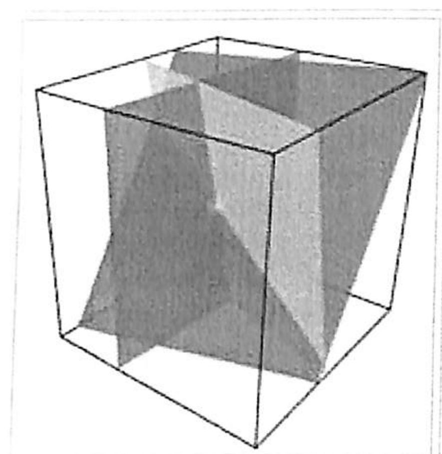
А.А.ДАВЛАТБЕКОВ,
М.Р.СОБИРОВА

АСОСҲОИ АЛГЕБРАИ ХАТТӢ

А.А.ДАВЛАТБЕКОВ,
М.Р.СОБИРОВА

АСОСҲОИ АЛГЕБРАИ ХАТТӢ

(Ќисми 1)



ТОШКЕНТ – 2025

УЎК 512.64(075.8)
Д 14
КБК 22.143я73
Д 14
Асосҳои алгебраи хаттӣ [Матн] китоби дарси / – Т., “Poytaxt exculisive” нашриёти, 2025. – 144 б.

Муќарризон:

Хайруллоев.Ш. – д.и.ф.м-профессори институти математика ба номи А. Ҷураев Академияи илмҳои миллии Тоҷикистон.

Орипов Т.С. – н.и.ф.м-муаллими калони кафедраи математикаи олӣ Донишгоҳи соҳибкорӣ ва педагогии Денав.

Васоити таълимии мазкур мувофиќи барномаи фанни алгебра ва назарияи ададҳо барои донишҷӯён ва омӯзгорони факултетҳои математика ва физикаи донишгоҳҳо ва колеҷи омӯзгорӣ, ки фанни мазкурро меомӯзонанд ва инчунин шахсоне, ки хоҳиши худомӯзӣ доранд, омода гардидааст.

ISBN: 978-9910-8463-4-2

М У Н Д А Р И Ҷ А

ПЕШГУФТОР

Алгебраи хаттӣ як қисми алгебра буда, ба омӯзиши табдилдиҳии хаттӣ дар фазоҳои хаттии ченакашон охирнок бахшида шудааст. Пайдоиши алгебраи хаттӣ бо ҳал кардани системаи муодилаҳои хаттӣ алоқаманд мебошад.

Масалан барои ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ дар мавриди бо ҳам баробар будани шумораи муодилаҳо ва номаълумҳо мафҳуми муайянкунандаҳо истифода мешавад (нигаред ба қоидаи Крамер).

Дар ҳолати умумӣ, яъне дар мавриди бо ҳам баробар набудани шумораи муодилаҳо ва номаълумҳо дар системаи муодилаҳои хаттӣ, мафҳуми муайянкунандаҳо ба кор намеояд. Вале маҳз ҳамин ҳолати системаи муодилаҳои хаттӣ дар амалия бештар дучор мешаванд ва татбиқи бешумор доранд. Барои ҳалли ин намуди системаи муодилаҳои хаттӣ аз назарияи матрисаҳо истифода мебаранд. Ин назария берун аз доираи масъалаҳои алгебраи хаттӣ низ татбиқи васеи худро дорад.

Бисёр ғояҳои алгебраи хаттӣ барои исботи тасдиқотҳои бунёдии дигар шохаҳои математика низ истифода мешаванд. Масалан, барои исботи теоремаҳои бунёдии таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ, ба монанди теорема дар бораи мавҷудияти функсияи ноошкор, теорема дар бораи устувории ҳалли системаи автономии муодилаҳои дифференсиалӣ татбиқ карда мешаванд.

Алгебраи хаттӣ дар бисёр масъалаҳои муҳими амалӣ низ татбиқи бешумор дорад. Моделҳои хаттӣ, ки асоси бисёр тадқиқотҳои иқтисодӣ мебошанд, бо системаҳои муодилаҳои хаттӣ алоқаманданд (Модели Леонтьев). Яке аз усулҳои барномасозии хаттӣ, ки бо номи симплекс метод машҳур аст, мисоли равшани татбиқи алгебраи хаттӣ дар ҳалли масъалаҳои амалӣ мебошад.

Мавзӯи омӯзиши алгебраи хаттӣ бо гуфтаҳои боло маҳдуд нашуда, дар бисёр самтҳои дигар, ба монанди таҳлили тензорӣ, таҳлили функсионалӣ ва ғайраҳо васеъ карда мешаванд.

Китоби мазкур дар асоси барномаи курси алгебра ва назарияи ададҳо тартиб дода шудааст

БОБИ 1. ЭЛЕМЕНТҲОИ НАЗАРИЯИ МАҶУҲҲО

1.1.Мафҳуми маҷму ва амалҳо бо маҷмуҳо

Мафҳуми маҷмӯъ. Мафҳуми маҷмӯъ яке аз мафҳумҳои асосӣ дар математика ба шумор рафта таърифи аниқи он муайян карда намешавад. Умуман маҷмӯъ гуфта, ҷамъбасти чизҳо, ҳодисаҳо ё объектҳоеро мефаҳмем, ки онҳо аз рӯи ягон аломат ё хосияташон якҷоя карда шудаанд. Маҷмӯъҳо дорои элементҳо мебошанд, ки табиати ин элементҳо метавонад гуногун бошад. Масалан, маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ, маҷмӯи китобҳои дар раф истода, маҷмӯи дарахтони канори роҳ ва ғайра. Маҷмӯъҳоро бо ҳарфҳои калони алифбои лотинӣ $A, B, \dots, X, Y, \dots$ ва элементҳои ин маҷмӯъҳоро бо ҳарфҳои хурди ин алифбо $a, b, \dots, x, y, \dots$ ишорат мекунанд. Агар ягон элементи a ба маҷмӯи A тааллуқ дошта бошад, он гоҳ онро чунин менависанд $a \in A$. Навишти $a \notin A$ чунин маъно дорад, ки элементи a ба маҷмӯи A тааллуқ надорад.

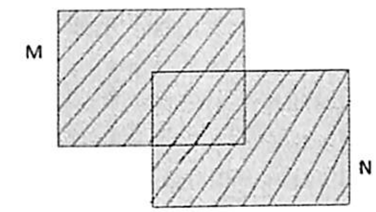
Агар маҷмӯъҳои A ва B аз ҳамон як элементҳо иборат бошанд, пас онҳоро маҷмӯъҳои баробар меноманд ва чунин менависанд $A = B$. Агар ҳар як элементи маҷмӯи A дар навбати худ элементи маҷмӯи B бошад пас A - ро қисм ё зермаҷмӯи маҷмӯи B меноманд ва чунин менависанд $A \subset B$. Дар ҳолати акс чунин менависанд $A \not\subset B$.

Маҷмӯе, ки ягон элемент надорад, маҷмӯи холӣ номида мешавад ва бо рамзи Ø ишорат карда мешавад.

Амалҳо бо маҷмӯъҳо. Бо маҷмӯъҳо амалҳои ҷамъ, бурриш, фарқ ва фарқи симметриро иҷро мекунанд.

Ҷамъи маҷмӯъҳо. Ҷамъи маҷмӯъҳои A ва B гуфта маҷмӯи $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ё } x \in B\}$-ро меноманд.

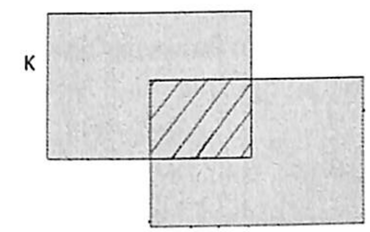
Масалан, ҷамъи маҷмӯъҳои $A = \{3,4,5\}$ ва $B = \{4,5,6,7\}$ маҷмӯи $A \cup B = \{3,4,5,6,7\}$ мебошад. Ҷамъи маҷмӯъҳои M ва N маҷмӯи хаткашидашуда (расми 1) мебошад.



Расми 1

<u>Бурриши маҷмӯъҳо.</u> Бурриши маҷмӯъҳои A ва B гуфта маҷмӯи $A \cap B = \{x : x \in A \text{ ва } x \in B\}$ - ро меноманд. Масалан, бурриши маҷмӯъҳои $A = \{1,2,3,4,5\}$ ва $B = \{3,4,5,6\}$ маҷмӯи $A \cap B = \{3,4,5\}$ мебошад.

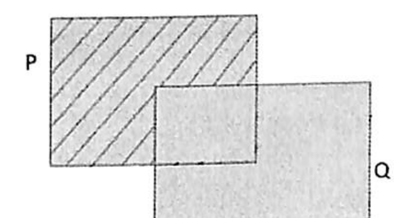
Бурриши маҷмӯъҳои K ва L маҷмӯи хаткашидашуда (расми 2) мебошад.



Расми 2

<u>Фарқи маҷмӯъҳо.</u> Фарқи маҷмӯъҳои A ва B гуфта, маҷмӯи $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$ -ро меноманд.

Масалан, фарқи маҷмӯъҳои $A = \{1,2,3,4\}$ ва $B = \{4,5,6\}$ маҷмӯи $A \setminus B = \{1,2,3\}$ мебошад. Фарқи маҷмӯъҳои P ва Q маҷмӯи хаткашидашуда (расми 3) мебошад.

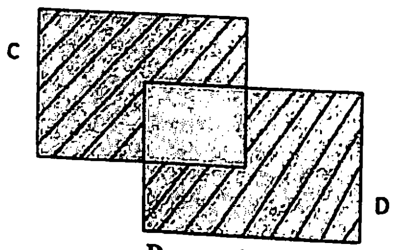


Расми 3

Фарќи симметрӣ. Фарќи симметрии маҷмӯъҳои A ва B гуфта, маҷмӯи $A\Delta B=\{x: x\in A\setminus B \text{ ё } x\in B\setminus A\}$-ро меноманд.

Масалан, фарќи симметрии маҷмӯъҳои $A=\{1,2,3,4\}$ ва $B=\{3,4,5,6\}$ маҷмӯи $A\Delta B=\{1,2,5,6\}$ мебошад.

Фарќи симметрии маҷмӯъҳои C ва $Д$ маҷмӯи хаткашидашуда (расми 4) мебошад.



Расми 4

Баъзе хосиятҳои амалҳо бо маҷмуҳора номбар менамоем:

1. $A\cup B=B\cup A$;
2. $A\cap B=B\cap A$;
3. $A\cup \varnothing=A$;
4. $A\cap \varnothing=\varnothing$;
5. $A\cup A=A$;
6. $A\cap A=A$;
7. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;
8. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;
9. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$;
10. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;
11. $A\setminus(B\cup C)=A\setminus B\cap A\setminus C$;
12. $A\setminus(B\cap C)=A\setminus B\cup A\setminus C$;

Масалан, баробарии охирин додашуда (12) – ро исбот менамоем. Бигузор x элементи дилхоҳи махмеи $A\setminus(B\cap C)$ бошад, он гоҳ:

$$x\in A\setminus(B\cap C)\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\notin B\cap A\end{cases}\Rightarrow(x\notin B)\vee(x\notin C)\Rightarrow x\in(A\setminus B\cup A\setminus C).$$

Бо ҳамин муќаррар намудем, ки ҳар як элементи махмеи $A\setminus(B\cap C)$ низ элементи махмеи $A\setminus B\cup A\setminus C$ мебошад. Ин нишон медиҳад, ки

$$A\setminus(B\cap C)\subseteq A\setminus B\cup A\setminus C. \qquad (*)$$

Акнун бигузор y элементи дилхоҳи махмеи $A\setminus B\cup A\setminus C$ бошад, он гоҳ:

$$y\in(A\setminus B\cup A\setminus C)\Rightarrow(y\in A\setminus B)\vee(y\in A\setminus C)\Leftrightarrow[(y\in A)\&(y\notin B)]\vee$$
$$\vee[(y\in A)\&(y\notin C)]\Rightarrow(y\in A)\&(y\notin B\cap C)\Rightarrow y\in A\setminus(B\cap C).$$

Яъне:

$$(A\setminus B\cup A\setminus C)\subseteq A\setminus(B\cap C). \qquad (**)$$

Тибќи таносубҳои (*) ва (**) бармеояд, ки

$$A\setminus(B\cap C)=A\setminus B\cup A\setminus C.$$

Мисоли 1.1.1. Барои ин маҷмӯъҳо зермаҷмӯъҳои хос ва ѓайрихосро нишон диҳед.

а) $A=\{x|-1<x\leq 2,\ x\in Z\}$.

б) $B=\{x|\ (1;4],\ x\in N\}$.

Ҳал. а) Зермаҷмӯъҳои хос: $\varnothing$, $\{0,1\},\{0,2\}$, $\{1,2\},\{0\},\{1\},\{2\}$. Зермаҷмӯи ѓайрихос $\{0,1,2\}$ мебошад.

Ҳал. б) Зермаҷмӯҳои хос $\varnothing$, $\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ ва зермаҷмӯи ѓайрихос $\{2,3,4\}$ мебошад. ∇

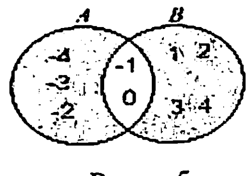
Мисоли 1.1.2. Агар $A=\{-4,-3,-2,-1,0\}$ ва $B=\{x|-2<x\leq 4,\ x\in Z\}$ бошад, пас $n(A\cup B)$ - ро муайян намуда натиҷаҳоро ба воситаи диаграммаҳо тасвир намоед.

Ҳал. Элементҳои маҷмӯи B - ро муайян мекунем $B=\{-1,0,1,2,3,4\}$. Аз рӯи таърифи суммаи ду маҷмӯъҳо меёбем $A\cup B=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.Барои муайян намудани миќдори элементҳои суммаи ин ду маҷмӯъ формулаи зерин ҷой дорад $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

Аз ин ҷо меёбем

$$n(A)=5,\quad n(B)=6\ \ n(A\cup B)=5+6-2=9.$$

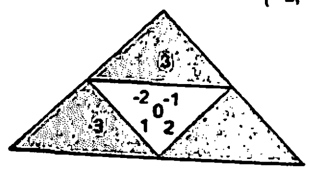
Ин натиҷаҳоро ба воситаи диаграммаҳо тасвир мекунем (Расми 5).



Расми 5

Мисоли 1.1.3. Агар $A=\{x|-3<x<3,\ x\in Z\}$ ва $B=\{x|x^2\le 9,\ x\in Z\}$ бошад, $A\cap B$ - ро ёбед. Натиҷаро тасвир намоед.

Ҳал. Дода шуда аст $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳамаи элементҳои маҷмӯи A ба маҷмӯи B тааллуқ доранд, яъне $A\subset B$ мебошад. Аз ин ҷо $A\cap B=\{-2,-1,0,1,2\}=A$ (Расми 6)



Расми 6

Мисоли 1.2.4. Баробариро исбот кунед. $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A.$
Ҳал.

$$A\cup(A\cap B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)=A\cap(A\cup B).$$

Акнун нишон медиҳем, ки

аст: $$A\cap(A\cup B)=A, \qquad (*)$$

$$x\in A\cap(A\cup B)\Rightarrow x\in A \text{ ва } x\in A\cup B\Rightarrow A\cap(A\cup B)\subset A. \qquad (**)$$

Агар $x\in A$ бошад, пас $x\in A\cup B$ мешавад ва ин чунин маъно дорад, ки

яъне $$x\in A\cap(A\cup B),$$

$$A\subset A\cap(A\cup B) \qquad (***)$$

Аз (**) ва (***) баробарии (*) мебарояд.

Мисоли 1.2.5. Агар $n(A\backslash B)=5x+2$, $n(B\backslash A)=x+14$, $n(A\cup B)=40$ ва $n(A\backslash B)=n(B\backslash A)$ бошад, пас миқдори суммаи зермаҷмӯъҳо ва зермаҷмӯъҳои хоси маҷмӯи $(A\cap B)$ - ро ёбед.

∇ Аз $n(A\backslash B)=n(B\backslash A)$ меёбем

аз ин ҷо $$5x+2=x+14\Rightarrow 4x=12\Rightarrow x=3,$$

$$n(A\backslash B)=5x+2=5\cdot 3+2=17,\ n(B\backslash A)=x+14=3+14=17,$$
$$n(A\cup B)=n(A\backslash B)+n(B\backslash A)+n(A\cap B)\Rightarrow\Rightarrow 40=17+17+y\Rightarrow y=40-34=6,\ y=6,$$

аз ин ҷо $n(A\cap B)=6$, яъне ин маҷмӯъ 2^6 зермаҷмӯъ ва 2^6-1-зермаҷмӯи хос дорад. Ҳамин тавр

$$2^6+2^6-1=2\cdot 2^6-1=2^7-1=128-1=127.\ \nabla$$

1.2. Зарби декартии маҷмӯҳо

Дар мисолҳои оид ба маҷмӯъҳо гирифташуда ҳангоми иҷрои амалҳо бо зермаҷмӯъҳо **тарзи табиӣ** (нисбӣ) – и **муқоисаи элементҳоро** ба назар гирифтем, ки як зермаҷмӯъ аз дигараш калон ва ё хурд аст. Ингуна муқоисакуниҳо нахустин бор вақти омӯхтани ададҳо низ истифода бурда мешаванд. Ду адади бутун, ратсионалӣ ва ҳақиқӣ (бидуни ададҳои комплексӣ) чи тавре интихоб нашаванд, ҳамеша тасдиқ карда метавонем, ки кадоме аз онҳо хурд, калон ва ё ин ки баробаранд.

Мафҳуми хурд ва баробар амал набуда мавҷудияти алоқаманди (ва ё набудани он) – ро байни элементҳои маҷмӯъ муайян мекунад.

Ингуна алоқамандӣ муносибат ном дорад.

Маҷмӯъҳое, ки элементҳояшон дорои ҳамингуна хосиятанд, маҷмӯъҳои батартибовардашуда ном доранд.

Фарз мекунем, ки маҷмӯи $A=\{a,b\}$ дода шудааст. Элементи a координата (компонент-лот. componens – қисм) – и тарафи чап ва b-координатаи тарафи рости ҷуфти батартибовардашуда мебошад.

Таърифи 1.2.1. Ҳосили зарби роста (ё ки декарти)-и маҷмӯъҳои А ва В гуфта маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои батартибовардашудаи $(a,\ b)$-ро меноманд, ки $a\in A, b\in B$ ва онро интавр менависанд:
$$A\times B \overset{\text{def}}{=} \{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$$

Агар $A=B$ бошад $A\times A=A^2$ – квадрати декартӣ ном гирифтааст.

Аз рӯи таъриф $A^0=\{\emptyset\}$ қабул мекунем.

Ҳамин тавр, барои се маҷмӯъ навишта метавонем:
$$A\times B\times C \overset{\text{def}}{=} \{(a,b,c)|a\in A, b\in B\wedge c\in C\}$$

Азбаски $(a,b,c)\overset{\text{def}}{=}((a,b),c)$ аст, бинобар ин
$$A\times B\times C=(A\times B)\times C$$

Мисоли 1.2.1. Дода шудааст: $A=\{1,2\}$; $B=\{0,1,3\}$.

Меёбем: $A\times B=\{(1,0),(1,1),(1,3),(2,0),(2,1),(2,3)\}$;
$B\times A=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(3,1),(3,2)\}$.

Чӣ тавре дида мешавад, ҳосили зарби декартӣ ғайрикоммутативӣ мебошад:

$$A \times B \neq B \times A$$

Квадрати декартӣ:

$$A \times A = A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Натиҷаи 1.2.1. Агар маҷмӯи А дорои *к* элемент ва В дорои *n* элемент бошад, миқдори элементҳои

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = kn$$

аст.

Дар мисоли боло $|A| = 2$ ва $|B| = 3$ элемент мебошанд.
Дар ҳосили зарби декартӣ

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$$

ҷуфти элементҳо дохил аст.

Мисоли 1.2.2. Барои маҷмӯъҳои $A_1 = \{ 1, 2, 3 \}$ $A_2 = \{$ m, n, p $\}$, $A_3 = \{ \alpha, \beta \}$, ки элементҳои умумӣ надоранд.

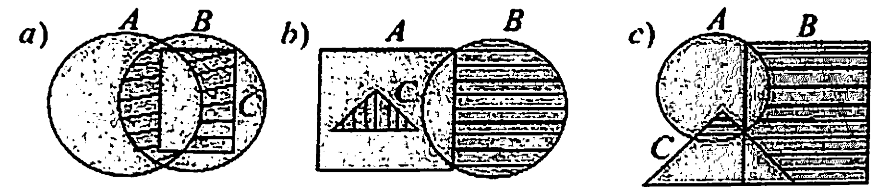
$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{ (1, m, \alpha), (1, m, \beta), (1, n, \alpha), (1, n, \beta), (1, p, \alpha), (1, p, \beta), (2, m, \alpha),(2, m, \beta), (2, n, \alpha), (2, n, \beta), (2, p, \alpha), (2, p, \beta), (3, m, \alpha), (3, m, \beta), (3, n, \alpha), (3, n, \beta),(3, p, \alpha), (3, p, \beta),\}$ мешавад ва миқдори дастаи элементҳои ин маҷмӯъ ба $3 \cdot 3 \cdot 2 =$ 18 баробар аст.

Мисоли 1.2.3. Исбот намоед, ки барои дилхоҳ маҷмӯъҳои *A, B, C* баробарии зерин ҷой дорад.

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

Ҳал. $(A \cup B) \times C = \{ \forall (x, y), x \in A \cup B \wedge y \in C \} = \{ \forall (x, y), (x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in C \} = \{ \forall (x, y), (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \} = = \{ \forall (x, y), (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C)\} = \{ \forall (x, y), (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)\} = (A \times C) \cup (B \times C).$

Мисоли 1.2.4. Маҷмӯеро нависед, ки қисми хатчадори диаграммаҳои дар расми 7 тасвир ёфтаро ифода намояд.



Расми 7.

Ҳал.а) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \cup (C \setminus A)$ ё $A \cap (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$. **b)** $(B \setminus A) \cup C$.
c) $(A \cap C) \cup (B \setminus A) \setminus B \cap C$.

1.3.Муносибати бинарӣ ва эквивалентӣ

Дар математика ва соҳаҳои дигари илм лозим меояд, ки муносибати муайян байни ду объект дида баромада шавад. Онҳо бо суханони баробар (=), хурд ё баробар (≤), тақсим мешавад (⋮), параллеланд (||), монанданд (~), перпендикуляранд (⊥) ва ғайра ифода меёбанд. Ингуна муносибтҳоро **муносибати бинарӣ** меноманд.

Ҳаргуна муносибати бинарии байни объектҳои *a* ва *b*-ро ҳамчун ҷуфти батартибовардашудаи (*a, b*) дида баромадан мумкин аст. Бо суханони дигар ҳаргуна зермаҷмӯи маҷмӯи $A \times B$ муносибати бинариро ташкил медиҳанд. Муносибати бинарии элементҳои *a* ва *b*-ро кӯтоҳ ин тавр менависанд:

$$aRb; \quad a\bar{R}b \text{ дар муносибат нест, яъне } (a,b) \bar{\in} R$$

Муносибати эквивалентӣ E яке аз хосиятҳои хусусии муносибати бинарӣ мебошад, ки шартҳои зеринро қаноат менамояд:

1. Шарти ниҳодӣ: ҳар як элементи ихтиёрии $x \in A$ худаш ба худаш дар муносибати E бошад, яъне xEx.
2. Шарти симметрӣ: агар xEy бошад, он гоҳ маълум гардад, ки yEx мебошад ва баръакс: $xEy \Leftrightarrow yEx$.

3. Шарти ҳалқавaслшавӣ: аз xEy ва yEz маълум мегардад, ки xEz мебошад.

Масалан, муносибатҳои бинарӣ, монандӣ, конгруэнтии фигураҳо ва монанди инҳо мисоли муносибатҳои эквивалентӣ мебошанд. Дар протсесси омезиши минбаъдаи математика мо ба бисёр мисолҳои дигари муносибати эквивалентӣ вомехерем.

Муносибатҳои бинарие ҳам ҳастанд, ки муносибати эквивалентӣ нестанд. Масалан, муносибати тақсимшавӣ дар маҳмеи ададҳои натуралӣ муносибати эквивалентӣ нест (шарти симметрӣ иҷро намегардад). Ду элементи дар муносибати E будаpo элементҳои бо ҳам эквивалентбуда номида ва бо $x \sim y$ ишора менамоянд. Яъне, бо ҳам муносибати xEy – ро бо $x \sim y$ иваз намудан мумкин аст. Минбаъд мо ҳам дар бисёр мавридҳо аз ин навишт истифода мекунем.

Мҷмеи A ва муносибати эквивалентии дар он додашударо бо $< A, \sim >$ ишора менамоем. Ҳар як муносибати эквивалентии дар маҳмеи A додашудаи он маҳмеъ A – ро ба синфҳои эквивалентнокӣ (тахтмахмеъҳои буриданашаванда) худо менамояд.

Ба ҳар як синф фақат он элементҳои маҳмеи A дохил мегарданд, ки агар онҳо ба ҳам эквивалент бошанд. Масалан, агар дар маҳмеи ҳамаи секунхаҳо муносибати монандӣ дода шуда бошад, он гоҳ ҳамаи секунхаҳои ба якдигар монандбуда дар як синф ва секунхаҳои дигари бо ҳам монанд набуда дар синфи дигар дохил мегарданд ва монанди инҳо. Синфе, ки бо элементи додашуда $a \in A$ муайян мегардад, маҳмеи чунин элементҳо мебошад: $K_a = \{x \in A / x \sim a\} \subseteq A$.

Теоремаи зеринро исбот менамоем.

Теоремаи 1.3.1. Агар $a \sim b \Leftrightarrow K_a = K_b$ ё ки $K_a \neq K_b \Leftrightarrow a \nsim b$.

Исбот. Бигзор $a \sim b$ бошад. Ва x элементи дилхоҳи маҳмеи K_a бошад, он гоҳ:

$$x \in K_a \Rightarrow x \sim a \underset{(a\sim b)}{\Rightarrow} x \sim b \Rightarrow x \in K_b ,$$

яъне

$$K_a \subseteq K_b \; . \qquad (1.3.1)$$

Айнан ба мисли ҳамин муқаррар мегардад, ки:

$$y \in K_b \Rightarrow y \sim b \underset{(a\sim b)}{\Rightarrow} y \sim a \Rightarrow y \in K_a .$$

Бинобар ҳамин

$$K_b \subseteq K_a \; . \qquad (1.3.2)$$

Тибқи таносубҳои (1.3.1) ва (1.3.2) бармеояд, ки $K_a = K_b$. Бо ҳамин исбот гардид, ки $a \sim b \Rightarrow K_a = K_b$.

Тасдиқи баръакс ҳам дуруст мебошад.

Дар ҳақиқат, бигузор $K_a = K_b$ бошад, он гоҳ онҳо дорои ақаллан як элементи муштарак c мебошанд:

$$K_a = K_b \underset{\exists c}{\Rightarrow} (c \in K_a) \wedge (c \in K_b) \Rightarrow (c \sim a) \wedge (c \sim b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a \sim c) \wedge (c \sim b) \Rightarrow a \sim b .$$

Бо ҳамин тариқ теоремаи зерин исбот гардид: $a \sim b \Leftrightarrow K_a = K_b$. Аз ин теорема чунин тасдиқи зидбаёна мебарояд: $K_a \neq K_b \Leftrightarrow a \nsim b$. Яъне зидбаёнаи ҳар як теорема тасдиқи ҳақ мебошад (п.1, п.2, §5).

Яъне агар синфҳои эквивалентӣ гуногун бошанд, он гоҳ элементҳои онҳоро муайянкунанда (a ва $\bar{u}$) эквивалент нестанд ва баръакс, агар элементҳо эквивалент набошанд, он гоҳ онҳо мутаалиқи синфҳои гуногун мебошанд. Аз ин теорема низ маълум мегардад, ки агар $K_a = K_b$ бошад, он гоҳ $K_a \cap K_b = \varnothing$.

Суммаи ҳамаи синфҳои гуногуни эквивалентӣ ба худи маҳмеи A баробар аст.

Мисоли 1.3.1. Нишон дода шавад, ки муносибати

$$E_m = \{(x, y) \mid (x - y) \vdots m\} \subseteq Z \times Z ,$$

дар маҳмеи ададҳои Z бутун муносибати эквивалентӣ мебошад (дар ин хо m – адади дилхоҳи натуралӣ ва аломати $\vdots$ каратнокиро ифода менамояд).

Ҳал.

1. Шарти ниҳодӣ: барои ҳар як адади ихтиёрии $x \in Z$ маълум аст, ки $(x - x) \vdots m \Rightarrow xE_m x$.

2. Шарти симметрӣ: $xE_m y \Leftrightarrow (x - y) \vdots m \Leftrightarrow (y - x) \vdots m \Leftrightarrow yE_m x$.

3. Шарти ҳалқавaслӣ: агар $xE_m y$ ва $yE_m z$ бошад, он гоҳ

$$\left.\begin{matrix}(x-y)\vdots m\\(y-z)\vdots m\end{matrix}\right\} \Rightarrow [(x-y)+(y-z)]\vdots m \Rightarrow (x-z)\vdots m \Rightarrow xE_m z .$$

Ичрои ин шартҳо нишон медиҳад, ки $E_m \subseteq Z^2$ муносибати эквивалентӣ аст. Агар r_x – баќия аз таќсим намудани x ба m ва r_y – баќия аз таќсим намудани y ба m бошад, он гоҳ: $(x-y)\vdots m \Leftrightarrow r_x = r_y$. (Инро исбот намоед!).

Баќияҳои имконпазир аз таќсим намудан ба m ададҳои $0,1,2,\ldots,m-1$ мебошанд. Бинобар ин синфҳои эквивалент гуногун ҳам мувофиќан инҳо мебошанд:

$$K_0=\{x\,|\,r_x=0\},\ K_1=\{x\,|\,r_x=1\},\ldots,\ K_{m-1}=\{x\,|\,r_x=m-1\}$$

ва

$$Z=K_0\cup K_1\cup\ldots\cup K_{m-1}=\bigcup_{0\le j\le m-1}K_j .$$

Масалан, барои $m=5$ синфҳои эквивалент инҳо мебошанд:

$K_0=\{x\,|\,r_x=0\}=\{\ldots,-10,-5,0,5,10,\ldots\}$,
$K_1=\{x\,|\,r_x=1\}=\{\ldots,-9,-4,1,6,11,\ldots\}$,
$K_2=\{x\,|\,r_x=2\}=\{\ldots,-8,-3,2,7,12,\ldots\}$,
$K_3=\{x\,|\,r_x=3\}=\{\ldots,-7,-2,3,8,13,\ldots\}$,
$K_4=\{x\,|\,r_x=4\}=\{\ldots,-6,-1,4,9,14,\ldots\}$
ва $Z=\bigcup_{0\le j\le 4}K_j$.

Мисоли 1.3.2. Бигузор муносибати бинарии

$$E=\{(x,y),(x',y')\,|\,x+y'=x'+y\}\subset N^2\times N^2$$

дар махмеи N^2 дода шудааст, яъне $(x,y)E(x',y')\Leftrightarrow x+y'=x'+y$.
Исбот карда шавад, ки E муносибати эквивалентӣ мебошад.

Исбот. Таносубии $(x,y)E(x',y')$ - ро дар шакли зерин менависем:

$$(x,y)\sim(x',y')\Leftrightarrow x+y'=x'+y .$$

1. Шарти ниҳодӣ: $(x,y)\sim(x,y)$ мебошад, чунки $x+y=y+x$ мебошад. Ин шарт барои ҳар як хуфти дилхоҳ $(x,y)\in N^2$ ичро мегардад.

2. Шарти симметрӣ:

$$(x,y)\sim(x',y')\Leftrightarrow x+y'=x'+y\Leftrightarrow(x'+y=x+y')\Leftrightarrow(x',y')\sim(x,y) .$$

3. Шарти ҳалќавасӣ: агар $(x,y)\sim(x',y')$ ва $(x',y')\sim(u,v)$ бошад, он гоҳ мувофиќан ҳосил менамоем:

$$\left.\begin{matrix}x+y'=x'+y\\x'+v=u+y'\end{matrix}\right\}\Rightarrow(x+y')+(x'+v)=(x'+y)+(u+y')\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+v=y+u\Leftrightarrow x+v=u+y\Rightarrow(x,y)\sim(u,v) .$$

Бо ҳамин исбот намудем, ки E дар махмеи N^2 муносибати эквивалентӣ мебошад.

Агар махмеи додашуда A бо тариќе ба тахтмахмеъҳои хоси

буридашаванда худо кунонида шуда бошад, он гоҳ ин тавр худокунӣ махс муносибати эквивалентиро дар он махмеъ A муайян менамояд. Ҳар як аз он тахтмахмеъҳоро ҳамчун синфи эквивалентӣ ва элементҳои ба он тахтмахмеъ мутаалиќро элементҳои эквивалентбуда ќабул намудан мумкин аст.

Мисоли 1.3.3. Адади 2 ба -2, -1, 1, 2 тақсим мешавад.

Маҷмӯъ $A=\{-2,-1,1,2\}$. Муносибат $\vdots$ –ро ба назар гирифта навишта метавонем:

$$R=\{(2,-2),(2,-1),(2,1),(2,2)\}$$

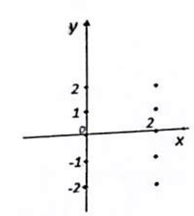
Дар намуди умумӣ шакли зеринро мегирад:

$$R=\{(x,y)|x,y\in A\wedge x\vdots y\}$$

Барои ҳаматарафа ифода намудани муносибати R ишораҳои махсус (соҳаи тарафи чап ва соҳаи тарафи рост) дохил кардаанд:

$R_-=\{x|(x,y)\in R$ барои ягон $y\}$;
$R_+=\{y|(x,y)\in R$ барои ягон $x\}$.

Дар адабиёт маҷмӯъҳои R_- ва R_+ -ро боз ҳамчун соҳаи **муайянӣ ва соҳаи қиматҳои муносибати R ё маҷмӯи равонкунӣ ва воридшавӣ ва ё проекция** (лот. projectio – **нақш, акс) – и якум (тарафи чап) ва проекцияи дуюм (тарафи рост)** ном мебаранд.



