А.Н. Матвеев
Электричество и магнетизм



Высшая школа

537
М-333

А.Н. Матвеев

Электричество и магнетизм

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для физических специальностей вузов

Фундаментальная
библиотека Спб.

Москва
«Высшая школа»
1983

ББК 22.23
М33
УДК 537+538(075)

Рецензенты:
первая кафедра общей физики Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова (зав. кафедрой проф. Н. И. Калитеевский); акад. АН УССР А. И. Ахиезер (Харьковский физико-технический институт)

М33 Матвеев А. Н.
Электричество и магнетизм: Учеб. пособие.— М.: Высш. школа, 1983.— 463 с., ил.

В пер.: 1 р. 50 к.

Изложение курса начинается с экспериментального обоснования теории электричества и магнетизма и базируется на релятивистских представлениях, известных студентам из предшествующих разделов курса общей физики. Связь между электрическими и магнитными полями выявляется на самой ранней стадии изложения. Наряду с традиционными достаточно подробно изложены новые вопросы курса: флуктуации тока в цепях, аномальный скин-эффект, волноводы и резонаторы и др.

Книга представляет собой третий том курса общей физики для университетов и вузов. Первый том «Механика и теория относительности» вышел в 1976 г., второй том «Молекулярная физика» — в 1981 г.

Для студентов физических факультетов вузов.

М $\frac{1704040000-285}{001(01)-83}$ 42-83

ББК 22.33
537

© Издательство «Высшая школа», 1983

Оглавление

Предисловие 11
Введение 13

I Заряды, поля, силы

§ 1. Микроскопические носители электрических зарядов 16
Классификация. Электрон. Протон. Нейтрон. Что означает непрерывное распределение электрического элементарного заряда? Спин и магнитный момент

§ 2. Заряженные тела. Электризация 20
Термоэлектронная работа выхода. Энергетический спектр электронов. Энергия Ферми. Контактная разность потенциалов. Электризация

§ 3. Элементарный заряд и его инвариантность 28
Опыты Милликена. Резонансный метод измерения заряда. Отсутствие дробного заряда. Равенство положительных и отрицательных элементарных зарядов. Инвариантность заряда

§ 4. Электрический ток 32
Движение зарядов. Непрерывное распределение зарядов. Объемная плотность зарядов. Концентрация зарядов. Поверхностная плотность зарядов. Плотность тока. Сила тока через поверхность

§ 5. Закон сохранения заряда 37
Два аспекта понятия сохранения заряда. Интегральная формулировка закона сохранения заряда. Дивергенция. Формула Гаусса—Остроградского. Дифференциальная формулировка закона сохранения заряда

§ 6. Закон Кулона 44
Экспериментальные проверки закона Кулона. Метод Кавендиша. Проверка закона для больших расстояний. Проверка закона для малых расстояний. Полевая трактовка закона Кулона. Электрическое поле. О границах применимости классической концепции поля

§ 7. Принцип суперпозиции 52
Принцип суперпозиции для взаимодействия точечных зарядов. Полевая формулировка принципа суперпозиции. Пробные заряды. Границы применимости принципа суперпозиции

§ 8. Магнитное поле 55
Необходимость возникновения магнитного поля при движении зарядов. Взаимодействие точечного заряда и бесконечной прямой заряженной нити. Релятивистская природа магнитного поля. Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Единица силы тока. Магнитное поле

§ 9. Сила Лоренца. Сила Ампера 61
Преобразование сил. Сила Лоренца. Индукция магнитного поля. Сила Ампера. Переход от объемных токов к линейным. Магнитное поле прямолинейного тока

§ 10. Закон Био—Савара 66
Взаимодействие элементов тока. Об экспериментальной проверке закона взаимодействия. Полевая трактовка взаимодействия. Закон Био—Савара. Силы взаимодействия [illegible]

DEVLET TASVIRKORLIK
VA PEDAGOGIKA
INSTITUTI ARM
№ 13068

§ 11. Преобразование полей 72
Инвариантность выражения для силы в электромагнитном поле. Преобразование полей. Применения формул (11.15). Поле точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно
Задачи 77

2 Постоянное электрическое поле

§ 12. Постоянное электрическое поле 80
Неподвижный заряд. Существо модели. Границы применимости модели

§ 13. Дифференциальная формулировка закона Кулона 81
Теорема Гаусса. Измерение заряда. Физическая основа справедливости теоремы Гаусса. Дифференциальная формулировка закона Кулона. Уравнение Максвелла для div E. Силовые линии. Источники и стоки вектора E. Инвариантность заряда

§ 14. Потенциальность электростатического поля 86
Работа в электрическом поле. Потенциальность кулоновского поля. Ротор вектора. Формула Стокса. Дифференциальная формулировка потенциальности поля. Градиент. Скалярный потенциал. Неоднозначность скалярного потенциала. Нормировка. Выражение работы через потенциал. Потенциал поля точечного заряда. Потенциал поля системы точечных зарядов. Потенциал поля непрерывного распределения зарядов. Потенциал поля поверхностных зарядов. Бесконечность потенциала поля точечного заряда. Конечность потенциала при непрерывном распределении заряда с конечной плотностью. Непрерывность потенциала. Теорема Ирншоу

§ 15. Электростатическое поле в вакууме 98
Постановка вопроса. Прямое использование закона Кулона. Вычисление потенциала. Использование теоремы Гаусса. Уравнения Лапласа и Пуассона. Бесконечный равномерно заряженный круглый цилиндр

§ 16. Электростатическое поле при наличии проводников 104
Дифференциальная форма закона Ома. Классификация материалов по проводимости. Отсутствие электрического поля внутри проводника. Отсутствие в проводнике объемных зарядов. Электрическая индукция. Поле вблизи поверхности проводника. Механизм образования поля вблизи поверхности проводника. Зависимость поверхностной плотности зарядов от кривизны поверхности. Стекание заряда с острия. Электроскопы и электрометры. Металлический экран. Потенциал проводника. Емкость уединенного проводника. Система проводников. Конденсаторы. Проводящий шар в однородном поле. Поле диполя. Метод изображений

§ 17. Электростатическое поле при наличии диэлектриков 134
Дипольный момент непрерывного распределения зарядов. Поляризация диэлектриков. Молекулярная картина поляризации. Зависимость поляризованности от напряженности электрического поля. Влияние поляризации на электрическое поле. Объемная и поверхностная плотности связанных зарядов. Электрическое смещение. Электростатическая теорема Гаусса при наличии диэлектриков. Граничные условия. Граничные условия для нормальной составляющей вектора D. Граничные условия для тангенциальной составляющей вектора E. Преломление силовых линий на границе раздела диэлектриков. Знаки связанных зарядов на границе раздела диэлектриков. Метод изображений. Диэлектрический шар в однородном поле

§ 18. Энергия электростатического поля 152
Энергия взаимодействия дискретных зарядов. Энергия взаимодействия при непрерывном распределении зарядов. Собственная энергия. Плотность энергии поля. Энергия поля поверхностных зарядов. Энергия заряженных проводников. Энергия диполя во внешнем поле. Энергия диэлектрического тела во внешнем поле

§ 19. Силы в электрическом поле 161
Природа сил. Сила, действующая на точечный заряд. Сила, действующая на непрерывно распределенный заряд. Сила, действующая на диполь. Момент сил, действующих на диполь. Объемные силы, действующие на диэлектрик. Силы, действующие на проводник. Поверхностные силы, действующие на диэлектрик. Объемные силы, действующие на сжимаемый диэлектрик. Вычисление сил из выражения для энергии
Задачи 174

3 Диэлектрики

§ 20. Локальное поле 178
Отличие локального поля от внешнего. Вычисление напряженности локального поля

§ 21. Неполярные диэлектрики 180
Молекулярная диэлектрическая восприимчивость. Разреженные газы. Плотные газы

§ 22. Полярные диэлектрики 183
Зависимость поляризованности от температуры. Поле насыщения. Разреженные газы. Квантовая интерпретация поляризованности полярных газообразных диэлектриков. Плотные газы. Полярные жидкости. Ионные кристаллы

§ 23. Сегнетоэлектрики 189
Определение. Петля гистерезиса. Точка Кюри. Молекулярный механизм спонтанной поляризованности. Диэлектрические домены. Антисегнетоэлектрики

§ 24. Пьезоэлектрики 193
Свойства пьезоэлектриков. Продольный и поперечный пьезоэффекты. Механизм пьезоэффекта. Обратный пьезоэффект. Отличие обратного пьезоэффекта от электрострикции. Пироэлектрики
Задачи 196

4 Постоянный электрический ток

§ 25. Электрическое поле при наличии постоянных токов 198
Поле внутри проводника. Вопрос об источниках поля. Поле вне проводника. Поверхностные заряды. Объемные заряды. Механизм осуществления постоянного тока. Изменение потенциала вдоль проводника с током

§ 26. Сторонние э. д. с. 202
Сущность сторонних э. д. с. Механическая сторонняя э. д. с. Гальванические элементы. Элемент Вольта. Область действия сторонних э. д. с. Закон сохранения энергии. Поляризация элемента. Способы деполяризации. Аккумуляторы

§ 27. Дифференциальная форма закона Джоуля–Ленца. Работа, совершаемая при прохождении тока, и развиваемая мощность 209
Работа, совершаемая при прохождении тока. Мощность. Дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца. Источник энергии для работы электрического тока. Вывод закона Ома исходя из электронной картины электропроводности. Вывод закона Джоуля – Ленца исходя из электронной теории электропроводности. Недостатки классической теории электропроводности. Основные черты квантовой трактовки электропроводности

§ 28. Линейные цепи. Правила Кирхгофа 213
Изолированная замкнутая цепь. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

§ 29. Токи в сплошной среде 217
Постановка задачи. Вывод формулы. Условия применимости (29.6). Коаксиальные электроды. Неоднородная среда

§ 30. Заземление линий передач 220
Постановка задачи. Расчет сопротивления. Экспериментальная проверка. Напряжение шага
Задачи 223

5 Электропроводность

§ 31. Электропроводность металлов 226
Доказательство отсутствия переноса вещества электрическим током в металлах. Опыты Толмена и Стюарта. О зонной теории. Зависимость сопротивления от температуры. Эффект Холла. Магнетосопротивление. Подвижность электронов. Сверхпроводимость. Критическая температура. Критическое поле. Эффект Мейсснера. Поверхностный ток. Сверхпроводники первого и второго рода. Объяснение сверхпроводимости

§ 32. Электропроводность жидкостей 234
Диссоциация. Расчет электропроводимости. Зависимость электропроводимости от концентрации. Зависимость электропроводимости от температуры. Электролиты

§ 33. Электропроводность газов 237
Самостоятельный и несамостоятельный ток. Несамостоятельный ток. Плотность тока насыщения. Характеристика тока. Самостоятельный ток. Действие пространственного заряда. Подвижность зарядов. Сравнение выводов из (33.18) с экспериментом

§ 34. Электрический ток в вакууме 241
Термоэлектронная эмиссия. Характеристики электронного облака. Плотность тока насыщения. Закон трех вторых
Задачи 248

6 Стационарное магнитное поле

§ 35. Закон полного тока 250
Постановка задачи. Интегральная формулировка закона полного тока. Дифференциальная форма закона полного тока. Экспериментальная проверка закона полного тока. Вывод дифференциальной формулировки непосредственным дифференцированием формулы Био – Савара

§ 36. Уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля 255
Уравнение для div B. Уравнения Максвелла. Тип решаемых задач

§ 37. Векторный потенциал 257
Возможность введения векторного потенциала. Неоднозначность векторного потенциала. Калибровка потенциала. Уравнение для векторного потенциала. Закон Био-Савара. Поле элементарного тока

§ 38. Магнитное поле при наличии магнетиков 264
Определение. Механизмы намагничивания. Намагниченность. Векторный потенциал при наличии магнетиков. Объемная плотность молекулярных токов. Поверхностные молекулярные токи. Однородно намагниченный цилиндр. Напряженность магнитного поля. Уравнение для напряженности. Зависимость намагниченности от напряженности. Поле в магнетике. Постоянные магниты. Граничные условия для векторов поля. Граничное условие для нормальной составляющей вектора B. Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора H. Преломление магнитных силовых линий. Измерение индукции магнитного поля. Поля бесконечного соленоида и однородно намагниченного бесконечно длинного цилиндра. Измерение магнитной проницаемости, индукции и напряженности поля внутри магнетика. Шар из магнетика в однородном поле. Магнитная экранировка

§ 39. Силы в магнитном поле 280
Силы, действующие на ток. Сила Лоренца. Силы и момент сил, действующие на магнитный момент. Объемные силы, действующие на несжимаемые магнетики
Задачи 284

7 Магнетики

§ 40. Диамагнетики 288
Ларморова прецессия. Диамагнетизм. Диамагнитная восприимчивость. Независимость диамагнитной восприимчивости от температуры

§ 41. Парамагнетики 292
Механизмы намагничивания. Зависимость парамагнитной восприимчивости от температуры. Магнитные моменты свободных атомов. Магнитные моменты молекул. Магнетизм, обусловленный свободными электронами. Парамагнитный резонанс

§ 42. Ферромагнетики 298
Определение. Кривая намагничивания и петля гистерезиса. Кривая магнитной проницаемости. Классификация ферромагнитных материалов. Взаимодействие электронов. Элементарная теория ферромагнетизма. Закон Кюри – Вейсса. Анизотропия намагничивания. Домены. Границы. Перемагничива-

8 Электромагнитная индукция и квазистационарные переменные токи

ние. Антиферромагнетизм. Ферримагнетизм. Ферромагнитный резонанс

§ 43. Гиромагнитные эффекты 306
Соотношение между механическими и магнитными моментами. Опыт Эйнштейна – де Гааз. Эффект Барнетта
Задачи 310

§ 44. Индукция токов в движущихся проводниках 312
Возникновение э. д. с. в движущемся проводнике. Обобщение на произвольный случай. Генераторы переменного тока. Закон сохранения энергии

§ 45. Закон электромагнитной индукции Фарадея 316
Определение. Физическая сущность явления. Движущийся проводник в переменном магнитном поле. Применение электромагнитной индукции к генераторам переменного тока

§ 46. Дифференциальная формулировка закона электромагнитной индукции 318
Формулировка. Непотенциальность индукционного электрического поля. Векторный и скалярный потенциалы в переменном электромагнитном поле. Неоднозначность потенциалов, калибровочное преобразование

§ 47. Энергия магнитного поля 321
Энергия магнитного поля изолированного контура с током. Энергия магнитного поля нескольких контуров с током. Энергия магнитного поля при наличии магнетиков. Плотность энергии магнитного поля. Индуктивность. Поле соленоида. Энергия магнетика во внешнем магнитном поле. Вычисление сил из выражения для энергии. Объемные силы, действующие на сжимаемые магнетики. Энергия магнитного момента во внешнем поле

§ 48. Цепи квазистационарного переменного тока 335
Определение. Самоиндукция. Включение и выключение постоянной э. д. с. в цепи с сопротивлением и индуктивностью. Получение прямоугольных импульсов тока. Емкость в цепи. Включение и выключение постоянной э. д. с. в цепи с емкостью и сопротивлением. Цепь с емкостью, индуктивностью, сопротивлением и источником сторонних э. д. с. Переменный ток. Векторные диаграммы. Правила Кирхгофа. Последовательное и параллельное соединения импедансов. Метод контурных токов

§ 49. Работа и мощность переменного тока 346
Мгновенная мощность. Средняя мощность. Эффективные значения силы тока и напряжения. Коэффициент мощности. Электродвигатели. Синхронные двигатели. Асинхронные двигатели. Создание вращающегося магнитного поля. Согласование нагрузки с генератором. Токи Фуко

§ 50. Резонансы в цепи переменного тока 356
Резонанс напряжений. Резонанс токов. Колебательный контур

§ 51. Цепь с учетом взаимной индукции 359
Роль взаимной индукции. Уравнения для системы проводников с учетом самоиндукции и взаимоиндукции. Случай двух контуров. Трансформатор. Векторная диаграмма холостого хода трансформатора. Векторная диаграмма нагруженного трансформатора. Автотрансформатор. Трансформатор как элемент цепи. Реальный трансформатор

§ 52. Трехфазный ток 366
Определение. Получение трехфазного тока. Соединение обмоток генератора звездой. Соединение обмоток генератора треугольником. Соединение нагрузок. Получение вращающегося магнитного поля

§ 53. Скин-эффект 369
Сущность явления. Физическая картина возникновения. Элементарная теория. Толщина скин-слоя. Зависимость омического сопротивления проводника от частоты. Зависимость индуктивности проводника от частоты. Закалка металлов токами высокой частоты. Аномальный скин-эффект

§ 54. Четырехполюсники 373
Определение. Уравнения. Теорема взаимности. Сопротивление четырехполюсника. Простейшие четырехполюсники. Входное и выходное сопротивления. Коэффициент передачи

§ 55. Фильтры 377
Определение. Фильтр низких частот. Фильтр высоких частот. Цепочка из фильтров. Полосовой фильтр

§ 56. Бетатрон 380
Назначение. Принцип действия. Бетатронное условие. Радиальная устойчивость. Вертикальная устойчивость. Бетатронные колебания. Предел энергий, достижимых в бетатроне
Задачи 383

9 Электромагнитные волны

§ 57. Ток смещения 388
Сущность процесса. Почему скорость изменения вектора смещения называется плотностью тока? Уравнение Максвелла с током смещения. Релятивистская природа тока смещения

§ 58. Система уравнений Максвелла 393
Система уравнений Максвелла. Физический смысл уравнений. Условия применимости уравнений. Полнота и совместность системы уравнений

§ 59. Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Поток энергии 396
Формулировка. Поток энергии

§ 60. Движение электромагнитной энергии вдоль линий передач 398
Механизм компенсации потерь энергии на джоулеву теплоту. Движение энергии вдоль кабеля. Линия передачи для переменного тока. Уравнения для силы тока и напряжения. Характеристический импеданс и постоянная распространения. Характеристическое сопротивление. Скорость распространения. Отражение

§ 61. Излучение электромагнитных волн 405
Уравнение для векторного потенциала. Выбор калибровочной функции. Уравнение для векторного потенциала. Решение волнового уравнения. Запаздыва-

вающие и опережающие потенциалы. Вибратор Герца. Скалярный потенциал диполя, изменяющегося со временем. Векторный потенциал. Электрическое и магнитное поля. Поле вибратора в волновой зоне. Мощность, излучаемая вибратором. Излучение рамки с током. Излучение ускоренно движущегося электрона. Сила торможения излучением

§ 62. Распространение электромагнитных волн в диэлектриках 418

Плоские волны. Уравнения для векторов поля волны. Векторы волны. Фазовая скорость. Длина волны. Свойства волн. Плотность потока энергии

§ 63. Распространение электромагнитных волн в проводящих средах 422

Комплексная диэлектрическая проницаемость. Глубина проникновения. Физическая причина поглощения. Интерпретация скин-эффекта. Фазовая скорость и длина волны в проводящей среде. Соотношение между фазами колебаний векторов поля. Соотношение между амплитудами векторов поля

§ 64. Инвариантность плоской волны 426

Преобразование полей. Инварианты преобразований электромагнитного поля. Анализ инвариантов поля

§ 65. Давление электромагнитных волн. Импульс фотона 428

Механизм возникновения давления. Давление. Импульс пуга электромагнитных волн. Объемная плотность импульса электромагнитных волн. Импульс фотона

§ 66. Волноводы и резонаторы 431

Участок цепи. Участок проводника. Катушка индуктивности. Конденсатор. Излучение. Волноводы. Прямоугольный волновод. Граничная частота. Фазовая скорость. Длина волны в волноводе. Применение метода изображений к анализу волноводов. Дискретность направлений распространения плоских волн от системы излучателей. Граничная длина волны. Длина волны и фазовая скорость в волноводе. Групповая скорость. Соотношение между групповой и фазовой скоростями. Магнитное поле. Классификация волн в волноводах. Резонаторы

Задачи

10 Флуктуации и шумы

§ 67. Флуктуации в контуре с током. Шум сопротивления 441

Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы. Применение теоремы о равнораспределении энергии к свободному гальванометру. Флуктуации в колебательном контуре. Распределение флуктуаций по частотам. Шум сопротивления. Эквивалентный генератор шума. Мощность шума генератора. Максимальная чувствительность. Эквивалентная шумовая температура приемника. Коэффициент шума приемника. Отношение сигнал – шум

§ 68. Дробовой шум и шум тока 444

Источник дробового шума. Распределение шума по частотам. Шум тока. Методы уменьшения шумовых помех

Задачи

Приложение 451

Предметный указатель 455

455

460

Предисловие

Данный курс отражает современный уровень науки и образования и учитывает изменения в программе общей физики.

Поскольку основные положения теории относительности известны из курса механики, можно при изложении электричества и магнетизма с самого начала опираться на релятивистскую природу магнитного поля и представить электрическое и магнитное поля в их взаимной связи и единстве. Поэтому изложение материала в данной книге начинается не с электростатики, а с анализа основных понятий, связанных с зарядами, силами и электромагнитным полем. При этом определенный запас сведений о законах электромагнитных явлений, имеющийся у студента из курса физики средней школы, преобразуется в современное научное знание, а обоснование теории анализируется в свете современного состояния экспериментальных основ электромагнетизма с учетом пределов применимости используемых понятий. Это приводит иногда к необходимости выхода за пределы теории электромагнетизма в строгом смысле этого слова. Например, вопрос об экспериментальном обосновании закона Кулона для больших расстояний не может быть изложен без упоминания о его связи с нулевой массой покоя фотонов. И хотя полностью и строго этот вопрос излагается в квантовой электродинамике, его основные общие черты целесообразно изложить в классической теории электромагнетизма. Это создает у студента общее представление о проблеме и о связи изучаемого материала с материалом будущих курсов. Последнее обстоятельство имеет немаловажное методическое значение.

Основной задачей курса является изложение экспериментального обоснования теории электромагнетизма и формулировка теории в локальной форме, т. е. в виде соотношений между величинами в одной и той же пространственно-временной точке. В большинстве случаев они имеют дифференциальную форму, но существенна не их дифференциальная форма, а их локальный характер. Поэтому конечным продуктом курса являются уравнения Максвелла как результат обобщения и математической формулировки установленных в эксперименте закономерностей. Следовательно, главный метод изложения индуктивный. Однако это не исключает, а предполагает его сочетание с дедуктивным методом изложения в соответствии с принципами научного познания физических закономерностей. Поэтому уравнения Максвелла выступают в книге не только как результат математической формулировки установленных в эксперименте закономерностей, но и как инструмент исследования этих закономерностей.

Выбор экспериментальных фактов, которые могут быть взяты в экспериментальное обоснование теории, неоднозначен. В книге изложено обоснование теории электромагнетизма без теории относительности и с теорией относительности. Последнее обоснование более предпочтительно, поскольку в нем теория относительности выступает

как общая теория пространства-времени, на которой должны базироваться любые физические теории. Такое обоснование стало возможным в рамках новой программы общей физики.

Существенной частью теории является вопрос о границах ее применимости и области применимости используемых в теории понятий и моделей. Эти излагаемые в книге вопросы имеют принципиальное значение. В частности, анализ силового взаимодействия зарядов уже в рамках классической теории, без какого-либо привлечения квантовых представлений, показывает, что классическая теория электричества и магнетизма не может быть применена к анализу взаимодействия отдельных заряженных частиц.

Автор благодарит своих коллег по Московскому университету и другим университетам и вузам за плодотворное обсуждение вопросов курса. Автор благодарен акад. АН УССР А. И. Ахиезеру и проф. Н. И. Калитеевскому с сотрудниками возглавляемой им кафедры за внимательное рецензирование рукописи и ценные замечания.

А. Матвеев

Введение

В настоящее время в физике известны четыре вида взаимодействий материальных объектов: гравитационное, сильное, слабое и электромагнитное. Эти взаимодействия проявляются в различных пространственных масштабах и характеризуются своей интенсивностью.

Гравитационное взаимодействие заметно лишь между телами астрономических масштабов. Сильные взаимодействия проявляются лишь между определенными частицами при их сближении на весьма малые расстояния (10^{-15} м). Слабое взаимодействие осуществляется при взаимопревращении определенных сортов частиц. При удалении частиц друг от друга оно несущественно. И лишь электромагнитные взаимодействия проявляются в тех пространственных масштабах, в которых осуществлена наша повседневная жизнь. Практически все «силы», обусловливающие физические явления в нашем повседневном окружении, за исключением силы тяготения, являются в конечном счете электромагнитными. Конечно, все многообразные связи и явления, обусловленные электромагнитными взаимодействиями, не могут быть описаны законами электродинамики, поскольку на каждом уровне явления существуют свои специфические черты и закономерности, не сводимые к закономерностям другого уровня. Однако электромагнитные взаимодействия на всех уровнях являются в определенном смысле элементарной связью, с помощью которой образуется вся цепь связей. Этим определяется практическое значение электромагнитных явлений.

Чрезвычайно велико значение теории электромагнитных явлений. Эта теория является первой релятивистски инвариантной теорией. Она сыграла решающую роль в возникновении и обосновании теории относительности и явилась тем «полигоном», на котором проходили проверку многие новые идеи. Квантовая электродинамика является лучше всего разработанной квантовой теорией, предсказания которой согласуются с экспериментом поразительно хорошо, хотя в настоящее время она еще и не является внутренне непротиворечивой и завершенной. Очень существенно общефилософское и мировоззренческое значение электромагнетизма. Например, в рамках электромагнитных явлений отчетливо проявляются особенности полевой теории существования материи, хорошо прослеживается взаимопревращение ее различных форм и взаимопревращение различных форм энергии.

В книге излагаются два пути обоснования теории. При обосновании без теории относительности в качестве экспериментальных основ теории электричества и магнетизма взяты инвариантность элементарного заряда, закон Кулона, принцип суперпозиции для электрического поля, закон Био – Савара, принцип суперпозиции для магнитного поля, сила Лоренца, закон электромагнитной индукции Фарадея, токи смещения Максвелла, закон сохранения заряда и закон сохранения энергии. При обосновании с теорией относительности закон Био – Савара,

принцип суперпозиции для магнитного поля и сила Лоренца перестают играть роль независимых экспериментальных фактов в формулировке теории. Второй путь обоснования теории электричества и магнетизма изложен не в виде основного магистрального пути, а в виде побочного пути, выбранного с расчетом максимального упрощения математической стороны дела. Он включает в себя следующие этапы.

Релятивистская природа магнитного поля демонстрируется в § 8. Там выводится формула взаимодействия прямолинейных токов, текущих по параллельным бесконечно длинным проводникам, и получается сила Лоренца исходя из электрического взаимодействия зарядов. Полевая интерпретация этих результатов позволяет найти индукцию магнитного поля тока, текущего по прямолинейному бесконечно длинному проводнику. Принцип суперпозиции для магнитного поля является теперь следствием принципа суперпозиции для электрического поля. Переход к индукции магнитного поля произвольных токов и вывод соответствующих уравнений производится в § 35, где существенно используется независимость локальных соотношений от значений физических величин в других точках. Затем в § 37 теоретически выводится закон Био – Савара и тем самым завершается анализ связи, которая существует в рамках релятивистских представлений о пространстве и времени между инвариантностью элементарного электрического заряда, законом Кулона, принципом суперпозиции для электрического поля и законом Био – Савара, силой Лоренца и принципом суперпозиции для магнитного поля.

§ 1 Микроскопические носители электрических зарядов

§ 2 Заряженные тела. Электризация

§ 3 Элементарный заряд и его инвариантность

§ 4 Электрический ток

§ 5 Закон сохранения заряда

§ 6 Закон Кулона

§ 7 Принцип суперпозиции

§ 8 Магнитное поле

§ 9 Сила Лоренца. Сила Ампера

§ 10 Закон Био – Савара

§ 11 Преобразование полей

1

Заряды, поля, силы

Заряд — источник и объект действия электромагнитного поля.
Поле — материальный носитель электромагнитных взаимодействий зарядов, форма существования материи.
Сила — количественная мера интенсивности взаимодействия зарядов.
Заряды, поля и силы существуют в неразрывной связи с пространством, временем и движением материи. Их взаимоотношение не может быть понято без учета связи с пространством, временем и движением.

§ 1. Микроскопические носители электрических зарядов

Описываются свойства основных микроскопических носителей электрических зарядов. Обсуждается распределение электрического заряда в протоне и нейтроне и анализируется его физический смысл.

Классификация. Под микроскопическими носителями зарядов понимаются заряженные частицы и ионы. Они могут нести как положительный, так и отрицательный заряд. По числовому значению он может быть лишь в целое число раз больше элементарного:

$$|e| = 1{,}6021892\,(46)\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}. \tag{1.1}$$

К настоящему времени не обнаружено микроскопических носителей с дробным зарядом, несмотря на значительные экспериментальные усилия (см. § 3).

Известно около 200 частиц и громадное число ионов, атомов и молекул. Большая часть частиц после возникновения существует непродолжительное время, по истечении которого распадается на другие частицы, т. е. *частицы имеют конечное время жизни*. В большинстве случаев оно чрезвычайно мало и составляет ничтожные доли секунды. *Существует лишь небольшое число заряженных частиц с бесконечным временем жизни. Это электрон, протон и их античастицы.* В состав ядер атомов входят протоны, а в состав электронной оболочки атомов – электроны. Именно эти частицы обусловливают почти все явления, изучаемые в курсе электричества и магнетизма. В состав ядер кроме протонов входят также нейтроны. Они электрически нейтральны и их время жизни в составе ядер неограниченно. Однако вне ядер они живут в среднем около 17 мин, распадаясь на протоны, электроны и антинейтрино.

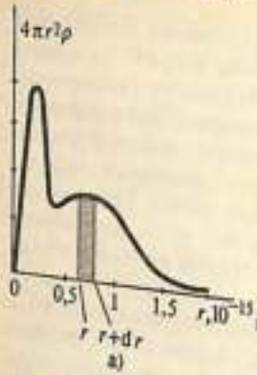
Заряженность ионов обусловливается тем, что в электронной оболочке соответствующего атома или молекулы недостает одного или нескольких электронов (положительные ионы) или, наоборот, имеются лишние (отрицательные ионы). Поэтому вопрос об ионах как микроскопических носителях зарядов сводится к вопросу о зарядах электронов и протонов.

Электрон. Электрон является материальным носителем элементарного отрицательного заряда. *Обычно принимается, что электрон является точечной бесструктурной частицей*, т. е. весь электрический заряд электрона сосредоточен в точке. *Такое представление внутренне противоречиво*, так как энергия электрического поля, создаваемого точечным зарядом, бесконечна, а следовательно, должна быть бесконечной и инертная масса точечного заряда, что противоречит эксперименту, поскольку масса электрона равна $m_e \approx 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг. *Однако*

с этим противоречием приходится мириться вследствие отсутствия более удовлетворительного и менее противоречивого взгляда на структуру (или отсутствие структуры) электрона. Трудность бесконечной собственной массы успешно преодолевается при вычислениях различных эффектов с помощью **перенормировки массы**, сущность которой заключается в следующем. Пусть требуется рассчитать некоторый эффект, причем в расчет входит бесконечная собственная масса. Получаемая в результате такого вычисления величина бесконечна и, следовательно, лишена непосредственного физического смысла. Чтобы получить физически разумный результат, проводится еще одно вычисление, в котором присутствуют все факторы, за исключением факторов рассматриваемого явления. В последний расчет также входит бесконечная собственная масса и он приводит к бесконечному результату. Вычитание из первого бесконечного результата второго приводит к взаимному сокращению бесконечных величин, связанных с собственной массой, а оставшаяся величина является конечной. Она характеризует рассматриваемое явление. Таким способом удается избавиться от бесконечной собственной массы и получить физически разумные результаты, которые подтверждаются экспериментом. Такой прием используется, например, при вычислении энергии электрического поля (см. § 18).

Протон. Носителем положительного элементарного заряда является протон. В отличие от электрона, он не рассматривается как точечная частица. Экспериментально хорошо изучено распределение электрического заряда внутри протона. Метод изучения аналогичен использованному в начале текущего столетия Резерфордом для исследования структуры атомов, в результате которого было открыто существование ядра. Анализируется столкновение электронов с протоном. Если представить себе протон в виде *сферически симметричного* распределения заряда в конечном объеме, то *траектория электрона, не проходящего через этот объем, не зависит от закона распределения заряда*. Она точно такая же, как если бы весь заряд протона был сосредоточен в его центре. *Траектории электронов, проходящих через объем протона, зависят от конкретного вида распределения заряда в нем.* Эти траектории могут быть вычислены. Поэтому, проведя достаточное число наблюдений за результатами столкновений электронов с протонами, можно сделать заключение о распределении заряда внутри протона. Поскольку речь идет об очень малых областях пространства, для экспериментов пришлось воспользоваться электронами очень больших энергий. Такая необходимость диктуется квантовой теорией. По соотношениям де Бройля материальные частицы обладают волновыми свойствами, причем длина волны частицы обратно пропорциональна импульсу. Чтобы «прощупать» некоторую пространственную деталь, необходимо, очевидно, пользоваться частицами, длина волны которых меньше соответствующих пространственных размеров детали, а это соответствует достаточно большим импуль-

Фундаментальная библиотека Сев.
BƏDƏN TƏRBİYƏ KOLLEJİ VƏ PEDAQOGİKA İNSTİTUTU ARM № 13062



1

Электромагнитная структура протона. Почти весь заряд протона сосредоточен внутри шара радиусом r_0

стало возможным лишь после создания электронных ускорителей на энергии в несколько миллиардов электрон-вольт. На рис. 1, *а* приведен результат этих экспериментов. По оси ординат отложена не плотность ρ заряда на расстоянии r от центра протона, а величина $4\pi r^2\rho$, представляющая плотность суммарного по всем направлениям заряда на расстоянии r от центра, поскольку $4\pi r^2\rho(r)\,dr$ – полный заряд в сферическом слое толщиной dr. Из рисунка видно, что *практически весь заряд протона сосредоточен в шаре радиусом* $\approx 10^{-15}$ м. *После первого максимума* $4\pi r^2\rho(r)$ *не убывает монотонно, а имеется еще один максимум.*

Нейтрон. Аналогичные эксперименты были проведены также по рассеянию электронов на нейтронах. Они показали, что нейтрон обладает электромагнитной структурой и не является точечной электрически нейтральной частицей. Распределение электрического заряда внутри нейтрона показано на рис. 2, *а*.

Очевидно, что *вблизи центра нейтрона располагается положительный заряд, а дальше от центра – отрицательный.* Площади, ограниченные кривыми и осью абсцисс, равны, следовательно, положительный заряд равен отрицательному, и в целом нейтрон электрически нейтрален. *Размеры областей, в которых сосредоточены электрические заряды, у протона и нейтрона примерно одинаковы.*

Что означает непрерывное распределение электрического элементарного заряда? Площадь, ограниченная кривой и осью абсцисс (см. рис. 1, *а*), численно равна заряду протона, а заштрихованная площадь – заряду внутри протона в шаровом слое толщиной dr на расстоянии r от центра протона. Ясно, что этот заряд составляет лишь небольшую часть от полного заряда протона, т. е. небольшую часть элементарного заряда. Однако *в природе не удалось обнаружить физических объектов, заряд которых равен дробной части от элементарного.* Спрашивается, каков смысл утверждения, что в объеме $4\pi r^2\,dr$ находится небольшая часть элементарного заряда?

● **Электрон рассматривается как точечная частица, хотя это и приводит к трудностям. Экспериментально обнаружить внутреннюю электромагнитную структуру электрона пока не удалось. Непрерывное распределение элементарного электрического заряда не связано с его разбиением на части, а означает учет закона движения этого заряда в пространстве.**

В настоящее время предполагается, что протон состоит из двух точечных кварков с зарядом $+2|e|/3$ и одного – с зарядом $-|e|/3$ (см. рис. 1, *б*). Кварки в протоне движутся. Их относительное время пребывания на различных расстояниях от центра протона может быть эффективно представлено в виде размазанности заряда по объему протона, как показано на рис. 1, *а*. Нейтрон состоит из двух кварков с зарядом $-|e|/3$ и одного – с зарядом $+2|e|/3$ (рис. 2, *б*). Объяснение распределения заряда в нем (рис. 2, *а*) аналогично.

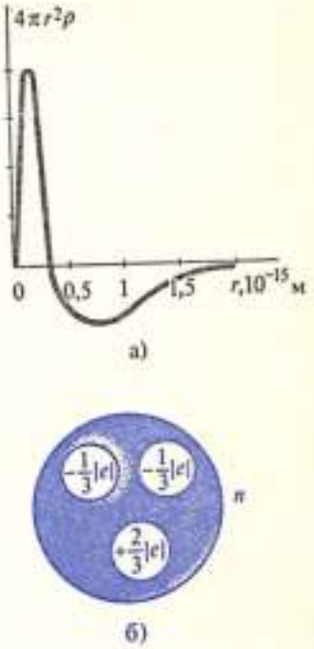
В свободном состоянии кварки не обнаружены, несмотря на значительные экспериментальные усилия. В настоящее время считается, что их в принципе нельзя обнаружить в свободном состоянии, поскольку для этого надо затратить бесконечную энергию, а внутри протона они все же существуют. Такое допущение позволяет объяснить многие явления и поэтому принимается физиками в качестве вероятной гипотезы.

Прямое экспериментальное доказательство наличия кварков внутри протона отсутствует.

Спин и магнитный момент. Кроме заряда частицы могут обладать моментом импульса или спином. *Спин не обусловлен вращением частицы*, поскольку для такого объяснения при разумных предложениях о размерах частиц пришлось бы допустить наличие линейных скоростей при вращении, превосходящих скорость света, что невозможно. Поэтому *спин рассматривается как внутреннее свойство частицы.*

Со спином связано наличие у заряженной частицы магнитного момента, который также не может быть объяснен движением заряда и рассматривается как первоначальное свойство.

В классической электродинамике магнитный момент может быть лишь результатом движения зарядов по замкнутым траекто-



2

Электромагнитная структура нейтрона. Вблизи центра нейтрона располагается положительный заряд, а дальше от центра – отрицательный. Положительный и отрицательный заряды взаимно компенсируют друг друга и поэтому в целом нейтрон электрически нейтрален

○ **Не существует заряда, меньше элементарного. Каков смысл представления о распределении заряда в протоне, если его полный заряд равен элементарному?**

С какой основной трудностью связано представление об электроне как о точечной частице? Каким искусственным приемом эта трудность преодолевается?

рнем. Поэтому спиновый магнитный момент частиц не может быть описан в классической теории электричества и магнетизма. Однако магнитное поле, обусловленное спиновыми магнитными моментами, может быть при необходимости описано феноменологически. Как правило, напряженность этого поля очень мала. Лишь в случае постоянных магнитов оно достигает больших значений. Классическая теория не в состоянии описать механизм возникновения этого поля, но само поле вне постоянных магнитов полностью описывается классической теорией (см. § 38).

§ 2. Заряженные тела. Электризация

Выясняется физическое содержание процессов, приводящих к электризации тел при соприкосновении. Сообщаются некоторые сведения об энергетическом спектре электронов в твердых телах.

Термоэлектронная работа выхода. Силы, удерживающие нейтральные атомы в молекуле и нейтральные молекулы в твердом теле, рассматриваются в молекулярной физике. Сам *факт существования твердых тел свидетельствует о наличии сил, удерживающих электроны внутри твердого тела.* Для извлечения из него электрона необходимо затратить определенную работу против сил, удерживающих электроны внутри твердого тела. Представим себе, что твердое тело вместе с прилегающим к нему пространством заключено в адиабатическую оболочку и поддерживается при постоянной температуре T. *Вследствие теплового движения и распределения электронов по скоростям внутри тела найдутся электроны, кинетическая энергия которых достаточна для преодоления сил, удерживающих их внутри тела, и выхода за его пределы.* Благодаря этому у поверхности тела образуется «газ» из электронов. Электроны этого «газа» при своем движении приближаются к поверхности твердого тела и захватываются внутрь него. *Термодинамическое равновесие достигается тогда, когда число покидающих в объем тела электронов в среднем равно числу электронов, поступающих в объем тела из прилегающего к его поверхности слоя электронного «газа».* При этом концентрация электронов у поверхности тела имеет определенное значение n_0. Этот электронный газ не вырожден и его плотность может быть представлена в виде распределения Больцмана:

$$n_0 = A \exp\left[-\Phi/(kT)\right], \tag{2.1}$$

где A зависит только от температуры T, Φ – термоэлектронная работа выхода.

По смыслу распределения Больцмана термоэлектронная работа выхода представляет собой разность энергий электрона вне твердого тела и внутри него. Однако внутри твердого тела электроны имеют различные энергии, и о какой энергии идет речь при определении Φ, становится ясно лишь из анализа энергетического спектра электронов.

Энергетический спектр электронов. Законы движения микрочастиц даются квантовой механикой, которая позволяет рассчитать спектр энергий электронов, если известен закон изменения их потенциальной энергии. Эти расчеты усложняются тем, что необходимо принимать во внимание также и взаимодействие электронов между собой. Точное решение такого рода задач не по силам даже современным ЭВМ и вряд ли когда-либо будет возможно в будущем. Но в этом и нет необходимости, потому что удается разработать методы приближенного решения задачи, вполне удовлетворяющие практические потребности. Важно констатировать, что спектр существует и является дискретным для электронов, заключенных в конечной области пространства. Он определяет различные свойства тела, изучая которые экспериментально можно сделать заключение об его особенностях. Следовательно, энергетический спектр может быть изучен как теоретически, так и экспериментально.

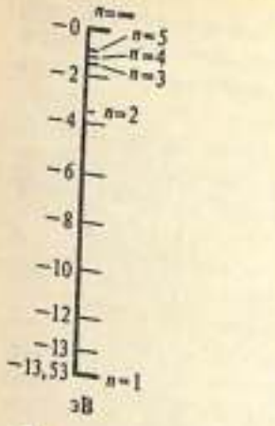
Энергетический спектр электронов в твердых телах исследован достаточно подробно и его основные особенности сводятся к следующему. В изолированном атоме энергетические уровни составляют дискретный набор энергий.

На рис. 3 изображена идеальная схема уровней водородоподобного атома. В аналитическом виде энергия электрона на n-м уровне дается формулой

$$W_n = -A/n^2,$$

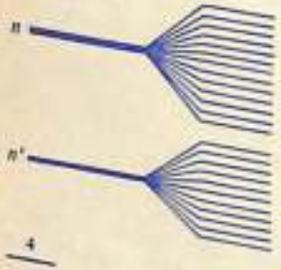
где A – положительная величина, выражаемая через элементарный заряд, массы ядра и электрона и постоянную Планка. Наименьшей энергией электроны обладают на уровне $n = 1$. Расстояние между уровнями составляет несколько электрон-вольт, причем эти расстояния с увеличением n уменьшаются.

Поскольку электроны подчиняются статистике Ферми – Дирака, в каждом квантовом состоянии может находиться лишь один электрон. Квантовое состояние характеризуется не только энергией. В водородоподобном атоме оно характеризуется также моментом импульса электрона при орбитальном движении в атоме, его ориентировкой в пространстве и ориентировкой спина электрона. Эти последние характеристики также квантованы, т. е. имеют дискретный набор числовых значений. В результате получается, что *на каждом энергетическом уровне имеется не один электрон, а несколько.* Как показывают расчеты, на уровне $n = 1$ могут находиться два электрона, отличающиеся ориентировкой спина (возможны только две ориентировки спина). Момент импульса на этом уровне может быть равным только нулю. На следующем уровне $n = 2$ момент импульса электрона, кроме нулевого,



3

Энергетический спектр атома водорода



4

Схема образования энергетических зон

● **У диэлектриков работа выхода зависит от чистоты состава и состояния поверхности. При контакте тел происходит переход электронов от тела с меньшей работой выхода к телу с большей работой выхода.**

может иметь также одно отличное от нуля значение. При нулевом значении момента импульса не имеет смысла говорить о его ориентировке в пространстве. При отличном от нуля значении момента импульса можно говорить об его ориентировке в пространстве. При $n = 2$ имеем три возможные ориентировки. Таким образом, всего по абсолютному значению момента импульса и его ориентировкам в пространстве на уровне $n = 2$ имеется четыре квантовых состояния. В каждом из них спин электрона может быть ориентирован двумя способами и, следовательно, всего на энергетическом уровне $n = 2$ имеется восемь различных квантовых состояний. Это означает, что всего на этом уровне может быть восемь электронов. Оказывается, что на последующих уровнях могут находиться 18, 32, 50 и т. д. электронов. Так как устойчивому состоянию атома (основное состояние) соответствует состояние с наименьшей энергией, то энергетические уровни должны заполняться начиная с уровня $n = 1$, а переход к заполнению следующего уровня происходит после того, как предшествующий уровень оказывается полностью заполненным электронами. Совокупность электронов с определенным значением n называется оболочкой атома. Оболочки принято обозначать буквами K, L, M, N и т. д. по следующей схеме:

n	1	2	3	4	5
Название оболочки	K	L	M	N	O

Например, вместо «электрон на уровне $n = 2$» говорят «электрон L-оболочки» и т. д.

Если атомы составляют кристаллическую решетку твердого тела, то ситуация изменяется. Само существование кристаллической решетки свидетельствует о том, что между атомами имеется взаимодействие, которое и обусловливает возникновение решетки. Следовательно, *атомы уже нельзя считать изолированными, надо всю кристаллическую решетку рассматривать как единую систему и говорить об энергетических уровнях этой системы.* Оказывается, что энергетический

спектр кристаллической решетки связан с энергетическим спектром изолированных атомов простым соотношением, а именно: *в результате взаимодействия между атомами каждый из энергетических уровней $n = 1, 2, \ldots$ расщепляется на большое число очень близко расположенных между собой подуровней, на которых в состоянии разместиться все электроны, находившиеся первоначально на соответствующем уровне изолированных атомов.* Например, K-оболочку изолированного атома занимают два электрона. Если атомы входят в кристаллическую решетку, состоящую из N_0 атомов, то уровень $n = 1$ расщепляется на N_0 подуровней, на каждом из которых может находиться по два электрона с различной ориентировкой спинов, т. е. всего в кристаллической решетке образуется $2N_0$ различных квантовых состояний, которые заняты $2N_0$ электронами, ранее принадлежавшими K-оболочкам.

Совокупность близко расположенных энергетических уровней, образовавшихся в результате расщепления некоторого энергетического уровня изолированного атома, называется энергетической зоной или просто зоной. Говорят о K-зоне, L-зоне и т. д. по их соответствию оболочкам K, L, ... изолированных атомов. Схема образования зон изображена на рис. 4. Как было сказано, внутри зон расстояние между различными уровнями чрезвычайно мало. Расстояние же между различными зонами остается значительным, по порядку величины равным расстоянию между энергетическими уровнями изолированных атомов. Промежутки между энергетическими зонами, которые не могут заниматься электронами, называются также зонами. Эти зоны называются *запрещенными*, поскольку в них электроны не могут находиться.

Таким образом, энергетический спектр электронов твердого тела состоит из разрешенных и запрещенных зон. *Расстояние между энергетическими уровнями внутри каждой из разрешенных зон чрезвычайно мало по сравнению с шириной запрещенных зон.* Рассмотренная схема энергетических уровней изолированного атома является идеализированной. Если более полно учесть взаимодействие электронов, то окажется, что энергия электронов в оболочке не одинакова, а зависит, например, от момента импульса. При этом энергия электрона с более высоким значением n может быть не больше, а меньше энергии электронов на предшествующем уровне. В результате изменяется последовательность заполнения электронами оболочек. Соответственно изменяется и структура энергетических зон кристалла и их заполнение электронами. Однако общий характер спектра твердого тела не изменяется.

Энергия Ферми. Основным состоянием твердого тела является состояние с наименьшей энергией. Поэтому *при температуре 0 К электроны должны быть заполнены последовательно без промежутков все квантовые состояния электронов начиная с уровня с наименьшей энергией.* Ввиду конечного числа электронов имеется конечный заполненный уровень с наибольшей энергией, а последующие уровни свободны. Таким образом, *при 0 К существует резкая граница между заполненными и свободными уровнями.*

При температуре, отличной от 0 К, *эта граница размывается*, поскольку в результате теплового движения у некоторых электронов энергия оказывается больше граничной энергии при $T = 0$ К, а у некоторых – меньше. Таким образом, некоторые уровни энергии, бывшие при $T = 0$ К свободными, станут заполненными, а бывшие заполненными – свободными. *Ширина переходной области от практически полностью свободных энергетических уровней имеет порядок* kT. Распределение электронов по энергиям при этом характеризуется функцией Ферми – Дирака:

$$f(E, T) = \{1 + \exp[(E - \mu)/(kT)]\}^{-1}, \qquad (2.2)$$

где E – энергия электрона; μ – энергия Ферми, зависящая от температуры. Энергия Ферми определяется как энергия, при которой функция Ферми – Дирака равна $^1/_2$.

Для металлов понятия об энергии Ферми очень наглядны. *В этом случае энергия Ферми является энергией электронов на уровне, который заполнен при* $T = 0$ К *и выше которого уровни свободны.* Это определение является точным при $T = 0$ К и достаточно точным для всех температур, когда «размывание» распределения Ферми мало (для большинства металлов это утверждение справедливо вплоть до температур плавления и выше).

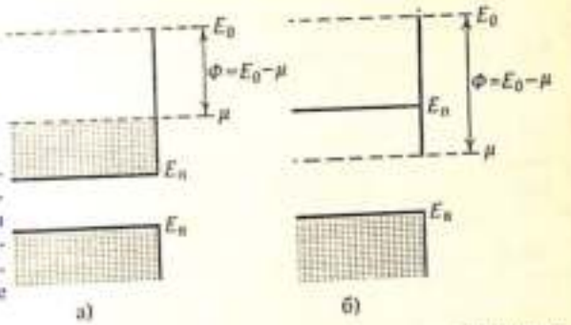
Для диэлектриков энергия Ферми приходится на середину запрещенной зоны (при $T = 0$ К), лежащей выше последней, полностью заполненной зоны, а на этом уровне электрон не может находиться, т. е. *энергия Ферми не соответствует энергии какого-либо реального электрона в диэлектрике.* Но это, конечно, не уменьшает ее значения для описания статистических свойств электронов в диэлектриках в соответствии с формулой (2.2).

Как показывает теория, **термоэлектронная работа выхода Ф**, входящая в формулу (2.1), связана с энергией μ уровня Ферми соотношением

$$\Phi = E_0 - \mu, \qquad (2.3)$$

где E_0 – энергия покоящегося электрона вне проводника в вакууме. Таким образом, Ф *равна работе перемещения электрона с уровня Ферми за пределы твердого тела.* Для металлов это утверждение имеет буквальный смысл, для диэлектриков несколько условный, поскольку на уровне Ферми нет реальных электронов. *Однако в обоих случаях – это есть работа для извлечения электрона из твердого тела, произведенная против сил, удерживающих электроны в твердом теле.* Существование работы выхода проявляется, например, в фотоэффекте, когда энергия поглощаемого в металле фотона полностью передается электрону. По длинноволновой границе фотоэффекта можно непосредственно определить работу выхода. Поэтому можно сказать, что *электроны внутри твердого тела находятся в потенциальной яме глубиной* Ф. Вид потенциальных ям для металлов (*а*) и диэлектриков (*б*) показан на рис. 5 (энергетические уровни, занятые электронами, заштрихованы). Промежуток между уровнями E_n и E_0 является запрещенной зоной.

5



Потенциальная яма для электрона в металле (*а*) и диэлектрике (*б*). Термоэлектронная работа выхода Ф является разностью между энергией E_0 покоящегося электрона в вакууме и энергией μ уровня Ферми

Следует отметить, что *у диэлектриков работа выхода сильно зависит от чистоты состава.* Даже небольшие примеси могут существенно изменить работу выхода. Кроме того, *работа выхода зависит от самых ничтожных загрязнений поверхности.* У чистых металлов она имеет порядок нескольких электрон-вольт. Например, 4,53 эВ у вольфрама, 4,43 эВ у молибдена, 4,39 у меди и т. д.

Контактная разность потенциалов. Силы, удерживающие электроны в твердом теле, – электрического происхождения. Они обусловливаются разностью потенциалов между точками вне тела и внутренними точками или, другими словами, *на электронный газ вблизи поверхности действуют электрические силы, стремящиеся втянуть электроны внутрь тела.* Эти силы тем значительнее, чем больше работа выхода Ф. Они действуют в очень тонком слое молекулярных размеров ($d \approx 10^{-10}$ м). Поэтому эффективная напряженность электрического поля, обусловливающего возникновение этих сил, весьма велика:

$$E_{эф} \sim \Phi/(|e|\,d) \sim 10^{10}\ \text{В/м}, \qquad (2.4)$$

где учтено, что работа выхода равна по порядку величины нескольким электрон-вольтам.

Сблизим поверхности двух тел настолько, чтобы в промежутке между ними произошло перекрытие слоев электронного газа, находящихся у поверхности тел. Благодаря этому тела начинают обмениваться электронами. *Поскольку силы, увлекающие электрон в тело, больше у тела, имеющего большую работу выхода, после сближения поверхностей начнется переход электронов от тела с меньшей работой выхода к телу с большей работой выхода, в результате чего первое тело будет заряжаться положительно, а второе отрицательно.* Возникающее вследствие этого электрическое поле между поверхностями тел препятствует движению электронов, в результате которого оно возникло. Напряженность этого поля достигает определенного значения, дальнейший переход электронов от одного тела к другому прекращается и устанавливается равновесное состояние. Поверхности оказываются заряженными противоположными по знаку, но равными по абсолютному значению зарядами. *Между поверхностями, как между обкладками конденсатора, устанавливается некоторая разность потенциалов, называемая контактной.*

Контактная разность потенциалов может быть найдена на основании следующих соображений. Поскольку между телами устанавливается электронное равновесие, энергии Ферми тел должны быть равными, в результате чего верхние точки потенциальных ям смещаются относительно друг друга. Следовательно, между ними, т. е. между поверхностями тел, возникают разность потенциалов и напряженность электрического поля.

На рис. 6 показаны схемы образования контактной разности потенциалов между двумя металлами (рис. 6, *а*), между металлом и диэлектриком (рис. 6, *б*), между диэлектриками (рис. 6, *в*). Отличие в образовании контактной разности потенциалов между металлами и между металлом и диэлектриком состоит в том, что электрическое поле не проникает внутрь металла, но проникает на небольшую глубину в диэлектрик (на рис. 6, *б*, *в* глубина проникновения обозначена d_1 и d_2). Поэтому *у диэлектриков падение потенциала происходит не только между поверхностями, но и частично в тонком слое внутри диэлектрика вблизи его поверхности.* Однако толщина этого слоя обычно мала по сравнению с расстоянием между поверхностями и с большой точностью это обстоятельство можно не принимать во внимание.

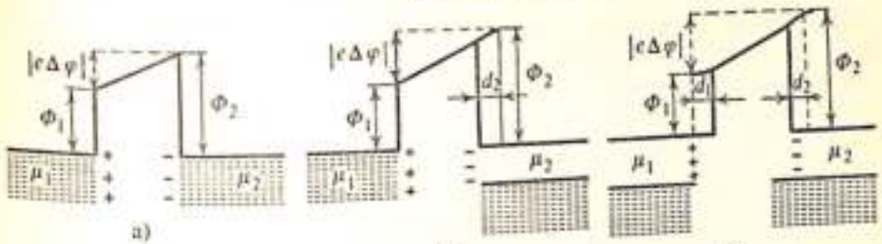
Как видно (см. рис. 6), разность между энергиями верхних точек потенциальных ям равна $\Phi_2 - \Phi_1$ и поэтому контактная разность потенциалов между поверхностями тел, находящихся в электронном равновесии, задается формулой

$$|\Delta\varphi| = |\Phi_2 - \Phi_1|/|e|. \qquad (2.5)$$

Заметим, что потенциал уменьшается в направлении от положительно заряженных тел к отрицательно заряженным. Поэтому изменение потенциала противоположно изменению потенциальной энергии электрона, т. е. потенциал уменьшается от первого тела ко второму.

Электризация. Если плоские поверхности тел, между которыми образовалась контактная разность потенциалов, удалить друг от друга, сохраняя строгую параллельность между ними, то находящиеся на них заряды останутся на телах и тела окажутся разноименно заряженными. Однако развести строго параллельно поверхности практически невозможно, так как различные их участки удаляются с различной скоростью. *Результат разведения поверхностей для проводников и диэлектриков принципиально различен.*

При разведении плоских поверхностей проводников находящиеся на них заряды могут перемещаться вдоль поверхности. Если одни участки поверхности развести раньше других, то на них, так же как в конденсаторе, при той же разности потенциалов плотность заряда уменьшится. В результате между телами осуществится обмен зарядами для восстановления электронного равновесия, причем он происходит посредством обмена электронами через электронное облако на данном участке поверхности и вследствие движения зарядов вдоль поверхности на других участках. Те участки поверхности проводников, которые



6

Образование контактной разности потенциалов в промежутке между поверхностями металл – металл (*а*), металл – диэлектрик (*б*), диэлектрик – диэлектрик (*в*)

разведены достаточно далеко и потеряли при этом электронный контакт через приповерхностное электронное облако, оказываются практически лишенными зарядами. Заряд сохраняется лишь на тех участках поверхности, которые еще находятся в электронном контакте. Наконец наступает момент, когда электронный контакт сохраняется на ничтожно малой площади поверхности, содержащей очень малый заряд. Поэтому *при окончательном разведении проводников на них не остается зарядов.*

Результат разведения диэлектриков иной. У них заряды не могут перемещаться вдоль поверхности и сам потенциал вдоль поверхности может быть различен. При разведении участков поверхности разность потенциалов между ними не остается постоянной, а увеличивается точно так же, как увеличивается разность потенциалов между обкладками конденсатора, когда заряд обкладки постоянен, а расстояние между обкладками увеличивается. Плотность зарядов на поверхностях существенно не изменяется. После потери электронного контакта через приповерхностное электронное облако на участках поверхности сохраняются электрические заряды. *В результате полного разведения поверхностей диэлектриков они оказываются носителями разноименных, равных по абсолютному значению зарядов.* Этот процесс называется **электризацией.**

Для достижения более тесного сближения поверхностей диэлектриков и образования контактной разности потенциалов тела обычно трут одно о другое и говорят об

● **Расстояние между энергетическими уровнями внутри каждой из разрешенных зон чрезвычайно мало по сравнению с шириной запрещенных зон. В диэлектриках энергия Ферми не соответствует энергии какого-либо реального электрона в диэлектрике.**
Термоэлектронная работа выхода равна работе перемещения электрона с уровня Ферми за пределы твердого тела.

○ Каково соотношение между энергетическими уровнями изолированного атома и энергетическими зонами твердого тела? За счет каких факторов образуются энергетические зоны?
Какова наглядная интерпретация энергии Ферми в металлах?
Почему эта интерпретация не подходит для диэлектриков?
Как определить знаки зарядов соприкасающихся тел?
Почему нельзя произвести электризацию металлов соприкосновением?

электризации трением. Однако трение при этом никакого отношения к электризации не имеет. Более правильно было бы говорить об электризации посредством контакта тел. Тщательно эта установилась фраза, была выражена Беккарией впервые.

§ 3. Элементарный заряд и его инвариантность

Описываются эксперименты, доказывающие существование элементарного электрического заряда и отсутствие зарядов, дробных по отношению к элементарному. Обсуждаются экспериментальные свидетельства одинаковости абсолютных значений положительных и отрицательных элементарных зарядов и инвариантности заряда.

Опыты Милликена. Мысль о дискретности электрического заряда была в ясной форме высказана уже Б. Франклином в 1752 г., однако она носила умозрительный характер. Как экспериментальный результат дискретность зарядов в принципе следует из открытых в 1834 г. М. Фарадеем (1791–1867) законов электролиза. Однако такой вывод из законов электролиза был сделан лишь в 1881 г. Г. Л. Гельмгольцем (1821–1894) и Д. Стонеем (1826–1911). Вскоре после этого в 1895 г. Г. Лоренц (1853–1928) разработал теорию электромагнетизма, основывающуюся на представлении о реально существующих элементарных зарядах (электронах). Числовое значение элементарного заряда было теоретически вычислено на основании законов электролиза, поскольку значение постоянной Авогадро было известно. Прямое экспериментальное измерение элементарного заряда было выполнено Р. Э. Милликеном (1868–1953) в 1909 г.

Схема опытов Милликена изображена на рис. 7. Маленькие шарообразные частицы движутся в вязкой жидкости при наличии однородного электрического поля E. На частицу действуют подъемная сила, направленная против силы тяжести (плотность частицы больше плотности жидкости), и сила вязкого трения $f_{тр}$, направленная против скорости.

Сила вязкого трения в соответствии с формулой Стокса пропорциональна скорости. При постоянной скорости частицы сумма действующих на нее сил равна нулю.

Все силы, за исключением действующей на частицу со стороны электрического поля, могут быть измерены экспериментально при движении частицы в среде без электрического поля. Изучив затем движение частицы в электрическом поле, найдем силу qE. Это позволит вычислить заряд q частицы, поскольку напряженность E поля известна.

Можно также изменять напряженность электрического поля и добиться, чтобы частица находилась в покое. В этом случае сила

тяжести mg уравновешивается силой qE. Зная E, можно определить заряд q.

Заряд частицы с течением времени может измениться, что проявляется на движении частицы. Определив заряды q_1 и q_2 частицы в различные промежутки времени, можно найти изменение заряда

$$\Delta q = q_2 - q_1. \tag{3.1}$$

Проведя большое число измерений зарядов, Милликен нашел, что Δq является всегда целым, кратным одной и той же величине $|e|$:

$$\Delta q = n|e|, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.2}$$

$$|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}. \tag{3.2a}$$

Резонансный метод измерения заряда. В дальнейшем методы прямого измерения элементарного заряда были усовершенствованы. *В настоящее время точность измерений такова, что позволяет обнаружить десятые доли элементарного заряда.* Наиболее эффективным является резонансный метод, схема которого изображена на рис. 8. Шарик достаточно малой массы m укреплен на очень тонком упругом стержне. Под влиянием сил упругости, возникающих при изгибе стерженька, шарик колеблется около положения равновесия с собственной частотой ω_0, которая может быть измерена экспериментально. Если на шарике есть некоторый заряд q, то под действием переменного электрического поля шарик осуществляет вынужденные колебания, амплитуды которых зависят от соотношения между частотами ω и ω_0. Максимальная амплитуда колебаний достигается в резонансе ($\omega \approx \omega_0$). Амплитуда колебаний шарика в резонансе равна

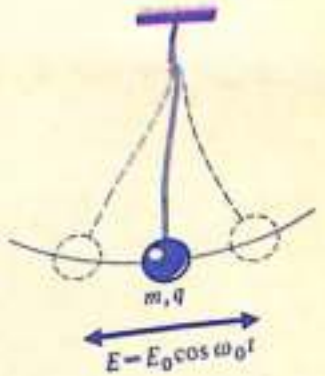
$$A_{рез} = qE_0Q/(m\omega_0^2), \tag{3.3}$$

где Q – добротность системы, E_0 – амплитуда напряженности электрического поля. Оценим возможности метода. Предположим, что $m = 1$ мг $= 10^{-6}$ кг; $E_0 \approx 10^5$ В/м;



7

Схема опытов Милликена



8

Схема резонансного метода измерения элементарного заряда

● **Поиски кварков позволили с большой точностью доказать отсутствие в природе дробных зарядов. Отсутствие кварков в свободном состоянии не доказывает их несуществование в связанном состоянии внутри элементарных частиц.**

○ В чем состоит принцип резонансного метода измерения элементарного заряда? Какова современная точность этого метода? Приведите числовые оценки.

электризации трением. Однако трение при этом никакого отношения к электризации не имеет. Более правильно было бы сказать об электризации посредством контакта тел. Терминология установилась раньше, чем была выяснена физическая природа явления.

§ 3. Элементарный заряд и его инвариантность

Описываются эксперименты, доказывающие существование элементарного электрического заряда и отсутствие зарядов, дробных относительно элементарного. Обсуждаются экспериментальные свидетельства одинаковости абсолютных значений положительных и отрицательных элементарных зарядов и инвариантности заряда.

Опыты Милликена. Мысль о дискретности электрического заряда была в ясной форме высказана уже Б. Франклином в 1752 г., однако она носила умозрительный характер. Как экспериментальный результат дискретность зарядов в принципе следует из открытых в 1834 г. М. Фарадеем (1791–1867) законов электролиза. Однако такой вывод из законов электролиза был сделан лишь в 1881 г. Г. Л. Гельмгольцем (1821–1894) и Д. Стонеем (1826–1911). Вскоре после этого в 1895 г. Г. Лоренц (1853–1928) разработал теорию электромагнетизма, основывающуюся на представлении о реально существующих элементарных зарядах (электронах). Числовое значение элементарного заряда было теоретически вычислено на основании законов электролиза, поскольку значение постоянной Авогадро было известно. Прямое экспериментальное измерение элементарного заряда было выполнено Р. Э. Милликеном (1868–1953) в 1909 г.

Схема опытов Милликена изображена на рис. 7. Маленькие шарообразные частицы движутся в вязкой жидкости при наличии однородного электрического поля E. На частицу действуют подъемная сила, направленная против силы тяжести (плотность частицы больше плотности жидкости), и сила вязкого трения $f_{тр}$, направленная против скорости.

Сила вязкого трения в соответствии с формулой Стокса пропорциональна скорости. При постоянной скорости частицы сумма действующих на нее сил равна нулю.

Все силы, за исключением действующей на частицу со стороны электрического поля, могут быть измерены экспериментально при движении частицы в электрическом поле. Изучив затем движение частицы в среде без электрического поля, найдем силу qE. Это позволит вычислить заряд q частицы, поскольку напряженность E поля известна.

Можно также изменять напряженность электрического поля и добиться, чтобы частица находилась в покое. В этом случае сила

трения также отсутствует, а остальные силы известны. Поэтому, зная E, можно определить q.

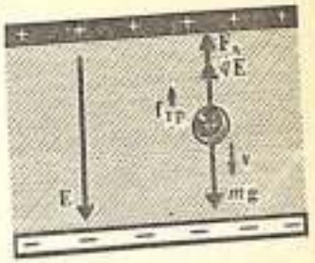
Заряд частицы с течением времени изменяется, что отражается на движении частицы. Определив заряды q_1 и q_2 частицы в различные промежутки времени, можно найти изменение заряда

$$\Delta q = q_2 - q_1. \tag{3.1}$$

Проведя большое число измерений зарядов, Милликен нашел, что Δq является всегда целым, кратным одной и той же величине $|e|$:

$$\Delta q = n|e|,\ n = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{3.2}$$

$$|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}. \tag{3.2а}$$



7
Схема опытов Милликена

Резонансный метод измерения заряда. В дальнейшем методы прямого измерения элементарного заряда были усовершенствованы. *В настоящее время точность измерений такова, что позволяет обнаружить десятые доли элементарного заряда.* Наиболее эффективным является резонансный метод, схема которого изображена на рис. 8. Шарик достаточно малой массы m укреплен на очень тонком упругом стержне. Под влиянием сил упругости, возникающих при изгибе стерженька, шарик колеблется около положения равновесия с собственной частотой ω_0, которая может быть измерена экспериментально. Если на шарике есть некоторый заряд q, то под действием переменного электрического поля шарик осуществляет вынужденные колебания, амплитуды которых зависят от соотношения между частотами ω и ω_0. Максимальная амплитуда колебаний достигается в резонансе ($\omega \approx \omega_0$). Амплитуда колебаний шарика в резонансе равна

$$A_{рез} = qE_0Q/(m\omega_0^2), \tag{3.3}$$

где Q – добротность системы, E_0 – амплитуда напряженности электрического поля. Оценим возможности метода. Предположим, что $m = 1$ мг $= 10^{-6}$ кг; $E_0 \approx 10^5$ В/м;



8
Схема резонансного метода измерения элементарного заряда

● **Поиски кварков позволили с большой точностью доказать отсутствие в природе дробных зарядов. Отсутствие кварков в свободном состоянии не доказывает их несуществование в связанном состоянии внутри элементарных частиц.**

○ В чем состоит принцип резонансного метода измерения элементарного заряда? Какова современная точность этого метода? Приведите числовые оценки.

$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $\omega_0 = 10^{-1}$ с$^{-1}$; $Q \approx 100$, тогда

$$A_{рез} \approx \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{5} \cdot 10^{2}}{10^{-6} \cdot 10^{-2}} \text{ м} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 160 \text{ мкм}. \quad (3.4)$$

Величина 160 мкм является очень большой и легко измерить ее небольшую часть. Следовательно, таким способом можно измерить заряды много меньшие, чем $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Этот метод доведен до такого совершенства, что позволяет в принципе обнаружить и измерить заряд в десятые доли элементарного, если бы он существовал.

При изменении заряда шарика на Δq амплитуда резонансных колебаний изменяется скачком:

$$\Delta A_{рез} = \Delta q E_0 Q/(m\omega_0^2). \quad (3.5)$$

Измерения позволили с большой точностью установить, что заряд шарика изменяется всегда на целое число элементарных зарядов и что не существует зарядов, меньших элементарного.

Отсутствие дробного заряда. Были предприняты интенсивные поиски дробных зарядов. Это было инициировано предсказанием существования кварков. Предполагается, что кварки являются частицами, из которых построено большинство тяжелых элементарных частиц (протоны и др.). Было предсказано, что электрический заряд кварков должен составлять $^1/_3$ и $^2/_3$ элементарного заряда (с соответствующими знаками). Поиски кварков проводились многими учеными различными методами, в том числе и резонансным. Все они дали отрицательный результат. Таким образом, *в настоящее время экспериментально с большой точностью установлено, что дробных зарядов в свободном состоянии не существует.*

Мы выделяем слова «в свободном состоянии», поскольку эксперименты были направлены именно на поиск свободных кварков. *Однако отсюда не следует, что и в связанном состоянии внутри элементарных частиц кварки отсутствуют.* Однако прямая экспериментальная проверка этого утверждения неизвестна.

Равенство положительных и отрицательных элементарных зарядов. В описанных выше опытах измерялся как отрицательный элементарный, так и положительный заряд. Результаты этих опытов доказали их равенство с той же точностью, с какой измеряют значение зарядов. Эта точность не велика. Например, можно сказать, что по абсолютному значению положительный и отрицательный элементарные заряды отличаются не больше, чем на одну десятую часть своей величины, т. е.

$$\frac{||e_+| - |e_-||}{|e_\pm|} \leqslant \frac{1}{10}. \quad (3.6)$$

Эта точность совершенно неудовлетворительна, потому что теория предполагает полное равенство абсолютных значений отрицательных и положительных элементарных зарядов.

Неизмеримо более точную оценку можно получить, не измеряя непосредственно значение элементарного заряда. Как известно, в атомах имеется одинаковое число протонов и электронов. Тела также содержат одинаковое число протонов и электронов. Поэтому оценка равенства зарядов протона и электрона может быть проведена по результатам измерения нейтральности тел. А это можно сделать чрезвычайно точно, поскольку даже очень небольшое ее нарушение приводит к возникновению громадных сил электрического взаимодействия между телами, которое легко заметить. Пусть, например, два железных шарика массой по 1 г, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга, не нейтральны из-за того, что заряды протона отличаются от заряда электрона на одну миллионную долю заряда. Оценим, какая сила отталкивания возникнет между шариками. В 1 г $^{26}_{56}$Fe имеется $6 \cdot 10^{23} \cdot 26/56$ зарядов каждого знака. Следовательно, при нарушении нейтральности всего на 10^{-6} на каждом шарике появится заряд

$$q = [1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 26/56] \text{ Кл} = 4{,}46 \cdot 10^{-2} \text{ Кл}. \quad (3.7)$$

Сила отталкивания между шариками равна

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = (4{,}46 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ Н} = 1{,}8 \cdot 10^7 \text{ Н} = 18 \text{ МН}. \quad (3.8)$$

Это означает, что между шариками возникает сила отталкивания, равная силе, с которой тяжеловесный железнодорожный состав массой почти 2 тыс. т давит на рельсы. И это всего-навсего при отличии зарядов протона и электрона на 10^{-6} часть заряда в 2 г железа. Ясно, что можно легко измерить силы между железными шариками, в громадное число раз меньшие (3.8). А если в эксперименте таких сил не обнаруживается, то это означает соответствующее увеличение точности, с которой заряд электрона по абсолютному значению равен заряду протона. *В настоящее время экспериментально установлено, что отрицательный элементарный заряд электрона равен по абсолютному значению положительному заряду протона с относительной точностью 10^{-21}*, т. е.

$$\boxed{\frac{||e_+| - |e_-||}{|e_\pm|} \leqslant 10^{-21}.} \quad (3.9)$$

Изложенное доказательство равенства абсолютных значений положительного и отрицательного элементарных зарядов может показаться недостаточно строгим. Можно представить себе тело, состоящее из атомов или молекул, в которых элементарные заряды по абсолютному значению не равны друг другу, хотя их числа в каждом атоме или молекуле одинаковы. В этом случае атомы или молекулы должны обладать зарядом, однако тело в целом может оставаться нейтральным, если в нем наряду с этими атомами и молекулами находятся в нужном числе свободные электроны или положительные ионы (в зависимости от знака заряда атомов или молекул). Однако при

таком допущении возникают осложнения, с которыми трудно примириться. Например, приходится отказаться от представления об однородной структуре тел и принять зависимость их структуры от размеров и т. д. Тем не менее желательно иметь более прямое и непосредственное доказательство равенства абсолютных значений положительных и отрицательных элементарных зарядов в атомах. Такое доказательство было получено.

Нейтральность отдельных атомов проверялась прямыми экспериментами: исследовалось отклонение пучка нейтральных атомов в электростатических полях. По отклонению можно судить о заряде атома и сделать заключение о равенстве зарядов электронов и протонов в атоме. Исследования с пучками цезия ($Z = 55$) и калия ($Z = 19$) доказали, что абсолютные значения зарядов электрона и протона равны с относительной точностью $3{,}5 \cdot 10^{-19}$.

Инвариантность заряда. Независимость числового значения элементарного заряда от скорости также доказывается фактом нейтральности атомов. Из-за различия масс электронов и протонов можно заключить, что электроны в атомах движутся значительно быстрее протонов. *Если бы заряд зависел от скорости,* нейтральность атомов не могла бы соблюдаться. Например, электроны в атоме гелия движутся примерно в два раза быстрее, чем в молекуле водорода, а нейтральность атома гелия и молекулы водорода доказаны с большой точностью. Можно заключить, что с той же точностью заряд не зависит от скорости вплоть до скоростей электронов в атоме гелия. В атоме гелия скорость электронов равна примерно 0,02 c. В более тяжелых атомах, нейтральность которых доказана, электроны движутся во внутренних оболочках со скоростями, равными примерно половине скорости света. Тем самым экспериментально доказано, что элементарный заряд инвариантен вплоть до 0,5 c. Нет оснований предполагать, что он не инвариантен при более высоких скоростях. Поэтому *инвариантность электрического заряда принимается в качестве одного из экспериментальных обоснований теории электричества.*

§ 4. Электрический ток

Обсуждаются основные понятия и величины, характеризующие распределение и движение электрических зарядов.

Движение зарядов. Движение электронов и протонов обусловливает движение их зарядов. Поэтому можно говорить просто о движении зарядов, не оговаривая каждый раз их носителя. Это не только удобно, но и придает общность рассуждениям, поскольку многие явления зависят только от зарядов, их движения и т. д. и не зависят от свойств носителей этих зарядов, например массы носителей зарядов. Если существен не только заряд, но и свойства носителя заряда, например

масса носителя заряда, то необходимо принимать во внимание не только заряд, но и другие характеристики носителя.

В теории электричества элементарный заряд считается точечным, в том числе и заряд протона. Положение заряда, его скорость и ускорение имеют такой же смысл, как и в случае материальных точек.

Непрерывное распределение зарядов. Элементарный заряд весьма мал. Поэтому *в большинстве макроскопических явлений, изучаемых в электричестве, участвует громадное число электрических зарядов и их дискретность никакого проявления не имеет.* Например, на каждой из обкладок плоского конденсатора емкостью 10 мкФ при разности потенциалов 100 В содержится около $7 \cdot 10^{15}$ элементарных зарядов. При токе 1 А через поперечное сечение проводника проходит примерно $6 \cdot 10^{18}$ элементарных зарядов в секунду. Поэтому *в большинстве случаев можно считать, что заряд как бы непрерывно распределен в пространстве, и не принимать во внимание его дискретность.*

Объемная плотность зарядов. Объемной плотностью непрерывного распределения зарядов называется отношение заряда к объему:

$$\rho = \frac{1}{\Delta V_\phi} \sum_{\Delta V_\phi} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta V_\phi} \qquad (4.1)$$

где e_i – элементарные заряды в объеме ΔV_ϕ (с учетом их знака); ΔQ – полный заряд, заключенный в ΔV_ϕ. Объем ΔV_ϕ является малым, но не бесконечно малым в математическом смысле. Мы говорим о ΔV_ϕ как о бесконечно малом объеме в физическом смысле, понимая под этим, что он очень мал и, следовательно, его положение в пространстве достаточно точно характеризуется какой-то координатой точки, расположенной внутри него, т. е. у ρ в левой части (4.1) можно взять в качестве аргумента координаты (x, y, z) любой точки внутри ΔV_ϕ и написать $\rho(x, y, z)$. Однако в объеме ΔV_ϕ должно находиться достаточно много элементарных зарядов, так что небольшое изменение его не приводит к существенному изменению плотности ρ, вычисляемой по формуле (4.1). Следовательно, ΔV_ϕ зависит от конкретных условий. *В одних случаях малый объем ΔV может удовлетворять необходимым условиям и считаться бесконечно малым физическим объемом, а в других случаях его нельзя считать таковым.* Наконец, *возможны условия, когда вообще не существует никакого объема ΔV, который может быть назван бесконечно малым физическим объемом. В этом случае невозможно пользоваться представлением о непрерывном распределении заряда и нельзя определить ρ по формуле (4.1) как объемную плотность.* Однако в большинстве случаев, которые рассматриваются в классической теории электричества, представление о непрерывном распределении заряда справедливо.

При определении объемной плотности ρ по формуле (4.1) ее можно рассматривать как обычную математическую функцию, а заряд непре-

рывно размазанным по объему. Тогда из (4.1) следует, что полный заряд, заключенный в объеме V, равен

$$Q = \int_V \rho \, dV, \tag{4.2}$$

где dV – дифференциал объема.

Концентрация зарядов. *Концентрацией зарядов* определенного знака называется отношение числа зарядов к занимаемому ими объему:

$$n_\pm = \frac{\Delta n_\pm}{\Delta V_\phi}, \tag{4.3}$$

где $\Delta n_\pm$ – число зарядов соответствующего знака в объеме ΔV_ϕ. Тогда [см. (4.1)]

$$\rho = \frac{1}{\Delta V_\phi}\sum_{\Delta V_\phi} e_i^{(+)} + \frac{1}{\Delta V_\phi}\sum_{\Delta V_\phi} e_i^{(-)} = \frac{e^{(+)}\Delta n_{(+)}}{\Delta V_\phi} + \frac{e^{(-)}\Delta n^{(-)}}{\Delta V_\phi} =$$
$$= e^{(+)}n_{(+)} + e^{(-)}n_{(-)} = \rho^{(+)} + \rho^{(-)}, \tag{4.4}$$

где $e^{(+)}$ – элементарный точечный заряд с соответствующим знаком, $\rho^{(\pm)} = e^{(\pm)}n_{(\pm)}$ – объемная плотность зарядов. Физический бесконечно малый объем должен содержать достаточно много зарядов, чтобы определение концентрации имело смысл.

Поверхностная плотность зарядов. Иногда заряд распределяется в очень тонком слое вблизи некоторой поверхности. *Если нас интересует действие заряда на расстояниях, много больших, чем толщина слоя, а не процессы в этом слое, то можно предположить, что весь заряд сосредоточен на поверхности, или, другими словами, этот очень тонкий слой можно считать поверхностью.* Поверхностная плотность заряда определяется формулой

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\Delta S_\phi}\sum_{\Delta S_\phi} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta S_\phi},} \tag{4.5}$$

где ΔS_ϕ – бесконечно малая площадь в физическом смысле, ΔQ – заряд, приходящийся на площадь ΔS_ϕ поверхности в тонком слое около нее.

У σ в качестве аргумента можно поставить координаты точек поверхности и рассматривать ее как функцию этих координат. Обоснования и смысл этого точно такие же, как и для объемной плотности ρ в (4.1). Поэтому полный заряд на поверхности S равен

$$Q = \int_S \sigma \, dS, \tag{4.6}$$

где dS – дифференциал площади поверхности.

Плотность тока. Заряды, находящиеся в объеме ΔV_ϕ, движутся с различными скоростями, отличающимися не только по модулю, но и по направлению. *Движение заряда приводит к переносу заряда в направлении скорости.* Поэтому в результате различных движений зарядов, заключенных в объеме ΔV_ϕ, образуется некоторый средний перенос заряда, заключенного в этом объеме. Интенсивность этого переноса характеризуется плотностью тока, определяемой формулой

$$\boxed{\mathbf{j} = \frac{1}{\Delta V_\phi}\sum_{\Delta V_\phi} e_i \mathbf{v}_i,} \tag{4.7}$$

где $\mathbf{v}_i$ – скорость заряда e_i.

Разбив сумму в (4.7) на суммы по положительным и отрицательным зарядам, получим

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\Delta V_\phi}\sum_i e_i^{(+)}\mathbf{v}_i^{(+)} + \frac{1}{\Delta V_\phi}\sum_i e_i^{(-)}\mathbf{v}_i^{(-)} = \frac{e^{(+)}}{\Delta V_\phi}\sum_i \mathbf{v}_i^{(+)} + \frac{e^{(-)}}{\Delta V_\phi}\sum_i \mathbf{v}_i^{(-)}. \tag{4.8}$$

Формула (4.8) будет более наглядна, если входящие в нее величины выразить через средние скорости и концентрации зарядов:

$$\sum_i \mathbf{v}_i^{(+)} = \Delta n^{(+)}\frac{1}{\Delta n^{(+)}}\sum_i \mathbf{v}_i^{(+)} = \Delta n^{(+)}\langle \mathbf{v}^{(+)}\rangle,$$

где

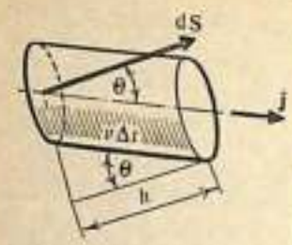
$$\langle \mathbf{v}^{(+)}\rangle = \frac{1}{\Delta n^{(+)}}\sum_i \mathbf{v}_i^{(+)},$$

поскольку $\Delta n^{(+)}$ – число зарядов, сумма скоростей которых стоит под знаком $\sum$. Аналогично преобразуется сумма по скоростям отрицательных зарядов. С учетом этого формула (4.8) приобретает вид:

$$\mathbf{j} = e^{(+)}\frac{\Delta n^{(+)}}{\Delta V_\phi}\langle \mathbf{v}^{(+)}\rangle + e^{(-)}\frac{\Delta n^{(-)}}{\Delta V_\phi}\langle \mathbf{v}^{(-)}\rangle =$$
$$= e^{(+)}n^{(+)}\langle \mathbf{v}^{(+)}\rangle + e^{(-)}n^{(-)}\langle \mathbf{v}^{(-)}\rangle = \rho^{(+)}\langle \mathbf{v}^{(+)}\rangle + \rho^{(-)}\langle \mathbf{v}^{(-)}\rangle, \tag{4.9}$$

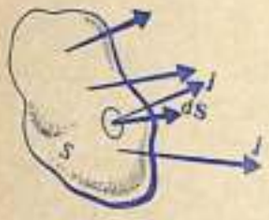
где приняты во внимание соотношения (4.3) и (4.4). Таким образом, отрицательные и положительные заряды создают каждый свою плотность тока:

$$\mathbf{j}^{(+)} = \rho^{(+)}\langle \mathbf{v}^{(+)}\rangle, \quad \mathbf{j}^{(-)} = \rho^{(-)}\langle \mathbf{v}^{(-)}\rangle,$$
$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(+)} + \mathbf{j}^{(-)}. \tag{4.10}$$



9

К вычислению силы электрического тока через элемент поверхности



10

Электрический ток через поверхность

● **В большинстве макроскопических явлений, изучаемых в электричестве, участвует громадное число электрических зарядов и их дискретность никак не проявляется. Какой-то конкретный малый объем в одних случаях может считаться бесконечно малым физическим объемом, а в других — его нельзя считать таковым. Возможны условия, когда вообще не существует никакого объема, который может быть принят за бесконечно малый физический объем. Тогда нельзя перейти к картине непрерывного распределения зарядов в объеме.**

Направление плотности тока положительных зарядов совпадает с направлением их средней скорости, а отрицательных зарядов противоположно ей.

Формулы (4.10) для упрощения написания обычно представляют в виде

$$\boxed{\mathbf{j} = \rho \mathbf{v},} \tag{4.11}$$

где ρ и $\mathbf{v}$ – объемная плотность и скорость зарядов соответствующего знака. Если ток создается зарядами обоих знаков, то в правой части имеется в виду сумма двух членов, относящихся к положительным и отрицательным зарядам. Однако в большинстве случаев, рассматриваемых в теории электричества, ток обусловлен лишь движением отрицательных зарядов электронов и поэтому правая часть (4.11) содержит лишь произведение отрицательной объемной плотности заряда электронов на их среднюю скорость. *Перенос отрицательного заряда против скорости эквивалентен переносу положительного заряда в направлении скорости.* При различных рассуждениях удобнее представлять себе, что ток обусловливается движением положительных зарядов, поскольку их пространственное перемещение совпадает с направлением плотности тока.

Сила тока через поверхность. Бесконечно малый элемент поверхности характеризуется вектором $d\mathbf{S}$, модуль которого равен площади элемента поверхности и направлен по нормали к поверхности, принятой за положительную.

Вычислим заряд, который в течение времени dt пересекает элемент поверхности $d\mathbf{S}$ (рис. 9). Перемещение заряда за это время равно $\mathbf{v}\,dt$. Следовательно, заряд, пересекающий $d\mathbf{S}$, равен объемной плотности заряда, умноженной на объем косого цилиндра (рис. 9). Площадь основания и высота косого цилиндра равны dS и $h = v\,\Delta t \cos\theta$. Поэтому заряд, пересекший dS, равен

$$dq = \rho v\,dt\,dS\cos\vartheta = dt\,j\,dS\cos\vartheta = dt\,\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}, \tag{4.12}$$

где $\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = j\,dS\cos(\mathbf{j}, \widehat{d\mathbf{S}})$. **Силой тока** через поверхность называется отношение заряда, пересекающего поверхность, ко времени. Поэтому бесконечно малая сила тока dI, протекающего через элемент поверхности $d\mathbf{S}$ [см. (4.12)], равна

$$dI = dQ/dt = \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}. \tag{4.13}$$

Сила тока, протекающего через конечную поверхность S (рис. 10), равна интегралу по этой поверхности от элементов силы тока (4.13):

$$\boxed{I = \int\limits_S dI = \int\limits_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}.} \tag{4.14}$$

Если постоянный электрический ток течет по проводнику, то формула (4.14) сводится к определению силы тока как количества электричества, протекающего через поперечное сечение проводника в секунду.

§ 5. Закон сохранения заряда

Обсуждаются два аспекта понятия сохранения заряда. Даются интегральная и дифференциальная формулировки закона сохранения заряда.

Два аспекта понятия сохранения заряда. В понятие «сохранение заряда» включаются две группы совершенно различных фактов: 1) *электрон и протон являются материальными частицами с бесконечным временем жизни, а их элементарные электрические заряды инвариантны и не зависят от скорости.* Следовательно, их заряды существуют без изменения столь долго, сколь долго существуют протоны и электроны, независимо от того, как они движутся, т. е. при любых движениях заряд сохраняется. *В этом аспекте закон сохранения заряда является просто следствием неуничтожимости носителей заряда как физических объектов и инвариантности заряда;* 2) *кроме протонов и электронов существует большое число других заряженных элементарных частиц. Все они порождаются, порождают другие частицы и уничтожаются в различных процессах взаимопревращений.* Весь громадный экспериментальный материал свидетельствует, что *каков бы ни был процесс взаимопревращения частиц, суммарный заряд частиц до взаимопревращения равен суммарному заряду частиц после взаимопревращения.* Например, при β-распаде до испускания электрона ядро имеет некоторый положительный заряд $Ze^{(+)}$. После испускания электрона положительный заряд ядра увеличивается на один элементарный положительный заряд и становится равным $(Z+1)e^{(+)}$. Однако в сумме с отрицательным зарядом испущенного электрона система «ядро + + электрон» имеет прежний заряд $(Z+1)e^{(+)} - |e^{(-)}| = Ze^{(+)}$. В ка-

честве другого примера можно привести порождение γ-квантом пары электрон – позитрон. Исходная частица – γ-квант – нейтральна. Она превращается в пару частиц, суммарный заряд которых равен нулю, что доказано с большой точностью при измерении положительного заряда позитрона. Исследовано громадное число взаимопревращений элементарных частиц и во всех процессах соблюдается равенство суммарного заряда до процесса и после процесса, или, иначе говоря, соблюдается закон сохранения заряда. Благодаря этому заряд приобретает в некотором смысле существование, независимое от носителей, и закон его сохранения может быть сформулирован следующим образом: *заряд сохраняется при всех процессах и движениях, связанных с носителями зарядов.*

Однако, несмотря на относительную самостоятельность, заряд не может существовать независимо от носителей заряда или вне пространства и времени. Это означает, что *заряд не является самостоятельной сущностью, независимой от материи, он выражает одно из свойств материи.* Выяснение природы этой связи – одна из труднейших проблем современной физики. Еще не ясно, почему существует только один элементарный заряд и почему он равен $|e|$, а не какому-то другому значению.

Интегральная формулировка закона сохранения заряда. Исходя из закона сохранения заряда как экспериментального факта, выразим его в виде утверждения о том, что изменение заряда в некотором объеме V может произойти только в результате втекания или вытекания заряда через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = -\oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}. \qquad (5.1)$$

Левая часть (5.1) определяет скорость изменения заряда в объеме, а правая – силу тока через поверхность, ограничивающую объем. *Знак минус учитывает, что если положительный заряд внутри объема уменьшается, то плотность тока направлена из объема V.* Напомним, что у замкнутых поверхностей положительной нормалью считается внешняя нормаль. Следовательно, вектор $d\mathbf{S}$ в (5.1) направлен по внешней нормали к поверхности (рис. 11).

Дивергенция. Для описания процессов, связанных с порождением, уничтожением и сохранением физических величин, важную роль играет математическое понятие дивергенции.

Пусть имеется вектор $\mathbf{A}(x, y, z)$, определенный во всех точках пространства. Рассмотрим некоторую поверхность S (рис. 12). Интеграл

$$\Phi_A = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \qquad (5.2)$$

называется **потоком вектора A через поверхность** S. Причина для такого названия состоит в следующем. Предположим, что имеется костер, плотность дыма от которого равна ρ, а скорость дыма в различных точках пространства есть $\mathbf{v}$. Выберем в качестве вектора $\mathbf{A}$ величину $\rho\mathbf{v}$. Тогда интеграл (5.2) с учетом рис. 9 определяет массу дыма, проходящего сквозь поверхность S в секунду. В применении к электрическому заряду аналогичное представление уже использовалось в равенстве (4.14). По аналогии с (5.1) заключаем, что поток вектора $\mathbf{A}$ сквозь замкнутую поверхность характеризует интенсивность порождения или уничтожения $\mathbf{A}$ внутри объема, ограниченного поверхностью. Таким образом, поток вектора $\rho\mathbf{v}$ сквозь замкнутую поверхность характеризует интенсивность порождения дыма внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Такую же интерпретацию имеет равенство (5.1) в применении к электрическим зарядам. Можно сказать, что интеграл (5.2) характеризует суммарную мощность источников вектора $\mathbf{A}$ внутри объема.

Дивергенция характеризует мощность источников и определяется формулой

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}, \qquad (5.3)$$

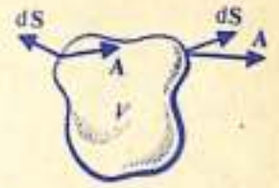
где ΔS – бесконечно малая замкнутая поверхность, ограничивающая бесконечно малый объем ΔV.

Найдем выражение для $\operatorname{div}\mathbf{A}$ в декартовых прямоугольных координатах. Для этого вычислим поток вектора $\mathbf{A}$ сквозь поверхность куба (рис. 13) со сторонами Δx, Δy, Δz, центр которого имеет координаты (x, y, z). Координаты середин граней равны $(x + \Delta x/2, y, z)$, $(x - \Delta x/2, y, z)$, $(x, y + \Delta y/2, z)$, $(x, y - \Delta y/2, z)$, $(x, y, z + \Delta z/2)$, $(x, y, z - \Delta z/2)$. Подынтегральное выражение (5.3) в координатах имеет вид

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = A_x\, dS_x + A_y\, dS_y + A_z\, dS_z, \qquad (5.4)$$

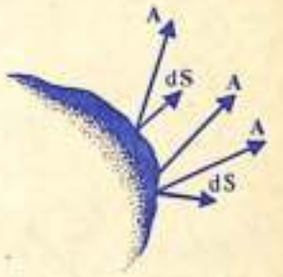
где

$$dS_x = \pm dy\, dz,\ dS_y = \pm dz\, dx,\ dS_z = \pm dx\, dy. \qquad (5.5)$$



11

Положительной нормалью у замкнутых поверхностей является внешняя нормаль



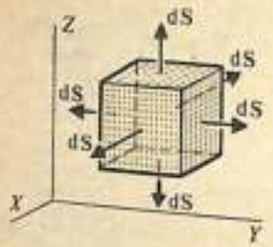
12

Поток вектора A сквозь поверхность

○ Каким требованиям должен удовлетворять бесконечно малый физический объем? При каких условиях можно пользоваться понятием непрерывного распределения зарядов? Всегда ли можно определить объемную плотность заряда? Приведите примеры.

При каких условиях можно пользоваться представлением о поверхностных зарядах?

В каком соотношении находится направление вектора плотности тока и направление вектора скорости заряда?



13

Поток вектора сквозь поверхность куба сводится к сумме потоков через его грани

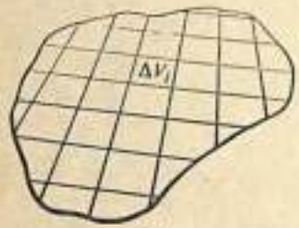
причем знак этих величин определяется направлением внешней нормали к грани относительно положительного направления соответствующей оси. Например, dS_y по правой грани $(x,\ y+\Delta y,\ z)$ имеет положительное значение, а по левой грани – отрицательное. Интеграл по поверхности куба сводится к сумме интегралов по ее граням.

Вычислим, например, интеграл по граням, перпендикулярным оси Y. На этих гранях $dS_x = 0$, $dS_y = \pm dz\,dx$, $dS_z = 0$ и, следовательно, сумма в правой части (5.4) сводится к одному слагаемому $A_y\,dS_y$. Обозначив площади поверхностей граней ΔS_{y1} (левая) и ΔS_{y2} (правая), запишем:

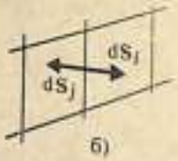
$$I_y = \oint_{\Delta S_{y1}+\Delta S_{y2}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S_{y1}} A_y\,dS_y + \int_{\Delta S_{y2}} A_y\,dS_y =$$

$$= \int_{\Delta S_{y1}} A_y(x, y-\Delta y/2, z)\,dx\,dz +$$

$$+ \int_{\Delta S_{y2}} A_y(x, y+\Delta y/2, z)\,dx\,dz. \qquad (5.6)$$



а)



б)

14

К выводу формулы Гаусса – Остроградского

Знак минус у первого интеграла в правой части (5.6) учитывает, что внешняя нормаль к левой грани ΔS_{y1} направлена в сторону отрицательных значений y. Для дальнейших вычислений представим A_y в виде ряда Тэйлора по Δy:

$$A_y(x, y+\Delta y/2, z) = A(x, y, z) +$$
$$+ (\Delta y/2)\,\partial A_y(x, y, z)/\partial y + O[(\Delta y)^2],$$
$$A_y(x, y-\Delta y/2, z) = A(x, y, z) -$$
$$- (\Delta y/2)\,\partial A_y(x, y, z)/\partial y + O[(\Delta y)^2], \qquad (5.7)$$

где $O[(\Delta y)^2]$ – члены высшего порядка малости по Δy. Подставляя (5.7) в (5.6), находим

$$I_y = \Delta y \int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y}\,dx\,dz + O[(\Delta y)^2], \qquad (5.8)$$

где учтено, что площади поверхностей ΔS_{y2} и ΔS_{y2} равны и имеют одинаковые координаты по осям X, Z.

Интеграл в (5.8) можно вычислить, разложив подынтегральное выражение в ряд,

считая z и x переменными интегрирования, а отнюдь не координатами центра граней. Если под x и y понимать координаты центра граней, то переменные удобно заменить по формулам:

$$x \to x+\xi,\ z \to z+\eta,\ dx\,dz \to d\xi\,d\eta, \qquad (5.9)$$

$$\int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y}\,dx\,dz = \int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x+\xi, y, z+\eta)}{\partial y}\,d\xi\,d\eta, \qquad (5.10)$$

где x, z в правой части (5.10) – координаты центра граней, т. е. постоянны при вычислении (5.10). Выражение $\partial A_y/\partial y$ можно разложить в ряд по ξ, η:

$$\frac{\partial A_y(x+\xi, y, z+\eta)}{\partial y} = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \xi\,\frac{\partial^2 A_y(x, y, z)}{\partial x\,\partial y} +$$

$$+ \eta\,\frac{\partial^2 A_y(x, y, z)}{\partial z\,\partial y} + 0(\xi^2, \eta^2), \qquad (5.11)$$

где ξ и η при интегрировании изменяются от 0 до $\pm\Delta x/2$ и $\pm\Delta z/2$ и имеют, следовательно, тот же порядок малости, что и Δx и Δz. Подставим (5.11) в (5.10):

$$\int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x+\xi, y+z+\eta)}{\partial y}\,d\xi\,d\eta = \frac{\partial A_y}{\partial y}\int_{\Delta S_y} d\xi\,d\eta + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\,\partial y}\int_{\Delta S_y} \xi\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\,\partial y}\int_{\Delta S_y} \eta\,d\xi\,d\eta + \ldots = \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + 0[(\Delta x)^2, (\Delta z)^2]. \qquad (5.12)$$

Тогда для (5.8) получаем

$$I_y = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + 0[(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)^2]. \qquad (5.13)$$

Аналогично вычислим потоки через другие пары граней:

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + 0[(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)^2]. \qquad (5.14)$$

Подставляя (5.14) в (5.3) и учитывая, что объем куба равен $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, находим

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\left\{\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + 0[(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)^2]/(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)\right\} =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \qquad (5.15)$$

поскольку слагаемое, зависящее от $(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)$, при переходе к пределу обращается в нуль. Формула

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{5.16}$$

позволяет вычислить дивергенцию в декартовых координатах.

Формула Гаусса – Остроградского. Эта формула связывает *мощность источников с потоками порождаемых ими векторов* и играет важную роль в теории электричества. Разобьем объем V, ограниченный поверхностью S (рис. 14, *а*), на большое число малых объемов ΔV_i, поверхности которых ΔS_i.

Формулу (5.3) можно представить в виде

$$(\operatorname{div}\mathbf{A})_i\,\Delta V_i \approx \oint\limits_{\Delta S_i} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}, \tag{5.17}$$

где $(\operatorname{div}\mathbf{A})_i$ означает $\operatorname{div}\mathbf{A}$ в i-м объеме. В (5.17) поставлен знак приближенного равенства, поскольку ΔV_i хотя мал, но конечен. При неограниченном уменьшении ΔV_i соотношение (5.17) становится точным. Просуммируем обе части (5.17) по всем ячейкам объема V:

$$\sum_i (\operatorname{div}\mathbf{A})_i\,\Delta V_i \approx \sum_{\Delta S_i} \oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}. \tag{5.18}$$

Сумма в правой части может быть преобразована следующим образом. Соседние между собой ячейки имеют общую поверхность соприкосновения. Все внутренние ячейки находятся в соприкосновении всей своей поверхностью с соседними ячейками. Поэтому в сумму правой части (5.18) интеграл по каждой поверхности внутри объема V входит дважды как интеграл по соприкасающимся частям соседних ячеек (рис. 14, *б*; $d\mathbf{S}_i$ противоположно $d\mathbf{S}_j$). Поскольку направление нормалей в каждой паре этих интегралов противоположно, а вектор $\mathbf{A}$ имеет один и тот же модуль, эти интегралы равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку. Следовательно, в сумме они дают нуль, и соответственно в правой части (5.18) все интегралы по поверхности соприкосновения ячеек внутри объема V в сумме дают нуль и остается лишь сумма интегралов по тем частям ячеек на границе объема V, которая не соприкасается с другими ячейками. Сумма площадей этих внешних поверхностей ячеек, лежащих на границе объема V, составляет площадь поверхности S, ограничивающей объем V. Следовательно,

$$\sum_i \oint\limits_{\Delta S_i} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \oint\limits_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}, \tag{5.19}$$

причем это точное равенство, справедливое при любом разбиении объема V на ячейки ΔV_i.

Левая часть (5.18) при $\Delta V_i \to 0$ может быть выражена в виде интеграла:

$$\lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_{\Delta V_i} (\operatorname{div}\mathbf{A})_i\,\Delta V_i = \int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV. \tag{5.20}$$

Подставив (5.19) в (5.18) и перейдя к пределу, получим формулу

$$\int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV = \oint\limits_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}, \tag{5.21}$$

которая называется **формулой Гаусса – Остроградского.** *Она связывает интеграл по объему от дивергенции вектора с потоком этого вектора сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую объем.* В математике указываются условия применимости этой формулы, которые здесь не перечисляются, поскольку в большинстве физически реальных ситуаций они автоматически выполняются.

Дифференциальная формулировка закона сохранения заряда. В формуле (5.1) объем V и поверхность S не изменяются с течением времени. Следовательно, производную по времени в левой части (5.1) можно ввести под знак интеграла. С другой стороны, правую часть равенства можно по формуле Гаусса – Остроградского преобразовать в интеграл по объему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho\,dV = \int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV, \quad \oint\limits_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = \int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{j}\,dV. \tag{5.22}$$

Перенося все члены в (5.1) в левую часть и принимая во внимание (5.22), получаем

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}\right) dV = 0. \tag{5.23}$$

Это равенство справедливо для любого объема. Очевидно, что подынтегральное выражение тождественно равно нулю. Доказательство производят от противного. Если в некоторой точке подынтегральное выражение не равно нулю, то в качестве V можно взять маленький объем вблизи этой точки, в пределах которого подынтегральное выражение сохраняет знак. Интеграл по этой области не равен нулю, что противоречит исходному равенству (5.23). Поэтому подынтегральное выражение равно нулю во всех точках. Тогда

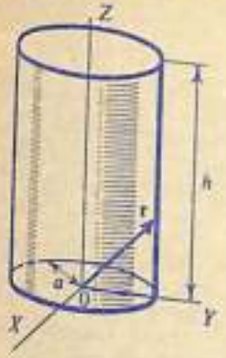
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{5.24}$$

Равенство (5.24) является выражением закона сохранения заряда в дифференциальной форме. Оно называется также **уравнением непрерывности.**

Пример 5.1. *Вычислить поток радиус-вектора сквозь поверхность круглого цилиндра* (рис. 15). *Расчет произвести непосредственно и с помощью формулы Гаусса – Остроградского.*

Поместим начало координат в центр основания цилиндра и направим ось Z вдоль оси цилиндра (см. рис. 15). Тогда

$$\oint\limits_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{S_н} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} + \int\limits_{S_в} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} + \int\limits_{S_{бок}} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S},$$



15

К вычислению потока радиус-вектора через поверхность прямого цилиндра

где $S_н$, $S_в$ и $S_{бок}$ – соответственно площади нижнего и верхнего оснований цилиндра и боковой поверхности. Имеем:

$$\int_{S_н} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \int_{S_в} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = h\pi a^2,$$

поскольку для точек на поверхности нижнего и верхнего оснований $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = r\,dS\cos(\mathbf{r}, \widehat{d\mathbf{S}}) = 0$, $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = r\,dS\cos(\mathbf{r}, \widehat{d\mathbf{S}}) = h\,dS$. Наконец, для интеграла по боковой поверхности $\int_{S_{бок}} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = a2\pi ah$, поскольку для точек на боковой поверхности $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = a\,dS$. Следовательно,

$$\int_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = 3\pi a^2 h. \tag{5.25}$$

По теореме Гаусса – Остроградского

$$\int_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{r}\,dV = 3\pi a^2 h, \tag{5.26}$$

где $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$, $V = \pi a^2 h$ (объем прямого круглого цилиндра).

- **Заряд сохраняется при всех движениях и взаимопревращениях носителей заряда.**
- **Дивергенция характеризует мощность источников.**
- **Формула Гаусса – Остроградского связывает суммарную мощность источников в объеме с потоком порождаемого источниками вектора через поверхность, ограничивающую объем.**
- **Заряд не является самостоятельной сущностью, независимой от материи, он – одно из свойств материи.**

○ Какие две группы различных фактов описываются понятием сохранения заряда?
В чем физический смысл равенства, выражаемого теоремой Гаусса – Остроградского?
Выполнения какого условия необходимо потребовать, чтобы из равенства нулю интеграла следовало равенство нулю подынтегрального выражения?

§ 6. Закон Кулона

Обсуждается точность экспериментальных проверок закона Кулона.

Экспериментальные проверки закона Кулона. Закон Кулона для силы F взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r, имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{6.1}$$

где $\varepsilon_0 = 1/(4\pi\cdot 9\cdot 10^9)$ Ф/м. Он был установлен Ш. О. Кулоном (1736 – 1806) в 1785 г. посредством прямых измерений сил взаимодействия между заряженными телами, размеры которых много меньше расстояния между ними. Точность опытов была небольшой. Лишь из общих соображений, основанных на аналогии с силами тяготения, существовала уверенность в абсолютной правильности этого закона.

Закон Кулона (6.1) входит в число основных экспериментальных фактов, на которых построено учение об электричестве. Проверка его справедливости и установление

границ применимости являются важнейшими задачами, на решение которых были направлены значительные усилия экспериментаторов.

Проверка закона (6.1) посредством прямого измерения сил взаимодействия с очень большой точностью затруднительна, поскольку в распоряжении экспериментаторов нет покоящихся точечных зарядов. Поэтому с результатами экспериментов обычно сравниваются следствия из закона Кулона и на этой основе делаются заключения о границах его применимости и точности.

Первая экспериментальная проверка закона была проведена в 1772 г. Г. Кавендишем (1731 – 1810) за 13 лет до открытия его Кулоном. Однако он не опубликовал своей работы и тем самым потерял приоритет на открытие. Рукопись, содержащая описание его опытов, была найдена в архивах лишь примерно в конце 60-х годов XIX столетия. Метод Кавендиша широко применялся и в последнее время позволил проверить закон Кулона с большой точностью.

Задача экспериментальной проверки формулируется следующим образом. Закон взаимодействия представляется в виде

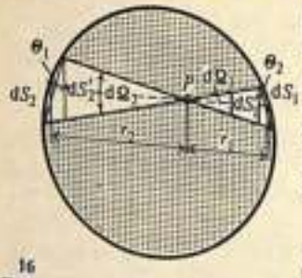
$$F = \text{const}/r^{2+\alpha}. \tag{6.2}$$

Требуется найти порядок малости α. Чем меньше $|\alpha|$, тем ближе закон взаимодействия к закону Кулона. Поэтому результат эксперимента выражается в форме ограничения на α: $|\alpha| \leqslant \delta$. Задача эксперимента состоит в определении значения δ.

Метод Кавендиша. Свободные заряды в однородном проводнике располагаются на его поверхности. На первый взгляд это является следствием отталкивания одноименных зарядов, в результате которого они стремятся разойтись на максимальные расстояния, устремляясь к поверхности проводника. Однако это неверно. *Такая ситуация возникает из-за того, что сила взаимодействия точечных зарядов убывает точно обратно пропорционально квадрату расстояния между ними, а не по другому закону.*

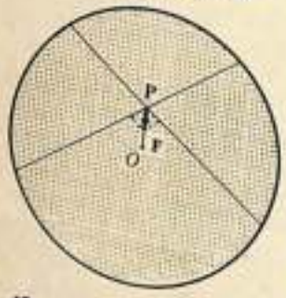
Из теории тяготения известно, что сферический однородный слой вещества в полости, окруженной этим слоем, не создает никакой силы. Отсюда следует, что если точечные электрические заряды взаимодействуют по закону обратных квадратов расстояний, то сферический слой зарядов не создает никакой силы в этой полости.

