial tenglamaning har bir yechimi $J[y]$ funksionalning ekstremali bo'lsa.

Ta'kidlash kerakki, differensial tenglama yechimining mavjudlik va yagonalik teoremasiga ko'ra, ekstremallar maydoni bo'ladi va D sohani bir marta qoplaydi.

4-ta'rif. *$y=y(x)$ ekstremal ekstremallar maydoniga kiritilgan deyiladi, agarda mos yo'nalishlar maydonining aniqlanish sohasi*

mazkur ekstremal grafigining atrofi va $y=y(x)$ funksiya esa bu maydon differensial tenglamasining yechimi bo'lsa.

Aytaylik, $y=y(x)$ egri chiziq

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$$

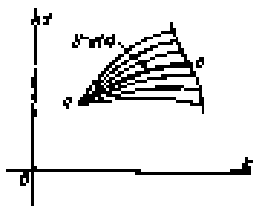
funksionalining $A(x_0,y_0)$ va $B(x_1,y_1)$ nuqtalaridan o'tuvchi ekstremali, bundan tashqari $A(x_0,y_0)$ va $B(x_1,y_1)$ nuqtalar mahkamlangan bo'lsin.

5-ta'rif. *Variatsion hisob asosiy masalaning $y=y(x)$ ekstremali ekstremallar maydoniga kiritilgan deyiladi, agar maydon tashkil etuvchi shunday $y=y(x,C)$ ekstremallar oilasi topilsaki, biror $C=C_0$ qiymatda $y=y(x)$ ekstremalni o'z ichiga oluvchi, bundan tashqari bu $y=y(x)$ ekstremal $y=y(x,C)$ oila maydon tashkil etuvchi sohaning chegarasida yotmasa (42-rasm).*

Agar markazi (x_0,y_0) nuqtada bo'lgan ekstremallar dastasi $y=y(x)$ o'sha nuqtadan o'tuvchi ekstremallar atrofida maydon tashkil etsa, u holda berilgan $y=y(x)$ ekstremalni o'z ichiga kirituvchi markaziy maydon topildi deb aytamiz. $y=y(x,C)$ oilaning parametri sifatida dastaning egri chizig'iga (x_0,y_0) nuqtadan o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti olinadi (43-rasm). Bu tushunchalar ekstremallar geometriyasida muhim rol o'ynaydi.



42- rasm



43 - rasm

4-misol. $J[y]=\int_0^{\pi}(y'^2+\sin^2 x)\,dx$ funksional uchun variatsion hisobning asosiy masalasini qaraymiz.

a) chegaraviy shartlar $y(0)=1$ va $y(2)=1$ bo'lsin. Mazkur funksional

uchun ekstremallar oilasi $y = c_1 x + c_2$ tenglamadan aniqlanadi. Berilgan chegaraviy shartni $y = x$ ekstremal qanoatlantiradi. Bu ekstremal $y = c_1 x$, bu yerda c_1 – ixtiyoriy o'zgarmas, ekstremallarning xos maydoniga kiradi. b) Aytaylik, $y(0) = 0$ va $y(2) = 4$ bo'lsin. Bu chegaraviy shartlarga javob beruvchi ekstremal $y = 2x$ to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi. Bu ekstremal $y_1 = c_1 x$ ekstremallarning markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan markaziy maydoniga kiradi. c_1 – ixtiyoriy o'zgarmas.



44 - rasm

5-misol. Quyidagi

$$J[y] = \int_0^1 y'(2x - \frac{1}{2}y')dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1/2$$

funksional uchun variatsion hisobning asosiy masalasini qaraymiz. Eyler tenglamasining yechimi $y_1 = x^2 + c_1 x + c$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu masalaning $y_1 = x^2 + x/4 - 3/4$ ekstremalini $y_1 = x^2 + x/4 + c_1$ ekstremallarning xos maydoniga kiritish mumkin (44-rasm).

Quyidagi sodda variatsion masalalarning ekstremallarini (xos yoki markaziy) maydonlarga kiritish mumkinligi ko'rsatilsin.

185. $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - 2xy)dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$

186. $J[y] = \int_0^1 (2e^x + y'^2)dx; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$

187. $J[y] = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2)dx; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0, (a > 0, a \neq k\pi).$

188. $J[y] = \int_0^2 (y'^2 + x^2)dx; \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 3.$

6-misol. Quyidagi

$$J[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx$$

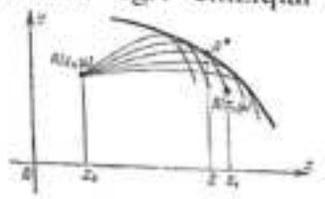
funksional berilgan.

Bu misolda $O(0,0)$ va $(a,0)$ nuqtalarni birlashtiruvchi $y = 0$ ekstremal yoyini ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish talab etiladi, bu yerda $0 < a < \pi$. $y'' + y = 0$ Eyler tenglamasining yechimi $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, ko'rinishga ega bo'ladi. Ekstremallarni $O(0,0)$ nuqtadan o'tish shartidan, $c_1 = 0$, $y = c_2 \sin x$ yechimni olamiz. Bundan tashqari bu dastaning $0 \le x \le a$, $a < \pi$ kesmadagi egri chiziqlari $c_2 = 0$ da $y = 0$ ekstremalni kirituvchi markaziy maydonni tashkil etadi. c_2 parametr y_x' hosilasining $O(0,0)$ nuqtadagi qiymatiga teng. Agar bu masalada $a \ge \pi$ bo'lsa, u holda $y = c_2 \sin x$ oila maydon tashkil etmaydi.

Ma'lumki, $F(x,y,C) = 0$ oilaning ikkita cheksiz yaqin egri chiziqlari

$$\begin{cases} F(x,y,C) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial C} F(x,y,C) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

tenglamalar sistemasidan aniqlanuvchi C – diskriminantli egri chiziqning nuqtalarida kesishadi. C – diskriminant egri chiziqlar tarkibiga, xususan, egi-luvchanlar oilasi va oila egri chiziqlari karrali nuqtalarining geometrik o'rni kiradi. Agar $F(x,y,C) = 0$ egri chiziqlar dastasining tenglamasi bo'lsa, u holda dastaning markazi ham C – diskriminantli egri chiziqda yotadi.



45- rasm

Shuning uchun, agar markazi (x_0, y_0) nuqta orqali o'tuvchi egri chiziqlar dastasini olsak va uning $\Phi(x, y, c) = 0$ diskriminant egri chizig'ini aniqlasak, u holda $y = f(x, c)$ oilasining yaqin egri chiziqlari $\Phi(x, y) = 0$ egri chiziqning yaqinida kesishadi. Xususan, bu oilaning egri chiziqlari (x_0, y_0) va (x_1, y_1) nuqtalar orqali o'tuvchi qanoatlantirgan ekstremalga yaqin bo'ladi, ular $y = \varphi(x)$ egri chiziq bilan C diskriminant egri chiziqning urinish nuqtalariga yaqin nuqtalarda kesishadi (C diskriminant qora qilib tasvirlangan 45-rasm). Agar $y = \varphi(x)$



46 - rasm

ekstremalning AB yoyi mazkur ekstremalni o'z ichiga oluvchi ekstremal dastasining C diskriminantli egri chizig'i bilan A nuqtadan farqli umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, u holda AB yoyning yetarlicha yaqinida dastaning ekstremallari kesishmaydi, ya'ni AB yoyning atrofida bu yoyni o'z ichiga oluvchi markaziy maydon tashkil etadi.

Agar $y = \varphi(x)$ ekstremalning AB yoyi $y = f(x, c)$ dastaning C diskrimi-nantli egri chizig'i bilan A nuqtadan farqli A' umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda dastaning $y = \varphi(x)$ egri chizig'iga yaqin egri chiziqlari o'zaro kesishishi mumkin va A' nuqtaga yaqin $y = \varphi(x)$ egri chiziq bilan umuman olganda maydon tashkil etmaydi (46-rasm). Bunda A' nuqta A nuqtaga *qo'shma nuqta* deb ataladi.

7-misol. $y = (x - c)^2$ egri chiziqlar oilasining C diskriminanti topilsin.

Yechish. Mazkur holda (1) tenglamaning ko'rinishi

$$y - (x - c)^2 = 0,$$
$$2(x - c) = 0,$$

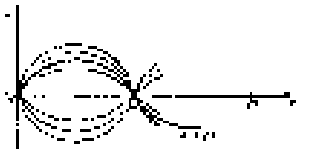
bo'ladi, bundan $y = 0$. $y = 0$ chiziq mazkur oilaning egiluvchisi ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Aslida ixtiyoriy $x = x_0$ nuqtada $y = 0$ chiziq $y = (x - c)^2$ oilaning egri chizig'i bilan umumiy urinmaga ega. So'ngra, biz $y = 0$ chiziqning qanchalik kichik qismini olmaylik, unga mazkur oilaning cheksiz ko'p egri chizig'i urinadi. Mazkur holda C diskriminant yagona egiluvchidan tashkil topgan bo'ladi.

Quyidagi misollarda berilgan oilalarning C diskriminanti topilsin:

189. $y = cx + c^2$. **190.** $y(c - x) - c^2 = 0$. **191.** $(x - c)^2 + y^2 = 1$.

8-misol. $y = c\sin x$ bir parametrli egri chiziqlar oilasini qaraymiz. Bu oilaning C diskriminanti

$$y - c\sin x = 0,$$
$$-\sin x = 0.$$



47 - rasm

tenglamalardan aniqlanadi, ya'ni $(k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ diskret nuqtalar to'plamini tasvirlaydi. (sinusoidaning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasi). Masalan, $c = 2$ deb olib, markazi $A(0,0)$ nuqtada bo'lgan sinussoidalar dastasida yotuvchi $y = 2\sin x$ egri chiziqni olamiz. Agar $y = 2\sin x$ egri chiziq yoyining boshqa B oxiri (47-rasm) $x \in (\pi, 2\pi)$ absissaga ega bo'lsa, u holda OB yoy $A(0,0)$ nuqtadan tashqari C diskriminantda yotuvchi yana bir nuqtani o'z ichiga oladi, aynan $O'(\pi, 0)$ nuqta esa $A(0,0)$ nuqtaning qo'shmasi bo'ladi. Agar $0 < x < \pi$ bo'lsa, u holda $A(0,0)$ nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtalar OB yoyda yo'q.

Shuning uchun, agar markazi (α,β) nuqta orqali o'tuvchi egri chiziqlar dastasini olsak va uning $\varphi(x,y,\alpha,\beta)=0$ diskriminant egri chizig'ini aniqlasak, u holda $\Phi(x,y,C)$ oilasining yaqin egri chiziqlari $\Phi(x,y,\alpha)=0$ egri chiziqning yaqinida kesishadi, xususan, bu oilaning egri chiziqlari $P(x_1,y_1)$ va $Q(x_2,y_2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi qanoatlantirgan ekstremalga yaqin bo'ladi. ular $y=y(x)$ egri chiziq bilan φ diskriminant egri chiziqning urinish nuqtalariga yaqin nuqtalarda kesishadi (φ – diskriminant qora qilib tasvirlangan 45-rasm). Agar $y=y(x)$



45 - rasm

ekstremalning AB yoyi mazkur ekstremalni o'z ichiga oluvchi ekstremal dastasining φ – diskriminantli egri chizig'i bilan A nuqtadan farqli umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, u holda AB yoyning yetarlicha yaqinida dastaning ekstremallari kesishmaydi, ya'ni AB yoyning atrofida bu yoyni oluvchi markaziy maydon tashkil etadi.

Agar $y=y(x)$ ekstremalning AB yoyi $y=y(x,C)$ dastaning φ diskrimi-nantli egri chizig'i bilan A nuqtadan farqli A' umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda dastaning $y=y(x)$ egri chizig'iga yaqin egri chiziqlari o'zaro kesishishi mumkin va A' nuqtaga yaqin $y=y(x)$ egri chiziq bilan umuman olganda maydon tashkil etmaydi (46-rasm). Bunda A' nuqta A nuqtaga *qo'shma nuqta* deb ataladi.

7-misol. $y=(x-c)^2$ egri chiziqlar oilasining φ – diskriminanti topilsin.

Yechish. Mazkur holda (1) tenglamaning ko'rinishi

$$y-(x-c)^2=0,$$
$$2(x-c)=0.$$

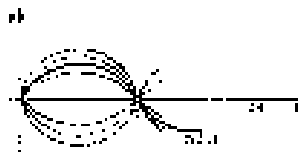
bo'ladi. bundan $y=0$, $y=0$ chiziq mazkur oilaning egiluvchisi ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Aslida ixtiyoriy $x=x_0$ nuqtada $y=0$ chiziq $y=(x-c)^2$ oilaning egri chizig'i bilan umumiy urinmaga ega. So'ngra, biz $y=0$ chiziqning qanchalik kichik qismini olmaylik, unga mazkur oilaning cheksiz ko'p egri chizig'i urinadi. Mazkur holda φ – diskriminant yagona egiluvchidan tashkil topgan bo'ladi.

Quyidagi misollarda berilgan oilalarning φ – diskriminanti topilsin:

189. $y=cx+c^2$. **190.** $x(c-x)-c^2=0$. **191.** $(x-c)^2+y^2=1$.

8-misol. $y=c\sin x$ bir parametrli egri chiziqlar oilasini qaraymiz. Bu oilaning φ – diskriminanti

$$y-c\sin x=0,$$
$$-\sin x=0,$$



47 - rasm

tenglamalardan aniqlanadi, ya'ni $(k\pi,0)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ diskret nuqtalar to'plamini tasvirlaydi. (sinussoidaning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasi). Masalan, $c=2$ deb olib, markazi $A(0,0)$ nuqtada bo'lgan sinussoidalar dastasida yotuvchi $y=2\sin x$ egri chiziqni olamiz. Agar $y=2\sin x$ egri chiziq yoyining boshqa B oxiri (47-rasm) $x\in(\pi,2\pi)$ absissaga ega bo'lsa, u holda OB yoy $A(0,0)$ nuqtadan tashqari φ – diskriminantda yotuvchi yana bir nuqtani o'z ichiga oladi, aynan $O'(\pi,0)$ nuqta esa $A(0,0)$ nuqtaning qo'shmasi bo'ladi. Agar $0<x<\pi$ bo'lsa, u holda $A(0,0)$ nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtalar OB yoyda yo'q.

Shuning uchun, agar markazi (x, y) nuqta orqali o'tuvchi egri chiziqlar dastasini olsak va uning $\Phi(x, y, c) = 0$ diskriminant egri chizig'ini aniqlasak, u holda $\Phi(x, y, c) = 0$ oilasining yaqin egri chiziqlari $\Phi(x, y) = 0$ egri chiziqning yaqinida kesishadi. Xususan, bu oilaning egri chiziqlari (x_0, y_0) va (x_1, y_1) nuqtalar orqali o'tuvchi qaralayotgan ekstremalga yaqin bo'ladi, ular $\Phi(x, y) = 0$ egri chiziq bilan c – diskriminant egri chiziqning urinish nuqtalariga yaqin nuqtalarda kesishadi (c – diskriminant qora qilib tasvirlangan 45-rasm). Agar $y = y(x)$ ekstremalning AB yoyi mazkur ekstremalni o'z ichiga oluvchi ekstremal dastasining c – diskriminantli egri chizig'i bilan A nuqtadan farqli umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, u holda AB yoyning yetarlicha yaqinida dastaning ekstremallari kesishmaydi, ya'ni AB yoyning atrofida bu yoyni o'luvchi markaziy maydon tashkil etadi.



46 - rasm

Agar $y = y(x)$ ekstremalning AB yoyi $\Phi(x, y, c) = 0$ dastaning c – diskrimi-nantli egri chizig'i bilan A nuqtadan farqli A' umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda dastaning $y = y(x)$ egri chizig'iga yaqin egri chiziqlari o'zaro kesishishi mumkin va A' nuqtaga yaqin $y = y(x)$ egri chiziq bilan umuman olganda maydon tashkil etmaydi (46-rasm). Bunda A' nuqta A nuqtaga *qo'shma nuqta* deb ataladi.

7-misol. $y = (x - c)^2$ egri chiziqlar oilasining c – diskriminanti topilsin.

Yechish. Mazkur holda (1) tenglamaning ko'rinishi

$$y - (x - c)^2 = 0,$$
$$2(x - c) = 0.$$

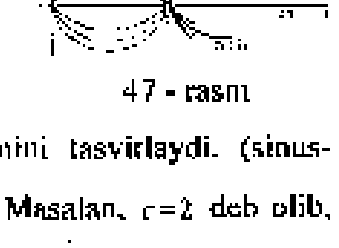
bo'ladi. Bundan $y = 0$. $y = 0$ chiziq mazkur oilaning egiluvchisi ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Aslida ixtiyoriy $x = x_0$ nuqtada $y = 0$ chiziq $y = (x - c)^2$ oilaning egri chizig'i bilan umumiy urinmaga ega. So'ngra, biz $y = 0$ chiziqning qanchalik kichik qismini olmaylik, unga mazkur oilaning cheksiz ko'p egri chizig'i urinadi. Mazkur holda c – diskriminant yagona egiluvchidan tashkil topgan bo'ladi.

Quyidagi misollarda berilgan oilalarning c – diskreminanti topilsin:

189. $y = cx + c^2$. **190.** $y(c - x) - c^2 = 0$. **191.** $(x - c)^2 + y^2 = 1$.

8-misol. $y = c\sin x$ bir parametrli egri chiziqlar oilasini qaraymiz. Bu oilaning c – diskriminanti

$$y - c\sin x = 0,$$
$$-\sin x = 0.$$



47 - rasm

tenglamalardan aniqlanadi, ya'ni $(k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ diskret nuqtalar to'plamini tasvirlaydi. (sinus-soidaning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasi). Masalan, $c = 2$ deb olib, markazi $A(0,0)$ nuqtada bo'lgan sinussoidalar dastasida yotuvchi $y = 2\sin x$ egri chiziqni olamiz. Agar $y = 2\sin x$ egri chiziq yoyining boshqa B oxiri (47-rasm) $\overline{x} \in (\pi, 2\pi)$ absissaga ega bo'lsa, u holda OB yoy $A(0,0)$ nuqtadan tashqari c – diskriminantda yotuvchi yana bir nuqtani o'z ichiga oladi, aynan $O'(\pi, 0)$ nuqta esa $A(0,0)$ nuqtaning qo'shmasi bo'ladi. Agar $0 < x < \pi$ bo'lsa, u holda $A(0,0)$ nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtalar OB yoyda yo'q.

192. $y=c(x-1)^2$ egri chiziqlar oilasi berilgan. $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma nuqta topilsin.

193. $y=cx^2$ egri chiziqlar oilasi berilgan. $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma nuqta topilsin.

Olingan natijani quyidagicha ifodalash mumkin: ekstremalning AB yoyini o'ziga oluvchi markazi A nuqtada bo'lgan ekstremallarning markaziy maydonini qurish uchun, A nuqtaga qo'shma bo'lgan A' nuqtani AB yoyda yotmasligi yetarli. Ekstremallar maydonini qurish mumkinligining bu sharti *Yakobi sharti* deb ataladi.

Yakobi shartini analitik ifodasi. Aytaylik, $y=y(x,C)$ markazi A nuqtada bo'lgan ekstremallar dastasining tenglamasi bo'lsin. Bundan tashqari c parametrni aniqlash uchun A nuqtadagi ekstremallar dastasining y burchak koeffitsiyenti bilan ustma-ust tushadi deb hisoblash mumkin, c – diskriminantli egri chiziq

$$y=y(x,C),$$

$$\frac{\partial y(x,C)}{\partial c}=0,$$

tenglamalardan aniqlanadi. Oilaning har bir tayinlangan egri chizig'ini $\frac{\partial y(x,C)}{\partial c}$ hosilasi faqat x ning funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyani qisqacha u harfi bilan belgilaymiz: $\frac{\partial y(x,C)}{\partial c}=u$. Bu yerda $c=$ berilgan, bu yerdan $\frac{\partial^2 y(x,C)}{\partial c\partial x}=u'$ bo'ladi. U holda $c=y(x,C)$ funksiya Eyler tenglamasining yechimi bo'ladi, shuning uchun

$$F_y(x,y(x,C),y'(x,C))-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y(x,C),y'(x,C))=0$$

o'rinli bo'ladi. Bu ayniyatni c bo'yicha differensiallab va $\frac{\partial y(x,C)}{\partial c}=u$ deb olib,

$$F_{yy}u+F_{yy'}u'-\frac{d}{dx}\left(F_{y'y}u+F_{y'y'}u'\right)=0,$$

yoki

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{y'y}\right)u-\frac{d}{dx}F_{y'y'}u'=0.$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda ikkinchi argument y' Eyler tenglamasining AB ekstremalga mos keluvchi $c=c_0$ deb olingan qiymatdagi $y=y(x,C)$ yechimiga teng bo'lganligi sababli. $F_{yy}(x,y,y')$, $F_{yy'}(x,y,y')$ va $F_{y'y'}(x,y,y')$ funksiyalar x ning ma'lum funksiyalari. Bu u ga nisbatan ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama. Bu tenglama *Yakobining differensial tenglamasi* deb ataladi.

Agar bu tenglamani $x=x_1$ qiymatda dastaning markazida nolga aylanuvchi $\frac{\partial y(x,C)}{\partial c}=u$ yechimi (dastaning markazi doimo c – diskriminant egri chiziqda yotadi), yana $x_0<x<x_1$ intervalning qandaydir biror nuqtasida nolga aylansa, u holda A nuqta bilan

$$y=y(x,C) \text{ va } \frac{\partial y(x,C)}{\partial c}=0, \text{ yoki } u=0$$

tenglamalardan aniqlanuvchi A' qo'shma nuqta ekstremalning AB yoyda yotadi.

Agar Yakobi tenglamasining $x=x_1$ da nolga aylanuvchi yechimi mavjud bo'lsa va $x_0\le x\le x_1$ kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmasa, u holda AB yoyda A nuqtaga qo'shma bo'lgan nuqta yo'q.

Yakobi sharti bajariladi, ekstremalning ox yoyni ekstremallarning markazi x nuqtada bo'lgan markaziy maydoniga kiritish mumkin.

9-misol.

$$J[y] = \int_0^1 (y' + x^2)dx$$

funksionalni $O(0,0)$ va $B(a,b)$ nuqtalardan o'tuvchi ekstremali uchun Yakobi sharti bajariladimi?

Yechish. Mazkur holda Yakobi tenglamasi quyidagi $u'' = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Uning umumiy yechimi $u(x) = C_1 x + C_2$. $u(0) = 0$ shartdan $C_2 = 0$ ni hosil qilamiz, bundan $u(x) = C_1 x (C_1 \neq 0)$. $u = 0$ ning hech bir qiymatida $u(x) = C_1 x$ yechim nolga aylana olmaydi. Demak, ekstremalning OB yoyida $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma nuqta yo'q. Bundan esa uni markazi $O(0,0)$ bo'lgan ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. Ko'rsatish qiyin emaski, qidirilayotgan ekstremal $y = \frac{3x}{a}$ chiziqdan iborat bo'ladi va u $u(x) = C_1 x$ tavshanki, ekstremallarning markaziy maydoniga kiradi.

10-misol. $\int_0^1 (y'^2 - 4y^2 + e^x)dx$, $(y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{2}e)$ funksionalning $A(1,0)$ va $B(1,0)$ nuqtalardan o'tuvchi ekstremali uchun Yakobi sharti bajarilad imi?

Yechish. Yakobi tenglamasi quyidagi ko'rinishda $u'' + 4u = 0$ bo'ladi. Uning umumiy yechimi $u(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$. $u(0) = 0$ shartdan $C_2 = 0$ bo'lib, $u(x) = C_1 \sin 2x$ ni hosil qilamiz. Agar $a = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $0 < x \leq a$ oraliqda $u(x)$ funksiya nolga aylana olmaydi

va Yakobi sharti bajariladi. Agar $a = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $0 < x \leq a$ Yakobi tenglamasining yechimi $u(x) = C_1 \sin 2x$ $[0, a[$ kesmada yotuvchi $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada nolga aylanadi va $y = 0$, $(0 \leq x \leq a)$ ekstremalning yoyida $A(1,0)$ nuqtaga qo'shma bo'lgan nuqta topiladi. Shunday qilib, $a = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda $x = a$ ekstremalni kirituvchi ekstremallarning markaziy maydoni mavjud emas.

Quyidagi masalalarda Yakobi shartining bajarilishi tekshirilsin:

194. $J[y] = \int_{-1}^{1} (12xy + y^2 + x^2)dx$, $y(-1) = -2$, $y(1) = 0$.

195. $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 9y^2 - 3x)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

196. $J[y] = \int_0^1 (1 + y'^2)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

197. $J[y] = \int_0^a (y'^2 + y^2)dx$, $y(0) = 1$, $y(a) = b$, $(a > 0)$.

198. $J[y] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 0$.

199. Agar $J[y] = \int_a^b F(x, y)dx$ funksionalning integral ostidagi funksiya y ni oshkor holda o'z ichiga olmasa, u holda har bir ekstremalni doimo ekstremallar maydoniga kiritish mumkinligi ko'rsatilsin.

1-izoh. Ekstremumga erishish uchun Yakobi sharti zaruriy shart ekanligini isbot qilish mumkin, ya'ni ekstremumni amalga oshiruvchi AB egri chiziq uchun A nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtani $x_1 < x < x_2$

intervalda yotishi mumkin emas. Masalan,

$$J[y]=\int_0^{\pi}\left(y'^2+1\right)dx,\quad y(0)=y(\alpha)=0,$$

funksional uchun minimum $y=0$ da amalga oshiriladi. Bu ekstremalda $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma bo'lgan nuqta yo'q.

11-misol. Quyidagi $J[y]=\int_0^{\frac{5}{4}\pi}(y'^2-y^2)dx,\quad y(0)=y(\frac{5}{4}\pi)=0,$ funksional $y=0$ nuqtada ekstremumga erishishmaydi. Shuning uchun, $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma bo'lgan $O'(\pi,0)$ nuqta $(0,\frac{5}{4}\pi)$ intervalda yotadi (yoki $u''+u=0$ Yakobi tengsizligining $x=0$ da nolga aylanuvchi yechimi $u(x)=C_1\sin x$ bo'ladi va $u(x)$ ham $x=\pi\in\left(0,\frac{5\pi}{4}\right)$ nuqtada ham nolga aylanadi). Haqiqatda, $y=0$ ga yaqin egri chiziq sifatida $y_n(x)=\frac{\sin\frac{5}{4}nx}{n^2}$ egri chiziqni olaylik, ravshanki, $y(0)=y\left(\frac{5\pi}{4}\right)=0$ shartlar bajariladi va

$$y_n'(x)=\frac{4}{5n}\cos\frac{4}{5}x$$

bo'ladi. U holda, $J[y(0)]=0$ da va ixtiyoriy butun $n>2$ da

$$J\left[\frac{\sin\frac{4}{5}nx}{n^2}\right]=\int_0^{\frac{5}{4}\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{4n}{5}x\right)}{n^4}dx-\int_0^{\frac{5}{4}\pi}\left(\frac{4}{5n}\right)^2\cos^2\left(\frac{4n}{5}x\right)dx=$$

$$=\frac{5\pi}{8n^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{16}{25}\right)<0,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bundan $y=0$ egri chiziqqa yaqin, funksionalga

manfiy qiymat beruvchi egri chiziqlar mavjud bo'lganligi sababli, $y(x)=0$ ekstremal berilgan funksionalga minimum bermaydi. Endi $y(x)=0$ egri chiziqqa ixtiyoriy tartibli yaqinlik munosabatdagi $y_n(x)=\frac{1}{n}\sin\frac{4}{5}x$ egri chiziqlar oilasini qaraylik. Ko'rish qiyin emaski,

$$J[y_n]=\int_0^{\frac{5}{4}\pi}\frac{\sin^2\frac{4}{5}x}{n^2}dx-\int_0^{\frac{5}{4}\pi}\frac{16}{25n^2}\cos^2\left(\frac{4}{5}x\right)dx=\frac{9\pi}{40n^2}>0$$

bo'ladi. Bundan berilgan funksionalning $y(x)=0$ ekstremalda ham maksimumga erisha olmasligi kelib chiqadi.

11-misol. Quyidagi $J[y]=\int_a^0(y'^2+y^2+x^2)dx$ funksionalning $A(0,0)$ va $B(a,0)$ nuqtalardan o'tuvchi ekstremali uchun Yakobi sharti bajariladimi?

Yechish. Yakobi tenglamasi $u''-u=0$ ko'rinishda bo'ladi. Uning umumiy yechimini $u=c_1\operatorname{sh}x+c_2\operatorname{ch}x$ ko'rinishda olamiz. $u(0)=0$ shartdan $c=0$ ni olamiz, u holda $u=c_1\operatorname{sh}x$ bo'ladi. Dastaning $u=c_1\operatorname{sh}x$ egri chizig'i $x=0$ nuqtada Ox o'qini kesadi. U holda Yakobi sharti ixtiyoriy a da bajariladi.

Endi $F=F(x,y,y')$ ni ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya deb hisoblab, ekstremallar tenglamasi hisoblangan Eyler tenglamasini qaraymiz:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)-\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\right)=0. \tag{2}$$

Yoyilgan holda yozsak,

$$\frac{\partial^2F(x,y,y')}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2F(x,y,y')}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2F(x,y,y')}{\partial x\partial y'}-\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\right)=0, \tag{3}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

200. Aytaylik.

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

funksionalda integral ostidagi funksiya $F(x, y, y')$ larning chegaralangan o'zgarish sohasida y, y' lar bo'yicha uchinchi tartibli chegaralangan xosilalarga ega bo'lsin. Agar $y = y(x)$ va $y = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ bir-biriga yaqin ikkita ekstremallar bo'lsa, u holda kichik miqdorning yuqori tartibli aniqlik bilan α ekstremallar orasidagi birinchi tartibli masofani taqqoslaganda $\eta(x)$ funksiya quyidagi Yakobi tenglamasini qanoatlantiradi

$$F_{yy}\eta + F_{yy'}\eta' - \frac{d}{dx}(F_{y'y}\eta + F_{y'y'}\eta') = 0.$$

6-ta'rif. Ekstremal maxsus yoki noxosdir deyiladi, agar butun uzunligi davomida

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \neq 0$$

bo'lsa.

U holda (3) tenglama

$$y' = f(x, y, y) \tag{4}$$

ko'rinishga keltiriladi, bu yerda f uzluksiz funksiya:

$$f(x, y, y') = \frac{\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y^2} - \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y}}{\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2}}.$$

Differensial tenglamaning yechimining mavjudlik teoremasiga ko'ra, f

funksiyaning uzluksizlik sohasining ixtiyoriy (x_0, y_0, z_0) nuqtasi atrofida (4) tenglamaning yechimi mavjud. Biroq, differensial tenglamalar nazariyasi bunday yechimni yagonaligini faqat f funksiyaga qo'shimcha chegara qo'yilgandagina kafolatlaydi, masalan, f funksiyadan uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishlik talab etilsa yetarli. Oxirgi shartni F funksiyani uch marta uzluksiz differensiallanuvchi deb hisoblansagina yechimni yagonaligini kafolatlash mumkin.

Agar (4) tenglamada Koshi masalasi yechimi uchun mavjud va yagonalik teoremasi o'rinli bo'lsa, u holda ma'lumki, uning umumiy yechimi ikki parametrli $y = y(x, \alpha, \beta)$ yechimlar oilasini tashkil qiladi, bu yerda α va β parametrlarni o'zgaruvchi y_0 va z_0 – boshlang'ich berilganlar deb qarash mumkin: $y(x_0) = y_0 = \alpha$, $y'(x_0) = z_0 = \beta$. Bu holda differensial tenglamalar yechimini boshlang'ich shartlarga silliq bog'liqligi haqidagi teoremaga ko'ra, $y(x, \alpha, \beta)$ va $y_x(x, \alpha, \beta)$ funksiyalar (uch o'zgaruvchili funksiya sifatida) uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi. Endi (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi tayinlangan $\alpha = y_0$ bir parametrli ekstremallar oilasini olamiz. Bu tadqiqotni quyidagi teorema darajasigacha kuchaytirasiz.

1-teorema (kiritish teoremasi). *Har qanday maxsus bo'lmagan $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, ekstremal Eyler tenglamasi uchun Koshi masalasini bir qiymatli yechilishi mumkin bo'lgan holda $y = y(x, \alpha, \beta)$, ikki parametrli ekstremallar oilasiga kiradi, bundan tashqari $y(x, \alpha, \beta)$, va $y_x(x, \alpha, \beta)$, funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.*

Maxsus bo'lmagan ekstremalning har bir (x_1, x_2) nuqtasidan $y = y(x, \beta)$, bir parametrli ekstremallar oilasi o'tadi.

Isboti. Bu yerda faqat oilaning aniqlanish sohasigina asoslashga muhtoj. Ekstremallar oilasini qurish har bir $x_0 \in [x_1, x_2]$ nuqta atrofidagina tavsiflangan. Bu atroflarni barchasini birlashmasini $[x_1, x_2]$ oraliq qoplaydi. Geyne-Borel lemmasiga ko'ra, chekli sondagi bunday atroflarni $[x_1, x_2]$ oraliq qoplagan bo'ladi. Bunday chekli sondagi birlashmalarni tayinlab qo'yamiz. x_1 nuqta atrofini va undan keyingisini qaraymiz. Bu ikki qo'shni atroflarning kesishmasida ekstremallarning lokal oilasi differensial tenglamaning mavjudlik va yagonalik teoremasiga ko'ra, ustma-ust tushishga majbur. Bu lokal ekstremallar oilasini birinchi atrofdan uning ikkinchi atrof birlashmasigacha dovam etishiga imkon beradi. Bu jarayonni bir necha bor takrorlab, chekli sondagi qadamdan so'ng uni teoremada yozilgan ekstremallar oilasiga kiritib, $y(x)$ ekstremalning ikkinchi oxiriga erishamiz (48 -rasm). Teorema isbot bo'ldi.



48 - rasm

2-izoh. *Teoremaning isbotida so'z erkinligiga yo'l qo'yildi. Qat'iy qilib aytilganda,* $\{(x, y(x), y'(x)) : x \in [x_1, x_2]\}$ *egri chiziqni qoplovchi* $(x_0, y(x_0), y'(x_0))$ *nuqtalar ustida gapirishimiz kerak edi. Bu bilan teoremaning isboti o'zgarmaydi. Bunga o'xshash jumlalarni kelgusida e'tiborga olish zarur.*

Biz hozirgacha funksional ekstremumini topish masalasini qarab.

faqat funksionalning variatsiyasi ekstremalda nolga aylanishidan iborat bo'lgan ekstremumning zaruriy sharti bilan shug'ullanib keldik. Bu ko'p o'zgaruvchili (shu bilan birga bir o'zgaruvchili) funksiya ekstremumining zaruriy shartini umumlashtiradi. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumining yetarli sharti, tadqiq qilinayotgan nuqtada ikkinchi tartibli differensialning harakatiga asoslanadi, shunga o'xshash variatsion hisobda ham, ikkinchi tartibli differensial tushunchasini umumlashtiruvchi ikkinchi variatsiya tushunchasi kiritiladi va ekstremumning yetarli sharti, tadqiq qilinayotgan ekstremal yaqinida ikkinchi variatsiyaning hatti-harakatiga quriladi (uning xossalari o'rganiladi). Bir vaqtning o'zida biz ayrim yangi zaruriy shartlarni ham o'rnatamiz.

Kelgusidagi bayon etishlardan ko'rinadiki, ekstremumning zaruriy shartlariga ancha yaqin bo'lgan, qo'llash uchun qulay bo'lgan yetarli shartlar mavjud.

Variatsion hisobda kuchli va kuchsiz ekstremumlar farqlanadi: kuchli ekstremum uzluksiz funksiyalarda qaraladi, kuchsiz ekstremum esa uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar sinfida ifoda qilinadi.

2-§. Gilbertning invariant integrali

Kelgusida oxirlari ikki berilgan γ_1 va γ_2 egri chiziqlarni tavsiflovchi $y = y(x, \lambda)$ tenglamali I o'zgaruvchan egri chiziq bo'ylab



49- rasm

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

integralni variatsiyasini qarash zarur. $y = y(x, \lambda)$ egri chiziqning siljishi

λ parametrning o'zgarishiga olib keladi. t parametr bilan l egri chiziqning chap oxiri holatini aniqlaymiz (49-rasm):

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x_1(t), \\ y = y_1(t). \end{cases}$$

U holda l egri chiziqni aniqlovchi λ parametr t parametrning funksiyasi bo'ladi: $\lambda = \lambda(t)$, bunda

$$y(x_1(t), \lambda(t)) = y_1(t),$$

aynan teng bo'ladi. l egri chiziqning o'ng oxiri t parametrning qiymati bilan to'la aniqlanganligi sababli.

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = x_2(t), \\ y = y_2(t). \end{cases}$$

deb olamiz, bunda

$$y(x_2(t), \lambda(t)) = y_2(t),$$

aynan tenglik o'rinli bo'ladi.

x_1, x_2, λ funksiyalar $t \in [a,b]$ parametrning butun o'zgarish intervalida uzluksiz differensiallanuvchi deb hisoblanadi. $y = y(x,\lambda)$ va $y' = y'_x(x,\lambda)$ funk-siyalar ham uzluksiz (xususan l egri chiziq burchak nuqtalarga ega emas) va λ parametr bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi deb hisoblanadi. Va nihoyat, $F(x,y,y')$ Lagranj funksiyasi ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi.

Shunday qilib, qaralayotgan J integral quyidagi

$$J[t] = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} F(x, y(x,\lambda(t)), y'(x,\lambda(t)))dx,$$

ko'rinishga ega bo'ladi yoki qisqacha yozadigan bo'lsak.

$$J[t] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

bo'ladi. Endi bu integralni λ parametr bo'yicha hosilasini topamiz. Parametrga bog'liq integralni differensiallash haqidagi teoremaga ko'ra,

$$\frac{dJ}{dt} = F(x_2, y_2, y'_x(x_2,\lambda))\frac{dx_2}{dt} - F(x_1, y_1, y'_x(x_1,\lambda))\frac{dx_1}{dt} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{dt}dx,$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{dF}{dz}\frac{dy_x}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}.$$

Quyidagicha ko'rinishda yozishni shartlashib olamiz

$$\frac{dJ}{dt} = \left[F \cdot \frac{dx}{dt}\right]_{x_1}^{x_2} + \frac{d\lambda}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial x}\right]dx. \qquad (5)$$

Agar qaralayotgan oilaning biror bir l egri chizig'i ekstremal bo'lsa, ya'ni u Eyler tenglamasini qanoatlantiradi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y},$$

u holda u uchun (Eyler tenglamasiga ko'ra)

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right),$$

tenglikni olamiz va bu egri chiziq uchun natija sifatida, (5) tenglikka ko'ra,

$$\frac{dJ}{dt} = \left[F \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right]_{x_1}^{x_2}, \qquad (6)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Endi quyidagi tengliklardan

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt},$$

va

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt},$$

foydalanish qoldi xalos, bular (6) tenglikni oxirgi yakuniy formada qayta yozishga imkon beradi

$$\frac{dI}{dt} = \left[F \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \right) \right]_{t_1}^{t_2}. \qquad (7)$$

yoki yoyilgan holda yozsak,

$$J(t) = F(x_2, y_2, y_1(x_2, \lambda))x_2 + F_1(x_2, y_2, y_1(x_2, \lambda))\left[y_2 - y_1(x_2, \lambda)x_2 \right] -$$

$$-F(x_1, y_1, y_1(x_1, \lambda))x_1 + F_1(x_1, y_1, y_1(x_1, \lambda))\left[y_1 - y_1(x_1, \lambda)x_1 \right].$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi l egri chiziq bo'ylab olingan

$$U = \int F(x, y, z(x, y))dx + F_2(x, y, z(x, y))\left[dy - z(x, y)dx \right].$$

egri chiziqli integralni aniqlaymiz. Bu integral na faqat γ integrallash yo'liga bog'liq, balki $z(x, y)$ funksiyaga ham bog'liqligini ta'kidlab o'tamiz:

$$U = U(\gamma, z).$$

U Gilbert integrali deb ataladi, $z(x, y)$ esa uning og'ish funksiyasi.

Agar γ egri chiziq

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

parametrik ko'rinishda berilsa, u holda Gilbert integrali quyidagi

$$U = \int_a^b \left[F(x, y, z(x, y))x' + F_2(x, y, z(x, y))\left[y' - z(x, y)x' \right] \right] dt,$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Endi faraz qilaylik, o'zgaruvchi l egri chiziq $t \in [a, b]$ parametrning barcha qiymatlarida ekstremal bo'lsin. Γ_{AC} va Γ_{BD} orqali $t = a$ va $t = b$ qiymatlarga mos kelgan oilaning ekstremallarini belgilaymiz. Yana γ_{AB} orqali A nuqtani (parametrning $t = a$ qiymatiga mos keluvchi) B nuqta (parametrning $t = b$ qiymatiga mos keluvchi) bilan tutashtiruvchi γ_1 egri chiziqning bo'lagini belgilaymiz. Xuddi shunga o'xshash γ_{CD} orqali C nuqtadan (parametrning $t = a$ qiymatiga mos keluvchi) D nuqtagacha bo'lgan γ_2 egri chiziqning bo'lagini belgilaymiz (18-rasmda oxirlari qo'zg'aluvchi ekstremallar oilasi tasvirlangan). Agar (3) tenglikni t o'zgaruvchi bo'yicha a dan b gacha bo'lgan oraliqda integrallasak, biz quyidagi

$$\{\Gamma_{BD}\} - \{\Gamma_{AC}\} = U\{\gamma_{CD}; z\} - U\{\gamma_{AB}; z\},$$

ajoyib tenglikka kelamiz, bu yerda biz ko'rishlilik bo'lishi uchun $J(b) = J(\Gamma_{BD})$ va $J(a) = J(\Gamma_{AC})$ deb oldik. $z = z(x, y)$ og'ish funksiyasi esa

$$\begin{cases} z = y_1(x, \lambda), \\ y = y(x, \lambda), \end{cases}$$

tengliklardan λ parametrni yo'qotish orqali aniqlanadi va u ekstremallar oilasining og'ish funksiyasi deyiladi.

2.1. Ikki nuqta orasidagi geodezik masofani Gilbertning invariant integrali orqali ifodalash.

Quyidagi ko'rinishdagi

$$J[l]=\int_{(A)}^{(B)} F(x,y,y')dx \qquad (8)$$

funksional maydonida

$$-Hdx+\sum_{i=1}^{n} p_i dy_i, \qquad (9)$$

ifoda qandaydir $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ o'zgaruvchili funksiyaning to'la differensiali bo'ladi,

$$\begin{cases} -H = F(x,y,u(x,y)) - \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}(x,y,u_i(x,y)),u(x,y)), \\ p_i = F_{y_i'}(x,y,u_i(x,y)). \end{cases}$$

Oxirgi tengliklar

$$-\frac{\partial H}{\partial y_i}=\frac{\partial p_i(x,u(x,y))}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial y_k}=\frac{\partial p_k}{\partial y_i}, \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

tengliklarni bajarilishini tekshirish orqali o'rnatiladi.

(9) differensial bilan o'zgarmas qo'shiluvchigacha aniqlikda aniqlanuvchi funksiya quyidagi

$$\int_{(A_0)}^{(B)} -H(x,y,p)dx+\sum_{i=1}^{n} p_i dy_i,$$

munosabat bo'ladi. Bu integral *Gilbertning invariant integrali* deyiladi (invariant, chunki u maydon ichida turgan integrallash konturiga bog'liq emas). Bu integral variatsion hisobga Gilbert tomonidan 1905 yilda kiritilgan. Boshlang'ich transversal sirtdan o'zgarmas qo'shiluvchigacha aniqlikdagi geodezik masofaning xususiy hosilasini ifodalovchi formulalar tufayli, bu geodezik masofa Gilbertning

invariant integrali orqali ifodalanadi. A va B nuqtalar orasidagi geodezik masofani B nuqtadan maydonning S boshlang'ich transversal sirtigacha bo'lgan masofa sifatida hisoblash mumkin, u holda soddalik uchun A nuqta S sirtda yotadi deb faraz qilib, oxirgi tenglikdan

$$J(B)-J(A)=\int_{(A)}^{(B)} dJ=\int_{(A)}^{(B)} -H(x,y,p)dx+\sum_{i=1}^{n} p_i dy_i=$$

$$=\int_{(A)}^{(B)}\left[F(x,y,u)-\sum_{i=1}^{n} u_i F_{y_i'}(x,y,u(x,y))\right]dx+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}(x,y,u)dy_i=$$

$$=\int_{(A)}^{(B)}\left[F(x,y,u)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dy_i}{dx}-u_i\right)F_{y_i'}(x,y,u)\right]dx, \qquad (10)$$

tenglikni topamiz. (10) formulada integrallash konturini tanlash hech qanday ahamiyatga ega emas, $\frac{dy_i}{dx}$ hosila esa tanlangan kontur bo'yicha hisoblanadi.

Agar A va B nuqtalar ekstremallar maydonida yotsa, u holda $\frac{dy_i}{dx}=u_i$ va (10) formuladan A va B nuqtalarning geodezik masofasi uchun oldin kiritilgan ifodani olamiz. Variatsion hisobda maydonlar nazariyasi birinchi bo'lib Veyershtrass tomonidan ishlab chiqilgan. Geodezik masofalardan foydalanishga asoslangan maydonning geometrik nazariyasi birinchi bo'lib Knezer tomonidan taklif etilgan.