Барои аёнӣ ифода намудани муносибати бинарӣ аз геометрия истифода мебарем.

Азбаски ба ҳар як муносибати бинарӣ кулли ҷуфтҳои ботартибовардашуда рост меояд, онро

графики муносибат номидаанд. Ду тарзи тасвири графикӣ бештар паҳн гаштааст : системаи координатаи декартӣ ва тирчагӣ.

Системаи координатаи декартиро мекашем. Дар ҳамворӣ нуқтаҳо (x, y)-ро, ки $(x, y) \in R$ аст қайд карда маҷмӯеро ҳосил мекунем, ки ба муносибати R мувофиқ меояд. Дар расми 8 муносибати бинарии мисоли боло тасвир ёфтааст.

Тарзи дуюми графикӣ аз он иборат аст, ки элементи $x \in A$ ва $y \in B$ бо R дар ягон муносибатанд, бо тирчаҳо алоқаманд карда мешаванд.

расми 8

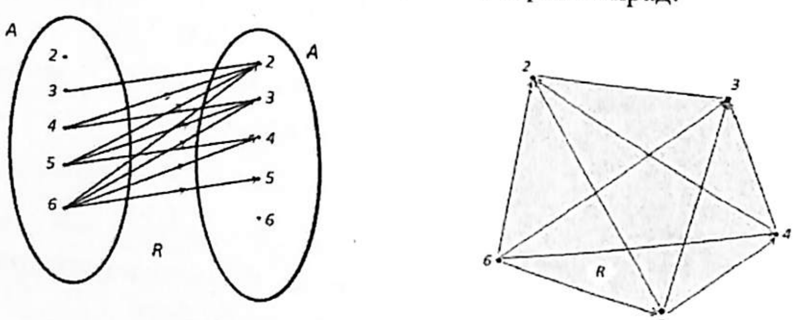
Мисоли 1.3.4. Барои маҷмӯи адаҳои $A = \{2,3,4,5,6\}$ бо муносибати $x > y$ маҷмӯи R-ро графикӣ тасвир кунед.

Ҳал. Дода шудааст: $A \times A = A^2$.

Маҷмӯи

$R = \{(x, y) | x, y \in A \wedge x > y\} = \{(3,2), (4,2), (4,3), (5,2), (5,3),$ $(5,4), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$ аст.

Азбаски элементҳо дар муносибати “калон” воқеанд, тасвири графикии онҳо бо ёрии тирчаҳо намуди зеринро мегирад:



расми 9

Мисоли 1.3.5. Агар $R = \{(1,2), (2,1), (1,3), (2,3)\}$ бошад, соҳаи муайянӣ R_- ва соҳаи қиматҳо R_+ ёфта шавад.

Ҳал. Ба R назар карда меёбем:

$R_- = \{1, 2\}$; $R_+ = \{1,2,3\}$

Суммаи маҷмӯъҳои R_- ва R_+ - ро **майдони муносибат** меноманд ва ишора мекунанд:

$$F(R) = R_- \cup R_+$$

Дар мисоли боло $F(R) = R_- \cup R_+ = \{1, 2, 3\}$

Агар $R_- \subset A$, $R_+ \subset B$ бошад, онгоҳ $R \subset A \times B$ мешавад.

Дарвоқеъ, агар $A = R_- = \{1, 2\}$ ва $B = R_+ = \{1,2,3\}$ бармеояд, ки

$R \subset A \times B$ аст.

Муносибати **баръаксӣ** гуфта маҷмӯи $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$ – ро меноманд.

Агар дар ҳар як ҷуфти муносибати R^{-1} ҷойи элементҳоро иваз намоем, муносибати R ҳосил мешавад. Аз ин рӯ, муносибати R ба R^{-1} баръакс аст:

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

Чунончӣ, муносибати “калон” дар R ба муносибати “хурд” баръакс аст ва муносибати “хурд” баръакси муносибати “калон” аст, яъне

агар $a > b$ бошад, онгоҳ $b < a$ аст,

агар $a < b$ бошад, онгоҳ $b > a$ аст.

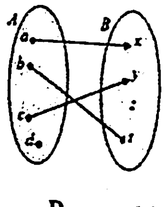
1.4. Инъикос ва намудҳои он

Мафҳуми инъикос. Дар байни элементҳои як маҷмуъ ё маҷмуҳои гуногун метавонад ягон мувофиќат мавҷуд бошад.

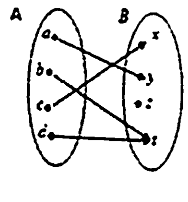
Бигузор маҷмуҳои A ва B дода шуда бошанд.

Таърифи 1.4.1. Агар аз руи ягон ќоида ба ҳар як элементи $x \in A$ **ягон элементи** $y \in B$ **дар мувофиќат** гузошта шуда бошад, онгоҳ **чунин мувофиќатро инъикоси маҷмуи** A **ба маҷмуи** B **меноманд.**

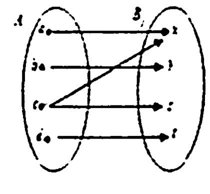
Дар ҳолати охирнок будани маҷмуҳои A ва B мувофиќати (инъикоси) онҳоро ба таври айёнӣ дар расм тасвир намудан мумкин аст. Дар ин ҳолат элементҳои маҷмуҳои дода шуда бо воситаи нуќтаҳои гуногуни ҳамворӣ тасвир карда мешавад. Агар ба элементи $a \in A$ элементи $b \in B$ мувофиќат кунад, онгоҳ аз a ба b тирча мегузаронанд.



Расми 10



Расми 11



Расми 12

Бигузор $A=\{a,b,c,d\}$ ва $B=\{x,y,z,t\}$ бошад. Дар расмҳои 1-3 мувофиқатҳои байни маҷмуҳои A ва B додашудаанд. Масалан дар расми 1 мувофиқате, ки элементи a бо элементи x ва элементи b бо элементи t ва ғайра мувофиқат мекунонад тасвир шудааст.

Мувофиқати дар расмҳои 10 ва 12 тасвир шуда инъикосроифода намекунад. Дар расми 11 бошад мувофиқати тасвир шуда инъикос мебошад.

Иникосро ба ҳарфҳои f,φ,ψ ва ғайра ишора меку-нанд. Масалан агар $f-$ инъикоси маҷмуи A дар маҷмуи B бошад ва элементи $a\in A$ дар ин ҳолот элементи $x\in B$ мувофиқат кунонад, он гоҳ мегуянд, ки $f-$ элменти

a-ро ба элементи x инъикос мекунонад ва чунин навишта мешавад: $f(a)=x$.

Инъикоси дар расми 11 тасвир шударо чунин навиштан мумкин аст: $\varphi(a)=y,\ \varphi(b)=t,\ \varphi(c)=x,\ \varphi(d)=t$.

Таърифи 1.4.2. Инъикосҳои φ *ва* $\psi-$ и маҷуҳои A ва $B-$ ро баробар меноманд ва чунин менависанд $\varphi=\psi$, агар барои ихтиёри $x\in A$ баробарии $\varphi(x)=\psi(x)$ иҷро шавад.

Агар $f-$ инъикоси маҷмуҳои A дар B бошад, он гоҳ онро чунин менависанд: $f:A\to B$.

Бигузор $f:A\to B$ бошад. Агар $f-$ инъикоси элемен-ти $a\in A$ ва элементи $b\in B$ бошад, яъне $f(a)=b$, он гоҳ $b-$ ро образи элементи a меноманд.

Агар $M\subset A$ бошад, он гоҳ маҷму ҳамаи элементҳои аз $M-$ро образи зермаҷмуи M меноманд ва чунин менависанд: $f(M)$ яъне, $f(M)=\{f(x)|\ x\in M\}$.

Мисол, агар $f:Z\to N_0=N\cup\{0\}$, ки дар ин ҷо $f(x)=x^2$ барои ҳамаи $x\in Z$ бошад, пас $f(-2)=4$ яъне 4- образи элементи -2 мебошад. Агар

$M=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ бошад онгоҳ $f(M)-$ маҷмуи ҳамаи элементҳои аз M яъне маҷмуи образҳои элементҳои -2,-1,0,1,2,3 мебошанд. Ҳамин тавр $f(M)=\{4,1,0,1,4,9\}=\{0,1,4,9\}$.

Бигузор $f:A\to B$ бошад. Агар $k\subset B$ бошад, он гоҳ маҷмуи ҳамаи он элементҳои $A-$ро, ки образи он ба зер-маҷмуи k таълуқ дорад, прообрази зермаҷмуи k меноманд ва чунин ишора мекунанд: $f^{-1}(k)$ яъне, $f^{-1}(k)=\{x|\ x\in A,\ f(x)\in k\}$.

Агар k аз як элемент, масалан b иборат бошад, яъне $k=\{b\}$, он гоҳ прообрази онро бо $f^{-1}(b)$ ишора мекунанд.

Ҳамин тариқ $f^{-1}(b)$ маҷмуи ҳамаи он элементҳои A мебошад, ки образи онҳо ба зермаҷмуи $\{b\}$ таалуқ дорад, яъне бо b баробар мебошад.

$$f^{-1}(b)=\{x|\ x\in A,\ f(x)\in b\}$$

Ба мисоли дор боло оварда бар мегардем. Инъикоси Z бо N_0- ро интихоб намуда, $f^{-1}(9)-$ро меёбем. Барои ин ҳамин гуна элементҳоро аз Z ёфтан лозим аст, ки образи онҳо ба 9 баробар аст. Яъне $x\in Z$ бошад он гоҳ $x^2=9$ шавад. Аз ин ҷо $f^{-1}(9)=\{-3,3\}$.

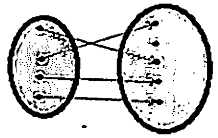
Акнун $f^{-1}(7)-$ ро меёбем. Аммо 7 ҳамин гуна элементи x вуҷуд надорад, ки барои он $x^2=7$ шавад, пас $f^{-1}(7)=\varnothing$.

Бигузор $k=\{1,4,5,8,9\}$ бошад. Барои ёфтани $f^{-1}(k)$ бояд маҷмуи ҳамаи чунин элементҳои $x\in Z-$ ро, ки $f(x)=x^2\in k$ мебошад, ёфтан лозим аст. Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки ин шартро танҳо ададҳои $\{-1,1,-2,2,-3,3\}$ яъне $f^{-1}(k)==\{-1,1,-2,2,-3,3\}$ қаноат мекунонад.

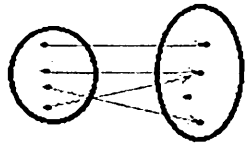
Инъикоси инъективӣ. Инъикоси зеринро дида мебароем $f:\ N\to N-$ро, ки дар ин ҷо $f(x)=n+3$ мебошад. Дар ҳолате, ки агар m *ва* n ададҳои гуногунн бошад, он гоҳ $n+3$ ва $m+3$ низ баробар нестанд.

Таърифи 1.4.3. *Инъикоси $f:\ A\to B$ инъективӣ ё яккимата номида мешавад, агар вай элементҳои гуногуни маҷмуи A ро ба элементҳои гуногуни маҷмуи B инъикос намояд.*

Ба ибораи дигар $f-$ инъикоси инъективӣ номида ме-шавад, агар барои ихтиёрӣ $x,y\in A$ аз $x\neq y$ барояд, ки $f(x)\neq f(y)$ аст. Агар инъикоси f инъективӣ бошад, он гоҳ мегуянд, ки f хосияти инъективиро дорад.



Расми 13



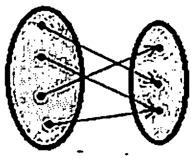
Расми 14

Инъикоси дар расми 13 инъэктивӣ буда ва инъикоси дар расми 14 ғайри инъективи мебошад.

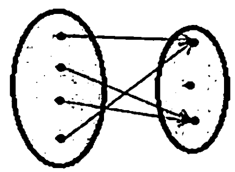
Инъикоси сюрективӣ. Бигузор инъикоси $f: A \to B$ дода шуда бошад.

Таъриф.1.4.4 Инъикоси $f: A \to B$ сюръэктивӣ номида мешавад, агар ба ҳар як элементи маҷмуи B ақалан элементи маҷмуи A инъикос шавад.

Бо ибораи дигар инъикоси $f-$ сюръэктивӣ номида мешавад, $\forall b \in B \; \exists \; a \in A$ ёфт мешавад, ки $f(a)=b$ мебошад.



Расми 15



Расми 16

Инъикоси дар расми 15 сюръэктивӣ буда ва инъикоси дар расми 16 ғайри сюръэктивӣ мебошад.

Инъикоси биективӣ. Бе душворӣ муаян намудан мумкин аст, ки иникосҳое мавҷуд, ки инъективӣ буда, инъикоси сюрективӣ намебошад ва баръакс. Инчунин инъикосҳоеро муайян намудан мумкин аст, ки онҳо дар як вақт ҳам инъективӣ ва сюрективӣ мебошад ва ё на инективӣ ва сюрективӣ мебошанд. Инъикосҳои дар як вақт ҳам инективӣ ва сюрективӣ дар математика роли муҳимро мебозанд.

Таърифи 1.4.5 Инъикоси дар як вақт ҳам инективӣ ва ҳам сюрективии $f: A \to B$ биективӣ ё байни ҳам яккиматаи инъикоси маҷмуи A ба маҷмуи B номида мешавад.

Мисолҳои инъикосҳои биективиро дида мебароем. Гуруҳи велосипедронҳои мусобиқакунандаро дида меба-роем. Бигузор A-

маҷмуи велосипедронҳо ва B- маҷмуи велосипедҳои мавҷуд буда бошад.

Ба ҳар як велосипедрон велосипеди онро дар мувофиқат мегузорем. Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки ин мувофиқат инъикоси маҷмуи A ба маҷмуи B буда, дар айни ҳол инъикоси биективӣ мебошад.

Бигузор $f: Z \to Z$ бошад, ки дар инҷо $f(x)=x+5$ барои ҳаргуна $x \in Z$ мебошад. Агар $x_1, x_2 \in Z$ ва $x_1 \neq x_2$ бошад, пас маълум аст, ки $x_1+5 \neq x_2+5$ мешавад. Яъне $f(x_1) \neq f(x_2)$ ва $f-$ инъикоси инъективӣ мебошад.

Нишон медиҳем, ки $f-$ инъикоси сюрективӣ мебошад. Барои ин исбот намудан зарур аст, ки $\forall a \in Z, \; \exists x \in Z$ мавҷуд аст, ки вай ба a инъикос шавад, яъне $f(x)=a$.

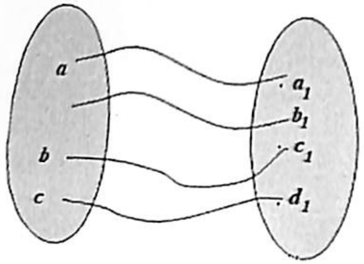
Ҳамин тариқ элементи ҷустуҷу карда бояд шартҳои зеринро қаноат кунонад: $x \in Z, \; x+5=a$. Чунин элемент адади $x=5-a$ мебошад. Ҳамин тариқ мо муайян намудем, ки инъикоси $f-$ инективӣ ва сюрективӣ мебошад.

Ҳолати умумиро дида мебароем. Бигузор $f-$ инъ-икоси биективии маҷмуи A ба маҷмуи A_1 бошад. Эле-ментҳои маҷмуи A-ро бо $a, b, c, \cdots$ образҳои онҳо $a_1, b_1, c_1, \cdots$ бошанд. Яъне $f(a)=a_1, \; f(b)=b_1, f(c)=c_1, \cdots$ бошад.

Акнун элементи дилхоҳи $x_1 \in A_1$- ро мегирем. Оё ин элемент ба ягон элементи A алоқамад мешавад. Ба назар мегирем, ки инъикоси мо биективӣ ва аз инҷо мебаояд, ки вай инъикоси сюрективи мебошад. Он дар A чунин эле-менти x ёфт мешавад, ки барои он $f(x)=x_1$ аст.

Ҳамин тариқ ҳар як элемент аз A_1 ба кадом як элементи A яъне бо образи худ алоқаманд мешавад. Акнун муаян мекунем, ки метавонад як элемент аз A_1 бо якчанд элементи A алоқаманд бошад. Фарз мекунем, ки элементи $a_1 \in A_1$ ба ғайр аз элементи $a \in A$ боз бо элементи дигари $a' \in A$ алоқаманд бошад. Ин маънои онро дорад, ки a_1- образи элементи a' мебошад. Яъне $f(a')=a$, вале $f(a)=a_1$, Пас ду элементи гуногун бо ҳамон як элемент инъикос мешаванд, ки ин ғайри имкон мебошад, чунки инъикоси f инективӣ мебошад.

Ҳамин тариқ, агар $x \in A$ ва $f(x)=x_1$ бошад, онгоҳ элементи x фақат ба элементи x_1 ва x_1 бошад, фақат ба элементи x алоқаманд буда, дар айни ҳол ҳар яке аз элементҳои маҷмуъҳои A ва A_1 дар алоқамандии ҷуфтҳо қарор доранд.



расми 17

Агар маҷмуҳои A ва A_1 беохир бошанд, онгоҳ дар расм қисме аз онро тасвир намудан мумкин аст.

Инъикоси баръакс. Бигузор f – инъикоси биективии маҷмуи A ба маҷ-муи B бршад. Агар мо мисли гуфтаҳои боло ҳар як элемети маҷмуи A– ро бо образаш чунин алоқаманд кунем, онгоҳ ҳар як элементи аз B танҳо бо як элементи A образаш алоқаманд карда мешавад.

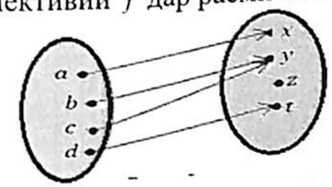
Маълум мешавад, ки агар ба ҳар як элементи маҷмуи B элементи ба он алоқаманди маҷмуи A– ро дар мувофиқат гузорем, онгоҳ мо инъикоси B– ро дар A ҳосил мекунем. Ин гуна инъикосро бо f^{-1} ишора мекунанд ва онро инъикоси бараксии f меноманд. Ҳамин тариқ агар f элементи $a \in A$– ро ба элементи $x \in B$ инъикос намояд, онгоҳ f^{-1} баракс элементи $x \in B$ ба элементи $a \in A$ инъикос менамояд. Яъне агар $f(a)=x$ бошад, онгоҳ $f^{-1}(x)=a$ мешавад. Аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки $f\left[f^{-1}(x)\right]=x$ ва $f^{-1}[f(a)]=a$.

Агар x ва y элементҳои гуногуни B бошанд, онгоҳ читавре, ки муаян намудем, онҳо бо элементҳои гуногуни A алоқаманд мешаванд. Ин маънои онро дорд, ки $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ яъне инъикоси f^{-1} инективӣ мебошад ва ҳар як элементи $a \in A$ ҳатман боя гон элементи $x \in B$ алоқаманд мебошад, пас мебошад. Яъне ҳар як элементи A инъикоси f^{-1} элементи B– ро инъикос мекунад. Ҳамин тариқ f^{-1} инъикоси сюрективӣ мебо-шад. Аз ин ҷо хулоса баровардан мумкин аст, ки f^{-1} инъикоси биективӣ мебошад.

Баъзе мисолҳоро дида мебароем, бигузор $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{x,y,z,t\}$ ва $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ y & t & x & z \end{pmatrix}$ бошад. Бевосита санҷидан мумкин аст,ки f – инъикоси биективи A дар B мебошад. Бинобар ҳамин инъикоси ба он баръаксии f^{-1} мавҷуд аст. Азбаски f элементҳои ба a - ро ба y , b – ро ба t, c – ро ба x ва d – ро ба z инъикос мекунад, онгоҳ f^{-1} баръакс y – ро ба a , t – ро ба b , x – ро ба c ва z – ро ба d инъикос мекунад. Барои он, ки барои f^{-1} ҷадвал тартиб диҳем, дар ҷадвали f ҷои сатрҳоро иваз намудан лозим аст:

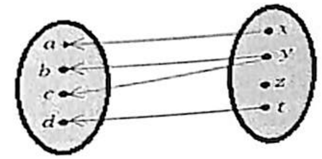
$$f^{-1}=\begin{pmatrix} y & t & x & z \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Дар ин ҷадвал ҷои элементҳои сатрҳоро иваз намоем. Дар ҳолате, ки инъикоси биективӣ f дар расми 18 тасвир шудааст



расми 18

дар асоси муҳокимаронихои мо барои ҳосил намудани инъикоси f^{-1} дар расми 19 самти тирчаҳоро иваз намудан лозим аст.



расми 19

Чунин савол ба миён омаданаш мумкин аст: Оё бо роҳи иваз намудани самти тирчаҳо мо инъикоси баръаксро ҳосил карда метавонем? Албата не. Чунки ҳама вақт мо инъикоси инективиро ҳосил мекунем.

Агар инъикоси маҷмуи A ба B сюрективӣ набошад, онгоҳ ба осонӣ дидан мумкин аст, ки бо иваз намудани самти тирчаҳо мо инъикоси маҷмуи A - ро дар маҷмуи B ҳосил намекунем.

1.5. Амалҳо бо баёнҳо

Дар натихаи амалҳо бо баёнҳо боз баёни нав ҳосил мешавад, ки ҳаќнокии он аз ҳаќнокии баёнҳои додашуда вобаста аст. Ин амалҳои мантиќиро бо баёнҳо алоҳида – алоҳида дида мебароем.

1. **Инкор.** Ин амал бо як баён иҷро карда мешавад. Агар баёни додашуда X ҳаќ бошад, он гоҳ инкори вай $\overline{X}$ ноҳаќ мебошад ва баръакс, агар баёни додашуда ноҳаќ бошад, инкори вай ҳаќ мебошад. Мисол, баёни «адади 5 содда аст» ҳаќ мебошад. Инкори вай – «адади 5 содда нест» ноҳаќ аст. Ин ќонунияти мантиќӣ дар намуди Ҷадвали зерин навишта мешавад:

X	$\overline{X}$
њаќ	Нођаќ
нођаќ	Хаќ

Ин хадвалро Ҷадвали ҳаќнокии инкор меноманд.Яъне инкори баёни X баёнеро меноманд, ки вай дар он ҳолат ҳаќ аст, ки агар X ноҳаќ бошад ва дар он ҳолат ноҳаќ аст, ки агар X ҳаќ бошад.

Агар ҳаќ будани баёнро бо рамзи 1 ва ноҳаќ буданашро бо рамзи 0 ишорат намоем (дар аксари мавридҳо маҳз ин рамзҳо истифода мешаванд), он гоҳ Ҷадвали ҳаќнокии инкор шакли зеринро ноил мешавад:

X	$\overline{X}$
1	0
0	1

2. **Дизъюксия** (суммаи мантиќӣ). Дизъюксияи ду баёнҳои X ва Y гуфта баёнеро меноманд, ки ҳаќ будани онро ҳаќ будани аќаллан яке аз он баёнҳои додашуда таъмин менамояд.

Дизъюксияи баёнҳои X ва Y бо $X \vee Y$ ишорат карда мешавад (аломати $\vee$ ба хои пайвандаки «ва» истифода мешавад). Ҷадвали ҳаќнокии дизъюксия чунин аст:

X	Y	$X \vee Y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Дизъюксия фаќат дар он ҳолат ноҳаќ аст, ки агар ҳар яке аз хамъшавандаҳо ноҳаќ бошад. Дар дигар ҳолатҳо дизъюксия баёни ҳаќ мебошад.

Мисол. Барои ду ададҳои ҳаќиќии $a \geq 0$ ва $b \geq 0$ чунин баёнҳои соддаи

X – «$a \neq 0$» ва Y – «$b \neq 0$» - ро муоина менамоем. Дизънксияи ин баёнҳо ($X \vee Y$) – «$a + b \neq 0$» мебошад.

Таърифи дизъюксия ба бисёр банҳо ҳам татбиќшаванда аст: дизъюнксияи $X_1 \vee X_2 \vee \ldots X_n$ дар он ҳолат ва фаќат дар он ҳолат ҳаќ аст, ки агар аќалан яке аз он баёнҳои додашуда ҳаќ бошад.

Дизънксияи ду баёнҳо (X ва Y) – ро ќатъӣ меноманд, ки агар ё X ва ё ин ки Y ҳаќ шуда тавонад, яъне ин баёнҳо дар як ваќт ҳардуяшон ҳаќ шуда натавонанд. Дизъюксияи ќатъиро бо $X \dot{\vee} Y$ ишорат менамоем. Масалан, дизъюнксияи баёнҳои «Адади a тоќ аст» (X) ва «Адади a хуфт аст» (Y), ќатъӣ мебошад, чунки адади додашуда a ҳам хуфт ва ҳам тоќ шуда наметавонад. Дизъюксияи ќатъӣ барои якчанд баёнҳо X, Y, Z ва ғайра ҳам шуда метавонад.

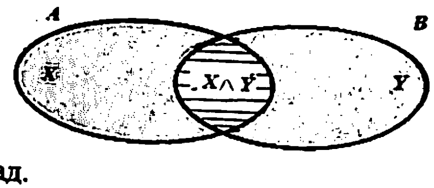
3. **Конъюксия** (зарби мантиќӣ). Конъюнксияи ду баёнҳои X ва Y гуфта баёнеро меноманд, ки ҳаќ будани онро ҳаќ будани ҳам баёни X ва ҳам баёни Y таъмин менамояд. Конъюксия бо XY (ҳамчун зарби муќаррарӣ), $X \wedge Y$ ва ё бо $X \& Y^{*}$ ишорат карда мешавад. Аломатҳои $\wedge$, $\&$ ва «зарб» ба хои пайвандаки «ё» истифода мешаванд. Ҷадвали ҳаќнокии конънксия чунин аст:

X	Y	XY
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Мисол. Агар баёнҳои «$a \neq 0$» ва «$b \neq 0$» - ро мувофиќан бо X ва Y ишорат намоем, он гоҳ конъюнксияи онҳо $X\ Y$ – «$ab \neq 0$» мебошад.

Мисол. Агар баёнҳои «Нуќта ба махмеи A таалуќ дорад» (X) ва «Нуќта ба махмеи B таалуќ дорад» (Y) муоина карда шаванд, конъюнксияи онҳо «Нуќта ҳам ба махмеи A ва ҳам ба махмеи B таалуќ дорад» мебошад:

Таърифи конъюнксия ба бисёр банҳо ҳам татбиќшавыанда мебошад: конъюнксияи $X_1X_2 \ldots X_n$ дар он ҳолат ва фаќат дар он ҳолат ҳаќ аст, ки агар ҳар яке аз зарбшавандаҳо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ҳаќ бошад.



4. **Импликатсия** (баёни шартӣ). Баёнҳои таркибие мавхуданд, ки структураи мантиќиашон «Агар X он гоҳ Y» мебошанд. Ин ќабил баёнро импликатсия номида ва бо $X \Rightarrow Y$ ишорат менамоянд. X – ро асоси импликатсия ва Y – ро натихаи он импликатсия меноманд. Вобастагии мантиќии импликатсия дар он ифода меёбад, ки ҳаќ будани асос ҳатман ҳаќ будани натихаро муайян менамояд, лекин дар ҳолати ҳаќ будани натихаи импликатсия асос метавонад ҳаќ ва ё ноҳаќ бошад.

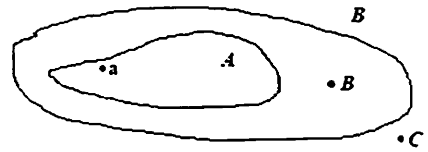
Ҷадвали ҳаќнокии импликатсия чунин мебошад:

X	Y	$X \Rightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Импликатсия фаќат дар он ҳолате ноҳаќ аст, ки агар асос (X) ҳаќ ва натиха (Y) ноҳаќ бошад. Дар дигар ҳолатҳо импликатсия $X \Rightarrow Y$ баёни ҳаќ мебошад. Бояд ќайд намуд, ки дар хулосабарориҳои шаклӣ (дар мантиќи математикӣ) мазмуни мушаххаси асос (X) ва натиха (Y) сарфи назар карда мешавад ва бинобар ҳамин ќимати мантиќии импликатсия (ҳаќ ва ноҳаќ будани

импликатсия) маҳз аз рӯи Ҷадвали ҳаќнокияш муайян карда мешавад.

Мисол. Бигзор A тахтмахмеи B бошад (расми 1)



расми 1

Баёнҳои X – «Нуќта таалуќи махмеи A аст» ва Y – «Нуќта таалуќи махмеи B аст» - ро муоина менамоем. Яъне агар $a \in A$ бошад, он гоҳ X ҳаќ ва агар $a \notin A$, он гоҳ X ноҳаќ ҳисобида мешавад. Айнан ҳамин тариќ нисбати Y ҳам чунин меҳисобем.

Импликатсияи $X \Rightarrow Y$ бошад, баёни «Нуќта мавхуд аст» мебошад. Акнун ҳамаи ќиматҳои имконпазири мантиќии X ва Y – ро барои импликатсияи $X \Rightarrow Y$ муоина менамоем:

(1) Агар нуќта таалуќи махмеи A бошад, он гоҳ вай таалуќи махмеи B ҳам мебошад. Масалан, нуќта a (Расми 1) чунин мебошад. Яъне агар X = 1 ва Y = 1 бошад, он гоҳ $X \Rightarrow Y = 1$ мебошад.

(2) Нуќтае мавхуд нест, ки вай таалуќи махмеи A бошад (X = 1), лекин таалуќи махмеи B набошад (Y = 0), яъне дар ин ҳолат $(X \Rightarrow Y) = 1$ мебошад.

(3) Нуќтае мавхуд нест, ки таалуќи махмеи A нест (X = 0), лекин таалуќи махмеи B мебошад (Y = 1). Масалан, ин ќабил нуќта нуќтаи $в$ мебошад (расми 1). Бинобар ҳамин дар ин ҳолат $(X \Rightarrow Y) = 1$ мебошад.

(4) Нуќтае мавхуд аст, ки на таалуќи А ва на таалуќи В мебошад (X = 0, Y = 0). Масалан, нуќтаи c (расми 1) . Бинобар ҳамин дар ин маврид ҳам $(X \Rightarrow Y) = 1$ мебошад.

Бояд ќайд намуд, ки на ҳар як импликатсияи ҳаќбуда баёни хулосаи маънои шуда метавонад. Масалан импликатсияи «Агар секунха баробартараф бошад (X), он гоҳ кунхҳояш баробаранд (Y)» баёни хулосаи маъноӣ мебошад: натиха (Y) ҳамчун хулосаи маъноӣ аз асос (X) бармеояд. Импликатсияи «Агар секунха баробартараф бошад, он гоҳ адади 5 содда аст» гарчанде ҳаќ бошад ҳам (чунки натихаи импликатсия – «Адади 5 содда аст», баёни ҳаќ мебошад), лекин хулосаи маъноиро ифода намекунад, яъне ин импликатсия баёни хулосаи маъноӣ нест. Фаќат он импликатсияе баёни хулосаи маъноӣ шуда метавонад, ки агар асос ва натихаи он алоќаи маъноӣ дошта бошанд: Y ҳамчун хулосаи мантиќӣ аз X барояд. Баёнҳои хулосаи маъноӣ маҳз як навъи импликатсияҳо мебошанд ва тахтмахмеи махмеи ҳамаи импликатсияҳоро ташкил медиҳанд. Бинобар ҳамин он чизҳое, ки дар бораи импликатсия медонем , айнан нисбати баёнҳои хулосаи маъноӣ ҳам, низ раво мебошад.

5. **Эквиваленсия.** Эквиваленсия импликатсияи дутарафа мебошад: агар X , он гоҳ Y ва агар Y , он гоҳ X . Эквиваленсия бо $X \Leftrightarrow Y$ ишорат карда мешавад, ки дар ин хо аломати $\Leftrightarrow$ ба хои пайвандаки «дар он ҳолат ва фаќат дар он ҳолат» истифода мешавад ва ба маънои муќаррарӣ ин аломат дар математика баробарќуввагии тасдиќҳо (X ва Y) – ро ифода менамояд.

Мисол. Баёни «Дар як доира ва ё дар доираҳои баробар ду кунҷҳои марказӣ дар он ҳолат ва фаќат дар он ҳолат баробаранд, ки агар камонҳои ба онҳо такякарда баробар бошанд» эквиваленсия мебошад. Ин эквиваленсия баёни маъноӣ аст. Эквиваленсияҳое низ ҳастанд, ки шаклан ҳаќ бошанд ҳам, лекин баёни маъноӣ нестанд. Ҷадвали ҳаќнокии эквиваленсия чунин аст:

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Эквиваленсияи ду баёнҳои X ва Y гуфта баёнеро меноманд, ки вай дар он ҳолат ва фаќат дар он ҳолат ҳаќ аст, ки агар ќиматҳои мантиќии баёнҳои X ва Y якхела бошанд (ё ҳарду ҳаќ ва ё ин ки ҳарду ноҳаќ). Дар ҳолатҳои гуногун будани он ќиматҳо эквиваленсия ноҳаќ мебошад. Азбаски эквиваленсия импликатсияи дутарафа мебошад вай бо импликатсияҳо чунин ифода мешавад:

$$X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y)(Y \Rightarrow X)$$

Дурустии ин баробарӣ аз рӯи Ҷадвали зерини ќиматҳои ҳаќнокӣ мустаќиман собит мегардад:

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$	$X \Rightarrow Y$	$Y \Rightarrow X$	$(X \Rightarrow Y)(Y \Rightarrow X)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Бо ҳамин тариќ мо амалҳои асосии мантиќиро бо баёнҳо дида баромадем.