Пусть заряд равномерно распределен по поверхности сферы с поверхностной плотностью σ (рис. 16). В точке P внутри сферы заряды, находящиеся на элементах поверхности dS_1 и dS_2, создают противоположно направленные силы $dF_1 = \sigma\,dS_1/(4\pi\varepsilon_0 r_1^2)$ и $dF_2 = \sigma\,dS_2/(4\pi\varepsilon_0 r_2^2)$. Из свойства касательных к концам хорды следует, что углы θ_1 и θ_2 между перпендикулярами к хорде и элементам поверхности dS_1 и dS_2 равны друг другу. Тогда $dS_1 = dS_2'/\cos\theta$ и $dS_2 = dS_2'/\cos\theta$. Следовательно, $dF_1 = \sigma\,dS_1'/(4\pi\varepsilon_0 r_1^2\cos\theta)$, $dF_2 = \sigma\,dS_2'/(4\pi\varepsilon_0 r_2^2\cos\theta)$, где $dS_1'/r_1^2 = d\Omega_1$ и $dS_2'/r_2^2 = d\Omega_2$ – телесные углы, под которыми dS_1 и dS_2 видны из точки P (они равны друг другу по построению). Таким образом, равные по модулю силы dF_1 и dF_2



16

К теории метода Кавендиша



17

Возникновение силы со стороны шарового слоя в точках внутри сферы



18

Метод Кавендиша проверки закона Кулона

● Если строго выполняется закон Кулона, то заряд проводящего шара распределяется на его поверхности. При отклонении от закона Кулона имеется заряд и в объеме шара.

противоположно направлены вследствие одноименности зарядов на dS_1 и dS_2. В результате происходит взаимная компенсация сил от всех пар противоположно расположенных элементов поверхности и полная сила, действующая на пробный заряд в точке P, равна нулю.

Если проводящему шару сообщить заряд, то он вследствие сферической симметрии равномерно распределится по поверхности сферы. Отсутствие зарядов в объеме доказывается так. Пусть внутри шара имеются некоторые заряды. Из-за сферической симметрии их распределение должно быть сферически симметричным. Рассмотрим некоторый сферический слой зарядов. На заряды слоя не действуют никакие силы со стороны зарядов, находящихся вне полости, ограниченной сферическим слоем, но на них действуют силы отталкивания со стороны зарядов, находящихся в полости, ограниченной сферическим слоем. А это означает, что сферический слой зарядов начнет движение от центра к периферии. Таким образом, при равновесном распределении заряды внутри проводящего шара отсутствуют.

Иначе обстоит дело, если закон взаимодействия отличается от кулоновского. В этом случае в точке P со стороны зарядов $\sigma\,dS_1$ и $\sigma\,dS_2$, расположенных на элементах поверхности dS_1 и dS_2, действуют силы:

$$dF_1 = \text{const}\,\frac{dS_1\sigma}{r_1^{2+\varepsilon}} = \frac{\text{const}\cdot\sigma}{\cos\theta}\,d\Omega_1\,\frac{1}{r_1^{\varepsilon}},$$

$$dF_2 = \text{const}\,\frac{dS_2\sigma}{r_2^{2+\varepsilon}} = \frac{\text{const}\cdot\sigma}{\cos\theta}\,d\Omega_2\,\frac{1}{r_2^{\varepsilon}}, \qquad (6.3)$$

равнодействующая которых

$$\Delta F = A\left(\frac{1}{r_2^{\varepsilon}} - \frac{1}{r_1^{\varepsilon}}\right) \qquad (6.4)$$

не равна нулю. В формуле (6.4) A обозначает одинаковые множители перед $1/r_1^{\varepsilon}$ и $1/r_2^{\varepsilon}$ в (6.3).

Наличие силы ΔF приводит к возможности равновесного распределения зарядов по всему объему проводящего шара, поскольку на заряд внутри шара действуют силы не только со стороны внутренних сферических слоев, но и внешних, причем характер их действия зависит от знака ε.

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon > 0$. При этом сила со стороны заряда ($\sigma > 0$), расположенного от точки P (рис. 16) на более отдаленном элементе поверхности, меньше, чем со стороны заряда на более близком элементе поверхности. Следовательно, сила направлена в сторону более отдаленного элемента поверхности. Суммируя возможные пары элементов поверхности, приходим к заключению, что результирующая сила F направлена к центру O (рис. 17). Следовательно, внутри сферы радиусом OP можно создать такое распределение заряда, при котором сила в точке P со стороны этого распределения компенсирует силу со стороны зарядов во внешних сферических слоях. В результате слой зарядов на сфере радиусом OP может находиться в равновесии. Нужно подобрать такое распределение плотности зарядов по радиусу, чтобы в каждой точке внутри шара сила была равна нулю. Такое распределение будет равновесным. Таким образом, при $\varepsilon > 0$ в заряженном проводящем шаре заряды присутствуют не только на поверхности, как при $\varepsilon = 0$, но и в объеме. Аналогичный вывод получается и при $\varepsilon < 0$. Можно произвести более детальный математический подсчет и найти заряд в объеме шара как функцию от ε. Метод Кавендиша состоит в измерении заряда в объеме шара и последующем вычислении значения ε.

К проводящему шару (рис. 18) плотно примыкает разъемная проводящая сферическая оболочка, состоящая из двух полусфер. Когда она надета на шар, системе сообщается электрический заряд. Затем оболочка с помощью изолирующих ручек отъединяется от шара и исследуется оставшийся в нем заряд.

Если закон Кулона справедлив, то весь заряд находится на оболочке и удаляется вместе с ней. Остающийся на шаре заряд равен нулю.

Если имеется отклонение от закона Кулона, то часть заряда сосредоточится в объеме шара, а часть находится на оболочке. После удаления оболочки на шаре остается некоторый заряд. Определив его, можно оценить ε. Конечно, в экспериментах непосредственно можно измерить не заряд, а потенциалы, что не меняет сути дела.

Кавендиш получил, что $|\varepsilon| \leqslant 0{,}02$. Примерно через сто лет аналогичные опыты произвел Максвелл и нашел $|\varepsilon| \leqslant 5\cdot 10^{-9}$. В 1971 г. метод Кавендиша был усовершенствован. Опыт проводился не в статическом режиме, а с помощью переменных по времени потенциалов. Установка состоит из двух концентрических проводящих сфер. На внешнюю подавалось переменное напряжение ± 10 кВ относительно земли. В случае отклонения от закона Кулона потенциал внутренней сферы должен меняться относительно земли. Исследователи могли фиксировать разность потенциалов меньшую, чем 1 пВ. Они не обнаружили колебаний потенциала внутренней сферы, что позволило принять $|\varepsilon| \leqslant |2{,}7 \pm 3{,}1|\cdot 10^{-16}$.

Этими опытами *справедливость закона Кулона с указанной чрезвычайно большой точностью подтверждена для расстояний от нескольких миллиметров до десятков сантиметров.*

Проверка закона для больших расстояний. Применить метод Кавендиша для проверки закона Кулона уже для расстояний, равных нескольким метрам и больше, затруднительно. Для больших расстояний используют косвенные методы, обоснование которых лежит вне классической теории электричества. Они используют квантово-механические представления о взаимодействии частиц с учетом их волновых свойств. Каждое взаимодействие обусловливается конкретным видом частиц. Закон взаимодействия зависит от свойств частиц, обусловливающих взаимодействие и в первую очередь от их массы. Если масса покоя частиц, ответственных за взаимодействие, равна нулю, то сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояний, а потенциал взаимодействия обратно пропорционален расстоянию. Если же у частиц, осуществляющих взаимодействие, масса покоя отлична от нуля, то потенциал изменяется по закону $\sim(1/r)\exp(-\mu r)$, где μ зависит от массы покоя частиц. При нулевой массе покоя μ равно нулю и потенциал изменяется обратно пропорционально расстоянию, как это должно быть при законе Кулона и законе тяготения Ньютона. *По современным представлениям электромагнитные взаимодействия обусловливаются фотонами. Поэтому вопрос о справедливости закона Кулона сводится к вопросу о равенстве массы покоя фотонов нулю.*

Все частицы наряду с корпускулярными обладают также и волновыми свойствами. Энергия ε_ϕ фотонов связана с частотой и массой соотношениями $\varepsilon_\phi = \hbar\omega$ и $\varepsilon_\phi = m_\gamma c^2$, где $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, m_γ — масса фотона. Эта масса больше массы покоя, если таковая у фотона имеется. Поэтому, найдя верхний предел для m_γ, получим ограничение на массу покоя фотона. Доказав экспериментально существование электромагнитных волн достаточно большой длины, можно утверждать, что значение m_γ достаточно мало. Если бы удалось продемонстрировать существование электромагнитных волн бесконечной длины волны, то можно было бы утверждать, что масса покоя фотона равна нулю и, следовательно, закон Кулона справедлив абсолютно.

Наиболее длинные электромагнитные волны, которые удается в настоящее время наблюдать, образуются в виде стоячих волн в пространстве между поверхностью земли и ионосферой. Они называются **резонансами Шумана.** Наименьший резонанс Шумана соответствует частоте $\nu_0 = 8$ Гц. На основании этого с учетом расстояния от поверхности земли до ионосферы и условий образования стоячих волн для массы фотона получаем $m_\gamma < 10^{-48}$ кг. Эта оценка показывает, что закон Кулона выполняется с чрезвычайно большой точностью, поскольку неравенство $|\alpha| \leqslant 10^{-16}$ эквивалентно $m_\gamma \leqslant 10^{-50}$ кг.

Проведены эксперименты, связанные с исследованием магнитного поля с помощью спутников в околоземном пространстве и позволяющие определить точность выполнения закона Кулона на больших

расстояниях. Установлено, что *закон Кулона выполняется с чрезвычайно большой точностью вплоть до расстояний порядка* 10^7 м. *Нет сомнений, что и для бо́льших расстояний закон Кулона также хорошо выполняется, однако прямых экспериментальных проверок не проводилось.*

Проверка закона для малых расстояний. Для малых расстояний закон Кулона проверяется в экспериментах по взаимодействию элементарных частиц. Уже опыты Резерфорда позволили заключить, что закон Кулона справедлив с большой точностью вплоть до расстояний 10^{-15} м. *Последующие эксперименты по упругому рассеянию электронов при энергиях в несколько миллиардов электрон-вольт показали, что закон Кулона справедлив вплоть до расстояний* 10^{-17} м.

При интерпретации этих экспериментов используется квантовая электродинамика.

Полевая трактовка закона Кулона. До работ Фарадея закон Кулона трактовался с позиций **дальнодействия**, т. е. *считалось, что одно тело действует на другое как бы без посредников. Поэтому и называлась эта концепция как действие на расстоянии.* В первой половине XIX в. выработалась другая точка зрения на механизм взаимодействия, согласно которой *взаимодействие между телами осуществляется лишь посредством непрерывной «передачи сил» через пространство между телами.* Такое предетавление получило название концепции **близкодействия.** Она была введена в науку Фарадеем (1791—1867) в ряде работ, опубликованных в период с 1831 по 1855 г. *Вместе с идеей близкодействия в науку вошло представление о поле как посреднике, осуществляющем взаимодействие.* Первоначально функции посредника приписывались среде, которая заполняет все мировое пространство. Эта среда получила название **Мирового эфира.** Состояние эфира характеризовалось определенными механическими свойствами, такими, как упругость, натяжение, движение одних частей среды относительно других и т. д. По этой трактовке сила, действующая на тело, является следствием взаимодействия тела со средой в той точке, в которой находится тело. Таким образом, *механизм взаимодействия формулируется в виде локальных соотношений.* Попытка математической формулировки этой механической картины передачи взаимодействий была предпринята в 1861—1862 гг. Максвеллом (1831—1879), пытавшимся представить силы электромагнитного взаимодействия в виде механических сил, обусловленных натяжениями и давлениями в эфире. Затем он перешел к феноменологической формулировке взаимодействия, характеризуя состояние среды с помощью векторов **E**, **D**, **H**, **B**, которым, однако, не дается какой-то механической интерпретации. Следует отметить, что при этом Максвелл не исключал возможности механического истолкования феноменологических уравнений. В 1864 г. он сформулировал уравнения электромагнитного поля — уравнения Максвелла. В дальнейшем выяснилось, что нельзя приписывать эфиру механических свойств и нельзя говорить о движении относительно

эфира. *Надежда на механическое истолкование электромагнитных взаимодействий потеряла право на существование. Но идея локальной формулировки взаимодействия и необходимость существования в пространстве поля, которое осуществляет это взаимодействие, сохранились. Поле становится первоначальной сущностью и характеризуется величинами, которые не могут быть интерпретированы в рамках механических представлений.* Это утверждение в наиболее четкой форме было высказано в 1889 г. Герцем (1857–1894), экспериментально открывшим электромагнитные волны и сформулировавшим уравнения Максвелла для вакуума в современном виде. Ясно, что поле существует в пространстве и времени наряду с материей в виде атомов, молекул и т. д.

Следовательно, поле есть также вид материи, обладающий свойственными для всякой материи характеристиками – импульсом, энергией и т. д.

Электрическое поле. Обозначим: $\mathbf{F}_{12}$ – силу со стороны заряда q_1 на заряд q_2; $\mathbf{F}_{21}$ – силу со стороны заряда q_2 на заряд q_1; $\mathbf{r}_{12}$ и $\mathbf{r}_{21}$ – векторы, проведенные из точки нахождения первого заряда в точку нахождения второго заряда, и наоборот. В соответствии с этим запишем закон Кулона в виде:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^3}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}q_2, \quad \text{(а)}$$

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{21}^3}\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}q_1. \quad \text{(б)} \qquad (6.5)$$

По своему физическому содержанию эти две формулы различны и определяют силы, действующие на второй и первый заряд в точке их нахождения, т. е. описывают силы в различных пространственных точках. Но *механизм возникновения этих сил одинаков. Заряды q_1 и q_2 создают в окружающем их пространстве электрическое поле, которое характеризуется напряженностью* $\mathbf{E}$. *Напряженность поля является локальным понятием и имеет определенное значение в каждой точке пространства.* **Напряженностью электрического поля** *в точке называется величина, равная отношению силы, с которой поле действует на положительный заряд, помещенный в данную точку поля, к заряду.* Отсюда, однако, не следует, что для измерения напряженности поля достаточно в точку пространства поместить положительный заряд и измерять действующую на него силу.

Во многих случаях внесение заряда в данную точку сопровождается сильным изменением напряженности электрического поля в ней и результат измерения оказывается сильно искаженным (см. § 7).

С учетом сказанного формулы (6.5) можно представить в виде:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^3}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \quad \text{(а)} \quad \mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_2 = q_2\mathbf{E}_2, \quad \text{(б)} \qquad (6.6)$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{21}^3}\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}, \quad \text{(а)} \quad \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_1 = q_1\mathbf{E}_1, \quad \text{(б)} \qquad (6.7)$$

Формула (6.6а) описывает напряженность электрического поля, образуемого точечным зарядом q_1, а формула (6.6б) характеризует силу, с которой поле с напряженностью $\mathbf{E}_2$ действует на заряд, находящийся в точке поля. Аналогичный смысл имеют и формулы (6.7).

Таким образом, действие одного заряда на другой разделено на два этапа:

1. Точечный заряд q создает в окружающем его пространстве электрическое поле, напряженность которого

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad (6.8)$$

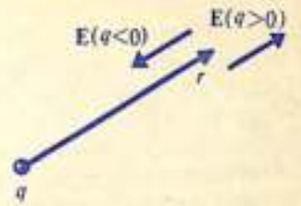
где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда до точки, в которой определяется напряженность (рис. 19).

2. Точечный заряд q, находящийся в точке поля с напряженностью $\mathbf{E}$, подвергается со стороны этого поля действию силы

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E}.} \qquad (6.9)$$

Формулировка второго этапа взаимодействия, выражаемая формулой (6.9), *является локальной:* напряженность $\mathbf{E}$, заряд q и сила $\mathbf{F}$ определяются в одной и той же точке. *Формулировка же первого этапа взаимодействия, выражаемая формулой* (6.8), *не является локальной:* напряженность $\mathbf{E}$ в левой части (6.8) зависит не только от точки, где она определяется, но и от точки нахождения источника поля. Другими словами, (6.8) является соотношением между величинами, относящимися к различным точкам пространства, т. е. имеет нелокальный характер. Локальная формулировка дана в § 13.

О границах применимости классической концепции поля. Выше предполагалось, что напряженность $\mathbf{E}$ непрерывно и достаточно плавно изменяется в пространстве и во времени. Однако в рамках квантовых



19

Полевая трактовка закона Кулона

● **Представление о классическом непрерывном взаимодействии справедливо лишь при условии малости действия отдельных квантов по сравнению с совокупным действием, т. е. когда рассматриваемое явление зависит от одновременного действия громадного числа квантов и когда действие отдельных квантов не проявляется.**

Определение напряженности электрического поля не связано с малостью пробных зарядов.

○ На каком физическом законе основан метод Кавендиша для проверки закона Кулона? Какова точность проверки закона Кулона современными средствами по методу Кавендиша? Для каких расстояний эти проверки справедливы?

В чем состоит метод проверки закона Кулона для больших расстояний? До каких расстояний имеются прямые результаты проверки? Каковы они?

На чем основана проверка справедливости закона Кулона для очень малых расстояний? Каковы результаты проверки?

В чем отличие понятий электромагнитного поля и эфира?

представлений сила взаимодействия между заряженными телами возникает в результате обмена фотонами. *Отсюда следует дискретность взаимодействия.* А это означает, что напряженность $\mathbf{E}$ нельзя представлять себе как непрерывную величину, плавно изменяющуюся в пространстве и времени. Спрашивается, при каких условиях все же можно считать ее непрерывной? Ясно, что *это возможно лишь при условии малости действия отдельных квантов по сравнению с совокупным действием, т. е. когда рассматриваемые явления зависят от одновременного действия громадного числа квантов.* Такая ситуация осуществляется наиболее часто. Например, электрическая лампочка мощностью 200 Вт на расстоянии 2 м дает поток фотонов видимого света, равный примерно 10^{15} фотонов/(см^2 · с). Площадь зрачка глаза много меньше 1 см^2, тем не менее число фотонов, попадающих в глаз за 1 с, велико. Поэтому поток фотонов воспринимается как непрерывный. Однако уменьшением интенсивности света можно добиться такого положения, чтобы в глаз попадало лишь небольшое число фотонов в секунду. При специальных условиях глаз способен воспринимать отдельные фотоны в виде раздельных вспышек. В этом случае уже нельзя пользоваться представлением о непрерывном потоке света. Радиостанции ультракоротковолнового диапазона в СССР работают на частотах 60–70 МГц. На расстоянии 10 км такая радиостанция мощностью 200 Вт дает поток около $4 \cdot 10^{14}$ квантов/(см^2 · с). Это соответствует плотности 10^4 квантов/см^3. Следовательно, в объеме, равном кубу длины волны (≈ 64 м^3), находится более 10^{11} квантов излучения. При этих условиях также является затруднительной фиксация поля отдельного кванта. В тех случаях, когда действие отдельных квантов не проявляется, применимо классическое описание. Это возможно, когда число квантов велико, а импульс отдельного кванта мал по сравнению с импульсом материальной системы. Например, излучение отдельного атома нельзя рассматривать классически, потому что число фотонов до излучения равно нулю, а после излучения имеется только один фотон.

§ 7. Принцип суперпозиции

Анализируется физическое содержание принципа суперпозиции и обсуждаются границы его применимости.

Принцип суперпозиции для взаимодействия точечных зарядов. Силы взаимодействия двух точечных изолированных зарядов определяются законом Кулона (6.1). Изменится ли эта сила, если вблизи двух взаимодействующих зарядов имеется еще один точечный заряд? Чтобы вопрос имел однозначный смысл, необходимо уточнить, что понимается под силами взаимодействия двух зарядов в присутствии третьего заряда (все заряды предполагаются неподвижными).

Если под силами взаимодействия понимать силу, направленную вдоль линии, соединяющей взаимодействующие заряды, то эти силы

зависят от третьего заряда и к тому же не удовлетворяют требованию равенства действия и противодействия. Трудность состоит в том, что можно измерить силу, действующую на заряд, но не ясно, как различить в ней вклады от отдельных зарядов. Однако третий точечный заряд ничем не отличается от рассматриваемых двух зарядов и все три заряда равноправны. Поэтому постановку вопроса можно изменить. Имеются три взаимодействующих заряда. Экспериментально измеряемыми величинами являются силы, действующие на каждый из зарядов. Закон сложения сил по правилу параллелограмма известен. Спрашивается, равна ли измеряемая сила, действующая на каждый из зарядов, сумме сил со стороны двух других зарядов, если эти силы вычислять по закону Кулона (6.1)? Отметим, что здесь говорится об экспериментальном измерении силы и о математическом вычислении сил по закону (6.1) и их сложении по правилу параллелограмма. В такой постановке вопрос имеет вполне определенный смысл и ответ на него можно получить из эксперимента. Исследования показали, что *всегда измеряемая сила равна сумме вычисляемых по закону Кулона сил со стороны двух зарядов.* Этот экспериментальный результат выражается в виде следующих утверждений:

а) *сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется в присутствии других зарядов;*

б) *сила, действующая на точечный заряд со стороны двух точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов при отсутствии другого.*

Это утверждение называется **принципом суперпозиции.** Оно отражает экспериментальный факт, составляющий одну из основ учения об электричестве. По своей роли в учении об электричестве он столь же важен, как, например, закон Кулона. Обобщение на случай многих зарядов очевидно.

Полевая формулировка принципа суперпозиции. Рассмотрим силу $\mathbf{F}_3$, действующую на точечный заряд q_3 при наличии двух других зарядов q_1 и q_2 (рис. 20). Обозначим F_{13} и F_{23} – силы, действующие на заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2, когда нет зарядов q_2 и q_1. Принцип суперпозиции утверждает, что

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}. \tag{7.1}$$

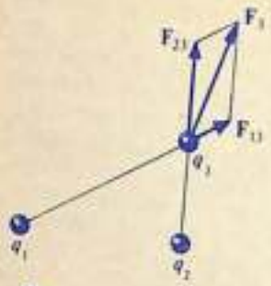
Обозначим: $\mathbf{E}_{13}$ и $\mathbf{E}_{23}$ – напряженности электрического поля, создаваемого зарядами q_1 и q_2 в точке с зарядом q_3 при отсутствии заряда q_2 или q_1 соответственно. По формуле (6.9) имеем:

$$\mathbf{F}_{13} = q_3\mathbf{E}_{13}, \quad \mathbf{F}_{23} = q_3\mathbf{E}_{23}. \tag{7.2}$$

Перепишем выражение (7.1):

$$\mathbf{F}_3 = q_3\mathbf{E}_{13} + q_3\mathbf{E}_{23}. \tag{7.3}$$

Сила в электрическом поле возникает в результате действия поля на заряд. Следовательно, сила $\mathbf{F}_3$ в (7.3) свидетельствует о на-



20

Принцип суперпозиции

личии в точке нахождения заряда q_3 электрического поля с напряженностью $\mathbf{E}_3$, которая обусловливает эту силу [см. (6.9)], т. е.

$$\mathbf{F}_3 = q_3\mathbf{E}_3. \tag{7.4}$$

Подставляя (7.4) в (7.3) и сокращая полученное выражение на общий множитель q_3, находим

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_{13} + \mathbf{E}_{23}. \tag{7.5}$$

Равенство (7.5) является **полевой формулировкой принципа суперпозиции:** *напряженность поля двух точечных зарядов равна сумме напряженностей, создаваемых каждым из зарядов при отсутствии другого.* Она является локальной, поскольку все величины относятся к одной точке пространства.

Обобщение на случай многих зарядов очевидно:

$$\boxed{\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i}, \tag{7.6}$$

т. е. *напряженность поля любого числа точечных зарядов равна сумме напряженностей полей каждого из точечных зарядов при отсутствии всех других.*

● **Сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется в присутствии других зарядов, а сила взаимодействия заряженных тел, вообще говоря, изменяется в присутствии других заряженных тел. Пробный заряд предполагается достаточно малым. Однако это требование не имеет отношения к принципу суперпозиции, который остается справедливым при любых значениях пробного заряда.**

Пробные заряды. Из определения напряженности электрического поля следует, что ее измерение сводится к измерению силы, действующей на точечный заряд. Точечный заряд, с помощью которого определяется напряженность, называется **пробным.** Возникает вопрос о величине пробного заряда. *Если предположить, что все точечные заряды, суммарная напряженность поля которых вычисляется, закреплены неподвижно в точках пространства, то пробный заряд может быть любым.* Если же положения точечных зарядов не фиксированы в пространстве, то пробный заряд своим действием на эти заряды может сместить их в другие точки пространства. В этом случае будет найдена не та напряженность, которая была в точке нахождения пробного заряда при первоначальном положении всех зарядов,

○ Почему сила взаимодействия двух заряженных тел, вообще говоря, изменяется в присутствии третьего заряженного тела? Является ли это нарушением принципа суперпозиции?

Какие экспериментальные факты позволяют судить о справедливости принципа суперпозиции вплоть до очень больших напряженностей электрического поля?

а другая напряженность, возникшая в результате перемещения зарядов в новое положение под влиянием пробного заряда. Во избежание этого надо уменьшить воздействие пробного заряда на заряды, создающие исследуемое поле. Поэтому *пробный заряд должен быть достаточно малым.* Однако необходимо отметить, что *это требование не имеет отношения к принципу суперпозиции, а лишь обеспечивает соблюдение условий, при которых напряженность исследуемого поля существенно не изменяется самим актом измерения.*

Границы применимости принципа суперпозиции. Экспериментальными свидетельствами справедливости принципа суперпозиции является согласие полученных с его помощью выводов с результатами экспериментов. Установлено, что *принцип суперпозиции соблюдается вплоть до очень больших напряженностей полей.* Его правильность для напряженностей полей в несколько миллионов вольт на метр (электротехника, ускорители, высоковольтные разряды и т. д.) хорошо подтверждается всей инженерной практикой. Более значительные напряженности поля имеются в атомах и ядрах. На орбитах электронов в атомах они равны $E \approx 10^{11} - 10^{12}$ В/м. Рассчитанные в соответствии с принципом суперпозиции разности энергетических уровней атомов подтверждены экспериментально с большой степенью точности (относительная погрешность не более 10^{-6}). Это означает, что и принцип суперпозиции при напряженности внутриатомных полей соблюдается с большой точностью. На поверхности тяжелых ядер напряженности достигают громадных значений ($E \approx 10^{22}$ В/м). Экспериментальные данные свидетельствуют, что и для этих громадных напряженностей принцип суперпозиции выполняется. Однако в этом случае появляются другие эффекты, а именно, при напряженности около 10^{20} В/м возникает поляризация вакуума в результате возникновения электронно-позитронных пар. Это приводит к квантово-механической нелинейности взаимодействия.

§ 8. Магнитное поле

Анализируется релятивистская природа магнитного поля. Из закона Кулона с помощью релятивистских преобразований выводится закон взаимодействия параллельных проводников.

Необходимость возникновения магнитного поля при движении зарядов. Взаимодействие точечных неподвижных зарядов полностью описывается законом Кулона. Однако *закон Кулона недостаточен для анализа взаимодействия движущихся зарядов,* причем такой вывод следует не из конкретных особенностей кулоновского взаимодействия, а обусловливается релятивистскими свойствами пространства и времени и релятивистским уравнением движения.

Это утверждение в принципе вытекает из таких соображений. Релятивистское уравнение движения

$$\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{F} \tag{8.1}$$

инвариантно и имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах координат, в частности в системе координат K', которая движется равномерно и прямолинейно относительно K:

$$\mathrm{d}\mathbf{p}'/\mathrm{d}t' = \mathbf{F}'. \tag{8.2}$$

Буквы со штрихами обозначают величины, относящиеся к K'. В левые части этих уравнений входят чисто механические величины, поведение которых при переходе из одной системы координат в другую известно. Следовательно, можно связать между собой некоторой формулой левые части уравнений (8.1) и (8.2). Но тогда оказываются связанными между собой стоящие в правой части этих уравнений силы. Наличие такой связи обусловливается требованием релятивистской инвариантности уравнения движения. Поскольку в левые части уравнений (8.1) и (8.2) входят скорости, заключаем, что сила взаимодействия движущихся зарядов зависит от скорости и не сводится к кулоновской силе. Тем самым доказывается, что *взаимодействие движущихся зарядов осуществляется не только кулоновской силой, но также силой другой природы, называемой магнитной*. Ее существование выявляется из следующего примера взаимодействия зарядов.

Взаимодействие точечного заряда и бесконечной прямой заряженной нити. Конечно, самым простым является кулоновское взаимодействие двух точечных зарядов, которые покоятся в системе координат K'. Однако в другой системе координат K, движущейся относительно K', эти заряды движутся с одинаковыми скоростями и их взаимодействие усложняется, поскольку из-за движения зарядов электрическое поле в каждой точке пространства переменно. Поэтому целесообразно выбрать ситуацию, которая является достаточно простой как в системе координат K', где заряды покоятся, так и в системе координат K, где они движутся. Сравнительно простым является взаимодействие точечного заряда и бесконечной прямой заряженной нити.

В системе координат K' нить покоится и направлена вдоль оси X' (рис. 21). Точечный заряд q расположен на оси Y' на расстоянии y'_0 от нити. Обозначим S'_0 – площадь поперечного сечения нити, считая его линейные размеры очень малыми по сравнению с расстоянием до точечного заряда. Если объемная плотность заряда ρ', то на элементе длины $\mathrm{d}x'$ нити находится заряд $\mathrm{d}q' = \rho' S'_0\,\mathrm{d}x'$. Для определенности предполагаем, что заряд нити и точечный заряд положительны. В этом случае силы, действующие на точечный заряд со стороны заряда в элементе нити, направлены так, как показано на рис. 21. По закону Кулона

$$\mathrm{d}F'_x = \frac{q\rho' S'_0\,\mathrm{d}x'}{4\pi\varepsilon_0 (y'^2_0 + x'^2)}\cos\alpha,\quad \mathrm{d}F'_y = \frac{q\rho' S'_0\,\mathrm{d}x'}{4\pi\varepsilon_0 (y'^2_0 + x'^2)}\sin\alpha. \tag{8.3}$$

Принимая во внимание, что $\cos\alpha = -x'/(y'^2_0 + x'^2)^{1/2}$, $\sin\alpha = y'_0/(y'^2_0 + x'^2)^{1/2}$, для компонент силы получаем:

$$F'_x = -\frac{q\rho' S'_0}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x'\,\mathrm{d}x'}{(y'^2_0 + x'^2)^{3/2}},\quad F'_y = \frac{q\rho' S'_0 y'_0}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x'}{(y'^2_0 + x'^2)^{3/2}}. \tag{8.4}$$

Первый интеграл равен нулю, поскольку в подынтегральном выражении стоит нечетная функция, а для вычисления второго интеграла целесообразно произвести замену переменных: $x' = -y'_0\operatorname{ctg}\alpha$, $\mathrm{d}x' = y'_0\,\mathrm{d}\alpha/\sin^2\alpha$, $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$. Тогда

$$F'_x = 0,\quad F'_y = \frac{q\rho' S'_0}{4\pi\varepsilon_0 y'_0}\int\limits_0^{\pi}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{q\rho' S'_0}{2\pi\varepsilon_0 y'_0}. \tag{8.5}$$

Кроме того, $F'_z = 0$. Принимая во внимание, что заряд в данный момент покоится, и обозначая m_0 массу носителя заряда, получаем для ускорения заряда в системе K' следующие выражения:

$$a'_x = 0,\quad a'_y = F'_y/m_0 = q\rho' S'_0/(2\pi\varepsilon_0 y'_0 m_0),\quad a'_z = 0. \tag{8.6}$$

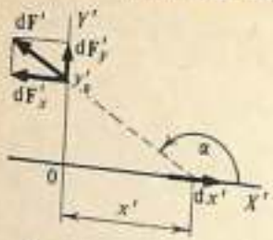
Теперь рассмотрим это взаимодействие в системе координат K, движущейся относительно системы K' со скоростью v в направлении отрицательных значений оси X'. Направим ось X вдоль нити так, чтобы ее положительное направление совпадало с положительным направлением оси X', и будем считать эту систему неподвижной. В системе координат K система K', нить и заряд движутся в направлении положительных значений оси X со скоростью v.

Вычислим силу кулоновского отталкивания со стороны движущейся нити на движущийся заряд. Вследствие инвариантности заряда точечный заряд q неизменен. В результате сокращения движущихся масштабов на метр длины движущейся нити приходится большее число зарядов, чем на метр длины неподвижной, т. е. плотность зарядов движущейся нити больше, чем неподвижной. В предшествующих расчетах плотность зарядов неподвижной нити обозначалась ρ'. Поэтому плотность зарядов движущейся нити в системе координат K равна

$$\rho = \rho'/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{8.7}$$

где $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ учитывает релятивистское изменение движущихся масштабов. Все дальнейшие вычисления совершенно аналогичны расчетам для покоящейся нити. Поскольку длины в перпендикулярном скорости v направлении остаются неизменными, то площадь поперечного сечения движущейся нити и расстояние от нити до точечного заряда будут неизменными. Поэтому вместо (8.5) получаем:

$$f_x = 0,\quad f_y = q\rho S_0/(2\pi\varepsilon_0 y'_0),\quad f_z = 0, \tag{8.8}$$



21

К вычислению силы взаимодействия точечного заряда и бесконечной прямой заряженной нити

причем здесь кулоновская сила обозначена маленькой буквой, чтобы отличать ее от полной силы, действующей на заряд, которая не сводится к кулоновской силе. Подставляя (8.7) во второе из уравнений (8.8), находим

$$f_y = q\rho' S_0/(2\pi\varepsilon_0 y_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}) = \\ = q\rho' S_0/(2\pi\varepsilon_0 y'_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}) = F'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (8.9)$$

где $S_0 = S'_0$, $y_0 = y'_0$ и принята во внимание формула (8.5).

Найдем полную силу, действующую на точечный заряд в системе координат K. Вследствие симметрии сила направлена вдоль оси Y и связана с импульсом уравнением движения

$$F_y = dp_y/dt. \quad (8.10)$$

В системе координат K' эта связь имеет вид

$$F'_y = dp'_y/dt'. \quad (8.11)$$

По формулам преобразования теории относительности

$$p'_y = p_y, \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + vu'_x/c^2} \quad (\beta = v/c), \quad (8.12)$$

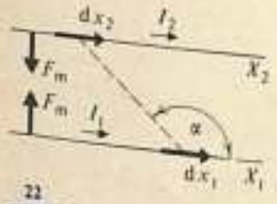
где u'_x – компонента скорости частицы в системе координат K', причем в данном случае $u'_x = 0$. С учетом (8.12) из (8.10) находим

$$F_y = dp_y/dt = (dp'_y/dt')\,(dt'/dt) = F'_y\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (8.13)$$

Сравнение (8.13) с (8.9) показывает, что

$$F_y = (1 - \beta^2)\,f_y, \quad (8.14)$$

т. е. *кулоновская сила отталкивания f_y больше силы F_y, действующей на движущийся заряд со стороны движущейся нити. Следовательно, кроме кулоновской силы отталкивания на заряд действует еще другая сила, отличная от кулоновской, которая в данном случае является силой притяжения.* Она



22

Взаимодействие двух параллельных токов

● **Для описания взаимодействия движущихся зарядов недостаточно закона Кулона. Этот вывод следует не из конкретных особенностей кулоновского взаимодействия, а обусловливается релятивистскими свойствами пространства и времени и релятивистским уравнением движения.**

Магнитное взаимодействие сравнимо с электрическим лишь при достаточно больших скоростях заряженных частиц. Тем не менее оно может проявляться и при очень малых скоростях, если кулоновское взаимодействие по каким-то причинам отсутствует.

возникает в результате движения зарядов и называется **магнитной**. Полевая трактовка взаимодействия для магнитной силы формулируется аналогично полевой трактовке электрического взаимодействия: *движущийся заряд создает в окружающем его пространстве магнитное поле; на движущийся заряд со стороны магнитного поля действует сила.*

Релятивистская природа магнитного поля. Из (8.14) видно, что магнитная сила равна

$$F_{ym} = F_y - f_y = -v^2 f_y/c^2. \quad (8.15)$$

Знак минус означает, что сила направлена к заряженной нити, т. е. является силой притяжения. Как видно из (8.15), эта сила описывается величиной второго порядка малости по v/c относительно кулоновского взаимодействия. Следовательно, *магнитное взаимодействие сравнимо по величине с электрическим лишь при достаточно больших скоростях заряженных частиц. Тем не менее оно заметно и при малых скоростях зарядов, если кулоновское электрическое взаимодействие по каким-то причинам не проявляется.* Такая ситуация осуществляется, например, при наличии электрического тока в проводнике. В этом случае электрическое поле движущихся зарядов нейтрализуется электрическим полем зарядов проводника противоположного знака, т. е. экранируется. В результате остается одна лишь магнитная сила, ничтожно малая по сравнению с кулоновской силой, если бы она не была экранирована. Например, при типичных скоростях дрейфа электронов в металлическом проводнике (см. § 31) магнитная сила меньше кулоновской более чем в 10^{20}, тем не менее она достаточно большая и проявляется в виде взаимодействия проводников с током. Поэтому *чисто релятивистский эффект возникновения магнитного поля проявляется при любых скоростях и не только при достаточно больших.*

Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Представим себе, что заряды движутся в тонкой цилиндрической проволоке, которая в целом электрически нейтральна. Тогда кулоновские силы со стороны движущихся зарядов, образующих электрический ток, экранируются зарядами противоположного знака проволоки и вне проволоки действует лишь магнитная сила (8.15). Следовательно, вокруг проводника с током проявляется действие магнитной силы на движущиеся заряды, которые образуют электрический ток. При этом возникает магнитное взаимодействие токов. Это получается как результат релятивистского анализа взаимодействия движущихся зарядов. Однако магнитное взаимодействие токов было открыто задолго до создания теории относительности.

Предположим, что движущиеся заряды составляют линейный ток, текущий по проводнику, параллельному исходному току, текущему вдоль оси X и расположенному на расстоянии r от него (рис. 22). Величины, относящиеся к исходному току, обозначим с индексами 1, а к линейному – с индексами 2. На каждый заряд тока I_2 со стороны

тока I_1 действует магнитная сила притяжения F_m (8.15), которую удобно с учетом (8.8) представить в виде

$$F_{m_2} = -\frac{v^2}{c^2}\frac{q\rho_1 S_{01}}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2} qv\frac{\rho_1 v S_{01}}{r} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2} qv\frac{I_1}{r}, \tag{8.16}$$

где $\rho_1 v S_{01} = I_1$ [см. (4.11) и (4.14)], $r = y_0$ [см. (8.8)].

Обозначим n_2 линейную концентрацию зарядов на втором проводнике. На элементе длины dx_2 находится $n_2\,dx_2$ зарядов, на которые действует магнитная сила

$$dF_m = F_{m_2} n_2\,dx_2. \tag{8.17}$$

Подставляя в (8.17) выражение (8.16), находим

$$dF_m = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I_2 q v n_2\,dx_2}{r}, \tag{8.18}$$

где $qvn_2 = I_2$. Кроме того, в теории магнетизма вместо постоянной ε_0 принято использовать $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$ – магнитную постоянную. Тогда [см. (8.18)]

$$dF_m = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}dx_2. \tag{8.19}$$

Она характеризует взаимодействие прямолинейных токов в бесконечных параллельных проводниках. Необходимо отметить, что условием применимости (8.19) является малость поперечных размеров проводников по сравнению с расстоянием между ними (тонкие проводники, линейные токи).

Единица силы тока. Из формулы (8.19) видно, что на длину l_2 проводника приходится сила

$$F_{ml} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r} l_2. \tag{8.20}$$

Знак минус показывает, что при одинаковых направлениях I_1 и I_2 между проводниками действует сила притяжения. Если же направления токов I_1 и I_2 различны, то возникает сила отталкивания.

На основе (8.20) дается определение единицы силы тока: *ампер есть сила постоянного тока, который, будучи поддерживаемым в двух параллельных прямолинейных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает между этими проводниками возникновение силы, равной $2\cdot10^{-7}$ Н на метр длины.* Полагая в (8.20) $I_1 = I_2 = 1$ А, $r = 1$ м, $l_2 = 1$ м, $F_{ml} = -2\cdot10^{-7}$ Н, находим $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Н/А^2.

Как было отмечено [см. (8.19)],

$$\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2, \tag{8.21}$$

(8.22)

где c – скорость света в вакууме. Это соотношение отражает глубокую связь, существующую между электрическими и магнитными полями и характеризуемую фундаментальной физической константой c, равной скорости света. Природа этой связи станет ясной при изучении электромагнитных волн (см. гл. 9).

Магнитное поле. В полной аналогии с полевой трактовкой кулоновского взаимодействия (см. § 6) можно переформулировать процесс возникновения силы (8.18) в виде двух этапов: порождение током I_1 магнитного поля в окружающем ток пространстве и действие магнитного поля на движущийся заряд или ток. Однако законы возникновения магнитного поля и действия силы оказываются более сложными, чем в законе Кулона, так как зависят от взаимной ориентации тока и скорости заряда. Кроме того, текущий по бесконечно длинному проводнику ток I_1 не подходит для роли элементарного объекта, взаимодействие точечного заряда с которым можно считать элементарным актом. Поэтому необходимо вернуться к анализу действия сил на точечные движущиеся заряды или элементы тока.

§ 9. Сила Лоренца. Сила Ампера

Обсуждаются релятивистские свойства сил Лоренца и Ампера.

Преобразование сил. В § 8 на частном примере было показано, как, исходя из предположения о релятивистской инвариантности уравнения движения, можно получить закон преобразования силы при переходе от одной системы координат к другой. Обобщим этот метод на более общий случай.

Как обычно, система координат K' движется относительно системы K в направлении положительных значений оси X со скоростью v. Рассмотрим движение материальной точки под действием заданных сил. Пусть проекции силы в системе координат K' равны (F'_x, F'_y, F'_z), а в K – (F_x, F_y, F_z). В общем случае соответствующие проекции этих сил в различных системах координат не равны между собой. Однако между ними имеются вполне определенные соотношения, обеспечивающие инвариантность уравнений движения, т. е. их одинаковый вид в различных системах координат:

$$dp_x/dt = F_x,\ dp_y/dt = F_y,\ dp_z/dt = F_z, \tag{9.1}$$

$$dp'_x/dt' = F'_x,\ dp'_y/dt' = F'_y,\ dp'_z/dt' = F'_z. \tag{9.2}$$

Левые части этих уравнений преобразуем с помощью формул теории относительности для импульса и преобразований Лоренца:

$$p_x = \frac{p'_x + (E'/c^2)v}{\sqrt{1-\beta^2}},\ p_y = p'_y,\ p_z = p'_z, \tag{9.3}$$

где $E' = m'c^2$ – полная энергия материальной точки, $\beta = v/c$. Формулы (9.1) приводятся к виду:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt'}\left[\frac{p'_1 + (E'/c^2)\,v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\frac{dt'}{dt} =$$

$$= F'_x + \frac{vu'_y/c^2}{1+vu'_x/c^2}F'_y + \frac{vu'_z/c^2}{1+vu'_x/c^2}F'_z, \tag{9.4}$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}F'_y, \tag{9.5}$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = \frac{dp'_z}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}F'_z, \tag{9.6}$$

где (u'_x, u'_y, u'_z) – скорость точки в системе K'; F'_x, F'_y, F'_z в правые части (9.4)–(9.6) вошли в результате использования уравнений движения (9.2). При вычислении (9.4) принята во внимание формула

$$\frac{dE'}{dt'} = \mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}', \tag{9.7}$$

выражающая закон сохранения энергии в системе координат K'.

С помощью формул сложения скоростей

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2},\quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2} \tag{9.8}$$

выражение (9.4) приведем к виду

$$F_x = F'_x + \frac{vu_y/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}F'_y + \frac{vu_z/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}F'_z. \tag{9.9}$$

Для упрощения (9.5) и (9.6) необходимо важное соотношение, которое получается из формул для преобразования скоростей. Запишем прямые и обратные преобразования, например y-проекции скорости:

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2},\quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-vu_x/c^2}.$$

Перемножая почленно левые и правые части этих равенств и сокращая полученные равенства на общий множитель $u_yu'_y$, находим

$$\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right) = 1-\beta^2. \tag{9.10}$$

Учитывая (9.10), преобразуем формулы (9.5) и (9.6):

$$F_y = \frac{1-vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}F'_y, \tag{9.11}$$

$$F_z = \frac{1-vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}F'_z. \tag{9.12}$$

Таким образом, с помощью формул (9.9), (9.11) и (9.12) сила в системе координат K выражена через силу в системе K'. По принципу относительности нетрудно написать и обратные формулы преобразования.

При выводе этих формул не делалось никаких предположений о свойствах исходных сил – они могут зависеть от координат, времени и скорости. Кроме того, не предполагалось, что в какой-то из систем координат частица является покоящейся, поскольку на скорость частиц не налагалось ограничений. Полученные формулы показывают, что *зависимость сил от скорости в релятивистской теории неизбежна:* даже если в какой-то системе координат ее нет (например, F'_x, F'_y, F'_z), в других системах координат она неизбежно появляется (в данном случае F_x, F_y, F_z зависят от скорости u_x, u_y, u_z частицы).

Запишем формулы преобразования сил в векторной форме. Для этого введем следующие обозначения:

$$\mathbf{\Phi} = (F'_x,\ F'_y/\sqrt{1-\beta^2},\ F'_z/\sqrt{1-\beta^2}), \tag{9.13}$$

$$\mathbf{G} = [0,\ -(v/c^2)\,F'_z/\sqrt{1-\beta^2},\ (v/c^2)\,F'_y/\sqrt{1-\beta^2}]. \tag{9.14}$$

Нетрудно проверить, что с помощью (9.13) и (9.14) формулы (9.9), (9.11) и (9.12) записываются в виде векторного равенства

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Phi} + \mathbf{u}\times\mathbf{G}. \tag{9.15}$$

Так как $\mathbf{F}$ – вектор, то и вся правая часть – вектор. Равенство справедливо для произвольных $\mathbf{u}$. Следовательно, каждое из слагаемых в правой части является вектором. Поскольку $\mathbf{u}\times\mathbf{G}$ и $\mathbf{u}$ – векторы, заключаем, что $\mathbf{G}$ тоже вектор. Тем самым доказано, что определяемые равенствами (9.13) и (9.14) величины $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{G}$ являются векторами.

Сила Лоренца. Предположим, что в системе координат K' имеется только электрическое поле и, следовательно, сила (F'_x, F'_y, F'_z) не зависит от скорости $\mathbf{u}'$ частицы. Тогда $\mathbf{\Phi}$ [см. (9.13)] не зависит от скорости $\mathbf{u}$ частицы и представляет собой электрическую силу в системе координат K.

Аналогично заключаем, что вектор $\mathbf{G}$ также не зависит от скорости $\mathbf{u}$ частицы, а может зависеть лишь от координат и времени. Поэтому зависимость силы от скорости частицы содержится во втором слагаемом (9.15):

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{u}\times\mathbf{G}. \tag{9.16}$$

Это магнитная сила, направленная перпендикулярно скорости частицы и вектору $\mathbf{G}$, представляющему магнитное поле, которое действует на движущуюся частицу.

Поскольку Φ в формуле (9.15) представляет электрическую силу, действующую на заряд q, то напряженность

$$\mathbf{E} = \Phi/q. \tag{9.17}$$

Аналогично, индукция магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mathbf{G}/q. \tag{9.18}$$

С учетом (9.17) и (9.18) формула (9.15) для силы, действующей на точечный заряд, записывается в виде

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}} \tag{9.19}$$

Это – **сила Лоренца.** *Первое слагаемое в правой части характеризует силу, действующую на точечный заряд со стороны электрического поля, а второе – со стороны магнитного.*

Индукция магнитного поля. Поскольку сила, действующая со стороны магнитного поля на движущийся заряд, описывается вектором **B**, то естественно назвать этот вектор напряженностью магнитного поля. Однако историческое название напряженности магнитного поля закрепилось за другим вектором, который обозначается **H**. Этот вектор не является полевой характеристикой магнитного поля, он учитывает свойства материальной среды, в которой поле существует. В частности, при заданном **H** вектор **B**, а следовательно, и сила, действующая на движущийся заряд, могут иметь самые различные значения (см. § 38). За вектором **B** установилось название **индукции магнитного поля.**

Сила Ампера. Пусть имеется совокупность точечных зарядов, концентрация которых равна n. Тогда в элементе объема dV имеется $n\,dV$ зарядов. Если все они движутся со скоростью $\mathbf{u}$ и на каждый из них действует магнитная сила, определяемая вторым слагаемым в (9.19), то на заряды в элементе объема dV действует сила

$$d\mathbf{F}_m = nq\,dV\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \tag{9.20}$$

В дальнейшем нет необходимости у силы писать индекс m, показывающий, что эта сила «магнитная». Сила действует одинаково на заряд независимо от своего происхождения. Учитывая, что

$$nq = \rho,\ nq\mathbf{u} = \rho\mathbf{u} = \mathbf{j}, \tag{9.21}$$

где ρ и $\mathbf{j}$ – плотность зарядов и плотность тока [см. (4.4) и (4.11)], запишем формулу (9.20) в виде

$$d\mathbf{F} = \rho\mathbf{u} \times \mathbf{B}\,dV,$$

или

$$\boxed{d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}\,dV,} \tag{9.22}$$

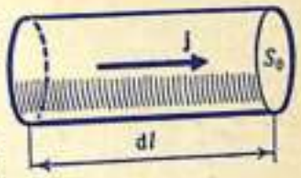
Соотношение (9.23) называется **законом Ампера** и определяет силу, действующую на элемент электрического тока с плотностью j, заключенного в объеме dV.

Переход от объемных токов к линейным. Формулу (9.23) можно представить и в другом виде. Допустим, что электрический ток течет по тонкому проводнику, площадь поперечного сечения которого S_0. Рассмотрим элемент длины dl проводника (рис. 23). Объем этого элемента $dV = S_0\,dl$. Из-за малости площади поперечного сечения проводника можно считать, что плотность j тока через сечение проводника постоянна и, следовательно,

$$I = S_0 j. \tag{9.24}$$

Пусть dl совпадает по направлению с вектором плотности тока, текущего по этому участку проводника. Тогда

$$\mathbf{j}\,dV = \mathbf{j}S_0\,d\mathbf{l} = I\,d\mathbf{l}. \tag{9.25}$$



23

Переход от объемных токов к линейным: $\mathbf{j}dV = j S_0 d\mathbf{l} = I d\mathbf{l}$

Электрический ток в каждой точке пространства имеет, вообще говоря, различную плотность и поэтому называется **объемным.** Сила, действующая на такой ток в элементе объема dV, определяется формулой (9.23). Если же ток проходит по тонким проводникам (в пределе бесконечно тонким в физическом смысле), то он называется линейным. В этом случае можно говорить об элементе тока на длине dl проводника. Переход от формул, выведенных для объемных токов, к формулам для линейных токов дается соотношением (9.25), которое целесообразно представить в виде

$$\boxed{\mathbf{j}\,dV \rightleftarrows I\,d\mathbf{l}.} \tag{9.26}$$

Стрелки показывают, что эта замена позволяет перейти как от формул для объемных токов к формулам для линейных токов, так и наоборот.

В частности, формула (9.23) для линейных токов принимает вид

$$\boxed{d\mathbf{F} = I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.} \tag{9.27}$$

○ **Формулы преобразования силы получаются из требования инвариантности релятивистского уравнения движения.**

В релятивистской теории неизбежна зависимость сил от скорости. Даже если в какой-то системе координат сила не зависит от скорости, в другой системе координат, движущейся относительно первой, появляется зависимость силы от скорости.

○ **Если формулы преобразования силы получаются из требования инвариантности релятивистского уравнения движения, то нельзя ли отсюда заключить, что закон преобразования силы является физически бессодержательным утверждением, простой тавтологией требования релятивистской инвариантности?**

Почему непосредственно из вида формул (9.13) и (9. 14) нельзя заключить, что Φ и G – векторы?

Формула (9.27) отражает основную идею Ампера – свести взаимодействие контуров с током к взаимодействию бесконечно малых элементов токов.

Магнитное поле прямолинейного тока. Сравнивая формулы (9.27) и (8.19), заключаем, что *ток, текущий по бесконечному прямолинейному проводнику, создает магнитное поле, силовые линии которого являются окружностями, концентрическими току и лежащими в плоскостях, перпендикулярных току.* Индукция магнитного поля на расстоянии r от центра проводника с током выражается формулой

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}, \tag{9.28}$$

полученной с помощью теории относительности из закона Кулона с учетом принципа суперпозиции для напряженности электрического поля и инвариантности заряда. *Из принципа суперпозиции для напряженности электрического поля можно сделать заключение о справедливости также и принципа суперпозиции для индукции магнитного поля.*

§ 10. Закон Био – Савара

Рассматриваются полевая трактовка взаимодействия токов и закон Био – Савара.

Взаимодействие элементов тока. Закон взаимодействия токов был открыт экспериментально задолго до создания теории относительности. Он значительно сложнее закона Кулона, описывающего взаимодействие неподвижных точечных зарядов. Этим и объясняется, что в его исследовании приняли участие многие ученые, а существенный вклад внесли Био (1774–1862), Савар (1791–1841), Ампер (1775–1836) и Лаплас (1749–1827).

В 1820 г. Х. К. Эрстед (1777–1851) открыл действие электрического тока на магнитную стрелку. В этом же году Био и Савар сформулировали закон для силы dF, с которой элемент тока $I\,dl$ действует на магнитный полюс, удаленный на расстояние r от элемента тока:

$$dF \sim I\,dl\,\varphi(\alpha)\,f(r), \tag{10.1}$$

где α – угол, характеризующий взаимную ориентацию элемента тока и магнитного полюса. Функция $\varphi(\alpha)$ вскоре была найдена экспериментально. Функция $f(r)$ теоретически была выведена Лапласом в виде

$$f(r) \sim 1/r^2. \tag{10.2}$$

Таким образом, усилиями Био, Савара и Лапласа была найдена формула, описывающая силу действия тока на магнитный полюс. В окончательном виде закон Био – Савара – Лапласа был сформулирован в 1826 г. в виде формулы для силы, действующей на магнитный полюс, поскольку понятия напряженности поля еще не существовало.

В 1820 г. Ампер открыл взаимодействие токов – притяжение или отталкивание параллельных токов. Им была доказана эквивалентность соленоида и постоянного магнита. Это позволило четко поставить задачу исследования: свести все магнитные взаимодействия к взаимодействию элементов тока и найти закон их взаимодействия как фундаментальный закон, играющий в магнетизме роль, аналогичную закону Кулона в электричестве. Ампер по своему образованию и склонностям был теоретиком и математиком. Тем не менее при исследовании взаимодействия элементов тока он выполнил очень скрупулезные экспериментальные работы, сконструировав ряд хитроумных устройств. Станок Ампера для демонстрации сил взаимодействия элементов тока и их зависимости от углов до сих пор используется на лекциях. В результате Ампер открыл закон взаимодействия элементов тока. К сожалению, ни в публикациях, ни в его бумагах не осталось описания пути, каким он пришел к открытию. Однако формула Ампера для силы отличается от (10.3) наличием в правой части полного дифференциала. Это отличие несущественно при вычислении силы взаимодействия замкнутых токов, поскольку интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру равен нулю. Учитывая, что в экспериментах измеряется не сила взаимодействия элементов тока, а сила взаимодействия замкнутых токов, можно с полным основанием считать Ампера автором закона магнитного взаимодействия токов. Используемая в настоящее время формула для взаимодействия элементов тока была получена в 1844 г. Грассманом (1809–1877) и имеет в современных обозначениях вид

$$\boxed{d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\,d\mathbf{l}_2 \times (I_1\,d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3},} \tag{10.3}$$

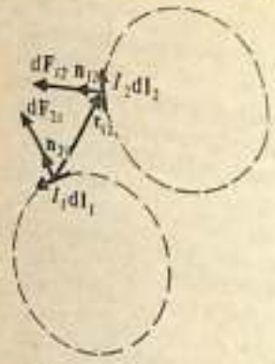
где $d\mathbf{F}_{12}$ – сила, с которой элемент тока $I_1\,d\mathbf{l}_1$ действует на элемент тока $I_2\,d\mathbf{l}_2$; $\mathbf{r}_{12}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента тока $I_1\,d\mathbf{l}_1$ к $I_2\,d\mathbf{l}_2$ (рис. 24); пунктиром обозначены замкнутые контуры, взаимодействие элементов тока в которых не рассматривается.

Сила $d\mathbf{F}_{21}$, с которой элемент тока $I_2\,d\mathbf{l}_2$ действует на $I_1\,d\mathbf{l}_1$, дается, конечно, той же формулой (10.3), но с заменой индекса 2 на 1:

$$d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\,d\mathbf{l}_1 \times (I_2\,d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3}. \tag{10.4}$$

На рис. 24 единичными векторами $\mathbf{n}_{21}$ и $\mathbf{n}_{12}$ показано направление сил $d\mathbf{F}_{21}$ и $d\mathbf{F}_{12}$, перпендикулярных соответствующим элементам тока. Эти силы, вообще говоря, не коллинеарны друг другу. Следовательно, *взаимодействие элементов тока не удовлетворяет третьему закону Ньютона:*

$$\boxed{d\mathbf{F}_{21} + d\mathbf{F}_{12} \neq 0.} \tag{10.5}$$



24

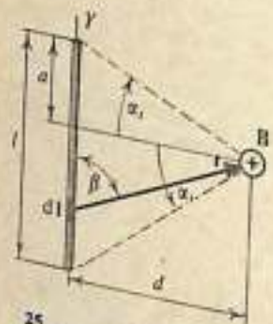
Взаимодействие элементов тока

Сила, с которой ток I_1, текущий по замкнутому контуру L_1, действует на замкнутый контур L_2 с током I_2, на основании (10.3) равна

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}. \qquad (10.6)$$

Силы токов I_1, I_2 вынесены за знак интеграла, поскольку постоянны во всех точках соответствующих контуров L_1 и L_2 интегрирования. Аналогичный вид имеет формула для силы $\mathbf{F}_{21}$, действующей на замкнутый контур с током I_1. *Для сил взаимодействия замкнутых контуров с током третий закон Ньютона* (см. § 39) выполняется:

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0. \qquad (10.7)$$



25

Магнитная индукция прямолинейного участка тока конечной длины

Об экспериментальной проверке закона взаимодействия. Строго говоря, *закон взаимодействия элементов тока* (10.3) *нельзя проверить экспериментально*, потому что не существует изолированных элементов тока $I\,d\mathbf{l}$, силу взаимодействия между которыми можно было бы измерить. Каждый элемент тока – это часть замкнутого контура тока и поэтому экспериментально проверяется лишь закон взаимодействия замкнутых токов (10.6). Из справедливости (10.6) не следует, однако, справедливость (10.4), потому что к (10.4) можно добавить любую функцию, которая при интегрировании по замкнутым контурам после подстановки в (10.6) дает нуль.

Электрический ток обусловлен движением зарядов. Поэтому формула (10.4) выражает также *закон магнитного взаимодействия движущихся зарядов, который из нее нетрудно получить и проверить экспериментально*, поскольку силу взаимодействия между движущимися зарядами можно измерить. Наиболее же полной экспериментальной проверкой этой формулы является согласие с опытом ее следствий, которые весьма многочисленны.

● Экспериментальное подтверждение формул для магнитного поля, полученных с помощью релятивистских преобразований из формул для электрического поля, служит не только доказательством существования магнитного поля, но и подтверждает его релятивистскую природу.

Полевая трактовка взаимодействия. В полной аналогии с электростатикой взаимодействие элементов тока представляется двумя стадиями: элемент тока $I_1\,d\mathbf{l}_1$ в точке нахождения элемента тока $I_2\,d\mathbf{l}_2$ создает магнитное поле, взаимодействие с которым элемента $I_2\,d\mathbf{l}_2$ приводит к возникновению силы $d\mathbf{F}_{12}$. Действие магнитного поля с индукцией $\mathbf{B}$ на $I\,d\mathbf{l}$ описывается формулой (9.27). С ее учетом две стадии взаимодействия описываются так:

1) *элемент тока* $I_1\,d\mathbf{l}_1$ *создает в точке нахождения элемента тока* $I_2\,d\mathbf{l}_2$ *магнитное поле с индукцией*

$$d\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1\,d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}; \qquad (10.8)$$

2) *на элемент тока* $I_2\,d\mathbf{l}_2$, *находящийся в точке с магнитной индукцией* $d\mathbf{B}_{12}$, *действует сила*

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2\,d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}_{12}. \qquad (10.9)$$

Закон Био – Савара. Соотношение (10.8), описывающее порождение магнитного поля током, называется **законом Био – Савара.** Для замкнутого тока I

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \qquad (10.10)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента тока $I\,d\mathbf{l}$ к точке, в которой вычисляется индукция $\mathbf{B}$ магнитного поля. Интегрирование в (10.10) производится по замкнутому контуру тока. Ток предполагается линейным. Переход к объемным токам совершается в соответствии с правилом (9.26). Для объемных токов закон Био – Савара (10.10) принимает вид

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \qquad (10.11)$$

Здесь интегрирование производится по всем областям пространства, где имеются объемные токи, характеризуемые плотностью тока $\mathbf{j}$.

Сила взаимодействия прямолинейных токов. Элемент тока $I_1\,dx_1$ (рис. 22) в точке нахождения элемента $I_2\,dx_2$ создает поле с индукцией dB_{12}, которая направлена перпендикулярно плоскости чертежа к нам, а по модулю равна

$$dB_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1\,dx_1 \sin\alpha}{r_{12}^2}. \qquad (10.12)$$

Следовательно, индукция магнитного поля, создаваемого прямо-

линейным током I_1, текущим по бесконечному проводнику в точке нахождения элемента тока $I_2\,dx_2$ [см. (10.10)], выражается формулой

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha\,dx_1}{r_{12}^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r}, \tag{10.13}$$

где для вычисления интеграла используется замена переменных, проведенная при получении формулы (8.5). Формула (10.13) совпадает с (9.28).

Формула Ампера приводит к заключению, что сила dF_{12} в магнитном поле с индукцией (10.13) действует на элемент тока $I_2\,dl_2$ перпендикулярно проводнику с током I_2 и направлена к току I_1, т. е. является силой притяжения:

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}dx_2. \tag{10.14}$$

Формула (10.14) совпадает с (8.19).

Пример 10.1. *Определить индукцию магнитного поля, создаваемого конечным прямолинейным участком проводника длиной l, по которому течет ток I* (рис. 25).

Напряженность поля от каждого элемента проводника направлена перпендикулярно плоскости чертежа и в соответствии с законом (10.10) равна

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

поэтому $d\mathbf{l}\times\mathbf{r}$ перпендикулярно плоскости чертежа. Тогда

$$|d\mathbf{l}\times\mathbf{r}| = dl\,r\sin(d\hat{\mathbf{l}},\mathbf{r}) = dl\,r\sin\beta = dy\,d,$$

поэтому

$$B = \frac{\mu_0 I d}{4\pi}\int_{-(l-a)}^{a}\frac{dy}{(d^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2).$$

С помощью этой формулы можно вычислить индукцию поля любого контура с током, состоящего из прямолинейных отрезков.

Пример 10.2. *Определить индукцию магнитного поля на оси кругового тока I радиусом r_0* (рис. 26).

Воспользуемся законом (10.11):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}$, $d\mathbf{l}\times\mathbf{r} = d\mathbf{l}\times\mathbf{r}_0 + d\mathbf{l}\times\mathbf{h}$. При интегрировании модуль $\mathbf{r}$ не изменяется, поэтому

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left(\oint_L d\mathbf{l}\times\mathbf{r}_0 + \oint_L d\mathbf{l}\times\mathbf{h}\right). \tag{10.15}$$

Поскольку $\mathbf{h}$ – постоянный вектор, находим

$$\oint_L d\mathbf{l}\times\mathbf{h} = \left(\oint_L d\mathbf{l}\right)\times\mathbf{h} = 0,$$

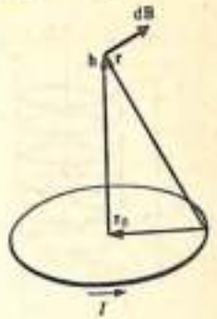
так как $\oint_L d\mathbf{l} = 0$. Другой интеграл, входящий в (10.15), вычисляется следующим образом:

$$\oint_L d\mathbf{l}\times\mathbf{r}_0 = \oint_L \mathbf{n}r_0\,dl = \mathbf{n}r_0\oint_L dl = \mathbf{n}r_0 2\pi r_0,$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный плоскости, в которой протекает ток I.

Тогда

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{r_0^2}{(r_0^2+h^2)^{3/2}}\mathbf{n}. \tag{10.16}$$



26

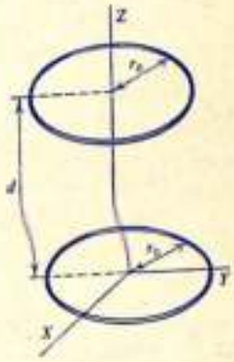
Магнитная индукция на оси витка с током

Пример 10.3. *Кольцами Гельмгольца называют два коаксиальных кольцевых проводника одинакового радиуса, расположенных в параллельных плоскостях, расстояние d между которыми равно радиусу колец.*

Доказать, что магнитное поле на оси колец Гельмгольца на середине расстояния между ними однородно с высокой точностью.

Поместим начало декартовой системы координат в центр одного из колец и ось Z направим вдоль оси колец (рис. 27). Индукция поля на оси колец в точке с координатой z в соответствии с (10.16) равна

$$B_z = \frac{\mu_0 I r_0^2}{2}\left[\frac{1}{(z^2+r_0^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(z-d)^2+r_0^2]^{3/2}}\right], \tag{10.17}$$



27

К расчету взаимодействия двух круговых токов

где I – сила тока в кольце.

Неоднородность B_z в первом приближении характеризуется первой производной:

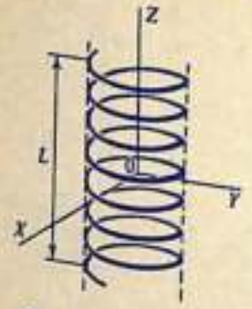
$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{3\mu_0 I r_0^2}{2}\left[\frac{-z}{(z^2+r_0^2)^{5/2}} - \frac{z-d}{[(z-d)^2+r_0^2]^{5/2}}\right]. \tag{10.18}$$

При $z = d/2$ получаем $\partial B_z/\partial z = 0$, тогда

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \frac{3\mu_0 I r_0^2}{2}\left\{\frac{5z^2}{(z^2+r_0^2)^{7/2}} - \frac{1}{(z^2+r_0^2)^{5/2}} + \frac{5(z-d)^2}{[(z-d)^2+r_0^2]^{7/2}} - \frac{1}{[(z-d)^2+r_0^2]^{5/2}}\right\}. \tag{10.19}$$

Для колец Гельмгольца $d = r_0$ и при $z = d/2$ $(\partial^2 B_z/\partial z^2) = 0$. Это показывает, что поле вблизи точки $z = d/2$ на оси колец Гельмгольца действительно однородно с высокой степенью точности.

● **Силы взаимодействия элементов тока не удовлетворяют третьему закону Ньютона. Силы взаимодействия замкнутых контуров с током удовлетворяют третьему закону Ньютона.**



28

Соленоид конечной длины

Пример 10.4. *Имеется прямой круглый цилиндр длиной L, состоящий из n витков тонкого провода, прилегающих плотно друг к другу. Найти индукцию на оси соленоида, если через его витки течет ток I.*

Поскольку витки очень плотно прилегают друг к другу, можно с достаточной точностью считать, что каждый виток создает поле на оси соленоида в соответствии с формулой (10.1[illegible]). Плотность намотки равна n/L. Можно принять, что на длине dz соленоида течет ток $(In/L)\,dz$. Помещая начало системы координат в точку на соленоида на половине его длины (рис. 28), находим с помощью формулы (10.16), что индукция на оси соленоида в точке z

$$B_z = \frac{\mu_0 n r_0^2 I}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[(z-z')^2 + r_0^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2L} \left\{ \frac{-z + L/2}{[(z - L/2)^2 + r_0^2]^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{z + L/2}{[(z + L/2)^2 + r_0^2]^{1/2}} \right\}. \qquad (10.20)$$

Для очень длинного соленоида ($L \to \infty$) в точках $z \ll L/2$ из (10.20) получаем

$$\lim_{L\to\infty} B_z = \mu_0 n I/L. \qquad (10.21)$$

Поле бесконечно длинного соленоида не только постоянно вдоль оси, но и однородно по его сечению [см. (8.38)].

○ Поскольку элементов тока в изолированном виде не существует, в каком смысле можно говорить о прямой экспериментальной проверке формулы для взаимодействия элементов тока?

Какой вывод можно сделать из того факта, что силы взаимодействия элементов тока не удовлетворяют третьему закону Ньютона, а замкнутых токов — удовлетворяют?

§ 11. Преобразование полей

Исходя из инвариантности уравнения движения заряда в электромагнитном поле, выводится закон преобразования полей.

Инвариантность выражения для силы в электромагнитном поле. Выражение (9.19) для силы Лоренца, действующей на точечный заряд в электромагнитном поле, получено из требования инвариантности релятивистского уравнения движения. Следовательно, *это выражение также должно быть релятивистски инвариантным, т. е. иметь одинаковый вид во всех системах координат.* Таким образом, в системах координат K и K' выражения для сил имеют вид:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \qquad (11.1)$$

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}'). \qquad (11.2)$$

Используя релятивистскую инвариантность выражения для силы, представленной формулами (11.1) и (11.2), и учитывая (9.9), (9.11) и (9.12), можно получить соотношения между векторами электрических и магнитных полей в различных системах координат.

Частный случай преобразования векторов полей уже был рассмотрен ранее, а именно: было показано, что если в системе координат K' имеется только электрическая напряженность, то в системе K появляется также и магнитная индукция. Можно было бы аналогично показать, что если в некоторой системе координат имеется только магнитная индукция, то в другой появляется, вообще говоря, и напряженность электрического поля. Рассмотрим связь между электрическими и магнитными полями в общем случае.

Преобразование полей. Подставим в формулу (9.11) вместо F_y и F'_y их выражения из (11.1) и (11.2):

$$E_y + (u_z B_x - u_x B_z) = \frac{1 - v u_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} [E'_y + (u'_z B'_x - u'_x B'_z)]. \qquad (11.3)$$

Исключая из (11.3) величины u'_x и u'_z с помощью формул сложения скоростей

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - v u_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - v u_x/c^2} \qquad (11.4)$$

и группируя все члены в левой части (11.3), находим

$$\left(E_y - \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{v B'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \left(-B_z + \frac{v E'_y}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{B'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) u_x + \qquad (11.5)$$

$$+ (B_x - B'_z)\, u_z = 0.$$

Это равенство справедливо при произвольных значениях u_x и u_z. Следовательно, выражения, стоящие в скобках (11.5), по отдельности равны нулю. Приравнивая их нулю, получаем формулы преобразования для векторов поля:

$$E_y = \frac{E'_y + v B'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (11.6) \qquad B_x = B'_x, \quad (11.7) \qquad B_z = \frac{B'_z + (v/c^2) E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (11.8)$$

Аналогично, исходя из (9.12), получаем формулы преобразования для других компонент:

$$E_z = \frac{E'_z - v B'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (11.9) \qquad B_x = B'_x, \quad (11.10) \qquad B_y = \frac{B'_y - (v/c^2) E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (11.11)$$

Вывод преобразования x-проекции силы удобно обосновать на формуле (9.4), записанной в виде

$$F_x = \frac{1}{1 + v u'_x/c^2}\left[F'_x + \frac{v}{c^2}(\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}')\right]. \tag{11.12}$$

Поступая так же, как и в предыдущих случаях, приводим равенство (11.12) к форме

$$\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)\left[E_x + (u_y B_z - u_z B_y)\right] - \left[E'_x + (u'_y B'_z - u'_z B'_y)\right] = \frac{v}{c^2}(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}'), \tag{11.13}$$

где $\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}' = q\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}'$. Воспользовавшись формулами (11.8) и (11.11), находим, что

$$E_x = E'_x. \tag{11.14}$$

Таким образом, формулы преобразования для векторов электромагнитного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & B_x &= B'_x, \\ E_y &= \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, & B_y &= \frac{B'_y - (v/c^2)E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ E_z &= \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, & B_z &= \frac{B'_z + (v/c^2)E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Обратные формулы преобразования векторов поля по принципу относительности получают из формул (11.15) заменой $v \to -v$, величин со штрихом на величины без штриха и наоборот.

Применения формул (11.15). Формулы (11.15) позволяют найти векторы электромагнитного поля в любой инерциальной системе координат, если только они известны в какой-либо одной из них.

В качестве примера изучим поле заряженной бесконечной нити. Нить неподвижна и расположена в системе координат K' вдоль оси X'. Следовательно, в этой системе координат имеется только электрическое поле, напряженность которого дается формулами (8.5) с учетом определения напряженности. Поэтому вместо (8.5) для напряженности электрического поля получаем выражения:

$$E'_x = 0,\ E'_y = \rho' S_0/(2\pi\varepsilon_0 y'_0),\ E'_z = 0. \tag{11.16}$$

Ось Y может иметь любое направление, перпендикулярное нити. Из формулы (11.16) заключаем, что напряженность электрического поля заряженной бесконечной нити направлена по перпендикулярам к нити и убывает обратно пропорционально первой степени расстояния от нее. Магнитное поле в системе координат K' отсутствует, поскольку заряды неподвижны.

В системе координат K нить движется вдоль своей длины в направлении положительных значений оси X со скоростью v. Напряженность электрического поля на основании (11.15) равна

$$E_x = 0,\ E_y = E'_y/\sqrt{1-\beta^2} = \rho' S_0/(2\pi\varepsilon_0 y'_0\sqrt{1-\beta^2}),\ E_z = 0, \tag{11.17}$$

что эквивалентно (8.8), поскольку напряженность равна отношению силы к заряду.

Формулы (11.15) показывают, что наряду с электрическим полем движущаяся заряженная нить создает в окружающем ее пространстве также и магнитное поле, индукция которого

$$B_x = 0,\ B_y = 0,\ B_z = \frac{(v/c^2)E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v\rho' S_0}{2\pi\varepsilon_0 c^2 y'_0\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{11.18}$$

что эквивалентно формуле (8.15) с учетом (8.9), если только от силы f_y перейти к индукции магнитного поля в соответствии с формулами (9.18) и (9.16), т. е. разделить f_y в (8.15) на qv. Очевидно, что магнитные силовые линии являются концентрическими окружностями, лежащими в перпендикулярных нити плоскостях (рис. 29); центр окружностей лежит на нити.

При решении конкретных задач необходимо выбрать такую систему координат, в которой электромагнитное поле было бы наиболее простым, что упрощает решение задачи. *Не следует думать, что всегда существует такая система координат, где поле сведется либо к электрическому, либо к магнитному. Существуют такие конфигурации электромагнитного поля, когда в любой системе координат существуют одновременно и электрическое и магнитное поля.* Общее рассмотрение данного вопроса производится с помощью анализа инвариантов электромагнитного поля относительно преобразования Лоренца (см. § 62).

Поле точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно. Совместим начало декартовой системы координат K' с точечным зарядом q. В этой системе напряженность электрического поля описывается законом Кулона, а магнитное поле отсутствует:

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}'}{r'^3},\ \mathbf{B}' = 0, \tag{11.19}$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. В системе координат K заряд q движется со скоростью v в направлении положительных значений оси X. Оси координат системы K' ориентированы таким образом, что в момент времени $t' = t = 0$ они совпадают с соответствующими осями системы K. Подставляя (11.19) в (11.15) и используя преобразования Лоренца, получаем

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3} = \frac{q\gamma(x - vt)}{4\pi\varepsilon_0\left[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}, \tag{11.20}$$



29

Силовые линии магнитного поля движущейся вдоль своей длины заряженной нити

где

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \qquad (11.21)$$

Обозначая x_q координату заряда q в системе K в момент t, когда определяется напряженность поля в точке (x, y, z), перепишем (11.20) в виде

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma(x - x_q)}{[\gamma^2(x - x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \qquad (11.22)$$

поскольку $x_q = vt$ – закон движения заряда в системе K.

Аналогично находим и две другие компоненты напряженности электрического поля:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma y}{[\gamma^2(x - x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \qquad (11.23)$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma z}{[\gamma^2(x - x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \qquad (11.24)$$

Индукция магнитного поля определяется с помощью формул (11.15). Результат удобнее записать в векторной форме:

$$\mathbf{B} = (1/c^2)\,\mathbf{v} \times \mathbf{E}, \qquad (11.25)$$

где $\mathbf{E}$ определяется формулами (11.22)–(11.24). Видно, что линии $\mathbf{B}$ образуют концентрические окружности с центром на оси X, вдоль которой движется заряд q.

Конфигурация поля заряда, движущегося равномерно и прямолинейно, с течением времени не изменяется, а меняется лишь положение этой конфигурации относительно неподвижной системы координат K, т. е. неизменная конфигурация поля движется вместе с зарядом. Изучим ее в тот момент, когда заряд находится в начале системы координат K, т. е. при $x_q = 0$. В этом случае [см. (11.22)–(11.24)]

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma \mathbf{r}}{(\gamma x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \qquad (11.26)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный от точки нахождения заряда q в точку, где определяется $\mathbf{E}$. Таким образом, напряженность направлена вдоль радиус-вектора, однако ее значение зависит от направления радиус-вектора. Обозначим θ – угол между направлениями скорости $\mathbf{v}$ заряда и радиус-вектора. Тогда $x = r\cos\theta$, $y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta$, $\gamma x^2 + y^2 + z^2 = r^2\gamma^2(1 - \beta^2\sin^2\theta)$, $\beta = v/c$ и формула (11.26) принимает вид

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}.$$

Отличие электрического поля движущегося заряда от поля неподвижного заряда сводится к сильной зависимости напряженности поля движущегося заряда от направления. По линии движения заряда ($\theta = 0$; $\theta = \pi$) и перпендикулярно ей ($\theta = \pm\pi/2$) напряженность соответственно равна:

$$E_\parallel = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1 - \beta^2), \qquad (11.27) \qquad E_\perp = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \qquad (11.28)$$

При релятивистских скоростях ($\beta \approx 1$) *напряженность поля движущегося заряда на заданном от него расстоянии мала по линии движения заряда и велика в перпендикулярном направлении, т. е. поле как бы концентрируется вблизи плоскости, проведенной через заряд перпендикулярно его скорости.*

● **Если в некоторой системе координат имеется только электрическое поле, то в другой появляется также и магнитное, и наоборот. Подходящим выбором системы отсчета можно постараться добиться наиболее простой конфигурации электрического и магнитного полей или устранить одно из них. Однако не всегда существует такая система отсчета, где поле сводится либо к электрическому, либо к магнитному.**

○ Какими способами можно, исходя из формул преобразования величин от системы K' к системе K, получить формулы преобразования тех же величин от системы K к системе K'? На примере формул (11.15) проверьте, что оба способа приводят к одинаковому результату. Является ли поле быстро движущегося точечного заряда центральным? центрально-симметричным?

Задачи

1.1. Вычислить $\operatorname{div}\mathbf{r}$.

1.2. Вычислить $\operatorname{grad}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ – постоянный вектор.

1.3. Вычислить $\operatorname{div}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ – постоянный вектор.

1.4. Вычислить $\operatorname{div}(\mathbf{r}/r)$.

1.5. Вычислить $\operatorname{div}[\mathbf{A}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{B})]$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – постоянные векторы.

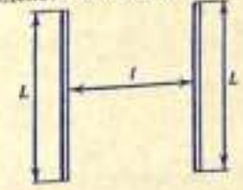
1.6. Чему равна индукция магнитного поля в центре квадратного контура со стороной a, по которому протекает ток I?

1.7. Проводник намотан по спирали на цилиндрический изолятор радиусом a и образует n полных витков. Угол подъема спирали равен α. Определить магнитную индукцию в центре цилиндрического изолятора, если по обмотке течет ток I.

1.8. Два точечных заряда q и $-q$ расположены соответственно в точках $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$. Найти напряженность электрического поля в точке (x, y, z).

1.9. Заряд распределен с линейной плотностью τ на длине L вдоль радиус-вектора, начинающегося в точке нахождения точечного заряда q. Расстояние от q до ближайшей к нему точки линейного заряда равно R. Найти силу, действующую на линейный заряд.

1.10. Два заряда распределены с одинаковой линейной плотностью τ на длине L параллельно и находятся на расстоянии l друг от друга (рис. 30). Найти силу взаимодействия между ними.

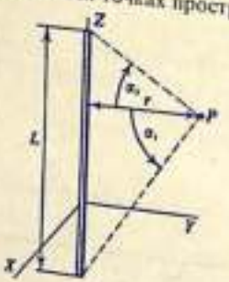


30

Два участка проводника конечной длины

1.11. Диск имеет поверхностный заряд с плотностью $\sigma = \alpha r^2$, где r — расстояние от центра диска. Радиус диска равен r_0. Найти напряженность поля на перпендикуляре к плоскости диска, проведенном через его центр на высоте h.

1.12. Две равномерно заряженные поверхности параллельны плоскости X, Y и пересекают ось Z в точках $z_1 = a_1$ и $z_2 = a_2 > a_1$. Поверхностные плотности зарядов одинаковы, но противоположны по знаку ($\sigma_1 = -\sigma_2$). Найти напряженность электрического поля во всех точках пространства.



31

Обозначения углов в выбранной системе координат

1.13. Найти напряженность электрического поля в точке P, создаваемого заряженной нитью длиной L (рис. 31). Линейная плотность заряда τ. Точка P лежит в плоскости Z, Y, что, однако, не ограничивает общности решения, поскольку поле аксиально симметрично.

1.14. Бесконечно длинный цилиндр кругового сечения заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. На оси цилиндра расположена бесконечно длинная нить, равномерно заряженная с линейной плотностью τ. При каком условии напряженность электрического поля вне цилиндра равна нулю?

1.15. Внутри шара радиусом a распределен заряд с объемной плотностью $\rho = \alpha\sqrt{r}$. Найти напряженность электрического поля.

1.16. Пучок круглого сечения радиусом 1 мм, состоящий из протонов, ускорен разностью потенциалов 10 кВ. Предполагая, что плотность протонов по сечению пучка постоянна, найти объемную плотность электрического заряда в пучке при токе $5 \cdot 10^{-6}$ А.

Ответы

1.1. 3. **1.2.** $\tau \cdot A/r$. **1.3.** 0. **1.4.** $2/r$. **1.5.** 2 (А · В). **1.6.** $2\sqrt{2}\,\mu_0 I/(\pi l)$. **1.7.** $\frac{\mu_0 I n}{2a}\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2 n^2 \operatorname{tg}^2\alpha}}$. **1.8.** $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(x-a)\,\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}} - \frac{(x+a)\,\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\}$. **1.9.** $F = \frac{q\tau L}{4\pi\varepsilon_0 R\,(R+L)}$. **1.10.** $F = \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\left(1+\frac{L^2}{l^2}\right)^{1/2} - 1\right]$. **1.11.** $E_h = \frac{\alpha h}{2\varepsilon_0} \times \left[\frac{r_0^2 + 2h^2}{(r_0^2+h^2)^{1/2}} - 2h\right]$. **1.12.** $E_z = 0$ при $z < a_1$ и $z > a_2$; $E_z = \sigma_1/\varepsilon_0$ при $a_1 < z < a_2$. **1.13.** $\mathbf{E} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}[(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\,\mathbf{i}_r - (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\,\mathbf{i}_z]$. **1.14.** $\tau = -2\pi r\sigma$. **1.15.** $\mathbf{E} = \frac{2\alpha}{7\varepsilon_0}\sqrt{r}\,\mathbf{r}$, $0 < r < a$; $\mathbf{E} = \frac{2\alpha a^{7/2}}{7\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ при $r > a$. **1.16.** $\rho = 1{,}15 \times 10^{-8}$ Кл/м^3.

§ 12 Постоянное электрическое поле

§ 13 Дифференциальная формулировка закона Кулона

§ 14 Потенциальность электростатического поля

§ 15 Электростатическое поле в вакууме

§ 16 Электростатическое поле при наличии проводников

§ 17 Электростатическое поле при наличии диэлектриков

§ 18 Энергия электростатического поля

§ 19 Силы в электрическом поле

2

Постоянное электрическое поле

Постоянные электрические поля не существуют в природе, поскольку нет неподвижных элементарных зарядов. Однако если в бесконечно малом физическом объеме сумма элементарных зарядов каждого знака примерно постоянна, а средняя скорость близка к нулю, то порождаемое ими поле на достаточно большом расстоянии от объема почти постоянно. Оно называется постоянным электрическим полем. Моделью заряда, порождающего такое поле, является неподвижный точечный заряд. Совокупность точечных зарядов может образовывать объемный, поверхностный и линейный заряды. При переходе к модели непрерывного распределения заряда эти совокупности характеризуются объемной, поверхностной и линейной плотностями заряда.

§ 12. Постоянное электрическое поле

Обсуждается идеальная модель постоянного электрического поля и границы ее применимости.

Неподвижный заряд. В электростатике изучаются электрические поля неподвижных зарядов. Предполагается, что заряды удерживаются в различных точках пространства силами неэлектростатического происхождения, природа которых в рамках электростатики не уточняется. Например, в электростатике неследуются распределение зарядов на поверхности проводника, создаваемое ими электрическое поле, действующие силы, но не рассматривается, почему эти заряды не покидают поверхности проводника. Природа сил, удерживающих заряды на поверхности проводника, не изучается в рамках электростатики. Аналогичный смысл имеет выражение «заряд q находится в точке (x, y, z) в вакууме». Предполагается, что заряд q как бы закреплен в точке (x, y, z) пространства, причем в непосредственной близости от заряда нет никаких материальных частиц (вакуум). Ясно, что такое представление является идеализацией.

Существо модели. Неподвижных элементарных зарядов не существует, а потому *не существует и постоянных полей*. Однако в большинстве явлений, изучаемых в классической теории электричества, наблюдается не поле отдельного элементарного заряда, а суперпозиция полей многих зарядов. Вклад поля отдельного элементарного заряда в суперпозицию полей весьма мал. К этому следует добавить, что напряженность электрического поля определяется как средняя величина по некоторому физически малому объему и физически малому отрезку времени. *Флуктуации среднего значения напряженности поля весьма малы. Именно эти средние значения и являются предметом изучения классической теории электричества и магнетизма.* Поэтому, строго говоря, *существенным для электростатики является не неподвижность зарядов, а постоянство во времени электрического поля*. Другими словами, в модели постоянных полей идеализацией является не постоянство поля, а неподвижность порождающих его зарядов.

Границы применимости модели. Поскольку модель основывается на существовании полей с очень малыми флуктуациями средних значений, а не на существовании неподвижных зарядов, *ее границы определяются требованиями малости вклада от отдельных элементарных зарядов в наблюдаемое поле*. Отсюда, например, следует, что электродинамика не применима к движению отдельных электронов в атоме. Их движение в атомах описывается квантовой теорией.

§ 13. Дифференциальная формулировка закона Кулона

Анализируются физические факторы, обусловливающие справедливость теоремы Гаусса. Дается дифференциальная формулировка закона Кулона и обсуждаются ее следствия.

Теорема Гаусса. Электростатическая теорема Гаусса устанавливает математическую связь между потоком напряженности сквозь замкнутую поверхность и зарядом, находящимся в объеме, ограничиваемом этой поверхностью.

Пусть точечный заряд q находится внутри объема V, ограниченного замкнутой поверхностью S (рис. 32). Рассмотрим поток N напряженности $\mathbf{E}$ сквозь эту поверхность:

$$N = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \tag{13.1}$$

Напомним, что для замкнутых поверхностей в качестве положительного всегда выбирается направление в сторону внешней нормали. Это означает, что элемент площади поверхности $d\mathbf{S}$ в (13.1) направлен во внешнюю сторону от объема (рис. 32). По закону Кулона

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{13.2}$$

Следовательно, интеграл в (13.1) можно представить так:

$$N = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot d\mathbf{S}\right). \tag{13.3}$$

Учтем соотношение

$$\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot d\mathbf{S} = \left|\frac{\mathbf{r}}{r}\right| dS\cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{S}}) = dS', \tag{13.4}$$

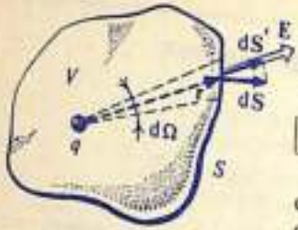
где dS' – проекция площади элемента $d\mathbf{S}$ на плоскость, перпендикулярную радиус-вектору $\mathbf{r}$. Из геометрии известно, что

$$d\Omega = dS'/r^2, \tag{13.5}$$

где $d\Omega$ – телесный угол, под которым элемент площади dS' виден из начала отсчета радиус-векторов, в данном случае совпадающим с местонахождением точечного заряда q. С учетом (13.4) и (13.5) выражение (13.3) принимает вид

$$N = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S d\Omega. \tag{13.6}$$

Полный телесный угол, под которым видна замкнутая поверхность из точек внутри ограничиваемого ею объема, равен 4π, т. е.



32

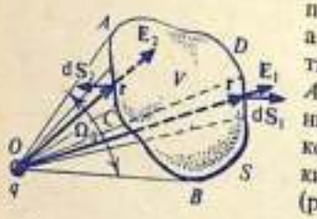
Вычисление потока вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность в случае нахождения точечного заряда внутри объема, ограничиваемого поверхностью

$$\oint_S d\Omega = 4\pi, \tag{13.7}$$

и поэтому из (13.6) получаем

$$\boxed{N = q/\varepsilon_0}. \tag{13.8}$$

Поток $\mathbf{E}$ сквозь замкнутую поверхность, если точечный заряд находился вне объема, ограничиваемого поверхностью, вычисляется аналогично (рис. 33) и определяется формулой (13.3). Однако теперь подынтегральное выражение принимает как положительные, так и отрицательные значения: в тех точках поверхности, где угол $(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{S}})$ меньше $\pi/2$, оно положительно, а где больше – отрицательно. Это означает, что на поверхности ADB подынтегральное выражение положительно, а на ACB – отрицательно. Поэтому элементы телесного угла (13.5) на поверхности ADB положительны, а на ACB – отрицательны. Обозначим телесный угол при вершине конуса, образованного касательными из точки O к рассматриваемой поверхности, Ω_0 (рис. 33). Тогда



33

Вычисление потока вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность в случае нахождения точечного заряда вне объема, ограничиваемого поверхностью

$$\oint_S \frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot d\mathbf{S}\right) = \int_{ADB} d\Omega - \int_{ACB} d\Omega = \Omega_0 - \Omega_0 = 0, \tag{13.9}$$

поскольку поверхности ACB и ADB видны из точки O под одним и тем же телесным углом Ω_0, но входят в интеграл с разными знаками. Когда точечный заряд находится вне объема, поток напряженности $\mathbf{E}$ сквозь замкнутую поверхность равен нулю:

$$N = 0. \tag{13.10}$$

Объединяя результаты (13.8) и (13.10), можно для (13.1) окончательно написать:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} q/\varepsilon_0, & \text{когда } q \text{ находится внутри объема, ограничиваемого } S; \\ 0, & \text{когда } q \text{ находится вне объема, ограничиваемого } S. \end{cases} \tag{13.11}$$

Утверждение, содержащееся в (13.11), составляет содержание **электростатической теоремы Гаусса** для точечного заряда.

● **Теорема Гаусса выражает связь между потоком напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность и зарядом в объеме, ограниченном этой поверхностью. Физической основой теоремы Гаусса является закон Кулона или, иначе, теорема Гаусса является интегральной формулировкой закона Кулона.**

Ее обобщение на систему точечных зарядов производится с помощью принципа суперпозиции. Если имеются точечные заряды q_i, то напряженность $\mathbf{E}$ поля в каждой точке является суммой напряженностей $\mathbf{E}_i$ полей, создаваемых каждым из точечных зарядов:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i. \tag{13.12}$$

Следовательно,

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}. \tag{13.13}$$

При вычислении каждого из интегралов, стоящих под знаком суммы в правой части (13.13), надо принять во внимание (13.11): для точечного заряда внутри объема соответствующий интеграл равен q_i/ε_0, а для заряда вне объема – нулю. Поэтому (13.13) принимает вид

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_V q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}Q, \tag{13.14}$$

где V у знака суммы означает, что в сумму входят только заряды, находящиеся внутри объема V. Полный заряд внутри объема V обозначен в (13.14) Q:

$$Q = \sum_V q_i. \tag{13.15}$$

Формула (13.14) с учетом определения (4.1) для объемной плотности ρ при непрерывном распределении зарядов сразу переписывается в виде

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}Q}, \tag{13.16}$$

где

$$Q = \int_V \rho\, dV \tag{13.17}$$

– полный заряд, заключенный в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью S. Утверждение, содержащееся в формуле (13.16), составляет содержание электростатической теоремы Гаусса для непрерывного распределения зарядов. Очевидно, что эта формула включает в себя также и выражения (13.14) и (13.11) как частные случаи.

Измерение заряда. Теорема Гаусса позволяет определить полный заряд, заключенный внутри объема, посредством измерения потока напряженности сквозь поверхность, ограничивающую объем. *Другие определения заряда не дают удовлетворительных результатов.* Например, нельзя найти этот заряд, измерив силу, с которой он действует на находящийся вне этого объема пробный заряд, поскольку сила зависит не только от общего заряда, но и от распределения его по объему, которое, вообще говоря, неизвестно. Можно определить заряд, измерив действующую на него силу в известном однородном внешнем электрическом поле. При этом важно обеспечить однород-

ность поля. Ясно, что этот способ применим лишь тогда, когда внешнее однородное поле существенно не изменяет распределения зарядов внутри объема.

Физическая основа справедливости теоремы Гаусса. Из вывода теоремы Гаусса видно, что ее справедливость обусловливается возможностью сведения подынтегрального выражения (13.3) с помощью (13.4) и (13.5) к дифференциалу телесного угла $d\Omega$. Это возможно только в том случае, когда $\mathbf{E}(r)$ убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от точечного заряда. При другой зависимости $\mathbf{E}(r)$ в формуле (13.6) под интегралом должна стоять кроме дифференциала телесного угла также и некоторая функция от r, не позволяющая выразить поток напряженности через поверхность в виде функции заряда, что означает несоблюдение теоремы Гаусса. Поэтому *физической основой теоремы Гаусса является закон Кулона или, иначе, теорема Гаусса является интегральной формулировкой закона Кулона.*

Дифференциальная формулировка закона Кулона. Уравнение Максвелла для $\operatorname{div}\mathbf{E}$. Поток $\mathbf{E}$ сквозь замкнутую поверхность можно с помощью математической формулы Гаусса – Остроградского (5.21) преобразовать в интеграл по объему от $\operatorname{div}\mathbf{E}$:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{E}\, dV, \tag{13.18}$$

в результате чего формула (13.16) принимает вид

$$\int_V (\operatorname{div}\mathbf{E} - \rho/\varepsilon_0)\, dV = 0. \tag{13.19}$$

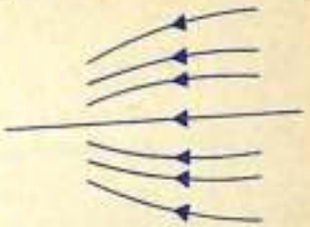
Равенство нулю интеграла выполняется при произвольном объеме V. Следовательно, подынтегральное выражение тождественно равно нулю, т. е.

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0.} \tag{13.20}$$

Выполнимость (13.20), так же как и теоремы Гаусса, обусловлена справедливостью закона Кулона. Следовательно, (13.20) является дифференциальной формулировкой закона Кулона. Линейность уравнения (13.20) отражает справедливость принципа суперпозиции для напряженности поля. Оно выведено здесь для неподвижных зарядов. Принимается, что *оно справедливо для произвольного движения зарядов.*

Силовые линии. *Силовой линией электрического поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с напряженностью* $\mathbf{E}$. С помощью силовых линий удобно графически изображать поле. Условились напряженность поля характеризовать числом силовых линий, пересекающих 1 м² площади поверхности, перпендикулярной направлению силовых линий в соответствующей точке: чем больше плотность линий, тем больше напряженность поля. На рис. 34 изображено электрическое поле, напряженность которого возрастает слева направо.

Источники и стоки вектора $\mathbf{E}$. Как видно из уравнения (13.20), *силовые линии начинаются там, где* $\operatorname{div}\mathbf{E} > 0$, *и оканчиваются там,* где $\operatorname{div}\mathbf{E} < 0$, *т. е. начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных.* Говорят, что положительные заряды являются источниками вектора $\mathbf{E}$, а отрицательные – стоками. Конечно такое различие между зарядами чисто условно, оно исходит из определения направления напряженности поля. По их роли в образовании электрического поля положительные и отрицательные заряды совершенно эквивалентны. На рис. 35 изображены силовые линии двух разноименных зарядов.

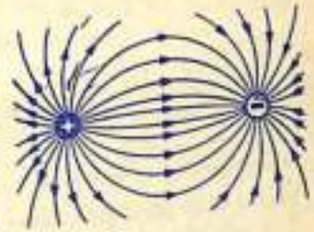


34

Силовые линии поля, напряженность которого возрастает справа налево

Инвариантность заряда. Найдем поток $\mathbf{E}$ сквозь замкнутую поверхность, окружающую движущийся равномерно и прямолинейно точечный заряд q. Напряженность поля этого заряда определяется формулой (11.26). Поток напряженности равен

$$N = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oint Er^2\, d\Omega = \oint Er^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \tag{13.21}$$



35

Силовые линии двух разноименных зарядов

где в качестве поверхности интегрирования взята сфера с центром в точке нахождения движущегося заряда в некоторый момент времени и учтено, что $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{S}$ коллинеарны радиус-вектору $\mathbf{r}$; θ и φ – соответственно полярный и аксиальный угол сферической системы координат, полярная ось которой совпадает с осью X неподвижной системы координат. Подставляя (11.26) в (13.21), находим

$$N = \frac{q(1-\beta^2)}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}, \tag{13.22}$$

где произведено интегрирование по углу $d\varphi$, от которого подынтегральное выражение в (13.21) не зависит. Так как $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$,

$$\sin\theta\, d\theta = -d\cos\theta, \quad \text{то} \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} =$$

● **Силовой линией электрического поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с напряженностью электрического поля. Положительные заряды являются источниками напряженности электрического поля, а отрицательные—стоками. Однако это различие между зарядами чисто условно. Их роль в образовании электрического поля абсолютно одинакова.**

$$= 2\int_0^1 \frac{dx}{(1-\beta^2+\beta^2x^2)^{3/2}} = \frac{2}{\beta^3}\left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right]_0^1 = \frac{2}{1-\beta^2},$$ где $a^2 = (1 - \beta^2)/\beta^2$. Тогда соотношение (13.22) принимает вид

$$N = q/\varepsilon_0, \tag{13.23}$$

совпадающий с (13.8). Это доказывает, что теорема Гаусса справедлива также и для точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно. Если заряд в объеме определить посредством потока $\mathbf{E}$ сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую объем, то равенство (13.23) выражает инвариантность заряда.

§ 14. Потенциальность электростатического поля

Обсуждаются интегральная и дифференциальная формулировки потенциальности поля. Вводится скалярный потенциал и рассматриваются его свойства. Вычисляется потенциал зарядов, распределенных в конечной области пространства. Доказывается теорема Ирншоу.

Работа в электрическом поле. Так как сила, действующая в электрическом поле на точечный заряд q, равна $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, то при перемещении заряда на $d\mathbf{l}$ совершается работа

$$dA = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}. \tag{14.1}$$

Удельная работа при перемещении заряда определяется как отношение работы к заряду:

$$dA' = dA/q = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}. \tag{14.2}$$

Она выражается в джоулях на кулон. Из (14.2) видно, что *работа, совершаемая полем, считается положительной, а внешними относительно поля силами — отрицательной.* Это условие знаков аналогично тому, которое используется в термодинамике для работы системы.

При перемещении заряда из точки *1* в точку *2* по траектории L (рис. 36) удельная работа равна

$$A' = \int_{(L)}^{(2)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}. \tag{14.3}$$

Потенциальность кулоновского поля. Поле сил называется потенциальным, если работа при перемещении в этом поле зависит лишь от начальной и конечной точек пути и не зависит от траектории. *Другим эквивалентным определением потенциальности является требование равенства работы нулю при перемещении по любому замкнутому контуру.*

Известно, что сила тяжести точечной массы, убывающая обратно пропорционально квадрату расстояний, является потенциальной, причем ее потенциальность обусловлена именно этой зависимостью от расстояния. Поскольку кулоновская сила точечного заряда убывает по такому же закону, она потенциальна. Вся математическая часть учения о потенциале была разработана в рамках теории тяготения. Понятие о потенциале возникло в работах Ж. Л. Лагранжа (1736–1813) в 1777 г., хотя для функции, являющейся потенциалом, он еще не употребил этого названия. Термин «потенциал» был введен в науку в 1828 г. Дж. Грином и независимо К. Ф. Гауссом (1777–1855). Большой вклад в теорию потенциала был внесен П. С. Лапласом (1749–1827) и С. Д. Пуассоном (1781–1840).

На основании принципа суперпозиции из потенциальности поля точечного заряда следует потенциальность произвольного электростатического поля. Математическое доказательство этого утверждения

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint \left(\sum_i \mathbf{E}_i\right)\cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{l} = \sum_i 0 = 0, \tag{14.4}$$

где

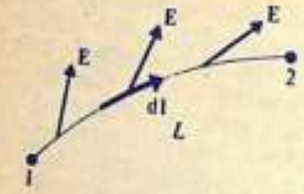
$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i,\ \oint \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{14.5}$$

Ротор вектора. Критерий потенциальности поля, который был использован до сих пор, не является дифференциальным и применять его не всегда легко и эффективно. Его применение сводится к проверке утверждения о том, что работа по любому замкнутому пути равна нулю. Это означает необходимость исследования бесконечного числа замкнутых путей, что в общем случае невозможно. Критерий можно применить лишь тогда, когда известно общее выражение для работы по любому пути в виде аналитической формулы. Получить такую формулу удается только в редких случаях. Поэтому желательно найти другой критерий потенциальности, который легко и удобно использовать на практике. Таким критерием является дифференциальная формулировка, которая дается с помощью ротора вектора.

Прежде всего рассмотрим векторное определение ротора $\mathbf{A}$, обозначаемого $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. Вектор определяется тремя составляющими, не лежащими в одной плоскости. Выберем некоторое направление, характеризуемое единичным вектором $\mathbf{n}$. В плоскости, перпендикулярной $\mathbf{n}$, ограничим площадь ΔS очень малым замкнутым контуром L (рис. 37). На контуре L направление положительного обхода обычно связано с $\mathbf{n}$ правилом правого винта. **Ротором** называется вектор, проекция которого на направление $\mathbf{n}$ определяется формулой

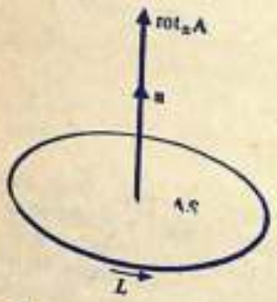
$$\mathrm{rot}_n\,\mathbf{A} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}. \tag{14.6}$$

Ротор характеризует интенсивность «завихрения» вектора, что отражено в названии операции. Пусть, например, вектор $\mathbf{A}$ равен скорости



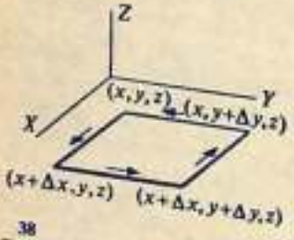
36

Работа в электрическом поле при перемещении точечного заряда



37

К векторному определению ротора



38

К определению ротора в координатах

$\bar{\mathbf{v}}$ точек твердого тела, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, коллинеарной с $\mathbf{n}$. Найдем $\mathrm{rot}_n \mathbf{v}$ для точек оси вращения. В качестве контура L выберем окружность радиусом r с центром на оси и лежащую в плоскости, перпендикулярной оси. Очевидно, имеем $v = \omega r$, $\Delta S = \pi r^2$ и $\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = v\,\mathrm{d}l$, где $\mathrm{d}l$ – скалярное значение элемента окружности. Поэтому на основании (14.6) получаем

$$\mathrm{rot}_n \mathbf{v} = \lim_{r \to 0} \frac{\omega r \oint \mathrm{d}l}{\pi r^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\omega r 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega, \quad (14.7)$$

где $\oint \mathrm{d}l = 2\pi r$ – длина окружности. Таким образом, ротор линейной скорости точек вращающегося абсолютно твердого тела равен удвоенной угловой скорости его вращения. Можно показать, что это утверждение справедливо не только для точек на оси вращения, но и для всех точек.

При практическом вычислении ротора удобнее вместо (14.6) пользоваться координатными формулами. Найдем проекции $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ в прямоугольной декартовой системе координат. Возьмем для примера ось Z (рис. 38). Контуром L является прямоугольник со сторонами Δx, Δy. Направление положительного обхода указано на рисунке. В этом случае

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{(x,\,y,\,z)}^{(x+\Delta x,\,y,\,z)} A_x(x, y, z)\,\mathrm{d}x + \int_{(x+\Delta x,\,y,\,z)}^{(x+\Delta x,\,y+\Delta y,\,z)} A_y(x + \Delta x, y, z)\,\mathrm{d}y + \int_{(x+\Delta x,\,y+\Delta y,\,z)}^{(x,\,y+\Delta y,\,z)} A_x(x, y + \Delta y, z)\,\mathrm{d}x + \int_{(x,\,y+\Delta y,\,z)}^{(x,\,y,\,z)} A_y(x, y, z)\,\mathrm{d}y, \quad (14.8)$$

где интегрирование производится вдоль сторон прямоугольника между его вершинами, координаты которых обозначены в (14.8) как пределы интегрирования. Учитывая, что Δx и Δy являются сколь угодно малыми, можно в подынтегральных выражениях второго и третьего интегралов произвести разложение A_y и A_x в ряд по Δx и Δy и ограничиться линейными членами:

$$A_x(x, y + \Delta y, z) = A_x(x, y, z) + \Delta y \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial y} + \ldots \quad \text{(а)}$$

$$A_y(x + \Delta x, y, z) = A_y(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} + \ldots \quad \text{(б)} \quad (14.9)$$

Вычислим сумму первого и третьего интегралов:

$$I_1 = \int_{(x,\,y,\,z)}^{(x+\Delta x,\,y,\,z)} A_x(x, y, z)\,\mathrm{d}x + \int_{(x+\Delta x,\,y+\Delta y,\,z)}^{(x,\,y+\Delta y,\,z)} A_x(x, y + \Delta y, z)\,\mathrm{d}x = \approx \int_{(x,\,y,\,z)}^{(x+\Delta x,\,y,\,z)} A_x(x, y, z)\,\mathrm{d}x - \int_{(x,\,y,\,z)}^{(x+\Delta x,\,y,\,z)} \left[A_x(x, y, z) + \Delta y \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \right] \mathrm{d}x, \quad (14.10)$$

где при вычислении второго интеграла в (14.10) использована формула (14.9а), а знак минус появился вследствие изменения направления интегрирования на обратное. В (14.10) члены, содержащие в подынтегральных выражениях $A_x(x, y, z)$, взаимно уничтожаются и поэтому

$$I_1 = -\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta y\,\Delta x. \quad (14.11)$$

Аналогично вычисляем сумму второго и четвертого интегралов в (14.8):

$$I_2 = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x\,\Delta y. \quad (14.12)$$

По формуле (14.6) находим

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad (14.13)$$

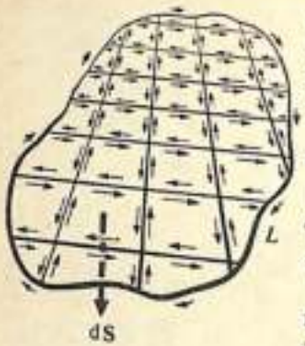
Аналогично вычисляем проекции на другие оси координат:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (14.14)$$

Обозначая, как обычно, $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ – единичные векторы осей координат, запишем вектор $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ в виде

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (14.15)$$

Формула Стокса. Формула Стокса связывает циркуляцию вектора по контуру, ограничивающему поверхность, с потоком его ротора через поверхность. Ее вывод основан на определении (14.6). Вычислим поток вектора $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ сквозь поверхность S, ограниченную контуром L



39

К доказательству формулы Стокса

(рис. 39), которую разобьем на элементы ΔS_i:

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_{\Delta S_i} \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}. \qquad (14.16)$$

Поскольку ΔS_i очень малы, для каждой из них на основании (14.6) имеем

$$\int_{\Delta S_i} \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S_i} (\operatorname{rot}\mathbf{A})_n\, dS \approx$$

$$\approx (\operatorname{rot}\mathbf{A})_n \Delta S \approx \oint_{L_i} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}, \qquad (14.17)$$

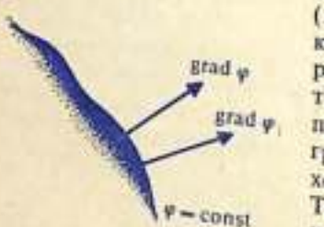
где L_i – контур, ограничивающий ΔS_i. Поэтому (14.6) может быть представлено в виде

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \approx \sum_i \oint_{L_i} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}. \qquad (14.18)$$

Части контуров L_i, являющиеся границами между ΔS_i, входят в два члена суммы (14.18): один раз – при интегрировании по контуру данной площадки ΔS_i, а другой раз – по контуру соседней площадки. Интегралы равны по модулю, но противоположны по знаку, поскольку пути вдоль границы при вычислении интегралов проходят в противоположных направлениях. Таким образом, в сумме (14.18) все части интегралов по границам между ΔS_i взаимно сокращаются и остается лишь сумма интегралов по тем частям контуров L_i, которые не образуют границы между ΔS_i, т. е. остается интеграл по контуру L, ограничивающему площадь S. При $\Delta S_i \to 0$ приближенное равенство (14.18) превращается в точное:

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l},} \qquad (14.19)$$

которое называется **формулой Стокса.**



40

Направление grad φ

Дифференциальная формулировка потенциальности поля. Независимость работы от пути при перемещении заряда в электростатическом поле выражается равенством

$$\int_{L_1}^{B}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{L_2}^{B}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}, \qquad (14.20)$$

где L_1 и L_2 – различные пути между точками A и B. Учитывая, что $\int_{L_1}^{B}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{L_2}^{A}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$, представим (14.20) в виде

$$\int_{L_1}^{B}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_{L_2}^{A}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0, \qquad (14.21)$$

где $L = L_1 + L_2$. Формула (14.21) является математической формулировкой утверждения о том, что в электростатическом поле работа при перемещении заряда по любому замкнутому контуру равна нулю.