Maydonning boshqa ta'rifi. *(1) funksionalning maydoni deb $n+1$ o'lchovli fazoning $u_1(x,y),u_2(x,y),\ldots,u_n(x,y)$ vektor funksiyalar bilan birgalikda D sohaga aytiladi, agar $u_1(x,y),u_2(x,y),\ldots,u_n(x,y)$ funksiyalar bu sohada birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega va*

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[F(x,y,u)-\sum_{i=1}^{n}uF_{u_i}(x,y,u)\right]dx+\sum_{i=1}^{n}F_{u_i}(x,y,u)dy_i.$$

Gilbert integrali C integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasdan, faqat C chiziqning boshlang'ich va oxirgi nuqtalariga bog'liq bo'lsa,

$$y_i=\varphi(x,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n),\quad (i=1,2,\ldots,n), \tag{11}$$

ekstremallarning n parametrli oilasi D sohada maydon tashkil etishi uchun Lagranj

$$[\beta_s,\beta_r]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial\beta_s}\frac{\partial p_i}{\partial\beta_r}-\frac{\partial y_i}{\partial\beta_r}\frac{\partial p_i}{\partial\beta_s}=0,\quad (s,r=1,2,\ldots,n),\quad p_i=F_{u_i},$$

qavslarining aynan nolga teng bo'lishi zarur va yetarli. Barcha Lagranj qavslari nolga teng bo'lgan n parametrli ekstremallar oilasi Mayer oilalari deyiladi.

Bu Mayer tomonidan 1905 - yilda kiritilgan.

$n=1$ bo'lganda har qanday bir parametrli ekstremallar oilasi Mayer oilasi bo'ladi. Agar (11) tenglikning barcha ekstremallari bir nuqtadan chiqsa, u holda bunday ekstremallar oilasi Mayer oilasi, hosil qilgan maydon esa markaziy maydon bo'ladi.

Bu yerda Gilbert teoremasini keltirish maqsadga muvofiq bo'ladi deb hisoblaymiz.

2-teorema (Gilbert). *D sohada yotuvchi C^1 sinfdan olingan ixtiyoriy C egri chiziq bo'yicha olingan*

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[F(x,y,u)+\left(\frac{dy}{dx}-u(x,y)\right)F_u(x,y,u)\right]dx,$$

integral faqat C egri chiziqning oxirlariga bog'liq, bu oxirlarni tutashtiruvchi egri chiziqning tanlanishiga bog'liq emas.

3-§. Kuchsiz ekstremum

Kvadratik funksional va ikkinchi variatsiya. Kelgusida bayon qilish uchun ayrim umumiy tushunchalarni kiritamiz.

1-ta'rif. *E chiziqli fazoning har bir juft x,y elementiga $f(x,y)$ sonni mos qo'yuvchi $f:E^2\to R$ akslantirishga bichiziqli forma deyiladi, agar bu akslantirish har bir argumenti bo'yicha chiziqli bo'lsa, ya'ni quyidagi*

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)=\alpha_1f(x_1,y)+\alpha_2f(x_2,y),$$
$$f(y,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\alpha_1f(x,y_1)+\alpha_2f(x,y_2),$$

tengliklar bajarilsa.

Boshqacha qilib aytganda, ikkita x,y elementlarga bog'liq bo'lgan $J[x,y]$ funksional (qandaydir chiziqli fazoda yotuvchi) biziqli deyiladi, agar tayinlangan x da u y ning chiziqli funksionali bo'lsa, tayinlangan y da esa x ning chiziqli funksionali bo'lsa. Shunday qilib, $J[x,y]$ bichiziqli deyiladi, agar

$$J[\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y]=\alpha_1J[x_1,y]+\alpha_2J[x_2,y],$$
$$J[y,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2]=\alpha_1J[x,y_1]+\alpha_2J[x,y_2].$$

Cheksiz o'lchovli fazolarni o'rganuvchi funksional analizda, xususan variatsion hisobda bichiziqli formalar biziqli funksionallar deb ataladi. Agar bichiziqli funksionallarda argumentlarni $y=x$ tenglashtirsak, biz chiziqli fazoda $G[y]=J[y,y]$ funksiyani olamiz, bunday funksionallar *kvadratik funksionallar* deb ataladi. Bichiziqli formalar chekli fazoda bichiziqli formalar deyiladi. Har qanday bichiziqli

formani $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k$ ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ va $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ – lar x va y vektorlarning qandaydir bazislari, $x = y$ deb olib, $A(x,y)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k$ kvadratik formani olamiz.

2-ta'rif. *$G[y]$ kvadratik funksional musbat aniqlangan deyiladi, agar ixtiyoriy $y\neq 0$ da $G[y]>0$ bo'lsa, manfiy aniqlangan deyiladi, agar ixtiyoriy $y\neq 0$ da $G[y]\geq 0$ bo'lsa.*

Endi ikkinchi variatsiya (ikkinchi differensial) tushunchasini kiritamiz.

3-ta'rif. *Qandaydir normallangan fazoda aniqlangan $J[y]$ funksional y nuqtada ikki marta differensiallanuvchi deyiladi, agar uning*

$$\Delta J[y]=J[y+\delta y]-J[y]$$

orttirmasini

$$\Delta J[y]=\delta J[y,\delta y]+\delta^2 J[y,\delta y]+o\left(\|\delta y\|^2\right) \qquad (12)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa, bu yerda $\delta^2 J[y,\delta y]$ – δy o'zgaruvchi bo'yicha kvadratik funksional, bu $J[y]$ funksionalning y nuqtadagi ikkinchi variatsiyasi deb nomlanadi, $o\left(\|\delta y\|^2\right)$ ifoda esa, $\delta y\to 0$ intilganda $o\left(\|\delta y\|^2\right)\|\delta y\|^2\to 0$ bo'ladi.

Agar $J[y]$ funksional uchun mavjud bo'lsa, u holda u yagona va demak, bir qiymatli aniqlanadi. Bu birinchi variatsiya kabi isbot qilinadi.

3-teorema. *Agar $J[y]$ funksional y nuqtada ikki marta differensiallanuvchi va minimumga (mos ravishda maksimum) ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy δy da $\delta^2 J[y,\delta y]\geq 0\left(\delta^2 J[y,\delta y]\leq 0\right)$, bo'ladi.*

Isboti. Teoremani $J[y]$ funksional faqat minimumga ega bo'lgan hol uchun isbot qilamiz, maksimumga ega bo'lgan hol shunga o'xshash isbot qilinadi.

Agar y funksiya $J[y]$ funksionalning minimum nuqtasi bo'lsa, u holda ekstremumning zaruriy shartiga ko'ra, y funksiyada $\delta J[y,\delta y]=0$ bo'ladi. Shuning uchun, (12) ko'rinish bu nuqtada

$$\Delta J[y]=\delta^2 J[y,\delta y]+o\left(\|\delta y\|^2\right)\geq 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. δy variatsiyani tayinlab va $\alpha\delta y$ variatsiyaga mos funksionalning orttirmasini qaraymiz, u yerda α – musbat son. Bu orttirma uchun quyidagi tengsizlik

$$\delta^2 J[y,\alpha\delta y]+o\left(\|\alpha\delta y\|^2\right)=\alpha^2\delta^2 J[y,\delta y]+o\left(\alpha^2\|\delta y\|^2\right)\geq 0,$$

o'rinli bo'ladi yoki

$$\frac{\delta^2 J[y,\delta y]}{\|\delta y\|^2}+\frac{o\left(\|\alpha\delta y\|^2\right)}{\|\alpha\delta y\|^2}\geq 0,$$

bo'ladi.

Oxirgi tengsizlikda birinchi qo'shiluvchi α ga bog'liq emas, u vaqtda yetarlicha kichik α parametrni ikkinchi tanlov sifatida oldindan berilgan $\varepsilon>0$ sonidan kichik qilish mumkin. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\frac{\delta^2 J[y,\delta y]}{\|\delta y\|^2}\geq -\varepsilon$, bo'ladi, bundan

$$\frac{\delta^2 J[y,\delta y]}{\|\delta y\|^2} > 0 \quad \text{va} \quad \delta^2 J[y,\delta y] > 0$$

kelib chiqadi. δy variatsiyani ixtiyoriy tanlash mumkinligidan xulosa qilamizki, $\delta^2 J[y,\delta y]$ kvadratik funksional manfiymas aniqlangan: $\delta^2 J[y,\delta y] \geq 0$.

3-izoh. *$J[y]$ funksional ekstremumi uchun ikkinchi variatsiyaning manfiymaslik sharti zaruriy shart bo'ladi, lekin yetarli emas. Bu hattoki, bir o'zgaruvchili funksiya uchun to'g'riligini davom qiladi.*

Minimumning yetarli shartini olish uchun quyidagi tushunchani kiritamiz.

4-ta'rif. *$\delta[y]$ kvadratik funksional kuchli musbat aniqlangan deyiladi, agar shunday $K > 0$ sonini ko'rsatish mumkin bo'lsaki, ixtiyoriy y uchun $\delta[y] \geq K\|y\|^2$ tengsizlik bajarilsa.*

Chekli o'lchovli holda kvadratik funksional kvadratik formani tasvirlaydi. kvadratik funksionalni kuchli musbatliligi uning musbat aniqlanganligi bilan teng kuchli ($K > 0$ soni sifatida kvadratik forma matritsasining xos qiymatlaridan eng kichigini olish mumkin). Cheksiz o'lchuvli fazolarda bunday emas.

4-teorema. *Agar normallangan fazoda aniqlangan ikki marta differen-siallanuvchi $J[y]$ funksionalning birinchi variatsiyasi y^* nuqtada nolga teng, ikkinchi variatsiyasi esa bu nuqtada kuchli musbat bo'lsa, u holda $J[y]$ funksional y^* nuqtada minimumga erishadi.*

Keltirilgan natijalarni variatsion hisobning sodda masalasi uchun

muhokama qilamiz. $y \in C^1[a,b]$ funksiyalar to'plamida aniqlangan, quyidagi $y(a) = y_a, y(b) = y_b$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

funksionalning ikkinchi variatsiyasini hisoblaymiz. Funksiyaning δy variatsiyasi bunday funksionallar uchun $y(a) = y(b) = 0$ bir jinsli shegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. $J[y]$ funksionalning integrantini ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya deb hisoblaymiz. U holda Teylor formulasiga ko'ra,

$$J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b \left(F_y \cdot \delta y + F_{y'} \cdot \delta y'\right)dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^b \left(F_{yy} \cdot (\delta y)^2 + 2F_{yy'} \cdot \delta y \delta y' + F_{y'y'} \cdot (\delta y')^2\right)dx + o\left(\|\delta y\|_{C_1}^2\right). \qquad (13)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

$$\|\delta y\|_{C_1} \to 0, \quad \frac{o\left(\|\delta y\|_{C_1}^2\right)}{\|\delta y\|_{C_1}^2} \to 0.$$

(13) ifoda ko'rsatadiki,

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \frac{1}{2}\int_a^b \left(F_{yy} \cdot (\delta y)^2 + 2F_{yy'} \cdot \delta y \delta y' + F_{y'y'} \cdot (\delta y')^2\right)dx, \qquad (14)$$

tenglikni bo'laklab integrallab va δy variatsiyasi uchun chegaraviy shartlardan foydalanib,

$$2\int_a^b F_{yy'} \cdot \delta y \delta y' dx = \int_a^b F_{yy'} \cdot ((\delta y)^2)' dx =$$

$$= 2\int_a^b F_{yy'} \cdot \delta y \delta y' dx = \int_a^b F_{yy'} \cdot ((\delta y)^2)' dx = \left(F_{yy'} \cdot (\delta y)^2\right)_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} F_{yy'}\right) \cdot (\delta y)^2 dx =$$

$$\frac{\delta^2 J[y,\delta y]}{\|\delta y\|^2} \to 0 \quad \text{va} \quad \alpha^2 J[y,\alpha y] \to 0$$

kelib chiqadi, δy variatsiyani ixtiyoriy tanlash mumkinligidan xulosa qilamizki, $\delta^2 J[y,\delta y]$ kvadratik funksional manfiymas aniqlangan: $\delta^2 J[y,\delta y] \geq 0$.

3-izoh. $J[y]$ funksional ekstremumi uchun ikkinchi variatsiyaning man-fiymaslik sharti zaruriy shart bo'ladi, lekin yetarli emas. Bu hattoki, bir o'zgaruvchili funksiya uchun to'g'riligini darov qiladi.

Minimumning yetarli shartini olish uchun quyidagi tushunchani kiritamiz.

4-ta'rif. *$Q[y]$ kvadratik funksional kuchli musbat aniqlangan deyiladi, agar shunday $K > 0$ sonini ko'rsatish mumkin bo'lsaki, ixtiyoriy y uchun $Q[y] \geq K\|y\|^2$ tengsizlik bajarilsa.*

Chekli o'lchovli holda kvadratik funksional kvadratik formani tasvirlaydi, kvadratik funksionalni kuchli musbatliligi uning musbat aniqlanganligi bilan teng kuchli ($K > 0$ soni sifatida kvadratik forma matritsasining xos qiymatlaridan eng kichigini olish mumkin). Cheksiz o'lchovli fazolarda bunday emas.

4-teorema. *Agar normallangan fazoda aniqlangan ikki marta differen-siallanuvchi $J[y]$ funksionalning birinchi variatsiyasi y^* nuqtada nolga teng, ikkinchi variatsiyasi esa bu nuqtada kuchli musbat bo'lsa, u holda $J[y]$ funksional y^* nuqtada minimumga erishadi.*

Keltirilgan natijalarni variatsion hisobning sodda masalasi uchun

muhokama qilamiz. $y \in C^1[a,b]$ funksiyalar to'plamida aniqlangan, quyidagi $y(a) = y_a, y(b) = y_b$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

funksionalning ikkinchi variatsiyasini hisoblaymiz. Funksiyaning δy variatsiyasi bunday funksionallar uchun $y(a) = y(b) = 0$ bir jinsli shegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. $J[y]$ funksionalning integrantini ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya deb hisoblaymiz. U holda Teylor formulasiga ko'ra,

$$J[y+\delta y] - J[y] = \int_a^b \left(F_y \cdot \delta y + F_{y'} \cdot \delta y'\right)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b \left(F_{yy} \cdot (\delta y)^2 + 2F_{yy'} \cdot \delta y \delta y' + F_{y'y'} \cdot (\delta y')^2\right)dx + o\left(\|\delta y\|_1^2\right), \qquad (13)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

$$\|\delta y\|_1 \to 0, \quad \frac{o\left(\|\delta y\|_1^2\right)}{\|\delta y\|_1^2} \to 0.$$

(13) ifoda ko'rsatadiki,

$$\delta^2 J[y,\delta y] = \frac{1}{2}\int_a^b \left(F_{yy} \cdot (\delta y)^2 + 2F_{yy'} \cdot \delta y \delta y + F_{y'y'} \cdot (\delta y')^2\right)dx, \qquad (14)$$

tenglikni bo'laklab integrallab va δy variatsiyasi uchun chegaraviy shartlardan foydalanib,

$$2\int_a^b F_{yy'} \cdot \delta y \delta y' dx = \int_a^b F_{yy'} \cdot ((\delta y)^2)' dx =$$

$$= 2\int_a^b F_{yy'} \cdot \delta y \delta y' dx = \int_a^b F_{yy'} \cdot ((\delta y)^2)' dx = \left(F_{yy'} \cdot (\delta y)^2\right)_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx}F_{yy'}\right) \cdot (\delta y)^2 dx =$$

$$= -\int_a^b \left[\frac{d}{dx} F_{y'} + F_y \right] \delta y \, dx,$$

ifodaga kelamiz. bu (14) munosabatni quyidagi ko'rinishda

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \frac{1}{2} \int_a^b \left(P(x)(\delta y')^2 + Q(x)(\delta y)^2 \right) dx, \qquad (15)$$

yozishga imkon beradi, bu yerda

$$Q = \frac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right), \qquad P = \frac{1}{2} F_{y'y'}.$$

Bu ifodadan kelgusida foydalanamiz.

4-izoh. Agar δy kichik funksiya bo'lsa, u holda $\delta y(a) = 0$ chegaraviy shartni hisobga olsak, δy kichik funksiya bo'ladi.

$$\delta y(x) = \int_a^x \delta y'(t)\, dt,$$

va integralni baholash teoremasiga ko'ra,

$$|\delta y(x)| < \int_a^x |\delta y'(t)|\, dt \le \max_{[a,b]} |\delta y'(t)| (b-a).$$

tengsizlikka ega bo'ladi.

Funksiyaning kichikligi hosilani kichikligini anglatmaganligi sababli, (masalan: $h(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon)$), teskarisi o'rinli emas (biz shunday $\delta y(x)$ funksiya qurishimiz mumkinki, funksiyaning o'zi kichik hosilasi esa katta bo'lishi mumkin). (15) ko'rinishdagi ikkinchi variatsiyada $P(\delta y')^2$ qo'shiluvchi muhim rol o'ynadi, ya'ni $P(\delta y')^2$ qo'shiluvchi $(M\delta y)^2$ ikkinchi qo'shiluvchidan ko'p marta katta bo'lishi mumkin, lekin $P \neq 0$ bo'lganda ko'p marta kichik bo'lishi mumkin emas. Shuning uchun, ikkinchi variatsiyaning ishorasi ko'rsatilgan

qo'shiluvchining ishorasiga bog'liq.

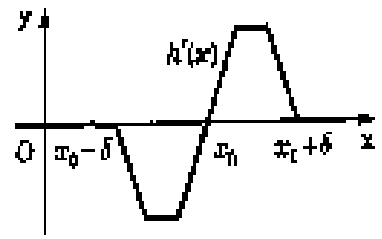
Shu munosabat bilan quyidagi teoremani keltiramiz.

5-teorema. Agar

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b \left(Q(x)h^2 + P(x)h'^2 \right) dx, \quad P = P(x), \quad Q = Q(x), \ (a \le x \le b), \qquad (16)$$

funksional $h \in C^1[a,b]$ funksiyalarning chiziqli fazosida aniqlangan, quyidagi $h(a) = y(b) = 0$, birjinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi, manfiymas aniqlangan bo'lsa, u holda $[a,b]$ kesmaning hamma joyida $P(x) \ge 0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisidan faraz qilamiz, ya'ni $P(x)$ $[a,b]$ kesmaning hamma joyida manfiymaslik sharti bajarilmasin, qandaydir x_0 nuqtada $P(x) < 0$ bo'lsin. Bu holda (16) funksional $h(x)$ funksiyaning mos tanlovida manfiy qiymatlarni qabul qilishini ko'rsatamiz.



50 - rasm

U holda $x_0 \in (a,b)$ nuqtani va uning $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ atrofini tanlash mumkinki, qaysiki, $P(x) \le P(x_0)/2 < 0$ bo'ladi. Agar $h \in C^1[a,b]$ funksiya aynan nolga teng bo'lmasa, lekin $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ atrofidan tashqarida nolga teng bo'lsa, u holda h' funksiya uzluksiz va hech bo'lmaganda bitta nuqtada noldan farqli bo'lganligi sababli,

$$\int_a^b P(x)(h')^2 dx < 0,$$

bo'ladi.

Endi ko'rsatilgan turdagi h funksiyani shunday tanlaymizki, yuqoridagi integral manfiy qolsin, integral ostidagi birinchi qo'shiluvchi esa imkon darajasida kichik integralni bersin. Aytaylik, $(x_0+\delta/3\le x\le x_0+2\delta/3)$ intervalda $h(x)=1$ umumiy chegaralanishda $|h(x)|\le 1$ bo'lsin (50- rasm).

U holda

$$|h(x)|\le\int_a^x|h'(t)|dt=\int_a^{x_0+\delta/3}|h'(t)|dt\le\int_{x_0}^{x_0+\delta/3}|h'(t)|dt\le 2\delta$$

va

$$\left|\int_a^b Qh^2dx\right|\le\int_{x_0}^{x_0+\delta}|Q|h^2dx\le 8M\delta^3,$$

bu yerda $M=Q$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi maksimal qiymati. Lekin bir vaqtning o'zida

$$\int_a^b Pdx=\int_{x_0}^{x_0+\delta}Pdx\le\int_{x_0}^{x_0+\delta}Ph'^2dx\le\int_{x_0+\delta/3}^{x_0+2\delta/3}Ph'^2dx\le\int_{x_0+\delta/3}^{x_0+2\delta/3}\frac{P(x_0)}{2}dx=-C\delta,$$

bo'ladi, bu yerda $C=-\frac{P(x_0)}{6}>0$, h ga bog'liq emas. Natijada, $G[h]\le -C\delta+8M\delta^3$, tengsizlikni olamiz. M va C o'zgarmaslarning qiymatlariga bog'liq holda kichik δ larda $G[y]<0$ tengsizlik bajariladi, qaysiki, bu teoremaning shartiga zid. Teorema isbot bo'ldi.

6-teorema. *Agar variatsion hisobning sodda masalasida $J[y]$ funksional $y(x)$ funksiyada minimumga erishsa, u holda*

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\ge 0. \qquad (17)$$

Lejandr sharti bajariladi.

Isboti. 1-teoremaga ko'ra x ekstremum nuqta uchun $\delta^2J[x,\delta y]\ge 0$ munosabat bajariladi, qaysiki, uni (15) ko'rinishga ko'ra,

$$\int_a^b\left(Q(x)(\delta y)^2+P(x)(\delta y')^2\right)dx\ge 0,$$

ko'rinishda yozish mumkin. 3-teoremaga ko'ra, $[a,b]$ kesmaning hamma joyida $P(x)\ge 0$ bo'ladi. $P(x)$ funksiyani ko'rinishini hisobga olib, (17) shartni olamiz.

Demak, funksionalni tadqiq qilishda kvadratik funksionalning ikkinchi variatsiyasining harakati muhim rol o'ynaydi. (15) kvadratik funksionalni $h(a)-y(b)=0$. birjinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi h funksiyada qaraymiz. Ko'rsatdikki, bu funksionalning manfiymas aniqlanganligining zaruriy sharti $P(x)\ge 0, x\in[a,b]$, tengsizlik bo'ldi. (15) funksional uchun Eyler tenglamasini yozamiz. Chegaraviy shartlar to'plamida quyidagi

$$\frac{d}{dx}(Ph')-Qh=0, h(a)=y(b)=0. \qquad (18)$$

oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalani olamiz. Bu masala $h(x)=0$, trivial yechimga ega, lekin trivial bo'lmagan yechimlari ham mavjud bo'lishi mumkin.

Endi (18) chegaraviy masalaning noldan farqli yechimlarini qaraymiz. Agar $\bar{x}\in[a,b]$ nuqta shundayki, $h(\bar{x})=0$, shu vaqtda $h(x)\ne 0$, $a<x<\bar{x})=0$. bo'lsa, u holda $\bar{x}$ nuqta a nuqtaga qo'shma nuqta deb ataladi. Demak, a va b nuqtalar qo'shma bo'ladi, agar (18) chegaraviy masala (a,b) intervalda nolga aylanmaydigan yechimga ega bo'lsa. (a,b)

Endi ko'rsatilgan turdagi h funksiyani shunday tanlaymizki, yuqoridagi integral manfiy qolsin, integral ostidagi birinchi qo'shiluvchi esa imkon darajasida kichik integralni bersin. Aytaylik, $(x_0+\delta/3\le x\le x_0+2\delta/3)$ intervalda $h(x)=1$ umumiy chegaralanishda $|h(x)|\le 1$ bo'lsin (50- rasm).

U holda

$$|h(x)|\le\int_a^x|h(t)|dt=\int_{x_0-\delta}^{x}|h(t)|dt\le\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|h(t)|dt\le 2\delta$$

va

$$\left|\int_a^x Qh^2dx\right|\le\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|Q|h^2dx\le 8M\delta^3,$$

bu yerda $M-Q$ funksiyanng $[a,b]$ kesmadagi maksimal qiymati. Lekin bir vaqtning o'zida

$$\int_a^x P(x)dx=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}P(x)h^2dx\le\int_{x_0-\delta/3}^{x_0+2\delta/3}P(x)h^2dx\le\int_{x_0-\delta/3}^{x_0+2\delta/3}\frac{P(x_0)}{2}dx=-C\delta,$$

bo'ladi, bu yerda $C=-\frac{P(x_0)}{6}>0$, δ ga bog'liq emas. Natijada, $G[h]\le -C\delta+8M\delta^3$, tengsizlikni olamiz. M va C o'zgarmaslarning qiymatlariga bog'liq holda kichik δ larda $G[y]<0$ tengsizlik bajariladi, qaysiki, bu teoremaning shartiga zid. Teorema isbot bo'ldi.

6-teorema. *Agar variatsion hisobning sodda masalasida $J[y]$ funksional $y(x)$ funksiyada minimumga erishsa, u holda*

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\ge 0, \tag{17}$$

Lejandr sharti bajariladi.

Isboti. 1-teoremaga ko'ra y ekstremum nuqta uchun $\delta^2J[y,\delta y]\ge 0$ munosabat bajariladi, qaysiki, uni (15) ko'rinishga ko'ra,

$$\int_a^x\left(Q(x)(\delta y)^2+P(x)(\delta y')^2\right)dx\ge 0,$$

ko'rinishda yozish mumkin. 3-teoremaga ko'ra, $[a,b]$ kesmaning hamma joyida $P(x)\ge 0$ bo'ladi. $P(x)$ funksiyani ko'rinishini hisobga olib, (17) shartni olamiz.

Demak, funksionalni tadqiq qilishda kvadratik funksionalning ikkinchi variatsiyasining harakati muhim rol o'ynaydi. (15) kvadratik funksionalni $h(a)=y(b)=0$, birjinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi h funksiyada qaraymiz. Ko'rsatdikki, bu funksionalning manfiymas aniqlanganligining zaruriy sharti $P(x)\ge 0, x\in[a,b]$, tengsizlik bo'ldi. (15) funksional uchun Eyler tenglamasini yozamiz. Chegaraviy shartlar to'plamida quyidagi

$$\frac{d}{dx}(Ph')-Qh=0, h(a)=y(b)=0, \tag{18}$$

oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalani olamiz. Bu masala $h(x)\equiv 0$, trivial yechimga ega, lekin trivial bo'lmagan yechimlari ham mavjud bo'lishi mumkin.

Endi (18) chegaraviy masalaning noldan farqli yechimlarini qaraymiz. Agar $\tilde{x}\in[a,b]$, nuqta shundayki, $h(\tilde{x})=0$, shu vaqtda $h(x)\ne 0$, $a<x<\tilde{x})\equiv 0$, bo'lsa, u holda $\tilde{x}$ nuqta a nuqtaga qo'shma nuqta deb ataladi. Demak, a va b nuqtalar qo'shma bo'ladi, agar (18) chegaraviy masala (a,b) intervalda nolga aylanmaydigan yechimga ega bo'lsa. $(a,b]$

yarim intervalda a nuqtaga qo'shma nuqtani yo'qligi (18) masalani noldan farqli yechimga ega emasligini anglatadi.

13-misol. Quyidagi $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 1$, $y(2) = 5$, funksional berilgan. Bu funksional uchun $y = c_1 x + c_2$ to'g'ri chiziqlar ekstremallar bo'ladi. U holda, chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi izlanayotgan ekstremal $y = 2x + 1$ to'g'ri chiziqdan iborat. Mazkur holda $F_{y'y'} = 12y'^2 = 2$ bo'ladi va $y = 2x + 1$ ekstremalning barcha nuqtalarida $F_{y'y'} = 50 > 0$ bo'ladi. Bundan, Lejandrning yetarli shartini bajarilishi va $y = 2x + 1$ ekstremalni ekstremallar maydoniga kiritish mumkinligi o'z - o'zidan kelib chiqadi.

Demak, $y = 2x + 1$ ekstremalni xos maydon tashkil qiluvchi $y = 2x + \alpha$, (α – parametr) bir parametrli ekstremallar oilasi o'z ichiga oladi.

14-misol. $J[y] = \int_0^1 (xy' + y'^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, funksional berilgan bo'lsin.

Yechish. Bu funksional uchun Eyler tenglamasi

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Uning umumiy yechimi $y = C_1x^2 + C_2x^{-1}$. Unda chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi izlanayotgan ekstremal $y = x^2$ chiziqdan iborat bo'ladi. Uni maydonga kiritish mumkin emas. Uni o'z ichiga oluvchi yagona ekstremallar oilasi $y = cx^2$ bir parametrlik ekstremallar oilasi hisoblanadi. Oxirgi bu oila Ox absissali $x = 0$ nuqtani o'z ichiga oluvchi sohani qoplay olmaydi (noldan farqli ordinatali Oy o'qining nuqtalari orqali bu oilaning ekstremallari o'tmaydi).

Bu mazkur holda $F_{y'y'} = 2x^2$ bo'lib, $x = 0$ da Lejandr sharti bajarilmaydi.

Quyidagi funksionallarning ekstremallarini maydoniga mansubligi tekshirilsin.

201. $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - yy')dx$, $y(0) = y(0) = 0$.

202. $J[y] = \int_0^a y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $(b > 0)$.

203. $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} n(y)\sqrt{1 + y'^2}dx$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $n(y) > 0$.

204. $J[y] = \int_0^a (6y^2 - y'^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$.

7-teorema. Ayniylik $P(x) \equiv 0$ va $Q(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va $P(x) > 0$, $x \in [a,b]$ bo'lsin. U holda $h(a) = h(b) = 0$, birjinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi h funksiyalar to'plamida aniqlangan

$$\int_a^b (Qh^2 + P(h')^2)dx$$

funksional musbat aniqlangan bo'lishi uchun shu kesmada a nuqtaga qo'shma bo'lgan nuqtani bo'lmasligi zarur va yetarli.

Demak, kvadratik funksionalni musbat aniqlanganlikka tekshirish uchun, (18) chegaraviy masalani tadqiq qilish kerak va u trivial bo'lmagan yechimga egami yo'qmi, shunga aniqlik kiritish kerak

bo'ladi. Trivial bo'lmagan yechimlarning yo'qligi, kvadratik funksionalni musbat aniqlanganligini anglatadi.

Variatsion hisobning

$$\int_a^b F(x,y,y')dx, \quad y(a)=y_a, y(b)=y_b, \tag{19}$$

sodda masalasiga qaytamiz, bu yerda F – ikki marta differensiallanuvchi funksiya, $y\in C^1[a,b]$. Funksional ekstremumining zaruriy shartini qanoatlantiruvchi funksiya topilgandan so'ng, ya'ni kelgusida bu funksiyalarni tadqiq qilish, ularda

$$\delta^2 J[y,\delta y]=\int_a^b \left(Q(\delta y)^2+P(\delta y')^2\right)dx, \tag{20}$$

kvadratik funksional bo'lgan ikkinchi variatsiyani tahlil qilish bilan bog'liq. Bu yerda

$$P=P(x)=\frac{1}{2}F_{y'y'}(x,y(x),y'(x)),$$

$$Q=Q(x)=\frac{1}{2}\left(F_{yy}(x,y(x),y'(x))-\frac{d}{dx}F_{yy'}(x,y(x),y'(x))\right).$$

(20) $\delta^2 J[y,\delta y]$ kvadratik funksionalning

$$\frac{d}{dx}(P\delta y')-Q\delta y=0,$$

Eyler tenglamasi (19) masala dastlabki $J[y]$ funksionalining *Yakobi tenglamasi* deyiladi. $\tilde{x}\in(a,b)$, nuqta $J[y]$ funksional ma'nosida a nuqtaga qo'shma nuqta deyiladi, agar bu nuqta $\delta^2 J[y,\delta y]$ kvadratik funksional ma'nosida a nuqtaga qo'shma nuqta bo'lsa.

8-teorema (kuchsiz minimumning yetarli sharti). *(19) variatsion*

hisobning sodda masalasida $y\in C^1[a,b]$ funksiya $J[y]$ funksionalga kuchsiz ekstremum beradi, agar bir vaqtning o'zida quyidagi shartlar bajarilsa:

a) $y(x)$ funksiya $J[y]$ funksionalning ekstremali;

b) bu funksiya uchun $P(x)=\frac{1}{2}F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))>0$, $x\in(a,b)$, kuchaytirilgan Lejandr sharti bajariladi.

c) (a,b) intervalda $J[y]$ funksional ma'nosida a nuqtaga qo'shma nuqta yo'q (kuchaytirilgan Yakobi sharti).

n ta funksiyaga bog'liq funksionallar. Yuqorida aytib o'tilgan mulohazalar tabiiy holda bir necha funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksionallar holiga o'tkaziladi.

Ikki marta differensiallanuvchi vektor funksiyalarning chiziqli $C^1([a,b],R^n)$ fazosida

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx,$$

funksionalni qaraymiz, bu yerda F – ikki marta differensiallanuvchi vektor-funksiya, $y(x)=(y_1(x),y_2(x),...,y_n(x))$.

Agar qaralayotgan $\delta y(x)=(\delta y_1(x),\delta y_2(x),...,\delta y_n(x))$ variatsiyalarga mos $J[y]$ funksionalning $\Delta J[y,\delta y]$ orttirmasi

$$\Delta J[y,\delta y]=J[y+\delta y]-J[y]=\delta J[y,\delta y]+\delta^2 J[y,\delta y]+o\left(\|\delta y\|_{C^1}^2\right),$$

ko'rinishga ega bo'lsa, u holda $J[y]$ funksionalni ikki marta differensiallanuvchi, $\delta^2 J[y,\delta y]$ funksionalni esa $J[y]$ funksionalning y nuqtadagi *ikkinchi variatsiyasi* deb ataymiz. Tayinlangan uchlarida δy

variatsiya $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, birjinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi kerak. Shu bilan birga F - integrantni ham ikki marta differensiallanuvchi funksiya deb hisoblaymiz.

Bir o'lchovli hol kabi Teylor formulasidan foydalanib, funksionalning ikkinchi variatsiyasi uchun

$$\delta^2 J[y,\delta y] = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\delta y \cdot F_{yy} \cdot \delta y + 2\delta y \cdot F_{yy'} \cdot \delta y' + \delta y' \cdot F_{y'y'} \cdot (\delta y)'\right) dx,$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerda $F_{yy}, F_{yy'}, F_{y'y'}$ - F - integrantning o'zgaruvchilarga mos Gess matritsalari deyiladi. Bunga bir o'lchovli hol kabi bo'laklab integrallash qoidasini tadbiq qilish mumkin. Natijada,

$$\delta^2 J[y,\delta y] = \int_a^b \left(\delta y \cdot P(\delta y)' + \delta y \cdot Q\delta y\right) dx,$$

ifodani olamiz, bu yerda

$$P = P(x) = \frac{1}{2}F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)),$$

$$Q = Q(x) = \frac{1}{2}\left(F_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}F_{yy'}(x, y(x), y'(x))\right).$$

Umumiy holda ham ikkinchi variatsiyada $\delta y \cdot P(\delta y)'$ qo'shiluvchi asosiy rolni o'ynaydi. Matritsali yozuvdan foydalanib, kvadratik funksional uchun Eyler tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$\frac{d}{dx}\left((Ph)'\right) - Qh = 0. \qquad (21)$$

(21) sistema $J[y]$ funksionalning *Yakobi tenglamalar sistemasi* deyiladi. (21) ko'rinishda P va Q matritsalarning elementlari ular δy vektor-funksiyaning komponentalariga bog'liq bo'lmaganligi sababli,

tayinlangan y vektor-funksiyalarda faqat x ga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun Yakobi sistemasi - bu $\det P(x) \neq 0$ bo'lganlar uchun har bir x nuqtada mavjudlik va yagonalik teoremasini barcha shartlarini qanoatlantiruvchi h vektor-funksiyaning ikkitadan oshmagan komponentalariga nisbatan chiziqli differensial tenglama. (21) tenglamalar sistemaning $h(a) = 0, h'(a) = e_i$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi h_i yechimlarni qaraymiz, bu yerda $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - R^n fazodagi standart bazislar (ya'ni e_i vektorning faqat birga teng bo'lgan i- komponentasigina noldan farqli). Bu yechimlarning x nuqtadagi qiymatlari chiziqli bog'liq bo'ladi, agar bu nuqta yetarli darajada a nuqtaga yaqin bo'lsa, ya'ni $\Delta_k(x) = \det(h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)) \neq 0$ bo'lsa. Bu yerda tuzilishning blokli yozuvidan foydalanamiz:

$$\begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}(x)\, h_{12}(x) \ldots h_{1n}(x) \\ h_{21}(x)\, h_{22}(x) \ldots h_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{k1}(x)\, h_{k2}(x) \ldots h_{kn}(x) \end{pmatrix},$$

bu yerda $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \ldots, h_{in})$. $\tilde{x}$ nuqta shunday $\Delta_k(\tilde{x}) = 0$ bo'lgan nuqta bo'lsaki, shu vaqtda $a < x < \tilde{x}$ intervalda $\Delta_k(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\tilde{x}$ nuqta $J[y]$ funksional ma'nosida a nuqtaga *qo'shma nuqta* deyiladi. Skalyar holdagi yetarli shartni hech qanday o'zgarishsiz vektor holga umumlashtirish mumkin.

9-teorema. *Aytaylik,* $y(a) = y_a, y(b) = y_b$, *chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi,* $y \in C^1([a,b], R^n)$ *vektor-funksiyalar fazosida aniqlangan*

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx,$$

funksional bo'lsin, bu yerda F – ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya. y^* funksiya $J[y]$ funksionalga minimum beradi, agar bir vaqtning o'zida quyidagi shartlar bajarilsa:

a) y^* funksiya $J[y]$ funksionalning ekstremali;

b) y^* funksiya $P(x)=\frac{1}{2}F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))>0$, $x\in[a,b]$, kuchaytirilgan Lejandr shartini qanoatlantiradi (ya'ni x ning ko'rsatilgan qiymatlarida $F_{y'y'}$ matritsa musbat aniqlangan);

c) $[a,b]$ kesmada $J[y]$ funksional ma'nosida a nuqtaga qo'shma nuqta yo'q.

Birinchi tur uzilishli masala. Quyidagi ko'rinishdagi

$$J[z(x,y)]=\iint_D F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy \qquad (22)$$

funksionalni qaraymiz, bu yerda F – barcha argumentlari bo'yicha uch marta differensiallanuvchi funksiya, D sohada uzluksiz va o'zining barcha argumentlari bo'yicha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lgan, D sohaning G chegarasida berilgan qiymatlarni qabul qiluvchi va (22) funksionalga ekstremum beruvchi $z=z(x,y)$ funksiyani topish talab etilsin deb faraz qilamiz. Bundan tashqari izlanayotgan funksiyaning xususiy hosilalari D sohani ikkita qism sohalarga bo'luvchi qandaydir AB chiziqda uzulishga ega bo'lishi mumkin.

Bilamizki, agar $z=z(x,y)$ funksiyada ekstremum amalga oshirilsa, u holda $z=z(x,y)$ funksiya D_1 va D_2 qism sohalarda

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_{z_x}\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_{z_y}\}=0, \qquad (23)$$

Eyler-Ostrogradskiy tenglamasini qanoatlantiradi, bu yerda $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, $\frac{\partial}{\partial x}\{F_{z_x}\}$ va $\frac{\partial}{\partial y}\{F_{z_y}\}$ – lar mos ravishda x va y bo'yicha xususiy hosilalar. Agar $z=$ AB chiziqda uzulishga ega xususiy hosilali taqqoslama funksiya bo'lsa, u holda φ_- va φ_+ orqali D sohada aniqlangan chap va o'ng qism sohalarga mos funksiyaning qiymatlarini belgilaymiz. AB chiziqda quyidagi

$$\delta z_-=p_-\delta x+q_-\delta y+\delta\bar{z}_-,\ \delta z_+=p_+\delta x+q_+\delta y+\delta\bar{z}_+$$

tengliklarga ega bo'lamiz, chunki AB chiziqda $z=z(x,y)$ funksiya uzluksiz bo'ladi, $\delta z_-=\delta z_+$. So'ngra, ds orqali AB yoy elementini belgilaymiz, δn – AB va A_1B_1 orasidagi AB ga normalning uzunligi. $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$ va

$$\frac{\partial x}{\partial n}=\cos Nx,\ \frac{\partial y}{\partial n}=\cos Ny,$$

tengliklarni hisobga olib, funksionalning

$$\delta J[z(x,y)]=\int_{G_1}\left(F_{z_x}\frac{\partial x}{\partial n}+F_{z_y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\delta\bar{z}ds+\int_{G_2}F\left(\delta x\frac{\partial x}{\partial n}\eta_x+\delta y\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds$$

variatsiyasi ifodasidan, (22) funksional uchun

$$\delta J[z(x,y)]=\int_{AB}\Bigg[(F_{-}-F_{+})\delta n+\left(\frac{\partial F}{\partial p_-}\cos Nx+\frac{\partial F}{\partial q_-}\cos Ny\right)\delta\bar{z}_-$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial p_+}\cos Nx+\frac{\partial F}{\partial q_+}\cos Ny\right)\delta\bar{z}_+\Bigg]ds,$$

ifodaga ega bo'lamiz, qaysiki ekstremum holatda

$$\delta J[z] = 0 \tag{24}$$

bo'lishi kerak. (23) tenglikdan foydalanib,

$$\overline{\delta z}_{-} = \delta z_{-} - (p_{-}\cos Nx + q_{-}\cos Ny)\delta n, \quad \overline{\delta z}_{+} = \delta z_{+} - (p_{+}\cos Nx + q_{+}\cos Ny)\delta n,$$

tengliklarni olamiz va (24) tenglik

$$\int_{x_1}^{x_2}\Big[F_{-} - F_{+}\Big] - \left(\frac{\partial F}{\partial p_{-}}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_{-}}\cos Ny\right)(p_{-}\cos Nx + q_{-}\cos Ny) +$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial p_{+}}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_{+}}\cos Ny\right)(p_{+}\cos Nx + q_{+}\cos Ny)\Big]\delta n +$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p_{-}}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_{-}}\cos Ny\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p_{+}}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_{+}}\cos Ny\right)\right]\delta z\Big|dx = 0, \tag{25}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda δn va δz ixtiyoriy bo'lgani uchun (25) tenglikdan bu ifodaning integral ostidagi ifodasi nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$\Big[F_{-} - F_{+}\Big] - \left(\frac{\partial F}{\partial p_{-}}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_{-}}\cos Ny\right)(p_{-}\cos Nx + q_{-}\cos Ny) +$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial p_{+}}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_{+}}\cos Ny\right)(p_{+}\cos Nx + q_{+}\cos Ny) = 0, \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_{-}} - \frac{\partial F}{\partial p_{+}}\right)\cos Nx + \left(\frac{\partial F}{\partial q_{-}} - \frac{\partial F}{\partial q_{+}}\right)\cos Ny = 0, \tag{27}$$

bo'ladi. (24) shart

$$F_{-} - F_{+} = \frac{\partial F}{\partial p_{-}}[p_{-} - p_{+}] + \frac{\partial F}{\partial q_{-}}[q_{-} - q_{+}] \tag{28}$$

ko'rinishni olishi mumkin. (26), (27) shart yoki (28) va (27) shartlar Veyershtrass - Erdmon shartlarining o'xshashidir hisoblanadi.

4-§. Veyershtrass funksiyasi

Quyidagi

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

funksionalni ekstremumi haqidagi sodda variatsion masalada Yakobi sharti bajarilsin hamda $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi, og'ish funksiyasi $p(x, y)$ ga teng bo'lgan C – ekstremal markaziy maydonga kiritilgan (hatto, ekstremal markaziy maydonga emas, xos maydonga kiritilgan bo'lsin deb faraz qilsa ham bo'ladi) deb faraz qilaylik. J funksionalning C – ekstremaldan unga yaqin bo'lgan $\hat{C}$ joiz egri chiziqqa o'tishda ΔJ orttirmasini ishorasini aniqlash uchun, orttirmani tadqiq qilish uchun qulay bo'lgan

$$\Delta J = \int_{\hat{C}} F(x, y, y')dx - \int_{C} F(x, y, y')dx$$

ko'rinishga o'zgartiramiz. ($\int_{C} F(x, y, y')dx$ va $\int_{\hat{C}} F(x, y, y')dx$ integrallar mos ravishda, $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ funksionalning C va $\hat{C}$ egri chiziqlarning yoyi bo'yicha olingan qiymatlarini tasvirlaydi).

Quyidagi yordamchi funksionalni

$$\int_{x_0}^{x_1}\Big[F(x, y, p) + \left(\frac{dy}{dx} - p\right)F_p(x, y, p)\Big]dx,$$

qaraymiz, qaysiki ekstremallar maydonida $\frac{dy}{dx} = p$ bo'lganligi sababli, yordamchi funksional C ekstremalda $\int_{C} F(x, y, y')dx$ integralga aylanadi. Boshqa tomondan o'sha

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F(x,y,p) + \frac{dv}{dx} - p\left(F_y(x,y,p) + \frac{dv}{dy} - p\right)F_{y'}(x,y,p)\right]dx,$$

yordamchi funksional yoki

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F(x,y,p) - pF_{y'}(x,y,p)\right]dx + F_{y'}(x,y,p)dy, \qquad (1)$$

ifoda aniq differensialning integrali bo'ladi. Haqiqatan, ekstremallar maydonida $J[y(x)]$ funksionalga aylanadigan $J(x,y)$ funksiyaning differensiali (qo'zg'aluvchan chegarali masalaga qarang) quyidagi ko'rinishga

$$dJ = \left[F(x,y,p) - yF_{y'}(x,y,p)\right]dx + F_{y'}(x,y,p)dy,$$

ega bo'ladi. bu yerda faqat maydon ekstremallari urinmasining burchak koeffitsienti qaralayotgan (1) yordamchi funksionalning integral ostidagi belgilanishiga ko'ra. farq qiladi.