Акнун бо иҷро намудани ин амалҳо (дар асоси Ҷадвали ҳаќнокӣ) ќиматҳои мантиќии ҳаргуна баёнҳои таркибиро ёфтан муяссар мешавад. Масалан, бигузор баёни таркибии

$$\left((X \vee Y) \Rightarrow \overline{X}\,\overline{Z}\right) \Leftrightarrow (Y \vee Z) \qquad (*)$$

дода шуда бошад. Ҷадвали ќиматҳои ҳаќнокии ин баёнро чунин тартиб медиҳем:

X	Y	Z	$X \vee Y$	$\overline{X}$	$\overline{Z}$	$\overline{X}\,\overline{Z}$	$(X \vee Y) \Rightarrow \overline{X}\,\overline{Z}$	$Y \vee Z$	$\left((X \vee Y) \Rightarrow \overline{X}\,\overline{Z}\right) \Leftrightarrow (Y \vee Z)$
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0

Аз рӯи ин Ҷадвали ќиматҳои ҳаќнокӣ бевосита мушоҳида мешавад, ки баёни додашуда (*) барои чунин комплекти ќиматҳои (X, Y, Z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0) ва (0, 0, 1) ҳаќ мебошад ва барои дигар комплекти ќиматҳои X, Y ва Z баёни (*) ноҳаќ аст.

Хосиятҳои амалҳо бо баёнҳо

Дида баромадем, ки амалҳои асосӣ бо баёнҳо инкор, дизъюксия, конъюнсия, импликатсия ва эквиваленсия мебошанд. Ин амалҳо дорои чунин хосиятҳои асосӣ мебошанд:

1. $\overline{\overline{X}} = X$ (ќонуни инкори инкор);
2. $X \vee Y = Y \vee X$ (ќонуни коммутативии дизъюксия);
3. $XY = YX$ (ќонуни коммутативии конюксия);
4. $(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee X)$ (ќонуни ќавснокии дизъюксия);
5. $(XY)Z = X(YX)$ (ќонуни ќавснокии конъюксия);
6. $X(Y \vee Z) = XY \vee XZ$ (ќонуни таќсимотии конъюнсия нисбат ба дизъюксия);
7. $X \vee (YZ) = (X \vee Y)(X \vee Z)$ (ќонуни таќсимотии дизъюксия нисбат ба конъюнксия);
8. $X \vee X = X$ (ќонуни якзайлии дизъюксия);
9. $XX = X$ (ќонуни якзайлии конъюксия);
10. $X \vee \overline{X} = H$ (ќонуни истиснои сегона). H – баёни доим ҳаќ (яъне $H \equiv 1$). Ин баён H – ро воҳиди мантиќӣ меномем.
11. $X\overline{X} = \theta$ (ќонуни зиддият). θ - баёни доим ноҳаќ (яъне $\theta \equiv 0$). Ин баён θ - ро ноли мантиќӣ меномем.

$$\left.\begin{array}{l} 12.\ X \vee \theta = X \\ 13.\ X \cdot \theta = \theta \end{array}\right\} \text{- хосиятҳои ноли мантиќӣ;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 14.\ X \vee H = H \\ 15.\ X \cdot H = X \end{array}\right\} \text{- хосиятҳои воҳиди мантиќӣ;}$$

16. $\overline{X \vee Y} = \overline{X}\overline{Y}$ - инкори дизъюксия;
17. $\overline{XY} = \overline{X} \vee \overline{Y}$ - инкори конъюксия;

Ин баробариҳои 16 ва 17 – ро дар мантиќ ќонунҳои де Морган
* меноманд.

18. $X \vee (XY) = X$ (ќонуни фурӯгузории конъюнксия);
19. $X(X \vee Y) = X$ (ќонуни фурӯгузории дизъюксия);
20. $X \Rightarrow Y = \overline{X} \vee Y$ (ифодашавии импликатсия бо инкор ва дизъюксия);

21. $(X \Leftrightarrow X) = H$ (ќонуни айният).

Ҳар як аз ин баробариҳо (1 – 21) – ро бо тарзи тартиб додани Ҷадвали ҳаќнокиашон исбот кардан мумкин аст. Масалан, барои исботи баробарии 7. тартиб додани Ҷадвали зерин кифоя мебошад:

X	Y	Z	YZ	$X \vee YZ$	$X \vee Y$	$X \vee Z$	$(X \vee Y)(X \vee Z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1.
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Яъне ќиматҳои ҳаќнокӣ дар сутуни $X \vee YZ$ ва сутуни $(X \vee Y)(X \vee Z)$ Ҷадвали мазкур айнан якхел мувофиќ меоянд (як сутун геё ду бор навишта шудааст). Бо ҳамин тариќи тартибдиҳии хадвалҳои ҳаќнокӣ ҳар як аз баробариҳои дигар (1 – 21) низ исбот мешавад. Иҷрои ин исботҳоро ба хонанда месупорем.

Дар асоси ин ќонуниятҳои (1 – 21) мантиќӣ табдилдиҳиҳои айниятии баёнҳо иҷро карда мешаванд.

Мисол. Исбот карда шавад, ки баёни $(X \Rightarrow Y)(X \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee YZ)$ ба баёни доим ҳаќ H баробар мебошад.

Исбот. Ин ифодаи баёниро табдил медиҳем:

$$(X \Rightarrow Y)(X \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee YZ) \underset{(20)}{=} (\overline{X} \vee Y)(\overline{X} \vee Z) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee YZ) \underset{(6)}{=}$$

$$\underset{(6)}{=} (\overline{X} \vee Y)\overline{X} \vee (\overline{X} \vee Y)Z \Leftrightarrow (\overline{X} \vee YZ) \underset{(3)}{=} \overline{X}(\overline{X} \vee Y) \vee Z(\overline{X} \vee Y) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee YZ) =$$

$$\underset{(19)}{=} \overline{X} \vee Z(\overline{X} \vee Y) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee YZ) \underset{(6)}{=} \overline{X} \vee Z\overline{X} \vee ZY \Leftrightarrow (\overline{X} \vee YZ) =$$

$$\underset{(3)}{=} \left(\overline{X} \vee \overline{X}Z\right) \vee YZ \Leftrightarrow (\overline{X} \vee YZ) \underset{(18)}{=} \overline{X} \vee YZ \Leftrightarrow (\overline{X} \vee YZ) \underset{(21)}{=} H .$$

Дар ин табдилдиҳӣ ќонунҳои (20), (6), (3), (19), (18) ва (21) истифода шудаанд. Бояд ќайд намуд, ки ин тасдиќ тавассути тартиб додани Ҷадвали ҳаќнокӣ ҳам исбот мешавад:

X	Y	Z	$X\Rightarrow Z$	$X\Rightarrow Y$	$(X\Rightarrow Y)(X\Rightarrow Z)$	$\overline{X}$	YZ	$\overline{X}\vee YZ$	$I\Rightarrow II$
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
					I			II	

МАШЌ

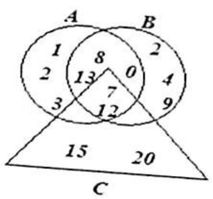
1. Баробариҳои (16), (17), (18), (19) ва (20) бо тарзи тартибдиҳии Ҷадвали ҳаќнокӣ исбот карда шаванд.

Махмеи ҳамаи баёнҳоро, ки дар он амалҳо бо баёнҳо ичро мешаванд, алгебраи баёнҳо меноманд.

МАШҚҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

1. Бигузор $A=\{x\mid x^2-16\le 0,\ x\in Z\}$, $B=\{x\mid -10\le x\le 10,\ x\in Z\}$ бошад. $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $A\Delta B$ ёфта шавад.

2. Маҷмӯъҳои A, B ва C ба воситаи диаграммаҳо дода шудаанд (Расми 11). $A\cup B$, $A\setminus C$, $B\Delta C$, $(A\cup B)\cap C$, $(A\Delta B)\cup C$ ёфта шавад.



расми 11

3. Ҳамаи зермаҷмӯъҳои маҷмӯи $A=\{3,5,2,\{m,n\}\}$ - ро нависед.

4. Агар $A=\{a,b,c\}$ бошад, зермаҷмӯъҳои хос ва ѓайрихосро нишон диҳед.

5. Агар $A=\{x\mid |x-3|\le 5,\ x\in Z\}$ ва $B=\{x\mid 0\le x\le 4,\ x\in Z\}$. бошад, миќдори элементҳои маҷмӯъҳои $A\cap B$ ва $A\setminus B$ - ро ёбед.

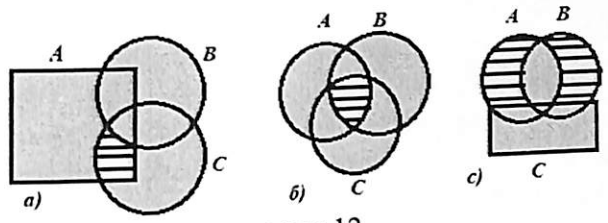
6. Агар $A=\{1,3,5,a,b\}$, $B=\{4,2,a,c\}$ бошад, миќдори зермаҷмӯъҳои маҷмӯи $A\cup B$ - ро ёбед.

7. Маҷмӯъҳои зеринро ба воситаи диаграммаҳо тасвир намоед.

1) $A\cap(B\cup C)$; **2)** $(A\cap C)\cap\overline{B}$; **3)** $A\cap(\overline{B\cup C})$.

8. Агар $n(A)=10$, $n(B)=4$, $n(A\setminus\overline{B})=2$ бошад, $n(A\Delta B)$– ро ёбед.

9. Маҷмӯеро, ки ба ќисми хатчадори диаграммаҳои дар расми 12 тасвирёфташуда мувофиќ меоянд, нависед.



расми 12

10. Агар $n(B)=n(A\setminus B)=8$ ва $n(B\setminus A)=6$ бошад, пас $n(A\cap B)$–ро ёбед.

11. Исбот намоед.

1) $(A\cap B)\setminus(C\cap B)=(A\cap B)\setminus C$.

2) $S\setminus\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha}(S\setminus A_\alpha)$.

3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

4) $[\overline{\overline{(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})}}]=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$.

12. Содда кунед.

1) $[A\cup(A\cap B)]\setminus[(A\cap B)\cup\overline{(\overline{A}\cup A)}]$.

2) $[\overline{(A\cup B)\cap(\overline{A}\setminus\overline{B})}\cap(A\setminus B)]$.

3) $[\overline{A\cup(\overline{B}\cap A)}]\cup[A\cup(B\cap C)]$.

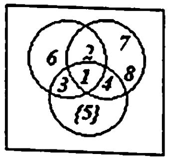
4) $[(A\cap B)\cup\varnothing]\cap[\overline{\overline{(\overline{A}\cup\varnothing)}\cup\overline{A}}]$.

13. $A=\{1,2,5\}$, $B=\{4,6,7,9,10\}$, $S=\{0,1,3,4,5,6,7,8,9\}$ дода шудааст. Элементҳои маҷмуҳои зеринро ёбед

1) $(A\setminus B)\cup S$; **2)** $(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\setminus A)$; **3)** $\overline{(\overline{A}\cup B)}$; **4)** $S\setminus(\overline{A\cap B})$.

14. Агар $A=\{x|\,x - \text{адади токи хурд аз } 10\}$ ва $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ бошад, пуркунандаи маҷмӯи A то S, яъне CA-ро ёбед.

15. Аз рӯи диаграммаи додашуда элементҳои маҷмӯи $C(A\cap B)\cap C$ - ро ёбед.



16. Маҷмӯҳои $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$-ро ёбед, агар $A=\{x\,|\,|x-2|<1\}$, $B=\{x\,|\,|x-2|+|x-3|<4\}$ бошад.

17. Дода шудааст: $A=\{2,3,4,5,6\}$. Байни элементҳои он муносибати $R=\{(a,b)\,|\,a,b\in A\wedge a-b\,\vdots\,3\}$ ҷой дорад. R – дорои кадом хосиятҳо ҳаст?

A) $R=\{(2,5),(5,2),(6,3)\}$ – ҷуфтҳое, ки талаботро қонеъ мекунанд; B) рефлексивӣ; C) рефлексивӣ ва симметрӣ; D) рефлексивӣ, симметрӣ ва ғайритранзитивӣ; E) транзитивӣ.

18. Муносибати $|x|+|y|\neq 3$ дар Z дода шудааст. Кадоме аз хосиятҳои дар зер овардашуда барои он дуруст аст: A) рефлексивӣ ва антисиметрӣ; B) симметрӣ ва транзитивӣ; C) симметрӣ; D) рефлексивӣ ва симметрӣ; E) ассиметрӣ ва транзитивӣ.

19. Маҷмӯи $X=\{a,b,c,d\}$ ва байни элементҳои он муносибати $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$ дода шудааст. R дорои кадом хосиятҳо аст?

A) рефлексивӣ ва ассиметрӣ; B) рефлексивӣ ва симметрӣ; C) симметрӣ;

D) транзитивӣ; E) симметрӣ ва транзитивӣ.

20. Дода шудааст: муносибати $x^2=y^2$ $(x,y\in Z)$:

Он дорои хосияти:A) рефлексивӣ ва симметрӣ; симметрӣ ва транзитивӣ; C) рефлексивӣ, симметрӣ ва транзитивӣ; D) рефлексивӣ, ассиметрӣ ва транзитивӣ; E) рефлексивӣ ва антитранзитивӣ мебошанд.

21.**Масъала***. Аз 100 донишҷӯ 28 нафар забони англисӣ, 30 кас – олмонӣ, 42 нафар – франсузӣ, 5 кас англисӣ ва олмонӣ, ҳарсе забонро 3 нафар меомӯзад. Чанд донишҷӯ ягон забонро намеомӯзанд? Чанд донишҷӯ фақат як забонро меомӯзанд?

22. Дода шудааст: $A=\{2,3,5,6\}$. Ҳосили зарби декартиро тартиб диҳед ва барои муносибати

$R=\{(a,b)\,|\,a,b\in A\wedge a-b\,\vdots\,3\}$

ҳамаи ҷуфтҳои онро маълум намуда графики муносибатро созед.

23 Элементҳои маҷмӯи $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ бо муносибати $x>y$ алоқаманданд. Граф ва графики онро созед. Ин муносибат дорои кадом хосиятҳо аст?

24. Дар маҷмӯи $Y=\{y|y\in Z\wedge -13\leq y\leq -2\}$ муносибати R: "$x=2y$" дода шудааст. Кадоме аз ин навиштаҳо дурустанд?:

а) $(-6,-3)\in R$; *б)* $(-3,-6)\in R$; *в)*$(-4,-2)\in R$; *г)* $(-8,-4)\in R$.

25. Муносибати R дар маҷмӯи $A=\{a,b,c\}$ бо графики $R=\{(a,b),(a,c),(b,c)\}$ дода шудааст. R_- ва R_+ ёфта шавад.

26. Маҷмӯи $A=\{4,2,6,3,5,-3,-8,-6,0\}$ дода шудааст. Зермаҷмӯъҳои ҳосили зарби декартии $A\times A$, ки ба муносибати: *а)* "*a* аз *b* хурд аст"; *б)* "*a* ба *b* тақсим мешавад"; *в)* "адади *a* аз адади *b* 2 маротиба калон аст" навишта шаванд.

27. Кадоме аз аломтҳои математикии зерин **ишораҳои муносибат** ва кадомашон **ишораҳои амал** ҳисоб мешаванд?:

а) $>$; *б)* $\neq$; *в)* $<$; *г)* $+$; *д)* $\leq$; *е)* $-$; *ж)*$\|$; *з)* $\perp$; *и)* $\measuredangle$; *к)* $\div$; *л)* $\subset$; *м)* $\cap$; *н)*$\simeq$; *о)*$\vdots$; *п)* $\cup$; *р)* $\in$

28. Дар маҷмӯи касрҳо муносибати "касри $\frac{a}{b}$ ба касри $\frac{c}{d}$ баробар аст" дода шудааст. Ин каср дорои кадом хосиятҳо ҳаст?

29. Барои маҷмӯи $A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$ ва муносибати $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in A, y\,\vdots\,x\wedge x\leq 3\}$ соҳаи муайянӣ R_-, соҳаи қиматҳо R_+, муносибати баръаксӣ R^{-1} ёфта шавад.

30. Ҷадвали ќиматҳои ҳаќнокии ҳар як аз баёнҳои таркибии зерин тартиб дода шавад.

а) $X(Y \vee Z)$, б) $\big(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)\big) \Leftrightarrow (XY \Rightarrow Z)$,

в) $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee Y)$, г) $\overline{X}\overline{Y}$,

д) $\overline{X \vee Y}$, е) $\overline{X}\overline{Y} \Leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$,

ё) $(X \Rightarrow Y)(Y \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (X \Rightarrow Z)$,

ж) $(X \Rightarrow Y)(X \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (X \Rightarrow YZ)$,

з) $\big((X \Rightarrow YZ) \Rightarrow (\overline{Y} \Rightarrow \overline{X})\big) \Rightarrow \overline{Y}$.

31. Ифодаҳои зерин бо тарзи табдилдиҳӣ содда карда шаванд:

а) $\overline{X \vee Y} \Rightarrow \big((X \vee Y) \Rightarrow X\big)$;

б) $\overline{\overline{P}\overline{Q}} \vee \big((P \Rightarrow Q)P\big)$;

в) $(A \Rightarrow B)(B \Rightarrow A)(A \vee B)$;

г) $XZ \vee X\overline{Z} \vee YZ \vee \overline{X}YZ$;

д) $\overline{(P \Rightarrow Q)(Q \Rightarrow \overline{P})}$.

БОБИ 2. АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ

2.1. Аадаҳои комплексӣ ва амалҳо бо ададҳои комплексӣ

Маълумоти мухтасари таърихӣ. Дар давраҳои гуногуни тараќќиёти математика чандин бор зарурияти васеъкунии мафҳуми адад ба амал омад. Чунончӣ, дохил кардани ададҳои манфӣ имконияти муайянкунии амали тарҳ, ба амал омадани ададҳои касрӣ, сабаби иҷрои амали таќсим, ба амал омадани ададҳои ирратсионалӣ имконияти баровардани реша аз адади ҳаќиќии мусбат ва ниҳоят дохил шудани ададҳои комплексӣ - сабаби баровардани реша аз ҳар гуна адади манфӣ гардид. Ҳамчун натиҷа аз он, масъалаи ҳалли муодилаи квадратӣ бо дискриминанти ихтиёрӣ, иҷро гардид. Хосияти муҳимтарини ададҳои комплексӣ он далел аст, ки ҳамаи амалҳои математикӣ бо онҳо, аз соҳаи ададҳои комплексӣ намебарояд. Дохил намудани ададҳои комплексӣ ва функсияҳои таѓйирёбандаи комплексӣ тавоноии илми математикаро пурќувват гардонид ва он батадриҷ дар ҳалли масъалаҳои назариявӣ ва амалии соҳаҳои гуногуни хоҷагии халќ истифода бурда мешавад. Аввалин аќидаҳо оид ба ададҳои комплексӣ, ҳангоми баровардани реша аз ададҳои манфӣ, дар тадќиќотҳои риёзидони итолиёвӣ Д. Кардано соли 1545 пайдо шудааст. Ҳамватани ӯ Р. Бомбелӣ соли 1572 аввалин шуда амалҳо бо ададҳои комплексиро то андозае асоснок карда, татбиќи онҳоро дар ҳалли муодилаи кубӣ истифода бурд. Аммо солҳои тӯлони математикони ҷаҳон оид ба ададҳои комплексӣ тасаввуроти аниќ надоштанд, чунки шарҳи геометрии ададҳои комплексӣ ҳануз маълум набуд. К. Ф. Гаусс соли 1831 аввалин шуда, бо таври систематикӣ ададҳои комплексӣ, амалҳо бо онҳо ва шарҳи геометрии онҳоро баён намуд. Истилоҳи «адади комплексӣ» низ ба Л. Эйлер ӯ мутааллиќ аст. Як ќатор далелҳои таҳлили комплексиро Л. Эйлер ҳосил намуд. Аммо таҳлили комплексӣ чун фанни мустаќил танҳо дар корҳои О. Кошӣ, Б. Риман ва К. Вейерштрасс ба шакл дароварда шуд. Дар тараќќиёти минбаъдаи ин назария ва татбиќи он олимон Ю.В. Сохотский, Н.Е. Жуковский, С. А. Чаплигин, А. И. Маркушевич, И.И. Привалов, М. В. Келдыш, Н. И. Мусхелишвили, Р. Д. Гахов, Э. И. Зверович, Л.Г. Михайлов, А. Ҷӯраев, Н. Раҷабов ва дигарон саҳм гузоштаанд.

Таърифи 2.1.1. Ифодаи намуди $a+bi$ – ро адади комплексӣ меноманд, ки дар ин ҷо a,b ададҳои ҳақиқӣ i – воҳиди мавҳум ва $i^2=-1$ аст.

Адади a қисми ҳақиқии адади комплексӣ, bi – қисми мавҳум номида мешаванд.

Маҷмӯи ададҳои комплексӣ бо ҳарфи C ишорат карда мешавад. Дар маҷмӯи C мафҳуми «калон», «хурд» иҷронашавандааст, аммо мафҳуми баробарӣ иҷро мегардад.

Таърифи 2.1.2 Ду ададҳои комплексии $z_1=a+bi$ ва $z_2=c+di$ фақат ва фақат дар ҳамон ҳолат баробаранд, ки агар қисми ҳақиқӣ ва қисми мавҳумашон мувофиқан баробар бошанд, яъне:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \cdot z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im} z_2 \end{cases},$$

Барои ададҳои комплексӣ амалҳои ҷамъ, тарҳ, зарб, тақсим, бадараҷабардорӣ ва аз решабаробрӣ иҷроша-ванда аст.

Бигузор ду адади комплексӣ дар шакли алгебравӣ дода шуда бошанд:

$$z_1=a+bi \text{ ва } z_2=c+di.$$

Суммаи ададҳои комплексии z_1 ва z_2 гуфта адади зеринро меноманд:

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

Фарқи ададҳои комплексии z_1 ва z_2 гуфта адади зеринро меноманд:

$$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$$

Ҳосили зарби ададҳои комплексии z_1 ва z_2 гуфта адади зеринро меноманд:

$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ҳосили тақсими ададҳои комплексии z_1 ва z_2 гуфта адади зеринро меноманд.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

ки дар ин ҷо адади $c-di$ ҳамроҳшудаи адади комплексии $z_2=c+di$ меноманд.

Мисоли 2.1.1. Амалҳоро иҷро кунед.

а) $(7+6i)-(4+3i)+(12-5i)=(7-4)+(6-3)i+(12-5i)=$
$=(3+3i)+(12-5i)=(3+12)+(3-5)i=15-2i;$

б) $(3-i)\cdot(5-4i)-(30+10i)\cdot(2-3i)+(4+15i)\cdot(2-4i)=$
$=(15-4)+(-5-12)i-(60+30)+(20-90)i+(8+60)+$
$+(-16+30)i=(11-17i)-(90-70i)+(68+14i)=(-79+53i)+$
$+(68+14i)=-11+67i;$

в) $\frac{7-2i}{4+3i}=\frac{(7-2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{(28-6)+(-8-21)i}{16+9}=\frac{22}{25}-\frac{29}{25}i;$

Мисоли 2.1.2 Ҳисоб кунед. $i^{45}, i^{54}, i^{204}, i^{503}$.

Ҳал: $i^{45}=i^{4\cdot 11+1}=\left(i^4\right)^{11}\cdot i^1=1\cdot i=i.$

$$i^{54}=i^{4\cdot 13+2}=\left(i^4\right)^{13}\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1.$$

$$i^{204}=i^{4\cdot 51+0}=\left(i^4\right)^{51}\cdot i^0=1\cdot 1=1.$$

$$i^{503}=i^{4\cdot 125+3}=\left(i^4\right)^{125}\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i.$$

Мисоли 2.1.3. Муодиларо нисбат ба тағирёбандаҳои x ва y ҳал кунед.

$$(3+2i)x+(4+6i)y=2+5i; \qquad (2.1.1)$$

дар ин ҷо тағирёбандаҳои x ва y ададҳои ҳақиқи анд.

Ҳал: Тарафи чапи муодиларо дар намуди $a+bi$ менависем, ки дар ин ҷо $a\in R$ ва $b\in R$, аз баробарии ададҳои комплексӣ $a+bi$ ва $a'+b'i$, бармеояд, ки $a=a'$ ва $b=b'$ пас аз муодилаи (2.1.1) муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$(3x+4y)+(2x+6y)i=2+5i; \qquad (2.1.2)$$

муодилаи (2.1.1) ба муодилаи (2.1.2) баробаркувва аст. Аз муодилаи (2.1.2) системаи зеринро тартиб медиҳем:

$$\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 2x+6y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x-12y=-6 \\ 4x+12y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x=4 \\ 4x+12y=10 \end{cases}$$

$$-5x=4;\ x=-\frac{4}{5};$$

$$-\frac{16}{5}+12y=10;\ 12y=10+\frac{16}{5};\ 12y=\frac{66}{5};\ y=\frac{11}{10};$$

$$x=-\frac{4}{5};\ y=\frac{11}{10};$$

Мисоли 2.1.4. Ҳисоб кунед. $(2+i)^5$.

Ҳал. Барои ҳар як дараҷаи n-уми адади комплексии $(a+bi)$ формулаи биноми Хайём-Нютон татбиқшаванда аст. Пас, барои ҳисоб кардани чунин ададҳои комплексӣ аз рӯи формулаи биноми Хайём- Нютон истифода мебарем.

$$a^n=(a+bi)^n=a^n+C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot bi+C_n^2\cdot a^{n-2}(bi)^2+\ldots+C_n^k\cdot$$
$$\times a^{n-k}\cdot(bi)^k+\ldots+C_n^{n-1}\cdot(bi)^{n-1}+(bi)^n;$$

Дар ин ҷо: $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$,

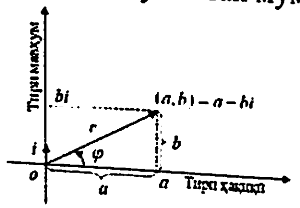
$$(2+i)^5=2^5+C_5^1\cdot2^4\cdot i+C_5^2\cdot2^3\cdot i^2+C_5^3\cdot2^2\cdot i^3+C_5^4\cdot2^1\cdot i^4+$$
$$+C_5^5\cdot2^0\cdot i^5=32+80i-80-40i+10+i=-38+41i.$$

2.2. Шакли тригонометрии адади комлексӣ. формулаи муавр

Бигузор адади комплексӣ дар шакли алгебравӣ $z=a+bi$ дода шуда бошад. Барои адади комплексиро дар шакли тригонометӣ навиштан, аввал модули адади комп-лексӣ ва аргументи онро ёфта баъд онро дар шакли тригонометрӣ менависанд.

Адади ҳақиқии ғайриманфии $\sqrt{a^2+b^2}=r-ро$ модули адади комплексии $z=a+bi$ меноманд. Модули адади z- ро бо $|z|$ ишорат менамоянд.

Кунҷи φ- ро аргументи адади z номида бо $\arg z=\varphi$ ишора менамоянд ва аз рӯи формулаи $tg\,\varphi=\dfrac{b}{a}$ муайян карда мешавад. Ҳар як адади комплексии $z=a+bi$- ро бо нуқтаи $M(a,b)$- и ҳам-вории декартӣ (ё вектори ибтидояш дар нуқтаи a ва интиҳояш дар нуқтаи b), ба таври яккимата дар мувофиқа гузоштан мумкин аст.



Расми 19

Тири абсисса тири ҳақиқӣ ном дорад. Тири ордината тири мавҳум ном дорад.

Ифодаи $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)-ро$ шакли тригонометрии адади комплексии z меноманд. Амалҳо бо ададҳои ком-плексӣ дар шакли тригонометриро дида мебароем.

Бигузор ададҳои комплексии z_1 ва z_2 дар шакли три-гонометрӣ дода шуда бошанд:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\ \text{ва}\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Таърифи 2.2.1. Барои зарб кардани ададҳои $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ ва $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ модулҳоро зарб карда, аргументҳоро ҷамъ мекунанд:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$
$$z_1\cdot z_2=[r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)]\cdot[r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)]=$$
$$=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+$$
$$+\cos\varphi_1\cdot i\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+(-1)\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2))=$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Дар вақти зарб кардани n адад
и комплексии баробар аз рӯи формулаи зерин:

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

ки инро формулаи Муавр меноманд, истифода мебаранд.

Таърифи 2.2.2. Барои тақсим кардани ададҳои $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ ва $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ модулҳои ин ададҳоро тақсим карда, аз аргументи адиди z_1 аргументи адиди z_2 тарҳ карда мешавад.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1(-i\sin\varphi_2)+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1(-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2)^2-(i\sin\varphi_2)^2}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{(\cos\varphi_2)^2-i^2(\sin\varphi_2)^2}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-(-1)\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{(\cos\varphi_2)^2-(-1)(\sin\varphi_2)^2}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{(\cos\varphi_2)^2+(\sin\varphi_2)^2}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(-\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)}{(\cos\varphi_2)^2+(\sin\varphi_2)^2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{1}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i(\sin\varphi_1-\varphi_2)).$$

Мисоли 2.2.1. Амалҳо бо ададҳои комплексӣ дар шакли тригонометриро истифода бурда ифодаҳои зеринро ҳисоб кунед.

а) $(1+i\sqrt{3})\cdot(1+i)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$;

Ҳал: Шакли тригонометрии ҳар яке аз ин ададҳои додашударо меёбем.

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);\quad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

Пас, чунин ҳосил мешавад:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot(1+i)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot$$

$$\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\cdot\sqrt{2}\cdot$$

$$\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=2\sqrt{2}\left[\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]=$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right];$$

б) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)+\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}\right)i=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}i=-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}i=\frac{1}{4}(-\sqrt{2}+i);$$

Мисоли 2.2.2. Аз формулаи Муавр истифода бурда, адади зеринро ҳисоб кунед:

$$\frac{(1+i)^8}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{15}}$$

<u>**Ҳал.**</u> Сурат ва махраҷи касри додашударо дар шакли тригонометрӣ ифода мекунем:

$$z_1=1+i,\quad a=1,\quad b=1.$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4},$$

Пас, $z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Айнан ҳамин тавр шакли тригонометрии адади $z_2=1+i\sqrt{3}$ – ро муайян мекунем:

$z_2=1+i\sqrt{3}$, $a=1$, $b=\sqrt{3}$.

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}$, $r=2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Пас, $z_2=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Акнун, аз формулаи Муавр

$$z^k=(a+bi)^k=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^k=r^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$$

- ро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\frac{(1+i)^8}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{15}}=\frac{\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right]^8}{\left[2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\right]^{15}}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^8(\cos 8\cdot\frac{\pi}{4}+i\sin 8\cdot\frac{\pi}{4})}{2^{15}(\cos 15\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 15\cdot\frac{\pi}{3})}=$$

$$=\frac{1}{2^{11}}\cdot\frac{\cos 2\pi+i\sin 2\pi}{\cos 5\pi+i\sin 5\pi}=\frac{1}{2^{11}}\cdot\frac{1+0\cdot i}{-1+i\cdot 0}=\frac{1}{-2^{11}}=-\frac{1}{2^{11}}$$

2.3. Аз решаи квадратӣ ва решаи n-ум озод намудани ададҳои комплексӣ

Бигузор адади комплексӣ дар шакли алгебравӣ $z=a+bi$ дода шуда бошад. Барои аз решаи квадратӣ озод намудани адади комплексӣ аз формулаи

$$\sqrt{a\pm bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

Исбот. Бигузор

$$\sqrt{a+bi}=x+iy \qquad (1)$$

бошад, ки дар ин хо x ва y бояд ёфта шаванд. Тибќи ин баробарӣ (1) меёбем:

$$a+bi=x^2+2xyi-y^2, \qquad (2)$$

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\ 2xy=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^4-2x^2y^2+y^4=a^2\\ 4x^2y^2=b^2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-2x^2y^2+y^4=a^2+b^2 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Акнун системаи зеринро ҳал намудан кифоя аст:

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases} \qquad (3)$$

Аз ин хо меёбем, ки $x=\pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ ва $y=\pm\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$.

Яъне системаи (3) дорои чаҳор ҳалҳои (x , y) ; (x , - y) ; (-x , y) ва (- x , - y) мебошад. Лекин аз ин ҳалҳо системаи (2) – ро фаќат ҳалҳои (x , y) ва (- x , - y) ќаноат менамоянд. Бинобар ҳамин дар тарафи рости баробарии (1) фаќат ҳамин халҳоро гузоштан лозим аст:

$$\sqrt{a+bi}=x+iy=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

Барои решаи $\sqrt{a-bi}$ бошад, системаи (2) шакли зеринро ноил мешавад:

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\ 2xy=b\end{cases}.$$

Ин системаро бошад, фаќат ҳалҳои (x , - y) ва (-x , y) ќаноат карда метавонанд. Бинобар ҳамин :

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

Мисоли 2.3.1. Ададҳои комплексии зеринро аз решаи квадратӣ озод кунед.

а) $\sqrt{15+8i}$; в) $\sqrt{-3+4i}$;

Ҳал. $a)\ \sqrt{15+8i}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{15^2+8^2}+15}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{15^2+8^2}-15}{2}}\right)=$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{225+64}+15}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{225+64}-15}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{289}+15}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{289}-15}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{17+15}{2}}+i\sqrt{\frac{17-15}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{16}+i\sqrt{1}\right)=\pm(4+i).$$

$$b)\ \sqrt{-3+4i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{9+16}-3}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{9+16}+3}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{3}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{5-3}{2}}+i\sqrt{\frac{5+3}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{1}+i\sqrt{4}\right)=\pm(1+2i).$$

Мисоли 2.3.2. Муодиларо ҳал кунед.

$$x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0;$$

Ҳал: Ин муодилаи квадратӣ бо коэффитсиентҳои комплексӣ дода шудааст. Дискриминанти онро муайян мекунем:

$$x_{1,2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{(2+i)^2-4(-1+7i)}}{2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{4+4i-1+4-28i}}{2}=$$

$$=\frac{(2+i)\pm\sqrt{7-24i}}{2}.$$

Бо ёрии формулаи аз решаи квадратӣ озод кардани адади комплексӣ истифода бурда ҳосил мекунем.

$$\sqrt{7-24i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{49+576}+7}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{49+576}-7}{2}}\right)=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{625}+7}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{625}-7}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{25+7}{2}}-i\sqrt{\frac{25-7}{2}}\right)=$$
$$=\pm\left(\sqrt{16}-i\sqrt{9}\right)=\pm(4-3i).$$
$$x_1=\frac{(2+i)-(4-3i)}{2}=-1+2i;$$
$$x_2=\frac{(2+i)+(4-3i)}{2}=3-i;$$

Аз решаи n – ум баровардани адади комплексиро нишон медиҳем. Маълум, ки ќимати $\sqrt[n]{\alpha}$ ягон адади комплексии $\rho(\cos t+i\sin t)$ мебошад. Бинобар ин

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos t+i\sin t)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n(\cos nt+i\sin nt)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \rho^n=r\ \text{ва}\ nt=\varphi+2\pi k\ \Rightarrow\ \rho=\sqrt[n]{r}\ \text{ва}\ t=\frac{\varphi+2\pi k}{n}.$$

Ин ќиматҳои ёфташудаи ρ ва t– ро дар баробарии аввал гузошта ҳосил мекунем:

$$\beta_k=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=\overline{0,n-1}.$$

Инро формулаи решабарори аз адади комплексӣ меноманд.