С помощью (14.19) из (14.21) получаем

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 0,} \qquad (14.22)$$

где S – поверхность, ограничиваемая контуром L. Ввиду произвольности S из (14.22) следует, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \qquad (14.23)$$

Это равенство является **дифференциальной формулировкой потенциальности электростатического поля.**

Градиент. Пусть $\varphi(x, y, z)$ является скалярной функцией точки. Градиентом φ называется вектор

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{i}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{i}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{i}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}.} \qquad (14.24)$$

Чтобы выяснить смысл этого вектора, вычислим полный дифференциал функции φ при перемещении на $d\mathbf{r} = \mathbf{i}_x dx + \mathbf{i}_y dy + \mathbf{i}_z dz$:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \operatorname{grad}\varphi\cdot d\mathbf{r}. \qquad (14.25)$$

Таким образом, бесконечно малое приращение $d\varphi$ при перемещении в некотором направлении равно компоненте $\operatorname{grad}\varphi$ по этому направлению, умноженной на модуль перемещения. Начертим семейство поверхностей $\varphi = \text{const}$ (рис. 40). При перемещении вдоль поверхности $\varphi = \text{const}$ имеем $d\varphi = 0$. Поэтому [см. (14.25)] $\operatorname{grad}\varphi \perp d\mathbf{r}$, т. е. *вектор* $\operatorname{grad}\varphi$ *направлен перпендикулярно поверхности* $\varphi = \text{const}$. По модулю он равен производной от φ по пути в направлении, перпендикулярном поверхности $\varphi = \text{const}$.

Скалярный потенциал. Поскольку работа при перемещении заряда в потенциальном поле не зависит от траектории, а зависит лишь от начальной и конечной точек пути, ее можно выразить через координаты концов траектории. Это делается с помощью потенциала.

● **Условие знаков:** совершаемая полем работа считается положительной, а внешними относительно поля силами – отрицательной.

Дифференциальная формулировка потенциальности электростатического поля: $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$.

Знак минус в выражении $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ **выбран по соглашению для того, чтобы** $\mathbf{E}$ **было направлено в сторону уменьшения** φ.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что всегда имеет место тождественное равенство

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0. \tag{14.26}$$

Поэтому уравнение (14.23) будет удовлетворено, если $\mathbf{E}$ представить в виде

$$\boxed{\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi.} \tag{14.27}$$

Знак выбран так, что напряженность $\mathbf{E}$ направлена в сторону убывания φ. Скалярная функция φ, связанная с напряженностью $\mathbf{E}$ поля формулой (14.27), называется скалярным потенциалом электрического поля.

Напряженность можно измерить экспериментально. *Потенциал φ не имеет определенного числового значения, и бессмысленно говорить об экспериментальном определении его значения.*

Неоднозначность скалярного потенциала. Из формулы (14.27) видно, что если к φ прибавить некоторую постоянную, то описываемое потенциалом поле не изменяется, поскольку производные по координатам от постоянной величины равны нулю. Следовательно, *потенциал φ заданного электрического поля определен лишь с точностью до аддитивной постоянной.*

Нормировка. Пользуясь неоднозначностью скалярного потенциала, можно в любой одной наперед заданной точке приписать ему любое наперед заданное значение. После этого во всех других точках потенциал имеет вполне определенное значение, т. е. будет однозначным. Эта *процедура придания однозначности потенциалу путем приписывания ему определенного значения в одной из точек называется* **нормировкой** *потенциала.* При изучении электрических полей вблизи поверхности земли за нулевой принимается обычно потенциал земли. При исследовании общих вопросов, когда заряды находятся в конечной области пространства, удобнее считать потенциал равным нулю на бесконечном удалении от зарядов. Такая нормировка часто применяется в этой книге.

Выражение работы через потенциал. Если заряд перемещается между точками 1 и 2, то удельная работа равна

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{(1)}^{(2)} \operatorname{grad}\varphi\cdot d\mathbf{r} = -\int_{(1)}^{(2)} d\varphi = \varphi(1) - \varphi(2), \tag{14.28}$$

где использована формула (14.25) и $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$. Из (14.28) видно, что работа действительно зависит от конечной и начальной точек траектории и не зависит от формы траектории. Из этой же формулы следует, что разность потенциалов между двумя точками имеет ясный физический смысл и может быть измерена экспериментально. Таким образом, *физический смысл имеет не сам потенциал, а разность потенциалов между различными точками.*

Потенциал поля точечного заряда. Будем нормировать потенциал на нуль в бесконечности. Считая, что в формуле (14.28) точка 2 находится в бесконечности, полагаем $\varphi(2) = \varphi(\infty) = 0$ и получаем следующее выражение для потенциала в точке 1:

$$\varphi(1) = \int_{(1)}^{\infty} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}. \tag{14.29}$$

Путь из точки 1 в бесконечность может быть любым. Однако его надо выбрать так, чтобы максимально упростить вычисления.

Поле точечного заряда q сферически симметрично. Потенциал на расстоянии r от точечного заряда по формуле (14.29) равен

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty} \frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot d\mathbf{l}\right). \tag{14.30}$$

Наиболее подходящим является путь интегрирования вдоль радиус-вектора, исходящего из точечного заряда. Тогда $(\mathbf{r}\cdot d\mathbf{l}/r) = dr$ и из (14.30) следует, что

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.} \tag{14.31}$$

Рекомендуется в качестве упражнения проверить, что из этой формулы получается закон Кулона:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{14.32}$$

Потенциал поля системы точечных зарядов. По принципу суперпозиции *потенциал поля системы точечных зарядов равен сумме потенциалов, создаваемых в рассматриваемой точке каждым из зарядов.* Это очевидно:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\operatorname{grad}\varphi_1 - \operatorname{grad}\varphi_2 = -\operatorname{grad}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Следовательно, с помощью формулы (14.31) для потенциала, создаваемого системой точечных зарядов q_i, можно написать выражение

$$\boxed{\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{r_i},} \tag{14.33}$$

где $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$ – расстояние от точечного заряда q_i, находящегося в точке (x_i, y_i, z_i), до точки (x, y, z), в которой вычисляется потенциал.

Потенциал поля непрерывного распределения зарядов. Предполагаем по-прежнему, что *все заряды расположены в конечной области пространства и потенциал нормирован на нуль в бесконечности.* Обозначая

$\rho(x', y', z')$ – объемную плотность заряда, получаем для потенциала вместо (14.33) выражение

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \tag{14.34}$$

Эту формулу можно записать иначе, не указывая подробно переменных:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\,dV}{r},} \tag{14.35}$$

где dV – элемент объема, по которому производится интегрирование. Такая краткая форма записи часто используется в последующем изложении.

Потенциал поля поверхностных зарядов. Если заряд расположен на поверхности, то распределение характеризуется поверхностной плотностью заряда σ. На элементе площади dS (это скаляр, а не вектор элемента поверхности) находится заряд $\sigma\,dS$ и, следовательно, потенциал в некоторой точке аналогично (14.35) дается формулой

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma\,dS}{r},} \tag{14.36}$$

где r – расстояние между элементом площади dS и точкой, в которой вычисляется потенциал. Интеграл (14.36) распространяется на все поверхности, несущие поверхностные заряды.

Бесконечность потенциала поля точечного заряда. Из (14.31) следует, что при $r \to 0$ потенциал $\varphi(r \to 0) \to \infty$. Это связано с тем, что точечный заряд формально имеет бесконечную объемную плотность, поскольку его объем равен нулю. Именно *бесконечная объемная плотность заряда и обусловливает обращение в бесконечность потенциала.*

Конечность потенциала при непрерывном распределении заряда с конечной плотностью. При непрерывном распределении заряда с конечной плотностью потенциал нигде не обращается в бесконечность. В этом можно убедиться при вычислении потенциала по формуле (14.34). Примем точку (x, y, z) за начало координат $(x = y = z = 0)$ и будем вести расчет в сферической системе координат. Элемент объема в ней выражается формулой $dx'\,dy'\,dz' = r'^2 \sin\theta'\,d\theta'\,dx'\,dr'$, где $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Тогда [см. (14.34)]

$$\varphi(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(r', \alpha', \theta')\, r' \sin\theta'\,d\theta'\,d\alpha'\,dr'.$$

Следовательно, *если ρ конечно, то и потенциал φ конечен*, что и требовалось доказать.

Непрерывность потенциала. Производная от потенциала по декартовой координате дает соответствующую компоненту напряженности электрического поля. Ясно, что напряженность не может быть бесконечной. Следовательно, производные по координатам от потенциала должны быть конечными. А это означает, что потенциал является непрерывной функцией. Таким образом, *потенциал φ является непрерывной и конечной функцией с конечными производными по координатам.* Эти условия важны при решении дифференциальных уравнений для потенциала.

Теорема Ирншоу. Эта теорема утверждает, что *не существует такой конфигурации неподвижных зарядов, которая была бы устойчивой, если нет других сил, кроме сил кулоновского взаимодействия между зарядами системы.*

Доказательство теоремы Ирншоу следует из формулы Гаусса. Допустим, что равновесие устойчиво. Тогда при смещении любого из зарядов системы из его положения равновесия в любом направлении на него должна действовать сила, стремящаяся возвратить заряд в прежнее положение. А это означает, что напряженность поля, создаваемого вблизи каждого из покоящихся зарядов всеми другими зарядами, направлена вдоль радиусов, исходящих из точки нахождения этого заряда. Поток напряженности этого поля сквозь замкнутую поверхность вокруг заряда отличен от нуля, поскольку напряженность направлена вдоль радиусов в одном направлении (вблизи положительного заряда – к заряду, вблизи отрицательного – от заряда). По теореме Гаусса поток сквозь замкнутую поверхность создается зарядом, находящимся в ограничиваемом ею объеме. Это противоречит исходному предположению о том, что он создается зарядами, находящимися вне объема. Тем самым отвергается допущение об устойчивости конфигурации неподвижных зарядов, и теорема Ирншоу доказана.

Устойчивые конфигурации неподвижных зарядов могут существовать лишь тогда, когда кроме сил взаимодействия между ними имеются какие-то посторонние силы, удерживающие заряды в положениях равновесия. Устойчивые состояния движущихся зарядов возможны, как, например, движение двух разноименных зарядов по эллипсам вокруг центра масс (если, конечно, пренебречь излучением).

Пример 14.1. *Вычислить* $\operatorname{grad}\varphi(r)$.

Имеем:

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{i}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \varphi' \frac{\partial r}{\partial x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Аналогично вычисляем $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$. Штрихом обозначена производная по аргументу r. Учитывая, что $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$, получаем

$$\operatorname{grad}\varphi(r)=\frac{d\varphi}{dr}(\mathbf{i}_x x+\mathbf{i}_y y+\mathbf{i}_z z)=\frac{d\varphi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

В частности, при $\varphi(r)=r$ $\operatorname{grad} r=\mathbf{r}/r$, а при $\varphi(r)=1/r$ $\operatorname{grad}(1/r)=-\mathbf{r}/r^3$.

Пример 14.2. *Вычислить циркуляцию вектора* $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ *по окружности* L *радиусом* r_0, *расположенной в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору* $\boldsymbol{\omega}$, *как непосредственно, так и с помощью теоремы Стокса. Центр окружности совпадает с началом координат.*

Вектор $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_0$ направлен в каждой точке по касательной к окружности. Следовательно,

$$\oint_L \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\cdot d\mathbf{l}=\omega r_0\int_L dl=2\pi\omega r_0^2. \tag{14.38}$$

Направление обхода выбрано таким, что векторы $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ и $d\mathbf{l}$ в каждой точке коллинеарны. При обратном направлении обхода изменится знак интеграла.

С помощью теоремы Стокса задача решается по-другому:

$$\oint_L \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\cdot d\mathbf{l}=\int_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S},$$

где S – поверхность, ограниченная окружностью L. При $\boldsymbol{\omega}=\text{const}$ $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=2\boldsymbol{\omega}$ и

$$\int_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}=2\int_S \boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{S}=2\omega\int_S dS=2\pi\omega r_0^2, \tag{14.39}$$

что, как и должно быть, совпадает с (14.38).

Нетрудно видеть, что поверхность S может быть любой поверхностью, ограниченной окружностью, а не только плоской. Имеем

$$\int_{S_1} \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}=2\int_{S_1}\boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{S}=2\boldsymbol{\omega}\cdot\int_{S_1} d\mathbf{S}. \tag{14.40}$$

Примем во внимание, что

$$\oint_{S'} d\mathbf{S}=0, \tag{14.41}$$

где S' – замкнутая поверхность, состоящая из поверхности S_1 в (14.40) и поверхности S круга в (14.39), т. е. $S'=S_1+S$. Из (14.41) получим

$$\int_{S_1} d\mathbf{S}=-\mathbf{n}\pi r_0^2, \tag{14.42}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный плоскости круга. В (14.42) учтено, что в (14.41) элемент $d\mathbf{S}$ направлен по внешней нормали к замкнутой поверхности. Подставляя (14.42) в (14.40), получаем формулу, идентичную (14.39).

Пример 14.3. *Найти потенциал и напряженность поля, создаваемого в окружающем пространстве равномерно заряженной нитью конечной длины* $2L$. *Линейная плотность заряда нити равна* τ.

Поместим начало декартовой системы координат в середине нити (точка O) и ось Z направим вдоль нити (рис. 41). Вследствие аксиальной симметрии потенциал зависит только от r и координаты z.

На рис. 41 изображена плоскость, проходящая через точку (r, z) и ось Z. Находящийся на элементе длины dz' нити заряд $\tau\,dz'$ создает в точке (r, z) потенциал

$$d\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\,dz'}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}}.$$

Следовательно, потенциал, создаваемый всей заряженной нитью, равен

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\tau\,dz'}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}}=$$

$$=-\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z-L+\sqrt{r^2+(z-L)^2}}{z+L+\sqrt{r^2+(z+L)^2}}\right). \tag{14.43}$$

Компоненты напряженности электрического поля даются формулами:

$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-L)^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+L)^2}}\right), \tag{14.44}$$

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{z-L}{\sqrt{r^2+(z-L)^2}}-\frac{z+L}{\sqrt{r^2+(z+L)^2}}\right). \tag{14.45}$$

При $L\to\infty$ получаем

$E_z=0$, $E_r=\tau/(2\pi\varepsilon_0 r)$.

Потенциал при $L\to\infty$ стремится к бесконечности:

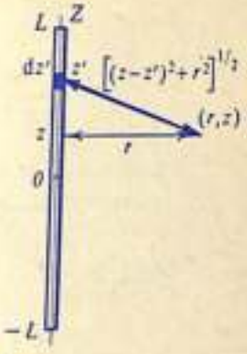
$$\varphi=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}[\ln r-\ln(2L)]\to\infty.$$

Это является следствием того, что заряд не сосредоточен в конечной области пространства и поэтому применять формулу (14.43) для вычисления потенциала в случае $L\to\infty$ нельзя.

При очень больших расстояниях от центра нити ($R=\sqrt{r^2+z^2}\gg L$) из (14.43) находим

$$\varphi=\frac{2\tau L}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R},$$

где $Q=2\tau L$ – полный заряд нити. Таким образом, на больших по сравнению с линейными размерами нити расстояниях поле близко к кулоновскому.

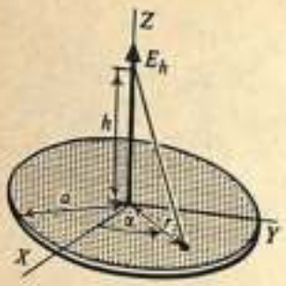


41

Линейный заряд конечной длины

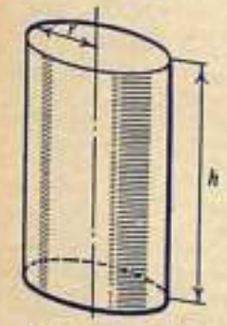
- **Использование уравнения Пуассона для решения задачи не предполагает определенной нормировки потенциала и отсутствия зарядов на бесконечности. Потенциал является непрерывной и конечной функцией, с конечными производными по координатам.**

○ Какие методы определения напряженности поля по заданному распределению зарядов вы знаете? Чем определяется в каждом конкретном случае выбор метода решения задачи? Какими преимуществами по сравнению с другими методами обладает нахождение напряженности поля путем решения уравнений Лапласа и Пуассона? Какими свойствами обладает потенциал, как решение соответствующих дифференциальных уравнений? Какие формулировки потенциальности электростатического поля вы знаете? В чем преимущество дифференциальной формулировки? Какие физические обстоятельства обусловливают возможность нормировки скалярного потенциала? Какие нормировки наиболее употребительны и когда они целесообразны?



42

Поле на оси равномерно заряженного диска



43

К вычислению напряженности поля бесконечной заряженной нити с помощью теоремы Гаусса

§ 15. Электростатическое поле в вакууме

Излагаются основные методы расчета потенциала и напряженности электростатического поля и анализируются примеры вычислений.

Постановка задачи. Решим одну из задач электростатики:

определить напряженность электрического поля, создаваемого известным распределением зарядов.

Эта задача может быть решена несколькими методами. В принципиальном смысле все они равноценны, в практическом в зависимости от обстоятельств различны, так как связаны с неодинаковым объемом вычислительной работы. Целесообразно выбрать тот метод, который приводит к искомому результату наиболее простым путем.

Прямое использование закона Кулона. В этом случае напряженность поля в точке вычисляется как сумма напряженностей полей, создаваемых всеми элементами $\rho\,dV$ и $\sigma\,dS$ объемных и поверхностных зарядов. Этот метод является наиболее естественным, но не самым простым, поскольку приходится суммировать векторы, что значительно усложняет вычисления. Пример использования этого метода был рассмотрен в § 8 при вычислении силы взаимодействия точечного заряда и бесконечной прямой заряженной нити.

Вычисление потенциала. Формулы (14.35) и (14.36) можно использовать только при распределении заряда в конечной области пространства и нормировке потенциала на нуль в бесконечности.

Рассмотрим в качестве примера поле в точках перпендикуляра к плоскости равномерно заряженного диска радиусом a, проходящего через его центр (рис. 42). Полный заряд диска равен Q. Для потенциала на расстоянии h от поверхности диска имеем [см. (14.36)]

● **Нахождение напряженности поля по заданному распределению зарядов прямым применением закона Кулона является наиболее естественным, но не самым простым.**
Нахождение напряженности поля с помощью теоремы Гаусса обычно целесообразно при наличии симметрий распределения заряда.

○ Что можно сказать о физическом смысле потенциала в рамках электростатики? Какой физический смысл имеет разность потенциалов?

$$\varphi(h) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}, \tag{15.1}$$

где $\sigma = Q/(\pi a^2)$ – поверхностная плотность заряда на диске. Интеграл удобно вычислять в полярных координатах, полагая $x^2+y^2=r^2$, $dx\,dy = dS = r\,dr\,d\alpha$. Тогда [см. (15.1)]

$$\varphi(h) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}\left(\sqrt{a^2+h^2}-h\right). \tag{15.2}$$

Из аксиальной симметрии распределения заряда следует, что вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси диска и равен

$$E_h = -\frac{\partial\varphi}{\partial h} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right). \tag{15.3}$$

Для $h \gg a$ можно считать, что

$$\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2/h^2}} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{h^2}+\dots \tag{15.4}$$

и, следовательно,

$$E_h \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{h^2}, \tag{15.5}$$

как это можно было ожидать и без вычислений, поскольку на больших расстояниях напряженность поля заряженного тела близка к напряженности поля точечного заряда.

Использование теоремы Гаусса. При наличии симметрии в некоторых случаях наиболее эффективным методом определения напряженности поля является применение теоремы Гаусса. Пусть, например, требуется найти напряженность поля бесконечной заряженной прямой нити с линейной плотностью τ. Построим круглый цилиндр радиусом r, ось которого совпадает с нитью (рис. 43). Обозначим h – высоту цилиндра. Применим к объему цилиндра теорему Гаусса:

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0, \tag{15.6}$$

где Q – заряд в объеме цилиндра, S – поверхность цилиндра. Очевидно, что $Q = \tau h$. Поток $\mathbf{E}$ сквозь основания цилиндра равен нулю так как вектор $\mathbf{E}$ параллелен основаниям. Поток $\mathbf{E}$ сквозь боковую поверхность легко вычисляется, поскольку на ней вектор $\mathbf{E}$ совпадает по направлению с нормалью к поверхности, а по модулю он постоянен. Тогда

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{бок}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = E\cdot 2\pi r h. \tag{15.7}$$

Таким образом, теорема Гаусса приводит к равенству

$$E \cdot 2\pi rh = \tau h/\varepsilon_0,$$

(15.8)

из которого получаем

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}.$$

(15.9)

В поле с такой напряженностью сила, действующая на точечный заряд, имеет значение (8.5), полученное прямым применением закона Кулона.

Уравнение Лапласа и Пуассона. Во многих случаях предпочтительным методом нахождения напряженности поля является сведение задачи к решению дифференциального уравнения для потенциала. Чтобы его получить подставим в

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$$

(15.10)

выражение

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

(15.11)

Тогда

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\rho/\varepsilon_0.$$

(15.12)

Учтем, что

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi,$$

(15.13)

где ∇^2 — оператор Лапласа, являющийся суммой вторых производных по координатам. Иногда он обозначается $\Delta \equiv \nabla^2$. С использованием (15.13) равенство (15.12) записывается в виде

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$$

(15.14)

и называется **уравнением Пуассона.** В тех областях пространства, где заряды отсутствуют ($\rho = 0$), оно превращается в уравнение

$$\nabla^2\varphi = 0,$$

(15.15)

называемое **уравнением Лапласа.**

После нахождения потенциала φ как решения (15.14) можно вычислить напряженность электрического поля по формуле (15.11). Решение должно удовлетворять требованиям, которые были сформулированы для потенциала (см. § 14): *потенциал φ является непрерывной и конечной функцией, с конечными производными по координатам.*

Если все заряды сосредоточены в конечной области пространства, то решением (15.14) будет (14.35), что следует из однозначности решения задачи электромагнетизма (см. § 58).

Наиболее важным преимуществом нахождения напряженности поля с помощью дифференциального уравнения Пуассона для потенциала является большая общность этого метода и его очень широкая применимость. Формулы (14.35) и (14.36) предполагают, что все заряды находятся в конечной области пространства, благодаря чему имеет смысл нормировка потенциала на нуль в бесконечности. *Уравнение же Пуассона не предполагает определенной нормировки потенциала и отсутствия зарядов на бесконечности.*

Бесконечный равномерно заряженный круглый цилиндр. Найдем с помощью уравнения Пуассона потенциал, создаваемый бесконечным круглым цилиндром радиусом a с объемной плотностью заряда $\rho = \text{const}$.

Направим ось Z по оси цилиндра. Вследствие аксиальной симметрии распределения заряда потенциал φ также аксиально симметричен, т. е. $\varphi = \varphi(r)$. Поэтому удобно использовать цилиндрическую систему координат, аксиальный угол которой обозначим α. В ней **оператор Лапласа** имеет вид

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

(15.16)

Так как в данном случае потенциал φ зависит только от r, то выражение (15.16) упрощается:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right),$$

(15.17)

а уравнение Пуассона (15.14) записывается так:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\right) = -\rho/\varepsilon_0 \quad (0 < r < a),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \quad (r > a).$$

(15.18)

Общие решения (15.18) находятся интегрированием:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r^2 + A_1\ln r + B_1,$$

$$\varphi_2 = A_2\ln r + B_2,$$

(15.19)

где A_1, A_2, B_1 и B_2 — постоянные интегрирования. Поскольку потенциал во всех точках должен быть конечным, а $\ln r \to \infty$ при $r \to 0$, необходимо в решении (15.19) положить $A_1 = 0$. Удобно потенциал нормировать условием $\varphi_1(0) = 0$, и тогда $B_1 = 0$.

Поскольку поверхностные заряды отсутствуют, напряженность электрического поля на поверхности шара непрерывна, т. е. непрерывна производная от потенциала. Условия непрерывности потенциала и его производной при $r = a$ дают два алгебраических уравнения для определения двух оставшихся пока неизвестными постоянных A_2 и B_2:

$$A_2\ln a + B_2 = -\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon_0}a^2, \quad \frac{A_2}{a} = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}a.$$

(15.20)

Отсюда следует, что

$$\varphi_1(r) = -\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r^2 \qquad (0 < r \leqslant a),$$

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}a^2\ln\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon_0}a^2 \quad (r \geqslant a). \tag{15.21}$$

Тогда

$$E_r = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r \qquad (0 < r \leqslant a),$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{r} \quad (r \geqslant a). \tag{15.22}$$

Учитывая, что $\rho\pi a^2 = \tau$ – заряд, приходящийся на 1 м длины цилиндра, можно второе из равенств (15.22) переписать в виде

$$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}. \tag{15.23}$$

Сравнение (15.23) с (15.9) показывает, что поле вне однородно заряженного цилиндра таково, как если бы весь его заряд был сосредоточен на оси.

Пример 15.1. *Найти напряженность поля прямой нити конечной длины, равномерно заряженной с линейной плотностью заряда* τ (рис. 44). *Принять:* $\tau = 10^{-10}$ Кл/м; $l = 1$ м; $d = 0{,}5$ м; $a = 0{,}5$ м.

По закону Кулона

$$dE_x = \frac{\tau\,dy\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(y^2+d^2)} = \frac{d\tau\,dy}{4\pi\varepsilon_0(y^2+d^2)^{3/2}},$$

$$dE_y = \frac{\tau\,dy\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0(y^2+d^2)} = -\frac{\tau y\,dy}{4\pi\varepsilon_0(y^2+d^2)^{3/2}},$$

откуда

$$E_x = \frac{\tau d}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-(l-a)}^{a}\frac{dy}{(y^2+d^2)^{3/2}},\quad E_y = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-(l-a)}^{a}\frac{y\,dy}{(y^2+d^2)^{3/2}}.$$

Произведя замену переменных $y = d\operatorname{tg}\alpha$, $dy = d\,d\alpha/\cos^2\alpha$, $1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$ и вычислив интегралы, получим:

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 d}(\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1) = 1{,}27\ \text{В/м},$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 d}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = 0. \tag{15.24}$$

Для бесконечной нити ($l \to \infty$) $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ и поэтому $E_y = 0$, $E_x = \tau/(2\pi\varepsilon_0 d)$.

Пример 15.2. *Определить с помощью потенциала напряженность поля в точках перпендикуляра к плоскости диска, если по нему равномерно распределен заряд* Q. *Радиус диска* a (рис. 45).

Принять: $Q = 10^{-10}$ Кл; $a = 10$ см; $h = 20$ см *(расстояние до точки от плоскости диска).*

По формуле (14.36) имеем

$$\varphi(h) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_S\frac{\sigma\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}},\quad \sigma = \frac{Q}{\pi a^2}.$$

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам в плоскости диска: $x^2 + y^2 = r^2$, $dx\,dy = r\,dr\,d\alpha$,

$$\varphi(h) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{2\pi}d\alpha\int\limits_0^{a}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+h^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}(\sqrt{a^2+h^2} - h), \tag{15.25}$$

откуда

$$E_h = -\frac{\partial\varphi}{\partial h} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = 18\ \text{В/м}. \tag{15.26}$$

Формула (15.26) совпадает с (15.3).

Пример 15.3. *Найти напряженность электрического поля, создаваемого поверхностным зарядом сферы радиусом* R. *Полный заряд сферы* Q, *поверхностная плотность заряда* $\sigma = Q/(4\pi R^2)$.

Потенциал, создаваемый элементом заряженной поверхности (рис. 46) в точке, характеризуемой $\mathbf{r}$, равен

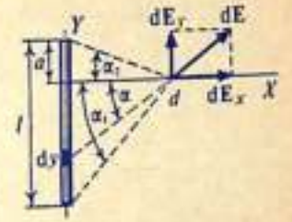
$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2\sin\theta\,d\theta\,d\alpha}{\rho}, \tag{15.27}$$

где $R^2\sin\theta\,d\theta\,d\alpha$ – элемент поверхности сферы в сферических координатах, полярная ось которых совпадает с вектором $\mathbf{r}$; угол α – аксиальный угол. Из рисунка видно, что $\rho = R - r$. После возведения обеих частей равенства в квадрат, находим $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$. Взяв дифференциалы от обеих частей этого равенства, имеем

$$2\rho\,d\rho = 2Rr\sin\theta\,d\theta,$$

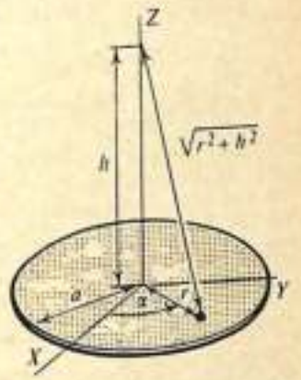
откуда следует, что $R^2\sin\theta\,d\theta = (\rho R/r)\,d\rho$. Тогда [см. (15.27)]

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R}{r}d\rho\,d\alpha. \tag{15.28}$$



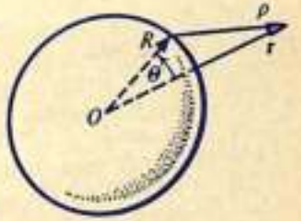
44

К вычислению напряженности электрического поля линейного заряда конечной длины



45

К вычислению напряженности электрического поля заряженного диска



46

К вычислению напряженности поля поверхностного заряда сферы

Интегрируя (15.28) по всей поверхности сферы, находим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R}{r}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_{|r-R|}^{r+R} d\rho = \frac{1}{2}\frac{\sigma R}{r}[\rho]_{|r-R|}^{r+R} = \begin{cases} \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} & (r > R), \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R} & (r < R). \end{cases} \quad (15.29)$$

Отсюда получаем напряженность электрического поля

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & (r > R), \\ 0 & (r < R), \end{cases}$$

т. е. вне равномерно заряженной сферы напряженность поля такая же, как если бы весь заряд был сосредоточен в ее центре, а внутри объема, ограниченного сферой, поле отсутствует.

§ 16. Электростатическое поле при наличии проводников

Рассматривается влияние проводников на электрическое поле. Описываются основные физические явления, обусловленные перераспределением зарядов на поверхности проводника (стекание зарядов с острия и т. д.). Обсуждаются количественные характеристики электрических свойств уединенных проводников и систем проводников. Излагается суть метода изображений.

Дифференциальная форма закона Ома. Проводниками называются материальные тела, в которых при наличии электрического поля возникает движение зарядов, т. е. электрический ток. Закон, связывающий силу тока, протекающего по проводнику, с разностью потенциалов, приложенной к его концам, был открыт экспериментально в 1827 г. Г. С. Омом (1787–1854) и имеет вид

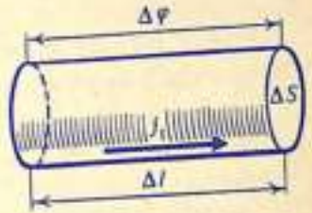
$$I = U/R, \quad (16.1)$$

где R – величина, называемая сопротивлением проводника. *Закон Ома в дифференциальной форме получается в результате записи соотношения* (16.1) *для плотности тока.* Рассмотрим бесконечно малый элемент проводника (рис. 47; Δl – длина; ΔS – поперечное сечение проводника, к концам которого приложена разность потенциалов $\Delta\varphi$). Пусть γ – удельная электрическая проводимость вещества, которая является величиной, обратной удельному электрическому сопротивлению. Электрическое сопротивление элемента проводника и сила тока, текущего по нему, равны

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta l}{\Delta S}, \text{ (а)} \qquad I_\tau = j_\tau \Delta S, \text{ (б)} \quad (16.2)$$

где индекс τ означает, что берется составляющая плотности тока вдоль элемента проводника. Закон Ома для этого элемента проводника записывается так:

$$\Delta\varphi = j_\tau \Delta S \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta l}{\Delta S}. \quad (16.3)$$



47

К выводу дифференциальной формы закона Ома

Принимая во внимание, что $(\Delta\varphi/\Delta l) = -E_\tau$ – компонента напряженности электрического поля в направлении рассматриваемого элемента, из (16.3) получаем

$$j_\tau = \gamma E_\tau. \quad (16.4)$$

Это соотношение справедливо при любой ориентировке элемента проводника и поэтому может быть записано в векторной форме:

$$\boxed{\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}} \quad (16.5)$$

Равенство (16.5) является дифференциальной формой закона Ома.

Классификация материалов по проводимости. Удельная электрическая проводимость γ зависит от свойств материала. По ее значению материалы делят на три класса: диэлектрики, полупроводники и проводники. Резкой границы между ними нет. Принимается следующее деление этих материалов по проводимости:

а) диэлектрики – вещества с малой электрической проводимостью. Идеальный диэлектрик характеризуется отсутствием проводимости. Однако это может осуществиться лишь при 0 К. При температуре, отличной от 0 К, все материалы обладают определенной проводимостью и, следовательно, идеальных диэлектриков нет; диэлектриком принято называть материал, удельная электрическая проводимость которого $\gamma < 10^{-5}$ См/м;

б) полупроводники имеют удельную электрическую проводимость более 10^{-5} См/м, но менее 10^3 См/м;

в) проводники характеризуются удельной электрической проводимостью, большей 10^3 См/м. В основном – это металлы. Наи-

● **В электростатике поля внутри проводника нет, а объемные заряды отсутствуют. Вблизи поверхности проводника напряженность электрического поля направлена по нормали к поверхности и пропорциональна поверхностной плотности заряда. На выпуклой поверхности проводника поверхностная плотность зарядов и напряженность поля увеличиваются с увеличением кривизны поверхности, т. е. с уменьшением радиуса кривизны. На вогнутой поверхности проводника поверхностная плотность заряда уменьшается.**

Закон Ома в дифференциальной форме справедлив не только при постоянной электропроводимости, но и при изменяющейся, независимо от причин и характера ее изменения.

○ Следствием какого свойства электростатического поля является отсутствие тангенциальной составляющей напряженности поля вблизи поверхности проводника?

более хорошими проводниками среди них являются медь и серебро, у которых удельная электрическая проводимость имеет порядок 10^7 См/м.

Отсутствие электрического поля внутри проводника. В электростатике рассматривается случай неподвижных зарядов, когда $\mathbf{j} = 0$. Равенство (16.5) в этом случае дает

$$\mathbf{E} = 0, \tag{16.6}$$

т. е. *внутри проводника при электростатическом равновесии электрическое поле отсутствует.*

Отсутствие в проводнике объемных зарядов. Из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 \tag{16.7}$$

при $\mathbf{E} = 0$ следует, что

$$\rho = 0, \tag{16.8}$$

т. е. *внутри проводника отсутствуют объемные заряды.* Это означает, что заряд проводника концентрируется на его поверхности в слое атомарной толщины. Конечно, *внутри проводника имеются как положительные, так и отрицательные заряды, но они взаимно компенсируются и в целом внутренние области проводника нейтральны* [см. (16.8)].

Установление нейтральности происходит чрезвычайно быстро. Предположим, что в некотором объеме внутри проводника в момент времени $t = 0$ плотность свободных зарядов отлична от нуля ($\rho(0) \neq 0$). Уравнение непрерывности (5.24) с учетом (16.5) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

где $\gamma = \text{const}$ (для однородного проводника). С учетом (16.7) отсюда получаем уравнение для изменения ρ во времени:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho,$$

решение которого имеет вид

$$\rho(t) = \rho(0)\, e^{-(\gamma/\varepsilon_0)t},$$

т. е. плотность уменьшается экспоненциально. По общему правилу можно считать, что *образовавшийся объемный заряд «рассасывается» в течение промежутка времени* $\tau = \varepsilon_0/\gamma$, называемого **временем релаксации.** Для металлов оно чрезвычайно мало. Например, для меди ($\gamma = 6 \cdot 10^7$ См/м) $\tau \approx 10^{-19}$ с. Такой промежуток времени чрезвычайно мал даже в масштабах внутриатомных процессов. Поэтому в нестационарных ситуациях, когда поля изменяются со временем, при не слишком больших частотах с большой точностью можно считать, что *в проводнике свободные заряды распределены по поверхности, а объемные заряды отсутствуют.* Данное заключение остается справедливым также

при учете зависимости проводимости γ от частоты, хотя при этом получается увеличение времени релаксации на несколько порядков.

Установление нейтральности связано с токами, которые, однако, не создают заряда в тех областях, где они протекают. Чтобы это понять, рассмотрим простой пример. Имеется шар радиусом a_2, вещество которого характеризуется диэлектрической проницаемостью ε и удельной проводимостью γ. В начальный момент $t = 0$ шаровая область радиусом $a_1 < a_2$ заряжена равномерно с плотностью заряда ρ_0. Сферический слой между радиусами a_1 и a_2 нейтрален. Рассмотрим процесс нейтрализации заряда в объеме шара.

Изменение плотности заряда в различных точках шара дается формулой

$$\rho(r, t) = \begin{cases} \rho_0 e^{-t/\tau} & (r < a_1), \\ 0 & (r > a_1), \end{cases}$$

где $\tau = \varepsilon/\gamma$. Полный заряд шара $Q_0 = {}^4/_3 \pi a_1^3 \rho_0$ остается постоянным, но заряд шаровой области радиусом a_1 уменьшается по закону

$$Q_1(t) = {}^4/_3 \pi a_1^3 \rho_0 e^{-t/\tau} = Q_0 e^{-t/\tau}.$$

Этот заряд током проводимости через сферический слой между радиусами a_1 и a_2 переносится к поверхности шара, где концентрируется в виде поверхностного заряда.

Распределение заряда в любой момент времени сферически симметрично и поэтому по теореме Гаусса получаем следующее выражение для напряженности электрического поля:

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{Q_0 e^{-t/\tau} r}{4\pi\varepsilon a_1^3} & (0 < r < a_1), \\ \dfrac{Q_0 e^{-t/\tau}}{4\pi\varepsilon r^2} & (a_1 < r < a_2), \\ \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a_2). \end{cases}$$

Поверхностный заряд шара возрастает. Он может быть рассчитан по закону сохранения заряда или исходя из граничных условий. В первом случае

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a_2^2}[Q_0 - Q_1(t)] = \frac{Q_0}{4\pi a_2^2}(1 - e^{-t/\tau}).$$

Во втором случае

$$\sigma|_{r=a_2} = D_r|_{r=a_2+0} - D_r|_{r=a_2-0} = \varepsilon_0 E_r|_{r=a_2+0} - \varepsilon E_r|_{r=a_2-0} = \frac{Q_0}{4\pi a_2^2}(1 - e^{-t/\tau}),$$

где значения функции с аргументами $r = a_2 + 0$ и $r = a_2 - 0$ берутся соответственно с внешней и внутренней сторон поверхности шара.

Плотность тока проводимости равна

$$j_r = \gamma E_r = \begin{cases} \dfrac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau_r}}{4\pi\varepsilon a_1^3} & (0 < r < a_1), \\ \dfrac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau}}{4\pi\varepsilon r^2} & (a_1 < r < a_2), \\ 0 & (a_2 < r < \infty). \end{cases}$$

Сила тока проводимости, протекающего через сферическую поверхность радиусом r, определяется формулой

$$I_r = j_r 4\pi r^2 = \begin{cases} \dfrac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau}}{\varepsilon} \dfrac{r^3}{a_1^3} & (0 < r < a_1), \\ \dfrac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau}}{\varepsilon} & (a_1 < r < a_2), \\ 0 & (a_2 < r < \infty). \end{cases}$$

Таким образом, полный ток в области $0 < r < a_1$ возрастает с увеличением радиуса. Это обусловлено тем, что каждая точка этого объема является источником тока проводимости. В области $a_1 < r < a_2$ источников тока проводимости нет и поэтому полный ток, проходящий через сферическую поверхность, не зависит от радиуса.

Электрическая индукция. Если нейтральный проводник помещается во внешнее электрическое поле, то поверхностные заряды на проводнике перераспределяются так, что создаваемое ими внутри проводника поле полностью компенсирует внешнее поле, в результате чего суммарная напряженность поля внутри проводника равна нулю. *Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике при его помещении во внешнее электрическое поле называется* **электрической индукцией.** Если проводник заряжен, то под влиянием внешнего поля происходит также перераспределение и заряда проводника.

Поле вблизи поверхности проводника. Выделим на поверхности проводника элемент поверхности ΔS и построим прямой цилиндр высотой h, пересекающий поверхность (рис. 48). Применим к этому цилиндру теорему Гаусса:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0, \qquad (16.9)$$

где S – поверхность цилиндра, Q – заряд в объеме цилиндра.

Внутри цилиндра заряд имеется только на поверхности проводника и характеризуется поверхностной плотностью σ и, следовательно, $Q = \sigma S$. Внутри проводника поле равно нулю и поэтому поток $\mathbf{E}$ через часть поверхности цилиндра, находящуюся в объеме проводника, равен нулю. Поток через часть поверхности цилиндра, находящуюся вне проводника, слагается из потоков через основание цилиндра и его боковую поверхность. В пределе высоту h цилиндра возьмем сколь угодно малой ($h \to 0$), следовательно, и площадь боковой поверхности

цилиндра и поток $\mathbf{E}$ через боковую поверхность будут сколь угодно малыми. Поэтому в пределе $h \to 0$ останется лишь поток через основание цилиндра:

$$\int_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_n \Delta S, \qquad (16.10)$$

где E_n – нормальная компонента $\mathbf{E}$. Напомним, что положительным направлением нормали в теореме Гаусса считается внешняя нормаль к замкнутой поверхности. В рассматриваемом случае это означает, что положительная нормаль направлена во внешнюю сторону от поверхности проводника. При $h \to 0$ с учетом (16.10) равенство (16.9) принимает вид

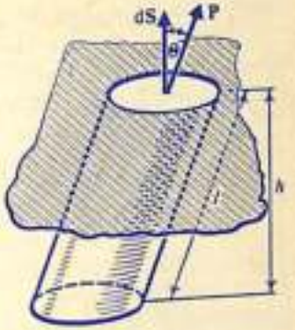
$$E_n \Delta S = \sigma \Delta S/\varepsilon_0, \qquad (16.11)$$

откуда

$$E_n = \sigma/\varepsilon_0. \qquad (16.12)$$

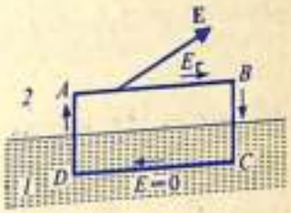
Таким образом, *нормальная компонента напряженности поля у поверхности проводника однозначно определяется поверхностной плотностью зарядов.*

Теперь возникает вопрос о тангенциальной компоненте напряженности поля. Покажем, что она должна быть равна нулю исходя из невозможности существования вечного двигателя. Рассмотрим замкнутый контур L, пересекающий поверхность проводника, верхняя часть которого идет параллельно поверхности вне проводника, а внутренняя часть – внутри проводника (рис. 49). Внутри проводника напряженность $\mathbf{E}$ поля равна нулю, а следовательно, отсутствует и тангенциальная компонента поля. Допустим, что вне проводника тангенциальная компонента поля не равна нулю. Возьмем положительный заряд и будем перемещать его по замкнутому контуру в направлении, указанном на рис. 49 стрелками. На участке AB поле совершает положительную работу. Участок BC в пределе может быть сделан сколь угодно малым, поскольку участки AB и CD расположены сколь угодно близко к поверхности проводника. Следовательно,



48

К выводу формулы для нормальной составляющей напряженности электрического поля вблизи поверхности проводника



49

К доказательству отсутствия тангенциальной составляющей напряженности электрического поля вне проводника



50

Механизм образования поля вблизи поверхности проводника

перемещение на участке BC связано с работой, которая может быть сделана сколь угодно малой. Для перемещения заряда на участке CD никакой работы не затрачивается, поскольку поле внутри проводника отсутствует. Работа, связанная с перемещением заряда на участке DA, так же, как и на участке BC, может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, в результате перемещения заряда по замкнутому контуру электрическое поле произведет положительную работу и больше в системе никаких изменений не произойдет. Можно повторить этот цикл и получить еще раз такую же работу и т. д. Таким образом, осуществлен вечный двигатель первого рода, что невозможно. Этот вечный двигатель совершает работу за счет тангенциальной компоненты напряженности электрического поля вблизи поверхности проводника. Следовательно, эта компонента должна быть равна нулю. Другими словами, *равенство нулю тангенциальной компоненты электрического поля у поверхности проводника является следствием потенциальности электростатического поля и отсутствия поля внутри проводника.*

Равенство

$$E_\tau = 0 \qquad (16.13)$$

означает, что *напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника направлена по перпендикуляру к поверхности и равна* σ/ε_0 [см. (16.12)].

Механизм образования поля вблизи поверхности проводника. Единственными источниками электрического поля в электростатике являются заряды. Поэтому поле вблизи поверхности проводника создается всеми поверхностными зарядами данного проводника и всеми зарядами, находящимися вне проводника. Выделим бесконечно малый элемент ΔS поверхности проводника (рис. 50). Напряженность $\mathbf{E}$ поля вблизи поверхности проводника состоит из двух частей: напряженности $\mathbf{E}_1$ поля, создаваемого зарядами, находящимися на элементе ΔS, напряженности $\mathbf{E}_2$ поля, создаваемого всеми остальными зарядами вне элемента ΔS. Ясно, что заряды элемента поверхности ΔS создают поле с обеих сторон элемента. Поскольку обе стороны элемента ΔS эквивалентны, можно заключить, что векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}'_1$ противоположно направлены и равны по модулю $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}'_1|$. Поле $\mathbf{E}_2$ создается всеми зарядами, находящимися вне элемента ΔS. Ясно, что эти заряды создают не только напряженность $\mathbf{E}_2$ вне проводника, но и напряженность $\mathbf{E}'_2$ внутри проводника. Поскольку это есть электрическое поле в пространстве вне зарядов, которые его создают, оно должно быть непрерывным, и, следовательно, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}'_2$. Напряженность полного поля внутри проводника равна нулю, т. е. $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2 = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{E}'_1 = -\mathbf{E}'_2$. Учитывая также равенство $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}'_1|$, заключаем, что $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|$.

Отсюда следует

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = {}^1/_2\mathbf{E}, \qquad (16.14)$$

т. е. *напряженность поля вблизи поверхности проводника состоит из двух равных частей: одна часть создается поверхностными зарядами прилегающего элемента поверхности, а другая — всеми остальными зарядами, лежащими вне этого элемента поверхности.*

Зависимость поверхностной плотности зарядов от кривизны поверхности. Заряд по поверхности проводника распределяется неравномерно, поверхностная плотность заряда зависит от кривизны поверхности. Чтобы в этом убедиться, проанализируем распределение напряженности поля вблизи некоторого элемента поверхности (рис. 51). В случае малой кривизны поверхности (рис. 51, *а*) находящиеся вне dS заряды создают вблизи этого элемента малую нормальную составляющую напряженности $\mathbf{E}'_2$. Следовательно, для ее компенсации заряды, находящиеся на элементе поверхности, должны создать сравнительно малую напряженность поля $\mathbf{E}'_1 = -\mathbf{E}'_2$. В соответствии с формулами (16.14) и (16.12) заключаем, что на этом элементе поверхностная плотность заряда должна быть сравнительно малой, равной $\sigma = 2\varepsilon_0 E'_1$. Если же кривизна поверхности вблизи рассматриваемого элемента велика, то напряженность $\mathbf{E}'_2$, создаваемая зарядами, находящимися вне элемента ΔS поверхности, велика и соответственно должна быть значительно больше напряженность, создаваемая зарядами, лежащими на элементе поверхности. А это означает, что поверхностная плотность зарядов на этом элементе должна быть больше. Таким образом, можно заключить, что *поверхностная плотность зарядов увеличивается с ростом кривизны поверхности, т. е. увеличивается с уменьшением радиуса кривизны.*

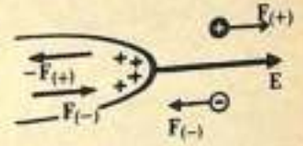


51

Зависимость поверхностной плотности заряда от кривизны поверхности

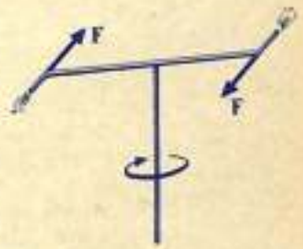
С помощью аналогичных рассуждений можно убедиться, что *на вогнутой внутрь проводника поверхности плотность заряда уменьшается.*

Увеличение поверхностной плотности заряда на выпуклых поверхностях особенно наглядно проявляется в стекании заряда с острия.



52

Стекание зарядов с острия



53

Электрическое сегнерово колесо

Стекание заряда с острия. Рассмотрим, что происходит вблизи острия заряженного проводника (рис. 52). Напряженность **E** вблизи острия очень велика. В окружающем воздухе имеются заряды (ионы, электроны), на которые в поле с напряженностью **E** действует сила. В соответствии с третьим законом Ньютона равная, но противоположно направленная сила действует на заряды острия. Поэтому в результате взаимодействия заряды в воздухе вблизи острия и острие получают равные, но противоположно направленные импульсы. Заряды в воздухе, которые под влиянием действующей на них силы движутся к острию, при попадании на острие передают ему свой импульс и заряд. Этот импульс равен по модулю импульсу, полученному острием в результате взаимодействия с соответствующим зарядом, но имеет противоположное направление. Следовательно, в результате попадания зарядов на острие эти импульсы взаимно компенсируются и итоговый результат взаимодействия равен нулю.

Таким образом, *взаимодействие зарядов острия с разноименными зарядами окружающего воздуха не приводит к возникновению какой-либо силы, действующей на острие.*

По-другому обстоит дело для одноименных зарядов: сила, действующая на заряды острия, все время направлена в сторону проводника (на рис. 41 эта сила обозначена $-\mathbf{F}_+$). Если острие заряжено положительно, то отрицательные заряды, попадающие на острие, как это изображено на рис. 41, нейтрализуют соответствующие положительные заряды. Это выглядит так, как будто бы положительные заряды покидают острие, или, как говорят, стекают с острия. Сила $-\mathbf{F}_+$, действующая при этом на острие, эквивалентна реактивной силе отдачи, возникающей в результате стекания зарядов с острия. Если острие заряжено отрицательно, то электроны покидают его фактически, т. е. фактически стекают с острия. Механизм возникновения «реактивной силы» в этом случае совершенно аналогичен описанному выше.

Это означает, что «реактивная сила» возникает не только в момент «старта» электронов с поверхности проводника, но и во все последующие моменты времени, когда электрон ускоряется полем зарядов, оставшихся на острие.

Эффектной демонстрацией наличия «реактивной силы» вследствие стекания заряда с острия является вращение электрического сегнерова колеса (рис. 53). Пунктирными стрелками показано направление стекания зарядов, в результате чего возникает «реактивная сила» и горизонтальный отрезок проводника приходит в быстрое вращение вокруг вертикальной оси.

Электроскопы и электрометры. Наиболее простым прибором для обнаружения электрических зарядов является вертикальный металлический стержень или пластинка, к которому одним концом прикреплена легкая проводящая фольга или стрелка (рис. 54). При отсутствии заряда на металлическом стержне и фольге (стрелке) последняя висит вертикально, параллельно стержню. При наличии заряда силы отталкивания между одноименными зарядами на стержне и фольге (стрелке) отклоняют фольгу от вертикального положения на некоторый угол. Таким образом, прибор может служить индикатором наличия заряда — электроскопом. Угол отклонения стрелки от вертикали тем больше, чем больше заряд стержня. Это позволяет проградуировать электроскоп и по углу отклонения определять количество электричества на нем. Такой приспособленный для количественных измерений электроскоп называется электрометром. Заряд зависит от потенциала стержня и стрелки. Поэтому с помощью электрометра можно измерять разности потенциалов. Электрометр заключен в корпус (рис. 54).



54

Схема электроскопа и электрометра

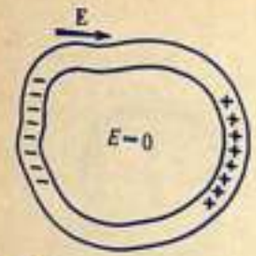
Зависимость поверхностной плотности заряда от кривизны поверхности проводника демонстрируется с помощью электрометра следующим образом. Небольшим проводящим шариком, закрепленным на непроводящей ручке, касаются соответствующего участка поверхности проводника (рис. 55). При этом на шарике образуется тем больший заряд, чем больше поверхностная плотность заряда на той части поверхности проводника, в соприкосновении с которой находится шарик. После этого шарик отделяется от поверхности проводника и приводятся в соприкосновение со стержнем электрометра. На электрометр при этом переходит тем больше заряда, чем его было больше на шарике. Поэтому по отклонению стрелки можно судить о поверхностной плотности заряда того участка поверхности проводника, с которой взят заряд, перенесенный на электрометр. По соотношению углов отклонения стрелки можно судить о соотношении поверхностных плотностей заряда на соответствующих участках поверхности проводника. В зависимости от кривизны поверхности поверхностная плотность заряда изменяется весьма значительно.



55

Демонстрация зависимости плотности поверхностного заряда на проводнике в зависимости от кривизны поверхности с помощью электрометра

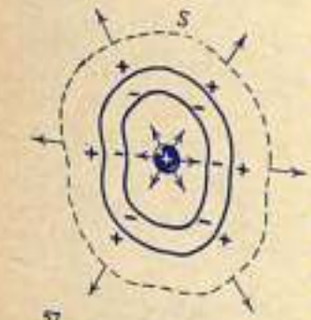
Металлический экран. Механизм уничтожения поля внутри проводника распределением зарядов на его поверхности пока-



56

Металлический экран для внешних полей

зывает, что внутренние части проводника к нему не имеют никакого отношения и их можно удалить. В результате этого остается проводящая замкнутая оболочка (рис. 56). *В пространстве, окруженном оболочкой, электрическое поле равно нулю. Замкнутая оболочка называется* **экраном**. *Она экранирует внутреннее пространство от внешнего электрического поля.* Экраны используются для защиты технических устройств от влияния внешних электрических полей. Обычно их изготовляют не из сплошного проводящего материала, а из сетки с мелкими ячейками. Как показывают опыт и расчет, экранирующая способность такой сетки чуть меньше сплошного экрана, но значительно меньше затраты материала и проще устройство экрана.



57

Заряд, окруженный замкнутой проводящей оболочкой

Экранирует ли замкнутая проводящая оболочка внешнее пространство от зарядов, находящихся внутри полости? Иначе говоря, проникает ли поле зарядов, имеющихся в объеме, окруженном замкнутой проводящей оболочкой, во внешнее пространство? Да, проникает. Чтобы в этом убедиться, необходимо подробнее проанализировать ситуацию.

Пусть в объеме V внутри полости распределен заряд

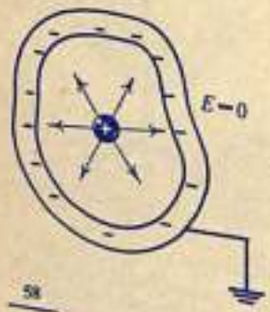
$$Q = \int_V \rho \, dV. \tag{16.15}$$

По закону электростатической индукции на внутренней поверхности оболочки образуется заряд противоположного знака (рис. 57). Чтобы найти его значение, воспользуемся теоремой Гаусса, примененной к объему внутри замкнутой оболочки:

$$\int_{S_{внут}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV, \tag{16.16}$$

где $S_{внут}$ – внутренняя поверхность оболочки.

Обозначая σ – плотность поверхностного заряда на внутренней поверхности, для напряженности $\mathbf{E}$ поля вблизи поверхности [см. (16.12)] получаем



58

Заземленная замкнутая оболочка экранирует внешнее пространство от зарядов внутри объема

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}, \tag{16.17}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к внутренней поверхности оболочки, направленная внутрь объема, ограниченного оболочкой. Учтем, что $d\mathbf{S}$ в (16.16) направлен по внешней нормали к объему V, т. е. противоположно $\mathbf{n}$, и, следовательно,

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = dS \cos(\widehat{\mathbf{n}, d\mathbf{S}}) = dS \cos \pi = -dS. \tag{16.18}$$

Интеграл в левой части (16.16) с учетом (16.17) и (16.18) равен

$$\int_{S_{внут}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{S_{внут}} \sigma \, dS. \tag{16.19}$$

Тогда теорема Гаусса (16.16) принимает вид

$$-\int_{S_{внут}} \sigma \, dS = \int_V \rho \, dV = Q. \tag{16.20}$$

Следовательно, *на внутренней поверхности оболочки образуется заряд, равный по абсолютному значению заряду внутри полости и противоположный ему по знаку.*

Внутри оболочки напряженность поля равна нулю, поскольку оболочка является проводником. На внешней поверхности оболочки расположен заряд, знак которого противоположен знаку заряда на внутренней оболочке, а абсолютное значение по закону сохранения заряда равно абсолютному значению заряда на внутренней поверхности.

Для доказательства существования электрического поля во внешнем пространстве воспользуемся теоремой Гаусса. На рис. 57 пунктирной кривой изображена замкнутая поверхность, окружающая оболочку. Полный заряд в объеме, ограниченном этой замкнутой поверхностью, равен заряду внутри полости, ограниченной оболочкой, поскольку заряд оболочки равен нулю. Следовательно, теорема Гаусса имеет вид

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV = Q/\varepsilon_0 \neq 0, \tag{16.21}$$

т. е. напряженность $\mathbf{E}$ поля в окружающем оболочку внешнем пространстве не равна нулю.

«Заземлим» оболочку, т. е. соединим ее проводником с очень большим удаленным проводящим телом. Обычно таким телом является Земля (рис. 58). Для упрощения анализа представим это тело в виде бесконечной проводящей среды, заполняющей все пространство вне оболочки и соприкасающейся с оболочкой. Все заряды с внешней поверхности оболочки уйдут на бесконечность и останется лишь заряд внутри полости и заряд на внутренней поверхности оболочки. Напряженность поля внутри проводящей среды, окружающей оболочку, равна нулю. При этом роль среды сводится лишь к тому, чтобы обеспечить удаление заряда с внешней поверхности оболочки на бесконечность. Поэтому роль областей среды на конечном расстоянии от оболочки

может выполнить тонкий проволочный проводник, который обеспечивает возможность обмена зарядом между оболочкой и достаточно удаленными областями среды. Ясно, что после удаления проводящей среды из области, окружающей оболочку, напряженность поля в точках области по-прежнему равна нулю. Таким образом, *заземленная замкнутая оболочка экранирует внешнее пространство от зарядов, находящихся в объеме, окруженном этой оболочкой. Незаземленная оболочка такой экранировки не создает.*

Потенциал проводника. Из равенства нулю напряженности $\mathbf{E}$ поля внутри проводника следует, что во всех точках проводника потенциал имеет одно и то же значение, т. е. разность потенциалов между точками 1 и 2 проводника [см. (14.28)] равна

$$\varphi(2) - \varphi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{16.22}$$

Одинаковое во всех точках проводника значение потенциала называется **потенциалом проводника.**

Пусть имеется изолированный заряженный проводник. В окружающем проводник пространстве имеется электрическое поле, создаваемое зарядом проводника. Будем нормировать потенциал на нуль в бесконечности. Тогда [см. (14.29)] потенциал проводника может быть выражен формулой

$$\varphi = \int_{\left(\substack{\text{поверхность}\\ \text{проводника}}\right)}^{\infty} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}. \tag{16.23}$$

В формуле (16.23) путь интегрирования начинается в любой точке проводника и заканчивается на бесконечности.

Емкость уединенного проводника. От чего зависит потенциал уединенного проводника? Из формулы (16.23) видно, что по принципу суперпозиции потенциал должен быть прямо пропорционален заряду, поскольку $\mathbf{E}$ в подынтегральном выражении (16.23) прямо пропорционально заряду. Далее очевидно, что потенциал зависит от размеров и формы проводника, которые учитываются его емкостью.

Емкостью проводника называется отношение заряда Q уединенного проводника к его потенциалу φ:

$$\boxed{C = Q/\varphi.} \tag{16.24}$$

Емкость проводника выражается в фарадах (Ф). Из (16.24) находим:

$$1\ \Phi = 1\ \text{Кл/В}. \tag{16.25}$$

В системе СГС емкость выражается в сантиметрах, а формула для емкости совпадает с (16.24). Поскольку $1\ \text{В} = (1/300)$ СГС, $1\ \text{Кл} = 3\cdot 10^9$ ед. СГС, из (16.24) следует, что

$$1\ \Phi = 9\cdot 10^{11}\ \text{см}. \tag{16.26}$$

Фарад является очень большой единицей. Вычислим, например, емкость шара, радиус которого R, а заряд Q. Поскольку напряженность поля такого шара в окружающем его пространстве равна

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{16.27}$$

то потенциал и емкость выражаются формулами:

$$\varphi = \int_R^\infty E\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}, \tag{16.28}$$

$$C = Q/\varphi = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{16.29}$$

При радиусе шара 1 см находим

$$C \approx 10^{-2}/(9\cdot 10^9) \approx 10^{-12}\ \Phi. \tag{16.30}$$

Поэтому емкость обычно выражают в дольных единицах.

Система проводников. Если имеется несколько проводников, то потенциал каждого из них зависит не только от заряда проводника, но и от напряженностей полей, создаваемых другими проводниками, или, другими словами, от зарядов других проводников, причем по принципу суперпозиции он прямо пропорционален этим зарядам.

Рассмотрим для определенности два проводника (рис. 59). На основании сказанного можно написать

$$\varphi_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2,\quad \varphi_2 = \alpha_{21}Q_1 + \alpha_{22}Q_2, \tag{16.31}$$

где α_{ij} – **потенциальные коэффициенты,** зависящие от формы и размеров проводников и от их взаимного расположения. Теоретическое вычисление этих коэффициентов является сложной математической задачей. Обычно они определяются опытным путем.

Потенциальные коэффициенты не являются независимыми друг от друга. В этом можно убедиться следующим образом. Пусть: σ_1 и σ_2 – поверхностные плотности зарядов; r_{11} – расстояние от элемента интегрирования dS_1 на поверхности первого проводника до некоторой фиксированной точки внутри него; r_{12} – расстояние от элемента поверхности dS_2 второго проводника до той же точки. Тогда потенциалы первого и второго проводников равны (смысл r_{22} и r_{21} аналогичен r_{11} и r_{12}):

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\frac{\sigma_1\,dS_1}{r_{11}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_2}\frac{\sigma_2\,dS_2}{r_{12}}, \tag{16.32}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_2}\frac{\sigma_2\,dS_2}{r_{22}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\frac{\sigma_1\,dS_1}{r_{21}} \tag{16.33}$$

Заряды проводников равны:

$$Q_1 = \int_{S_1}\sigma_1\,dS_1,\quad Q_2 = \int_{S_2}\sigma_2\,dS_2. \tag{16.34}$$

Предположим, что заряды проводников изменились:

$$Q_1' = \int_{S_1} \sigma_1' \, dS_1, \quad Q_2' = \int_{S_2} \sigma_2' \, dS_2. \tag{16.35}$$

Умножим обе части (16.32) на Q_1', а (16.33) на Q_2' и сложим почленно полученные равенства:

$$Q_1'\varphi_1 + Q_2'\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\sigma_1' \, dS_1 \int_{S_1}\frac{\sigma_1 \, dS_1}{r_{11}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\sigma_1' \, dS_1 \int_{S_2}\frac{\sigma_2 \, dS_2}{r_{12}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_2}\sigma_2' \, dS_2 \int_{S_2}\frac{\sigma_1 \, dS_2}{r_{22}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_2}\sigma_2' \, dS_2 \int_{S_1}\frac{\sigma_1 \, dS_1}{r_{21}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\sigma_1 \, dS_1 \int_{S_1}\frac{\sigma_1' \, dS_1}{r_{11}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_2}\sigma_2 \, dS_2 \int_{S_1}\frac{\sigma_1' \, dS_1}{r_{12}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_2}\sigma_2 \, dS_2 \int_{S_2}\frac{\sigma_2' \, dS_2}{r_{22}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\sigma_1 \, dS_1 \int_{S_2}\frac{\sigma_2' \, dS_2}{r_{21}} = Q_1\varphi_1' + Q_2\varphi_2', \tag{16.36}$$

где порядок интегрирования изменен, поскольку интегрирование проводится по разным независимым переменным. Величины φ_1' и φ_2' являются потенциалами проводников, когда заряды их равны Q_1' и Q_2'. Полученное в (16.36) соотношение

$$\boxed{Q_1'\varphi_1 + Q_2'\varphi_2 = Q_1\varphi_1' + Q_2\varphi_2'} \tag{16.37}$$

называется **теоремой взаимности.** Из нее получается условие, которому удовлетворяют потенциальные коэффициенты α_{ij}.

Если заряд второго проводника равен нулю ($Q_2 = 0$, $Q_1 \neq 0$), то [см. (16.31)]

$$\varphi_1 = \alpha_{11}Q_1, \quad \varphi_2 = \alpha_{21}Q_1. \tag{16.38}$$

Если заряд первого проводника равен нулю ($Q_1' = 0$, $Q_2' \neq 0$), то [см. (16.31)]

$$\varphi_1' = \alpha_{12}Q_2', \quad \varphi_2' = \alpha_{22}Q_2'. \tag{16.39}$$

Теорема взаимности (16.37) для этих двух случаев принимает вид

$$Q_2'\varphi_2 = Q_1\varphi_1'. \tag{16.40}$$

Подставляя в (16.40) выражения φ_2 и φ_1' [см. (16.38) и (16.39)] и сокращая обе части полученного равенства на общий множитель $Q_2'Q_1$, находим

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}, \tag{16.41}$$

т. е. *потенциальные коэффициенты симметричны относительно своих индексов.*

Все вычисления нетрудно провести для любого числа проводников, записав исходные соотношения (16.31) для n проводников в виде

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}Q_j. \tag{16.42}$$

Все дальнейшие вычисления аналогичны вычислениям от (16.32) до (16.37) и вместо (16.37) приводят к следующей формуле, выражающей теорему взаимности в общем случае:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i'\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i'. \tag{16.43}$$

Из (16.43) вместо (16.41) получается общее условие симметрии потенциальных коэффициентов:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}. \tag{16.44}$$

Система уравнений (16.42) может быть решена относительно Q_i:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\varphi_j. \tag{16.45}$$

Здесь $C_{ij} = A_{ij}/D$, где D – детерминант из коэффициентов системы уравнений (16.42), A_{ij} – дополнение элемента α_{ij} в этом детерминанте. На основании (16.44) заключаем, что коэффициенты C_{ij} удовлетворяют условию

$$C_{ij} = C_{ji}, \tag{16.46}$$

где C_{ij} – емкостные коэффициенты, C_{ii} – емкостной коэффициент i-го проводника, а C_{ij} – емкостной коэффициент между i-м и j-м проводниками. Емкостной коэффициент уединенного проводника называется просто емкостью проводника.

Поскольку положительный заряд на уединенном проводнике создает положительный потенциал, можно заключить, что *все емкостные коэффициенты с одинаковыми индексами* (C_{11}, C_{22}, ...) *положительны.* Чтобы в этом убедиться, заземлим все проводники, за исключением i-го, а на i-м проводнике оставим положительный заряд, т. е. будем считать, что $Q_i > 0$. Тогда, очевидно, $\varphi_i > 0$ и $\varphi_j = 0$ при $j \neq i$. Следовательно, уравнение (16.45) для Q принимает вид

$$Q_i = C_{ii}\varphi_i. \tag{16.47}$$

Так как $\varphi_i > 0$ и $Q_i > 0$, то $C_{ii} > 0$, что и требовалось доказать.

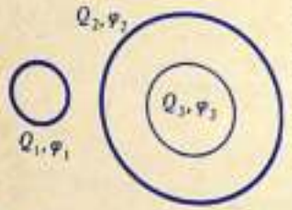
Аналогично можно доказать, что *емкостные коэффициенты с различными индексами не могут быть положительными – они либо отрицательны, либо равны нулю.* Рассмотрим, например, два проводника, из которых один заземлен, а другой изолирован и заряжен положительно. Этот положительный заряд вследствие явления электростатической индукции наведет на заземленном проводнике отрицательный заряд. Формула (16.45) для заряда на втором проводнике принимает вид

$$Q_2 = C_{21}\varphi_1. \tag{16.48}$$



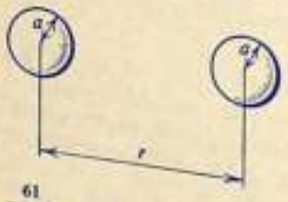
59

Система проводников



60

К нахождению емкостных коэффициентов в случае двух сфер



61

К вычислению емкостных коэффициентов двух проводящих шаров

Так как $Q_2 < 0$, $\varphi_1 > 0$, то $C_{21} < 0$. Такой вывод не исключает возможности, что коэффициент может быть равным нулю, но этот коэффициент безусловно не может быть положительным.

Рассмотрим три проводящие сферы (рис. 60). Их потенциалы и заряды обозначим соответственно φ_1, φ_2, φ_3 и Q_1, Q_2, Q_3. Для определения C_{ij} имеем уравнения (16.45), которые в данном случае принимают вид:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3, \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3, \\ Q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3. \end{aligned} \tag{16.49}$$

Чтобы определить коэффициенты C_{ij}, необходимо иметь достаточное число уравнений (16.49) с известными Q_i и φ_i, из которых вычисляются C_{ij}.

Предположим, что $Q_3 = 0$ и вторая сфера заземлена. При этом $\varphi_3 = \varphi_2 = 0$ и уравнения (16.49) принимают вид:

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1, \quad Q_2 = C_{21}\varphi_1, \quad 0 = C_{31}\varphi_1. \tag{16.50}$$

Тогда $C_{31} = C_{13} = 0$, т. е. емкостной коэффициент между заэкранированными проводниками равен нулю.

Предположим, что первая и вторая сферы заземлены, т. е. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, но заряд $Q_3 \neq 0$. Уравнения (16.49) в этом случае принимают вид:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = C_{23}\varphi_3, \quad Q_3 = C_{33}\varphi_3. \tag{16.51}$$

Как было показано, на внутренней поверхности заземленной проводящей оболочки индуцируется заряд, равный по абсолютному значению заряду в полости ограничиваемой оболочкой, но противоположный ему по знаку, т. е. $Q_2 = -Q_3$. Из уравнений (16.51) получаем

$$C_{23} = -C_{33}. \tag{16.52}$$

Таким образом, емкостной коэффициент между двумя проводниками, один из которых полностью окружает другой, равен взятому с обратным знаком емкостному коэффициенту внутреннего проводника, что играет важную роль для конденсаторов.

● **Емкость уединенного проводника зависит только от его формы и размеров. Потенциальные и емкостные коэффициенты зависят только от геометрических характеристик проводников и их взаимного расположения.**

Емкостные коэффициенты с одинаковыми индексами всегда положительны, а с различными – либо равны нулю, либо отрицательны.

Предположим, что имеются два шара, расположенных на большом по сравнению с их радиусами a расстоянии r друг от друга (рис. 61). Обозначим: a – радиусы шаров и r – расстояние между их центрами. Поскольку $a \ll r$, можно для расчета напряженности поля вдали от шаров пренебречь перераспределением зарядов на шарах из-за их взаимной электростатической индукции. Тогда формулы для потенциалов шаров принимают вид:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{r}\right), \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{a}\right), \tag{16.53}$$

где Q_1 и Q_2 – заряды первого и второго шаров. Уравнения (16.53) можно решить относительно Q_1 и Q_2:

$$Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ar^2}{r^2 - a^2}\varphi_1 - 4\pi\varepsilon_0 \frac{a^2 r}{r^2 - a^2}\varphi_2, \tag{16.54}$$

$$Q_2 = -4\pi\varepsilon_0 \frac{ra^2}{r^2 - a^2}\varphi_1 + 4\pi\varepsilon_0 \frac{r^2 a}{r^2 - a^2}\varphi_2.$$

Тогда

$$C_{11} = C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ar^2}{r^2 - a^2} = C > 0, \tag{16.55}$$

$$C_{12} = C_{21} = -4\pi\varepsilon_0 \frac{ra^2}{r^2 - a^2} = \gamma < 0. \tag{16.56}$$

Представим (16.54) с учетом (16.55) и (16.56) в виде:

$$Q_1 = C\varphi_1 + \gamma\varphi_2, \quad Q_2 = \gamma\varphi_1 + C\varphi_2. \tag{16.57}$$

При $r \to \infty$ получаем $C_{11} = C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 a$, $C_{12} = C_{21} = 0$, т. е. электрическая связь между шарами прекращается и каждый из них ведет себя как изолированный проводник, а коэффициент емкости каждого из шаров становится просто емкостью изолированного шара.

Рассмотрим теперь типичную задачу.

Напомним, что емкостные коэффициенты при неизменной конфигурации проводников и их взаимного положения постоянны, независимо от изменения их зарядов и потенциалов. Поэтому надо рассмотреть столько различных ситуаций, сколько имеется неизвестных емкостных коэффициентов, и решить систему уравнений.

Пусть шарам сообщаются некоторые заряды, в результате чего их потенциалы будут равны φ_1 и φ_2. После этого второй шар заземляется. Чему равны заряды и потенциалы шаров после заземления?

До заземления заряды и потенциалы шаров связаны уравнениями (16.57). Поскольку потенциалы известны, заряды могут быть вычислены по этим формулам. После заземления второго шара его потенциал равен нулю ($\varphi_2' = 0$), а заряд Q_2' неизвестен; заряд первого шара по-прежнему равен $Q_1' = Q_1$, поскольку он изолирован. Потенциал φ_1' неизвестен. Запишем уравнения (16.57) для случая, когда второй шар заземлен:

$$Q_1' = C\varphi_1', \quad Q_2' = \gamma\varphi_1', \quad Q_1' = Q_1. \tag{16.58}$$

Решение этих уравнений:

$$\varphi_1' = \frac{Q_1}{C} = \frac{C\varphi_1 + \gamma\varphi_2}{C} = \varphi_1 + \frac{\gamma}{C}\varphi_2,\ Q_2' = \gamma\frac{Q_1}{C}. \tag{16.59}$$

Из (16.55) и (16.56) следует, что

$$\gamma/C = -a/r, \tag{16.60}$$

поэтому выражения (16.59) принимают вид

$$\varphi_1' = \varphi_1 - (a/r)\varphi_2,\ Q_2' = -(a/r)Q_1, \tag{16.61}$$

т. е. после заземления второго шара потенциал первого шара изменяется на долю a/r от потенциала второго шара, а на втором шаре остается индуцированный заряд, равный доле a/r от заряда первого шара и имеющий знак, противоположный знаку заряда первого шара.

Прервем заземление второго шара, заземлим после этого первый шар и определим потенциал второго шара и заряд первого.

Очевидно, что после заземления первого шара его потенциал будет равен нулю ($\varphi_1'' = 0$), а заряд Q_1'' неизвестен. Поскольку второй шар изолирован, его заряд не изменяется при заземлении первого шара ($Q_2'' = Q_2'$). Уравнения (16.57) после заземления первого шара имеют вид:

$$Q_1'' = \gamma\varphi_2'',\ Q_2'' = C\varphi_2'',\ Q_2'' = Q_2', \tag{16.62}$$

откуда

$$\varphi_2'' = \frac{Q_1'}{C} = -\frac{a}{rC}Q_1 = -\frac{a}{r}\varphi_1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\varphi_2,$$

$$Q_1'' = \frac{\gamma}{C}Q_2' = -\left(\frac{a}{r}\right)^2 Q_1. \tag{16.63}$$

Эти примеры иллюстрируют методы расчета емкостных коэффициентов, зарядов и потенциалов при наличии нескольких проводников в электростатическом поле.

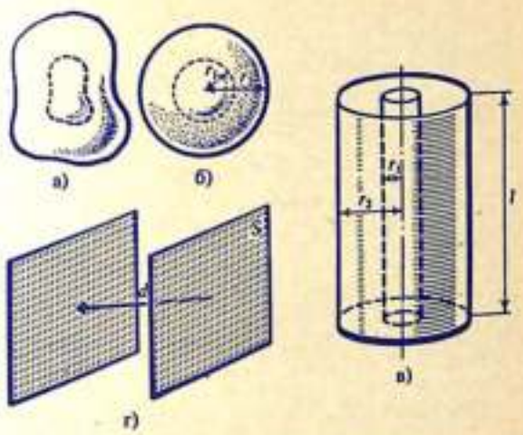
Конденсаторы. Конденсатором называется совокупность двух *любых* проводников с одинаковыми по абсолютному значению, но противоположными по знаку зарядами. *Проводники называются обкладками конденсатора.* Полагая в (16.31) $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$, получаем $\varphi_1 = Q(\alpha_{11} - \alpha_{12})$, $\varphi_2 = Q(\alpha_{21} - \alpha_{22})$. Тогда разность потенциалов между проводниками

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = Q(\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}). \tag{16.64а}$$

Это означает, что разность потенциалов между обкладками конденсатора пропорциональна заряду на обкладке и, следовательно, конденсатор характеризуется одним параметром, называемым емкостью.

Емкость конденсатора определяется соотношением

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta\varphi},} \tag{16.64б}$$



62

Конденсаторы: общий случай (*а*), сферический (*б*), цилиндрический (*в*), плоский (*г*)

причем, по определению, емкость считается положительной величиной, т. е. в (16.64) как Q, так и $\Delta\varphi$ должны иметь одинаковый знак. Сравнение (16.64б) с (16.64а) показывает, что емкость конденсатора выражается через потенциальные коэффициенты формулой

$$C = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12})^{-1}, \tag{16.64в}$$

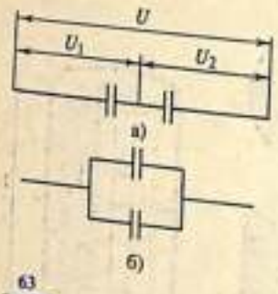
где $\alpha_{12} = \alpha_{21}$. Поскольку α_{12} и α_{21} отрицательны, *емкость C в* (16.64в) *всегда положительна* [см. (16.64б)]. Принимая во внимание смысл потенциальных коэффициентов из (16.64в), заключаем, что *емкость конденсатора зависит только от геометрических характеристик обкладок конденсатора и их взаимного расположения.*

Исходя из (16.45) и пользуясь определением (16.64б), получаем выражение емкости конденсатора через емкостные коэффициенты:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}. \tag{16.64г}$$

В большинстве случаев форма обкладок конденсатора и их взаимное расположение подбирают таким образом, чтобы внешние поля не влияли существенно на электрическое поле между ними, и силовые линии, начинающиеся на одной из обкладок, обязательно заканчивались на другой. Благодаря этому всегда обеспечивается равенство абсолютных значений зарядов на обкладках.

Конденсатор может быть представлен в виде проводника, помещенного в полости, окруженной замкнутой оболочкой (рис. 62, *а*). Если внутренний проводник является шаром или сферой, а замкнутая оболочка – концентрическая ему сфера, то конденсатор называется **сферическим** (рис. 62, *б*). Если внутренний проводник – прямой сплошной цилиндр, а оболочка – полый прямой цилиндр, коаксиальный внутреннему, то конденсатор называется **цилиндрическим** (рис. 62, *в*). Совокупность двух параллельных плоских проводящих пластин является **плоским конденсатором** (рис. 62, *г*).



63

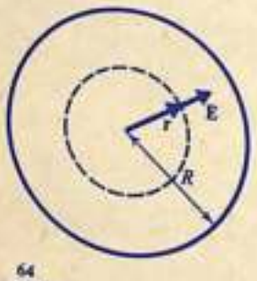
Последовательное (*а*) и параллельное (*б*) соединения конденсаторов

Вычисление емкости конденсатора сводится к определению разности потенциалов между обкладками конденсатора при известном заряде на обкладках. Например, если на внутренней обкладке сферического конденсатора имеется заряд Q, то напряженность поля между внутренней и внешней обкладками равна $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ и направлена по радиусу. Поэтому разность потенциалов между обкладками

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (16.65)$$

Отсюда по формуле (16.64б) получаем, что емкость сферического конденсатора равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2/(r_2 - r_1). \qquad (16.66)$$



64

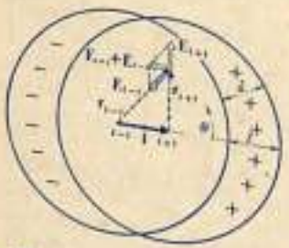
Поле внутри однородно заряженного шара

Аналогично находим емкости цилиндрического и плоского конденсаторов: $C = 2\pi\varepsilon_0 l/\ln(r_2/r_1)$, $C = \varepsilon_0 S/d$.

Определим емкость плоского конденсатора, площадь обкладок которого 1 см^2 = $= 10^{-4}$ м^2, а расстояние между обкладками $d = 1$ мм $= 10^{-3}$ м:

$$C = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\,\frac{10^{-4}}{10^{-3}}\ \Phi \approx 10^{-12}\ \Phi = 1\ \text{пФ}. \qquad (16.67)$$

Конденсаторы можно соединять последовательно (рис. 63, *а*) и параллельно (рис. 63, *б*). *При последовательном соединении складываются разности потенциалов, а при параллельном — заряды на обкладках.*



65

К вычислению напряженности поля слившихся друг относительно друга шаров

При последовательном соединении

$$U = U_1 + U_2,\ U = Q/C,\ U_1 = Q/C_1,\ U_2 = Q/C_2, \qquad (16.68)$$

где U — разность потенциалов между крайними обкладками конденсаторов; U_1 и U_2 — разности потенциалов между обкладками каждого из конденсаторов; Q — модуль заряда на каждой обкладке конденсаторов (модули заряда на всех обкладках конденсаторов равны); C — емкость двух конденсаторов; C_1 и C_2 — емкости каждого из конденсаторов. Из (16.68) следует, что

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.} \qquad (16.69)$$

Таким образом, при последовательном соединении складываются обратные значения емкостей.

При параллельном соединении

$$Q = Q_1 + Q_2,\ Q = UC,\ Q_1 = UC_1,\ Q_2 = UC_2. \qquad (16.70)$$

Тогда

$$\boxed{C = C_1 + C_2,} \qquad (16.71)$$

т. е. при параллельном соединении складываются емкости конденсаторов.

Проводящий шар в однородном поле. Напряженность поля, которое возникает в результате внесения проводящего шара во внешнее однородное электрическое поле, может быть найдена элементарными методами.

Прежде всего определим напряженность внутри однородно заряженного шара радиусом R (рис. 64), который, конечно, не является проводником. Пусть объемная плотность заряда внутри шара равна ρ. Тогда в сферическом объеме радиусом $r < R$ находится заряд $Q_r = {}^4/_3\pi r^3\rho$. Применяя к сферическому объему теорему Гаусса, получаем (ε_0 — диэлектрическая проницаемость материала шара)

$$E(r)\,4\pi r^2 = Q_r/E_0 = 4\pi r^3\rho/(3\varepsilon_0) \qquad (16.72)$$

и, следовательно, напряженность поля внутри однородно заряженного шара в точке, характеризуемой радиус-вектором $\mathbf{r}$, равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = [(\rho/(3\varepsilon_0)]\,\mathbf{r}, \qquad (16.73)$$

причем началом отсчета радиус-вектора является центр шара.

Теперь представим, что имеются два шара одинакового радиуса с одинаковой объемной плотностью заряда разных знаков (рис. 65). Допустим, что отрицательно заряженный шар сдвинут влево. Вектор, проведенный из его центра в центр другого шара, обозначим $\mathbf{l}$. Найдем напряженность поля во внутренних точках шаров. Напряженности, создаваемые зарядом каждого из шаров, равны:

$$\mathbf{E}_{(+)} = [\rho/(3\varepsilon_0)]\,\mathbf{r}_{(+)},\ \mathbf{E}_{(-)} = -[\rho/(3\varepsilon_0)]\,\mathbf{r}_{(-)}, \qquad (16.74)$$

где $\mathbf{E}_{(+)}$ и $\mathbf{E}_{(-)}$ — напряженности, создаваемые зарядами шаров соответствующего знака; $\mathbf{r}_{(+)}$ и $\mathbf{r}_{(-)}$ — радиус-векторы, проведенные в рассматриваемую точку из центров шаров с зарядами соответствующего знака. Суммарная напряженность равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(+)} + \mathbf{E}_{(-)} = [\rho/(3\varepsilon_0)]\,(\mathbf{r}_{(+)} - \mathbf{r}_{(-)}) = -[\rho/(3\varepsilon_0)]\,\mathbf{l}, \qquad (16.75)$$

где

$$\mathbf{r}_{(-)} = \mathbf{l} + \mathbf{r}_{(+)} \tag{16.78}$$

(см. рис. 65). Таким образом, внутри шаров напряженность поля постоянна и направлена вдоль линии, соединяющей их центры.

В точках пересечения объемов шаров плотность заряда равна нулю, поскольку положительная и отрицательная плотности заряда взаимно компенсируют друг друга. Заряженными являются лишь непересекающиеся части шаров серповидной формы (см. рис. 65). Максимальная ширина этих серповидных областей, равная l, может быть сколь угодно малой.

Теперь представим, что проводящий шар помещен во внешнее однородное поле с напряженностью $\mathbf{E}_0$. Электростатическая индукция приведет к возникновению поверхностных зарядов. Знаки этих зарядов и направление напряженности внешнего поля показаны на рис. 66. Внутри шара поле должно быть равным нулю, т. е. распределение поверхностных зарядов будет такое же, как на рис. 65, а возникающее при этом поле внутри шаров компенсирует внешнее поле. Тогда [см. (16.75)]

$$(|\rho|/3\varepsilon_0)\mathbf{l} = \mathbf{E}_0. \tag{16.77}$$

Таким образом, центры воображаемых заряженных шаров сдвинуты друг относительно друга по линии напряженности внешнего поля. Поскольку $\mathbf{l}$ в (16.77) совпадает по направлению с $\mathbf{E}_0$, для скалярных величин можно написать

$$|\rho| l = 3\varepsilon_0 E_0.$$

Очевидно, что сдвиг l центров шаров может быть сколь угодно малым, если $|\rho|$ достаточно велико. Поэтому возникающие здесь заряды можно действительно считать поверхностными с изменяющейся поверхностной плотностью.

Найдем распределение поверхностной плотности заряда в зависимости от угла θ. Расстояние между поверхностями шаров в направлении угла θ равно $\delta = l\cos\theta$ (рис. 65). Если объемный заряд между поверхностями шаров трактовать как поверхностный и обозначить его поверхностную плотность σ, то

$$\sigma\Delta S = \rho\Delta S\delta, \tag{16.78}$$

где слева стоит выражение для заряда, приходящегося на элемент поверхности ΔS, через поверхностную плотность, а справа — через объемную. Следовательно [см. (16.78)],

$$\sigma = \rho\delta = \rho l\cos\theta = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta, \tag{16.79}$$

где $\delta = l\cos\theta$.

Теперь можно найти напряженность поля у поверхности проводящего шара:

$$E_n = \sigma/\varepsilon_0 = 3E_0\cos\theta, \tag{16.80}$$

откуда видно, что она изменяется от нуля до утроенного значения напряженности однородного поля. Конечно, во всех точках поверхности

шара напряженность направлена по нормали к поверхности.

Вне шара на конечном расстоянии от его поверхности она равна сумме напряженностей внешнего поля и полей, создаваемых сдвинутыми друг относительно друга заряженными шарами или, что то же самое, соответствующими поверхностными зарядами. Поле вне равномерно заряженного шара таково же, как если бы весь его заряд был сосредоточен в центре. Таким образом, необходимо найти напряженность поля двух разноименных точечных зарядов с одинаковым абсолютным значением, находящихся на небольшом расстоянии один от другого. Такая совокупность зарядов называется **диполем** (рис. 67). Вектор $\mathbf{l}$, проведенный от отрицательного заряда к положительному, называется плечом диполя. Вектор

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} \tag{16.81}$$

называется **моментом диполя.** В формуле (16.81) q — абсолютное значение каждого из зарядов диполя. Для определения напряженности поля вне проводящего шара необходимо найти напряженность поля диполя, заряды которого сосредоточены в центрах сдвинутых шаров. Из (16.77) следует, что момент диполя равен

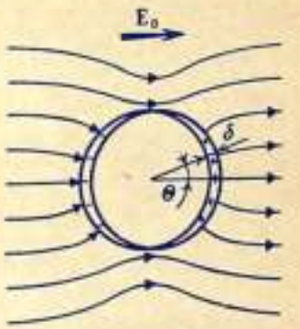
$$\mathbf{p} = {}^4/_3\pi R^3\rho\mathbf{l} = 4\pi\varepsilon_0 R^3\mathbf{E}_0, \tag{16.82}$$

где R — радиус шара.

Поле диполя. Напряженность поля диполя слагается из напряженностей составляющих диполь зарядов. Плечо диполя сколь угодно мало и поэтому его можно считать много меньшим расстояния до точек, в которых вычисляется напряженность. Найдем потенциал диполя. В точке P (рис. 68) потенциал, очевидно, выражается формулой

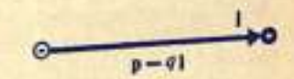
$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{(+)}} - \frac{1}{r_{(-)}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(+)}r_{(-)}}\right). \tag{16.83}$$

Так как $l \ll r$, то можно считать $r_{(-)} - r_{(+)} \approx l\cos\theta$, $r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2$ и характеризовать местоположение точки P радиус-векто-



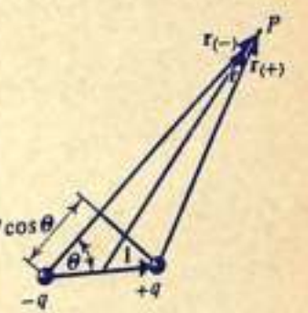
66

Проводящий шар в однородном электрическом поле



67

Диполь



68

К вычислению поля диполя

ром $\mathbf{r}$ с началом в любой точке диполя, поскольку диполь имеет сколь угодно малые геометрические размеры.

Тогда [см. (16.83)]

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}, \tag{16.84}$$

где $ql\cos\theta = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/r$, откуда

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]. \tag{16.85}$$

Напряженность поля диполя убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния, т. е. быстрее, чем напряженность кулоновского поля заряда. Силовые линии поля диполя изображены на рис. 69.

Формула (16.85) позволяет построить линии напряженности поля, когда проводящий шар помещен во внешнее однородное поле. В каждой точке напряженность равна сумме напряженности $\mathbf{E}_0$ однородного внешнего поля и напряженности $\mathbf{E}$, создаваемой индуцированными на поверхности проводящего шара зарядами. Линии напряженности этого поля изображены на рис. 66.

Метод изображений. При решении задачи о проводящем шаре во внешнем однородном поле было сделано одно предположение, справедливость которого не доказывалась, а именно: было построено некоторое поле, удовлетворяющее всем условиям задачи, и считалось, что другого поля, удовлетворяющего тем же условиям задачи, не существует, т. е. предполагалось, что решение задачи является единственным. Если бы это было не так, то найденное конкретное решение не обязательно было бы тем решением, которое фактически реализуется. В теории электричества и магнетизма доказано, что решение задач, удовлетворяющее всем необходимым условиям, является единственным. Позднее будет рассмотрено, о каких всех условиях идет речь и как в общих чертах проводится доказательство этого утверждения, здесь же пока примем его справедливость без доказательства. Это позволяет найти решение задачи с помощью некоторых догадок или построений и на основании теоремы об единственности заключить, что найденное таким способом поле дает решение задачи. Примером удачной догадки является рассмотренное выше решение о проводящем шаре во внешнем однородном электрическом поле.

Существует наглядный метод построения поля, удовлетворяющего условиям задачи, называемый методом изображений. Его суть состоит в следующем. Поле точечного заряда хорошо известно. Стараются подобрать такую систему точечных зарядов, суммарное поле которых удовлетворяет всем условиям задачи. Из теоремы об единственности решения заключаем, что это поле дает искомое решение. Математически задача сводится к нахождению потенциала, удовлетворяющего

условиям задачи. Напряженность $\mathbf{E}$ направлена перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям и вычисляется как взятый с обратным знаком градиент от потенциала. Получить форму эквипотенциальных поверхностей системы точечных зарядов в принципе легко. Рассмотрим, например, поле двух положительных точечных зарядов q, расположенных на расстоянии $2d$ друг от друга (рис. 70). Так как потенциал точечного заряда на расстоянии r от него равен $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$, то потенциал системы двух одинаковых точечных зарядов (см. рис. 70) в точке (x, y, z) определяется выражением

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d^2)+y^2+z^2}}\right). \tag{16.86}$$

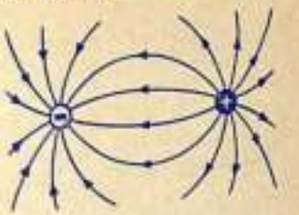
Из (16.86) получаем уравнение эквипотенциальных поверхностей:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} = \text{const}. \tag{16.87}$$

Каждая из них характеризуется соответствующим потенциалом $\varphi_1 = \text{const}$, $\varphi_2 = \text{const}$.

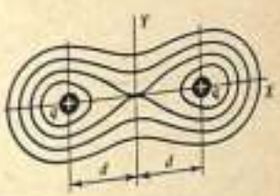
На рис. 70 изображены линии пересечения плоскости XY с эквипотенциальными поверхностями. Сами эквипотенциальные поверхности получаются в результате вращения картины, изображенной на рис. 70, вокруг оси X.

Пусть проводящая изолированная поверхность совпадает с одной из эквипотенциальных поверхностей, потенциал которой φ_0. Если принять, что на этой поверхности находится заряд $2q$, а ее потенциал равен φ_0, то система эквипотенциальных поверхностей и соответствующее ей поле полностью удовлетворяют условиям задачи о поле заряженной поверхности. Потенциал во всех внешних относительно поверхности точках определяется формулой (16.86). Таким образом, нахождение характеристик поля, созданного заряженным проводником, свелось к



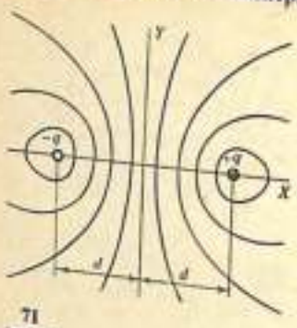
69

Силовые линии вблизи диполя



70

Эквипотенциальные поверхности двух одинаковых точечных зарядов



71

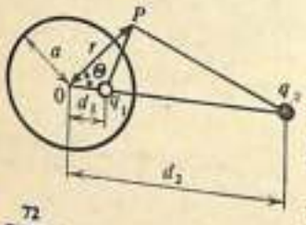
Эквипотенциальные поверхности двух разноименных равных по абсолютной величине точечных зарядов

определению характеристик поля, двух одноименных равных точечных зарядов. В этом и состоит суть метода изображений. Происхождение названия метода станет очевидным из рассматриваемых ниже примеров.

Потенциал двух разноименных точечных зарядов определяется аналогично (16.86):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}\right). \qquad (16.88)$$

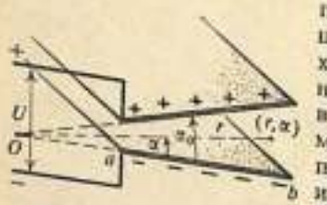
Форма эквипотенциальных поверхностей в этом случае показана на рис. 71. Потенциал вдоль оси Y равен нулю и, следовательно, он равен нулю в плоскости $X = 0$.



72

К нахождению эквипотенциальных поверхностей двух точечных зарядов различной величины

Представим себе, что все бесконечное полупространство $X < 0$ заполнено проводником, границей которого является плоскость YX, и имеется заряд $+q$ там, где он изображен на рис. 71. Ясно, что этот заряд посредством электростатической индукции наведет на поверхности проводника заряд $-q$. Потенциал проводника при этом должен быть равен $\varphi = 0$, а силовые линии в каждой точке поверхности должны быть нормальны к ней. Ясно, что картина силовых линий в полупространстве $X > 0$, изображенная на рис. 71, полностью удовлетворяет этим условиям. Следовательно, задача определения характеристик поля точечного заряда $+q$, находящегося на расстоянии d от плоской поверхности проводника, заполняющего полупространство $X < 0$, свелась к нахождению характеристик полей двух точечных зарядов q и $-q$. Заряд $-q$ расположен в точке, которая является изображением местоположения точечного заряда q, если бы плоскость $X = 0$ являлась зеркалом. Отсюда и произошло название метода изображений. Вместо проводящего тела, занимающего полупространство $X < 0$, можно взять заземленную проводящую пластину, параллельную плоскости $X = 0$. Метод расчета и поле остаются без изменения. Если пластина не заземлена, то на стороне пластины



73

К определению поля конденсатора с непараллельными пластинами

обращенной в сторону отрицательных значений оси X, индуцируются поверхностные положительные заряды, которые полностью изменяют характер поля: поле при этом не является суперпозицией полей заряда q и его изображения.

Определим напряженность поля заряда q, расположенного в точке $x = d$ при наличии заземленной проводящей плоскости $X = 0$. Потенциал поля во всех точках $x > 0$ дается формулой (16.88). Напряженность электрического поля в плоскости $Z = 0$ равна

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x-d}{[(x-d)^2+y^2]^{3/2}} - \frac{x+d}{[(x+d)^2+y^2]^{3/2}}\right\}, \qquad (16.89)$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y}{[(x-d)^2+y^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(x+d)^2+y^2]^{3/2}}\right\}. \qquad (16.90)$$

В плоскости $X = 0$ компонента E_y исчезает, а

$$E_x = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{(z^2+y^2+d^2)^{3/2}}. \qquad (16.91)$$

Поверхностная плотность заряда на плоскости $X = 0$ [см. (16.12)] равна

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi}\frac{d}{(z^2+y^2+d^2)^{3/2}}. \qquad (16.92)$$

Полный поверхностный заряд на плоскости $X = 0$ дается формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \sigma\,dz\,dy = -\frac{qd}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{dz\,dy}{(z^2+y^2+d^2)^{3/2}} = -q, \qquad (16.93)$$

т. е. индуцированный на проводнике заряд равен индуцирующему заряду с обратным знаком [см. (16.20)].

Сила взаимодействия точечного заряда q с зарядом на поверхности $x = 0$ равна силе взаимодействия q с его изображением:

$$F = -q^2/(16\pi\varepsilon_0 d^2). \qquad (16.94)$$

Знак минус указывает, что точечный заряд притягивается к проводящей заземленной поверхности.

Метод изображений, конечно, не сводится во всех случаях в буквальном смысле к нахождению зеркального изображения зарядов. Рассмотрим картину эквипотенциальных поверхностей, создаваемых двумя различными по модулю зарядами. Для удобства введем полярную систему координат с началом в точке O (рис. 72). Полярная ось проходит через местоположение точечных зарядов q_1 и q_2. Полярные координаты q_1 и q_2 равны $\theta_1 = 0, r_1 = d_1$ и $\theta_2 = 0, r_2 = d_2$ соответственно. Потенциал в точке P выражается формулой

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{r^2+d_1^2-2rd_1\cos\theta}} + \frac{q_2}{\sqrt{r^2+d_2^2-2rd_2\cos\theta}}\right). \qquad (16.95)$$

Если $d_1 = a^2/d_2$ $(a < d_2)$ и $q_2 = -aq_2/d_2$, то $\varphi(a, \theta) = 0$, т. е. потенциал на сфере радиусом a равен нулю. Следовательно, эта сфера является эквипотенциальной поверхностью с нулевым значением потенциала. Если на ее место поместить реальную проводящую заземленную сферу, то поле не изменится. Таким образом, если имеется проводящая заземленная сфера радиусом a и точечный заряд q_2 вне ее на расстоянии d_2 от центра сферы, то поле вне сферы таково же, как и поле, создаваемое зарядом q_2 и его «изображением» — зарядом $q_1 = -aq_2/d_2$, помещенным в точку с координатами $d_1 = a^2/d_2$, $\theta = 0$ внутри сферы. Сила взаимодействия между зарядом q_2 и сферой равна

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 (d_2 - d_1)^2} = -\frac{d_2 a q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 (d_2^2 - a^2)^2}. \tag{16.96}$$

Пример 16.1. *Найти силу взаимодействия между проводящей сферой радиусом a и точечным зарядом q_2, находящимся на расстоянии d_2 от центра сферы, если на сфере распределен заряд Q.*

Схема расположения сферы и заряда изображена на рис. 72. Заряд q_2 индуцирует в проводящей сфере свое изображение в виде заряда $q_1 = -q_2 a/d_2$ на расстоянии $d_1 = a^2/d_2$ от центра сферы. Однако теперь взаимодействие не сводится к силе притяжения между зарядом q_2 и его изображением, потому что по условию сфера имеет заряд Q, а не q_1. Следовательно, для описания взаимодействия необходимо добавить еще одно «изображение» заряда, которое создает на сфере постоянный потенциал и в сумме с q_1 составляет Q. Поэтому надо в центр сферы поместить заряд $Q - q_1 = Q + q_2 a/d_2$. Взаимодействие точечного заряда q_2 со сферой, имеющей заряд Q, слагается из взаимодействия q_2 с «изображениями» q_1 и $Q + q_2 a/d_2$. Таким образом, сила взаимодействия равна

$$F = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q + q_2 a/d_2}{d_2^2} - \frac{q_2 a}{d_2 (d_2 - d_1)^2}\right]. \tag{16.97}$$

Пример 16.2. *Найти силу взаимодействия между проводящей сферой радиусом a, поддерживаемой при постоянном потенциале φ_0, и точечным зарядом q_2, находящимся на расстоянии d_2 от центра сферы.*

Схема расположения сферы и заряда изображена на рис. 72. Заряд q_2 и его изображение q_1 создают нулевой потенциал сферы. Чтобы он стал равным φ_0, необходимо в центр сферы поместить «изображение» $Q = 4\pi\varepsilon_0 a\varphi_0$. Сила взаимодействия между точечным зарядом q_2 и сферой, поддерживаемой при потенциале φ_0, равна

$$F = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{d_2^2} - \frac{q_2 a}{d_2 (d_2 - d_1)^2}\right]. \tag{16.98}$$

Пример 16.3. *Две проводящие плоские пластины образуют угол α_0 (рис. 73). Длина пластин, перпендикулярных плоскости рисунка, бесконечна. Между пластинами поддерживается постоянная разность потенциалов U_0. Найти напряженность поля между пластинами и емкость, приходящуюся на длину l. Ширина пластин $b - a$. Принимается, что пластины не соприкасаются в точке O, но сходятся достаточно близко, и поэтому можно пренебречь краевыми эффектами.*

Поле аксиально симметрично. Поэтому удобно пользоваться цилиндрической системой координат, ось Z которой направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Обозначим: α — аксиальный угол, r — расстояние от оси. Тогда уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0, \tag{16.99}$$

где учтено, что $\partial^2\varphi/\partial z^2 = 0$ из-за цилиндрической симметрии поля. Решение ищем в форме

$$\varphi(r, \alpha) = R(r)\Phi(\alpha). \tag{16.100}$$

Подставляя (16.100) в (16.99), находим $\dfrac{\Phi}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \dfrac{R}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\alpha^2} = 0.$

Умножая обе части этого уравнения на $r^2/R\Phi$, получаем

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\alpha^2}. \tag{16.101}$$

Левая и правая части (16.101) зависят от разных независимых переменных. Следовательно, равенство может быть удовлетворено лишь в том случае, когда его левая и правая части равны по отдельности одной и той же постоянной. Поэтому полагаем:

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = n^2, \quad \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\alpha^2} = -n^2, \tag{16.102}$$

где n^2 — постоянная. Решение уравнения для Φ очевидно:

$$\Phi = \begin{cases} B_1\alpha + B_2 & \text{при } n = 0, \\ A_1 \sin n\alpha + A_2 \cos n\alpha & \text{» } n \neq 0. \end{cases} \tag{16.103}$$

Решение уравнения для R ищем в виде $R = Ar^\beta$ $(\beta \neq 0)$.

Подставляя это выражение в первое из уравнений (16.102), получаем равенство

$$\beta^2 = n^2, \tag{16.104}$$

из которого следует, что $\beta = \pm n$. При $n = 0$ первое из уравнений (16.102) упрощается:

$$r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \mathrm{const}$$

и может быть удовлетворено функцией

$$R = D_1 \ln r + D_2.$$

Следовательно, окончательно решение уравнения (16.102) может быть представлено в виде

$$R = \begin{cases} D_1 \ln r + D_2 & \text{при } n = 0, \\ C_1 r^n + C_2 r^{-n} & \text{» } n \neq 0. \end{cases} \tag{16.105}$$

Попытаемся найти решение задачи, не зависящее от r, т. е. при $n = 0$, $D_1 = 0$, тогда [см. (16.103)] $\varphi(\alpha) = B_1\alpha + B_2$. Граничные условия для φ имеют

вид: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\alpha_0) = U_0$, т. е. $0 = B_2$, $U_0 = B_1\alpha_0$. Следовательно, $\varphi(\alpha) = U_0\alpha/\alpha_0$.

(16.106)

Напряженность электрического поля равна

$$E_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -U_0/(r\alpha_0).$$

(16.107a)

Поверхностная плотность зарядов на пластинах

$$\sigma_1 = \varepsilon E_\alpha(\alpha = 0) = -\varepsilon U_0/(r\alpha_0),\quad \sigma_2 = -\varepsilon E_\alpha(\alpha = \alpha_0) = \varepsilon U_0/(r\alpha_0).$$

(16.107б)

Заряд каждой из пластин (по модулю) на длине l выражается формулой

$$Q = \int_a^b \sigma\,dr = (l\varepsilon_0 U_0/\alpha_0)\ln(b/a).$$

(16.108)

Емкость, приходящаяся на длину l, равна

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{l\varepsilon_0\ln(b/a)}{\alpha_0}$$

(16.109)

§ 17. Электростатическое поле при наличии диэлектриков

Рассматриваются влияние диэлектрика на электрическое поле и различные механизмы поляризации. Выводится соотношение между плотностями объемных и поверхностных связанных зарядов и поляризованностью. Обсуждаются явления на границе между диэлектриками.

Дипольный момент непрерывного распределения зарядов. Влияние вещества на электрические и магнитные поля было экспериментально открыто и исследовано Фарадеем. Результаты этих работ привели Фарадея к идее близкодействия и концепции поля. Электростатическая индукция была им открыта в 1837 г. Тогда же он ввел в науку термины «диэлектрик» и «диэлектрическая постоянная».

Пусть в некотором объеме V (рис. 74) имеется непрерывно распределенный с объемной плотностью ρ заряд, причем в целом объем электрически нейтрален. Однако это не означает, что в каждой точке внутри объема положительный и отрицательный заряды взаимно компенсируются. Если положительные и отрицательные заряды распределены в объеме по разным законам, то в одних точках объема суммарная плотность ρ заряда положительна, а в других отрицательна. Математически условие нейтральности объема V имеет вид

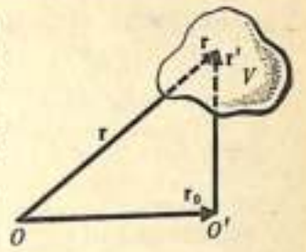
$$\int_V \rho\,dV = 0.$$

(17.1)

Если во всех точках объема $\rho = 0$, то материальная система в объеме V электрически нейтральна: на нее не действует внешнее электрическое поле и сама она не порождает электрического поля. Однако *если плотность ρ заряда в одних частях объема V положительна, а в других отрицательна, то хотя в целом заряд в объеме V равен нулю, система обладает электрическими свойствами: на нее действует внешнее электрическое поле и сама она порождает электрическое поле.* В первом приближении электрические свойства нейтральной системы характеризуются ее дипольным моментом. Для двух точечных зарядов определение дипольного момента дается формулой (16.81). При непрерывном распределении зарядов дипольный момент (рис. 74) определяется формулой

$$\boxed{\mathbf{p} = \int_V \rho\mathbf{r}\,dV}$$

(17.2)



74

К определению дипольного момента непрерывного распределения зарядов

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ в (17.2) отсчитывается от любой точки O, принятой за начало отсчета. Очевидно, что (17.2) не зависит от того, какая точка выбрана за начало системы отсчета. Для доказательства этого примем за начало отсчета точку O', положение которой относительно точки O характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ (см. рис. 74). Относительно точки O' формула (17.2) имеет вид

$$\mathbf{p}' = \int_V \rho\mathbf{r}'\,dV.$$

(17.3)

Преобразуем (17.3):

$$\mathbf{p}' = \int_V \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,dV = \int_V \rho\mathbf{r}\,dV - \int_V \mathbf{r}_0\rho\,dV =$$

$$= \int_V \rho\mathbf{r}\,dV = \mathbf{p},$$

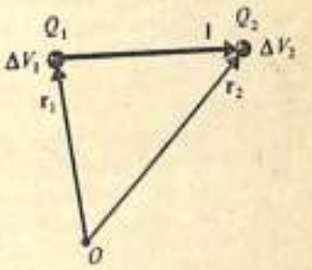
(17.4)

что и требовалось доказать. Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$ и [см. (17.1)]

$$\int_V \mathbf{r}_0\rho\,dV = \mathbf{r}_0\int_V \rho\,dV = 0.$$

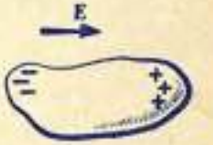
(17.5)

Применим формулу (17.2) для вычисления дипольного момента двух точечных зарядов,



75

К вычислению дипольного момента двух точечных зарядов по формуле для непрерывного распределения зарядов



76

Поляризация неполярных диэлектриков в электрическом поле

которые можно рассматривать как заряды, находящиеся в сколь угодно малых объемах ΔV_1 и ΔV_2 (рис. 75):

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{r}\, dV = \int_{\Delta V_1} \rho \mathbf{r}\, dV + \int_{\Delta V_2} \rho \mathbf{r}\, dV = \mathbf{r}_1 \int_{\Delta V_1} \rho\, dV + \mathbf{r}_2 \int_{\Delta V_2} \rho\, dV = \mathbf{r}_1 Q_1 + \mathbf{r}_2 Q_2, \tag{17.6}$$

где Q_1, Q_2 – заряды в объемах ΔV_1 и ΔV_2 соответственно, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ – радиус-векторы этих объемов. Пусть, например, в объеме ΔV_2 находится положительный заряд $Q_2 = Q$. Тогда вследствие электрической нейтральности системы $Q_1 = -Q$ и формула (17.6) принимает вид

$$\boxed{\mathbf{p} = Q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = Q\mathbf{l},} \tag{17.7}$$

что аналогично (16.81).