Demak,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F(x,y,p) - (y' - p)F_{y'}(x,y,p)\right]dx$$

integral aniq differensialning integrali, bu integrallash yo'liga bog'liq bo'lma-ganligi sababli.

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F(x,y,p) - (y' - p)F_{y'}(x,y,p)\right]dx$$

integral C ekstremalda $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ integral bilan ustma-ust tushadi. u holda na faqat $\tilde{C} = C$ da. ixtiyoriy $\tilde{C}$ da

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[F(x,y,p) - (y' - p)F_{y'}(x,y,p)\right]dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Binobarin

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$$

orttirmani quyidagi ko'rinishga almashtirish mumkin:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx - \int_{x_0}^{x_1} \left[F(x,y,p) - (y' - p)F_{y'}(x,y,p)\right]dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y' - p)F_{y'}(x,y,p)\right]dx.$$

Integral ostidagi funksiya *Veyershtrass funksiyasi* nomi bilan yuritiladi va $E(x,y,p,y')$ deb belgilanadi. ya'ni

$$E(x,y,p,y') = F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y' - p)F_{y'}(x,y,p).$$

Bu belgilashlarda

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} E(x,y,p,y')dx.$$

Ravshanki, J funksionalni C ekstremalda minimumga erishishining yetarli sharti, agar $E(x,y,p,y') \geq 0$ bo'lsa, u holda $\Delta J \geq 0$ bo'lganligi $E(x,y,p,y')$ funksiyaning manfiymasligi bo'ladi, ya'ni $E(x,y,p,y') \geq 0$. Maksimumga erishishning yetarli sharti esa. bu holda $\Delta J \leq 0$ bo'lganligi sababli $E(x,y,p,y') \leq 0$ bo'ladi. Bu yerda kuchsiz minimum uchun tadqiq qilinayotgan C ekstremalning x,y qiymatlariga yaqin x,y qiymatlar uchun va y' ning o'sha ekstremalning $p(x,y)$ og'ish funksiyasiga yaqin qiymatlar uchun $E(x,y,p,y') \geq 0$ tengsizlikni bajarilishi yetarli (yoki maksimum holi uchun $E(x,y,p,y') \leq 0$). Kuchli minimum uchun esa, o'sha x,y lar uchun o'sha tengsizlik o'rinli bo'ladi. lekin ixtiyoriy y' uchun kuchli ekstremum holda yaqin egri chiziqlar urinmalarning ixtiyoriy yo'nalishiga ega bo'lishi mumkin, kuchsiz eksremum holida

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[F(x,y,p)+\left(\frac{dy}{dx}-p\right)F_p(x,y,p)\right]dx,$$

yordamchi funksional yoki

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[F(x,y,p)-pF_p(x,y,p)\right]dx+F_p(x,y,p)dy, \qquad (1)$$

ifoda aniq differensialning integrali bo'ladi. Haqiqatan, ekstremallar maydonida $J[y(x)]$ funksionalga aylanadigan $\bar{J}(x,y)$ funksiyaning differensiali (qo'zg'aluvchan chegarali masalaga qarang) quyidagi ko'rinishga

$$d\bar{J}=\left[F(x,y,y')-y'F_{y'}(x,y,y')\right]dx+F_{y'}(x,y,y')dy,$$

ega bo'ladi, bu yerda faqat maydon ekstemallari urinmasining burchak koeffitsienti qaralayotgan (1) yordamchi funksionalning integral ostidagi belgilanishiga ko'ra, farq qiladi.

Demak,

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\right]dx$$

integral aniq differensialning integrali, bu integrallash yo'liga bog'liq bo'lma-ganligi sababli,

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\right]dx$$

integral C ekstremalda $\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$ integral bilan ustma-ust tushadi, u holda na faqat $\tilde{C}=C$ da, ixtiyoriy $\tilde{C}$ da

$$\int_{\tilde{C}}F(x,y,y')dx=\int_{\tilde{C}}\left[F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\right]dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Binobarin

$$\Delta J=\int_{\tilde{C}}F(x,y,y')dx-\int_{C}F(x,y,y')dx$$

orttirmani quyidagi ko'rinishga almashtirish mumkin:

$$\Delta J=\int_{\tilde{C}}F(x,y,y')dx-\int_{\tilde{C}}\left[F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\right]dx=$$

$$=\int_{\tilde{C}}\left[F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\right]dx.$$

Integral ostidagi funksiya *Veyershtrass funksiyasi* nomi bilan yuritiladi va $E(x,y,p,y')$ deb belgilanadi, ya'ni

$$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p).$$

Bu belgilashlarda

$$\Delta J=\int_{x_0}^{x_1}E(x,y,p,y')dx.$$

Ravshanki, J funksionalni C ekstremalda minimumga erishishining yetarli sharti, agar $E(x,y,p,y')\geq 0$ bo'lsa, u holda $\Delta J\geq 0$ bo'lganligi $E(x,y,p,y')$ funksiyaning manfiymasligi bo'ladi, ya'ni $E(x,y,p,y')\geq 0$. Maksimumga erishishning yetarli sharti esa, bu holda $\Delta J\leq 0$ bo'lganligi sababli $E(x,y,p,y')\leq 0$ bo'ladi. Bu yerda kuchsiz minimum uchun tadqiq qilinayotgan C ekstremalning x,y qiymatlariga yaqin x,y qiymatlar uchun va y' ning o'sha ekstremalning $p(x,y)$ og'ish funksiyasiga yaqin qiymatlar uchun $E(x,y,p,y')\geq 0$ tengsizlikni bajarilishi yetarli (yoki maksimum holi uchun $E(x,y,p,y')\leq 0$). Kuchli minimum uchun esa, o'sha x,y lar uchun o'sha tengsizlik o'rinli bo'ladi, lekin ixtiyoriy y' uchun kuchli ekstremum holda yaqin egri chiziqlar urinmalarning ixtiyoriy yo'nalishiga ega bo'lishi mumkin, kuchsiz ekstremum holida

y' ning C' ekstremalda $+\infty$ p qiymatlarga yaqin qiymatlarida o'sha tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, J funksional C' ekstremalda ekstremumga erishishi uchun quyidagi shartlar yetarli:

Kuchsiz ekstremum uchun

1. C' egri chiziq chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal bo'ladi.

2. C' ekstremal ekstremallar maydoniga kiritilgan bo'lishi mumkin. Bu shartni Yakobi sharti bilan almashtirish mumkin.

3. $E(x,y,p,y')$ funksiya C' egri chiziqqa yaqin barcha (x,y) nuqtalarda va y' ning $p(x,y)$ og'ish funksiyasiga yaqin qiymatlarida o'z ishorasini o'zgartirmaydi. Minimum bo'lgan holda $E(x,y,p,y')\geq 0$, maksimum bo'lgan holda $E(x,y,p,y')\leq 0$ bo'ladi.

Kuchli ekstremum uchun:

1. C' egri chiziq chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal bo'ladi.

2. C' ekstremal ekstremallar maydoniga kiritilgan bo'lishi mumkin. Bu shartni Yakobi sharti bilan almashtirish mumkin.

3. $E(x,y,p,y')$ funksiya C' egri chiziqqa yaqin barcha (x,y) nuqtalarda va y' ning ixtiyoriy qiymatlarida o'z ishorasini o'zgartirmaydi. Minimum bo'lgan holda $E(x,y,p,y')\geq 0$, maksimum bo'lgan holda $E(x,y,p,y')\leq 0$ bo'ladi.

5-izoh. *Veyershtrass shartini zaruriy shart ekanligini isbot qilish mumkin. Aniqroq qilib aytadigan bo'lsak, agar C' ekstremalni o'ziga*

o'ruvchi markaziy maydonning qandaydir y' uchun ekstremal nuqtalarida $E(x,y,p,y')$ funksiya qarama-qarshi ishoraga ega bo'lsa, u holda kuchli ekstremumga erishmaydi. Agar bu xossa y' ning $p(x,y)$ ga yaqin nuqtalarida o'rinli bo'lsa, u holda kuchsiz ekstremumga erishmaydi.

1-misol. $J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=2$ funksional ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. Ushbu funksional uchun Eyler tenglamasi $y-y''=0$ ko'rinishda bo'ladi, shuning uchun, ekstremallar $y(x)=C_2x+C_1$ to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi. Berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal $y=2x$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Ekstremal nuqtalarida maydonning og'ishi $p=2$ ga teng. Ravshanki, $y=2x$ ekstremal markazi $O(0,0)$ nuqtaga bo'lgan $y=Cx$ ekstremallarning markaziy maydoniga kiradi. Yana, bu holda Yakobi shartini bajarilishini tekshirish qiyin emas. Bu hol uchun Yakobi tenglamasi $-\frac{d}{dx}(v'+v)=0$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerdan ekstremal tenglamasiga ko'ra, $v'=2$ ga ega bo'lamiz. Bundan, Yakobi tenglamasi $v''(x)=0$ ko'rinishni oladi, undan, $v(x)=C_1x+C_2$ yechimni olamiz. $v(0)=0$ shartdan $C_2=0$ ni olamiz. Bu $v=C_1x=C_1y$ yechim $C_1\neq 0$ da $x=0$ nuqtadan tashqari, hech qayerda nolga aylanmaydi, u holda Yakobi sharti bajariladi.

Veyershtrass

$$E(x,y,p,y')=y''+y'-p'-p-(y'-p)(3p^2+1)-(y'-p)^2(p'+2p)$$

funksiyasini tuzamiz. Birinchi ko'paytuvchi ixtiyoriy y' da doimo

manfiy emas, ikkinchisi esa y' ning 2 ga yaqin qiymatlarida musbat. Bundan kuchsiz ekstremum mavjudligining barcha shartlari bajarildi. Biroq, oson ko'rish mumkinki, agar $y' < -4$ bo'lsa, u holda E funksiya manfiy bo'ladi va kuchli ekstremumning yetarli sharti bajarilmaydi, chunki kuchli ekstremum shartida E Veyershtrass funksiyasi y' ning ixtiyoriy qiymatida ishorasini saqlab qolishi talab qilinadi. Yuqoridagi izohni hisobga olgan holda, bu hol uchun kuchli ekstremum yo'q, degan xulosaga kelamiz.

2-misol. $J[y]=\int_0^1(x+2y+\frac{1}{2}y'^2)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$ funksionalni ekstremumga tekshiring.

Yechish. Bu funksional uchun Eyler tenglamasi $y''=2$ ko'rinishga ega bo'lib, ekstremallar $y=x^2+C_1x+C_2$ parabolalardan iborat bo'ladi. Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal $y=x^2-x$. Yakobi tenglamasini tuzamiz $-\frac{d}{dx}(u')=0$ yoki $u''=0$. Uning



51-rasm

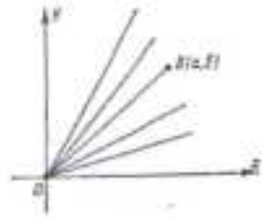
umumiy yechimi $u(x)=C_1x+C_2$, $u(0)=0$ shartdan $C_2=0$ bo'ladi. $C_1\neq 0$ da $u(x)=C_1x$ $[0,1]$ kesmada $x=0$ nuqtadan tashqari hech qayerida nolga aylanmaydi, u holda Yakobi sharti bajariladi va demak, $y=x^2-x$ ekstremal, markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan ekstremallarning markaziy maydoniga kiradi, aynan: $y=x^2+Cx$ (51-rasm). Veyershtrass funksiyasi $E(x,y,p,y')=\frac{1}{2}(y'-p)^2$ ko'rinishda bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, y' ning ixtiyoriy qiymatlari uchun $E=\frac{1}{2}(y'-p)^2\geq 0$ o'rinli bo'ladi. Bundan,

$y=x^2-x$ ekstremalda berilgan funksional $J[x^2-x]=\frac{1}{3}$ ga teng bo'lgan kuchli minimumga erishadi.

3-misol. Quyidagi

$$J=\int_0^a y'^2dx,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\quad b>0,$$

funksionalni ekstremumga tadqiq qiling.



52 - rasm

Yechish. Ekstremallar $y=C_1x+C_2$ to'g'ri chiziqlar oilasi bo'ladi. $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqdagina ekstremumga erishishi mumkin. Markazi (0,0) nuqtada bo'lgan $y=C_1x$ to'g'ri chiziqlar dastasi $y=\frac{b}{a}x$ ekstremalni o'ziga oluvchi markaziy maydonni tashkil etadi (52-rasm). Bunda $E(x,y,p,y')$ funksiya quyidagi ko'rinishda

$$E(x,y,p,y')=y'^2-p^2-3p^2(y'-p)=(y'-p)^2(y'+2p),$$

bo'ladi. $y=\frac{b}{a}x$ ekstremalda maydonning og'ishi $p=\frac{b}{a}>0$ bo'ladi. Agar y' $p=\frac{b}{a}$ ga yaqin qiymatlarni qabul qilsa, u holda $E(x,y,p,y')\geq 0$ bo'ladi, va binobarin, kuchsiz minimumga erishish uchun barcha yetarli shartlar bajariladi. Demak, funksional $y=\frac{b}{a}x$ ekstremalda kuchsiz minimumga erishadi. Agarda y' ixtiyoriy qiymatlarni qabul qilsa, u holda $(y'+2p)$ ifoda ixtiyoriy ishoraga ega bo'lishi mumkin, binobarin, $E(x,y,p,y')$ funksiya ishorani saqlamaydi, kuchli minimumga

erishishning yetarli sharti bajarilmaydi. Agar izohni e'tiborga olsak, u holda aytish mumkinki, $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqda kuchli minimumga erishmaydi.

4-misol. Quyidagi

$$J=\int_0^a (6y^2-y'^2+yy')dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=b; \quad a>0, \quad b>0,$$

funksionalni birinchi tartibli uzluksiz hosilali uzluksiz funksiyalar sinfida tadqiq qiling.

Yechish. Ekstremallar $y=C_1x+C_2$ to'g'ri chiziqlar oilasi bo'ladi. Chega-raviy shartlarni $y=C_1x$ to'g'ri chiziqlar dastasini o'ziga oluvchi markaziy maydonni tashkil qiluvchi $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq qanoatlan-tiradi. $E(x,y,p,y')$ funksiya quyidagi ko'rinishga ega

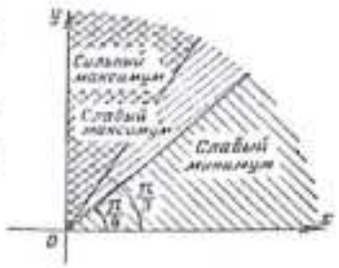
$$E(x,y,p,y')=6y'^2-y'^2+yy'+p^2-yp-(y'-p)-(y'-p)^2(12p-4p^2+y)=$$

$$=-(y'-p)^2[(y'+2p)y'-(6-3p^2)].$$

$E(x,y,p,y')$ funksiyaning ishorasi oxirgi ko'paytuvchi

$$y'^2+2py'-(6-3p^2)$$

ishorasiga qarama-qarshi bo'ladi. Bu ko'paytuvchi nolga aylanadi va faqatgida $y'=-p\pm\sqrt{6-2p^2}$ qiymatlar orqali o'tishda ishorasini o'zgartirishi mumkin. $6-2p^2\le 0$ bo'lganda, yoki ixtiyoriy y' da $p\ge\sqrt{3}$ bo'lganda, $[y'^2+2py'-(6-3p^2)]\ge 0$ bo'ladi. agarda $6-2p^2>0$ yoki $p<\sqrt{3}$



53 - rasm

Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal $y=-2x$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, uni $y=Cx$ ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. Bu ektremalda maydonning og'ishi $p=-2$ ga teng bo'ladi. So'ngra, $F_{y'y'}=6y$ ni topamiz. Berilgan ektremalda $F_{y'y'}=-12<0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $y=-2x$ chiziqda funksional kuchsiz maksimumga erishadi. y ning ixtiyoriy qiymatlarida $F_{y'y'}$ ning ishorasi saqlanmaydi, bundan, kuchli maksimum sharti bajarilmaydi.

Bu holda, Veyershtrass funksiyasi $E(x,y,p,y')$ quyidagi ko'rinish-da bo'ladi

$$E(x,y,p,y')=(y'-p)^2(y'+2p)$$

va y' ning ayrim qiymatlarida u qarama-qarshi ishoraga ega bo'ladi. Eslatmani hisobga olgan holda, bu hol uchun kuchli maksimum yo'q degan xulosaga kelamiz.

7-misol. $J[y(x)]=\int_0^2 (e^x+3)dx, \quad y(0)=0, \quad y(2)=1$ funksionalni ekstre-mumga tekshiring.

Yechish. Ekstremal $y=Cx+C_2$ chiziqlardan iborat. Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal $y=\frac{x}{2}$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, uni $y=Cx$ ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. Bundan, berilgan funksional $y=\frac{x}{2}$ ekstremalda kuchli minimumga erishadi.

8-misol. Quyidagi

erishishning yetarli sharti bajarilmaydi. Agar izohni e'tiborga olsak, u holda aytish mumkinki, $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqda kuchli minimumga erishmaydi.

4-misol. Quyidagi

$$J=\int_0^a (6y^2-y'^2+yy')dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=b; \quad a>0, \quad b>0,$$

funksionalni birinchi tartibli uzluksiz hosilali uzluksiz funksiyalar sinfida tadqiq qiling.

Yechish. Ekstremallar $y=C_1x+C_2$ to'g'ri chiziqlar oilasi bo'ladi. Chega-raviy shartlarni $y=C_1x$ to'g'ri chiziqlar dastasini o'ziga oluvchi markaziy maydonni tashkil qiluvchi $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq qanoatlantiradi. $E(x,y,p,y')$ funksiya quyidagi ko'rinishga ega

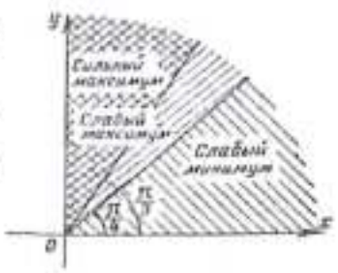
$$E(x,y,p,y')=6y^2-y'^2+yy'+p^2-yp-(y-p)-(y-p)^2(12p-4p^2+y)=$$

$$=-(y-p)^2[y'^2+2py'-(6-3p^2)].$$

$E(x,y,p,y')$ funksiyaning ishorasi oxirgi ko'paytuvchi

$$y'^2+2py'-(6-3p^2)$$

ishorasiga qarama-qarshi bo'ladi. Bu ko'paytuvchi nolga aylanadi va y' faqatgida $y'=-p\pm\sqrt{6-2p^2}$ qiymatlar orqali o'tishda ishorasini o'zgartirishi mumkin. $6-2p^2\le 0$ bo'lganda, yoki ixtiyoriy y' da $p\ge\sqrt{3}$ bo'lganda, $[y'^2+2py'-(6-3p^2)]\ge 0$ bo'ladi, agarda $6-2p^2>0$ yoki $p<\sqrt{3}$



53 - rasm

Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal $y=-2x$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, uni $y=Cx$ ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. Bu ektremalda maydonning og'ishi $p=-2$ ga teng bo'ladi. So'ngra, $F_{y'y'}=6y$ ni topamiz. Berilgan ektremalda $F_{y'y'}=-12<0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $y=-2x$ chiziqda funksional kuchsiz maksimumga erishadi. y ning ixtiyoriy qiymatlarida $F_{y'y'}$ ning ishorasi saqlanmaydi, bundan, kuchli maksimum sharti bajarilmaydi.

Bu holda, Veyershtrass funksiyasi $E(x,y,p,y')$ quyidagi ko'rinish-da bo'ladi

$$E(x,y,p,y')=(y'-p)^2(y'+2p)$$

va y' ning ayrim qiymatlarida u qarama-qarshi ishoraga ega bo'ladi. Eslatmani hisobga olgan holda, bu hol uchun kuchli maksimum yo'q degan xulosaga kelamiz.

7-misol. $J[y(x)]=\int_0^2 (e^x+3)dx, \quad y(0)=0, \quad y(2)=1$ funksionalni ekstre-mumga tekshiring.

Yechish. Ekstremal $y=Ax+C_2$ chiziqlardan iborat. Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal $y=\frac{x}{2}$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, uni $y=Cx$ ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. Bundan, berilgan funksional $y=\frac{x}{2}$ ekstremalda kuchli minimumga erishadi.

8-misol. Quyidagi

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx,\quad y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1,$$

funksionalni ekstremumga tekshiring (braxistoxrona masalasiga qarang).

Ekstremallar

$$x=C_1(t-\sin t)+C_2,$$
$$y=C_1(1-\cos t),$$

sikloida bo'ladi. Markazi (0,0) nuqtada bo'lgan

$$x=C_1(t-\sin t)+C_2,$$
$$y=C_1(1-\cos t),$$

sikloidalar dastasi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, ekstremallar kiritilgan markaziy maydonni tashkil etadi, bu yerda a, agar $x_1<2\pi a$ bo'lsa, sikloidani, ikkinchi chegaraviy $B(x_1,y_1)$ nuqtasidan o'tish shartidan aniqlaymiz (54-rasm). Ixtiyoriy y da quyidagi



54 - rasm

$$F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}},\quad F_{y'y'}=\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{(1+y'^2)^3}}>0,$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bundan, agar $x_1<2\pi a$ bo'lsa, $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, sikloidada kuchli minimumga erishadi.

9-misol. Quyidagi

$$J=\int_0^a y''\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,$$

funksionalni ekstremumga tekshiring. Bu misol yuqorida yechilganligi sababli, kuchsiz ekstremumga nisbatan tadqiqotni soddalashtirishimiz

ko'ra, bu ikkinchi tartibli hosila C egri chiziqqa yaqin nuqtalarda va y' ning qiymatlari uchun C egri chiziqdagi y ning qiymatlariga yaqin nuqtalarda ishorani saqlaydi.

Shunday qilib, kuchsiz minimumga tadqiq qilingandagi $E(x,y,p,y')\geq 0$ sharni, C ekstremalda $F_{y'y'}>0$ shartga almashtirish mumkin, kuchsiz maksimumga tadqiq qilinganda esa, $E(x,y,p,y')\leq 0$ sharni, C egri chiziqda $F_{y'y'}<0$ shartga almashtirish mumkin. $F_{y'y'}>0$ (yoki $F_{y'y'}<0$) shart Lejandr sharti deb nomlanadi. Odatda bu $F_{y'y'}>0$ (yoki $F_{y'y'}<0$) shart *kuchaytirilgan Lejandr sharti* deb ataladi, $F_{y'y'}\geq 0$ (yoki $F_{y'y'}\leq 0$) shart *Lejandr sharti* deb ataladi.

Kuchli minimumga tadqiq qilinganda $E(x,y,p,y')\geq 0$ shart $F_{y'y'}(x,y,q)$ talabga ixtiyoriy q da C egri chiziqning nuqtalariga yaqin (x,y) nuqtalarda almashishi mumkin. Bu yerda albatta Teylor formulasi bo'yicha

$$F(x,y,y')=F(x,y,p)+(y'-p)F_{y'}(x,y,p)+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q),$$

ixtiyoriy y' uchun o'rinli deb faraz qilinadi. Kuchli maksimumga tadqiq qilganimizda, argumentlarning o'zgarish sohasiga nisbatan va $F(x,y,y')$ funksiyani Teylor formulasi bo'yicha yoyilishiga nisbatan o'sha farazlarga ko'ra, $F_{y'y'}(x,y,q)\leq 0$ shartni olamiz.

Shunday qilib,

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,$$

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx,\quad y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1,$$

funksionalni ekstremumga tekshiring (braxistoxrona masalasiga qarang).

Ekstremallar

$$x=C_1(t-\sin t)+C_2,$$
$$y=C_1(1-\cos t),$$

sikloida bo'ladi. Markazi (0,0) nuqtada bo'lgan

$$x=C_1(t-\sin t)+C_2,$$
$$y=C_1(1-\cos t),$$

sikloidalar dastasi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, ekstremallar kiritilgan markaziy maydonni tashkil etadi, bu yerda a, agar $x_1<2\pi a$ bo'lsa, sikloidani, ikkinchi chegaraviy $B(x_1,y_1)$ nuqtasidan o'tish shartidan aniqlaymiz (54-rasm). Ixtiyoriy y da quyidagi



54 - rasm

$$F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}},\quad F_{y'y'}=\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{(1+y'^2)^3}}>0,$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bundan, agar $x_1<2\pi a$ bo'lsa, $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, sikloidada kuchli minimumga erishadi.

9-misol. Quyidagi

$$J=\int_{x_0}^{a}y'^2dx,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,$$

funksionalni ekstremumga tekshiring. Bu misol yuqorida yechilganligi sababli, kuchsiz ekstremumga nisbatan tadqiqotni soddalashtirishimiz

ko'ra, bu ikkinchi tartibli hosila C egri chiziqqa yaqin nuqtalarda va y' ning qiymatlari uchun C egri chiziqdagi x ning qiymatlariga yaqin nuqtalarda ishorani saqlaydi.

Shunday qilib, kuchsiz minimumga tadqiq qilingandagi $E(x,y,p,y')\geq 0$ sharni, C ekstremalda $F_{y'y'}>0$ shartga almashtirish mumkin, kuchsiz maksimumga tadqiq qilinganda esa, $E(x,y,p,y')\geq 0$ sharni, C egri chiziqda $F_{y'y'}<0$ shartga almashtirish mumkin. $F_{y'y'}>0$ (yoki $F_{y'y'}<0$) shart Lejandr sharti deb nomlanadi. Odatda bu $F_{y'y'}>0$ (yoki $F_{y'y'}<0$) shart *kuchaytirilgan Lejandr sharti* deb ataladi, $F_{y'y'}\geq 0$ (yoki $F_{y'y'}\leq 0$) shart *Lejandr sharti* deb ataladi.

Kuchli minimumga tadqiq qilinganda $E(x,y,p,y')\geq 0$ shart $F_{y'y'}(x,y,q)$ talabga ixtiyoriy q da C egri chiziqning nuqtalariga yaqin (x,y) nuqtalarda almashishi mumkin. Bu yerda albatta Teylor formulasi bo'yicha

$$F(x,y,y')=F(x,y,p)+(y'-p)F_y(x,y,p)+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q),$$

ixtiyoriy y' uchun o'rinli deb faraz qilinadi. Kuchli maksimumga tadqiq qilganimizda, argumentlarning o'zgarish sohasiga nisbatan va $F(x,y,y')$ funksiyani Teylor formulasi bo'yicha yoyilishiga nisbatan o'sha farazlarga ko'ra, $F_{y'y'}(x,y,q)\leq 0$ shartni olamiz.

Shunday qilib,

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,$$

sodda masala uchun minimumning yetarli sharti bo'yicha xulosa qilamiz.

Kuchsiz minimum :

1. $F_{y'}(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'y'}(x,y,y') = 0.$

2. Yakobi sharti.

3. Tadqiq qilinayotgan ekstremalda $F_{y'y'} > 0.$

Kuchli minimum :

1. $F_{y'}(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'y'}(x,y,y) = 0.$

2. Yakobi sharti.

3. Tadqiq qilinayotgan ekstremaldagi nuqtalarga yaqin bo'lgan (x,y) nuqtalar uchun $F_{y'y'}(x,y,y') \geq 0.$ bo'ladi.

Kuchsiz minimum :

1. $F_{y'}(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'y'}(x,y,y') = 0.$

2. Yakobi sharti.

3. Tadqiq qilinayotgan ekstremaldagi nuqtalarga yaqin bo'lgan (x,y) nuqtalar uchun va $p(x,y)$ ga yaqin y' lar uchun $E(x,y,p,y') \geq 0.$

Kuchli minimum :

1. $F_{y'}(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'y'}(x,y,y') = 0.$

2. Yakobi sharti.

3. Tadqiq qilinayotgan ekstremaldagi nuqtalarga yaqin bo'lgan (x,y) nuqtalar uchun va ixtiyoriy y' uchun $E(x,y,p,y') \geq 0.$

Kuchsiz minimum :

1. $F_{y'}(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'y'}(x,y,y') = 0.$

2. Mazkur ekstremalni o'z ichiga oluvchi ekstremallar maydoni mavjud.

3. Tadqiq qilinayotgan ekstremaldagi nuqtalarga yaqin bo'lgan (x,y) nuqtalar uchun va $p(x,y)$ ga yaqin y' lar uchun $E(x,y,p,y') \geq 0.$

Kuchsiz minimum :

1. $F_{y'}(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'y'}(x,y,y') = 0.$

2. Mazkur ekstremalni o'z ichiga oluvchi ekstremallar maydoni mavjud.

3. Tadqiq qilinayotgan ekstremaldagi nuqtalarga yaqin bo'lgan (x,y) nuqtalar uchun va ixtiyoriy y' uchun $E(x,y,p,y') \geq 0.$

Maksimumning yetarli shartini olish uchun yuqoridagi xulosada yozilgan tengsizliklarni teskari ma'noda olish yetarli.

5-misol. Quyidagi

$$J = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx, \quad y(0) = y(a) = 0, \quad a > 0,$$

funksional ekstremumga tadqiq qilinsin.

Yechish. Eyler tenglamasi $y'' + y = 0$ ko'rinishga ega, uning umumiy yechimi $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanib, C_1, C_2 – o'zgarmaslarni topamiz, agar $a \neq k\pi$ bo'lsa, bu yerda k – butun son, ular $C_1 = C_2 = 0$ bo'ladi.

Demak, $a \neq k\pi$ bo'lganda $y = 0$ to'g'ri chiziqda funksional ekstremumga erishishi mumkin. Agar $a < \pi$ bo'lsa, u holda markazi

(0,0) nuqtada bo'lgan $y = C_1 \sin x$ ekstremallar dastasi markaziy maydon tashkil qiladi. $a > \pi$ bo'lganda Yakobi sharti bajarilmaydi.

Integral ostidagi funksiyaning y bo'yicha uch marta differensiallanuvchi ekanligidan ixtiyoriy x da va y ning ixtiyoriy qiymatida $F_{y'y'} = 2 > 0$ bo'lganligi uchun $a < \pi$ bo'lganda $y = 0$ to'g'ri chiziqda funksional kuchli minimum amalga oshadi. Agar izohni e'tiborga olsak, shuni aytish mumkinki, $a > \pi$ bo'lganda $y = 0$ to'g'ri chiziqda minimumga erishmaydi.

Lejandrning yetarli shartlari. Aytaylik, $F(x, y, y')$ funksiya uzluksiz xususiy xosilalarga $F_{y'}(x, y, y')$ ega va C ekstremal ekstremallar maydoniga kirgan bo'lsin.

Agar C ekstremalda $F_{y'y'} > 0$ ga ega bo'lsa, u holda C egri chiziqda kuchsiz minimumga erishiladi; agar C ekstremalda $F_{y'y'} < 0$ bo'lsa, u holda C egri chiziqda (1) funksional kuchsiz maksimumga erishadi. Bu shartlar Lejandrning kuchaytirilgan shartlari deyiladi.

Qachonki, y' ning ixtiyoriy qiymatlarida C ekstremalga yaqin (x, y) nuqtalarda $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ bo'lsa, bu holda kuchli minimumga ega bo'lamiz. Argumentlarning ko'rsatilgan qiymatlari uchun $F_{y'y'}(x, y, y') > 0$ bo'lsa, u holda kuchli maksimumga ega bo'lamiz.

6-misol. $J[y(x)] = \int_0^{\xi} (y'^2 - \alpha y^2)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(\xi) = -2$ funksional ekstremumga tekshirilsin, bu yerda α – ixtiyoriy haqiqiy son.

Yechish. Integral ostidagi funksiya faqat y' ga bog'liq bo'lganligi uchun ekstremal $y = C_1 x + C_2$ to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi.

bo'lsa, u holda $[y'^2 + 2py - (6 - 3p^2)] \geq 0$ ifoda ishorasini o'zgartiradi. Agarda y' p dan yetarlicha kichik farq qilsa, u holda oxirgi ifoda $p > 1$ bo'lganda musbat ishorani, va xuddi shuningdek, $p < 1$ bo'lganda manfiy ishorani saqlab qoladi. Bundan, $p = \frac{b}{a} < 1$ yoki $b < a$ bo'lganda p ga yaqin y' ning qiymatlarida $E(x, y, p, y') \geq 0$ bo'lganligi sababli, kuchsiz minimumga ega bo'lamiz. $p = \frac{b}{a} > 1$ yoki $b > a$ bo'lganda kuchsiz maksimumga ega bo'lamiz. $p = \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$ bo'lganda y' ning ixtiyoriy qiymatlarida $E(x, y, p, y') \leq 0$ bo'lganligi sababli kuchli maksimumga ega bo'lamiz. $p = \frac{b}{a} < \sqrt{3}$ bo'lganda yuqoridagi izohga ko'ra, kuchli minimum ham, kuchli maksimum ham yo'q (53-rasm).

Yuqorida keltirilgan misollardan ham ko'rinib turibdiki, $E(x, y, p, y')$ funksiyaning ishorasini aniqlash bir qancha qiyinchiliklar tug'diradi, shuning uchun $E(x, y, p, y')$ funksiyaning ishorasini saqlab qolish shartini undanda oson tekshiriladigan shart bilan almashtirish maqsadga muvofiq.

Quyidagi funksionallar ekstremumga tekshirilsin:

205. $J[y] = \int_0^1 e^x (y' + \frac{1}{2} y'^2)\,dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = e$.

206. $J[y] = \int_0^1 e^{-x} y'^2\,dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y(1) = \ln 4$.

207. $J[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}\,dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 4$.

208. $J[y]=\int_0^a \frac{dx}{y'}$, $y(0)=0$, $y(a)=b$, $a>0, b>0$

209. $J[y]=\int_0^1 (1+x)y'^2dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$

210. $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2-y'^2)dx$, $y(0)=1$, $y(\frac{\pi}{2})=1$

211. $J[y]=\int_{-1}^{2} y'(1+x^2y')dx$, $y(-1)=1$, $y(2)=4$

212. $J[y]=\int_{-1}^{1} (y'^2-y^2)dx$, $y(-1)=-1$, $y(1)=1$

Faraz qilaylik, $F(x,y,y')$ funksiya y' argument bo'yicha uch marta differensiallanuvchi bo'lsin. Teylor formulasiga ko'ra,

$$F(x,y,y')=F(x,y,p)+(y'-p)F_{y'}(x,y,p)+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q),$$

bu yerda q, p va y' larning orasida joylashgan.

$$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_{y'}(x,y,p)$$

funksiyani $F(x,y,y')$ funksiyaga almashtirgandan so'ng, Teylor formulasiga ko'ra, uning yoyilmasi

$$E(x,y,p,y')=\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q),$$

ko'rinishni oladi. Bu yerdan ko'rinib turibdiki, agar $F_{y'y'}(x,y,q)$ ishorasini saqlasa, $E(x,y,p,y')$ funksiya ham ishorasini saqlab qoladi. $F_{y'y'}(x,y,q)$ funksiyani ekstremumga tadqiq qilishda x va y larning qiymatlari uchun tadqiq etilayotgan ekstremalning yaqin nuqtalarida va q ning p ga yaqin qiymatlari uchun ishorani saqlashi kerak. Agar C ekstremalning nuqtalarida $F_{y'y'}(x,y,y')\neq 0$ bo'lsa, u holda uzluksizlikka

mumkin. Bunda ekstremallar to'g'ri chiziq bo'ladi, $y=C_1x$ dasta $y=\frac{b}{a}x$ ekstremalni o'ziga oluvchi markaziy maydonni tashkil etadi. $y=\frac{b}{a}x$ ekstremalda ikkinchi hosila $F_{y'y'}=6y'=6\frac{b}{a}>0$, bo'ladi. Bundan, $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq kuchsiz minimumni amalga oshiradi. Ixtiyoriy y' da ikkinchi hosila $F_{y'y'}=6y'$ ishorani saqlamaydi. Binobarin, yuqorida ko'rsatilgan yetarli shartlar kuchli minimumga erishish uchun bajarilmaydi. Biroq bu yerdan kuchli ekstremumga erishmaydi deb xulosa qilib bo'lmaydi.

10-misol. Quyidagi

$$J=\int_0^a \frac{y}{y'}dx, \quad y(0)=1, \quad y(a)=b, \quad a>0, \quad 0<b<1,$$

funksionalni ekstremumga tekshiring. Eyler tenglamasining birinchi integrali

$$\frac{y}{y'}+y\frac{2y}{y'^2}=C \quad \text{yoki} \quad y'=4C_1y.$$

ko'rinishda bo'ladi, bu tenglamani ildizdan qutqarib, o'zgaruvchilarini ajratib integrallash orqali $y=(C_1x+C_2)^2$ yechimni olamiz, bu parabolalar oilasi. $y(0)=1$ shartdan $C_2=1$ ni olamiz. Makazi $A(0,1)$ nuqtada bo'lgan $y=(C_1x+1)^2$ parabolalar dastasi $y=0$ C_1 – diskriminant egri chiziqqa ega bo'ladi (55-rasm). $B(a,b)$ nuqta orqali bu dastaning ikkita parabolasi o'tadi. AB yoyda ulardan biri (L_1) da A



55-rasm

nuqtaga qo'shma bo'lgan A' nuqta yotadi, boshqasida u (L_2) da qo'shma nuqta yo'q, bundan kelib chiqadiki, (L_2) da Yakobi sharti bajariladi va parabolaning bu yoyida ekstremumni amalga oshirish mumkin. Tadqiq etilayotgan ekstremalning atrofida ixtiyoriy x uchun $F_{y'y'} = \frac{6y}{x^2} > 0$, bo'ladi, biroq buning asosida (L_2) yoyda kuchli minimumni amalga oshirish mumkin deb bo'lmaydi, chunki $F(x,y,y') = \frac{y'}{x}$ funksiyani y ning ixtiyoriy qiymatlarida va $F(x,y,y')$ funksiyani $x = 0$ uzulishga ega ekanligini hisobga olib,

$$F(x,y,y') = F(x,y,p) + (y'-p)F_{y'}(x,y,p) + \frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q),$$

ko'rinishda tasvirlab bo'lmaydi. Faqat shuni aytish mumkinki, (L_2) egri chiziqda maydon og'ishiga yaqin y ning qiymatlari uchun (L_2) da kuchsiz minimumni amalga oshirsa bo'ladi. Teylor qatoriga bunday yoyilma ham o'rinli. Bu funksionalni ekstremumga to'la tekshirish uchun $E(x,y,p,y')$ ko'rinishda deb qarash zarur:

$$E(x,y,p,y') = \frac{y'}{y^2} - \frac{y}{p^2} + \frac{2y}{p^3}(y'-p) = \frac{y(y'-p)^2(2y'+p)}{y^2p^3}.$$

$(2y'+p)$ ko'paytuvchi y' ning ixtiyoriy qiymatlarida ishorani saqlamaganligi sababli, izohga ko'ra (L_2) yoyda funksional kuchli minimumga erishmaydi deb aytish mumkin.

Bayon qilingan bu nazariyani juda muhim bo'lmagan o'zgarishlarsiz quyidagi ko'rinishga ega bo'lgan funksionallarga ham o'tkazish mumkin:

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')dx,$$

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1}, \quad (i = 1,2,\dots,n),$$

bunda $E(x,y,p,y')$ funksiya quyidagi ko'rinishni oladi

$$E(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, y_1', \dots, y_n') = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') -$$

$$-F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) - \sum_{i=1}^{n}(y_i' - p_i)F_{y_i'}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

bu yerda p_i – lar qandaydir chegara qo'yilgan maydonning og'ish funksiyalari (bu chegaralanishlarda maydon *maxsus maydon* deb ataladi).

$F_{y'y'} \geq 0$ Lejandr sharti quyidagi shartlarga almashadi:

$$F_{y_1'y_1'} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \dots \quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \dots F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \dots F_{y_2'y_n'} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} \dots F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix} \geq 0.$$

11-misol.

$$J[y,z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2)dx, \tag{7}$$

$$y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 2. \tag{8}$$

funksional ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. (7) funksional uchun Eyler tenglamasi

$$y'' = 0, \quad z'' = 0,$$

ko'rinishda bo'ladi, bundan

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= C_1 + C_2 x \\ z(x) &= C_3 + C_4 x \end{aligned}\right\}$$

ga ega bo'lamiz. (8) shartlardan foydalanib, quyidagini topamiz: $C_1 = C_3 = 0, C_2 = 1, C_4 = 2$. Qidirilayotgan ekstremal koordinata boshidan o'tuvchi

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= x, \\ z(x) &= 2x, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Bundan

$$F_{y'y'} = 2, \quad F_{y'z'} = 0, \quad F_{z'y'} = 0, \quad F_{z'z'} = 2,$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

$$F_{y'y'} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0. \tag{10}$$

kuchaytirilgan Lejandr sharti bajariladi. Endi, kuchaytirilgan Yakobi shartining bajarilishini tekshiramiz.

Qo'shma nuqtaning ta'riflaridan birini keltiramiz ([3] ga qarang). Aytaylik, funksionalning boshlang'ich $(x^0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ nuqtadan chiquvchi, o'zaro yaqin bo'lgan, lekin chiziqli bog'liq bo'lmagan yo'naltirishli ekstremallar oilasiga ega bo'laylik.

5-ta'rif. *$x^* \in [x_0, x_1]$ nuqta x^0 nuqtaga qo'shma nuqta deyiladi, agar boshlang'ich $(x^0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ nuqtadan chiquvchi va berilgan ekstremal- ga yetarlicha yaqin shunday ekstremallar ketma-ketligi mavjud bo'lib, bu ekstremallarning har biri berilgan ekstremalni kesib o'tsa va absissaning kesishish nuqtalarida x^* nuqtaga yaqinlashsa.*

Ushbu misolda ekstremallar (4) to'g'ri chiziqlardan iborat. $(0,0,0)$ nuqtadan chiquvchi barcha ekstremallar (4) ekstremalni faqat shu nuqtada kesadi. Bundan x ning o'zgarish kesmasi $[0,1]$ $x_0 = 0$ nuqtaga

bilan qo'shma bo'lgan nuqtani o'z ichiga olmaydi. Shunday qilib, kuchaytirilgan Lejandr hamda Yakobi shartlari bajariladi, shuning uchun, (4) ekstremal (2) funksionalga kuchsiz minimum beradi.

Kuchsiz minimumning yetarli shartini, sodda masala bo'ladimi, murakkab masala bo'ladimi, boshqa, ikkinchi variatsiya ishorasini o'rganishga asoslangan usullar bilan ham olish mumkin.

Variatsion hisob sodda masalasida funksionalning orttirmasini Teylor formulasi bo'yicha quyidagi ko'rinishda o'zgartirish mumkin:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left[F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2 \right] dx + R,$$

bu yerda R qo'shiluvchi δy va $\delta y'$ larga nisbatan cheksiz kichik miqdordir.

Kuchsiz ekstremalga tadqiq qilganda δy va $\delta y'$ lar yetarlicha kichik, bu holda ΔJ orttirmaning ishorasi δy va $\delta y'$ larning eng quyi darajasini o'ziga olgan o'ng tomonidagi hadi ishorasiga qarab aniqlanadi. Ekstremallarda birinchi variatsiya

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = 0,$$

bo'ladi va binobarin, ΔJ orttirmaning ishorasi ikkinchi variatsiya ishorasi bilan ustma-ust tushadi

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2 \right] dx.$$

Lejandr sharti Yakobi sharti bilan birgalikda ikkinchi variatsiyaning

ishorasini doimiyligini ta'minlovchi shart bo'ladi. Shu bilan birga ΔJ orttirma ishorasining doimiyligi kuchsiz ekstremum haqidagi masalada ham o'rinli, bo'ladi.

Haqiqatan, quyidagi integralni qaraymiz

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\omega'(x)\delta y^2+2\omega(x)\delta y\delta y'\right]dx, \qquad (5)$$

bu yerda $\omega(x)$ – ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiya. Bu integral $\delta y(x_0)=0$ va $\delta y(x_1)=0$ bo'lganligi sababli nolga teng:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\omega'(x)\delta y^2+2\omega(x)\delta y\delta y'\right]dx=\int_{x_0}^{x_1}d(\omega\delta y^2)dx=\left[\omega\delta y^2\right]_{x_0}^{x_1}=0.$$

Ikkinchi variatsiyaga (5) integralni qo'shib,

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}\left[(F_{yy}+\omega')\delta y^2+2(F_{yy'}+\omega)\delta y\delta y'+F_{y'y'}\delta y'^2\right]dx.$$

ifodaga ega bo'lamiz. $\omega(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki, natijada integral ostidagi ifoda ko'paytuvchigacha aniqlikda aniq kvadratga aylandi, $\omega(x)$ funksiya esa

$$F_{y'y'}(F_{yy}+\omega')\delta y^2-2(F_{yy'}+\omega)^2=0$$

tenglamani qanoatlantirishi kerak. $\omega(x)$ funksiyani bunday tanlovida ikkinchi variatsiya

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_{y'y'}\left(\delta y'+\frac{F_{yy'}+\omega}{F_{y'y'}}\delta y\right)^2\right]dx$$

ko'rinishni oladi va ikkinchi variatsiyaning ishorasi $F_{y'y'}$ ning ishorasi bilan ustma-ust tushadi. Biroq, bunday almashtirish faqat farazlarda mumkin,

$$F_{y'y'}(F_{yy}+\omega')\delta y^2-2(F_{yy'}+\omega)^2=0$$

differensial tenglama (x_0,x) oraliqda differensiallanuvchi $\omega(x)$ yechimga ega.