Мисоли 2.3.3. Ҳамаи қиматҳои решаи $\sqrt[4]{1}$ –ро ҳисоб кунед.

Ҳал: Барои аз адади решаи нишондиҳандааш n-уми комплексӣ баровардан аз формулаи дода шуда истифода мебарем.

$$\beta_k=\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{\cos 0^0+i\sin 0^0}=\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4},$$

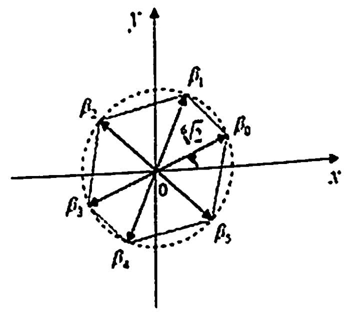
$$\beta_0=\cos 0^0+i\sin 0^0=1,\qquad \beta_1=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=i,$$
$$\beta_2=\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}=-1,\qquad \beta_3=\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}=-i,$$

Мисоли 2.3.3. Решаро ҳисоб намоед:

$$\beta_k=\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}=\sqrt[6]{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{6}\right).$$

$$\beta_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right),\qquad \beta_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18}\right),$$
$$\beta_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right),\qquad \beta_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{18}+i\sin\frac{19\pi}{18}\right),$$
$$\beta_4=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}\right),\qquad \beta_5=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{18}+i\sin\frac{31\pi}{18}\right).$$

Аз ин ҷо бевосита маълум, ки $|\beta_k|=\sqrt[6]{2}$, яъне, он нуќтаҳое, ки ќимати ин решаҳо β_k– ро тасвир менамоянд, аз ибтидои координатаҳо дар як хел масофа $|\beta_k|=\sqrt[6]{2}$ воќеъ мебошанд: онҳо дар болои давраи радиусаш $\sqrt[6]{2}$ ва марказаш дар ибтидои система воќеъбударо мехобанд (Расми 20).



Расми 20

Аргументи β_0 ба $\frac{\pi}{18}$ баробар аст. Аз рӯи формулаи решабарорӣ аз адади комплексӣ бевосита маълум аст, ки агар $\arg\beta_0=\frac{\pi}{18}$ ба адади $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ пай дар пай хамъ намоем, он гох аргументҳои ададҳои $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ ҳосил мегардад: аргументи ҳар як аз ин решаҳо аз аргументи пешояндааш ба адади доимии $\frac{\pi}{3}$ фарќ дорад. Бинобар ин ҳамаи он нуќтаҳое, ки решаҳо β_k

($\kappa=0,1,2,3,4,5$) – ро тасвир менамоянд, ќуллаҳои шашкунхаи мунтазами дарункашидашуда мебошанд (Расми 3). Ин ҳол дар мавриди умумӣ ҳам низ хой дорад. Аз формулаи решабарорӣ аз адади комплексӣ бевосита маълум аст, ки $|\beta_k|=\sqrt[n]{r}$, $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ ва $\arg\beta_0=\dfrac{\varphi}{n}$ мебошад. Аргументи ҳар як аз ин решаҳо β_k аз аргументи пешояндааш ба адади доимии $\dfrac{2\pi}{n}$ фарќ менамояд. Бинобар ин нуќтаҳое, ки ќиматҳои решаи $\beta_k=\sqrt[n]{\alpha}$ – ро тасвир менамоянд, ќуллаҳои n – кунхаи мунтазами ба давраи радиусаш $\sqrt[n]{r}$ ва марказаш дар ибтидои система воќеъбуда дарункашидашуда мебошанд.

Мисоли 2.3 4. Решаро ҳисоб намоед:

$$\sqrt[11]{\frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}};$$

<u>Ҳал.</u> Ба монанди мисоли 1, касри дар таҳти реша додашударо чунин менависем:

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{3}-i)}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

Адади комплексии ҳосилшударо дар шакли тригонометрӣ ифода мекунем:

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\quad a=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad b=-\frac{1}{2}.$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{1},\quad r=1.$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi&=\frac{b}{r}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi=\frac{11\pi}{6}.$$

Формулаи аз решаи дараҷаи n – ум баровардани адади комплексиро истифода мебарем.

$$\eta_k=\sqrt[11]{\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}}=\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{11}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{11};$$

дар ҳолати $k=0$ будан:

$$\eta_{k=0}=\cos\frac{\frac{11\pi}{6}}{11}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}}{11}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

дар ҳолати $k=1$ будан:

$$\eta_{k=1}=\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi}{11}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi}{11}=\cos\frac{23\pi}{66}+i\sin\frac{23\pi}{66}$$

Дигар решаҳо $\eta_2,\eta_3,\eta_4,\dots,\eta_{10}$ айнан ҳамин тавр ҳисоб карда мешаванд.

МАШҚҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Амалҳоро иҷро кунед.

1. $(5+3i)-(5+3i)\cdot(4+3i)$;
2. $(4+12i)+(6+2i)\cdot(5+3i)\cdot(3+2i)$;
3. $\frac{2+4i}{3+i}$; 4. $\frac{7+6i}{2+4i}+(3+2i)$;
5. $\frac{2-7i}{6+3i}+(1+i)\cdot(1-i)$; 6. $\frac{4+i}{5+2i}+(2+3i)$;
7. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-(1-i)^2$; 8. $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;
9. $(1+i)\cdot(2+i)+\frac{5}{1-2i}$; 10. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$; $(n\in Z)$;

Муодилаҳоро нисбат ба тағирёбандаҳои *х ва у* ҳал кунед.

11. $(3+i)x-(2+4i)y=-2-4i$;
12. $x-8i+(y-3)i=1$;
13. $\frac{ix-4i-y+1}{1+i}=5+2i$; 14. $\frac{ix-4i-y+1}{1-i}=5-2i$;
15. $(1+2i)x-(3-5i)y=1-3i$;
16. $2+5xi-3yi=14+3x-5y$;
17. $\frac{6x-yi}{5+2i}=\frac{15}{8x+3yi}$;
18. $(3-i)x+(4+2i)y=2+6i$;
19. $(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i$;
20. $(2+i)x-(2-i)y=6$;

Аз формулаи биноми Хайём- Нютон истифода бурда ҳисоб кунед.

21. $(1+2i)^3$; 22. $(1-2i)^4$; 23. $(2+i)^5$; 24. $(1-i)^6+(1+i)^6$;
25. $(1+2i)^6$; 26. $(2+i)^7+(2-i)^7$; 27. $(1+2i)^6-(1-2i)^6$; 28. $(4+7i)^3$;
29. $(1+i)^4$; 30. $(8+3i)^2$;

Шакли тригонометрии ададҳои комплексиро нависед.

31. 1; 32. -1; 33. i; 34. $-i$; 35. $1+i$;
36. $-1+i\sqrt{3}$; 37. $-1-i\sqrt{30}$; 38. $1+i$; 39. $2i$;

40. $2+\sqrt{3}+i$; **41.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; **42.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;

43. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **44.** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **45.** $2-\sqrt{3}-i$;

Аз формулаи Муавр истифода бурда хисоб кунед.

46. $(1+i)^{25}$; **47.** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ **48.** $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$;

49. $\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$;

50. $\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot(1+i)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$;

51. $\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi-i\sin\psi}$; **52.** $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$

53. $\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{15}}+\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{15}}$; **54.** $\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$

55. $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{4}}+(1+i)^2\left(\sqrt{3}-i\right)$;

Ададҳои комплексиро аз решаи квадратӣ озод кунед.

56. $\sqrt{5+12i}$; **57.** $\sqrt{5-12i}$; **58.** $\sqrt{-15+12i}$;

59. $\sqrt{-15-12i}$; **60.** $\sqrt{24+10i}$; **61.** $\sqrt{-24-10i}$;

62. $\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; **63.** $\sqrt{-6-8i}$;

64. $\sqrt{-15+8i}$; **65.** $\sqrt{2-3i}$;

Ададҳои комплексиро аз реша озод кунед.

66. $\sqrt[3]{1}$; **67.** $\sqrt[3]{-1}$; **68.** $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$;

69. $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$; **70.** $\sqrt[4]{-1-i}$; **71.** $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$;

72. $\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$; **73.** $\sqrt[6]{\frac{-\sqrt{3}+i}{-2-2i}}$;

74. $\sqrt[3]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}}$; **75.** $\sqrt[6]{\frac{-128}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$;

Муодилаҳоро ҳал кунед.

76. $x^2-(6+i)x+5+5i=0$; **77.** $x^2-(5+5i)x+2+11i=0$;

78. $4x^2-(6+4i)x-1+3i=0$; **79.** $x^2+(5-2i)x+5(1-i)=0$;

80. $x^2+(1-2i)x-2i=0$; **81.** $(2+i)x^2+(5-i)x+5(2-2i)=0$;

82. $3x^2-(14-8i)x+8(4-3i)=0$; **83.** $(4-2i)x^2+(7-i)x+5(1+i)=0$

; ;

84. $(3-i)x^2-2(2-3i)x-4i=0$; **85.** $(2+4i)x^2+2x+6-6i=0$;

БОБИ 3. МАТРИСАҲО ВА МУАЙЯНКУНАНДАҲО

3.1. Матриса ва намудҳои он

Мафҳумҳои *матриса* ва *муайянкунанда* аз қабили мафҳумҳои бунёдии алгебраи хаттӣ буда, чӣ дар доираи алгебраи хаттӣ ва чӣ берун аз он татбиқи бешумор доранд. Масалан, ҳангоми баёни назарияи системаи муодилаҳои хаттӣ аз навишти матрисавии ин системҳо истифода мебаранд. Бисёр моделҳои хаттӣ, ки ифодакунандаи равандҳои гуногун мебошанд, бо истифода аз мафҳуми *матриса* ба намуди кӯтоҳ ва барои истифода қулай навишта мешаванд. Аксар усулҳои ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ бо мафҳумҳои матриса ва муайянкунанда зич алоқаманд мебошанд. Бинобар ин, аввал бо ин ду мафҳуми асосӣ шинос мешавем.

Таърифи 3.1.1. Ҷадвали росткунҷаи ададҳоро, ки аз m сатр ва n сутун иборат аст, матрисаи андозаҳояш $m\times n$ меноманд. Ададҳое, ки аз онҳо матриса тартиб ёфтааст, *элементҳои матриса* ном доранд.

Ададҳои натуралии m ва n новобаста аз ҳамдигар қиматҳои ихтиёриро қабул менамоянд.

Эзоҳ: Элементҳои матриса объектҳои гуногун шуда метавонанд, масалан, функсияҳо, ифодаҳои алгебравӣ ва монанди инҳо.

Одатан, матрисаҳоро бо ҳарфҳои калони лотинӣ $(A, B, C, \ldots)$ ва элементҳои онҳоро бо ҳарфҳои хурди лотинӣ, ки дорои ду индекси поёнӣ мебошанд $\left(a_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij},\ \ldots\right)$, ишора мекунанд. Дар навишти a_{ij} индекси якум i- рақами сатр ва индекси дуюм j- рақами сутунро ифода менамоянд, яъне a_{ij} -элементест, ки дар буриши сатри i-ум ва сутуни j-ум ҷойгир аст. Дар оянда мо аз ишораҳои зерини матрисаҳо истифода мебарем:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мисоли 3.1.1. Андозаҳои матрисаи $A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$ мувофиқан ба $m=2$ ва $n=3$ баробаранд. Элементе, ки дар буриши сатри дуюм ва сутуни сеюм ҷойгир аст ба 6 баробар аст: $a_{23}=6$.

Таърифи 3.1.2. Агар $m=n$ бошад (миқдори сатрҳо ва сутунҳо бо ҳам баробар), он гоҳ матрисаро *матрисаи квадратии тартиби n-ум* меноманд. Дар ҳолати акс, яъне $m\neq n$ будан матрисаро *матрисаи росткунҷа* меноманд.

Мисолҳо.

1) $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3\\ \sqrt{2} & 4 & 1{,}2\end{pmatrix}$ - матрисаи росткунҷаи андозаҳояш 2×3.

2) $\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ -2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ - матрисаи квадратии тартиби сеюм.

3) $\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7 & & \\ 4 & 2 & -5\\ 7 & 4 & \end{pmatrix}$ - ин ҷадвалҳои ададӣ матриса намебошанд, чунки онҳо ҷадвали росткунҷаи ададҳоро ташкил надодаанд.

Матрисае, ки фақат аз як сатр (сутун) иборат аст, матрисаи *сатрӣ* (*сутунӣ*) меноманд. Масалан, (-1, 6, -2, 0, 9) –матрисаи сатрӣ ва $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ - матрисаи сутунӣ аст.

Эзоҳ. Мафҳумҳои матрисаи сатрӣ ва сутунӣ бо мафҳуми *векторҳо* зич алоқаманд буда, дар оянда онҳоро вектор (вектори сатрӣ ва вектори сутунӣ) меномем. Дар ин маврид элементҳои матрисаи сатрӣ ва сутуниро *координатаҳои* вектор меноманд.

Таърифи 3.1.3. Матрисае, ки ҳамаи элементҳои он ба сифр баробаранд, *матрисаи сифрӣ ном* дорад ва бо рамзи θ (тета) ишора карда мешавад:

$$\theta=\begin{pmatrix}0\ 0 \ldots 0\\ 0\ 0 \ldots 0\\ \ldots\ldots\ldots \ldots\\ 0\ 0 \ldots 0\end{pmatrix}=(0)_{m\times n}.$$

Таърифи 3.1.4. Дар матрисаи квадратии тартиби n - ум элементҳои $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ *диагонали асосӣ* ва элементҳои $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots, a_{n1}$ *диагонали иловагӣ* ном доранд. Масалан, барои матрисаи $\begin{pmatrix}5 & 1 & 7\\ -6 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 8\end{pmatrix}$ элементҳои 5, 2, 8 диагонали асосиро ва элементҳои 7, 2, 3 диагонали дуюмро ташкил медиҳанд.

Таърифи 3.1.5. Матрисаи квадратиро матрисаи *секунҷавӣ* меноманд, агар ҳамаи элементҳои аз диагонали асосӣ дар поён ё аз диагонали асосӣ дар боло ҷойгиршудаи он ба сифр баробар бошанд, яъне

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 \ldots 0\\ a_{21} & a_{22} \ldots 0\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn}\end{pmatrix} \quad ё \quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n}\\ 0 & b_{22} \ldots b_{2n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \ldots\\ 0 & 0 \ldots b_{nn}\end{pmatrix}$$

Таърифи 3.1.6. Матрисаи квадратиро *диагоналӣ* меноманд, агар ҳамаи элементҳои он, ба ғайр аз элементҳои диагонали асосӣ, ба сифр баробар бошанд:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 \ldots 0\\ 0 & a_{22} \ldots 0\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \ldots\\ 0 & 0 \ldots a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Масалан, $\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$ - матрисаи диагоналии тартиби сеюм аст.

Таърифи 3.1.7. Матрисаи диагоналие, ки ҳамаи элементҳои диагоналаш ба ҳам баробаранд, матрисаи *скалярӣ* ном дорад:

$$A=\begin{pmatrix}c & 0 \ldots 0\\ 0 & c \ldots 0\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ 0 & 0 \ldots c\end{pmatrix}$$

Таърифи 3.1.8. Матрисаи скалярии тартиби n - умро, ки ҳамаи элементҳои диагоналиаш ба 1 баробаранд, *матрисаи воҳидӣ* (воҳидии тартиби n -ум) номида, бо E_n ишора мекунанд.

Масалан, $E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ - матрисаи воҳидии тартиби дуюм буда,

$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ - матрисаи воҳидии тартиби сеюм мебошад.

Дар баъзе ҳолатҳо барои ишораи матрисаи воҳидӣ аз навишти

$$E_n=(\delta_{ij})_{n\times n},$$

истифода мебаранд, ки дар ин ҷо

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{ агар } i=j \text{ бошад},\\ 0, \text{ агар } i\neq j \text{ бошад},\end{cases}$$

рамзи Кронекёр аст.

Таърифи 3.1.9. Агар элементҳои матрисаи квадратӣ шартҳои $a_{ij}=a_{ji}$-ро қонеъ намоянд, он гоҳ онро матрисаи *симметрӣ* меноманд. Масалан, $\begin{pmatrix}1&0&4\\0&2&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$ - матрисаи симметрӣ аст.

Таърифи 3.1.10. Матрисаҳои андозаҳояшон якхелаи $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ва $B=(b_{ij})_{m\times n}$- ро *бо ҳам баробар* ($A=B$) меноманд, агар барои ададҳои ихтиёрии i ва j, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ шартҳои $a_{ij}=b_{ij}$ иҷро шаванд. Агар, ақаллан барои як қимати i ё j ин шарт иҷро нашавад, он гоҳ матрисаҳоро нобаробар ($A\neq B$) меноманд.

Агар $A=B$ бошад, он гоҳ $B=A$ аст.

Мисолҳо.

1) $A=\begin{pmatrix}5&4\\-3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&4\\-3&2\end{pmatrix}$. $A\neq B$ аст, чунки $a_{11}\neq b_{11}$ аст.

2) $A=\begin{pmatrix}-2&4&7\\9&0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&4&7\\9&0&5\end{pmatrix}$. $A=B$ аст.

Эзоҳ. Фақат матрисаҳои андозаҳояшон якхела муқоиса карда, агар элементҳояшон якхела бошанд мешаванд. Масалан,

матрисаҳои $A=\begin{pmatrix}2&5\\-5&8\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}8&1&6\\1&4&2\end{pmatrix}$ муқоиса нашавандаанд, чунки андозаҳои гуногун доранд.

Амалҳо бо матрисаҳо

Барои матрисаҳо *амалҳои зарб ба адад, транспониронӣ, ҷамъ, тарҳ ва зарби матрисаҳоро* дида мебароем. Ҳангоми иҷро кардани амалҳо бо матрисаҳо зарур аст, ки байни шумораи сатру сутунҳои(андозаҳо) онҳо баъзе муносибатҳо ҷой дошта бошанд.

•Амалҳои зарб ба адад ва транспониронӣ, барои матрисаҳои андозаҳояшон ихтиёрӣ муайян карда мешаванд.

•Амалҳои ҷамъ ва тарҳ, барои матрисаҳои андозаҳояшон якхела муайян карда мешаванд.

•Амали зарби матрисаҳо бошад, фақат барои матрисаҳои намуди $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ва $B=(b_{ij})_{n\times k}$ муайян карда мешавад.

3.1.2. Зарби матриса бо адад. Бигузор, адади k ва матрисаи $A=(a_{ij})_{m\times n}$ дода шуда бошанд. Ҳосили зарби адади k бо матрисаи A гуфта $(k\cdot A)$, матрисаи $B=(k\cdot a_{ij})_{m\times n}$- ро меноманд: $B=k\cdot A$.

Аз намуди матрисаи B аён аст, ки *барои ададро бо матриса зарб кардан ҳар як элементи матрисаро бо ин адад зарб кардан кифоя аст.*

Масалан, агар $k=3$ ва $A=\begin{pmatrix}6&1&5\\-4&2&0\end{pmatrix}$ бошад, он гоҳ

$$k\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix}6&1&5\\-4&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&3&15\\-12&6&0\end{pmatrix}.$$

3.1.3. Транспониронии матрисаҳо. Матрисаи нисбат ба матрисаи $A=(a_{ij})_{m\times n}$ транспониронидашуда гуфта, матрисаи A^T - ро меноманд, ки аз матрисаи A дар натиҷаи ҷои сатрҳоро бо сутунҳои мувофиқ иваз кардан ҳосил шудааст: $A^T=(a_{ji})_{n\times m}$.

Масалан, агар $A=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&-3&5\end{pmatrix}$ бошад, он гоҳ $A^T=\begin{pmatrix}6&2\\2&-3\\4&5\end{pmatrix}$ мешавад.

3.1.4. Ҷамъи матрисаҳо. Ҳосили ҷамъи (ё суммаи) матрисаҳои $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ва $B=(b_{ij})_{m\times n}$ гуфта, матрисаи $C=(c_{ij})_{m\times n}$ - ро меноманд, ки ҳар як элементаш аз ҳосили ҷамъи элементҳои мувофиқи матрисаҳои A ва B (элементҳои индексашон якхела ё ҳаммавқеъ) иборат мебошад, яъне

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

Ҳосили ҷамъ (ё сумма)-и матрисаҳо чунин ишора карда мешавад:

$$C=A+B.$$

Аз навишти матрисаи C дида мешавад, ки барои ҷамъ кардани ду матриса элементҳои мувофиқи онҳоро бо ҳам ҷамъ кардан кифоя аст.

Масалан, агар $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 4\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ -4 & 3 & 6\end{pmatrix}$ бошад, он гоҳ

$$A+B=\begin{pmatrix}-3+2 & 0+5 & 4+1\\ 2+(-4) & 6+3 & 1+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 5\\ -2 & 9 & 7\end{pmatrix}.$$

3.1.5. Фарқи (тарҳи) матрисаҳо. Ин амал бо баробарии $A-B=A+(-1)\cdot B$ муайян карда мешавад. Масалан, агар $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 6\end{pmatrix}$ бошанд, он гоҳ

$$A-B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-1 & -2-4\\ 3-(-2) & 6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 5 & 0\end{pmatrix}$$

мешавад.

Ҳамин тариқ, барои аз матрисаи A тарҳ кардани матрисаи B кифоя аст, ки аз элементҳои мувофиқи матрисаи A элементҳои мувофиқи матрисаи B-ро тарҳ намоем.

3.1.6. Зарби матрисаҳо. Амали зарби матрисаҳои A ва B фақат дар мавриди шумораи сутунҳои матрисаи A бо шумораи сатрҳои матрисаи B баробар будан муайян карда мешавад, яъне зарбшавандаҳо бояд намуди $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ва $B=(b_{ij})_{n\times k}$-ро дошта бошанд. Пас аз зарб матрисаи $C=A\cdot B$ ҳосил мешавад, ки m сатр ва k сутун дорад. Муносибати байни андозаҳои матрисаҳои зарбшаванда ва натиҷаи зарби онҳо дар ҷадвали зерин оварда шудааст:

Матрисаҳо	***A***	***B***	***AB***
Шумораи сатрҳо	***m***	***n***	***m***
Шумораи сутунҳо	***n***	***k***	***k***

Таъриф. Зарби матрисаҳои $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ва $B=(b_{ij})_{n\times k}$ гуфта, матрисаи $C=(c_{ij})_{m\times k}$ -ро меноманд, ки элементҳои он бо формулаи

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}\,,\quad i=\overline{1,m}\,;\quad j=\overline{1,k}$$

ёфта мешаванд.

Бигузор матрисаҳои $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}$ дода шуда бошанд. Дар ин ҷо $m=2$, $n=3$, $k=3$ аст. Пас онҳоро зарб кардан мумкин аст:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+3\cdot 4+0\cdot 3 & 2\cdot(-1)+3\cdot 2+0\cdot 5 & 2\cdot 3+3\cdot 1+0\cdot 0\\ 1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 3 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}16 & 4 & 9\\ 19 & 18 & 5\end{pmatrix}.$$

Матрисаҳои

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -6\\ 4 & 7 & -10\end{pmatrix}\ \text{ва}\ B=\begin{pmatrix}3 & 7 & 0 & 5\\ 2 & 6 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

-ро зарб карда наметавонем, чунки шумораи сутунҳои матрисаи A (се сутун) ба шумораи сатрҳои матрисаи B (ду сатр) баробар нест.

Тавре маълум аст, зарби ададҳои ҳақиқии a ва b дорои хосияти *ҷойивазкунӣ (коммутативӣ)* мебошад: *аз иваз кардани ҷои зарбшавандаҳо ҳосили зарб тағйир намеёбад*, яъне $a\cdot b=b\cdot a$.

Зарби матрисаҳо бошад ин хосиятро надорад, яъне дар ҳолати умумӣ $A\cdot B\neq B\cdot A$ аст. Масалан, агар $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ бошанд, он гоҳ

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 8 & 14\end{pmatrix},\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 2\\ 8 & -2\end{pmatrix}$$

мешавад. Аз ин мисол дида мешавад, ки $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Диққати хонандаро боз ба як хосияти фарққунандаи зарби матрисаҳо аз зарби ададҳо ҷалб мекунем. Маълум аст, ки ҳосили зарби ду адади ғайрисифрӣ ҳамеша аз сифр фарқ мекунад:
$a \neq 0,\ b \neq 0 \Leftrightarrow a \cdot b \neq 0$.

Вале, зарби ду матрисаи ғайрисифрӣ метавонад ба матрисаи сифрӣ баробар шавад. Масалан, ҳосили зарби матрисаҳои

$$A = \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \theta \text{ ва } B = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \neq \theta,$$

ки дар ин ҷо $c \neq 0$ буда, ақаллан яке аз ададҳои a ё b аз сифр фарқ менамояд, ҳамеша ба сифр баробар аст:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta.$$

Дар охир хосиятҳои амалҳои **3.1.2-3.2.6** –ро беисбот номбар мекунем.

1. $k \cdot A = A \cdot k$.
2. $A + B = B + A$.
3. $A + \theta = \theta + A = A$.
4. $A - A = \theta$.
5. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
6. $k(A + B) = kA + kB$.
7. $A(B + C) = AB + BC$.
8. $(A + B)C = AC + BC$.
9. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.
10. $A(BC) = (AB)C$.
11. $A^m = \underbrace{A \cdot A \ . \ . \ . \ A}_{m \text{ маротиба}}$.
12. $A \cdot \theta = \theta \cdot A = \theta$.
13. $EA = AE = A$.
14. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.
15. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
16. $(A^T)^T = A$.
17. $E^T = E$.

3.2. Муайянкунандаи матрисаи квадратӣ

Матритса ҷадвали росткунҷаи аз ададҳо таркиб ёфта буда, қимати ададӣ надорад. Барои тавсифи матрисаҳои квадратӣ бошад мафҳуми муайянкунандаи матриса дохил карда мешаванд.

Ба ҳар як матрисаи квадратии $A = (a_{ij})_{m \times n}$ аз рӯи қонуни муайян адади ягонаи $|A|$ мувофиқ гузошта мешавад, ки онро

муайянкунандаи (детерминанти) матрисаи A меноманд. Барои ишораи муайянкунанда аз рамзҳои

$$\det A \quad \text{ё} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

низ истифода мебаранд.

Муайянкунандаи тартиби дуюм

Таъриф. 3.2.1. Муайянкунандаи матрисаи квадратии тартиби дуюм $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ гуфта, адади

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \tag{3.2.1}$$

-ро меноманд.

Мисолҳо.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 10 + 12 = 22.$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 8 - 18 = -10.$

3) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = -3 \cdot 10 - 5 \cdot (-6) = -30 + 30 = 0.$

3.2.2. Муайянкунандаи тартиби сеюм. Қоидаи Саррюс

Таъриф. Муайянкунандаи матрисаи квадратии тартиби сеюм $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ гуфта, адади

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \tag{3.2.3}$$

-ро меноманд.

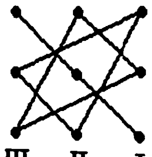
Мисолҳо.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-1)+1\cdot 1\cdot 4+3\cdot 5\cdot 1+3\cdot 5\cdot 1-4\cdot 2\cdot 1-5\cdot 1\cdot 2-$

$$-3\cdot 1\cdot(-1) = -4+4+15-8-10+3=0.$$

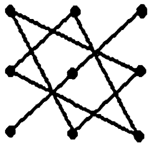
2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0-6+30-0-10+36=66-16=50.$

Тарафи рости формулаи (1.3.2) аз шаш ҷамъшаванда иборат буда, онҳоро бо ёрии наќшаҳои зерин ба хотир гирифтан осон аст:



Ин се ҷамъшаванда бетағйир навишта мешаванд.

III II I



Ин се ҷамъшаванда бо аломати баръакс навишта мешаванд.

IV V VI

Ин тарзи ҳисоби муайянкунандаҳои тартиби сеюмро ќойидаи Саррюс ё секунҷаҳо меноманд.

3.3.Муайянкунандаи тартиби n-ум

Бояд тазаккур намуд, ки мафҳуми муайянкунанда бо тарзҳои мухталиф ворид карда мешавад. Дар ин банд мо бо ду нуќтаи назари гуногун оид ба ин мафҳум шинос мешавем.

Таърифи индуктивии муайянкунанда

Бигузор, мафҳуми муайянкунандаи тартиби $(n-1)$-ум дохил карда шуда бошад(масалан, ин мафҳум барои $n=1$ ва $n=2$ муайян аст):

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2(n-1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Таърифи 3.3.1. *Минори элементи* a_{ij} -и матрисаи квадратии A гуфта, муайянкунандаи тартиби $(n-1)$ - умеро меноманд, ки аз элементҳои боќимондаи матрисаи $A=(a_{ij})_{nxn}$, пас аз хат задани элементҳои сатри i -ум ва сутуни j -ум тартиб дода шудааст. Онро бо M_{ij} ишора мекунем.

Таърифи 3.3.2. *Пуркунандаи алгебравии элементи* a_{ij} - и матрисаи квадратии A гуфта, минори ҳамин элементро, ки бо аломати $(-1)^{i+j}$ гирифта шудааст, меноманд ва бо A_{ij} ишора мекунанд:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}. \qquad (3.3.1)$$

Мисол. Барои матрисаи $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ пуркунандаҳои алгебравии A_{12}, A_{22} ва A_{32}-ро меёбем. Ќимати ин пуркунандаҳои алгебравиро бо ёрии формулаи (1.3.3) ҳисоб мекунем:

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -(0+15) = -15. \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0-5=-5.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-4) = 10.$$

Ќайд. Азбаски

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} -1, \text{ агар } (i+j) \text{ ток бошад,} \\ 1, \text{ агар } (i+j) \text{ ҷуфт бошад} \end{cases}$$

аст, пас пукунандаи алгебравии элемент A_{ij} аз минори ҳамин элемент M_{ij} фаќат бо аломаташ фарќ мекунад. Ҳамин тавр, агар суммаи индексҳои поёнӣ ҷуфт(ток) бошад, он гоҳ $A_{ij}=M_{ij}\left(A_{ij}=-M_{ij}\right)$ аст. Аз ин хосият дар оянда бисёр истифода мекунем.

Таърифи 3.3.3. Муайянкунандаи матрисаи квадратии $A=(a_{ij})_{nxn}$ ё муайянкунандаи тартиби n –ум гуфта, адади

$$A_{i1}\cdot a_{i1} + A_{i2}\cdot a_{i2} + \ldots + A_{in}\cdot a_{in}$$

- ро меноманд, яъне

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{i1} \cdot a_{i1} + A_{i2} \cdot a_{i2} + \dots + A_{in} \cdot a_{in}, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (3.3.2)$$

Ин формуларо ҷудокунии муайянкунанда аз рӯи элементҳои сатри i-ум меноманд (нигаред ба 3.4 хосиятҳои муайянкунандаҳо, теоремаи Лаплас).

Қимати тарафи рости формулаи (3.3.2) аз интихоби рақами сатр i вобаста нест.

Айнан ҳамин тавр, муайянкунандаи тартиби n-умро аз рӯи элементҳои сутун k - ум ҷудо кардан мумкин аст:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{1k} \cdot a_{1k} + A_{2k} \cdot a_{2k} + \dots + A_{nk} \cdot a_{nk}, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (3.3.3).$$

Қимати тарафи рости формулаи (3.3.3) низ аз интихоби рақами сутун k вобаста нест. Формулаҳои (3.3.1) ва (3.3.2) ҳолатҳои хусусии ин формулаҳо мебошанд.

Мисол. Муайянкунандаи тартиби чорум $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ - ро аз рӯи элементҳои сатри якум ҷудо карда, ҳисоб кунед.

Ҳал. Барои ҳисоб кардани ин муайянкунанда аз формулаи (3.3.2) дар мавриди $n = 4$ ва $i = 1$ истифода мекунем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -60 + 15 + 40 + 5 -$$

$$- 2 \cdot (12 - 2 - 1 - 9) + 4 \cdot (10 + 5 - 15) - 0 = 0.$$

Эзоҳ. Муайянкунандаро *аз рӯи элементҳои он сатр ё сутуне ҷудо кардан қулай аст, ки миқдори зиёди элементҳои сифрӣ* дорад (агар элементи сифрӣ надошта бошад, пас он сатр ё сутун интихоб карда мешавад, ки азададҳои калон иборат бошанд, то ки ҳисоб камтар шавад). Дар ин ҳолат дар буриши сатр ва сутуни хатзадашуда элементи сифрӣ ҷойгир мешавад ва дар тарафи рости формулаи (3.3.1) ё (3.3.2) ҷамъшавандаи ба ин элемент мувофиқ навишта намешавад, чунки он ба сифр баробар аст. Дар натиҷа миқдори амалҳо камтар ва ҳисоб осон мешавад. Ба сифати машқ муайянкунандаи ҳисобкардашударо аз рӯи элементҳои сатри сеюм ё сутуни чорум ҷудо карда, ҳисоб кунед.

3.4. Таърифи комбинатории муайянкунанда

Ин усул тавассути мафхумхои *чойивазкунӣ* ва *инверсия* ворид карда мешавад. Бино бар ин аввал ин мафхумхоро муайян мекунем.

Бигузор маҷмӯи M аз n ададҳои

$$M=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

иборат бошад.

Таърифи 3.4.1. Пайдарпайии охирнокро, ки аз элементҳои гуногуни маҷмӯи M тартиб дода шудааст, *ҷойивазкунии элементҳои маҷмӯи* M меноманд.