Напряженность поля нейтральной системы с дипольным моментом $\mathbf{p}$ определяется формулами (16.84) и (16.85).

Поляризация диэлектриков. Диэлектриками называются вещества, в которых под действием электрического поля не возникает перемещения зарядов, как, например, в проводниках. *Однако это не означает, что в диэлектриках заряды под действием электрического поля вообще не двигаются. Они сдвигаются, но не перемещаются на большие расстояния.*

Рассмотрим электрически нейтральный объем диэлектрика (рис. 76). Внешнее электрическое поле стремится сдвинуть положительные заряды в направлении напряженности поля, а отрицательные – в противоположном. Поэтому в направлении напряженности в диэлектрике образуется избыток положительного заряда, а в противоположном – недостаток. Диэлектрик приобретает дипольный момент. Этот процесс называется **поляризацией.**

Степень поляризации диэлектрика характеризуется **поляризованностью,** определяемой как отношение дипольного момента $\Delta \mathbf{p}$ элемента диэлектрика к его объему ΔV:

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\Delta P}{\Delta V}} \tag{17.8}$$

Молекулярная картина поляризации. Диэлектрик состоит из атомов и молекул, причем любой его бесконечно малый физический элемент объема является электрически нейтральным. Положительный заряд сосредоточен в ядрах атомов, а отрицательный – в электронных оболочках атомов и молекул. Положительные и отрицательные заряды расположены в различных точках пространства, и, следовательно, атомы и молекулы могут обладать электрическими дипольными моментами, которые изменяются с частотой колебаний электронов в атомах порядка $\approx 10^{15}$ с$^{-1}$.

Если в атоме при отсутствии внешнего электрического поля *электронное облако распределено сферически симметрично относительно ядра, то атом не обладает электрическим дипольным моментом.*

Аналогично, в молекулах положительные и отрицательные заряды могут обладать такой симметрией распределения, когда у них не возникает дипольный момент. Такие молекулы и атомы называются **неполярными,** например атом гелия, двухатомные молекулы, состоящие из одинаковых атомов (H_2, N_2, O_2, ...), симметричные многоатомные молекулы CO_2, CH_4 и др. При отсутствии внешнего поля такой диэлектрик не поляризован.

Молекулы и атомы, обладающие электрическим дипольным моментом при отсутствии внешнего поля, называются **полярными,** например CO, N_2O, SO_2 и др. Постоянный дипольный момент у них имеет порядок $10^{-29} - 10^{-30}$ Кл·м. Это соответствует диполю, состоящему из двух элементарных зарядов $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, расстояние между которыми 10^{-10} м, т. е. порядка атомных размеров.

При отсутствии внешнего электрического поля постоянные дипольные моменты отдельных молекул ориентированы беспорядочно и, следовательно, их сумма в физически бесконечно малом объеме равна нулю, т. е. диэлектрик неполяризован.

Во внешнем электрическом поле положительные заряды стремятся сместиться по направлению напряженности поля, а отрицательные – противоположно. *В результате неполярные молекулы приобретают дипольный момент и диэлектрик поляризуется.* Полярные молекулы также приобретают дополнительный индуцированный внешним полем дипольный момент и благодаря этому также поляризуются, но эта поляризация играет для них лишь незначительную роль. Главный механизм поляризации для них другой: *во внешнем электрическом поле на постоянные дипольные моменты молекул действуют моменты сил* [рис. 77; см. (19.7)], *стремящиеся ориентировать дипольные моменты в направлении напряженности поля. В результате молекулы переориентируются так, что бесконечно малые физические элементы объема диэлектрика приобретают дипольные моменты, т. е. диэлектрик поляризуется.* Поляризованность за счет переориентации молекул значительно больше, чем вследствие образования дополнительных дипольных моментов, индуцированных внешним полем.

Наряду с этими механизмами поляризации существует еще один. *В ионных кристаллах под влиянием внешнего электрического поля положительные ионы смещаются в направлении напряженности поля, а отрицательные – противоположно.* В результате происходит некоторая деформация кристаллической решетки или относительное смещение подрешеток, что приводит к возникновению в диэлектрике дипольных моментов, т. е. поляризации диэлектрика. Такая поляризация называется **ионной решеточной поляризацией.**

Во всех случаях поляризация количественно характеризуется поляризованностью **P**. Механизм поляризации проявляется лишь при изучении зависимости **P** от напряженности внешнего поля и других факторов (см. гл. 3). При этом формула, связывающая между собой напряженность электрического поля, электрическое смещение и поляризованность, остается неизменной [см. (17.29)].

Поляризованность неполярных молекул равна

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\mathbf{p}_i = N\mathbf{p}_0, \qquad (17.9)$$

где ΔV под символом суммы указывает, что суммирование распространяется на все молекулы в объеме ΔV; N – концентрация молекул; $\mathbf{p}_0$ – индуцированный дипольный момент (одинаков у всех молекул), совпадающий по направлению с напряженностью $\mathbf{E}$ внешнего электрического поля. При отсутствии внешнего поля $\mathbf{p}_0 = 0$ и, следовательно, $\mathbf{P} = 0$, т. е. поляризация отсутствует.

У полярных молекул главным механизмом поляризации является переориентация направлений постоянных дипольных моментов под влиянием внешнего поля. Формула для поляризованности имеет вид

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\mathbf{p}_i = N\langle\mathbf{p}\rangle, \qquad (17.10)$$

где $\langle\mathbf{p}\rangle$ – среднее значение дипольных моментов, равных друг другу по абсолютному значению, но различно направленных в пространстве. В изотропных диэлектриках средние дипольные моменты совпадают по направлению с напряженностью внешнего электрического поля. В анизотропных диэлектриках, т. е. таких, электрические свойства которых различны в различных направлениях, такого совпадения не наблюдается. В них связь между поляризованностью и напряженностью более сложная (см. гл. 3). У полярных диэлектриков вклад в поляризованность от индуцированных дипольных моментов значительно меньше вклада от переориентации постоянных дипольных моментов и обычно не учитывается. При необходимости его учета в правую часть формулы (17.10) надо добавить правую часть равенства (17.9).

Ионная решеточная поляризация описывается формулой (17.10), в которой под $\langle\mathbf{p}\rangle$ надо понимать среднее значение дипольных моментов в объеме ΔV, возникших в результате смещения ионов в узлах кристаллической решетки. В подавляющем большинстве случаев эта поляризация является анизотропной.

Зависимость поляризованности от напряженности электрического поля. У электретов и сегнетоэлектриков поляризованность может быть отлична от нуля при отсутствии электрического поля ($E = 0$, $P \neq 0$). У остальных диэлектриков при отсутствии электрического поля поляризованность равна нулю. Ее зависимость от напряженности может быть в общем случае представлена в виде

$$P_i = \varepsilon_0\sum_j \varkappa_{ij}E_j + \varepsilon_0\sum_{j,k}\varkappa_{ijk}E_jE_k + \ldots,$$

где индексы i, j, k, ... нумеруют компоненты величин по осям декартовой системы координат ($i = x, y, z$; $j = x, y, z$, ...). Поэтому поляризованность в общем случае зависит не только от первой степени напряженности электрического поля, но и от ее высших степеней. *Если зависимость от высших степеней существенна, то диэлектрик называется нелинейным.* Такая нелинейность проявляется обычно лишь в очень сильных электрических полях, хотя имеются некоторые специальные материалы, в которых нелинейность наблюдается и при сравнительно небольших полях.

Если нелинейность несущественна, то поляризованность выражается через первые степени компонент поля:

$$P_i = \varepsilon_0\sum_j \varkappa_{ij}E_j.$$

Такой диэлектрик называется **линейным.** Если свойства такого диэлектрика различны по направлениям, то диэлектрик называют **анизотропным.** Совокупность девяти величин $\varkappa_{ij}$ называется **тензором диэлектрической восприимчивости.** Он полностью характеризует электрические свойства диэлектрика. Если свойства диэлектрика по всем направлениям одинаковы, то диэлектрик называется **линейным изотропным.** У него диэлектрические свойства характеризуются одной скалярной величиной – диэлектрической восприимчивостью.

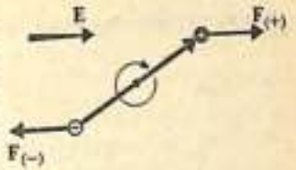
Для линейного изотропного диэлектрика

$$\mathbf{P} = \varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}, \qquad (17.11)$$

где $\varkappa$ – диэлектрическая восприимчивость. В абсолютной системе единиц Гаусса диэлектрической восприимчивостью $\varkappa$ называется величина, в 4π раз меньшая $\varkappa$ в формуле (17.11):

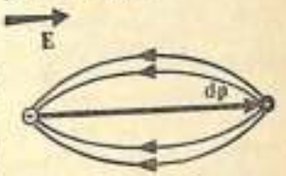
$$\varkappa' = \varkappa/(4\pi). \qquad (17.12)$$

Диэлектрическая восприимчивость большинства твердых и жидких диэлектриков выражается числами порядка нескольких единиц. Диэлектрическая восприимчивость большинства газов составляет десятитысячные доли единицы и в большинстве случаев практически может не приниматься во внимание. Однако имеются диэлектрики, у которых восприимчивость достигает очень больших значений. Например, у воды $\varkappa = 80$, у спирта $\varkappa = 25-30$, у сегнетоэлектриков (сегнетовая соль, титанаты бария и т. д.) диэлектрическая восприимчивость достигает нескольких тысяч единиц.



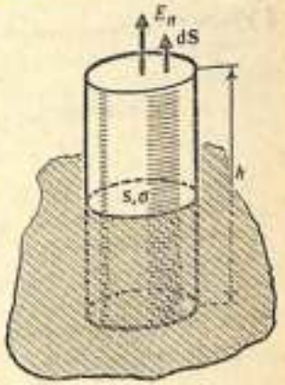
77

Поляризация полярных диэлектриков в электрическом поле



78

Механизм ослабления поля при поляризации



79

Вычисление заряда, пересекающего элемент поверхности при поляризации



80

К нахождению выражения для связанного объемного заряда

Влияние поляризации на электрическое поле. Дипольный момент элемента объема dV в соответствии с формулой (17.8) равен

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}\,dV = \varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}\,dV, \tag{17.13}$$

т. е. совпадает по направлению с напряженностью $\mathbf{E}$, поскольку $\varkappa > 0$. Поэтому напряженность поля, создаваемого дипольным моментом, направлена противоположно напряженности внешнего поля и ослабляет его (рис. 78). Таким образом, *в результате поляризации напряженность в диэлектрике ослабляется*. Роль поляризации при этом сводится лишь к разделению положительных и отрицательных зарядов, в результате чего в объеме диэлектрика, как и на его поверхности, образуются заряды. Эти заряды называются **поляризационными** или **связанными**, так как они как бы привязаны в различных местах диэлектрика и не могут свободно перемещаться по его объему или поверхности. *Связанные заряды порождают электрическое поле точно так же, как и свободные заряды, и в этом отношении ничем не отличаются от них.* Таким образом, наличие диэлектрика учитывается тем, что принимается во внимание электрическое поле, создаваемое связанными зарядами, возникающими в результате поляризации. Поэтому необходимо найти выражение связанных зарядов.

Объемная и поверхностная плотности связанных зарядов. Рассмотрим элемент dS поверхности (рис. 79), проведенной внутри неполяризованного диэлектрика. При поляризации электрические заряды приходят в движение сквозь этот элемент поверхности. Вычислим заряд, пересекающий элемент dS при возникновении поляризованности $\mathbf{P}$. Для упрощения формул будем считать, что движутся только положительные заряды. Обозначим: q – заряд диполя; l – плечо диполя, соответствующее поляризованности $\mathbf{P}$; N – концентрацию зарядов. Площадку dS (см. рис. 67) при возникновении поляризованности $\mathbf{P}$ пересекут все положительные заряды, которые до движения, обусловленного поляризацией, находились в объеме $dV = dSh = dSl\cos\theta$ косого цилиндра с основанием dS. Следовательно,

$$dQ = Ngl\cos\theta\,dS = P\,dS\cos\theta = \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}. \tag{17.14}$$

Рассмотрим теперь некоторый объем V (рис. 80). В результате поляризации поверхность S, ограничивающую объем V, пересекают заряды. В зависимости от баланса втекающих и вытекающих из объема зарядов в нем образуется связанный заряд, объемная плотность которого $\rho_{св}$. С учетом (17.14) запишем закон сохранения заряда в объеме V в виде

$$\int_V \rho_{св}\,dV = -\int_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}. \tag{17.15}$$

Знак минус показывает, что в объеме возникает заряд, противоположный по знаку тому, который вытекает через ограничивающую объем поверхность. Перепишем равенство (17.15), применив к правой его части теорему Гаусса – Остроградского:

$$\int_V (\rho_{св} - \operatorname{div}\mathbf{P})\,dV = 0. \tag{17.16}$$

Если равенство (17.16) тождественно выполняется при любых V, то подынтегральная функция будет тождественно равна нулю. Следовательно,

$$\boxed{\rho_{св} = -\operatorname{div}\mathbf{P}.} \tag{17.17}$$

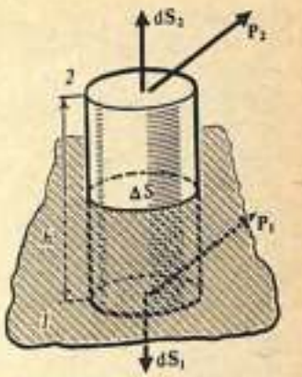
Таким образом, *объемные связанные заряды возникают лишь в том случае, когда поляризованность* $\mathbf{P}$ *изменяется от точки к точке*. Это понятно и без вычислений, поскольку при однородной поляризованности заряды переходят на новое место, занимая места ушедших в таком же количестве зарядов, в результате чего соответствующие части объема диэлектрика остаются электрически нейтральными.

На границе двух различных диэлектриков возникают поверхностные заряды. Это очевидно из следующих соображений. При одной и той же напряженности электрического поля в различных диэлектриках поляризованность различна. Следовательно, граничная поверхность пересекается разным числом поляризационных зарядов со стороны каждого из диэлектриков. В результате вблизи границы сосредоточится некоторый связанный заряд, который называется **поверхностным связанным зарядом.** Обозначим $\sigma_{св}$ – его поверхностную плотность. Для ее нахождения проще всего исходить из формулы (17.17). Построим на границе раздела между диэлектриками прямой цилиндр с площадью основания ΔS и высотой h (рис. 81) и проинтегрируем обе части уравнения (17.17) по объему этого цилиндра:

$$\int_V \rho_{св}\,dV = -\int_V \operatorname{div}\mathbf{P}\,dV. \tag{17.18}$$

В левой части (17.18) стоит полный заряд внутри объема, т. е. поверхностный заряд $\sigma_{св}\Delta S$. Правую часть равенства преобразуем по теореме Гаусса – Остроградского в интеграл по поверхности:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{P}\,dV = \int_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{P}_2\cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_1} \mathbf{P}_1\cdot d\mathbf{S}_1, \tag{17.19}$$



81

К выводу выражения для поверхностной плотности связанных зарядов



82

Поле в конденсаторе при наличии диэлектрика

● **Поляризационные (или связанные) заряды возникают в местах изменения поляризованности. При наличии внешнего электрического поля материальные тела сами становятся источниками электрического поля, в результате чего наблюдаемое поле изменяется. При этом электрические поля в отношении своих источников ведут себя так, как будто дело происходит в вакууме и никаких материальных тел нет. Поляризацией называется процесс образования дипольных моментов у макроскопических объемов диэлектрика.**

где индексами *1* и *2* обозначены величины, относящиеся к первому и второму диэлектрикам по разные стороны границы раздела. Поток поляризованности вектора **P** слагается из потоков через основания и через боковые поверхности цилиндра. Потоки через боковые поверхности полагаются равными нулю, поскольку в пределе высота h цилиндра стремится к нулю. Выберем в качестве положительной нормали к границе раздела направленную от первого диэлектрика ко второму. Следовательно, $d\mathbf{S}_2$ направлен по положительному направлению нормали, а $d\mathbf{S}_1$ – по отрицательному. Поэтому

$$\int_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = P_{2n}\Delta S - P_{1n}\Delta S. \tag{17.20}$$

Напомним, что интеграл по боковой поверхности не учитывается. Принимая во внимание значение интеграла в левой части уравнения (17.18), окончательно получаем

$$\boxed{\sigma_{св} = -(P_{2n} - P_{1n}).} \tag{17.21а}$$

Поэтому, обозначая $\mathbf{n}_2$ – единичный вектор нормали, направленной во вторую среду, формулу (17.21а) можно представить в виде

$$\boxed{\sigma_{св} = -\mathbf{n}_2\cdot(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1).} \tag{17.21б}$$

Полезно заметить, что вакуум также можно рассматривать как диэлектрик, поляризованность которого равна нулю. Формула (17.21) может быть применена к границе между диэлектриком и вакуумом. Принимая в этом случае положительной нормалью внешнюю нормаль к диэлектрику [т. е. считая диэлектрик в формуле (17.21а) средой *1*], положим $P_{2n} = 0$. Следовательно [см. (17.21)],

$$\sigma_{св} = P_n, \tag{17.22}$$

где P_n – нормальная компонента поляризованности диэлектрика на его границе с вакуумом.

Формулы (17.17) и (17.21) позволяют полностью учесть влияние диэлектрика на электрическое поле. Создаваемая связанными зарядами напряженность поля вычисляется по тем же формулам, по которым определяется напряженность в вакууме, порождаемая свободными зарядами. В частности, потенциал φ_2, создаваемый связанными зарядами диэлектрика, дается формулами (14.35) и (14.36) с заменой в них свободных зарядов на связанные:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_{св}\,dV}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_{св}\,dS}{r} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-\operatorname{div}\mathbf{P}\,dV}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r}\,dS. \tag{17.23}$$

Этот потенциал слагается с потенциалом, создаваемым свободными зарядами.

Теперь полезно еще раз в явном виде сформулировать основную идею учета влияния вещества на поле, которая была прослежена на примере проводников и диэлектриков: *при наличии внешнего электрического поля вещество само становится источником электрического поля, в результате чего внешнее поле изменяется.*

Рассмотрим этот процесс на примере образования поля в плоском конденсаторе, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком (рис. 82). Будем считать, что на обкладках конденсатора находится заряд с поверхностной плотностью σ. Если между обкладками конденсатора будет вакуум, то $E' = \sigma/\varepsilon_0$ [см. (16.12)]. Вследствие поляризации диэлектрика напряженность поля уменьшается. Определим поляризованность диэлектрика по формуле (17.11), учитывая, что $E \neq \sigma/\varepsilon_0$. Вследствие однородности диэлектрика и однородности поля между параллельными заряженными пластинами заключаем, что поляризованность диэлектрика однородна, т. е. объемные связанные заряды отсутствуют. Имеются лишь связанные поверхностные заряды, поверхностная плотность которых [см. (17.22)]

$$\sigma_{св} = \varkappa\varepsilon_0 E, \tag{17.24}$$

где E – проекция напряженности по внешней нормали диэлектрика. Известно, что напряженность направлена от положительно заряженной пластины конденсатора к отрицательно заряженной. Поэтому из (17.24) следует, что поверхностная плотность связанного заряда на границе с положительно заряженной пластиной отрицательна, а на границе с отрицательно заряженной – положительна. Поэтому напряженность поля в диэлектрике между пластинами конденсатора равна напряженности поля в вакууме между теми же пластинами, но при поверхностной плотности заряда $\sigma - \sigma_{св}$. На основании этого можно написать уравнение для определения неизвестной величины

$$E = (\sigma - \sigma_{св})/\varepsilon_0 = (\sigma - \varkappa\varepsilon_0 E)/\varepsilon_0. \tag{17.25}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$E = \sigma/[\varepsilon_0(1 + \varkappa)]. \tag{17.26}$$

Электрическое смещение. Уравнение (13.19) с учетом связанных зарядов как источников поля может быть записано, очевидно, следующим образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 + \rho_{св}/\varepsilon_0. \tag{17.27}$$

Заменяя в (17.27) $\rho_{св}$ выражением из (17.17), получаем

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \tag{17.28}$$

Вектор

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}} \tag{17.29}$$

называется **вектором смещения.** *Он не является чисто полевым вектором, поскольку учитывает поляризованность среды.* Запишем с его помощью уравнения (17.28) в виде

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho.} \tag{17.30}$$

Припоминая смысл дивергенции вектора, из (17.30) можно заключить о преимуществах использования **D**. Видно, что *единственным источником* **D** *являются свободные заряды, на которых этот вектор начинается и заканчивается.* В точках без свободных зарядов он непрерывен, включая точки со связанными зарядами. Изменения напряженности поля, обусловленные связанными зарядами, учтены уже в самом векторе **D** [см. (17.29)].

Выразив **P** в (17.29) по формуле (17.11), находим

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_0 + \varkappa\varepsilon_0)\,\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E},\quad \varepsilon = (1+\varkappa)\,\varepsilon_0, \tag{17.31}$$

где ε – **диэлектрическая проницаемость.** Использование **D** значительно упрощает анализ поля при наличии диэлектрика. Наряду с ε удобно использовать также безразмерную величину

$$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0, \tag{17.32}$$

называемую **относительной диэлектрической проницаемостью.**

Электростатическая теорема Гаусса при наличии диэлектриков. Умножая обе части (17.30) на dV и интегрируя по объему V, получаем

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{D}\,dV = \int_V \rho\,dV. \tag{17.33}$$

Справа в (17.33) стоит полный заряд Q внутри объема, а левая часть преобразуется в интеграл по поверхности с помощью теоремы Гаусса – Остроградского. В результате находим формулу

$$\boxed{\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q,} \tag{17.34}$$

которая называется **электростатической теоремой Гаусса** при наличии диэлектриков. Она справедлива при любом расположении диэлектриков и граничных поверхностей: часть или весь объем может быть заполнен различными диэлектриками, а поверхность S может проходить как в вакууме, так и пересекать диэлектрики.

Применив формулу (17.34) к точечному заряду q, находящемуся в безграничной однородной диэлектрической среде, и взяв в качестве поверхности интегрирования сферу радиусом r с центром в точке нахождения точечного заряда, получим закон Кулона в однородной диэлектрической среде:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{17.35}$$

Напряженность поля в среде в ε_r раз меньше, чем в вакууме. Во столько же раз меньше и потенциал точечного заряда. Формула (17.26) показывает, что напряженность поля между обкладками конденсатора при наличии диэлектрика также уменьшается в ε_r раз по сравнению с напряженностью поля в вакууме. Емкость конденсатора увеличивается в ε_r раз.

Граничные условия. Граничными условиями называется связь между векторами поля по разные стороны поверхности, разграничивающей две области. Эта поверхность может разделять вещества с различными свойствами, быть границей тела в вакууме, а может быть, вообще говоря, просто воображаемой поверхностью в однородной среде. Во всех случаях граничные условия позволяют определить изменение векторов поля при переходе через границу. Они выводятся с помощью уравнений поля.

Граничные условия для нормальной составляющей вектора D. Выведем это условие аналогично тому, как было получено граничное условие (17.21). Однако теперь надо исходить из уравнения (17.30), а не (17.17):

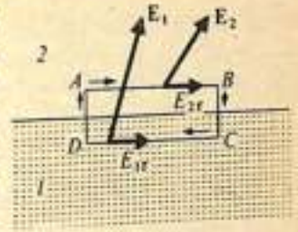
$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma,} \qquad \boxed{\mathbf{n}_2\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma,} \tag{17.36}$$

где σ – поверхностная плотность заряда на границе. Нормаль $\mathbf{n}_2$ направлена в сторону среды 2. Из (17.36), в частности, можно получить напряженность поля у поверхности заряженного проводника. Приняв внешнюю к проводнику нормаль положительной, мы должны считать в формуле (17.36) вакуум средой 2, а проводник – средой 1. В проводнике напряженность **E** поля равна нулю, т. е. $D_{1n} = 0$. Следовательно,

$$D_n = \sigma \tag{17.37}$$

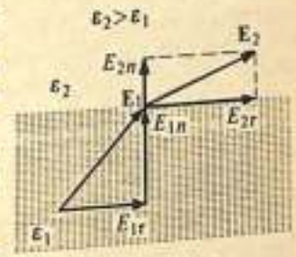
или

$$E_n = \sigma/\varepsilon. \tag{17.38}$$



83

К выводу граничного условия для тангенциальной составляющей вектора **E**



84

Преломление силовых линий на границе между диэлектриками

● **Нормальная составляющая напряженности электрического поля терпит разрыв на границе между различными диэлектриками и поэтому силовые линии преломляются.**

Эта формула совпадает с формулой (16.12) для вакуума, но с заменой ε_0 на ε, т. е. напряженность поля у поверхности проводника при наличии диэлектрика уменьшается в $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ раз.

Формула (17.38) дает также непосредственно решение задачи о поле в плоском конденсаторе, выраженное соотношением (17.26). При этом нет необходимости учитывать в явном виде связанные поверхностные заряды в диэлектрике между пластинами конденсатора, как это делалось при выводе (17.26).

Граничные условия для тангенциальной составляющей вектора E. Построим вблизи границы раздела диэлектриков *1* и *2* замкнутый контур (рис. 83). Вследствие потенциальности электрического поля циркуляция E по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_{ABCDA} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0. \qquad (17.39)$$

Интегралы по участкам *BC* и *DA* сколь угодно малы, так как *AB* и *CD* расположены бесконечно близко к поверхности раздела. Знаки интегралов по *AB* и *CD* противоположны ввиду того, что пути интегрирования проходят в противоположных направлениях. Поэтому [см. (17.39)]

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \qquad (17.40)$$

Преломление силовых линий на границе раздела диэлектриков. Допустим, что на границе раздела диэлектриков нет свободных зарядов. Тогда

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n},\quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \qquad (17.41)$$

Если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, тогда $E_{2n} < E_{1n}$ и, следовательно, силовые линии ведут себя так, как показано на рис. 84, т. е. силовые линии удаляются от нормали, входя в диэлектрик с бóльшей диэлектрической проницаемостью.

Знаки связанных зарядов на границе раздела диэлектриков. Рассмотрим нормальные компоненты напряженности поля и поляризованности на границе раздела диэлектриков. Запишем формулу (17.11) с учетом (17.31) для диэлектриков по разные стороны границы в виде (рис. 85):

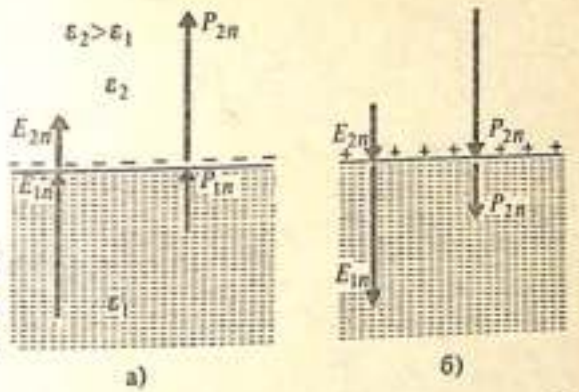
$$P_{2n} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_{2n},\quad P_{1n} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_{1n}. \qquad (17.42)$$

Преобразуем формулу (17.21) для поверхностной плотности заряда с учетом (17.32):

$$\sigma_{св} = P_{1n} - P_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}). \qquad (17.43)$$

Если свободные заряды на поверхности отсутствуют, то $\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = 0$ и формула (17.43) упрощается:

$$\sigma_{св} = -\varepsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}). \qquad (17.44)$$



85

Знак поверхностного заряда и поведение нормальных составляющих напряженности поля и поляризованности при пересечении границы в различных направлениях

Для определенности по-прежнему будем считать, что $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, а E направлено из первой среды во вторую. Напомним, что в качестве положительной выбрана нормаль, направленная во вторую среду. Тогда в формуле (17.44) E_{1n} и E_{2n} положительны, причем $E_{1n} > E_{2n}$. Поэтому связанный заряд на границе отрицателен (рис. 85, *а*). Величины P_{1n} и P_{2n} также обе положительны и, следовательно, $P_{2n} > P_{1n}$, как это видно из (17.43) при $\sigma_{св} < 0$ (рис. 85, *а*).

С помощью аналогичных рассуждений можно изучить изменение нормальных составляющих напряженности поля, поляризованности и знака поверхностной плотности заряда, когда напряженность поля направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью (рис. 85, *б*).

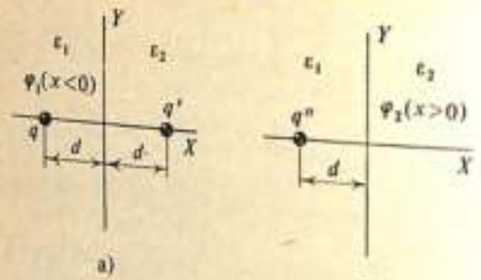
Метод изображений. Идея метода при применении к диэлектрикам такая же, как и при применении к проводникам (см. § 16).

Пусть имеются две бесконечные диэлектрические среды (проницаемости ε_1 и ε_2) с плоской границей раздела. В первой среде на расстоянии d от границы расположен точечный заряд q. Утверждается, что потенциал в первой среде такой же, как от заряда q и его изображения $q' = q(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, расположенного во второй среде на расстоянии d от границы (рис. 86, *а*), причем расчет ведется так, как будто диэлектрическая проницаемость сред равна ε_1. Потенциал во второй среде равен потенциалу, создаваемому зарядом $q'' = 2\varepsilon_2 q/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, находящимся на месте заряда q в первой среде (рис. 86, *б*), причем расчет ведется так, как будто диэлектрическая проницаемость сред равна ε_2. Таким образом, потенциалы в первой и второй средах равны:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2}} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}\right\}, \qquad (17.45)$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2}}.$$

Нетрудно проверить, что φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнению Лапласа и граничным условиям:



86

Метод изображений в применении к диэлектрикам

$$\varepsilon_1 \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \varepsilon_2 \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|_{x=0} = 0, \tag{17.46}$$

выражающим непрерывность нормальных компонент **D** и непрерывность тангенциальных компонент **E**. Кроме того, удовлетворяется также требование конечности потенциала:

$$\varphi_1|_{x\to-\infty} \to 0, \quad \varphi_2|_{x\to+\infty} \to 0. \tag{17.47}$$

По теореме единственности формулы (17.45) представляют искомое решение.

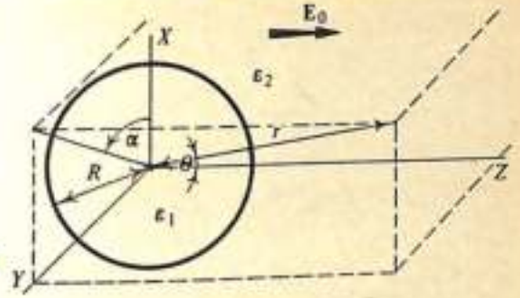
Сила, действующая на заряд q, равна силе взаимодействия этого заряда с изображением $[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\,q$, расположенным на расстоянии $2d$ от заряда q:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)\frac{q^2}{4d^2}. \tag{17.48}$$

При $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ значение F отрицательно, т. е. q притягивается к границе раздела диэлектриков. Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то F положительно и, следовательно, q отталкивается от границы.

Диэлектрический шар в однородном поле. Найдем с помощью уравнения Лапласа напряженность электрического поля при внесении диэлектрического шара в первоначально однородное электрическое поле. Если линейные размеры обкладок плоского конденсатора достаточно велики, то даже при сравнительно большом расстоянии между ними поле во внутренних областях вдали от краев однородно с большой точностью. Если размеры обкладок увеличиваются до бесконечности с одновременным увеличением до бесконечности расстояния между ними при постоянной поверхностной плотности зарядов на обкладках, то во всем пространстве создается однородное электрическое поле. Поместим в это поле проводящий диэлектрический шар. Ясно, что вследствие поляризации напряженность поля вблизи шара изменится, а на бесконечности останется без изменения. *Определим* напряженность электрического поля во всем пространстве, включая область внутри диэлектрического шара.

Допустим, что шар радиусом R состоит из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1, а окружающее пространство заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_2 (рис. 87). Напряженность однородного поля направлена параллельно оси Z. Вследствие аксиальной симметрии задачи удобно пользоваться сферической системой координат с полярной осью по оси Z.



87

Ориентировка системы координат в случае диэлектрической сферы в однородном поле

Для однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε уравнение Пуассона (15.14) имеет вид

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon, \tag{17.49}$$

что очевидно из сравнения уравнения (15.10) для вакуума с уравнением (17.30), имеющим для однородного диэлектрика вид

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon. \tag{17.50}$$

В сферической системе координат уравнение Пуассона записывается так:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{17.51}$$

где α – аксиальный угол. В данной задаче свободные заряды отсутствуют ($\rho = 0$) и в результате аксиальной симметрии $\partial\varphi/\partial\alpha = 0$. Поэтому задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{17.52}$$

во всем пространстве с соблюдением следующих условий:

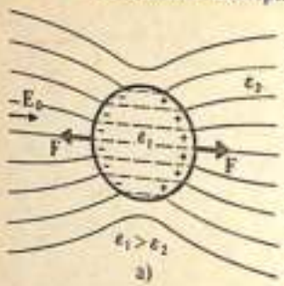
1) потенциал φ всюду непрерывен и конечен;

2) нормальные компоненты вектора $\mathbf{D} = -\varepsilon\operatorname{grad}\varphi$ непрерывны на границах раздела сред, т. е. на поверхности шара;

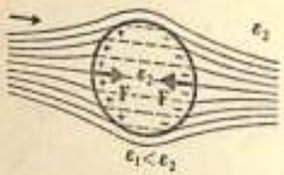
3) тангенциальные компоненты вектора $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ непрерывны на поверхности шара.

Величины, относящиеся к внутренней области шара, обозначим с индексом 1, а к внешней – с индексом 2. В математике известно общее решение уравнения (17.52). В данном случае оно значительно упрощается. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции

$$\varphi_1 = A_1 r\cos\theta + A_2 r^{-2}\cos\theta, \quad \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + B_2 r^{-2}\cos\theta \tag{17.53а}$$



а)



б)

88

Линии вектора смещения **D** для диэлектрического шара во внешнем однородном поле

удовлетворяют уравнению (17.52), где A_1, A_2 и B_2 – постоянные, E_0 – модуль напряженности однородного поля (на бесконечности).

Поскольку φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнению (17.52), они представляют потенциал, если удовлетворяют всем требованиям задачи. Потенциал φ_1 относится к внутренней области шара, а φ_2 – к внешней. Из (17.53а) видно, что $\varphi_1 \to \infty$ при $r \to 0$. Поэтому следует считать, что $A_2 = 0$. Условие непрерывности φ на границе имеет вид

$$A_1 R\cos\theta = -E_0 R\cos\theta + B_2 R^{-2}\cos\theta, \tag{17.53в}$$

откуда

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0. \tag{17.54}$$

Тангенциальная компонента вектора **E** на поверхности шара равна

$$E_\tau = E_\theta = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right]_{r=R}. \tag{17.55}$$

Условие $E_{1\theta} = E_{2\theta}$ удовлетворяется, если выполняется условие (17.53б), т. е. между A_1 и B_2 существует соотношение (17.54).

Нормальные составляющие вектора напряженности равны:

$$E_{1n} = E_{1r} = -(\partial\varphi_1/\partial r)_{r=R} = -A_1\cos\theta, \tag{17.56}$$

$$E_{2n} = E_{2r} = -(\partial\varphi_2/\partial r)_{r=R} = E_0\cos\theta + 2B_2 R^{-3}\cos\theta.$$

Из условия $\varepsilon_1 E_{1r} = \varepsilon_2 E_{2r}$ следует, что

$$A_1 = -(\varepsilon_2/\varepsilon_1)(E_0 + 2B_2 R^{-3}). \tag{17.57}$$

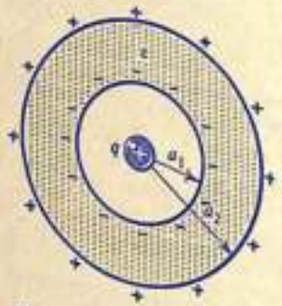
Решение системы (17.54) и (17.57):

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0, \quad B_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}R^3 E_0. \tag{17.58}$$

Потенциалы внутри и вне шара равны:

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0 r\cos\theta, \tag{17.59}$$

$$\varphi_2 = -\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\right)E_0 r\cos\theta. \tag{17.60}$$



89

Точечный заряд, окруженный концентрическим с ним слоем диэлектрика

Очевидно, что внутри шара напряженность поля постоянна и параллельна оси Z:

$$E_{1z} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial(r\cos\theta)} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0. \tag{17.61}$$

Она является суммой напряженности внешнего поля и напряженности поля, созданного связанными зарядами, возникшими на поверхности шара. Следовательно, напряженность поля, созданного внутри шара связанными зарядами, равна

$$E_{cв} = E_{1z} - E_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_0/(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2). \tag{17.62}$$

Она постоянна и направлена по оси Z. Распределение зарядов на поверхности шара, которое приводит к постоянной напряженности внутри шара, определяется формулой (16.75). Поэтому можно заключить, что напряженность (17.62) создается связанными зарядами на поверхности шара, плотность которых изменяется с углом θ так же, как в формуле (16.79), т. е. $\sigma \sim \cos\theta$.

Из (17.62) видно, что при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ напряженность $\mathbf{E}_{cв}$ направлена противоположно $\mathbf{E}_0$ и, следовательно, напряженность внутри шара меньше, чем в исходном однородном поле. При $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ напряженность $\mathbf{E}_{cв}$ совпадает по направлению с $\mathbf{E}_0$ и усиливает ее внутри шара. На рис. 88 показаны линии вектора **D** для случаев $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ (*а*) и $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ (*б*) и знаки связанных зарядов, которые при этом образуются на поверхности шара. Отметим, что на рис. 88 изображены линии вектора **D**, а не **E**, поскольку именно вектор **D** при отсутствии свободных зарядов непрерывен. При вычерчивании линий вектора **E** необходимо изменять их плотность на поверхности шара, где имеются связанные заряды.

Пример 17.1. *Найти связанные заряды, поляризованность и напряженность поля, индуцированного точечным зарядом q, помещенным в центре двух концентрических сфер радиусами a_1 и a_2. Сферический слой заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью ε* (рис. 89).

Поле сферически симметрично. Выбрав в качестве S поверхность сферы радиусом r с центром в точке нахождения заряда q, по формуле Гаусса $\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = D_r 4\pi r^2 = q$ определяем электрическое смещение

$$D_r = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2},$$

непрерывное во всем пространстве. Напряженность электрического поля

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{D_r}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} && \text{при } r < a_1, \\ E_r &= \frac{D_r}{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2} && \text{» } a_1 < r < a_2, \\ E_r &= \frac{D_r}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} && \text{» } a_2 < r \end{aligned} \tag{17.63}$$

терпит разрыв на поверхностях сферического слоя при $r = a_1$ и $r = a_2$.

Поляризованность дается выражениями

$$P_r = D_r - \varepsilon_0 E_r = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a_1, \\ \dfrac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\, q}{4\pi\varepsilon r^2} & \text{» } a_1 < r < a_2, \\ 0 & \text{» } a_2 < r \end{cases} \tag{17.64}$$

и, следовательно, поверхностная плотность связанных зарядов равна:

$$\sigma_{св1} = -P_r(r = a_1) = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\, q/(4\pi\varepsilon a_1^2), \tag{17.65}$$

$$\sigma_{св2} = P_r(r = a_2) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, q/(4\pi\varepsilon a_2^2).$$

Связанные заряды на поверхности сферического слоя вычисляются по формулам:

$$q_{св1} = 4\pi a_1^2 \sigma_{св1} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\, q/\varepsilon, \quad q_{св2} = 4\pi a_2^2 \sigma_{св2} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, q/\varepsilon.$$

Они равны по абсолютному значению и противоположны по знаку.

Объемная плотность связанных зарядов везде равна нулю, поскольку

$$\rho_{св} = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) = 0. \tag{17.66}$$

Поле внутри сферического слоя создается точечным зарядом q и связанным зарядом $q_{св1}$, находящимся на внутренней поверхности слоя. Связанный заряд, расположенный на внешней поверхности сферического слоя, не создает электрического поля в ограничиваемом им объеме. Поэтому напряженность поля точечного заряда q внутри сферического слоя уменьшена на значение напряженности, созданной связанным зарядом $q_{св1} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\, q/\varepsilon$. При $a_1 \to 0$ заключаем, что точечный заряд q в диэлектрике действует как эффективный точечный заряд

$$q_{эф} = q + q_{св1} = \varepsilon_0 q/\varepsilon. \tag{17.67}$$

Это приводит к ослаблению напряженности электрического поля в диэлектрике.

§ 18. Энергия электростатического поля

Рассматриваются энергия взаимодействия и собственная энергия зарядов и ее связь с плотностью энергии электрического поля. Выводятся формулы для энергии заряженных проводников и энергии диэлектрического тела во внешнем поле.

Энергия взаимодействия дискретных зарядов. Допустим, что имеются заряженные шары очень малого диаметра, который меньше расстояния между центрами шаров. Распределение заряда в шарах сферически симметрично. Физический смысл формулы (14.32) позволяет заключить, что величина

$$W' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r} \tag{18.1}$$

равна работе, которая совершается при разведении зарядов Q_1 и Q_2 от расстояния r между ними до бесконечного. Эта работа положительна, когда заряды одноименны и между ними действуют силы отталкивания. Между разноименными зарядами действуют силы притяжения и работа отрицательна. В последнем случае необходимо совершить работу за счет внешних источников энергии. Поэтому в соответствии с общим определением (18.1) есть энергия взаимодействия заряженных шаров. Поскольку оба заряда входят в формулу (18.1) симметрично, ее целесообразно записать в виде

$$W' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r}Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r}Q_2\right) = \frac{1}{2}(\varphi_1' Q_1 + \varphi_2' Q_2), \tag{18.2}$$

где φ_1' – потенциал, созданный вторым зарядом в центре первого шара; φ_2' – потенциал, созданный первым зарядом в центре второго шара.

Формула (18.2) легко обобщается на случай нескольких заряженных шаров с зарядами Q_i:

$$W' = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i' Q_i. \tag{18.3}$$

Она дает энергию взаимодействия системы зарядов.

Энергия взаимодействия при непрерывном распределении зарядов. Пусть в элементе объема dV находится заряд $dQ = \rho\, dV$. Для определения энергии взаимодействия элементов заряда dQ можно применить формулу (18.3), перейдя в ней от суммы к интегралу:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\, dV,} \tag{18.4}$$

где φ – потенциал в точке элемента объема dV.

Собственная энергия. На первый взгляд формула (18.4) кажется аналогичной (18.3). Однако между ними существует принципиальное различие. *Формула* (18.3) *учитывает лишь энергию взаимодействия между заряженными шарами, но не учитывает энергии взаимодействия элементов заряда каждого шара между собой.* Формула (18.4) учитывает как энергию взаимодействия между шарами, так и энергию взаимодействия элементов заряда каждого шара между собой, называемую собственной энергией заряженного шара. При расчете энергии взаимодействия заряженных шаров (18.4) сводится к интегралам по объемам V_i шаров:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\, dV = \sum_i \frac{1}{2}\int_{V_i} \varphi_i \rho\, dV. \tag{18.5}$$

В любой точке объема i-го шара потенциал φ_i слагается из двух частей: $\varphi_i^{(1)}$, созданной зарядами других шаров, и $\varphi_i^{(соб)}$, созданной

зарядами i-го шара:

$$\varphi_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(\text{соб})}. \tag{18.6}$$

Тогда [см. (18.5)]

$$W = \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i^{(1)} \rho \, dV + \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i^{(\text{соб})} \rho \, dV. \tag{18.7}$$

Так как заряды на шарах распределены сферически симметрично, то

$$\int_{V_i} \varphi_i^{(1)} \rho \, dV = \varphi_i' Q_i, \tag{18.8}$$

где φ_i' – потенциал в центре шара, $Q_i = \int_{V_i} \rho \, dV$ – полный заряд шара.

Доказательство (18.8) в принципе аналогично доказательству эквипотенциальности электрического поля, порождаемого сферически симметричным распределением заряда в шаре и соответствующим точечным зарядом, расположенным в центре шара (для области вне шара). Теперь (18.7) можно записать в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i' Q_i + \frac{1}{2} \sum_i \int_{V_i} \varphi_i^{(\text{соб})} \rho \, dV = W' + \sum_i W_i^{(\text{соб})}, \tag{18.9}$$

где W_i' дается формулой (18.3).

Собственные энергии $W_i^{(\text{соб})}$ шаров зависят от законов распределения заряда в шарах и значений зарядов. Пусть, например, по поверхности шара равномерно распределен заряд Q. Потенциал в этом случае определяется формулой (16.28) и, следовательно

$$W^{(\text{соб})} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \tag{18.10}$$

При $R \to 0$ величина $W^{(\text{соб})} \to \infty$. Это означает, что **собственная энергия точечного заряда равна бесконечности.** Это приводит к серьезным трудностям при использовании понятия точечных зарядов.

Таким образом, *формулу (18.3) можно применять для анализа взаимодействия точечных зарядов, поскольку она не содержит их бесконечных собственных энергий.* Формула (18.4) для непрерывного распределения заряда учитывает всю энергию взаимодействия, а формула (18.3) – лишь часть. Поэтому (18.4) является более полной и содержательной формулой по сравнению с (18.3).

Плотность энергии поля. Воспользовавшись уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \tag{18.11}$$

запишем (18.4) в виде

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV. \tag{18.12}$$

Принимая во внимание формулу векторного анализа

$$\varphi \operatorname{div} \mathbf{D} = -\mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}), \tag{18.13}$$

представим (18.12) в виде суммы двух интегралов:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}) \, dV, \tag{18.14}$$

где $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. Второй интеграл в (18.14) по теореме Гаусса – Остроградского равен

$$\int_V \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}) \, dV = \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}, \tag{18.15}$$

где S – замкнутая поверхность, охватывающая объем V. Предполагается, что все заряды расположены в конечной области пространства. На далеких расстояниях r от зарядов $\varphi \sim 1/r$, $D \sim 1/r^2$, т. е. $\varphi D \sim 1/r^3$. Площадь S поверхности растет прямо пропорционально r^2. Следовательно, интеграл (18.15) имеет порядок $\varphi DS \sim 1/r$ и при удалении поверхности интегрирования на бесконечность стремится к нулю. Поэтому для всего пространства формула (18.14) принимает вид

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV.} \tag{18.16}$$

Энергии W, вычисленные по формулам (18.16) и (18.4), равны, но физическое содержание этих формул совершенно различно. Представим себе, что заряды находятся в тонких поверхностных слоях шаров. В этом случае интеграл (18.4) сводится к сумме интегралов по поверхностным слоям шаров, а в пространстве между шарами он равен нулю. Интеграл же (18.16) сводится к интегралу по пространству между шарами, где имеется поле $\mathbf{E}$. Следовательно, в (18.4) носителем энергии выступают заряды и энергия представляется локализованной на зарядах. В (18.16) носителем энергии считается электрическое поле и энергия представляется локализованной во всем пространстве, где имеется электрическое поле. Плотность электрической энергии [см. (18.16)] равна

$$\boxed{w = {}^1\!/_2 \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}.} \tag{18.17}$$

Таким образом, плотность энергии в (18.17) положительна, поскольку $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \varepsilon E^2 > 0$. Следовательно, и полная энергия в (18.16) и (18.4) положительна. Однако энергия взаимодействия (18.3) между дискретными зарядами может быть и положительной, и отрицательной. Причина этого видна из равенства (18.9), которое целесообразно представить в виде

$$W' = W - \sum_i W_i^{(\text{соб})}. \tag{18.18}$$

Таким образом, *энергия взаимодействия между дискретными зарядами положительна тогда, когда их собственная энергия (всегда положительная) меньше полной энергии поля, и отрицательна – когда их собственная энергия больше полной энергии поля.*

Допустим, что все заряды, за исключением одного, зафиксированы на своих местах. Тогда энергия взаимодействия выделенного заряда с другими зарядами называется его потенциальной энергией. На основании сказанного, это есть просто часть энергии электрического поля. Изменение потенциальной энергии связано с изменением энергии поля. *Закон сохранения энергии для частицы в потенциальном поле, утверждающий постоянство суммы ее кинетической и потенциальной энергии, означает, что уменьшение кинетической энергии частицы сопровождается соответствующим увеличением энергии поля, и наоборот.*

Выражение (18.17) сформулировано в локальном виде и определяет плотность энергии как функцию напряженности электрического поля и свойств среды в данной точке, учитываемых смещением **D**. Ясно, что *справедливость этой формулы не может зависеть от того, каким способом создано электрическое поле в данной точке. Поэтому выражение* (18.17) *справедливо не только для постоянных полей, но и для переменных.* Другими словами, эта формула выражает **плотность энергии электрического** поля, а не только электростатического.

Энергия поля поверхностных зарядов. Поскольку формула (18.17) не зависит от того, какие заряды являются источниками поля, она справедлива также и при наличии поверхностных зарядов. Формула (18.16) также дает полную энергию поля независимо от того, какими зарядами это поле порождено. Следовательно, формула (18.16) правильно учитывает не только объемные, но и поверхностные заряды.

Формула (18.4) при наличии поверхностных зарядов несколько изменяется. Однако это изменение самоочевидно. Подынтегральное выражение в (18.4) равно $\varphi\rho\,dV = \varphi\,dq$ и имеет смысл потенциальной энергии, которой обладает элемент заряда dq, находясь в точке с потенциалом φ. Эта потенциальная энергия не зависит от того, является ли dq элементом объемного или поверхностного заряда. Поэтому выражение (18.4) применимо и к поверхностным зарядам, но при этом $dq = \sigma\,dS$ и интегрировать надо по всем поверхностям S_i, на которых имеются заряды. Следовательно, с учетом поверхностных зарядов формула (18.4) принимает вид

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\,dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\sigma\,dS.} \qquad (18.19)$$

Все, что было сказано об энергии взаимодействия и собственной энергии, справедливо также и относительно поверхностных зарядов. Надо лишь учесть их вклад как в полную энергию, так и в собственную. Это обстоятельство уже было использовано при выводе собственной энергии [см. (18.10)].

Энергия заряженных проводников. Поскольку на проводниках имеются лишь поверхностные заряды и потенциал в разных точках проводника имеет одно и то же постоянное значение, формула (18.18) принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\int_S \varphi\sigma\,dS = \frac{1}{2}\sum_i \int_{S_i} \varphi_i\sigma_i\,dS_i = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \int_{S_i} \sigma_i\,dS_i = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i. \qquad (18.20а)$$

Подставляя в эту формулу выражение (16.42), получаем соотношение

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \alpha_{ij} Q_i Q_j. \qquad (18.20б)$$

С помощью (16.45) преобразуем (18.20а) к виду

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}\varphi_i\varphi_j. \qquad (18.20в)$$

Из (18.20а) имеем

$$W = \frac{1}{2}Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}, \qquad (18.20г)$$

где $C = Q/(\varphi_1 - \varphi_2)$ – емкость конденсатора, Q – заряд на одной из обкладок.

Энергия диполя во внешнем поле. Эта энергия равна сумме энергий зарядов диполя (см. рис. 77):

$$W = q\,[\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r})]. \qquad (18.21)$$

Разложим $\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l})$ в ряд по $\mathbf{l}$:

$$\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = \varphi(\mathbf{r}) + l_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + l_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + l_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \ldots = \varphi(\mathbf{r}) - (l_xE_x + l_yE_y + l_zE_z) = \varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{l}\cdot\mathbf{E}, \qquad (18.22)$$

где вследствие чрезвычайной малости l сохранены лишь члены первого порядка по l. Формула (18.21) принимает вид

$$\boxed{W = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}.} \qquad (18.23)$$

Энергия диэлектрического тела во внешнем поле. Дипольный момент элемента объема dV тела равен $d\mathbf{p} = \mathbf{P}\,dV$. Энергия этого элемента во внешнем поле с напряженностью $\mathbf{E}$ равна [см. (18.23)] $dW = -\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}\,dV$. Кажется, что энергия диэлектрического тела равна интегралу от dW по объему тела. Однако это неправильно. Дело в том, что каждый поляризованный элемент объема dV диэлектрического тела становится источником электрического поля, благодаря чему в расчет энергии входит дважды: один раз как дипольный момент, находящийся во внеш-

нем поле, а другой раз как источник поля, в котором находятся другие дипольные моменты.

Поэтому для определения его энергии удобно исходить из полной энергии поля. Кроме того, предположим, что диэлектрик является однородным и заполняет все пространство, что значительно упрощает математические расчеты.

Пусть электростатическое поле создается некоторым распределением зарядов в свободном пространстве. Как обычно, заряды считаются расположенными в конечной области пространства. Обозначим: $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$ – векторы поля, создаваемого распределением заряда в свободном пространстве. Полная энергия поля [см. (18.16)] равна

$$W_0 = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 \, dV, \tag{18.24}$$

где интеграл распространен на все пространство. Теперь предположим, что все пространство заполняется диэлектрической средой, заряды же при этом как источники поля остаются неизменными. Поле во всем пространстве изменяется. Обозначим: ε, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ – диэлектрическая проницаемость и векторы поля в среде. Полная энергия после заполнения пространства диэлектриком равна

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV. \tag{18.25}$$

Следовательно, энергия диэлектрика, помещенного во внешнее поле с напряженностью $\mathbf{E}_0$, равна

$$W_a = W - W_0 = \frac{1}{2}\int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) \, dV. \tag{18.26}$$

При заполнении всего пространства однородным диэлектриком с проницаемостью ε напряженность во всех точках поля уменьшается в $\varepsilon/\varepsilon_0$ раз. Следовательно,

$$\mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 / \varepsilon. \tag{18.27}$$

Поэтому подынтегральное выражение в (18.26) можно преобразовать:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 = \varepsilon E^2 - \varepsilon_0 E_0^2 = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0^2 = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0, \tag{18.28}$$

где

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\mathbf{E}_0 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} = \mathbf{P}. \tag{18.29}$$

Тогда [см. (18.26)]

$$W_a = -\frac{1}{2}\int \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 \, dV. \tag{18.30}$$

Можно показать, что формула (18.30) справедлива также и для энергии диэлектрика конечных размеров во внешнем поле $\mathbf{E}_0$.

Из (18.30) можно получить энергию диэлектрического тела с проницаемостью ε_2, находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1. Запишем формулу (18.30) для энергии диэлектрического тела с проницаемостью ε_1:

$$W_{a1} = -\frac{1}{2}\int (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0 \, dV, \tag{18.31}$$

где $\mathbf{E}_1$ – напряженность поля в теле. Для упрощения расчетов попрежнему считаем, что диэлектрик заполняет все пространство. Энергия диэлектрика с проницаемостью ε_2 аналогично выражению (18.31) равна

$$W_{a2} = -\frac{1}{2}\int (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_0 \, dV. \tag{18.32}$$

Отсюда следует, что разность энергий диэлектрика с проницаемостью ε_2 и диэлектрика с проницаемостью ε_1 равна

$$W_{a21} = W_{a2} - W_{a1} = -\frac{1}{2}\int [(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_0 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0] \, dV. \tag{18.32а}$$

Преобразуя подынтегральное выражение с помощью формул

$$\mathbf{E}_2 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0/\varepsilon_2, \quad \mathbf{E}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0/\varepsilon_1, \tag{18.33}$$

находим

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_0 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0 = \left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\right] E_0^2 =$$

$$= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} E_0^2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1. \tag{18.34}$$

Тогда (18.32) принимает вид

$$\boxed{W_{a21} = -\frac{1}{2}\int (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \, dV,} \tag{18.35}$$

где W_{a21} – энергия диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_2, помещенного в среду с диэлектрической проницаемостью ε_1, поле в которой $\mathbf{E}_1$ создается фиксированными свободными зарядами в среде. Можно показать, что эта формула справедлива и для конечного диэлектрика, если в (18.35) понимать интегрирование по объему диэлектрика. В этом случае: $\mathbf{E}_1$ – напряженность поля, которая существовала бы в объеме диэлектрика, если его диэлектрическая проницаемость была бы равна диэлектрической проницаемости ε_1 окружающей среды; $\mathbf{E}_2$ – напряженность поля в объеме диэлектрика после внесения его в поле при фиксированных зарядах, создающих поле. Формула (18.35) важна для понимания сил, действующих на диэлектрики.

Из (18.35) следует важное утверждение: *увеличение диэлектрической проницаемости среды ведет к уменьшению полной энергии поля.* Дока-



90

Двухслойный цилиндрический или сферический конденсатор

зательство проводится следующим образом. Пусть напряженность исходного поля $E_1 = E$, а диэлектрическая проницаемость среды ε_1. При увеличении диэлектрической проницаемости среды на $\delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ напряженность равна $E_2 = E + \delta E$ и, следовательно, изменение энергии дается формулой

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int \delta\varepsilon E^2\,dV \qquad (18.3$$

(член $\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$ высшего порядка малости отброшен). Формула (18.36) доказывает высказанное утверждение.

Пример 18.1. *Найти энергию, накапливающуюся в цилиндрическом двухслойном конденсаторе на длине l. Данные о конденсаторе приведены на рис. 90.*

Считая, что на внутренней обкладке конденсатора на длине l находится заряд Q, и применяя к цилиндрической поверхности радиуса r, коаксиальной с осью конденсатора, теорему Гаусса, находим для радиальной составляющей напряженности поля выражение

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi l\varepsilon_1}\dfrac{Q}{r} & \text{при } r_1 < r < a, \\ \dfrac{1}{2\pi l\varepsilon_2}\dfrac{Q}{r} & \text{»} \quad a < r < r_2, \\ 0 & \text{»} \quad r_2 < r < \infty. \end{cases}$$

Энергию поля находим по формуле

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dV,$$

принимающей в данном случае вид

$$W = \frac{1}{2}\int_0^l dl \int_{r_1}^{a}\left(\frac{Q}{2\pi l}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{1}{r^2}2\pi r\,dr + \frac{1}{2}\int_0^l dl \int_a^{r_2}\left(\frac{Q}{2\pi l}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{1}{r^2}2\pi r\,dr =$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi l}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{a}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{r_2}{a}\right).$$

● **Собственная энергия заряда — это энергия взаимодействия различных элементов заряда между собой. Собственная энергия точечного заряда бесконечно.**

Энергия взаимодействия дискретных зарядов — это полная энергия поля за вычетом собственной энергии зарядов. Она положительна, когда их собственная энергия (всегда положительная) меньше полной энергии поля, и отрицательна — когда больше полной.

Закон сохранения энергии для частицы в потенциальном поле, утверждающий постоянство суммы ее кинетической и потенциальной энергий, означает, что уменьшение кинетической энергии частицы сопровождается соответствующим увеличением энергии поля, и наоборот.

Увеличение диэлектрической проницаемости среды ведет к уменьшению полной энергии поля.

○ Чем обусловлена различие множителей в формулах для энергии диполя [см. (18.23)] и энергии диэлектрического тела [см. (18.30)]?

§ 19. Силы в электрическом поле

Рассматриваются силы, действующие на заряды, проводники и диэлектрики в электрическом поле. Анализируется возникновение объемных и поверхностных сил.

Природа сил. Все силы, возникающие в электростатическом поле, являются в конечном счете силами, действующими на заряд.

Сила, действующая на точечный заряд. Она равна

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\,\mathrm{grad}\,\varphi.} \qquad (19.1)$$

Сила, действующая на непрерывно распределенный заряд. Она равна

$$\boxed{d\mathbf{F} = \rho\mathbf{E}\,dV.} \qquad (19.2)$$

Следовательно, **объемная плотность сил**

$$\boxed{\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho\mathbf{E} = -\rho\,\mathrm{grad}\,\varphi.} \qquad (19.3)$$

Сила, действующая на диполь. Она равна сумме сил, приложенных к зарядам диполя (рис. 91):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(+)} + \mathbf{F}_{(-)} = q\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{l}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})\right]. \qquad (19.4)$$

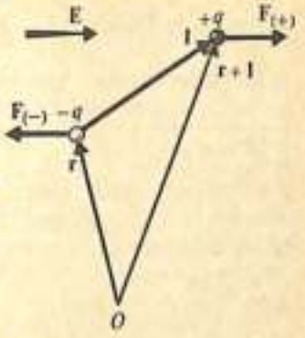
Здесь $\mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{l})$ можно представить в виде ряда по l_x, l_y, l_z и ограничиться линейными членами:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{l}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + l_x\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial x} + l_y\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial y} + l_z\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial z} + \ldots = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{l}\cdot\nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}), \qquad (19.5)$$

где $(\mathbf{l}\cdot\nabla) = l_x\frac{\partial}{\partial x} + l_y\frac{\partial}{\partial y} + l_z\frac{\partial}{\partial z}$. С учетом (19.5) формула (19.4) принимает вид

$$\boxed{\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}.} \qquad (19.6)$$

В однородном поле сила, действующая на диполь, равна нулю, поскольку к зарядам



91

Сила и момент сил, действующих на диполь

● **Силы в электрическом поле являются в конечном счете силами, действующими на заряды, хотя в выражения для силы значение зарядов присутствует не всегда.**

Формула для силы, действующей на абсолютно жесткие диэлектрики, справедлива также и для сжимаемых диэлектриков при условии, что их поляризованность линейно зависит от плотности массы.

Силы, действующие на диэлектрик, зависят от соотношения диэлектрической проницаемости тела и диэлектрической проницаемости окружающей среды. На поверхности раздела между диэлектриками сила всегда направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

диполя приложены противоположно направленные и равные по модулю силы.

Момент сил, действующих на диполь. Силы, приложенные к заряду диполя (см. рис. 91), составляют пару сил с моментом

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.} \tag{19.7}$$

Объемные силы, действующие на диэлектрик. Сила, приложенная к элементу объема dV диэлектрика, равна сумме сил, действующих на элементарные диполи внутри этого объема. Поэтому формула (19.6) принимает вид

$$d\mathbf{F} = \sum_{\Delta V} \mathbf{F}_i = \sum_{\Delta V} (\mathbf{p}_i \cdot \nabla)\, \mathbf{E}_i, \tag{19.8}$$

где ΔV означает, что суммирование проводится по всем элементарным диполям в объеме ΔV. В макроскопической картине напряженность $\mathbf{E}$ считается медленно изменяющейся величиной. Поэтому в сумме (19.8) $\mathbf{E}_i$ можно заменить на одинаковую для всех членов суммы напряженность $\mathbf{E}$. Тогда суммирование в (19.8) сведется к вычислению

$$\sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i = \mathbf{P}\, \Delta V. \tag{19.9}$$

Поэтому из (19.8) для объемной плотности силы, действующей в диэлектрике, получаем

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{\Delta V} = (\mathbf{P} \cdot \nabla)\, \mathbf{E}. \tag{19.10}$$

Примем во внимание, что $\mathbf{P} = \varkappa \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, \mathbf{E}$, и используем известное из векторного анализа тождество

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla)\, \mathbf{E} = {}^1\!/_2 \operatorname{grad} E^2 - \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}, \tag{19.11}$$

в котором ввиду потенциальности электростатического поля, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Тогда [см. (19.10)]

$$\boxed{\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \operatorname{grad} E^2.} \tag{19.12}$

Эта формула справедлива как для абсолютно жестких диэлектриков, так и для сжимаемых диэлектриков при условии, что их поляризованность линейно зависит от плотности массы или, иначе говоря, при условии, что дипольные моменты индивидуальных молекул и атомов при сжатии и растяжении элемента объема не изменяются, а дипольные моменты, обусловленные смещением ионов, либо отсутствуют, либо их вклад в поляризованность может считаться несущественным. Эти условия выполняются у газов и в большинстве случаев у жидкостей.

Эта формула очень наглядна, поскольку показывает, что на элементарные объемы диэлектрика действуют силы, стремящиеся сдвинуть эти объемы в направлении максимальной скорости возрастания модуля напряженности электрического поля. Иногда это выражают в виде

утверждения, что элемент объема диэлектрика увлекается в направлении роста модуля напряженности.

Формула для объемной плотности сил, справедливая для изотропных сжимаемых диэлектриков, имеет вид [см. (19.41)]

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left[\rho_m \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right)_T E^2 \right], \tag{19.13}$$

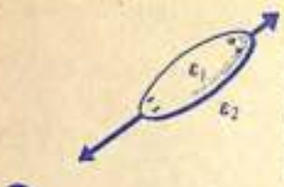
где ρ_m — плотность массы диэлектрика. Эта формула справедлива и тогда, когда $\varepsilon \neq \text{const}$. Если P линейно зависит от ρ_m, то $\varepsilon = D/E = \varepsilon_0 + P/E$, $P \sim \rho_m$, откуда $\rho_m \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right) = \varepsilon - \varepsilon_0$, и формула (19.13) переходит в (19.12). Если внутри диэлектрика имеются свободные заряды и гидростатическое давление, то в (19.13) добавляется объемная плотность $\rho \mathbf{E}$ сил, действующих на свободные заряды, и гидростатическое давление.

Применим эти формулы для определения сил, действующих на диэлектрический шар в однородном поле (см. рис. 88). Для применения формулы (19.12) необходимо считать, что переход от внешней области с диэлектрической проницаемостью ε_2 к внутренней области с диэлектрической проницаемостью ε_1 совершается не скачком на поверхности шара, а непрерывно в некотором тонком сферическом слое. В этом слое напряженность $\mathbf{E}$ изменяется непрерывно от ее значения вне шара до значения внутри шара. В каждой точке сферического слоя для вычисления силы можно использовать формулу (19.12).

В случае $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ напряженность поля внутри шара меньше, чем вне шара. Поэтому сила в каждой точке слоя направлена во внешнюю сторону шара. Вследствие симметрии равнодействующие этих сил по разные стороны шара стремятся растянуть шар по линии напряженности внешнего поля (см. рис. 88, *а*), однако результирующая всех сил равна нулю и шар как целое остается в покое. При $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ силы в переходном сферическом слое направлены внутрь шара и их равнодействующие по разные стороны шара стремятся его сплющить по линии напряженности внешнего поля. Результирующая сила, действующая на шар в целом, как и ранее равна нулю (рис. 88, *б*).

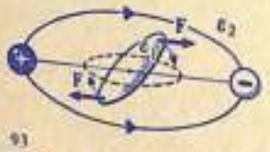
Однако если внешнее поле неоднородно, то результирующая сила, действующая на шар в целом, не равна нулю. Легко видеть, что при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ она направлена в сторону возрастания напряженности поля в среде. Этим объясняется, что легкие диэлектрические предметы притягиваются к наэлектризованным телам, поскольку для воздуха $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ и всегда соблюдается условие $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$. Если же $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то она направлена противоположно, т. е. в сторону уменьшения напряженности поля в среде. Поэтому в среде с достаточно большой диэлектрической проницаемостью диэлектрические предметы с меньшей диэлектрической проницаемостью отталкиваются от наэлектризованных тел.

При исследовании поведения напряженности электрического поля на границе между двумя диэлектриками (см. рис. 84 и 85) было



92

Механизм возникновения силы притяжения со стороны заряда на нейтральные диэлектрические тела



93

Диэлектрическое тело в виде вытянутого эллипсоида занимает положение вдоль поля своей наибольшей осью



94

Механизм возникновения силы отталкивания со стороны заряда на нейтральное диэлектрическое тело, помещенное в диэлектрическую среду с большей, чем у тела, диэлектрической проницаемостью



95

Вытянутый эллипсоид в среде с большей, чем у него, диэлектрической проницаемостью располагается поперек поля своей длинной осью

замечено, что E^2 всегда возрастает в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью. Поэтому из формулы (19.12) с помощью рассуждений, аналогичных использованным в случае диэлектрического шара, приходим к выводу, что на незаряженной границе между двумя диэлектриками сила всегда направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью. Этим объясняются многие явления. Например, диэлектрические тела, кусочки бумаги и т. д. притягиваются к заряду. Конечно, в любых частях поверхности тела, кусочка бумаги и т. д. силы направлены во внешнюю сторону, однако эти силы больше в частях поверхности, находящихся ближе к заряду. В результате возникает суммарная сила притяжения (рис. 92).

Такое поведение диэлектриков может быть понято, исходя из выражения (18.35) для энергии диэлектрика с проницаемостью ε_2, находящегося в среде с проницаемостью ε_1. Очевидно, что при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ эта энергия отрицательна. Она уменьшается из-за увеличения ε_2 и E_1 и уменьшения ε_1. Так как система стремится к минимуму энергии, то при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ тело будет втягиваться в область с большей напряженностью поля или с меньшей диэлектрической проницаемостью ε_1. Если же $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, то диэлектрик с ε_2 будет выталкиваться из области с большей напряженностью в область с меньшей напряженностью.

Допустим, что диэлектрическое тело в виде вытянутого эллипсоида, помещено в поле, изображенное на рис. 93. Так как во всех точках поверхности эллипсоида силы, действующие во внешнюю сторону, больше там, где больше градиент квадрата напряженности, то возникает момент сил, стремящийся развернуть эллипсоид длинной осью в направлении силовых линий. Это особенно ясно, если вспомнить, что все части диэлектрика увлекаются в область наибольшей напряженности.

Если диэлектрическая проницаемость тела меньше диэлектрической проницаемости

среды, то силы в поверхностном слое тела направлены во внешнюю сторону. Поэтому направление результирующей силы изменится. Диэлектрические тела, кусочки бумаги и т. д. вместо притяжения к наэлектризованному телу отталкиваются. Картина сил в этом случае показана на рис. 94. Вытянутый диэлектрический эллипсоид в среде с большей, чем у него, диэлектрической проницаемостью располагается своей длинной осью не в направлении силовых линий, а перпендикулярно их направлению (рис. 95). В этом случае части диэлектрика выталкиваются из области с большей напряженностью в области с меньшей напряженностью.

Силы, действующие на проводник. На заряд $dq = \sigma\, dS$, находящийся на элементе поверхности dS проводника, действует лишь половина напряженности поля, имеющегося у поверхности проводника, поскольку вторая половина создается самим зарядом элемента поверхности и не может на него действовать (см. § 16, рис. 39). Следовательно, поверхностная плотность силы равна

$$\mathbf{f}_{\text{пов}} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\mathbf{n}, \tag{19.14}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности проводника; ε – диэлектрическая проницаемость среды, с которой граничит проводник [см. (17.28)]. Таким образом, *на поверхности проводника сила всегда действует в направлении внешней нормали и как бы стремится увеличить его объем.*

Результирующая сила, действующая на проводник в целом [см. (18.24)], равна

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\int_S \frac{\sigma^2}{\varepsilon}\mathbf{n}\, dS = \frac{1}{2}\int_S \frac{\sigma^2}{\varepsilon} dS, \tag{19.15}$$

где S – поверхность проводника.

Выражение (19.15) позволяет сразу же вычислить силу, приходящуюся на участок площадью S обкладки плоского конденсатора, заполненного диэлектриком:

$$F = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}S, \tag{19.16}$$

поскольку поле при этом однородно, т. е. σ и ε в подынтегральном выражении (19.15) являются постоянными. Эта сила направлена внутрь конденсатора.

Поверхностные силы, действующие на диэлектрик. Объемные силы электростатического происхождения в состоянии равновесия не приводят в движение соответствующие элементы объема. *Они вызывают деформацию среды, в результате которой возникают объемные силы упругости, полностью уравновешивающие объемные электростатические силы.* Аналогичное равновесие возникает в объеме жидкости, находящейся в поле тяжести. На каждый элемент объема действует сила

тяжести жидкости, находящейся в элементе объема, однако она уравновешивается силой, возникающей в результате давления соседних участков жидкости на поверхность элемента объема. Объемные электрические силы приводят в движение элементарные объемы лишь при достаточно быстрых изменениях полей, когда упругие силы не уравновешивают электрические силы в каждый момент времени. Равнодействующая всех объемных сил приложена к диэлектрику в целом и может вызвать его движение, если только она не уравновешена какой-то другой силой.

Наряду с объемными у диэлектриков имеются также *поверхностные силы, которые возникают в поверхностном слое диэлектрика*. Они действуют наряду с объемными. При их выводе будем исходить из первого начала термодинамики.

При изотермических процессах термодинамическим потенциалом является свободная энергия F, связанная с работой соотношением

$$dA = -dF. \tag{19.17}$$

Поскольку термодинамические соотношения при отсутствии электрического поля были изучены в молекулярной физике, ограничимся учетом лишь тех величин, которые зависят от электрического поля. Поэтому в (19.17) рассматриваются лишь работа и изменение свободной энергии, обусловленные электрическим полем. Работу и изменение свободной энергии, обусловленные деформациями и силами упругости, не учитываем, т. е. считаем диэлектрик недеформируемым. Кроме того, ограничимся изотропными диэлектриками.

Свободной является та часть внутренней энергии, которая не связана в системе и доступна для получения работы. Ее величина зависит от условий осуществления процесса.

Рассмотрим плоскую границу между диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. В качестве конкретной модели физической системы можно взять плоский конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено жидкими диэлектриками с плоской границей раздела. Граница раздела может проходить либо параллельно, либо перпендикулярно обкладкам. С помощью этой модели можно получить выражения для поверхностной плотности сил, действующих на границе между диэлектриками. Так как соотношения, которые будут получены, имеют локальный характер, они не зависят от конкретного вида нелокальной модели, в рамках которой получены, т. е. имеют общий характер.

Рассмотрим плоскую границу, параллельную обкладкам конденсатора (рис. 96). Напряженность $\mathbf{E}$ поля перпендикулярна границе. В качестве положительной нормали выберем ту, которая направлена во второй диэлектрик. При бесконечно малом смещении границы производится работа за счет изменения свободной энергии. Вычислив независимо работу и изменение свободной энергии, найдем из (19.17) поверхностную плотность сил. Конечно, смещение dx следует рассматривать как виртуальное, т. е. не обязательно фактически осуществляемое.

Работа при смещении элемента поверхности ΔS по нормали на dx равна

$$dA = \Delta S f_n \, dx, \tag{19.18}$$

где f_n – поверхностная плотность силы.

При вычислении dF учтем, что на границе между диэлектриками $D_2 = D_1$, т. е. смещение границы происходит при $D = \text{const}$. Это соответствует условию постоянства заряда на обкладках конденсатора, поскольку $D = \sigma$. Следовательно, надо вычислить dF при постоянном заряде q обкладок, т. е. $(dF)_{T,q}$. При смещении границы на dx объем $\Delta S \, dx$, первоначально заполненный электрической энергией с плотностью $E_2D_2/2$, станет заполненным энергией с плотностью $E_1D_1/2$. Других энергетических факторов, участвующих в процессе при производстве работы, нет. Следовательно, разность энергий в объеме $\Delta S \, dx$ после перемещения границы и до ее перемещения и составляет изменение свободной энергии:

$$(dF)_{T,q} = \left(\frac{1}{2} D_{1n}E_{1n} - \frac{1}{2} D_{2n}E_{2n}\right)\Delta S \, dx, \tag{19.19}$$

где индекс n означает, что рассматриваются нормальные компоненты $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$.

С учетом (19.18) и (19.19) соотношение (19.17) принимает вид

$$f_n = {}^1/_2 E_{2n}D_{2n} - {}^1/_2 E_{1n}D_{1n}. \tag{19.20}$$

Поверхностная плотность силы направлена по нормали к границе раздела. Из (19.20) видно, что поверхностная плотность силы f_n слагается из двух частей:

1) поверхностной плотности силы

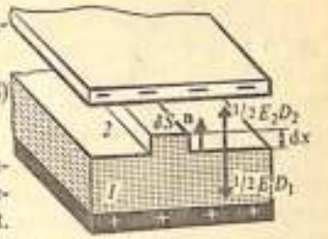
$$f_{2n} = {}^1/_2 E_{2n}D_{2n}, \tag{19.21}$$

возникающей под влиянием электрического поля второй среды и направленной в сторону второй среды;

2) поверхностной плотности силы

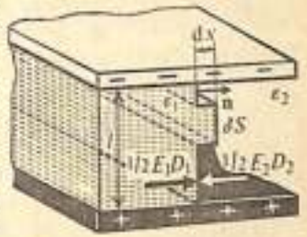
$$f_{1n} = -{}^1/_2 E_{1n}D_{1n}, \tag{19.22}$$

возникающей под влиянием электрического поля первой среды и направленной в сторону первой среды.



96

Возникновение максвелловских натяжений



97

Возникновение максвелловских давлений

● **Компонента поля, нормальная к поверхности раздела диэлектриков, как бы притягивает к себе поверхность с поверхностной плотностью силы, равной объемной плотности электрической энергии поля, связанной с этой компонентой.**
Компонента поля, тангенциальная к поверхности раздела диэлектриков, как бы давит на поверхность, причем давление равно объемной плотности электрической энергии поля, связанной с этой компонентой.
Всегда, независимо от ориентации поля, поверхностная сила действует в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

Таким образом, *в данном случае электрические поля, находящиеся по разные стороны от границы раздела как бы притягивают к себе поверхность раздела с поверхностной плотностью силы, равной объемной плотности электрической энергии, приходящейся на нормальную компоненту напряженности поля.*

Равнодействующая двух сил, приложенных к поверхности раздела от полей по разные стороны от границы, является полной силой, действующей на границу раздела. Так как $D_{2n} = D_{1n} = D_n$, то [см. (19.20)]

$$f_n = \frac{1}{2} D_n^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right). \tag{19.23}$$

При $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ поверхностная плотность силы $f_n > 0$. Это означает, что на границу раздела сила действует в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью, т. е. в направлении бо́льшей объемной плотности электрической энергии. Заметим, что объемная плотность силы [см. (19.12)] также направлена в сторону увеличения объемной плотности электрической энергии.

Теперь рассмотрим диэлектрики, плоская граница между которыми перпендикулярна обкладкам плоского конденсатора (рис. 97). В этом случае на границе соблюдается условие $E_{2\tau} = E_{1\tau} = E_\tau$, поскольку напряженность поля направлена параллельно границе. Индекс τ означает тангенциальные к поверхности раздела компоненты векторов. Смещение границы происходит при условии $E_\tau = \text{const}$, т. е. при постоянной разности потенциалов. Следовательно, необходимо вычислить изменение свободной энергии $(\mathrm{d}F)_{T,\varphi}$. Для поддержания неизменной разности потенциалов необходимо изменить плотность зарядов на той части обкладок конденсатора, которая соответствует смещению поверхности раздела на $\mathrm{d}x$. Для этого затрачивается энергия по перемещению заряда, равная $\mathrm{d}q\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \mathrm{d}q E_\tau l$, где E_τ и l – напряженность поля и расстояние между обкладками конденсатора. Поверхностные плотности заряда в области соприкосновения обкладок с первым и вторым диэлектриком равны соответственно $\sigma_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_1 E_\tau$ и $\sigma_2 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_2 E_\tau$. Глубина диэлектрика в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 97, равна $\Delta S/l$. Следовательно,

$$\mathrm{d}q = (\sigma_1 - \sigma_2)(\Delta S/l)\,\mathrm{d}x. \tag{19.24}$$

При данных условиях для производства работы доступна лишь разность между энергией поля и энергией, которая затрачивается для поддержания постоянства потенциалов. Поэтому изменение свободной энергии равно

$$(\mathrm{d}F)_{T,\varphi} = (\tfrac{1}{2} E_{1\tau} D_{1\tau} - \tfrac{1}{2} E_{2\tau} D_{2\tau})\,\Delta S\,\mathrm{d}x - (\sigma_2 - \sigma_1)(\Delta S/l)\,\mathrm{d}x\,E_\tau l. \tag{19.25}$$

Так как $\sigma_2 = \varepsilon_2 E_\tau$ и $\sigma_1 = \varepsilon_1 E_\tau$, то

$$(\mathrm{d}F)_{T,\varphi} = -(\tfrac{1}{2} E_{1\tau} D_{1\tau} - \tfrac{1}{2} E_{2\tau} D_{2\tau})\,\Delta S\,\mathrm{d}x. \tag{19.26}$$

С учетом (19.18) и (19.26) соотношение (19.17) принимает вид

$$f_n = -\tfrac{1}{2} E_{2\tau} D_{2\tau} + \tfrac{1}{2} E_{1\tau} D_{1\tau}. \tag{19.27}$$

Эта поверхностная плотность силы также направлена по нормали к поверхности раздела. Из (19.27) видно, что она слагается из двух частей:

1) поверхностной плотности силы

$$f_{2n} = -\tfrac{1}{2} E_{2\tau} D_{2n}, \tag{19.28}$$

действующей на границу раздела в направлении первой среды со стороны электрического поля второй среды. Напомним, что положительная нормаль выбрана из первой среды во вторую и, следовательно, знак минус в (19.28) свидетельствует о направлении силы из второй среды в первую;

2) плотности силы

$$f_{1n} = \tfrac{1}{2} E_{1\tau} D_{1n}, \tag{19.29}$$

действующей на границу в направлении положительной нормали со стороны электрического поля первой среды.

Таким образом, *за счет тангенциальной компоненты напряженности электрическое поле как бы давит на граничащую с ним поверхность раздела, причем давление равно объемной плотности энергии, приходящейся на тангенциальную компоненту напряженности поля.*

Равнодействующая сил давления, приложенных к поверхности раздела со стороны полей по разные стороны границы, является полной силой, приложенной к границе. Поскольку $E_{1\tau} = E_{2\tau} = E_\tau$, формула (19.27) принимает вид

$$f_n = \tfrac{1}{2} E_\tau^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \tag{19.30}$$

При $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ плотность силы $f_n > 0$. Следовательно, поверхностная плотность силы направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью. Таким образом, *всегда, независимо от ориентации поля относительно поверхности раздела, поверхностная плотность силы направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью* [см. (19.12)]. Справедливость и общность этого утверждения также следуют из равенства (18.36), если принято во внимание, что система стремится перейти в состояние с наименьшей энергией.

Объемные силы, действующие на сжимаемый диэлектрик. Исходим из формулы (18.36), в которой $\delta\varepsilon$ обусловливается деформацией, изменяющей плотность массы. Процессы предполагаются изотермическими ($T = \text{const}$). Диэлектрическая проницаемость изменяется от точки к точке, являясь функцией от $\mathbf{r}$, и, кроме того, может зависеть от плотности ρ_m массы диэлектрика, т. е. $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, \rho_m)$. Пусть при деформации элемент объема $\mathrm{d}V$ смещается на $\mathbf{l}$ и при этом происходит изменение плотности массы диэлектрика. Элемент объема, который после смещения находится в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, до смещения находился в точке $\mathbf{r} - \mathbf{l}$. Следовательно,

$$\delta\varepsilon = -\mathbf{l}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}\delta\rho_m, \tag{19.31}$$

где $\delta\rho_m$ – изменение плотности массы диэлектрика.

Можно показать, что элемент объема dV' после деформирования равен

$$dV = (1 + \operatorname{div} \mathbf{l})\, dV'. \tag{19.32}$$

Закон сохранения массы для элемента объема имеет вид

$$\rho_m\, dV = \rho'_m\, dV' \tag{19.33}$$

или

$$\rho_m (1 + \operatorname{div} \mathbf{l})\, dV' = \rho'_m\, dV', \tag{19.34}$$

где ρ_m и ρ'_m – плотности массы после деформации и до деформации. Из (19.34) следует, что для бесконечно малого смещения

$$\delta\rho_m = \rho_m - \rho'_m = -\rho_m \operatorname{div} \mathbf{l}. \tag{19.35}$$

Подставляя (19.31) и (19.35) в (18.36), находим

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left[E^2 \mathbf{l} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon + E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \operatorname{div} \mathbf{l} \right] dV. \tag{19.36}$$

По формуле (П.12) имеем

$$E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \operatorname{div} \mathbf{l} = \operatorname{div} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \right) - \mathbf{l} \cdot \operatorname{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right). \tag{19.37}$$

Тогда [см. (19.36)]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left[E^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \operatorname{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right) \right] \cdot \mathbf{l}\, dV + \frac{1}{2} \int \operatorname{div} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \right) dV. \tag{19.38}$$

При обычных предположениях о непрерывности подынтегральных выражений можно второй из интегралов преобразовать по теореме Гаусса – Остроградского в интеграл по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. Считая для упрощения рассуждений, что диэлектрик занимает все пространство, а порождающие поле заряды распределены в конечной области пространства, убеждаемся, что второй интеграл равен нулю, поскольку $E^2 \sim 1/r^4$, где r – расстояние от заряда до поверхности интегрирования и, следовательно,

$$\int \operatorname{div} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \right) dV = \int\limits_{S \to \infty} E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \cdot d\mathbf{S} \to 0. \tag{19.39}$$

Объемная плотность сил $\mathbf{f}$ описывает действие электрического поля на диэлектрик. Объемная плотность совершаемой этой силой работы при деформации равна $\mathbf{f} \cdot \mathbf{l}$. Поэтому закон сохранения энергии при деформации с учетом (19.38) и (19.39) имеет вид

$$\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{l}\, dV = -\frac{1}{2} \int \left[E^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \operatorname{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right) \right] \cdot \mathbf{l}\, dV. \tag{19.40}$$

Так как равенство (19.40) справедливо при произвольных смещениях $\mathbf{l}$, то

$$\boxed{\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \operatorname{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right).} \tag{19.41}$$

Эта формула справедлива для изотропных сжимаемых диэлектриков при произвольной зависимости ε от плотности массы ρ_m [см. (19.13)].

Если поляризованность линейно зависит от объемной плотности массы, то

$$\rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} = \varepsilon - \varepsilon_0 \tag{19.42}$$

и (19.41) переходит в (19.12). Следовательно, формула (19.12) справедлива не только для жестких диэлектриков, но и для сжимаемых с $P \sim \rho_m$.

Хотя формула (19.41) для упрощения рассуждений при преобразованиях (19.39) была выведена в предположении, что диэлектрик занимает все пространство, она справедлива всегда, поскольку является дифференциальным соотношением, справедливость которого не может зависеть от того, что происходит в других точках пространства.

Вычисление сил из выражения для энергии. Для того чтобы перенести заряд dq в точку с потенциалом φ, необходимо совершить работу $\varphi\, dq$. Поэтому полное изменение энергии системы зарядов при изменении зарядов на dq_i равно

$$\sum_j \varphi_j\, dq_j. \tag{19.43}$$

Оно сопровождается изменением энергии электрического поля на dW и производством работы зарядами. Если конфигурация системы характеризуется параметрами ξ_i, то, по определению, обобщенной силой, связанной с этим параметром, называется величина F_i, такая, что $F_i\, d\xi_i$ является работой, которую производит система при изменении параметра ξ_i на $d\xi_i$. Закон сохранения энергии имеет вид

$$\sum_j \varphi_j\, dq_j = dW + \sum_i F_i\, d\xi_i. \tag{19.44}$$

Рассмотрим прежде всего виртуальные процессы, в которых заряды сохраняют постоянные значения, т. е. $dq_i = 0$. В этом случае уравнение (19.44) принимает вид

$$0 = (dW)_q + \sum_i F_i\, d\xi_i. \tag{19.45а}$$

Здесь $(dW)_q$ зависит только от ξ_i и поэтому

$$(dW)_q = \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_q d\xi_i. \tag{19.45б}$$

Сравнение (19.45а) и (19.45б) с учетом независимости $d\xi_i$ приводит к равенству

$$\boxed{F_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right)_q}, \tag{19.46}$$

где индекс q у частной производной в явном виде показывает, что сила вычисляется при постоянных зарядах. *Для использования этой формулы энергия W должна быть выражена в виде функции от зарядов и параметров ξ_i.*

Можно обобщенную силу выразить также через производную при постоянном потенциале. Для этого принимаем во внимание выражение

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i. \tag{19.47}$$

Изменение энергии при постоянных потенциалах равно

$$(\mathrm{d}W)_\varphi = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \,\mathrm{d}q_i, \tag{19.48}$$

поэтому [см. (19.45а)]

$$0 = (\mathrm{d}W)_\varphi - \sum_i F_i \,\mathrm{d}\xi_i. \tag{19.49}$$

Учитывая независимость $\mathrm{d}\xi_i$, получаем

$$\boxed{F_i = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right)_\varphi}, \tag{19.50}$$

где индекс φ у частной производной в явном виде показывает, что она вычисляется при постоянных потенциалах. *Для использования этой формулы энергия W должна быть выражена в виде функции от потенциалов φ_j и параметров ξ_i.* Ясно, что формулы (19.46) и (19.50) эквивалентны и получаются одна из другой. Какой из них пользоваться, зависит от обстоятельств.

Пусть, например, требуется вычислить силу, с которой притягиваются друг к другу пластины плоского конденсатора. Энергия плоского конденсатора равна

$$W = Q^2/(2C) = (\Delta\varphi)^2\, C/2,$$

где $C = \varepsilon_0 S/x$; S и x – площадь обкладки конденсатора и расстояние между обкладками.

Вычисление силы по формулам (19.46) и (19.50) дает:

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)_Q = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x}; \tag{19.51}$$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(\Delta\varphi)^2\, C}{2}\right]_\varphi = \frac{(\Delta\varphi)^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}. \tag{19.52}$$

Принимая во внимание определение емкости $C = Q/\Delta\varphi$, заключаем, что $F'_x = F_x$.

Пример 19.1. *Исходя из результатов решения примера 16.3, найти момент силы, который сближает пластинки конденсатора, изображенного на рис. 73.*

Энергия конденсатора [см. (16.109)] равна

$$W = \frac{U_0^2 C}{2} = \frac{U_0^2 l\varepsilon \ln(b/a)}{2\alpha_0}. \tag{19.53}$$

Обобщенной силой для угла поворота является момент силы M относительно оси, совпадающей в данном случае с линией пересечения пластин конденсатора. Поэтому с учетом (19.50) получаем

$$M = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_0}\right)_\varphi = -\frac{U_0^2 l\varepsilon \ln(b/a)}{2\alpha_0^2}, \tag{19.54}$$

где знак минус свидетельствует о том, что момент сил стремится уменьшить угол α_0. Другими словами, между пластинами конденсатора действуют силы притяжения. Конечно, между пластинами конденсатора всегда действуют силы притяжения и результат (19.54) лишь подтверждает, что момент сил получился с неправильным знаком. Такая проверка правильности результата бывает полезной при использовании обобщенных координат и обобщенных сил, когда эти переменные не имеют достаточно наглядной интерпретации.

Получим этот результат другим способом. Поверхностная плотность силы, действующей на проводник, равна $f = \sigma^2/(2\varepsilon)$. Поэтому на слой длиной l между r и $r + \mathrm{d}r$ действует сила

$$\mathrm{d}F = -fl\,\mathrm{d}r = -\frac{\varepsilon U_0^2}{2\alpha_0^2 r^2} l\,\mathrm{d}r, \tag{19.55}$$

где для σ использовано значение (16.107б). Знак минус учитывает, что эта сила стремится уменьшить угол α_0. Результирующая сила, действующая на пластину, равна

$$F = \int_a^b \mathrm{d}F = -\frac{\varepsilon U_0^2 l}{2\alpha_0^2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\varepsilon U_0^2 l}{2\alpha_0^2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right). \tag{19.56}$$

Линия приложения сил находится от оси вращения на расстоянии r_0, которое определяется условием

$$r_0 F = \int_a^b r\,\mathrm{d}F = -\frac{\varepsilon U_0^2 l}{2\alpha_0^2}\ln\frac{b}{a}, \tag{19.57}$$

откуда

$$r_0 = \frac{ab}{b-a}\ln\frac{b}{a}. \tag{19.58}$$

Момент силы относительно оси вращения равен

$$M = r_0 F = -\frac{\varepsilon U_0^2 l}{2\alpha_0^2}\ln\frac{b}{a}, \tag{19.59}$$

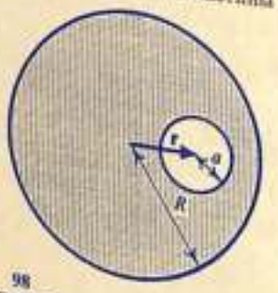
что совпадает с (19.54).

Задачи

2.1. Найти напряженность электрического поля в шаровой полости радиусом a внутри равномерно заряженного шара радиусом R. Объемная плотность заряда ρ (рис. 98).

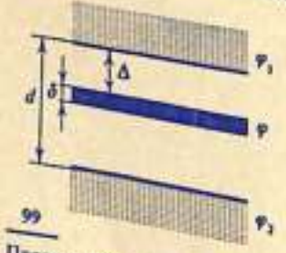
2.2. Найти напряженность поля в бесконечной круглой цилиндрической полости, ось которой параллельна оси бесконечно длинного равномерно заряженного круглого цилиндра. Объемная плотность заряда ρ (рис. 98).

2.3. Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно d. В пространство между обкладками конденсатора вносится металлическая пластина толщиной δ, поверхность которой параллельна обкладкам. Пластины конденсатора имеют потенциалы φ_1 и φ_2 (рис. 99). Найти потенциал металлической пластины.



98

Цилиндрическая полость в цилиндре или шаровая полость в шаре



99

Проводящая пластина в плоском конденсаторе

2.4. Определить силу, действующую на заряд q, расположенный на расстоянии d от центра незаряженной изолированной проводящей сферы радиусом r_0 ($d > r_0$).

2.5. Найти силу, действующую на заряд q, помещенный внутри металлической сферы на расстоянии r от ее центра. Радиус сферы равен a.

2.6. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$). Между сферами на расстоянии d от их общего центра ($r_1 < d < r_2$) помещен точечный заряд q. Определить заряды, индуцированные на сферах.

2.7. На расстоянии d от центра заземленной сферы помещен точечный заряд q. Определить отношение f заряда, индуцированного на части сферы, видимой из точки нахождения заряда q, к заряду невидимой части сферы. Радиус сферы равен a, $d > a$.

2.8. Два конденсатора емкостью C_1 и C_2 и с зарядами q_1 и q_2 (q_1 и q_2 – абсолютное значение зарядов пластин первого и второго конденсаторов) соединены параллельно. Вычислить изменение энергии конденсаторов и объяснить полученный результат.

2.9. Диэлектрическая проницаемость среды между пластинами плоского конденсатора площадью S равномерно изменяется от ε_1 до ε_2. Расстояние между пластинами равно d. Определить емкость конденсатора.

2.10. Цилиндрический конденсатор с радиусами пластин r_1 и r_2 опущен вертикально в диэлектрическую жидкость с диэлектрической проницаемостью ε. Нижний конец конденсатора находится в жидкости, верхний – в воздухе, диэлектрическая проницаемость которого ε_0. Плотность массы жидкости равна ρ. Определить высоту h, на которую поднимается жидкость между пластинами конденсатора, если разность потенциалов между ними U.

2.11. Проводящий шар, плотность которого ρ_1, плавает в жидкости, имеющей плотность ρ_2 ($\rho_2 > 2\rho_1$) и диэлектрическую проницаемость ε. Шар погружен в жидкость менее чем на половину. Какой заряд надо ему сообщить для того, чтобы он погрузился в жидкость до половины? Радиус шара равен a.

2.12. Обкладки плоского конденсатора имеют форму квадрата со стороной a. Расстояние и разность потенциалов между пластинами соответственно равны d и U. В пространство между обкладками частично вдвинута пластина толщиной Δ в форме квадрата со стороной a. Ее поверхности и стороны параллельны поверхностям и сторонам обкладок, а диэлектрическая проницаемость равна ε. Найти силу, с которой пластина втягивается в пространство между обкладками конденсатора.

2.13. На расстоянии d от оси бесконечного проводящего цилиндра радиусом r находится равномерно заряженная бесконечная нить, параллельная оси цилиндра. Линейная плотность заряда τ. Определить силу, действующую на длину l нити ($d > r$).

2.14. Методом изображений найти силу, приходящуюся на длину l каждого из двух бесконечных проводящих цилиндров, расстояние между параллельными осями которых равно d. Радиусы цилиндров r_1 и r_2. Один из цилиндров заряжен с линейной плотностью заряда τ.

2.15. Найти дипольный момент заряда, равномерно распределенного по поверхности сферы радиусом a. Одна из полусфер имеет заряд Q, а другая – Q.

2.16. Точечный диполь с моментом $\mathbf{p}$ находится на расстоянии d от центра заземленной проводящей сферы радиусом a. Найти индуцированный дипольный момент сферы.

2.17. К обкладкам плоского воздушного конденсатора, имеющим форму квадратов со стороной l, приложена постоянная разность потенциалов U_0. Определить силу, необходимую для того, чтобы сдвинуть одну из пластинок параллельно самой себе в направлении, перпендикулярном какой-либо стороне квадрата, при неизменном расстоянии d между пластинами.

2.18. Имеется проводящий шар радиусом r_1 и концентричный с ним сферический проводящий слой, внутренняя поверхность которого имеет радиус r_2 ($r_2 > r_1$), а внешняя радиус r_3 ($r_3 > r_2$). Пространство между r_1 и r_2 свободно. Заряды шара и слоя равны соответственно Q_1 и Q_2, причем $Q_1 \neq -Q_2$ (как это не бывает в конденсаторе). Найти энергию этой системы зарядов.

2.19. Найти напряженность электрического поля в центре прямого круглого цилиндра длиной l и радиусом a, поляризованность которого $\mathbf{P}$ параллельна оси и однородна.

2.20. Поляризованность $\mathbf{P}$ в задаче 2.19 направлена перпендикулярно оси цилиндра. Найти напряженность поля в центре цилиндра.

2.21. Бесконечный проводящий цилиндр кругового сечения радиусом a и проводящая плоскость, расположенная на расстоянии d от оси цилиндра, образуют кон-

денсатор. Найти емкость, приходящуюся на длину l цилиндра.

2.22. Воспользовавшись результатом решения задачи 2.21, найти силу, действующую со стороны заземленной бесконечной плоскости на участок длины l прямолинейной заряженной нити, параллельной плоскости. Линейная плотность заряда нити равна τ.

2.23. Молекула представлена модельно зарядом $-2|q|$ в начале координат и двумя зарядами $|q|$, расположенными в точках, характеризуемых радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, причем $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = l$. Угол между $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ обозначим θ. Найти эффективный заряд $|q|_{эф}$ для молекулы воды H_2O, у которой $l = 0{,}958 \cdot 10^{-10}$ м, $\theta = 105°$, $p = 6{,}14 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

2.24. Между двумя параллельными бесконечными проводящими заземленными плоскостями, расстояние между которыми d, помещен точечный заряд q на расстоянии x от одной из них. Найдя изображения заряда q, вычислить действующую на него силу.

Ответы

2.1. $E = \rho r/(3\varepsilon_0)$. 2.2. $E = \rho r/(2\varepsilon_0)$. 2.3. $\varphi = \varphi_1 - \frac{\Delta}{d-\delta}(\varphi_1 - \varphi_2)$. 2.4. $F = -\frac{q^2 r_0^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3} \times \left[\frac{2d^2 - r_0^2}{(d^2 - r_0^2)^2}\right]$. 2.5. $F = \frac{q^2 a r}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 - r^2)^2}$. 2.6. $q_1 = -\frac{r_1 (r_2 - d)}{d (r_2 - r_1)} q$, $q_2 = -\frac{r_2 (d - r_1)}{d (r_2 - r_1)} q$. 2.7. $f = \sqrt{(d+a)/(d-a)}$. 2.8. $\Delta W = (C_2 q_1 - C_1 q_2)^2/[2C_1 C_2 (C_1 + C_2)]$. 2.9. $C = \frac{S}{d} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}$. 2.10. $h = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) U^2}{(r_2^2 - r_1^2) \ln(r_2/r_1)} \frac{1}{\rho g}$. 2.11. $Q = 4\pi(\varepsilon + \varepsilon_0) \sqrt{\frac{a^3 g (\rho_2 - 2\rho_1)}{3(\varepsilon - \varepsilon_0)}}$. 2.12. $F = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\Delta}{(d-\Delta)\varepsilon + \Delta\varepsilon_0} \frac{a}{d} U^2$. 2.13. $f = -\tau^2 dl/[2\pi\varepsilon_0 (d^2 - r^2)]$. 2.14. $f = -\frac{\tau^2 dl}{2\pi\varepsilon_0} [d^2 - (r_1 + r_2)^2]^{-1/2} [d^2 - (r_1 - r_2)^2]^{-1/2}$. 2.15. $p = Qa$. 2.16. $p_{max} = pe^{1/2}$, $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln[(d + \sqrt{d^2 - a^2})/a]}$; при $a \ll d$ имеем $C \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(2d/a)}$. 2.17. $F = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 l}{d} U_0$. 2.18. $W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) Q_1^2 + \frac{2Q_1 Q_2 + Q_1^2}{r_3}\right]$. 2.19. $\mathbf{E} = -(1/\varepsilon_0)\mathbf{P}(1 - l/\sqrt{4a^2 + l^2})$. 2.20. $\mathbf{E} = -\frac{[1/(2\varepsilon_0)]\,l\mathbf{P}}{\sqrt{4a^2 + l^2}}$. 2.21. $C = \left(\frac{\partial W}{\partial d}\right)_\varphi = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial d} = \frac{U^2}{d} \frac{\pi\varepsilon_0 l}{(\ln 2d/a)^2} = \frac{U^2 C^2 l}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\tau^2 l}{4\pi\varepsilon_0 d}$. 2.23. $\mathbf{p} = |q|_{эф} l \cos(\theta/2)$, $|q|_{эф} = 5{,}26 \cdot 10^{-20}$ Кл $= 0{,}328|e|$. 2.24. $F = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2} \times \left\{\frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(nd + x)^2} - \frac{1}{(nd - x)^2}\right]\right\}$.

§ 20 Локальное поле

§ 21 Неполярные диэлектрики

§ 22 Полярные диэлектрики

§ 23 Сегнетоэлектрики

§ 24 Пьезоэлектрики

3

Диэлектрики

Основной физический фактор, определяющий характер взаимодействия диэлектрика с электрическим полем,— электрический дипольный момент атомов и молекул.

Основные механизмы поляризации — возникновение индуцированных дипольных моментов атомов и молекул или переориентация и перераспределение в пространстве имеющихся. Существует также и ионная решеточная поляризованность.

§ 20. Локальное поле

Обсуждаются причины, обусловливающие отличие локального поля от внешнего, и вычисляется напряженность локального поля для простейших условий.

Отличие локального поля от внешнего. В результате поляризации диэлектрика, помещенного во внешнем поле, сам диэлектрик становится источником электрического поля. Следовательно, *поле внутри диэлектрика, которое действует на его молекулы, отличается от внешнего.* Оно называется **локальным**. Отличие локального поля от внешнего особенно существенно для диэлектриков с большой плотностью – жидкостей и твердых тел.

Вычисление напряженности локального поля. Выделим в объеме диэлектрика физически малую сферу, в центре которой вычисляется напряженность локального поля (рис. 100). Возникающая в центре сферы в результате поляризации диэлектрика напряженность состоит из напряженности $\mathbf{E}_1$, порождаемой частью диэлектрика, расположенной вне объема, ограниченного сферой, и напряженности $\mathbf{E}_2$, создаваемой той частью диэлектрика, которая расположена в объеме, ограниченном сферой.

При вычислении $\mathbf{E}_1$ можно предполагать, что диэлектрик – сплошная среда, поскольку расстояние между центром сферы, в которой вычисляется напряженность локального поля, и источниками поля сравнительно велико. Так как сфера имеет физически малый объем, то среду вблизи ее поверхности с внешней стороны можно считать однородно поляризованной. В объеме, ограниченном сферой, необходимо учесть атомарную структуру диэлектрика, т. е. вычислять вклад в напряженность локального поля от дипольного момента каждого атома отдельно, а сферу считать границей между средой вне объема сферы и вакуумом в объеме, ограниченном сферой.

Напряженность в центре сферы создается связанными зарядами на ее поверхности, как на границе раздела между средами с различной диэлектрической проницаемостью. Поверхностная плотность связанных зарядов равна [см. (17.21)]

$$\sigma_{\text{св}} = -(P_{2n} - P_{1n}) = -P_{2n}, \tag{20.1}$$

где P_{2n} – нормальная компонента поляризованности с внешней стороны поверхности сферы; $P_{1n} = 0$ – с внутренней. Направив ось Z вдоль вектора постоянной поляризованности $\mathbf{P}$, получим

$$\sigma_{\text{св}} = -P_{2n} = P\cos\theta. \tag{20.2}$$

В телесном угле $d\Omega$ расположен поверхностный заряд

$$dQ = \sigma_{\text{св}} r^2\, d\Omega, \tag{20.3}$$

где r – радиус сферы. Этот заряд в направлении оси Z в центре сферы создает поле с напряженностью

$$dE_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\cos\theta. \tag{20.4}$$

Видно, что отличной от нуля является только компонента напряженности поля вдоль оси Z. Из (20.4) с учетом (20.3) получаем

$$E_z = E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P \int \cos^2\theta\, d\Omega = E_1 =$$

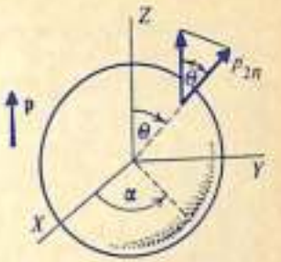
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{3\varepsilon_0} P \tag{20.5}$$

или в векторной форме

$$\boxed{\mathbf{E}_1 = \frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P}.} \tag{20.6}$$

Формула (20.6) справедлива лишь для бесконечного однородного диэлектрика. Если диэлектрик конечен, то напряженность поля в нем зависит, вообще говоря, от его размеров и формы. У однородного диэлектрика объемные поляризационные заряды равны нулю, поскольку $\rho_{\text{св}} = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\varkappa\varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Поэтому отличие напряженности поля конечного диэлектрика от напряженности $\mathbf{E}_1'$ бесконечного диэлектрика обусловливается напряженностью полей связанных зарядов, возникающих на внешней поверхности тела. Это поле называют иногда деполяризующим, поскольку оно уменьшает напряженность поля.

Напряженность $\mathbf{E}_2$ зависит от распределения дипольных моментов молекул внутри выделенной физически малой сферы и не может быть представлена какой-то универсальной формулой. Вычислим напряженность для случая, когда молекулы расположены в узлах кубической кристаллической решетки, а все дипольные моменты имеют одинаковое направление в пространстве. Это условие выполняется для индуцированных дипольных моментов. Напряженность $\mathbf{E}_2$ надо найти в точке расположения одной из молекул,



100

К вычислению локального поля

● **Молекулярная диэлектрическая восприимчивость не зависит существенно от плотности вещества и температуры. Диэлектрическая проницаемость неполярного диэлектрика от температуры может зависеть лишь неявно, посредством зависимости концентрации молекул от температуры. Локальное поле, действующее на молекулы диэлектрика, отличается от внешнего потому, что сам диэлектрик во внешнем поле становится источником дополнительного поля.**

○ Какие основные факторы обусловливают различие между диэлектрическими свойствами разреженных и плотных газов? В чем эти различия состоят? Какие физические факторы обусловливают независимость диэлектрической проницаемости неполярных диэлектриков от температуры в достаточно широких пределах?

т. е. в узле кристаллической решетки. Поместим начало координат в эту точку, а оси X, Y, Z направим по ребрам решетки. Воспользуемся формулой (16.85), которая в данном случае для x-проекции напряженности имеет вид

$$E_{2x} = \frac{p_x}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{-r_i^2 + 3x_i^2}{r_i^5} + \frac{p_y}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{3x_i y_i}{r_i^5} + \frac{p_z}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{3x_i z_i}{r_i^5}. \qquad (20.7)$$

Здесь суммирование проводится по всем молекулам физически малого объема внутри сферы. Аналогичные формулы можно написать также для y и z-компонент поля.