Bu tenglamani o'rniga qo'yish orqali yangi o'zgaruvchilarga o'zgartirib,

$$\omega=-F_{yy}-F_{y'y'}\frac{u'}{u},$$

ifodaga kelamiz, bu yerda u – yangi noma'lum funksiya

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u-\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}u'\right)=0,$$

natijada, Yakobi tenglamasi ifodasini olamiz.

Agar bu tenglamaning $x_0<x<x_1$ oraliqda nolga aylanmaydigan yechimi mavjud bo'lsa, ya'ni Yakobi sharti bajarilsa, u holda x ning shunday qiymatlari uchun

$$F_{y'y'}(F_{yy}+\omega')-(F_{yy'}+\omega)^2=0$$

differensial tenglamaning

$$\omega=-F_{yy}-F_{y'y'}\frac{u'}{u},$$

differensiallanuvchi yechimi mavjud bo'ladi.

Demak, Lejandr va Yakobi sharti ikkinchi variatsiyaning ishorasini saqlanishini kafolatlaydi va binobarin, kuchsiz minimum uchun yetarli shart bo'ladi. ($F_{y'y'}>0$) yoki maksimum ($F_{y'y'}<0$).

Lejandr shartidan foydalanib, quyidagi funksionallar ekstremumga tekshirilsin.

213. $J[y]=\int_0^1 (y'^2+x^2)dx,\quad y(0)=-1,\quad y(1)=1$

214. $J[y]=\int_1^2 \frac{x^2}{y^2}dx,\quad y(2)=4,\quad y(3)=9$

215. $J[y]=\int_0^1 (xy'^2-2yy')dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=0$

216. $J[y]=\int_0^a (1-e^{-y'})dx,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b\ (a>0)$

217. $J[y]=\int_0^1 yy'^2dx,\quad y(0)=p>0,\quad y(1)=q>0$

218. ε parametrning turli qiymatlari uchun

$$J[y]=\int_0^1 (\varepsilon y'^2+y^2+x^2)dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1$$

funksional ekstremumga tekshirilsin.

12-misol (Eyler masalasi). l uzunlikdagi sterjen o'zining oxirgi uchlariga tiralgan bo'lib, P bosim kuchi qo'yilgan. P ning aniq qiymatida (Eylerning kritik kuchi) sterjenda bo'ylama egilish yuz beradi. Bo'ylama egilishni hosil qiluvchi (yuzaga keltiruvchi) P kuchning eng kichik qiymatini aniqlash talab qilinadi.

Yechish. Aytaylik, E – elastiklik moduli, I – sterjenning ko'ndalang kesimining eng kichik inersiya momenti, ρ – egrilik radiusi, φ – urinmaning o'q bilan hosil qilgan burchagi bo'lsin.

Yorug'likning potensial energiyasi quyidagi formula orqali aniqlanadi

$$U_1=\frac{1}{2}EI\int_0^l \frac{dS}{\rho^2}$$

Sterjen oxirlarini

$$\sigma=\int_0^l (1-\cos\varphi)dS$$

kattalikka tushirishda sterjenning potensial energiyasi

$$U_2=P_0=Pl-P\int_0^l \cos\varphi dS$$

miqdorga kamayadi.

Agar potensial energiya deformatsiyagacha nolga teng bo'lgan bo'lsa, u holda deformatsiyadan so'ng u quyidagi formula orqali ifodalanadi

$$U=U_2-U_1=\int_0^l (\frac{1}{2}EI\frac{1}{\rho^2}+P\cos\varphi)dS-Pl$$

$\rho=\frac{dS}{d\varphi}$ bo'lgani uchun va (φ ning kichik qiymatlarida) $\cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$ bo'lsa, u holda

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l \left[EI(\frac{d\varphi}{dS})^2-P\varphi^2\right]dS=\frac{1}{2}\int_0^l \left[EI(\frac{d\varphi}{dx})^2-P\varphi^2\right]dx$$

Bu muvozanat holatda potensial energiya eng kichik qiymatni qabul qiladi. Shuning uchun, masalaning yechimi

$$J[\varphi]=\int_0^l \left[EI(\frac{d\varphi}{dx})^2-P\varphi^2\right]dx$$

integralning minimumini topishga keltiriladi. Bu holda

$$F=EI(\frac{d\varphi}{dx})^2-P\varphi^2$$

bo'ladi va Eyler tenglamasi

$\varphi''+a^2\varphi=0$, bu yerda $a^2=\frac{P}{EI}$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy integrali quyidagiga teng bo'ladi

213. $J[y] = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$

214. $J[y] = \int_1^2 \frac{x^2}{y}\,dx$, $y(2) = 4$, $y(3) = 9$

215. $J[y] = \int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi/4) = 0$

216. $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$

217. $J[y] = \int_1^2 y'^2 x^3\,dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$

218. α parametrning turli qiymatlari uchun

$$J[y] = \int_0^{\pi/4} (\alpha y^2 + y'^2 + 8y)\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 1$$

funksional ekstremumga tekshirilsin.

12-misol (Eyler masalasi). l uzunlikdagi sterjen o'zining oxirgi uchlariga tiralgan bo'lib, P bosim kuchi qo'yilgan, P ning aniq qiymatida (Eylerning kritik kuchi) sterjenda bo'ylama egilish yuz beradi. Bo'ylama egilishni hosil qiluvchi (yuzaga keltiruvchi) P kuchining eng kichik qiymatini aniqlash talab qilinadi.

Yechish. Aytaylik, E – elastiklik moduli, I – sterjenning ko'ndalang kesimining eng kichik inersiya momenti, ρ – egrilik radiusi, φ – urinmaning o'q bilan hosil qilgan burchagi bo'lsin.

Yorug'likning potensial energiyasi quyidagi formula orqali aniqlanadi

$$U = \frac{1}{2} EI \int \frac{ds}{\rho^2}$$

Sterjen oxirlarini

$$x = \int (1 - \cos\varphi)\,ds$$

kattalikka tushirishda sterjenning potensial energiyasi

$$U = \frac{1}{2} EI \int \frac{d\varphi}{ds}\,ds - P \int \cos\varphi\,ds$$

miqdorga kamayadi.

Agar potensial energiya deformatsiyagacha nolga teng bo'lgan bo'lsa, u holda deformatsiyadan so'ng u quyidagi formula orqali ifodalanadi

$$U = \frac{1}{2} EI \int \left(\frac{1}{\rho^2}\right) ds - P \int \cos\varphi\,ds - P.$$

$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$ bo'lgani uchun va φ ning kichik qiymatlarida $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ bo'lsa, u holda

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds - P \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - P\varphi^2\right] ds$$

Bu muvozanat holatida potensial energiya eng kichik qiymatni qabul qiladi. Shuning uchun, masalaning yechimi

$$J[\varphi] = \int_0^l \left[EI \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - P\varphi^2\right] ds$$

integralning minimumini topishga keltiriladi. Bu holda

$$F = EI \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - P\varphi^2$$

bo'ladi va Eyler tenglamasi

$$\varphi'' + \alpha^2 \varphi = 0, \text{ bu yerda } \alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy integrali quyidagiga teng bo'ladi

$$\varphi = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x$$

φ ning kichik qiymatlarida $tg\varphi \approx \varphi$ bo'lganligi uchun, $tg\varphi = x$ bo'ladi va bundan tashqari

$$y = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x$$

bo'ladi. Bu yerdan

$$y(x) = -\frac{C_1}{\alpha}\cos\alpha x + \frac{C_2}{\alpha}\sin\alpha x$$

Agar sterjenning pastki uchi koordinata boshida bo'lsa, u holda $x = 0$ da $y = 0$ bo'ladi, demak, $C_1 = C_2 = 0$ va $y(x) = \frac{C_2}{\alpha}\sin\alpha x$

Lejandr va Yakobi shartlarining bajarilishini tekshiramiz. Ravshanki, Lejandr sharti $\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'^2} = 2EJ > 0$ bajariladi. Yakobi tenglamasining ko'rinishi quyidagicha

$$Ez'' + Pz = 0 \text{ yoki } z'' + \alpha^2 z = 0,\ z(0) = 0.$$

bo'ladi. Shuning uchun, Yakobi tenglamasining yechimi

$$z = A\sin\alpha x$$

bo'ladi. z funksiya $x_k = \frac{k\pi}{\alpha}(k = 1, 2, \ldots)$ da nolga aylanadi. Yakobi sharti bajari-ladi, agar $l < \frac{\pi}{\alpha}$ bo'lsa. Bundan

$$P < \frac{\pi^2}{l^2}EJ$$

Eyler kritik kuchining eng kichik qiymati

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{l^2}EJ$$

bo'ladi. Bunda

$$y = \frac{C_2}{\alpha}\sin\frac{\pi x}{l}$$

egrilik chizig'ining tenglamasini beradi.

Figuratrisa. Aytaylik, bizga

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

ko'rinishdagi funksional berilgan bo'lsin. x, y larni parametr, deb hisoblab, hamda $y' = f(x, y)$ funksiyani y' argumentning funksiyasi deb qaraymiz.

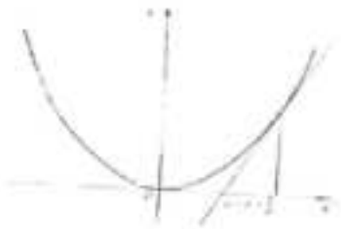
Ushbu funksiyaning (x, y) o'zgaruvchilar tekisligidagi grafigi *figuratrisa*, deb ataladi. $F(x, y, p, y')$ Veyershtrass funksiyasi figuratrisa ordinatasi bilan unga $x = p$ absissali nuqtada o'tkazilgan urinmaning ayirmasi ekanligini tekshirish qiyin emas. y' ning ayrim qiymatlari uchun Veyshtrass funksiyasi ishorasining doimiyligi figuratrisani urinmaning ustida yoki y ning ko'rsatilgan qiymatlari uchun urinmaning ostida yotishligini anglatadi. Ushbu holatda kuchsiz ekstremum o'rinli bo'ladi. Agar figuratrisa y ning barcha qiymatlari va ektremal nuqtalariga yaqin x, y parametrlarning qiymatlari uchun urinmaning bir tomonida yotsa, u holda kuchli ekstremum o'rinli bo'ladi.

Lejandrning yetarlilik sharti ushbu iboralarda quyidagicha ifodalanadi: agar x, y ning ekstremalga yaqin barcha nuqtalari uchun figuratrisa hamma yerda qavariq yoki botiq bo'lsa, u holda kuchli ekstremum o'rinli bo'ladi.

13-misol. $J[y] = \int_0^a y'^2 dx,\ y(0) = 0,\ y(a) = b,\ b > 0$ funksional ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. Ekstremallar $y = Ax + C$ chiziqlardan iborat. Izlanayotgan ekstremal $y = \frac{b}{a}x$ tenglamadan aniqlanadi. U ekstremallarning markaziy maydoniga mansub bo'ladi. Bu holda figuratrisa $Y = y'$ paraboladan iborat bo'ladi (23-rasm). Bu yerdan figuratrisani ixtiyoriy a va b, $a \neq 0$ larda $p = \frac{b}{a}$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning ustida to'la yotganini ko'rish qiyin emas. Demak, $y = \frac{b}{a}x$ ekstremal berilgan funksionalga kuchli minimum beradi.

14-misol. $J[y] = \int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $b > 0$ funksionalni ekstremumga tekshirilsin.

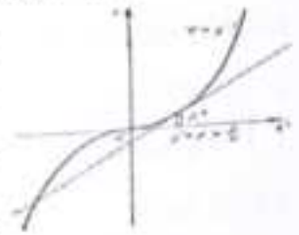


56-rasm

Yechish. $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq qidirilayotgan ekstremal bo'ladi. U markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan $y = Cx$ ekstremallar markaziy maydoniga kiradi. Figuratrisa $Y = (y')^2$ kubik parabola bo'ladi. (56-rasm). Figuratrisa y ni $p = \frac{b}{a}$ qiymatga yetarlicha yaqin qiymatlari uchun obsissa bilan $x = \frac{b}{a}$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning ustida yotadi. 56-rasmdan ko'rinib turibdiki, figuratrisa urinmani absissa bilan $x = -2\frac{b}{a}$ nuqtada kesadi hamda bu nuqtaning chaprog'ida urinma ustida joylashgan. Demak, berilgan funksional $y = \frac{b}{a}x$ ekstremalda kuchsiz minimumga erishadi.

Ta'kidlab o'tish lozimki, agar $p = 0$ (bu $b = 0$ holga to'g'ri keladi. ekstremal Ox o'qining kesmasi bo'ladi) bo'lsa, u holda figuratrisaga

urinma Oy o'qi bo'ladi, $O(0,0)$ nuqta esa figuratrisaning egilish nuqtasi bo'ladi. 8 § dagi izohni hisobga olgan holda, figuratrisa $O(0,0)$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida musbat hamda manfiy ordinatalarga ega bo'lishini ko'ramiz. Demak, $F(x, p, y)$ Veyershtrass funksiyasi x ning $p = 0$ ga xohlagancha yaqin qiymatlarida qarama-qarshi ishoraga ega bo'ladi va bundan, bu holda berilgan funksional kuchsiz ekstremumga erishmaydi (57-rasm).



7-rasm

15-misol. $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, variatsion masalada $y = 0$ ekstremal funksionalga kuchsiz minimum berishligi ko'rsatilsin.

Yechish. Bu holda Lejandr sharti

$$f_{y'y'}\big|_{y=0} = (2 - 6y)\big|_{y=0} = 2 > 0,$$

ifodani beradi, ya'ni $y = 0$ ekstremalda kuchsiz minimumga erishadi. $y = 0$ da kuchli minimumga erishmasligini ko'rsatamiz. $x = 0$ ning qiymatlari uchun $Y = y'^2 - y^3$ figuratrisani quramiz (58- rasm).



58- rasm

58- rasmdan ko'rinib turibdiki, figuratrisaga absissa bilan $p = 0$ nuqtadan o'tkazilgan urinma figuratrisani $y' = \frac{1}{y}$ nuqtada kesadi. Shunday qilib, (x, y) nuqtalar uchun, bu yerda $x > 0$, $y = 0$ ekstremalga yaqin nuqtalarda $F(x, y, p, y')$ Veyershtrass funksiyasi y' ning $\frac{1}{y}$ dan kichik qiymatlarida musbat, $y' > \frac{1}{y}$ da esa manfiy bo'ladi. 8

§ dagi izohga ko'ra, kuchli minimum yo'q. Xuddi shuningdek holat $x<0$ hol uchun ham o'rinli.

Bu misol ixtiyoriy x uchun ekstremalda $f_{yy}>0$ shartni bajarilishidan kuchli ekstremumga ega ekanligi kelib chiqmasligini ko'rsatish bilan xarakterlidir.

Figuratrisalar yordamida quyidagi funksionallar ekstremumga tekshirilsin:

219. $J[y]=\int_0^1(1+xy')^2dx$, $y(0)=0$, $y(1)=2$.

220. $J[y]=\int_1^3(1+x^2y')dx$, $y(1)=1$, $y(2)=3$.

221. $J[y]=\int_0^a(1-e^{-x})y'dx$, $y(0)=0$, $y(a)=b$, $a>0$, $b>0$.

222. $J[y]=\int_0^a(6y^2-y^2+xy')dx$, $y(0)=0$, $y(a)=b$, $a>0$, $b>0$.

6-izoh. *Ikkinchi tartibli variatsiya bo'yicha ekstremumning yetarlilik sharti. Ikkinchi tartibli variatsiyani manfiy emasligi zarur, lekin berilgan egri chiziqda $J[y]$ funksionalni minimumga erishishi uchun yetarli emas.*

16-misol. $C^1(0,1)$ fazoda $J[y]=\int_0^1 y'(x)(x-y(x))dx$ funksionalni ko'raylik. Eyler tenglamasi $F_y=0$ ko'rinishga ega, yoki $x=0$. Funksionalning $y=0$, $0\le x\le 1$, ekstremaldagi ikkinchi variatsiyasi

$$\delta^2J[0,\delta y]=\int_0^1 x(\delta y')^2dx$$

har bir $\delta y\neq 0$ uchun musbat bo'ladi. Biroq, $J[y]$ funksional nolning har

qanday atrofida manfiy qiymatni qabul qiladi. Yetarlicha berilgan $\varepsilon>0$ da

$$x(x)=\begin{cases}-x+\varepsilon, & 0\le x<\varepsilon,\\ 0, & x\ge\varepsilon\end{cases}$$

funksiyani olamiz. U holda, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun $J[y]=-\frac{\varepsilon^3}{6}<0$ bo'ladi.

Quyidagi funksionallar ekstremumumga tekshirilsin:

223. $J[x(t),y(t),z(t)]=\int_0^1(1+t^2+z^2)dt$, $x(0)=y(0)=0$, $x(1)=2$, $z(1)=4$.

224. $J[x(t),y(t),z(t)]=\int_0^1(x^2+y^2+4z)dt$, $x(0)=z(0)=0$, $x(1)=1$, $z(1)=0$.

Yetarli shartlar haqida izohlar. Kelgusida yetarli shartlar masalasiga to'xtalmoqchimiz. Umumiy holat quyidagicha. Bir o'lchovli holatdan farqli o'laroq, statsionar nuqtadagi $f'(0)>0$ shart, minimumning mavjud bo'lishligi uchun yetarli emas. Biz ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun minimumning yetarli sharti masalasi qanday hal qilinganligini eslaylik. Agar $f(x), x\in R^n$, funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o\left(|h|^2\right),$$

o'rinli bo'ladi, bu yerda $f'(x)h=\langle l\,|\,h\rangle$, $l-f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi gradienti va $f''(x)h^2=\langle Hh\,|\,h\rangle$, $H-x$ nuqtadagi Gess matritsasi (ikkinchi tartibli xususiy hosilali matritsa). Agar x statsionar nuqta (ya'ni $l=0$), Gess matritsasi musbat aniqlangan bo'lsa, ya'ni

$$\forall h:\ \langle Hh\,|\,h\rangle=\alpha|h|^2,\quad \alpha>0,$$

§ dagi izohga ko'ra, kuchli minimum yo'q. Xuddi shuningdek holat $x = 0$ hol uchun ham o'rinli.

Bu misol ixtiyoriy ε uchun ekstremalda $J_{yy} > 0$ shartni bajarilishidan kuchli ekstremumga ega ekanligi kelib chiqmasligini ko'rsatish bilan xarakterlidir.

Figuratrisalar yordamida quyidagi funksionallar ekstremumga tekshirilsin:

219. $J[y] = \int_0^1 (y' + xy)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$.

220. $J[y] = \int_0^1 (x(1+x)y' + y)\,dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$.

221. $J[y] = \int_0^1 (1 - e^{-x})y'\,dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$.

222. $J[y] = \int_0^{\pi/2} (\sin y - y\cos y + y')\,dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a < \frac{\pi}{2}$, $b > 0$.

6-izoh. *Ikkinchi tartibli variatsiya bo'yicha ekstremumning yetarlilik sharti. Ikkinchi tartibli variatsiyani manfiy emasligi zarur, lekin berilgan egri chiziqda $J[y]$ funksionalni minimumga erishishi uchun yetarli emas.*

16-misol. $C^1[0,1]$ fazoda $J[y] = \int_0^1 y'(xy' - yx)\,dx$ funksionalni ko'raylik. Eyler tenglamasi $F_y = 0$ ko'rinishga ega, yoki $x = 0$. Funksionalning $y = 0$, $0 \le x \le 1$, ekstremaldagi ikkinchi variatsiyasi

$$\delta^2 J[0, \delta y] = \int_0^1 x(\delta y')^2\,dx$$

har bir $\delta y \neq 0$ uchun musbat bo'ladi. Biroq, $J[y]$ funksionali nolning har

qanday atrofida manfiy qiymatni qabul qiladi. Yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ da

$$y = \begin{cases} \varepsilon x, & 0 \le x \le \varepsilon, \\ \varepsilon(2\varepsilon - x), & \varepsilon \le x \le 2\varepsilon, \\ 0, & 2\varepsilon \le x \le 1, \end{cases}$$

funksiyani olamiz. U holda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $J[y] = -\frac{\varepsilon^3}{6} < 0$ bo'ladi.

Quyidagi funksionallar ekstremumiga tekshirilsin:

223. $J[y] = \int_0^1 (y' + y^2)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 3$, $y(0) = 4$.

224. $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $y(0) = 0$, $y(a) = 1$, $y(0) = 0$.

Yetarli shartlar haqida izohlar. Kelgusida yetarli shartlar masalasiga to'xtalmoqchimiz. Umumiy holat quyidagicha. Bir o'lchovli holatdan farqli o'laroq, statsionar nuqtadagi $J''(0) > 0$ shart, minimumning mavjud bo'lishligi uchun yetarli emas. Biz ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun minimumning yetarli sharti masalasi qanday hal qilinganligini eslaylik. Agar $f(x)$, $x \in R^n$, funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(\|h\|^2),$$

o'rinli bo'ladi, bu yerda $f'(x)h = (f, h)$, $f - f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi gradienti va $f''(x)h^2 = (Hh, h)$, $H - x$ nuqtadagi Gess matritsasi (ikkinchi tartibli xususiy hosilali matritsa). Agar x statsionar nuqta (ya'ni $f = 0$), Gess matritsasi musbat aniqlangan bo'lsa, ya'ni

$$\forall h: \quad (Hh, h) = \alpha\|h\|^2, \quad \alpha > 0,$$

bo'lsa, u holda

$$f(x+h)-f(x)\geq(\alpha-\varepsilon)\|h\|,$$

bo'ladi, bu yerda ε ni hohlagancha kichik qilish mumkin, xususan, α dan kichik qilish mumkin, agarda h yetarlicha kichik bo'lsa.

Bayon etilgan baholar, aniqki, fazoning o'lchamiga bog'liq emas va integralli funksionallar holida tegishli o'zgarishlar bilan takrorlanishi mumkin, agar biz y funksiyalar fazosini kerakli tarzda unitar (ya'ni unda skalyar ko'paytmani kiritsak) holga o'zgartirsak, yoki hech bo'lmaganda normallashtirsak.

Shuni ta'kidlash kerakki, y funksiyalar to'plamining har qanday normasi variatsion hisobda bunday tahlil uchun yaramaydi. Masalan,

$$\|y(x)\|=\max|y(x)|+\max|y'(x)|,$$

tabiiy ko'rinadigan norma, albatta, mos kelmaydi, chunki

$$\delta^2 J[\eta]\geq\alpha\|\eta\|^2,\quad \alpha>0,$$

tengsizlik integralli funksionallar uchun ixtiyoriy η variatsiyada bajarilmaydi.

Albatta yuqorida bayon etilgan baholar uchun integral normalarni ko'rsatish mumkin, shunga qaramay, yuqorida tavsiflangan yondashuv muhim kamchilikka ega. Darhaqiqat, bu ko'rinishda tadbiq uchun har doim ham qulay emas: Freshe bo'yicha ikki marta differensiallanuvchiligini tekshirish va ikkinchi variatsiyani musbat aniqlanganligini tekshirish juda mazmunli masalalar bo'lishi mumkin.

Eslatib o'tamizki, hatto ko'p o'zgaruvchili funksiyalar bo'lgan holda ham, Gess matritsasining musbat aniqlanganligini tekshirish

qulay bo'lgan shaklda tuzilgan.

Yetarli shartlar masalasida biz boshqacha yo'l tutamiz. Muammoni sinchkovlik bilan tahlil qilib, ma'lum bir vaqtda minimumning zaruriy shartlarini to'plashga harakat qilamiz, chunki ularning soni ma'lum bir bosqichda sifatga aylanadi va ular minimumning yetarli shartini tashkil qiladi.

Birinchi zaruriy shart. Quyidagi integral

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx.$$

ko'rinishidagi funksionalning birinchi variatsiyasini tahlil qilishga qaytamiz. $y(x)$ funksiyani uzluksiz va bo'lakli silliq (differensiallanuvchi bo'lakli silliq) bo'ladi deb hisoblab bir qancha joiz egri chiziqlar sinfini kengaytiramiz, ya'ni $y=y(x)$ egri chiziq burchak nuqtalarga ega bo'lishi mumkin. Boshida $F(x,y,z)$ funksiyani shunchaki uzluksiz deb hisoblash mumkin. y funksiyasi burchak nuqtalarida uzilishga ega bo'lsada, J integralni Riman integrali sifatida mavjud ekanligiga e'tiborni qaratish lozim. Bu holda, J funksionalni eng kichik qiymatga erishtiruvchi $y(x)$ funksiya haqida nima deyish mumkin?

Avvalgidek, $y(x)$ funksiyaning variatsiyasini tayinlaymiz, mazkur holda – $[x_0,x_1]$ kesmaning chetlarida nolga aylanuvchi η uzluksiz, bo'lakli silliq funksiyani tayinlaymiz va quyidagi integralni

$$J[t]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+t\eta,y'+t\eta')dx,$$

tuzamiz. $J[t]$ funksiya $t=0$ da minimumga erishadi. Natijada,

$$J[0] = 0,$$

bo'ladi, bu yerda avvalgidek

$$J[0] = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx,$$

bo'ladi.

Biroq, endi avvalgi holdagi singari bo'laklab integrallashni ikkinchi qo'shiluvchidan emas, birinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallash bilan boshlaymiz. Quyidagi

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx = \int_{x_0}^{x} F_y(u, y(u), y'(u)) du, \tag{6}$$

u holda

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) d\Phi(x) = \left[\eta \Phi \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \Phi \eta' dx,$$

bu yerdan η funksiya uchun nolli chegaraviy shartlarga ko'ra.

$$J[0] = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \Phi \right) \eta' dx = 0,$$

bo'ladi. Endi Dyubua-Reymon lemmasini qo'llashimiz va quyidagi tenglamani

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx = C, \quad C = const, \tag{7}$$

olishimiz mumkin. Biz uni *birinchi zaruriy shart* deb ataymiz.

Bu tenglamadan quyidagi uchta natija kelib chiqadi.

1-natija (Eyler tenglamasi). *Ikkita qo'shni burchak nuqtalar orasida yotuvchi minimallashtiruvchi $y(x)$ egri chiziqning har bir qismida*

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

funksiya hosilaga ega, qaysiki,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

Eyler tenglamasini qanoatlantiradi.

2-natija (Veyershtrass-Erdmon sharti). *Minimallashtiruvchi $y(x)$ egri chiziqning burchak nuqtasiga mos keluvchi x_0 ning har bir qiymati uchun*

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}(x, y(x), y'(x))$$

funksiyaning o'ng va chap limitlari

$$F_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0 - 0)) = F_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0 + 0))$$

ustma-ust tushadi. Biz buni qisqacha quyidagi

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_0} = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_0},$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Ko'p masalalarda bu shartdan minimallashtiruvchi $y(x)$ egri chiziq burchak nuqtalarga ega bo'lmasligi kelib chiqadi. Bu, masalan, F funksiya

$$F(x, y, y') = H(x, y)\sqrt{1 + y'^2},$$

ko'rinishda bo'lgan barcha masalalar uchun o'rinli, xususan, braxistoxrona haqidagi masalada. Haqiqatan, mazkur holda

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = H \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$J[0] = 0$$

bo'ladi, bu yerda avvalgidek

$$J[0] = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx.$$

bo'ladi.

Biroq, endi avvalgi holdagi singari bo'laklab integrallashni ikkinchi qo'shiluvchidan emas, birinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallash bilan boshlaymiz. Quyidagi

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx = \int_{x_0}^{x} F_y(x, y(x), y'(x)) dx. \tag{6}$$

u holda

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) d\varphi(x) = \eta\varphi \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \varphi \eta' dx.$$

bu yerdan η funksiya uchun nolli chegaraviy shartlarga ko'ra

$$J[0] = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \varphi \right) \eta' dx = 0.$$

bo'ladi. Endi Dyubua-Reymon lemmasini qo'llashimiz va quyidagi tenglamani

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx = C, \quad C = const, \tag{7}$$

olishimiz mumkin. Biz uni *birinchi zaruriy shart* deb ataymiz.

Bu tenglamadan quyidagi uchta natija kelib chiqadi.

1-natija (Eyler tenglamasi). *Ikkita qo'shni burchak nuqtalar orasida yuruvchi minimallashtiruvchi $y(x)$ egri chizig'ining har bir qismida*

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

funksiya hosilaga ega, ya'ni

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Eyler tenglamasini qanoatlantiradi.

2-natija (Veyershtrass-Erdman sharti). *Minimallashtiruvchi $y(x)$ egri chizig'ining burchak nuqtasiga mos keluvchi x_0 ning har bir qiymati uchun*

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}(x, y(x), y'(x))$$

funksiyaning o'ng va chap limitlari

$$F_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0) - 0) = F_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0) + 0)$$

teng bo'ladi. Biz buni qisqacha quyidagi

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_0} = 0$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Ko'p masalalarda bu shartdan minimallashtiruvchi $y(x)$ egri chiziq burchak nuqtalarga ega bo'lmasligi kelib chiqadi. Bu, masalan, F funksiya

$$F(x, y, y') = H(x, y)\sqrt{1 + y'^2},$$

ko'rinishda bo'lgan barcha masalalar uchun o'rinli, xususan, brakistoxrona haqidagi masalada. Haqiqatan, mazkur holda

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = H \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

bo'ladi, Veyershtrass-Erdmon shartiga (va H ning uzluksizligiga) ko'ra, quyidagi

$$\frac{y(x-0)}{\sqrt{1+y'(x-0)^2}} \quad \frac{y(x+0)}{\sqrt{1+y'(x+0)^2}}$$

tenglikka kelamiz. Lekin

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

qat'iy o'suvchi funksiya bo'ladi:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} > 0.$$

Bu uning teskarilanuvchiligini va natijada

$$y(x-0) = y(x+0)$$

tenglikni talab qiladi, ya'ni bu $y(x)$ funksiyani uzluksiz differensiallanuvchi ekanligini anglatadi.

3-natija (Gilbert sharti). *Agar F funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda burchak nuqtalari va*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0,$$

bo'lgan nuqtalar bundan mustasno, bu yerda minimallashtiruvchi $y(x)$ funksiya ham ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi. Bundan tashqari F funksiya n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $y(x)$ funksiya ham n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Isboti. Minimallashtiruvchi $y=y(x)$ funksiyaning burchak bo'lmagan $(x_0, y(x_0))$ nuqtasini mahkamlaymiz. x_0 nuqtaning atrofida $y'(x)$ funksiyaning uzluksiz ekanligini anglaymiz.

$$G(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial z} - \Phi(x) = C, \quad F = F(x,y,z),$$

deb olamiz, bu yerda Φ (3) tenglik bilan aniqlangan va

$$H(x,z) = G(x,y(x),z),$$

bu yerda $y = y(x)$ minimallashtiruvchi funksiya. F funksiya ikki marta differensiallanuvchi ekanligidan (burchak bo'lmagan nuqtaning atrofida) H – uzluksiz differensiallanuvchi. Agar qandaydir (x_0, z_0) nuqtaning atrofida $\frac{\partial H}{\partial z} \neq 0$, bo'lsa, $H(x,z)=0$, tenglama oshkormas funksiya haqidagi teoremaga ko'ra, x_0 nuqtaning atrofida shunday $z = z(x)$ funksiyani bir qiymatli aniqlaydiki, $z(x_0)=z_0$ bo'ladi, bundan tashqari x_0 nuqtaning atrofida $z(x)$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi. $z(x)$ funksiyaning hosilasi quyidagi

$$\frac{dz}{dx} = z_1, \qquad z_1 = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x}}{\dfrac{\partial H}{\partial z}},$$

bu ifoda $z(x)$ funksiyani

$$z = z_1(x,z), \quad z = z(x),$$

murakkab funksiya sifatida ifodalaydi. Endilikda

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

va $z = y'(x)$ funksiya (7) ifodaga ko'ra,

$$H(x,z)=0$$

tenglamaning xususan, $(x_0, y'(x_0))$ nuqtaning atrofida yechimi ekanligini anglash qoldi xolos.

bo'ladi. Veyershtrass-Erdmon shartiga (va H ning uzluksizligiga) ko'ra, quyidagi

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \le \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y(x), y'(x) + 0)$$

tenglikka kelamiz. Lekin

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

qat'iy o'suvchi funksiya bo'ladi:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} > 0$$

Bu uning teskarilanuvchiligini va natijada

$$y'(x-0) \le y'(x-0)$$

tenglikni talab qiladi, ya'ni bu $y(x)$ funksiyani uzluksiz differensiallanuvchi ekanligini anglatadi.

3-natija (Gilbert sharti). *Agar F funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda barchak nuqtalari uchun*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0.$$

bo'lgan nuqtalar bundan mustasno, bu yerda minimallashtiruvchi $y(x)$ funksiya ham ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi. Bundan tashqari F funksiya n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $y(x)$ funksiya ham n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Isboti. Minimallashtiruvchi $y = y(x)$ funksiyaning barchak bo'lmagan $(x_0, y(x_0))$ nuqtasini mahkamlaymiz. x_0 nuqtaning atrofida $y'(x)$ funksiyaning uzluksiz ekanligini anglaymiz.

$$\varphi(x, y, z) \equiv \frac{\partial F}{\partial z} = \Phi(x) - C, \quad F = F(x, y, z),$$

deb olamiz, bu yerda Φ (3) tenglik bilan aniqlangan va

$$H(x, z) \equiv \varphi(x, y(x), z).$$

bu yerda $y = y(x)$ minimallashtiruvchi funksiya. F funksiya ikki marta differensiallanuvchi ekanligidan (barchak bo'lmagan nuqtaning atrofida) H – uzluksiz differensiallanuvchi. Agar qandaydir (x_0, z_0) nuqtaning atrofida $\frac{\partial H}{\partial z} \neq 0$ bo'lsa, $H(x, z) = 0$ tenglama oshkormas funksiya haqidagi teoremaga ko'ra, x_0 nuqtaning atrofida shunday $z = z(x)$ funksiyani bir qiymatli aniqlaydiki, $z(x_0) = z_0$ bo'ladi. bundan tashqari x nuqtaning atrofida $z(x)$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi. $z(x)$ funksiyaning hosilasi quyidagi

$$\frac{dz}{dx} = z_x = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial z}},$$

bu ifoda $z(x)$ funksiyani

$$z = z_1(x, z), \quad z = z(x),$$

murakkab funksiya sifatida ifodalaydi. Endilikda

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

va $z = y'(x)$ funksiya (7) ifodaga ko'ra,

$$H(x, z) = 0$$

tenglamaning xususan, $(x_0, y'(x_0))$ nuqtaning atrofida yechimi ekanligini anglash qoldi xolos.

5-§. S- funksiya va uning differensiali

Aytaylik, $p(\tau,\lambda)$ – variatsion hisobning asosiy masalasida $J[x]$ funksionalning $\hat{x}(\cdot)$ ekstremallarini o'rab turuvchi, markazi λ_0 nuqtada bo'lgan, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi ekstremallarning markaziy maydoni bo'lsin.

$$S(\tau,\xi)=\int_{t_0}^{\tau}F(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),u(t,\lambda(\tau,\xi)))dt$$

funksiya $p(\tau,\lambda)$ markaziy maydonning S – funksiyasi deyiladi. Uning differensialini hisoblaymiz. Ta'rifga ko'ra

$$v(\tau,\lambda(\tau,\xi))\equiv\xi, \tag{8}$$

$$x(\tau,\lambda(\tau,\xi))\equiv u(\tau,\xi). \tag{9}$$

bo'ladi. F integrandni $\{(t,x(t),u(t)):t\in[t_0,t_1]\}$ grafikning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi deb hisoblaymiz. v funksiyani uzluksiz ekanligidan foydalanib, integral ishorasi ostidan hosila olamiz. U holda

$$\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial\xi}=\int_{t_0}^{\tau}\left(F_x(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),u(t,\lambda(\tau,\xi)))x_\lambda(t,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\xi(\tau,\xi)\right)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{\tau}\left(F_u(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),u(t,\lambda(\tau,\xi)))u_\lambda(t,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\xi(\tau,\xi)\right)dt,$$

bo'ladi. Endi (9) munosabatni bajarilishligidan va $v(t,\lambda(\tau,\xi))\equiv\alpha$ ekanligidan foydalanib, ikkinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallaymiz. Natijada,

$$\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial\xi}=\left\langle F_x(\tau,\xi,u(\tau,\xi)),x_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\xi(\tau,\xi)\right\rangle,$$

ifodaga ega bo'lamiz. Lekin (8) ifodadan $v_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\xi(\tau,\xi)=1$ tenglik

kelib chiqadi. Shuning uchun

$$\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial\xi}=F_x(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\triangleq p(\tau,\xi).$$

bo'ladi. Xuddi shuningdek,

$$\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial\tau}=F(\tau,\xi,u(\tau,\xi))+$$

$$+\int_{t_0}^{\tau}\left(F_x(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),u(t,\lambda(\tau,\xi)))x_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\tau(\tau,\xi)\right)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{\tau}\left(F_u(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),u(t,\lambda(\tau,\xi)))u_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\tau(\tau,\xi)\right)dt=$$

$$=F(\tau,\xi,u(\tau,\xi))+\left\langle F_x(\tau,\xi,u(\tau,\xi)),u(\tau,\xi)\right\rangle\triangleq H(\tau,\xi).$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda (8) munosabatni hisobga olib, bo'laklab integrallashdan so'ng quyidagi

$$v_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))+x_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\cdot\lambda_\tau(\tau,\xi)=0.$$

tenglikdan foydalanildi. Demak, S- funksiyaning differensiali

$$dS(\tau,\xi)=\left(F(\tau,\xi,u(\tau,\xi))-\left\langle F_x(\tau,\xi,u(\tau,\xi)),u(\tau,\xi)\right\rangle\right)d\tau+\left\langle F_x(\tau,\xi,u(\tau,\xi)),d\xi\right\rangle.$$

Bu formulani quyidagi

$$dS(\tau,\xi)=\left\langle p(\tau,\xi),d\xi\right\rangle-H(\tau,\xi)d\tau,$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Veyershtrassning asosiy formulasi. Aytaylik, $U_\varepsilon=U_\varepsilon(\hat{x},\lambda)$ ekstremallarning markaziy maydoni bilan qoplangan $\hat{x}(\cdot)$ ekstremal grafigining bir bog'lamli atrofi va $x(\cdot)\in AC^1([t_0,t_1],R^n)$ grafigi U_ε atrofida yotgan va $x(t_0)=\hat{x}(t_0),x(t_1)=\hat{x}(t_1)$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi joiz funksiya bo'lsin. U holda

$$S(\sigma_1,\varepsilon_1)-S(\sigma_0,\varepsilon_0)=\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}dS(t,\varepsilon(t))+\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1}dS(\sigma(t),t)$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(F(t,\varepsilon(t),\sigma(t))\frac{d\sigma(t)}{dt}+F_\varepsilon(t,\varepsilon(t),\sigma(t))\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}F(t)\,dt=J[\varepsilon(t)],$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shuning uchun

$$J[\sigma(t)]-J[\varepsilon(t)]=\int_{t_0}^{t_1}F(t,\varepsilon(t),\sigma(t))dt-\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1}dS(t,\varepsilon(t))$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(F(t,\varepsilon(t),\sigma(t))-F(t,\varepsilon(t),\sigma_\varepsilon(t))-\right.$$

$$\left.-\left(F(t,\varepsilon(t),\sigma_\varepsilon(t))-F(t,\varepsilon(t),\varepsilon(t))\right)\right)dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1}F(t,\varepsilon(t),\sigma(t),\varepsilon(t))dt. \qquad (10)$$

bo'ladi. Bu (10) formula *Veyershtrassning asosiy formulasi* deyiladi.

Veyershtrassning yetarli sharti. Bilamizki, integral ko'rinishidagi funksionallarni ikki turdagi minimum (maksimum) larini farqlash qabul qilingan.

6-ta'rif. *J funksionalning $J[y]$ minimumga nisbatan kuchli deyiladi, agar y funksiya x funksiyaga yetarlicha yaqin funksiyalar sinfida J integralga eng kichik qiymat bersa, ya'ni agar qanchalik $\varepsilon>0$ bo'lganda quyidagi implikatsiya*

$$\|y-\bar{y}\|_1=\max_{[x_0,x_1]}|y(x)-\bar{y}(x)|<\varepsilon\Rightarrow J[y]<J[\bar{y}],$$

o'rinli bo'lsa.

7-ta'rif. *J funksionalning $J[y]$ minimumga nisbatan kuchsiz deyiladi, agar y funksiya C^1- norma ma'nosida $\bar{y}$ funksiya yaqin funksiyalar sinfida J integralga eng kichik qiymat bersa, ya'ni agar qanchalik $\varepsilon>0$ bo'lganda quyidagi implikatsiya*

$$\|y-\bar{y}\|_2=\max_{[x_0,x_1]}|y(x)-\bar{y}(x)|+\max_{[x_0,x_1]}|y'(x)-\bar{y}'(x)|<\varepsilon\Rightarrow J[y]\le J[\bar{y}],$$

o'rinli bo'lsa.

Shunday qilib, kuchli minimum albatta kuchsiz minimum bo'ladi. biroq, teskarisi umuman olganda o'rinli emas. Ta'kidlash lozimki, agar minimumga (kuchli yoki kuchsiz) y funksiyaning biror atrofida faqat $\bar{y}$ funksiyadan erishsa, u holda uni qat'iy deb ataladi (59-rasm).



59 - rasm

10-teorema (kuchsiz minimumga nisbatan yetarli sharti). *Aytaylik, $F(x,y,z)$ uch marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsin. Agar $y=\bar{y}(x)$ egri chiziq birorbuk nuqtani $a=$ ichiga olmasa va*

1) $\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\neq 0$. Eyler tenglamasini.

2) $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}>0$ kuchaytirilgan Lejandr shartini.

3) kuchaytirilgan Yakobi sharti: $\bar{y}=\bar{y}(x),x\in[x_1,x_2]$ egri chiziq boshidan o'tuvchi nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtalarni $a=$ ichiga olmaydi, shartini qanoatlantirsa, u holda $\bar{y}$ ekstremal oxirlari $\bar{y}(x_1)=y_1,\bar{y}(x_2)=y_2$ mahkamlangan egri chiziqlar sinfida

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

funksionalning qat'iy kuchsiz minimumini bo'ladi.

Isboti. Teorema shartlarini qanoatlantiruvchi ekstremalni qaraymiz. Gilbertning

$$\Phi(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx = \int_{x_1}^{x} F_y(u, y(u), y'(u)) du,$$

shartiga ko'ra, ekstremal uch marta marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi. Eng avvalo ekstremalni ekstremallar maydoniga kiritamiz. U holda quyidagi natijaga ko'ra: agar $y = y(x), x \in [x_1, x_2]$, ekstremal x_1 nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtaga ega bo'lmasa, u holda ekstremalning



60 - rasm

x_1 nuqtadan chap tomonidagi davomida shunday x_0 nuqta mavjudki, davom ettirilgan $y = y(x), x \in [x_0, x_2]$, ekstremal ham x_0 nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtaga ega bo'lmaydi. Shu tasdiqqa ko'ra, ekstremalning $[x_0, x_2]$, $x_0 < x_1$, oraliqda shunday davomi mavjudki, davom ettirilgan ekstremal ham boshlang'ich x_0 nuqtaga nisbatan qo'shma bo'lgan nuqtaga ega bo'lmaydi. $(x_0, y(x_0))$ nuqtadan chiqarilgan $y = y(x, \lambda)$, birparametrli ekstremallar oilasini qaraymiz (60-rasm).

So'ngra, dastlabki ekstremal parametrini $\lambda = \lambda_0$, deb olish bilan ajraladi deb hisoblaymiz. $y = y(x, \lambda_0)$ ekstremalda x_0 nuqtaga nisbatan qo'shma bo'lgan nuqta bo'lmaganligiga ko'ra, $\lambda = \lambda_0$ va $x \in [x_0, x_2]$, da $\frac{\partial y}{\partial \lambda} \neq 0$ bo'ladi deb xulosa qilamiz. Xususan, $y_\lambda(x, \lambda_0)$ hosila $x \in [x_1, x_2]$ oraliqda nolga aylanmaydi. U holda quyidagi teoremaga ko'ra,

teorema: agar x va λ parametr bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $y = Y(x, \lambda)$ birparametrli ekstremallar oilasi (haqiqatda $Y_x(x, \lambda)$ va $Y_{xx}(x, \lambda)$ funksiyalarning uzluksizligi yetarli) D sohada $x \in (a, b)$ va $\lambda \in (\alpha, \beta)$ qiymatlar uchun barcha $x \in [x_1, x_2] \subset (a, b)$ larda $Y_\lambda(x, \lambda) \neq 0$ bo'lgan $y = Y(x, \lambda_0) \equiv y_0(x)$ ekstremalni o'ziga olsa, u holda bu ekstremalni $x \in [x_1, x_2]$ qiymatlar uchun ekstremallar maydoniga kiritish mumkin. Demak, mazkur teoremaga ko'ra, $y = y(x), x \in [x_1, x_2]$, ekstremal $y = y(x, \lambda)$, ekstremallar maydoniga kiradi. Bu maydonning og'ish funksiyasini $\varepsilon(x, y)$ bilan belgilaymiz.