Масалан, $M=\{1, 2, 3\}$ бошад, он гоҳ ҷойивазкунии элементҳои ин маҷмӯъ пайдарпайиҳои зерин мешаванд:

(1,2,3); (1,3,2); (2,1,3); (2,3,1); (3,1,2); (3,2,1)

Агар маҷмӯи ҳамаи ин ҷойивазкуниҳоро бо P_n ишора намоем, пас тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.4.3. Маҷмӯи P_n (яъне миқдори ҷойивазкуниҳо аз n элемент) аз $n!$ элемент иборат аст.

Исботи ин тасдиқотро чун кори мустақилона ба хонандаи гиромӣ пешниҳод менамоем.

Бигузор ҷойивазкунии $(\ldots, i, \ldots, j, \ldots)$ дода шуда бошад.

Таърифи 3.4.2. Дар ҷойивазкунии додашуда ададҳои i ва j *инверсияро (бетартибиро)* ташкил медиҳанд, агар $i > j$ бошад ва адади i дар ҷойивазкунӣ пеш аз адади jояд.

Мисол. Ҷойивазкуниҳои зеринро дида мебароем:

(1,2,3) – миқдори инверсия =0.

(1,3,2) – миқдори инверсия якто, зеро $3 > 2$.

(2,1,3) – миқдори инверсия якто, зеро $2 > 1$.

(2,3,1) – миқдори инверсия дуто, зеро $2 > 1$, $3 > 1$.

(3,1,2) – миқдори инверсия дуто, зеро $3 > 1$, $3 > 2$.

(3,2,1) – миқдори инверсия сето, зеро $3 > 1$, $2 > 1$, $3 > 2$.

Миқдори инверсияро дар ҷойивазкунии $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ бо $\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ишора мекунем.

Таърифи 3.3.7. Ҷойивазкунӣ ҷуфт (тоқ) номида мешавад, агар ададҳои он миқдори ҷуфти (тоқи) инверсияро ташкил диҳанд.

Аз мисоли дар боло овардашуда бар меояд, ки $\gamma(1,2,3)=0$ - ҷуфт, $\gamma(1,3,2)=1$ - тоқ, $\gamma(2,3,1)=2$ - ҷуфт, $\gamma(2,1,3)=1$ - тоқ, $\gamma(3,1,2)=2$ - ҷуфт, $\gamma(3,2,1)=3$ - тоқ мебошад.

Ҳамин тариқ, дар маҷмӯи сеэлемента $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$ ҷойивазкуниҳоро тартиб додан мумкин аст, ки аз ин ҷойивазкуниҳо сетояш ҷуфт буда, сетои дигараш тоқ мебошад.

Бигузор ҷойивазкунии $(\ldots, i, \ldots, j, \ldots)$ дода шуда бошад. Дар ин ҷойивазкунӣ ҷои ададҳои i ва j – ро байни ҳам иваз намуда, ададҳои дигарро бетағйир мегузорем. Дар натиҷа ҷойивазкунии $(\ldots, j, \ldots, i, \ldots)$ ҳосил мешавад. Ин тарзи табдилдиҳии ҷойивазкуниро *транспозитсия* меноманд. Бо суханони дигар, ҷойивазкунии аз ду элемент иборат бударо транспозитсия меноманд. Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.3.2. Агар аломати ҷойивазкунӣ ҷуфт (тоқ) бошад, пас баъд аз табдилдиҳии транспозитсия аломати ҷойивазкунӣ тоқ (ҷуфт) мегардад.

Теоремаи 3.3.3. Миқдори ҷойивазкуниҳои ҷуфт аз n ададҳо ба миқдори ҷойивазкуниҳои тоқ аз ин ададҳо баробар буда, ба $\frac{n!}{2}$ баробар аст.

Исботи теоремаҳои 2 ва 3 - ро ба хонанда ҳамчун кори мустақилона пешниҳод менамоем.

Акнун бо мафҳуми *муайянкунандаи тартиби n-ум* шинос мешавем. Бигузор матрисаи квадратии тартиби n дода шуда бошад:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.3.6}$$

Аз ҳар як сатр ва сутуни матрисаи додашуда як элемент гирифта, ҳосили зарби имконпазири онҳоро тартиб медиҳем. Ин ҳосили зарбро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}, \tag{3.3.7}$$

ки дар ин ҷо $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\beta_i \neq \beta_j$, агар $i \neq j$ бошад. Маълум, ки ҳар як ҳосили зарби ифодаи (3.3.7) аз n зарбшаванда иборат аст. Ҳар як зарбшавандаи намуди (3.3.7) -ро ба адади $(-1)^{\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\gamma(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}$ зарб карда ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$(-1)^{\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\gamma(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)} a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \ldots a_{\alpha_n\beta_n}. \qquad (3.3.8)$$

Ифодаи (3.3.8)– ро табдил медиҳем. Зарбшавандаҳои ифодаи (3.3.8)– ро ба тартиби афзуншавии индексҳои аввала (рақами сатрҳо) менависем:

$$(-1)^{\gamma(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{n\gamma_n}. \qquad (3.3.9)$$

Элементҳои (3.3.8) ва (3.3.9) байни ҳам баробаранд, зеро байни ҳам ҷойивазкунии ду зарбшавандаҳои $a_{\alpha_i\beta_i}$ ва $a_{\alpha_j\beta_j}$ дар муайянкунанда аломати инверсияро дар ҷойивазкуниҳои $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n)$ ва $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_j,\ldots,\beta_n)$ тағйир медиҳад. Бино бар ин, аломати инверсияи суммаи ин ҷойивазкуниҳо тағйир намеёбад. Ҳамаи зарбшавандаҳои намуди $(-1)^{\gamma(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{n\gamma_n}$ - ро ҷамъ намуда суммаи

$$\sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\gamma(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{n\gamma_n}$$

-ро ҳосил мекунем.

Таърифи 3.3.8. Муайянкунандаи матрисаи A гуфта, адади зеринро меноманд:

$$\sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\gamma(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{n\gamma_n}. \qquad (3.3.10)$$

Ҳамин тавр, муайянкунандаи тартиби n- ум аз суммаи ҳамаи ҳосили зарбҳои имконпазири элементҳои матрисаи A, ки аз ҳар як сатр ва сутун яктогӣ гирифта шудаанд, иборат аст. Аломати

аъзоҳои ин сумма вобаста ба ҷуфт ё тоқ будани ҷойивазкунии $\gamma(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ мувофиқан мусбат ё манфӣ гирифта мешавад.

Ҳамин тариқ, мувофиқи таърифи 3.3.8

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\gamma(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{n\gamma_n}. \qquad (3.3.11)$$

Дар адабиётҳои мухталиф ишораҳои зерини муайянкунанда истифода мешаванд:

$$\Delta,\ |A|,\ \det A,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мисолҳо. Муайянкунандаи матрисаи A – ро дар ҳолатҳои n=1,2,3 ҳисоб мекунем:

$$n=1:\quad \det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

$$n=2:\quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\gamma(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\gamma(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$n=3:\quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\gamma(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\gamma(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+(-1)^{\gamma(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\gamma(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\gamma(1,3,2)} a_{11}a_{13}a_{32} +$$

$$+(-1)^{\gamma(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Эзоҳ. Ба ғайр аз ин ду усули муайян кардани мафҳуми муайянкунанда, ки дар боло оварда шуданд, боз усулҳои дигар низ мавҷуданд (масалан, усули ба таври аксиомавӣ ворид намудани муайянкунанда), ки хонандаи соҳибзавқ метавонад аз адабиётҳои дар охири китоб овардашуда дарёб намояд. Дар усули аксиомавӣ муайянкунанда чунин нуқтаи назар пешниҳод карда мешавад: муайянкунанда ќимати ададии функсияе мебошад, ки ба ҳар як матрисаи A адади detA- ро мувофиќ мегузорад.

3.5. Хосиятҳои муайянкунандаҳо

Ин параграф ба хосиятҳои умумии муайянкунандаҳо бахшида шудааст. Дар ин ҷо мо диќќати хонандаи гиромиро махз ба он хосиятҳое ҷалб менамоем, ки ҳисоб кардани муайянкунандаҳоро осон менамоянд.

1^0. Агар ҳамаи элементҳои ягон сатри(сутуни) муайянкунанда ба сифр баробар бошанд, он гоҳ ќимати ин муайянкунанда ба сифр баробар мешавад.

Барои исбот муайянкунандаро аз рӯи элементҳои ин сатр (сутун) ҷудо кардан кифоя аст.

2^0. Ҳангоми иваз кардани ҷои ду сатри (сутуни) муайянкунанда ќимати он бо бузургии мутлаќаш таѓйир наёфта, фаќат аломаташро ба муќобил иваз менамояд.

Исбот. Дар рафти исбот ду ҳолатро фарќ бояд кард.

а) *Иваз кардани ҷои ду сатри (сутуни) ҳамсоя.* Бигузор, ду муайянкунандаҳои

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ ва } \Delta'=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

дода шуда бошанд, ки муайянкунандаи Δ' аз муайянкунандаи Δ дар натиҷаи ҷои сатри якумро бо дуюм иваз кардан пайдо шудааст. Муайянкунандаи Δ- ро аз рӯи элементҳои сатри якум ва Δ' –ро аз рӯи элементҳои сатри дуюм ҷудо мекунем:

$$\Delta=(-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+(-1)^{1+n}\cdot a_{1n}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta'=(-1)^{2+1}\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+(-1)^{2+n}\cdot a_{1n}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} \end{vmatrix}.$$

Тарафи рости баробарии дуюм аз якум фаќат бо зарбшавандаи (-1) фарќ мекунад. Ин нишон медиҳад, ки $\Delta=-\Delta'$ аст.

б) *Иваз кардани ҷои ду сатрҳои (сутунҳои) ҳамсоя набуда.* Фарз мекунем, сатри i-ум бо сатри j–ум ҷой иваз мекунад $(i<j)$. Ин ҷойивазкуниро дар якчанд давр амалӣ кардан мумкин аст. Аввал сатри i-умро бо сатри $(i+1)$–ум иваз мекунем. Пас аз ин дар муайянкунандаи ҳосилшуда сатри $(i+1)$ -умро бо сатри $(i+2)$–ум иваз мекунем. Ин амалиётро то сатри i - ум ҷои сатри j–умро гирифтан давом медиҳем. Барои ба даст омадани ин натиҷа мо бояд $j-i$ ҷойивазкуниҳоро иҷро намоем. Акнун сатри j–умро, ки дар муайянкунандаи охирин ба ҷои сатри $(j-1)$–ум истодааст, ба боло ҳаракат медиҳем. Пас аз $j-i-1$ ҷойивазкунӣ ин сатр ҷои сатри i-умро мегирад. Миќдори умумии ҷойивазкуниҳо ба $j-i+j-i-1=2(j-i)-1$ баробар аст. Дар натиҷаи ҳар як ҷойивазкунӣ муайянкунанда ба (-1) зарб мешавад. Азбаски миќдори ҳамаи ҷойивазкуниҳо тоќ аст, пас муайянкунандаи охирин низ ба (-1) зарб мешавад.

3^0. Ќимати муайянкунандае, ки ду сатри (сутуни) якхела дорад, ба сифр баробар аст.

Дар ҳаќиќат, дар муайянкунандаи Δ ду сатри якхеларо иваз карда, боз худи ҳамин муайянкунандаро пайдо мекунем. Аз тарафи дигар, мувофиќи хосияти 2^0, дар натиҷаи ин ҷойивазкунӣ муайянкунанда ба (-1) зарб мешавад: $\Delta=-\Delta$. Аз ин ҷо, $2\Delta=0$ ва $\Delta=0$ мешавад.

4^0. Зарбшавандаи умумии элементҳои сатр (сутуни) ихтиёриро аз таҳти аломати муайянкунанда баровардан мумкин аст.

Дар ҳаќиќат, бигузор, элементҳои сатри якум зарбшавандаи умумии k–ро дошта бошанд: $a_{1j}=k\cdot b_{1j}$. Муайянкунандаро аз рӯи элементҳои ин сатр ҷудо мекунем:

$$\begin{vmatrix} k\cdot b_{11} & \dots & k\cdot b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\cdot b_{11}\cdot A_{11} + \dots + k\cdot b_{1n}\cdot A_{1n} = k(b_{11}\cdot A_{11} + \dots + b_{1n}\cdot A) = k\cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5^0. Агар элементҳои ягон сатри (сутуни) муайянкунанда бо элементҳои мувофиќи сатри (сутуни) дигараш мутаносиб бошад, он гоҳ ќимати муайянкунанда ба сифр баробар мешавад.

Дар ҳаќиќат, масалан сатри якум ва дуюм бо ҳам мутаносиб бошанд, яъне $\frac{a_{1i}}{a_{2i}} = k$, $i = \overline{1, n}$, он гоҳ ба ҷои элементҳои сатри якум $a_{11} = k\cdot a_{21}$, $a_{12} = k\cdot a_{22}, \dots, a_{1n} = k\cdot a_{2n}$ гузошта, дар асоси хосияти 4^0 зарбшавандаи умумӣ k -ро аз зери аломати муайянкунанда бароварда, дар натиҷа муайянкунандаи ду сатраш якхеларо пайдо мекунем, ки ќимати он мувофиќи хосияти 3^0 ҳамеша ба сифр баробар аст.

6^0. Агар ҳар як элементи ягон сатри (сутуни) муайянкунанда аз ҳосили ҷамъи ду ҷамъшаванда иборат бошад, он гоҳ ин муайянкунандаро ҳамчун суммаи ду муайянкунандае навиштан мумкин аст, ки ҳар яке онҳо аз элементҳои муайянкунандаи аввала, ба ѓайр аз сатри (сутуни) номбаршуда иборат буда, сатри (сутуни) номбаршуда барои муайянкунандаи якум аз ҷамъшавандаҳои якум ва барои муайянкунандаи дуюм аз ҷамъшавандаи дуюм иборат мебошад.

Барои муайянӣ, бигузор элементҳои сатри якум намуди

$$b_{11} + c_{11},\ b_{12} + c_{12},\ \dots,\ b_{1n} + c_{1n}$$

-ро дошта бошанд. Барои исбот, муайянкунандаро аз рӯи элементҳои ин сатр ҷудо кардан кифоя аст.

7^0. Агар элементҳои ягон сатри (сутуни) муайянкунанда, ки пешакӣ ба адади ихтиёрӣ зарб карда шудааст, бо элементҳои мувофиќи сатри (сутуни) дигар ҷамъ карда шавад, ќимати муайянкунанда таѓйир намеёбад.

Масалан, баробарии зерин ҷой дорад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} + ka_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Дар ҳаќиќат, дар асоси хосиятҳои 4^0 ва 6^0 муайянкунандаи тарафи рости ин баробариро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k\cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Азбаски муайянкунандаи дуюми тарафи чапи ин баробарӣ ду сутуни якхела дорад (сутунҳои якум ва дуюм) бинобар ин, ќимати он ба сифр баробар аст.

8^0. **Теоремаи Лаплас.** Ќимати муайянкунанда ба суммаи ҳосили зарби элементҳои сатри (сутуни) ихтиёрӣ ба пуркунандаҳои алгебравии ин сатр (сутун) баробар аст (нигаред ба таърифи индуктивии муайянкунандаи тартиби n-ум):

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}\ . \qquad (1.4.1)$$

9^0. Суммаи ҳосили зарби элементҳои ягон сатр (сутун) ба пуркунандаҳои алгебравии сатри (сутуни) дигар ба сифр баробар аст.

Фарз мекунем, ки пуркунандаҳои алгебравии сутуни якум бо элементҳои сутуни дуюм зарб карда шудаанд. Мо бояд нишон диҳем, ки

$$a_{12}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{21} + \dots + a_{n2}\cdot A_{n1} = 0$$

аст. Барои ададҳои ихтиёрии $b_1, b_2, \dots, b_n$ айнияти зерин ҷой дорад:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + \dots + b_n \cdot A_{n1}.$$

Дар ин баробарӣ $b_1 = a_{12}, b_2 = a_{22}, \dots, b_n = a_{n1}$ гузошта, ҳосил мекунем:

$$a_{12} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{21} + \dots + a_{n2} \cdot A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Муайянкунандаи охирин ҳамеша ба сифр баробар аст, чунки он ду сутуни якхела дорад (сутунҳои якум ва дуюм).

10^0. Муайянкунандаи матрисаи A ва A^T бо ҳам баробаранд: $\det A = \det A^T$.

11^0. Баробарии зерин ҷой дорад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

12^0. Муайянкунандаи ҳосили зарби ду матрисаи квадратии тартибашон якхела ба ҳосили зарби муайянкунандаи ин матрисаҳо баробар аст:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Истифодаи сариваќтии ин хосиятҳо имконият медиҳанд, ки муайянкунандаро бо харҷи ками ваќт бо осонӣ ҳисоб намоем. Масалан, бо истифода аз хосияти 7^0 муайянкунандаро ҳамеша ба

намуди секунҷавӣ оварда (нигаред ба хосияти 11^0) онро бо осонӣ ҳисоб кунем.

Мисол. Муайянкунандаи тартиби чорумро ҳисоб кунед:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ҳал. Ќимати муайянкунандаро бо Δ ишора мекунем. Азбаски элементи $a_{11} = 1 \neq 0$ аст, бино бар ин сатри якумро бетаѓйир нигоҳ дошта, элементҳои боќимондаи сутуни якумро ба сифр табдил медиҳем. Барои ин сатри якумро бо навбат аъзо ба аъзо ба 1, -2 ва -3 зарб карда, натиҷаи ҳосилшударо мувофиќан ба сатри дуюм, сеюм ва чорум ҷамъ мекунем. Дар натиҷа муайянкунандаи наве пайдо мешавад, ки дар он ҳамаи элементҳои сутуни якум, ба ѓайр аз элементи $a_{11} = 1$, ба сифр баробаранд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Дар муайянкунандаи охирин сатрҳои якум ва дуюмро бетаѓйир нигоҳ дошта, дар сутуни сеюм элементи $a_{32} = -3$-ро ба сифр табдил медиҳем. Барои ин сатри дуюмро ба 3 зарб карда, натиҷаро бо элементҳои сатри сеюм ҷамъ мекунем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Дар муайянкунандаи онирин аз сатрҳои сеюм ва чорум зарбшавандаҳои умумиро бароварда, ҷои ин сатрҳоро иваз карда ҳосил мекунем:

$$\Delta=-2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&2&1&0\\0&1&3&4\\0&0&-1&1\\0&0&4&7\end{vmatrix}.$$

Дар ин муайянкунанда се сатри аввалро бетағйир нигоҳ дошта, сатри сеюмро ба 2 зарб карда бо сатри чорум ҷамъ мекунем. Дар натиҷа муайянкунандаи секунҷавӣ ҳосил мешавад, ки қимати он мувофиқи хосияти 11^0 ёфта мешавад:

$$\Delta=-4\cdot\begin{vmatrix}1&2&1&0\\0&1&3&4\\0&0&-1&1\\0&0&0&11\end{vmatrix}=-4\cdot 1\cdot 1\cdot(-1)\cdot 11=44.$$

Ба сифати мисол муайянкунандаҳои баъзе матрисаҳои маъмулро ҳисоб мекунем, ки татбиқи бисёр доранд.

1. Муайянкунандаи матрисаи воҳидӣ:

$$\det E_n=\begin{vmatrix}1&0&0\ldots0\\0&1&0\ldots0\\0&0&1\ldots0\\\ldots\ldots&\ldots\\0&0&0\ldots1\end{vmatrix}=1.$$

2. Муайянкунандаи матрисаи диагоналӣ:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\ldots&0\\0&a_{22}&0&\ldots&0\\0&0&a_{33}&\ldots&0\\\ldots\ldots&\ldots\ldots&\ldots&&\\0&0&0&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

3. Муайянкунандаи матрисаҳои элементарӣ.

Таърифи 1.4.1. Бигузор α - адади ихтиёрии ғайри сифрӣ бошад. Матрисаи диагоналии тартиби n, ки дар он яке аз элементҳои диагонали асосӣ ба α баробар буда, элементҳои боқимондаи ин диагонал ба воҳид баробаранд, *матрисаи элементарии навъи якум* номида мешавад.

Агар дар ин матриса α элементи k-уми диагонал бошад, он гоҳ онро бо рамзи $E_{k,\alpha}$ ишора мекунем.

Таърифи 1.4.2. Матрисаи квадратии тартиби n *матрисаи элементарии навъи дуюм* ном дорад, агар элементҳои диагонали асосии он ба воҳид баробар бошанд ва яке аз элементҳои ғайридиагоналии он ба α баробар буда, элементҳои боқимонда ба сифр баробар бошанд.

Агар элементи α дар буриши сатри k ва сутуни s ҷойгир бошад, он гоҳ ин матритсаро бо рамзи $E_{k,s,\alpha}$ ишора мекунанд.

Мисол. Матрисаҳои зерин матрисаҳои элементарии навъи якум ва навъи дуюм мебошанд.

$$E_{2,7}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&7&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad E_{2,3,7}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&7\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\begin{vmatrix}1&0&0\ldots&0\ldots0\\0&1&0\ldots&0\ldots0\\\ldots\ldots&\ldots\ldots&&&\\0&0&0\ldots&\alpha\ldots0\\\ldots\ldots&\ldots\ldots&&&\\0&0&0\ldots&0\ldots1\end{vmatrix}=\alpha.\quad\begin{vmatrix}1&0\ldots0\ldots0\ldots0\\0&1\ldots0\ldots0\ldots0\\\ldots\ldots\ldots\ldots&\\0&0\ldots1\ldots\beta\ldots0\\\ldots\ldots\ldots\ldots&\\0&0\ldots0\ldots1\ldots0\\\ldots\ldots\ldots\ldots&\\0&0\ldots0\ldots0\ldots1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\ldots0\ldots0\ldots0\\0&1\ldots0\ldots0\ldots0\\\ldots\ldots\ldots\ldots&\\0&0\ldots1\ldots0\ldots0\\\ldots\ldots\ldots\ldots&\\0&0\ldots\beta\ldots1\ldots0\\\ldots\ldots\ldots\ldots&\\0&0\ldots0\ldots0\ldots1\end{vmatrix}=1.$$

3.6. Усулҳои ҳисоб кардани муайянкунандаҳои тартиби n- ум

Дар ин ҷо бо баъзе усулҳои ҳисоб кардани муайянкунандаҳои тартиби n - ум шинос мешавем.

1. Усули ба намуди секунҷавӣ овардани муайянкунанда. Моҳияти ин усул аз он иборат аст, ки ба воситаи табдилот муайянкунанда ба чунин намуде оварда мешавад, ки дар он элементҳои аз диагонали асосӣ (иловагӣ) дар як тараф воќеъ буда ба сифр баробаранд. Дар натиҷа ќимати муайянкунанда бо ҳосили зарби элементҳои диагонали асосӣ баробар мешавад (дар мавриди дуюм ќимати муайянкунанда ба ҳосили зарби элементҳои диагонали иловагӣ ва адади $(-1)^{n(n-1)/2}$ баробар мешавад)(нигаред ба хосияти 11^0).

2. Усули ифодаҳои рекуррентӣ. Моҳияти ин усул аз он иборат аст, ки муайянкунанда бо муайянкунандаҳои тартиби хурд ифода карда мешавад. Дар натиҷа формулаи рекуррентии

$$A_n = f\left(A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_{n-k}\right)$$

ҳосил мешавад, ки барои ҳамаи ададҳои натуралии $n > k$ дуруст аст. Аз ин формула ба воситаи методи индуксияи пурраи математикӣ муайянкунандаи A_n ба воситаи муайянкунандаҳои тартиби хурди $A_1, A_2, \ldots A_k$ ифода карда мешавад.

3. Усули ифода намудани муайянкунанда ба воситаи суммаи муайянкунандаҳои дигар. Ин усул дар ҳолате истифода бурда мешавад, агар муайянкунанда ба суммаи муайянкунандаҳои дигар ҷудо шавад. (нигаред ба хосияти 6^0).

4. Усули табдилоти элементҳои муайянкунанда. Истифодаи ин усул дар ҳолате ќулай аст, агар таѓйирдиҳии ҳамаи элементҳои муайянкунанда ба ҳамон як адад ба он оварда расонад, ки муайянкунанда ва ҳамаи пуркунандаҳои алгебравии он бо осонӣ ҳисоб карда шаванд.

Мисолҳо. 1) Муайянкунанда ҳисоб карда шавад:

$$A_n = \begin{vmatrix} a & a & a \ldots a \\ a & 0 & a \ldots a \\ a & a & 0 \ldots a \\ \ldots\ldots & & \ldots \\ a & a & a \ldots 0 \end{vmatrix}.$$

Сатри якумро ба (-1) зарб карда, натиҷаро бо навбат бо сатрҳои боќимонда ҷамъ мекунем:

$$A_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \ldots a \\ a & -a & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & -a & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots -a \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a^n.$$

2) $$B_n = \begin{vmatrix} a & -b & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & a & -b \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & a \end{vmatrix}.$$

Муайянкунандаро аз рӯи элементҳои сатри якум ҷудо карда, ҳосил мекунем:

$$B_n = a \cdot \begin{vmatrix} a & -b & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & a & -b \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-b)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -b & 0 \ldots & 0 & 0 \\ a & -b \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 \ldots & -b & 0 \\ 0 & 0 \ldots & a & -b \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Дар муайянкунандаи якум элементҳои аз поёни диагонали асосӣ ҷойгир буда ба сифр баробаранд, инчунин дар муайянкунандаи дуюм элементҳои аз диагонали асосӣ боло ҷойгир буда ба сифр баробаранд. Аз ин рӯ, ќимати ҳарду муайянкунанда ба ҳосили зарби элементҳои диагоналӣ баробар мешавад:

$$B_n = a\cdot a^{n-1} + (-b)(-1)^{n+1}(-b)^{n-1} = a^n - b^n .$$

3) $$C = \begin{vmatrix} 1+99m & 1 & m & z \\ 1+99n & 2 & n & z \\ 1+99p & 3 & p & z \\ 1+99q & 4 & q & z \end{vmatrix}.$$

Ин муайянкунандаро ба намуди суммаи ду муайянкунанда навиштан мумкин аст:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m & z \\ 1 & 2 & n & z \\ 1 & 3 & p & z \\ 1 & 4 & q & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 99m & 1 & m & z \\ 99n & 2 & n & z \\ 99p & 3 & p & z \\ 99q & 4 & q & z \end{vmatrix}.$$

Дар муайянкунандаи якум сутуни якум ба сутуни охирин мутаносиб буда, дар муайянкунандаи дуюм сутуни якум ба сутуни сеюм мутаносиб аст. Бинобар ин, мувофиќи яке аз хосиятҳои муайянкунандаҳо ќиматҳои онҳо ба сифр баробаранд. Пас, $C = 0$.

4) $$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ a & a & a & \dots & a & n+a \end{vmatrix}$$

Элементҳои сатри охиринро чунин ифода кардан мумкин:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ a & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix}.$$

Дар муайянкунандаи якум элементҳои аз диагонали асосӣ ба сифр баробаранд, бино бар ин ќимати муайянкунанда ба $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = n!$ баробар аст. Муайянкунандаи дуюм ба сифр баробар аст, зеро сатрҳои якум ва охирини он ба ҳам мутаносибанд. Ҳамин тариќ, $D = n! + 0 = n!$.

5) Муайянкунандаи тартитби $2n$ - и зеринро дида мебароем:

$$\begin{vmatrix} A & \theta \\ B & C \end{vmatrix}$$

Дар ин ҷо A, B, C - матрисаҳои квадратии ихтиёрии тартиби n буда, θ– матрисаи сифрии квадратии тартиби n мебошад. Нишон додан мумкин аст, ки барои ин намуд муайянкунанда баробарии зерин ҷой дорад:

$$\begin{vmatrix} A & \theta \\ B & C \end{vmatrix} = |A|\cdot|C| \qquad (1.4.2)$$

Аз теоремаи Лаплас истифода бурда, муайянкунандаи тарафи чапи баробарии (1.4.2) – ро аз рӯи n сатри аввал ҷудо мекунем. Маълум аст, ки агар дар муайянкунанда, аќќалан яке аз сутунҳояш ба сифр баробар бошад, пас ќимати муайянкунанда низ ба сифр баробар мешавад. Бино бар ин дар формулаи (1.4.1) фаќат як ҷамъшаванда аз сифр фарќ мекунад ва ин ҷамъшаванда (дар асоси он, ки $(-1)^{(1+\ldots+n)+(1+\ldots+n)} = 1$ аст) ба $|A|\cdot|C|$ баробар аст.

Эзоҳ. Айнан ҳамин тавр, нишон додан мумкин аст, ки баробарии зерин ҷой дорад:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & \theta \end{vmatrix} = (-1)^n |B|\cdot|C| \qquad (1.4.3)$$

Ба ин маќсад кифоя аст, муайянкунандаи тарафи чап баробарии (1.4.3) аз рӯи n сатри охир ҷудо карда шуда баробарии

$$(-1)^{[(n+1)+\ldots+2n]+[1+\ldots+n]} = (-1)^{2n(2n+1)/2} = (-1)^n$$

ба инобат гирифта шавад.

6) Бигузор муайянкунандаи тартиби n- и намуди зерин дода шуда бошад: ($a \neq b$)

$$A_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Элементҳои сатри якумро дар намуди суммаи ду ҷамъшавандаҳо менависем:

$$a+b,\ 1+0,\ 0+0,\ \dots,\ 0+0.$$

Пас муайянкунандаро дар намуди суммаи ду муайянкунандаҳои зерин навиштан мумкин аст:

$$A_n = \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Муайянкунандаи дуюм баъд аз ҷудокуни аз рӯи элементҳои сутуни якум ба зерин баробар аст: bA_{n-1}, ки дар ин ҷо A_{n-1}- муайянкунандаи ҳамон намуд буда, тартибаш ба $n-1$ баробар аст.

Муайянкунандаи якумро чунин тағйир медиҳем: сутуни якумро бо b зарб намуда аз сутуни дуюм тарҳ мекунем, сипас сутуни дуюми ҳосилшударо бо b зарб намуда аз сутуни сеюм тарҳ мекунем ва ғайра ин равандро давом медиҳем. Дар натиҷа муайянкунандаи намуди зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix} = a^n$$

Ҳамин тариқ, баробарии рекуррентии зеринро ҳосил кардем:

$$A_n = a^n + bA_{n-1},$$

Бо осонӣ ҳисоб кардан мумкин аст, ки
$A_1 = a+b$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$$

Натиҷаҳои ҳосилшударо дар шакли зерин низ навиштан мумкин аст:

$$A_1 = \frac{a^2-b^2}{a-b}, \qquad A_2 = \frac{a^3-b^3}{a-b}, \qquad A_3 = \frac{a^4-b^4}{a-b}.$$

Бо усули индуксияи математикӣ исбот кардан мумкин аст, ки баробарии зерин ҷой дорад:

$$A_k = \frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{a-b}.$$

Дар ҳақиқат, бигузор ин баробарӣ барои $k=n-1$ дуруст бошад, яъне

$$A_{k-1} = \frac{a^k-b^k}{a-b}.\ \text{Он гоҳ}\ A_n = a^n + bA_{n-1} = a^n + b\frac{a^n-b^n}{a-b} = \frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}.$$

Ҳамин тариқ, агар баробарӣ барои $k=n-1$ дуруст бошад, пас он барои $k=n$ ва дар асоси индуксия барои ҳамаи қиматҳои k низ дуруст аст.

7) *Муайянкунандаи Вандермонд.* Муайянкунандаи Вандермонд гуфта муайянкунандаи тартиби n - и зеринро меноманд:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (1.4.4)$$

Дар муайянкунандаи (1.4.4) сутуни якумро ба (-1) зарб намуда, натиҷаро бо навбат бо сутунҳои боќимонда ҷамъ мекунем:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & (x_2 - x_1) & \dots & (x_n - x_1) \\ x_1^2 & (x_2^2 - x_1^2), & \dots & (x_n^2 - x_1^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) & \dots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Акнун муайянкунандаи охиринро аз рўи элементҳои сатри якум ҷудо намуда ҳосил мекунем:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \dots & (x_n - x_1) \\ (x_2^2 - x_1^2) & (x_3^2 - x_1^2) & \dots & (x_n^2 - x_1^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) & (x_3^{n-1} - x_1^{n-1}) & \dots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Дар муайянкунандаи охирин аз ҳар як сатр сатри пешинаро, ки ба x_1 зарб карда шудааст, тарҳ карда ҳосил мекунем:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \dots & (x_n - x_1) \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Аз муайянкунандаи охирин дида мешавад, ки сутуни якум зарбшавандаи умумии $(x_2 - x_1)$, сутуни дуюм зарбшавандаи умумии

$(x_3 - x_1)$ ва ѓайра сутуни охирин зарбшавандаи умумии $(x_n - x_1)$ - ро дорад, ки онҳоро аз зери аломати муайянкунанда баровардан мумкин аст. Дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \cdot \Delta(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Дар тарафи рости баробарии охирин муайянкунандаи $\Delta(x_2, x_3, \dots, x_n)$ - ро ҳосил намудем. Бо ин муайянкунанда низ амалиётҳои дар боло гузаронидаро иҷро намуда дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$\Delta(x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\dots(x_n - x_2) \cdot \Delta(x_3, x_4, \dots, x_n).$$

Ин равандро давом дода дар натиҷа ќимати муайянкунандаи Вандермондро ҳосил мекунем, ки он ба

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\dots(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})$$

баробар аст.

3.7. Ранги матриса ва хосиятҳои он

Ҳангоми ҳалли бисёр масъалаҳои назариявӣ ва амалӣ мафҳуми *ранги матриса* аҳамияти муҳим дорад. Масалан, мо аз ин мафҳум ҳангоми тадќиќи ҳамҷояги системаи муодилаҳои хаттӣ истифода хоҳем кард.

Бигузор, матрисаи $A = (a_{ij})_{m \times n}$ дода шуда бошад. Аз ин матриса ба таври ихтиёрӣ k сатр ва k сутунро интихоб мекунем ($1 \le k \le \min(m, n)$). Элементҳое, ки дар буриши ин сатру сутунҳо ҷойгиранд, матрисаи квадратии тартиби k -ро ташкил медиҳанд. **Муайянкунандаи ин матрисаро *минори тартиби* k *- уми* матрисаи** A меноманд.