В формуле (20.7) можно сначала вычислить сумму по всем молекулам, находящимся в малом сферическом слое радиусом r, а затем вычислить сумму по сферическим слоям, соответствующим различным r. При первом суммировании вследствие кубической симметрии имеем:

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3}\sum_i r_i^2, \qquad \sum_i x_i y_i = \sum_i y_i z_i = \sum_i z_i x_i = 0. \qquad (20.8)$$

Следовательно, (20.7) с учетом (20.8) принимает вид

$$E_{2x} = 0. \qquad (20.9)$$

Аналогично доказывается, что $E_{2y} = E_{2z} = 0$. Поэтому окончательно получаем

$$E_2 = 0. \qquad (20.10)$$

Таким образом, напряженность локального поля, действующего на молекулу внутри диэлектрика, равна

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\varepsilon_0). \qquad (20.11)$$

Эту формулу надо рассматривать лишь как первое приближение, поскольку реальный диэлектрик отличается от модели, с помощью которой эта формула получена. В частности, электрические поля молекул могут существенно отличаться от полей диполей, решетка диэлектрика может иметь другую симметрию, дипольные моменты молекул могут иметь неодинаковые направления и т. д.

Локальное поле, действующее на молекулы диэлектрика, отличается от внешнего потому, что сам диэлектрик во внешнем поле становится источником дополнительного поля.

§ 21. Неполярные диэлектрики

Описываются основные свойства неполярных диэлектриков.

Молекулярная диэлектрическая восприимчивость. Из механизма образования индуцированного дипольного момента молекулы [см. § 17] следует, что его направление совпадает с направлением напряженности электрического поля. В первом приближении дипольный момент молекулы можно считать пропорциональным напряженности поля:

$$\mathbf{p} = \alpha\varepsilon_0\mathbf{E}^*, \qquad (21.1)$$

где α характеризует «поляризуемость» молекулы (или атома) и называется молекулярной (или атомной) диэлектрической восприимчивостью. Она определяется внутренними свойствами молекулы. Ввиду большой величины собственных внутренних электрических полей в молекуле молекулярная диэлектрическая восприимчивость мала и не зависит существенно от плотности вещества и температуры. Значение α можно оценить, исходя из следующей модели молекулярной поляризации. Молекула представляется в виде проводящей сферы, радиус которой примерно равен радиусу молекулы ($a = 10^{-10}$ м). В постоянном поле E^* эта сфера приобретает дипольный момент [см. (16.82)], равный

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3\mathbf{E}^*. \qquad (21.2)$$

Сравнивая (21.2) с (21.1), находим для молекулярной диэлектрической восприимчивости выражение

$$\alpha = 4\pi a^3. \qquad (21.3)$$

Если для радиусов молекул пользоваться значениями, полученными из кинетической теории, то формула (21.3) дает для α несколько завышенные, однако по порядку величины правильные значения. Поэтому для оценки порядка величины такая модель молекулярной поляризации вполне подходит.

Из (21.1) находим, что поляризованность равна

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\alpha\varepsilon_0\mathbf{E}^* = \alpha\varepsilon_0\mathbf{E}^*\frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V} 1 = \alpha\varepsilon_0 N\mathbf{E}^*. \qquad (21.4)$$

Здесь

$$\sum_{\Delta V} 1 = \Delta V N, \qquad (21.5)$$

где N – концентрация молекул.

Разреженные газы. В этом случае напряженность $\mathbf{E}^*$ локального поля весьма незначительно отличается от напряженности $\mathbf{E}$ внешнего поля. Поэтому [см. (21.4)]

$$\mathbf{P} = \alpha\varepsilon_0 N\mathbf{E}. \qquad (21.6)$$

Сравнивая (21.6) с (17.11) заключаем, что диэлектрическая восприимчивость равна

$$\varkappa = \alpha N. \qquad (21.7)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ с учетом (17.31) представляется в виде

$$\varepsilon_r = 1 + \alpha N. \qquad (21.8)$$

Значение ε_r отличается от единицы на величину αN, которая для газов весьма мала. Например, концентрация молекул воздуха при нормальных условиях равна $N = 2{,}6\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Считая в соответствии

с (21.3) для молекул $\alpha \approx 10^{-29}$ м^3, находим

$$\alpha N \approx 10^{-3}. \tag{21.9}$$

С увеличением размеров молекул α и, следовательно, и αN увеличиваются, оставаясь по порядку величины малыми.

Величина ε_r может зависеть от температуры лишь нелинейно, посредством зависимости N от температуры. Обозначим: N_A, ρ_m, m — соответственно постоянная Авогадро, плотность газа, масса молекулы и напишем очевидное равенство

$$N = N_A \rho_m / m. \tag{21.10}$$

С помощью (21.10) перепишем соотношение (21.8) в виде

$$(\varepsilon_r - 1) m / \rho_m = \alpha N_A. \tag{21.11}$$

Следовательно, $(\varepsilon_r - 1)/\rho_m$ *является постоянной, не зависящей от температуры и давления, величиной, если только давление достаточно мало.* При увеличении давления плотность растет и возникает необходимость учета отличия локального поля от внешнего.

Плотные газы. В этом случае в формуле (21.4) надо для $\mathbf{E}^*$ использовать выражение (20.11):

$$\mathbf{P} = \alpha \varepsilon_0 N [\mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\varepsilon_0)], \tag{21.12}$$

откуда

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha \varepsilon_0 N}{1 - \alpha N/3} \mathbf{E}. \tag{21.13}$$

Подставляя (21.13) в (17.29), находим

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\alpha \varepsilon_0 N}{1 - \alpha N/3} \mathbf{E}, \tag{21.14}$$

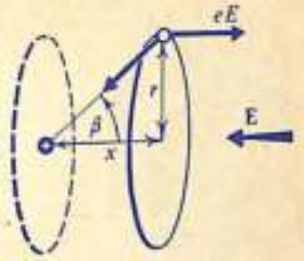
откуда

$$\frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} = \alpha N. \tag{21.15}$$

Эта формула называется **формулой Клаузиуса — Моссотти.** Ее с помощью (21.10) можно представить в виде

$$\frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} \frac{m}{\rho_m} = \alpha N_A. \tag{21.16}$$

Левая часть равенства (21.16) не зависит от температуры и давления в тех пределах, в которых молекулярная восприимчивость остается постоянной. Для газов такие давления могут быть большими (порядка 100 МПа). В жидкостях и твердых телах при больших плотностях α зависит от давления. Формула (21.16) проверена экспериментально в широком диапазоне давлений. Например, для углекислого газа CO_2, являющегося неполярным, справедливость соотношения Клаузиуса — Моссотти (21.16) была проверена с большой точностью до давлений примерно 100 МПа при 100 °С. Во всем интервале этих давлений относительное отклонение левой части (21.16) от постоянного значения не превышает нескольких сотых, причем до давлений примерно в 20 МПа наблюдается небольшой рост, а выше — небольшое уменьшение значения левой части (21.16). Относительная диэлектрическая проницаемость ε_r при этом изменяется довольно значительно, примерно в полтора раза в интервале давлений от 1 МПа до 100 МПа.



101

К вычислению атомной диэлектрической восприимчивости водорода

Пример 21.1. *Оценить атомную диэлектрическую восприимчивость α атома водорода. Напряжённость электрического поля направлена перпендикулярно плоскости движения электрона* (рис. 101).

Запишем условие равновесия движущегося электрона при наличии внешнего поля:

$$eE = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)} \cos\beta = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}. \tag{21.17}$$

При $x \ll r$ получаем $x/(x^2 + r^2)^{3/2} = x/r^3$ и поэтому [см. (21.17)]

$$\varepsilon x \approx 4\pi\varepsilon_0 r^3 E = p,$$

откуда

$$\alpha \approx 4\pi r^3 \approx 1{,}57 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3,$$

что дает правильный порядок атомной диэлектрической восприимчивости атома водорода.

§ 22. Полярные диэлектрики

Описываются основные свойства полярных диэлектриков.

Зависимость поляризованности от температуры. Постоянный дипольный момент у большинства молекул имеет порядок $10^{-29} - 10^{-30}$ Кл·м. Например, у CO он равен $0{,}36 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, у SO_2 — $5{,}3 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, у KCl — $3{,}5 \cdot 10^{-29}$ Кл·м. Дипольные моменты большинства молекул измерены и имеются в таблицах.

Дипольный момент $\mathbf{p}$, находящийся в электрическом поле $\mathbf{E}$, обладает потенциальной энергией

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \tag{22.1}$$

Эта величина достигает минимального значения, когда направление диполя совпа-

● **Поля насыщения, когда поляризованность полярного диэлектрика достигает максимально возможного значения, в типичных условиях составляют сотни миллионов вольт на метр.**

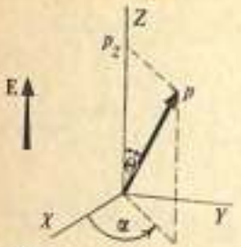
Вклад в поляризованность от индуцированных дипольных моментов примерно в сто раз меньше, чем от постоянных, и им можно пренебречь в большинстве случаев.

Механизм поляризации плотных полярных газов и жидкостей с учетом локального поля не может быть понят как переориентация дипольных моментов в этом поле.

○ Почему моменты диполя полярных молекул стремятся повернуться до совпадения с направлением напряженности электрического поля?

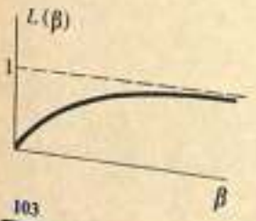
При каких условиях поляризованность полярных диэлектриков достигает насыщения?

Каким расстоянием между элементарными зарядами соответствуют постоянные дипольные моменты молекул?



102

Ориентировка диполя в сферической системе координат



103

Функция Ланжевена

дает с направлением напряженности электрического поля. Поскольку устойчивым является состояние системы с наименьшей энергией, *моменты диполей полярных молекул стремятся повернуться до совпадения с направлением напряженности электрического поля*. Этот поворот осуществляется парой сил, действующих на диполь (см. рис. 91). Однако тепловое движение расстраивает упорядочивающее действие электрического поля. В результате устанавливается некоторое равновесие.

Совместим ось Z с направлением напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля (рис. 102). Потенциальная энергия молекул (22.1) зависит от угла между направлениями их дипольного момента и напряженности:

$$W = -pE\cos\theta = -p_z E \tag{22.2}$$

и, следовательно, распределение Больцмана в данном случае характеризует распределение направлений дипольных моментов молекул по углам. Число молекул dn, дипольные моменты которых расположены в телесном угле $d\Omega$, равно

$$dn = Ae^{\frac{pE\cos\theta}{kT}}\,d\Omega = Ae^{\frac{pE\cos\theta}{kT}}\,d\alpha\sin\theta\,d\theta. \tag{22.3}$$

Тогда среднее значение компоненты момента диполей по оси Z равно

$$\langle p_z\rangle = \frac{\int p_z\,dn}{\int dn} = \frac{Ap\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\pi}e^{\beta\cos\theta}\cos\theta\sin\theta\,d\theta}{A\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\pi}e^{\beta\cos\theta}\sin\theta\,d\theta} \tag{22.4}$$

где $p_z = p\cos\theta$, и введено обозначение

$$\beta = pE/(kT). \tag{22.5}$$

Прежде всего необходимо вычислить внутренний интеграл в знаменателе (22.4):

$$I = \int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\sin\theta\,d\theta, \tag{22.6}$$

поскольку внутренний интеграл в числителе выражается формулой

$$\int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \partial I/\partial\beta. \tag{22.7}$$

○ Позволяет ли современная экспериментальная техника разделить вклад в поляризованность от постоянных и индуцированных дипольных моментов? Объясните, как это можно сделать в принципе.

Какие физические факторы приводят к невозможности рассмотрения поляризации плотных полярных диэлектриков, как результат переориентации дипольных моментов в локальном поле?

Интеграл (22.6) вычисляется легко:

$$I = \int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\sin\theta\,d\theta = -\frac{1}{\beta}e^{\beta\cos\theta}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\beta}\operatorname{sh}\beta, \tag{22.8}$$

откуда

$$\frac{\partial I}{\partial\beta} = \frac{2}{\beta}\left(\operatorname{ch}\beta - \frac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta\right). \tag{22.9}$$

Таким образом, формула (22.4) с учетом (22.8) и (22.9) принимает вид

$$\langle p_z\rangle = pL(\beta), \tag{22.10}$$

где $L(\beta) = \operatorname{cth}\beta - 1/\beta$ – **функция Ланжевена** (рис. 103).

При не очень больших напряженностях поля, когда $pE \ll kT$, т. е. $\beta \ll 1$, разлагая гиперболический котангенс в ряд

$$\operatorname{cth}\beta = 1/\beta + \beta/3 - \beta^3/45 + \ldots \tag{22.11}$$

и ограничиваясь в выражении для $L(\beta)$ линейным по β членом

$$L(\beta) = \beta/3, \tag{22.12}$$

получаем

$$\langle p_z\rangle = p^2E/(3kT). \tag{22.13}$$

Поле насыщения. С увеличением напряженности поля дипольные моменты все более интенсивно ориентируются в направлении напряженности и при $pE \gg kT$, т. е. при $\beta \gg 1$, можно считать, что все дипольные моменты параллельны между собой и имеют направление напряженности поля. Следовательно,

$$\langle p_z\rangle = p. \tag{22.14}$$

Соотношение (22.14) получается из (22.10), если учесть, что при $\beta \gg 1$ функция $L(\beta)$ близка к единице:

$$L(\beta\to\infty)\to 1. \tag{22.15}$$

При выполнении условия (22.14) достигается максимально возможная поляризованность и дальнейшее увеличение напряженности поля не приводит к ее увеличению. Напряженность поля, при которой достигается максимально возможная поляризованность, называется **напряженностью поля насыщения.** Считая порядок величины дипольных моментов равным 10^{-29} Кл·м, заключаем, что при $T = 300$ К напряженность поля насыщения равна

$$E_{нас} \approx kT/p \simeq 4{,}2\cdot 10^8 \text{ В/м}. \tag{22.16}$$

Отсюда видно, что условие $pE \ll kT$, при котором справедлива формула (22.13), выполняется вплоть до напряженностей полей, равных миллионам вольт на метр. Поэтому в большинстве практически важных случаев можно пользоваться формулой (22.13).

Разреженные газы. В этом случае напряженность локального поля можно считать равной напряженности внешнего и представить поляризованность [см. (22.13)] в виде

$$\mathbf{P} = Np^2\mathbf{E}/(3kT). \tag{22.17}$$

Далее, в полной аналогии с ходом вычислений по формулам (21.6) – (21.8), получаем, что относительная диэлектрическая восприимчивость равна

$$\varepsilon_r = 1 + Np^2/(3kT\varepsilon_0). \tag{22.18}$$

Наряду с поляризованностью из-за переориентировки постоянных дипольных моментов полярные диэлектрики обладают также поляризованностью, обусловленной индуцированными дипольными моментами, которая описывается формулой (21.8). Поэтому с учетом обоих механизмов поляризации выражение для ε_r полярных газообразных диэлектриков при не слишком большом давлении имеет вид

$$\varepsilon_r = 1 + N\left[\alpha + p^2/(3kT\varepsilon_0)\right]. \tag{22.19}$$

Как видно из (21.3), $\alpha = 10^{-29}$ м^3. С другой стороны, при комнатной температуре $kT \approx 4\cdot 10^{-21}$ Дж и поэтому при $p \approx 10^{-29}$ Кл·м $p^2/(3kT\varepsilon_0) \sim 10^{-27}$ м^3, т. е. *вклад в поляризованность от индуцированных дипольных моментов примерно в сто раз меньше, чем от постоянных, и им можно пренебречь. Однако в принципе современная точность измерений такова, что позволяет разделить вклад в поляризованность от постоянных и индуцированных дипольных моментов.* Для этого измеряют ε_r в широком интервале температур и пользуются формулой (22.19). Зависимость ε_r от $1/T$ на графике представлена прямой линией. Ее пересечение с осью ординат при $1/T = 0$ дает $\varepsilon_r = 1 + \alpha N$. Отсюда по формуле (22.19) вычисляется $\alpha = (\varepsilon_r - 1)/N$. После этого по результатам измерения при других значениях $1/T$ с помощью формулы (22.19) можно вычислить постоянный дипольный момент, поскольку все остальные величины в этом уравнении известны.

Квантовая интерпретация поляризованности полярных газообразных диэлектриков. В квантовой теории, как и в классической, возникновение поляризованности полярных диэлектриков объясняется преимущественной ориентировкой постоянных магнитных моментов молекул в направлении напряженности электрического поля. Для диэлектрической проницаемости получается формула (22.19). *Однако в трактовке переориентации постоянных дипольных моментов имеется существенное различие с классической теорией.*

В квантовой теории необходимо принять во внимание вращение молекул. Момент импульса вращающихся молекул ориентируется в пространстве во всевозможных направлениях, а его проекции на любое выделенное направление составляют дискретный набор значений, причем среднее значение проекции равно нулю. Электрический дипольный момент жестко связан с молекулой и изменяет свою ориентацию в пространстве вследствие вращения молекулы.

Дипольный момент молекулы можно разложить на две составляющие: вдоль оси вращения и перпендикулярно ей. Вторая составляющая вследствие вращения молекулы изменяет свою ориентацию в пространстве в плоскости, перпендикулярной оси вращения молекулы. Среднее значение этой составляющей в системе координат, в которой молекула вращается, равно нулю. Среднее значение составляющей дипольного момента по оси вращения молекулы также равно нулю из-за того, что момент инерции молекулы проквантован и среднее значение его проекции на любое направление равно нулю независимо от того, имеется ли электрическое поле или нет. Следовательно, *молекулы с отличным от нуля моментом импульса не дают вклада в поляризованность. Поляризованность образуется только вращающимися молекулами с нулевым моментом импульсов в результате переориентации их постоянных электрических дипольных моментов.* Проекции дипольного момента на направление электрического поля образуют дискретный ряд значений со средней величиной, отличной от нуля, благодаря чему возникает поляризованность.

Плотные газы. В этом случае необходимо учесть отличие локального поля от внешнего и принять во внимание различную ориентацию дипольных моментов, которая зависит от взаимодействия между диполями. Все это чрезвычайно сильно усложняет вычисление.

Считая, что напряженность локального поля много меньше напряженности поля насыщения, разумно для поляризованности вместо (22.17) написать:

$$\mathbf{P} = \frac{Np^2}{3kT}\mathbf{E}^*. \tag{22.20}$$

Однако напряженность $\mathbf{E}^*$ локального поля в ней нельзя выразить через напряженность внешнего поля по формуле (20.11). В этом можно убедиться из следующих соображений.

Представим себе, что в центре оферической полости радиусом a, образованной в плотном диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r, помещен диполь $\mathbf{p}$. Поле этого диполя вызывает поляризацию среды вне сферы. Благодаря этому в сферической полости возникает дополнительная напряженность

$$\mathbf{E}_{\text{доп}} = \frac{2(\varepsilon_r - 1)}{2\varepsilon_r + 1}\frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, \tag{22.21}$$

т. е. в полости возникает постоянная напряженность, по направлению совпадающая с направлением дипольного момента. *Эта дополнительная напряженность вызывает появление дополнительного индуцированного дипольного момента, совпадающего по направлению с направлением постоянного дипольного момента и, следовательно, не может переориентировать постоянный дипольный момент. Поэтому поляризацию нельзя интерпретировать как переориентацию дипольных моментов в локальном поле.*

Формула (22.20) с учетом (20.11) принимает вид

$$\mathbf{P} = \frac{Np^2}{3kT}\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{(3\varepsilon_0)}\right], \tag{22.22}$$

откуда

$$\mathbf{P} = \frac{Np^2/(3kT)}{1 - Np^2/(9kT\varepsilon_0)}\mathbf{E}. \tag{22.23}$$

При $T_0 = Np^2/(9k\varepsilon_0)$ знаменатель в правой части обращается в нуль. При $T > T_0$ поляризованность $\mathbf{P}$ имеет конечное значение, а при $T = T_0$ она обращается в бесконечность. Это означает, что при $T \leq T_0$ соответствующее вещество должно обладать спонтанной поляризацией. Например, по формуле (22.23) можно ожидать, что пары воды под большим давлением должны быть спонтанно поляризованы, что заведомо неверно. Аналогично ошибочные результаты получаются и для других веществ. *Поэтому для описания плотных газов с полярными молекулами и полярных жидкостей необходимы другие модели.*

Полярные жидкости. Онзагер предложил для полярных жидкостей модель, которая лучше согласуется с экспериментом, хотя и дает весьма приблизительные числовые результаты. В модели принимается, что каждый диполь находится в центре **реальной** сферической полости, объем которой равен среднему объему, приходящемуся на одну молекулу. Учитывается ориентировка диполей дальнодействующими силами и возникновение дополнительного дипольного момента под влиянием напряженности (22.21). В результате получено соотношение

$$\frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_{\text{инд}})(2\varepsilon_r + \varepsilon_{\text{инд}})}{\varepsilon_r(\varepsilon_{\text{инд}} + 2)^2} = \frac{Np^2}{9kT\varepsilon_0}, \tag{22.24}$$

где ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость; $\varepsilon_{\text{инд}}$ – относительная диэлектрическая проницаемость, обусловленная индуцированными дипольными моментами. Для воды $\varepsilon_{\text{инд}} = 4{,}9$, $p = 2{,}16 \cdot 10^{-28}$ Кл·м и формула (22.24) при $T = 273$ К дает $\varepsilon_r = 105$. Экспериментальное значение $\varepsilon_r = 88$. Лучшего согласия с экспериментом трудно ожидать.

Лучшее количественное согласие с экспериментом получается для сильно разбавленных растворов полярных диэлектриков в неполярном растворителе. В этом случае полярные молекулы растворенного вещества расположены достаточно далеко друг от друга и взаимодействие между ними можно не принимать во внимание. С помощью модели Онзагера можно учесть взаимодействие полярных молекул с неполярным растворителем. В результате получается теория, достаточно хорошо согласующаяся с экспериментом.

Ионные кристаллы. Их можно себе представить состоящими из двух подрешеток с положительными и отрицательными ионами. Под влиянием внешнего электрического поля эти решетки смещаются друг относительно друга, в результате чего возникает значительная поляризованность, что дает сравнительно большие значения относительной диэлектрической проницаемости ε_r. Например, у поваренной соли NaCl величина $\varepsilon_r = 6$, у KCl – $\varepsilon_r = 5$, и т. д.

§ 23. Сегнетоэлектрики

Обсуждаются физические свойства сегнетоэлектриков и природа сегнетоэлектричества.

Определение. Сегнетоэлектриками называются полярные диэлектрики, которые в определенном интервале температур спонтанно поляризованы, т. е. обладают поляризованностью при отсутствии электрического поля. На границах интервала температур сегнетоэлектрик в результате фазового перехода превращается в полярный диэлектрик.

Относительная диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков чрезвычайно велика ($\varepsilon_r \sim 10^4$) и *зависит от напряженности поля, не являясь, однако, однозначной функцией напряженности.* Значение ε_r зависит от того, как изменялась напряженность до достижения данного значения.

Сегнетоэлектрики иногда называют ферроэлектриками ввиду формальной аналогии, которая существует между их свойствами и свойствами ферромагнетиков. Примерами сегнетоэлектриков являются сегнетова соль $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ (от которой и произошло название этого класса диэлектриков), титанат бария $BaTiO_3$ и др.

Петля гистерезиса. Так как ε зависит от E, то $D = \varepsilon E$ нелинейно зависит от E. Кроме того, поскольку ε зависит от предыстории изменения E, D неоднозначно зависит от E. Поместим между обкладками плоского конденсатора сегнетоэлектрик и будем измерять ε, в зависимости от напряженности E поля, изменяющейся по гармоническому закону.

Схема установки показана на рис. 104. К крайним клеммам двух последовательно соединенных плоских конденсаторов подсоединен генератор, создающий между ними гармонически изменяющуюся разность потенциалов. Она распределяется между конденсатором C с сегнетоэлектриком и конденсатором C_1, между обкладками которого нет вещества. Полагая, что площади всех обкладок конденсаторов равны, и обозначая d – расстояние между обкладками, имеем

$$E = \sigma/\varepsilon, \quad E_1 = \sigma/\varepsilon_0, \tag{23.1}$$

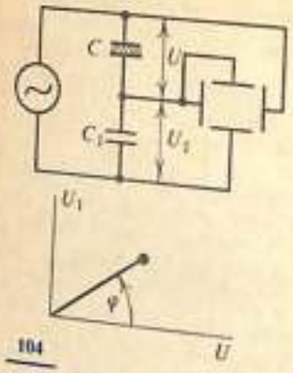
откуда

$$U = Ed = \sigma d/\varepsilon, \quad U_1 = E_1 d/\varepsilon_0 \tag{23.2}$$

и, следовательно,

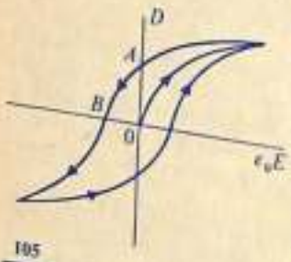
$$\operatorname{tg}\varphi = U_1/U = \varepsilon/\varepsilon_0 = \varepsilon E/(\varepsilon_0 E). \tag{23.3}$$

Поэтому если напряжение U подать на горизонтальную развертку осциллографа, а U_1 на вертикальную, то на экране осциллографа при изменении E будет прочерчена кривая, абсцисса точек которой равна в некотором масштабе $\varepsilon_0 E$, а ордината – $\varepsilon E = D$ в том же масштабе. Эта кривая называется **петлей гистерезиса** (рис. 105). Стрелки



104

Схема установки для снятия петли гистерезиса: $\operatorname{tg}\varphi = \varepsilon/\varepsilon_0 = D/\varepsilon_0 E$.



105

Петля гистерезиса

на кривой показывают направление движения точки по кривой при изменении напряженности поля. Отрезок OA характеризует остаточную поляризацию, т. е. ту поляризацию, которую образец имеет тогда, когда напряженность внешнего поля обратилась в нуль. Отрезок OB характеризует напряженность, имеющую противоположное поляризованности направление, при которой образец полностью деполяризуется, т. е. его остаточная поляризация исчезает. Чем больше $|OA|$, тем более значительна остаточная поляризация сегнетоэлектрика. Чем больше $|OB|$, тем лучше остаточная поляризация удерживается сегнетоэлектриком.

Точка Кюри. *При повышении температуры выше некоторого значения $T_К$, характерного для каждого сегнетоэлектрика, его сегнетоэлектрические свойства исчезают и он превращается в обычный полярный диэлектрик.* Точка фазового перехода из состояния сегнетоэлектрика в состояние полярного диэлектрика называется **точкой Кюри**, а соответствующая ей температура $T_К$ – **температурой Кюри.** В некоторых случаях имеются две точки Кюри – сегнетоэлектрические свойства исчезают также и при понижении температуры. Например, у сегнетовой соли имеются две точки Кюри, характеризуемые температурами $t_{К1} = 24\,^\circ C$, $t_{К2} = -18\,^\circ C$. Сегнетоэлектриков с двумя точками Кюри сравнительно немного. Большинство имеет лишь верхнюю точку, называемую просто точкой Кюри.

В точке Кюри осуществляется переход диэлектрика из сегнетоэлектрического состояния в состояние полярного диэлектрика. При этом диэлектрическая проницаемость изменяется непрерывно от значения, соответствующего сегнетоэлектрическому состоянию, до значения, соответствующего состоянию полярного диэлектрика. Закон изменения диэлектрической восприимчивости $\varkappa$ вблизи температуры Кюри имеет вид

$$\varkappa = \frac{A}{T - T_0}, \qquad (23.4)$$

● **Температура Кюри-Вейсса не совпадает с температурой Кюри, однако близка к ней. Во многих случаях нет необходимости делать различия между ними.**

Большинство сегнетоэлектриков имеют лишь одну (верхнюю) точку Кюри. Но есть некоторое число сегнетоэлектриков с двумя точками Кюри.

где A – некоторая константа; T_0 – **температура Кюри – Вейсса**, близкая к температуре Кюри $T_К$ (в большинстве случаев в формуле (23.4) вместо T_0 используют $T_К$, что не вносит сколько-нибудь существенных погрешностей в $\varkappa$ для температур, отличных от $T_К$). Закон, выражаемый формулой (23.4), называется **законом Кюри – Вейсса.**

Если имеется также и нижняя точка Кюри, то вблизи нее закон Кюри – Вейсса имеет вид

$$\varkappa = \frac{A'}{T_0' - T}. \qquad (23.5)$$

Как уже говорилось, у кристаллов диэлектрические свойства различны по различным направлениям и поэтому их диэлектрическая восприимчивость характеризуется не скалярной диэлектрической восприимчивостью $\varkappa$, а тензором диэлектрической восприимчивости $\varkappa_{ij}$. Однако зависимость компонент тензора от температуры имеет тот же характер, что и в (23.4) и (23.5).

Молекулярный механизм спонтанной поляризованности. Теория сегнетоэлектричества лежит вне рамок курса общей физики. Поэтому ограничимся лишь качественным описанием процессов на молекулярном уровне. Очень сильное взаимодействие между дипольными моментами молекул может привести к тому, что возникает конечная поляризованность **P** при сколь угодно малой напряженности **E** поля или, что то же самое, возможна поляризованность **P** при отсутствии внешнего поля. Другими словами, *при сильном взаимодействии между дипольными моментами молекул возникает спонтанная поляризация, при которой отдельные дипольные моменты ориентируются в одном и том же направлении.* Принимая во внимание, что постоянные дипольные моменты во много раз больше, чем индуцированные [см. (22.19)], можно заключить, что спонтанная поляризация характеризуется очень большой поляризованностью. А это приводит к тому, что соответствующие восприимчивость $\varkappa$ и диэлектрическая проницаемость ε значительно больше значений, наблюдаемых у полярных и неполярных диэлектриков. *Состояние спонтанной поляризации и есть сегнетоэлектрическое состояние.* Переход из сегнетоэлектрического состояния в состояние полярного диэлектрика является переходом из состояния спонтанной поляризации в состояние, когда спонтанная поляризация исчезает и диэлектрик становится обычным диэлектриком с молекулами, обладающими постоянными дипольными моментами, т. е. переходом в состояние полярного диэлектрика. *Физические факторы, приводящие к этому переходу, сводятся к механизмам, ослабляющим взаимодействие дипольных моментов молекул.*

Диэлектрические домены. Спонтанная поляризация является источником очень больших электрических полей. Поэтому, если макроскопический объем сегнетоэлектрика поляризован спонтанно в некотором направлении, вокруг этого объема возникает очень большое электрическое поле, с которым связана большая энергия поля. Такое состояние

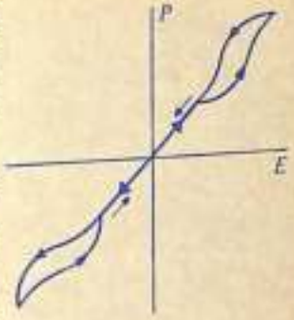
энергетически невыгодно. *Система стремится перейти в такое состояние, чтобы, с одной стороны, существовала спонтанная поляризация, а с другой стороны, энергия поля была бы минимальной. Это может осуществиться в результате разделения объема сегнетоэлектрика на малые области, в каждой из которых имеется спонтанная поляризация в некотором определенном направлении, различном для различных областей.* Средняя поляризованность объема, включающего достаточное число малых областей с различными направлениями спонтанной поляризации, равна нулю и поэтому напряженность внешнего электрического поля, порождаемого этим объемом, близка к нулю. *Малые области со спонтанной поляризацией называются диэлектрическими доменами или просто доменами.* Таким образом, неполяризованный сегнетоэлектрик является совокупностью доменов с беспорядочно ориентированными спонтанными поляризованностями.

Очевидно, что для уменьшения электрической энергии выгодно уменьшать объемы доменов. *Однако процессу уменьшения размера доменов препятствует другой фактор, связанный с наличием поверхностной энергии на границе между соседними доменами.* Ясно, что суммарная поверхность границ между доменами увеличивается при уменьшении объема доменов и, следовательно, увеличивается также и поверхностная энергия. Поэтому объемы доменов могут уменьшаться лишь до определенных пределов, когда это приводит к уменьшению полной энергии системы. *При дальнейшем уменьшении объема доменов за счет поверхностной энергии происходит не уменьшение, а увеличение полной энергии. Тем самым фиксируются размеры доменов.* Эти размеры имеют порядок тысяч межмолекулярных расстояний. Существование доменов доказывается в экспериментах прямым наблюдением с помощью поляризованного света, а также в опытах по травлению поверхности сегнетоэлектрика, поскольку различные части домена при травлении разрушаются с различной скоростью.

Процесс изменения поляризованности сегнетоэлектрика во внешнем электрическом поле состоит в переориентации дипольных моментов отдельных доменов, в изменении объемов и движении границ между доменами. Эти процессы усилению изучаются, поскольку сегнетоэлектрики имеют многочисленные практические применения. Известно большое число различных чистых сегнетоэлектриков и очень большое количество сегнетоэлектрических твердых растворов.

Антисегнетоэлектрики. При определенных условиях в кристалле возникают одновременно две спонтанные поляризации, направленные противоположно друг другу. Одна из спонтанных поляризаций возникает в результате ориентировки дипольных моментов молекул одной из подрешеток кристалла в одном направлении, а другая — в результате ориентировки дипольных моментов молекул другой из подрешеток кристалла в противоположном направлении. При этом полная поляризованность любого физически малого объема такого кристалла равна нулю. Таким образом, доменов с различными направлениями спонтанной поляризации нет, хотя спонтанная поляризация в любом физически малом объеме присутствует. Такие вещества называются **антисегнетоэлектриками.** Они по своей структуре аналогичны антиферромагнетикам и поэтому иногда называются **антиферроэлектриками.**

В достаточно малых полях антисегнетоэлектрики ведут себя как обычные диэлектрики с линейной зависимостью поляризованности от напряженности внешнего поля. В достаточно сильных полях возможен переход в сегнетоэлектрическое состояние со всеми вытекающими отсюда последствиями, в частности наблюдается петля гистерезиса. Переход осуществляется при большой по модулю напряженности электрического поля. Поэтому при большой амплитуде колебаний напряжения в схеме на рис. 104 с антисегнетоэлектриком вместо сегнетоэлектрика наблюдаются две петли гистерезиса (рис. 106).



106

Двойные петли гистерезиса у антисегнетоэлектриков, переходящих в больших полях в сегнетоэлектрическое состояние

§ 24. Пьезоэлектрики

Описываются механизмы пьезоэффекта и обратного пьезоэффекта. Обсуждается соотношение между обратным пьезоэффектом и электрострикцией. Даются основные сведения о пироэлектриках.

Свойства пьезоэлектриков. Имеются многочисленные кристаллы, на поверхности которых *при деформациях возникают электрические заряды.* Такие кристаллы называются **пьезоэлектриками.** Поскольку деформации сами по себе не в состоянии изменить общий заряд кристалла, *образующиеся при деформации поверхностные заряды имеют различные знаки на различных частях поверхности.* К числу пьезоэлектриков относят кварц, турмалин, сегнетову соль и многие другие.

Как показывает опыт, заряды на поверхности пьезоэлектрика возникают в результате однородных деформаций сжатия или растяжения во вполне определенных направлениях, называемых **полярными осями пьезоэлектрика.** На противоположных гранях, перпендикулярных полярной оси, при одно-

При возникновении условий для спонтанной поляризации диэлектрик стремится перейти в такое состояние, чтобы, с одной стороны, существовала спонтанная поляризация, а с другой стороны, энергия поля была бы минимальной. Благодаря этому происходит образование доменов.

Исчезновение спонтанной поляризации и переход из сегнетоэлектрического состояния в состояние полярного диэлектрика называются факторами, ослабляющими взаимодействие дипольных моментов молекул.

Чем отличается температура Кюри от температуры Кюри—Вейсса?

Каков механизм возникновения доменов? Почему домены не могут быть очень большими?

Что такое антисегнетоэлектрики?

родных деформациях возникают заряды противоположного знака, причем знаки зарядов изменяются при изменении знака деформации, т. е. если, например, при сжатии вдоль полярной оси на данной грани образовался положительный заряд, то при растяжении эта грань заряжается отрицательно. Пьезоэлектрический эффект наблюдается не только при чистом сжатии или растяжении вдоль полярной оси, но при любой деформации кристалла, сопровождающейся сжатием или растяжением вдоль полярной оси.

Поскольку на разных гранях, перпендикулярных полярной оси, возникают заряды различного знака, *различные направления вдоль полярной оси неэквивалентны*. А это означает, что если кристалл повернуть на 180° вокруг оси, перпендикулярной полярной, то полярная ось совместится сама с собой, но кристалл сам с собой не совместится. Поэтому кристаллы с центром симметрии не могут быть пьезоэлектриками. Для существования пьезоэлектрического эффекта при однородной деформации необходимо отсутствие у кристалла центра симметрии. Полярные оси определяются свойствами симметрии кристаллической решетки. Вообще говоря, кристалл имеет несколько полярных осей.

Пьезоэлектрические свойства зависят от температуры. Если при некоторой температуре кристаллическая решетка перестраивается так, что образуется центр симметрии, то при этой температуре исчезают пьезоэлектрические свойства кристалла. Например, у кварца до температуры 200 °С пьезоэлектрические свойства изменяются незначительно, а затем до температуры 576 °С начинают медленно ослабевать. При 576 °С происходит перестройка кристаллической решетки кварца, в результате которой пьезоэлектрические свойства у него исчезают. При понижении температуры изменение свойств кварца происходит в обратном направлении.

Продольный и поперечный пьезоэффекты. Возникновение зарядов на гранях, перпендикулярных полярной оси, при однородной деформации кристалла вдоль этой оси называется **продольным пьезоэффектом**. Однако можно вызвать появление зарядов на тех же гранях, сжимая или растягивая кристалл перпендикулярно полярной оси, если только при этом происходит растяжение или сжатие кристалла вдоль полярной оси. Это явление йазывается **поперечным пьезоэффектом.** *Его существование обусловливается связью между продольными и поперечными деформациями твердого тела.*

Механизм пьезоэффекта. Пьезоэлектрическими свойствами могут обладать только ионные кристаллы. *Пьезоэлектрический эффект возникает в том случае, когда под действием внешних сил кристаллическая подрешетка из положительных ионов деформируется иначе, чем кристаллическая подрешетка из отрицательных ионов.* В результате происходит относительное смещение положительных и отрицательных ионов, приводящее к возникновению поляризации кристалла и поверхностных зарядов. Поляризованность в первом приближении прямо пропорциональна деформации, которая, в свою очередь, прямо пропорциональна

силе. Следовательно, поляризованность прямо пропорциональна приложенной силе. Между разноименно заряженными гранями деформированного диэлектрика возникает разность потенциалов, которую можно измерить, а по ее значению сделать заключение о величине деформаций и приложенных силах. Использование этой связи находит многочисленные практические применения. Например, имеются пьезоэлектрические датчики для измерения быстропеременных давлений. Известны пьезоэлектрические микрофоны, пьезоэлектрические датчики в автоматике и телемеханике и т. д.

Обратный пьезоэффект. Он состоит в том, что во внешнем электрическом поле пьезоэлектрик будет деформироваться. *Необходимость его существования следует из наличия прямого эффекта и закона сохранения энергии.* При деформировании пьезоэлектрика работа затрачивается на образование энергии упругой деформации и энергии возникающего при этом в результате пьезоэффекта электрического поля. Следовательно, при деформировании пьезоэлектрика необходимо преодолевать дополнительную силу, кроме силы упругости кристалла, которая препятствует деформации и является фактором, обусловливающим обратный пьезоэффект. Чтобы компенсировать эту дополнительную силу, надо приложить внешнее электрическое поле, противоположное тому, которое возникает в пьезоэффекте. Следовательно, для получения некоторой деформации пьезоэлектрика под влиянием внешнего электрического поля необходимо, чтобы оно было равно, но противоположно направлено тому полю, которое при данной деформации возникает в результате прямого пьезоэлектрического эффекта. Например, если при некоторой деформации пьезоэлектрика вдоль полярной оси между его гранями, перпендикулярными оси, возникает некоторая разность потенциалов, то для осуществления такой же деформации без приложений механических сил необходимо к этим граням приложить такую же разность потенциалов, но с противоположным знаком.

Механизм обратного пьезоэлектрического эффекта аналогичен механизму прямого: под действием внешнего электрического поля кристаллические подрешетки положительных и отрицательных ионов деформируются различным образом, что и приводит к деформации кристалла.

Обратный пьезоэлектрический эффект также имеет многочисленные практические применения, в частности широкое применение получили кварцевые излучатели ультразвука.

Пироэлектрики. У некоторых пьезоэлектриков подрешетка положительных ионов оказывается смещенной относительно подрешетки отрицательных ионов в состоянии термодинамического равновесия, в результате чего *такие кристаллы оказываются поляризованными при отсутствии внешнего электрического поля.* Таким образом, такие кристаллы обладают спонтанной электрической поляризацией.

Обычно наличие такой спонтанной поляризации маскируется свободными поверхностными зарядами, оседающими на поверхность кристалла из окружающей среды под действием электрического поля, свя-

занного со спонтанной поляризацией. Этот процесс происходит до тех пор, пока электрическое поле не будет полностью нейтрализовано, т. е. до тех пор, пока наличие спонтанной поляризации не будет полностью замаскировано. Однако при изменении температуры образца, например при нагревании, происходит смещение ионных подрешеток друг относительно друга, в результате чего изменяется спонтанная поляризованность и на поверхности кристалла появляются электрические заряды. Возникновение этих зарядов называется прямым пироэлектрическим эффектом, а соответствующие кристаллы называются пироэлектриками.

Всякий пироэлектрик является пьезоэлектриком, но не всякий пьезоэлектрик является пироэлектриком. Это связано с тем, что у пироэлектрика имеется выделенное направление, вдоль которого существует спонтанная поляризация, а у пьезоэлектрика такого выделенного направления, вообще говоря, нет.

Имеется также и *обратный пироэлектрический эффект: изменение электрического поля в адиабатно изолированном пироэлектрике сопровождается изменением его температуры.* Необходимость его существования может быть доказана на основе термодинамического анализа процесса и продемонстрирована экспериментами.

Задачи

3.1. Вычислить относительную диэлектрическую проницаемость гелия при $p = 101{,}3$ кПа, $t = 15\,^\circ$C, если его атомная диэлектрическая восприимчивость $\alpha = 2{,}48 \cdot 10^{-30}$ м^3. Экспериментальное значение $\varepsilon_r = 1{,}000074$.

3.2. Рассчитать диэлектрическую проницаемость аммиака при $t = 27\,^\circ$C; $\alpha = 1{,}37 \cdot 10^{-29}$ м^3; $p = 0{,}46 \times 10^{-29}$ Кл·м. Указание: воспользоваться формулой (22.19).

3.3. Постоянный дипольный момент молекулы воды $6{,}2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Определить поляризованность насыщенного водяного пара при $t = 100\,^\circ$C и атмосферном давлении.

3.4. Воздух состоит в основном из молекул N_2 и O_2. По формуле Клаузиуса – Моссотти найти коэффициенты их атомной восприимчивости, принимаемые для упрощения одинаковыми. Найти радиус молекул.

3.5. Принимая для молекулы азота значения α и r_0, полученные в задаче (3.4), вычислить изменение расстояния между зарядами, образующими диполь, в поле напряженностью 1 МВ/м.

Ответы

3.1. $\varepsilon_r = 1{,}000067$. 3.2. $\varepsilon_r = 1{,}0076$. 3.3. $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Кл/м^2. 3.4. $\alpha = 1{,}1 \cdot 10^{-29}$ м^3; $r_0 = 0{,}96 \cdot 10^{-10}$ м. 3.5. $0{,}87 \cdot 10^{-16}$ м.

§ 25 Электрическое поле при наличии постоянных токов
§ 26 Сторонние э. д. с.
§ 27 Дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца. Работа, совершаемая при прохождении тока, и развиваемая мощность
§ 28 Линейные цепи. Правила Кирхгофа
§ 29 Токи в сплошной среде
§ 30 Заземление линий передач

4

Постоянный электрический ток

Постоянный ток невозможен при наличии лишь сил электростатического происхождения. Для его осуществления необходимы силы неэлектростатического происхождения, называемые сторонними электродвижущими силами. Основной закон — закон Ома в локальной формулировке.

§ 25. Электрическое поле при наличии постоянных токов

Обсуждаются особенности электрического поля при наличии постоянных токов и роль поверхностных и объемных зарядов. Анализируется роль различных факторов, обеспечивающих существование постоянного тока.

Поле внутри проводника. Закон Ома (см. § 16) в дифференциальной форме имеет вид

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \tag{25.1}$$

При наличии тока $\mathbf{j} \neq 0$ и, следовательно, $\mathbf{E} \neq 0$. Таким образом, внутри проводника с током имеется электрическое поле. Напомним, что в электростатике поле внутри проводников отсутствует.

Плотность постоянного тока по сечению проводника распределена, вообще говоря, неравномерно. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим участок искривленного проводника с круговым поперечным сечением [речь идет об однородном проводнике ($\gamma = \text{const}$)]. Изогнутый участок проводника следует представить себе вырезанным из недеформированного куска материала, поскольку в изогнутой проволоке имеется деформация и условие однородности для нее, строго говоря, не выполняется, а вся картина распределения плотности тока усложняется.

Вблизи поверхности проводника плотность тока может быть направлена только по касательной к поверхности. Это означает [см. (25.1)], что напряженность $\mathbf{E}$ поля вблизи поверхности проводника касательна к поверхности. Следовательно, эквипотенциальные поверхности перпендикулярны его поверхности. Если участок проводника изогнут, то, очевидно, две близкие эквипотенциальные поверхности не могут находиться на неизменном расстоянии друг от друга во всех точках внутри проводника. Например, в кольцевом проводнике круглого сечения расстояние между эквипотенциальными поверхностями на внутренней части кольца меньше, чем на внешней. Поскольку расстояние между соседними эквипотенциальными поверхностями изменяется, изменяется и напряженность электрического поля в соответствующих точках эквипотенциальной поверхности. Отсюда [см. (25.1)] заключаем, что в однородном проводнике плотность постоянного тока, вообще говоря, изменяется по сечению проводника. В круговом цилиндрическом прямолинейном проводнике бесконечной длины эквипотенциальные поверхности внутри проводника являются плоскостями, перпендикулярными оси проводника. Поэтому по всему сечению такого однородного проводника как напряженность электрического поля, так и плотность тока постоянны.

В дальнейшем в основном рассматриваются лишь проводники с очень малой площадью поперечного сечения, называемые *линейными*. Для них с большой точностью можно пренебречь изменением плотности электрического тока по сечению проводника, считая, что в каждой точке этого сечения плотность тока постоянна по модулю и направлена вдоль элемента длины $d\mathbf{l}$ проводника. Сила тока, текущего по проводнику, в этом случае равна $I = j\Delta S$, где ΔS – площадь поперечного сечения проводника.

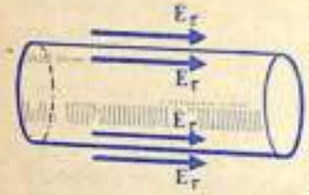
Таким образом, в общем случае вопрос о напряженности электрического поля и плотности постоянного тока внутри толстых проводников является сложным. Распределение плотности тока по сечению зависит от ряда факторов и, в частности, от формы проводника. О напряженности поля вблизи поверхности проводника можно высказать более определенные суждения. Вблизи поверхности как напряженность поля, так и плотность тока направлены касательно поверхности. Нормальные к поверхности составляющие этих величин внутри проводника отсутствуют. Из граничного условия (17.30) заключаем, что *вблизи поверхности вне проводника имеется электрическое поле, тангенциальная составляющая напряженности* $\mathbf{E}_\tau$ *которого равна тангенциальной составляющей напряженности* $\mathbf{E}_\tau$ *поля внутри проводника* (рис. 107). Однако о нормальной составляющей напряженности электрического поля вне проводника отсюда никаких выводов сделать нельзя.

Вопрос об источниках поля. Чем же порождается электрическое поле внутри проводника, что является источником этого поля? Так как существование постоянного тока в цепи обеспечивается соответствующим источником постоянного тока, например гальваническим элементом, то ясно, что он имеет какое-то отношение к порождению электрического поля. Однако непосредственно он не может породить это поле. Такое утверждение очевидно в случае очень длинного проводника для участков цепи, удаленных от батареи на очень большое расстояние, например на сотни километров. Напряженность электрического поля, которую могут создать заряды полюсов батареи, на этом расстоянии ничтожно мала. Следовательно, батарея не может быть непосредственным источником электрического поля внутри проводника.

Единственным источником постоянного электрического поля может быть только электрический заряд. Поэтому обсуждаемая проблема сводится к вопросу о том, какими зарядами порождается поле внутри проводника и где эти заряды находятся?

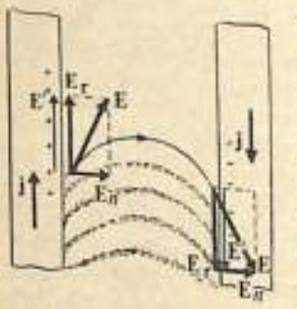
Поле вне проводника. Для ответа на этот вопрос необходимо изучить электрическое поле вне проводника. Поместим проводник с током в плоскую ванночку с тонким слоем диэлектрического порошка (рис. 108). Отдельные крупинки порошка при этом располагаются цепочками вдоль силовых линий электрического поля (см. § 19). На рисунке изображены два участка проводника с током и силовая линия между ними.

Видно, что силовые линии электрического поля не касательны к поверхности проводника. Это означает, что вне проводника вблизи его поверхности наряду с тангенциальной составляющей напряженности $\mathbf{E}_\tau$ электрического поля имеется также нормальная составляющая $\mathbf{E}_n$. Однако внутри проводника $\mathbf{E}_n = 0$. Поэтому из (17.26) заключаем, что *на поверхности проводника должны существовать заряды, поверхностная*



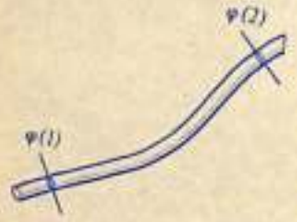
107

Поле внутри проводника и тангенциальная составляющая напряженности поля вблизи поверхности вне проводника



108

Демонстрация наличия нормальной составляющей напряженности поля вблизи поверхности проводника



109

К вычислению разности потенциалов между двумя точками проводника с током

плотность которых

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n. \tag{25.2}$$

В формуле (25.2) предполагается, что проводник находится в вакууме. Если его погрузить в диэлектрическую среду, то вместо ε_0 в формулу (25.2) войдет диэлектрическая проницаемость ε среды.

Поверхностные заряды. Таким образом, на поверхности проводника, по которому течет постоянный электрический ток, имеются электрические заряды. *Они и являются источниками электрического поля, которое существует в проводнике и обеспечивает наличие постоянного тока.* Поверхностная плотность заряда на различных участках проводника может иметь различные знаки. Например, левый и правый участки проводника на рис. 108 имеют соответственно положительную и отрицательную поверхностную плотность заряда.

Объемные заряды. В однородных проводниках имеются только поверхностные заряды. *В неоднородных проводниках, когда проводимость изменяется от точки к точке, возникают также заряды в объеме проводника.* Это непосредственно следует из закона сохранения заряда (5.24). В рассматриваемом стационарном случае $(\partial\rho/\partial t) = 0$ и уравнение (5.24) принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{25.3}$$

Объемный заряд в веществе в принципе может быть как свободным, так и связанным. Нас интересует суммарная объемная плотность $\rho + \rho_{св}$ заряда, наличие которой приводит к изменению напряженности электрического поля вдоль проводника. Поэтому [см. (17.27)] суммарная объемная плотность заряда равна

$$\rho + \rho_{св} = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \operatorname{div}(\mathbf{j}/\gamma), \tag{25.4}$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\gamma$. Учитывая (25.3) и выражение

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}/\gamma) = (1/\gamma)\operatorname{div}\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}(1/\gamma), \tag{25.5}$$

из (25.4) находим

$$\rho + \rho_{св} = \varepsilon_0 \mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}(1/\gamma). \tag{25.6а}$$

Направляя ось X вдоль прямолинейного участка проводника и считая, что его свойства изменяются лишь в этом направлении, перепишем формулу (25.6а) в виде

$$\rho + \rho_{св} = \varepsilon_0 j \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial x}. \tag{25.6б}$$

Если в направлении тока проводимость уменьшается, то объемная плотность зарядов положительна. Причина этого заключается в следующем. При постоянной площади сечения проводника плотность тока вдоль проводника должна быть постоянной. Если проводимость в направлении тока уменьшается, то для поддержания постоянства тока необходимо увеличивать напряженность электрического поля. Увеличение напряженности и обеспечивается объемными положительными зарядами. Аналогично объясняется и возникновение отрицательных объемных зарядов при увеличении проводимости в направлении тока.

Механизм осуществления постоянного тока. Источник тока называется источником сторонних электродвижущих сил (сторонних э. д. с.; см. § 26). По результатам своего действия он представляет собой процесс или устройство, отделяющее положительные заряды от отрицательных. После разделения заряды перемещаются на электроды и по закону Кулона действуют на заряды проводника вблизи электродов, которые в свою очередь действуют на другие заряды, и т. д. В результате этих коллективных взаимодействий в цепи на поверхности проводников возникает такое распределение зарядов, которое обеспечивает существование внутри проводника соответствующего электрического поля. Таким образом, *роль зарядов на полюсах источника сторонних э. д. с. состоит не в том, чтобы создавать во всех проводниках непосредственно соответствующее электрическое поле, а в том, чтобы обеспечить такое распределение поверхностных зарядов на проводниках, которое создает нужное электрическое поле внутри них.* А это и обеспечивает существование постоянного тока. Поскольку взаимодействие между зарядами осуществляется посредством электромагнитных сил, процесс образования постоянного тока в цепи после ее замыкания характеризуется скоростью распространения электромагнитных волн, зависящей от распределения емкостей, индуктивностей и других характеристик цепи. В свободном пространстве скорость распространения электромагнитных взаимодействий равна скорости света.

Изменение потенциала вдоль проводника с током. Поскольку в проводнике при наличии постоянного тока $\mathbf{E} \neq 0$, потенциал изменяется вдоль проводника, т. е. в отличие от электростатики потенциал не является постоянным во всех точках проводника. *Однако поле внутри проводника создается неподвижными, постоянными по времени поверхностными зарядами и поэтому так же, как в электростатике, является потенциальным.* Следовательно, разность потенциалов между двумя точками проводника (рис. 109) по формуле (14.28) равна

$$\varphi(2) - \varphi(1) = -\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}, \qquad (25.7)$$

где интеграл вычисляется по любому пути, соединяющему точки *1* и *2*. Для удобства вычислений целесообразно в качестве пути выбрать одну из линий тока, соединяющих некоторую точку в сечении *1* проводника, с соответствующей точкой в сечении *2*. Вдоль линии тока $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{l}$ коллинеарны и поэтому $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = E\,dl$, причем положительный знак обусловливается тем, что ток течет в направлении от бóльшего потенциала к меньшему. Кроме того, если площадь сечения проводника постоянна, то вдоль проводника $E = \text{const}$. Следовательно [см. (25.7)],

$$\varphi(1) - \varphi(2) = El, \qquad (25.8)$$

где l – длина проводника между сечениями *1* и *2*. Разность потенциалов между сечениями называется напряжением и обозначается $U_{12} = \varphi(1) - \varphi(2)$. Из дифференциальной формулировки закона Ома ($\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$) находим

$$E = j/\gamma = jS/(\gamma S) = I/(\gamma S), \qquad (25.9)$$

где I – сила тока. С учетом (25.9) соотношение (25.8) принимает вид

$$U_{12} = Il/(\gamma S) = IR_{12}, \qquad (25.10)$$

где $R_{12} = l/(\gamma S)$ – омическое сопротивление участка проводника. Формула (25.10) является законом Ома для участка проводника.

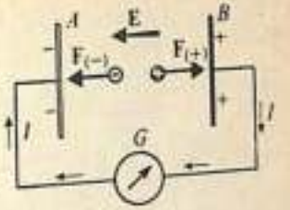
§ 26. Сторонние э. д. с.

Обсуждается роль сторонних э. д. с. в цепях тока и описываются конкретные источники сторонних э. д. с.

Сущность сторонних э. д. с. Сторонняя электродвижущая сила не может иметь электростатического происхождения по той простой причине, что электростатическое поле является потенциальным. Следовательно, работа поля по замкнутому контуру, по которому течет ток, равна нулю, т. е. при этом условии ток не мог бы существовать, поскольку он должен совершать работу для преодоления омического сопротивления проводников. Существование постоянного тока доказывает, что *сторонние электродвижущие силы имеют неэлектростатическое происхождение.*

Сторонняя электродвижущая сила может быть, в частности, механической или электрической силой, но не силой электростатического происхождения. Например, такой э. д. с. является сила, действующая на заряд в электрическом поле, возникающем по закону электромагнитной индукции Фарадея (см. гл. 8).

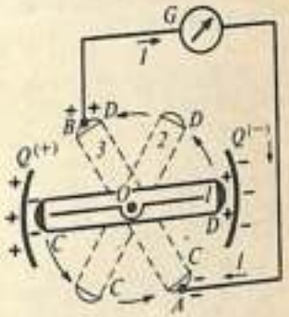
Механическая сторонняя э. д. с. Схема простейшего источника тока, в котором сторонняя э. д. с. имеет механическое происхождение, изображена на рис. 110. Между электродами *A* и *B* имеется нейтральная среда с равным числом положительных и отрицательных зарядов. Сторонняя сила неэлектростатического происхождения перемещает положительные заряды к электроду *B*, а отрицательные – к электроду *A*. В результате этого электрод *A* заряжается отрицательно, а электрод *B* – положительно. Во внешней цепи от *B* к *A* течет электрический ток, производящий соответствующую работу. Необходимая для этого энергия сообщается системе сторонними силами, которые затрачивают работу для разделения зарядов между электродами *A* и *B* и доставки этих зарядов на электроды против сил электрического поля с напряженностью $\mathbf{E}$, существующего между электродами. Ток между электродами *A* и *B* внутри источника э. д. с. замыкает ток во внешней цепи. *Если направление тока характеризовать относительно электродов, то во внешней цепи ток течет от положительного электрода к отрицательному, а внутри источника тока – от отрицательного электрода к положительному.*



110

Схема действия сторонних э.д.с. механического происхождения

Практической реализацией механической сторонней э. д. с. является электростатическая машина, схема которой показана на рис. 111. Заряды Q^+ и Q^- создают электростатическое поле в пространстве между ними. Изолированные друг от друга проводящие пластины *C* и *D* движутся по окружности вокруг оси *O* под влиянием сторонних механических сил. В положении *1* пластины оказываются соединенными между собой неподвижным проводником (сплошная линия со стрелками на концах). В результате электростатической индукции пластины *C* и *D* в этом положении заряжаются соответственно отрицательно и положительно. При дальнейшем вращении их контакт с проводником прерывается и в положении *2* пластины изолированы друг от друга, но несут на себе разноименные заряды. В положении

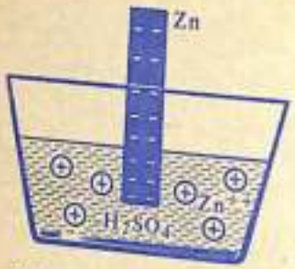


111

Схема электростатической машины

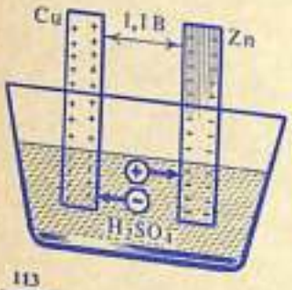
- **Сторонней э. д. с. называется сила неэлектростатического происхождения, производящая разделение зарядов.**

Работа, совершаемая в цепи при прохождении электрического тока, равна работе сторонних э. д. с. Плотность постоянного тока по сечению проводника распределена, вообще говоря, неравномерно. На поверхности проводника с током имеются поверхностные заряды, являющиеся источниками электрического поля, которое существует в проводнике и обеспечивает наличие постоянного тока.



112

Возникновение разности потенциалов между твердым телом и жидкостью



113

Элемент Вольта

● **Поверхностные заряды на различных участках проводника могут иметь различные знаки.**
Роль зарядов на полюсах источника сторонних э. д. с. состоит не в том, чтобы создавать во всех проводниках непосредственно соответствующее электрическое поле, а в том, чтобы обеспечить такое распределение поверхностных зарядов на проводниках, которое создает нужное электрическое поле внутри них.
Объемные заряды возникают лишь в неоднородных проводниках.

3 они вступают в контакт с электродами *A* и *B*, на которые переходит заряд с *C* и *D*. Между электродами по цепи *BGA* течет электрический ток. Если имеется одна пара вращающихся проводников *CD*, то ток по цепи протекает импульсами, по два импульса за оборот. Если же взять достаточно большое число пар пластин *C*, *D*, чтобы они вступали в контакт с электродами *A*, *B* последовательно с ничтожно малыми перерывами, то по внешней цепи течет практически постоянный ток. Такая машина реализует сторонюю э. д. с. механического происхождения, возникающую за счет механических сил, обеспечивающих движение пластин *C*, *D* по окружности.

Цепь взаимопревращений энергии здесь выглядит следующим образом. Сторонние механические силы, перемещая пластины *C*, *D*, производят работу против сил электрического поля, существующего между зарядами Q^+, Q^-, и переносят заряды на пластинах *C*, *D* к электродам *A*, *B*. В результате этого изменяется энергия электрического поля, т. е. происходит превращение энергии из механической формы в энергию электрического поля. Затем эта энергия в результате протекания тока по цепи *BGA* превращается в джоулеву теплоту и другие формы энергии, обусловленные работой тока во внешней цепи.

Гальванические элементы. Очень распространенными источниками постоянного тока являются гальванические элементы и аккумуляторы. Электрический ток был открыт в 1791 г. Л. Гальвани (1737–1798). Однако Гальвани не сумел дать правильное толкование своим опытам. Это сделал в 1792 г. А. Вольта (1745–1827). Элементы постоянного тока, о которых идет здесь речь, получили название по имени Гальвани.

Разность потенциалов (см. § 2) возникает не только при контакте твердых тел, но и твердых тел с жидкостями. При этом могут происходить химические реакции. Например, если цинковую пластину Zn опустить в раствор серной кислоты H_2SO_4, то цинк

растворяется (рис. 112). Однако в раствор уходят не нейтральные атомы цинка, а положительные ионы Zn^{++}, в результате чего раствор заряжается положительно, а цинковая пластина – отрицательно. При этом между раствором и пластиной возникает разность потенциалов. При некотором потенциале металла относительно раствора, называемом электрохимическим, переход ионов цинка в раствор прекращается. Он зависит от свойств металла, жидкости и от концентрации ионов металла в растворе. При контакте металла с водой металл заряжается более отрицательно, чем при контакте металла с раствором соли, содержащим ионы металла. При большой концентрации ионов в растворе может произойти обратный процесс, при котором положительные ионы начнут осаждаться на металле и он зарядится положительно. Таким образом, *при различных комбинациях металлов, жидкостей и концентраций ионов в растворах могут возникать различные электрохимические потенциалы.*

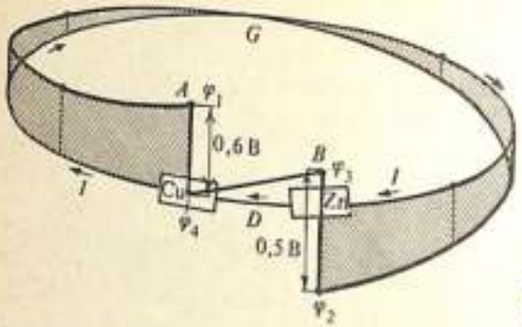
Поскольку электрохимический потенциал зависит от концентрации ионов металла, условились брать раствор, содержащий в 1 л раствора моль ионов металла, деленный на валентность иона. Электрохимический потенциал металла относительно такого раствора называется абсолютным нормальным электрохимическим потенциалом. Например, для растворов в серной кислоте этот потенциал для Zn равен −0,5 В, а для Cu равен +0,6 В.

Если два различных металла погружены в раствор, то между ними возникает разность потенциалов, равная разности их электрохимических потенциалов. *Совокупность двух металлов и раствора называется гальваническим элементом, а разность потенциалов между металлами – электродвижущей силой элемента.*

Элемент Вольта. Он состоит из медной и цинковой пластинок, погруженных в раствор серной кислоты (рис. 113). Принимая во внимание электрохимические потенциалы цинка и меди, заключаем, что э. д. с. элемента Вольта равна $[0{,}6 - (-0{,}5)]$ В = 1,1 В.

Область действия сторонних э. д. с. Не следует думать, что сторонние э. д. с. возникают в пространстве между медной и цинковой пластинками. *В данном случае имеются две сторонние э. д. с. сосредоточенные в поверхностных слоях соприкосновения цинковой и медной пластинок с раствором. Эти слои имеют молекулярную толщину. Во всем остальном объеме раствора никаких сторонних э. д. с. нет.* При соединении пластин элемента проводником по нему течет ток от медной пластины, являющейся положительным электродом элемента, к цинковой пластине, являющейся отрицательным электродом. В растворе между электродами ток течет от цинковой пластины к медной. Таким образом, как это и должно быть, линии постоянного тока замкнуты.

Рассмотрим изменение потенциала в цепи с током. В направлении тока потенциал падает на омическом сопротивлении проводника. На рис. 114 изображено изменение потенциала по замкнутому контуру с элементом Вольта в качестве сторонней э. д. с. Точки *A* и *B* соответствуют поверхностным слоям контактов медной и цинковой пласти-



114
Изменение потенциала в цепи с гальваническим элементом

нок с растворами, в которых действуют сторонние электродвижущие силы. Их разность и составляет стороннюю э. д. с. элемента. Она равна полному падению потенциала на омическом сопротивлении внешней цепи на участке AGB и на омическом сопротивлении электролита на участке BDA. Омическое сопротивление электролита называется внутренним сопротивлением элемента. Обозначим: $\mathscr{E}_{стор}$, R и r — соответственно сторонняя э. д. с. элемента, сопротивление внешней цепи и внутреннее сопротивление элемента. Запишем закон Ома для всей цепи в виде

$$\mathscr{E}_{стор} = I(R + r). \tag{26.1}$$

Сторонняя э. д. с. элемента определяется свойствами элемента и не зависит от силы протекающего по цепи тока. Из формулы (26.1) видно, что падение напряжения на внешней цепи ($U = IR$) не равно электродвижущей силе элемента и всегда меньше ее. Это есть напряжение между клеммами работающего элемента, когда по цепи течет ток. С увеличением силы тока напряжение во внешней цепи уменьшается, причем тем значительнее, чем больше внутреннее сопротивление элемента. При использовании элемента всегда желательно, чтобы напряжение во внешней цепи как можно меньше зависело от силы тока, т. е. от нагрузки. Поэтому важной характеристикой элемента является внутреннее сопротивление. Чем оно меньше, тем при прочих равных условиях лучше качество источника сторонних э. д. с.

Закон сохранения энергии. Проанализируем закон сохранения энергии в цепи с током, изображенной на рис. 114. Обозначим: A_1 — работа электрического поля при движении заряда q по замкнутой цепи; A_2 — работа сторонних э. д. с. Электрическое поле производит работу на участках, на которых потенциал падает от φ_1 до φ_2 (внешняя цепь) и от φ_3 до φ_4 (за счет омического сопротивления раствора току внутри элемента). Она равна

$$A_1 = (\varphi_1 - \varphi_2)q + (\varphi_3 - \varphi_4)q. \tag{26.2}$$

Работа сторонних э. д. с. в слоях молекулярной толщины приводит к увеличению потенциалов от φ_4 до φ_1 (на медной пластине) и от φ_2 до φ_3 (на цинковой пластине). Поэтому работа сторонних э. д. с. дается выражением

$$A_2 = (\varphi_1 - \varphi_4)q + (\varphi_3 - \varphi_2)q = (\varphi_1 - \varphi_2)q + (\varphi_3 - \varphi_4)q, \tag{26.3}$$

где второе равенство получилось в результате перегруппировки членов. Из сравнения (26.2) и (26.3) видно, что

$$A_1 = A_2, \tag{26.4}$$

т. е. *работа, совершаемая в цепи при прохождении тока, равна работе сторонних э. д. с.*

Выведем еще раз закон Ома (26.1) для всей цепи, пользуясь законом Ома (25.10) для участка цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR, \quad \varphi_3 - \varphi_4 = Ir, \tag{26.5}$$

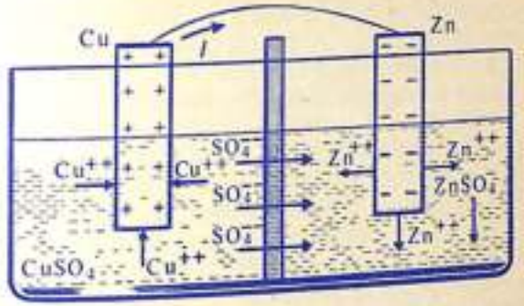
откуда

$$IR + Ir = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_3 - \varphi_4) = (\varphi_1 - \varphi_4) + (\varphi_3 - \varphi_4) = \mathscr{E}_{стор}. \tag{26.6}$$

Поляризация элемента. При прохождении тока в цепи элемента Вольта ионы Zn^{++} переходят в раствор, где соединяются с отрицательными ионами SO_4^{--}, на которые наряду с ионами H_2^{++} диссоциирует серная кислота. В растворе происходит реакция $Zn^{++} + SO_4^{--} = ZnSO_4$, продукты которой выпадают в виде осадка. Положительные ионы водорода устремляются к медной пластине и там нейтрализуются электронами тока проводимости в пластине. В результате на поверхности медной пластины образуется пленка водорода, которая, с одной стороны, увеличивает внутреннее сопротивление элемента, а с другой, создает дополнительный электрохимический потенциал, направленный против потенциала, существовавшего там до образования пленки. В результате всех этих процессов э. д. с. элемента уменьшается. Такие процессы называются поляризацией элемента.

Способы деполяризации. Чтобы избежать падения э. д. с., используют различные способы деполяризации.

1. Использование двух жидкостей, подобранных так, что на электродах не происходит выделения новых веществ. Для каждого электрода



115
Элемент Даниэля

подбирается подходящая жидкость. Жидкости разделяют перегородкой, которая, с одной стороны, предохраняет их от смешивания, а с другой стороны, не препятствует обмену ионами. Например, в элементе Даниэля в качестве жидкостей берутся медный купорос $CuSO_4$ и раствор $ZnSO_4$ (рис. 115), причем в медный купорос опускается медная пластина, а в раствор $ZnSO_4$ — цинковая. Цинк переходит в раствор серной кислоты в виде иона Zn^{++}. Электроны с медной пластины переходят в раствор медного купороса и нейтрализуют ион Cu^{++}, в результате чего медь осаждается из раствора на медную пластинку. Оставшиеся в растворе ионы SO_4^{--} проникают через перегородку в другую часть элемента, соединяются там с Zn^{++}, а образовавшийся в результате этого избыток $ZnSO_4$ выпадает на дно в виде осадка. Таким образом, при работе элемента никакой поляризации не возникает, а лишь происходит обеднение раствора медного купороса $CuSO_4$. Его требуется пополнять.

2. Использование сильных окислителей, которые связывают водород и кислород с образованием воды.

Аккумуляторы. Это гальванический элемент, в котором вещества, расходуемые при работе в качестве источника тока, накапливаются при пропускании через аккумулятор тока от постоянного источника. Такая процедура называется зарядкой аккумулятора.

Наиболее распространенным является свинцовый аккумулятор, состоящий из двух свинцовых пластин, опущенных в раствор серной кислоты. При этом на электродах образуется сернокислый свинец $PbSO_4$, которым насыщается весь раствор. Пропускание через аккумулятор тока при зарядке сопровождается окислением свинца электрода, соединенного с положительным полюсом заряжающего устройства, до перекиси PbO_2 и восстановлением другого электрода до чистого свинца. Таким образом, заряженный аккумулятор имеет одну пластину с перекисью PbO_2, а другую из чистого свинца и электролит, состоящий из раствора H_2SO_4, насыщенного сернокислым свинцом $PbSO_4$. При работе аккумулятора его пластина с перекисью PbO_2 является положительным полюсом и постепенно восстанавливается с образованием $PbSO_4$. Отрицательная пластина, состоящая из чистого свинца, при работе аккумулятора постепенно покрывается сернокислым свинцом. В результате этого аккумулятор разряжается. Э. д. с. свинцового аккумулятора при максимальной зарядке равна примерно 2,7 В. Однако уже при небольшой разрядке она падает до 2,2 В и на этом уровне сохраняется длительное время, лишь медленно уменьшаясь при работе аккумулятора. Минимально допустимая э. д. с., при которой зарядка полностью восстанавливает свойства аккумулятора, считается равной 1,85 В. При разрядке до меньших э. д. с. аккумулятор портится.

Важной характеристикой аккумулятора является его емкость, определяемая как полный заряд, который может отдать аккумулятор при разрядке, и выражаемая в ампер-часах.

§ 27. Дифференциальная форма закона Джоуля — Ленца. Работа, совершаемая при прохождении тока, и развиваемая мощность

Вводятся формулы для работы, совершаемой при прохождении тока, и развиваемой мощности. Дается дифференциальная формулировка закона Джоуля — Ленца. Описывается классическая электронная картина электропроводности и обсуждаются ее недостатки. Излагаются общие черты квантовой трактовки электропроводности.

Работа, совершаемая при прохождении тока. Мощность. Если между точками с разностью потенциалов U переносится заряд dQ, то совершается работа

$$dA = dQU. \tag{27.1}$$

Пусть по проводнику протекает ток I. Рассмотрим участок проводника, между концами которого имеется разность потенциалов U. В течение времени dt на участке перемещается заряд $dQ = I\,dt$ и, следовательно, совершаемая работа равна

$$dA = IU\,dt. \tag{27.2}$$

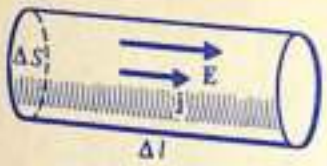
Следовательно, мощность, развиваемая током на этом участке, определяется формулой

$$\boxed{P = dA/dt = IU.} \tag{27.3}$$

Форма выделяемой при этом энергии зависит от природы физических факторов, обусловливающих падение потенциала. Падение потенциала на омическом сопротивлении проводов сопровождается выделением теплоты, падение напряжения на клеммах двигателя постоянного тока обусловлено производством механической работы и т. д. Формула (27.3) дает полную мощность, развиваемую током на участке с падением потенциала U. Если все падение потенциала происходит на омическом сопротивлении проводника, то по закону Ома $U = IR$, где R — сопротивление участка. В этом случае вся энергия выделяется в виде теплоты с мощностью

$$\boxed{P = IU = I^2R.} \tag{27.4}$$

Формула (27.4) выражает **закон Джоуля — Ленца.** Он был открыт в 1841 г. Дж. Джоулем (1818—1889) и в последующем подробно исследован Ленцем.



116

К выводу закона Джоуля – Ленца в дифференциальной форме

Дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца. Применив закон (27.4) к бесконечно малому цилиндру (рис. 116), ось которого совпадает с направлением тока, получим

$$\Delta P = (j\Delta S)^2 \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta l}{\Delta S}, \qquad (27.5)$$

где $I = j\Delta S$, j – плотность тока. Сопротивление бесконечно малого цилиндра равно $\Delta R = \Delta l/(\gamma\Delta S)$. Принимая во внимание, что $\Delta S\Delta l = \Delta V$ – объем цилиндра, из (27.5) находим

$$P_V = \Delta P/(\Delta l\Delta S) = j^2/\gamma, \qquad (27.6)$$

где P_V – объемная плотность тепловой мощности, выделяемой в проводнике, т. е. теплоты, образующейся в 1 м³ проводника в 1 с. Формула (27.6) является дифференциальной формой закона Джоуля – Ленца, поскольку все величины относятся к одной и той же точке.

Пользуясь законом Ома в дифференциальной форме, преобразуем (27.6):

$$\boxed{P_V = j^2/\gamma = \gamma E^2 = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}.} \qquad (27.7)$$

Любое из этих равенств, когда в левой части стоит P_V, является записью **закона Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.** Хотя формула (27.6) и выведена для бесконечно малого цилиндрического участка проводника, ее справедливость не связана с формой бесконечно малого объема, поскольку входящие в нее величины зависят лишь от их значений в точке и не зависят от других факторов.

Источник энергии для работы электрического тока. Падение потенциала в цепи тока компенсируется соответствующим подъемом потенциала, возникающим в результате действия сторонних электродвижущих сил на заряды (см. 26). При прохождении тока производится работа и выделяется энергия, например в форме теплоты. Сторонние электродвижущие силы совершают работу над зарядами, сообщая им соответствующую энергию. Поэтому получается, что

● **Работа, совершаемая при прохождении тока, не является результатом превращения кинетической энергии электронов в другие формы энергии. Носителем энергии, затрачиваемой на совершение работы, являются не электроны, а электромагнитное поле. Лишь в частном случае выделения джоулева тепла кинетическая энергия электронов является промежуточной формой энергии, посредством которой энергия электромагнитного поля превращается в теплоту. В других случаях кинетическая энергия электронов никакой роли не играет.**

○ Какой смысл имеет время свободного пробега в классической теории электропроводности?

Какие основные трудности классической теории электропроводности? Как они в общих чертах преодолеваются?

вся работа, совершаемая током, производится за счет энергии сторонних электродвижущих сил.

Вывод закона Ома исходя из электронной картины электропроводности. Механизм прохождения тока по проводнику и его нагревание в рамках классических представлений выглядит так.

Свободный электрон ускоряется полем, которое имеется внутри проводника. Закон Ньютона для движения электрона имеет вид

$$ma = eE, \qquad (27.8)$$

где m, a, e – соответственно масса, ускорение и заряд электрона. Действительное движение электрона очень сложно, поскольку электроны находятся в хаотическом тепловом движении. Под влиянием внешнего поля все они получают одинаковое ускорение и приобретают дополнительную скорость в одном и том же направлении. В результате образуется упорядоченное движение электронов, т. е. электрический ток. Нас интересует здесь только это упорядоченное движение электронов, которое накладывается на их хаотическое тепловое движение. При своем движении электроны взаимодействуют между собой и с атомами кристаллической решетки проводника. При взаимодействии с атомами кристаллической решетки электроны обмениваются с ними небольшой частью своей энергии, которая в среднем является энергией, приобретенной ими за счет электрического поля, потому что при отсутствии электрического поля свободные электроны и атомы находятся в тепловом равновесии. Эту сложную картину приобретения электронами энергии под влиянием электрического поля и последующую ее передачу атомам при взаимодействии можно представить в следующем виде. Допустим, что электрон в соответствии с уравнением (27.8) ускоряется в течение времени τ, затем сталкивается с атомом и отдает ему всю приобретенную кинетическую энергию. Затем он снова начинает ускоряться, через время τ снова сталкивается с атомом и т. д., т. е. τ – время релаксации неравновесного распределения электронов к тепловому равновесию с кристаллической решеткой. В модели предполагается, что в течение этого времени средняя кинетическая энергия электронов возрастает под действием внешнего электрического поля выше их средней тепловой энергии, затем избыток над средней тепловой энергией передается кристаллической решетке и снова восстанавливается тепловое равновесие. В действительности, конечно, этот процесс происходит непрерывно и его ступенчатость введена лишь для упрощения математических расчетов. Время τ характеризует скорость возвращения к тепловому равновесию совокупностей электронов и кристаллической решетки проводника, если совокупность электронов какими-то причинами (не только внешним электрическим полем) выведена из этого равновесия.

В этой картине результат многих актов передачи энергии от электрона к атомам заменяется одним актом и поэтому τ имеет смысл среднего промежутка времени между столкновениями. Если l – средняя длина пробега между столкновениями, а v – средняя скорость электро-

на, обусловленная его тепловым движением, то по определению

$$\tau = l/v. \tag{27.9}$$

Путь, проходимый электроном из состояния покоя при ускорении электрическим полем, равен

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\tau^2. \tag{27.10}$$

Это путь, на который в среднем электрон смещается в направлении действия электрического поля за время τ между соударениями. Упорядоченное смещение обусловливает дрейф электронов со скоростью

$$v_д = s/\tau = eEl/(2m_e v). \tag{27.11}$$

Скорость дрейфа обратно пропорциональна частоте v/l соударений и, следовательно, уменьшается при росте температуры.

Если n – концентрация электронов, то

$$j = env_д = e^2 lnE/(2m_e v). \tag{27.12}$$

Сравнивая (27.12) с законом Ома $j = \gamma E$, находим следующее выражение для удельной электрической проводимости:

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{e^2 ln}{m_e v}. \tag{27.13}$$

Таким образом, получена правильная зависимость плотности тока от напряженности электрического поля и выражение удельной электрической проводимости через характеристики движения свободных электронов.

Вывод закона Джоуля – Ленца исходя из электронной теории электропроводности. Скорость, которая теряется электроном при столкновении, равна

$$v_1 = a\tau = \frac{eE}{m_e}\frac{l}{v}. \tag{27.14}$$

Поэтому при каждом столкновении атомам проводника передается приобретенная между столкновениями кинетическая энергия

$$W_к = \frac{m_e v_1^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^2E^2l^2}{m_e v^2}. \tag{27.15}$$

Частота столкновений каждого электрона с атомами равна v/l, а частота столкновений n электронов с атомами – nv/l. Поэтому объемная плотность мощности выделения теплоты дается выражением

$$P_{уд} = W_к\frac{nv}{l} = \frac{1}{2}\frac{e^2nl}{m_e v}E^2 = \gamma E^2, \tag{27.16}$$

где учтены равенства (27.13) и (27.15). Тем самым, исходя из электронной теории электропроводимости, получено правильное выражение закона Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

Недостатки классической теории электропроводности. Классическая теория электропроводности весьма наглядна и дает правильную зависимость плотности тока и количества выделяемой теплоты от напряженности поля. *Однако она не приводит к правильным количественным результатам.* Главные расхождения теории с экспериментом состоят в следующем:

1) для того чтобы по формуле (27.13) получить правильные значения γ, надо l принять очень большим (l в тысячи раз превосходит межатомные расстояния в проводнике). Понять возможность таких больших свободных пробегов затруднительно в рамках классических представлений;

2) эксперимент для зависимости удельной проводимости γ от температуры приводит к закону $\gamma \sim 1/T$. Объяснить это формулой (27.13) невозможно, поскольку кинетическая теория газов дает $v \sim \sqrt{T}$, допустить же зависимость $l \sim 1/\sqrt{T}$ невозможно в классической картине взаимодействия;

3) по теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы следует ожидать от свободных электронов очень большого вклада в теплоемкость проводников, которая в эксперименте не наблюдается.

Основные черты квантовой трактовки электропроводности. Лишь квантовая теория позволила преодолеть указанные только что трудности классических представлений. *Квантовая теория учитывает волновые свойства микрочастиц.* Важнейшей характеристикой волнового движения является способность волн огибать препятствия благодаря дифракции. В результате этого при своем движении электроны как бы огибают атомы без столкновений, и длины их свободного пробега могут быть весьма большими. Из-за того что электроны подчиняются статистике Ферми – Дирака, в образовании электронной теплоемкости может принимать участие лишь незначительная часть электронов вблизи уровня Ферми. Поэтому электронная теплоемкость проводников совершенно незначительна. Решение квантово-механической задачи о движении электрона в металлическом проводнике приводит к зависимости $\gamma \sim 1/T$, как это и наблюдается действительно. Таким образом, непротиворечивая количественная теория электропроводности была построена лишь в рамках квантовой механики.

§ 28. Линейные цепи. Правила Кирхгофа

Формулируются правила расчета линейных цепей.

Изолированная замкнутая цепь. Этот случай уже был рассмотрен в § 26 и результат представлен формулой (26.1): *если в изолированной замкнутой цепи имеется один источник сторонних э. д. с., то сила тока в цепи должна быть такой, чтобы суммарное падение напряжения на внешнем сопротивлении и внутреннем сопротивлении источника было равно сторонней э. д. с. источника.* Если имеется несколько источ-

ников сторонних э. д. с., то надо взять их сумму со знаками, принятыми в качестве положительной э. д. с. некоторого направления.

Чтобы не ошибиться в знаках, удобно поступить следующим образом. Принимаем за положительное направление обхода цепи либо обход по часовой стрелке, либо против часовой. На рис. 117 за положительный выбран обход по часовой стрелке. Электродвижущие силы элементов обозначены $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$. В каком направлении течет ток, заранее неизвестно. Поэтому за направление тока выбираем любое, например на рис. 117 оно совпадает с положительным направлением обхода.

Теперь необходимо условиться о знаках. Знак э. д. с. берется положительным, если при движении по контуру в положительном направлении первым встречается отрицательный полюс источника. Если же первым встречается положительный полюс, то соответствующая э. д. с. будет с отрицательным знаком. Знак силы тока считается положительным, если направление тока совпадает с направлением обхода. В противном случае знак отрицателен. Таким образом, как э. д. с., так и сила тока являются алгебраическими величинами, принимающими как положительные, так и отрицательные значения. Теперь нетрудно обобщить уравнение (26.1) на произвольное число источников сторонних э. д. с. в изолированном замкнутом контуре: *произведение алгебраического значения силы тока на сумму внешних и внутренних сопротивлений всех участков замкнутой цепи равно сумме алгебраических значений сторонних э. д. с. в замкнутом контуре:*

$$\pm I\sum_k R_k = \sum_i \pm \mathscr{E}_i, \tag{28.1}$$

где $\pm$ перед I и $\mathscr{E}_i$ означает, что знак должен быть выбран в соответствии с приведенными выше правилами. Например, для случая, изображенного на рис. 117, уравнение (28.1) имеет вид

$$I(R + r_1 + r_2 + r_3) = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3, \tag{28.2}$$

где r_1, r_2, r_3 — внутренние сопротивления источников сторонних э. д. с., R — полное сопротивление всех участков цепи вне источников. Если бы при том же направлении обхода, принятого за положительный, стрелка, изображающая ток I, была ориентирована противоположно, то вместо уравнения (28.2) получилось бы следующее:

$$-I(R + r_1 + r_2 + r_3) = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3. \tag{28.3}$$

Уравнения (28.3) надо решать относительно I. Если в конкретном случае I положительно, то ток течет, как указывается стрелкой, если же отрицательно, то в противоположном направлении.

Разветвленные цепи. Во многих практически важных случаях электрические цепи являются более сложными, как, например, на рис. 118. Однако в цепь любой сложности входят элементы двух простейших видов:

1) узлов, в которых встречается более чем два проводника (рис. 119; точки C и D);

2) замкнутых контуров (рис. 119; контуры $ABDCA$, $CDFEC$, $ABFEA$).

Правила Кирхгофа. Правила Кирхгофа служат для составления системы уравнений, из которой находятся силы тока для разветвленной цепи любой сложности. *Они являются записью закона Ома (28.1) для каждого из замкнутых контуров и закона сохранения заряда в каждом узле.* Правила знаков для сил тока и э. д. с. в каждом из замкнутых контуров такие же, как для изолированного контура [см. (28.1)]. Направление положительного обхода для всех контуров выбирается одинаковым. Закон сохранения заряда в узлах требует, чтобы сумма сил токов, входящих в узел, была равна сумме сил токов, выходящих из него, иначе говоря, сумма алгебраических значений сил токов в узле должна быть равной нулю. При составлении суммы силы токов, изображаемых стрелками с направлением от узла, берутся, например, со знаком минус, а силы токов, изображаемых стрелками с направлением к узлу, со знаком плюс. Можно, конечно, брать обратные знаки, это не изменит соответствующих уравнений, важно лишь для всех узлов применять одно и то же правило.

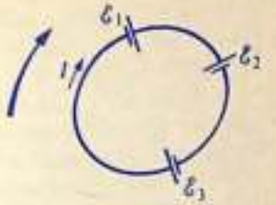
Таким образом, правила Кирхгофа гласят:

1) *сумма произведений алгебраических значений сил токов на сопротивление соответствующих участков каждого из замкнутых контуров равна сумме алгебраических значений сторонних э. д. с. в каждом замкнутом контуре:*

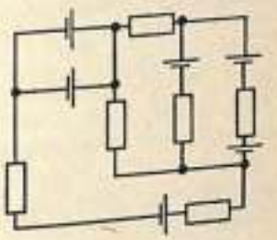
$$\sum_k \pm I_k R_k = \sum_i (\pm)\,\mathscr{E}_i; \tag{28.4}$$

2) *сумма алгебраических значений сил токов в каждом узле, равна нулю:*

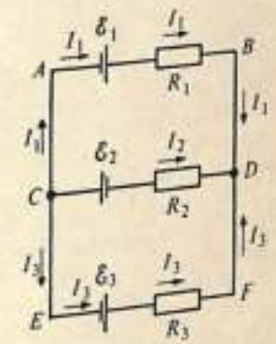
$$\sum_k (\pm) I_k = 0. \tag{28.5}$$



117 Изолированный замкнутый контур



118 Электрическая цепь



119 К определению замкнутых контуров и узлов разветвленной цепи

○ Как выбираются знаки в правилах Кирхгофа? Какими соображениями надо руководствоваться, чтобы не выписывать лишних уравнений Кирхгофа?

Можно показать, что получающаяся при этом система уравнений для любой разветвленной цепи является полной и позволяет определить все токи.

Эти законы вывел Г. Кирхгоф (1824–1887). Он дал общее решение задачи о разветвленных цепях постоянного тока в 1847 г., хотя сами правила сформулировал в 1845 г.

Применим правила Кирхгофа к цепи, изображенной на рис. 119.

1. По первому правилу Кирхгофа:

а) $I_1r_1 + I_1R_1 - I_2R_2 - I_2r_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$ (контур $ABDCA$).

б) $I_2R_2 + I_2r_2 - I_3R_3 - I_3r_3 = -\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3$ (контур $CDFEC$).

в) $I_1r_1 + I_1R_1 - I_3R_3 - I_3r_3 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3$ (контур $ABFEA$).

2. По второму правилу Кирхгофа:

а) $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (узел C);

б) $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (узел D).

Здесь r_1, r_2, r_3 – внутренние сопротивления источников сторонних э. д. с. Уравнения для узлов совпадают друг с другом, а из трех уравнений по контурам независимыми являются лишь два. Например, если сложить почленно первых два уравнения, то получается третье. Таким образом, имеется система трех уравнений для трех неизвестных сил тока I_1, I_2, I_3. Решив эту систему, найдем силы тока и их истинные направления. Но даже не решая ее, можно сказать: на рис. 119 мы наверняка ошиблись в выборе направлений тока, потому что в узлах при выбранных направлениях тока закон сохранения заряда заведомо не может выполняться – в узле C должен накапливаться отрицательный заряд, а в узле D – положительный. Но это нас не должно беспокоить, потому что решение автоматически подскажет, какими должны быть направления токов.

Таким образом, пример показывает, что если выписать правила Кирхгофа для всех контуров и всех узлов, то получится больше уравнений, чем необходимо, поскольку не все уравнения независимы. Чтобы не усложнять работы, желательно не выписывать лишних уравнений. Для этого можно руководствоваться такими правилами. Выписывая очередное уравнение для замкнутых контуров, необходимо следить, чтобы оно содержало хотя бы одну величину, не вошедшую в предшествующие уравнения; если все величины уже встречались в предшествующих уравнениях, то это уравнение лишнее. Аналогично поступаем и при выписывании уравнений для узлов. Например, выше в уравнениях по первому правилу Кирхгофу не следовало выписывать уравнение в), поскольку все входящие в него величины уже содержатся в уравнениях а) и б). В уравнениях по второму правилу Кирхгофа не следовало выписывать уравнение б), поскольку все входящие в него величины уже вошли в уравнение а). Дальнейший контроль правильности выписанной системы уравнений состоит в проверке ее полноты – число уравнений должно быть равным числу неизвестных.

§ 29. Токи в сплошной среде

Излагается метод расчета сил токов в сплошных средах.

Постановка задачи. Электрический ток может существовать не только в проводах. Например, почва (особенно сырая) является проводником электрического тока. Спрашивается, какое сопротивление электрическому току окажет почва, если в нее на некотором расстоянии друг от друга погружены концы двух проводников, соединенных с полюсами источника э. д. с.? Или каково сопротивление очень массивной металлической плиты, к которой припаяны два проводника от полюсов источника э. д. с.? Под сопротивлением массивной пластины или среды электрическому току понимается отношение разности потенциалов между подводящими ток электродами к силе тока. Хотя удельная проводимость среды известна, вычисление сопротивления не является простой задачей. Измерение же этого сопротивления легко провести стандартными методами, найдя разность потенциалов и силу тока.

Вывод формулы. Рассмотрим однородную сплошную среду с погруженными в нее электродами, между которыми протекает электрический ток. Линии плотности тока совпадают с линиями напряженности электрического поля в среде, поскольку

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \tag{29.1}$$

Сила тока сквозь замкнутую поверхность S, окружающую один из электродов, равна

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \gamma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \tag{29.2}$$

Теперь представим себе, что проводящая среда удалена, а электроды рассматриваются как обкладки конденсатора. По определению емкости C конденсатора имеем

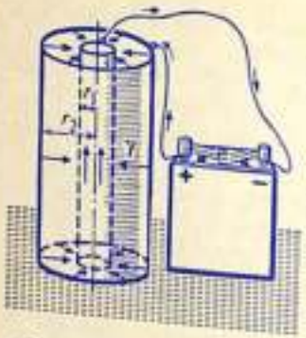
$$Q = CU, \tag{29.3}$$

где Q – заряд электрода, U – разность потенциалов между электродами. По теореме Гаусса получаем

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0, \tag{29.4}$$

где $\mathbf{E}$ – напряженность поля конденсатора, S – та же поверхность, что и в (29.2). Однако вследствие единственности решения задач электростатики заданная разность потенциалов между заданными электродами однозначно определяет напряженность поля. Следовательно, напряженность поля в проводящей среде, по которой протекает ток [см. (29.2)], совпадает с напряженностью поля, создаваемого в вакууме между теми же электродами при той же разности потенциалов [см. (29.4)]. Поэтому из (29.2) и (29.4) с учетом (29.3) заключаем, что

$$I = \gamma Q/\varepsilon_0 = \gamma CU/\varepsilon_0. \tag{29.5}$$



120

К вычислению сопротивления среды между коаксиальными электродами

● **Наиболее важным свойством заземления линий передач является независимость сопротивления от расстояния между электродами. Главный вклад в сопротивление дают участки среды, непосредственно граничащие с электродами.**

Формула, выражающая сопротивление среды через емкость конденсатора, обкладками которого являются электроды, справедлива лишь при условии, что при наличии тока потенциал во всех точках каждой из обкладок с достаточно большой точностью постоянен и в среде не возникают объемные заряды.

Для этого удельная электропроводимость материала электродов должна быть много больше удельной электропроводимости среды, а среда должна быть электрически однородной.

○ В чем состоит условие применимости формулы для сопротивления среды между электродами через емкость конденсатора, образуемого электродами?

Тогда сопротивление однородной среды току дается формулой

$$R = U/I = \varepsilon_0/(\gamma C). \tag{29.6}$$

Отметим, что *все эти рассуждения неприменимы для неоднородной среды*, поскольку в ней при прохождении тока образуются объемные заряды, которые являются источниками электрического поля. В этом случае электрическое поле в среде при прохождении постоянного тока не совпадает с полем в вакууме, хотя электроды и поддерживаются при той же разности потенциалов.

Условия применимости (29.6). Формула (29.6) позволяет вычислить сопротивление среды току, если известна емкость конденсатора, обкладками которого являются электроды. Результаты получаются тем точнее, чем лучше соблюдается постоянство потенциала электрода при прохождении через него тока. Если последнее требование не удовлетворяется достаточно хорошо и потенциалы разных точек электрода при прохождении по нему тока существенно различаются, то расчет сопротивления нельзя свести к расчету емкости конденсатора, поскольку у конденсатора потенциал всех точек обкладки одинаков. Поэтому, в частности, необходимо, потребовать малости удельного сопротивления электродов по сравнению с удельным сопротивлением среды. Если электроды достаточно малы по размерам, то это требование отпадает.

Коаксиальные электроды. Рассмотрим в качестве примера два коаксиальных электрода. Между ними находится проводящая среда (рис. 120), сопротивление которой необходимо вычислить. Для применения формулы (29.6) удельную проводимость материала жилы и оболочки надо считать много большей удельной проводимости среды. Ток в среде протекает во всем объеме среды по радиусам между центральной жилой и оболочкой. Поскольку емкость цилиндрического конденсатора $C = 2\pi l\varepsilon_0/\ln(r_2/r_1)$, сопротивление среды равно

$$R = \ln(r_2/r_1)/(2\pi l\gamma). \tag{29.7}$$

Неоднородная среда. Если удельная проводимость не постоянна, то задача значительно усложняется, поскольку возникают объемные заряды и необходимо принимать во внимание порождаемое ими электрическое поле.

Рассмотрим в качестве примера электрические токи в атмосфере. Как показывает эксперимент, вблизи поверхности Земли имеется электрическое поле с напряженностью $E_r^{(0)} \approx -100$ В/м, направленной по радиусу к центру Земли. Она является достаточно хорошим проводником, и поэтому можно считать, что на ней присутствует поверхностный заряд

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E_r^{(0)} \approx -8{,}85 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2. \tag{29.8}$$

Измерения показывают, что удельная проводимость земной атмосферы возрастает с высотой. Главная причина этого состоит в действии космического излучения, вызывающего ионизацию. На больших высотах главным источником ионизации становится солнечное излучение. На высоте около 50 км атмосферу можно считать практически идеальным проводником. Как показывают измерения, зависимость удельной проводимости от высоты может быть с достаточной точностью представлена в виде

$$\gamma(r) \approx \gamma_0 + A(r - r_0)^2. \tag{29.9}$$

Здесь r_0 – радиус Земли, r – расстояние от центра Земли до рассматриваемой точки, $\gamma_0 = \gamma(r_0)$ – удельная проводимость у поверхности Земли, A – постоянная, причем

$$\gamma_0 \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ См/м}, \tag{29.10}$$

$$A \approx 0{,}5 \cdot 10^{-20} \text{ См/м}^3. \tag{29.11}$$

Поле в атмосфере Земли в среднем стационарно и сферически симметрично. Поэтому уравнение непрерывности для плотности тока принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 j_r) = 0, \tag{29.12}$$

откуда

$$j_r(r) = j_0 r_0^2/r^2, \tag{29.13}$$

где j_0 – плотность тока у поверхности Земли ($r = r_0$), равная

$$j_0 = \gamma_0 E_r^{(0)} \approx -3 \cdot 10^{-12} \text{ А/м}^2. \tag{29.14}$$

Поскольку радиус Земли $r_0 \approx 6 \cdot 10^6$ м, сила тока из атмосферы в Землю равна $I = |j_0|\,4\pi r_0^2 \approx 1400$ А. Напряженность электрического поля в атмосфере на расстоянии r от центра Земли равна

$$E_r \approx \frac{j_r(r)}{\gamma(r)} \tag{29.15}$$

и поэтому разность потенциалов U между поверхностью Земли и верхней атмосферой, удельная проводимость которой практически бесконечна, определяется формулой

$$U = -\int_{r_0}^{\infty} E_r\,\mathrm{d}r = -j_0 r_0^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\gamma(r)}. \tag{29.16}$$

Здесь область интегрирования расширена до бесконечности, поскольку $\gamma(r)$ на высотах, больших примерно 50 км, практически обращается в бесконечность, а подынтегральное выражение в нуль. Однако достаточную точность при вычислении можно получить также, взяв для γ выражение (29.9). В этом случае вклад в интеграл от области интегрирования для $r > r_0 + 50$ км очень мал по сравнению с вкладом от области интегрирования от r_0 до $r_0 + 50$ км и им можно пренебречь. Поэтому вместо (29.16) получаем

$$U \approx -j_0 r_0^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\left[\gamma_0 + A\,(r - r_0)^2\right]}. \tag{29.17}$$

Этот интеграл легко вычисляется в элементарных функциях, однако результат получается довольно громоздким и здесь не приводится. С достаточной точностью до величины порядка $\left[\gamma_0/(r_0^2 A)\right] \ll 1$ он может быть представлен в виде

$$U \approx -\frac{j_0}{A r_0}\left[1 + \ln\frac{\gamma_0}{A r_0^2} + \frac{\pi r_0}{2}\sqrt{\frac{A}{\gamma_0}}\right]. \tag{29.18}$$

Подставляя в (29.18) значения j_0, γ_0, A из (29.14), (29.10) и (29.11), находим $U \approx 400$ кВ.

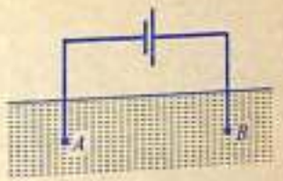
Благодаря постоянно протекающему через атмосферу току силой около 1400 А эта разность потенциалов должна уменьшаться, а поверхностный заряд земли – нейтрализоваться. Время релаксации для этого процесса имеет порядок $\tau = \varepsilon_0/\gamma_0 \approx 300$ с. Однако как сила тока, так и разность потенциалов в среднем стационарны. Поэтому существуют причины, поддерживающие эту стационарность. Ими являются главным образом нестационарные процессы в атмосфере, такие, как бури, грозы и др.

§ 30. Заземление линий передач

Выясняется физическая основа возможности заземления и обсуждаются требования к заземлению.

Постановка задачи. Поскольку удельная электрическая проводимость грунта довольно значительна, возникает вопрос об использовании земли в качестве проводника электрического тока. Электрическая цепь в этом случае показана на рис. 121 (A и B – электроды, зарытые в землю). Ясно, что при этом можно сократить расход проводов примерно в два раза.

Расчет сопротивления. Найдем сопротивление сплошной среды, считая электроды сферами радиусами r_0. Расстояние между центрами электродов обозначим d. Для упрощения расчета допустим, что среда неограниченная (рис. 122), а заряд на электродах распределен сферически симметрично.



121

Схема заземления линии передачи

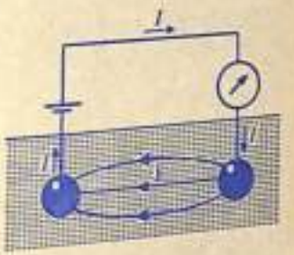
Пусть x – расстояние от центра левого электрода до некоторой точки, лежащей на линии, соединяющей центры электродов. Напряженность поля в этой точке

$$E \approx E_{(+)} + E_{(-)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right). \tag{30.1}$$

Разность потенциалов между электродами

$$U \approx \int_{r_0}^{d-r_0} E\,\mathrm{d}x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{(d-x)}\right]_{r_0}^{d-r_0} =$$

$$\approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{d-r_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{d-r_0}\right). \tag{30.2}$$



122

К расчету сопротивления среды при сферических электродах

В большинстве практически важных случаев расстояние между электродами много больше размеров электродов, т. е. $d \gg r$. Поэтому равенство (30.2) принимает вид

$$U \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_0}. \tag{30.3}$$

На основании сказанного в § 29 имеем

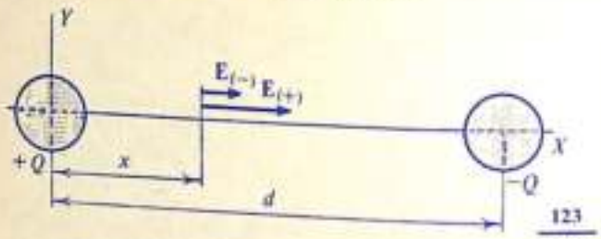
$$I \approx \oint_S \mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \approx \gamma \oint_S \mathbf{E}\ \mathrm{d}\mathbf{S} = \gamma Q/\varepsilon_0, \tag{30.4}$$

где I – сила тока в среде; S – замкнутая поверхность, окружающая один из электродов. Из (30.3) и (30.4) для сопротивления среды получаем

$$R \approx U/I \approx (2\pi\gamma r_0)^{-1}. \tag{30.5}$$

Наиболее важным свойством сопротивления (30.5) является его независимость от расстояния между электродами. Это физически объясняется тем, что при увеличении расстояния между электродами соответственно увеличивается эффективная площадь среды, через которую протекает ток. Увеличение расстояния между электродами увели-

● **Независимость сопротивления от расстояния между электродами в неограниченной среде обусловлена тем, что эффективное поперечное сечение площади, сквозь которую течет ток, пропорционально расстоянию между электродами.**



123

К расчету сопротивления среды при сферических электродах

чивает сопротивление, а увеличение площади – уменьшает. Как показывает формула (30.5), эти два фактора практически компенсируют друг друга, и сопротивление оказывается независимым от расстояния.

Следовательно, *главный вклад в сопротивление среды дают участки, непосредственно граничащие с электродами.* Поэтому особенно важно обеспечить их хорошую проводимость. Для этого пользуются электродами, имеющими большую площадь поверхности, и закапывают их на достаточно большую глубину, где наличие подпочвенных вод обеспечивает хорошую проводимость грунта.

Экспериментальная проверка. В слабо проводящую жидкость, например речную воду (рис. 124), опускают два плоских электрода, соединенных с полюсами элемента сторонних э. д. с. По цепи протекает некоторый ток. Изменяя расстояние между электродами, замечаем, что при достаточно больших расстояниях (по сравнению с линейными размерами электродов) это не оказывает влияния на показания амперметра. Следовательно, сопротивление среды при указанных условиях не зависит от расстояния между электродами.

Напряжение шага. Поскольку в среде течет ток, то имеется электрическое поле и изменяющийся в пространстве потенциал.

Предположим, что произошел обрыв высоковольтной линии передач и конец провода длиной L лежит на земле. В прилегающих к проводу участках в грунте имеется электрический ток. Если по соседству идет человек, то между точками соприкосновения его ног с землей существует разность потенциалов, называемая напряжением шага. В результате через тело человека проходит электрический ток, сила которого зависит от этой разности потенциалов.

Рассчитаем напряжение шага. Вследствие большой длины провода можно считать, что от него ток в глубь земли течет по направлениям, перпендикулярным проводу. Эквипотенциальные поверхности – поверхности полуцилиндров, оси которых совпадают с проводом (рис. 124). Пусть человек идет в направлении, перпендикулярном проводу, расстояние его ближайшей к проводу ноги от провода d, а длина шага l. Считая, что ток от провода растекается равномерно в полуцилиндрическую область, для плотности тока на расстоянии r от провода получаем

$$j = I/(\pi r L). \qquad (30.6)$$

Тогда напряженность поля вдоль радиусов, перпендикулярных проводу, равна

$$E_r = j/\gamma = I/(\pi r L\gamma). \qquad (30.7)$$

Следовательно, напряжение шага

$$U_ш = \int_d^{d+l} E_r\,dr = \frac{I}{\pi\gamma L}\ln\frac{d+l}{d}. \qquad (30.8)$$

Например, при $I = 500$ А, $d = 1$ м, $l = 65$ см, $L = 30$ м находим $U_ш = 270$ В. При других условиях и конфигурациях проводов могут возникать гораздо более значительные напряжения. Поэтому *при падении высоковольтных проводов на землю возникает опасная ситуация не только в результате прямого касания провода и человека, но и в результате возникновения напряжений типа напряжения шага.*



124

Демонстрация независимости сопротивления среды от расстояния между электродами

Пример 30.1. *Полусферический заземлитель погружен в землю вровень с ее поверхностью* (рис. 125). *Найти напряжение, под которым может оказаться человек, приближающийся к заземлителю (напряжение шага). Сила тока I, протекающего через заземлитель, задана. Длина шага равна l, расстояние от ближней к заземлителю ноги человека до заземлителя равно r_0. Рассмотреть числовой пример: $\gamma = 10^{-2}$ См/м, $I = 1$ А, $r_0 = 2$ м, $l = 1$ м.*

Сила тока от заземлителя равномерна по всем направлениям и поэтому вектор плотности тока направлен по радиус-векторам от заземлителя и равен

$$j_r = I/(2\pi r^2).$$

Напряженность электрического поля по закону Ома равна

$$E_r = j_r/\gamma = I/(2\pi r^2\gamma).$$

Следовательно, напряжение шага

$$U_ш = \int_{r_0}^{r_0+l} E_r\,dr = \frac{I}{2\pi\gamma}\int_{r_0}^{r_0+l}\frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+l}\right) =$$

$$= 2{,}7\ \text{В}.$$



125

К расчету напряжения шага при приближении к полусферическому заземлителю

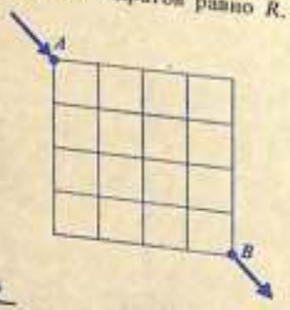
Задачи

4.1. Медный шар диаметром 10 см опускают в полусферическую медную чашу диаметром 20 см, наполненную водой, так что шар и чаша концентричны. Удельная проводимость воды равна $\gamma = 10^{-3}$ См/м. Определить электрическое сопротивление между шаром и чашей.

4.2. Маленький оферический электрод радиусом a помещен в среду с удельной проводимостью γ на расстоянии d от другого электрода в виде большой пластины с хорошей проводимостью. Найти сопротивление среды электрическому току, текущему между электродами.