So'ngra, Teylor formulasiga asosan

$$F(x, y, v) = F(x, y, u) + F_y(x, y, u)(v - u) + \frac{F_{yy}''(x, y, w)}{2}(v - u)^2,$$

ifodani yozamiz, bu yerda $w - u$ va v lar orasidagi qandaydir nuqta. Ko'rib turibmizki, quyidagi

$$E(x, y, u, v) = F(x, y, v) - F(x, y, u) - F_y(x, y, u)(v - u),$$

Veyershtrass funksiyasi

$$E(x, Y, z, Y') = \frac{F_{yy}''(x, Y, Z)}{2}(Y' - z)^2, \tag{11}$$

tenglikni qanoatlantiradi, bu yerda $Z - Y'$ va z larni orasida yotadi. Lejandrning kuchaytirilgan sharti F_{yy}'' funksiyani uzluksizligiga ko'ra, C^1 norma ma'nosida $y(x, \lambda_0)$ ekstremalning V yetarlicha kichik atrofida bajariladi. Ekstremallar maydoni o'lchamini va V atrofning Y taqqoslama funksiyalar to'plamining o'lchamini chegaralaymiz. U holda bu atrofda $Y \neq y$ da

Isboti. Teorema shartlarini qanoatlantiruvchi ekstremalni qaraymiz. Gilbertning

$$\eta(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx + \int_{x_0}^{x} F_{y'}(x, y(x), y'(x)) dx$$

shartiga ko'ra, ekstremal uch marta marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi. Eng avvalo ekstremalni ekstremallar maydoniga kiritamiz. U holda quyidagi natijaga ko'ra: agar $y = y(x), x \in [x_0, x_1]$, ekstremal x_1 nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtaga ega bo'lmasa, u holda ekstremalning



60 - rasm

x_1 nuqtadan chap tomonidagi davomida shunday x nuqta mavjudki, davom ettirilgan $y = y(x), x \in [x_0, x_1]$, ekstremal ham x_1 nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtaga ega bo'lmaydi. Shu tasdiqqa ko'ra, ekstremalning $[x_0, x_1], x_1 < x_1$, oraliqda shunday davomi mavjudki, davom ettirilgan ekstremal ham boshlang'ich x_0 nuqtaga nisbatan qo'shma bo'lgan nuqtaga ega bo'lmaydi. $(x_0, y(x_0))$ nuqtadan chiqarilgan $y = y(x, \lambda)$, birparametrli ekstremallar oilasini qaraymiz (60-rasm).

So'ngra, dastlabki ekstremal parametrini $\lambda = \lambda_0$ deb olish bilan ajraladi deb hisoblaymiz. $y = y(x, \lambda_0)$ ekstremalda x_1 nuqtaga nisbatan qo'shma bo'lgan nuqta bo'lmaganligiga ko'ra, $\lambda = \lambda_0$ va $x \in [x_0, x_1]$ da $\frac{\partial y}{\partial \lambda} \neq 0$ bo'ladi deb xulosa qilamiz. Xususan, $y_\lambda(x, \lambda_0)$ hosila $x \in [x_0, x_1]$ oraliqda nolga aylanmaydi. U holda quyidagi teoremaga ko'ra,

teorema: agar x va λ parametr bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $y = y(x, \lambda)$ birparametrli ekstremallar oilasi (haqiqatda $F(x, \lambda)$ va $F_y(x, \lambda)$ funksiyalarning uzluksizligi yetarli) D sohada $x \in (\alpha, \beta)$ va $\lambda \in (\alpha, \beta)$ qiymatlar uchun barcha $x \in [x_0, x_1] \subset (a, b)$ larda $D(x, \lambda) \neq 0$ bo'lgan $y = y(x, \lambda_0) = y_0(x)$ ekstremalni o'ziga olsa, u holda bu ekstremalni $x \in [x_0, x_1]$ qiymatlar uchun ekstremallar maydoniga kiritish mumkin. Demak, mazkur teoremaga ko'ra, $y = y(x), x \in [x_0, x_1]$, ekstremal $y = y(x, \lambda)$, ekstremallar maydoniga kiradi. Bu maydonning og'ish funksiyasini $\varepsilon(x, p)$ bilan belgilaymiz.

So'ngra, Teylor formulasiga asosan

$$F(x, y, v) = F(x, y, u) + F_y(x, y, u)(v - u) + \frac{F_{yy}(x, y, u)}{2}(v - u)^2,$$

ifodani yozamiz, bu yerda $u = u$ va v lar orasidagi qandaydir nuqta. Ko'rib turibmizki, quyidagi

$$E(x, y, u, v) = F(x, y, v) - F(x, y, u) - F_y(x, y, u)(v - u).$$

Veyershtrass funksiyasi

$$E(x, Y, z, P) = \frac{F_{yy}(x, P, Z)}{2}(Y - z)^2, \tag{11}$$

tenglikni qanoatlantiradi, bu yerda $Z = P$ va z larni orasida yotadi. Lejandrening kuchaytirilgan sharti F_{yy} funksiyani uzluksizligiga ko'ra, C^1 norma ma'nosida $y(x, \lambda_0)$ ekstremalning V yetarlicha kichik atrofida bajariladi. Ekstremallar maydoni o'lchamini va V atrofning Γ taqqoslama funksiyalar to'plamining o'lchamini chegaralaymiz. U holda bu atrofda $P \neq z$ da

$$E(x,Y,z,Y')>0,$$

bo'ladi va

$$\Delta J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,Y,z,Y')\,dx, \qquad (12)$$

formulaga ko'ra,

$$\Delta J[y]=\int_{x_0}^{x_1}E(x,Y,z,Y')\,dx>0,$$

bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

7-izoh. *Teorema isbotida keltirilgan ayrim holatlarni ta'kidlab o'tamiz. Birinchidan, F funksiyani uch marta uzluksiz differensiallanuvchiligi Yakobi shartiga murojaat qilish bilan bog'liq.*

Ikkinchidan, teoremaning isboti to'la orttirmaning (12) formulasiga asoslanadi. Ixtiyoriy y taqqoslama funksiya o'zining har bir nuqtasida qanaydir ekstremallar oilasi bilan kesishishi uchun, dastlabki ekstremalni kiruvchi ekstremallar maydonini qurish talab etiladi.

Uchinchidan, maydonni qurish eng avvalo $y'\neq 0$ shartga asoslanadi. Qo'shma nuqtani yo'qligi bu tengsizlikni $(x_0,x_1]$ segmentda, bu yerda x_0 – ekstremallar dastasining boshlang'ich nuqtasi, bajarilishini kafolatlaydi. Aynan x_1 nuqtadan ekstremallar dastasini chiqarish yetarli emas, shuning uchun ham x_1 nuqtadan chapga chekinishga to'g'ri keladi. Bunda Yakobi shartini va teoremani isbotida keltirilgan natijani kafolatlovchi siljitilgan nuqtani saqlab qolish juda muhim hisoblanadi.

Va nihoyat, Γ atrofni ixtiyoriy musbat ε va δ lar uchun uch o'lchovli fazoda

$$x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)\Rightarrow|y-y(x)|<\varepsilon,\quad|z-y'(x)|<\varepsilon,$$

shartlarni qanoatlantiruvchi (x,y,z) nuqtalar to'plami sifatida tasvirlash mumkin. Masalan, Γ taqqoslama funksiya shu atrofda yotadi, agar quyidagi

$$x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)\Rightarrow|\overline{y}(x)-y(x)|<\varepsilon,\quad|\overline{Y}-y'(x)|<\varepsilon,$$

bo'lsa. Ekstremallar maydoni uchun ham xuddi shunday bo'ladi.

11-teorema (kuchli minimumning yetarli sharti). *Aytaylik, $F(x,y,z)$ uch marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsin. Agar $y=y(x)$ egri chiziq burchak nuqtani o'z ichiga olmasa va*

1) $\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$, Eyler tenglamasini,

2) kuchaytirilgan Veyershtrass sharti: $(x,y,z)\in\Gamma$ uchun (bu yerda Y esdatmada yozilgan $y=y(x)$ ekstremalning atrofi) va ixtiyoriy ν uchun $E(x,Y,z,Y')>0$, shartni;

3) kuchaytirilgan Yakobi sharti: $y=y(x),\ x\in[x_1,x_2]$, egri chiziq boshlang'ich nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqtalarni o'z ichiga olmaslik shartini qanoatlantirsa, u holda y ekstremal oxirlari $y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2$, mahkamlangan egri chiziqlar sinfida

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\,dx,$$

funksionalning qat'iy kuchli minimumi bo'ladi.

Avvalo, misol sifatida $y=chx$ **ekstremalni** $y(0)=1,\ y(b)=chb$, **chegara-**

viy shartli eng kichik aylanma sirt haqidagi masalaga lokal kuchsiz minimum berishligini isbot qilamiz. Bu masalada F Lagranj funksiyasi $F = y\sqrt{1+y'^2}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Ravshanki, Lejandr sharti

$$\frac{y}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} > 0,$$

bajariladi. Yakobi tenglamasini tuzamiz. Bizning holimizda

$$A = -F_{y'y'} = -\frac{y}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = -\frac{1}{ch^2 x}, \quad B = F_{yy'} - \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{1}{ch^2 x},$$

bo'ladi. U holda Yakobi tenglamasi

$$\left(\frac{\eta}{ch^2 x}\right)' + \frac{\eta}{ch^2 x} = 0, \qquad \text{yoki} \qquad \eta'' - 2\frac{sh x}{ch x}\eta' + \eta = 0,$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamaning bitta yechimi $\eta_1 = sh x$ bo'ladi. Ikkinchi yechimni birinchi yechimga chiziqli bog'liq bo'lmagan holda ma'lum bo'lgan

$$\eta_2 = \eta_1 \int \frac{W}{\eta_1^2} dx,$$

formula bo'yicha hisoblaymiz, bu yerda

$$W = e^{-\int \frac{ch x}{sh x} dx} = ch x,$$

yechimlarning vronskiani. U holda $\eta_2 = x sh x - ch x$, bo'ladi. Tenglamaning umumiy yechimi $\eta = C_1\eta_1 + C_2\eta_2 = (C_1 + C_2 x)sh x + C_2 ch x$, ko'rinishga ega bo'ladi. Oson ko'rish mumkinki, Yakobi tenglamasining $\eta(0) = \eta(b) = 0$, nolli chegaraviy shartli yagona yechimi $\eta = 0$ bo'ladi, ya'ni $y = ch x$ ekstremalda boshlang'ich nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqta yo'q. Bu kuchsiz minimumning yetarli shartini tekshirilishini yakunlaydi. Biroq shuni ta'kidlash kerakki, $F_{y'y'}$ hosila mazkur holda

nafaqat $y = ch x$ ekstremalda, balki $y > 0$ sohada argumentlarning barcha qiymatlarida musbat bo'ladi:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{y}{\sqrt{(1+y'^2)^3}},$$

bo'ladi. Natija sifatida kuchli minimum uchun yetarli shart bajariladi ($E(x, y, u, v) > 0$, Veyershtrass funksiyasi $y > 0$ sohada musbat, (11) formulaga qarang).

Yakobi sharti. $C^1[a,b]$ chiziqli fazoda aniqlangan ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi F integrantli

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,$$

funksionalni qaraymiz. Agar $J[y]$ aynimagan funksional bo'lsa, uning tayinlangan (a, y_a) nuqta orqali o'tuvchi ekstremallar to'plami birparametrli oilani tashkil qiladi, bunda parametr sifatida ekstremalning (a, y_a) nuqtadagi og'ish burchagini olish mumkin. Agar bu oila biror $D \subset R^2$ sohani to'la qoplasa, bundan tashqari D sohaning har bir nuqtasidan bitta ekstremal o'tsa, u holda D sohada *ekstremallar maydoni* berilgan deb ataymiz. D sohada berilgan ekstremallar maydoni bu sohada ekstremalning (x, y) nuqtadagi og'ish burchagi tangensining qiymatiga teng bo'lgan $p(x, y)$ funksiyani aniqlashga imkon beradi, ya'ni $p(x, y)$ bu o'sha $y(x)$ ekstremalning x nuqtadagi qiymati y ga teng bo'lgan hosilani beradi. $p(x, y)$ ekstremallar maydonining *og'ish funksiyasi* deyiladi.

viy shartli eng kichik aylanma sirt haqidagi masalaga lokal kuchsiz minimum berishligini isbot qilamiz. Bu masalada F Lagranj funksiyasi $F = y\sqrt{1+y'^2}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Ravshanki, Lejandr sharti

$$\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} > 0$$

bajariladi. Yakobi tenglamasini tuzamiz. Bizning holimizda

$$A = -F_{y'y'} = -\frac{y}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = -\frac{1}{ch^2 x}, \quad B = F_{yy'} = \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{1}{ch^2 x},$$

bo'ladi. U holda Yakobi tenglamasi

$$\left(\frac{\eta}{ch^2 x}\right)' + \frac{\eta}{ch^2 x} = 0, \qquad \text{yoki} \qquad \eta'' - 2\frac{sh x}{ch x}\eta' + \eta = 0,$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamaning bitta yechimi $\eta_1 = sh x$ bo'ladi. Ikkinchi yechimni birinchi yechimga chiziqli bog'liq bo'lmagan holda ma'lum bo'lgan

$$\eta_2 = \eta_1 \int \frac{W}{\eta_1^2} dx,$$

formula bo'yicha hisoblaymiz, bu yerda

$$W = e^{2\int \frac{sh x}{ch x} dx} = ch^2 x,$$

yechimlarning vronskiani. U holda $\eta_2 = x sh x - ch x$, bo'ladi. Tenglamaning umumiy yechimi $\eta = C_1\eta_1 + C_2\eta_2 = (C_1 + C_2 x)sh x + C_2 ch x$, ko'rinishga ega bo'ladi. Oson ko'rish mumkinki, Yakobi tenglamasining $\eta(0) = \eta(b) = 0$, nolli chegaraviy shartli yagona yechimi $\eta = 0$ bo'ladi, ya'ni $y = ch x$ ekstremalda boshlang'ich nuqta bilan qo'shma bo'lgan nuqta yo'q. Bu kuchsiz minimumning yetarli shartini tekshirilishini yakunlaydi. Biroq shuni ta'kidlash kerakki, $F_{y'y'}$ hosila mazkur holda

nafaqat $y = ch x$ ekstremalda, balki $y > 0$ sohada argumentlarning barcha qiymatlarida musbat bo'ladi:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{y}{\sqrt{(1+y'^2)^3}},$$

bo'ladi. Natija sifatida kuchli minimum uchun yetarli shart bajariladi ($E(x,y,u,v) > 0$, Veyershtrass funksiyasi $y > 0$ sohada musbat, (11) formulaga qarang).

Yakobi sharti. $C^1[a,b]$ chiziqli fazoda aniqlangan ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi F integrantli

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,$$

funksionalni qaraymiz. Agar $J[y]$ aynimagan funksional bo'lsa, uning tayinlangan (a, y_a) nuqta orqali o'tuvchi ekstremallar to'plami birparametrli oilani tashkil qiladi, bunda parametr sifatida ekstremalning (a, y_a) nuqtadagi og'ish burchagini olish mumkin. Agar bu oila biror $D \subset R^2$ sohani to'la qoplasa, bundan tashqari D sohaning har bir nuqtasidan bitta ekstremal o'tsa, u holda D sohada *ekstremallar maydoni* berilgan deb ataymiz. D sohada berilgan ekstremallar maydoni bu sohada ekstremalning (x,y) nuqtadagi og'ish burchagi tangensining qiymatiga teng bo'lgan $p(x,y)$ funksiyani aniqlashga imkon beradi, ya'ni $p(x,y)$ bu o'sha $y(x)$ ekstremalning x nuqtadagi qiymati y ga teng bo'lgan hosilani beradi. $p(x,y)$ ekstremallar maydonining *og'ish funksiyasi* deyiladi.

(a,y_0) nuqtadan o'tuvchi $y=y(x)$ ekstremalni qaraylaylik. Bu ekstremal $[a,b]$ kesmada ekstremallar maydoniga kiritilgan deyiladi, agar $y=y(x,\alpha)$, $x\in[a,b]$ funksiyaning grafigini va qaralayotgan funksionalning ekstremallar maydonini berishi mumkin bo'lgan D sohani ko'rsatish mumkin bo'lsa (61 -rasm).



61 - rasm

12-teorema (Yakobi sharti). *$J[y]$ funksionalning $y=y(x)$ ekstremalini $[a,b]$ kesmada ekstremallar maydoniga kiritilishi uchun (a,b) oraliqda $J[y]$ funksional ma'nosida a nuqtaga qo'shma bo'lgan nuqta bo'lmasligi kerak.*

Kuchli ekstremumning soddalashtirilgan yetarli sharti. Agar $F(x,y,y')$ funksiyani ixtiyoriy v da Teylor formulasi bo'yicha yoyish mumkin bo'lsa,

$$F(x,y,y')=F(x,y,u)+\sum_{i=1}^{n}(y_i'-u_i')F_{y_i'}(x,y,u)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(y_i'-u_i')(y_j'-u_j')\times$$

$$\times F_{y_i'y_j'}(x,y,\bar{u}),\quad \bar{u}=u(x,y)+\theta[y(x)-u(x,y)],\quad 0<\theta<1,$$

u holda

$$F(x,y,u,y')=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[y_i'-u_i'][y_j'-u_j']F_{y_i'y_j'}(x,y,\bar{u}),$$

bo'ladi. Bu yerdan: $y=y(x)$ egri chiziq

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,\quad y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1,$$

funksionalga kuchli minimum (maksimum) beradi, agar u maydon bilan o'ralgan, uning har bir nuqtasida

$$\sum_{i,j=1}^{n}F_{y_i'y_j'}\eta_i\eta_j,\quad F_{y_i'y_j'}=F_{y_i'y_j'}(x,u,v),\quad -\infty<v<\infty,$$

kvadratik forma nisbat aniqlangan bo'lsa.

$n=1$ hol uchun oxirgi munosabat ekstremalni o'z ichiga oluvchi qandaydir sohada quyidagi

$$F_{y'y'}(x,u,v)>0,\quad -\infty<v<\infty,$$

tengsizlik bajarilishini anglatadi. Ko'rsatish mumkinki, ekstremumning soddalashtirilgan yetarli sharti kuchli minimum uchun zaruriy shart bo'la olmaydi.

XIII BOB
MEXANIKANING VARIATSION PRINSIPLARI

1-§. Mopertyui – Eyler prinsipi.

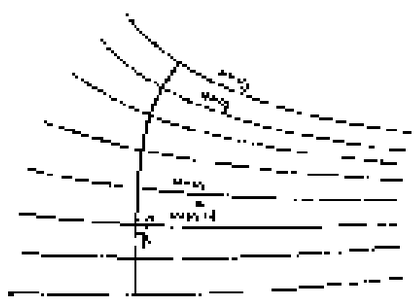
Aytaylik, tekislikda $U(x,y)$ potensiallar funksiyasi berilgan kuchlar maydoni berilgan bo'lsin. Bu maydonda nuqtaning harakatdagi v tezligi $U(x,y)$ potensiallar funksiyasi bilan quyidagi

$$v = \sqrt{2U + h}$$

formula bilan bog'langan, bu yerda $h = const$ sath chizig'ining normali bo'yicha yo'naltirilgan o'zgarmas tezlanish. Aytaylik, bu maydonda M nuqta m massa bilan $v = \sqrt{2U + h}$ tezlik bilan harakatlansin. M nuqtani uning egri chiziqli trayektoriyasi bo'yicha harakatini, siniq chiziqli trayektoriya bo'yicha harakatiga almashtiramiz: tekislikda bir-biriga yaqin bo'lgan

$$U = U_0,\ U = U_1,\ \dots,\ U = U_n$$

sath chiziqlarini ajratamiz, bu yerda $U_i = U_{i-1} + \Delta U$ (ΔU ifoda esa qandaydir o'zgarmas miqdor (62-rasm). Bu yerda M nuqta $U = U_{i-1}$ va $U = U_i$ chiziqlar orasidagi yo'lakda $v_i = \sqrt{2U_{i-1} + h}$ tezlik bilan harakat qiladi deb hisoblaymiz. Nuqta $U = U_{i-1}$ sath chizig'i orqali o'tishda $U = U_i$ sath chizig'ining normali bo'yicha yo'naltirilgan $m(v_i - v_{i-1})$ kuch impulsini oladi. Biz bu yerda v_i orqali i-yo'lakdagi tezlik vektorini belgiladik.



62 - rasm

Nuqta, qaysiki, limiti M nuqtaning egri chiziqli trayektoriyasi bo'lgan siniq trayektoriyani tasvirlaydi. Kuchlar impulsi $U = U_{i-1}$ chiziqning normali bo'yicha yo'naltirilgan bo'lsa, u holda bu chiziqning urinmasi bo'yicha tashkil qiluvchisi nuqtaning u orqali o'tish momentida o'zgarmaydi, ya'ni

$$v_i \cos\alpha = v_{i-1} \cos\beta. \qquad (1)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. α va β – M nuqta tezligi yo'nalishi bilan, u nuqta orqali o'tishdan oldin va keyin $U = U_{i-1}$ sath chizig'iga o'tkazilgan urinma orasidagi burchaklar.

Agar biz tekislikda v- yo'lakdagi yorug'lik harakatining tezligi $1/v_i$ ga tengligiga ega bo'lganimizda edi, u holda uning nurlari uchun (1) sinish qonunini ifodalagan bo'lar edi.

Shunday qilib, M nuqtaning siniq trayektoriyalari, tezligi M nuqtaning tezligiga teskari bo'lgan yorug'lik nurining yo'llari bilan ustma-ust tushadi. $n \to \infty$ intilganda siniq trayektoriyalar egri chiziqli chiziqlarga o'tadi. siniq nurlar esa,

$$\frac{1}{v} \quad \frac{1}{\sqrt{2U + h}}$$

tezlik bilan harakatlanayotgan egri chiziqli yorug'lik nurlariga o'tadi.

M nuqtaning trayektoriyasi $v = \sqrt{2U + h}$ tezlik bilan harakatlanganda

$$v_1 = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{2U + h}}$$

tezlik bilan harakatlanayotgan yorug'lik nurlari yo'llari bilan ustma-ust tushadi. Chunki, $v_1 = 1/v$ yorug'lik tezligidagi yorug'lik nurlari

$$\int \frac{ds}{v}$$

XIII BOB
MEXANIKANING VARIATSION PRINSIPLARI

1-§. Mopertyui – Eyler prinsipi.

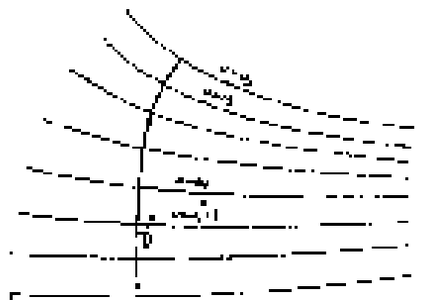
Aytaylik, tekislikda $U(x,y)$ potensiallar funksiyasi berilgan kuchlar maydoni berilgan bo'lsin. Bu maydonda nuqtaning harakatdagi v tezligi $U(x,y)$ potensiallar funksiyasi bilan quyidagi

$$v = \sqrt{2U + h}$$

formula bilan bog'langan, bu yerda $h = U_0 = const$ sath chizig'ining normali bo'yicha yo'naltirilgan o'zgarmas tezlanish. Aytaylik, bu maydonda M nuqta m massa bilan $v = \sqrt{2U + h}$ tezlik bilan harakatlansin. M nuqtani uning egri chiziqli trayektoriyasi bo'yicha harakatini, siniq chiziqli trayektoriya bo'yicha harakatiga almashtiramiz: tekislikda bir-biriga yaqin bo'lgan

$$U = U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n$$

sath chiziqlarni ajratamiz, bu yerda $U_i = U_0 + i\Delta U$, $\Delta U > 0$ ifoda esa qandaydir o'zgarmas miqdor (62-rasm). Bu yerda M nuqta $U = U_0$ va $U = U_1$ chiziqlar orasidagi yo'lakda $v_1 = \sqrt{2U_0 + h}$ tezlik bilan harakat qiladi deb hisoblaymiz. Nuqta $U = U_1$ sath chizig'i orqali o'tishda $U = U_2$ sath chizig'ining normali bo'yicha yo'naltirilgan $m(v_2 - v_1)$ kuch impulsini oladi. Biz bu yerda v_i orqali i-yo'lakdagi tezlik vektorini belgiladik.



62-rasm

Nuqta qaysiki limiti M nuqtaning egri chiziqli trayektoriyasi bo'lgan siniq trayektoriyani tasvirlaydi. Kuchlar impulsi $U = U_i$ chiziqning normali bo'yicha yo'naltirilgan bo'lsa, u holda bu chiziqning urinmasi bo'yicha tashkil qiluvchisi nuqtaning M orqali o'tish momentida o'zgarmaydi, ya'ni

$$v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta. \qquad (1)$$

munosabat o'rinli bo'ladi, α va β – M nuqta tezligi yo'nalishi bilan, M nuqta orqali o'tishdan oldin va keyin $U = U_i$ sath chizig'iga o'tkazilgan urinma orasidagi burchaklar.

Agar biz tekislikda i-yo'lakdagi yorug'lik harakatining tezligi U_i ga tengligiga ega bo'lganimizda edi, u holda uning nurlari uchun (1) shart sinish qonunini ifodalagan bo'lar edi.

Shunday qilib, M nuqtaning siniq trayektoriyalari, tezligi M nuqtaning tezligiga teskari bo'lgan yorug'lik nurining yo'llari bilan ustma-ust tushadi. $n \to \infty$ intilganda siniq trayektoriyalar egri chiziqli chiziqlarga o'tadi, siniq nurlar esa,

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{2U + h}}$$

tezlik bilan harakatlanayotgan egri chiziqli yorug'lik nurlariga o'tadi.

M nuqtaning trayektoriyasi $v = \sqrt{2U + h}$ tezlik bilan harakatlanganda

$$v_1 = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{2U + h}}$$

tezlik bilan harakatlanayotgan yorug'lik nurlari yo'llari bilan ustma-ust tushadi. Chunki, $v_1 = 1/v$ yorug'lik tezligidagi yorug'lik nurlari

$$\int \frac{ds}{v}$$

integralning ekstremumini ta'minlaydi. u holda harakatlanayotgan nuqtalarning trayektoriyalari uchun

$$\int v\,dt = \int \sqrt{2t - v_0 t}\,dx$$

integralning ekstremumga erishishligini amalga oshiradi. Trayektoriyalar bo'yicha olingan $\int v\,dt$ *harakat* deb ataladi. Demak, biz quyidagi Mopertyui – Eylerning variatsion prinsipiga ega bo'lamiz: berilgan nuqtalarni tutashtiruvchi chiziqlar ichidan $\int v\,dt$ harakatga (integralga) ekstremum beruvchisini toping, ya'ni $\int \sqrt{2t - v_0 t}\,dx$ integral M nuqta trayektoriyasi bo'ylab ekstremumga erishsin.

1.1. Mexanika va optika orasidagi o'xshashlik. Ferma va Mopertyui orasidagi o'xshashlik ancha oldin payqalgan. Undan Gamilton o'zining mexanika tenglamalari nazariyasini qurishda foydalangan. Hozirgi zamon fizikasida bu o'xshashlik to'lqin dinamikasi deb ataluvchi nazariyani yaratilishida asos bo'lib xizmat qildi. Bu mexanik-optik o'xshashlikdan foydalanib, biz $v = \sqrt{2gy + v_0^2}$ tezlikda harakatlanayotgan qandaydir mexanik harakatni trayektoriyasini bilgan holda, $\frac{1}{\sqrt{2gy + v_0^2}}$ tezlik bilan harakatlanayotgan yorug'lik nurini olishimiz mumkin va aksincha.

Masalan: boshlang'ich momentda v_0 tezlikka ega bo'lgan nuqta tortishish kuchi maydonida $v_0 = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$ tezlik bilan parabola bo'yicha harakat qilsin. bu yerda g – tortishish kuchi tezlanishi, y – nuqtaning ordinatasi (uning boshlang'ich holati orqali o'tuvchi Ox o'q sifatida qabul qilingan gorizontal chiziq). Boshlang'ich A nuqtadan parabolalar

trayektoriyalarining dastasi (egiluvchan parabolalar) chiqadi. Agar muhitdagi yorug'lik tezligi

$$v = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}$$

formula bilan ifodalansa, u holda koordinata boshidan chiquvchi nurlar mexanik-optik o'xshashlikka ko'ra, parabola ko'rinishiga ega bo'ladi (egiluvchan parabolalar xavfsizligi).

Sermelonning aeronavtik masalasi. *Samolyot shamolda fazoning bir nuqtasidan boshqa nuqtasiga eng qisqa vaqtda uchib o'tishi uchun qanday trayektoriya bilan uchibb o'tishi kerak.*

Biz u shamol tezligini (vaqtga bog'liq bo'lmagan, nuqtalarga bog'liq bo'lgan o'zgaruvchi kattalik) fazoning har bir nuqtasida gorizontal deb hisoblaymiz va bu bilan mos ravishda gorizontal uchish holi bilan cheganalamamiz.

Eng avvalo qo'yilgan masalani variatsion hisob masalasi sifatida shakl-lantiramiz. xOy uchish tekisligidagi koordinatalar sistemasini olamiz va aytaylik $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalar uchishning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari bo'lsin (63-rasm). u orqali shamolyot tezligini, u_x, u_y lar orqali esa tezlikning x, y koordinata o'qlariga proeksiyasini belgilaymiz. u_x, u_y lar x, y larning berilgan funksiyalari. Aytaylik, endi samolyot $A(x_0, y_0)$ nuqtadan $B(x_1, y_1)$ nuqtaga $y = y(x)$ egri chiziq bo'yicha harakatlansin, unda $\vec{c}$ vektor orqali samolyotning havoga nisbatan harakat tezligini belgilaymiz ($|\vec{c}|$ – o'zgarmas kattalik), $\vec{v} = \vec{w} + \vec{c}$ orqali uni absolyut tezligini, φ va ψ – lar orqali parvoz yo'nalishi bilan $\vec{c}$ va $\vec{w}$ vektorlar tashkil qilgan burchaklarni belgilaymiz, ya'ni $\vec{c}$ vektor bilan

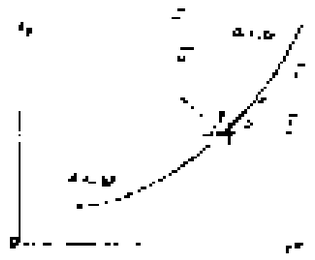
v vektordan quyidagiga ega bo'lamiz: $v\sin\varphi - |\dot{v}|\sin\varphi$

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{v}|\ |v|\cos\varphi + |\dot{v}|\cos\varphi\ |v|\sin\varphi + \sqrt{|\dot{v}|\ |v|}\sin\varphi,$$

bu yerda ds - bosib o'tilgan yo'lning elementi.

Bundan tashqari

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{|v|}\frac{dx}{dt} + \frac{v_y}{|v|}\frac{dy}{dt}$$



63-rasm

ifodaga egamiz. Bu yerdan samolyotning qaralayotgan trayektoriya bo'yicha $A(x_0, y_0)$ nuqtadan $B(x_1, y_1)$ nuqtaga uchib o'tishi uchun zarur bo'lgan T vaqtni

$$T = \int \frac{ds}{|v|\cos\varphi + \sqrt{|\dot{v}|\ |v| - |v|^2\sin^2\varphi}} = \int_{x_0,y_0}^{x_1,y_1} \frac{(x+y)\,ds}{v_x + v_y - \sqrt{|\dot{v}|\ |v|\,(x+y) - v_x v_y (x-y)^2}}$$

integral orqali ifoda qilsa bo'ladi.

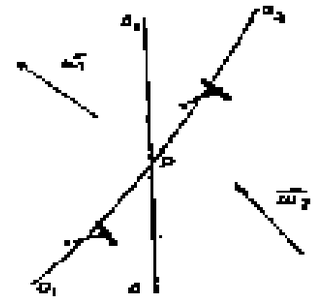
Shunday qilib, qo'yilgan masala quyidagiga keltirildi: *A va B nuqtalarni tutashtiruvchi barcha egri chiziqlar orasidan shunday egri chiziqni topishtish kerakki, bu egri chiziqda natijada I integral eng kichik qiymat qabul qilsin.*

Biz hozir masalani Mizes taklif qilingan elementar yechimni keltiramiz.

Oldindan quyidagi eng sodda masalani qaraymiz. (64-rasm). Butun xOy tekislik AA_1 to'g'ri chiziq bilan ikki D_1 va D_2 qismga bo'lingan. Har bir yarim tekislikda shamolning tezligi o'zgarmas va ular mos ravishda $\vec{v}_1$ va $\vec{v}_2$ vektorlar orqali aniqlanadi. Masalada, samolyot D_1 va D_2 yarim tekisliklarning har birida to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qiladi deb hisoblab, samolyot D_1 yarim tekislikning O_1

nuqtasidan parvoz qilib, D_2 yarim tekislikning O_2 nuqtasiga eng qisqa vaqtda yetib, kelish yo'lini aniqlash talab etiladi.

Izlanayotgan yo'l masalaning shartiga ko'ra, AA_1 to'g'ri chiziqda joylashgan bitta P sinish nuqtali singan chiziq bo'ladi. Shunday qilib, bizning masala P sinish nuqtasini holatini aniqlashga yoki yorug'likning sinishi masalasiga o'hshash P nuqtadagi o'tuvchi trayektoriyaning sinish xususiyatlarini aniqlashga keltiriladi.



64 - rasm

t vaqt samolyotning siniq chiziq bo'yicha harakatlanib, O_1 nuqtadan O_2 nuqtaga uchib kelishi uchun zarur, demak, P nuqtaning funksiyasi bor. binobarin, izlanayotgan shartga biz P nuqtaning cheksiz kichik variatsiyasiga mos keluvchi funksiya differensialini nolga tenglash orqali ega bo'lamiz.

Yuqoridagi belgilashlarni o'zgartirmasdan: v shamolning tezligi, parvoz tezligi (absolyut), c – samolyotning tezligi. Demak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{v}.$$

Bu munosabatga geometrik ko'rinish berish biz uchun qulay boladi: tayinlangan O nuqtadan w vektorni suramiz. bu qurilgan vektorni oxiri M nuqtadan v vektorni suramiz. qaysiki, oxirini L orqali belgilab, natijada, $\vec{OL} = \vec{c}$ tenglikka ega bo'lamiz. Qachonki, o'zining c tezlik vektori (masalaning shartiga ko'ra c vektorning normasi o'zgarmas) barcha mumkin bo'lgan yo'nalishlarga ega bo'ladi. L nuqta markazi M

nuqtada bo'lgan, radiusi $|C_1'|$ bo'lgan aylanani tasvirlaydi.

Bu aylanani *tezliklar aylanasi* deb ataladi, qurish olib borilgan tekislik esa *tezliklar tekisligi* deb ataladi.

Endi qachonki P nuqta O nuqtaga δs ga surilgandagi O nuqtadan O_1 nuqtaga uchib kelish vaqtini o'zgarishini aniqlaymiz. Bu harakatning o'zgarishda OAB tezlik uchburchagi yangi $O_1A_1B_1$ uchburchakka o'tadi. φ va α lar mos ravishda $\vec{w}$ vektorni AA_1 to'g'ri chiziq normali bilan tashkil qilingan burchakni, orqali $\delta\alpha$ burchagini belgilaymiz. Aytaylik, bundan tashqari D_1 va D_2 yarim tekisliklarda v tezlik normasi dv orttirmani, uchib o'tish vaqtlari esa mos ravishda δt_1 va δt_2 orttirmalarni olsin.

Endi harakat tekisligida OAB to'rtburchakka o'xshash $O_1A_1B_1$ to'rtburchakni quramiz. Ravshanki, P nuqta OQ to'g'ri chiziqni markazi M nuqtada bo'lgan radiusi MP bo'lgan aylananing kesishish nuqtasi bo'ladi.

Yozilgan qurishdan so'ng kiritilgan kattaliklar orasidagi munosabatlarni o'rnatamiz. Eng avvalo

$$OP = w = OB \cdot t$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$t = \frac{OP}{OB}.$$

$OB = v + \delta v$ hamda OAB va $O_1A_1B_1$ to'rtburchaklarni o'xshashligidan,

$$O_1P_1 = (v + \delta v)t$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan

$$P_1Q = O_1Q - O_1P = (v + \delta v)(t + \delta t) - (v + \delta v)t = v\delta t + \delta v \cdot \delta t$$

tenglikni olamiz. P_1Q vektorni $\vec{w}P$ vektorga proeksiyalab va yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlarni tashlab yuborib,

$$w\rho P_1\hat{Q} = (v + \delta v)\cos(\alpha + \delta\alpha)\delta t = v\cos\alpha \cdot \delta t$$

tenglikni olamiz. Boshqa tomondan esa,

$$w\rho P_1\hat{Q} = (P_1P_2 + P_2\hat{Q}) = w\rho P_1\hat{Q} = \sin\varphi \cdot \delta\varphi$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda v tezlikni samolyot o'qiga ($\vec{w}$ vektorga) proeksiyasini u_1 orqali belgilab,

$$\delta t = \frac{\sin\varphi_1}{v\cos\alpha}\delta v = \frac{\sin\varphi_1}{u_1}\delta v$$

ifodani olamiz. Xuddi o'xshash hisoblashlar ko'rsatadiki, yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlarni e'tiborga olib, P_2 yo'ldan Q yo'lga o'tish vaqtining δt_2 orttirmasi quyidagiga

$$\delta t_2 = -\frac{\sin\varphi_2}{u_2}\delta v$$

teng bo'ladi, bu yerda φ_2 - samolyot o'qi bilan (D_2 yarim tekislikdagi parvozda) AA_1 to'g'ri chiziqning normali orasidagi burchak, u_2 – esa v tezlikni samolyot o'qiga proeksiyasi (D_2 yarim tekislikda parvozda). Bu yerdan ekstremum sharti

$$\delta t = \delta t_1 + \delta t_2 = \left(\frac{\sin\varphi_1}{u_1} - \frac{\sin\varphi_2}{u_2}\right)\delta v = 0$$

ko'rinishni oladi yoki

$$\frac{\sin\varphi_1}{u_1} = \frac{\sin\varphi_2}{u_2}. \qquad (1)$$

(1) munosabat birlik shamol tezligi bo'lgan muhitdan boshqa birlik

shamol tezligi bo'lgan muhitga o'tish paytidagi trayektoriyaning izlanayotgan "sinish" qonunini beradi. Bu munosabatdan izlanayotgan traektoriyaning yagona tarzda aniqlashini ko'rish qiyin emas. Agar $w_1 = w_2$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\varphi_1 = \varphi_2$ teng bo'ladi, demak, $\gamma = \gamma_1$ teng bo'ladi, ya'ni trayektoriya bu - to'g'ri chiziq bo'ladi.

Agar parvoz tekisligi egri chiziqlar bilan bir qator sohalarga bo'lingan bo'lsa, har birida shamolining o'zini o'zgarmas tezligi berilgan bo'lsa, va agar har bir sohada samolyot to'g'ri chiziq bo'yicha uchsa, u holda berilgan bir nuqtadan boshqasiga eng tez uchish trayektoriyasi siniq chiziq bo'ladi (barcha sinish nuqtalari shu egri chiziqlarda yotadi), bundan tashqari, har bir sinish nuqtasida (1) tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda AA_1 to'g'ri chiziq rolini trayektoriyalarning sinish nuqtasi orqali muhitning bo'linish chizig'iga o'tkazilgan urinmalar o'ynaydi.

Kiritilgan sinish qonunidan foydalanib, eng avvalo, qaysiki, agar shamol tezligi butun tekislikda o'zgarmas bo'lsa, u holda samolyotning eng tez uchish chizig'i (ikki berilgan nuqtalarni tutashtiruvchi barcha chiziqlar ichidan) to'g'ri chiziq bo'lishligini isbot qilamiz. Isbotlash uchun avval ikkita nuqtani tutashtiruvchi n ta sohadan eng tez parvoz chizig'ini topamiz. Bir tomondan sinish nuqtalaridan birini cheksizlikka yo'qotilsa parvoz vaqti cheksiz o'sadi, Veyershtrass teoremasiga ko'ra izlanayotgan soha mavjud. Boshqa tomondan esa, agar soha parvozni minimumini ta'minlasa, u holda ikkita A_1A_{-1} va L_1L_{-1} sohalar ketma-ketligi A_1 boshlang'ich bir sohadan A_{-1} boshqa bir oxirgi sohaga qilingan parvozga minimal vaqtni beradi. Bunday holda (1) tenglikka

asosan bu sohalar bir to'g'ri chiziqda yotadi. Binobarin, izlanayotgan soha - bu to'g'ri chiziq bo'ladi.

Shuni aytib o'tish lozimki, har qanday trayektoriya bo'yicha parvoz qilish vaqti to'g'ri chiziq bo'yicha parvoz qilish vaqtidan kichik bo'la olmaydi (bo'lishi ham mumkin emas). O'quvchiga egri chiziq bo'yicha parvoz vaqti ham to'g'ri chiziq bo'yicha parvoz vaqtidan kichik bo'la olmasligini ko'rsatishni taklif qilaman.

Yuqorida keltirilgan sinish qonunidan foydalanib, uzluksiz o'zgaruvchi shamolda (nuqtadan nuqtaga) eng tez parvoz chizig'ini topish masalasini yechish mumkin. Bu yerda biz eng sodda masala bilan chegaralanamiz.

Aytaylik, parvoz tekisligi xOy koordinatalar sistemasi bilan ta'minlangan va koordinatalar sistemasida shamolning $\vec{v}$ tezligi x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsin. Boshqacha so'z bilan aytganda, $\vec{w}$ vektorning ikkala w_x va w_y komponentalari ham x o'zgaruvchining berilgan funksiyalaridir.

Aytaylik, oldingidek O_1 va O_2 nuqtalar mos ravishda samolyot yo'lining boshi va oxiri bo'lsin. O_1O_2 kesmaning Ox o'qiga proeksiyasini n ta bo'lakka bo'lamiz va har bir bo'linish nuqtasidan Ox o'qiga parallellar o'tkazamiz. Har bir yo'lakda shamolning tezligi o'zgarmas va qaralayotgan yo'lakning ixtiyoriy nuqtasida shamolning berilgan tezligiga taxminan teng deb hisoblaymiz. Yaratilgan maydon bo'laklarida shamol tezliklari uchun O_1 nuqtadan O_2 nuqtagacha eng tez parvoz chizig'ini qurishimiz mumkin - bu soha bo'ladi, sohaning $i-$ uchida

$$\frac{\sin\varphi}{u} = C_1, \tag{2}$$

shart bajariladi, bu yerda φ – t – yo'lakdagi parvozda samolyot o'qi bilan Ox o'qi tashkil qilgan burchak, u – samolyot absolyut tezligini uning o'qiga hamda t – yo'lakdagi proeksiyasi, C_1 – t – ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas. Ma'lumki, qachonki har bir yo'lakning kengligi $n \to \infty$ intilganda izlanayotgan trayektoriyani olish mumkin. Endi limitga o'tamiz. Shamol maydonining uzluksizligiga ko'ra, trayektoriyaning har bir M nuqtasida

$$\frac{\sin\varphi}{u} = C_1, \tag{3}$$

shart bajariladi, bu yerda φ – M nuqtadagi samolyot o'qi bilan Ox o'qi tashkil qilgan burchak, u – samolyot tezligini uning o'qiga M nuqtadagi proeksiyasi. (3) shartga differensial tenglama ko'rinishini berish ham mumkin. $y = y(x)$ izlanayotgan egri chiziq tenglamasi deb hisoblab, φ burchak va u proeksiyani C_1 o'zgarmas orqali ifodalash mumkin. Bu ifodalarni (3) shartga qo'yib, izlanayotgan trayektoriyani aniqlash uchun birinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Olingan differensial tenglama katta ko'rinishga ega bo'lganligi sababli biz uni bu yerda keltirib o'tirmaymiz.

Trayektoriyani C_1, w_x va w_y berilganlar bo'yicha aniqlashdan ko'ra, bevosita (3) tenglikdan aniqlash qulay albatta. Va nihoyat, qiziqarli mexanik talqinga ega bo'lgan (3) tenglamani ko'rinishlaridan biriga to'xtalib o'tamiz. (3) tenglamani t bo'yicha differensiallab. Quyidagi tenglamani olamiz:

$$u\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} - \sin\varphi\frac{du}{dt} = 0, \tag{4}$$

a – orqali samolyot o'qining yo'nalishini belgilaymiz, b – orqali esa a ga perpendikulyar bo'lgan yo'nalishni belgilaymiz.

Aytaylik, w_a va w_b komponentalar w vektorning bu yo'nalishlarga proeksiyalari bo'lsin.

$$u = C + w_a,$$

tenglikka egamiz. Bundan

$$\frac{du}{dt} = \frac{dw_a}{dt} = \frac{dw_a}{da}\frac{da}{dt} = u\frac{dw_a}{da},$$

bo'ladi, bu yerda $\frac{dw_a}{da}$ ifoda w_a funksiyadan a yo'nalish bo'yicha olingan hosila.