Мисол. Бигузор, матрисаи $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ дода шуда бошад.

Тартиби калонтарини минорҳои имконпазири ин матриса ба 3 баробар аст, чунки $k \le \min(3,4) = 3$ аст. Элементи ихтиёрии матриса минори тартиби якум аст. Масалан, $a_{11} = 2$ яке аз минорҳои тартиби якум мебошад. Агар мо сатри дуюму сеюм ва сутунҳои сеюму чорумро гирем (k=2), он гоҳ элементҳои дар буриши ин сатру сутунҳо ҷойгир шуда матрисаи $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$-ро ташкил медиҳанд. Муайянкунандаи ин матриса $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9$ яке аз минорҳои тартиби дуюми матрисаи A мешавад. Айнан ҳамин тавр, минорҳои дигари тартиби дуюм ва минорҳои тартиби сеюми ин матриса ёфта мешаванд.

Таърифи 1.5.1. Ранги матрисаи A гуфта, тартиби калонтарини минори ғайрисифрии ин матрисаро меноманд. Ранги матрисаи A - ро бо $R(A)$ ишора мекунем.

Агар ҳамаи минорҳои матриса ба сифр баробар бошанд, он гоҳ $R(A) = 0$ ҳисобида мешавад. Ранги матрисаи $A \neq \theta$ адади натуралӣ мебошад.

Бевосита аз таърифи ранги матриса дида мешавад, ки

1) $0 \leq R(A) \leq \min(m, n)$.

2) $R(A) = 0 \Leftrightarrow A = \theta$.

3) Агар $\det A \neq 0$ бошад, он гоҳ $R(A) = n$ аст.

Тарзҳои гуногуни ёфтани ранги матриса мавҷуданд. Ҳоло бо ду усули маъмули ёфтани ранги матриса шинос мешавем.

3.7.1. Усули якуми ёфтани ранги матриса

Ин усул ба хосиятҳои матриса асос ёфтааст. Агар ҳамаи минорҳои тартиби k - уми матриса ба сифр баробар бошанд, он гоҳ дар асоси формулаи ҷудокунии муайянкунандаҳо аз рӯи элементҳои сатри (сутуни) ихтиёрӣ ҳамаи минорҳои тартибашон аз k калон низ ба сифр баробар мешаванд. Бино бар ин, агар ақаллан як минори тартиби k -ум аз сифр фарқ намояд ва ҳамаи минорҳои тартиби $k+1$ ба сифр баробар шаванд ё мавҷуд набошанд, он гоҳ $R(A) = k$ мешавад.

Ҳамин тавр, ранги матрисаро ба тарзи зайл ҳисоб кардан мумкин аст: агар ҳамаи минорҳои тартиби якум ба сифр баробар бошанд, он гоҳ $R(A) = 0$ аст. Агар ақаллан яке аз минорҳои тартиби якум аз сифр фарқ кунаду ҳамаи минорҳои тартиби дуюм ба сифр баробар бошанд, он гоҳ $R(A) = 1$ мешавад. Ин равандро то даме

давом медиҳем, ки аз ду ҳолати имконпазири зерин яке ошкор гардад: ё ҳамаи минорҳои тартиби (k+1) -ум ба сифр баробаранд ё минорҳои тартиби (k+1) -ум мавҷуд нестанд. Он гоҳ $R(A) = k$ мешавад.

Мисол. Ранги матрисаи $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 12 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ ёфта шавад.

Ҳал. Азбаски минорҳои тартиби якуми ғайрисифрӣ мавҷуданд (масалан $a_{11} = 6 \neq 0$), пас $R(A) \neq 0$ аст. Аз элементҳои ин матриса минорҳои тартиби дуюм ва сеюм сохтан мумкин аст. Вале ҳамаи онҳо ба сифр баробаранд (мустақилона санҷед). Бино бар ин, $R(A) = 1$ мешавад.

Бо ин тарз ёфтани ранги матриса бо ҳисоби миқдори зиёди муайянкунандаҳо алоқаманд буда, истифодаи онро ноқулай месозад. Аз ин сабаб усули дигари ёфтани ранги матрисаҳоро дида мебароем, ки он ба табдилоти элементарии матрисаҳо асос ёфтааст.

3.7.2. Табдилоти элементарии матрисаҳо

Хотиррасон менамоем, ки *амалиётҳои зеринро табдилоти элементарии матрисаҳо меноманд*:

1. Транспонironии матриса.
2. Иваз кардани ҷои сатрҳои (сутунҳои) матриса.
3. Ба адади ғайрисифрӣ зарб кардани элементҳои сатри (сутуни) матриса.
4. **Ҷамъ кардани элементҳои ягон сатр (сутун), ки пешакӣ ба адади ихтиёрӣ зарб карда шудааст, бо элементҳои мувофиқи сатри** (сутуни) дигар.
5. Хат задани сатри (сутуни) сифрӣ.

Теоремаи 1.5.1. *Дар натиҷаи табдилоти элементарӣ ранги матриса тағйир намеёбад.*

Исбот. Аз хосияти муайянкунандаҳо дида мешавад, ки дар натиҷаи табдилоти 1- 4 ё қимати минорҳои матриса тағйир намеёбанд, ё онҳо ба ягон адади ғайрисифрӣ зарб мешаванд. Дар натиҷа тартиби калонтарини минори ғайрисифрӣ тағйир намеёбад, яъне ранги матриса бетағйир мемонад. *Теорема исбот шуд.*

Теоремаҳои зеринро беисбот меоварем.

Теоремаи 1.5.2. Матрисаи ихтиёрии А-ро ба воситаи табдилоти элементарии сатрҳо ба чунин матрисаи зинамонанди С овардан мумкин аст, ки дар ин ҳолат ранги матрисаи А ба миқдори сатрҳои матрисаи С баробар мешавад.

Аз теоремаи 1.5.2 дар амалия барои ҳисоб кардани ранги матриса истифода мебаранд.

Теоремаи 1.5.3. Матрисаи ихтиёрии А-ро ($\det A \neq 0$) ба воситаи табдилоти элементарии сатрҳо ба матрисаи воҳидӣ овардан мумкин аст.

3.7.3. Усули дуюми ёфтани ранги матриса

Бо ёрии табдилоти элементарӣ матрисаро ҳамеша ба намуди трапетсияшакли зерин овардан мумкин аст:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots a_{kk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ки дар ин ҷо $a_{ii} \neq 0$, $i=\overline{1,k}$, $k \leq n$ мебошад. Ранги ин матриса ба k баробар аст, чунки

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot \ldots a_{kk} \neq 0 \text{ аст.}$$

Мисол. Ранги матрисаи $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ёфта шавад.

Ҳал. 1) Азбаски дар матрисаи A элементи $a_{11}=0$ аст, бино бар ин, ҷои сатрҳо ё сутунҳоро иваз карда (масалан сатри якум ва дуюмро), матрисаи наверо ҳосил мекунем, ки дар он $a_{11}=2\neq 0$ аст:

$$A\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Сатри якуми ин матрисаро нигоҳ дошта, элементҳои дуюм ва сеюми сутуни якумро ба сифр табдил медиҳем. Барои ин кифоя аст, ки ҳамаи элементҳои сатри якумро бо навбат ба ададҳои $-\frac{a_{21}}{a_{11}}=0, -\frac{a_{31}}{a_{11}}=-1$ зарб карда, натиҷаҳоро мувофиқан бо элементҳои сатри дуюм ва сеюм ҷамъ кунем:

$$A\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3) Агар дар матрисаи ҳосилшуда $a_{22}\neq 0$ бошад (барои мисоли мо $a_{22}=2\neq 0$), он гоҳ сатри якум ва дуюмро нигоҳ дошта, дар сатри сеюм элементи $a_{32}=2$-ро ба сифр табдил медиҳем. Барои ин кифоя аст, ки сатри дуюмро ба $-\frac{a_{32}}{a_{22}}=1$ зарб карда, натиҷаро бо сатри сеюм ҷамъ намоем:

$$A\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрисаи охирин трапетсияшакл буда, минори тартиби дуюми он $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0$ аст. Пас, ранги матриса $R(A)=2$ мешавад.

Хосиятҳои ранги матрисаҳоро бе исбот номбар мекунем:

1. $R(A+B)\leq R(A)+R(B)$.
2. $R(A+B)\geq |R(A)-R(B)|$.
3. $R(A\cdot B)\leq \min(R(A),R(B))$.
4. $R(A^T)=R(A)$.
5. $R(A\cdot B)=R(A)$, агар $A=(a_{ij})_{nxm}$, $B=(b_{ij})_{nxm}$ ва $\det A\neq 0$ бошад.

3.8. Матрисаи баръакс ва хосиятҳои он

Тавре маълум аст, барои ҳар як адади ҳақиқии $a \neq 0$ ягона адади $a^{-1} = \frac{1}{a}$ мавҷуд аст, ки шартҳои $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$ - ро қонеъ менамояд. Адади a^{-1} – ро *адади баръакс барои адади a меноманд.*

Акнун матрисаеро ҷустуҷӯ мекунем, ки дорои ин хосият аст. *Оё барои матрисаи ихтиёрии A чунин матрисаи B мавҷуд аст, ки $A \cdot B = B \cdot A = E_n$ мешавад*? Агар чунин матриса мавҷуд бошад, он гоҳ онро *матрисаи баръакс* барои матрисаи A номида, бо рамзи A^{-1} ишора менамоянд:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \qquad (1.6.1)$$

ки дар ин ҷо E_n матрисаи воҳидии тартиби n – ум мебошад.

Аз тарафи дигар аён аст, ки матрисаи баръакс метавонад фақат барои матрисаҳои квадратӣ мавҷуд бошад, чунки зарби матрисавии $A \cdot B$ ва $B \cdot A$ фақат барои матрисаҳои квадратии тартибашон якхелаи A ва B муайян аст.

Теоремаи 1.6.1. (*Шарти зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти матрисаи баръакс*). Барои мавҷудияти матрисаи баръакс A^{-1} зарур ва кифоя аст, ки $\det A \neq 0$ бошад. Агар A^{-1} мавҷуд бошад, пас он ягона аст.

Исботи шарти зарурӣ. Бигузор, матрисаи баръакс A^{-1} мавҷуд бошад. Он гоҳ мувофиқи хосияти 11^0 -уми муайянкунандаҳо аз баробарии (1.6.1) ҳосил мекунем:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E_n = 1.$$

Аз ин ҷо дида мешавад, ки $\det A \neq 0$ ва $\det A^{-1} \neq 0$ мебошанд.

Исботи шарти кифоягӣ. Бигузор, $\det A \neq 0$ бошад. Матрисаи ёрирасони

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- ро дида мебароем, ки дар ин ҷо A_{ij} пуркунандаи алгебравии элементи a_{ij} мебошад. Ҳосили зарби $C \cdot A = D = (d_{ij})_{n \times n}$ - ро ҳисоб

мекунем. Мувофиқи қоидаи зарби матрисаҳо ва хосиятҳои 8^0 ва 9^0 – уми муайянкунандаҳо баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$d_{ij} = A_{1i} \cdot a_{1j} + A_{2i} \cdot a_{21j} + \dots + A_{ni} \cdot a_{nj} = \begin{cases} \det A\,, & \text{агар } i \neq j \text{ бошад,} \\ 0\,, & \text{агар } i = j \text{ бошад.} \end{cases}$$

Ҳамин тавр, матрисаи $D = (d_{ij})_{nxn}$ диагоналӣ буда, ҳамаи элементҳои диагонали асосиаш ба $\det A$ баробар аст: $D = C \cdot A = \det A \cdot E_n$.

Айнан ба ҳамин монанд, бо осонӣ исбот кардан мумкин аст, ки $A \cdot C = \det A \cdot E_n$ аст. Ба сифати матрисаи баръакс матрисаи

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C \qquad (1.6.2)$$

-ро мегирем. Дурустии баробариҳои (1.6.1) - ро месанҷем:

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C = \frac{1}{\det A} \cdot A \cdot C = \frac{1}{\det A} \cdot \det A \cdot E_n = E_n .$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot C \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot \det A \cdot E_n = E_n .$$

Исботи ягонагӣ. Тасдиқотро аз баръаксаш исбот мекунем. Бигузор, барои матрисаи A ду матрисаи баръакси гуногун A_1^{-1} ва A_2^{-1} мавҷуд бошанд ($A_1^{-1} \neq A_2^{-1}$):

$$A \cdot A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot A = E_n \text{ ва } A \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1} \cdot A = E_n, \quad A_1^{-1} \neq A_2^{-1}.$$

Баробарии якумро аз тарафи чап ба A_2^{-1} зарб мекунем:

$$A_2^{-1} \cdot A \cdot A_1^{-1} = A_2^{-1} \cdot E_n \Leftrightarrow E_n \cdot A_1^{-1} = A_2^{-1} \cdot E_n \Leftrightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1} .$$

Ин зиддият нишон медиҳад, ки фарзи мо нодуруст аст, яъне агар матрисаи баръакс мавҷуд бошад, пас он ягона аст. *Теорема исбот шуд.*

3.8.1. Усули якуми ёфтани матрисаи баръакс

Аз теоремаи 1.6.1 *алгоритми зерини ёфтани матрисаи баръакс* бармеояд:

1. Муайянкунандаи матрисаро ҳисоб мекунем. Агар $\det A = 0$ бошад, он гоҳ матрисаи баръакс мавҷуд нест ва ҷустуҷӯ бо ҳамин ба итмом мерасад. Агар $\det A \neq 0$ бошад, он гоҳ матрисаи баръакс мавҷуд аст ва ҷустуҷӯро давом медиҳем.

2. Ҳамаи элементҳои матрисаи ёрирасон C – ро меёбем.

3. Матрисаи баръакс A^{-1} – ро аз формулаи (1.6.2) меёбем.

4. Дурустии натиҷаи ниҳоиро тавассути баробариҳои (1.6.1) месанҷем.

Мисол. Матрисаи баръаксро барои матрисаи $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ меёбем.

1. $\det A = 16-2-2+12=24 \neq 0$. Матрисаи баръакс мавҷуд аст.

2. Пуркунандаҳои алгебравии элементҳои матрисаро ҳисоб мекунем:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=8-1=7. \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(6-1)=-5 \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1.$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-(-4-0)=4. \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4-0=4. \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-(2+2)=-4.$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2-0=-2.. \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-(2-0)=-2. \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=8+6=14.$$

3. Мувофиқи формулаи (1.5.2) матрисаи баръаксро менависем:

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 7 & -5 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \\ -2 & -2 & 14 \end{pmatrix}.$$

4. Санҷиш:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 7 & -5 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \\ -2 & -2 & 14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 14+10 & 21-20-1 & 7-5-2 \\ 8-8 & 12+16-4 & 4+4-8 \\ -4+4 & -6-8+14 & -2-2+28 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E_3.$$

Айнан ҳамин тавр, баробарии $A\cdot A^{-1}=E_3$ санҷида мешавад.

Хосиятҳои матрисаи баръаксро бе исбот номбар мекунем. Бигузор, $\det A \neq 0$ ва $\det B \neq 0$ бошанд. Он гоҳ, баробариҳои зерин ҷой доранд:

1. $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$.

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

3. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

4. $(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}\cdot A_n)^{-1}=A_n^{-1}\cdot A_{n-1}^{-1}\cdot\ldots\cdot A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}$.

5. $\left(A^m\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^m$.

3.8.2. Усули дуюми ёфтани матрисаи баръакс

Дар ин банд тарзи дигари ёфтани матрисаи баръаксро дида мебароем.

Бигузор матрисаи квадратии A дода шуда бошад:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Аз тарафи рости ин матриса матрисаи воҳидиро илова мекунем:

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ба воситаи табдилоти элементарии матрисаҳо пай дар пай дар матрисаи васеъкардашуда қисми чапи онро ба матрисаи воҳидӣ табдил медиҳем. Ҳамзамон дар қисми рости он матрисаи наве пайдо мешавад, ки он матрисаи A^{-1} мебошад. Табиист, ки баъд аз ёфтани A^{-1} дурустии баробариҳои $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ - ро санҷидан зарур аст.

Ин усулро бо мисоли мушаххас шарҳ медиҳем.

Мисол. Матрисаи баръаксро барои матрисаи $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ёбед.

Ҳал. Азбаски $\det A = 12+15-4+4-10-18=-1\neq 0$ аст, пас матрисаи баръакс A^{-1} мавҷуд аст. Ифодаи $(A\,|\,E)$-ро тартиб медиҳем:

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Аввал сатри якумро ба (-3) зарб карда бо сатри дуюм ҷамъ мекунем, баъд сатри якумро бо сатри сеюм ҷамъ мекунем:

$$(A\,|\,E)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Сатри дуюмро ба 7 ва сатри сеюмро ба 2 зарб карда онҳоро ҷамъ мекунем:

$$(A\,|\,E)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 2\end{array}\right).$$

Сатри дуюмро ба 1 зарб карда бо сатри якум ҷамъ мекунем:

$$(A\,|\,E)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 2\end{array}\right).$$

Сатри сеюмро ба 1 зарб карда бо сатри дуюм ҷамъ мекунем:

$$(A\,|\,E)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -22 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 2\end{array}\right).$$

Сатри дуюмро ба $(-\frac{1}{2})$ зарб мекунем:

$$(A\,|\,E)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 11 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 2\end{array}\right)=(E\,|\,B).$$

Ҳамин тариқ, амалиётҳои $(A\,|\,E)\to\cdots\to(E\,|\,B)$ ба охир расиданд ва $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 11 & -4 & -1\\ -19 & 7 & 2\end{pmatrix}$ мебошад.

Санҷиш:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 11 & -4 & -1\\ -19 & 7 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+22-19 & 1-8+7 & 0-2+2\\ -6+44-38 & 3-16+14 & 0-4+4\\ 2+55-57 & -1-20+21 & 0-5+6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.\ \text{Пас, } B=A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 11 & -4 & -1\\ -19 & 7 & 2\end{pmatrix}.$$

Айнан ҳамин тавр баробарии $B\cdot A=E$ санҷида мешавад, ки онро ба хонандаи гиромӣ пешкаш менамоем.

§3.9. Матрисаи технологӣ ва масъалаи идораи оптималӣ (беҳтарин)

Матрисаҳо дар ҳамаи шохаҳои илми муосир татбиқи васеъ худро доранд. Аз он ҷумла дар илми иқтисодиёт низ аз мафҳуми матриса бисёр истифода мебаранд. Тавассути матрисаҳо моделҳои хаттии иқтисодӣ дар намуди кӯтоҳ ва барои истифода қулай навишта мешаванд. Дар ин банд матрисаи $A=(a_{ij})_{m\times n}$-ро аз нуқтаи назари иқтисодӣ шарҳ медиҳем.

Бигузор, ягон корхона аз m намуди ашёи хом n намуди маҳсулотро истеҳсол намояд. Фарз мекунем, ки барои истеҳсоли як воҳиди маҳсулоти намуди j - ум a_{ij} воҳид ашёи хоми намуди i - ум сарф шавад, яъне a_{ij} меъёри харочоти ашёи хоми i-ум барои истеҳсоли маҳсулоти j-ум мебошад. Матрисаи $A=(a_{ij})_{m\times n}$, ки аз меъёрҳои харочоти ашёҳои хом тартиб додашудааст, *матрисаи меъёрҳои харочотҳои истеҳсолӣ ё матрисаи технологӣ* ном дорад.

Сутуни j - уми ин матрисаро дида мебароем. Онро бо A_j ишора мекунем. Ин сутун хароҷоти пурраи ашёи хомро барои истеҳсоли як воҳиди маҳсулоти j - ум ифода мекунад. Барои истеҳсоли як воҳиди маҳсулоти j - ум a_{1j} воҳид ашёи хоми намуди якум, a_{2j} воҳид ашёи хоми намуди дуюм ва ҳоказо, a_{mj} воҳид ашёи хоми намуди m - умро *«омехта кардан»* лозим аст. Ин раванди «омехтакунӣ»-ро *технологияи коркарди ашёҳои хом* номидан мумкин аст. Ҳамин тавр, сутуни j-уми матрисаи A технологияи j-уми коркарди ашёҳои хомро ифода мекунад. Азбаски матриса n сутун дорад, пас корхона дорои n технология мебошад.

Акнун мазмуни сатрҳои матрисаи меъёри хароҷотҳоро шарҳ медиҳем. Аён аст, ки элементҳои сатри i - ум хароҷоти ашёи хоми i - умро барои истеҳсоли як воҳиди ҳар як маҳсулот ифода мекунад.

Наќшаи истеҳсолотеро муойина менамоем, ки аз истеҳсоли x_1 воҳид маҳсулоти намуди якум, x_2 воҳид маҳсулоти намуди дуюм ва аз x_n воҳид маҳсулоти намуди n -ум иборат аст. Ин наќша бо матрисаи (вектори) сутунии $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ифода меёбад. Барои амалӣ гаштани ин наќша $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j$ воҳид ашёи хоми намуди якум, $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j$ воҳид ашёи хоми намуди дуюм ва ѓайра $\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j$ воҳид ашёи хоми намуди m-ум лозим аст. Ин миќдори ашёҳои хом элементҳои матрисаи (компонентаҳои вектори) сутунии $A\cdot X$ мешаванд:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix},$$

яъне ба ҳосили зарби матрисаи меъёри хароҷоти ашёҳои хом A ва матрисаи (вектори) сутунии наќшаи истеҳсолот X баробар аст.

Бо c_j даромадро аз фурўши як воҳиди маҳсулоти намуди j-ум ишора мекунем $(j=\overline{1,n})$. Ҳамаи ин даромадҳоро дар шакли матрисаи (вектори) сатрии $C=(c_1,c_2,...,c_n)$ менависем. Он гоҳ зарби матрисаи (вектори) X ба матрисаи (вектори) C андозаи даромадеро ифода мекунад, ки ҳангоми фурўши X воҳиди маҳсулоти истеҳсолшуда ба даст омадааст. Ин даромадро бо $F(X)$ ишора мекунем:

$$F(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n.$$

Одатан $F(X)$ - ро *функсияи маќсад* меноманд.

Бигузор, b_i - миќдори захираи ашёи хоми намуди i- умро ифода намояд $(i=\overline{1,m})$. Матрисаи (вектори) сутунии $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ тамоми захираи намудҳои гуногуни ашёи хомро ифода мекунад. Нобаробарии матрисавии (вектории) $AX\le B$ бошад зарурияти баэътиборгирии маҳдуд будани захираи намудҳои гуногуни ашёи хомро ҳангоми ба наќшагирии истеҳсолот ифода менамояд. Агар ин нобаробарӣ иҷро шавад, пас барои амалӣ гаштани наќшаи X захираҳои мавҷуда кифоя буда, *ин наќша воќеӣ ё имконпазир* аст.

Масъалаи *банаќшагирии беҳтарини истеҳсолотро* дида мебароем: *аз байни ҳамаи наќшаҳои имконпазири истеҳсолот ҳамонашро ёбед, ки даромади калонтаринро таъмин менамояд.*

Ин масъала яке аз *масъалаҳои муҳимтарини назарияи иќтисод* мебошад.

Бо истифода аз мафумҳои матриса, вектор, амалҳо бо онҳо ва дигар рамзҳои математикӣ масъалаи мазкурро ба намуди матрисавии зерин навиштан мумкин аст:

$$F(X)=C\cdot X\to\max,$$
$$AX\le B,$$
$$X\ge\theta.$$

Нобаробарии охирин аз мазмуни масъалаи гузошташуда бармеояд: $X \geq \theta \Rightarrow x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$. Маҷмӯи ҳамаи нақшаҳои X, ки шартҳои $X \geq \theta$, $AX \leq B$ - ро қонеъ менамояд, бо D ишора мекунем ва онро *маҷмӯи нақшаҳои имконпазир* меноманд.

Масъалаи дар боло овардашударо ба намуди зерин баён кардан мумкин аст: *қимати максималии функсияи даромад $F(X)$- ро дар маҷмӯи D ёбед*:

$$F(X) \to \max, \; X \in D.$$

Машқҳо барои кори мустақилона

1. Матрисаҳои $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ дода шудаанд: $A+B$, $A-B$, $A \cdot B$ ва $B \cdot A$ - ро ёбед.

2. Матрисаҳои $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ дода шудаанд. Қимати ифодаҳои

$A \pm B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^2, B^2, A^T, $(AB)^T$ - ро ёбед.

3. Қимати ифодаи $2A - 5B + AB$ ро ёбед, агар

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ бошад.

4. Матрисаҳои $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ дода шудаанд.

Ифодаи $2A - 3B^T$ - ро ҳисоб кунед.

5. Муайянкунандаҳоро ҳисоб кунед:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$. 2) $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$. 3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. 4) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}$. 5) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. 7) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. 8) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. 9) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

10) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. 11) $\begin{vmatrix} 10 & 12 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. 12) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. 13) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

14) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 15) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$. 16) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$. 17) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

6. Қимати ифодаи $2M_{22} - 3M_{32}$-ро ёбед, агар $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ бошад.

7. Пуркунандаи элементи a_{13} -ро ёбед, агар $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ бошад.

8. Қимати ифодаи $3A_{13} - 2A_{23}$-ро ёбед, агар $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -9 \end{pmatrix}$ бошад.

9. Қимати ифодаи $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$-ро ёбед, агар $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ бошад.

10. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix} = 0$. 2) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$. 3) $\begin{vmatrix} 3x & x-7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. 4) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & x \end{vmatrix} = 0$.

5) $\begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$. 6) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & -x & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. 7) $\begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$. 8) $\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 2 & x & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

11. Матрисаи баръаксро барои матрисаҳои зерин ёбед:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 7) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 8) $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$. 9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 10) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 12) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 13) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 15) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 17) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 18) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 19) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

20) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Ранги матрисаҳои зеринро ёбед:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. 8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. 9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 11) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. 12) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. 13) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. 15) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 16) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$. 17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

18) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. 19) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 20) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 21) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

22) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. 23) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. 24) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. 25) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

26) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 27) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 28) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 29) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

30) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

БОБИ 4. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ХАТТӢ

4.1.1. Мафҳумҳои асосии назарияи системаи муодилаҳои хаттӣ

Муодилаи хаттӣ нисбат ба номаълумҳои $x_1, x_2, \dots, x_n$ гуфта, баробарии намуди

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \tag{4.1.1}$$

-ро меноманд, ки дар ин ҷо $a_1, a_2, \dots, a_n$ ва b ададҳои додашуда мебошанд. Ададҳои $a_1, a_2, \dots, a_n$- ро *коэффисиентҳо (зарибҳо)* ва адади b-ро *аъзои озоди* муодила меноманд. Дар бисёр адабиётҳо муодилаи (4.1.1) - ро дар мавриди бутун будани ададҳои $a_1, a_2, \dots, a_n$ ва b *муодилаи диофантӣ* низ меноманд.

Агар $b = 0$ бошад, муодилаи (2.1.1)–ро *якҷинса* меноманд:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0.$$

Дар мавриди $b \neq 0$ будан муодилаи (4.1.1)- ро *ғайриякҷинса* номида мешавад. Масалан, муодилаи $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ якҷинса буда, $x_1 + 5x_2 - x_3 = 3$ ғайриякҷинса аст.

Пайдарпайии n ададҳои $c_1, c_2, \dots, c_n$- ро *ҳалли муодилаи* (4.1.1) меноманд, агар ҳангоми дар муодилаи (4.1.1) $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ гузоштан он ба айният табдил ёбад.

Муодилае, ки ақаллан як ҳал дорад ҳамҷоя номида шуда дар мавриди ягон ҳал надоштан ғайриҳамҷоя номида мешавад.

Ҳангоми дар муодилаи (4.1.1) $n = 1$ **будан, муодилаи хаттии** якномаълума ҳосил мешавад: $a_1x_1 = b$.

Агар $a_1 \neq 0$ бошад, муодила ҳамеша як ҳал дорад ва $x_1 = \dfrac{b}{a_1}$ аст. Дар ҳолати $a_1 = 0, b \neq 0$ муодила ҳал надорад.

Мисол. Пайдарпайии ададҳои $2, -3, 1$ ҳалли муодилаи $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 11$ мебошад, чунки дар муодилаи мазкур $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 1$ гузошта, баробарии дурусти

$$3 \cdot 2 - (-3) + 2 \cdot 1 = 6 + 3 + 2 = 11$$

-ро ҳосил мекунем.

Пайдарпайии ададҳои $1, 2, -4$ бошад ҳалли ин муодила намешавад, чунки агар дар муодила $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -4$ гузорем

$$3 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot (-4) = 3 - 2 - 8 = -7$$

мешавад.

Ногуфта намонад, ки пайдарпайии ададҳо $c_1, c_2, \dots, c_n$ як ҳалли муодилаи (4.1.1) мебошад. Дар оянда ҳалли муодиларо дар намуди $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ менависем.

Муодилаи *якҷинса* ҳамеша ҳамҷоя аст, чунки пайдарпайии $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n\text{-то}}$ ҳалли ин муодила мешавад:

$$a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Ду ҳалли муодилаи (4.1.1) $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ва $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$-ро дар мавриди $c_i = d_i, i = \overline{1,n}$ бо ҳам баробар (якхела) меноманд: $C = D$. Дар ҳолати акс ҳалҳоро гуногун меноманд: $C \neq D$.

Ду муодилаи хаттиро *баробарқувва* меноманд, агар маҷмӯи ҳалҳои онҳо якхела бошанд. Аён аст, ки ҳамаи муодилаҳои хаттие, ки ҳал надоранд баробарқувваанд, чунки маҷмӯи ҳалҳои онҳо маҷмӯи холӣ $\{\emptyset\}$ аст.

Бо осонӣ исбот кардан мумкин аст, ки дар мавриди аъзоҳои муодиларо аз як қисми баробарӣ ба қисми дигараш гузаронидан ё ҳар ду тарафи муодиларо ба ягон адади ғайрисифрӣ зарб намудан, муодилаи наве пайдо мешавад, ки ба муодилаи аввала баробарқувва аст.

Ҳал намудани муодила аз ёфтани ҳамаи ҳалҳои он ё аз исботи ҳал надоштани он иборат аст.

Барои муодилаи ғайриякҷинсаи (4.1.1) вобаста ба қимати ададҳои додашудаи $a_1, a_2, \dots, a_n$ ва b фақат ду ҳолатҳои зерин имконпазир аст:

1) Бигузор $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0, b \neq 0$ бошанд. Дар ин ҳолат муодила ҳал надорад, чунки барои ҳамаи пайдарпайиҳои имконпазири ададҳо $c_1, c_2, \dots, c_n$, ҳангоми дар муодилаи (4.1.1)

гузоштани ќиматҳои $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$, баробарии нодурусти

$$0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + ... + 0 \cdot c_n = b,\ b \neq 0$$

-ро ҳосил мекунем.

2) Аќаллан яке аз коэффисиентҳои муодилаи (4.1.1) аз сифр фарќ намояд. Барои муайянӣ, фарз мекунем, ки $a_1 \neq 0$ аст. Дар ин ҳолат ҳамаи аъзоҳои муодилаи (4.1.1) - ро, ба ѓайр аз $a_1 x_1$, ба тарафи рости муодила мегузаронем. Баъд баробарии ҳосилшударо ба a_1 таќсим намуда, ҳосил мекунем:

$$x_1 = d_0 + d_2 x_2 + ... + d_n x_n, \qquad (4.1.2)$$

ки дар ин ҷо $d_0 = \frac{b}{a_1}$, $d_j = -\frac{a_j}{a_1}$, $j = \overline{2,n}$. Ин муодила ба муодилаи (4.1.1) баробарќувва аст. Бинобар ин кифоя аст, ки ҳалҳои муодилаи (4.1.2)-ро ёбем.

Номаълуми x_1 - ро *ҳалшуда* ва номаълумҳои x_2, x_3, ..., x_n-ро *номаълумҳои озод* меноманд. Дар ин мавриид муодила *ҳалли бешумор* дорад, чунки барои ҳамаи ќиматҳои имконпазири номаълумҳои озод ҳалли муодилаи (4.1.2) - ро сохтан мумкин аст. Барои ин дар баробарии (4.1.2) $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$, ..., $x_n = c_n$ гузошта ќимати x_1-ро меёбем: $x_1 = d_0 + d_2 c_2 + ... + d_n c_n$ ва пайдарпайииададҳои

$$d_0 + d_2 c_2 + ... + d_n c_n,\ c_2,\ ...,\ c_n$$

ҳалли муодилаи (4.1.2) мешавад.

Ҳамин тавр, барои $n \geq 2$ муодилаи (4.1.1) ё ҳал надорад ё ҳалли бешумор дорад. Баробарии (4.1.2)-ро *тасвири ҳалли умумии муодилаи* (4.1.1) меномем. Он ҳале, ки аз тасвири умумии ҳал барои ягон пайдарпайии ќиматҳои номаълумҳои озод $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$, ..., $x_n = c_n$ ҷудо карда мешавад, *ҳалли хусусии* муодилаи (4.1.1) меноманд.

Мисол. Барои муодилаи $2x_1 - x_2 - 5x_3 = 6$ баробарии $x_1 = 3 + 0{,}5x_2 + 2{,}5x_3$ ҳалли умумӣ буда, ҳалли хусусии ба ќиматҳои номаълумҳои озод $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ мувофиќ $(14; 2; 4)$ мешавад.

Акнун ба омӯзиши *системаи муодилаҳои хаттӣ* шурӯъ менамоем. Системаи m муодилаи хаттии n номаълума гуфта системаи намуди

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (4.1.3)$$

-ро меноманд, ки дар ин ҷо x_1, x_2, ..., x_n номаълумҳо буд, a_{ij} ва b_i $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ададҳои додашуда мебошанд ва мувофиќан *коефисиентҳои назди номаълумҳо ва аъзоҳои озод (тарафи рости система)* ном доранд. Ададҳои натуралии m ва n новобаста аз ҳамдигар ќимат ќабул мекунанд.

Агар аќаллан яке аз аъзоҳои озод аз сифр фарќ кунад, системаи (4.1.3)-ро *ѓайриякҷинса* ва дар ҳолати баръаксӣ $(b_1 = b_2 = ... = b_m = 0)$ *якҷинса* меноманд.