4.3. Найти сопротивление среды току между двумя концентрическими электродами, радиусы которых r_1 и r_2. Удельная проводимость среды равна γ.

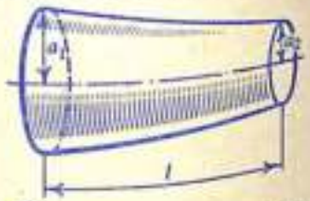
4.4. Найти сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 126. Сопротивление сторон малых квадратов равно R.



126

4.5. Между двумя плоскими электродами площадью S каждый, линейные размеры которых много больше расстояния d между ними, находится проводящий материал, удельная проводимость которого изменяется линейно от γ_1 у поверхности одного электрода до γ_2 у поверхности другого. Найти сопротивление среды между электродами.

4.6. Найти сопротивление конического проводника кругового сечения, размеры которого указаны на рис. 127. Удельная проводимость материала проводника γ.



127

4.7. Пространство между плоскими бесконечными параллельными электродами, находящимися на расстоянии d друг от друга, заполнено двумя слоями вещества, граница между которыми плоская, параллельная электродам. Проводимости и диэлектрические проницаемости веществ слоев равны соответственно γ_1, ε_1 и γ_2, ε_2, а толщины слоев a и $d-a$. К электродам приложены потенциалы φ_1 и φ_2. Найти потенциал и поверхностную плотность заряда на границе между слоями.

Ответы

4.1. $R = 1590$ Ом. **4.2.** $R = [1 - a/(2d)]/(4\pi\gamma a)$. **4.3.** $R = \dfrac{1}{4\pi\gamma}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$.

4.4. $R_{AB} = \dfrac{47}{22}R$. **4.5.** $R = \dfrac{d\ln(\gamma_2/\gamma_1)}{S(\gamma_2 - \gamma_1)}$. **4.6.** $R = \dfrac{l}{\pi\gamma a_1 a_2}$. **4.7.** $\varphi = \dfrac{\varphi_1\gamma_1(d-a) + \varphi_2\gamma_2 a}{\gamma_1(d-a) + \gamma_2 a}$;

$\sigma = \dfrac{(\gamma_1\varepsilon_2 - \gamma_2\varepsilon_1)(\varphi_1 - \varphi_2)}{\gamma_1(d-a) + \gamma_2 a}$.

§ 31 Электропроводность металлов

§ 32 Электропроводность жидкостей

§ 33 Электропроводность газов

§ 34 Электрический ток в вакууме

5

Электропроводность

Механизмы электропроводности многообразны. Общим между ними является лишь неразрывная связь с движением зарядов. В зависимости от механизма электропроводности, свойств вещества и условий осуществления электрического тока закономерности, описывающие электропроводность, варьируются в широких пределах.

§ 31. Электропроводность металлов

Описываются основные экспериментальные факты, связанные с электропроводимостью металлов, и их теоретическая интерпретация.

Доказательство отсутствия переноса вещества электрическим током в металлах. Еще задолго до открытия электронов было экспериментально показано, что прохождение тока в металлах не связано, в отличие от тока в жидких электролитах, с переносом вещества металла. Опыт состоял в том, что через контакт двух различных металлов, например золота и серебра, в течение времени, исчисляемого многими месяцами, пропускался постоянный электрический ток. После этого исследовался материал вблизи контактов. Было показано, что никакого переноса вещества через границу различных металлов не наблюдается и вещество по различные стороны границы раздела имеет тот же состав, что и до пропускания тока. Эти опыты доказали, что *атомы и молекулы металлов не принимают участия в переносе электрического тока*, но они не ответили на вопрос о природе носителей заряда в металлах.

Опыты Толмена и Стюарта. Прямым доказательством, что *электрический ток в металлах обусловливается движением электронов*, были опыты Толмена и Стюарта, проведенные в 1916 г. Идея этих опытов была высказана Мандельштамом и Папалекси в 1913 г.

Представим себе проводящую катушку, которая может вращаться вокруг своей оси. Концы катушки с помощью скользящих контактов замкнуты на гальванометр (рис. 128). Если находящуюся в быстром вращении катушку резко затормозить, то свободные электроны в проволоке продолжают движение по инерции, в результате чего гальванометр должен зарегистрировать импульс тока.

Обозначим $\dot{v}$ – линейное ускорение катушки при торможении. Оно направлено по касательной к поверхности катушки. При достаточно плотной намотке и тонких проводах можно считать, что ускорение направлено вдоль проводов. При торможении катушки к каждому свободному электрону приложена сила инерции $-m_e\dot{v}$, направленная противоположно ускорению (m_e – масса электрона). Под ее действием электрон ведет себя в металле так, как если бы на него действовало некоторое эффективное электрическое поле:

$$E_{эф} = -m_e\dot{v}/e. \tag{31.1}$$

Поэтому эффективная электродвижущая сила в катушке, обусловленная инерцией свободных электронов, равна

$$\mathcal{E}_{эф} = \int_L E_{эф}\,dl = -\frac{m_e}{e}\dot{v}\int_L dl = -\frac{m_e}{e}\dot{v}L, \tag{31.2}$$

где L – длина провода на катушке. Все точки провода тормозятся с одинаковым ускорением и поэтому $\dot{v}$ в (31.2) вынесена за знак интеграла.

Обозначая: I – силу тока, протекающего по замкнутой цепи, R – сопротивление всей цепи, включая сопротивление проводов катушки и проводов внешней цепи и гальванометра, запишем закон Ома в виде

$$IR = m_e\dot{v}L/e. \tag{31.3}$$



128
Опыт Толмена и Стюарта

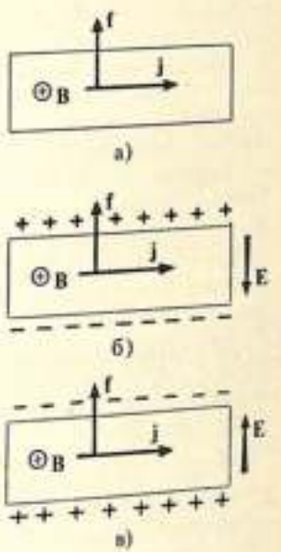
Количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в течение времени dt при силе тока I, равно

$$dQ = I\,dt = -\frac{m_e}{e}\frac{L}{R}\dot{v}\,dt = -\frac{m_e}{e}\frac{L}{R}dv. \tag{31.4}$$

Поэтому в течение времени торможения катушки от начальной линейной скорости v_0 до полной остановки через гальванометр пройдет количество электричества

$$Q = \int dQ = -\frac{m_e}{e}\frac{L}{R}\int_{v_0}^{0} dv = \frac{m_e}{e}\frac{L}{R}v_0. \tag{31.5}$$

Значение Q находится по показаниям гальванометра, а значения L, R, v_0 известны. Поэтому можно найти как знак, так и абсолютное значение e/m_e. Эксперименты показали, что e/m_e соответствует отношению заряда электрона к его массе. Тем самым доказано, что наблюдаемый с помощью гальванометра ток обусловлен движением электронов.



а) б) в)

129
Эффект Холла

О зонной теории. В основе квантовой теории электропроводности твердых тел лежит зонная теория, базирующаяся на анализе энергетического спектра электронов (см. § 2). Электрический спектр разбивается на зоны, разделенные запрещенными промежутками. Если в верхней зоне, где еще имеются электроны, ими заполнены не все квантовые состояния, т. е. в пределах зоны имеется возможность для перераспределения энергии и импульсов электронов, то соответствующее вещество является проводником электрического тока. Зона при этом назы-

● **Большое различие в проводимости проводников, полупроводников и диэлектриков обусловливается не различием в подвижности носителей зарядов, а главным образом большим различием концентрации носителей.**

§ 31. Электропроводность металлов

Описываются основные экспериментальные факты, связанные с электропроводимостью металлов, и их теоретическая интерпретация.

Доказательство отсутствия переноса вещества электрическим током в металлах. Еще задолго до открытия электронов было экспериментально показано, что прохождение тока в металлах не связано, в отличие от тока в жидких электролитах, с переносом вещества металла. Опыт состоял в том, что через контакт двух различных металлов, например золота и серебра, в течение времени, исчисляемого многими месяцами, пропускался постоянный электрический ток. После этого исследовался материал вблизи контактов. Было показано, что никакого переноса вещества через границу различных металлов не наблюдается и вещество по различные стороны границы раздела имеет тот же состав, что и до пропускания тока. Эти опыты доказали, что *атомы и молекулы металлов не принимают участия в переносе электрического тока*, но они не ответили на вопрос о природе носителей заряда в металлах.

Опыты Толмена и Стюарта. Прямым доказательством, что *электрический ток в металлах обусловливается движением электронов*, были опыты Толмена и Стюарта, проведенные в 1916 г. Идея этих опытов была высказана Мандельштамом и Папалекси в 1913 г.

Представим себе проводящую катушку, которая может вращаться вокруг своей оси. Концы катушки с помощью скользящих контактов замкнуты на гальванометр (рис. 128). Если находящуюся в быстром вращении катушку резко затормозить, то свободные электроны в проводе продолжают движение по инерции, в результате чего гальванометр должен зарегистрировать импульс тока.

Обозначим $\dot{v}$ – линейное ускорение катушки при торможении. Оно направлено по касательной к поверхности катушки. При достаточно плотной намотке и тонких проводах можно считать, что ускорение направлено вдоль проводов. При торможении катушки к каждому свободному электрону приложена сила инерции $-m_e\dot{v}$, направленная противоположно ускорению (m_e – масса электрона). Под ее действием электрон ведет себя в металле так, как если бы на него действовало некоторое эффективное электрическое поле:

$$E_{эф} = -m_e\dot{v}/e. \qquad (31.1)$$

Поэтому эффективная электродвижущая сила в катушке, обусловленная инерцией свободных электронов, равна

$$\mathcal{E}_{эф} = \int_L E_{эф}\,dl = -\frac{m_e}{e}\dot{v}\int_L dl = -\frac{m_e}{e}\dot{v}L, \qquad (31.2)$$

где L – длина провода на катушке. Все точки провода тормозятся с одинаковым ускорением и поэтому $\dot{v}$ в (31.2) вынесена за знак интеграла.

Обозначая: I – силу тока, протекающего по замкнутой цепи, R – сопротивление всей цепи, включая сопротивление проводов катушки и проводов внешней цепи и гальванометра, запишем закон Ома в виде

$$IR = m_e\dot{v}L/e. \qquad (31.3)$$



128 Опыт Толмена и Стюарта

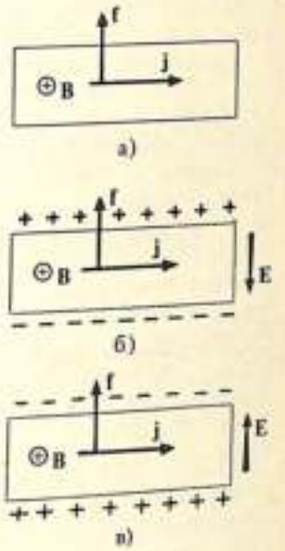
Количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в течение времени dt при силе тока I, равно

$$dQ = I\,dt = -\frac{m_e}{e}\frac{L}{R}\dot{v}\,dt = -\frac{m_e}{e}\frac{L}{R}dv. \qquad (31.4)$$

Поэтому в течение времени торможения катушки от начальной линейной скорости v_0 до полной остановки через гальванометр пройдет количество электричества

$$Q = \int dQ = -\frac{m_e}{e}\frac{L}{R}\int_{v_0}^{0} dv = \frac{m_e}{e}\frac{L}{R}v_0. \qquad (31.5)$$

Значение Q находится по показаниям гальванометра, а значения L, R, v_0 известны. Поэтому можно найти как знак, так и абсолютное значение e/m_e. Эксперименты показали, что e/m_e соответствует отношению заряда электрона к его массе. Тем самым доказано, что наблюдаемый с помощью гальванометра ток обусловлен движением электронов.



129 Эффект Холла

О зонной теории. В основе квантовой теории электропроводности твердых тел лежит зонная теория, базирующаяся на анализе энергетического спектра электронов (см. § 2). Электрический спектр разбивается на зоны, разделенные запрещенными промежутками. Если в верхней зоне, где еще имеются электроны, ими заполнены не все квантовые состояния, т. е. в пределах зоны имеется возможность для перераспределения энергии и импульсов электронов, то соответствующее вещество является проводником электрического тока. Зона при этом называ-

● **Большое различие в проводимости проводников, полупроводников и диэлектриков обусловливается не различием в подвижности носителей зарядов, а главным образом большим различием концентрации носителей.**

вается зоной проводимости, а соответствующее вещество является проводником электрического тока с электронным типом проводимости. Если в зоне проводимости много электронов и свободных квантовых состояний, то электропроводимость достаточно велика. Только электроны в зоне проводимости являются носителями зарядов, осуществляющими электрический ток. Их движение подчиняется квантовым законам. Число этих электронов составляет лишь небольшую часть от общего числа электронов. Благодаря этому устраняются трудности классической теории электропроводимости (см. § 27).

Зависимость сопротивления от температуры. Не только в металлах главный вклад в электропроводимость вносит движение электронов. Например, в полупроводниках с электронным типом электропроводимости основной вклад в перенос электрического заряда также вносится движением электронов. Одним из наиболее характерных различий электропроводимости в этих двух случаях является характер зависимости удельной проводимости от температуры.

Эксперимент показывает, что *у металлических проводников удельное сопротивление растет с повышением температуры, т. е. удельная проводимость уменьшается.* При не слишком низкой температуре зависимость проводимости от температуры имеет вид $\gamma \sim 1/T$.

Однако *у некоторых веществ, например стекол, полупроводников, электролитов и т. д., проводимость увеличивается с температурой.* Хотя механизмы возрастания проводимости различны, они сводятся в конечном счете к увеличению числа носителей электрических зарядов, благодаря движению которых осуществляется ток. В металлах число носителей, т. е. свободных электронов, практически не зависит от температуры и сопротивления току, определяется лишь их способностью образовывать упорядоченное движение под действием электрического поля, т. е. их подвижностью. А она с увеличением температуры уменьшается.

Эффект Холла. На заряды, движением которых обусловливается ток, действует сила Ампера (9.23). Плотность силы Ампера может быть записана в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = ne\mathbf{v}_д \times \mathbf{B}, \qquad (31.6)$$

где n, e – концентрация и заряд, движение которого обусловливает ток, $\mathbf{v}_д$ – скорость дрейфа заряда.

Под действием силы с плотностью $\mathbf{f}$ заряды в проводнике при наличии магнитного поля, индукция которого перпендикулярна плотности тока $\mathbf{j}$, стремятся сместиться в направлении силы (рис. 129, *а*). В результате на соответствующей части поверхности проводника образуется избыток зарядов того же знака, что и знак зарядов, осуществляющих ток. Поэтому если ток обусловливается движением положительных зарядов, то создается распределение поверхностной плотности зарядов, изображенное на рис. 129, *б*, а при движении отрицательных –

на рис. 129, *в*. Между противоположными сторонами проводника появляется разность потенциалов и такое электрическое поле, напряженность E которого нейтрализует действие плотности силы (31.6). Направление напряженности зависит от знака зарядов, осуществляющих ток, а модуль определяется теми факторами, от которых зависит плотность силы (31.6). Возникновение разности потенциалов в проводнике с током в магнитном поле называется **эффектом Холла.** Он был открыт в 1879 г.

Индукция $\mathbf{B}$ поля и скорость $v_д$ зарядов взаимно перпендикулярны. Отношение плотности силы (31.6) к заряду аналогично (31.1) может рассматриваться как эффективная напряженность электрического поля, называемого **полем Холла**:

$$E_{хл} = v_д B. \qquad (31.7)$$

Следовательно, между поверхностями проводника создается разность потенциалов (рис. 129, *б*)

$$U = \int_0^d v_д B \, dx = v_д B d, \qquad (31.8)$$

где d – толщина проводника. Принимая во внимание, что $j = nev$, перепишем (31.8) в виде

$$U = djB/(ne) = RjBd, \qquad (31.9)$$

где

$$R = 1/(ne) \qquad (31.10)$$

– **постоянная Холла.** Разность потенциалов может быть измерена. Остальные величины, за исключением концентрации n зарядов и их знака, известны. *По знаку разности потенциалов можно определить знак заряда носителей, движение которых осуществляет ток, а по разности потенциалов – их концентрацию.*

Заметим, что формулы (31.9) и (31.10) совпадают с соответствующими формулами более полной теории эффекта Холла, когда учитывается распределение электронов по скоростям, статистические характеристики их столкновений и т. д. Однако расчеты при этом оказываются очень громоздкими и здесь не приводятся.

Результаты измерений показали, что *в металлах ток осуществляется движением отрицательных зарядов.* Концентрация носителей примерно равна концентрации атомов, т. е. один заряд, участвующий в образовании тока, приходится примерно на один атом металла, хотя это число и изменяется в определенных пределах. *Носителями зарядов, осуществляющих ток в металлах, являются электроны.* Сказанное означает, что в металлах на один атом приходится в среднем около одного свободного электрона. Например, на один атом серебра приходится 0,7 электронов; меди – 0,8; золота – 0,9, а алюминия – около двух электронов. Напомним, что у металлов обычно концентрация атомов, а следовательно, и свободных электронов близка к $n \sim 10^{28}$ м$^{-3}$.

Исследование эффекта Холла в других случаях показало, что он не всегда обусловлен движением отрицательных зарядов. *Когда знак разности потенциалов в эффекте Холла соответствует движению положительных зарядов, то эффект называется аномальным.*

Эффект Холла является одним из гальваномагнитных явлений. Под этим термином объединяются явления, возникающие в проводнике с током, находящимся в магнитном поле. Физическая сущность всех этих явлений состоит в том, что электропроводимость проводника во внешнем магнитном поле является не скаляром, а тензором. Напряженность поперечного электрического поля, называемого холловским, складывается с напряженностью электрического поля, которое обусловливает существование тока при отсутствии магнитного поля. В результате этого напряженность электрического поля образует с плотностью тока некоторый угол – **угол Холла**. Значит, направления плотности тока и напряженности электрического поля не совпадают. Эти величины связаны тензорной формулой

$$j_i = \sum_k \gamma_{ik} E_k,$$

в которой γ_{ik} – тензор электропроводимости. В анизотропных веществах проводимость описывается тензором электропроводимости также и при отсутствии внешнего магнитного поля.

Магнетосопротивление. Другим важным гальваномагнитным явлением является *изменение сопротивления проводника, помещенного в поперечное магнитное поле (эффект магнетосопротивления).* Как показывает опыт, относительное изменение электропроводимости $\Delta\gamma/\gamma$ при не очень сильных полях выражается формулой

$$\Delta\gamma/\gamma = -\varkappa_\perp B^2,$$

где $\varkappa_\perp$ – коэффициент поперечного магнетосопротивления, зависящий от свойств материала; B – индукция магнитного поля.

Это явление – следствие тензорного характера электропроводимости проводника, помещенного в магнитное поле. В результате возникает компонента напряженности электрического поля, коллинеарная току, что и вызывает изменение его силы, проявляющееся в изменении сопротивления.

Подвижность электронов. Закон Ома $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ может быть записан в виде

$$nev_d = \gamma E. \qquad (31.11)$$

Подвижностью b электронов называется отношение скорости дрейфа к напряженности электрического поля:

$$b = v_d/E. \qquad (31.12)$$

Принимая во внимание (31.11), получаем

$$b = \gamma/(ne). \qquad (31.13)$$

Удельная проводимость металла известна, а *не* может быть найдена из эффекта Холла, т. е. измерение эффекта Холла позволяет найти

подвижность электронов в проводнике. В металлах подвижность электронов имеет порядок

$$b \sim 10^{-4} - 10^{-3}\ \text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с}). \qquad (31.14)$$

Таким образом, скорость дрейфа электронов в металлах очень мала по сравнению с обычными скоростями движения микрочастиц. *Большая удельная проводимость металлов обусловлена главным образом большой концентрацией носителей заряда ($n \sim 10^{28}\ \text{м}^{-3}$), а не их большой подвижностью* [см. (31.13)]:

$$\gamma = enb \sim 10^{-19} \cdot 10^{28} \cdot 10^{-3}\ \text{См/м} = 10^6\ \text{См/м}.$$

У диэлектриков большинство электронов жестко привязано к атомам и очень мало свободных носителей заряда. Поэтому, *хотя подвижность этих носителей заряда не сильно отличается от подвижности свободных электронов в металлах, удельная проводимость диэлектриков очень мала. Концентрация носителей в полупроводниках изменяется в широких пределах от 10^{19} до $10^{25}\ \text{м}^{-3}$, а подвижности заключены примерно от 10 до $10^{-4}\ \text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, т. е. велики.* Благодаря таким широким пределам изменения концентрации носителей и их подвижностей удельная проводимость полупроводников изменяется в широких пределах, на много порядков величин. Однако не удается получить у полупроводников столь же большую проводимость, как у металлов, сохранив, конечно, при этом характерную для полупроводников зависимость проводимости от температуры (увеличение проводимости с температурой).

Сверхпроводимость. В 1911 г. К. Оннес обнаружил, что при $T = 4{,}2$ К ртуть, по-видимому, полностью теряет сопротивление электрическому току. Уменьшение сопротивления происходит очень резко в интервале нескольких сотых градуса. В дальнейшем потеря сопротивления наблюдалась и у других чистых веществ и у многих сплавов. Само явление получило название сверхпроводимости. Температуры перехода в сверхпроводящее состояние различны, но всегда очень низки.

Критическая температура. Возбудив электрический ток в кольце из сверхпроводника с помощью электромагнитной индукции, можно наблюдать, что его сила в течение нескольких лет не уменьшается. Это позволяет найти верхний предел удельного сопротивления сверхпроводников (менее 10^{-25} Ом·м). Это на много порядков меньше, чем, например, удельное сопротивление меди при низкой температуре (10^{-12} Ом·м). *Поэтому принимается, что электрическое сопротивление сверхпроводников равно нулю.* Сопротивление до перехода в сверхпроводящее состояние бывает самым различным. Многие из сверхпроводников при комнатной температуре имеют довольно высокое сопротивление. Переход в сверхпроводящее состояние совершается всегда очень резко. У чистых монокристаллов он занимает интервал температур меньший, чем одна тысячная градуса.

Сверхпроводимостью среди чистых веществ обладают алюминий, кадмий, цинк, индий, галлий. Свойство сверхпроводимости зависит от

структуры кристаллической решетки. Например, белое олово является сверхпроводником, а серое – нет; ртуть обладает свойством сверхпроводимости только в α-фазе.

Критическое поле. В 1914 г. К. Оннес обнаружил, что *сверхпроводящее состояние разрушается магнитным полем, когда магнитная индукция B превосходит некоторое критическое значение.* Критическое значение индукции зависит от материала сверхпроводника и температуры.

Критическое поле, разрушающее сверхпроводимость, может быть создано и самим сверхпроводящим током. Поэтому имеется критическая сила тока, при которой сверхпроводимость разрушается.

Эффект Мейсснера. В 1933 г. Мейсснер и Оксенфельд обнаружили, что *внутри сверхпроводящего тела полностью отсутствует магнитное поле.* При охлаждении сверхпроводника, находящегося во внешнем постоянном магнитном поле, в момент перехода в сверхпроводящее состояние магнитное поле полностью вытесняется из его объема. Этим сверхпроводник отличается от идеального проводника, у которого при падении удельного сопротивления до нуля индукция магнитного поля в объеме должна сохраниться без изменения. Явление вытеснения магнитного поля из объема проводника называется **эффектом Мейсснера.** Эффект Мейсснера и отсутствие электрического сопротивления являются важнейшими свойствами сверхпроводника.

Поверхностный ток. Отсутствие магнитного поля в объеме проводника позволяет заключить из общих законов магнитного поля (см. т.1, б), что *в нем существует только поверхностный ток. Он физически реален и поэтому занимает некоторый тонкий слой вблизи поверхности.* Магнитное поле тока уничтожает внутри сверхпроводника внешнее магнитное поле. В этом отношении сверхпроводник ведет себя формально как идеальный диамагнетик (см. § 41). Однако он не является диамагнетиком, поскольку внутри него намагниченность равна нулю.

Сверхпроводники первого и второго рода. Чистые вещества, у которых наблюдается явление сверхпроводимости, немногочисленны. Чаще сверхпроводимость бывает у сплавов. У чистых веществ имеет место полный эффект Мейсснера, а *у сплавов не происходит полного вытеснения магнитного поля из объема* (частичный эффект Мейсснера). *Вещества, проявляющие полный эффект Мейсснера, называются сверхпроводниками первого рода, а частичный – сверхпроводниками второго рода.*

У сверхпроводников второго рода в объеме имеются круговые токи, создающие магнитное поле, которое, однако, заполняет не весь объем, а распределено в нем в виде отдельных нитей. Что же касается сопротивления, то оно равно нулю, как и у сверхпроводников первого рода.

Объяснение сверхпроводимости. По своей физической природе сверхпроводимость является сверхтекучестью жидкости, состоящей из электронов. Сверхтекучесть возникает из-за прекращения обмена энергией между сверхтекучей компонентой жидкости и ее другими частями,

в результате чего исчезает трение. Существенным при этом является возможность «конденсации» молекул жидкости на низшем энергетическом уровне, отделенном от других уровней достаточно широкой энергетической щелью, которую силы взаимодействия не в состоянии преодолеть. В этом и состоит причина выключения взаимодействия. Для возможности нахождения на низшем уровне многих частиц необходимо, чтобы они подчинялись статистике Бозе – Эйнштейна, т. е. обладали целочисленным спином.

Электроны подчиняются статистике Ферми – Дирака и поэтому не могут «конденсироваться» на низшем энергетическом уровне и образовывать сверхтекучую электронную жидкость. Силы отталкивания между электронами в значительной степени компенсируются силами притяжения положительных ионов кристаллической решетки. Однако благодаря тепловым колебаниям атомов в узлах кристаллической решетки между электронами может возникнуть сила притяжения и они тогда объединяются в пары. *Пары электронов ведут себя как частицы с целочисленным спином, т. е. подчиняются статистике Бозе – Эйнштейна. Они могут конденсироваться и образовывать ток сверхтекучей жидкости – электронных пар, который и образует сверхпроводящий электрический ток.* Выше низшего энергетического уровня имеется энергетическая щель, которую электронная пара не в состоянии преодолеть за счет энергии взаимодействия с остальными зарядами, т. е. не может изменить своего энергетического состояния. Поэтому электрическое сопротивление отсутствует.

Возможность образования электронных пар и их сверхтекучести объясняется квантовой теорией.

Пример 31.1. *Зависимость сопротивления от температуры весьма существенна для работы многих приборов, что хорошо видно на примере функционирования обычной лампы накаливания. Нить накаливания делают из вольфрама. При температурах между 300 и 3000 K удельная проводимость вольфрама и энергетическая светимость M, т. е. поверхностная плотность потока излучения с поверхности, могут быть представлены формулами: $\gamma = 0{,}95 \cdot 10^{10}\ T^{-1{,}2}$ См/м; $M \approx 6{,}6 \cdot 10^{-12}\ T^5$ Вт/м², где T – термодинамическая температура. Рассчитать диаметр d и длину l нити накаливания, чтобы лампа излучала мощность P при напряжении U и температуре T нити. Потери энергии на теплопроводность от нити накаливания пренебрежимо малы. Оценить требования на точность изготовления нити накаливания.*

Имеем:

$$R = \frac{U^2}{P},\quad R = \frac{1}{\gamma}\,\frac{4l}{\pi d^2},\quad P = \pi M l d,$$

откуда

$$d = \left(\frac{4P^2}{\pi^2 \gamma U^2 M}\right)^{1/3},\quad l = \left(\frac{\gamma P U^2}{4\pi M^2}\right)^{1/3}.$$

Поскольку $\gamma M \sim T^{3/8}$, $\gamma/M^2 \sim T^{-11{,}2}$, зависимость длины и толщины нити от температуры весьма сильная. Поэтому погрешность в соблюдении диаметра и длины нити накаливания при изготовлении сильно сказывается на температуре и, следовательно, на спектральном составе излучаемого света. К допускам предъявляются достаточно жесткие требования.

§ 32. Электропроводность жидкостей

Описывается механизм электропроводности жидкостей и зависимость электропроводимости от различных факторов.

Диссоциация. Чистые жидкости в основном являются плохими проводниками электричества. Это обусловлено тем, что они состоят из электрически нейтральных атомов и молекул, движение которых не может осуществить электрический ток. Однако растворы солей, кислот и щелочей в воде и некоторых других жидкостях хорошо проводят ток. Это связано с тем, что молекулы растворенного вещества диссоциируют, т. е. распадаются на положительные и отрицательные ионы. Упорядоченное движение ионов обеспечивает перенос электрических зарядов, т. е. ток. *Если при растворении не происходит диссоциации молекул, то раствор не является проводником электричества.*

Расчет электропроводимости. Обозначим $N = N^{(+)} = N^{(-)}$ – концентрация ионов каждого знака в растворе. Для плотности тока можно написать формулу

$$j = q(b^{(+)} + b^{(-)})NE, \tag{32.1}$$

где q – модуль заряда ионов, $b^{(+)}$ и $b^{(-)}$ – подвижности положительных и отрицательных ионов [см. (31.12)].

На основании (31.12) скорость дрейфа ионов пропорциональна напряженности:

$$v_d^{(\pm)} = b^{(\pm)}E. \tag{32.2}$$

Подвижности положительных и отрицательных ионов, вообще говоря, различны. Подвижность ионов в жидкостях невелика и обычно составляет десятимиллионные доли метра в квадрате на секунду-вольт.

Концентрация ионов зависит от степени диссоциации, характеризующейся коэффициентом диссоциации α, который определяется отношением концентрации N ионов к концентрации N_0 молекул растворенного вещества, т. е.

$$N = \alpha N_0. \tag{32.3}$$

Следовательно, концентрация недиссоциированных молекул

$$N' = (1 - \alpha)N_0. \tag{32.4}$$

В растворе одновременно и непрерывно происходит как диссоциация молекул, так и молизация ионов, т. е. соединение ионов в нейтральные молекулы. При равновесии интенсивности этих двух процессов, изменяющих состав раствора в противоположных направлениях, равны. Скорость изменения (dN/dt) концентрации ионов каждого знака в результате диссоциации молекул пропорциональна концентрации N' недиссоциированных молекул:

$$(dN/dt) = \beta(1 - \alpha)N_0, \tag{32.5}$$

где β – коэффициент пропорциональности.

Скорость изменения (dN/dt) концентрации недиссоциированных молекул в результате ионизации ионов пропорциональна произведению концентраций положительных и отрицательных ионов:

$$(dN'/dt) = \eta\alpha^2 N_0^2, \tag{32.6}$$

где η – коэффициент пропорциональности. При равновесии

$$\left(\frac{dN}{dt}\right) = \left(\frac{dN'}{dt}\right). \tag{32.7}$$

Отсюда с учетом (32.5) и (32.6) получаем формулу, связывающую коэффициент диссоциации с концентрацией растворенного вещества:

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha^2} = \frac{\eta}{\beta}N_0. \tag{32.8}$$

Очевидно, что коэффициент диссоциации зависит от концентрации растворенного вещества. При очень слабой концентрации ($N_0 \approx 0$) равенство (32.8) дает

$$\alpha \approx 1, \tag{32.9}$$

т. е. диссоциация близка к полной. Если $\alpha \ll 1$, то из (32.8) получаем

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\frac{1}{\sqrt{N_0}}, \tag{32.10}$$

т. е. α уменьшается при увеличении концентрации растворенного вещества.

Формула (32.1) с учетом (32.3) может быть записана в виде

$$j = q(b^{(+)} + b^{(-)})\alpha N_0 E. \tag{32.11}$$

Подвижность ионов в очень широких пределах напряженностей электрических полей не зависит от напряженности. *Лишь при очень большой напряженности порядка миллионов вольт на сантиметр наблюдается отклонение от прямой пропорциональности между напряженностью поля и скоростью дрейфа носителей зарядов*, что, согласно (32.2), означает зависимость подвижности от напряженности. Значение α также в очень широких пределах не зависит от E. Следовательно, вплоть до напряженностей в миллионы вольт на сантиметр формула (32.11) выражает закон Ома. Поэтому удельная электрическая проводимость раствора равна

$$\gamma = q(b^{(+)} + b^{(-)})\alpha N_0. \tag{32.12}$$

Зависимость электропроводимости от концентрации. При небольшой концентрации раствора коэффициент диссоциации [см. (32.9)] является величиной постоянной, сумма подвижностей ионов $b^{(+)} + b^{(-)}$ также приблизительно постоянна. Следовательно, *при малой концентрации раствора электропроводимость пропорциональна концентрации, а при*

большой зависимость значительно усложняется. С одной стороны, необходимо учитывать зависимость коэффициента диссоциации от концентрации [см. (32.8), (32.10)], а с другой стороны, подвижность ионов также начинает заметно зависеть от концентрации и в концентрированных растворах уменьшается, поскольку начинает играть роль электрическое взаимодействие ионов друг с другом. Поэтому *при большой концентрации прямой пропорциональности между электропроводностью и концентрацией раствора не наблюдается.*

Зависимость электропроводимости от температуры. При повышении температуры коэффициент диссоциации увеличивается, поскольку более энергичное движение молекул затрудняет молизацию и облегчает диссоциацию (при столкновениях). При нагревании вязкость жидкости уменьшается и, следовательно, увеличивается подвижность ионов. Поэтому [см. (32.12)] *удельная проводимость электролитов с увеличением температуры растет, причем этот рост может быть весьма значительным (во много тысяч раз).*

Электролиты. Так как прохождение тока через растворы обусловлено движением ионов, то *в результате происходит разделение молекул растворенного вещества на составные части, которые выделяются на электродах. Это явление называется электролизом.* Изучение электролиза сыграло большую роль в развитии учения о строении вещества. Законы электролиза были открыты М. Фарадеем и подробно изучаются в средней школе. Проводники электрического тока, которые при прохождении по ним тока испытывают электролиз, т. е. разлагаются на составные части, называются электролитами. Из сказанного следует, что *электролитами являются многие растворы солей, кислот и щелочей, а также ряд химических соединений как в жидком, так и в твердом состоянии.*

Примером твердого электролита может служить стекло, которое по своей физической природе является сильно переохлажденной жидкостью с очень большой вязкостью. Можно показать на опыте, что в стекле заметной подвижностью обладают ионы Na^+, движение которых и обусловливает электропроводимость стекла. При нагревании стекла его сопротивление может уменьшиться в миллионы раз. Это позволяет показать очень эффектную демонстрацию. Первоначально стеклянная палочка разогревается пламенем горелки. Ток в цепи выделяет джоулеву теплоту, чем способствует повышению температуры палочки. При некоторой температуре, которую следует подобрать на опыте, горелка с пламенем убирается, а дальнейшее повышение температуры палочки обеспечивается уже только омической теплотой. Скорость изменения температуры палочки все время увеличивается, поскольку с температурой увеличивается удельная проводимость, что в свою очередь обусловливает еще более энергичное повышение температуры. В результате такого лавинообразного возрастания температуры происходит энергичное расплавление стекла и палочка перегорает с яркой вспышкой.

§ 33. Электропроводность газов

Обсуждаются различные механизмы осуществления тока в газах, характеристика тока и роль пространственного заряда.

Самостоятельный и несамостоятельный ток. Газ, в котором отсутствуют заряженные частицы, не является проводником электричества. Он становится проводником лишь при наличии ионизации, когда появляются носители электрических зарядов в виде свободных электронов и ионов. В зависимости от числа потерянных электронов положительные ионы могут быть однозарядными и многозарядными. Отрицательные ионы, образующиеся в результате присоединения к атому электрона, бывают обычно однозарядными.

Для того чтобы газ стал проводником, необходимо наличие какого-либо постороннего фактора ионизации (высокая температура газа, ультрафиолетовое или рентгеновское излучение и т. д.). Если напряженность поля не велика, то ток через газ прекращается, как только перестает действовать посторонний фактор ионизации. Такой ток называется несамостоятельным.

Если напряженность достаточно велика, то поле само может вызвать ионизацию, в результате которой газ становится проводником. Возникающий при этом ток называется самостоятельным. *Какой-либо одной универсальной функциональной зависимости силы тока от напряжения для самостоятельного тока не существует. Все определяется конкретными условиями.* В частности, нередко бывает, что сила самостоятельного тока при росте напряжения уменьшается.

Несамостоятельный ток. Рассмотрим более подробно несамостоятельный ток. Обозначим: N – концентрация зарядов каждого знака, $(dN/dt)_{обр}$ – скорость изменения концентрации зарядов внешним источником ионизации. Наряду с процессом образования зарядов происходит процесс их ликвидации в результате рекомбинации, т. е. взаимной нейтрализации. По прошествии достаточно большого промежутка времени устанавливается динамическое равновесие, когда скорость образования зарядов и скорость рекомбинации взаимно нейтрализуются. При этом, очевидно,

$$N = N^{(+)} = N^{(-)}, \tag{33.1}$$

где, для простоты, ионы предполагаются однозарядными.

Ясно, что скорость рекомбинации должна быть пропорциональна произведению концентрации зарядов, т. е. N^2. Следовательно, при равновесии

$$(dN/dt)_{обр} = -rN^2, \tag{33.2}$$

где r – коэффициент рекомбинации.

Плотность тока, по определению, равна

$$j = j^{(+)} + j^{(-)} = q\left(N^{(+)}v_д^{(+)} + N^{(-)}v_д^{(-)}\right) = qN\left(v_д^{(+)} + v_д^{(-)}\right). \tag{33.3}$$

Скорость дрейфа заряда в электрическом поле пропорциональна его напряженности:

$$v_д = bE, \tag{33.4}$$

Подвижности $b^{(+)}$ и $b^{(-)}$ положительных и отрицательных зарядов, вообще говоря, различны. Равенство (33.2) с учетом (33.4) принимает вид

$$j = (b^{(+)} + b^{(-)})\,NE. \tag{33.5}$$

Эта формула напоминает закон Ома. Однако она является эквивалентной закону Ома лишь в том случае, когда множитель при E не зависит от E и j. *В газах, вообще говоря, этот множитель зависит, как правило, от указанных величин и поэтому формула* (33.5) *не эквивалентна закону Ома.*

В том случае, когда число рекомбинирующих ионов в газе в 1 с времени много больше числа ионов, попадающих за 1 с на электрод, можно для определения N в (33.5) воспользоваться ее выражением (33.2) для условий равновесия. Тогда

$$j = q\,(b^{(+)} + b^{(-)})\sqrt{\frac{1}{r}\left|\left(\frac{dN}{dt}\right)_{обр}\right|}\,E. \tag{33.6}$$

Для выяснения условий применимости этой формулы необходимо иметь в виду, что подвижность ионов в газах при нормальном давлении имеет порядок десятитысячных долей метра в квадрате на вольт-секунду, а коэффициент рекомбинации $r \approx 1$ м^3/с. Например, если dN/dt имеет порядок 10^{16} ионов/(м$^3\cdot$с), а $E = 10^3$ В/м, то число ионов, падающих на 1 м^2 электрода за 1 с, равно

$$\frac{j}{e} = (b^{(+)} + b^{(-)})\sqrt{\frac{1}{r}\left|\left(\frac{dN}{dt}\right)_{обр}\right|}\,E \approx 2\cdot 10^{13}\ \text{м}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}. \tag{33.7}$$

Если расстояние между плоскими электродами равно 0,1 м, то в пространстве между электродами на 1 м^2 поперечного сечения рекомбинируют 10^{15} ионов, т. е. условие применимости формулы (33.6) в данном случае выполнено. Аналогично проверяется применимость этой формулы и при других значениях параметров.

Плотность тока насыщения. Обозначим d — расстояние между плоскими электродами. Если напряженность поля достаточно велика, так что все образующиеся внешним источником ионы попадают на электроды раньше, чем они успеют рекомбинировать, то возникает ток насыщения, плотность которого

$$j_{нас} = qd\left(\frac{dN}{dt}\right)_{обр}. \tag{33.8}$$

Характеристика тока. В области промежуточных электрических полей часть ионов до попадания на электроды успевает рекомбинировать. Баланс потерь и образования ионов записывается в виде

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{обр} + \left(\frac{dN}{dt}\right)_{рек} + \left(\frac{dN}{dt}\right)_{j} = 0. \tag{33.9}$$

Принимая во внимание равенства (33.2), (33.3) и (33.8), получаем

$$j_{нас}/q - rN^2 d - N\,(b^{(+)} + b^{(-)})\,E = 0. \tag{33.10}$$

Учитывая, что

$$j = qN\,(b^{(+)} + b^{(-)})\,E, \tag{33.11}$$

перепишем (33.10) в виде уравнения относительно j:

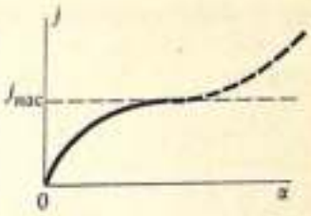
$$j^2 + 2\alpha j + 2\alpha j_{нас} = 0, \tag{33.12}$$

где

$$\alpha = |q|\,(b^{(+)} + b^{(-)})^2\,E^2/(2rd). \tag{33.13}$$

Положительный корень уравнения (33.12) равен

$$j = \alpha\left(\sqrt{1 + 2j_{нас}/\alpha} - 1\right). \tag{33.14}$$



130

Характеристики самостоятельного и несамостоятельного токов

График плотности тока в зависимости от α показан на рис. 130. В предельных случаях ($\alpha \ll j_{нас}$ и $\alpha \gg j_{нас}$) (33.14) переходит соответственно в формулы (33.6) и (33.8).

Выражение (33.14) называется характеристикой несамостоятельного тока. Оно находится в хорошем согласии с экспериментом, если дополнительно учесть потери ионов вследствие диффузии.

Самостоятельный ток. Если при плотности тока, почти равной плотности тока насыщения, продолжать увеличивать напряженность электрического поля, то плотность тока снова начинает возрастать. Это происходит потому, что имеющиеся в газе электроны до рекомбинации с ионами газа успевают ускориться благодаря большой напряженности поля до энергий, при которых они ударом ионизуют молекулы газа. В результате скорость ионизации начинает зависеть от напряженности. Возникающий при этом ток называется самостоятельным. Начальная часть характеристики этого тока на рис. 130 обозначена пунктиром. Она начинается при конечном значении α.

● **Для того чтобы газ стал проводником, необходимо наличие какого-либо постороннего фактора ионизации (высокая температура газа, ультрафиолетовое или рентгеновское излучение и т. д.). Однако при достаточно большой напряженности электрического поля ионизация газа возникает в результате действия поля. Возникающий при этом ток называется самостоятельным. В случае посторонних факторов ионизации ток называется несамостоятельным.**

○ Что такое самостоятельный и несамостоятельный ток? Почему между электродами возникает пространственный заряд? Каково его действие? За счет каких факторов подвижность отрицательных зарядов оказывается большей, чем положительных?

Действие пространственного заряда. Как было отмечено, подвижность положительных и отрицательных носителей зарядов различна и обычно $b^{(-)} > b^{(+)}$. В связи с этим плотность тока, обусловленного движением положительных зарядов, меньше плотности тока, связанного с движением отрицательных зарядов. Поэтому число положительных зарядов, попадающих в течение фиксированного интервала времени на катод, меньше числа отрицательных зарядов, попадающих на анод, хотя число образующихся и рекомбинирующих ионов за этот интервал времени одинаково. Очевидно, что такое состояние не может быть равновесным. Равновесное состояние достигается следующим образом. В результате движения положительных зарядов к катоду и отрицательных к аноду у катода образуется избыток положительных зарядов, а у анода – отрицательных. Однако ввиду бóльшей подвижности отрицательных зарядов избыток отрицательного заряда у анода будет меньше избытка положительного заряда у катода. В результате такого перераспределения концентрации зарядов и связанного с этим изменения напряженности электрического поля устанавливается равновесие, при котором число попадающих на электроды положительных и отрицательных зарядов становится равным.

Подвижность зарядов. Ион с массой m и зарядом q в однородном поле E движется с постоянным ускорением

$$a = qE/m \tag{33.15}$$

и в течение времени τ при начальной нулевой скорости проходит путь

$$s = qE\tau^2/(2m). \tag{33.16}$$

Если l – средний свободный пробег иона в газе при беспорядочном тепловом движении, а v – средняя скорость, то можно принять, что $\tau = l/v$. Время и средний свободный пробег определяются таким образом, чтобы можно было считать, что при каждом столкновении ион полностью теряет свою энергию упорядоченного движения. Поэтому для скорости дрейфа как средней скорости упорядоченного движения в направлении, коллинеарном направлению напряженности поля, на основании (33.16) можно написать:

$$u_x = s/\tau = qE\tau/(2m) = qlE/(2mv). \tag{33.17}$$

Уточнения, вносимые статистическим распределением l, приводят лишь к небольшому изменению числового коэффициента в (33.17). Поэтому подвижность ионов равна

$$b = ql/(2mv). \tag{33.18}$$

Из этой формулы видно, что подвижность положительных и отрицательных ионов с равными массами должна быть одинаковой. *Однако средняя подвижность отрицательных зарядов больше подвижности положительных*, потому что подвижность отрицательных зарядов обратно пропорциональна плотности газа, поскольку длина свободного пробега обратно пропорциональна плотности. Этот вывод подтверждается на опыте.

массы весьма значительна, что и обусловливает в конечном счете большую подвижность отрицательных зарядов.

Сравнение выводов из (33.18) с экспериментом. Из (33.18) видно, что подвижность обратно пропорциональна плотности газа, поскольку длина свободного пробега обратно пропорциональна плотности. Этот вывод подтверждается на опыте.

Однако в целом формула (33.18) не объясняет всей совокупности экспериментальных фактов. В частности, эксперимент дает для подвижности меньшее значение, чем теория. Чтобы объяснить расхождения между теорией и экспериментом, Ланжевен учел поляризованность ионов при приближении друг к другу при столкновении, благодаря которой ионы приобретают дипольные моменты и характер их столкновения изменяется. Учет этого обстоятельства вносит существенные поправки в формулы. Однако изложение этой теории выходит за рамки настоящего курса.

§ 34. Электрический ток в вакууме

Обсуждаются основные закономерности термоэлектронной эмиссии и их проявление при прохождении тока между электродами в вакууме.

Термоэлектронная эмиссия. В вакууме не может существовать электрический ток, если в нем нет носителей электрических зарядов. Если же в нем имеются электроны, то их движение обусловливает возникновение тока, называемого током в вакууме.

В металле имеется электронный газ. В условиях термодинамического равновесия распределение электронов по энергетическим уровням определяется статистикой Ферми – Дирака и дается формулой

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{\exp\left[\beta\left(E_i - \mu\right)\right] + 1}, \tag{34.1}$$

где $\beta = 1/(kT)$; n_i – число электронов, имеющих энергию E_i; g_i – число квантовых состояний, соответствующих энергии E_i; μ – энергия Ферми при температуре T, которая при $T \to 0$ К стремится к энергии Ферми μ_0 при $T = 0$ К в соответствии с формулой

$$\mu = \mu_0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \dots\right]. \tag{34.2}$$

Принимая во внимание, что во всех практически интересных случаях $\mu \gg kT$, можно в (34.1) величину μ считать равной μ_0.

Пусть E_0 – энергия покоящегося электрона вблизи поверхности вне металла (рис. 131). Формула (34.1) позволяет вычислить вероятность того, что электрон имеет энергию E_0, если вместо E_i подставить в нее

E_0. Эта вероятность не равна нулю и тем больше, чем выше температура (т. е. чем меньше β). Таким образом, *вблизи поверхности металла имеется электронное облако, которое находится в равновесии с электронным газом внутри металла.* Это равновесие динамическое: электроны внутри металла, обладающие достаточно большой кинетической энергией, преодолевают силы, удерживающие их внутри металла, и выходят за его пределы; электроны вблизи металла при соответствующих направлениях их скоростей и местоположения захватываются силами, удерживающими электроны внутри металла. Таким образом, в условиях динамического равновесия сквозь поверхность металла протекают противоположно направленные токи, силы которых равны по модулю. Суммарная сила тока сквозь поверхность равна нулю. *Явление образования электронного облака вблизи поверхности металла из-за теплового движения свободных электронов называется термоэлектронной эмиссией.* При 0 К никакой термоэлектронной эмиссии не наблюдается, т. е. электронное облако вблизи поверхности металла отсутствует.

Электроны с кинетической энергией W_x вблизи поверхности металла имеют полную энергию $E_i = W_x + E_0$ и формула (34.1) принимает для них следующий вид:

$$\left.\frac{n}{g}\right|_{W_x} = \frac{1}{\exp\left[\beta\left(W_x + \Phi\right)\right] + 1}, \qquad (34.3)$$

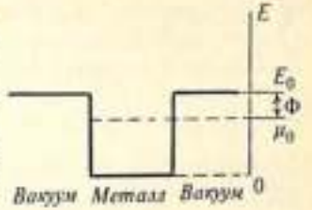
где $\Phi = E_0 - \mu$ – работа выхода электронов из металла. Из формулы (34.3) видно, что плотность электронного облака вблизи поверхности металла сильно зависит от работы выхода Φ и резко уменьшается с ее увеличением.

Если вблизи поверхности металла существует электрическое поле, то электроны облака приходят в движение и образуется электрический ток, называемый термоэлектронным. Таким образом, если в вакууме имеются две металлические пластины, между которыми приложена разность потенциалов, то между ними возникает термоэлектронный ток. Очевидно, что *сила тока должна расти с увеличением разности потенциалов. Существует максимальная сила тока, когда все электроны, попадающие через поверхность катода в электронное облако, увлекаются внешним электрическим полем к аноду и никакого обратного тока электронов через поверхность внутрь катода не существует.* Эта максимальная сила тока называется **силой тока насыщения:** при дальнейшем увеличении разности потенциалов между анодом и катодом сила тока не изменяется, поскольку все электроны, поставляемые в результате термоэлектронной эмиссии из катода, задействованы для образования электрического тока и других носителей заряда для дальнейшего увеличения силы тока нет.

Для металлов Φ составляет несколько электрон-вольт. Энергия kT даже при температуре в тысячи кельвинов составляет доли электрон-вольта. Следовательно, $\beta\Phi \gg 1$ и $\exp\left[\beta\left(W_x + \Phi\right)\right] \gg 1$. Поэтому в (34.3) можно в знаменателе пренебречь единицей по сравнению с $\exp\left[\beta\left(W_x + \Phi\right)\right]$ и записать эту формулу в виде

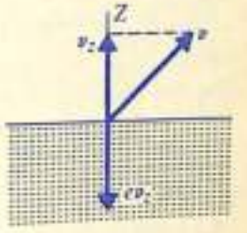
$$\left.\frac{n}{g}\right|_{W_x} \approx e^{-\Phi/(kT)} e^{-W_x/(kT)}. \qquad (34.4)$$

Таким образом, сила тока насыщения очень сильно зависит от работы выхода и температуры, поскольку эти величины входят в экспоненту. Для чистых металлов значительный ток может быть получен лишь при температуре порядка 2000 К, т. е. *в качестве катодов необходимо использовать металлы с высокой температурой плавления. Одновременно желательно, чтобы их работа выхода была как можно меньше.* Например, чистый вольфрам, работа выхода которого 4,5 эВ, должен эксплуатироваться при температуре 2500 К. Для уменьшения рабочей температуры катода и понижения работы выхода используются оксидные катоды, когда на подложку (керн) с помощью соответствующих технологических процессов наносится слой окислов щелочноземельных металлов (например, BaO, SrO и др.). Затем катод активируется при пропускании через него термоионного тока при температуре катода около 1300 К. В результате образуется моноатомный слой щелочноземельных атомов, значительно понижающий работу выхода. Например, бариево-стронциевые оксидные катоды имеют работу выхода около 1,8 эВ, благодаря чему значительные токи удается получить уже при температуре около 1100 К. При этой температуре достигается плотность тока порядка 10^4 А·м$^{-2}$. Слой бариево-стронциевого окисла наносится обычно на никелевую трубку, внутри которой в качестве нагревателя используется вольфрамовая нить. Такая конструкция имеет дополнительное преимущество по сравнению с использованием нагретой вольфрамовой нити в качестве катода, поскольку в последнем случае вдоль нити возникает значительное падение потенциала и ее поверхность не будет эквипотенциальной. В оксидном катоде слой окислов является эквипотенциальной поверхностью, что улучшает весьма существенно условия работы катода в целом.



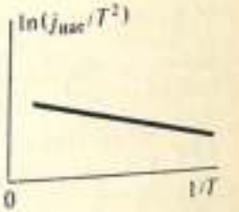
131

Энергетические уровни свободных электронов в металле



132

К расчету силы тока насыщения



133

Зависимость между силой тока насыщения и температурой

○ В чем состоит механизм термоэлектронной эмиссии? Чем обусловлено существование тока насыщения? От каких факторов зависит его сила?
При каких условиях наблюдаются отклонения от закона трех вторых?

Характеристики электронного облака. Облако электронов вблизи поверхности металла описывается формулой (34.4). Число квантовых состояний в элементе фазового объема $dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$

$$g = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\,dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z. \tag{34.5}$$

Поэтому число электронов, заключенных в элементе фазового объема $dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$, представляется в виде

$$dn = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\Phi/(kT)} e^{-p^2/(2m_e kT)}\,dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z, \tag{34.6}$$

где $W_k = p^2/(2m_e)$.

Интегрирование выражения (34.6) по $dx\,dy\,dz$ дает в качестве множителя объем V. Поэтому число электронов в объеме V, импульсы которых заключены в элементе объема $dp_x\,dp_y\,dp_z$, вблизи импульса p_x, p_y, p_z равно

$$dn_p = [2V/(2\pi\hbar)^3] \exp[-\Phi/(kT)] \exp[-p^2/(2m_e kT)]\,dp_x\,dp_y\,dp_z, \tag{34.7}$$

где $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. Отсюда для концентрации электронного облака вблизи поверхности металла получаем выражение

$$n_0' = \frac{1}{V}\int dn_p = \left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\right] \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e kT}\right) dp_x\,dp_y\,dp_z =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi m_e kT}{\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right). \tag{34.8}$$

Средняя кинетическая энергия электронов

$$\langle W_k \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{\int [p^2/(2m_e)]\,dn_p}{\int dn_p} = \frac{3}{2}kT. \tag{34.9}$$

Плотность тока насыщения. Направим ось Z прямоугольной декартовой системы координат нормально к поверхности металла (рис. 132). Электроны дают вклад в плотность тока насыщения компонентой v_z скорости по оси Z. Вклад в плотность тока от одного электрона равен $ev_z = ep_z/m_e$. Следовательно, **плотность тока насыщения** определяется формулой

$$j_{нас} = \frac{e}{m_e}\int_{p_z>0} p_z\,dn_p = \left[\frac{2e}{m_e(2\pi\hbar)^3}\right] \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m_e kT}\right) dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_y^2}{2m_e kT}\right) dp_y \int_0^{\infty} p_z \exp\left(-\frac{p_z^2}{2m_e kT}\right) dp_z =$$

$$= \frac{em_e k^2}{2\pi^2\hbar^3} T^2 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right), \tag{34.10}$$

или

$$j_{нас} = AT^2 \exp[-\Phi/(kT)], \tag{34.11}$$

где постоянная

$$A = em_e k^2/(2\pi^2\hbar^3) = 1{,}2 \cdot 10^6\ \text{А}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-2}. \tag{34.12}$$

Равенство (34.11) называется **формулой Ричардсона – Дешмана.**

Для экспериментальной проверки эту формулу удобно представить в виде

$$\ln(j_{нас}/T^2) = \ln A - \Phi/(kT). \tag{34.13}$$

На графике зависимость $\ln(j_{нас}/T^2)$ от $1/T$ по формуле (34.13) выражается прямой линией (рис. 133). Эксперимент подтверждает такую зависимость с учетом небольшого изменения Φ, которое обусловлено уменьшением μ с температурой [см. (34.2)]. По углу наклона прямой в соответствии с формулой (34.13) определяется работа выхода Φ. По пересечению прямой с осью ординат вычисляется $\ln A$. Величина A по формуле (34.12) должна быть универсальной постоянной, одинаковой для всех металлов. Это заключение не подтверждается экспериментом. Имеется некоторое различие в A для различных металлов. Например, для меди $A = 1{,}1 \cdot 10^6\ \text{А}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-2}$, для никеля $A = 1{,}2 \cdot 10^6\ \text{А}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-2}$, а для платины $A = 0{,}3 \cdot 10^6\ \text{А}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-2}$. Это изменение A обусловлено поверхностными эффектами. Кроме того, у кристалла плотность тока насыщения несколько различается для разных граней.

Закон трех вторых. Рассмотрим зависимость силы тока, протекающего в вакууме между электродами, от приложенной разности потенциалов. Электроды будем считать плоскими, а ось X направим нормально поверхности электродов (рис. 134). Потенциал катода примем за нуль ($\varphi_к = 0$), а потенциал анода обозначим U.

Главным физическим фактором, влияющим на движение электронов между катодом и анодом, является объемный заряд: силы взаимодействия с ним затрудняют движение электронов от катода к аноду под действием приложенной разности потенциалов.

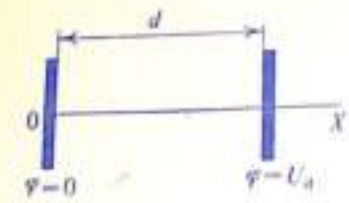
Допустим, что площади пластин катода и анода достаточно велики и при расчете плотности тока вблизи линии, соединяющей центры электродов, можно пренебречь изменением величин в направлениях, перпендикулярных этой линии, т. е. рассматривать одномерную задачу, когда все величины зависят только от координаты x. Уравнение Пуассона для потенциала имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = \frac{n|e|}{\varepsilon_0}, \tag{34.14}$$

где n – концентрация электронов. Закон сохранения энергии для дрейфа электронов имеет вид

$$^1/_2 m_e v_д^2 = |e|\varphi, \tag{34.15}$$

где $v_д$ – скорость дрейфа в точке с потенциалом φ. Объемная плотность тока в этой точке



134

К выводу закона трех вторых

$$|j| = n|e|v_x. \tag{34.16}$$

Все величины в правой части (34.16) являются положительными. Вычислив скорость v_x из (34.15) и подставив полученное уравнение в (34.16), находим

$$n|e| = |j|\left[m_e/(2|e|\varphi)\right]^{1/2}. \tag{34.17}$$

С учетом (34.17) уравнение (34.14) преобразуется к виду

$$d^2\varphi/dx^2 = \alpha/\sqrt{\varphi}, \tag{34.18}$$

где $\alpha = (|j|/\varepsilon_0)\sqrt{m_e/(2|e|)}$. Умножая обе части (34.18) на $(d\varphi/dx) = \dot{\varphi}$, получаем

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = \alpha\dot{\varphi}/\sqrt{\varphi}, \tag{34.19}$$

где точками обозначено дифференцирование по x. Учитывая, что

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2)\cdot/2,\ \dot{\varphi}/\sqrt{\varphi} = 2(\sqrt{\varphi})\cdot, \tag{34.20}$$

запишем (34.19) так:

$$(\dot{\varphi}^2)\cdot = 4\alpha(\sqrt{\varphi})\cdot. \tag{34.21}$$

Теперь можно проинтегрировать обе части (34.21) по x в пределах от 0 до того значения x, при котором потенциал равен φ. Тогда

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0^2 = 4\alpha\sqrt{\varphi}, \tag{34.22}$$

где учтено, что $\varphi(0) = 0$. Производная $(d\varphi/dx)_0$ характеризует напряженность электрического поля у катода, α – пропорциональна j. Поэтому объемная плотность тока j достигает максимума при $(d\varphi/dx)_0 = 0$ и тогда [см. (34.22)]

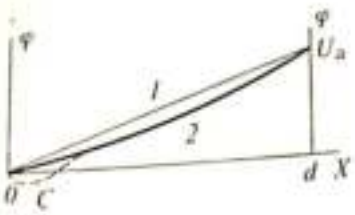
$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{\alpha}\,\varphi^{1/4}, \tag{34.23}$$

или

$$\frac{d\varphi}{\varphi^{1/4}} = 2\sqrt{\alpha}\,dx. \tag{34.24}$$

Интегрируя обе части (34.24) в пределах от $x = 0$, $\varphi = 0$ до $x = d$, $\varphi = U$, получаем

$$U^{3/4} = \frac{3}{2}d\sqrt{\alpha}. \tag{34.25}$$



135

Влияние объемного заряда на распределение потенциала между катодом и анодом

Возводя обе части (34.25) в квадрат и учитывая, что

$$\alpha = (|j|/\varepsilon_0)\sqrt{m_e/(2|e|)}, \tag{34.26}$$

получаем

$$|j| = \beta U^{3/2}, \tag{34.27}$$

где

$$\beta = \frac{4\varepsilon_0}{9d^2}\left(\frac{2|e|}{m_e}\right)^{1/2}. \tag{34.28}$$

Расчет аналогичной задачи для коаксиальных цилиндрических электродов, для концентрических сферических электродов приводит к такому же виду зависимости объемной плотности тока от разности потенциалов в степени три вторых. Впрочем, такую зависимость можно было бы ожидать и без расчетов с помощью анализа размерностей. Коэффициент β во всех случаях имеет одинаковую размерность, как это следует из уравнения Пуассона, записанного в различных системах координат.

При отсутствии объемного заряда между катодом и анодом изменение потенциала происходит по линейному закону (рис. 135; прямая *1*). Объемный заряд изменяет этот ход. Ясно, что вблизи катода объемный заряд уменьшает силы, действующие на электроны при отсутствии объемного заряда, а вблизи анода увеличивает. Поэтому изменение потенциала между электродами с учетом объемного заряда характеризуется кривой *2*.

Вывод формулы (34.27) приведен в предположении, что электроны покидают катод с нулевой скоростью. Однако они могут покидать катод с конечной скоростью эмиссии. В этом случае ток будет существовать даже в том случае, если вблизи катода имеется небольшое обратное поле. Следовательно, объемная плотность заряда может измениться до таких значений, при которых потенциал вблизи катода уменьшится до отрицательных значений. В результате этого ход потенциала вблизи катода будет характеризоваться пунктирной кривой *С*.

При достаточно большой разности потенциалов наблюдается отклонение от закона трех вторых. *Оно наступает тогда, когда объемная плотность заряда уменьшается настолько, что поддержание нулевого электрического поля у поверхности катода оказывается невозможным и, следовательно, будет невыполнимым условие* $(d\varphi/dx)_0 = 0$, *при котором был введен закон трех вторых.* При дальнейшем увеличении напряженности объемная плотность тока становится независимой от разности потенциалов (ток насыщения).

Закон трех вторых здесь рассмотрен в качестве примера нелинейного соотношения между силой тока и напряжением. Он не имеет универсального характера и даже в приведенном случае справедлив лишь в сравнительно узком интервале напряжений и токов. Нелинейность вольтамперной характеристики является наиболее важной особенностью многих элементов радио- и электротехнических схем, включая элементы твердотельной электроники.

Задачи

5.1. Концентрация электронов проводимости в меди равна $n_0 = 8{,}5 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$. Определить среднюю скорость дрейфа электронов проводимости при плотности тока $j = 10$ А/мм^2.

5.2. Через электролит прошло $|Q|$ кулонов электричества. Подвижности ионов равны $b^{(+)}$ и $b^{(-)}$. Какое количество электричества перенесено положительными и отрицательными ионами?

5.3. Две электролитические ванны с растворами $AgNO_3$ и $CuSO_4$ соединены последовательно. Определить массу серебра, выделившегося за то время, в течение которого выделилось 10 мг меди?

5.4. Электролиз $AgNO_3$ проводится при разности потенциалов 4 В. Какая электрическая энергия расходуется для выделения 100 мг серебра?

5.5. Проводящая металлическая лента толщиной $a = 0{,}1$ мм и шириной $d = 5$ см помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл, направленной перпендикулярно поверхности ленты. По ленте течет ток силой $I = 1{,}6$ А. Найти холловскую разность потенциалов.

5.6. В газоразрядной трубке между электродами с площадью поперечного сечения 1 см^2, расположенными на расстоянии 3 см друг от друга, сила тока насыщения равна $I_н = 10^{-7}$ А. Разряд несамостоятельный. Какое число элементарных зарядов каждого из знаков возникает ежесекундно в 1 см^3 объема трубки.

Ответы

5.1. $v_д = 0{,}0736$ см/с. **5.2.** $|Q^{(+)}| = \dfrac{b^{(-)}|Q|}{b^{(-)} + b^{(+)}}$, $|Q^{(-)}| = \dfrac{b^{(+)}|Q|}{b^{(-)} + b^{(+)}}$. **5.3.** 34 мг. **5.4.** 360 Дж. **5.5.** 10^{-3} В. **5.6.** $N \approx 2 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$ · см$^{-3}$.

§ 35 Закон полного тока

§ 36 Уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля

§ 37 Векторный потенциал

§ 38 Магнитное поле при наличии магнетиков

§ 39 Силы в магнитном поле

6

Стационарное магнитное поле

Стационарное магнитное поле обусловлено электрическими токами. Его нельзя осуществить движением отдельного заряда, поскольку в этом случае магнитное поле неизбежно переменно. Тем не менее с помощью принципа суперпозиции делается заключение о создании поля отдельным движущимся зарядом.

§ 35. Закон полного тока

Дается вывод дифференциальной формы закона полного тока. Обсуждается экспериментальная проверка закона полного тока.

Постановка задачи. Так же как и в электростатике, нам необходимо получить дифференциальную формулировку законов магнитного поля. В электростатике это было сделано, исходя из закона Кулона и принципа суперпозиции как экспериментальных положений. Их интегральная формулировка дается теоремой Гаусса, из которой следует дифференциальное уравнение (13.20).

В случае магнитного поля можно, в принципе, поступить аналогично, а именно, можно исходить из закона Био – Савара (10.10) или (10.11) и принципа суперпозиции для магнитного поля как экспериментальных факторов. Их интегральная формулировка называется законом полного тока (в данной главе для случая стационарных полей), из которых получается соответствующее дифференциальное уравнение. Однако можно поступить по-другому и продолжить теоретический вывод законов магнитного поля из законов электрического поля с помощью теории относительности (см. § 8, 9). Поэтому исходим из формулы (9.28) для индукции магнитного поля тока, текущего по прямолинейному бесконечному проводнику, которая была получена теоретически.

Интегральная формулировка закона полного тока. Линии индукции магнитного поля, порождаемого током, текущим по прямолинейному бесконечному тонкому проводнику, являются концентрическими окружностями, центр которых лежит на линии тока. Значение индукции дается формулой (9.28). Вычислим циркуляцию вектора $\mathbf{B}$

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} \tag{35.1}$$

по некоторому замкнутому вокруг тока I контуру L (рис. 136). Поскольку линии $\mathbf{B}$ лежат в плоскостях, перпендикулярных линии тока I, контур L следует выбрать лежащим в одной из плоскостей.

Используя при вычислении интеграла (35.1) обозначения, показанные на рис. 137, *а*, получаем

$$\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B\,dl\cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = B\,dl_\perp. \tag{35.2}$$

По определению, $d\alpha = dl_\perp/r$. Принимая во внимание формулу (10.3), перепишем (35.2) в виде

$$\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}dl_\perp = \frac{\mu_0}{2\pi}I\,d\alpha. \tag{35.3}$$

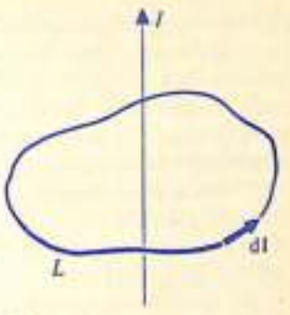
Тогда

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}I\oint_L d\alpha = \mu_0 I, \tag{35.4}$$

где учтено, что интеграл от $d\alpha$ по замкнутому контуру, окружающему начало координат, равен 2π. Следовательно, циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по замкнутому контуру вокруг тока не зависит от вида контура и определяется только силой тока.

Если замкнутый контур L' не охватывает ток I (рис. 137, *б*), то

$$\oint_{L'} d\alpha = 0, \tag{35.5}$$



136

Вычисление циркуляции вектора $\mathbf{B}$ по замкнутому контуру

т. е. циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по замкнутому контуру, не охватывающему ток, равна нулю. Поэтому полученные результаты могут быть сформулированы так:

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} \mu_0 I & \text{(контур интегрирования охватывает ток),} \\ 0 & \text{(контур интегрирования не охватывает ток).} \end{cases} \tag{35.6}$$

Представим себе, что имеется большое число токов и контур охватывает часть из них (рис. 138). Индукция магнитного поля в каждой точке контура по принципу суперпозиции равна сумме индукции магнитных полей, создаваемых каждым из токов:

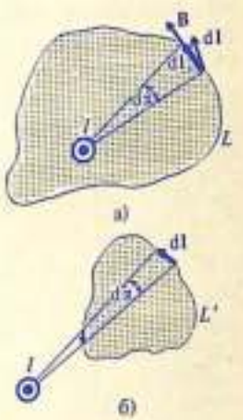
$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i. \tag{35.7}$$

Подставляя $\mathbf{B}$ в левую часть (35.6), получаем

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \oint_L \Big(\sum_i \mathbf{B}_i\Big)\cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_L \mathbf{B}_i\cdot d\mathbf{l} = \sum_k \mu_0 I_k = \mu_0 I, \tag{35.8}$$

где индексом k обозначены лишь токи, охватываемые контуром L. Токи, не охватываемые L, не дают вклада в интеграл. Следовательно, сила тока I в (35.8) есть сумма всех сил токов, охватываемых контуром. Поэтому в общем случае **закон полного тока** может быть сформулирован в виде

$$\boxed{\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,} \tag{35.9}$$



137

Ток I направлен перпендикулярно плоскости чертежа вверх. Положительный обход контура против часовой стрелки



138

Обобщение закона полного тока на произвольную совокупность токов

где I – сила полного тока, охватываемого контуром L. Если сила полного тока равна нулю, то и циркуляция равна нулю. Этот случай реализуется не только тогда, когда контур не охватывает никакого тока, но и тогда, когда охватываемые токи текут в противоположных направлениях и в сумме дают нуль. Например, циркуляция $\mathbf{B}$ по контуру, охватывающему два равных по силе тока, текущих в противоположных направлениях, равна нулю. В формуле (35.9) знак тока I учитывается по общему правилу (см. § 14): если направление обхода контура L и направление тока связаны правилом правого винта, то знак I положителен.

В противном случае знак I отрицателен.

Выражение (35.9) закона полного тока для вакуума в стационарном случае является непосредственным следствием соотношения (9.28) и может быть проверено экспериментально. Этот закон выше был выведен для тока, текущего по прямому бесконечному проводнику, но сейчас станет очевидным, что он справедлив и для произвольного тока.

Дифференциальная форма закона полного тока. Перепишем формулу (35.9) для объемных токов. Обозначим S – поверхность, охватываемую контуром L. Как обычно, положительная нормаль к поверхности связана с направлением обхода контура L правилом правого винта.

Сила полного тока I, протекающего через поверхность, равна

$$I = \int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}, \tag{35.10}$$

где $\mathbf{j}$ – объемная плотность тока. Следовательно, закон полного тока (35.9) принимает вид

$$\int_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}. \tag{35.11}$$

Левую часть равенства (35.11) можно преобразовать по теореме Стокса в интеграл по поверхности:

$$\int_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}. \tag{35.12}$$

и представить равенство (31.11) в виде

$$\int_S [\operatorname{rot}\mathbf{B} - \mu_0\mathbf{j}]\cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{35.13}$$

Равенство нулю интеграла (35.13) должно соблюдаться при произвольном выборе поверхности S. Следовательно, подынтегральное выражение равно нулю:

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}} \tag{35.14}$$

Равенство (35.14) является **дифференциальной формой закона полного тока.** Оно имеет дифференциальный характер и справедливо в каждой точке. Отсюда следует, что *оно справедливо для произвольного поля, хотя и выведено для поля, порождаемого током, текущим по прямолинейному бесконечному проводнику.*

Теперь можно доказать, что закон полного тока (35.9) справедлив для произвольных токов, а не только для прямолинейных. Для доказательства возьмем произвольные токи и проведем произвольную поверхность S, ограниченную замкнутым контуром L. Умножая обе части (35.14) на элемент $d\mathbf{S}$ этой поверхности и интегрируя по dS, находим

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}. \tag{35.15}$$

Левую часть (35.15) преобразуем по теореме Стокса (35.12) в интеграл по контуру, а правую часть с помощью (35.10) выразим через полный ток I, пересекающий поверхность. В результате (35.15) принимает вид (35.9). Это доказывает, что закон (35.9) справедлив для произвольных токов и произвольных контуров. Отметим также, что при вычислении силы полного тока по формуле (35.10) можно выбрать любую поверхность S, натянутую на контур L. Отсюда следует, что уравнение (35.14) было получено, исходя из закона Кулона, принципа суперпозиции для напряженности электрического поля, инвариантности заряда и формул теории относительности. Закон Био – Савара в форме (10.10) или (10.11) получается из (35.14) как решение этого уравнения в случае отсутствия токов на бесконечности [см. (37.11в)].

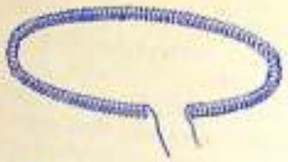
Экспериментальная проверка закона полного тока. Для демонстрации закона полного тока и для его экспериментальной проверки с не очень большой точностью можно воспользоваться поясом Роговского. Он представляет собой гибкую проволочную спираль, выполненную в виде пояса (рис. 139), концы которой присоединены к гальванометру. Действие пояса основано на законе электромагнитной индукции Фарадея (см. гл. 8): при изменении магнитного поля в цепи спирали пояса Роговского возникает электрический ток. По показаниям гальванометра можно определить

$$\int_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}, \tag{35.16}$$

где L – контур, совпадающий с осью спирали пояса Роговского.

Для демонстрации закона полного тока (35.9) достаточно расположить пояс Роговского в виде замкнутого контура, совпадающего с контурами L и L' (см. рис. 137). При включении тока в случае, показанном на рис. 137, *а*, наблюдается отклонение стрелки гальванометра, по которому можно убедиться, что интеграл равен $\mu_0 I$. В случае, изображенном на рис. 137, *б*, отброс гальванометра отсутствует, что означает равенство нулю циркуляции вектора $\mathbf{B}$ по контуру L'.

Вывод дифференциальной формы непосредственным дифференцированием формулы Био – Савара. Формула (35.14) получается



139

Пояс Роговского



140

Коаксиальный кабель

сразу, если взять операцию rot от обеих частей формулы (10.11), выражающей закон Био – Савара. В правой части операция rot применяется только к подынтегральному выражению, поскольку объем V интегрирования не зависит от переменных, по которым выполняется операция. От этих переменных $\mathbf{j}$ в подынтегральном выражении не зависит, а зависит лишь $\mathbf{r}$ и r. Вычислив rot и проведя интегрирование, получим формулу (35.14). Эти вычисления можно провести в качестве упражнения.

Пример 35.1. *С помощью закона полного тока найти индукцию магнитного поля в коаксиальном кабеле, который используется для передачи постоянного тока* (рис. 140). *Ток течет по центральной жиле радиусом r_1 и возвращается по оболочке, внутренний и внешний радиусы которой равны r_2 и r_3. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком.*

Учитывая осевую симметрию магнитного поля, по закону полного тока получаем

$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_r}{r},$$

где I_r – сила тока, охватываемого круговым контуром радиусом r. Плотность тока в жиле $j_1 = I/(\pi r_1^2)$. Поэтому при $0 < r < r_1$ имеем $I_r = j_1\pi r^2 = Ir^2/r_1^2$ и, следовательно,

$$B = \mu I r/(2\pi r_1^2).$$

При $r_1 < r < r_2$ имеем $I_r = I = \text{const}$ и, следовательно,

$$B = \mu I/(2\pi r).$$

При $r_2 < r < r_3$ контур охватывает встречный ток, плотность которого

$$j_2 = I/[\pi(r_3^2 - r_2^2)].$$

Тогда сила тока, охватываемого контуром при $r_2 < r < r_3$, и индукция магнитного поля равны:

$$I_r = I - I\frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2},$$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}\right).$$

Вне кабеля индукция поля обращается в нуль.

● **Если магнитная проницаемость тела больше чем среды, то оно ведет себя как парамагнетик, если меньше – как диамагнетик. Циркуляция вектора индукции по замкнутому контуру вокруг тока не зависит от вида контура и определяется только силой тока.**

§ 36. Уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля

Дается формулировка уравнений Максвелла для частного случая стационарного магнитного поля и обсуждаются типы решаемых задач.

Уравнение для div B. Вычислим $\operatorname{div}\mathbf{B}$, исходя из формулы Био – Савара (10.11):

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \operatorname{div}\left(\mathbf{j}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)dV, \tag{36.1}$$

где операция div введена под знак интеграла на том основании, что пределы интегрирования (объем V) не зависят от переменных, по которым производится дифференцирование при вычислении div. Для дальнейших преобразований формул целесообразно выписать в явном виде переменные в уравнении (36.1). Пусть $\mathbf{B}$ – индукция поля в точке (x, y, z), т. е. $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$. Вычисление div сводится к дифференцированиям по x, y, z. Текущие координаты точек интегрирования в подынтегральном выражении (36.1) обозначим x', y', z'. Тогда

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(x', y', z'),\ \mathbf{r} = \mathbf{i}_x(x' - x) + \mathbf{i}_y(y' - y) + \mathbf{i}_z(z' - z),$$
$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},\ dV = dx'\,dy'\,dz'. \tag{36.2}$$

По формуле (П.15) имеем

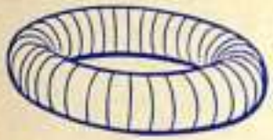
$$\operatorname{div}\left(\mathbf{j}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{j} - \mathbf{j}\cdot\operatorname{rot}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \tag{36.3}$$

поскольку первый член в правой части равен нулю из-за независимости $\mathbf{j}$ от координат (x, y, z), по которым выполняется дифференцирование при вычислении rot. Равенство второго члена нулю доказывается прямым вычислением $\operatorname{rot}(\mathbf{r}/r^3) = 0$. Равенство нулю $\operatorname{rot}(\mathbf{r}/r^3)$ является следствием центральной симметрии поля вектора $\mathbf{r}/r^3$. Нетрудно показать, что любое центрально-симметричное поле потенциально. Рекомендуется это проделать в качестве упражнения.

Таким образом, подынтегральное выражение в (36.1) тождественно равно нулю и, следовательно,

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.} \tag{36.4}$$

Из равенства (36.4) заключаем (см. § 13), что линии $\mathbf{B}$ не имеют источников. Это означает, что *нет магнитных зарядов, которые создавали бы магнитное поле, как электрические заряды создают электрическое поле.* Линии $\mathbf{B}$ не имеют ни начала, ни конца. Они являются либо замкнутыми линиями, либо уходят на бесконечность. Отсутствие начал и концов у таких линий очевидно. Однако могут существовать



141

При иррациональном отношении длины окружности тора к шагу спирали силовая линия не замкнута

ществовать незамкнутые линии, заключенные в конечной области пространства и тем не менее не имеющие ни начала, ни конца. Рассмотрим, например тор (рис. 141), на поверхность которого наматывается спираль. Если отношение длины большой окружности тора к шагу спирали является иррациональным числом, то линия никогда не замкнется и будет бесконечное число раз обвивать тор. Такая линия является примером незамкнутой линии без начала и конца, заключенной в конечной области пространства. Линии **B** такого типа нетрудно реализовать на опыте. Для этого перпендикулярно плоскости тора по его оси необходимо пропустить ток I_1, а по большой окружности, совпадающей с осью спирали тора, ток I_2. При определенных соотношениях между I_1 и I_2 будут реализованы указанные выше условия незамкнутости линии **B**.

Уравнения Максвелла. Уравнения (35.14) и (36.4) составляют систему уравнений Максвелла для магнитного поля, порожденного постоянными токами в вакууме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \tag{36.5}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{36.6}$$

Решение этих уравнений позволяет найти **B**, если известна **j**. Число неизвестных скалярных величин в этих уравнениях равно трем (B_x, B_y, B_z), а общее число скалярных уравнений для их определения равно четырем [три скалярных уравнения, получающихся из первого векторного уравнения и еще одно скалярное уравнение (36.6)]. Таким образом, число уравнений больше, чем число неизвестных, однако это не делает систему переопределенной (см. § 58).

Тип решаемых задач. С помощью уравнений (36.5) и (36.6) можно решить две задачи:

1. Зная индукцию магнитного поля, найти объемную плотность токов.

Для этого надо вычислить rot **B** по уравнению (36.5).

● Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ показывает, что линии вектора не имеют ни начала, ни конца: они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность, либо сосредоточены в конечной области пространства, но начала и конца не имеют. Это означает, что нет магнитных зарядов, которые создают магнитное поле так, как электрические заряды создают электрическое поле. Для определения трех проекций вектора магнитной индукции имеются четыре скалярных уравнения (36.5) и (36.6). Однако это не делает систему уравнений переопределенной (см. § 58).

○ Можете ли вы привести пример линии, которая вся находится в конечной области пространства, но не имеет ни начала ни конца?

2. Зная плотность токов, найти индукцию магнитного поля, которое они порождают. Для этого надо решить эти уравнения при неизвестных **j**. Методы решения уравнения будут рассмотрены позднее, а сейчас заметим, что для случая, когда все токи сосредоточены в конечной области пространства, решение дается формулой Био – Савара (10.11):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \tag{36.7}$$

Из-за сложной структуры подынтегрального выражения и его векторного характера вычисления получаются довольно громоздкими. Для их упрощения целесообразно ввести векторный потенциал.

§ 37. Векторный потенциал

Обсуждаются свойства векторного потенциала и его калибровка. Вычисляется индукция поля элементарного тока.

Возможность введения векторного потенциала. Известное из векторного анализа тождество $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ показывает, что решение уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{37.1}$$

может быть представлено в виде

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{37.2}$$

где **A** – векторный потенциал магнитного поля.

Неоднозначность векторного потенциала. Поле с заданной индукцией **B** может быть описано не каким-то одним векторным потенциалом, а многими векторными потенциалами. Чтобы в этом убедиться, докажем, что если потенциал **A** описывает поле с индукцией **B**, то и другой потенциал

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \tag{37.3}$$

при произвольной функции χ описывает то же самое поле **B**. Для доказательства вычислим индукцию поля **B**′, описываемого потенциалом **A**′:

$$\mathbf{B}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}, \tag{37.4}$$

поскольку $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$.

Неоднозначность векторного потенциала аналогична неоднозначности скалярного потенциала в теории электростатического поля, только *там потенциал был определен с точностью до произвольной постоянной, а здесь – с точностью до произвольной функции определенного класса.*

Калибровка потенциала. Пользуясь неоднозначностью в выборе потенциала, можно наложить на потенциал определенное условие. В магнитостатике чаще всего оно выбирается в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{37.5}$$

и называется **условием калибровки потенциала.** Его роль аналогична роли нормировки скалярного потенциала в электростатике. В частности, *произвол в выборе векторного потенциала показывает, что векторный потенциал имеет лишь вспомогательное значение и не может быть измерен экспериментально.*

Уравнение для векторного потенциала. Подставляя (37.2) в (36.5), получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \tag{37.6}$$

Из векторного анализа известно, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{37.7}$$

и поэтому (37.6) принимает вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \tag{37.8}$$

где принята во внимание калибровка (37.5). Распишем уравнение (37.8) в координатах:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z. \tag{37.9}$$

Таким образом, каждая из компонент векторного потенциала подчиняется уравнению Пуассона (см. § 15). В частности, если все токи сосредоточены в конечной области пространства, то по аналогии с функцией (14.35), являющейся решением (15.14), можно написать решение уравнений (37.9) в виде:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_x \, dV}{r}, \quad A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_y \, dV}{r}, \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_z \, dV}{r} \tag{37.10}$$

или в векторной форме

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} \, dV.} \tag{37.11а}$$

Для линейного тока

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \, d\mathbf{l}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \int_{L_i} \frac{d\mathbf{l}}{r}, \tag{37.11б}$$

где L_i – контуры токов. В каждом из них сила тока I_i, вообще говоря, различна. При интегрировании по замкнутому контуру конкретного тока L_i силу тока I_i можно вынести за знак интеграла, как это обозначено в сумме (37.11б).

Найдя векторный потенциал, можно по формуле (37.2) определить соответствующую ему индукцию магнитного поля.

Закон Био – Савара. Из (37.11а) по формуле (37.2) получаем следующее выражение для индукции магнитного поля:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \operatorname{rot} \left[\frac{\mathbf{j}(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] dx' \, dy' \, dz',$$

где в явном виде выписаны координаты точки наблюдения, в которой вычисляется ротор, и текущие координаты (x', y', z') точки интегрирования. Операция ротор включает в себя вычисление частных производных по (x, y, z). Учитывая формулу векторного анализа $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A}$, получаем

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{rot} \mathbf{j} + \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

где $\operatorname{rot} \mathbf{j} = 0$, поскольку $\mathbf{j}$ не зависит от переменных, по которым вычисляется ротор, и $\operatorname{grad}(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$. Следовательно, получаем формулу

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV,} \tag{37.11в}$$

выражающую **закон Био – Савара.** Тем самым завершается вывод основных законов магнитостатического поля из законов электростатического поля с помощью теории относительности.

Поле элементарного тока. Вычислим векторный потенциал и индукцию поля элементарного замкнутого тока, т. е. линейного тока, обтекающего поверхность с бесконечно малыми линейными размерами в физическом смысле. Контур, по которому течет линейный ток I, выберем в виде параллелограмма со сторонами l_1, l_2, l_3, l_4 (рис. 142). Начало координат поместим в точку O поверхности, обтекаемой током. Выбор точки O не имеет значения, поскольку контур и поверхность бесконечно малые. Потенциал вычисляется в точке, характеризуемой радиус-вектором $\mathbf{r}$. По формуле (37.11б) получаем

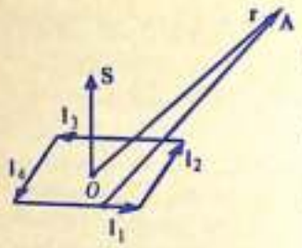
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{l_1 l_2 l_3 l_4} \frac{d\mathbf{l}}{r}, \tag{37.12}$$

где произведен переход к линейным токам ($\mathbf{j} \, dV \to I \, d\mathbf{l}$).

Поскольку длины сторон параллелограмма бесконечно малы, при интегрировании в (37.12) по каждой из его сторон значение r может считаться постоянным и равным, например, расстоянию от точки, в которой определяется поле до середины стороны. Поэтому [см. (37.12)]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{1}{r_1} \int_{l_1} d\mathbf{l} + \frac{1}{r_2} \int_{l_2} d\mathbf{l} + \frac{1}{r_3} \int_{l_3} d\mathbf{l} + \frac{1}{r_4} \int_{l_4} d\mathbf{l} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{\mathbf{l}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{l}_2}{r_2} + \frac{\mathbf{l}_3}{r_3} + \frac{\mathbf{l}_4}{r_4} \right). \tag{37.13}$$



142

Элементарный ток

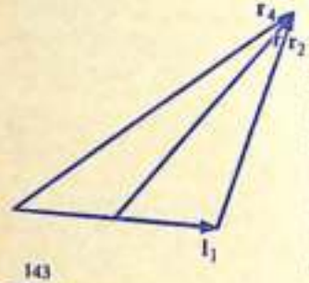
Учитывая, что $\mathbf{l}_1 = -\mathbf{l}_3$ и $\mathbf{l}_2 = -\mathbf{l}_4$, находим:

$$\frac{\mathbf{l}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{l}_3}{r_3} = \mathbf{l}_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}\right) =$$

$$= \mathbf{l}_1\left(\frac{r_3 - r_1}{r_1 r_2}\right) \approx \frac{\mathbf{l}_1(-\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^3} = -\frac{\mathbf{l}_1(\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^3},$$

$$\frac{\mathbf{l}_2}{r_2} + \frac{\mathbf{l}_4}{r_4} = \mathbf{l}_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4}\right) =$$

$$= \mathbf{l}_2\left(\frac{r_4 - r_2}{r_2 r_4}\right) = \frac{\mathbf{l}_2(\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \qquad (37.14)$$



143

Вычисление разности расстояний от двух точек

где принято во внимание, что при вычислениях можно пренебречь бесконечно малыми высших порядков. Например, на рис. 143 показаны геометрические построения, использованные при вычислениях второй серии равенств (37.14):

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_2, \qquad (37.15)$$

откуда

$$r_4^2 = l_1^2 + r_2^2 + 2\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \qquad (37.16)$$

и, следовательно,

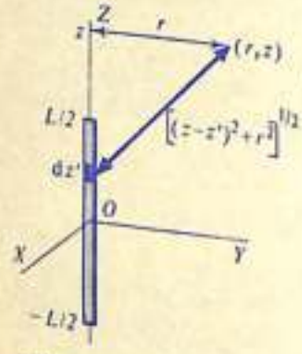
$$r_4^2 - r_2^2 = (r_4 - r_2)(r_4 + r_2) = l_1^2 + 2\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_2. \qquad (37.17)$$

Тогда

$$r_4 - r_2 = \frac{2\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + l_1^2}{r_4 + r_2} \approx \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}/r. \qquad (37.18)$$

Здесь сохранены лишь члены первого порядка малости по $\mathbf{l}_1$. С помощью равенств вида (37.18) получаются формулы (37.14). С учетом (37.14) выражение для потенциала (37.13) принимает вид

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}[\mathbf{l}_2(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{l}_1(\mathbf{l}_2\cdot\mathbf{r})]. \qquad (37.19)$$



144

К расчету потенциала от конечного участка прямолинейного тока

Из векторной алгебры известно разложение двойного векторного произведения:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}), \qquad (37.20)$$

которое показывает, что выражение в квадратных скобках в (37.19) можно представить в виде

$$\mathbf{l}_2(\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{l}_1(\mathbf{l}_2\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{r}\times(\mathbf{l}_2\times\mathbf{l}_1) = (\mathbf{l}_1\times\mathbf{l}_2)\times\mathbf{r}. \qquad (37.21)$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \mathbf{S} \qquad (37.22)$$

– вектор элемента поверхности, обтекаемой током, перепишем (37.19) с учетом (37.21) и (37.22):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathbf{S}\times\mathbf{r}}{r^3}. \qquad (37.23)$$

Величина

$$I\mathbf{S} = \mathbf{p}_m \qquad (37.24)$$

играет чрезвычайно важную роль в магнетизме и называется **магнитным моментом** элементарного тока. Он по модулю равен произведению силы тока в контуре на площадь, охватываемую контуром. По направлению он совпадает с направлением положительной нормали к поверхности.

Представим векторный потенциал элементарного тока в виде

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{p}_m\times\mathbf{r}}{r^3},} \qquad (37.25)$$

откуда

$$\boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{3(\mathbf{p}_m\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}\right\}.} \qquad (37.26)$$

Формула (37.26) показывает, что *индукция поля магнитного момента убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния, в то время как индукция поля элемента тока убывает обратно пропорционально квадрату расстояний.* Это обусловлено тем, что индукция поля магнитного момента слагается из индукций полей элементов тока, текущих в противоположных направлениях на очень малых расстояниях друг от друга.

Пример 37.1. *Найти вектор-потенциал и индукцию поля, создаваемого прямолинейным участком линейного проводника длиной L, по которому протекает ток I.*

Имеется в виду, что данный участок составляет часть замкнутой цепи. По принципу суперпозиции этот потенциал войдет слагаемым в полный потенциал от тока по замкнутой цепи и поэтому его вычисление имеет физический смысл, хотя незамкнутого постоянного тока не существует.

Поместим начало координат в середине рассматриваемого участка проводника, направив ось Z вдоль проводника (рис. 144). Поскольку магнитное поле прямолинейного тока аксиально симметрично, достаточно вычислить индукцию в точках плоскости ZY. Координаты точки в этой плоскости будем характеризовать расстоянием r от оси Z и координатой z. Из формулы (37.11б) следует, что отличной от нуля является только компонента A_x, поскольку ток течет в направлении оси Z. Тогда

$$A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz'}{[(z-z')^2+r^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{-z+L/2+[(z-L/2)^2+r^2]^{1/2}}{-(z+L/2)+[(z+L/2)^2+r^2]^{1/2}}\right]. \qquad (37.27)$$

Индукция вычисляется по формуле

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

которую надо расписать в цилиндрических координатах. Единственной отличной от нуля проекцией индукции $\mathbf{B}$ является B_φ, где φ – аксиальный угол цилиндрической системы координат, причем

$$B_\varphi = -\partial A_z/\partial r. \tag{37.28}$$

На рисунке в точках плоскости ZY $\mathbf{B}_\varphi$ является компонентой, направленной перпендикулярно этой плоскости в сторону отрицательных значений оси X. По формуле (37.28) с помощью (37.27) получаем

$$B_\varphi = -\partial A_z/\partial r = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\frac{-z + L/2}{[r^2 + (z - L/2)^2]^{1/2}} + \frac{z + L/2}{[r^2 + (z + L/2)^2]^{1/2}}\right]. \tag{37.29}$$

Для бесконечного прямолинейного проводника из (37.27) и (37.29) находим:

$$A_z(L \to \infty) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + \text{const}, \tag{37.30}$$

$$B_\varphi(L \to \infty) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{37.31}$$

Пример 37.2. *Найти векторный потенциал и индукцию, создаваемые током, текущим по коаксиальному кабелю* (рис. 140). *Материал проводников и пространство между ними немагнитны.*

Потенциал подчинется уравнению (37.8). Из-за аксиальной симметрии задачи удобно пользоваться цилиндрической системой координат, ось Z которой совпадает с осью кабеля. Очевидно, что от z и аксиального угла φ потенциал не зависит, т. е. $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r)$. Кроме того, если от нуля отлична лишь компонента j_z плотности тока, то отличной от нуля будет компонента A_z векторного потенциала, которую необходимо найти. Обозначим эту компоненту A. Индекс показывает область, к которой эта компонента относится. Таким образом, A_1, A_2, A_3, A_4 – векторные потенциалы соответственно в областях $(0, r_1)$, (r_1, r_2), (r_2, r_3), (r_3, ∞). Тогда [см. (37.8)]

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 A_1 = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi r_1^2} && (0 < r < r_1),\\
&\nabla^2 A_2 = 0 && (r_1 < r < r_2),\\
&\nabla^2 A_3 = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} && (r_2 < r < r_3),\\
&\nabla^2 A_4 = 0 && (r_3 < r < \infty),
\end{aligned} \tag{37.32}$$

где $j_1 = I/(\pi r_1^2)$, $j_2 = 0$, $j_3 = I/[\pi(r_3^2 - r_2^2)]$, $j_4 = 0$.

Решение уравнений (37.32) таково:

$$\begin{aligned}
&A_1 = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi r_1^2} + C_1 \ln r + C_2 && (0 < r < r_1),\\
&A_2 = C_3 \ln r + C_4 && (r_1 < r < r_2),
\end{aligned} \tag{37.33}$$

$$\begin{aligned}
&A_3 = \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi(r_3^2 - r_2^2)} + C_5 \ln r + C_6 && (r_2 < r < r_3),\\
&A_4 = C_7 \ln r + C_8 && (r_3 < r < \infty).
\end{aligned}$$

Индукцию магнитного поля находим по формуле $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, которая в данном случае сводится к выражению $B_\varphi = -\partial A/\partial r$.

Поскольку B_φ – единственная, отличная от нуля, проекция магнитной индукции, индекс φ в дальнейшем не будем выписывать. Индекс обозначает область, к которой относится значение B. Тогда

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} - \frac{C_1}{r}, \tag{37.34}$$

Из конечности B_1 при $r = 0$ заключаем, что $C_1 = 0$. Выберем в качестве условия нормировки $A_1(0) = 0$. Это дает $C_2 = 0$ и поэтому выражения для A_2 и B_2 принимают вид:

$$A_1 = -\mu_0 I r^2/(4\pi r_1^2), \quad B_1 = \mu_0 I r/(2\pi r_1^2). \tag{37.35}$$

Для области $r_1 < r < r_2$ получаем

$$B_2 = -C_3/r. \tag{37.36}$$

Пользуясь граничными условиями для $\mathbf{B}$ и учитывая, что $\mu = \mu_0$, получаем $B_2(r_1) = B_1(r_1) = -C_3/r_1 = \mu_0 I/(2\pi r_1)$. Следовательно, $C_3 = -\mu_0 I/(2\pi)$.

Запишем условие непрерывности векторного потенциала при $r = r_1$ в виде $C_3 \ln r_1 + C_4 = -\mu_0 I/(4\pi)$, что приводит к равенству $C_4 = -\mu_0 I/(4\pi) + [\mu_0 I/(2\pi)] \ln r_1$. Поэтому выражения для векторного потенциала и магнитной индукции при $r_1 < r < r_2$ принимают вид

$$A_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{37.37}$$

Индукция в оболочке кабеля $(r_2 < r < r_3)$ равна

$$B_3 = -\frac{\partial A_3}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} - \frac{C_5}{r}.$$

Из граничных условий $B_2(r_2) = B_3(r_2)$ и $A_2(r_2) = A_3(r_2)$ находим:

$$C_5 = -\frac{\mu_0 I r_3^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)},$$

$$C_6 = -\frac{\mu_0 I r_3^2}{4\pi(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{\mu_0 I r_3^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} \ln r_2 - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

откуда

$$A_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r}{r_2} + 2 \ln \frac{r_2}{r_1}\right], \tag{37.38}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I (r_3^2 - r^2)}{2\pi r (r_3^2 - r_2^2)}.$$

Пользуясь граничными условиями, при $r = r_3$ находим для векторного потенциала и индукции магнитного поля для $r_3 < r < \infty$ выражения

$$A_4 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \ln \frac{r_2}{r_1}\right] = \text{const}, \tag{37.39}$$

$$B_4 = 0.$$

§ 38. Магнитное поле при наличии магнетиков

Рассматриваются влияние магнетика на магнитное поле и различные механизмы намагничивания. Выводится соотношение между объемной и поверхностной плотностями молекулярных токов и намагниченностью. Обсуждаются явления на границе между магнетиками и измерение индукции магнитного поля в магнетике. Выясняется сущность магнитной экранировки.

Определение. *Магнетиками называются вещества, которые при внесении во внешнее поле изменяются так, что сами становятся источниками дополнительного магнитного поля.* При этом полная индукция магнитного поля равна сумме индукций внешнего магнитного поля и магнитного поля, порождаемого магнетиком. Изменение состояния магнетика под влиянием внешнего магнитного поля, в результате чего сам магнетик становится источником магнитного поля, называется намагничиванием магнетика. Это явление для широкого класса веществ было открыто экспериментально Фарадеем в 1845 г. Им же было установлено существование диа- и парамагнитных тел, для которых он ввел эти термины.

Механизмы намагничивания. Существуют различные механизмы намагничивания. *В соответствии с ними магнетики подразделяют на диа-, пара-, ферро- и ферримагнетики. Антиферромагнетики также относят к магнетикам, хотя они и не создают магнитного поля в окружающем их пространстве* (см. гл. 7).

Количественно интенсивность намагничивания во всех случаях характеризуется одинаково, а именно, под действием магнитного поля все элементы объема приобретают магнитный момент. Это может быть обусловлено следующими механизмами:

1. При внесении во внешнее магнитное поле в молекулах и атомах движение электронов изменяется так, что образуется определенным образом ориентированный суммарный круговой ток, который характеризуется магнитным моментом [см. (37.24)]. Можно сказать, что *молекулы при внесении в магнитное поле приобретают индуцированный магнитный момент.* Благодаря этому они становятся источниками дополнительного поля, индукция которого определяется формулой (37.26), т. е. вещество намагничивается. Такие вещества называются **диамагнетиками.**

2. Движение электронов в молекулах может быть таково, что молекулы будут обладать магнитным моментом и при отсутствии магнитного поля, т. е. *молекулы обладают постоянным магнитным моментом.* Благодаря этому каждая молекула является источником

магнитного поля. Если внешнего поля нет, то магнитные моменты различных молекул ориентированы совершенно беспорядочно, благодаря чему суммарная индукция поля, создаваемого ими, равна нулю, т. е. физически бесконечно малые элементы тела не являются источниками магнитного поля и тело не намагничено. *При внесении такого магнетика во внешнее поле постоянные магнитные моменты отдельных молекул переориентируются в направлении индукции поля, в результате чего образуется преимущественное направление ориентации магнитных моментов.* При этом бесконечно малые физические объемы приобретают магнитный момент, равный сумме магнитных моментов молекул, заключенных в объеме, и становятся источниками магнитного поля – магнетик намагничивается. Такие вещества называются **парамагнетиками.**

3. Намагничивание ферромагнетиков и ферримагнетиков связано с тем, что электроны обладают магнитным моментом, находящимся в определенном соотношении с их механическим моментом – спином. *Намагничивание такого класса магнетиков связано с определенной ориентировкой спинов и поэтому называется спиновым.* Объяснение спинового магнетизма выходит за рамки классической теории электричества и магнетизма и возможно лишь в рамках квантовой теории. Поэтому в данной книге описаны лишь наиболее важные свойства этого класса магнетиков без количественной теории. Вся излагаемая ниже теория магнитного поля в присутствии магнетиков относится лишь к диа- и парамагнетикам, если только не оговорено противное.

Намагниченность. Эта величина определяется отношением магнитного момента элементарного физического объема к объему:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\mathbf{p}_{mi}, \tag{38.1}$$

где ΔV – элементарный объем; $\mathbf{p}_{mi}$ – моменты молекул; суммирование распространяется на все молекулы в объеме ΔV.

Другими словами, определение (38.1) для намагниченности может быть сформулировано так: *намагниченность есть объемная плотность магнитного момента магнетика.* Из (38.1) следует, что магнитный момент элемента объема dV равен

$$d\mathbf{p}_m = \mathbf{J}\,dV. \tag{38.2}$$

Векторный потенциал при наличии магнетиков. Он равен сумме потенциала $\mathbf{A}_0$, создаваемого токами проводимости, и потенциала $\mathbf{A}_м$, создаваемого магнетиком в результате намагничивания:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_м \tag{38.3}$$

причем на основании (37.11), (37.25) и (38.2) можно написать:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}}{r}\,dV, \quad (а) \qquad \mathbf{A}_м = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{r}}{r^3}\,dV. \quad (б) \tag{38.4}$$

Объемная плотность молекулярных токов. Как было сказано, возникновение магнитных моментов связано с наличием круговых токов. Токи в элементарных объемах, приводящие к возникновению магнитного момента требуемой величины, получили название молекулярных. Однако не следует придавать этому выражению слишком буквальный смысл. Молекулярные токи в строгом смысле слова могут течь только внутри молекул. При определении намагниченности и других величин подразумеваются усредненные величины, благодаря чему *магнитные моменты молекул представляются как бы непрерывно размазанными по всему объему, а молекулярные токи – текущими по объему магнетика, как в непрерывной среде.* Тем не менее за ними сохранилось название молекулярных.

Рассмотрим бесконечно малый замкнутый контур L, ограничивающий ΔS (рис. 145), и вычислим циркуляцию намагниченности по контуру:

$$\int_L \mathbf{J}\cdot d\mathbf{l} = \int_L J_\tau\, dl, \tag{38.5}$$

где J_τ – тангенциальная составляющая $\mathbf{J}$ вдоль контура интегрирования. Она создается за счет токов, текущих по замкнутым контурам вокруг линии, вдоль которой производится интегрирование (38.5) (рис. 145; δS – площадь, обтекаемая током в плоскости, перпендикулярной линии интегрирования). Умножив числитель и знаменатель в (38.5) на δS, проведем следующие преобразования:

$$\int_L J_\tau\, dl = \int_L J_\tau \frac{dl\delta S}{\delta S} = \int_L \frac{J_\tau\, dV}{\delta S} = \int_L \frac{dp_{mr}}{\delta S}, \tag{38.6}$$

где принята во внимание формула (38.2). По определению магнитного момента, имеем $dp_{mr} = \delta I \delta S$ (δI – сила тока, обтекающего площадку δS на длине dl, причем δI пересекает ΔS по нормали). Поэтому

$$\int_L \frac{dp_{mr}}{\delta S} = \int_L \frac{\delta I \delta S}{\delta S} = \int_L \delta I = \Delta I_n, \tag{38.7}$$

где ΔI_n – нормальная составляющая силы тока, пересекающего площадку ΔS. Таким образом, (38.5) с учетом (38.6) и (38.7) принимает вид

$$\int_L \mathbf{J}\cdot d\mathbf{l} = \Delta I_n. \tag{38.8a}$$

Найдем составляющую $\mathrm{rot}\,\mathbf{J}$ в направлении нормали к площадке ΔS. Воспользовавшись определением (14.6) для ротора и равенством (38.8a), находим

$$\mathrm{rot}_n \mathbf{J} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\int_L \mathbf{J}\cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta I_n}{\Delta S} = j_{M\,n}. \tag{38.8б}$$

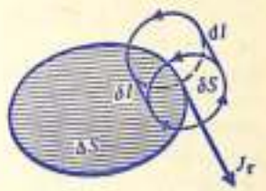
Величина

$$j_{Mn} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta I_n}{\Delta S} \tag{38.9}$$

является, очевидно, нормальной составляющей плотности молекулярных токов, поскольку именно эти токи ответственны за возникновение намагниченности. Равенство (38.8б) справедливо при произвольной ориентировке площадки ΔS, т. е. для любых компонент $\mathrm{rot}\,\mathbf{J}$ и $\mathbf{j}_M$. Поэтому имеет место векторное равенство

$$\mathbf{j}_M = \mathrm{rot}\,\mathbf{J}. \tag{38.10}$$

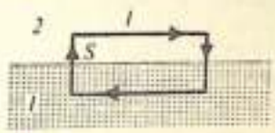
Эта формула дает выражение **объемной плотности молекулярных токов,** порождающих намагниченность $\mathbf{J}$.



145

Нахождение выражения для объемной плотности молекулярных токов

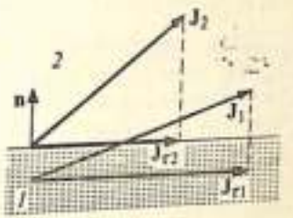
Поверхностные молекулярные токи. Молекулярные токи могут течь также и по поверхности раздела между магнетиками или по поверхности раздела между магнетиком и вакуумом.



146

К выводу формулы для поверхностной плотности токов

На рис. 146 обозначена поверхность раздела между магнетиками *1* и *2*. Все величины, относящиеся к магнетику *1*, обозначим с индексом *1*, а к магнетику *2* – с индексом *2*. Проведем в плоскости, перпендикулярной поверхности раздела, контур L. Параллельные поверхности раздела части контура равны l, а перпендикулярные очень малы и стремятся к нулю. Этот контур ограничивает площадь поверхности S, перпендикулярной поверхности раздела магнетиков. Пусть dS – элемент этой площади, который при выбранном на рис. 146 направлении обхода контура направлен от нас. Умножая обе части (38.10) на dS и интегрируя по S, находим



147

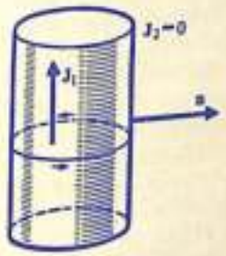
К выводу векторной записи для поверхностной плотности молекулярных токов

$$\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{j}_M \cdot d\mathbf{S}. \tag{38.11}$$

Левую часть (38.11) можно преобразовать по теореме Стокса в интеграл по контуру L и вычислить

$$\int_L \mathrm{rot}\,\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{J}\cdot d\mathbf{l} = (J_{2\tau} - J_{1\tau})\, l + \langle J\rangle_{бок}\, \Delta l_{бок}. \tag{38.12}$$

где $J_{1\tau}$ и $J_{2\tau}$ – тангенциальные к контуру интегрирования составляющие в первой и второй средах, причем знак минус у $J_{1\tau}$



148

Поверхностные молекулярные токи по однородно намагниченному цилиндру

появился из-за изменения направления интегрирования на обратное во второй среде. Величина $\langle J\rangle_{бок}\Delta l_{бок}$ учитывает интегралы по вертикальным участкам пути. Нет необходимости их более подробно выписывать, поскольку они обращаются в нуль при стягивании горизонтальных участков интегрирования к поверхности. Правая часть (38.11) дает проекцию тока по направлению нормали к поверхности S. Это направление также тангенциально поверхности раздела магнетиков, поэтому

$$\int \mathbf{j}_м \cdot d\mathbf{S} = \Delta I_{м.\,пов} \tag{38.13}$$

С учетом (38.12) и (38.13) равенство (38.11) после деления на l принимает вид

$$J_{1\tau} - J_{2\tau} + \langle J\rangle_{бок}\Delta l_{бок}/l = \Delta I_{м.\,пов}/l = i_{м.\,пов} \tag{38.14}$$

где

$$i_{м.\,пов} = \Delta I_{м.\,пов}/l \tag{38.15}$$

– проекция поверхностной плотности тока на направление, перпендикулярное поверхности S. Сжимая в (38.14) контур к поверхности ($\Delta l_{бок}\to 0$), получаем

$$J_{2\tau} - J_{1\tau} = i_{м.\,пов} \tag{38.16}$$

Такая формула справедлива при произвольной ориентировке контура относительно различных направлений вдоль поверхности раздела. Поэтому более удобно записать ее в векторном виде. Обозначим $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный во вторую среду (рис. 147). Из построения на рис. 147 и смысла входящих в предшествующие формулы величин видно, что формула (38.16) в векторном виде записывается следующим образом:

$$\mathbf{i}_м = \mathbf{n}\times(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1). \tag{38.17}$$

Однородно намагниченный цилиндр. В качестве примера вычисления по формуле (38.17) найдем поверхностную плотность молекулярного тока однородно намагниченного цилиндра (рис. 148), который может быть реализован в виде постоянного магнита. Хотя природа ферромагнетизма, обусловливающего существование постоянных магнитов, не может быть понята в рамках классической теории магнетизма, создаваемое намагниченными ферромагнетиками в пространстве поле может быть описано классической теорией. При этом *предполагаемая известной намагниченность ферромагнетика рассматривается как источник магнитного поля в том же смысле, в каком является источником магнитного поля намагниченность диа- и парамагнетиков. Намагниченность диа- и парамагнетиков существует лишь при наличии внешнего поля. Намагниченность ферромагнетиков сохраняется при отсутствии внешнего поля, а порождаемое этой намагниченностью поле существует самостоятельно.* Задача состоит в том, чтобы это поле описать.