Shunday qilib, agar $\frac{du}{dt}$ hosila uchun topilgan ifodani (4) tenglamaga olib borib qo'ysak, va agar $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ orqali samolyotning aylanma burchak tezligini belgilasak, u holda (4) tenglama

$$\omega\cos\varphi = \frac{dw_a}{da}\sin\varphi,$$

ifodaga kelamiz, lekin $\frac{dw_a}{dv} = 0$ ekanligini hisobga olsak, u holda

$$\frac{dw_a}{da} : \frac{dw_a}{db} = \cos\varphi : (-\sin\varphi)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan,

$$\omega = -\frac{dw_a}{db}$$

ifodani olamiz.

2-§. Berilgan yo'nalish nuqtasida variatsiya. Gamilton prinsipi

Berilgan yo'nalishda variatsiya. Bazoviy masalalar bo'lgan hol uchun nuqtadagi variatsiyani aniqlash bevosita umumlashmaydi, chunki egri chiziqlardagi lokal o'zgarishlarni har qanday yo'nalishda amalga oshirish mumkin.

Bizga $m+1$ o'lchovli $(x,y_1,\dots,y_m)$ fazoda $L=L(x,y_1,\dots,y_m,y_1',\dots,y_m')$ tenglama bilan berilgan γ chiziqda aniqlangan

$$J[\gamma]=\int_{\gamma} L(x,y_1,\dots,y_m,y_1',\dots,y_m')\,dx$$

funksional berilgan bo'lsin. Bundan tashqari γ joiz egri chiziqlar sinfiga tegishli.

Aytaylik, γ_ε – o'sha sinfdagi $y_i=y_i(x)+\varepsilon\eta_i(x)$ tenglamalar bilan berilgan, γ joiz egri chiziqqa yaqin bo'lgan egri chiziq bo'lsin. $\eta_i(x)$ funksiyani $[x_0-\varepsilon,x_1+\varepsilon]$ oraliqdan tashqari hamma joyda nolga teng deb olamiz. Bu yerda $x_0=x(t_0)$, $x_1=x(t_1)$ – γ chiziqning qandaydir nuqtasining absissasi. γ egri chiziq nuqtalarini γ_ε egri chiziq nuqtalari bilan tutashtiruvchi

$$\delta x=0,\delta y_1=\varepsilon\eta_1,\dots,\delta y_m=\varepsilon\eta_m$$

komponentali vektorlarni bizning $[x_0-\varepsilon,x_1+\varepsilon]$ oraliqda parallel deb hisoblaymiz. Agar δr orqali mos vektorning uzunligini, p_i orqali Oy_i o'qqa nisbatan yo'naltiruvchi konusni belgilasak, u holda $\delta_i=p_i\delta r$ bo'ladi, bundan tashqari bizning barcha vektorlar uchun p_i o'zgarmas bo'ladi. Quyidagi

$$J[\gamma_\varepsilon]-J[\gamma]=\int\sum\left(F_i-\frac{d}{dx}F_i'\right)\delta y_i\,dx=\sum_i p_i\int_{\sigma_\varepsilon}\sum_{i=1}^{m}\left(F_i-\frac{d}{dx}F_i'\right)\delta r\,dx$$

ifodaga ega bo'lamiz. Yetarlicha kichik ε larda

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\left(F_i-\frac{d}{dx}F_i'\right)\delta r\,dx=\left(F_i-\frac{d}{dx}F_i'\right)_{x=\xi}\int_{\sigma_\varepsilon}\delta r\,dx=\left(F_i-\frac{d}{dx}F_i'\right)_{x=\xi}\delta N$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerda δN – $\delta\sigma$ vektorlar tashkil qilgan γ va γ_ε egri chiziqlar orasidagi silindrik sirtning maydoni. Demak,

$$J[\gamma_\varepsilon]-J[\gamma]=\delta N\sum_i p_i\left(F_i-\frac{d}{dx}F_i'\right)_{x=\xi}$$

bundan quyidagi ifoda kelib chiqadi

$$\lim_{\delta N\to 0}\frac{J[\gamma_\varepsilon]-J[\gamma]}{\delta N}=\sum_i p_i\left(F_i-\frac{d}{dx}F_i'\right)_{x=\xi}.$$

δN – ni nolga intiladi deganda, $\delta\sigma$, $\frac{d}{dx}\delta\sigma$ va ε ifodalarni nolga intilishi ma'nosida tushuniladi. (1) ifoda J funksionalning berilgan $(x_0,y_0,\dots,y_m)$ yo'nalishining berilgan $(x_0,y_0,\dots,y_m)$ nuqtasidagi variatsiyasi deb ataladi.

Eyler tenglamasi har qanday yo'nalishdagi ekstremalning har qanday nuqtasida J funksionalning variatsiyasi nolga teng va aksincha bo'lishligini anglatadi.

Biz .... paragrafda Eyler tenglamasini bitta noma'lum funksiya bo'lgan hol uchun invariant ekanligini isbot qilgan edik. Xuddi shunga o'xshash, agar biz $(x,y_1,\dots,y_m)$ koordinatalar sistemasidan ixtiyoriy $(x,\xi_1,\dots,\xi_m)$ o'lchovli egri chiziqli koordinatalar sistemasiga o'tsak, Eyler

$$F_i-\frac{d}{dx}F_i'=0,\qquad (i=1,2,\dots,m),$$

tenglamalar sistemasi o'z ko'rinishini saqlab qoladi.

Gamilton prinsipi. $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ massaga ega bo'lgan n ta nuqtadan tashkil topgan bog'lovchisiz mexanik sistemaga ega bo'laylik. i-nuqtaning koordinatalarini (x_i, y_i, z_i) deb belgilab, sistemaning kinetik energiyasi uchun

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]$$

tenglikka ega bo'lamiz. Aytaylik, G barcha nuqtalarning $3n$ ta koordinatasiga bog'liq bo'lgan sistemaning potensial funksiyasi bo'lsin. Uning ta'rifidan i-tochkaga ta'sir qiluvchi kuchlar

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial G_i}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial G_i}{\partial z_i},$$

komponentalarga ega bo'ladi.

Inersiya kuchlari deb, sistemaning mos nuqtalariga biriktirilgan

$$-m_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}, \quad -m_i\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}, \quad -m_i\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2},$$

komponentali kuchlarga aytiladi. Kelgusida ular sistemaning nuqtalariga biriktirilsa, ularning tezlanishini yo'q qilgan bo'lar edi.

$3n$ ta funksiyalar bilan aniqlangan qandaydir sistemaning harakatiga ega bo'laylik:

$$x_i = x_i(t), \qquad y_i = y_i(t), \qquad z_i = z_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

va qandaydir t vaqtda sistema $3n$ ta nuqtalarning koordinatalari bilan aniqlanuvchi holatni egallasin. Nuqtalarning har biri $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ larni olsin.

Bog'lovchisiz dinamik sistema uchun *Dalamber prinsipi* quyidagicha aytiladi:

Agar bizning sistemani nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlariga inertsiya kuchlarini qo'shsak, u holda ularning ixtiyoriy $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ larda birgalikdagi ishi nolga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\sum\left[\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_i} - m_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}\right)\delta x_i + \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_i} - m_i\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}\right)\delta y_i + \left(\frac{\partial G_i}{\partial z_i} - m_i\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}\right)\delta z_i\right] = 0.$$

Quyidagi

$$\delta X = \sqrt{\sum_i(\delta x_i^2 + \delta y_i^2 + \delta z_i^2)}, \quad p_i = \frac{\partial x_i}{\partial n}, \quad q_i = \frac{\partial y_i}{\partial n}, \quad r_i = \frac{\partial z_i}{\partial n},$$

belgilashlarni kiritib,

$$\sum\left[\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_i} - m_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}\right)p_i + \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_i} - m_i\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}\right)q_i + \left(\frac{\partial G_i}{\partial z_i} - m_i\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}\right)r_i\right] = 0$$

tenglikni olamiz.

$$\sum\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_i}p_i + \frac{\partial G_i}{\partial y_i}q_i + \frac{\partial G_i}{\partial z_i}r_i\right)$$

ifoda $\int G\,dt$ integralning nuqtadagi variatsiyasi (bu yerda G – faqat koordinataga bog'liq ekanligini eslatib o'tamiz).

$$-\sum m_i\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}p_i + \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}q_i + \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}r_i\right)$$

ifoda esa $\int T\,dt$ integralning nuqtadagi variatsiyasi bo'ladi. Ikkala variatsiya ham p_i, q_i, r_i yo'nalishlarda olingan.

Binobarin, Dalamber prinsipi $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $z_i = z_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, trayektoriyalar bo'yicha olingan $\int (G + T)\,dt$ integralning har qanday yo'nalish bo'yicha olingan variatsiyasini yo'qotishligini anglatadi. Bu esa $(3n+1)$ o'lchovli fazoda $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $z_i = z_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, trayektoriyalar bo'yicha

$$\delta\int (G+T)dt=0 \qquad (1)$$

bo'lishligini anglatadi. (1) tenglik *Gamilton prinsipini* ifodalaydi. $\frac{em}{cek}$ o'lchovga ega, ya'ni ta'sir o'lchovi.

$$x_i=\bar{x}(t),\quad y_i=\bar{y}(t),\quad z_i=\bar{z}(t),$$

taqqoslash egri chiziqlari $(3n+1)$ o'lchovli (t,x_i,y_i,z_i) fazoda $x_i=x_i(t)$, $y_i=y_i(t)$, $z_i=z_i(t)$, $i=1,2,...,n$, egri chiziqlar kabi $[t,x_i(t),y_i(t),z_i(t)]$ va $[t,x_i(t),y_i(t),z_i(t)]$ nuqtalarni tutashtiradi. Endi harakatni aniqlovchi $3n$ ta (x_i,y_i,z_i) koordinata sistemasidan $(q_1,q_2,...,q_{3n})$ koordinata sistemasi

$$\begin{cases} x_i=x_i(q_1,q_2,.....,q_{3n}), \\ y_i=y_i(q_1,q_2,.....,q_{3n}), \qquad (i=1,2,....,n), \\ z_i=z_i(q_1,q_2,.....,q_{3n}), \end{cases}$$

almashtirish yo'li bilan o'tamiz. U holda kinetik energiya yangi koordinatalardan vaqt bo'yicha olingan hosilali

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3n}a_{ij}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_j}{dt}, \qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

qandaydir kvadratik formaga aylanadi, a_{ij} kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi, ular $q_i,(i=1,2,....n)$ koordinatalarga bog'liq. Bu yerda G potensial $q_i,(i=1,2,....n)$, koordinatalarning funksiyasiga aylanadi. Ravshanki, yangi koordinatalarga o'tish natijasida (1) shart o'z kuchini saqlab qoladi. (1) shart uchun Eyler tenglamasi quyidagi

$$\frac{\partial G}{\partial q_i}+\frac{dT}{dq_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=0. \qquad (2)$$

bu yerda $\dot{q}_i$ orqali $\frac{dq_i}{dt}$ hosilani belgiladik.

Mexanikada (2) tenglama Lagranj nomi bilan Lagranj tenglamasi deb ataladi. Biz dastlabki band sifatida Dalamber prinsipini, undan Gamilton prinsipini keltirib chiqardik va oxirgi natija sifatida Lagranj tenglamasiga ega bo'ldik. Mexanikaning bu uch tenglamasi ekvivalent, shuning uchun boshlang'ich nuqta sifatida bu uch tenglamadan ixtiyoriy birini olishimiz mumkin. Boshqalariga qaraganda Gamilton prinsipi bir qator afzalliklarga ega va. (1) tenglama koordinatalar sistemasiga bog'liq emas, bu invariantlik xossasidan foydalanish ko'pincha qulaylik tug'diradi, biz bundan Lagranj tenglamasini keltirib chiqarishda foydalanib o'tdik. Mexanikaning tenglamalarini variatsion formada ko'rinishi Gamilton tomonidan o'zining bu tenglamalarni integrallash nazariyasini qurishda foydalangan.

T kinetik energiya $q_i,(i=1,2,....n)$ koordinatalarga nisbatan kvadratik forma ekanligidan

$$\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T, \qquad (3)$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ifoda umumlashgan impuls deb ataladi.

Aytaylik, G potensial energiya va T kinetik energiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmasin. Bu holda

$$(G+T)-\sum_{i=1}^{3n}\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=-C,$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerdan (3) ifodaga ko'ra

$$H=-G+T=C, \qquad (4)$$

tenglikni olamiz, bu yerda C – doimiy miqdor. H ifoda esa *to'la energiyadan* boshqa narsa emas. (4) munosabat hammamizga ma'lum

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(G+T)dt=0 \qquad (1)$$

bo'lishligini anglatadi. (1) tenglik *Gamilton prinsipini* ifodalaydi. $\frac{cm}{cek}$ o'lchovga ega, ya'ni ta'sir o'lchovi.

$$x_\nu=\bar{x}(t),\quad y_\nu=\bar{y}(t),\quad z_\nu=\bar{z}(t),$$

taqqoslash egri chiziqlari $(3n+1)$ o'lchovli $(t,x_1,\dots,z_n)$ fazoda $x_\nu=x_\nu(t)$, $y_\nu=y_\nu(t)$, $z_\nu=z_\nu(t)$, $\nu=1,2,\dots,n$, egri chiziqlar kabi $[t_0,x_1(t_0),\dots,z_n(t_0)]$ va $[t_1,x_1(t_1),y_1(t_1),z_n(t_1)]$ nuqtalarni tutashtiradi. Endi harakatni aniqlovchi $3n$ ta (x_i,y_i,z_i) koordinata sistemasidan $(q_1,q_2,\dots,q_{3n})$ koordinata sistemasi

$$\begin{cases} x_i=x_i(q_1,q_2,\dots,q_{3n}),\\ y_i=y_i(q_1,q_2,\dots,q_{3n}),\\ z_i=z_i(q_1,q_2,\dots,q_{3n}), \end{cases} \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

almashtirish yo'li bilan o'tamiz. U holda kinetik energiya yangi koordinatalardan vaqt bo'yicha olingan hosilali

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3n}a_{ik}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_k}{dt}, \qquad (a_{ik}=a_{ki})$$

qandaydir kvadratik formaga aylanadi. a_{ik} kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi, ular $q_i\,(i=1,2,\dots,n)$ koordinatalarga bog'liq. Bu yerda G potensial $q_i\,(i=1,2,\dots,n)$, koordinatalarning funksiyasiga aylanadi. Ravshanki, yangi koordinatalarga o'tish natijasida (1) shart o'z kuchini saqlab qoladi. (1) shart uchun Eyler tenglamasi quyidagi

$$\frac{\partial G}{\partial q_i}+\frac{dT}{dq_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=0, \qquad (2)$$

bu yerda $\dot{q}_i$ orqali $\frac{dq_i}{dt}$ hosilani belgiladik.

Mexanikada (2) tenglama Lagranj nomi bilan Lagranj tenglamasi deb ataladi. Biz dastlabki band sifatida Dalamber prinsipini, undan Gamilton prinsipini keltirib chiqardik va oxirgi natija sifatida Lagranj tenglamasiga ega bo'ldik. Mexanikaning bu uch tenglamasi ekvivalent, shuning uchun boshlang'ich nuqta sifatida bu uch tenglamadan ixtiyoriy birini olishimiz mumkin. Boshqalariga qaraganda Gamilton prinsipi bir qator afzalliklarga ega va. (1) tenglama koordinatalar sistemasiga bog'liq emas, bu invariantlik xossasidan foydalanish ko'pincha qulaylik tug'diradi, biz bundan Lagranj tenglamasini keltirib chiqarishda foydalanib o'tdik. Mexanikaning tenglamalarini variatsion formada ko'rinishi Gamilton tomonidan o'zining bu tenglamalarni integrallash nazariyasini qurishda foydalangan.

T kinetik energiya $q_i\,(i=1,2,\dots,n)$ koordinatalarga nisbatan kvadratik forma ekanligidan

$$\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T, \qquad (3)$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ifoda umumlashgan impuls deb ataladi.

Aytaylik, G potensial energiya va T kinetik energiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmasin. Bu holda

$$(G+T)-\sum_{i=1}^{3n}\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=-C,$$

ifodaga ega bo'lamiz. bu yerdan (3) ifodaga ko'ra

$$H=-G+T=C, \qquad (4)$$

tenglikni olamiz, bu yerda C – doimiy miqdor. H ifoda esa *to'la energiyadan* boshqa narsa emas. (4) munosabat hammamizga ma'lum

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(G+T)dt=0 \qquad (1)$$

bo'lishligini anglatadi. (1) tenglik *Gamilton prinsipini* ifodalaydi. $\frac{cm}{cek}$ o'lchovga ega, ya'ni ta'sir o'lchovi.

$$x_i=\bar{x}_i(t),\quad y_i=\bar{y}_i(t),\quad z_i=\bar{z}_i(t),$$

taqqoslash egri chiziqlari $(3n+1)$ o'lchovli $(t,x_1,...,z_n)$ fazoda $x_i=x_i(t)$, $y_i=y_i(t)$, $z_i=z_i(t)$, $(i=1,2,...,n)$, egri chiziqlar kabi $(t_0,x_1(t_0),y_1(t_0),z_1(t_0))$ va $(t_1,x_1(t_1),y_1(t_1),z_1(t_1))$ nuqtalarni tutashtiradi. Endi harakatni aniqlovchi $3n$ ta (x_i,y_i,z_i) koordinata sistemasidan $(q_1,q_2,...,q_{3n})$ koordinata sistemasi

$$\begin{cases} x_i=x_i(q_1,q_2,...,q_{3n}),\\ y_i=y_i(q_1,q_2,...,q_{3n}), \qquad (i=1,2,...,n),\\ z_i=z_i(q_1,q_2,...,q_{3n}), \end{cases}$$

almashtirish yo'li bilan o'tamiz. U holda kinetik energiya yangi koordinatalardan vaqt bo'yicha olingan hosilali

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_j}{dt}, \qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

qandaydir kvadratik formaga aylanadi. a_{ij} kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi, ular $q_i,(i=1,2,...,n)$ koordinatalarga bog'liq. Bu yerda G potensial $q_i,(i=1,2,...,n)$, koordinatalarning funksiyasiga aylanadi. Ravshanki, yangi koordinatalarga o'tish natijasida (1) shart o'z kuchini saqlab qoladi. (1) shart uchun Eyler tenglamasi quyidagi

$$\frac{\partial G}{\partial q_i}+\frac{dT}{dq_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=0, \qquad (2)$$

bu yerda $\dot{q}_i$ orqali $\frac{dq_i}{dt}$ hosilani belgiladik.

Mexanikada (2) tenglama Lagranj nomi bilan Lagranj tenglamasi deb ataladi. Biz dastlabki band sifatida Dalamber prinsipini, undan Gamilton prinsipini keltirib chiqardik va oxirgi natija sifatida Lagranj tenglamasiga ega bo'ldik. Mexanikaning bu uch tenglamasi ekvivalent, shuning uchun boshlang'ich nuqta sifatida bu uch tenglamadan ixtiyoriy birini olishimiz mumkin. Boshqalariga qaraganda Gamilton prinsipi bir qator afzalliklarga ega va. (1) tenglama koordinatalar sistemasiga bog'liq emas, bu invariantlik xossasidan foydalanish ko'pincha qulaylik tug'diradi, biz bundan Lagranj tenglamasini keltirib chiqarishda foydalanib o'tdik. Mexanikaning tenglamalarini variatsion formada ko'rinishi Gamilton tomonidan o'zining bu tenglamalarni integrallash nazariyasini qurishda foydalangan.

T kinetik energiya $q_i,(i=1,2,...,n)$ koordinatalarga nisbatan kvadratik forma ekanligidan

$$\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T, \qquad (3)$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ifoda umumlashgan impuls deb ataladi.

Aytaylik, G potensial energiya va T kinetik energiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmasin. Bu holda

$$(G+T)-\sum_{i=1}^{3n}\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=-C,$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerdan (3) ifodaga ko'ra

$$H=-G+T=C. \qquad (4)$$

tenglikni olamiz, bu yerda C – doimiy miqdor. H ifoda esa *to'la energiyadan* boshqa narsa emas. (4) munosabat hammamizga ma'lum

$$\delta\int (G+T)dt=0 \qquad (1)$$

bo'lishligini anglatadi. (1) tenglik *Gamilton prinsipini* ifodalaydi. $\frac{cm}{cek}$ o'lchovga ega, ya'ni ta'sir o'lchovi.

$x_i=x_i(t),\ y_i=y_i(t),\ z_i=z_i(t)$

taqqoslash egri chiziqlari $(3n+1)$ o'lchovli $(t,x_1,\dots,z_n)$ fazoda $x_i=x_i(t),\ y_i=y_i(t),\ z_i=z_i(t),\ i=1,2,\dots,n$ egri chiziqlar kabi $[t_0,x_1(t_0),\dots,z_n(t_0)]$ va $[t_1,x_1(t_1),\dots,z_n(t_1)]$ nuqtalarni tutashtiradi. Endi harakatni aniqlovchi $3n$ ta (x_i,y_i,z_i) koordinata sistemasidan $(q_1,q_2,\dots,q_{3n})$ koordinata sistemasi

$$\begin{cases} x_i=x_i(q_1,q_2,\dots,q_{3n}), \\ y_i=y_i(q_1,q_2,\dots,q_{3n}), \\ z_i=z_i(q_1,q_2,\dots,q_{3n}). \end{cases} \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

almashtirish yo'li bilan o'tamiz. U holda kinetik energiya yangi koordinatalardan vaqt bo'yicha olingan hosilali

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3n} a_{ij}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_j}{dt}, \qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

qandaydir kvadratik formaga aylanadi, a_{ij} kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi, ular $q_i\ (i=1,2,\dots,n)$ koordinatalarga bog'liq. Bu yerda G potensial $q_i\ (i=1,2,\dots,n)$, koordinatalarning funksiyasiga aylanadi. Ravshanki, yangi koordinatalarga o'tish natijasida (1) shart o'z kuchini saqlab qoladi. (1) shart uchun Eyler tenglamasi quyidagi

$$\frac{\partial G}{\partial q_i}+\frac{dT}{dq_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=0, \qquad (2)$$

bu yerda $\dot{q}_i$ orqali $\frac{dq_i}{dt}$ hosilani belgiladik.

Mexanikada (2) tenglama Lagranj nomi bilan Lagranj tenglamasi deb ataladi. Biz dastlabki band sifatida Dalamber prinsipini, undan Gamilton prinsipini keltirib chiqardik va oxirgi natija sifatida Lagranj tenglamasiga ega bo'ldik. Mexanikaning bu uch tenglamasi ekvivalent, shuning uchun boshlang'ich nuqta sifatida bu uch tenglamadan ixtiyoriy birini olishimiz mumkin. Boshqalariga qaraganda Gamilton prinsipi bir qator afzalliklarga ega va. (1) tenglama koordinatalar sistemasiga bog'liq emas, bu invariantlik xossasidan foydalanish ko'pincha qulaylik tug'diradi, biz bundan Lagranj tenglamasini keltirib chiqarishda foydalanib o'tdik. Mexanikaning tenglamalarini variatsion formada ko'rinishi Gamilton tomonidan o'zining bu tenglamalarni integrallash nazariyasini qurishda foydalangan.

T kinetik energiya $\dot{q}_i\ (i=1,2,\dots,n)$ koordinatalarga nisbatan kvadratik forma ekanligidan

$$\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T, \qquad (3)$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ifoda umumlashgan impuls deb ataladi.

Aytaylik, G potensial energiya va T kinetik energiya oshkor holda t ga bog'liq bo'lmasin. Bu holda

$$(G+T)-\sum_{i=1}^{3n}\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=-C,$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerdan (3) ifodaga ko'ra

$$H=-G+T=C, \qquad (4)$$

tenglikni olamiz, bu yerda C – doimiy miqdor. H ifoda esa *to'la energiyadan* boshqa narsa emas. (4) munosabat hammamizga ma'lum

bo'lgan mexanik energiyaning saqlanish qonunini ifoda qiladi.

Fizik nuqtai nazardan Gamilton prinsipi shunisi bilan qiziqki, uning ifodalanishida koordinatalar emas, qaysiki potensial va kinetik energiyalar ishtirok etadi. Shuning uchun bu prinsip mexanik energiyalardan tashqari energiyaning boshqa turlari (elektr, issiqlik va boshqalar) ishtirok etgan jarayonlarga keng tarqalgan. Bu prinsip hatto, klassik mexanikadan relyativistik mexanikaga o'tishda ham saqlanib qolgan.

3-§. Eng kam harakat prinsipi

Oldingi paragraflarda olingan umumiy natijalarni mexanika masalalariga tadbiqlarini ko'rib chiqamiz.

Aytaylik bizga biror $m_1, m_2, \ldots, m_n$ massali va x_i, y_i, z_i, $i = 1,2,\ldots,n$, koor-dinatali moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin. Qaralyotgan sistemaga hech qanday bog'lanish qo'yilmagan deb faraz qilamiz. Bunday sistemaning kinetik energiyasi

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right), \tag{1}$$

ko'rinishda bo'ladi. Sistema potensial energiyaga ham ega deb faraz qilamiz, ya'ni shunday funksiya mavjud

$$U = U(t, x_i, y_i, z_i), \tag{2}$$

i – nuqtadagi harakat kuchining komponentalari quyidagilarga

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

teng bo'ladi.

$$L = T - U, \tag{3}$$

deb olamiz. Bu ifodani biz qaralayotgan mexanik sistemaning Lagranj funksiyasi deb ataymiz. L ravshanki, qaralayotgan sistema va vaqtning tashkil etuvchilari, koordinatalar va chastitsalar tezligining funksiyasini tasvirlaydi.

Aytaylik, t_0 vaqt momentida sistema biror tayinlangan holatda bo'lsin. Vaqt o'tishi bilan qaralayotgan sistemaning evolyutsiyasi $3n$ o'lchovli fazoda

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad z_i = z_i(t), \; i = 1,2,\ldots,n,$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi qandaydir egri chiziqni tavsiflaydi.

(t_0, t_1) vaqt oralig'ida sistemaning harakati

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,dt \tag{4}$$

integralga minimum beruvchi o'sha x_i, y_i, z_i, $i = 1,2,\ldots,n$, funksiyalar bilan tavsiflanadi. (4) integralnig o'zi *harakat* deyiladi. Bu prinsip n ta nuqtalar sistemasining odatdagi harakat tenglamasiga ekvivalent ekanligini ko'rsatamiz.

Agar (4) funksional minimumga erishsa, u holda Eyler tenglamasini qanoatlantirishi kerak

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = 0, \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{5}$$

Potensial energiya U faqat x_i, y_i, z_i, $i = 1,2,\ldots,n$, ($\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, koordinatalarning hosilalariga bog'liq emas) koordinatalarga

bog'liqligini, T esa kinetik energiya esa $\frac{m}{2}$ koffitsientlari bilan tezliklarning kvadratlarining yig'indisini tasvirlashini e'tiborga olib, biz (5) tenglamani quyidagi ko'rinishda qayta yozishimiz mumkin

$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} m\dot{x}_i = 0, \\ -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} m\dot{y}_i = 0, \\ -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} m\dot{z}_i = 0 \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

$-\frac{\partial U}{\partial x_i}, -\frac{\partial U}{\partial y_i}, -\frac{\partial U}{\partial z_i}$ hosilalarni i – chastitsaga ta'sir ko'rsatuvchi kuchlarning komponentalarini tasvirlagani sababli va nihoyat quyidagilarni olamiz:

$$m_i\ddot{x}_i = X_i, \quad m_i\ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i\ddot{z}_i = Z_i, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Bu n ta erkin material nuqtalar sistemasi uchun odatdagi harakatning tenglamalari. Eng kam harakat prinsipi qachonki, qaralayotgan sistemaga qandaydir bog'lanish qo'yilgan holda ham to'g'ri. Bu holda (4) funksional qaralayotgan joiz egri chiziqlar qo'yilgan bog'lanishni qanoatlantirishi kerak, ya'ni bog'lanishli sistemaga eng kam harakat prinsipini qo'llash, variatsion hisobning shartli ekstremum masalalariga olib keladi.

Saqlanish qonuni. Biz yana kinetik va potensial energiyali n ta material nuqtalarning mexanik sistemasini qaraymiz.

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right). \qquad (1)$$

$$U = U(t, x_i, y_i, z_i). \qquad (2)$$

va unda Lagranj funksiyasi

$$L = T - U, \qquad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Oldingi paragrafda ko'rsatilganki, bunday sistemaning harakat tenglamasini eng kam harakat prinsipidan olish mumkin, ya'ni

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)dt$$

integralning minimum shartidan olish mumkin. Bu integral uchun kanonik o'zgaruvchilar nimani tasvirlaydi, shuni ko'rib o'tamiz. Bizning hol uchun

$$p_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad p_{y_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m\dot{y}_i, \quad p_{z_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i\dot{z}_i,$$

bo'ladi, ya'ni $p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i}$ – i – chastitsaning impulsini komponentalarini ifodalaydi va

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{2}\left(\dot{x}_i p_{x_i} + \dot{y}_i p_{y_i} + \dot{z}_i p_{z_i}\right) - L = 2T - (T - U) = T + U,$$

bo'ladi, ya'ni H sistemaning to'la energiyasi bo'ladi.

Izoh. *H sistemaning to'la energiyasi bo'lishligi, agar biz dekart koor-dinatalari o'rniga q_i umumlashgan koordinatalarni kiritsak ham saqlanib qoladi. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ifoda umumlashgan impulsli sistema deb ataladi (ular albatta odatdagi impulslardan farq qiladi).*

(4) funksionaldagi integral ostidagi funksiyani ko'rinishidan foydalanib, biz sistemaning har bir trayektoriyasi bo'ylab o'zgarmas qiymatni saqlovchi u yoki bu funksiyani topishimiz mumkin, ya'ni saqlanish qonuni deb nomlanuvchi qonunga ega bo'lamiz.

a). Energiyaning saqlanish qonuni. Aytaylik, qaralayotgan sistema konservativ bo'lsin, uning Lagranj funksiyasi vaqtga oshkor bog'liq emas(bu L ni vaqtga bog'liq emasligini anglatadi). Bu holda yuqorida ko'rsatilganidek har bir ekstremal bo'ylab $H = const$ bo'ladi, ya'ni konservativ sistemaning to'la energiyasi harakatda o'zgarmas bo'lib qoladi.

b). Impulsning saqlanish qonuni. L parallel ko'chirishda o'zgarmasin, ya'ni x_i, y_i, z_i, $i = 1,2,\ldots,n$, lar mos ravishda

$$x_i + a, y_i + b, z_i + c, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

almashtirishda o'zgarmasin. Neter teoremasiga ko'ra,

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, z)dx$$

integralning $x^* = x, y_i^* = \varphi_i(x, y_i, \alpha)$, almashtirishga nisbatan invariant bo'lishligidan Eyler tenglamalar sistemasi birinchi integralga ega bo'lishligi kelib chiqadi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial y_i'} \varphi_i(x, y_i) = const,$$

bu yerda

$$\varphi_i(x, y_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}.$$

Shuning uchun, (4) integralning $x^* = x, y_i^* = y_i, z_i^* = z_i$, almashtirishga nisbatan invariant bo'lishligidan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i'} = const, \qquad \text{ya'ni} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = const,$$

kelib chiqadi.

Shunga o'xshash (4) integralning y o'qi bo'ylab siljishiga nisbatan invariant ekanligidan

$$\sum_{i=1}^{n} p_{y_i} = const,$$

va (4) integralning z o'qi bo'ylab sijishiga nisbatan invariant ekanligidan

$$\sum_{i=1}^{n} p_{z_i} = const,$$

kelib chiqadi. P vektor

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} p_{x_i}, \quad P_y = \sum_{i=1}^{n} p_{y_i}, \quad P_z = \sum_{i=1}^{n} p_{z_i},$$

komponentalari bilan sistemaning to'la impulsi deb ataladi. Demak, biz ko'rsatdikki, agar

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt$$

parallel ko'chirishga nisbatan invariant bo'lsa, u holda sistemaning to'la impulsi vaqt davomida o'zgarmaydi. Bu impulsning saqlanish qonuni bo'ladi.

4-§. Potensial va kinetik energiya

Potensial energiya. Biz faqat zarrachalarning holatiga bog'liq bo'lgan kuchlar bilan o'zaro ta'sir ko'rsatuvchi, holatlari berilgan geometric bog'lanishlarga bo'ysunuvchi n ta zarrachalar sistemasini qaraymiz. Geometrik bog'lanishlar vaqt davomida o'zgarmas deb hisoblanadi yoki zarrachalarni ayrimlari faqat berilgan egri chiziq bo'ylab yoki berilgab sirt bo'ylab harakatlanishi mumkin (unda ayrim zarrachalar juftligi ajratuvchi masofa saqlanadi). i – zarrachaga ta'sir

qiluvchi kuchni $F = (F_x, F_y, F_z)$ orqali belgilaymiz, bu yerda dekart komponentalari sistema zarrachalarini holatini aniqlovchi $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N$ ta koordinatali funksiyalar bo'ladi.

Biz bu yerda faqat sistemaning maxsus holini, ya'ni u uchun

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y_1}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z_1}, \quad \ldots$$

kuchlarni aniqlovchi

$$U = U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) \tag{1}$$

funksiya mavjud bo'lgan *konservativ* sistemani qaraymiz. $U = U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)$ funksiya *potensial energiya* deb ataladi.

Kinetik energiya. Massasi m tezligi v bo'lgan zarraning kinetik energiyasi

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

kattalik bilan aniqlanadi. N ta zarrachalar sistemasi uchun kinetik energiya

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \tag{2}$$

ga teng bo'ladi, bu yerda m_i - i-zarrachaning massasi. Ta'rif bo'yicha $T \geq 0$ bo'ladi.

Bog'lanishlar. Umumlashgan koordinatalar. bog'lanishlarning N ta zarra-chalar sistemasidagi ta'siri erkin o'zgaruvchilarning sonini kamaytiradi. Agar zarrachalarning holatini tavsiflovchi bog'lanishlar

$$G_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{3}$$

k ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tenglamalar bilan aniqlansa, u holda bog'liq bo'lmagan koordinatalarning soni $3N-k$ ga teng bo'ladi. (3)

tenglikdan k ta o'zaro bog'liq o'zgaruvchilarni yo'qotish uchun foydalanish mumkin. Biroq, eng qulay holat zarrachalarning holatini tavsiflovchi $n = 3N - k$ ta $q_1, q_2, \ldots, q_n$ erkin o'zgaruvchilarni kiritishdir. Bu (3) bog'lanish tenglamasini parametrlashtirishdan boshqa narsa emas. $i = 1, 2, \ldots, N$ lar uchun

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \quad y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \quad z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \tag{4}$$

Bu yerda $q_1, q_2, \ldots, q_n$ o'zgaruvchilar *umumlashgan koordinatalar* deyiladi. Ularning vazifasi geometrik cheklovga (bog'lanishga) bo'ysungan holda sistemaning zarrachalarini holatini tavsiflashdir. Umumlashgan koordinatalarni tanlash bir qiymatli emas.

Umumlashgan tezlik. Lagranjian. (1)-(4) tengliklar umumlashgan koordinatalarning (murakkab) funksiyasi sifatida potensial energiyani aniqlaydi. T kinetik energiyani umumlashgan koordinatalar orqali ifodalash uchun (4) tenglamani differensiallaymiz:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad \dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \quad \dot{z}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial z_i}{\partial t}. \tag{5}$$

(5) tengliklarni (2) ifodaga olib borib qo'yib, kinetik energiyani $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ umumlashgan tezliklarning ikkinchi tartibli (darajali) birjinsli funksiyasi sifatida olamiz. Bu umumlashgan tezliklarning kvadratik formasining koeffitsientlari umumlashgan koordinatalarning funksiyasi bo'ladi.

Umumlashgan koordinatalar va tezliklarga o'tish amalga oshirildi deb hisoblab, Lagranj funsiyasi - sistemaning lagranjianini kinetik va potensial energiyalarning ayirmasi sifatida kiritamiz:

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) = T - U.$$

Gamilton prinsipi. Lagranjning harakat tenglamalari. Gamilton prinsipi Nyuton qonuniga eng qulay ekvivalentlik deb qabul qilinadi. U quyidagicha aytiladi: Lagranjianli sistemada real (aniq) harakatlar

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$

vaqtning ixtiyoriy t_1 va t_2 momentlari uchun

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

integralga ekstremum beruvchi, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$ funksiyalar bilan tavsiflanadi.

Lagranjning harakat tenglamalari. Variatsion hisobning prinsiplariga ko'ra, sistemaning aniq harakati

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

Eyler tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi ekstremallar bo'ladi.

Birinchi integral. Lagranjian vaqtga bog'liq bo'lmaganligi sababli,

$$v\frac{\partial F}{\partial x} + \ldots + z\frac{\partial F}{\partial z} = F \quad (t' = t),$$

formulaga ko'ra, sistemaning birinchi integralini topamiz

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = E, \tag{7}$$

bu yerda E o'zgarmas kattalik. Potensial energiyaning umumlashtirilgan tezliklarga bog'liq bo'lmaganligini hisobga olgan holda

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Keyinchalik, kinetik energiyaning umumlashgan tezliklar bo'yicha bir jinsliligi

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T, \tag{8}$$

tenglikka olib keladi. Natija sifatida

$$T = 2T - (T + V) = T + V$$

bu yerda T o'zgarmas miqdor sistemaning *to'la energiyasi* ma'nosiga ega bo'ladi. Bu bilan biz konservativ sistemada to'la energiyaning saqlanish qonunini keltirib chiqardik.

Umumlashgan momentlar. Holati $q_1, q_2, \ldots, q_n$ umumlashgan koordinatalar va L lagranjian bilan aniqlangan sistema bilan ish ko'ra turib, umumlashgan momentlarni aniqlaymiz

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

ga teng bo'ladi, chunki, T kinetik energiya $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ umumlashgan tezliklarga nisbatan kvadratik forma bo'ladi, u holda p_α umumlashgan momentlar umumlashgan tezliklarning chiziqli bir jinsli funksiyalari bo'ladi.

(9) tenglikdan foydalanib, Lagranjiandan umumlashgan tezliklarni yo'qotib, uni $q_1, q_2, \ldots, q_n$ va $p_1, p_2, \ldots, p_n$ kanonik o'zgaruvchilar orqali ifodalab, sistemaning gamiltonianini aniqlaymiz

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \tag{10}$$

Kanonik o'zgaruvchilarni kiritish, agar oshkormas funksiya haqidagi teoremaning shartiga ko'ra,

$$\frac{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)} = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_k}\right) \neq 0, \qquad \text{(regulyarlik sharti),}$$

bo'lishi mumkin. Bir o'lchovli holdagi kabi,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = q_i + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_i} = q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bo'ladi. Bu tengliklar (9) tenglikning umumlashgan tezliklarga nisbatan aniq yechimini ifodalaydi:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = \dot{q}_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \dot{q}_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$

(8) tenglikdan foydalanib,

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu oxirgi tenglikni (10) tenglikka olib borib qo'ysak,

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - U) = T + U$$

tenglikni beradi, bu esa sistemaning to'la energiyasi sifatida gamiltonian ma'nosini anlatadi. Keyinchalik,

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

bo'ladi, bu yerdan (6) Eyler – Lagranj tenglamasiga ko'ra,

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

tenglikka ega bo'lami. Bir o'lchovli hol kabi, biz Eyler tenglamasining quyidagi ko'rinishdagi kanonik formasiga kelamiz

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (11)$$

Kanonik almashtirishlar. Umumlashgan koordinatalar va impulslarni tanlash bir qiymatli emasligini yuqorida aytib o'tgan edik.

H gamiltonianga mos keluvchi $q_1, q_2, \ldots, q_n$ va $p_1, p_2, \ldots, p_n$ kanonik o'zgaruvchilar bilan birga yangi K gamiltonianga mos keluvchi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ va $P_1, P_2, \ldots, P_n$ kanonik o'zgaruvchilarni qaraymiz. Demak, yuqoridagi kanonik tenglama

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_i}{dt} = \dfrac{\partial K}{\partial P_i}, \\ \dfrac{dP_i}{dt} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, $i = 1, 2, \ldots, n$. Bu yozilgan tenglamaning (10) tenglamaga ekvivalentligi, bu ikki kanonik tenglamalar sistemasiga mos keladigan Lagranj funksiyalari faqat umumlashgan koordinatalarning ba'zi funksiyalarini vaqt bo'yicha to'la hosilasi bilangina farq qilishini anglatadi:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dW}{dt}, \quad W = W(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$$

Endi dt ga ko'paytirib, W funksiyaning to'la hosilasini ochib yozamiz.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - \frac{\partial W}{\partial q_i}\right)dq_i - \sum_{i=1}^{n}\left(P_i + \frac{\partial W}{\partial P_i}\right)dQ_i + \left(K - H - \frac{\partial W}{\partial t}\right)dt = 0.$$

tenglikni olaiz. Bu yerdan

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t}, \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Bu tavsiflangan o'zgaruvchilarni almashtirish *kanonik almashtirish* deb ataladi, W funksiya esa mazkur kanonik almashtirishning hosilaviy funksiyasi deyiladi. Kanonik almashtirishlarga eng sodda misol, bu

$$W = q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + \ldots + q_n Q_n,$$

hosilaviy funksiyali

$$(q_1 q_2 \dots q_n p_1 p_2 \dots p_n) * (p_1 p_2 \dots p_n q_1 q_2 \dots q_n)$$

almashtirish hisoblanadi, shuning uchun, $Q_1 p_1 p_2 \dots q_1 \in \{1,2,\dots,n\}$ bo'ladi.

5 §. Rele prinsipi.

Aytaylik, bizga xos qiymatni topish masalasi berilgan bo'lsin

$$l(y) \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda r(x)y$$

(14)

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

bu yyerda $p(x), p'(x), q(x), r(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz; $[a,b]$ da $p(x) > 0$.

$y(x)$ ni *joiz funksiya* deb ataymiz $(y(x) \in D_1)$, agarda u ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va (15) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa.

Faraz qilaylik, har bir $y(x)$ joiz funksiya uchun quyidagi shart bajarildi

$$\int_a^b y l(y)\,dx > 0.$$

Bu holda (14)-(15) chegaraviy masala λ ning faqat haqiqiy xos qiymatiga ega bo'ladi.

Xos qiymat haqidagi masalani mos holda quyidagi variatsion masala ko'rinishida ham qo'yish mumkin:

$$\int_a^b r(x)y^2\,dx > 0 \tag{16}$$

shartni qanoatlantiruvchi $y(x)$ joiz funksiyalar ichidan shunday joiz

funksiyani topinki, natijada

$$\frac{\int_a^b y l(y)\,dx}{\int_a^b r(x)y^2\,dx} \to \min$$

bo'lsin.

Aytaylik, $y = \psi_1(x)$ ushbu masalaning yechimi bo'lsin. Agar λ_1 – minimal qiymat bo'lsa, ya'ni

$$\lambda_1 = \min \frac{\int_a^b y l(y)\,dx - \int_a^b \psi_1 l(\psi_1)\,dx}{\int_a^b r(x)y^2\,dx - \int_a^b r\psi_1^2\,dx},$$

unda λ_1 – eng kichik musbat xos qiymat, $\psi_1(x)$ esa unga mos kelgan xos funksiya bo'ladi.

Agarda $y(x)$ joiz funksiyalarga (16) dan boshqa yana bir

$$\int_a^b r\psi_1 y\,dx = 0$$

(ortogonallik) shartini qo'ysak, u holda masala quyidagicha bo'ladi

$$\frac{\int_a^b y l(y)\,dx}{\int_a^b r y^2\,dx} \to \min$$

va yana qaysidir $\psi_2(x)$ yechimga ega bo'ladi.

Agar λ_2 – minimal qiymat bo'lsa, u holda λ_2 qiymat bo'yicha keyingi $(\lambda_2 \geq \lambda_1)$ xos qiymat bo'ladi, $\psi_2(x)$ funksiya esa unga mos kelgan, $\psi_1(x)$ ga ortogonal bo'lgan xos funksiya boladi. Umuman, birinchi k ta musbat xos qiymatlar ma'lum bo'lsa

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$$

va ularga mos ortogonal xos $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), \ldots$ funksiyalar sistemasi bo'lsa, u holda keyingi xos qiymat quyidagicha bo'ladi

$$\lambda_n = \min \frac{\int_a^b y(x)\,dx}{\int_a^b v_n\,dx}$$

chunki, shunday $y(x)$ joiz funksiyalarni qaraymizki, (16) dan boshqa quyidagicha qo'shimcha shartlar ham bajariladi

$$\int_a^b v_n(x)\rho(x)y(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, k)$$

Agar (14) tenglamadagi funksiya $[a,b]$ kesmada $r(x) > 0$ bo'lsa, u holda eng kichik musbat λ xos qiymatni yuqoridan baholash uchun ko'p hollarda quyidagi tengsizlik ishlatiladi (Rele prinsipi)

$$\lambda_n \le \frac{\int_a^b y(x)\,dx}{\int_a^b v_n\,dx}$$

5-misol. Rele prinsipi yordamida quyidagi chegaraviy masala uchun

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

λ_1 xos qiymatni baholang.

Yechish. Biz qarayotgan hol uchun $[0,1]$ kesmada $f(x) = -\lambda y$, $p(x) = 1 > 0$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1 > 0$ bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0$ shuningdek, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 > 0, \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 > 0$. $y(x)$ joiz funksiya sifatida $y(x) = 1 - x^2$ ni olamiz.