Масалан, системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

ѓайриякҷинса буда, системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 4x_3 = 0, \end{cases}$$

якҷинса мебошад.

Системаи якҷинсаи ба системаи (2.1.3) мувофиќ намуди зеринро дорад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (4.1.4)$$

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\ \cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрисаи асосии система.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ - матрисаи васеъкардашудаи система.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - сутуни номаълумҳо, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - сутуни аъзоҳои озод.

Бо ёрии ин ишораҳо системаҳои (4.1.2) ва (4.1.3) — ро ба намуди кўтоҳи

$$A \cdot X = B \qquad (4.1.4)$$

$$A \cdot X = \theta \qquad (4.1.5)$$

навиштан мумкин аст, ки онҳоро *навишти матрисавии* системаи муодилаҳои хаттӣ меноманд.

Таърифи 4.1.1. Пайдарпайии ададҳои $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - ро *ҳалли системаи* (2.1.2) меноманд, агар баъди дар система ба ҷои $x_1, x_2, \ldots, x_n$ гузоштани ададҳои $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ҳар як муодилаи он ба айният (баробариҳои дурусти ададӣ) табдил ёбад.

Таърифи 4.1.2. Системае, ки ақаллан як ҳал дорад *системаи ҳамҷоя* ном дорад. Системае, ки ягон ҳал надорад *системаи ғайриҳамҷоя* меноманд.

Системаи якҷинса ҳамҷоя аст, чунки ададҳои $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ ҳамеша онро қаноат менамоянд. Ин ҳалро ҳалли *сифрӣ* ё ки тривиалӣ меноманд.

Таърифи 4.1.3. Системаи ҳамҷояро *муайян* меноманд, агар он ҳалли ягона дошта бошад. Агар системаи ҳамҷоя зиёда аз як ҳал дошта бошад, он гоҳ онро *номуайян* меноманд.

Масалан, системаҳои

1) $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x - 6y = 2. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 2y = 2, \\ x + y = 9. \end{cases}$

мувофиқан як ҳал, ҳалли бисёр ва ҳал надорад.

Дар ҳақиқат, чӣ хеле, ки аз курси мактабии математика маълум аст

1) хатҳои рости $3x + y = 5$ ва $2x - y = 0$ коефисиентҳои кунҷии гуногун доранд ($k_1 = -3$, $k_2 = 2$), Бино бар ин онҳо фақат дар як нуқта ҳамдигарро мебуранд: $x = 1$, $y = 2$;

2) хатҳои рости $2x - 3y = 1$ ва $4x - 6y = 2$ параллел буда, болои ҳам мехобанд. Бино бар ин ҷуфти ададҳои ихтиёрии намуди (x , $\frac{2x-1}{3}$) ин системаро қаноат мекунонанд;

3) хатҳои рости $2x + 2y = 2$, $x + y = 9$ низ параллеланд, вале болои ҳам намехобанд. Пас онҳо нуқтаи умумӣ надоранд. Бино бар ин системаи 3) ҳал надорад.

Таърифи 4.1.4. Ду системаи муодилаҳои хаттиро бо ҳам *баробарқувва* меноманд, агар онҳо маҷмўи якхелаи ҳалҳо дошта бошанд.

Ибораи «системаи муодилаҳоро ҳал кунед» маънои онро дорад, ки аввал мо бояд ҳамҷоя будани системаро муайян намоем ва дар ҳолати ҳамҷоя будани система ҳамаи ҳалҳои онро ёбем.

Амалиётҳои зеринро *табдилдиҳиҳои элементарии* системаи муодилаҳо меноманд:

1. Иваз кардани ҷои муодилаҳо дар система.
2. Зарб кардани ҳар ду тарафи муодилаи ихтиёрии система ба адади ғайри сифрӣ.

3. Ҷамъ кардани ҳар ду тарафи муодилаи ихтиёрии система, ки пешакӣ ба ягон адад зарб карда шудааст, бо ҳар ду тарафи муодилаи дигари он.

4. Агар система якчанд муодилаҳои якхела дошта бошад, он гоҳ нигоҳ доштани яке аз онҳо ва аз эътибор соқит кардани (хат задани) дигарҳояш.

5. Хат задани муодилаҳои намуди $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

Теоремаи 4.1.1. Дар натиҷаи табдилдиҳии элементарии системаи муодилаҳои хаттӣ системаи наве пайдо мешавад, ки ба системаи аввала баробарқувва аст.

Исбот. Ҳар ду тарафи ягон муодилаи системаи (2.1.1) – ро ба адади $k \neq 0$ зарб карда онро бо муодилаи дигари система ҷамъ мекунем. Масалан, агар муодилаи якумро ба адади $k \neq 0$ зарб карда, бо муодилаи дуюм ҷамъ кунем, дар натиҷа муодилаи зерин пайдо мешавад:

$$k \cdot (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = kb_1 + b_2$$

ё

$$a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \qquad (4.1.6)$$

ки дар ин ҷо $a'_{2k} = ka_{1k} + a_{2k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$, $b'_2 = kb_1 + b_2$.

Системаи муодилаҳои зеринро, ки аз системаи (2.1.3) фақат бо муодилаи дуюмаш фарқ мекунад, дида мебароем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (4.1.7)$$

Агар ададҳои $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ҳалли системаи (4.1.3) бошанд, он гоҳ онҳо системаи (4.1.7) – ро низ қаноат мекунонанд, чунки ҳамаи муодилаҳои ин ду система ба ғайр аз муодилаи дуюм якхела буда, муодилаи дуюми он муодилаи (4.1.6) мебошад. Тасдиқоти баръакс низ ҷой дорад: *агар ададҳои $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ҳалли системаи (4.1.7) бошад, он гоҳ он ҳалли системаи (4.1.3) низ мешавад, чунки муодилаи дуюми системаи (4.1.3) дар натиҷаи муодилаи якуми системаи (4.1.7) – ро ба $(-k)$ зарб карда натиҷаҳоро бо муодилаи дуюм ҷамъ кардан пайдо мешавад ва муодилаҳои боқимондаи ин*

системаҳо якхела мебошанд. Аз ин ҷо бармеояд, ки системаҳои (4.1.3) ва (4.1.7) баробарқувваанд.

Фаҳмост, ки агар ба системаи (4.1.3) якчанд маротиба табдилдиҳиҳои элементарӣ татбиқ карда шаванд, он гоҳ системаҳои нави ҳосилшуда ба системаи аввала баробарқувва (эквивалент) мешаванд. Теорема исбот шуд.

Истифодаи табдилдиҳиҳои элементарӣ имконият медиҳанд, ки мо системаи додашударо ба намуди нисбатан соддатар оварда, пас онро ҳал кунем. Яке аз усулҳои асосии ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ, ки усули Гаусс (1777-1855, математики олмонӣ) ё пай дар пай хориҷкунии номаълумҳо ном дорад, ки ба ин теорема асос карда шудааст.

4.2. Усулҳои ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ

Акнун усулҳои ҳалли системаи муодилаҳои хаттиро дида мебароем, ки онҳо аз сохтори системаи муодилаҳои хаттӣ вобастаанд. Якчанд усулҳои ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ мавҷуданд, ки аз онҳо 4 усули бештар маъмулгашта инҳоянд:

1. Ҳалли система бо ёрии матрисаи баръакс.
2. Қоидаи Крамер.
3. Усули Гаусс ё пай дар пай хориҷ кардани номаълумҳо.
4. Ҳалли система бо ёрии табдилдиҳии Жорданӣ.

Доираи татбиқи усулҳои 1 ва 2 васеъ намебошад, бинобар ин онҳоро фақат барои ҳалли системаи n муодилаи хаттии n номаълума истифода мебаранд. Усули Гаусс ва Жордан бошад, *универсалӣ (ҳамаҷониба)* буда, нисбат ба ду усули аввала афзалиятҳои бештар доранд. Бо ёрии онҳо системаи ихтиёрии m муодилаҳои хаттии n номаълумаро ҳал (тахқиқ) кардан мумкин аст.

Аввал системаи n муодилаи хаттии n номаълумаро меомӯзем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

4.2.1. Усули матрисавии ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ

Теоремаи 4.2.1. Агар муайянкунандаи матрисаи асосии системаи (4.2.1) аз сифр фарқ кунад ($\det A \neq 0$), он гоҳ ин система ҳамеша ҳалли ягона дорад ва он бо формулаи

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{4.2.2}$$

ёфта мешавад.

Исбот. Азбаски $\det A \neq 0$ аст, пас барои матрисаи A ҳамеша матрисаи баръакс A^{-1} мавҷуд аст. Системаи (4.2.1)-ро ба намуди матрисавӣ менависем:

$$A \cdot X = B \tag{4.2.3}$$

Баробарии (4.2.3) –ро аз тарафи чап ба матрисаи баръакс A^{-1} зарб мекунем. Баробариҳои $A^{-1} \cdot A = E$ ва $E \cdot X = X$ –ро ба эътибор гирифта, формулаи (4.2.2) -ро ҳосил мекунем. Ягонагии ҳал аз ягонагии матрисаи баръакс бармеояд. Теорем исбот шуд.

Ҳамин тавр, агар матрисаи баръакс A^{-1} барои матрисаи асосии система A маълум бошад, он гоҳ ин усул татбиқшаванда аст ва ҳалли ягонаи система бо ёрии формулаи (4.2.6) ёфта мешавад.

Мисол. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

Ҳал. 1) Муайянкунандаи матрисаи асосии системаро ҳисоб мекунем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 8 + 3 - 12 + 8 + 1 = 24 - 12 \neq 0.$$

2) Элементҳои матрисаи баръаксро мувофиқи формулаи пуркунандаҳои алгебравӣ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ меёбем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-8) = 9, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+3) = -4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-2) = 4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8+3) = -11, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5.$$

3) Матрисаи баръаксро мувофиқи формулаи (1.5.2)- (боби 1) меёбем:

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -4 & -4 & 4 \\ -2 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

4) Ба формулаи (4.2.2) қимати A^{-1} ва B–ро гузошта, X–ро меёбем:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -4 & -4 & 4 \\ -2 & -11 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 + 27 - 15 \\ -8 - 12 + 20 \\ -4 - 33 + 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аз ин ҷо $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ мешавад.

5) **Санҷиш:**

$2 \cdot 2 - 0 + 2 \cdot (-1) = 4 - 2 = 2;\ \ 2 + 2 \cdot 0 - (-1) = 2 + 1 = 3;\ \ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 1 = 6 - 1 = 5.$

Ҷавоб: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

4.2.2. Ҳалли системаҳои муодилаҳои хаттӣ бо қоидаи Крамер

Бигузор, барои системаи (4.2.1) $\Delta = \det A \neq 0$ бошад. Бо Δ_k он муайянкунандаҳои тартиби n–умро ишора мекунем, ки аз муайянкунандаи Δ дар натиҷаи сутуни k–умро бо сутуни аъзоҳои озоди системаи (4.2.1) иваз кардан ҳосил шудаанд, яъне

$$\Delta_k = A_{1k} \cdot b_1 + A_{2k} \cdot b_2 + \ldots + A_{nk} \cdot b_n \quad k = \overline{1, n}.$$

Онҳоро муайянкунандаҳои ёрирасон низ меноманд.

Теоремаи 4.2.2. Агар $\det A \neq 0$ бошад, он гоҳ системаи (4.2.1) ҳамеша ҳали ягона дорад ва ин ҳал аз рӯи формулаҳои

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{4.2.4}$$

ёфта мешаванд.

Баробариҳои (4.2.4) – ро ***формулаҳои Крамер*** меноманд.

Барои исботи ин теорема кифоя аст, ки формулаи (4.2.2) –ро кушода нависем:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & \ldots & A_{n1}\\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\\ A_{1n} & \ldots & A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}b_1+\ldots+A_{n1}b_n\\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\\ A_{1n}b_1+\ldots+A_{nn}b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \vdots\\ \Delta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta_1/\Delta\\ \vdots\\ \Delta_n/\Delta\end{pmatrix}.$$

Аз ин ҷо,

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

мешавад. Теорема исбот шуд.

Мисол. Системаи муодилаҳоро бо қоидаи Крамер ҳал кунед:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=4,\\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3=1,\\ x_1+4x_2-2x_3=6.\end{cases}$$

Ҳал. 1) Аввал муайянкунандаи асосии системаро ҳисоб мекунем:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=6-24+2-9-4+8=16-37=-21\neq 0.$$

Азбаски муайянкунандаи матрисаи асосии система аз сифр фарқ мекунад, пас қоидаи Крамер татбиқшаванда аст.

2) Муайянкунандаҳои ёрирасон Δ_k, $k=1,2,3$ -ро ҳисоб мекунем:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -2\end{vmatrix}=24-12+12-54-16+4=28-70=-42.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 6 & -2\end{vmatrix}=-2-36+4+3-6+16=23-44=-21.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}=-18+32+2+12-4-24=46-46=0.$$

3) Номаълумҳоро тавассути *формулаҳои Крамер* (2.2.4) меёбем:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-42}{-21}=2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-21}{-21}=1,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{0}{-21}=0.$$

4) **Санҷиш.**

$2+2\cdot1-3\cdot0=2+2=4;\ 2\cdot2-3\cdot1+0=4-3=1;\ 2+4\cdot1-2\cdot0=6.$

Ҷавоб: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$.

Усулҳои ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ бо қоидаи Крамер ва матрисаи баръакс дар баробари соддагӣ ва дар истифода қулай буданашон як қатор маҳдудиятҳои ҷиддӣ низ доранд, ки онҳоро номбар мекунем:

1^0. Бояд миқдори муодилаҳо ва номаълумҳо дар система бо ҳам баробар бошанд ($m=n$).

2^0. **Муайянкунандаи матрисаи асосӣ аз сифр фарқ кунад** ($\det A\neq 0$).

3^0. Ҳисоби бисёрро талаб мекунад (миқдори зиёди муайянкунандаҳоро ҳисоб кардан лозим меояд).

Агар ақаллан яке аз шартҳои 1^0 ё 2^0 иҷро нашаванд, он гоҳ ин усулҳо татбиқ нашавандаанд.

Усули Гаусс ё пай дар пай хориҷкунии номаълумҳо, ки ба баёни моҳияти он шурӯъ мекунем, аз ин маҳдудиятҳо озод аст.

4.2.3. Ҳалли системаҳои муодилаҳои хаттӣ бо усули Гаусс (усули пай дар пай хориҷкунии номаълумҳо)

Бигузор, системаи m муодилаи хаттии n номаълума (4.2.1) дода шуда бошад. Дар доираи ин банд фарз мекунем, ки $a_{11} \neq 0$ аст. Чунки агар $a_{11} = 0$ бошаду коэффисиенти назди x_1 дар ягон муодилаи дигар аз сифр фарқ кунад (масалан $a_{i_0 1} \neq 0$), он гоҳ ин муодиларо ба ҷои муодилаи якум навишта, системаро ба намуди зарурӣ овардан мумкин аст.

Моҳияти асосии усули Гаусс аз пай дар пай хориҷ кардани номаълумҳо иборат аст. Ин амалиётро бо тарзҳои гуногун иҷро кардан мумкин аст. Ҷараёни хориҷи номаълумҳоро қадам ба қадам шарҳ медиҳем.

Қадами I. Муодилаи якумро нигоҳ дошта, бо ёрии он аз муодилаҳои боқимонда номаълуми x_1-ро хориҷ мекунем. Барои ин кифоя аст, ки ҳар ду тарафи муодилаи якумро бо навбат ба ададҳои $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ зарб карда, натиҷаро мувофиқан бо муодилаи дуюм, сеюм ва ғайра m-ум ҷамъ кунем. Дар натиҷаи ин табдилдиҳии элементарӣ системаи наве пайдо мешавад, ки ба системаи аввала (2.2.1) баробарқувва аст ва намуди зеринро дорад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Қадами II. Бигузор, $a'_{22} \neq 0$ бошад (нигаред ба қадами I). Муодилаҳои якум ва дуюми системаи (2.2.5)-ро бетағйир нигоҳ медорем. Бо ёрии муодилаи дуюм аз муодилаҳои сеюм, чорум ва ғайра m-ум номаълуми x_2-ро хориҷ мекунем. Барои ин кифоя аст, ки муодилаи дуюмро бо навбат ба $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, -\frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \dots, -\frac{a'_{m0}}{a'_{22}}$ зарб карда, натиҷаро мувофиқан бо муодилаи сеюм, чорум ва ғайра m-ум ҷамъ кунем. Дар натиҷа системаи наве пайдо мешавад, ки

муодилаҳои он аз сеюмаш сар карда номаълуми x_2-ро дарбар намегиранд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_{3n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a''_{m1}x_3 + \dots + a''_{mn}x_n = b''_m. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Ин раванд беохир набуда, пас аз шумораи охирноки қадамҳо ба охир мерасад. Се ҳолатҳои зерин имконпазиранд.

Ҳолати 1. Системаи ниҳоӣ намуди секунҷаро мегирад:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n = d_{3n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n, \end{cases} \tag{4.2.7}$$

ки дар ин ҷо $c_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ мебошад. Ин система ҳалли ягона дорад, чунки муайянкунандаи асосии система $\det C = c_{11} \cdot c_{12} \cdot \dots \cdot c_{nn} \neq 0$ аст. Сохтори махсуси ин система имконият медиҳад, ки ҳалли онро бо осонӣ ёбем. Муодилаи охирини система фақат як номаълум x_n-ро дар бар мегирад. Онро мeёбем: $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$.

Муодилаи $(n-1)$ бошад, номаълумҳои x_{n-1} ва x_n-ро дар бар мегирад. Қимати x_n-ро ба ин муодила гузошта, нисбат ба x_{n-1} як муодилаи хаттии намуди $c_{n-1\,n-1} \cdot x_{n-1} = d$-ро ҳосил мекунем, ки аз он бо осонӣ номаълуми x_{n-1}-ро меёбем: $x_{n-1} = \frac{d}{c_{n-1\,n-1}}$. Ин равандро давом дода, аз муодилаи сеюм x_3, аз муодилаи дуюм x_2 ва аз муодилаи якум x_1-ро мёбем. Ин тарзи ёфтани номаълумҳоро *гашти баръакси* усули Гаусс меноманд.

Бо маќсади раванди хориҷи номаълумҳоро ба худ хуб дарк кардан мисоли зеринро дида мебароем.

Мисол. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$$

Ҳал. Ќадами I. Азбаски $a_{11} = 1 \neq 0$ аст, пас ҳар ду тарафи муодилаи якумро бо навбат ба -2, -1 ва -3 зарб карда, натиҷаро мувофиќан бо муодилаи дуюм, сеюм ва чорум ҷамъ мекунем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -5x_2 + 5x_3 = 5, \\ -x_3 - 2x_4 = -7, \\ -5x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Муодилаи дуюми ин системаро ба $-\frac{1}{5}$, муодилаҳои сеюм ва чорумро ба -1 зарб карда, ҷои муодилаҳои сеюму чорумро иваз мекунем. Дар натиҷа системаи зерин ҳосил мешавад:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ 5x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

Ќадами II. Азбаски $a'_{22} = 1 \neq 0$ аст, Бинобар ин, муодилаҳои якум ва дуюмро нигоҳ дошта, бо ёрии муодилаи дуюм аз муодилаҳои боќимонда номаълуми x_2-ро хориҷ мекунем. Азбаски муодилаи чорум номаълуми x_2-ро дар бар намегирад, пас кифоя аст, ки муодилаи дуюмро ба -5 зарб карда, натиҷаро бо муодилаи сеюм ҷамъ мекунем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ -x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

Ќадами III. Азбаски $a'_{33} = -1 \neq 0$ аст, Бинобар ин, муодилаҳои якум, дуюм ва сеюмро бетағйир нигоҳ дошта, бо ёрии муодилаи сеюм аз муодилаҳои чорум номаълуми x_3-ро хориҷ мекунем. Барои ин муодилаи сеюмро ба 1 зарб карда, бо муодилаи чорум ҷамъ кардан кифоя аст:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ -x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_4 = 12. \end{cases}$$

Система секунҷашакл шуд (бо системаи 2.2.7 муќоиса намоед). Барои ёфтани номаълумҳо ба системаи охирин гашти баръакси усули Гаусро татбиќ менамоем. Аз муодилаи чоруми ин система x_4-ро меёбем: $x_4 = 3$. Ин ќимати x_4-ро ба муодилаи сеюм гузошта, номаълуми x_3-ро меёбем: $x_3 = -5 + 2 \cdot 3 = -5 + 6 = 1$. Ќиматҳои x_3 ва x_4-ро дар муодилаи дуюм гузошта, x_2-ро меёбем: $x_2 = 0$. Ниҳоят аз муодилаи якум x_1 ёфта мешавад: $x_1 = 2$.

Ҳамин тавр, ҳалли система $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$ мебошад.

Санҷиш:

$2+0-1+3=5-1=4$; $4+0+3+6=13$; $2+0-2-3=2-5=-3$; $6+0+3+3=12$.

Ҷавоб: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.

Ҳолати II. Агар дар раванди хориҷ кардани номаълумҳои системаи (4.2.1) баробарии нодурусти намуди

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = c,$$

ки дар ин ҷо $c \neq 0$ аст, пайдо шавад, он гоҳ ин *нишонаи ғайриҳамҷоягии система* мебошад. Ин зуҳуротро бо мисол шарҳ медиҳем.

Мисол. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Ҳал. Қадами I. Азбаски $a_{11} = 1 \neq 0$ аст, Бинобар ин, муодилаи якумро нигоҳ дошта, онро бо навбат ба -2, -3 зарб намуда, натиҷаро мувофиқан бо муодилаи дуюм ва сеюм ҷамъ мекунем:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ -7x_2 + 7x_3 = -6, \\ -7x_2 + 7x_3 = -9. \end{cases}$$

Қадами II. Азбаски $a_{22} = -7 \neq 0$ аст, Бинобар ин, муодилаи якум ва дуюмро нигоҳ дошта, муодилаи дуюмро ба -1 зарб карда, натиҷаро бо муодилаи сеюм ҷамъ мекунем:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ -7x_2 + 7x_3 = -6, \\ 0 = -3. \end{cases}$$

Баробарии нодурусти охирин нишон медиҳад, ки системаи муодилаҳо ғайриҳамҷоя аст (ҳал надорад).

Ҳолати III. Системаи муодилаҳои (2.2.1) пас аз хориҷ кардани номаълумҳо намуди *трапетсияро* мегирад:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + c_{1k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{1n}x_n = c_1, \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + c_{2k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ c_{kk}x_k + c_{kk+1}x_{k+1} + \ldots + c_{kn}x_n = c_k, \end{cases}$$

ки дар ин ҷо $c_{ii} \neq 0 \left(i = \overline{1,n}\right)$ буда $k < n$ аст, яъне миқдори муодилаҳои система аз миқдори номаълумҳояш кам аст$(k = R(A))$. Бинобар ин, аз ин система ҳамаи номаълумҳоро яккимата ёфтан имконнопазир аст. Ин намуд системаҳо ҳалли бешумор доранд. Номаълумҳои $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ – ро номаълумҳои озод номида, онҳоро ба тарафи рости система мегузаронем. Дар натиҷа нисбат ба номаълумҳои $x_1, x_2, \ldots, x_k$ системаи секунҷашакл ҳосил мешавад. Аз ин система номаълумҳои $x_1, x_2, \ldots, x_k$ - ро меёбем, ки онҳо ба таври хаттӣ бо номаълумҳои озоди $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ифода меёбанд:

$$\begin{cases} x_1 = d_{1k+1}x_{k+1} + d_{1k+2}x_{k+2} + \ldots + d_{1n}x_n + e_1, \\ x_2 = d_{2k+1}x_{k+1} + d_{2k+2}x_{k+2} + \ldots + d_{2n}x_n + e_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = d_{kk+1}x_{k+1} + d_{kk+2}x_{k+2} + \ldots + d_{kn}x_n + e_k, \end{cases}$$

ки дар ин ҷо e_i, d_{ij} ададҳои маълуманд (онҳо тавассути аъзоҳои озод ва коэффисиентҳои назди номаълумҳо ифода мешаванд). Ин тасвири ҳалҳоро *ҳалли умумии системаи* (2.2.1) меноманд. Агар номаълумҳои озод қиматҳои мушаххас қабул намоянд $(x_{k+1} = \alpha_1, x_{k+2} = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_{n-k})$, он гоҳ мо аз маҷмӯи ҳамаи ҳалҳои система як ҳалли онро ҷудо мекунем, ки онро *ҳалли хусусии система* меноманд. Ин гуфтаҳоро бо мисол шарҳ медиҳем.

Мисол. Ҳалли умумӣ ва як ҳалли хусусии система ёфта шавад:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$$

Ҳал. Азбаски $a_{11} = 1 \neq 0$ аст, Бинобар ин муодилаи якумро бетағйир нигоҳ дошта, онро бо навбат ба -3, -1 ва -2 зарб карда, натиҷаҳоро мувофиқан бо муодилаи дуюм, сеюм ва чорум ҷамъ мекунем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ -5x_2 + 5x_3 - 11x_4 = -6, \\ -3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -1, \\ -2x_2 + x_3 - 5x_4 = -5. \end{cases}$$

Муодилаи сеюмро ба -1 зарб карда, бо муодилаи чорум ҷамъ мекунем ва натиҷаро ба ҷои муодилаи дуюми система менависем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = -4, \\ -3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -1, \\ -2x_2 + x_3 - 5x_4 = -5. \end{cases}$$

Муодилаҳои якум ва дуюмро нигоҳ дошта, бо ёрии муодилаи дуюм аз муодилаҳои сеюм ва чорум номаълуми x_2 -ро хориҷ мекунем. Барои ин муодилаи дуюмро мувофиќан ба 3 ва -2 зарб карда, натиҷаро бо муодилаи сеюм ва чорум ҷамъ кардан кифоя аст:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = -4, \\ -5x_3 - 3x_4 = -13, \\ -5x_3 - 3x_4 = -13. \end{cases}$$

Азбаски дар система муодилаҳои сеюм ва чорум якхелаанд, Бинобар ин, яке аз онҳоро навиштан кифоя аст. Муодилаи сеюмро ба -1 зарб карда, муодилаи чорумро партофта, системаро аз сари нав менависем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = -4, \\ 5x_3 + 3x_4 = 13. \end{cases}$$

Дар натиҷа системаи се муодилаҳои чорномаълума ҳосил шуд. Номаълуми озод x_4 -ро ба сифати номаълуми озод намуда, онро ба тарафи рости система мегузаронем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 - 4x_4 \\ x_2 - 3x_3 = -4 - x_4, \\ 5x_3 = 13 - 3x_4. \end{cases}$$

Ҳамин тавр, нисбат ба номаълумҳои x_1, x_2, x_3, системаи се муодилаи секунҷашакл ҳосил шуд. Аз ин система номаълумҳои x_1, x_2, x_3 - ро меёбем (бо номаълуми озод x_4 ифода мекунем):

$$x_3 = \frac{13 - 3x_4}{5}.$$

$$x_2 = -4 - x_4 + 3\cdot\frac{13 - 3x_4}{5} = \frac{-20 - 5x_4 + 39 - 9x_4}{5} = \frac{19 - 14x_4}{5}.$$

$$x_1 = 2 - 4x_4 - 2\cdot\frac{19 - 14x_4}{5} + \frac{13 - 3x_4}{5} = \frac{10 - 20x_4 - 38 + 28x_4 + 13 - 3x_4}{5} = x_4 - 3.$$

Ҳамин тавр, мо тасвири умумии ҳалро ёфтем:

$$x_1 = x_4 - 3,\ x_2 = \frac{19 - 14x_4}{5},\ x_3 = \frac{13 - 3x_4}{5}.$$

Дар ин баробариҳо x_4 номаълуми озод буда, он адади ҳаќиќии ихтиёриро ќабул карда метавонад.

Барои ёфтани яке аз ҳалҳои хусусӣ дар ин баробариҳо ба ҷои номаълуми озод x_4 адади ихтиёрии ҳаќиќиро гузоштан кифоя аст. Масалан, $x_4 = 1$ мегузорем. Он гоҳ $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 1$ яке аз ҳалҳои хусусии системаи додашуда мешавад.

Дар охир ҳаминро хотиррасон менамоем, ки ба ҳар як системаи m муодилаи хаттии n номаълума як матрисаи васеъкардашудаи $\overline{A}$ мувофиќ меояд ва баръакс (ба банди якуми ҳамин боб нигаред).

Бинобар ин, ҳангоми ҳалли мисолҳо ба ҷои системаро табдил додан матрисаи васеъкардашудаи онро табдил додан осонтар аст. Дар амалия бештар аз ин тарз истифода мебаранд. Ин суханҳоро бо мисол шарҳ медиҳем.

Мисол. Системаи муодилаҳоро бо усули Гаусс ҳал кунед:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=2, \\ 2x_1-x_2+2x_3-3x_4=4, \\ x_1+3x_2-x_3+4x_4=0, \\ x_1-3x_2+3x_3-4x_4=2. \end{cases}$$

Ҳал. Матрисаи васеъкардашудаи системаро тартиб медиҳем.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Раванди хориҷкунии номаълумҳоро дар ин матриса нишон медиҳем. Сатри якумро бо навбат ба -2, -1, -1 зарб карда, натиҷаро мувофиқан бо сатрҳои дуюм, сеюм ва чоруми система ҷамъ мекунем:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Матрисаи охирин аз матрисаи мобайнӣ дар натиҷаи ҷои сатри дуюмро бо сатри сеюм иваз кардан ҳосил шудааст. Дар матрисаи охирин сатрҳои якум ва дуюмро бе тағйир нигоҳ дошта, сатри дуюмро бо навбат ба -5,-5 зарб карда, натиҷаро мувофиқан бо сатри сеюм ва чорум ҷамъ мекунем:

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & -10 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Матрисаи охирин аз матрисаи сеюм пас аз партофтани сатри сифрӣ ва тақсим кардани элементҳои сатри сеюм ба 2 ҳосил шудааст. Системаи ба матрисаи охирин мувофиқро менависем:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=2, \\ x_2+3x_4=-2, \\ 2x_3+5x_4=-5. \end{cases}$$

Ин система *трапетсияшакл* аст. Бигузор x_4 номаълуми озод бошад. Онро ба тарафи рости система гузаронида, номаълумҳои x_1, x_2 ва x_3 –ро бо ёрии он ифода мекунем:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2-x_4, \\ x_2=-2-3x_4, \\ 2x_3=-5-5x_4. \end{cases}$$

Аз ин ҷо,
$x_3=-2{,}5-2{,}5x_4$; $x_2=-2-3x_4$; $x_1=2-x_4-2(-2-3x_4)-2{,}5-2{,}5x_4=3{,}5+2{,}5x_4$
мешавад. Ҳамин тавр, ҳалли умумии система намуди зеринро дорад:

$$\begin{cases} x_1=3{,}5+2{,}5x_4, \\ x_2=-2-3x_4, \\ x_3=-2{,}5-2{,}5x_4. \end{cases}$$

x_4 – номаълуми озод.

Санҷиш:

$$3{,}5+2{,}5x_4-4-6x_4+2{,}5+2{,}5x_4+x_4=6-4+6x_4-6x_4=2,$$
$$7+5x_4+2+3x_4-5-5x_4-3x_4=9-5+8x_4-8x_4=4,$$
$$3{,}5+2{,}5x_4-6-9x_4+2{,}5+2{,}5x_4+4x_4=6-6+9x_4-9x_4=0,$$
$$3{,}5+2{,}5x_4+6+9x_4-7{,}5-7{,}5x_4-4x_4=9{,}5-7{,}5+11{,}5x_4-11{,}5x_4=2.$$

Дар тасвири ҳалли умумӣ $x_4 = 2\alpha - 1, \alpha \in R$ гузошта, онро ба намуди зерин менависем:

$x = 5\alpha + 1$, $x_2 = 1 - 6\alpha$, $x_3 = -5\alpha$, $x_4 = 2\alpha - 1$, $\alpha \in R$.

Ба ҳар як қимати адади ҳақиқии $\alpha \in R$ як ҳалли хусусии система мувофиқ меояд. Ин нишон медиҳад, ки миқдори ҳалҳои система бешумор аст.

4.3. Тадқиқи системаи муодилаҳои хаттӣ. Теоремаи Кронекер - Капелли

Масъалаҳои асосии назарияи системаи муодилаҳои хаттиро ба хотир меорем:

1) Система ҳамҷоя аст ё не (ҳал дорад ё надорад)?

2) Агар система ҳал дошта бошад, пас он чанд ҳал дорад?

Дар бандҳои гузашта вобаста аз сохтори системаи муодилаҳо ба ин саволҳо ҷавоб дода будем. Собит гашт, ки барои системаҳои муодилаҳои хаттӣ фақат се ҳолати зерин имконпазиранд:

1) Система ҳал надорад (ғайриҳамҷоя).

2) Система ҳалли ягона дорад (ҳамҷояи муайян).

3) Система ҳалли бешумор дорад (ҳамҷояи номуайян).

Ҳолатҳои мобайнӣ (дигар) ғайриимконанд, яъне шумораи ҳалҳои системаи хаттии ҳамҷоя ба ду, се, чор ва ҳоказо баробар шуда наметавонад.

Теоремаи зерин имконият медиҳад, ки системаро ҳал накарда, бо истифода аз мафҳуми ранги матрисаи асосӣ ва матрисаи васеъкардашудаи система ба ин саволҳо ҷавоби комил диҳем.

Теоремаи Кронекер-Капелли. Системаи муодилаҳои хаттии (4.2.1) фақат ва фақат дар ҳамон ҳолат ҳамҷоя аст, ки ранги матрисаи асосии система A ба ранги матрисаи васеъкардашудаи он $\overline{A}$ баробар шавад:

$$R(A) = R(\overline{A}) = k \quad (k \le n). \tag{4.3.1}$$

Илова бар ин, агар $R(A) = R(\overline{A}) = n$ (n – миқдори номаълумҳо) бошад, он гоҳ системаи (4.2.1) ҳалли ягона дорад ва дар мавриди

$R(A) = R(\overline{A}) = k < n$ ҳалли бешумор дорад. Агар шарти (4.3.1) иҷро нашавад ($R(A) \ne R(\overline{A})$), он гоҳ системаи (4.2.1) ғайриҳамҷоя аст.