Однородный намагниченный цилиндр можно себе представить также в виде диа- или парамагнетика, помещенного во внешнее поле, которое с достаточной точностью обеспечивает постоянную намагниченность. В этом случае в пространстве вне цилиндра определяется индукция не полного поля, а лишь его части, обусловленная намагниченностью.

Намагниченность $\mathbf{J}_1$ цилиндра показана на рис. 148 стрелкой, в вакууме $J_2 = 0$, а нормаль $\mathbf{n}$ – к поверхности раздела является внешней нормалью к цилиндру. По формуле (38.17) **плотность поверхностного молекулярного тока**, текущего по цилиндру, равна

$$\mathbf{i}_м = -\mathbf{n}\times\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_1\times\mathbf{n}. \tag{38.18}$$

Одна из линий этого тока показана на рис. 148 окружностью со стрелками. Очевидно, что намагниченность $\mathbf{J}_1$ с текущим по поверхности цилиндра током составляет правовинтовую систему. Формула (38.10) показывает, что молекулярные объемные токи внутри цилиндра отсутствуют, поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{J}_1 = 0$. Следовательно, все поле вне цилиндра создается поверхностными токами, текущими по окружностям. Тем самым доказана эквивалентность полей постоянного цилиндрического магнита и круговых токов (поля соленоида). Это утверждение справедливо для любых магнетиков, включая ферромагнетики.

Напряженность магнитного поля. При отсутствии магнетиков выполняется соотношение

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}, \tag{38.18}$$

описывающее порождение магнитного поля токами проводимости. При наличии магнетиков наряду с токами проводимости $\mathbf{j}$ поле порождается также и молекулярными токами $\mathbf{j}_м$ [см. (38.10)]. Следовательно, (38.18) при наличии магнетиков должно быть записано в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_м) = \mu_0(\mathbf{j} + \operatorname{rot}\mathbf{J}). \tag{38.19}$$

Разделим обе части (38.19) на μ_0 и перенесем $\operatorname{rot}\mathbf{J}$ в левую часть:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}) = \mathbf{j}, \tag{38.20}$$

где

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J} \tag{38.21}$$

– **напряженность магнитного поля.** Она не является чисто полевой величиной, поскольку включает в себя вектор $\mathbf{J}$, характеризующий намагниченность среды. Поэтому *по своему значению вектор* $\mathbf{H}$ *играет в теории магнитного поля такую же роль, как вектор* $\mathbf{D}$ *в теории электрического поля*, и его не следовало бы называть напряженностью. Тем не менее такое название закрепилось за ним исторически.

Уравнение для напряженности. С учетом (38.21) уравнение (38.20) принимает вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{38.22а}$$

Это уравнение очень удобно для вычисления напряженности поля при наличии магнетиков.

Закон полного тока при наличии магнетиков выводится так же, как он был получен при отсутствии магнетиков, исходя из (35.14), с последующим переходом к (35.15):

$$\int_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I. \tag{38.22б}$$

Зависимость намагниченности от напряженности. По тем же причинам, по которым вектор **H** был назван напряженностью магнитного поля, было принято считать, что источником намагничивания является не **B**, а **H**. Поэтому зависимость **J** от **H** представляем в виде

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}, \tag{38.23}$$

где χ – магнитная восприимчивость. Зависимость **B** от **H** принято записывать в виде

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{38.24}$$

где μ – магнитная проницаемость среды. Эти величины для диа- и парамагнетиков не зависят от **B** и **H**. Чтобы найти соотношение между ними, подставим (38.23) и (38.24) в (38.21) и сократим обе части полученного равенства на **H**:

$$1 = \mu/\mu_0 - \chi, \tag{38.25}$$

или

$$\chi = (\mu - \mu_0)/\mu_0 = \mu_r - 1, \tag{38.26}$$

где $\mu_r = \mu/\mu_0$ – относительная магнитная проницаемость среды. Заметим, что в системе единиц Гаусса магнитная восприимчивость выражается числом, в 4π раз меньшим, чем в СИ.

Различные механизмы намагничивания приводят к разным зависимостям **J** *от* **H** (см. гл. 7). Сейчас лишь отметим, *что у диамагнетиков намагниченность направлена против* **H**. У диамагнетиков $\chi < 0$ [см. (38.23)] и, следовательно, в соответствии с (38.26) магнитная проницаемость $\mu < \mu_0$ ($\mu_r < 1$). Это означает, что порождаемое диамагнетиком поле направлено против первоначального, т. е. *диамагнетик ослабляет внешнее поле*. Модуль их восприимчивости $|\chi|$ очень мал и имеет порядок $\sim 10^{-5}$. Восприимчивость не зависит от температуры. Диамагнетизм имеется у всех веществ.

У *парамагнетиков* **J** *совпадает по направлению с* **H**. Для них $\chi > 0$, $\mu > \mu_0$, $\mu_r > 1$. Дополнительное поле у парамагнетиков совпадает по направлению с первоначальным. Следовательно, *парамагнетик усиливает поле*. Восприимчивость χ парамагнетиков зависит от температуры. *При комнатной температуре парамагнитная восприимчивость веществ в твердом состоянии имеет порядок* $\sim 10^{-3}$, *т. е. примерно на два порядка больше диамагнитной восприимчивости*. Поэтому у парамагнитных веществ роль диамагнитной восприимчивости относительно мала и ею можно пренебречь.

У ферромагнетиков **J** *совпадает по направлению с* **H** *и является очень большой*. Для них $\chi \gg 1$, $\mu \gg \mu_0$. Характерно, что χ и μ зависят от поля и от предыстории намагничивания. Благодаря этому у них имеется остаточная намагниченность, т. е. *намагниченность образца в целом сохраняется и после того, как внешнее поле стало равным нулю. По своим формальным свойствам ферромагнетики аналогичны сегнетоэлектрикам* (см. § 23).

Поле в магнетике. В вакууме $\mathbf{J} = 0$, и формула (38.21) позволяет определить напряженность поля в вакууме равенством $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}/\mu_0$. В безграничном однородном магнетике токи проводимости порождают поле **H** [см. (38.22)]. В вакууме те же самые токи проводимости порождают поле $\mathbf{H}_0$ [см. (35.14)]. Уравнение (35.14) можно переписать в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0 = \mathbf{j}. \tag{38.27}$$

Сравнивая (38.22) с (38.27), заключаем, что одинаковые токи проводимости возбуждают одинаковые напряженности магнитного поля в вакууме и однородном безграничном магнетике:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0. \tag{38.28}$$

Следовательно, индукции в магнетике и вакууме **B** и $\mathbf{B}_0$ находятся в таком соотношении:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{B}_0/\mu_0 = \mu_r\mathbf{B}_0. \tag{38.29}$$

Это равенство показывает, что в диамагнетиках ($\mu_r < 1$) индукция поля уменьшается по сравнению с индукцией в вакууме, а у парамагнетиков ($\mu_r > 1$) – увеличивается.

Если все магнетики и токи проводимости расположены в конечной области пространства и известны как токи проводимости, так и намагниченность всех магнетиков как функция точки [$\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, y, z)$], то индукция магнитного поля в принципе всегда может быть просто найдена. Векторный потенциал представляется в виде формул (38.3), (38.4а) и (38.4б), которые целесообразно записать по-другому. Можно сказать, что векторный потенциал **A** является суммой потенциалов, созданных токами проводимости (38.4а), молекулярными токами (38.10) и поверхностными молекулярными токами (38.17), причем все токи создают потенциал по одному и тому же закону (38.4а). Поэтому формула для потенциала имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int_V \frac{\mathbf{j}}{r}\,dV + \int_V \frac{\operatorname{rot}\mathbf{J}}{r}\,dV + \int_S \frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2)}{r}\,dS\right), \tag{38.30а}$$

где последний интеграл учитывает поверхностные молекулярные токи, а S означает совокупность поверхностей раздела между магнетиками.

Однако простота нахождения потенциала с помощью (38.30а) только кажущаяся, потому что так его можно найти только в том случае,

если известна **J**. Однако во многих случаях эта величина неизвестна и ее определение является трудной задачей.

Постоянные магниты. Они являются либо ферро-, либо ферримагнетиками и к ним излагаемая теория непосредственно неприменима. *Тем не менее по полученным выше формулам можно формально вычислить потенциал поля, порождаемого постоянными магнитами в окружающем их пространстве.* Магнитные свойства постоянных магнитов, как и магнетиков, характеризуются их намагниченностью $\mathbf{J}_п$, порождающей поле точно так же, как если бы она была намагниченностью диа- или парамагнетика. Поэтому, используя (38.30а), можно для векторного потенциала, порождаемого постоянными магнитами, написать формулу

$$A_п = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\operatorname{rot}\mathbf{J}_п}{r}\,dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{J}_п \times \mathbf{n}}{r}\,dS. \qquad (38.30б)$$

В частности, если намагниченность постоянного магнита одинакова по всему объему, первый член в (38.30б) обращается в нуль и все магнитное поле как бы создается токами, текущими по поверхности магнита в соответствии со вторым интегралом (38.30б). Однако никаких реальных токов, текущих по поверхности постоянного магнита, нет, они в данном случае являются лишь вспомогательной величиной для вычисления напряженности поля. Физический смысл вспомогательного характера этой величины можно понять из следующего примера. Представим себе постоянный магнит в виде длинного цилиндра, создающий некоторое поле в окружающем его пространстве. Если взять цилиндрический соленоид такого же диаметра и длины с достаточно плотной намоткой и сердечником из пара- или диамагнетика, то подбором силы тока можно добиться, что индукция поля в окружающем соленоид пространстве будет практически совпадать с индукцией поля постоянного магнита. Ток, текущий в соленоиде по тонким проводам, может рассматриваться как поверхностный ток, эквивалентный фиктивному току, текущему по поверхности постоянного цилиндрического магнита. В этом и состоит математический смысл наличия второго слагаемого в правой части (38.30б). *Фиктивность тока обнаруживается тогда, когда возникает вопрос о поле внутри магнетика и внутри соленоида.* Эти поля различны.

При учете постоянных магнитов уравнение для индукции остается без изменения ($\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$), но уравнение, выражающее связь индукции с напряженностью магнитного поля, несколько изменяется. Дополнительным источником магнитного поля является постоянный магнит и поэтому вместо (38.21) надо написать уравнение

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\mathbf{J}_п, \qquad (38.31а)$$

где $\mathbf{J}_п$ – намагниченность постоянного магнита. Учитывая, что $\mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{J} = \mu\mathbf{H}$, получаем

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{J}_п. \qquad (38.31б)$$

Заметим, что в этой формуле μ является лишь диа- и парамагнитной восприимчивостью вещества, а не ферромагнитной восприимчивостью, которая учтена уже членом $\mu_0\mathbf{J}_п$. Поэтому если под $\mathbf{J}_{полн}$ понимать полную намагниченность ($\mathbf{J}_{полн} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_п$), то формулу (38.31а) лучше представить в виде

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{J}_{полн}. \qquad (38.31в)$$

Рассмотрим для примера постоянный магнит в виде плоской пластины конечной толщины и бесконечной площади (рис. 149). Постоянная намагниченность $\mathbf{J}_п$ направлена перпендикулярно поверхности постоянного магнита. Диа- и парамагнитные свойства постоянного магнита не учитываем.

Пусть вне постоянного магнита имеется магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H}_0$, направленной перпендикулярно его поверхности. Индукция поля одинакова как вне магнита, так и внутри него и равна $B = \mu_0 H_0$. Тогда [см. (38.31в)] $\mu_0 H_0 = \mu_0 H + \mu_0 J_п$. Отсюда напряженность поля внутри постоянного магнита равна (см. рис. 149):

$$H = H_0 - J_п.$$

Граничные условия для векторов поля. На границе между магнетиками с различными μ векторы **B** и **H** испытывают скачкообразные изменения, характеризующиеся граничными условиями. Для их вывода исходим из уравнений (36.4) и (38.22), которые справедливы как для вакуума, так и для среды, заполненной магнетиком. Методически вывод граничных условий проводится точно так же, как и в случае электрического поля [см. § 17; (17.21) и (17.30)].

Граничное условие для нормальной составляющей вектора B. Оно выводится аналогично (17.21), исходя из (17.17), только теперь вместо (17.17) надо использовать уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \qquad (38.32)$$

В результате получаем

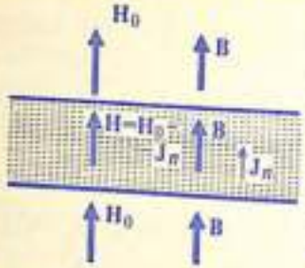
$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}} \qquad (38.33)$$

Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора H. Оно выводится аналогично (17.30) исходя из (17.29), только теперь вместо (17.29) надо использовать уравнение

$$\int_{ABCDA} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}, \qquad (38.34)$$

которое получается из (38.22), если его части умножить на $d\mathbf{S}$ и проинтегрировать по площади, ограниченной контуром $ABCDA$ (см. рис. 83), преобразовав левую часть по теореме Стокса. В результате получаем

$$\boxed{H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_{пов}} \qquad (38.35)$$



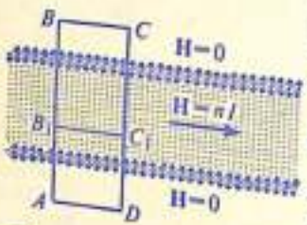
149

Магнитное поле в присутствии ферромагнетика



150

Измерение индукции с помощью закона Фарадея



151

Поле бесконечного соленоида

○ Какая величина в теории электрического поля соответствует магнитной проницаемости μ в теории магнитного поля?

Почему молекулярные токи нельзя представлять текущими лишь в объеме молекул?

где $i_{пов}$ – поверхностная плотность тока в направлении, перпендикулярном тому, в котором выбираются тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля. Необходимо также иметь в виду, что это поверхностные токи проводимости, а не поверхностные молекулярные токи $i_м$ [см. (38.16)].

Преломление магнитных силовых линий. На границе между магнетиками силовые линии испытывают преломление, которое определяется с помощью граничных условий аналогично тому, как это было сделано при анализе формулы (17.31).

Измерение индукции магнитного поля. Наиболее простой и наглядный метод измерения индукции основан на использовании закона электромагнитной индукции Фарадея. Если проводник в виде маленькой петли (рис. 150), замкнутый на гальванометр, ориентировать в плоскости, перпендикулярной **B**, а затем повернуть на 90° вокруг оси, лежащей в этой плоскости, то через гальванометр пройдет импульс тока, по которому можно определить **B** в области петли (см. гл. 8). Таким методом измеряется средняя индукция поля на площади, ограниченной петлей. Вместо поворота рамки можно выключить поле.

Поля бесконечного соленоида и однородно намагниченного бесконечно длинного цилиндра. Пусть поле создается током, текущим по обмотке бесконечного соленоида (рис. 151). Число витков провода на 1 м длины, силу тока и магнитную проницаемость сердечника обозначим соответственно n, I и μ. Магнитное поле аксиально симметрично и может иметь лишь компоненту, параллельную оси соленоида (витки намотаны очень плотно).

Для нахождения напряженности поля воспользуемся (38.22а) и, произведя интегрирование по контуру $ABCDA$, получаем

$$\int_{ABCDA} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = 0, \qquad (38.36)$$

поскольку по противоположным сторонам соленоида токи текут в противоположных направлениях, и, следовательно, суммарная сила тока через поверхность, натянутую на контур $ABCDA$, равна нулю. Вклад в интеграл от участков интегрирования BC и DA равен нулю, поскольку вектор **H** может быть направлен только перпендикулярно BC и DA. Поэтому остается лишь вклад от участков AB и CD:

$$H_{BC}l - H_{AD}l = 0, \qquad (38.37)$$

где H_{BC} и H_{AD} – напряженности поля на участках BC и AD; l – длина этих участков. Знак минус появился из-за того, что направления интегрирования на участках противоположны. Растягивая контур вдоль AB и CD, например удаляя AD от цилиндра, замечаем, что для тождественной справедливости (38.37) необходимо, чтобы H не зависело от расстояния, т. е. H вне соленоида должна быть постоянной величиной. На бесконечно большом расстоянии от соленоида поля не будет, следовательно, оно отсутствует во всем пространстве вне соленоида.

Для определения напряженности поля внутри соленоида применим закон (38.22а) к контуру AB_1C_1DA (рис. 151). Интеграл не равен нулю только на участке B_1C_1 и поэтому

$$H_{B_1C_1}l = nlI, \qquad (38.38)$$

поскольку поверхность, ограниченную контуром AB_1C_1DA, пересекают nl витков с током I. Из (38.38) видно, что поле внутри соленоида однородно и его напряженность равна

$$H = nI. \qquad (38.39)$$

Эта формула позволяет измерять напряженность магнитного поля в ампер-витках, что часто используется в технике. Из (38.39) видно, что напряженность магнитного поля внутри соленоида не зависит от его материала и при прочих равных условиях одинакова для всех материалов. Индукция же поля внутри соленоида с учетом (38.24) и (38.39) равна

$$B = \mu H = \mu nI \qquad (38.40)$$

и зависит от материала сердечника. Для диамагнетиков она меньше, чем индукция в полом соленоиде, а для парамагнетиков – больше.

Индукция поля бесконечно длинного однородно намагниченного цилиндра находится аналогично с той лишь разницей, что поверхностные токи отсутствуют. Соотношение (38.37) не изменяется и напряженность поля вне цилиндра, так же как и в случае бесконечно длинного соленоида, равна нулю. Вместо формулы (38.38) получаем $Hl = 0$ или $H = 0$. Это означает, что напряженность поля внутри бесконечно длинного однородно намагниченного цилиндра равна нулю, в то время как в соленоиде она не равна нулю. Однако индукция внутри цилиндра не равна нулю ($B = \mu_0 \mathbf{J}$). Если длина цилиндра



152

Измерение напряженности магнитного поля внутри магнетика

конечна, напряженность магнитного поля отлична от нуля как внутри, так и вне цилиндра.

Измерение магнитной проницаемости, индукции и напряженности поля внутри магнетика. Представим себе бесконечный соленоид, в сердечнике которого параллельно оси соленоида сделан бесконечно узкий канал (рис. 152). Поле внутри соленоида создается током в обмотке. В канал вводится измерительная катушка, соединенная с гальванометром. Граничное условие (38.35) показывает, что напряженность в канале равна напряженности в магнетике. Индукция в канале равна $\mathbf{B}_\parallel = \mu_0 \mathbf{H}$. Ее можно измерить, повернув петлю на 90° или включив поле. Напряженность поля внутри магнетика вычисляется по формуле

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}_\parallel/\mu_0. \tag{38.41}$$



153

Измерение индукции магнитного поля внутри магнетика

Для измерения индукции внутри магнетика сделаем небольшой поперечный разрез в бесконечном соленоиде (рис. 153). Граничное условие (38.33) показывает, что в этом разрезе индукция $\mathbf{B}_\perp$ равна индукции $\mathbf{B}$ внутри магнетика. Поэтому достаточно измерить индукцию в поперечном разрезе.

Зная индукцию и напряженность поля в магнетике, можно определить магнитную проницаемость:

$$\mu = B/H = \mu_0 B_\perp/B_\parallel. \tag{38.42}$$

Шар из магнетика в однородном поле. Допустим, что шар радиусом R из магнетика с магнитной проницаемостью μ_1 помещен в бесконечную среду с магнитной проницаемостью μ_2, в которой создано однородное магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H}_0$ (рис. 154, *а*, *б*). Требуется определить напряженность магнитного поля как внутри шара, так и вне его. Предполагается, что токи проводимости отсутствуют.

Уравнение (38.22) в этом случае имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \tag{38.43}$$

т. е. магнитостатическое поле в пространстве, в котором отсутствуют токи проводимости, является потенциальным. Токи проводимости отсутствуют как внутри шара, так и вне его, и, следовательно, поле потенциально во всем пространстве. Обозначим φ_m – потенциал этого поля. Тогда

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m. \tag{38.44}$$

Для однородной среды ($\mu = \text{const}$) уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ эквивалентно уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{38.45}$$

Подставляя (38.44) в (38.45), получаем для всех точек вне шара ($\mu_2 = \text{const}$) и для всех точек внутри шара ($\mu_1 = \text{const}$) уравнение

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \tag{38.46}$$

Таким образом, потенциал магнитного поля удовлетворяет уравнению Лапласа.

Отметим, что если магнитная восприимчивость не является постоянной, то вместо (38.46) получается другое уравнение. Для его вывода примем во внимание равенство (38.21), которое можно записать в виде

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}. \tag{38.47}$$

Взяв от обеих частей этого равенства дивергенцию, получим

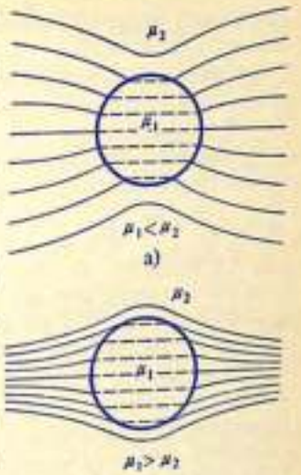
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{H} + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} = \\ = -\mu_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \tag{38.48а}$$

где учтено соотношение (38.44) и уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Следовательно, уравнение для φ_m имеет вид

$$\nabla^2 \varphi_m = \operatorname{div} \mathbf{J}, \tag{38.48б}$$

что значительно усложняет решение задачи для магнетика с изменяющейся магнитной восприимчивостью.

Поместим начало координат в центр шара и направим полярную ось сферической системы координат в направлении вектора $\mathbf{H}_0$. Вследствие аксиальной симметрии уравнение Лапласа (38.46) принимает вид (17.42). Это уравнение надо решить при граничных условиях (38.33) и (38.25) на поверхности шара, полностью совпадающих с граничными условиями для D_n и E_τ [см. (17.42)].



154

Шар из магнетика в однородном магнитном поле



155

Магнитная экранировка

○ Перечислите обстоятельства, благодаря которым H играет в теории магнитного поля такую же роль, как D в теории электрического поля.

○ Почему диамагнетизм парамагнетиков мал по сравнению с парамагнетизмом? Дайте количественные оценки.

Каким образом можно измерить индукцию и напряженность магнитного поля внутри магнетика?

Поскольку поверхностные токи проводимости отсутствуют, в (38.35) можно положить $i_{пов} = 0$. Поэтому решение этой задачи аналогично решению задачи о диэлектрическом шаре в однородном электрическом поле. Надо лишь в решении уравнения (17.42) заменить $\varphi \to \varphi_m$, $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \to \mathbf{B}$, $\varepsilon \to \mu$.

Напряженность магнитного поля внутри шара постоянна и аналогично (17.51) равна

$$H_{1z} = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0. \tag{38.49}$$

Она является суммой напряженностей внешнего поля H_0 и поля, созданного шаром в результате его намагничивания. Поле, созданное внутри шара за счет его намагничивания, называется «размагничивающим полем $\mathbf{H}_{разм}$». Это название условно, поскольку никакого «размагничивания» нет, а есть просто намагничивание магнетика во внешнем поле и создание этим намагниченным магнетиком дополнительного поля, складывающегося с первоначальным. Но поскольку название поля $H_{разм}$ установилось, приходится им пользоваться. Тогда

$$H_{разм} = H_{1z} - H_0 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0. \tag{38.50}$$

Это выражение можно записать в ином виде. На основании (38.26) с учетом (38.26) имеем

$$J_1 = (\mu_1/\mu_0 - 1) H_{1z}, \; J_2 = (\mu_2/\mu_0 - 1) H_0, \tag{38.51}$$

откуда

$$J_2 - J_1 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_0 + 2\mu_2)}{\mu_0 (\mu_1 + 2\mu_2)} H_0. \tag{38.52}$$

Следовательно, формула (38.50) может быть представлена в виде

$$H_{разм} = [\mu_0/(\mu_0 + 2\mu_2)](J_2 - J_1). \tag{38.53}$$

В частности, если шар находится в вакууме, то $\mu_2 = \mu_0$ и $J_2 = 0$, поэтому

$$H_{разм} = -J_1/3.$$

Магнитная экранировка. Из (38.50) видно, что при $\mu_1 > \mu_2$ магнитное поле внутри шара ослабляется, т. е. шар как бы экранирует свою внутреннюю часть от внешнего магнитного поля. Если рассчитать индукцию поля внутри полости, окруженной оболочкой из магнетика с достаточно большой проницаемостью μ_1, то получается, что магнитные линии концентрируются в основном в оболочке (рис. 155), не проникая внутрь полости. Это означает, что *оболочка из магнетика с большим μ действует как экран, не допускающий проникновения магнитного поля в пространство, ограничиваемое оболочкой.*

Пример 38.1. *Вдоль оси бесконечного прямого круглого цилиндра радиуса a течет линейный ток силой I. Магнитная проницаемость вещества цилиндра μ. Вне цилиндра – свободное пространство. Найти напряженность магнитного поля, индукцию и намагниченность во всех точках пространства.*

Направим ось Z декартовой системы координат вдоль оси цилиндра в направлении тока I (рис. 156). Выберем в качестве контура интегрирования L окружность радиусом r, концентрическую с током и лежащую в плоскости, перпендикулярной току. Тогда напряженность магнитного поля во всех точках определяется из закона полного тока:

$$\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\varphi 2\pi r = I,$$

откуда

$$H_\varphi = I/(2\pi r) \tag{38.54}$$

– напряженность магнитного поля, направленная по касательной к окружности. Линиями напряженности являются окружности, концентрические с током.

Индукция равна

$$B_\varphi = \begin{cases} \mu H_\varphi = \dfrac{\mu I}{2\pi r} & (0 < r < a), \\ \mu_0 H_\varphi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (a < r). \end{cases} \tag{38.55}$$

Намагниченность удобно найти из соотношения (38.21):

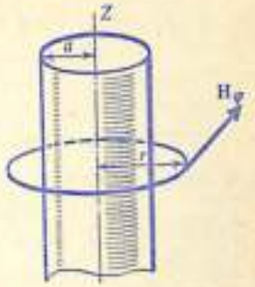
$$J_\varphi = \begin{cases} \dfrac{\mu - \mu_0}{\mu_0} H_\varphi = \dfrac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \dfrac{I}{2\pi r} & (0 < r < a), \\ 0 & (a < r). \end{cases} \tag{38.56}$$

Объемную плотность молекулярных токов найдем с помощью (38.10). Принимая во внимание, что намагниченность дана в (38.56) в цилиндрических координатах, удобно вычисление ротора в (38.10) также проводить в цилиндрических координатах. Имеем

$$\mathbf{j}_м = \operatorname{rot} \mathbf{J} = -\mathbf{i}_r \frac{\partial J_\varphi}{\partial z} + \mathbf{i}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r J_\varphi) = 0. \tag{38.57}$$

Таким образом, объемные молекулярные токи отсутствуют. Однако имеется поверхностный молекулярный ток, плотность которого на основе (38.17) с учетом (38.56) равна

$$i_{мz} = -\frac{(\mu - \mu_0) I}{\mu_0 2\pi a}. \tag{38.58}$$



156

К определению поля тока, текущего по цилиндру кругового сечения

● **Молекулярные токи в буквальном смысле могут течь только внутри молекул. Однако в модели непрерывной среды речь идет об усредненных по бесконечно малым объемам величинах и поэтому молекулярные токи представляются текущими по объему магнетика, как в непрерывной среде.**

По своему значению напряженность магнитного поля играет такую же роль в теории магнитного поля, как смещение в теории электрического поля.

У диамагнетиков намагниченность направлена против напряженности магнитного поля, а индукция внешнего поля уменьшается.

У парамагнетиков намагниченность направлена по напряженности магнитного поля, а индукция внешнего поля усиливается.

Классическая теория не может объяснить ферромагнетизм, но она в состоянии описать магнитное поле вне ферромагнетиков, если считать намагниченность ферромагнетика известной.

§ 39. Силы в магнитном поле

Рассматриваются силы, действующие на токи, и объемные силы, действующие на несжимаемые магнетики.

Силы, действующие на ток.

$$\boxed{d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}\, dV = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B},} \tag{39.1a}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B}\, dV = \int_L I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.} \tag{39.1б}$$

Сила Лоренца. На точечный заряд q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},} \tag{39.2}$$

причем q включает в себя знак заряда, т. е. может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Формула (39.2) получается из (39.1б), если учесть, что $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}\, dV = \rho\mathbf{v}\, dV$, где ρ – объемная плотность зарядов и, следовательно, $\rho\, dV$ заряд в объеме dV, а $\int_V \rho\, dV = q$.

Сила и момент сил, действующие на магнитный момент. Допустим, что круговой элементарный ток, создающий магнитный момент, течет по квадратной рамке со стороной l. Поместим начало координат в центр квадрата и направим ось Z перпендикулярно плоскости рамки (рис. 157). Направление тока I в рамке указано стрелками. Магнитное поле произвольно, посторонние токи и ферромагнетики в области рамки отсутствуют ($\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$). Определим силу и момент сил, действующих на магнитный момент рамки с током. Размеры рамки малы и необходимо учитывать изменение индукции магнитного поля в пределах рамки лишь до величин первого порядка малости относительно размеров рамки.

В соответствии с формулой (39.1а) на стороны AB, BC, CD, DA рамки со стороны магнитного поля действуют силы:

$\mathbf{F}_{AB} = Il\mathbf{i}_y \times \mathbf{B}(\mathbf{i}_x l/2)$, $\mathbf{F}_{BC} = Il[-\mathbf{i}_x \times \mathbf{B}(\mathbf{i}_y l/2)]$,

$\mathbf{F}_{CD} = Il[-\mathbf{i}_y \times \mathbf{B}(-\mathbf{i}_x l/2)]$, $\mathbf{F}_{DA} = Il[\mathbf{i}_x \times \mathbf{B}(-\mathbf{i}_y l/2)]$,

где $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ – единичные векторы в направлении осей X и Y. В аргументах $\mathbf{B}$ указаны расстояния от центра рамки до соответствующих сторон с учетом направления. Полная сила, действующая на рамку, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BC} + \mathbf{F}_{CD} + \mathbf{F}_{DA} = Il\mathbf{i}_y \times [\mathbf{B}(\mathbf{i}_x l/2) - \mathbf{B}(-\mathbf{i}_x l/2)] + Il\mathbf{i}_x \times [\mathbf{B}(-\mathbf{i}_y l/2) - \mathbf{B}(\mathbf{i}_y l/2)]. \tag{39.3}$$

Учитывая, что с сохранением лишь членов первого порядка малости

$$\mathbf{B}\left(\pm\frac{\mathbf{i}_x l}{2}\right) = \mathbf{B}(0) \pm \frac{l}{2}\frac{\partial\mathbf{B}(0)}{\partial x},$$

$$\mathbf{B}(\pm\mathbf{i}_y l/2) = \mathbf{B}(0) \pm \frac{l}{2}\frac{\partial\mathbf{B}(0)}{\partial y},$$

преобразуем (39.3) к виду

$$\mathbf{F} = Il^2\left(\mathbf{i}_y \times \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} - \mathbf{i}_x \times \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}\right). \tag{39.4}$$

Учитывая, что $Il^2 = p_m$ – абсолютное значение магнитного момента рамки с током, а также принимая во внимание хорошо известные соотношения между единичными координатными векторами ($\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z$, $\mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_x = \mathbf{i}_y$), преобразуем (39.4) к виду:

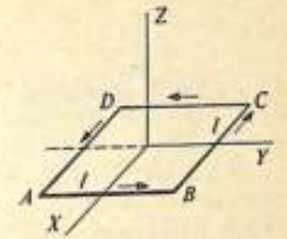
$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \times \mathbf{i}_x) \times \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} + (\mathbf{p}_m \times \mathbf{i}_y) \times \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y},$$

где $\mathbf{p}_m = \mathbf{i}_z p_m$ – магнитный момент рамки. С помощью разложения двойного векторного произведения по формуле векторной алгебры $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}_x\left(\mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right) - \mathbf{p}_m\left(\mathbf{i}_x \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right) + \mathbf{i}_y\left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}\right) - \mathbf{p}_m\left(\mathbf{i}_y \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}\right) = \mathbf{i}_x\left(\mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right) + \mathbf{i}_y\left(\mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}\right) - \mathbf{p}_m\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right), \tag{39.5}$$

где $\mathbf{i}_x \cdot (\partial\mathbf{B}/\partial x) = \partial B_x/\partial x$, $\mathbf{i}_y \cdot (\partial\mathbf{B}/\partial y) = \partial B_y/\partial y$. Так как $\operatorname{div}\mathbf{B} = \partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y + \partial B_z/\partial z = 0$, то

$$-\mathbf{p}_m\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right) = \mathbf{p}_m\frac{\partial B_z}{\partial z} = \mathbf{p}_m\left(\mathbf{i}_z \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right) = \mathbf{i}_z\left(\mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right),$$



157

К расчету действия силы на магнитный момент

● **Сила на магнитный момент действует лишь в неоднородном магнитном поле.**

Момент сил, возникающий в результате действия магнитного поля на магнитный момент, стремится повернуть магнитный момент до совпадения с вектором магнитной индукции поля.

Объемные силы, действующие на парамагнетик, направлены в сторону увеличения индукции магнитного поля, а у диамагнетиков – в сторону уменьшения.

○ Как изменяется действие сил на магнетик, если магнитная проницаемость среды отличается от магнитной постоянной и становится больше или меньше магнитной проницаемости магнетика?

откуда

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}_x\left(\mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right) + \mathbf{i}_y\left(\mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}\right) + \mathbf{i}_z\left(\mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}\right). \tag{39.6}$$

Эта формула показывает, что *на магнитный момент сила действует лишь в неоднородном поле*. Поскольку формула (39.6) выражает силу через магнитный момент $\mathbf{p}_m$, выбранная выше специальная форма контура тока не играет роли и (39.6) *справедлива для произвольного магнитного момента, пространственные размеры которого достаточно малы*.

Для вычисления момента сил, действующих на магнитный момент, поступаем аналогично. Помещаем начало координат в центр рамки и вычисляем момент сил по формуле

$$\mathbf{M} = I \int_L \mathbf{r} \times (\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \tag{39.7}$$

Однако теперь вычисления упрощаются, поскольку расстояние r имеет порядок размеров l рамки и величину $\mathbf{B}$ надо учитывать только в нулевом порядке по размерам рамки, т. е. считать постоянной. В результате получаем

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \tag{39.8}$$

Эта формула показывает, что *момент сил стремится повернуть магнитный момент до совпадения с вектором магнитной индукции поля*.

Объемные силы, действующие на несжимаемые магнетики. Поскольку элемент объема $\mathrm{d}V$ магнетика с намагниченностью $\mathbf{J}$ обладает магнитным моментом

$$\mathrm{d}\mathbf{p}_m = \mathbf{J}\,\mathrm{d}V, \tag{39.9}$$

на него [см. (39.6)] действует сила

$$\mathrm{d}F_x = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\mathrm{d}V,\ \mathrm{d}F_y = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}\mathrm{d}V,\ \mathrm{d}F_z = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}\mathrm{d}V. \tag{39.10}$$

Очевидно, что эти выражения справедливы во всяком случае для жестких магнетиков, поскольку формула (39.6) получена в результате дифференцирования при $\mathbf{p}_m = \mathrm{const}$.

Представим (39.10) в векторном виде. Учитывая, что

$$\mathbf{J} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0}\mathbf{B}, \tag{39.11}$$

находим для объемной плотности силы выражение

$$f_x = \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}V} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0}\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial x} \tag{39.12}$$

и т. д. Таким образом, объемная плотность силы, действующей на магнетик, равна

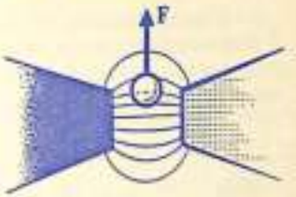
$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0}\operatorname{grad} B^2. \tag{39.13}$$

Это означает:

а) *у парамагнетиков* $\mu > \mu_0$ *и поэтому объемная плотность силы направлена в сторону увеличения индукции поля;*

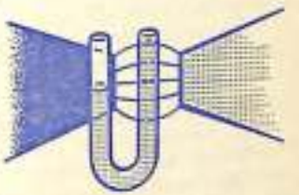
б) *у диамагнетиков* $\mu < \mu_0$ *и поэтому объемная плотность силы направлена в сторону уменьшения индукции поля.*

Различное поведение пара- и диамагнетиков в одном и том же поле очень наглядно демонстрируется многими опытами. Пусть магнитное поле создается в вакууме между полюсами сильного магнита (рис. 158). Ясно, что между полюсами магнита индукция поля убывает от центральной линии, соединяющей полюса, к периферии. Легкий висмутовый шарик, являющийся диамагнитным телом, выталкивается из области поля с максимальной индукцией (рис. 158). Парамагнитная жидкость, например водный раствор хлорного железа, втягивается в область поля с максимальной индукцией (рис. 159).



158

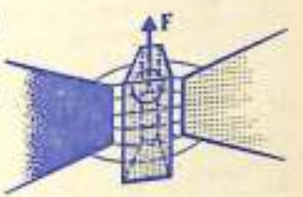
Выталкивание диамагнитного тела из области максимального поля



159

Втягивание парамагнитной жидкости в область максимального поля

Если пространство между полюсами магнита заполнено материальной средой, то направление сил зависит от соотношения магнитных проницаемостей среды и тела. *Если магнитная проницаемость тела больше, чем среды, то оно ведет себя как парамагнетик, если меньше – то как диамагнетик.* Например, если между полюсами магнита поместить парамагнитную жидкость с достаточно большой проницаемостью (рис. 160), то на парамагнитный шарик, проницаемость которого меньше, чем жидкости, сила действует так же, как на диамагнитный шарик в вакууме.



160

Парамагнитное тело в парамагнитной среде с большей, чем у тела, магнитной проницаемостью ведет себя как диамагнитное тело

Пример 39.1. *По кольцу радиусом r_0 из очень тонкой проволоки течет ток силой I. Прочность проволоки на разрыв равна f_0. Кольцо помещено в магнитное поле, индукция которого перпендикулярна плоскости кольца, так, что действующие силы стремятся разорвать кольцо. Определить индукцию, при которой кольцо разорвется. Принять, что* $f_0 = 1{,}5$ Н; $r_0 = 15$ см; $I = 10$ А.

Силы на кольцо действуют по радиусу. Обозначая $d\mathbf{l}$ – элемент длины кольца, находим, что элемент силы, действующей на элемент $d\mathbf{l}$ в радиальном направлении, равен $d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Проведем через центр кольца и его плоскости ось X. Проекция элемента силы $d\mathbf{F}$ на ось X равна $dF_x = dF \cos\alpha = IB\, dl \cos\alpha$, где α – угол между осью X и радиусом, проведенным к элементу $d\mathbf{l}$.

Так как $dl = r_0\, d\alpha$, то выражение для силы, действующей на полукольцо в направлении положительных значений оси X, равно $F_x = IBr_0 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha = 2IBr_0$. Эта сила распределяется на два сечения провода в местах его пересечения с осью Y. Поэтому условие разрыва имеет вид $2IBr_0 = 2f_0$ и, следовательно, $B = f_0/(Ir_0) = 1$ Тл.

Задачи

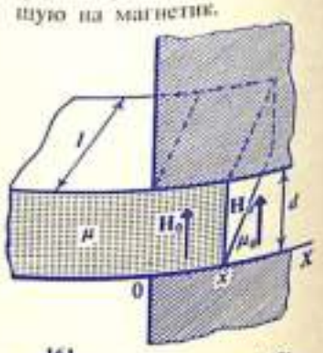
6.1. Имеется медная спираль радиусом a и плотностью n витков на 1 м. Витки намотаны так, что между ними имеются очень маленькие зазоры. Верхний конец спирали закреплен, а нижний конец соединен с проводящим грузом массой m, лежащим на металлическом столе. Никакие силы упругости со стороны спирали на груз в этом положении не действуют. Считая, что зазоры между витками спирали уменьшаются равномерно, определить силу тока, который должен быть пропущен через спираль для того, чтобы поднять груз со стола. Массой спирали пренебречь.

6.2. Два маленьких магнита с одинаковыми магнитными моментами P_m и массами m подвешены на легких длинных нитях. Расстояние d между точками подвеса очень велико. Длины нитей одинаковы. Показать, что магниты сориентируются так, что будут притягиваться друг к другу. Определить угол отклонения нитей от вертикального направления. Влиянием магнитного поля Земли пренебречь.

6.3. Сфера радиусом a, равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ, вращается вокруг оси, проходящей через центр сферы, с угловой скоростью ω. Найти магнитную индукцию в центре вращающейся сферы.

6.4. Чему равен магнитный момент, создаваемый точечным зарядом q, движущимся по окружности радиусом r_0 с постоянной угловой скоростью ω?

6.5. В пространство между полюсами постоянного магнита, в котором существует магнитное поле H_0, вдвинута пластина из магнетика с магнитной проницаемостью μ (рис. 161). Найти силу, действующую на магнетик.



161

К вычислению силы взаимодействия между магнитами

6.6. Найти силу в задаче 6.5, если пластина является постоянным магнитом, намагниченность которого J_0 совпадает по направлению с H_0.

6.7. Найти силу, с которой однородный поверхностный ток плотностью $i_{пов}$, текущий по бесконечной плоскости, действует на длине l параллельного ему тока силой I, протекающего по бесконечному линейному проводнику на расстоянии d от плоскости. Обозначить $\mathbf{n}$ – нормаль к плоскости в направлении линейного проводника.

6.8. Ток силой I_1 течет по кольцевому проводнику радиусом a, лежащему в плоскости (x, y) с центром в начале координат, и составляет правый винт с положительным направлением оси Z. Ток силой I_2 течет по бесконечно длинному прямому проводнику параллельно оси X в направлении ее положительных значений, пересекая ось Z в точке $z = d$. Определить силу, действующую на прямолинейный ток.

6.9. Найти магнитную индукцию в центре соленоида длиной L с n витками, имеющего квадратное сечение со стороной a. Сила тока, текущего по обмотке соленоида, равна I.

6.10. Диск радиусом r вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной поверхности диска и проходящей через его центр. Найти индукцию магнитного поля на оси вращения диска на расстоянии h от его плоскости. Поверхностная плотность заряда равна σ.

6.11. Поляризованный диэлектрический шар радиусом a вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, проходящей через его центр. Поляризованность $\mathbf{P}$ постоянна и совпадает по направлению с $\boldsymbol{\omega}$. Найти магнитную индукцию в точках пересечения поверхности шара с осью вращения.

6.12. Бесконечный прямолинейный цилиндрический пучок кругового поперечного сечения радиусом a с постоянной объемной плотностью заряда ρ движется в направлении своей оси со скоростью $\mathbf{v}$. Найти магнитную индукцию.

6.13. По бесконечному прямолинейному цилиндрическому проводнику радиусом a, ось которого совпадает с осью Z декартовой системы координат, течет ток силой I в положительном направлении оси Z. Найти векторный потенциал.

6.14. Найти аксиальную составляющую векторного потенциала в центре спирали, по которой течет ток силой I. Данные о спирали приведены в задаче 1.7.

6.15. Диэлектрический шар радиусом a вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр. Постоянная объемная плотность заряда шара равна ρ. Найти индукцию внутри шара на оси вращения.

6.16. Однородно заряженный круглый цилиндр радиусом a и длиной l, заряд которого Q, вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Найти его дипольный магнитный момент.

6.17. Найти в дипольном приближении взаимную индуктивность двух круговых токов радиусами a_1 и a_2, лежащих в одной плоскости. Расстояние между витками равно r.

6.18. Ось прямого круглого цилиндра совпадает с осью Z декартовой системы координат, начало которой находится в центре цилиндра. Цилиндр однородно намагничен. Вектор намагниченности совпадает с положительным направлением оси Z: $\mathbf{J} = J\mathbf{i}_z$. Найти магнитную индукцию на оси цилиндра, если радиус его поперечного сечения a, а длина l.

6.19. Сферический слой из магнетика, радиусы внутренней и внешней концентрических поверхностей которого равны r_1 и r_2, однородно намагничен. Вектор намагниченности параллелен оси Z

декартовой системы координат, центр которой совпадает с центром поверхностей, и равен $J i_z$. Найти напряженность магнитного поля на оси Z для положительных значений z.

6.20. Прямой цилиндр, длина которого l, а радиус кругового сечения a, однородно намагничен. Вектор намагниченности параллелен оси цилиндра и равен $\mathbf{J}$. Найти магнитную индукцию в центре цилиндра, считая $l \gg a$.

6.21. Сфера с поверхностной плотностью заряда σ вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω. Найти ее магнитный дипольный момент.

6.22. Ток силой I течет по бесконечному прямолинейному проводнику, параллельному плоской поверхности раздела между средой с магнитной проницаемостью μ_0, в которой находится проводник с током, и средой с магнитной проницаемостью μ. Найти силу, действующую на участок l проводника. Расстояние от проводника до поверхности раздела равно d.

6.23. На поверхность деревянного шара намотаны очень плотно в один слой витки тонкой проволоки. Плоскости всех витков можно считать перпендикулярными одному и тому же диаметру шара. Витки покрывают всю поверхность шара. Радиус шара a, полное число витков n. По обмотке протекает ток силой I. Найти магнитную индукцию в центре шара.

6.24. В цилиндрическом проводнике радиусом a имеется цилиндрическая полость радиусом b, ось которой параллельна оси проводника и расположена на расстоянии d от нее. По проводнику протекает ток с объемной плотностью j. Найти магнитную индукцию в точках диаметра полости, совпадающего с диаметром проводника.

Ответы

6.1. $I = \frac{1}{na}\sqrt{\frac{2\pi g}{\pi\mu_0}}$. **6.2.** $\theta = \frac{3}{2}\,\frac{p_m^2}{\pi\mu_0 d^4}\,\frac{1}{mg}$. **6.3.** $\mathbf{B} = {}^2/_3\,\mu_0\sigma a\omega$. **6.4.** $p_m = q\omega r_0^2/2$. **6.5.** $F_x = {}^1/_2\,(\mu - \mu_0)\,H_0^2 ld$. **6.6.** $F_x = \mu_0 J_n (H_0 + J_n)\,ld$. **6.7.** $\mathbf{F} = -{}^1/_2\,\mu_0 i_{1\omega} i_{2\omega} l n l \left(\frac{a^2}{L^2 + a^2}\right)$. **6.8.** $\mathbf{F} = -\mathbf{i}_x \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - d/\sqrt{d^2 + a^2}\right)$. **6.9.** $B = \mu_0 n I \left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{a^2}{L^2 + a^2}\right)$. **6.10.** $B_k = \sigma\omega_0 \left(\frac{h^2 + a^2/2}{\sqrt{h^2 + a^2}} - h\right)$. **6.11.** $\mathbf{B}_1 = {}^2/_3\,\mu_0 P_{a\omega}$, $\mathbf{B}_2 = -{}^2/_3\,\mu_0 P_{a\omega}$. **6.12.** $\mathbf{B} = {}^1/_2\,\mu_0 \rho \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ при $0 < r < a$, $\mathbf{B} = {}^1/_2\,\mu_0 \rho a^2 \mathbf{v} \times \mathbf{r}/r^2$ при $a < r < \infty$. **6.13.** $A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r^2}{a^2} + \text{const}$ при $r < a$, $A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r + \text{const}$ при $a < r < \infty$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. **6.14.** $\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(n\pi \operatorname{tg}\alpha + \sqrt{1 + \pi^2 n^2 \operatorname{tg}^2\alpha}\right)$. **6.15.** 0. **6.16.** $Qa^2\omega/2$. **6.17.** $L_{12} = \pi\mu_0 a_1^2 a_2^2/(4r^3)$. **6.18.** $B_z = \frac{\mu_0}{2} J\left(\frac{z + l/2}{\sqrt{a^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{a^2 + (z - l/2)^2}}\right)$. **6.19.** $H_z = 0$ при $0 < z < r_1$, $H_z = -\frac{J(z^3 + 2r_1^3)}{3z^3}$ при $r_1 < z < r_2$, $H_z = 2J(r_2^3 - r_1^3)/(3z^3)$ при $r_2 < z < \infty$. **6.20.** $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}\,(1 - a^2/l^2)$. **6.21.** $\mathbf{p}_m = {}^4/_3\,\pi\sigma a^4 \boldsymbol{\omega}$. **6.22.** $F = -\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I^2$. **6.23.** $\mu_0 nI/(4a)$. **6.24.** $\mu_0 jd/2$.

§ 40 Диамагнетики
§ 41 Парамагнетики
§ 42 Ферромагнетики
§ 43 Гиромагнитные эффекты

7

Магнетики

Феноменологически свойства магнетика в магнитном поле учитываются посредством магнитной проницаемости μ. Зависимости μ от различных параметров весьма многообразны, как многообразны сами магнетики. Эти зависимости интерпретируются построением моделей магнетиков, учитывающих особенности их поведения в магнитном поле.

§ 40. Диамагнетики

Обсуждаются физическая природа диамагнитной восприимчивости и ее свойства.

Ларморова прецессия. В магнитном поле частота вращения электронов в атоме отличается от их частоты вращения при отсутствии магнитного поля. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим простейший случай, когда при отсутствии магнитного поля электрон движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом r и частота его вращения равна ω_0 (рис. 162). Уравнение Ньютона для движения электрона имеет вид

$$m\omega_0^2 r = F_n, \tag{40.1}$$

где F_n – центростремительная сила, возникающая в результате притяжения электрона ядром. Эта сила весьма велика по сравнению с силами, которые могут действовать на электрон со стороны внешних полей, поэтому *радиусы орбит электронов при помещении атома во внешние поля не изменяются. Атом в отношении действия внешних полей можно с большой точностью рассматривать как жесткий.*

Теперь пусть атом находится во внешнем поле, вектор индукции **B** которого перпендикулярен плоскости орбиты электрона. Сила Лоренца действует вдоль радиуса, а по направлению либо совпадает с центростремительной силой, либо противоположна ей в зависимости от относительной ориентировки векторов угловой скорости движения электрона по орбите и магнитной индукции. Эта сила равна по абсолютному значению

$$F = |e|\omega r B, \tag{40.2}$$

где e – заряд электрона; ω – частота вращения электрона по орбите в магнитном поле, отличная от ω_0.

Уравнение движения электрона в магнитном поле имеет вид

$$m\omega^2 r = F_n \pm |e|\omega r B, \tag{40.3}$$

где радиус r орбиты электрона тот же, что и в (40.1), а знаки $(\pm)$ выбираются в соответствии с относительной ориентировкой векторов угловой скорости движения электрона по орбите и магнитной индукции. Центростремительная сила F_n в (40.3), конечно, та же самая, что и в (40.1), поскольку это сила притяжения со стороны ядра, а расстояние r не изменилось. Исключая из (40.1) и (40.3) F_n, получаем

$$m\omega^2 r - m\omega_0^2 r = \pm |e|\omega r B. \tag{40.4}$$

Учитывая, что $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\Delta\omega\omega$, где $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega$, из (40.4) находим

$$\Delta\omega = \pm |e| B/(2m). \tag{40.5}$$

Таким образом, в магнитном поле электрон приобретает дополнительную угловую скорость движения, характеризуемую частотой

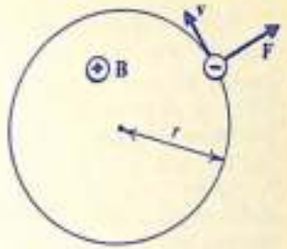
$$\omega_L = |e| B/(2m), \tag{40.6}$$

которая называется **ларморовой.** Направление вектора угловой скорости определить нетрудно. Например, если индукция **B** (см. рис. 162) направлена противоположно угловой скорости движения электрона вокруг ядра, то сила **F** направлена против $\mathbf{F}_n$ и, следовательно, скорость электрона и частота вращения должны уменьшиться. Это означает, что $\boldsymbol{\omega}_L$ совпадает с направлением **B**. Если направление **B** противоположно первоначальному, то придем к такому же заключению. Поэтому можно записать

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_L = -e\mathbf{B}/(2m),} \tag{40.7}$$

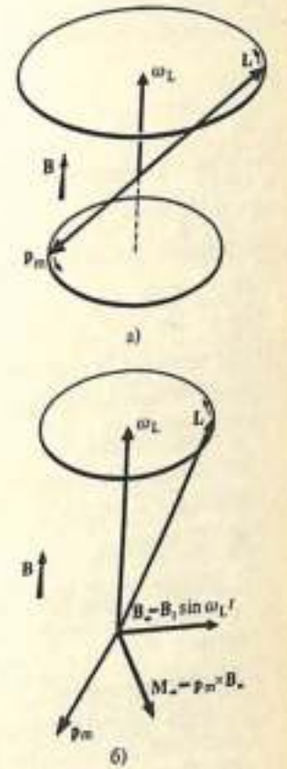
где учтено, что заряд электрона e отрицателен. *Образование этой дополнительной угловой скорости вращения без изменения радиуса орбиты можно себе представить в виде дополнительного вращения атома как целого с частотой $\boldsymbol{\omega}_L$ в магнитном поле.* Полная частота вращения электрона равна сумме его частоты вращения $\boldsymbol{\omega}_0$ в атоме и частоты вращения $\boldsymbol{\omega}_L$ атома. Все это справедливо лишь для случая, когда векторы угловой скорости и индукции магнитного поля коллинеарны.

Поскольку скорость электрона в атоме, помещенном в магнитное поле, изменяется, то изменяется и его кинетическая энергия. С другой стороны, поскольку r остается неизменным, потенциальная энергия не изменяется. Спрашивается, за счет чего изменилась энергия электрона в атоме, если известно, что магнитное поле действует всегда перпендикулярно скорости и не производит работы? Ответ на этот вопрос может быть дан только в рамках теории электромагнитной индукции (см. гл. 8): *при возникновении магнитного поля порождается электрическое поле, под действием которого изменяется скорость движения электронов в атоме.*



162

Возникновение дополнительной угловой скорости вращения электронов в магнитном поле



163

Ларморова прецессия (а); возникновение парамагнитного резонанса (б)

Чтобы представить себе, каким будет движение атома при произвольной взаимной ориентации угловой скорости вращения электрона вокруг ядра и индукции внешнего поля, обобщим полученные результаты на произвольный случай. Атом с движущимся в нем по окружности электроном можно рассматривать как гироскоп, обладающий магнитным моментом. Момент импульса электрона равен mvr^2. Движущийся по орбите электрон эквивалентен круговому току силой $e/T = e\omega/(2\pi)$ и, следовательно, магнитный момент атома равен $\pi r^2 e\omega/(2\pi)$. С учетом направления механического и магнитного моментов атома, обусловленных движением электрона, запишем:

$$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{p}_m = (er^2/2)\boldsymbol{\omega}. \tag{40.8}$$

Здесь учтено, что заряд e электрона отрицателен, а механический момент $\mathbf{L}$ и магнитный момент $\mathbf{p}_m$ имеют противоположные направления (рис. 163, *а*).

Уравнение движения атома, рассматриваемого как гироскоп, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \tag{40.9}$$

где $\mathbf{M}$ – момент сил [см. (39.8)]. Из (40.8) следует, что

$$\mathbf{p}_m = e\mathbf{L}/(2m) \tag{40.10}$$

и, следовательно, уравнение (41.9) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{e}{2m}\mathbf{L}\times\mathbf{B} = -\frac{e}{2m}\mathbf{B}\times\mathbf{L}. \tag{40.11}$$

Сравнение (40.11) с уравнением движения точек абсолютно твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$,

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{40.12}$$

показывает, что конец вектора $\mathbf{L}$ движется вокруг направления вектора индукции с частотой

$$\omega_L = -e\mathbf{B}/(2m). \tag{40.13}$$

Следовательно, *атом совершает в магнитном поле, подобно гироскопу, прецессионное движение* (рис. 163, *б*). Оно называется **ларморовой прецессией.**

Диамагнетизм. В результате ларморовой прецессии от каждого электрона в атоме возникает круговой ток, который с направлением вектора индукции магнитного поля составляет левовинтовую систему. Следовательно, создаваемая этим круговым током дополнительная индукция магнитного поля направлена навстречу вектору индукции внешнего магнитного поля. *Магнитный момент атома, возникающий в результате прецессии, и намагниченность также направлены противоположно вектору индукции внешнего магнитного поля.* Эта картина возникновения ларморовой прецессии и связанных с ней магнитного момента и дополнительного магнитного поля составляет сущность явления **диамагнетизма.** Очевидно, что диамагнетизмом обладает любое вещество. Вопрос заключается лишь в оценке его величины.

Диамагнитная восприимчивость. Каждый электрон в атоме совершает ларморовское движение вокруг оси, совпадающей с направлением магнитного поля (рис. 164). Возникающий вследствие этого магнитный момент равен

$$p_{mi} = S_i I_i = \pi r_i^2 e/T = e r_i \omega_L/2, \tag{40.14}$$

откуда

$$J = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V} p_{mi} = -\frac{e^2}{4m} BN\left\langle\sum_i r_i^2\right\rangle, \tag{40.15}$$

где N – концентрация атомов. В (40.15) использовано выражение для ларморовой частоты, а под знаком среднего стоит сумма квадратов расстояний электронов в атоме от оси ларморовой прецессии. На рис. 164 видно, что

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \tag{40.16}$$

где R_i – расстояние электрона от ядра. Принимая во внимание беспорядочную ориентировку атомов в пространстве, имеем

$$\langle x_i^2\rangle = \langle y_i^2\rangle = \langle z_i^2\rangle = R_i^2\rangle/3 \tag{40.17}$$

и, следовательно,

$$\langle r_i^2\rangle = \langle x_i^2 + y_i^2\rangle = 2\langle R_i^2\rangle/3 = 2\langle R^2\rangle/3, \tag{40.18}$$

откуда

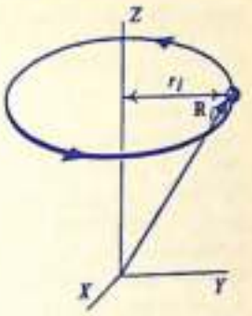
$$\left\langle\sum_i r_i^2\right\rangle = 2Z\langle R^2\rangle/3, \tag{40.19}$$

где Z – число электронов в атоме. Поэтому окончательно для намагниченности получаем формулу

$$J = -\frac{e^2}{6m} NZ\langle R^2\rangle\mu H. \tag{40.20}$$

Сравнивая (40.20) с формулой

$$J = \chi_a H, \tag{40.21}$$



164

К вычислению диамагнитной восприимчивости

● Изменение частоты вращения электронов в атоме, обусловливающее диамагнетизм, возникает при изменении индукции магнитного поля во время внесения атома в магнитное поле или во время возникновения магнитного поля. Само по себе магнитное поле не производит работы и не в состоянии изменить скорость движения электронов в атоме.

Диамагнитная восприимчивость не зависит от температуры, поскольку тепловое движение и столкновения атомов не выводят их на сколько-нибудь заметное время из состояния ларморовой прецессии.

получаем для диамагнитной восприимчивости выражение

$$\chi_{\text{д}} = -\frac{e^2}{6m} NZ\langle R^2\rangle \mu_0, \tag{40.22}$$

где учтено, что $\mu \approx \mu_0$, поскольку у диамагнетиков проницаемость лишь незначительно отличается от проницаемости вакуума. Формула (40.22) хорошо согласуется с экспериментом, если под $\langle R^2\rangle$ понимать средний квадрат расстояния электронов от ядра в атоме, вычисленный по квантовой теории. Для твердых тел и жидкостей диамагнитная восприимчивость имеет порядок $\sim 10^{-5}$, а для газов она значительно меньше из-за меньшей концентрации атомов [т. е. меньших значений N в формуле (40.22)].

Независимость диамагнитной восприимчивости от температуры. Формула (40.22) показывает, что $\chi_{\text{д}}$ *не зависит от температуры*, потому что ни одна из входящих в эту формулу величин не может зависеть от температуры. Это объясняется тем, что ларморовское движение электронов устанавливается очень быстро, за характерные для атомных процессов промежутки времени. Поэтому *тепловое движение и столкновения атомов не выводят их на сколько-нибудь заметное время из состояния ларморовой прецессии*. Это хорошо подтверждается экспериментом. Независимость диамагнитной восприимчивости от температуры была открыта экспериментально в 1895 г. П. Кюри (1859–1906).

§ 41. Парамагнетики

Обсуждаются физическая природа парамагнитной восприимчивости и ее свойства. Описываются магнетизм, обусловленный свободными электронами, и парамагнитный резонанс.

Механизм намагничивания. Парамагнетиками являются вещества, молекулы которых обладают постоянными магнитными моментами. Энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле равна

$$W = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}. \tag{41.1}$$

Минимум энергии достигается при совпадении $\mathbf{p}_m$ с направлением вектора индукции, благодаря чему при внесении парамагнетика в магнитное поле в соответствии с распределением Больцмана возникает преимущественная ориентация магнитных моментов его атомов в направлении индукции и соответствующее намагничивание. Индукция дополнительного магнитного поля за счет намагничивания совпадает по направлению с индукцией внешнего поля и усиливает ее. Однако угол между направлением магнитного момента атома и индукцией магнитного поля под действием поля не изменяется: магнитный момент испытывает лишь прецессионное движение вокруг направления вектора индукции без изменения угла между ними [см. (40.11)].

Переориентировка магнитных моментов в соответствии с распределением Больцмана происходит в результате столкновений и взаимодействий атомов между собой.

Зависимость парамагнитной восприимчивости от температуры. Механизм намагничивания парамагнетиков аналогичен механизму электризации полярных диэлектриков (см. § 22). Различие заключается лишь в использовании формулы (41.1) вместо формулы (22.1). Поэтому формулы для парамагнитной восприимчивости получаются заменой величин $\mathbf{p} \to \mathbf{p}_m$, $\mathbf{E} \to \mathbf{B}$ в формулах § 22 для диэлектрической восприимчивости.

Вместо (22.10) получаем формулу

$$\langle p_{mz}\rangle = p_m L(\beta), \tag{41.2}$$

где $L(\beta)$ – функция Ланжевена (см. § 22) при $\beta = p_m B/(kT)$. При сравнительно высоких температурах и малых полях, когда $p_m B \ll kT$, т. е. $\beta \ll 1$, вместо (22.13) получаем формулу

$$\langle p_{mz}\rangle = p_m^2 B/(3kT) \approx p_m^2 \mu_0 H/(3kT), \tag{41.3}$$

т. е. $\mu \approx \mu_0$, поскольку отличие магнитной проницаемости парамагнетиков от μ_0 очень небольшое. Для намагниченности получаем формулу

$$J = N\langle p_{mz}\rangle = [p_m^2 N\mu_0/(3kT)]\, H, \tag{41.4}$$

сравнение которой с равенством

$$J = \chi_{\text{п}} H \tag{41.5}$$

приводит к следующему выражению для парамагнитной восприимчивости:

$$\chi_{\text{п}} = p_m^2 N\mu_0/(3kT) = C/T, \tag{41.6}$$

где C – постоянная Кюри.

Зависимость $\chi_{\text{п}} \sim 1/T$ называется **законом Кюри**, так как впервые была экспериментально обнаружена в 1896 г. П. Кюри.

Величина атомных магнитных моментов имеет порядок $p_m \sim 10^{-23}$ А · м^2, поэтому при комнатной температуре $\chi_{\text{п}} \sim 10^{-3}$, т. е. $\chi_{\text{п}}$ на два порядка больше диамагнитной восприимчивости. Это означает, что *у парамагнитных веществ диамагнитной восприимчивостью обычно можно пренебречь*.

Теория Ланжевена достаточно точно описывает лишь газы, у которых взаимодействие между молекулами пренебрежимо мало вследствие больших расстояний между ними. В жидкостях и твердых телах это взаимодействие может быть значительным. Учет этого взаимодействия во многих случаях модифицирует зависимость (41.6) восприимчивости от температуры. Эта зависимость принимает вид **закона Кюри – Вейсса:**

$$\chi_{\text{п}} = \text{const}/(T - T_0), \tag{41.7}$$

где температура T_0 характерна для вещества и определяется его свойствами.

Магнитные моменты свободных атомов. Магнитные моменты атомов возникают за счет двух факторов:

1) орбитального движения электронов. Полный орбитальный магнитный момент атома является суммой орбитальных магнитных моментов отдельных электронов;

2) наличия у каждого электрона собственного магнитного момента, связанного со спином электрона, т. е. собственным механическим моментом электрона.

Магнитные моменты отдельных электронов связываются между собой, образуя полный спиновый магнитный момент атома. Каждый электрон, двигаясь в магнитном поле, создаваемым орбитальным движением всех остальных электронов, благодаря наличию спинового магнитного момента взаимодействует с этим полем. Это взаимодействие называется **спин-орбитальным.** *Благодаря ему полный орбитальный момент электронов связывается с их полным спиновым магнитным моментом, образуя полный магнитный момент атома. О таком пути образования полного магнитного момента атома говорят как о LS-связи.* В принципе возможен и другой путь возникновения полного магнитного момента атома: *сначала спиновый магнитный момент каждого электрона связывается с орбитальным моментом того же электрона, образуя полный магнитный момент электрона, а затем полные магнитные моменты электронов связываются между собой и получается полный магнитный момент атома.* Однако в большинстве случаев, за исключением самых тяжелых элементов, такой путь не реализуется, поскольку интенсивность взаимодействия спинового магнитного момента электрона с его собственным орбитальным движением оказывается слабее, чем его взаимодействие со спиновыми магнитными моментами других электронов и полный магнитный момент отдельно для каждого электрона не возникает. Поэтому *в большинстве случаев реализуется LS-связь.*

Вопрос о сложении полного магнитного орбитального момента с полным спиновым моментом требует учета того обстоятельства, что коэффициент пропорциональности в линейном соотношении между полным орбитальным магнитным моментом и полным орбитальным механическим моментом отличается от коэффициента пропорциональности в линейном соотношении между полным спиновым магнитным моментом и полным спином. По правилу сложения векторов в атоме складываются полные механические моменты, а сложение магнитных моментов получается как следствие сложения механических моментов. В результате *полный магнитный момент атома может быть неколлинеарным с его полным внутренним механическим моментом.*

Проблема магнитных моментов свободных атомов упрощается благодаря тому, что энергетически выгодным является такое заполнение атомных оболочек электронами, при котором полный момент имеет минимальную величину. Благодаря этому полный орбитальный и спиновый моменты замкнутых полных оболочек атома, а также полный момент полностью заполненных оболочек равны нулю. Следовательно, *магнитный момент атома определяется лишь электронами не полностью заполненных оболочек.* В большинстве случаев такие оболочки являются внешними. Дальнейшее упрощение картины получается за счет того, что спины электронов и орбитальные моменты во внешней оболочке стремятся ориентироваться в противоположном направлении, чтобы максимально компенсировать друг друга. Поэтому *магнитный момент свободного атома определяется в основном нескомпенсированными спинами внешних электронов.*

Магнитные моменты молекул. Магнитный момент молекулы не равен сумме магнитных моментов атомов, поскольку осуществление химической связи между атомами требует определенной перестройки внешних атомных оболочек. Например, молекула азота N_2 осуществляется ковалентной связью и два обобществленных электрона имеют антипараллельные спины. Орбитальные моменты также скомпенсированы и равны нулю. В результате получается, что молекулы N_2 не обладают постоянным магнитным моментом, т. е. азот не является парамагнетиком. В молекулах с ионной связью наблюдается та же тенденция к скомпенсированности магнитных моментов. Например, молекула поваренной соли NaCl осуществляется ионной связью между Na^+ и Cl^-. Оба иона обладают замкнутыми электронными оболочками, в результате чего полный магнитный момент равен нулю. Можно сказать, что *общая тенденция при образовании молекул состоит в обеспечении нулевого полного момента.* Из распространенных газов парамагнитными свойствами обладают только кислород O_2, у которого спины обобществленных электронов нескомпенсированы, и NO и NO_2, у которых общее число электронов нечетно и, следовательно, спин одного из электронов оказывается нескомпенсированным.

Большинство твердых веществ состоит из ионов с замкнутыми оболочками, благодаря чему они не обладают парамагнитными свойствами, а являются лишь диамагнетиками. Главное исключение из этого правила составляют соединения, в которые входят «переходные элементы». Электронная оболочка этих элементов заполнена лишь частично, благодаря чему они многовалентны, а их ионы обладают постоянными магнитными моментами. Таким образом, *парамагнетизм соединений переходных элементов обусловлен магнитными моментами их ионов.* Ионы с близкими конфигурациями внешних электронных оболочек приводят к близким парамагнитным свойствам соединений.

Магнетизм, обусловленный свободными электронами. Хотя свободные электроны в магнитном поле под действием силы Лоренца движутся по окружностям, классическая теория предсказывает отсутствие диамагнитного эффекта вследствие отражения электронов на границах области, а квантовая теория утверждает его существование. Диамагнитная восприимчивость оказывается равной

$$\chi_d = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi m^*}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3}, \qquad (41.8)$$

где m^* – эффективная масса свободных электронов; n – их концентрация. При не очень большой индукции магнитного поля диамагнитная восприимчивость является постоянной и не зависит от температуры.

Другой магнитный эффект, связанный с электронами проводимости, обусловлен взаимодействием спинового магнитного момента электрона с магнитным полем, благодаря чему возникает избыток электронов, магнитные спиновые моменты которых ориентированы по направлению индукции поля по сравнению с электронами с противоположными спиновыми магнитными моментами. Это явление называется **парамагнетизмом электронов проводимости.** Как показывают расчеты, парамагнитная восприимчивость электронов проводимости в лабораторных условиях практически не зависит от температуры. Наиболее сильно парамагнетизм электронов проводимости проявляется у переходных металлов. В лабораторных условиях диамагнитная восприимчивость электронов проводимости практически всегда меньше их парамагнитной восприимчивости (примерно в три раза) и поэтому их суммарная восприимчивость оказывается положительной (парамагнитной).

Парамагнитный резонанс. Представим себе, что в парамагнетике, помещенном в магнитное поле, создается дополнительное периодическое магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен вектору индукции постоянного поля. За счет постоянного магнитного поля (рис. 163, *б*) магнитные моменты атомов совершают ларморову прецессию. В результате взаимодействия магнитного момента $\mathbf{p}_m$ атома с индукцией $\mathbf{B}$ дополнительного переменного магнитного поля создается момент сил $\mathbf{M}$, стремящийся изменить угол между $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$. Если частота переменного магнитного поля отличается от частоты ларморовой прецессии, то часть времени этот момент стремится увеличить угол между $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$, а часть времени – уменьшить, и в среднем никакого эффекта не наблюдается. Если же частоты переменного магнитного поля и ларморовой прецессии совпадают, то созданный переменным магнитным полем момент сил либо все время увеличивает угол между моментом атома и индукцией постоянного магнитного поля, либо уменьшает, в зависимости от соотношения фаз ларморовой прецессии и индукции переменного магнитного поля. *В результате такого сравнительно длительного действия момента сил происходит переориентация магнитного момента атома и изменение угла между ним и вектором индукции постоянного магнитного поля.* Это явление называется **магнитным резонансом.** Переориентация магнитного момента в соответствии с формулой (41.1) связана с изменением энергии магнитного момента в постоянном магнитном поле, что по закону сохранения энергии сопровождается обменом энергией с переменным магнитным полем. Это поле осуществляется в виде стоячих электромагнитных волн, магнитный вектор которых перпендикулярен вектору индукции постоянного магнитного поля. Таким образом, *обмен энергией происходит с электромагнитной волной.*

В результате этого создаются группы атомов с ориентировкой магнитных моментов, параллельной индукции магнитного поля и антипараллельной, т. е. обладающих согласно (41.1) различной энергией взаимодействия с магнитным полем. Энергии атомов с антипараллельной ориентацией больше, чем с параллельной.

Кроме механизма переориентировки магнитных моментов переменным электромагнитным полем постоянно действует механизм переориентировки магнитных моментов тепловым движением и взаимодействием между атомами. В условиях одновременного действия этих механизмов тепловое движение и взаимодействие атомов производит преимущественно переориентировку магнитных моментов, антипараллельных вектору индукции. Выделяющаяся при этом энергия превращается в теплоту. Переориентировка параллельных индукции поля магнитных моментов осуществляется преимущественно в результате поглощения энергии электромагнитной волны. Поэтому *наблюдение парамагнитного резонанса сводится к измерению интенсивности электромагнитной волны, прошедшей через парамагнетик, находящийся в магнитном поле.* С экспериментальной точки зрения проще использовать электромагнитную волну постоянной частоты, а резонанса добиваться изменением индукции магнитного поля. В тот момент, когда соответствующая индукции поля ларморова частота будет равна частоте электромагнитной волны, наблюдается резкое ослабление ее интенсивности, свидетельствующее о наступлении парамагнитного резонанса.

Парамагнитный резонанс позволяет получить большую и разнообразную информацию о свойствах парамагнетика и широко используется в научных исследованиях.

Эта классическая картина возникновения парамагнитного резонанса имеет лишь качественный характер. Более строгий подход возможен в рамках квантовой теории, которая основана на представлении о поглощении и испускании квантов электромагнитного излучения атомными системами с соответствующей скачкообразной переориентировкой магнитных моментов, обеспечивающих соблюдение закона сохранения энергии. В рамках этих представлений удается получить количественные соотношения, характеризующие парамагнитный резонанс.

Из формулы (40.13) следует, что при индукции магнитного поля 1 Тл частота парамагнитного резонанса имеет порядок 10^{10} Гц, а при уменьшении индукции эта частота соответственно уменьшается и можно надеяться наблюдать парамагнитный резонанс при сравнительно низких частотах. Однако его не удается наблюдать на частотах ниже 10^8 Гц, т. е. при индукции постоянного поля, равной примерно 0,01 Тл.

Это находится в соответствии с квантовой теорией парамагнитного резонанса, предсказывающей значительное уменьшение поглощения электромагнитных волн при уменьшении их частоты, благодаря чему резонанс на сравнительно низких частотах выражен очень слабо. Наиболее используемыми в исследованиях являются частоты порядка 10^{10} Гц (длина волны 3 см).

§ 42. Ферромагнетики

Обсуждаются основные экспериментальные факты ферромагнетизма и дается их элементарная теоретическая трактовка. Вводится общее представление об антиферромагнетизме, ферримагнетизме и ферромагнитном резонансе.

Определение. *Магнетики, магнитная проницаемость которых достигает больших значений и зависит от внешнего магнитного поля и предшествующей истории, называются ферромагнетиками.* Они обладают остаточной намагниченностью, т. е. их намагниченность может быть отличной от нуля при отсутствии внешнего магнитного поля. В этом случае они являются постоянными магнитами. Таким образом, по своим формальным проявлениям ферромагнетики аналогичны сегнетоэлектрикам (см. § 23). Следует заметить, что ферромагнетизм был открыт и изучен значительно раньше сегнетоэлектричества. Намагничивание ферромагнетиков было исследовано А. Г. Столетовым (1839–1896) в 1878 г. Им была построена кривая магнитной проницаемости (рис. 168), названная позже кривой Столетова. Гистерезис был открыт в 1880 г. Варбургом (1846–1931).

Кривая намагничивания и петля гистерезиса. Магнитная восприимчивость ферромагнетиков является функцией напряженности внешнего поля, а зависимость $J(H)$ имеет вид, показанный на рис. 165. *Намагниченность не увеличивается безгранично при увеличении напряженности, а имеет предел, называемый намагниченностью насыщения.* Ее существование по аналогии с парамагнетиками указывает, что намагниченность ферромагнетиков обусловливается также переориентировкой некоторых элементарных магнитных моментов.

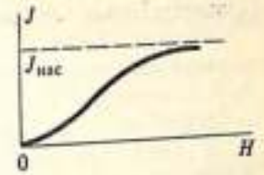
Поскольку

$$B = \mu_0 H + \mu_0 J, \qquad (42.1)$$

кривая зависимости $B(H)$ не выходит на насыщение, хотя J испытывает насыщение. График этой зависимости называется **кривой намагничивания** (рис. 166).

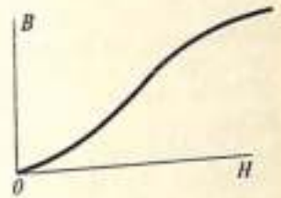
Если производить перемагничивание образца в периодическом магнитном поле, то в полной аналогии с сегнетоэлектриками кривая зависимости $B(H)$ имеет вид петли, называемой петлей гистерезиса (рис. 167). Участок OA является кривой намагничивания, поскольку включение поля производится при нулевом значении индукции, т. е. при отсутствии постоянной намагниченности. Замкнутая кривая $ACDFGKA$ является петлей гистерезиса. Ее демонстрация производится по схеме, аналогичной схеме демонстрации петли гистерезиса сегнетоэлектриков с заменой конденсаторов на катушки (см. § 23).

При уменьшении напряженности H магнитного поля от некоторого значения (точка A) до нуля индукция B поля уменьшается лишь немного, до значения индукции, описываемой отрезком OC. Эта индукция называется **остаточной**. Ферромагнетик в этом состоянии называется постоянным магнитом.



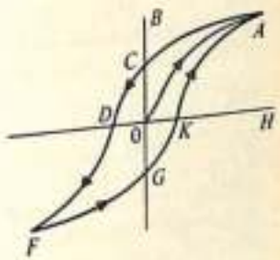
165 Насыщение намагниченности

Для того чтобы ликвидировать остаточное поле, необходимо приложить обратное поле, напряженность которого задается отрезком OD. Эта напряженность называется **задерживающей** или **коэрцитивной силой ферромагнетика**. Форма петли гистерезиса, остаточная индукция и коэрцитивная сила зависят от материала ферромагнетика и изменяются для различных материалов в широких пределах.



166 Кривая намагничивания

Кривая магнитной проницаемости. Относительная магнитная проницаемость $\mu_r = \mu/\mu_0 = B/(\mu_0 H)$ как функция от H может быть построена по данным кривой намагничивания (рис. 166) и имеет вид, показанный на рис. 168. При росте H значение μ_r достигает максимума и затем при достижении насыщения намагниченности быстро спадает. У ферромагнетиков μ_r порядка 10^4 в максимуме не являются редкостью.



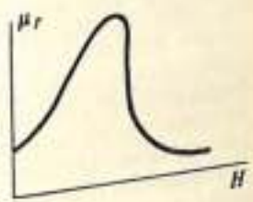
167 Петля гистерезиса

Классификация ферромагнитных материалов. Ферромагнитные материалы можно разделить на две группы:

1) мягкие в магнитном отношении материалы с большой магнитной проницаемостью, легко намагничивающиеся и размагничивающиеся, с малой коэрцитивной силой;

2) жесткие в магнитном отношении материалы с относительно низкой магнитной проницаемостью, очень трудно намагничивающиеся и размагничивающиеся, с большой коэрцитивной силой.

Материалы первой группы используются главным образом в электротехнике переменных полей, в частности в трансформаторах, а второй группы – для создания постоянных магнитов.



168 Кривая магнитной проницаемости (кривая Столетова)

Взаимодействие электронов. Ферромагнетизм может быть рассмотрен только в рамках квантовой теории. *В рамках классической теории магнетизма можно лишь описать свойства ферромагнетиков и обсудить качественно механизм его возникновения.*

Экспериментально было установлено впервые в опытах Эйнштейна и де Гааз, что ферромагнетизм обусловлен спинами электронов. Ферромагнетики обладают свойством спонтанной намагниченности, когда при отсутствии внешних магнитных полей под действием внутренних причин спины электронов стремятся ориентироваться в одном общем направлении. Однако образцу в целом быть намагниченным энергетически невыгодно. Поэтому он разбивается на малые намагниченные области – домены. Каждый домен намагничен в определенном направлении, но направление вектора намагниченности в соседних доменах различно и поэтому магнитный момент малых физических объемов оказывается равным нулю, т. е. магнетик в целом не намагничен.

Сказанное показывает, что *основной вопрос теории ферромагнетизма состоит в объяснении стремления спинов электронов сориентироваться в одном общем направлении.* Поскольку в системе реализуется состояние с наименьшей энергией, задача состоит в том, чтобы найти такое взаимодействие, при котором энергетически выгодным была бы параллельная ориентировка спиновых магнитных моментов различных атомов. Для этого надо, чтобы полная энергия была минимальной при параллельной ориентировке моментов.

Возникновение такой ситуации связано с обменным взаимодействием. Вследствие того что электроны подчиняются статистике Ферми – Дирака, которая не допускает нахождения двух частиц в одном и том же состоянии, электроны с параллельными спинами оказываются как бы раздвинутыми в пространстве, благодаря чему уменьшается их энергия кулоновского взаимодействия по сравнению с электронами с антипараллельными спинами, когда они могут располагаться в пространстве более тесно. **Энергией обменного взаимодействия** называется разность энергий между конфигурациями с параллельными и антипараллельными спинами.

Однако такая ситуация сама по себе не обеспечивает возникновения ферромагнетизма, поскольку с уменьшением кулоновского взаимодействия при параллельных спинах происходит увеличение их кинетической энергии. В большинстве случаев оно перекрывает уменьшение потенциальной энергии и полная энергия конфигураций с параллельными спинами оказывается невыгодной. Лишь в редких случаях, когда уменьшение потенциальной энергии при параллельных спинах более значительно, чем увеличение кинетической энергии, полная энергия уменьшается. При этом конфигурации с параллельными спинами становятся энергетически выгодными и возникает ферромагнетизм. Исследование условий, при которых такая ситуация возможна, составляет предмет теории ферромагнетизма. При этом главную роль играет правильный выбор выражения для энергии взаимодействия.

Элементарная теория ферромагнетизма. Обменная энергия в теории ферромагнетизма выражается формулой

$$W_{об} = -2I_{об}\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \tag{42.2}$$

где $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ – спины взаимодействующих электронов, $I_{об}$ – интеграл обменного взаимодействия. Из (42.2) видно, что при $I_{об} > 0$ потенциальная энергия достигает минимума при параллельных спинах. Эта энергия обусловлена взаимодействием магнитного момента электрона с магнитным полем и выражается формулой вида (41.1), в которой, однако, под индукцией $\mathbf{B}$ понимается индукция $\mathbf{B}_{об}$ обменного поля. Собственный магнитный момент $\mathbf{p}_m^{(0)}$ электрона связан с его собственным механическим моментом или спином $\mathbf{S}$ соотношением вида (40.10), однако с коэффициентом пропорциональности, в два раза большим:

$$\mathbf{p}_m^{(0)} = (e/m)\,\mathbf{S}. \tag{42.3}$$

Поэтому, представляя энергию взаимодействия (42.2) как энергию магнитного момента второго электрона, находящегося в магнитном поле, созданном за счет обменного взаимодействия первым электроном, имеем

$$W_{об} = -\frac{2I_{об}\mathbf{S}_1 m}{e}\frac{e}{m}\mathbf{S}_2 = -\mathbf{p}_{m2}^{(0)} \cdot \mathbf{B}_{об}, \tag{42.4}$$

где

$$\mathbf{B}_{об} = (2I_{об}m/e)\,\mathbf{S}_1. \tag{42.5}$$

Полная индукция магнитного поля складывается из индукции $\mathbf{B}$ поля при отсутствии обменного взаимодействия и индукции $\mathbf{B}_{об}$ обменного поля. Соотношение (38.21) с учетом (38.23) может быть представлено в виде

$$\mu_0(1+\chi)\,\mathbf{J} = \chi\mathbf{B}, \text{ или } \chi_0\mathbf{J} = [\chi/(1+\chi)]\,\mathbf{B}. \tag{42.6}$$

Это соотношение обобщается при наличии обменного взаимодействия формулой

$$\mu_0\mathbf{J} = [\chi/(1+\chi)](\mathbf{B} + \mathbf{B}_{об}), \tag{42.7}$$

причем магнитная восприимчивость χ в этой формуле считается равной ее значению в (42.6) для парамагнетика при отсутствии обменного взаимодействия.

Дальнейшее рассмотрение ведется в приближении среднего поля, основное предположение которого состоит в том, что индукция обменного поля пропорциональна намагниченности:

$$\mathbf{B}_{об} = \lambda\mu_0\mathbf{J}, \tag{42.8}$$

где λ – постоянная обменного взаимодействия. Подставляя (42.8) в (42.7), находим соотношение

$$\mu_0\mathbf{J} = [\chi/(1+\chi-\lambda\chi)]\,\mathbf{B}, \tag{42.9}$$

которое целесообразно представить в виде, аналогичном (42.7):

$$\mu_0 \mathbf{J} = [\chi'/(1+\chi')]\,\mathbf{B}, \tag{42.10}$$

где

$$\chi'/(1+\chi') = \chi/(1+\chi-\lambda\chi) \tag{42.11}$$

характеризует восприимчивость с учетом обменного взаимодействия. Из (42.11) находим

$$\chi' = \frac{\chi}{1-\chi\lambda} = \frac{C}{T-\lambda C}, \tag{42.12}$$

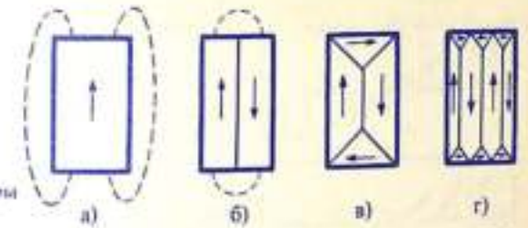
где $\chi = C/T$.

В области температур $T > \lambda C$ тело ведет себя как парамагнетик с характерным уменьшением магнитной восприимчивости с увеличением температуры. При приближении к $T = \lambda C$ восприимчивость $\chi' \to \infty$. Это означает, что сколь угодно малые поля вызывают конечную намагниченность. Другими словами, *при $T = \lambda C$ происходит возникновение спонтанной намагниченности, т. е. переход в ферромагнитное состояние.* Изложенная элементарная теория не позволяет количественно проанализировать изменение спонтанной намагниченности при дальнейшем уменьшении температуры в области $T < \lambda C$. Более точная теория показывает, что спонтанная намагниченность при $T = \lambda C$ возрастает скачком до конечного значения, а затем при уменьшении T продолжает возрастать, но скорость роста постепенно уменьшается. Таким образом, при $T < \lambda C$ магнетик находится в ферромагнитной фазе.

Закон Кюри – Вейсса. Для всякого ферромагнетика существует температура, при переходе через которую он испытывает фазовый переход (второго рода) и превращается в парамагнетик. Магнитная восприимчивость в парамагнитной области вблизи температуры перехода, называемой температурой Кюри, описывается соотношением вида (42.12), называемым **законом Кюри – Вейсса.** Величина $\lambda C = \Theta$ называется **температурой Кюри – Вейсса.** Теория показывает, что фазовый переход совершается не при температуре Кюри – Вейсса, а при температуре, близкой к ней.

Поэтому иногда допустимо не делать различия между температурой Кюри, при которой происходит фазовый переход, и температурой Кюри – Вейсса.

Анизотропия намагничивания. При исследовании кривых намагничивания ферромагнитных монокристаллов было показано, что при различных ориентировках намагничивающего поля относительно осей кристалла кривые намагничивания получаются различными, т. е. ферромагнитные свойства кристалла зависят от направления намагничивания. *Направление, в котором намагниченность при данном поле максимальна, называется направлением или осью легкого намагничивания, а направление, в котором намагниченность при данном поле минимальна, называется направлением или осью трудного намагничивания.*



169

Идеализированные структуры доменов в монокристалле

Домены. Идеализированные структуры доменов в монокристалле изображены на рис. 169 (стрелками показаны направления намагниченности):

а – индукция внешнего магнитного поля велика;

б – внешнее поле сосредоточено в основном около верхней и нижней стенок и имеет значительно меньшую энергию, чем в случае *а*;

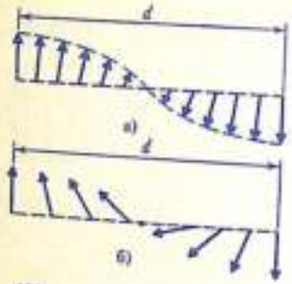
в – нет свободных полюсов и поле не выходит из области домена;

г – осуществляется та же ситуация, что и в случае *в*, но при разбиении структуры на более мелкие домены.

Границы. Для минимизации энергии магнитного поля выгодным является максимальное уменьшение размеров домена. *Однако этому препятствует необходимость затраты энергии на образование границ между доменами*, поскольку намагниченность по разные стороны границы имеет различное направление. Граница между доменами имеет конечную толщину d, в пределах которой намагниченность постепенно изменяет свое направление от ориентации в одном домене к ориентации в другом, т. е. границы между доменами являются стенками конечной толщины. Стенки классифицируются по особенностям поворота вектора намагниченности в них. Если перпендикулярная стенке составляющая намагниченности в процессе его поворота не изменяется, то стенка называется стенкой Блоха. Другими словами, в стенке Блоха вращение намагниченности происходит в плоскости, параллельной стенке (рис. 170, *а*). Если изменение направления намагниченности происходит с изменением ее составляющей, перпендикулярной стенке, то стенка называется стенкой Нееля (рис. 170, *б*).

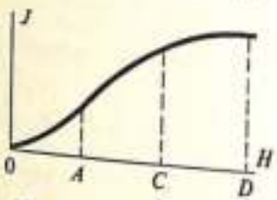
Перемагничивание. Увеличение намагниченности образца при росте напряженности магнитного поля происходит сначала из-за обратимого смещения границ и поворотов граничных стенок (рис. 171; участок OA). На участке AC осуществляется необратимое смещение границ и исчезновение некоторых доменов и, наконец, на участке CD, предшествующем насыщению, наблюдается изменение направления намагниченности внутри доменов.

Антиферромагнетизм. При определенных условиях обменное взаимодействие приводит к такой ситуации, что энергетически выгодным является антипараллельная ориентировка спинового момента соседних атомов. Для этого необходима реализация условий, аналогичных условиям возникновения ферромагнетизма, но для конфигураций



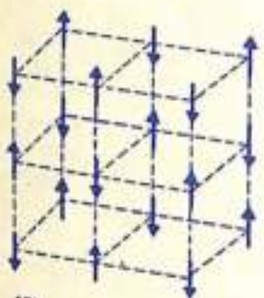
170

Изменение намагниченности в стенке: Блоха (а); Нееля (б)



171

Области различных механизмов перемагничивания



172

Антиферромагнетизм

● **Характерной особенностью кривой намагничивания ферромагнетиков является существование насыщения, а кривой перемагничивания — петля гистерезиса.**

с антипараллельными спинами. В результате этого спиновые магнитные моменты соседних атомов оказываются ориентированными в противоположных направлениях (рис. 172).

Такую ситуацию можно интерпретировать как одновременное наличие двух подрешеток, которые спонтанно намагничены в противоположных направлениях с одинаковой интенсивностью. Суммарная намагниченность равна нулю. Эта ситуация называется **антиферромагнетизмом**, а тела, в которых она осуществляется, — **антиферромагнетиками.**

У антиферромагнетиков вектор индукции обменного поля направлен противоположно вектору намагниченности **J**. Поэтому вместо (42.8) для них справедливо соотношение

$$\mathbf{B}_{об} = -\lambda_a \mu_0 \mathbf{J}. \qquad (42.13)$$

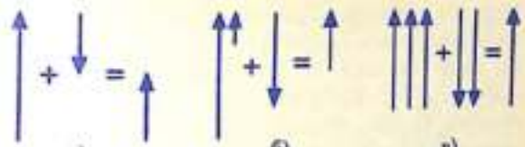
Произведя такие же вычисления, которые от (42.8) привели к (42.12), получим для восприимчивости антиферромагнетика формулу (42.12), но с заменой λ на $-\lambda_a$:

$$\chi_a = C/(T + \lambda_a C) = C/(T + \Theta), \qquad (42.14)$$

где $\Theta = \lambda_a C$ — температура Кюри — Вейсса. Так же как и в случае ферромагнетиков, переход в антиферромагнитное состояние происходит при температуре, отличающейся от температуры Кюри — Вейсса. Температура перехода в антиферромагнитное состояние называется **температурой Нееля** T_N.

Ниже температуры Нееля в нулевом поле полная спонтанная намагниченность антиферромагнетика равна нулю, поскольку противоположные намагниченности подрешеток полностью компенсируются. При наложении внешнего поля возникает небольшая намагниченность, соответствующая положительной восприимчивости.

Модель двух подрешеток достаточна для объяснения антиферромагнетизма во многих случаях. Однако иногда, когда дело не сводится лишь к коллинеарным магнитным моментам и необходимо обеспечить равенство нулю векторной суммы нескольких магнитных моментов, что является характерным признаком антиферромагнетизма, приходится пользоваться моделью более чем двух подрешеток.



173

Простейшие возможности осуществления ферримагнетизма

Ферримагнетизм. Может случиться, что подрешетки обладают спонтанной намагниченностью противоположного направления, но различной интенсивности, из-за чего не происходит, как у антиферромагнетиков, полной ликвидации намагниченности. У таких веществ имеется *спонтанная намагниченность, хотя и менее интенсивная по сравнению с веществами, все магнитные моменты которых были бы ориентированы в одном направлении.* Такие материалы обладают свойствами, аналогичными свойствам ферромагнетиков, в частности обладают остаточной намагниченностью, характеризуются коэрцитивной силой и т. д. Они называются **ферримагнетиками** или **ферритами**. Иногда о *ферримагнетизме говорят как о нескомпенсированном антиферромагнетизме.*

Очень *существенные преимущества ферритов по сравнению с ферромагнетиками связаны с их чрезвычайно малой электропроводимостью,* в то время как ферромагнетики являются хорошими проводниками электрического тока, поскольку хорошая электропроводность ферромагнетиков является недостатком при использовании в радиотехнике.

Под **подрешеткой** понимается совокупность всех ионов внутри кристалла, которые эквивалентны друг другу как в кристаллографическом смысле, так и в смысле электростатических и магнитных взаимодействий с окружающими ионами. Отсюда следует, что для существования ферримагнетизма необходимо существование по меньшей мере двух неэквивалентных подрешеток. Простейшие возможности осуществления ферримагнетизма показаны на рис. 173, *а—в*.

Ферромагнитный резонанс. Он обусловлен взаимодействием спиновых магнитных моментов электронов с переменным электромагнитным полем. Однако в ферромагнетиках этот резонанс значительно сложнее, чем в парамагнетиках. Это вызвано тем, что в ферромагнетике имеются спонтанная намагниченность и доменная структура, а спины электронов очень сильно связаны обменным взаимодействием. Поэтому в *ферромагнетике явление резонанса с самого начала имеет коллективный характер, а прецессия спинов обусловливается не только внешним полем, но и эффективным полем, зависящим как от внешнего поля, так и от внутренних полей ферромагнетика, таких, как, например, поле анизотропии.*

Ферромагнитный резонанс наблюдается при частотах в несколько тысяч мегагерц. Если сверхвысокочастотное поле однородно по ампли-

туде, то во всем образце ферромагнетика наблюдается однородная прецессия спинов, вызывающая появление соответствующего резонансного пика. Однако наряду с ним образуются дополнительные резонансные пики, обусловленные доменными стенками (резонанс доменных стенок). Неоднородность поля сверхвысоких частот приводит к возникновению дополнительных резонансных пиков, обусловленных формой и размерами образца. Расшифровка этой довольно сложной картины ферромагнитного резонанса позволяет получить ценную информацию о свойствах ферромагнетика и измерить многие характеризующие его величины, такие, как намагниченность насыщения, гиромагнитное отношение, константу анизотропии и др.

Так же как и ферромагнетизм, ферромагнитный резонанс может быть описан только с помощью квантовой теории.

§ 43. Гиромагнитные эффекты

Описываются гиромагнитные эффекты и их экспериментальное наблюдение.

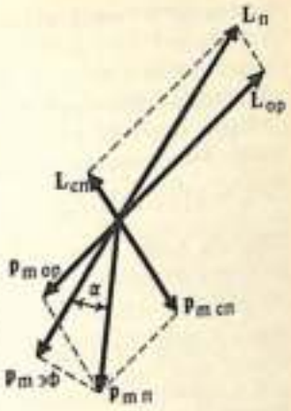
Соотношение между механическими и магнитными моментами. Намагничивание магнетика всегда связано с переориентировкой магнитных моментов в определенном направлении. Лишь в явлении диамагнетизма образуются новые магнитные моменты, ориентированные с самого возникновения одинаково. Магнитный момент орбитального движения электрона связан с механическим моментом этого движения соотношением (40.10). Собственный магнитный момент электрона связан с его собственным механическим моментом также линейным соотношением. Поэтому ясно, что и магнитный момент атома связан с его механическим моментом определенным соотношением. Это означает, что *переориентировка магнитных моментов происходит одновременно с переориентировкой соответствующих механических моментов.*

Полный магнитный момент атома складывается из магнитных моментов орбитальных движений электронов и их спиновых магнитных моментов. Аналогично суммируются и механические моменты. Однако, учитывая, что коэффициенты пропорциональности между магнитными и механическими моментами у орбитального движения и у спина различны, полный магнитный момент атома, вообще говоря, не коллинеарен его механическому моменту, а составляет с ним некоторый угол (рис. 174). Механический момент изолированной системы сохраняется. Следовательно, в свободном атоме $\mathbf{L}_a$ сохраняет свое направление в пространстве. Поэтому $\mathbf{p}_{ma}$ в результате движения электронов в атоме прецессирует вокруг направления полного механического момента, причем угловая скорость этой прецессии определяется временами внутриатомных процессов, т. е. очень велика. Поэтому *при взаимодействии магнитного момента с внешними полями эффективное значение имеет только компонента $\mathbf{p}_{ma\,эф}$ в направлении полного механического момента атома.* Эффективным магнитным моментом

атома при взаимодействии с внешними полями является момент $\mathbf{p}_{ma\,эф}$, коллинеарный $\mathbf{L}_a$. Таким образом, во всех случаях соотношение между моментами можно представить в виде

$$\mathbf{p}_{ma} = g\frac{e}{2m}\mathbf{L}_a, \qquad (43.1)$$

где e и m – масса и заряд электрона; g – **гиромагнитное отношение.** Для орбитального движения электрона $g = 1$, для спина $g = 2$, а для атомов эта величина имеет промежуточное значение между 1 и 2 в зависимости от того, в какой пропорции и как в полных моментах присутствуют вклады от орбитального движения электронов и их спинов. Напомним еще раз, что для *атома в (43.1) под $\mathbf{p}_{ma}$ понимается не истинный полный магнитный момент атома, а его проекция на направление полного механического момента,* обозначенная на рис. 174 как $\mathbf{p}_{ma\,эф}$.

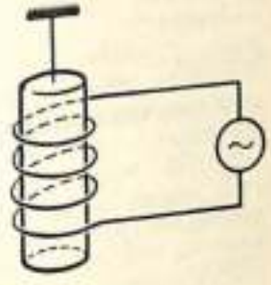


174

Схема сложения магнитных и механических моментов в атоме

Опыт Эйнштейна – де Гааз. Рассмотрим цилиндр из магнетика, подвешенный на упругой нити (рис. 175). Соотношение (43.1) между механическим и магнитным моментом показывает, что намагничивание цилиндра вдоль оси сопровождается не только приобретением атомами магнитного момента вдоль оси цилиндра, но и приобретением ими также и соответствующего механического момента, направленного вдоль оси. Полный механический момент стержня слагается из механических моментов отдельных атомов и механического момента стержня как целого. До намагничивания полный механический момент стержня равен нулю. Для изолированной системы полный момент сохраняется. В рассматриваемом случае изолированная система состоит из стержня и намагничивающего поля, создаваемого токами в соленоиде.

Отметим без доказательства (см. гл. 9), что момент импульса электромагнитного поля относительно оси цилиндра равен нулю и, следовательно, не влияет на закон сохранения момента импульса рассматриваемой системы. Это означает, что постоянной



175

Опыт Эйнштейна – де Гааз

○ *По каким причинам полный механический и полный магнитный моменты атома неколлинеарны? Какова величина играет роль эффективного полного момента атома при взаимодействии с внешними магнитными полями? Почему в опыте Эйнштейна – де Гааз используется перемагничивание в периодическом внешнем поле? Какими требованиями определяется частота внешнего поля? Какова природа намагниченности в эффекте Барнетта?*

должна быть сумма механических моментов всех атомов и механического момента стержня как целого, т. е. и после намагничивания эта сумма должна быть равна нулю. Но поскольку в результате намагничивания механический момент атомов изменяется, изменяется и момент стержня как целого. Из (43.1) следует, что при намагничивании выполняется соотношение

$$\Delta p_{mz} = g\left[e/(2m)\right]\Delta L_z, \tag{43.2}$$

где ΔL_z и Δp_z – механический и магнитный моменты, приобретаемые каждым атомом при намагничивании вдоль оси Z. Суммируя обе части равенства (43.2) по всем атомам, получаем

$$VJ = \sum \Delta p_{mz} = g\left[e/(2m)\right]\sum \Delta L_z, \tag{43.3}$$

где J – намагниченность стержня, V – его объем. По закону сохранения момента импульса, приобретаемый в результате намагничивания **момент импульса стержня** как целого равен

$$L_z = -\sum \Delta L_z = -\left[2m/(eg)\right]VJ. \tag{43.4}$$

Угловая скорость ω вращения стержня связана с его моментом импульса L_z относительно оси вращения и моментом инерции I_z соотношением

$$L_z = I_z\omega. \tag{43.5}$$

Кинетическая энергия вращения равна

$$W = {}^1/_2 I_z\omega^2. \tag{43.6}$$

С другой стороны, модуль кручения D нити связан с частотой ω_0 свободных крутильных колебаний стержня соотношением

$$I_z\omega_0^2 = D. \tag{43.7}$$

В результате приобретения кинетической энергии (43.6) стержень закрутит нить на угол θ, определяемый из закона сохранения энергии:

$${}^1/_2 I_z\omega^2 = {}^1/_2 D\theta^2. \tag{43.8}$$

Из (43.8) с учетом (43.7), (43.4) и (43.3) получаем

$$I_z\omega = D\theta^2/\omega = -2mVJ/(eg), \tag{43.9}$$

откуда

$$g = -2mVJ\omega/(e\theta^2 D). \tag{43.10}$$

Все величины в правой части или известны, или могут быть, в принципе, измерены, что позволяет определить g.

Эффект закручивания нити при намагничивании невелик. Поэтому фактически опыт проводился не однократным намагничиванием, как это было описано выше, а многократным перемагничиванием образца с частотой ω_0. В результате происходит наращивание крутильных колебаний образца, причем амплитуда вынужденных колебаний в резонансе при достаточно хорошей добротности может быть уже легко и надежно измерена. В принципиальном отношении переход к резонансной раскачке в приведенные рассуждения не вносит изменений.

Опыты Эйнштейна – де Гааз были поставлены с ферромагнитными стержнями, у которых эффект намагничивания особенно заметен. Экспериментально было получено

$$g = 2. \tag{43.11}$$

Это значение в два раза больше того, которое следовало ожидать, если бы магнетизм обусловливался орбитальным движением электронов в атоме. Когда выполнялись впервые эти опыты (1915) о спине электрона еще ничего не было известно и получившийся результат был загадочным. В дальнейшем был открыт спин и было показано, что для него $g = 2$. После этого стало ясно, что результат опыта Эйнштейна – де Гааз является прямым экспериментальным указанием на то, что ферромагнетизм обусловливается собственным магнитным моментом электронов, а не их орбитальным движением.

Для других магнетиков гиромагнитное отношение в аналогичных опытах получилось заключенным между 1 и 2. Знак во всех случаях свидетельствовал о том, что магнетизм обусловливается движением электронов.

Эффект Барнетта. Любой магнетик обладает диамагнетизмом. Если он является парамагнетиком, то его диамагнетизм вызван процессией магнитных моментов атомов вокруг направления вектора индукции магнитного поля, созданного в системе координат, где магнетик как целое покоится. Другими словами, его диамагнетизм является результатом прецессии атомов относительно кристаллической решетки магнетика. Приведем во вращательное движение магнетик как целое. Отдельные атомы представляют собой маленькие гироскопы, которые стремятся сохранить направление своей оси вращения в пространстве. Поэтому направление магнитных моментов отдельных атомов в пространстве сохраняется неизменным. Следовательно, относительно кристаллической решетки магнетика эти магнитные моменты будут совершать прецессионное движение с частотой вращения магнетика. Но такая упорядоченная прецессия атомов относительно магнетика как целого приводит к намагничиванию. Следовательно, *в результате вращения магнетик намагнитится*. В этом состоит эффект, впервые наблюдавшийся Барнеттом в 1909 г.

Из изложенного ясно, что при вращении магнетика с частотой ω его намагниченность такая же, как при внесении диамагнетика в магнитное поле с индукцией

$$B = 2m_e\omega/(|e|g). \tag{43.12}$$

Подчеркнем, что *при вращении парамагнетика у него возникает лишь диамагнитная намагниченность*. Она примерно на два порядка меньше, чем намагниченность в результате парамагнитного эффекта (переориентировки магнитных моментов).

Задачи

7.1. Диамагнитная восприимчивость меди (в твердом состоянии) равна $\chi_a = -8{,}8 \cdot 10^{-6}$. Определить среднее расстояние электронов от ядра в атоме меди.

7.2. Магнитный момент молекулы кислорода равен $p_m = 2{,}6 \cdot 10^{-23}$ А·м^2. Определить парамагнитную восприимчивость кислорода при нормальных условиях.

7.3. Магнитный дипольный момент молекулы имеет порядок одного магнетона Бора $\mu = eh/(2m_e) = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ А·м^2. Принимая, что молекулы идеального газа имеют постоянный магнитный момент μ, найти максимально возможную намагниченность при $t = 100$ °C и $p = 101{,}3$ кПа.

Ответы

7.1. $\sqrt{\langle R^2 \rangle} = \sqrt{-6m\chi_a/(e^2 Z\mu_0 N)} = 0{,}9 \cdot 10^{-10}$ м. 7.2. $\chi_n = p_m^2 N\mu_0/(3kT) = 18 \cdot 10^{-7}$. 7.3. $J_{\text{макс}} = 182$ А/м.

§ 44 Индукция токов в движущихся проводниках

§ 45 Закон электромагнитной индукции Фарадея

§ 46 Дифференциальная формулировка закона электромагнитной индукции

§ 47 Энергия магнитного поля

§ 48 Цепи квазистационарного переменного тока

§ 49 Работа и мощность переменного тока

§ 50 Резонансы в цепи переменного тока

§ 51 Цепи с учетом взаимной индукции

§ 52 Трехфазный ток

§ 53 Скин-эффект

§ 54 Четырехполюсники

§ 55 Фильтры

§ 56 Бетатрон

8

Электромагнитная индукция и квазистационарные переменные токи

Квазистационарное приближение справедливо при описании электромагнитных полей и токов в областях, линейные размеры которых много меньше длины волны, и когда можно пренебречь токами смещения. Электрическое поле, порождаемое изменением магнитного поля, учитывается, а магнитное поле, порождаемое изменением электрического поля, не принимается во внимание. Линии плотности тока проводимости замкнуты, поскольку токами смещения пренебрегают. Магнитное поле определяется мгновенными значениями плотности токов проводимости в тот же момент времени. Плотности токов проводимости зависят от изменения магнитного поля и, следовательно, от изменения плотности токов проводимости.

§ 44. Индукция токов в движущихся проводниках

Дается количественная формулировка индукции токов в движущихся проводниках. Описываются физические процессы в генераторах переменного тока.

Возникновение э. д. с. в движущемся проводнике. При движении проводника в магнитном поле его *свободные электроны под действием силы Лоренца приводятся в движение относительно проводника, т. е. в проводнике возникает электрический ток. Это явление называется индукцией токов в движущихся проводниках.*

Рассмотрим прямолинейный участок DG проводника (рис. 176), который, двигаясь со скоростью $\mathbf{v}$, скользит по проводникам CK и AL, как направляющим, постоянно сохраняя контур $AGDCA$ замкнутым. Индукция внешнего однородного магнитного поля перпендикулярна плоскости, в которой лежит контур. На заряды в движущемся проводнике действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{44.1}$$

коллинеарная DG. Силы, действующие на положительные и отрицательные заряды проводника, показаны соответственно векторами $F_{(+)}$ и $F_{(-)}$. Свободные электроны приходят в движение и образуют электрический ток. Его направление принимается за положительный обход контура и, следовательно, положительной нормалью к поверхности, в которой лежит контур, является вектор $\mathbf{n}$ на этом рисунке.