Rele prinsipiga ko'ra, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\lambda_1 \le \frac{\int_0^1 y(x)\,dx}{\int_0^1 v_1^2\,dx} = \frac{\int_0^1 2(1-x^2)\,dx}{\int_0^1 (1-x^2)\,dx} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{15}} = 2{,}5$$

Ta'kidlash lozimki, aniq $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2{,}4674$ qiymatga teng bo'ladi.

Quyidagi masalalarda eng kichik xos qiymatlar baholansin:

225. $-y'' = \lambda x(0 - x^2)y; \quad y(-1) = y(1) = 0$

226. $-y'' = \lambda(x+1)y; \quad y(0) = y(1) = 0$

Nazorat savollari

1. Veyershtrass funksiyasini keltirib chiqaring.
2. Gilbertning invariant integrali haqida nimani bilasiz.
3. Gamilton prinsipini gapirib bering.
4. Gamilton – Yakobi tenglamasini keltirib chiqaring.
5. Kuchsiz ekstremum haqida gapiring.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

Quyidagi funksiyalarning ekstremumi topilsin

227. $f=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$. **228.** $f=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

229. $f=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

230. $f=\frac{a}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{b}$, $(x>0, y>0, z>0, a>0, b>0)$.

231. $f(x,y)=x^3+y^3-4xy$. **232.** $f(x,y)=ax^2+bx^2+\ln x^2+c^2$.

233. $f(x,y)=(x+y)(x-a)(y-b)$. **234.** $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$.

235. $f(x,y)=x+y+4\sin(x)\sin(y)$. **236.** $f(x,y)=e^x(1+e^y)\cos(y)$.

237. $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. **238.** $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$.

239. $f(x,y)=x-2y+\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+3\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

240. $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$, $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\pi$.

241. $f(x,y)=\sin(x)+\cos(y)+\cos(x-y)$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$.

242. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln(x)-10\ln(y)$.

243. $f(x,y)=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$. **244.** $f(x,y)=e^{x^2}(5-2x+y)$.

245. $f(x,y)=e^{2x(x+y)}(8x^2-6xy+3y^2)$. **246.** $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

247. $f(x,y)=\frac{(ax+by+c)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$. **248.** $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

249. $f(x,y)=2x^3+y^3-x^2-2y^2$. **250.** $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$.

251. $f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$. **252.** $f(x,y)=x^2-y^2-4x+6y$.

253. $f(x,y)=5x^2+4xy+y^2-16x-12y$.

254. $f(x,y)=3x^2+4xy+y^2-8x-12y$.

255. $f(x,y)=3xy-x^2y-xy^2$.

256 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+5z^2-2xy-4yz-2z$.

257. $f(x,y,z)=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$, $a>0$.

258. $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$, $x>0, y>0, z>0$.

259. $f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$.

260. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

261. $f=x^2+12xy+2y^2$, agar $4x^2+y^2=25$. **262.** $f=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, agar $x^2+y^2=1$.

263. $f=xy^2z^3$, agar $x+2y+3z=a$, $(x>0, y>0, z>0, a>0)$.

264. $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ kvadratik formaning $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$ shart ostida ekstremumi topilsin.

265. $f=x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p$, $(p>1)$, agar $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$, $(a>0)$.

266. R^n yevklid fazosida G qavariq to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya G to'plamda qavariq deyiladi, agar ixtiyoriy $x,y\in G$ uchun va

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

Quyidagi funksiyalarning ekstremumi topilsin

227. $f=\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ **228.** $f=(5x+7y-25)e^{-x^2-xy-y^2}$

229. $f=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$

230. $f=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{b}$, $(x>0, y>0, z>0, a>0, b>0)$

231. $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ **232.** $f(x,y)=ax^2+bx^2+\ln x^2+e^2$

233. $f(x,y)=(x+y)(x-a)(y-b)$ **234.** $f(x,y)=x^2-2y^2+y^4-x^2$

235. $f(x,y)=x+y+4\sin(x)\sin(y)$ **236.** $f(x,y)=xe^x-(1+e^x)\cos(y)$

237. $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ **238.** $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$

239. $f(x,y)=x-2y+\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+3\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

240. $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$, $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\pi$.

241. $f(x,y)=\sin(x)+\cos(y)+\cos(x-y)$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$.

242. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln(x)-10\ln(y)$.

243. $f(x,y)=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$. **244.** $f(x,y)=e^{x^2-y^2}(5-2x+y)$.

245. $f(x,y)=e^{2x-3y}(8x^2-6xy+3y^2)$. **246.** $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

247. $f(x,y)=\dfrac{(ax+by+c)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$. **248.** $f(x,y)=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

249. $f(x,y)=2x^2+y^4-x^2-2y^2$. **250.** $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$.

251. $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$. **252.** $f(x,y)=x^2-y^2-4x+6y$.

253. $f(x,y)=5x^2+4xy+y^2-16x-12y$.

254. $f(x,y)=3x^2+4xy+y^2-8x-12y$.

255. $f(x,y)=3xy-x^2y-xy^2$.

256 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+5z^2-2xy-4yz-2z$.

257. $f(x,y,z)=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$, $a>0$.

258. $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$, $x>0, y>0, z>0$.

259. $f(x,y,z)=x+\dfrac{x^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$.

260. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

261. $f=x^2+12xy+2y^2$, agar $4x^2+y^2=25$. **262.** $f=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, agar $x^2+y^2=1$.

263. $f=xyz^2$, agar $x+2y+3z=a$, $(x>0, y>0, z>0, a>0)$.

264. $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ kvadratik formaning $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$ shart ostida ekstremumi topilsin.

265. $f=x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p$, $(p>1)$, agar $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$, $(a>0)$.

266. R^n yevklid fazosida G qavariq to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya G to'plamda qavariq deyiladi, agar ixtiyoriy $x,y\in G$ uchun va

ixtiyoriy $t \in [0,1]$ uchun $f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y)$ tengsizlik bajarilsa.

Monoton o'suvchi $\varphi: R \to R$ qavariq funksiya va G to'plamda qavariq $f(x)$ funksiya uchun $\varphi \circ f$ kompozitsiya G to'plamda qavariq bo'lishligini ko'rsating.

267. $f: G \to R$ funksiya $G \subset R^n$ to'plamda qat'iy qavariq deyiladi, agar ixtiyoriy $x, y \in G$ uchun va ixtiyoriy $t \in (0,1)$ uchun

$$f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y)$$

tengsizlik bajarilsa. G qavariq sohada qat'iy qavariq funksiya bu sohada bittadan boshqa lokal minimumga ega bo'lmasligini ko'rsating.

268. Aytaylik, $f: G \to R$ funksiya $G \subset R^n$ qavariq sohada ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin. U funksiya G sohada qat'iy qavariq bo'ladi, agar $d^2 f(x)$ ikkinchi tartibli differensiali G sohaning har bir nuqtasida $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ erkli o'zgaruvchilarning differensiali musbat aniqlangan kvadratik formasi bo'lishligini ko'rsating.

269. Quyidagi kvadratik formani $u = x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 2xz$ ekstremumga tatqiq qiling.

270. $u = xyz$ funksiyani $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ bog'lanishlar ostida ekstremumga tadqiq qiling.

271. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ kvadratik formaning $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ sferada eng katta va eng kichik qiymati, kvadratik forma matritsasining eng katta va eng kichik xos qiymatiga teng bo'lishligini ko'rsating.

272. $u = e^{xyz}$ funksiyani $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ shart ostida ekstremumga tadqiq qiling.

273. a) $C[0,1]$, b) $C^1[0,1]$ fazolarning normalari bo'yicha $y_1(x) = x^2$ va $y_2(x) = x^3$ funksiyalar orasidagi masofa topilsin.

274. $\|\cdot\|_1$ normali $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J[x] = \int_0^1 (x+x')\,dt$$

funksionalni $y_0(x) = x^2$ funksiyada uzluksiz bo'lishligini ko'rsating.

275. $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J[x] = \int_0^1 x\,dt$$

funksionalni norma $\|\cdot\|_1$ bo'lgan holda $y_0(x) = 0$ funksiyada uzulishli, lekin norma $\|\cdot\|_\infty$ bo'lgan holda uzluksiz bo'lishligini ko'rsating.

276. $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J[x] = \int_0^1 \sqrt{1+x'^2}\,dx$$

funksionalni a) $\|\cdot\|_1$; b) $\|\cdot\|_\infty$ normalar bo'yicha $y_0(x) = 0$ funksiyada uzluksiz bo'lishligini tadqiq qiling.

277. $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J[x] = \int_0^1 x^2\sqrt{1+x'^2}\,dx$$

funksionalni $y_0(x) = x^2$ funksiyada $\|\cdot\|_\infty$ norma bo'yicha uzluksiz bo'lishligini ko'rsating.

278. Har qanday chiziqli uzluksiz funksional normallangan fazoda differen-siallanuvchi bo'lishligi isbot qilinsin. Uning differensialini yozing.

279. $C[a,b]$ fazoda aniqlangan

ixtiyoriy $t \in [0,1]$ uchun $f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y)$ tengsizlik bajarilsa.

Monoton o'suvchi $\varphi: R \to R$ qavariq funksiya va G to'plamda qavariq $f(x)$ funksiya uchun $\varphi \circ f$ kompozitsiya G to'plamda qavariq bo'lishligini ko'rsating.

267. $f: G \to R$ funksiya $G \subset R^n$ to'plamda qat'iy qavariq deyiladi, agar ixtiyoriy $x, y \in G$ uchun va ixtiyoriy $t \in (0,1)$ uchun

$$f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y)$$

tengsizlik bajarilsa. G qavariq sohada qat'iy qavariq funksiya bu sohada bittadan boshqa lokal minimumga ega bo'lmasligini ko'rsating.

268. Aytaylik, $f: G \to R$ funksiya $G \subset R^n$ qavariq sohada ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin. U funksiya G sohada qat'iy qavariq bo'ladi, agar $d^2 f(x)$ ikkinchi tartibli differensiali G sohaning har bir nuqtasida $dx_1 dx_2 \dots dx_n$ erkli o'zgaruvchilarning differensiali musbat aniqlangan kvadratik formasi bo'lishligini ko'rsating.

269. Quyidagi kvadratik formani $u = x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 2xz$ ekstremumga tatqiq qiling.

270. $u = xyz$ funksiyani $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ bog'lanishlar ostida ekstremumga tadqiq qiling.

271. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ kvadratik formaning $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ sferada eng katta va eng kichik qiymati, kvadratik forma matritsasining eng katta va eng kichik xos qiymatiga teng bo'lishligini ko'rsating.

272. $u = e^{xyz}$ funksiyani $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ shart ostida ekstremumga tadqiq qiling.

273. a) $C[0,1]$, b) $C^1[0,1]$ fazolarning normalari bo'yicha $y_1(x) = x^2$ va $y_2(x) = x^3$ funksiyalar orasidagi masofa topilsin.

274. $\|\cdot\|$ normali $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J[x] = \int_0^1 x\,dx$$

funksionalni $y_0(x) = x^2$ funksiyada uzluksiz bo'lishligini ko'rsating.

275. $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J[x] = \int_0^1 x\,dx$$

funksionalni norma $\|\cdot\|_1$ bo'lgan holda $y_0(x) = 0$ funksiyada uzulishli, lekin norma $\|\cdot\|_C$ bo'lgan holda uzluksiz bo'lishligini ko'rsating.

276. $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J[x] = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

funksionalni a) $\|\cdot\|_C$; b) $\|\cdot\|_1$ normalar bo'yicha $y_0(x) = 0$ funksiyada uzluksiz bo'lishligini tadqiq qiling.

277. $C[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J[x] = \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$$

funksionalni $x_0(x) = x^2$ funksiyada $\|\cdot\|_C$ norma bo'yicha uzluksiz bo'lishligini ko'rsating.

278. Har qanday chiziqli uzluksiz funksional normallangan fazoda differen-siallanuvchi bo'lishligi isbot qilinsin. Uning differensialini yozing.

279. $C[a,b]$ fazoda aniqlangan

$J[y] = \int_a^b \ldots dx$

funksionalni hamma joyda differensiallanuvchi bo'lishligini isbot qiling. Uning differensialini yozing.

280. Quyidagi funksionalni differensiallanuvchi bo'lishligini tekshiring:

a) $C^1[a,b]$ da $J[y] = \sqrt{y(a)}$.

281. Uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalarning normallangan fazosida aniqlangan quyidagi funksionallarni birinchi variatsiyasini toping:

a) $J[y] = \int_0^1 x^2\sqrt{1+y^2}\,dx$ b) $J[y] = \int_0^1 (xy' + y^2)\,dx$

c) $J[y] = \int_0^{\pi} y\sin y\,dx$ d) $J[y] = y(0) + \int_0^1 (xy + y^2)\,dx$

282. Quyidagi $J[y]$ funksionallarni berilgan chegaraviy shartlani qanoat-lantiruvchi ekstremallari topilsin:

a) $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y'^2)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ b) $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - 12xy)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

v) $J[y] = \int_1^2 (4y^2 - 7yy' - y'^2)\,dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 0$ g) $J[y] = \int_0^1 (y + e^{x+y})\,dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = -4$

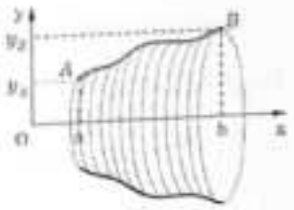
d) $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (16y^2 + y'^2 + 2y)(\sin 2x + 16x)\,dx$, $y(\pi) = 0$, $y(\frac{\pi}{8}) = -\frac{\pi}{8}$

e) $J[y] = \int_1^2 (3x^2y^2 + \cos y + y')(2x^3) - x\sin y)\,dx$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

j) $J[y] = \int_1^2 (xy'^2 + 2y)\,dx$, $y(2) = 1$, $y(4) = 5$ z) $J[y] = \int_0^1 (x - x^2y - 2xy)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = -\frac{1}{6}$

i) $J[y] = \int_0^{\pi} (xy + y^2)\,dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = -2$ k) $J[y] = \int_0^1 (y' + \frac{2y}{1+x^2})\,dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = -2$

283. (x_1, y_1) va (x_2, y_2) nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqlar orasidan shundayini topingki, qaysiki, u Ox o'qini aylanishi natijasida eng kichik yuzali sirtni tashkil qilsin (65 - rasm).



65 - rasm

284. O'ng tomoni ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $\varphi(x, y, y')$ funksiyali ixtiyoriy $y'' = \varphi(x, y, y')$ differensial tenglama uchun, shunday $f(x, y, y')$ funksiya topish mumkinki, qaysiki bu tenglamaning yechimi

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$$

funksionalning ekstremali bo'ladi.

285. Berilgan chegaraviy shartlarda quyidagi funksionallarni ekstremumga erishtiruvchi $y_1(x), y_2(x) \in C^1[a,b]$ funksiyalar topilsin:

1) $J[y_1, y_2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'y_2' + y_1y_2)\,dx$, $y_1(0) = 0$, $y_1(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\frac{\pi}{2}) = -1$;

2) $J[y_1, y_2] = \int_1^3 (xy_1'y_2' + y_1y_2')\,dx$, $y_1(1) = 1$, $y_2(3) = \ln 3 + 1$, $y_2(1) = 0$, $y_2(3) = 0$;

3) $J[y_1, y_2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1' + y_2' + 3y_1y_2)\,dx$, $y_1(0) = 0$, $y_1(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\frac{\pi}{2}) = -1$;

4) $J[y_1, y_2] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2y_1 - 4y_2^2 + y_2' - y_1')\,dx$, $y_1(0) = 0$, $y_1(\frac{\pi}{4}) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\frac{\pi}{4}) = 1$;

5) $J[y_1, y_2] = \int_0^1 (y_1' + y_2' + 2y_1)\,dx$, $y_1(0) = 1$, $y_1(1) = \frac{3}{2}$, $y_2(0) = 1$, $y_2(1) = 1$.

6) $J[y,z]=\int_0^{\pi/2}(2y^2+z^2+4yz)\,dx$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Berilgan funsionallarni chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi barcha ekstre-mallari topisin:

7) $J[y]=\int_0^1(12xy+y'^2)\,dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$; $y(0)=0$, $y(1)=\frac{1}{2}$.

8) $J[y]=\int_0^{\pi/2}(y^2-y'^2+x^2)\,dx$, $y(0)=1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$; $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

9) $J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2)\,dx$, $y(0)=0$, $y(b)=0$; $y(0)=0$, $y(b)=0$.

10) $J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2-2xy)\,dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$; $y(0)=0$, $y(1)=1$.

11) $J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2)\,dx$, $y(0)=0$, $y(0)=0$; $y(1)=\sin 1$, $y'(1)=\sin 1+\cos 1$; $y(0)=1$, $y'(1)=\operatorname{ch}1$.

12) $J[y]=\int_0^1 y'^2\,dx$, $y(0)=1$, $y(0)=0$, $y(1)=0$; $y(1)=1$, $y'(1)=1$; $y(1)=4$.

13) $J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2)\,dx$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y(0)=0$; $y(1)=1$, $y'(1)=\operatorname{sh}2+\operatorname{ch}2$, $y(1)=\operatorname{ch}2+\operatorname{sh}2$.

286. Quyidagi funksionallar uchun Eyler-Ostrogradskiy tenglamasini yozing:

1) $J[z]=\iint_D\left|\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right|dxdy$, $D=R^2$.

2) $J[u]=\iiint_D\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2uf(x,y,z)\right|dxdydz$, $D=R^3$.

287. Aytaylik, $\Phi(x,y,p)$ va $H(x,y,p)$ funksiyalarning $\Phi_p(x,y,p)\neq 0$, $H_p(x,y,p)\neq 0$ bo'lsin. Agar H – variatsion masalaning Gamilton funksiyasi bo'lsa, u holda Eyler tenglamalar sistemasining ixtiyoriy integral egri chizig'i bo'ylab

$$\frac{d\Phi}{dx}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+[\Phi,H]$$

tenglik bajariladi, bu yerda $[\Phi,H]$ – Φ va H funksiyalarning *Puasson qavsi* deyiladi.

288. Funksionali uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamida aniqlangan

$$J[y]=\int_a^b(x+y)\sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad y(a)=y_a,\ y(b)=\varphi(b).$$

variatsion masalada o'ng oxiridagi transversallik shartini yozing, bu yerda a qiymatda y_a tayinlangan va $A(x,\varphi(x))\neq 0$ deb faraz qilamiz, $\varphi(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.

289. Chegaralari qo'zg'aluvchan masalada bir necha funksiyaga bog'liq bo'lgan funksional variatsiyasining (6) umumiy formulasini isbot qiling.

290. Funksionali bo'lakli silliq funksiyalar to'plamida aniqlangan

$$J[y]=\int_a^b(x+y+z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,\quad z(a)=\varphi(a),\ y(a)=y_a,\ y(b)=y_b,\ z(b)=z_b.$$

variatsion masalada chap oxiridagi transversallik shartini yozing, bu yerda b, y_b, z_b lar tayinlangan va $A(x,y,\varphi(x,y))\neq 0$ deb faraz qilamiz, $\varphi(x,y)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.

291. Oxirlari erkin masalada

$$J[y]=\int_a^b f(x,y,y',y'')\,dx$$

funksionalning birinchi variatsiyasi uchun formula keltirib chiqaring (bunda $y\in C^{(2)}[a,b]$ deb faraz qilinadi).

292. Funksionali juft bo'lakli silliq funksiyalar to'plamida aniqlangan variatsion masalada

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx,\ y(a)=y_a,\ z(a)=z_a,\ \varphi(b,y(b))=0,$$

o'ng oxirining transversallik shartini oling. a, y_a, z_a – tayinlangan.

293. Funksionali bo'lakli silliq vektor-funksiyalar to'plamida aniqlangan

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx,\ y(a)=y_a,\ \varphi(b,y(b))=0,$$

variatsion masalada o'ng oxirining transversallik shartini oling. $a, y_a \in R^n$ – tayinlangan.

294. Quyidagi, o'ng oxirlari qo'zg'aluvchan variatsion masalalarda ekstre-mallar topilsin:

1) $J[y]=\int_0^b y'\,dx \to extr,\ y(0)=0,\ y(b)+b+1=0;$

2) $J[y]=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx \to extr,\ y(0)=0,\ y(b)=b-5;$

3) $J[y]=\int_1^b (2y-x^2y')dx \to extr,\ y(1)=e;$

4) $J[y]=\int_0^b (y'^2-y+1)dx \to extr,\ y(0)=0;$

5) $J[y]=\int_0^b (yy'+y'^2+1)dx \to extr,\ y(0)=1,\ y(b)=-3;$

6) $J[y]=\int_0^b \sqrt{1+y}\sqrt{1+y'^2}\,dx \to extr,\ y(0)=0,\ y(b)+b+1=0;$

295. Variatsion hisob usullaridan foydalanib, koordinata boshidan $x^2y=1$ egri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

296. Variatsion hisobning usullaridan foydalanib, tekislikdagi ikkita egri chiziqlar orasidagi masofa topilsin: a) $y=x^2+2$ va $y=x$.

297. $J[y]=\int_a^b (2xy-x^2-y^2)dx,\ y(a)=y_a, y(b)=y_b,$ masalaning funksionali burchak nuqtali ekstremumga ega bo'ladimi, aniqlang.

298. Quyidagi variatsion masalada

$$J[y]=\int_0^1 y'^2(1-x)dx,\ y(-1)=0, y(1)=1,$$

funksionalning burchak nuqtali ekstremali topilsin.

299. Quyidagi variatsion masalalarda funksional ekstremumga erishishi mumkin bo'lgan silliq funksiyalarni aniqlang:

1) $J[y,z]=\int_0^b (y'^2+z'^2-2y)dx,\ y'=z+e^x, y(0)=2, y(1)=e, z(0)=1, z(1)=0;$

2) $J[y,z]=\int_0^b (y'^2+z'^2-2z\cos x-2y^2)dx,\ y'=z-2\sin x, y(0)=1, y(\frac{\pi}{2})=0, z(0)=1, z(\frac{\pi}{2})=2;$

3) $J[y,z]=\int_0^b (y'^2+z'^2-2z\sin x)dx,\ y'=z-\cos x, y(0)=0, y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}, z(0)=1, z(\frac{\pi}{2})=0;$

4) $J[y,z]=\int_0^b (2xy-z^2)dx,\ y'=z+2=0, y(0)=0, y(1)=\frac{1}{5}, z(0)=2, z(1)=3;$

5) $J[y]=\int_0^{\pi} y'^2dx,\ \int_0^{\pi} y^2dx=1, y(0)=0, y(\pi)=0;$

6) $J[y,z]=\int_0^1 yz\,dx,\ \int_0^1 xzdx=0, y(0)=y(1)=z(0)=0, z(1)=1, \int_0^1 xydx=0;$

7) $J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z^2)dx,\ y(0)=y(1)=z(0)=z(1)=0, \int_0^1 yzdx=-2;$

8) $J[y,z]=\int_0^{\pi}(y'+z^2)dx,\ y(0)=y(\pi)=0,\ z(0)=0,\ z(\pi)=2\int_0^{\pi}z\,dx=\frac{\pi}{2}$

300. O'qi koordinata o'qlari bilan ustma-ust tushuvchi doiraviy silindrda ikkita $A(0,2,4)$ va $B(-1,\sqrt{3},2)$ nuqtalar orasidagi eng qisqa masofa topilsin.

301. Quyidagi variatsion masalalarni qaysi tipga tegishli ekanligini aniqlang va funksional ekstremumining zaruriy shartlarini to'la sistemasini yozing:

1) $J[y]=\int_a^b f(x,y',\dots,y^{(n)})dx+\Gamma[y(b)]\to extr,\ g_j(x,y)=0,\ j=\overline{1,k},(k<n),\ y(a)=y^a,$

$a,b,y^a=(y_1^a,y_2^a,\dots,y_n^a)$ – lar tayinlangan.

2) $J[y]=\int_a^b f(x,y',\dots,y^{(n)})dx+\Gamma[y(a)]\to extr,\ g_j(x,y)=0,\ j=\overline{1,k},(k<n),\ y(b)=y^b,$

$a,b,y^b=(y_1^b,y_2^b,\dots,y_n^b)$ – lar tayinlangan.

3) $\Gamma[y(a)]+\overline{\Gamma[y(b)]}\to extr,\quad g_j(x,y,y')=0,\quad j=\overline{1,k},\quad y(b)=y^b,$

a,b – tayinlangan.

302. Silliq funksiyalar to'plamida aniqlangan quyidagi funksionallarning ekstremali topilsin:

1) $J[y]=\int_0^{\pi}(y^2+y^2)dx+y'(0)-y(0)=1.$ 2) $J[y]=\int_0^1 y\,dx+y'(0)-2y'(1)$

3) $J[y]=\int_0^1(y^2+y'^2)dx-2dy(1)$ 4) $J[y]=\int_0^1 4xy\,dx+y'(0)-8y(1)$

5) $J[y]=\int_0^{\pi}(y^2-y'^2)dx+y'(0)-y'(\frac{\pi}{2})+4y(\frac{\pi}{2})$

303. $J[y]=\int_0^b(e^x-4y^2+y^2)dx$ funksionalning $A(0,0)$ va $B(b,0)$ nuqtalar orqali

o'tuvchi ekstremallari uchun Yakobi sharti bajarilishini tekshiring. $b\neq(n+\frac{1}{2})\pi$ va $B(-1,\sqrt{3},2)$ deb faraz qilinadi.

304. $J[y]=\int_a^b f(x,y,y')dx$ funksional uchun, bu yerda f ikki marta uzluksiz diffe-rensiallanuvchi funksiya: $f''_{y'y'}\neq 0;\ y(x)\in C^1[a,b]$, har bir ekstremal ekstremallar maydoniga kiritilganligini ko'rsating.

305. Quyidagi funksionallarning berilgan chegaraviy shartlarni qanoat-lantiruvchi ekstremallari ekstremallar maydoniga kiritilganmi yo'qmi, tekshirilsin:

1) $\int_0^{\pi}(y^2-y^2)dx,\ y(0)=y(\pi)=0.$ 2) $\int_0^1 y'^2dx,\ y(0)=0,\ y(b)=c,(c>0).$

3) $\int_0^b(x+\sqrt{1+y'^2})dx,\ y(0)=c,\ y(b)=c,\ (bc)>0).$ 4) $\int_0^b(b)^{-1}-y'^2)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=c,(c>0)$

306. $J[y]=\int_0^{\pi}(y'^2-y^2)dx$ funksional uchun $y(0)=0,\ y(\frac{5\pi}{4})=0$ chegaraviy shartlarda $y(x)=0$ ekstremal ekstremum nuqtasi bo'lmasligini isbotlang.

307. Berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamida aniqlangan quyidagi funksionallarni ekstremumga tadqiq qilinsin:

1) $\int_0^2(y^2-2y^2-16x^2)dx,\ y(0)=0,\ y(a)=0,(a>0).$ 2) $\int_1^2 y(1+x^2y')dx,\ y(1)=3,\ y(2)=5.$

3) $\int_0^{\pi}(4y'^2-y^2+8y)dx,\ y(0)=-1,\ y(\frac{\pi}{4})=0.$ 4) $\int_0^1(y'^2+y^2+2ye^x)dx,\ y(0)=\frac{1}{3},\ y(1)=\frac{1}{3}e^2.$

5) $\int_0^{\pi}(x^2-y^2+6y\sin 2x)dx,\ y(0)=0,\ y(\frac{\pi}{4})=1.$ 6) $\int_0^2(x^2+y'^2-2y)dx,\ y(0)=0,\ y(2)=3.$

308. ε parametrning qiymatiga bog'liq holda

$\int$ [illegible]

funksionalni ekstremumga tadqiq qiling.

309. $J[y]$ $\int$ [illegible] Variatsion masalada [illegible] ekstremal $y_0(x)$ funksionalga kuchsiz minimum berishini ko'rsating. Bu ekstremal $y_0(x)$ funksionalga kuchli minimum beradimi?

310. $J[y]$ $\int$ [illegible]

311. $J[y]$ $\int_0^{\cdot}$ [illegible]

312. $J[y]$ $\int$ [illegible]

(2) funksional uchun (7) Eyler tenglamasi bu ikkinchi tartibli differensial tenglamadan iborat. shuning uchun, uning [illegible] yechimi [illegible] ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lishi kerak. Biroq, shunday hollar bo'ladiki, $J[y(x)]$ $\int$ [illegible] funksional ekstremumga erishishi mumkin bo'lgan funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lmasligi mumkin.

313. $J[y]$ $\int$ [illegible] funksionalning ekstremali topilsin.

314. Tekislikning turli absissali ixtiyoriy ikki nuqtasi orqali quyidagi $J[y]$ $\int$ [illegible] bitta va faqat bitta funksionalning ekstremali o'tishligi ko'rsatilsin.

Ko'rsatma. Berilgan funksional uchun Eyler tenglamasi [illegible] ko'rinishda bo'ladi. Bunga S.N.Bernshteyn teoremasini qo'llash mumkin.

315. $J[y]$ $\int_{y_0}$ [illegible] funksional uchun Eyler tenglamasi va uning birinchi integrali yozilsin. Bu holda ixtiyoriy ikki nuqtasi orqali ekstremal o'tkazish mumkin emasligi isbotlansin.

316. $J[y]$ $\int$ [illegible] funksional uchun Eyler tenglamasi $y=\cos\left[\frac{x-\beta}{\alpha}\right]$ ko'rinishga ega ekanligi isbot qilinsin, bu yerda α,β – ixtiyoriy ikki o'zgarmas, a funksiya y funksiya va x songa bog'liq.

317. $J[y(x)]$ $\int$ [illegible] funksionalning $y(0)=0$ $y(1)=2$ chegaraviy shart ostida minimumi topilsin.

318. $J[y(x)]$ $\int$ [illegible] funksionalning $y(0)=0$ chegaraviy shart ostida minimumi topilsin.

O'z-o'zini tekshirib ko'rish uchun savollar

1. Qanday to'plamlar: a) yopiq; b) ochiq; c) chegaralangan; d) kompakt to'plamlar deb ataladi. To'plamning diametri deb nimaga aytiladi?

2. Sonlar to'plamining aniq yuqori (quyi) chegarasini ta'rifini bering. Sonlar to'g'ri chizig'ining qandaydir oralig'ida aniqlangan bir o'zgaruvchili haqiqiy funksiyalar uchun $\min f(x)$ va $\inf f(x)$ orasidagi farqi nimada?

3. a) Bir o'zgaruvchili haqiqiy funksiya uchun; b) ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasini yozing.

4. Bir o'zgaruvchili haqiqiy funksiyani yuqoridan (quyidan) qavariq bo'lishligini qanday tekshiriladi?

5. a) Chiziqli fazo; b) Evklid fazosi; c) normallangan fazolarni qisqacha tushuntirib bering. Chiziqli fazo normasiga misol keltiring. R^n fazosida standart skalyar ko'paytma qanday kiritiladi?

6. Xos qiymat va xos vektorlar qanday topiladi: a) Chiziqli operatorlarning chekli chiziqli fazodagi; b) kvadrat matritsaning? Matritsaning xarakteristik tenglamasi deganda nimani tushunamiz?

7. Qanday kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan? Silvestr kriteriyasini ta'riflang.

8. Qanday ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uzluksiz bo'ladi: a) barcha o'zgaruvchilari bo'yicha uzluksiz; b) o'zgaruvchilarning qismida.

9. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumi deb nimaga aytiladi? Shartli ekstremum nuqtalar qanday topiladi? Lagranjning noma'lum ko'paytuvchilar nima?

10. Qanday shartlarda parametrga bog'liq integral differensiallanuvchi funksiya bo'ladi?

11. a) Karrali integrallar; b) egri chiziqli integrallar; c) sirt integrali deb nimaga aytiladi? a) Grin formulasini; b) ostragradskiy-Gauss formulasini; c) Stoks formulasini yozing. Qanday hollarda egri chiziqli integralning qiymati integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi?

12. n – tartibli oddiy differensial tenglama berilgan bo'lsin. a) xususiy yechimi; b) umumiy yechimi deb nimaga aytiladi? Bu tenglama uchun Koshi masalasi qanday qo'yiladi?

13. Oddiy differensial tenglamalar sistemasining birinchi integrali nima? n – tartibli oddiy differensial tenglamalarni qanday qilib 1-tartibli n ta oddiy differensial tenglamalarga aylantirish mumkin?

14. Oddiy differensial tenglamaning normal sistemasi deb nimaga aytiladi? Birjinsli chiziqli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun yechimlarning fundamental sistemasi qanday quriladi?

15. Oddiy differensial tenglamaning normal sistemasi berilgan bo'lsin. Uning a) yechimi; b) holat trayektoriyasi; c) integral egri chizig'i deb nimaga aytiladi?

16. a) Banax fazosining; b) Gilbert fazosining ta'rifini bering. Bessel va Perseval tengsizliklarini yozing.

17. Shturm-Liuvill masalasini ta'riflang. Shegaraviy shartlar funksiyalar va ularning hosilalarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida bo'lgan holda Shturm-Liuvill operatorining xos son va xos funksiyasini toping.

XIV BOB

JAVOBLAR, KO'RSATMALAR, YECHIMLAR

1. a) $(0,0)$ nuqtada $f_{min}(0,0)=0$. b) $(0,0)$ nuqtada $f_{min}(0,0)=1$. c) ekstremum yo'q. **2.** Ekstremum yo'q. **3.** $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ va $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ nuqtalarda $f_{min}=-8$; $(0,0)$ nuqtada ekstremum yo'q. **4.** $(0,0)$ nuqtada $f_{min}(0,0)=0$.; $x^2+y^2=1$ aylananing nuqtalarida qat'iy bo'lmagan maksimum o'rinli bo'ladi. **5.** $(1,-1)$ nuqtada $f_{min}=-3$. **6.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$ nuqtada $f_{min}=4$. **7.** $(1,0)$ $(1,0)$ nuqtada $f_{min}=-1$. **8.** $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$ nuqtada $f_{min}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$; $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ nuqtada $f_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **9.** $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{2}{n+n+2}$ da $f_{max}=\left(\frac{1}{n+n+2}\right)^{n+n+2}$. **11.** Yo'q. **13.** α_n va β_n sonlar $f(x)$ funksiyaning Fur'ye koeffitsientlari bo'lishi kerak. **14.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ va $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nuqtalarda $f_{min}=-\frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ va $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nuqtalarda $f_{max}=\frac{1}{2}$. **15.** $\left(\frac{18}{13};\frac{12}{13}\right)$ nuqtada $f_{max}=\frac{36}{13}$. **16.** (2,2,1), (1,2,2) va (2,1,2) nuqtalarda $f_{max}=4$; $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ va $\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$ nuqtalarda $f_{min}=4\frac{4}{27}$. **17.** $f_{max}=e^{-1}$. **18.** $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ nuqtada $f_{max}=1$; $\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ nuqtada $f_{max}=11$. **19.** $(-1,2,-2)$ nuqtada $f_{min}=-9$; $(1,-2,2)$ nuqtada $f_{min}=9$. **20.** $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ nuqtada $f_{max}=\frac{1}{8}$. **21.** Ko'rsatma: $x+y=S$ shart ostida $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ funksiyaning minimumini izlang. **22.** $e^{\frac{1}{2}}$. **23.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **24.** $\frac{19\sqrt{2}}{8}$. **25.** Tomoni $a=R\sqrt{2}$ ga teng bo'lgan kvadrat. **26.** Silindr asosining radiusi $r=\frac{R}{3}\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, balandligi $h=\frac{2}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. **27.** $\sqrt{6}$. **28.** $r=R$, $z=C_1+C_2 i$. **29.** $J[1,R]=4\ln R$. **30.** $J(1,R)=\frac{26}{5}$. **31.** $x=2x^{\frac{1}{2}}$. **32.** Birinchi. **33.** Ixtiyoriy tartibdagi yaqinlik. **34.** Ixtiyoriy tartibdagi yaqinlik. **35.** $\rho=e^{-1}$. **36.** $\rho=1$. **37.** $\rho=e-1$. **38.** $\rho_1=e-1$. **39.** $\rho_2=\frac{2\pi+3}{6}$. **40.** $\rho_{max}=e$. **41.** Uzluksiz. **42.** Uzluksiz. **43.** Uzilishga ega $(x_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ ketma-ketlik qaralsin). **44.** a) Uzilishga ega; b) Uzluksiz. **45.** a) Uzilishga ega; b) Uzluksiz. **46.** Uzluksiz. **50.** $\Delta I=\frac{1-e^{-1}}{2}$.

α	ΔI	δI	$\Delta I=\alpha+\frac{\alpha^2}{5}$
53. 1	1,2	1	
−0,1	−0,098	−0,1	$\delta I=\alpha$
0,01	0,01002	0,01	

54. $\Delta I=\frac{3(e^2-1)}{4}\alpha+6(3-e)\alpha^2+\frac{\alpha^3}{5}$, $\delta I=\frac{3(e^2-1)}{4}\alpha$

α	δI	ΔI
1	4,7919	6,6821
0,1	0,4792	0,4693
0,01	0,0479	0,0481

55. 1) Ha; 2) ha; 3) ha; 4) yo'q. **56.** $\delta J^2[y]=2J[y]-\delta J[y]$.

58. $\Delta J=3k+\frac{e}{e-1}k^2$; $\delta I=3k$.

59. $\Delta J = \frac{5}{3}k + \frac{8}{7}k^2 \Delta J = \frac{5}{7}k$;

60. $\Delta J = \frac{1}{3}k^2 \Delta J = 0$;

62. $\Delta J = \int_a^b \delta\varphi dx$. **63.** $\Delta J = 2\int_a^b (\varphi' + \varphi)\delta\varphi' dx$. **64.** $\Delta J = 2\int_0^1 \varphi\delta\varphi dx + \int_0^1 (\varphi' - \varphi)\delta\varphi' dx$

65. $\Delta J = \int_0^{\pi/2} (\varphi' \sin x\delta\varphi + \varphi\cos x\delta\varphi')dx$. **66.** $\Delta J = \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x}\delta\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi'}\delta\varphi' + \frac{\partial f}{\partial \varphi''}\delta\varphi''\right]dx$. **67.**

$\Delta^2 J[y] = \int_0^1 2[\delta y^2 + \delta y'^2]dx$. **68.** $\Delta^2 J = \int_0^{\pi/2} (\delta\varphi^2 - \varphi^2)dx$. **70.**

$\Delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'}\delta y_i' \delta y_k' dx$. **71.** $\Delta^2 J = \iint_D \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\delta z^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p}\delta z\delta p + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\delta p^2\right]dxdy$.

72. $\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{i,j=1}^{n} F_{y_i y_j}\delta y_i \delta y_j + \sum_{i,j=1}^{n} F_{y_i' y_j}\delta y_i' \delta y_j + \sum_{i,j=1}^{n} F_{y_i' y_j'}\delta y_i' \delta y_j'\right]dx$.

73. $J[\alpha + \alpha\eta] = \varphi(\alpha)$ funksionalni kiritib, variatsiyaning ikkinchi ta'rifidan foydalaning. $\delta J = 0$ talab $\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + \varphi(x) = f(x)$ integral tenglamaga olib keladi. **74.** Oldingi misolda qilingan mulohazalardan foydalanib, birinchi variatsiyani nolga aylanishini ifodalovchi Eyler funksional tenglamasi

$$\varphi(x) - \varphi(x+2) - \varphi(x-2) + \varphi(x) = f(x) = 0$$

ko'rinishga ega bo'lishini topamiz. Bu-aralash differensial ayirmali tenglama. **75.** $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. **76.** $y = c^2$ **77.** $y = \frac{x(x^2-x)}{x(1)}$. **78.** Ekstremallar ikkita $y = \frac{1-(x-2)^2}{x(x-2)+1}$. **79.** Ekstremallar ikkita $y = x(x-2)$ $y = x(2x-1)$. **80.** $y = (c^2 - x)\sin c$. bu yerda c^2 – ixtiyoriy o'zgarmas. **81.** $y = \frac{1}{2}[x - x(2+x)\ln(x+2)]$. **82.** $y = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^3$. **83.** $y = \frac{13}{6}x - \frac{1}{6}x^3 + 2$. **84.** $y = bx$. **86.** Integral integrallash yo'liga bog'liq emas; variatsion masala ma'noga ega emas. **87.** Agar $\alpha = 0$ bo'lganda, $y = 0$, $\alpha \neq 0$ da silliq ekstremal mavjud emas. **88.** $y = \cos x$. **89.** $y = \cos x + C\sin x$. bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas. **90.** $y = x + 1$. **91.** $y = \frac{x(x-1)}{x(1)}$. **92.** $y = x^{2/3}$. **93.** Ekstremallar ekstremallar yo'q. Eyler tenglamasi yechimga ega emas.

94. $y = C_1 + C_2 x - \frac{x^3}{4}$. **95.** Ekstremallar yo'q. **98.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$. **99.** $y = 2x/\pi$. **101.** $y = (1-x)x/\pi$. **102.** $y = \frac{2}{\pi}(e^x + e^{-x} - 1)$. **103.** Ekstremum yo'q.

104. Integral belgisi ostida to'la differensial qatnashganligi sababli variatsion masala ma'noga ega emas. **105.** $y(x) = x/\pi x$.

106. $y = -\frac{1}{2}x^2$. **107.** $\begin{cases} y(x) = \sin 2x \\ z(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{32+\pi}{8\pi}x \end{cases}$ **108.** $\begin{cases} y(x) = -\frac{1}{6}(x^3 + 5x - 6), \\ z(x) = x \end{cases}$

109. $\begin{cases} y(x) = \sin x \\ z(x) = \sin x. \end{cases}$ **110.** $\begin{cases} y(x) = \frac{x^2}{2} + 1, \\ z(x) = 1. \end{cases}$ **112.** $\frac{4}{\sqrt{5}}$ **113.** $\sqrt{20}$. **114.** $2\sqrt{2} - 1$.

115. $\frac{\sqrt{16}}{10}$. **118.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **119.** $\sqrt{17} + \sqrt{6}\left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}\right)$. **120.** 1. **121.** Agar $\cos x_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda ekstremumga $\begin{matrix} x = 0, \\ z = 0. \end{matrix}\Big\}$ to'g'ri chiziqda erishiladi, xolos.

k	ΔJ	δJ
1	4.582	1
0.1	0.7158	0.1
0.01	0.07016	0.01

59. $\Delta J = \frac{5}{3}k + \frac{8}{7}k^2$, $\delta J = \frac{5}{3}k$;

k	ΔJ	δJ
1	2.810	1.667
0.1	0.181	0.167
0.01	0.0168	0.0167

60. $\Delta J = \frac{4}{3}k^3$, $\delta J = 0$;

k	ΔJ	δJ
-1	0	1.3333
0.1	0	0.1280
0.01	0	0.0012

62. $\delta J = \int_a^b \delta y\,dx$. **63.** $\delta J = 2\int_a^b (y\delta y + y'\delta y')\,dx$. **64.** $\delta J = 2y(b)\,\delta y(b) + \int_a^b (6y + 2y')\delta y\,dx$

65. $\delta J = \int_a^b (y'\cos y\delta y + \sin y\delta y')\,dx$. **66.** $\delta J = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y_x}\delta y_x + \frac{\partial f}{\partial y_y}\delta y_y\right)dx\,dy$. **67.** $\delta^2 J[y, \bar{y}] = 2J[\delta y, \delta y]$. **68.** $\delta^2 y = e^{\int p\,dx}\left(\delta y' + p\,\delta y\right)$. **70.** $\delta^2 J = \int_a^b \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_j'}\delta y_i' \delta y_j'\,dx$. **71.** $\delta^2 J = \iint_D \left[F_{y^2}(\delta y)^2 + F_{y_x^2}(\delta y_x)^2 + \cdots + F_{y_n^2}(\delta y_n)^2\right]dx\,dy$.

72. $\delta^2 J = \int_a^b \left[\sum_{i,k=1}^{n} F_{y_i' y_k'}\delta y_i' \delta y_k' + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i y_k'}\delta y_i \delta y_k' + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i y_k}\delta y_i \delta y_k\right]dx$

73. $J[\alpha + \alpha\eta] = \Phi(\alpha)$ funksionalni kiritib, variatsiyaning ikkinchi ta'rifidan foydalaning. $\delta J = 0$ talab $\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt + \varphi(x) - f(x) = 0$ integral tenglamaga olib keladi. **74.** Oldingi misolda qilingan mulohazalardan foydalanib, birinchi variatsiyani nolga aylanishini ifodalovchi Eyler funksional tenglamasi

$$(p\varphi')' - \varphi(x+2) - \varphi(x-2) + \varphi(x) + f(x) = 0$$

ko'rinishga ega bo'lishini topamiz. Bu-aralash differensial ayirmali tenglama. **75.** $\varphi(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + f(x)$. **76.** $y = -x^2$. **77.** $y = \frac{sh(2-x)}{sh1}$. **78.** Ekstremallar ikkita: $y = \frac{1 + (3+2\sqrt{2})(2x-1)^2}{4(\sqrt{2}+1)}$. **79.** Ekstremallar ikkita: $y = \sqrt{(x+1)^3}$, $y = \sqrt{(3x-1)^3}$. **80.** $y = (C + x)\sin x$, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas. **81.** $y = \frac{1}{2}\left[e^{x-1} + (1+e)xe^{x-1} - 1\right]$. **82.** $y = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^3$. **83.** $y = \frac{13}{6}x - \frac{1}{6}x^3 + 2$. **84.** $y = \ln x$. **86.** Integral integrallash yo'liga bog'liq emas; variatsion masala ma'noga ega emas. **87.** Agar $\alpha = 0$ bo'lganda, $y = 0$; $\alpha \neq 0$ da silliq ekstremal mavjud emas. **88.** $y = \cos x$. **89.** $y = \cos x + C\sin x$, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas. **90.** $y = x + 1$. **91.** $y = \frac{shx}{sh1}$. **92.** $y = e^{2(1-x)}$. **93.** Ekstremallar ekstremallar yo'q; Eyler tenglamasi yechimga ega emas. **94.** $y = C_1 + C_2 x - \frac{x^2}{4}$. **95.** Ekstremallar yo'q. **98.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$. **99.** $y = 2chx$. **101.** $y = (1-x)shx$. **102.** $y = \frac{x^2}{6}(x^2 + 6x + 1)$. **103.** Ekstremum yo'q. **104.** Integral belgisi ostida to'la differensial qatnashganligi sababli variatsion masala ma'noga ega emas. **105.** $y(x) = shx$.