Исбот. Бигузор, системаи муодилаҳо ҳамҷоя бошад. Он гоҳ матрисаи васеъкардашудаи онро бо ёрии табдилдиҳиҳои элементарӣ ҳамеша ба намуди

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1n} & c_1 \\ 0 & c_{22} \ldots & c_{2k} & \ldots & c_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & c_{kk} & \ldots & c_{kn} & c_k \\ 0 & 0 \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{4.3.2}$$

овардан мумкин аст, ки дар ин ҷо $k \le n$, $c_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1, k}$. Азбаски матрисаи A як қисми матрисаи $\overline{A}$ мебошад ва аз намуди матрисаи охирин аён аст, ки сутуни аъзоҳои озод ба ранги матрисаи A таъсир намерасонад, Бинобар ин, $R(A) = R(\overline{A}) = k$ мешавад. Дар ҳолати ҳалли ягона доштани системаи муодилаҳои хаттӣ $k = n$ ва дар мавриди ҳалли бешумор доштанаш $k < n$ мешавад.

Бигузор, $R(A) = R(\overline{A})$ бошад. Нишон медиҳем, ки системаи муодилаҳои хаттӣ ҳамҷоя аст. Тасдиқотро аз баръаксаш исбот мекунем, яъне фарз мекунем, ки системаи муодилаҳои (2.2.1) ҳамҷоя нест. Он гоҳ матрисаи васеъкардашудаи онро ҳамеша ба намуди

$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \ldots & d_{1k} & \ldots & d_{1n} & d_1 \\ 0 & d_{22} \ldots & d_{2k} & \ldots & d_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & d_{kk} & \ldots & d_{kn} & d_k \\ 0 & 0 & 0 \ldots & & 0 & d_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & & 0 & d_m \end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$

овардан мумкин аст, ки дар ин ҷо $k \le n$, $d_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1, k}$ буда, ақаллан яке аз ададҳои $d_{k+1}, \dots, d_m$ аз сифр фарқ мекунад. Ин нишон медиҳад, ки агар $R(A) = k$ бошад, он гоҳ $R(\overline{A}) > k$ аст. Дар навбати худ ин зиддият собит месозад, ки фарзи мо нодуруст аст, яъне агар $R(A) = R(\overline{A})$ бошад, он гоҳ системаи (4.2.1) ҳамеша ҳамҷоя мешавад. Аз он ҷумла агар, $R(A) = R(\overline{A}) = n$ бошад ($k = n$), он гоҳ матрисаи (4.3.3) ҳамеша секунҷашакл мешавад ва система ҳалли ягона дорад (ҳолати якуми усули Гаусс). Агар $R(A) = R(\overline{A}) < n$ бошад ($k < n$), он гоҳ матрисаи (4.3.3) намуди трапетсияро мегирад ва системаи мувофиқ ҳалли бешумор дорад (ҳолати сеюми усули Гаусс). Агар $R(A) \ne R(\overline{A})$ бошад, он гоҳ системаи ба ин ҳолат мувофиқ баробарии нодурусти намуди $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = d \ne 0$ -ро дар бар мегирад, ки онро ягон хел қиматҳои номаълумҳо қаноат намекунонанд (ҳолати дуюми усули Гаусс). Теорема исбот шуд.

Мисол. Системаи муодилаҳоро ба ҳамҷоягӣ тадқиқ намоед, ҳалли умумӣ ва як ҳалли хусусии онҳоро ёбед:

$$1.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Ҳал. 1. Ранги матрисаҳои асосӣ ва васеъкардашудаи системаро меёбем. Азбаски матрисаи асосӣ аз матрисаи васеъкардашуда фақат бо як сутун (сутуни аъзоҳои озод) фарқ мекунад, Бинобар ин мо метавонем, ранги ин ду матрисаро якҷоя ҳисоб намоем. Матрисаи васеъкардашудаи системаро тартиб дода, ранги онро бо ёрии табдилдиҳиҳои элементарӣ ҳисоб мекунем:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{pmatrix}.$$

Аз намуди матрисаи охирин аён аст, ки $R(A) = R(\overline{A}) = 3$ мебошад, яъне системаи додашуда ҳамҷоя аст ва ҳалли ягона дорад.

Азбаски $R(A) = R(\overline{A}) = 3$ аст, пас ҳалли ин системаро бо усули ихтиёрӣ (қоидаи Крамер, матритсавӣ, усули Гаусс) ёфтан мумкин аст. Масалан, системаи ба матрисаи охирин мувофиқро менависем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + 3x_3 = 3, \\ 17x_3 = 17. \end{cases}$$

Ин система секунҷашакл буда, ҳалли он

$$x_3 = 1,\ x_2 = 3 - 3 \cdot 1 = 3 - 3 = 0,\ x_1 = 1 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

аст. Ҳамин тавр, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ аст.

Санҷиш:
$2 + 2 \cdot 0 - 1 = 2 - 1 = 1;\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 1 = 4 + 1 = 5;\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8.$

Ҷавоб: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

2. Системаи дуюмро тадқиқ менамоем. Барои ин ранги матрисаи васеъкардашудаи системаро меёбем:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Ранги матрисаҳои A ва $\overline{A}$ ба 2 баробаранд, чунки минори тартиби дуюми онҳо $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \ne 0$ аст. Ҳамин тавр, нишон додем, ки $R(A) = R(\overline{A}) = 2 < 3$ аст. Ин нобаробарӣ собит месозад, ки системаи додашуда ҳалли бешумор дорад. Системаи ба матрисаи охирин мувофиқро менависем:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 8x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Номаълуми озод x_3 -ро ба тарафи рости система гузаронида номаълумҳои x_1 ва x_2 -ро тавассути он ифода мекунем:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 - x_3, \\ 8x_2 = -1 + x_3. \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{x_3 - 1}{8}; \quad x_1 = 2 - x_3 + 3 \cdot \frac{x_3 - 1}{8} = \frac{16 - 8x_3 + 3x_3 - 3}{8} = \frac{13 - 5x_3}{8}.$$

Ҳамин тариќ, тасвири зерини ҳалли умумиро ҳосил кардем:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13 - 5x_3}{8}, \\ x_2 = \dfrac{x_3 - 1}{8}, \\ x_3 - \textit{номаълуми озод}. \end{cases}$$

Санҷиш:

$$\frac{13 - 5x_3}{8} - \frac{3x_3 - 3}{8} + x_3 = \frac{13 - 5x_3 - 3x_3 + 3 + 8x_3}{8} = \frac{16}{8} = 2.$$

$$\frac{39 - 15x_3}{8} - \frac{x_3 - 1}{8} + 2x_3 = \frac{39 - 15x_3 - x_3 + 1 + 16x_3}{8} = \frac{40}{8} = 5.$$

$$\frac{26 - 10x_3}{8} + \frac{2x_3 - 2}{8} + x_3 = \frac{26 - 10x_3 + 2x_3 - 2 + 8x_3}{8} = \frac{24}{8} = 3.$$

Дар тасвири ҳалли умумӣ $x_3 = 1 + 8\alpha$, $\alpha \in R$ гузошта, онро ба намуди

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 5\alpha, \\ x_2 = \alpha, \\ x_3 = 1 + 8\alpha, \ \alpha \in R. \end{cases}$$

менависем. Ба ҷои α адади ҳаќиќии мушаххаси ихтиёриро гузошта, яке аз ҳалҳои хусусии системаро меёбем. Масалан, дар ин баробариҳо $\alpha = 0$ гузошта яке аз ҳалҳои хусусии ин системаро ҳосил мекунем:

$$x_1 = 1, \ x_2 = 0, \ x_3 = 1.$$

4.4. Ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ бо ёрии табдилдиҳии Жорданӣ

Ҳангоми бо усули Гаусс ҳал кардани системаи муодилаҳои хаттӣ тавассути табдилдиҳии элементарии системаҳо, системаҳои секунҷашакл ва трапетсияшаклро ҳосил карда будем (нигаред ба ҳолатҳои I ва III , 4.2.3). Дар ин ҷо як тарзи дигари хориҷ кардани номаълумҳоро дида мебароем.

Таърифи 4.4.1. Номаълуми x_i -ро *ҳалшуда* меноманд, агар яке аз муодилаҳои система ин номаълумро бо коефисиенти 1 дарбар гирад ва ба муодилаҳои дигар ин номаълум дохил нашавад. Масалан, дар системаи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \quad x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 \quad = 2, \\ x_2 - \quad 5x_4 = -1. \end{cases}$$

номаълумҳои x_1 ва x_3 ҳалшуда мебошанд.

Таърифи 4.4.2. Агар ҳамаи муодилаҳои система ҳалшуда бошанд, пас *системаро ҳалшуда* меноманд.

Таърифи 4.4.3. Маҷмӯи номаълумҳои $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ -ро ҳалшуда меноманд, агар ҳар як номаълуми x_{i_p}, $p = \overline{1, k}$ ҳалшуда бошад ва ҳар як муодилаи система фаќат яке аз ин номаълумҳоро дарбар гирад. Системаи ҳалшуда ҳамеша дорои маҷмӯи номаълумҳои ҳалшуда мебошад. Ҳамаи номаълумҳои боќимондаи системаи ҳалшударо *номаълумҳои озод* меноманд.

Таърифи 4.4.4. Ҳалли умумии системаи муодилаҳои хаттӣ гуфта, системаи муодилаҳои ҳалшудаи ба он баробарќувваро меноманд.

Номаълумҳои ҳалшударо тавассути номаълумҳои озод ифода менамоем. Барои ин номаълумҳои озоди системаи ҳалшударо ба тарафи рости система гузаронидан кифоя аст. Дар натиҷа барои ҳалли умумӣ тасвири зеринро ҳосил менамоем:

$$
\begin{cases}
x_{i_1} = c_{11}x_{j_1} + c_{12}x_{j_2} + \cdots + c_{1l}x_{j_l}, \\
x_{i_2} = c_{21}x_{j_1} + c_{22}x_{j_2} + \cdots + c_{2l}x_{j_l}, \\
\cdots\cdots\cdots \;\; \cdots\cdots\cdots \;\; \cdots\cdots\cdots \;\; \cdots\cdots\cdots \;\; \cdots\cdots \\
x_{i_k} = c_{k1}x_{j_1} + c_{k2}x_{j_2} + \cdots + c_{kl}x_{j_l}.
\end{cases}
\tag{4.4.1}
$$

Ба номаълумҳои озод ќиматҳои гуногун дода, ҳалҳои хусусии системаи мазкурро пайдо менамоем. Бо ин тарз ҳамаи ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттиро ёфтан мумкин аст, яъне (4.4.1) ҳамаи ҳалҳои системаро дар бар мегирад.

Одатан барои бо осонӣ гузаронидани табдилдиҳиҳои элементарӣ, системаи муодилаҳои хаттиро ба намуди ҷадвалӣ менависем, ки он як намуди дигари навишти матрисаи васеъкардашудаи система $\overline{A}$ мебошад:

Ҷадвали 1

x_1	...	x_k	...	x_n	b
a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...
a_{s1}	...	$\boxed{a_{sk}}$	...	a_{sn}	b_s
...	...	...	...	...	...
a_{m1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	b_m

Моҳияти табдилдиҳии Жордании системаи муодилаҳои хаттиро баён мекунем.

1) Ягон коефисиенти ѓайрисифрии системаро интихоб карда, онро *элементи баранда* меноманд. Бигузор, $a_{sk} \neq 0$ элементи баранда бошад (Ҷадвали 1).

2) Элементҳои сатри s – ум ба адади $\dfrac{1}{a_{sk}}$ зарб карда мешавад(Ҷадвали 2):

Ҷадвали 2

x_1	...	x_k	...	x_n	b
a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...
$\overline{a}_{s1}$	...	$\boxed{1}$	...	$\overline{a}_{sn}$	$\overline{b}_s$
...	...	...	...	...	...
a_{m1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	b_m

3) Элементҳои сатри s – уми ҷадвали 2 ба a_{ik} зарб карда шуда, натиҷаи ҳосилшуда бо элементҳои сатри i – уми он ҷамъ карда мешавад $(i = 1, 2, \cdots, s-1, s+1, \cdots, m)$. Пас аз ин табдилдиҳӣ ҷадвали 3 ҳосил мегардад:

Ҷадвали 3

x_1	...	x_k	...	x_n	b'
a'_{11}	...	0	...	a'_{1n}	b'_1
...	...	...	...	...	...
a'_{s1}	...	$\boxed{1}$	...	a'_{sn}	b'_s
...	...	...	...	...	...
a'_{m1}	...	0	...	a'_{mn}	b'_m

Дар натиҷаи ин табдилдиҳии Жорданӣ системае ҳосил шуд, ки муодилаи s – уми он нисбат ба x_s ҳалшуда аст, яъне номаълуми x_s фаќат дар ин муодила бо коефисиенти 1 ҳузур дошта, дар дигар муодилаҳо ҳузур надорад.

Пас аз якчанд маротиба татбиќ намудани табдилдиҳии Жорданӣ системаи наве пайдо мешавад, ки ба системаи аввала баробарќувва аст. Ин равандро муфассал баён менамоем.

Бигузор, системаи додашуда ҳамҷояи номуайян бошад ($R(A) = s < n$). Дар ин ҳолат системаи муодилаҳои додашуда ҳалли бешумор дорад. Бо маќсади ёфтани ҳалли умумии он муодилаҳои системаи мазкурро ба намуди ҳалшуда менависем.

Ќадами 1. Дар муодилаи якуми система коэффисиенти ѓайрисифрии назди ягон номаълумро интихоб намуда ($a_{1i_1} \neq 0$), табдилдиҳии Жордании системаро тавассути ин элементи баранда ичро менамоем. Дар натиҷа системаи наве пайдо мешавад, ки ба системаи аввала баробарќувва аст.

Ќадами 2. Муодилаи якуми системаи навро бетаѓйир нигоҳ дошта, дар муодилаи дуюми система коэффисиенти ѓайрисифрии назди ягон номаълумро интихоб намуда ($a'_{2i_2} \neq 0$), табдилдиҳии Жордании системаро тавассути ин элементи баранда ичро менамоем. Дар натиҷа системаи наве пайдо мешавад, ки ба системаи аввала баробарќувва аст.

Ин раванд беохир набуда, пас аз $s(s = R(A))$ ќадам ба охир мерасад. Дар натиҷа ҳамаи муодилаҳои система намуди ҳалшударо мегиранд.

Мисоли 1. Ҳалли умумӣ ва яке аз ҳалҳои хусусии система ёфта шавад:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Ҳал. Системаро ба намуди ҷадвалӣ менависем (Ҷадвали 1). Дар муодилаи якум коэффисиенти назди x_3 ба 1 баробар аст. Онро ба сифати элементи баранда интихоб намуда, бо ёрии он элементҳои боќимондаи ин сутунро ба сифр табдил медиҳем. Барои ин сатри якумро бо навбат ба –4 ва 3 зарб карда, натиҷаро мувофиќан бо сатри дуюм ва сеюм ҷамъ мекунем (Ҷадвали 2). Дар ҷадвали 2 ду сатри охирин якхелаанд. Пас, яке аз онҳоро нигоҳ дошта, ҷадвали 3-ро тартиб медиҳем. Элементи ѓайринулии $a'_{22} = 5$ - ро элементи баранда интихоб карда, сатри дуюмро ба ин адад таќсим менамоем (Ҷадвали 4). Сатри дуюмро ба –2 зарб зада, натиҷаро бо сатри якум ҷамъ мекунем (Ҷадвали 5).

Ҷадвали 1

x_1	x_2	x_3	b
3	2	$\boxed{1}$	4
2	3	4	5
1	-1	-3	-1

→

Ҷадвали 2

x_1	x_2	x_3	b
3	2	1	4
-10	-5	0	-11
10	5	0	11

Ҷадвали 3

x_1	x_2	x_3	b
3	2	1	4
10	$\boxed{5}$	0	11

→

Ҷадвали 4

x_1	x_2	x_3	b
3	2	1	4
2	$\boxed{1}$	0	2,2

Ҷадвали 5

x_1	x_2	x_3	b
-1	0	1	-0,4
2	1	0	2,2

Системаи ба ҷадвали охирин мувофиќро менависем:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = -0{,}4 \\ 2x_1 + x_2 = 2{,}2. \end{cases}$$

Ин системаи ҳалшуда аст ва ҳалли умумии системаи додашударо ифода менамояд. Номаълуми озод x_1 - ро ба тарафи рости система гузаронида, ҳалли умумиро ба намуди

$$\begin{cases} x_2 = 2{,}2 - 2x_1 \\ x_3 = -0{,}4 + x_1 \end{cases}$$

менависем.

Масалан, дар ин ҳалли умумӣ $x_1 = 1$ мегузорем. Он гоҳ $x_2 = 0{,}2$ ва $x_3 = 0{,}6$ мешаванд. Ададҳои $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}6$ яке аз ҳалҳои хусусии системаи додашуда мебошанд.

Мисоли 2. Системаи муодилаҳоро бо ёрии табдилдиҳии **Жорданӣ ҳал намоед:**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Ҳал. Ранги матрисаи асосии система ба 4 баробар аст (мустаќилона ҳисоб кунед). Пас, он ҳалли ягона дорад. Системаро ба намуди ҷадвалӣ менависем (Ҷадвали 1) ва табдилдиҳии Жорданиро ќадам ба ќадам иҷро менамоем:

Ҷадвали 1

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	-1	3	-1	0
1	3	1	-2	9
3	-1	-1	2	5
1	2	1	-1	7

→

Ҷадвали2

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	-7	1	3	-18
1	3	1	-2	9
0	-10	-4	8	-22
0	-1	0	1	-2

Ҷадвали 3

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	-7	1	3	-18
1	10	0	-5	27
0	-38	0	20	-94
0	-1	0	*1*	-2

→

Ҷадвали 4

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	-4	1	0	-12
1	5	0	0	17
0	-18	0	0	-54
0	-1	0	1	-2

Ҷадвали 5

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	-4	1	0	-12
1	5	0	0	17
0	*1*	0	0	3
0	1	0	-1	2

→

Ҷадвали 6

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	0	1	0	0
1	0	0	0	2
0	1	0	0	3
0	0	0	1	1

Ҳамин тавр, ададҳои $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ ҳалли ягонаи система мебошанд.

4.5. Системаи муодилаҳои хаттии якҷинса ва системаи фундаменталии ҳалҳо

Акнун як ҳолати хусусии системаи муодилаҳои хаттӣ – системаи муодилаҳои якҷинсаро дида мебароем, яъне (системаи $Ax = B$-ро дар мавриди $B = \theta$ будан):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad \text{ё} \quad Ax = \theta \qquad (4.5.1)$$

Ин система ҳамеша ҳамҷоя аст, чунки ҳангоми $b = \theta$ будан баробарии $R(A) = R(\overline{A})$ (нигаред ба теоремаи Кронокёр-Капеллӣ) иҷро мешавад. $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0 (X = 0)$ *ҳалли сифрии система* ном дорад. Яке аз масъалаҳои асосии ин параграф ёфтани ҳалҳои ѓайрисифрии системаи якҷинса мебошад. Аз теоремаи Кронекёр-Капелӣ бармеояд, ки ҳангоми $R(A) = k < n$ будан системаи (4.5.1) ҳамеша ҳамҷоя буда, ҳалли умумии он аз $(n-k)$ - то доимиҳои ихтиёрӣ ќиматҳои дилхоҳ (озод) вобаста мешавад. Ба ин доимиҳои ихтиёрӣ ќиматҳои дилхоҳ дода (бо ҳолати III усули Гаусс муќоиса намоед), ҳалҳои ѓайрисифрии системаи (4.5.1)-ро меёбем. Ҳамин тавр, системаи (4.5.1) ҳангоми $R(A) < n$ будан, ҳалҳои ѓайрисифрӣ дорад ва ҳангоми $R(A) = n$ будан фаќат як ҳалли сифрӣ дорад. Аз ин ҷо, бармеояд, ки агар

1) миќдори муодилаҳо дар системаи (4.5.1) аз миќдори номаълумҳо кам бошад $(m < n)$, пас система дорои ҳалҳои ѓайрисифрӣ аст;

2) миќдори муодилаҳо дар системаи (4.5.1) ба миќдори номаълумҳо баробар бошад $(m = n)$, пас шарти зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти ҳалли ѓайрисифрии системаи (4.5.1) баробарии $\det A = 0$ мебошад.

3) дар системаи якҷинсаи n муодилаи хаттии n-номаълума $\det A = 0$ бошад, пас он фаќат як ҳалли сифрии $X = 0$ - ро дорад.

Ҳалли системаи (4.5.1) $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ - ро дар намуди сатри зерин ифода мекунем: $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Ҳалли системаи муодилаҳои хаттии якҷинсаи (4.5.1) хосиятҳои зеринро дорад:

1. Агар $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ - ҳалли системаи (4.5.1) бошад, пас $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \dots, \lambda k_n)$ низ ҳалли ин система мешавад.

2. Агар $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ва $e_2 = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ ҳалҳои системаи (4.5.1) бошанд, пас барои ададҳои ихтиёрии c_1 ва c_2 комбинатсияи хаттии онҳо $c_1e_1 + c_2e_2 = (c_1k_1 + c_2l_1, c_1k_2 + c_2l_2, \dots, c_1k_n + c_2l_n)$ низ ҳалли ин система мешавад.

Дурустии ин тасдиќотҳоро, ки мушкил нестанд, ҳамчун супориши кори мустаќилона ба хонанда месупорем.

Аз хосиятҳои дар боло номбаршуда бармеояд, ки ҳаргуна комбинатсияи хаттии ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттии якҷинса низ ҳалли ин система ба шумор меравад.

Таърифи 4.5.1. Системаи ҳалҳои хаттӣ новобастаи $e_1, e_2, \dots, e_n$ *фундаменталӣ* номида мешавад, агар ҳар як ҳалли системаи (2.5.1) комбинатсияи хаттии ҳалҳои $e_1, e_2, \dots, e_n$ бошанд.

Ёфтани системаи фундаменталии ҳалҳо, ки тавассути онҳо ҳамаи ҳалҳои системаро ифода кардан мумкин аст, дорои аҳамияти калони амалӣ ва назариявӣ мебошад.

Системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттии якҷинсаро аз рӯи алгоритми зерин меёбем:

1. Ҳалли умумии системаи муодилаҳои якҷинсаро меёбем.
2. Системаи $n-k$ ҳалҳои хаттӣ новобастаи $(n-k)$-ченаро интихоб менамоем. Одатан системаи ҳалҳои

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_{n-k} = (0, 0, \cdots, 1)$$

гирифта мешавад.

3. Дар ифодаи ҳалли умумӣ ба ҷои номаълумҳои озод координатаҳои e_1-ро гузошта, аз системаи муодилаҳои ҳосилшуда, ки ҳамеша ҳалли ягона дорад, ќимати номаълумҳои ҳалшударо меёбем. Маҷмӯи ќиматҳои ёфташуда

$$(x^1{}_{i_1}, x^1{}_{i_2}, \cdots, x^1{}_{i_k}, 1, 0, \cdots, 0)$$

ҳалли Y_1 аст. Ин амалиётро бо ҳалҳои $e_2, \cdots, e_{n-k}$ такрор карда, ҳалҳои $Y_2, \cdots, Y_{n-k}$-ро меёбем.

Системаи векторҳои ҳосилшуда, ки хаттӣ новобастаанд, системаи фундаменталии ҳалҳоро ташкил медиҳанд.

Комбинатсияи хаттии ин системаи ҳалҳоро бо доимиҳои ихтиёрии $C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}$ тартиб дода, ҳамаи системаҳои ҳалҳои фундаменталиро меёбем.

Мисол. Системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

якҷинсаро ёбед:

Ҳал. Системаро ба намуди ҷадвалӣ менависем. Дар муодилаи якум коэффитсиенти назди x_2 ба 1 баробар аст. Пас, онро ба сифати элементи баранда интихоб мекунем (Ҷадвали 1). Сатри якумро бо навбат ба 1 ба 2 ва ба 3 зарб карда, натиҷаро бо сатри дуюм, сеюм ва чорум ҷамъ мекунем (Ҷадвали 2). Дар ҷадвали дуюм се сатри охирон якхела аст. Пас, яке аз онҳо нигоҳ дошта мешавад (Ҷадвали 3). Дар муодилаи дуюм коэффитсиенти назди x_3 ба –2 баробар аст. Пас, онро ба сифати элементи баранда интихоб намуда, элементҳои ин сатрро ба –2 таќсим мекунем (Ҷадвали 4). Сатри дуюмро ба –3 зарб карда, натиҷаро бо сатри якум ҷамъ мекунем (Ҷадвали 5).

Ҷадвали 1

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	Ҳ1]	-3	1	0
3	-1	1	-4	0
1	-2	4	-5	0
4	-3	5	-9	0

Ҷадвали 2

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	1	-3	1	0
5	0	-2	-3	0
5	0	-2	-3	0
10	0	-4	-6	0

Ҷадвали 3

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	1	-3	1	0
5	0	Ҳ-2]	-3	0

Ҷадвали 4

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	1	-3	1	0
-2,5	0	Ҳ1]	1,5	0

Чадвали 5

x_1	x_2	x_3	x_4	b
-5,5	1	0	5,5	0
-2,5	0	1	1,5	0

Системаи ба чадвали охирон мувофиқро тартиб медиҳем:

$$\begin{cases} -5{,}5x_1 + x_2 + 5{,}5x_4 = 0, \\ -2{,}5x_1 + x_3 + 1{,}5x_4 = 0. \end{cases}$$

Ин системаи ҳалшуда аст ва ҳалли умумии системаи 1)-ро ифода менамояд. Номаълумҳои озод x_1 ва x_4 - ро ба тарафи рости система гузаронида, ҳалли умумиро ба намуди зерин менависем:

$$\begin{cases} x_2 = 5{,}5x_1 - 5{,}5x_4, \\ x_3 = 2{,}5x_1 - 1{,}5x_4 . \end{cases}$$

Ба сифати қиматҳои номаълумҳои озод x_1 ва x_4 координатаҳои векторҳои $e_1 = (1, 0)$ ва $e_2 = (0, 1)$-ро гирифта, системаи фундаменталии ҳалҳоро меёбем.

1) $x_1 = 1$, $x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 5{,}5$, $x_3 = 2{,}5$.

2) $x_1 = 0$, $x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = -5{,}5$, $x_3 = -1{,}5$.

Ҳамин тавр, $Y_1 = (1 ; 5{,}5; 2{,}5; 0)$ ва $Y_2 = (0 ; -5{,}5; -1{,}5; 1)$ системаи фундаменталии ҳалҳоро ташкил медиҳанд ва ҳалли умумии системаи 1) намуди

$$X = C_1Y_1 + C_2Y_2,$$

-ро дорад, ки дар ин чо C_1 ва C_2 доимиҳои ихтиёрианд.

Ҳалли умумии системаи хаттии ғайриякчинса. Бигузор, $X \neq \theta$ яке аз ҳалҳои системаи (4.5.1) бошад. Ҳалли дилхоҳи ин система X_2- ро ба намуди

$$X_2 = X_1 + X_2 - X_1 = X_1 + Y, \quad Y = X_2 - X_1 \qquad (4.5.2)$$

навиштан мумкин аст. Аз тарафи дигар

$$AY = AX_2 - AX_1 = B - B = \theta \qquad (4.5.3)$$

аст. Баробариҳои (4.5.2) ва (4.5.3) нишон медиҳанд, ки агар яке аз ҳалҳои системаи $AX = B$ маълум бошад, пас ҳалли дилхоҳи онро ба намуди $X_2 = X_1 + Y$ навиштан мумкин аст, ки дар ин чо Y- ҳалли умумии системаи якчинсаи $AY = \theta$ мебошад. Бо ибораи дигар, ҳамаи ҳалҳои системаи $AX = B$- ро дар мавриди маълум будани яке аз ҳалҳои системаи ғайриякчинса ва ҳамаи ҳалҳои системаи якчинса ёфтан мумкин аст.

Бигузор, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ системаи хаттӣ новобастаи ҳалҳои фундаменталии системаи якчинсаи мувофиқ бошанд. Он гоҳ

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \cdots + C_nY_n$$

ҳамаи ҳалҳои системаи якчинсаи $AX = \theta$- ро дар бар мегирад ва тасвири ҳалли умумии системаи ғайриякчинса $AX = B$ намуди

$$X = X_1 + Y = X_1 + C_1Y_1 + C_2Y_2 + \cdots + C_nY_n$$

-ро дорад, ки дар ин чо $X_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ яке аз ҳалҳои системаи ғайриякчинса мебошад.

Машқҳо барои кори мустақилона

1. Системаи муодилаҳоро бо усули Крамер ҳал кунед:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 - x_2 = 7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 \quad\quad + 2x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$

2. Ҳалли системаҳоро бо ёрии матрисаи баръакс ёбед:

1) $\begin{cases} x + 3y = 6, \\ 2x - 4y = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 = 5. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_2 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

3. Системаи муодилаҳоро бо усули Гаусс ҳал кунед:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -7, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -12. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2{,}5. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 2, \\ 15x_1 + 30x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = -13, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 9, \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23, \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -4, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$

4. Системаҳои зеринро бо ёрии табдилдиҳии Жорданӣ ҳал кунед. Дар мавриди ҳалли бешумор доштанаш аз ҳалли умумӣ як ҳалли хусусиро ҷудо намоед:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

$$13)\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=3,\\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=1,\\ x_1+x_2-x_3+x_4=2,\\ 2x_1 \quad -x_3-3x_4=0.\end{cases} \quad 14)\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=1,\\ 3x_1-x_2+x_3=0,\\ x_1-3x_2+2x_3=2,\\ 2x_1+x_2-x_3=3.\end{cases} \quad 15)\begin{cases} x_1+4x_2-x_3+x_4=2,\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=1,\\ x_1+3x_2-x_3+x_4=4,\\ x_1-x_2-3x_3-2x_4=3.\end{cases}$$

$$16)\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=0,\\ 2x_1-x_2+4x_3=0,\\ 3x_1-x_2+5x_3=-1,\\ x_1+x_2+2x_3=5.\end{cases} \quad 17)\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=2,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4=0,\\ x_1-x_2+x_3-2x_4=1,\\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=2.\end{cases} \quad 18)\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-x_4=1,\\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3,\\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=1,\\ x_1+3x_2+x_3+x_4=0.\end{cases}$$

$$19)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1,\\ x_1-x_2+2x_3=0,\\ 2x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1-2x_2-3x_3=3.\end{cases} \quad 20)\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=1,\\ 2x_1-x_2+x_3=4,\\ x_1-2x_2+4x_3=3,\\ x_1+x_2-x_3=1.\end{cases} \quad 21)\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4=4,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=1,\\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2,\\ 2x_1+x_2+x_3 \quad =3.\end{cases}$$

$$22)\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=0,\\ 3x_1-x_2+2x_3=2,\\ x_1-x_2+3x_3=1.\end{cases} \quad 23)\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1,\\ 2x_1-x_2+x_3=2,\\ x_1-2x_2+3x_3=3.\end{cases} \quad 24)\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=2,\\ x_1-x_2+2x_3=1,\\ x_1+2x_2-x_3=2,\\ 2x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

$$25)\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=1,\\ x_1-x_2+4x_3=2,\\ x_1+x_2+2x_3=0,\\ x_1-3x_2-2x_3=1.\end{cases} \quad 26)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1,\\ x_1-x_2+3x_3=2,\\ 2x_1+x_2+2x_3=4,\\ x_1-2x_2-3x_3=3.\end{cases} \quad 27)\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=2,\\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=1,\\ 3x_1 \quad -x_3-x_4=3,\\ 5x_1-x_2 \quad -3x_4=4.\end{cases}$$

5. Системаи муодилаҳои зеринро бо ёрии теоремаи Кронокёр-Капеллӣ тадқиқ карда, ҳалли умумӣ ва як ҳалли хусусии онҳоро ёбед:

$$1)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=4,\\ 3x_1-x_2+x_3=5,\\ x_1+x_2-2x_3=3.\end{cases} \quad 2)\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=4,\\ 3x_1-x_2+2x_3=5,\\ 2x_1-4x_2+3x_3=1.\end{cases} \quad 3)\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2,\\ x_1+4x_2-x_3=1,\\ x_1-5x_2+2x_3=4.\end{cases}$$

$$4)\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=1,\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=2,\\ x_1-2x_2+3x_3-3x_4=1,\\ 3x_1-3x_2+5x_3-4x_4=3.\end{cases} \quad 5)\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=1,\\ x_1+2x_2+x_3=1,\\ 2x_1-3x_2+x_3=0,\\ x_1-5x_2-5x_3=0.\end{cases} \quad 6)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2+x_3+2x_4=0,\\ x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+x_2 \quad +3x_4=0.\end{cases}$$

$$7)\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=3,\\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=4,\\ x_1+2x_2-x_3+3x_4=2,\\ 2x_1-2x_2+3x_3-3x_4=1.\end{cases} \quad 8)\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3-x_4=4,\\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=2,\\ 2x_1-3x_2+x_3-3x_4=2,\\ x_1-5x_2 \quad -5x_4=0.\end{cases} \quad 9)\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4=3,\\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=-6,\\ x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=10.\end{cases}$$

$$10)\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=3,\\ x_1-x_2+3x_3=1,\\ x_1-x_2+2x_3=0,\\ x_1+4x_2-3x_3=3.\end{cases} \quad 11)\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4=2,\\ x_1-2x_2+2x_3-x_4=5,\\ 2x_1-x_2+2x_3-2x_4=1,\\ x_1+x_2-x_4=-4.\end{cases} \quad 12)\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=1,\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=4,\\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4=1,\\ x_1-3x_2-2x_3-2x_4=-4.\end{cases}$$

АСОСҲОИ АЛГЕБРАИ ХАТТӢ

(Ќисми 1)

Лицензия рақами АА № 0048. 18.03.2020.
Босишга 2025 йил 26 декабрда рухсат этилди.
Бичими 60x84 1/16. Офсет қоғози.
Офсет босма усулида босилди.
Times New Roman гарнитураси. Шартли босма табок 8,84.
Адади 100 нусха.

«AVTO-NASHR» босмахонасида чоп этилди.
Тошкент шаҳар. Навоий кўчаси, 30.

ISBN 978-9910-8463-4-2
9 789910 846342