106. $y = \frac{1}{2}x^2$. **107.** $\begin{cases} y(x) = \sin 2x \\ z(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{32+\pi}{8\pi}x \end{cases}$. **108.** $\begin{cases} y(x) = -\frac{1}{6}(x^2 + 5x - 6) \\ z(x) = x \end{cases}$.

109. $\begin{cases} y(x) = \sin x \\ z(x) = \sin x \end{cases}$. **110.** $\begin{cases} y(x) = \frac{x^2}{2} + 1, \\ z(x) = 1 \end{cases}$ **112.** $\frac{4}{\sqrt{5}}$. **113.** $\sqrt{20}$. **114.** $2\sqrt{2} - 1$. **115.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **118.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **119.** $\sqrt{17 + 4\sqrt{6}}\left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}\right)$. **120.** 1. **121.** Agar $\cos x_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda ekstremumga $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ to'g'ri chiziqda erishiladi, xolos.

Va aksincha, agarda $\cos x_1 = 0$, ya'ni $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, bu yerda n – butun son, bo'lsa, u holda $x = C_1 \sin x$, $z = -C_1 \sin x$ bo'ladi, bu yerda C_1 – ixtiyoriy o'zgarmas son. **123.** $y = \begin{cases} -x, 0 \le x \le 1, \\ x-2, 1 < x \le 4, \end{cases}$ $y = \begin{cases} x, 0 \le x \le 3, \\ -x+6, 3 < x \le 4 \end{cases}$ Bu va boshqa siniq chiziqlarda funksional absolyut minimumga erishadi. **124.** Yo'q mavjud emas. **128.** $y(x) = C_1 ch\frac{x+C_2}{C_1}$ – ekstremallar oilasi. Ixtiyoriy C_1, C_2 o'zgarmaslar hamda λ parametr $x_1 = -\lambda sh\frac{x_1+C_2}{C_1}$, $x_2 = \lambda ch\frac{x_2+C_2}{C_1}$, $\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx = C_1\left(sh\frac{x_2+C_2}{C_1} - sh\frac{x_1+C_2}{C_1}\right)$, **129.** $y(x) = 3x^2 - 2x - 1$ **130.** $y(x) = -2\sin\pi x$ bu yerda n – butun son. **131.** $y(x) = \frac{1}{4}(3x - x^3)$ **133.** $\dot{x} = -10t^3 - 12t^2 + 6t + 2 \in abs\min, S_{min} = +\infty$ **134.** $\dot{x} = \cos t \in abs\min, S_{min} = +\infty$ **135.** $\dot{x} = (t - 2\sin t)/\pi \in abs\min, S_{min} = +\infty$ **136.** $\dot{x} = t + \sin t \in abs\max, t - \sin t \in abs\min, S_{min} = +\infty$ **137.** $\dot{x} = 2\sin t + \cos t + 1 \in abs\min, S_{min} = +\infty$

138. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y)$ **139.** $\Delta\lambda r = 0$. **140.** $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + c(x_1, \dots, x_n)z = f(x_1, \dots, x_n)$ **141.** Yechish. Masala quyidagicha qo'yiladi. xOy tekislikning D sohasidan yuqorida joylashgan, D sohaning l chegarasida o'zining proyeksiyasiga ega berilgan yopiq fazoviy egri chiziqdan o'tuvchi $z = f(x,y)$ sirtlar ichidan shunday sirtni topingki, qaysiki, $S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$ yuzasi minimal bo'lganini toping (Plato masalasi). Bu masalaga nisbatan Eyler tenglamasi

$$\frac{z_x'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} + \frac{z_y'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} = 0$$

ko'rinishda, yoki yoyilgan ko'rinishi $z_{xx}''(1+z_y'^2) - 2z_{xy}''z_x'z_y' + z_{yy}''(1+z_x'^2) = 0$ kabi bo'ladi. Bu izlanayotgan minimal sirtlarning differensial tenglamasini ifodalaydi. **142.** $z(x,y) = x$ chegaraviy shartlar butun chegarada berilmagan bo'lsada, masala yagona yechimga ega. **143.** $x\cos C_2 + y\sin C_2 = C_1 \left| x\ln\left|y\sin C_2 + \sqrt{x^2\sin^2 C_2 + 1}\right| \right.$. **145.** $x^2\cos C_2 + y^2\cos C_2 - 2xy\sin C_2 = C_1$. **146.** $y = \frac{x\sin x}{\sin x}$. **147.** $x = 2x$ **148.** $\frac{1}{e} = k$ munosa-batni qanoatlantiruvchi aylana. **149.** $\frac{dx}{dx} = \frac{x_1'}{3p^2}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{x_1'}{2p}$ **150.** $\frac{dx}{dx} = \frac{p^2}{2x}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{p^3}{4xy^2}$

151. $\frac{dx}{dx} = \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}$

152. $\frac{dx_1}{dx} = \frac{p_1}{2}$, $\frac{dp_1}{dx} = 0$, $\frac{dx_2}{dx} = \frac{p_2}{2}$, $\frac{dp_2}{dx} = 2x_2$

153. $\frac{dx_1}{dx} = \frac{p_1}{2x_2}$, $\frac{dx_2}{dx} = \frac{p_2}{2x_2}$, $\frac{dp_1}{dx} = \frac{p_1^2}{4x_2^2}$, $\frac{dp_2}{dx} = \frac{p_2^2}{4x_2^2}$

154.

$\frac{dx_1}{dx} = -\frac{p_1}{2}$, $\frac{dx_2}{dx} = -\sqrt{p_2}$, $\frac{dp_1}{dx} = 2x_1$, $\frac{dp_2}{dx} = 0$, $\frac{dx_1}{dx} = -\frac{p_1}{2}$, $\frac{dx_2}{dx} = \sqrt{p_2}$, $\frac{dp_2}{dx} = 2x_2$, $\frac{dp_2}{dx} = 0$

155. $y^2 = C_1x^2 + C_2$. **156.** $x^2 = \ln^2 x$. **157.** $x = C_1 + \int\frac{dy}{\sqrt{G^2(y) - C_1^2}}$. **158.** $y = \frac{x^2 - x - 1}{2}$ ekstremalda kuchli minimumga erishiladi: $\min J = -\frac{5}{4}$ **159.** $p(x,y) = \frac{y^2 + x}{2y}$. Ekstremallar-markazi Ox o'qida bo'lgan $y = \sqrt{C_1^2 - (x - C_2)^2}$ yarim doiralar; $x = \sqrt{2C_1x - x^2}$ $O(0,0)$ nuqtadan o'tuvchi ekstremallar; maydon-yuqori yarim tekislik. **160.** Markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan

aylananing $M(x,y)$ nuqtadan o'tuvchi yoyi kuchli minimumni beradi.

161. $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ **162.** To'g'ri chiziqlar. **163.** Ellipslar. **164.** $y=\frac{1}{2}x^2$ **165.** $y=\sin x$ **166.** $y=\sin x$ **167.** $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **169.** $x=x_0$ va $y=y_0$ to'g'ri chiziqlarning kesmasidan, yoki $x=0$, $x=1$ to'g'ri chiziqlarning kesmasidan tuzilgan siniq chiziqlar mutlaq minimumni beradi. $y=\frac{1}{2}x$ to'g'ri chiziq sust minimumni beradi. **170.** To'g'ri chiziqlarning kesmasidan tuzilgan siniq chiziqlar mutlaq minimumni beradi. Har bir siniq chiziqda funksional mutlaq minimumga erishadi. **171.** Mavjud emas. **172.** $y=\begin{cases}0, & x=0\\ x, & x\neq 0\end{cases}$. **173.** Ekstremallar- to'g'ri chiziqlardir. Agar $\left|\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right|<1$ bo'lsa, u holda koordinatali burchaklarning bissektrisalariga parallel bo'lgan ikkita tuzilishga ega bo'lgan yechimi mavjud bo'ladi. **174.** Berilgan nuqtalarni tutashtiruvchi $x=x_0$ to'g'ri chiziq $0<x_0<\pi$ bo'lganda sust minimumni, $\pi<x_0<2\pi$ da sust maksimumni beradi va h.k. Egilish burchaklarining tangensi $\frac{(2n-1)}{2}\pi$ (n– butun son) ga eng to'g'ri chiziqlarning kesmalaridan tuzilgan siniq chiziq kuchli minimumni beradi.

175. $y(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\pi}x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \sqrt{x-\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{x-\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\\ \frac{\pi x}{4}-\frac{\pi^2}{4}, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$

176. Markazi Ox o'qida bo'lgan

$$(x-a)^2+\frac{y^2}{r^2}=1 \qquad (1)$$

ekstremal-ellipslar. Joiz sohaning chegaralari $x=a$ va $y^2=2a(x-a)$ tenglamalar bilan aniqlanadi (oxirgisi $1-r^2/a^2\ge 0$ tenglamaning yechimidir). a va r parametrlar (1)-ellips berilgan A va B nuqtalardan o'tadigan qilib tanlanadi. Ellipsning yoyida funksional maksimumga erishadi. Agar A nuqtadan B nuqtagacha bo'lgan yo'lni ikkita parabolalarning yoyi bo'yicha (balki, $y=0$ to'g'ri chiziqning kesmasi bo'yicha) tanlaydigan bo'lsak, u holda funksional minimumga erishadigan uzilishli yechimga ega bo'lamiz ($\min J=0$). **177.** Markaziy maydon. **178.** a) Xos maydon; b) Markaziy maydon; c) maydon tashkil etmaydi. **179.** Xos maydon. **180.** a) Markaziy maydon; b) maydon tashkil etmaydi; c) xos maydon. **181.** a) Markaziy maydon; b) Xos maydon; c) maydon tashkil etmaydi. **182.** Bu egri chiziqlar oilasi butun D sohani qoplamaganligi uchun maydon tashkil etmaydi. **183.** $y=C$ ekstremallarning xos maydonini tashkil etadi. $y=C+x$ ekstremallarning markaziy maydonini tashkil etadi. **184.** $y=C+\cos x$ ekstremallarning xos maydonini tashkil etadi. $y=C\sin x$ ekstremallarning markaziy maydonini tashkil etadi. **185.** $y=\frac{x^3}{6}(1-x^2)$ ekstremal markazi $O(0,0)$ da bo'lgan $y=Cx+\frac{x^3}{6}$ ekstremallarning markaziy maydoniga mansub. **186.** $y=x^2$ ekstremalni $y=x^2+C$ ekstremallarning xos maydoniga kiritish mumkin. **187.** Agar $a=\pi$ bo'lsa, u holda $y=0$ ekstremalni markazi $O(0,0)$ da bo'lgan $y=C\sin x$ ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. $a\neq\pi$ da $y=C\sin x$ egri chiziqlar oilasi maydon hosil qilmaydi. **188.** $y=x+1$ ekstremal $y=x+C$ xos maydonga biriktiriladi.

189. $y=-\frac{x^2}{4}$. **190.** $x\left(\frac{x}{4}-x\right)=0$ **191.** $x^2-1=0$ **192.** $C^1(1,0)$ **193.** Qo'shma nuqta yo'q. **194.** Bajariladi. **195.** Ixtiyoriy α da bajariladi. **196.** Yakobi sharti bajariladi. $y=0$ ekstremalni ham markaziy, ham xos maydonga kiritish mumkin. **197.** Yakobi sharti bajariladi. $x=\frac{b-1}{a}x+1$ ekstremalni markazi $A(0,1)$ nuqtada bo'lgan ekstremallarning maydonga kiritish mumkin. **198.** Yakobi sharti bajarilmaydi. **201.** Ha. **202.** Ha. **203.** Ha. **204.** Ha, lekin Lagranj sharti faqat $\frac{b}{a}=1$ dagina bajariladi. **205.** $x=e^t$ funksiyada kuchli minimumga erishadi. **206.** $y=2\ln(x+1)$ funksiyada kuchli minimumga erishadi. **207.** $y=x^2$ funksiyada kuchsiz minimumga erishadi. **208.** $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqda sust minimumga erishadi. **209.** $y=\frac{\ln(x+1)}{\ln 2}$ egri chiziqda kuchli minimumga erishadi. **210.** $y=\cos x+\sin x$ egri chiziqda kuchli maksimumga erishidi. **211.** Uzluksiz egri chiziqlarda ekstremumga erishmaydi. **212.** $y=2x+1$ to'g'ri chiziqda kuchsiz minimumga erishidi. Kuchli ekstremum yo'q. **213.** $y=2x-1$ ekstremalda kuchli minimumga erishadi. **214.** $y=x^2$ ekstremalda kuchli minimumga erishiladi. **215.** $y=x-1$ ekstremalda kuchsiz minimumga erishadi. **216.** $|b|<\frac{a}{\sqrt{2}}$ da $y=\frac{b}{a}x$ ekstremalda kuchsiz minimumga. $|b|>\frac{a}{\sqrt{2}}$ da kuchsiz maksimumga erishadi. $|b|=\frac{a}{\sqrt{2}}$ da ekstremumga erishmaydi. **217.** $y=\sqrt{\left[(q^2-p^2)x+p^2\right]}$ ekstremalda $p\neq q$ bo'lganda kuchsiz minimumga erishadi; $p=q$ da $y=p$ to'g'ri chiziq ekstremal bo'lib, kuchsiz minimum beradi. **218.** a) $x>0$ da funksional

$y=sh\frac{x}{\sqrt{x}}$ $sh\frac{1}{\sqrt{x}}$ ekstremalda kuchli minimumga erishadi. b) $x<0$, $x\in(-\frac{1}{\pi},0)$ da funksional $y=sh\frac{x}{\sqrt{|x|}}/sh\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ekstremalda kuchli maksimumga erishadi. c) $x=0$ da ekstremal masalaning uzluksiz funksiyalar sinfidagi yechimi mavjud bo'ladi. Berilgan funksionalga nisbatan $x^2y''+xy=0$ Eyler tenglamasining yechimi hisoblangan $y_1(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ funksiyani ko'raylik. $y_1(x)$ funksiya $y(0)=1$ chegaraviy shartni aniq qanoatlantiradi, lekin ikkinchi chegaraviy shart $y(0)=0$ ni u qanoatlantirmaydi. Lekin $\lim_{x\to 0}y_1(x)=0$ shartni qanoatlantirmaydi. $x\to 0$ da $y_1(x)$ dan $y(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ "chegaraviy" yechimga ega bo'lamiz. **219.** $x=\frac{2\ln(1+x)}{\ln 2}$ ekstremal kuchli minimumni beradi. **220.** $y(x)=1$ ekstremalda kuchli minimumga ega bo'lamiz. **221.** $y(x)=\frac{b}{a}x$ ekstremalda $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lganda kuchsiz minimumga, $\frac{b}{a}>\frac{\sqrt{3}}{2}$ kuchsiz maksimumga erishiladi, $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ da hattoki kuchsiz ekstremumga ham erishilmaydi. **222.** $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqda $b<a$ bo'lganda kuchsiz minimumga erishiladi; $b>a$ da kuchsiz maksimumga; $b\geq a\sqrt{3}$ da kuchli maksimumga erishiladi. $b<a\sqrt{3}$ da na kuchli minimum, na kuchli maksimum mavjud bo'ladi. **223.** $y=2x, z=4x$ ekstremalda kuchsiz minimumga erishiladi. **224.** $\left.\begin{matrix}y=x,\\ z=x^2-x.\end{matrix}\right\}$ parabola ekstremal bo'lib, u markazi $(0,0,0)$ nuqtada bo'lgan

$$\begin{cases} y = \alpha, \\ z = x' + \beta x, \end{cases} \qquad (S)$$

markaziy ekstremallar maydoniga biriktiriladi. Lagranjning kuchaytirilgan shartlari so'zsiz bajariladi. $0 < x < 1$ kesmada $x = 0$ nuqtaga qovushma x' nuqtaning mavjud emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun (S) oilaning ekstremallari berilgan ekstremal bilan $x = [0,1]$ da kesishmasligini ko'rsatish yetarlidir. Haqiqatdan ham, faraz qilaylik, $x^* = [0,1]$ nuqtada (S) oilaning ikkita biron bir ekstremallari kesishsin. U holda $\begin{vmatrix} \alpha x^* - \alpha x^* \\ x^* + \beta x^* - x^* + \beta x^* \end{vmatrix}$ bu yerdan $\alpha = \alpha$ va $\beta = \beta$ ekanligidan kelib chiqadi. Demak, hech qanday ikkita o'zaro farqli kesisha olmaydi. Shunday qilib, Yakobi-ning kuchaytirilgan sharti $[0,1]$ kesmada va, umuman olganda, chekli uzunlikdagi ixtiyoriy kesmada bajariladi.

225. $\lambda_n = \frac{25 + 4n^2\pi^2}{4}$, $y_n(x) = \pm\frac{\sqrt{2}(\sin n\pi \ln x)}{\sqrt{x}}$ $(n = 1,2,\ldots)$.

226. $\lambda_n = 1 - n^2$, $y_n(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$ $(n = 1,2,\ldots)$.

227. Agar $c > 0$ bo'lsa, $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$, $z_{min} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; Agar $c < 0$ bo'lsa, $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$, $z_{max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ bo'ladi. Agar $c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, bo'lsa, ekstremum yo'q. **228.** $x = 1$, $y = 3$ da maksimum $z = e^{11} \approx 2.26 \cdot 10^4$ bo'ladi, $x = -\frac{1}{26}$, $y = -\frac{3}{26}$ da minimum $z = -26e^{-\frac{1}{26}} \approx -25.51$ egar bo'ladi.

229. $x = 1$, $y = 1$ da $z = -1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\pi \approx 1.70$ bo'ladi. **230.**

$x = \frac{1}{12}\sqrt[3]{16a^3b}$, $y = \frac{1}{4}\sqrt[3]{16a^3b}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2}{4}}$, da minimum $u = \frac{15a}{4}\sqrt[3]{\frac{a}{16b}}$, bo'ladi. **231.** $(1,1), (-1,-1) \in$ absmin.

232. $\left(\ln\left(a + \sqrt{ab}\right), \ln\left(b + \sqrt{ab}\right)\right) \in$ absmin, $S_{min} = +\infty$.

233. $((2a - b)/3, (2b - a)/3) \in$ locmin, $a + b < 0$;

$((2a - b)/3, (2b - a)/3) \in$ locmax, $a + b > 0$; $(a, -a) \neq$ locmin, $a + b = 0$;

234. $(0,0) \neq$ locextr. **235.** Statsionar nuqtalar: (x,y), bu yerda $x = (-1)^{k+1}\pi/12 + (k + m)\pi/2$, $y = (-1)^{k+1}\pi/12 + (k - m)\pi/2$, $k,m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ Agar k – juft va m – toq bo'lsa, u holda $(x,y) \in$ locmin. Agar $k + m$ - juft bo'lsa, u holda $(x,y) \in$ locextr bo'ladi.

236. $(0,2k\pi) \in$ locmin, $(-2,(2k+1)\pi) \notin$ locextr, $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$

237. $(0,0) \in$ absmin, $\{(x,y): x^2 + y^2 = 1\} \in$ locmax.

238. $\left(\pm(2e)^{-1/2}, \pm(2e)^{-1/2}\right) \in$ locmin, $S_{min} = -1/2e$,

$\left(\pm(2e)^{-1/2}, \mp(2e)^{-1/2}\right) \in$ locmax, $S_{max} = 1/2e$; $(0,\pm1) \notin$ locextr, $(\pm1,0) \notin$ locextr.

2

3

. $(\pi/3, \pi/3) \in$ locmax, $S_{max} = 3\sqrt{3}/8$.

$(1,1)$ egar nuqtasi. **240.** $(2\pi/3, 2\pi/3) \in$ locmin, $S_{min} = -3\sqrt{3}/8$. **242.** $(1,2) \in$ locmin, $S_{min} = 7 - 10\ln 2$.

241. $(\pi/3, \pi/6) \in$ locmax, $S_{max} = 3\sqrt{3}/8$.

243. $(-1/26, -3/26) \in$ locmin, $S_{min} = -26e^{-1/52}$, $(1,3) \in$ locmax, $S_{max} = e^{-10}$.

244. $(1,-2)$ – egar nuqta. **245.** $(0,0) \in$ locmin, $S_{min} = 0$; $(-1/4, -1/2)$ – egar nuqta.

246. $(0,0) \in$ locmax, $S_{max} = 1$. **247.** $(a/c, b/c) \in$ locmin, $c < 0$; $(a/c, b/c) \in$ locmax, $c > 0$, $S_{min} = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $S_{max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; Agar $c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ bo'lsa, u

holda ekstremumi yo'q. **248.** $\left(\pm a/\sqrt{3}, \pm b/\sqrt{3}\right) \in$ locmin, $\left(\pm a/\sqrt{3}, \pm b/\sqrt{3}\right) \in$ locmax, $S_{max} = -ab/3\sqrt{3}$, $S_{min} = -ab/3\sqrt{3}$.

249. $(\pm 1/2, \pm 1) \in$ locmin, $(0,0) \in$ locmax, $S_{min} = -9/8$, $S_{max} = 0$, $(0, \pm 1), (\pm 1/2, 0)$ – egar nuqta.

250. $(1,0) \in$ absmin, $S_{min} = -1$, $S_{sup} = +\infty$. **251.** $(5,2) \in$ locmin, $S_{min} = -\infty$, $S_{sup} = +\infty$.

252. $S_{min} = -\infty$, $S_{sup} = +\infty$, $(2,3) \notin$ locextr. **253.** $(-4,14) \in$ absmin, $S_{min} = +\infty$.

254. $(8,-10) \notin$ locextr, $S_{min} = -\infty$, $S_{sup} = +\infty$.

255. $(1,1) \in$ locmax, $(0,0), (0,3), (3,0) \notin$ locextr, $S_{min} = -\infty$, $S_{sup} = +\infty$.

256. $(-2/3, -1/3, 1) \in$ absmin, $S_{min} = -4/3$, $S_{sup} = +\infty$. **257.** $(2,2,1) \in$ absmin, $S_{min} = -1$.

258. $(a/7, a/7, a/7) \in$ locmax, $S_{sup} = a^3/7$. **259.** $(24,-144,-1) \in$ absmin, $S_{min} = -6913$.

260. $(1/2,1,1) \in$ absmin, $S_{min} = 4$. **261.** $(-1,-2,3) \in$ absmin, $S_{min} = -14$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Lavrentev M.A., Lyusternik L.A., Kurs variatsionnogo ischisleniya, Gostexizdat, 1950.
2. Protusevich Ya.A. Variatsionnie metodi v stroitelnoy mexanike, Gostexizdat, 1948.
3. Axiezer N.I. Leksii po variatsionnomu ischisleniyu, Gostexizdat, 1955.
4. Axiezer N.I. Variatsionnoe ischislenie, Izd-vo Xark. uni-ta, 1981.
5. Buslaev V.S. Variatsionnoe ischislenie, L.: Izd-vo LGU, 1980.
6. Alekseev V.V., Galeev E.M., Tixomirov V.M. Sbornik zadach po optimizatsii. M.: Nauka, 1984.
7. Alekseev V.V., Tixomirov V.M., Fomin S.V. Optimalnoe upravlenie.M.: Nauka, 1979.
8. Galeev E.M., Tixomirov V.M. Kratkiy kurs ekstremalnыx zadach. M.: Izd-vo MGU, 1989.
9. Blagodatskix V.I. Vvedenie v optimalnoe upravlenie. Lineynaya teoriya. M.: Visshaya shkola, 2001.
10. Vasilev F.P. Chislennie metodi resheniya ekstremalnix zadach. M.: Nauka, 1988.
11. Krasnov M.L., Obiknovennie differensialnie uravneniya. M.: Visshaya shkola, 1983.
12. Kantorovich L.V., Krilov V.I., Priblijennie metodi visshego analiza, gl. IV. Gostexizdat, 1950.
13. Krotov V.F. (red.) Osnovi teorii optimalnogo upravleniya. M.: Visshaya shko-la, 1990.
14. Nogin V.D. i dr. Osnovi teorii optimizatsii. – M.: Visshaya shkola, 1988.
15. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishenko Ye.F. Mate-maticheskaya teoriya optimalnix protsessov. – M.: Nauka, 1969.
16. Elsgols L.E. Differensialnie uravneniya i variatsionnoe ischislenie. M.: Nauka, 1969.

holda ekstremumi yo'q. **248.** $\left(\pm a/\sqrt{3}, \pm b/\sqrt{3}\right) \in$ locmin, $\left(\pm a/\sqrt{3}, \pm b/\sqrt{3}\right) \in$ locmax, $S_{max} = -ab/3\sqrt{3}$, $S_{min} = -ab/3\sqrt{3}$.

249. $(\pm 1/2, \pm 1) \in$ locmin, $(0,0) \in$ locmax, $S_{max} = 9/8$, $S_{min} = 0$.
$(0, \pm 1), (\pm 1/2, 0)$ – egar nuqta.

250. $(1,0) \in$ absmin, $S_{min} = -1$, $S_{max} = +\infty$. **251.** $(5,2) \in$ locmin, $S_{min} = -\infty$, $S_{max} = +\infty$.

252. $S_{min} = -\infty$, $S_{max} = +\infty$, $(2,3) \notin$ locextr. **253.** $(-4,14) \in$ absmin, $S_{min} = +\infty$.

254. $(8,-10) \notin$ locextr, $S_{max} = -\infty$, $S_{min} = +\infty$.

255. $(1,1) \in$ locmax, $(0,0), (0,3), (3,0) \notin$ locextr, $S_{max} = -\infty$, $S_{min} = +\infty$.

256. $(-2/3, -1/3, 1) \in$ absmin, $S_{min} = -4/3$, $S_{max} = +\infty$. **257.** $(2,2,1) \in$ absmin, $S_{min} = -1$.

258. $(a/7, a/7, a/7) \in$ locmax, $S_{max} = a^3/7$. **259.** $(24, -144, -1) \in$ absmin, $S_{min} = -6913$.

260. $(1/2, 1, 1) \in$ absmin, $S_{min} = 4$. **261.** $(-1, -2, 3) \in$ absmin, $S_{min} = -14$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Lavrentev M.A., Lyusternik L.A., Kurs variatsionnogo ischisleniya, Gostexizdat, 1950.
2. Protusevich Ya.A. Variatsionnie metodi v stroitelnoy mexanike, Gostexizdat, 1948.
3. Axiezer N.I. Leksii po variatsionnomu ischisleniyu, Gostexizdat, 1955.
4. Axiezer N.I. Variatsionnoe ischislenie, Izd-vo Xark. uni-ta, 1981.
5. Buslaev V.S. Variatsionnoe ischislenie, L.: Izd-vo LGU, 1980.
6. Alekseev V.V., Galeev E.M., Tixomirov V.M. Sbornik zadach po optimizatsii. M.: Nauka. 1984.
7. Alekseev V.V., Tixomirov V.M., Fomin S.V. Optimalnoe upravlenie.M.: Nauka. 1979.
8. Galeev E.M., Tixomirov V.M. Kratkiy kurs ekstremalnыx zadach. M.: Izd-vo MGU, 1989.
9. Blagodatskix V.I. Vvedenie v optimalnoe upravlenie. Lineynaya teoriya. M.: Visshaya shkola, 2001.
10. Vasilev F.P. Chislennie metodi resheniya ekstremalnix zadach. M.: Nauka, 1988.
11. Krasnov M.L., Obiknovennie differensialnie uravneniya. M.: Visshaya shkola, 1983.
12. Kantorovich L.V., Krilov V.I., Priblijennie metodi visshego analiza, gl. IV, Gostexizdat, 1950.
13. Krotov V.F. (red.) Osnovi teorii optimalnogo upravleniya. M.: Visshaya shko-la, 1990.
14. Nogin V.D. i dr. Osnovi teorii optimizatsii. – M.: Visshaya shkola, 1988.
15. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishenko Ye.F. Mate-maticheskaya teoriya optimalnix protsessov. – M.: Nauka, 1969.
16. Elsgols L.E. Differensialnie uravneniya i variatsionnoe ischislenie. M.: Nauka, 1969.

17. Slaf L.Ya. Variatsionnoe ischislenie i integralnie uravneniya. M.:Nauka, 1966.
18. Lyusternik L.A., Shnirelman L.G. Topologicheskie metodi v variatsionnix zadachax. M.: MGU, 1930.
19. Kartashev A.P., Rojdestvenskiy B.L. Obuknovennie differensialnie uravneniya i osnovi variatsionnogo ischisleniya (2-ye izd.). M.: Nauka, 1979.
20. Kartashev A.P., Rojdestvenskiy B.L. Matematicheskiy analiz. 1984.
21. Kudryavsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. Uchebnik. 2-tom. M.: Fizmatlit, 2005.
22. Truxaev R.L., Xomenyuk V.V. Teoriya neklassicheskix variatsionnix zadach. L.: LGU, 1971.
23. Smirnov V.I., Krilov V.I., Kantorovich L.V. Variatsionnoe ischislenie, KUBUCh, 1933.
24. Gelfand I.M., Fomin S.V. Variatsionnoe ischislenie. M.: Fizmatlit, 1961.
25. Gursa E. Kurs matematicheskogo analiza, tom 3, chast 2. Integralnie uravneniya. Variatsionnoe ischislenie. M.-L.: GTTI, 1934.
26. Bliss G.A. Leksii po variatsionnomu ischisleniyu. M.: IL, 1950.
27. Budilin A.M. Variatsionnoe ischislenie. SP.: SPGU, 2001.
28. Abovskiy N.P., Andreev N.P., Deruga A.P. Variatsionnie prinsipi teorii uprugosti i teorii obolochek. M.: Nauka, 1978.
29. Oganesyan L.A., Ruxoves L.A. Variatsionno-raznostnie metodi resheniya ellipticheskix uravneniy. Yerevan: AN ArmSSR, 1979.
30. Chernousko F.L., Banichuk N.V. Variatsionnie zadachi mexaniki i upravleniya (Chislennie metodi). M.: Nauka, 1973.
31. Polak L.S. Variatsionnie prinsipi mexaniki. M.: Knijniy dom «Librokom», 2010, 600 s.
32. Ekland I., Temam R. Vipukliy analiz i variatsionnie problemi. M.:Mir, 1979.
33. Satimov N.Yu., Tuxtasinov M., Mamadaliev N.O. Optimallashtirish usullari. O'quv qo'llanma, Universitet, Toshkent, 2006.

34. Gelfand I.M., Fomin S.V. Variatsionnoe ischislenie. Fizmatgiz, 1961.
35. Mamadaliev N., Tuxtasinov M. Variatsion hisob va optimal boshqaruvning asosiy masalalari. Toshkent. "Universitet", 2014. 189 b.
36. Ioffe A.D., Tixomirov V.M. Teoriya ekstremalnix zadach. M.: Nauka, 1974.
37. Smirnov V.I. Kurs visshey matematiki, IV t.,1-g., M.: Nauka, 1974.
38. Yang L. Leksii po variatsionnomu ischisleniyu teorii optimalnogo upravleniya, M.: Mir, 1974.
39. Galeev E.M., Tixomirov V.M. Optimizatsiya: teoriya, primeri, zadachi. M.: "Editorial URSS", 2000, 320 s.
40. Pshenichniy B.N. Neoxodimie usloviya ekstremuma. M.: Nauka, 1982.
41. Gabasov R. Kirillova F. Optimallashtirish usullari. (Tarjima: Jumaev X.N., Isroilov I.) Toshkent, Uzbekiston, 1995. 356 b.
42. Pshenichniy B.N. Vipukliy analiz i ekstremalnie zadachi. M.: Nauka, 1982.
43. Jumaev X.N., Mamadaliev N. Variatsion hisobning yetarlilik shartlari haqida. O'quv-uslubiy qo'llanma. Toshkent."Universitet". 1999. 38 b.
44. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementi teorii funksiy i funksionalnogo analiza. M.: Nauka, 1981.
45. Vukolov E.D., Yefimov A.V., Zemskov V.N., i dr. Pod.red. Yefimova A.V. Sbornik zadach po matematike dlya vtuzov. Metodi optimizatsii. Uravnenie v chastnix proizvodnix. Integralnie uravneniya. T. 4. M.: Nauka, 1990.
46. Bellman R., Dinamicheskoe programmirovaniya. M.: IL, 1960.
47. Ter-Krikorov A.M., Shabunin M. I. Kurs matematicheskogo analiza. M.: Fizmatlit, 2001. 672 s.
48. Bellman R., Gliksberg N., Gross O. Nekotorie voprosi matematicheskoy teorii protsessov upravleniya. M.: IL, 1962.
49. Moklyachuk M.P. Variatsionnoe ischislenie. Ekstremalnie zadachi. M.: Ijevsk, 2006. 216 s.

50. Boltyanskiy V.G. Matematicheskie metodi optimalnogo upravleniya. M.: Nauka, 1969.
51. Lansosh L.S. Variatsionnie prinsipi mexaniki. M.: Nauka, 1959. 600 s.
52. Mixlin S.G. Variatsionnie metodi v matematicheskoy fizike. M.: Nauka, 1970, 512 s.
53. Gyunter N.M. Kurs variatsionnogo ischisleniya. Gostexizdat, 1941.
54. Ponomarenko A.I., Moklyachuk M.P. Zadachi i uprajneniya po kursu "Metodi optimizatsii". K.: KGU, 34 s.
55. Elsgols L.E. Differensialnie uravneniya i variatsionnoe ischislenie. M.: Nauka, 1965. 424 s.
56. Vanko V. I., Yermoshina O. V., Kuvшrkin G. N. Variatsionnoe ischislenie i optimalnoe upravlenie. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, 1999.
57. Vasilev V. V. Trinadsat leksiy po osnovam variatsionnogo ischisleniya. Irkutsk: Izd-vo Irkutskogo un-ta, 1989.
58. Vasilev O. V., Arguchinsev A. V. Metodi optimizatsii v zadachax i uprajne-niyax. – M.: Fizmatlit, 1999.
59. Zelikin M. I. Optimalnoe upravlenie i variatsionnoe ischislenie. – M.: Izd-vo MGU, 1985.
60. Kosha A. Variatsionnoe ischislenie. – M.: Vыsshaya shkola, 1983.
61. Krasnov M.L., Makarenko G. I., Kiselev A. I. Variatsionnoe ischislenie. M.: Nauka, 1973.
62. Lavrentev M. Lyusternik L. Osnovi variatsionnogo ischisleniya. Tom 1. Chast 1. Funksii mnogix peremennix. M.-L.: ONTI, 1935.
63. Panteleev A. V. Variatsionnoe ischislenie v primerax i zadachax. M.: Visshaya shkola, 2006.
64. Elsgols L. E. Variatsionnoe ischislenie. M.: KomKniga, 2006.
65. Mixlin S.G. Pryamie metodi v matematicheskoy fizike. Gostexizdat, 1950.
66. Leybenzon L.S. Variatsionnie metodi resheniya zadach teorii uprugosti. Gostexizdat, 1 943.

Izohli lug'at (Glossariy so'zlari)

Variatsion hisob - maqsad funksiya integral ko'rinishda berilgan funksionalni ekstremumini topish masalasi.

Variatsion masala- Funksionallarning maksimumini yoki minimumini tadqiq qilish talab qilingan masalalar.

Braxistoxrona masalasi- 1696 yili mashhur matematik Iogan Bernulli tomonidan qo'yilgan brahistoxrona haqidagi masala yoki tez tushish chizig'i masalasi.

Izoperimetrik masala- berilgan l uzunlikdagi eng katta s maydonini chegaralovchi yopiq chiziqni topish masalasi.

Geodezik chiziq- sirtda yotuvchi ikki nuqtani tutashtiruvchi eng qisqa uzunlikka ega chiziq.

Integrant-integralli funksionalning integrali ostidagi funksiya integrant deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalasi-maqsad funksiya va joiz rejalar sohasi o'zgaruv-chilarga nisbatan chiziqli funksiyalar bilan aniqlangan masala.

Chiziqli dasturlash masalasining standart shaklio'zgaruvchilar manfiymas shart ostida chegaralari katta yoki teng bo'lgan holda maqsad funksiyaning ekstremumini topish masalasi.

Chiziqli dasturlashning yechimi mavjud bo'lishligi haqidagi teorema- chiziqli dasturlash masalasi yechimga ega bo'lishligi uchun maqsad funksiya joiz rejalar to'plamida chegaralangan bo'lishligi zarur va yetarli.

Chiziqli dasturlashning ikkilamchi masalasi-boshlang'ich masalani ma'lum qoidalar asosida chiziqli dasturlashning masalasiga keltirish.

Chiziqli dasturlash masalasini kannonik shakli-o'zgaruvchilari manfiymas, chegaralari tenglik ko'rinishda berilgan chiziqli dasturlash masalasi.

Golonom, differensialli bog'lanishli masala- bog'lanish shartida hosila ishtirok etgan masala.

Golonom bo'lmagan bog'lanishli masala- bog'lanish shartida hosila ishtirok etmagan masala.

Integral bog'lanishli (izoperimetrik) masala- izoperimetrik sharti integral orqali ifodalangan masala.

Funksionalning ekstremumi- funksionalni biror ekstremal ustida maksimum yoki minimumga erishishi.

MUNDARIJA

I BOB. EKSTREMAL MASALALAR NAZARIYASINING ASOSIY ELEMENTLARI

1-§. Funksional analiz, differenial hisob va qavariq analiz elemenlari 8

1.1. Geometriya va funksional analizning ayrim teoremalari. 12

1.2. Yo'nalish bo'yicha hosila. Lagranj bo'yicha variatsiya va Gato hosilasi.....16

2-§. Normallangan fazolarda differensial hisobning asosiy teoremalari.....21

3-§. Qavariq analiz elementlari.....35

II BOB. OSHKORMAS FUNKSIYALAR. AKSLANTIRISHLAR

1-§. Bitta tenglamadan aniqlangan oshkormas funksiyalar.....50

2-§. Tenglamalar sistemasidan aniqlangan oshkormas funksiyalar....59

3-§. Akslantirishlar. Vektorli va chiziqli akslantirishlar.....70

4-§. Differensiallanuvchi akslantirishlar.....87

III BOB. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

1-§. Metrik fazo. Metrik fazoda nuqtalar ketma-ketligining yaqinlashishi..... 100

1.1. Metrik fazoda kompaktlilik. R^n fazoda to'g'ri chiziqlar, nurlar va kesmalar.....112

2-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning limiti.....116

2.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi. Murakkab funksiyaning nuqtada uzluksizligi.....124

3-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi.. 132

3.1. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchi bo'lishligining zaruriy va yetarli shartlari.....137

3.2. Murakkab funksiyaning differensiallanuvchanligi. Birinchi differrensial formaning invariantligi.....141

4-§. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar.....151

IV BOB. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING EKSTREMUMI

1-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasi.....167
2-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning shartsiz ekstremumi. 172
3-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumi.....198
3.1. Shartli ekstremum nuqtalarni topish uchun Lagranjning noma'lum ko'paytuvchilar usuli.....204

V BOB. VARIATSION HISOBNING UMUMIY TUSHUNCHALARI VA USULLARI

1-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumidan variatsion masalalarga o'tish.....232
1.1. Variatsion masalalarga olib keluvchi muammolar.....242
1.2. Variatsion hisob masalalariga ayrim izohlar.....269
2-§. Funksional. Umumiy tushunchalar 272
3-§. Egri chiziqlar orasidagi masofa va ularning yaqinlilik tartiblari 283
4-§. Funksionalning birinchi va ikkinchi variatsiyasi. Funksional ekstremumining zaruriy sharti.....295
5-§. Variatsion hisobning asosiy lemmasi va uning umumlashmalari. 330

VI BOB. EYLER TENGLAMASI VA UNING UMUMLASHMALARI

1-§. Variatsion hisobning asosiy masalasi va uning umumlashmalari.....341
2-§. Eyler tenglamasi va uning integrallari.....349
3-§. m ta funksiyaga bog'liq bo'lgan funksionallar.....392
4-§. Yuqori tartibli hosilaga bog'liq bo'lgan funksionallar.....399

VII BOB. QO'ZG'ALUVCHAN CHEGARALI VARIATSION HISOB MASALALARI

1-§. Oxirlari qo'zg'aluvchan variatsion masala.....412
2-§. Qo'zg'aluvchan chegarali variatsion masala.....417
2.1. Ikki o'zgaruvchiga bo'liq bo'lgan funksional uchun qo'zg'aluvchan chegarali masala.....430
3-§. Burchak nuqtali ekstremallar. Ekstremallarning aks etishi va sinishi haqidagi masalalar.....438

VIII BOB. VARIATSION HISOBNING SHARTLI EKSTREMUM MASALALARI.....450
1-§. Izoperimetrik masala.....453
2-§. Lagranj masalasi.....476
2.1. $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ ko'rinishdagi bog'lanishli (golonom) bo'lgan hol.....476
2.2. $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0$ ko'rinishdagi bog'lanishli (golonom bo'lmagan) bo'lgan hol..... .494
3-§. Bolsa masalasi. 499
3.1. Bolsa masalasining ayrim turlari. Bolsaning 1-masalasi.....507
4-§. Mayer masalasi..... ..513

IX BOB. KARRALI INTEGRALLAR UCHUN VARIATSION HISOB MASALALARI

1-§. Ikki karrali integralning ekstremali..... .523
1.1. Ikki karrali integral uchun ikkinchi zaruriy shart (Lejandr shartining analogi).....528
2-§. Uch karrali integralning ekstremali.....533
2.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya bo'lgan hol.....536

X BOB. EYLER TENGLAMASINING KANONIK FORMASI

1-§. Eyler va Ostrogradskiy tenglamalarining invariantligi.....545
2-§. Parametrik ko'rinishdagi variatsion masalalar.....551
3-§. Kanonik tenglamasining kanonik (gamiltonian) formasi. 555
4-§. Gamilton-Yakobi tenglamasi.....560

XI BOB. UZILISHGA EGA BO'LGAN VARIATSION HISOB MASALALARI

1-§. Uzilishli masalalar..... .582
1.1. Birinchi va ikkinchi tur uzilishga ega bo'lgan variatsion masalalar 582
1.2. Bir necha funksiyaga bog'liq funksional uchun uzilishli masala.....591
2-§. Asosiy masala integralining invariantligi va Eyler tenglamasining birinchi integrallari orasidagi bog'liqlik.....594
3-§. Eyler tenglamasini integrallashning Yakobi usuli.....611

3.1. Geodezik ellips va J – giperbola. 611
3.2. Liuvillning geodezik tenglamani integrallash holi..... 636

XII BOB. EKTREMUMNING YETARLI SHARTLARI

1-§. Ekstremallar maydoni nazariyasidan ayrim ma'lumotlar..... 629
2-§. Gilbertning invariant integrali..... 647
2.1. Ikki nuqta orasidagi geodezik masofani Gilbertning invariant integrali orqali ifodalash..... 651
3-§. Kuchsiz ekstremum..... 655
4-§. Veyershtrass funksiyasi..... 673
5-§. S funksiya va uning differensiali..... 710

XIII BOB. MEXANIKANING VARIATSION PRINSIPLARI

1-§. Mopertyui – Eyler prinsipi. 722
1.1. Mexanika va optika orasidagi o'xshashlik. 724
2-§. Berilgan yo'nalish nuqtasida variatsiya. Gamilton prinsipi..... 734
3-§. Eng kam harakat prinsipi. 740
4-§. Potensial va kinetik energiya 745
5-§. Rele prinsipi..... 752

XIV BOB. JAVOBLAR, KO'RSATMALAR, YECHIMLAR ... 772

Foydalanilgan adabiyotlar 785
Izohli lug'at (Glossariy so'zlari) 789

NUMANJON MAMADALIYEV

VARIATSION HISOB VA OPTIMALLASHTIRISH USULLARI

I-QISM

DARSLIK

Muharrir Z.N.Buranov

Bosishga ruxsat etildi 13.04.2024y. Bichimi 60X84 1/16.
Bosma tabog'i 49,75. Shartli bosma tabog'i 49,75. Adadi 50 nusxa.
Buyurtma №77. Bahosi kelishilgan narxda.
"Ma'rifat" nashriyoti. Toshkent. Salorho'yi kochasi, 35A.
O'zbekiston Milliy universiteti bosmaxonasida bosildi.
Toshkent, Talabalar shaharchasi, O'zMU.

ISBN 978-9910-7655-9-9

ISBN 978-9910-7655-9-9

ISBN 978-9910-7655-9-9