Наличие силы $\mathbf{F}$ [см. (44.1)] эквивалентно тому, что в проводнике действует на заряды эффективное электрическое поле

$$\mathbf{E}_{эф} = \mathbf{F}/e = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{44.2}$$

и поэтому э. д. с. индукции между некоторыми точками *1* и *2* проводника равна

$$(\Delta \mathcal{E}^{инд})_{21} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_{эф} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \tag{44.3}$$

В рассматриваемом случае эта э. д. с. возникает между точками D и G:

$$(\Delta \mathcal{E}^{инд})_{DG} = \int_{(G)}^{(D)} vB\, dl = vBl. \tag{44.4}$$

На неподвижных участках замкнутого контура электродвижущая сила не образуется. Поэтому электродвижущая сила индукции в замкнутом контуре $AGDCA$, вызванная движением его части DG во внешнем поле, равна

$$\mathcal{E}^{инд} = \int_{AGDCA} \mathbf{E}_{эф} \cdot d\mathbf{l} = vBl. \tag{44.5}$$

Выразив скорость проводника DG в виде

$$v = dx/dt, \tag{44.6}$$

где x – координата его контактов в точках D и G с направляющими проводниками, запишем (44.5) в виде

$$\mathcal{E}^{инд} = dx\, lB/dt. \tag{44.7}$$

Примем во внимание, что

$$\Phi = -xlB \tag{44.8}$$

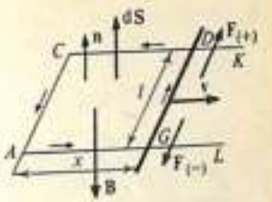
– поток магнитной индукции сквозь поверхность, ограниченную контуром $AGDCA$. Знак минус в (44.8) показывает, что направления $\mathbf{B}$ и $d\mathbf{S}$ противоположны. Поэтому окончательно (44.5) можно записать в форме

$$\boxed{\mathcal{E}^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}}, \tag{44.9}$$

т. е. *при движении замкнутого проводника во внешнем магнитном поле в его контуре возникает электродвижущая сила индукции, равная скорости изменения потока индукции внешнего магнитного поля сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур.*

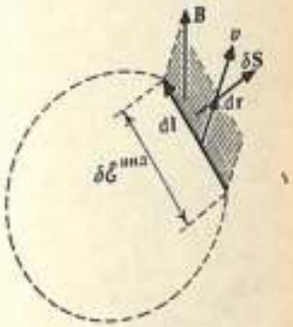
Формула (44.9) выведена для частного случая, когда движется лишь часть проводника в плоскости, перпендикулярной индукции магнитного поля. Если движется несколько участков проводника, то электродвижущая сила индукции в замкнутом контуре равна алгебраической сумме э. д. с. индукции, возникших на участках. Поэтому формула (44.9) без всяких дальнейших вычислений обобщается на случай произвольного движения проводника в плоскости, перпендикулярной направлению вектора индукции магнитного поля. При этом движении контур проводника может, конечно, произвольно деформироваться.

Обобщение на произвольный случай. Рассмотрим элемент длины проводника $d\mathbf{l}$, движущийся со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ (рис. 177). На этой длине в соответствии с формулой (44.3) создается электродвижущая сила



176

Индукция токов в движущихся проводниках

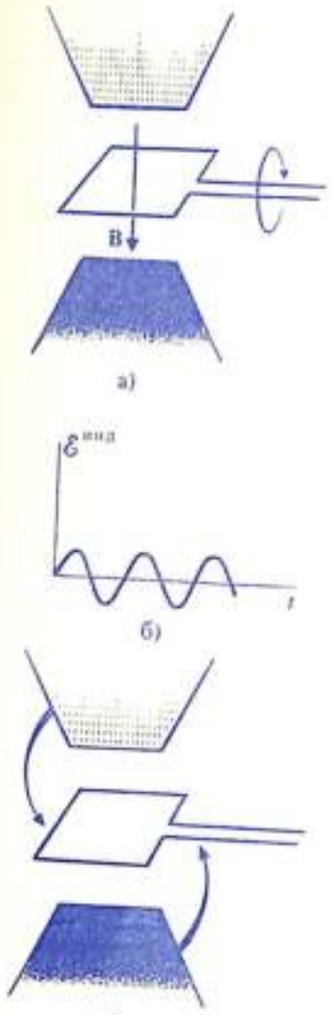


177

Обобщение формулы для индукции токов в движущихся проводниках на произвольный случай

● При движении и деформации замкнутого проводника во внешнем магнитном поле в его контуре возникает электродвижущая сила индукции, численно равная скорости изменения потока индукции внешнего магнитного поля через поверхность, натянутую на замкнутый контур.

Вся работа, совершаемая током, индуцированным в движущемся проводнике, осуществляется за счет работы сил, приводящих проводник в движение.



178

Схема генератора переменного тока

$$d\mathcal{E}^{инд} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt}(d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}). \quad (44.10)$$

Смешанное произведение в (44.10) преобразуется следующим образом:

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = d\mathbf{l} \times d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = -d\mathbf{r} \times d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \quad (44.11)$$
$$= -d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = -\delta\Phi,$$

где $\delta\Phi$ – поток магнитной индукции сквозь элемент поверхности $d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$, образованный элементом длины $d\mathbf{l}$ при его движении. Положительное направление нормали к этому элементу поверхности выбирается совпадающим с положительным направлением нормали к поверхности, ограничиваемой замкнутым контуром.

Подставляя (44.11) в (44.10), получаем

$$d\mathcal{E}^{инд} = -\delta\Phi/dt. \quad (44.12)$$

Для нахождения полной электродвижущей силы индукции в замкнутом контуре надо просуммировать э. д. с. индукции от всех элементов $d\mathbf{l}$ этого контура:

$$\mathcal{E}^{инд} = \oint d\mathcal{E}^{инд} = -\frac{1}{dt}\oint \delta\Phi = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (44.13)$$

где

$$\oint \delta\Phi = d\Phi \quad (44.14)$$

– изменение потока индукции сквозь поверхность, ограниченную замкнутым контуром.

Формула (44.13) совпадает с (44.9). Тем самым доказано, что (44.9) *справедливы при произвольных движениях и деформациях замкнутого контура.*

Генераторы переменного тока. Если замкнутый проводник движется в магнитном поле так, что охватываемый им поток магнитной индукции непрерывно изменяется, то в нем непрерывно генерируются электродвижущая сила индукции и соответствующий переменный ток, т. е. такой замкнутый контур является **генератором переменного тока.** Простейшая схема генератора переменного тока изображена на рис. 178, *а*. Если магнитное поле однородно, а рамка

○ Каковы физические явления, лежащие в основе действия генераторов переменного тока? Опишите основные схемы генераторов.

вращается в нем с постоянной угловой скоростью, то возникающая в рамке $\mathcal{E}^{инд}$ является гармонической электродвижущей силой, частота которой равна частоте вращения рамки в магнитном поле. В замкнутом контуре возникает переменный ток соответствующей частоты (рис. 178, *б*).

Если вместо одного витка в магнитном поле движутся два параллельных последовательно соединенных витка, то электродвижущая сила индукции возрастает в два раза. Поэтому при практическом осуществлении генераторов используются намотки из многих витков. Вопросы о наиболее целесообразном осуществлении намоток, о создании магнитного поля, о снятии тока с движущихся обмоток и т. д. подробно рассматриваются в электротехнике. Отметим лишь, что снятие тока с движущихся проводников при большой силе тока является не простой задачей. Поэтому часто вместо движения проводников с током осуществляют движение источников магнитного поля при неподвижных проводниках. В простейшей схеме (рис. 178, *в*) это означает движение постоянных магнитов вокруг неподвижной рамки с током. В неподвижной рамке при этом возбуждается электродвижущая сила индукции. Количественно эта э. д. с. индукции при одинаковых относительных скоростях магнитов и рамки одна и та же. Однако физическая сущность происходящих при этом явлений в этих двух случаях различна (см. § 45).

Первыми генераторами были машины с постоянными магнитами, но уже в 1866 г. был сконструирован генератор, в котором магнитное поле создавалось электромагнитом. После этого конструкция генераторов быстро совершенствовалась.

Закон сохранения энергии. При прохождении тока по цепи с омическим сопротивлением выделяется джоулева теплота. Энергия, выделяемая в форме теплоты, получается в результате работы механических сил в генераторе электрического тока.

При переходе энергии из одной формы в другую соблюдается, конечно, закон сохранения энергии. Проследим за этим на простейшем примере (рис. 176).

Пусть R – сопротивление в контуре $AGDCA$, а I – сила тока в цепи. Следовательно, в цепи током в форме теплоты выделяется энергия с мощностью

$$P_1 = I^2R. \quad (44.15)$$

С другой стороны, при движении участка проводника DG с током силой I необходимо преодолевать силу Лоренца

$$F = IlB, \quad (44.16)$$

Следовательно, силы, осуществляющие движение проводника, должны развивать мощность

$$P_2 = Fv = IlB\,dx/dt = -I\mathcal{E}^{инд} = -I^2R, \quad (44.17)$$

где учтена формула (44.9) и принято во внимание, что $\mathcal{E}^{инд} = IR$. Знак минус в (44.17) показывает, что работа производится над системой. Сравнение (44.15) и (44.17) показывает, что $P_1 + P_2 = 0$. Это означает, что *энергия, выделяемая в форме теплоты, в контуре равна работе сил, приводящих проводник в движение, т. е. сторонними электродвижущими силами в данном случае в конечном счете являются механические силы, осуществляющие движение проводника.*

§ 45. Закон электромагнитной индукции Фарадея

Обсуждаются физическая сущность и математическая формулировка закона электромагнитной индукции Фарадея. Анализируется соотношение между электромагнитной индукцией Фарадея и индукцией тока в движущихся проводниках.

Определение. В 1831 г. Фарадей экспериментально открыл явление электромагнитной индукции, состоящее в возникновении электрического тока в замкнутом проводнике при изменении потока магнитной индукции, охватываемого контуром. Правило, определяющее направление э. д. с. индукции, было сформулировано в 1833 г. Э. Х. Ленцем (1804–1865): *индукционный ток направлен так, что создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока.* Иначе говоря, направление возникающего в контуре тока составляет с направлением изменения потока магнитной индукции левовинтовую систему (рис. 179).

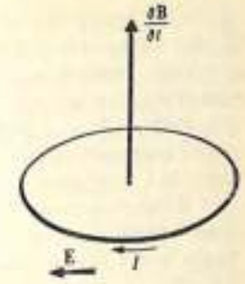
В 1845 г. Ф. Э. Нейман (1798–1895) дал математическое определение **закона электромагнитной индукции** в современной форме:

$$\mathcal{E}^{инд} = -d\Phi/dt, \qquad (45.1)$$

причем контур считается неподвижным.

Физическая сущность явления. По внешнему виду формула (45.1) полностью совпадает с (44.9), но физическое содержание ее совершенно иное. *Возникновение э. д. с., учитываемое формулой (44.9), связано с действием силы Лоренца на движущиеся заряды. В возникновении э. д. с., учитываемой формулой (45.1), никакая сила Лоренца не участвует, поскольку проводники неподвижны.* Однако в проводнике возникает электрический ток, поэтому можно заключить, что в нем имеется электрическое поле. Следовательно, *закон Фарадея (45.1) констатирует новое физическое явление: изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле. Таким образом, электрическое поле порождается не только электрическими зарядами, но и изменяющимся магнитным полем.*

Строго говоря, наличие тока в замкнутом проводнике показывает, что электрическое поле имеется лишь внутри проводника. Однако проводник в данном случае играет роль устройства для обнаружения электрического поля. При отсутствии проводника изменяющееся магнитное поле также порождает электрическое поле. Это можно показать, например, тем, что на заряд в изменяющемся магнитном поле действует электрическая сила (см. § 56). Это доказывает, что электромагнитная индукция является всеобщим фундаментальным законом природы, устанавливающим связь между электрическими и магнитными полями. Различное физическое содержание описываемых формулами (44.9) и (45.1) явлений очевидно из такого примера. Предположим, что проводник DG на рис. 176 движется со скоростью $\mathbf{v}$, но одновременно магнитная индукция $\mathbf{B}$ уменьшается. Вследствие движения проводника в замкнутом контуре появляется э. д. с. индукции, которая вызывает ток (рис. 176). Изменение $\mathbf{B}$ по закону электромагнитной индукции Фарадея вызывает в контуре также э. д. с. индукции, которая в данном случае направлена противоположно той, которая возникает в результате движения участка проводника DG. Можно подобрать такую скорость изменения $\mathbf{B}$ ($\partial\mathbf{B}/\partial t$), что эти две э. д. с. будут взаимно компенсироваться. В результате в замкнутом контуре не будет тока, потому что полная э. д. с. индукции равна нулю. Однако эта взаимная компенсация э. д. с. индукции происходит в замкнутом контуре в целом, а не в каждой точке контура. Э. д. с. индукции за счет движения проводника возникает только на участке DG, а э. д. с. индукции Фарадея возникает как на участке DG, так и на остальных участках проводника DC, CA и AG. В результате движения на элементе проводника $d\mathbf{l}$ возникает э. д. с. индукции, зависящая только от $\mathbf{B}$ и скорости $\mathbf{v}$ движения этого элемента, но не зависящая от $\partial\mathbf{B}/\partial t$. В результате изменения индукции на элементе проводника $d\mathbf{l}$ появляется э. д. с. индукции Фарадея, которая не зависит от индукции $\mathbf{B}$ и скорости $\mathbf{v}$ движения этого элемента, а зависит только от $\partial\mathbf{B}/\partial t$. Это и доказывает, что физическая природа э. д. с. индукции в этих двух случаях различна.



179

Закон электромагнитной индукции Фарадея



180

Демонстрация электромагнитной индукции Фарадея

- **Электрическое поле порождается не только электрическими зарядами, но и изменяющимся магнитным полем.**
- **Э. д. с. индукции выражается формулой (45.1), причем под $d\Phi/dt$ понимается полная скорость изменения потока индукции, охватываемого проводником, в результате движения и деформаций проводника и изменения магнитного поля.**

Движущийся проводник в переменном магнитном поле. Если замкнутый проводник движется в переменном магнитном поле, испытывая при этом произвольные деформации формы, то э. д. с. индукции в нем возникает как за счет движения и деформации, учитываемой формулой (44.9), так и в результате изменения индукции магнитного поля, учитываемого аналогичной формулой (45.1). Поэтому можно сказать, что э. д. с. индукции в проводнике определяется формулой (45.1), причем под $d\Phi/dt$ понимается полная скорость изменения потока индукции, охватываемого проводником, как за счет его движения и деформации, так и в результате изменения магнитного поля.

Применение электромагнитной индукции к генераторам переменного тока. Теперь ясно, почему электрический ток можно генерировать не только движением проводников в магнитном поле, но и движением магнитов при неподвижных проводниках. На рис. 180 изображена схема демонстрации электромагнитной индукции.

§ 46. Дифференциальная формулировка закона электромагнитной индукции

Дается дифференциальная формулировка закона электромагнитной индукции и обсуждаются свойства векторного и скалярного потенциалов переменного электромагнитного поля.

Формулировка. Запишем **закон электромагнитной индукции Фарадея** [см. (45.1)] в виде

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}, \tag{46.1}$$

где L – контур, S – поверхность, натянутая на контур L. В (46.1) учтены определения:

$$\mathcal{E}^{инд} = \int_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l},\quad \Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}. \tag{46.2}$$

Заметим, что между направлением обхода контура L и вектором $d\mathbf{S}$ соблюдается правовинтовое соотношение. Необходимо также обратить внимание на то, что в определении потока индукции Φ [см. (46.2)] поверхность S, сквозь которую вычисляется поток, является произвольной, натянутой на контур L поверхностью. Такое определение предполагает, что этот интеграл не зависит от формы поверхности, а лишь, чтобы поверхность была ограничена контуром L или, как говорят, натянута на контур L. Докажем это. Выберем две какие-либо поверхности S_1 и S_2, натянутые на контур L. Их совокупность составляет замкнутую поверхность $S = S_1 + S_2$, ограничивающую некоторый объем V между ними. Поток вектора $\mathbf{B}$ сквозь замкнутую

поверхность S равен нулю, поскольку по теореме Гаусса – Остроградского он равен интегралу по объему V, ограниченному поверхностью S, от $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Из этого следует утверждение о равенстве потоков через S_1 и S_2 (знаки потоков одинаковы при одинаковой относительно направления обхода контура ориентировке положительных нормалей к этим поверхностям).

Преобразуем левую часть (46.1) по формуле Стокса:

$$\int_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}, \tag{46.3}$$

В результате получаем

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}, \tag{46.4}$$

причем производная по t внесена под знак интеграла на том основании, что площадь интегрирования не зависит от времени. Так как S произвольна, то из (46.4) следует, что

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t.} \tag{46.5}$$

Уравнение (46.5) является **дифференциальной записью закона электромагнитной индукции Фарадея.** Оно описывает закон порождения электрического поля в некоторой точке за счет изменения индукции магнитного поля в той же точке. Поле $\mathbf{E}$ часто называют индукционным.

Непотенциальность индукционного электрического поля. В переменном магнитном поле $\partial\mathbf{B}/\partial t \neq 0$ и, следовательно, в соответствии с (46.5)

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0. \tag{46.6}$$

Это означает, что *индукционное электрическое поле в отличие от электростатического, порождаемого неподвижными зарядами, не является потенциальным.* Работа перемещения заряда q в нем по замкнутому контуру, вообще говоря, не равна нулю:

$$A = q\,\mathcal{E}^{инд} = q\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \neq 0. \tag{46.7}$$

Отсюда, в частности, следует, что это поле не может быть представлено в виде градиента от некоторой функции, т. е. не может быть представлено в виде (14.27). Необходимо использовать отличное от (14.27) представление.

Векторный и скалярный потенциалы в переменном электромагнитном поле. Поскольку закон электромагнитной индукции не затрагивает законов порождения магнитного поля, уравнение (36.4) для дивергенции магнитного поля остается без изменения, т. е. $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Следовательно, без изменения остается и формула (37.2), связывающая векторный потенциал с индукцией магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{46.8}$$

Связь скалярного потенциала с напряженностью электрического

поля изменяется. Выражая **B** в (46.5) с помощью (46.8), получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \tag{46.9}$$

где последовательность дифференцирований по времени и координатам изменена вследствие их независимости. Уравнение (46.9), переписанное в виде

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0, \tag{46.10}$$

показывает, что вектор $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t$ является потенциальным и, следовательно, может быть представлен в виде градиента некоторой функции

$$\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{46.11}$$

где φ – скалярный потенциал. Таким образом, в случае переменных полей напряженность электрического поля выражается не только через скалярный, но и через векторный потенциал формулой

$$\boxed{\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t.} \tag{46.12}$$

Первое слагаемое в правой части (46.12) *учитывает порождение электрического поля электрическими зарядами, а второе – порождение поля по закону электромагнитной индукции Фарадея.*

Неоднозначность потенциалов, калибровочное преобразование. Так же как и в стационарном случае, скалярный и векторный потенциалы являются неоднозначными, т. е. одно и то же электромагнитное поле может быть описано многими скалярными и векторными потенциалами.

Пусть поле **E**, **B** описывается потенциалами **A**, φ по формулам (46.8) и (46.12) и имеется некоторая произвольная функция $\chi(x, y, z, t)$. Утверждается, что потенциалы

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi, \quad \varphi' = \varphi - \partial\varphi/\partial t \tag{46.13}$$

характеризуют то же самое поле **E**, **B**, что и потенциалы **A**, φ. Для доказательства найдем **E'**, **B'**, описываемые потенциалами **A'**, φ' по формулам (46.8) и (46.12):

$$\mathbf{B}' = \operatorname{rot}\mathbf{A}' = \operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{rot}\operatorname{grad}\chi = \mathbf{B}, \tag{46.14}$$

где учтено, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$ и принята во внимание формула (46.8).

Для поля E' получаем

$$E' = -\operatorname{grad}\varphi' - \partial\mathbf{A}'/\partial t = -\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}(\partial\chi/\partial t) - \tag{46.15}$$
$$- \partial\mathbf{A}/\partial t - \partial(\operatorname{grad}\chi)/\partial t = -\operatorname{grad}\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t = \mathbf{E}.$$

Таким образом, действительно потенциалы (46.13) описывают то же самое поле, что и потенциалы **A**, φ. Преобразования (46.13) называют **калибровочными**. Они позволяют «калибровать» потенциалы, т. е. налагать на них некоторое условие, пользуясь их неоднозначностью (см. § 14, 37, 63).

§ 47. Энергия магнитного поля

Выводятся формулы для энергии магнитного поля контуров с током и выражение для плотности энергии. Приводятся выражения для энергии магнетика во внешнем магнитном поле и объемных сил, действующих на сжимаемые магнетики.

Энергия магнитного поля изолированного контура с током. Для того чтобы в неподвижном контуре создать электрический ток, необходимо включить в цепь источник сторонних э. д. с. Если в цепи течет постоянный ток, то энергия, поступающая в цепь из источника сторонних э. д. с., расходуется на выделение джоулевой теплоты и на совершение работы в потребителе энергии. Индукция магнитного поля, как и его энергия, при этом неизменна. Индукция изменяется с изменением силы тока. Следовательно, источник сторонних э. д. с. передает в цепь энергию на создание магнитного поля в процессе увеличения силы тока. Вычислив работу, совершаемую источником сторонних э. д. с. для увеличения силы тока от нуля до конечного значения, получим энергию магнитного поля, которое связано с этим током.

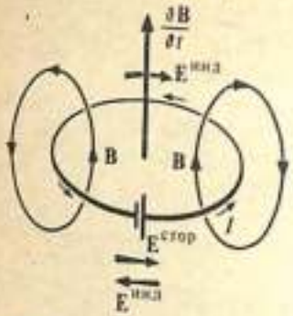
При изменении потока магнитной индукции, охватываемого контуром, в контуре возникает э. д. с. индукции в соответствии с законом (46.1). У изолированного контура поток электромагнитной индукции Φ возникает за счет магнитного поля, создаваемого током в контуре (рис. 181). При увеличении силы тока возрастает поток Φ, охватываемый током, и в контуре по закону Фарадея возникает э. д. с. индукции, которая в данном случае называется э. д. с. самоиндукции. По правилу Ленца, она направлена так, что препятствует увеличению силы тока. Для увеличения силы тока необходимо, чтобы сторонняя э. д. с. источника была направлена противоположно э. д. с. самоиндукции и равна ей. Таким образом, *в процессе роста силы тока источник сторонних э. д. с. совершает работу против э. д. с. самоиндукции.* За промежуток времени dt по контуру проходит количество электричества $dQ = I\,dt$ и, следовательно, против э. д. с. самоиндукции источник сторонних сил в течение dt совершает работу

$$dA = -\mathcal{E}^{\text{инд}} I\,dt = (d\Phi/dt)\,I\,dt = I\,d\Phi, \tag{47.1}$$

где для $\mathcal{E}^{\text{инд}}$ использована формула (46.1). При совершении этой работы происходит превращение энергии источника сторонних э. д. с. в энергию магнитного поля тока в контуре. Поэтому изменение энергии магнитного поля связано с изменением потока соотношением

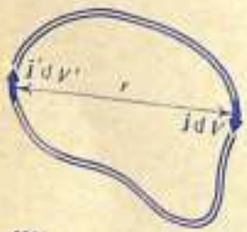
$$dW = I\,d\Phi. \tag{47.2}$$

Индукция магнитного поля тока в соответствии с законом Био – Савара (10.10) линейно зависит от силы тока. Поэтому *при*



181

При увеличении тока источник сторонних э.д.с. совершает работу против э.д.с. самоиндукции



182

К вычислению индуктивности контура

● **Почему взаимная индуктивность может быть рассчитана по формуле, в которую входят линейные токи, а индуктивность не может быть выражена через линейные токи? Какое свойство магнитного поля обусловливает постоянство индуктивности жесткого контура с током? Индуктивности и взаимные индуктивности зависят только от геометрических характеристик контуров с током и их взаимного расположения.**

переменной силе тока, протекающего по жесткому неподвижному контуру, картина силовых линий остается прежней, а индукция в каждой точке растет пропорционально силе тока. А это означает, что поток магнитной индукции Ф сквозь фиксированную неподвижную площадь также пропорционален силе тока, и поэтому

$$\Phi = LI, \tag{47.3}$$

где L – постоянный коэффициент пропорциональности, не зависящий от силы тока и индукции магнитного поля. Этот коэффициент называется **индуктивностью** контура.

Подставляя (47.3) в (47.2), находим

$$dW = LI\,dI = d\left(\tfrac{1}{2}LI^2\right). \tag{47.4}$$

Интегрируя обе части (47.4) от $I = 0$ до некоторого значения I, получаем формулу

$$W = \tfrac{1}{2}LI^2, \tag{47.5}$$

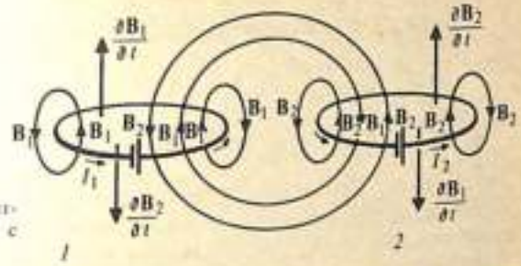
которая определяет **энергию магнитного поля,** создаваемого током силы I, текущим по контуру с индуктивностью L.

Энергия магнитного поля нескольких контуров с током. Аналогично можно найти энергию магнитного поля двух контуров с током (рис. 183). При этом надо учесть, что *э. д. с. индукции в каждом контуре возникает не только за счет изменения потока индукции магнитного поля, создаваемого током этого контура, но и за счет изменения потока индукции магнитного поля, создаваемого током, текущим в другом контуре.* Обозначим: I_1 и I_2 – силы токов в первом и втором контурах, Φ_{11} и Φ_{12} – охватываемые первым контуром потоки магнитной индукции полей, создаваемых соответственно токами I_1 и I_2. Аналогичные величины для второго контура обозначим Φ_{22} и Φ_{21}. Полные потоки, охватываемые каждым из контуров, равны

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12},\quad \Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}. \tag{47.6}$$

Пусть L_{11} и L_{22} – индуктивности контуров. Тогда [см. (47.3)]

$$\Phi_{11} = L_{11}I_1,\quad \Phi_{22} = L_{22}I_2. \tag{47.7}$$



183

К вычислению энергии магнитного поля двух контуров с током

Из тех же соображений, которые были изложены при получении формулы (47.3), заключаем, что поток Φ_{12}, охватываемый первым контуром, за счет магнитного поля, создаваемого током во втором контуре, пропорционален силе тока I_2 во втором контуре:

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2, \tag{47.8}$$

где L_{12} – постоянная, называемая **взаимной индуктивностью** первого и второго контуров. Аналогично, для второго контура получаем

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1. \tag{47.9}$$

Поэтому [см. (47.6)]

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2,\quad \Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2. \tag{47.10}$$

Э. д. с. индукции в первом и втором контурах равна:

$$\mathcal{E}_1^{инд} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\left(L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt}\right),$$
$$\mathcal{E}_2^{инд} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\left(L_{21}\frac{dI_1}{dt} + L_{22}\frac{dI_2}{dt}\right). \tag{47.11}$$

Вся работа, совершаемая источниками сторонних э. д. с. контуров в течение dt, аналогично (47.1) равна

$$dA = dA_1 + dA_2 = -\mathcal{E}_1^{инд}I_1\,dt - \mathcal{E}_2^{инд}I_2\,dt = \\ = (L_{11}I_1\,dI_1 + L_{12}I_1\,dI_2 + L_{21}I_2\,dI_1 + L_{22}I_2\,dI_2). \tag{47.12}$$

где использованы соотношения (47.10).

Для дальнейших вычислений докажем, что $L_{12} = L_{21}$. С этой целью вычислим Φ_{21} и Φ_{12}:

$$\Phi_{21} = \int_{S_1}\mathbf{B}_1\cdot d\mathbf{S}_2,\quad \Phi_{12} = \int_{S_2}\mathbf{B}_2\cdot d\mathbf{S}_1, \tag{47.13}$$

где $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ – индукции полей, создаваемых соответственно токами I_1 и I_2; S_1 и S_2 – поверхности интегрирования, натянутые на контуры. Индукция поля в каждой точке равна $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$. Обозначив $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ – векторные потенциалы, описывающие поля $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$, имеем

$$\mathbf{B}_1 = \operatorname{rot}\mathbf{A}_1,\quad \mathbf{B}_2 = \operatorname{rot}\mathbf{A}_2$$

и, следовательно, равенства (47.13) принимают вид:

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{L_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2,$$
$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{L_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1, \qquad (47.14)$$

где L_1 и L_2 – контуры с током. Переход к интегрированию по контурам произведен в соответствии с формулой Стокса. Формула (37.11б), выражающая векторный потенциал через ток, в данном случае принимает вид

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{r}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{r}. \qquad (47.15а)$$

Подставляя (47.15а) в (47.14), получаем:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{L_2} \int_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{21}}, \quad \Phi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r_{12}}, \qquad (47.15б)$$

где $r_{12} = r_{21}$ – расстояние между элементами $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$ первого и второго контуров. Сравнивая (47.15б) с (47.8) и (47.9), получаем:

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r_{12}}, \quad L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_2} \int_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{21}}. \qquad (47.16а)$$

Формулы (47.16а) показывают, что *взаимная индуктивность зависит только от геометрических характеристик контуров и от их взаимного расположения*. Поскольку $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$ – независимые переменные интегрирования, можно изменить порядок интегрирований. Учитывая также, что $r_{12} = r_{21}$ и $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1$, заключаем, что

$$L_{12} = L_{21}, \qquad (47.16б)$$

т. е. взаимная индуктивность первого контура со вторым равна взаимной индуктивности второго контура с первым. С учетом этого можно написать

$$L_{12} I_1 \, dI_2 + L_{21} I_2 \, dI_1 = d\left(\tfrac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 + \tfrac{1}{2} L_{21} I_2 I_1\right)$$

и, следовательно, представить (47.12) в виде

$$dA = d\left(\tfrac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 + \tfrac{1}{2} L_{21} I_2 I_1 + \tfrac{1}{2} L_{22} I_2^2\right). \qquad (47.17а)$$

Учитывая, что затрачиваемая на увеличение силы тока работа равна энергии образовавшегося при этом магнитного поля, после интегрирования обеих частей равенства (47.17а) от нулевых значений силы тока в контурах $I_1 = 0$, $I_2 = 0$ до их значений I_1 и I_2 получаем

$$W = \frac{1}{2}\left(L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1 + L_{22} I_2^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} L_{ik} I_i I_k. \qquad (47.17б)$$

Эта формула определяет **энергию магнитного поля**, создаваемого токами I_1 и I_2. Она легко обобщается на случай N контуров:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^{N} L_{ik} I_i I_k, \qquad (47.18)$$

где L_{ik} при $i = k$ называется индуктивностью i-го контура, а при $i \neq k$ – взаимной индуктивностью i-го и k-го контуров. Выражения для этих коэффициентов даются формулами (47.16а), принимающими вид

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_i} \int_{L_k} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_k}{r_{ik}} \quad (i \neq k), \qquad (47.19)$$

где $d\mathbf{l}_i$, $d\mathbf{l}_k$ – элементы длины i-го и k-го контуров L_i и L_k, r_{ik} – расстояние между ними. Из (47.19) следует равенство

$$L_{ik} = L_{ki}, \qquad (47.20)$$

являющееся обобщением (47.16б) на случай многих контуров с током.

Энергия магнитного поля при наличии магнетиков. Если все пространство заполнено однородным магнетиком, то создаваемая заданными токами индукция поля изменяется в μ/μ_0 раз по сравнению с индукцией в вакууме [см. (38.29)]. Следовательно, во столько же раз изменяются потоки Φ и $d\Phi$ в формуле (47.1). Все последующие вычисления аналогичны, но везде Φ изменяется в μ/μ_0 раз. Из формул (47.7) и (47.8) заключаем, что индуктивность контура и взаимные индуктивности увеличиваются в μ/μ_0 раз. Это означает, что формулы (47.16а) для взаимной индуктивности при наличии магнетика имеют тот же вид, но с заменой μ_0 на μ. Такая же замена происходит и в формулах (47.15а) и (47.15б). Выражения (47.5) и (47.17) для энергии магнитного поля остаются без изменения, но в них индуктивности и взаимные индуктивности увеличиваются в μ/μ_0 раз. Следовательно, *энергия магнитного поля токов, протекающих в неограниченном однородном магнетике, изменяется в μ/μ_0 раз по сравнению с энергией поля тех же токов в вакууме.*

Плотность энергии магнитного поля. Магнитное поле заданных токов распределено по всему пространству. Выразим энергию поля (47.5) изолированного контура с током через векторы поля. Формула (47.5) с помощью (47.3) может быть представлена в виде

$$W = \tfrac{1}{2} I \Phi, \qquad (47.21)$$

Здесь

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \qquad (47.22)$$

где L и S – соответственно контур тока и поверхность, натянутая на этот контур. В (47.22) потенциал $\mathbf{A}$ создается током I. Таким образом,

замкнутый ток взаимодействует со своим собственным магнитным полем. Физическая сущность этого взаимодействия состоит в том, что каждый из элементов тока $I\,d\mathbf{l}$ создает в пространстве магнитное поле, с которым взаимодействуют другие элементы тока. Подставляя (47.22) в (47.21), находим

$$W = \frac{I}{2}\int_l \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}\,dV, \tag{47.23}$$

где с помощью соотношения (9.26) произведен переход к объемным токам. Теперь преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы в него входили только векторы поля и векторный потенциал. Для этого воспользуемся формулами $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{H}$, а также известным из векторного потенциала соотношением $\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}$. В результате получаем $\mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} - \operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{H})$ и, следовательно, формула (47.23) принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dV - \int \operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{H})\,dV. \tag{47.24}$$

Второй интеграл по теореме Гаусса – Остроградского преобразуется в интеграл по поверхности, ограничивающей объем интегрирования:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\times\mathbf{H}\,dV = \int_S \mathbf{A}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}. \tag{47.25}$$

Если все токи расположены в конечной области пространства, то на больших расстояниях r от этой области $A \sim 1/r$, $H \sim 1/r^2$, т. е. подынтегральное выражение убывает как $\sim 1/r^3$. Поверхность интегрирования при этом растет как r^2 и, следовательно, интеграл уменьшается как $1/r$. Поэтому для всего пространства, когда $r \to \infty$, второй интеграл в (47.24) обращается в нуль и **полная энергия поля** представляется формулой

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dV} \tag{47.26}$$

Можно сказать, что энергия поля распределена по всему пространству с объемной плотностью

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B},} \tag{47.27}$$

т. е. **объемная плотность энергии магнитного поля** в каждой точке определяется значением векторов поля в этой точке, при этом, конечно, несущественно, какими источниками созданы эти поля.

Индуктивность. В равенстве (47.23) представим потенциал $\mathbf{A}$ с помощью (37.11а) в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}}{r}\,dV', \tag{47.28}$$

где плотность тока и элемент объема отмечены штрихами, чтобы не путать их с теми же величинами в подынтегральном выражении (47.23): это разные элементы объема одного и того же тока, расстояние между которыми обозначено в (47.28) r (см. рис. 183). Подставляя (47.28) в (47.23), находим

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{\mu}{4\pi}\int_V\int_V \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}'}{r}\,dV\,dV' = \frac{1}{2}\,I^2\,\frac{\mu}{4\pi}\,\frac{1}{I^2}\int_V\int_V \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}'}{r}\,dV\,dV', \tag{47.29}$$

где в последнем равенстве числитель и знаменатель формулы умножены на I^2. Сравнивая (47.29) с (47.5), получаем

$$L = \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{1}{I^2}\int_V\int_V \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}'}{r}\,dV\,dV'. \tag{47.30}$$

Формулы (47.16а) для взаимной индуктивности при переходе к объемным токам ($I\,d\mathbf{l} \to \mathbf{j}\,dV$) принимают вид

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{1}{I_i I_k}\int_{V_i}\int_{V_k} \frac{\mathbf{j}_i\mathbf{j}_k}{r_{ik}}\,dV_i\,dV_k, \tag{47.31}$$

аналогичный (47.30). Однако формула (47.30) не может быть выражена через линейные токи. Если это сделать формально, то подынтегральное выражение в (47.30) принимает вид $I^2\,d\mathbf{l}\cdot d\mathbf{l}'/r$ и обращается в бесконечность при совпадении элементов интегрирования, когда $d\mathbf{l} = d\mathbf{l}'$, поскольку при этом $r = 0$. Поэтому интеграл расходится и формула для индуктивности теряет смысл. Эта ситуация аналогична ситуации при вычислении собственной энергии заряда, когда собственная энергия обращается в бесконечность для точечного заряда.

Поле соленоида. В качестве примера использования полученных в этом параграфе формул рассмотрим поле соленоида. Как было показано, индукция поля вне соленоида равна нулю, а внутри соленоида определяется равенством (38.40), т. е.

$$B = \mu n I, \tag{47.32}$$

где n – число витков на 1 м длины соленоида. Поток индукции поля, охватываемый одним витком соленоида, равен

$$\Phi_1 = BS = \mu n I S, \tag{47.33}$$

где S – площадь поперечного сечения соленоида. Поток, охватываемый N витками соленоида, которые занимают длину соленоида $l = N/n$, равен

$$\Phi_N = \Phi_1 N = \mu n I S N = \mu I S N^2/l. \tag{47.34}$$

Следовательно, индуктивность N витков соленоида равна

$$L_N = \Phi_N/I = \mu S N^2/l. \tag{47.35}$$

Энергия, сосредоточенная на длине l, равна

$$W = \frac{1}{2} L_N I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 I^2}{l} S = \frac{1}{2} \mu n^2 I^2 S l = \frac{1}{2} HBV, \tag{47.36}$$

где $\mu n^2 I^2 = HB$, $Sl = V$ – объем участка соленоида, в котором вычисляется энергия поля. Формула (47.36) позволяет определить энергию поля как через ток и индуктивность, так и через плотность энергии поля.

Найдем вектор-потенциал бесконечно длинного соленоида. Целесообразно исходить из формулы (47.22). Вследствие аксиальной симметрии задачи будем вести расчет в цилиндрической системе координат с аксиальной осью, совпадающей с осью соленоида. Обозначим: φ – аксиальный угол, а r – расстояние от оси до точки, в которой вычисляется потенциал. В качестве контура L в (47.22) выберем окружность радиусом r, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси соленоида, и с центром на оси. Тогда

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L A_\varphi r \, d\varphi = 2\pi r A_\varphi,$$

где принято во внимание, что $A_\varphi = \text{const}$ при $r = \text{const}$. Следовательно, вектор-потенциал равен

$$A_\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

где S – площадь круга, ограничиваемого окружностью радиусом r. Отсюда

$$A_\varphi = \begin{cases} \mu n I r/2 & (0 < r < a), \\ \mu n I a^2/(2r) & (a < r < \infty). \end{cases}$$

Энергия магнетика во внешнем магнитном поле. Пусть имеется фиксированное распределение токов, которое в свободном пространстве создает магнитное поле, индукция которого $\mathbf{B}_0(x, y, z) = \mu_0 \mathbf{H}(x, y, z)$, а энергия

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0 \, dV. \tag{47.37}$$

Предположим, что все пространство заполнено однородным магнетиком с магнитной проницаемостью $\mu = \text{const}$, а поле создается тем же распределением токов. Как было показано [см. (38.22)], напряженность магнитного поля в магнетике не изменится ($\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$), а индукция будет равна $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Следовательно, при наличии магнетика энергия поля

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} \, dV. \tag{47.38}$$

Это означает, что при заполнении всего пространства магнетиком энергия поля увеличивается. Источником этой энергии являются, в частности, сторонние электродвижущие силы, с помощью которых поддерживаются неизменными токи при заполнении пространства магнетиком. Поскольку после заполнения пространства магнетиком все источники, благодаря которым возникло дополнительное поле, идентичны тем, которые создавали поле до заполнения пространства, можно считать, что энергией магнетика во внешнем поле $\mathbf{H}_0$ является величина

$$W_м = W - W_0 = \frac{1}{2} \int (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0) \, dV. \tag{47.39}$$

Подынтегральное выражение можно преобразовать:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = (\mu - \mu_0) H_0^2 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0, \tag{47.40}$$

где

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B}. \tag{47.41}$$

Следовательно, **энергия магнетика в магнитном поле** равна

$$\boxed{W_м = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0 \, dV.} \tag{47.42}$$

Это выражение аналогично формуле (18.30) для энергии диэлектрика во внешнем электрическом поле, но отличается знаком в правой части.

Формула (47.42) выведена для магнетика, заполняющего все пространство с $\mu = \text{const}$. Однако она имеет вид интеграла от плотности энергии магнетика и поэтому следует ожидать ее справедливости в произвольном случае. Соответствующие вычисления подтверждают этот вывод. Ввиду их громоздкости они здесь не приведены.

Теперь можно вычислить энергию магнетика с магнитной проницаемостью μ_2, находящегося в среде с магнитной проницаемостью μ_1. Будем опять рассматривать бесконечный магнетик и исходить из формулы (47.42) так же, как при выводе формулы (18.30), с той лишь разницей, что в электростатике данное распределение зарядов создает в различных средах одинаковое поле $\mathbf{D}$, а в теории стационарного магнитного поля данное распределение токов создает в различных средах одинаковое поле $\mathbf{H}$. Тогда

$$W_{м12} = W_{м1} - W_{м2} = \int (\mu_1 - \mu_2) \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 \, dV, \tag{47.43}$$

где

$$W_{мi} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{H}_i - \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0) \, dV. \tag{47.44}$$

Выражение (47.43) аналогично формуле (18.31) с измененным знаком перед интегралом. Хотя эта формула и выведена для бесконечного магнетика, она справедлива и для ограниченного магнетика. В этом случае интеграл распространяется по объему магнетика. Напряженность

$\mathbf{H}_2$ является напряженностью поля, создаваемого в точках объема магнетика, если бы его проницаемость была равной магнитной проницаемости μ_2 среды; $\mathbf{H}_1$ – фактическая напряженность в магнетике с магнитной проницаемостью μ_1, погруженном в среду с магнитной проницаемостью μ_2.

Предположим, что магнитная проницаемость среды изменяется на бесконечно малую величину $\delta\mu$. При этом энергия магнетика, находящегося в магнитном поле $\mathbf{H}$, изменяется на $\delta W_м$. Полагая в (47.43) $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + \delta\mathbf{H}$ и отбрасывая $\delta\mu\delta\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}$ как величину высшего порядка малости, получаем

$$\boxed{\delta W_м = \frac{1}{2}\int \delta\mu H^2\,\mathrm{d}V,} \tag{47.45}$$

где μ может быть функцией точки и других параметров. Эта формула отличается от аналогичной формулы (18.36) для диэлектриков лишь знаком.

Вычисление сил из выражения для энергии. Рассмотрим систему контуров, по которым текут токи. При перемещении и деформации контуров за счет сторонних электродвижущих сил производится механическая работа. Энергия источника сторонних электродвижущих сил расходуется на создание магнитного поля и на совершение механической работы. Работа сторонних электродвижущих сил определяется формулой (47.2), а механическая работа при изменении параметра ξ_i, характеризующего конфигурацию системы, равна по определению $F_i\,\mathrm{d}\xi_i$, где F_i – обобщенная сила, отнесенная к параметру ξ_i. Закон сохранения энергии записывается в виде

$$\sum_j I_j\,\mathrm{d}\Phi_j = \mathrm{d}W + \sum_i F_i\,\mathrm{d}\xi_i. \tag{47.46}$$

Рассмотрим прежде всего виртуальные процессы, в которых сохраняются магнитные потоки, т. е. $\mathrm{d}\Phi_j = 0$. Уравнение (47.46) принимает вид

$$0 = (\mathrm{d}W)_\Phi + \sum_i F_i\,\mathrm{d}\xi_i, \tag{47.47}$$

откуда с учетом независимости $\mathrm{d}\xi_i$ получаем

$$\boxed{F_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right)_\Phi,} \tag{47.48}$$

где индекс Φ у частной производной в явном виде показывает, что она берется при постоянных значениях потоков Φ_j. Чтобы пользоваться формулой (47.48), необходимо энергию магнитного поля выразить в виде функции от Φ_i и ξ_i как независимых параметров.

Для практических применений во многих случаях удобнее выразить обобщенную силу в виде производных от энергии по обобщенным параметрам при постоянных токах. Энергия магнитного поля (47.18)

с учетом того, что [см. (47.6)]

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k, \tag{47.49}$$

выражается в виде

$$W = \frac{1}{2}\sum \Phi_i I_i. \tag{47.50}$$

При постоянных силах токов ($I_i = \mathrm{const}$) из (47.50) следует, что

$$(\mathrm{d}W)_I = \frac{1}{2}\sum_i I_i\,\mathrm{d}\Phi_i, \tag{47.51}$$

и поэтому формула (47.46) приводится к виду

$$(\mathrm{d}W)_I = \sum_i F_i\,\mathrm{d}\xi_i. \tag{47.52}$$

Отметим, что эта формула справедлива лишь при постоянных токах. Принимая во внимание независимость ξ_i, находим выражение для обобщенных сил:

$$\boxed{F_i = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right)_I,} \tag{47.53}$$

где индекс I у частной производной показывает, что она берется при постоянных токах. Для использования (47.53) W должна быть выражена в виде функции от сил токов и параметров ξ_i.

Рассмотрим в качестве примера два взаимодействующих контура с токами, энергия магнитного поля которых определяется формулой (47.17). Рассчитаем по (47.53), например, x-ю компоненту силы, которая действует со стороны первого контура на второй. В качестве обобщенной координаты возьмем значение координаты x некоторой точки второго контура, считая первый контур неподвижным. В качестве виртуального перемещения, связанного с этой координатой, необходимо взять смещение второго контура вдоль оси X без деформаций и вращений и выразить энергию магнитного поля через эту координату и другие независимые параметры, которые нас сейчас не интересуют. Вся зависимость энергии магнитного поля от x содержится во взаимной индуктивности $L_{12} = L_{21}$, поскольку индуктивности L_{11} и L_{22} не зависят от изменения взаимного расположения контуров. Обобщенная сила, связанная с декартовой координатой x, есть проекция обычной силы F_x. Поэтому (47.53) принимает вид

$$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x}. \tag{47.54}$$

Аналогично определяются и другие компоненты силы. Индуктивность L_{12} является геометрической величиной и ее зависимость от x можно найти с помощью формулы (47.19).

Ясно, что значение силы не зависит от того, по какой формуле ее вычислять. Поэтому к значению силы (47.54) мы придем также, если ее вычислять по формуле (47.48). Проведем это вычисление. В (47.48) в качестве выражения для W нельзя взять (47.17), поскольку в него входят в явном виде силы тока. Исключим их с помощью формул (47.10), из которых следует:

$$I_1 = \frac{L_{22}\Phi_1 - L_{12}\Phi_2}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2},\quad I_2 = \frac{L_{11}\Phi_2 - L_{21}\Phi_1}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}. \tag{47.55}$$

Подставляя (47.55) в (47.17), находим

$$W = \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}\left[\frac{L_{11}\Phi_2^2}{2} - L_{12}\Phi_1\Phi_2 + \frac{L_{22}\Phi_1^2}{2}\right]. \tag{47.56}$$

Теперь энергия магнитного поля выражена в явном виде через потоки и можно применить формулу (47.48) при $\Phi_i = \text{const}$. Единственной величиной, зависящей в (47.56) от x, является L_{12}, поэтому

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_\Phi = \frac{1}{(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)^2}\left[L_{12}L_{22}\Phi_1^2 - \right.$$

$$\left. - (L_{11}L_{22} + L_{12}^2)\,\Phi_1\Phi_2 + L_{12}L_{11}\Phi_2^2\right]\frac{\partial L_{12}}{\partial x} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x}, \tag{47.57}$$

где учтены равенства (47.55). Как и ожидалось, (47.57) совпадает с (47.54).

Формулами (47.48) и (47.53) следует пользоваться в зависимости от обстоятельств и выбирать ту из них, которая приводит к более простым выкладкам.

Объемные силы, действующие на сжимаемые магнетики. Имея выражение (47.45) для энергии магнетика в магнитном поле, можно, пользуясь соотношением между силами и энергией, получить выражение для сил точно так же, как это было сделано для диэлектриков в § 19. Исходим из выражения (47.45) и рассуждаем так же, как при переходе от (18.36) к формуле (19.41). Все вычисления также аналогичны, надо лишь учесть, что для диэлектриков сила находится при постоянных зарядах, т. е. по формуле (19.46), а для магнетиков — при постоянных токах, т. е. по формуле (47.53). Это означает, что при вычислении производных энергию надо брать с различными знаками. В результате вместо формулы (19.41) получается следующая формула:

$$\boxed{\mathbf{f} = -\frac{1}{2}H^2\operatorname{grad}\mu + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left(H^2\rho_m\frac{\partial\mu}{\partial\rho_m}\right).} \tag{47.58}$$

Напомним, что все рассмотрение проводится для изотермических процессов и, следовательно, производная $\partial\mu/\partial\rho_m$ в (47.58) должна вычисляться при $T = \text{const}$.

Формулу (47.58) целесообразно переписать по-другому:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}B^2\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\mu}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left[B^2\rho_m\frac{\partial}{\partial\rho_m}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]. \tag{47.59}$$

где учтено, что $H^2 = B^2/\mu^2$ и $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\mu}\right) = -\dfrac{1}{\mu^2}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}$ и т. д. В этом виде (47.59) является более близким аналогом формулы (19.41), поскольку роль полевого вектора в магнетизме играет $\mathbf{B}$, а аналогом ε выступает $1/\mu$.

Запишем формулу (47.41) в виде

$$\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} = \frac{J}{B}. \tag{47.60}$$

Пусть намагниченность J линейно зависит от плотности ρ_m, т. е. $J \sim \rho_m$. Тогда из (47.60) следует, что

$$\rho_m\frac{\partial}{\partial\rho_m}\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}. \tag{47.61}$$

При этих условиях формула (47.59) принимает вид

$$\boxed{\mathbf{f} = \frac{1}{2}\frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0}\operatorname{grad}B^2,} \tag{47.62}$$

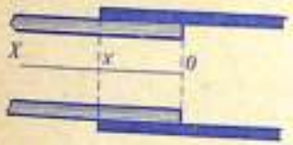
что совпадает с (39.13). Таким образом, формула (39.13) справедлива не только для жестких, но и для сжимаемых магнетиков, у которых намагниченность линейно зависит от плотности массы. Это соблюдается у газов и у некоторых жидкостей.

Энергия магнитного момента во внешнем поле. Так как работа, необходимая для увеличения потока магнитной индукции сквозь поверхность, натянутую на контур с током I, равна $I\,d\Phi$ ($d\Phi$ – поток магнитной индукции, создаваемый не током I, протекающим по контуру, а другими источниками магнитного поля), то энергия, затрачиваемая для создания потока Φ сквозь поверхность, ограничиваемую контуром тока I, равна $I\Phi$. В случае бесконечно малого контура $\Phi = \mathbf{B}\cdot\mathbf{S}$, $I\Phi = \mathbf{p}_m\cdot\mathbf{B}$, где $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}$ – магнитный момент тока. Следовательно, **энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле**

$$\boxed{W = -\mathbf{p}_m\cdot\mathbf{B}.} \tag{47.63}$$

Минимального значения эта величина достигает при совпадении направлений $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$. Это означает, что *внешнее магнитное поле стремится повернуть магнитный момент до совпадения с вектором индукции* [см. (39.8)].

Пример 47.1. *Вычислить силу, с которой один соленоид втягивается или выталкивается из другого* (рис. 184). *Плотности намотки и сила токов в них равны n_1, I_1 и n_2, I_2 соответственно, а площади поперечных сечений одинаковы. Соленоиды достаточно длинные, а намотка достаточно плотная, поэтому поле вдали от их концов можно описывать формулами для бесконечно длинного соленоида. Значение x велико, вследствие чего можно пренебречь краевыми эффектами.*



184

К расчету силы взаимодействия соленоидов

Найдем взаимную индуктивность, пользуясь формулами (47.48) – (47.49). Первый соленоид создает через каждый виток второго соленоида поток $\mu_0 n_1 I_1 S$, а весь поток через $n_2 x$ витков второго соленоида в области пересечения равен

$$\Phi_{21} = \mu_0 n_1 I_1 S n_2 x,$$

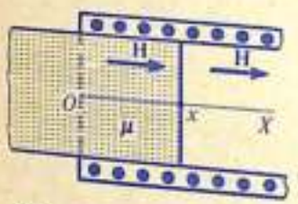
откуда получаем взаимную индуктивность

$$L_{21} = \Phi_{21}/I_1 = \mu_0 n_1 n_2 S x \quad (L_{12} = L_{21}). \tag{47.64}$$

Тогда сила равна

$$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x} = \mu_0 n_1 I_1 n_2 I_2. \tag{47.65}$$

Если токи имеют одинаковое направление, то $I_1 I_2 > 0$, $F_x > 0$ и, следовательно, соленоиды отталкиваются. При различных направлениях токов $I_1 I_2 < 0$, $F_x < 0$, что означает притяжение соленоидов.



185

К расчету силы взаимодействия соленоида и магнита

Пример 47.2. *В соленоид, площадь кругового сечения которого S, длина l, плотно надет виток на l м длины, вдвинут магнитик с магнитной проницаемостью μ (рис. 185). Найти силу, действующую на магнитик, пренебрегая краевыми эффектами, если по соленоиду течет ток силой I.*

Поскольку магнитная восприимчивость магнетика $\chi \ll 1$, в первом приближении напряженность везде можно считать равной $H_x^{(0)} = H_x = nI$. Следовательно, энергия магнитного поля системы равна

$$W = \left[H_x B_x/2 + H_x^{(0)} B_x^{(0)} (l - x)/2\right] S,$$

где B_x и $B_x^{(0)}$ – индукция соответственно в магнетике и вакууме. Учитывая, что $B_x = \mu H_x$, $B_x^{(0)} = \mu_0 H_x^{(0)}$, получаем

$$W = (n^2 I^2/2)\left[\mu x + \mu_0 (l - x)\right] S$$

и, следовательно, сила равна

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_I = \frac{1}{2}(\mu - \mu_0) n^2 I^2 S = (w - w_0) S, \tag{47.66}$$

где

$$w = \mu n^2 I^2/2 = H_x B_x/2, \; w_0 = \mu_0 n^2 I^2/2 = H_x^{(0)} B_x^{(0)}/2$$

– плотности энергии магнитного поля по разные стороны границы, на которую действует сила. Таким образом, поверхностная плотность силы $f_x = F_x/S$ является суммой двух сил, действующих с разных сторон на границу раздела. Поверхностная плотность каждой из сил равна плотности энергии магнитного поля.

Пример 47.3. *Вычислить индуктивность коаксиального кабеля длиной l, центральная жила которого имеет радиус r_1, а оболочка радиус r_2 (внутренний) и r_3 (внешний) (см. рис. 140). Магнитная проницаемость проводников равна μ, а пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком.*

Прежде всего найдем индукцию магнитного поля. Ясно, что поле аксиально-симметрично и силовые линии индукции являются окружностями с центром на оси кабеля. Из закона полного тока имеем (см. пример 35.1):

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{2\pi} \dfrac{I}{r_1^2} r & (0 < r < r_1), \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I}{r} & (r_1 < r < r_2), \\ \dfrac{\mu}{2\pi} \dfrac{I}{r} \dfrac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} & (r_2 < r < r_3), \\ 0 & (r_3 < r < \infty). \end{cases} \tag{47.67}$$

Для вычисления самоиндукции участка кабеля воспользуемся соотношением $W = LI^2/2$. Так как $W = \frac{1}{2}\int \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\, dV$, то [см. (47.67)]

$$W = \frac{I}{2}\frac{\mu I^2}{(2\pi)^2}\int_0^{r_1} \frac{r^2}{r_1^4} 2\pi r\, dr + \frac{I}{2}\frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r\, dr +$$

$$+ \frac{I}{2}\frac{\mu I^2}{(2\pi)^2}\int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{r^2}\left(\frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}\right)^2 2\pi r\, dr =$$

$$= \frac{I}{2}\frac{\mu I^2}{8\pi} + \frac{I}{2}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{I}{2}\frac{\mu I^2}{2\pi}\left[\frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2}\ln\frac{r_3}{r_2} - \frac{1}{4}\frac{3r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}\right],$$

откуда

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{l}{2\pi}\left[\mu_0 \ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2}\ln\frac{r_3}{r_2} - \frac{\mu r_3^2}{2(r_3^2 - r_2^2)}\right]. \tag{47.68}$$

§ 48. Цепи квазистационарного переменного тока

Излагаются основные методы расчета цепей квазистационарного переменного тока.

Определение. При изучении переменных полей и токов необходимо принять во внимание два фактора:

1) конечную скорость распространения электромагнитных полей (см. § 61);

2) порождение магнитного поля изменяющимся электрическим полем. Величина $j_{см} = \partial D/\partial t$ называется **объемной плотностью тока смещения** (см. § 57).

При не очень большой частоте переменного тока этими факторами можно пренебречь, т. е. считать, что электромагнитные поля распространяются в пространстве мгновенно, а токи смещения не существуют или, другими словами, магнитное поле порождается только токами проводимости. Токи и поля, удовлетворяющие этим условиям, называются **квазистационарными.** Выразим критерии квазистационарности математически.

1. Если имеется периодический процесс, распространяющийся от источника со скоростью c, то длина волны этого процесса, т. е. расстояние, на которое развертывается один период T изменения процесса во времени, равна

$$\lambda = cT.$$

Пренебречь пространственным изменением некоторой величины, характеризующей процесс, можно только в том случае, если она рассматривается в областях, линейные размеры l которых много меньше длины волны ($l \ll \lambda$). Это и есть *критерий пренебрежения конечной скоростью распространения электромагнитных полей.*

2. Если $D = D_0 \exp(i\omega t)$, то $j_{см} = \partial D/\partial t = i\omega D = i\omega\varepsilon E$. Поэтому пренебречь эффектом токов смещения по сравнению с эффектом токов проводимости можно при условии

$$|j_{см}|_{макс} \ll |j|_{макс}.$$

Поскольку $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$, $\mathbf{j}_{см} = i\omega\varepsilon\mathbf{E}$, это условие может быть записано в виде $\dfrac{|j_{см}|_{макс}}{|j|_{макс}} = \dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma} \ll 1$.

Принимая во внимание, что для металлических проводников $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, $\gamma \approx 10^7$ См/м, получаем, что токи смещения несущественны в области частот

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \approx 10^{18}\ \text{с}^{-1},$$

т. е. вплоть до частот, больших частот колебаний, соответствующих ультрафиолетовой части спектра. Эта оценка приближенная, поскольку она не учитывает инерционных свойств среды, которые играют существенную роль при высокой частоте. Учет инерционных свойств вещества ослабляет эту оценку на несколько порядков, однако и после этого диапазон частот, при которых можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, остается очень большим.

Однако *для переменных электромагнитных полей в вакууме и диэлектрике учет токов смещения как источника магнитного поля является необходимым при всех частотах, поскольку там токи проводимости отсутствуют.* Наличие токов смещения обусловливает существование электромагнитных волн (см. гл. 9).

Что касается *первого критерия, то его роль определяется относительной величиной частоты и пространственных размеров области,*

в которой изучается процесс. Например, для технического тока частотой 50 Гц длина волны $\lambda \approx 6$ тыс. км. Поэтому если нас интересуют вопросы, связанные с распределением тока по проводникам в пределах электростанции или даже города, то ток можно считать квазистационарным. Но если речь идет о передаче тока на многие тысячи километров, то необходимо принять во внимание его переменность вдоль линии передачи и нельзя считать его квазистационарным. Ток очень больших частот с длиной волны в несколько метров нельзя принимать за квазистационарный даже в пределах квартиры.

Самоиндукция. Электродвижущая сила индукции (46.1) возникает при любых причинах изменения потока Ф, охватываемого контуром тока. В частности, сам линейный замкнутый ток создает поток магнитной индукции сквозь поверхность, которую он ограничивает. Следовательно, *при изменении силы тока в контуре возникает электродвижущая сила.* Это явление называется **самоиндукцией**. Поскольку ток создает вокруг себя магнитное поле по правилу правого винта, а электродвижущая сила в контуре связана с изменением потока по правилу левого винта, из рис. 186 заключаем, что *электродвижущая сила самоиндукции направлена так, что препятствует изменению силы тока, которое ее вызывает* (**правило Ленца**).

Сила тока в контуре связана с охватываемым им собственным потоком магнитной индукции формулой (47.3)

$$\Phi = LI, \tag{48.1}$$

где L – индуктивность контура. Поэтому формула (46.1) для э. д. с. самоиндукции принимает вид

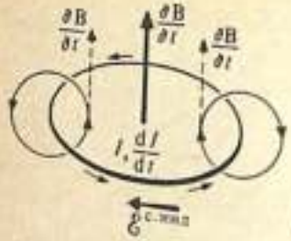
$$\mathcal{E}_{\text{с. инд}} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{48.2}$$

Включение и выключение постоянной э. д. с. в цепи с сопротивлением и индуктивностью. Если в момент $t = 0$ в цепь (рис. 187) включается источник сторонней э. д. с. постоянной величины, например батарея, то сила тока I в цепи начинает расти. Однако за счет роста индукции поля в контуре возникает э. д. с. самоиндукции, действующая противоположно сторонней э. д. с. В результате рост силы тока в цепи замедляется. Для каждого момента времени соблюдается закон Ома, который с учетом (48.2) записывается в виде уравнения

$$IR = U_0 - L\,dI/dt, \tag{48.3}$$

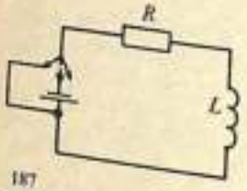
где R – полное сопротивление в цепи (включая внутреннее сопротивление источника). Это уравнение необходимо решить при начальном условии $I(0) = 0$. Говоря о том, что в каждый момент соблюдается закон Ома, мы предполагаем, что сила тока во всех участках цепи одна и та же, т. е. ток квазистационарен. Решение уравнения (48.3) элементарно:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right]. \tag{48.4}$$



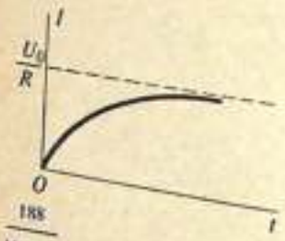
186

Возникновение самоиндукции. Правило Ленца



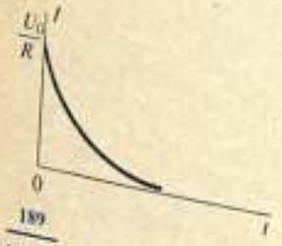
187

Цепь с сопротивлением и индуктивностью



188

Нарастание силы тока в цепи после включения постоянной сторонней э.д.с.



189

Убывание силы тока в цепи после выключения постоянной сторонней э.д.с.

График $I(t)$ изображен на рис. 188. Установившееся значение силы тока $I(\infty) = U_0/R$, соответствующее закону Ома для постоянного тока, достигается лишь в смысле предела при бесконечном времени. Учитывая экспоненциальную зависимость силы тока от времени, можно как обычно за время нарастания силы тока в цепи принять такое значение τ, при котором показатель экспоненты обращается в минус единицу, т. е.

$$\tau = L/R. \qquad (48.5)$$

При большой индуктивности в цепи нарастание силы тока происходит медленно. Например, если в цепь включить большую катушку индуктивности и лампу накаливания, то после замыкания цепи проходит значительный промежуток времени, в течение которого лампа разгорается до своего полного постоянного накала.

При выключении постоянного источника сторонних э. д. с. (рис. 187), например закоротив его, можно наблюдать, что сила тока не падает мгновенно до нуля, а уменьшается постепенно. Уравнение для силы тока в этом случае, очевидно, имеет вид

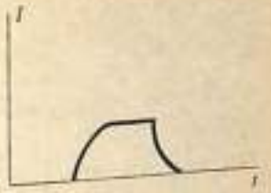
$$IR = -L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t \qquad (48.6)$$

и решается при начальном условии $I(0) = U_0/R$:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\exp(-Rt/L). \qquad (48.7)$$

График этой функции показан на рис. 189. Время убывания силы тока дается той же формулой (48.5). При достаточно больших индуктивностях после выключения сторонней э. д. с. лампа накаливания в цепи гаснет лишь постепенно в течение заметного промежутка времени. Электродвижущей силой, которая обеспечивает существование тока в цепи в течение этого промежутка времени, является электродвижущая сила самоиндукции, а источником энергии – энергия магнитного поля катушки индуктивности. Вопросы включения и выключения э. д. с. в цепи с самоиндукцией впервые рассмотрел Гельмгольц в 1855 г.

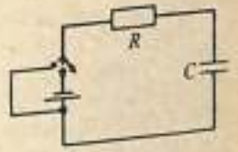
Получение прямоугольных импульсов тока. Если имеется источник прямоугольных импульсов напряжения, то наличие в цепи явления самоиндукции препятствует получению прямоугольных импульсов тока. Импульсы тока имеют форму, показанную на рис. 190. Для максимального приближения их формы к прямоугольной необходимо сделать возможно меньшей индуктивность контура.



190

Форма импульсов тока при прямоугольных импульсах напряжения

Емкость в цепи. Наличие в цепи конденсатора исключает возможность протекания по ней постоянного тока. В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсатора, на которых располагаются соответствующие заряды, полностью компенсирует действие сторонней э. д. с. Однако переменный ток в цепи при наличии конденсатора протекать может, поскольку в этом случае заряд на обкладках конденсатора переменен, что и позволяет существовать току в цепи. Кроме того, разность потенциалов на обкладках конденсатора не компенсирует действия сторонней э. д. с., благодаря чему и поддерживается соответствующая сила тока.



191

Цепь с емкостью и сопротивлением

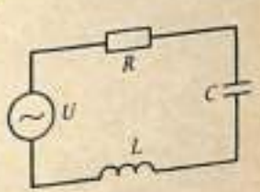
Закон Ома при наличии в цепи конденсатора и сопротивления (рис. 191) записывается в виде уравнения

$$IR = U_0 - Q/C, \qquad (48.8)$$

где Q – заряд на обкладке конденсатора, Q/C – разность потенциалов между обкладками конденсатора. Уравнение (48.8) удобно продифференцировать по t и записать в виде

$$R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{C}I, \qquad (48.9)$$

где $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$.



192

Цепь с емкостью, индуктивностью, сопротивлением и источником сторонних э.д.с.

Включение и выключение постоянной э. д. с. в цепи с емкостью и сопротивлением. Пусть постоянное напряжение U_0 включается в момент $t = 0$. Из уравнения (48.8) видно, что $I(0) = U_0/R$, а уравнение (48.9)

● **Индуктивность и емкость характеризуют свойство цепи накапливать энергию в форме энергии электрического и магнитного полей. Они «сглаживают» кривые изменения силы тока в сравнении с кривыми изменения напряжения в зависимости от времени.**

принимает при $t > 0$ вид

$$R\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{C}I. \tag{48.10}$$

Решение этого уравнения при начальном условии $I(0) = U_0/R$ выражается формулой

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\exp\left[-t/(RC)\right], \tag{48.11}$$

т. е. с течением времени сила тока в цепи убывает от максимального значения U_0/R до нуля. График $I(t)$ аналогичен графику, показанному на рис. 189, а время убывания силы тока $\tau = RC$. Поэтому если емкость C достаточно велика, то ток после выключения постоянного напряжения может существовать заметное время. Лампа, включенная в цепь, сначала вспыхнет, а затем постепенно погаснет.

После того как сила тока упала до нуля, конденсатор оказывается заряженным до разности потенциалов, равной сторонней э. д. с., но противоположно направленной. Они компенсируют друг друга. При выключении сторонней э. д. с., например путем закорачивания полюсов батарей, разность потенциалов на обкладках конденсатора оказывается нескомпенсированной. По цепи начинает течь ток, начальная сила которого равна U_0/R, а закон уменьшения силы тока полностью совпадает с (48.11) с тем же временем убывания силы тока.

Цепь с емкостью, индуктивностью, сопротивлением и источником сторонних э. д. с. Эта цепь показана на рис. 192. На основании (48.8) и (48.6) уравнение для тока в цепи имеет вид

$$IR = U - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}. \tag{48.12}$$

Дифференцируя обе части (48.12) по t, перепишем уравнение в виде

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d}{dt}U. \tag{48.13}$$

Различные частные случаи решения этого уравнения были рассмотрены раньше.

Переменный ток. Наиболее важным является анализ гармонического переменного тока, поскольку с помощью представления произвольной функции в виде ряда или интеграла Фурье к этому случаю может быть сведен и любой другой.

Для рассмотрения этих вопросов целесообразно пользоваться комплексной формой представления гармонически изменяющихся величин. Будем рассматривать установившийся режим.

Если сторонняя э.д.с. изменяется по закону

$$U = U_0 e^{i\omega t}, \tag{48.14}$$

то очевидно, что сила тока в (48.13) также должна изменяться со временем по закону

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \tag{48.15}$$

причем I, U, I_0, U_0 в формулах (48.14) и (48.15) являются, вообще говоря, комплексными величинами. Из (48.14) и (48.15) следует, что

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U, \quad \frac{dI}{dt} = i\omega I, \tag{48.16}$$

и поэтому уравнение (48.13) принимает вид

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + 1/C\right) I = i\omega U. \tag{48.17}$$

Разделив обе части уравнения (48.17) на $i\omega$, представим его в виде

$$IZ = U, \tag{48.18}$$

где

$$Z = R + i\left[\omega L - 1/(\omega C)\right] \tag{48.19а}$$

называется **импедансом.** Уравнение (48.18) имеет вид закона Ома, в который входит импеданс. Для переменного тока импеданс играет роль сопротивления, однако, будучи комплексной величиной, он посредством (48.18) позволяет учесть не только соотношение между амплитудами силы тока и напряжения, но и соотношения между их фазами.

В уравнении (48.18) все величины являются, вообще говоря, комплексными. Взяв модули от обеих частей этого уравнения, найдем связь между амплитудами силы тока и напряжения:

$$|I||Z| = |U|, \tag{48.19б}$$

где

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - 1/(\omega C)\right]^2}. \tag{48.19в}$$

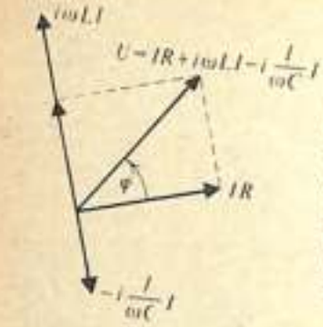
Таким образом, если интересоваться только амплитудами силы тока и напряжения, то уравнение (48.19б) полностью эквивалентно закону Ома для постоянного тока, однако величина $|Z|$, играющая роль сопротивления, зависит от частоты тока в соответствии с (48.19в).

Векторные диаграммы. Представим комплексные числа векторами на комплексной плоскости. Гармонически изменяющаяся величина изображена вектором, вращающимся с частотой ω вокруг своего начала против часовой стрелки. Длина этого вектора равна амплитуде колебаний соответствующей физической величины.

Графический метод решения уравнения (48.18) очевиден из рис. 193, если учесть, что умножение комплексной величины на i означает ее поворот на $\pi/2$ против часовой стрелки без изменения длины, а умножение на $(-i)$ – поворот на $\pi/2$ по часовой стрелке.

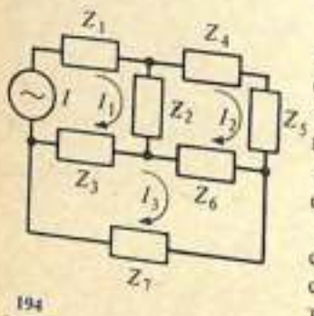
Из рис. 193 видно, что угол φ определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \tag{48.20}$$



193

Векторная диаграмма напряжений в цепи переменного тока



194

Метод контурных токов

Следовательно, φ изменяется в пределах $(+\pi/2, -\pi/2)$ в зависимости от соотношения между импедансами различных элементов цепи и частотой, при этом внешнее напряжение U по фазе может изменяться от совпадения с напряжением на индуктивности до совпадения с напряжением на емкости. Более удобно это выразить в виде соотношения между фазами напряжений на элементах цепи и фазой внешнего напряжения:

1) фаза напряжения на индуктивности ($U_L = i\omega LI$) всегда опережает фазу внешнего напряжения на угол между 0 и π;

2) фаза напряжения на емкости $[U_C = -iI/(\omega C)]$ всегда отстает от фазы внешнего напряжения на угол между 0 и $-\pi$;

3) фаза напряжения на сопротивлении может как опережать, так и отставать от фазы внешнего напряжения на угол между $+\pi/2$ и $-\pi/2$, причем отстает при преимущественно индуктивной нагрузке, когда $\omega L > 1/(\omega C)$, а опережает при преимущественно емкостной нагрузке, когда $\omega L < 1/(\omega C)$.

Диаграмма (рис. 193) позволяет также сформулировать следующие утверждения о соотношении между напряжениями и силами токов на различных элементах цепи, причем отсчет удобно вести от силы тока, поскольку он на всех элементах цепи имеет одну и ту же фазу:

1) фаза напряжения на индуктивности опережает фазу силы тока на $\pi/2$;

2) фаза напряжения на емкости отстает на $\pi/2$ от фазы силы тока;

3) фаза напряжения на сопротивлении совпадает с фазой силы тока;

4) фаза внешнего напряжения может как опережать, так и отставать от фазы силы тока, что определяется нагрузкой.

Правила Кирхгофа. Уравнение (48.18) позволяет решать все задачи, касающиеся переменного тока в цепи с индуктивностью, емкостью и сопротивлением аналогично тому, как соответствующие задачи решаются с помощью закона Ома для цепи с сопротивлением в случае постоянного тока. Анализ разветвленных цепей переменного тока аналогичен анализу цепей постоянного тока (см. § 28). Так как для переменного тока в замкнутом контуре справедлив закон (48.19), а в каждом узле справедлив закон сохранения заряда, то правила Кирхгофа (28.4) и (28.5) для постоянного тока обобщаются на переменные токи следующим образом:

1) *для всякого замкнутого контура* (48.21)

$$\sum_i (\pm) I_i Z_i = \sum_k (\pm) U_k;$$

2) *в каждом узле* (48.22)

$$\sum (\pm) I_i = 0.$$

Это обобщение правил Кирхгофа на разветвленные цепи переменного тока было осуществлено в 1886 Д. У. Рэлеем (1842–1919). Следует сделать замечание о знаках величин в (48.21) и (48.22). Хотя каждая из величин I_i, U_k, входящих в эти формулы, является комплексной и содержит в себе фазу (а следовательно, и знак), при составлении уравнений необходимо проставлять знаки, потому что один и тот же участок может принадлежать разным контурам и, следовательно, проходится при составлении уравнений в противоположных направлениях. Аналогичное замечание касается и знака U_k. Решение уравнений позволяет найти как амплитуды, так и фазы всех сил токов. Ввиду комплексности всех величин число существенных уравнений при этом в два раза больше, чем было бы в аналогичном случае постоянных токов.

Последовательное и параллельное соединения импедансов. Из формулы (48.18), аналогично случаю постоянных токов, следует, что при последовательном соединении (48.23)

$$\boxed{Z = Z_1 + Z_2,}$$

а при параллельном (48.24)

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}.}$$

Это обстоятельство делает анализ электрических цепей переменного тока аналогичным анализу цепей постоянного тока и нет необходимости более подробно останавливаться на этом вопросе.

Величина, обратная импедансу, называется **проводимостью**: (48.25)

$$Y = 1/Z.$$

Поэтому можно сказать, что при параллельном соединении складываются проводимости: (48.26а)

$$Y = Y_1 + Y_2.$$

С помощью проводимости закон Ома записывается в виде (48.26б)

$$I = YU.$$

● **Импедансом учитывается не только омическое сопротивление цепи, но и ее индуктивное и емкостное сопротивления. Будучи комплексной величиной импеданс позволяет учесть не только соотношение между амплитудами силы тока и напряжения, но и соотношения между их фазами.**

Метод контурных токов. При расчете сложных цепей значительные упрощения вносит *метод контурных токов, который является прямым следствием правил Кирхгофа.* Сложный контур состоит из системы простых замкнутых контуров. На рис. 194 изображен сложный контур, состоящий из трех простых контуров. В уравнении Кирхгофа при обходе замкнутого контура на каждом его участке между узлами берется сила тока, действительно протекающего по этому участку. На каждом участке контура сила тока, вообще говоря, различна. *В методе контурных токов принимается, что на всех участках каждого замкнутого контура течет один и тот же ток. Эти токи называются контурными.* Полная сила тока, текущего по участку контура, равна при этом алгебраической сумме сил контурных токов, для которых этот участок является общим. Уравнение Кирхгофа для каждого контура пишется с учетом этого обстоятельства, т. е. выражается через контурные токи. Полный импеданс для каждого участка контура между узлами (рис. 194) обозначен соответствующим индексом. Положительное направление обхода взято по часовой стрелке.

Уравнения для контурных токов, число которых совпадает с числом простых контуров, имеют вид:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 &= U, \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 &= 0, \\ Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 &= 0, \end{aligned} \tag{48.27}$$

где Z_{11}, Z_{22}, Z_{33} – собственные импедансы контуров, равные сумме импедансов участков соответствующих контуров:

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2 + Z_3,\ Z_{22} = Z_4 + Z_5 + Z_6 + Z_2,\ Z_{33} = Z_3 + Z_6 + Z_7, \tag{48.28}$$

а Z_{12}, Z_{13} и т. д. – взаимные импедансы контуров, равные импедансам участков, принадлежащих двум контурам. Их знак зависит от того, проходится ли соответствующий участок током, стоящим у взаимного импеданса сомножителем, в положительном или отрицательном направлении по сравнению с контурным током, для которого пишется уравнение. Так, например,

$$Z_{12} = -Z_2,\ Z_{21} = -Z_2 \text{ и т. д.} \tag{48.29}$$

Нетрудно видеть, что

$$Z_{ij} = Z_{ji}. \tag{48.30}$$

Изложенное делает почти очевидным тот факт, что уравнения (48.27) объединяют в себе оба правила Кирхгофа. Более строго это можно доказать, если (48.27) получить из уравнений Кирхгофа (48.21) и (48.22), перейдя к контурным токам. Читатель может попытаться проделать эти алгебраические выкладки.

Число уравнений (48.27) для контурных токов равно числу неизвестных токов. Система уравнений решается по общему правилу

с помощью теории определителей:

$$I_1 = U(\Delta_{11}/\Delta),\ I_2 = U(\Delta_{12}/\Delta),\ I_3 = U(\Delta_{13}/\Delta), \tag{48.31}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} \tag{48.32}$$

– определитель системы; Δ_{11}, Δ_{12}, Δ_{13} – дополнения элементов Z_{11}, Z_{12} и Z_{13} в определителе Δ:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{31} & Z_{32} \end{vmatrix}. \tag{48.33}$$

Тем самым задача решена. Обобщение изложенного метода контурных токов на произвольное число элементарных контуров очевидно. При этом необходимо внимательно следить, чтобы все элементарные контуры проходились в одном и том же направлении и были все учтены в уравнениях.

Пример 48.1. *Найти самоиндукцию n витков обмотки, намотанных на тороид прямоугольного сечения, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно r_1 и r_2, а высота a* (рис. 195).

Выбирая в качестве контура интегрирования L_0 окружность радиусом r, концентричную с осью симметрии тороида, и применяя закон полного тока, получаем

$$\oint_{L_0} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = H_\varphi \cdot 2\pi r = \begin{cases} 0 & \text{при } r < r_1, \\ nI & \text{» } r_1 < r < r_2, \\ 0 & \text{» } r > r_2, \end{cases}$$

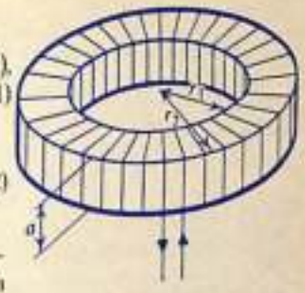
где I – сила тока, протекающего по обмотке тороида.

Магнитный поток, охватываемый одним витком, равен

$$\Phi_1 = \mu a \int_{r_1}^{r_2} H_\varphi\, dr = \frac{\mu a n I}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu a n I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \tag{48.34}$$

откуда самоиндукция равна

$$L = (n\Phi_1/I) = [\mu a n^2/(2\pi)] \ln (r_2/r_1). \tag{48.35}$$



195

Тороид прямоугольного сечения

● **Хотя в случае переменных токов электродвижущие силы и силы токов представлены комплексными величинами и, следовательно, содержат в себе фазу (и знак) при составлении уравнений Кирхгофа необходимо проставлять знаки, потому что один и тот же участок может принадлежать разным контурам и проходится при составлении уравнений в противоположных направлениях.**

В методе контурных токов принимается, что на всех участках каждого замкнутого контура течет один и тот же ток, называемый контурным. Полная сила тока, текущего по участку контура, равна при этом алгебраической сумме сил контурных токов, для которых этот участок является общим.

○ *Каков физический смысл критериев квазистационарности? Чем определяются знаки в уравнениях, выражающих правила Кирхгофа, в случае переменных токов?*

В чем преимущества метода контурных токов и когда его целесообразно применять?

§ 49. Работа и мощность переменного тока

Выводятся формулы работы и мощности, развиваемой переменным током. Обсуждаются основные физические явления, связанные с работой электродвигателей.

Мгновенная мощность. Энергия источника сторонних э. д. с. в цепи с током испытывает следующие превращения:

а) превращается в теплоту в результате джоулева нагрева проводника [см. (27.4)]. Если в цепи имеется потребитель, который за счет энергии источника сторонних э. д. с. совершает механическую работу, то его мощность выражается формулой, аналогичной (27.4). Поэтому предположим, что в цепи имеется лишь омическое сопротивление R, а мощность, развиваемую на этом сопротивлении, обозначим $P_{iR} = I^2R$;

б) превращается в энергию магнитного поля. Поскольку энергия магнитного поля определяется формулой (47.5), мощность, развиваемая источником сторонних э. д. с. для изменения энергии магнитного поля, равна

$$P_{iL} = \frac{dW}{dt} = LI\frac{dI}{dt}. \qquad (49.1)$$

Индуктивные свойства цепи характеризуются индуктивностью L. В отличие от P_{iR}, мощность P_{iL} может быть как положительной ($dI/dt > 0$), так и отрицательной ($dI/dt < 0$). Это означает, что источник сторонних э. д. с. отдает энергию для увеличения энергии магнитного поля и получает энергию при уменьшении энергии магнитного поля;

в) превращается в энергию электрического поля при его изменении. Электрические свойства цепи характеризуются ее емкостью C. Поскольку энергия конденсатора, на пластинах которого имеется заряд Q, определяется формулой (18.20г), мощность источника сторонних э. д. с. для изменения энергии электрического поля равна

$$P_{iC} = \frac{dW}{dt} = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C}I, \qquad (49.2)$$

где $I = dQ/dt$ – сила тока в цепи. Эта мощность может быть как положительной, так и отрицательной: при увеличении напряженности электрического поля энергия источника сторонних э. д. с. превращается в энергию электрического поля, при уменьшении напряженности – энергия электрического поля превращается в энергию источника сторонних э. д. с.

Полная мощность, развиваемая источником сторонних э. д. с. в цепи, равна

$$P_i = P_{iR} + P_{iL} + P_{iC}. \qquad (49.3)$$

Часто P_i называют мощностью, развиваемой током, или мощностью тока. Мы будем использовать это выражение, помня, однако, о его условном характере. Аналогично P_{iR}, P_{iL}, P_{iC} называют мощностями тока на сопротивлении, индуктивности и емкости. Для наглядности допустим, что омическое сопротивление, индуктивность и емкость сосредоточены в разных частях цепи (см. рис. 192).

Сторонюю э. д. с. U называют **напряжением.**

На омическом сопротивлении происходит изменение потенциала на $U_{iR} = IR$, поэтому U_{iR} принято называть потерей напряжения на сопротивлении. Между пластинами конденсатора разность потенциалов равна $U_{iC} = Q/C$. Поэтому в цепи на конденсаторе напряжение изменяется на U_{iC}. В индуктивности возникает э. д. с. самоиндукции $\mathcal{E}_{si} = -LdI/dt$, на компенсацию которой источник сторонних э. д. с. затрачивает соответствующую часть сторонней э. д. с. ($U_{iL} = LdI/dt$ – изменение напряжения на индуктивности).

Поэтому формулы (49.1) и (49.2) принимают вид:

$$P_{iL} = U_{iL}I, \quad P_{iC} = U_{iC}I. \qquad (49.4)$$

Тогда [(см. 49.3)]

$$P_i = U_{iR}I + U_{iL}I + U_{iC}I = UI. \qquad (49.5)$$

Пусть сила тока в цепи изменяется по закону

$$I = I_0 \sin \omega t. \qquad (49.6)$$

В соответствии с рис. 193 для действительных значений U_{iL}, U_{iC} и U_{iR} запишем:

$$U_{iL} = I_0\omega L \sin(\omega t + \pi/2), \qquad (49.7)$$

$$U_{iC} = [I_0/(\omega C)] \sin(\omega t - \pi/2), \qquad (49.8)$$

$$U_{iR} = I_0 R \sin \omega t. \qquad (49.9)$$

Следовательно, мгновенные мощности, развиваемые током на различных элементах цепи, определяются формулами:

$$P_{iL} = I_0^2\omega L \sin \omega t \sin(\omega t + \pi/2) = I_0^2\omega L \sin \omega t \cos \omega t, \qquad (49.10)$$

$$P_{iC} = [I_0^2/(\omega C)] \sin \omega t \sin(\omega t - \pi/2) = -[I_0^2/(\omega C)] \sin \omega t \cos \omega t, \qquad (49.11)$$

$$P_{iR} = I_0^2 R \sin^2 \omega t, \qquad (49.12)$$

которые показывают, что *лишь на сопротивлении R мощность тока все время положительна, т. е. ток совершает положительную работу. Мгновенная мощность, развиваемая током на индуктивности и емкости, знакопеременна: часть времени ток совершает положительную работу, т. е. передает свою энергию в эти элементы; часть времени работа отрицательна, т. е. энергия из этих элементов возвращается к источнику сторонних э. д. с. Таким образом происходит обмен энергией между индуктивностями, емкостями и источниками сторонних э. д. с., в процессе которого емкости и индуктивности играют роль источников электродвижущих сил.*

Средняя мощность. Для получения средней мощности тока за период колебаний необходимо усреднить выражения (49.10) – (49.12) по периоду колебаний силы тока. При этом необходимо учесть, что

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle = {}^1/_2. \tag{49.13}$$

С учетом (49.13) из (49.10) – (49.12) находим:

$$P_L = \langle P_{iL} \rangle = 0, \tag{49.14}$$

$$P_C = \langle P_{iC} \rangle = 0, \tag{49.15}$$

$$P_R = \langle P_{iR} \rangle = I_0^2 R/2. \tag{49.16}$$

Средняя мощность отлична от нуля лишь на сопротивлении R. Средние мощности на индуктивности и емкости равны нулю, т. е. на этих элементах током никакой работы не совершается, они в среднем энергетически нейтральны. Поэтому сопротивление R называется активным элементом цепи **(активным сопротивлением)**, а емкости и индуктивности – **реактивными сопротивлениями.**

Эффективные значения силы тока и напряжения. Из рис. 193 видно, что

$$I_0 R = U_0 \cos \varphi, \tag{49.17}$$

и поэтому формула (49.16) может быть представлена в виде

$$P_R = {}^1/_2 I_0 I_0 R = {}^1/_2 I_0 U_0 \cos \varphi, \tag{49.18}$$

где I_0, U_0 – амплитуды силы тока и внешнего напряжения; φ – разность фаз между силой тока и напряжением [см. (48.20)]; $\cos \varphi$ – коэффициент мощности, от которого зависит, насколько эффективно производится передача мощности от источника тока к потребителю.

У постоянного тока мгновенная мощность совпадает со средней [см. (49.2)]. Так как у постоянного тока $\cos \varphi = 1$, то формулу (49.18) можно сделать идентичной (27.3), если вместо амплитудных значений I_0 и U_0 использовать их эффективные значения:

$$I_\text{эф} = I_0/\sqrt{2}, \quad U_\text{эф} = U_0/\sqrt{2}. \tag{49.19}$$

Тогда

$$P_R = I_\text{эф} U_\text{эф} \cos \varphi. \tag{49.20}$$

Использование $I_\text{эф}$ и $U_\text{эф}$ позволяет рассматривать мощность переменного тока формально так, как будто нет колебаний мощности. Лишь присутствие $\cos \varphi$ напоминает о том, что речь идет о переменном токе.

Когда в электротехнике говорят о силе переменного тока и напряжении, то имеют в виду их эффективные значения. В частности, амперметры и вольтметры градуируют обычно на эффективные значения. Поэтому максимальное значение напряжения в цепи переменного тока почти в полтора раза больше того, которое показывает вольтметр. Это необходимо принимать во внимание при расчете изоляторов, анализе вопросов безопасности и т. д.

Коэффициент мощности. Одним из главных назначений цепей переменного тока является передача энергии. Поэтому при проектировании линий передач необходимо учитывать $\cos \varphi$.

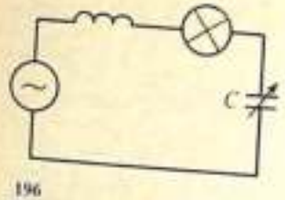
Предположим, что в линии имеется лишь активная нагрузка. Тогда $\cos \varphi = 1$ и отдаваемая в нагрузку мощность при заданных $I_\text{эф}$ и $U_\text{эф}$ максимальна. Если в цепь включить реактивную нагрузку, например индуктивность, то $\cos \varphi$ станет меньше единицы и для обеспечения передачи прежней мощности необходимо соответственно увеличить $I_\text{эф} U_\text{эф}$, т. е. к потребителю энергии по линии передачи подводить больший ток. Это приводит к увеличению потерь энергии на джоулеву теплоту в линии передачи. Поэтому *всегда стремятся распределить нагрузки так, чтобы было* $\varphi \approx 0$, т. е. $\cos \varphi \approx 1$.

Рассмотрим, например, линию передачи для питания лампы накаливания (рис. 196), когда в цепи последовательно с лампой имеется большая индуктивность и переменная емкость. Пусть в начальный момент емкостное сопротивление равно нулю ($C = \infty$). В этом случае при достаточно больших $L\omega$ по сравнению с сопротивлением R лампы угол φ достигает значений, близких к $\pi/2$, и $\cos \varphi$ очень мал. Поэтому, если даже абсолютное значение $U_\text{эф}$ в цепи достаточно велико, на лампе выделяется очень малая мощность и лампа горит очень тускло или даже совсем не светится. При уменьшении емкости C коэффициент мощности возрастает (угол φ уменьшается, приближаясь к нулю) и накал лампы постепенно увеличивается. Эффективное напряжение на клеммах генератора остается неизменным, мощность, передаваемая генератором в линию, возрастает. Таким образом, увеличение коэффициента мощности введением реактивных, не потребляющих мощности или, как говорят, безваттных нагрузок в цепи позволяет улучшить эффективность работы линии передачи.

Электродвигатели. Одним из важнейших применений электрического тока является преобразование передаваемой им энергии в механическую работу, осуществляемую электродвигателями. Их работа основана на использовании силы Ампера, которая действует на проводник с током в магнитном поле. Первый электродвигатель, положивший начало применению электричества для производства работы, был сконструирован в 1839 г. Б. С. Якоби (1801 – 1874).

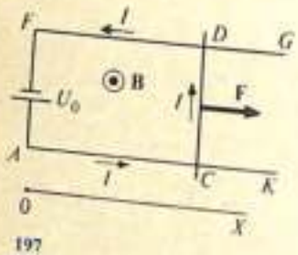
Для выяснения принципиальной стороны дела рассмотрим простейший электродвигатель постоянного тока (рис. 197). Источник постоянной электродвижущей силы U_0 включен в цепь $ACDFA$. Прямолинейный проводник DC может скользить вдоль проводников FG и AK. Он находится в однородном магнитном поле, индукция которого направлена вверх от плоскости чертежа. Когда по этому проводнику течет ток, то на него действует сила Лоренца $F = IlB$. Под ее действием проводник движется и совершает механическую работу, т. е. осуществляет функцию электродвигателя.

Рассмотрим баланс энергий. При перемещении проводника на dx совершается работа



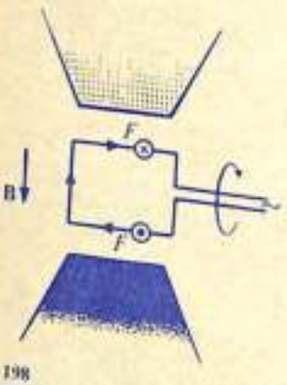
196

Повышение коэффициента мощности



197

Схема работы простейшего электродвигателя



198

Схема работы синхронного двигателя

● **Мгновенная мощность, развиваемая током на индуктивностях и емкостях, знакопеременна, а на сопротивлении — положительна.**

$$dA = F\,dx = IlB\,dx \tag{49.21}$$

и, следовательно, мощность равна

$$P_э = dA/dt = IlBv, \tag{49.22}$$

где $v = dx/dt$ – скорость проводника.

С другой стороны, при движении проводника в контуре возникает электродвижущая сила индукции

$$\mathcal{E}^{инд} = \frac{-d\Phi}{dt} = -\frac{lB\,dx}{dt} = -lBv, \tag{49.23}$$

направленная против сторонней электродвижущей силы, которая генерирует токи и совершает работу по преодолению действия силы (49.23). Затрачиваемая при этом источником сторонних э. д. с. мощность равна

$$P_{ст} = \mathcal{E}^{инд} I = -lBvI. \tag{49.24а}$$

Сравнение (49.24) и (49.22) показывает, что *вся развиваемая электродвигателем мощность обеспечивается источником сторонних э. д. с.* Кроме полезной мощности (49.22) источником сторонних э. д. с. развивается мощность, расходуемая на выделение джоулевой теплоты в омическом сопротивлении проводов, по которым течет ток, и внутреннем сопротивлении источника. Обозначив R – суммарное омическое сопротивление проводов и внутреннее сопротивление источника, получим следующий баланс напряжений для замкнутого контура (первое правило Кирхгофа):

$$IR = U_0 + \mathcal{E}^{инд} = U_0 - lBv. \tag{49.24б}$$

Умножим обе части этого равенства на I:

$$I^2R = U_0 I - IlBv = U_0 I - P_э, \tag{49.25}$$

где использовано выражение (49.22). Окончательно формулу (49.25) целесообразно записать в виде

$$P_и = IU_0 = I^2R + P_э, \tag{49.26}$$

т. е. мощность, развиваемая источником сторонней э. д. с., расходуется на выделение джоулевой теплоты с мощностью I^2R и работу электродвигателя с мощностью $P_э$.

Для переменного тока расчет баланса энергий несколько сложнее, но физическая суть явлений остается без изменения.

Синхронные двигатели. Для обеспечения непрерывности работы двигателя необходимо создать некоторый периодический режим. Наиболее простой является схема, изображенная на рис. 197, в которой индукция изменяется периодически со временем.

После того как проводник CD переместится на некоторое расстояние вправо и совершит определенную работу, направление индукции изменяется на обратное. При одном и том же направлении тока и силла F изменит свое направление на обратное. После этого проводник замедляется и начинает двигаться влево, снова совершая работу, и т. д. В результате получается электродвигатель, рабочая часть которого (проводник CD) движется синхронно с изменяющимся внешним магнитным полем. Такой двигатель называется **синхронным**. В указанной схеме можно, конечно, индукцию поля оставить постоянной, а периодически изменять направление тока в движущемся контуре. При этом движение проводника будет происходить синхронно с изменениями тока в нем. Такой двигатель тоже является синхронным. Можно также одновременно изменять соответствующим образом и индукцию и силу тока в проводнике, осуществляя при этом синхронно с ними соответствующее движение проводника CD.

Используемые в технике синхронные двигатели в принципиальном отношении работают так же, как схематический двигатель. При этом в технике используются все три возможности осуществления синхронного двигателя. Однако фактическая реализация этих принципиально простых схем осуществляется довольно сложными конструкциями. Как правило, при этом используется вращательное движение.

Простейшая схема работы синхронного двигателя с вращательным движением изображена на рис. 198. В постоянном магнитном поле находится рамка, по которой течет переменный ток. Силы Лоренца, действующие на проводники рамки, перпендикулярные индукции магнитного поля, создают вращательный момент, под действием которого рамка вращается. Чтобы этот момент действовал все время в одном направлении, частота вращения рамки должна быть равна частоте текущего по ее проводам переменного тока, т. е. должно соблюдаться условие синхронизма. Можно осуществить также такие схемы двигателей, когда частота вращения рамки будет в целое число раз меньше частоты питающего электродвигатель переменного тока.

Основными недостатками синхронных двигателей являются трудность запуска, в процессе которого частота вращения рамки становится синхронной с частотой переменного тока, и возможность потери синхронизма при резком изменении нагрузки. В технике разработаны способы достаточно эффективного преодоления этих недостатков.

Асинхронные двигатели. Изменяющееся магнитное поле по закону электромагнитной индукции Фарадея создает электрическое поле [см. (46.5)]. Если такое вихревое поле существует в проводнике, то

возникают соответствующие электрические токи, плотность которых в каждой точке проводника определяется законом Ома ($\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$). Эти токи взаимодействуют с магнитным полем. Следовательно, переменное магнитное поле не только создает в проводнике токи, но и действует на него с соответствующими силами.

Представим себе, что переменное магнитное поле создается магнитами A и C, которые закреплены на оси и могут вращаться вокруг нее под действием внешнего момента сил (рис. 199). Диск D из сплошного проводника также закреплен на оси и может вокруг нее вращаться. При движении магнитов в каждой точке диска D существует переменное магнитное поле и возникает соответствующая плотность тока, на который со стороны магнитного поля действует сила Ампера. Таким образом, на диск D со стороны вращающихся магнитов действуют определенные силы. Вычислим результирующее действие этих сил. По закону Ленца, токи, возникающие в проводнике вследствие электромагнитной индукции Фарадея, стремятся уменьшить действие факторов, которые их вызывают. В данном случае фактором, вызывающим индукционные токи в диске D, является относительное движение магнита и диска. Следовательно, силы, действующие на диск, должны стремиться уменьшить скорость относительного движения магнита и диска. Это означает, что к диску приложен момент сил, стремящийся его вращать в том же направлении, в каком вращаются магниты. Поэтому диск приходит во вращение в направлении движения магнитов, как бы увлекается вращающимся полем магнитов. Момент сил существует лишь тогда, когда угловая скорость вращения магнитов отличается от угловой скорости вращения диска, т. е. между вращающимся магнитным полем и диском существует «проскальзывание». Чем оно меньше, тем меньше момент сил, действующих на диск. Поэтому при увеличении нагрузки на ось диска увеличивается «проскальзывание». При неизменной скорости вращения магнитного поля и его индукции это означает уменьшение скорости вращения диска.

Этот механизм приведения диска во вращение составляет принципиальную основу работы асинхронных двигателей. Однако для того, чтобы двигатель мог именоваться электродвигателем, необходимо обеспечить вращение магнитного поля без механического привода. Для этого используются электромагниты, питаемые переменным током.

Создание вращающегося магнитного поля. Два электромагнита, создающих взаимно перпендикулярные магнитные поля (рис. 200), питаются переменным током с разностью фаз $\pi/2$. На схеме (рис. 200) это в достаточной степени достигается введением в цепь электромагнитов индуктивности L и сопротивления R. В результате этого в пространстве между полюсами электромагнитов создаются два переменных магнитных поля, индукции которых изменяются по гармоническому закону с разностью фаз, близкой к $\pi/2$. Сумма индукций $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ этих полей является вектором $\mathbf{B}$, который вращается вокруг точки O (рис. 201).

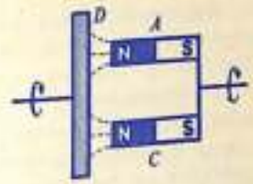
Если в пространстве между магнитами (рис. 200) поместить массивный проводник, например цилиндр с осью вращения, перпендикулярной плоскости рисунка, то во вращающемся поле он будет приведен во вращение в направлении вращения поля. Происходящие при этом физические процессы аналогичны тем, которые осуществляются при создании поля вращающимися постоянными магнитами. Вместо сплошного цилиндра употребляется короткозамкнутый ротор (рис. 202).

Вращающееся магнитное поле гораздо удобнее создавать с помощью трехфазного тока, поскольку в этом случае не требуется искусственно создавать разность фаз между силами токов, питающих различные электромагниты (см. § 52).

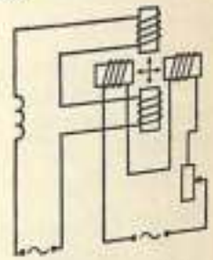
Ясно, что скорость вращения асинхронного двигателя может изменяться непрерывно и ни в каком кратном соотношении с частотой питающего тока не находится, поэтому двигатель и называется **асинхронным**, а возможность непрерывного изменения скорости вращения составляет одно из его очень существенных преимуществ.

Сила тока в обмотках электромагнита зависит от «проскальзывания»: чем оно больше, тем больше сила тока. Поэтому в момент запуска, когда проскальзывание максимально, через обмотки двигателя проходит очень большой ток, который может их повредить. Для избежания этого в цепь питания вводится переменный реостат, который в момент включения устанавливается на достаточно большое сопротивление. По мере увеличения частоты вращения двигателя сопротивление реостата уменьшают.

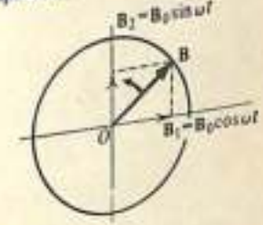
Так же как и в случае синхронных двигателей, техническое осуществление асинхронных двигателей характеризуется большим разнообразием и не является простой задачей. Однако даже в самых сложных конструкциях основополагающие принципы остаются неизменными.



199 Схема возникновения вращательного момента в асинхронном двигателе



200 Схема установки для создания вращающегося магнитного поля



201 Сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с разностью фаз $\pi/2$



202 Короткозамкнутый якорь асинхронного двигателя

Асинхронные двигатели могут работать не только при вращающемся магнитном поле, но и при пульсирующем. Это очевидно, если принять во внимание, что пульсирующее поле эквивалентно двум полям, вращающимся в противоположных направлениях. Одно из полей обеспечивает вращение ротора асинхронного двигателя, а вращающееся в противоположном направлении поле в среднем никакого действия на вращение ротора не оказывает.

Согласование нагрузки с генератором. Генератор переменного тока, создающий электродвижущую силу, сам обладает определенным внутренним сопротивлением, емкостью и индуктивностью, т. е. обладает определенным импедансом:

$$Z_r = R_r + iX_r, \tag{49.27}$$

где R_r – активное сопротивление; X_r – реактивное сопротивление, являющееся разностью индуктивного и емкостного сопротивлений. Нагрузка, на которую работает генератор, также характеризуется импедансом:

$$Z_н = R_н + iX_н, \tag{49.28}$$

причем мощность выделяется лишь на активном сопротивлении $R_н$. В цепи генератор и нагрузка стоят последовательно. U_r – электродвижущая сила генератора.

Мощность, развиваемая на нагрузке $R_н$, в соответствии с формулой (49.16) равна

$$P_н = {}^1/_2 I_0^2 R_н, \tag{49.29}$$

где I_0^2 – квадрат амплитуды силы тока, протекающего через нагрузку. На основании (48.19б) имеем

$$I_0^2 = |I|^2 = \frac{|U_r|^2}{|Z_r + Z_н|^2} = \frac{|U_r|^2}{(R_r + R_н)^2 + (X_r + X_н)^2}. \tag{49.30}$$

С помощью (49.30) запишем формулу (49.29) в виде

$$P_н = \frac{|U_r|^2}{2} \frac{R_н}{(R_r + R_н)^2 + (X_r + X_н)^2}. \tag{49.31}$$

Выясним, при каких условиях эта мощность максимальна.

Реактивные сопротивления X_r и $X_н$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Ясно, что для достижения максимальности (49.31) необходимо выполнение условия

$$\boxed{X_r + X_н = 0.} \tag{49.32}$$

Оно означает, что коэффициент мощности должен иметь максимальное значение ($\cos\varphi = 1$). При соблюдении условия (49.32) выражение (49.31) принимает вид

$$P_н = \frac{|U_r|^2}{2} \frac{R_н}{(R_r + R_н)^2}. \tag{49.33}$$

Мощность изменяется с изменением активного сопротивления нагрузки и достигает максимума при условии $\partial P_н/\partial R_н = 0$, т. е. когда

$$\boxed{R_н = R_r.} \tag{49.34}$$

При соблюдении условий (49.32) и (49.34) *генератор отдает нагрузке максимальную мощность. В этом случае говорят, что нагрузка полностью согласована с генератором.*

С учетом (49.34) максимальная мощность, выделяемая на нагрузке генератора, равна

$$P_{н\,макс} = \frac{|U_r|^2}{2} \frac{1}{4R} = \frac{\langle U_0^2 \rangle}{4R}, \tag{49.35}$$

где $\langle U_0^2 \rangle$ – средний квадрат амплитуды напряжения генератора.

Вопросы согласования нагрузки с генератором имеют большое значение во всех случаях, когда требуется передать на нагрузку максимальную мощность. Например, входное сопротивление приемника желательно согласовать с сопротивлением антенны (генератор) и линии передачи (см. § 54).

Токи Фуко. *Индукционные токи, возникающие в массивных проводниках в переменном магнитном поле, называются токами Фуко.* Иногда они играют полезную роль, а иногда вредную.

Токи Фуко играют полезную роль в роторе асинхронного двигателя, приводимого в движение вращающимся магнитным полем, поскольку само осуществление принципа работы асинхронного двигателя требует возникновения токов Фуко. Являясь токами проводимости, токи Фуко рассеивают часть энергии на выделение джоулевой теплоты. Эта потеря энергии в роторе асинхронного двигателя является бесполезной, но с ней приходится мириться, избегая лишь чрезмерного перегревания ротора. Но одновременно с этим в сердечниках электромагнитов асинхронного двигателя, выполненных обычно из ферромагнетиков, являющихся проводниками, также возникают токи Фуко, которые не имеют никакого значения для принципа работы электромагнитов, но нагревают эти сердечники, ухудшая тем самым их характеристики. С ними необходимо бороться, как с вредным фактором. Борьба заключается в том, что сердечники изготовляют из тонких пластин, отделенных одна от другой слоями изолятора, причем их устанавливают так, чтобы токи Фуко были направлены поперек пластин. Благодаря этому при достаточно малой толщине пластин токи Фуко не могут развиваться и имеют незначительную объемную плотность.

Джоулева теплота, выделяемая токами Фуко, полезно используется в процессах разогрева или даже плавки металлов, когда это оказывается более выгодным или целесообразным по сравнению с другими методами разогрева. Если производить разогрев металла токами очень высокой частоты, то в результате скин-эффекта (см. § 53) раскаляется только поверхностный слой проводника.

§ 50. Резонансы в цепи переменного тока

Рассматриваются резонансы в цепи переменного тока и свойства колебательного контура.

Резонанс напряжений. Рассмотрим цепь, в которую последовательно с генератором включены R, L, C (см. рис. 192), и определим зависимость амплитудного значения тока силы I_0 и разность фаз φ между током и внешним напряжением от частоты. На основании (48.18) и (48.20) имеем:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + [L\omega - 1/(\omega C)]^2}}, \tag{50.1}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \tag{50.2}$$

Графики зависимостей $I_0(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ изображены на рис. 203 и 204. Сила тока I_0 достигает максимума при частоте

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \tag{50.3}$$

которая называется **резонансной частотой контура.** При этом амплитуда силы тока равна U_0/R, а разность фаз $\varphi = 0$, т. е. получается, что в цепи как бы нет ни емкости, ни индуктивности. Иначе говоря, при этой частоте напряжения на емкости и индуктивности полностью взаимно компенсируются, будучи равными по значению (по фазе они противоположны всегда). Поэтому этот резонанс называют также **резонансом напряжений.** Векторная схема резонанса напряжений изображена на рис. 205. При резонансе ($\omega = \omega_0$) контур ведет себя как чисто активное сопротивление.

Если через контур пропускается ток постоянной частоты ω, то при изменении, например, индуктивности L_0 также имеет резонансный характер изменения. Максимальное значение I_0 достигается при $L = 1/(\omega^2 C)$ [см. (50.1) и (50.3)]. Если в цепь включена лампа накаливания, то ее яркость при приближении к резонансу увеличивается, достигает в резонансе максимума, а затем уменьшается.

Резонанс токов. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 206. Очевидно, что сила тока, текущего в цепи, равна

$$I = I_L + I_C = U\left(\frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C\right) = U\left(\frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C\right) = \tag{50.4}$$

$$= U\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - i\frac{U}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[\omega L - \omega C\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)\right]. \tag{50.5}$$

Следовательно, при условии

$$\omega L - \omega C\left(R^2 + \omega^2 L^2\right) = 0$$

цепь ведет себя как чисто омическое сопротивление. Сдвиг фаз между

внешним напряжением и силой тока равен нулю. Разделив все члены уравнения (50.5) на $\omega^2 LC$, запишем его в виде

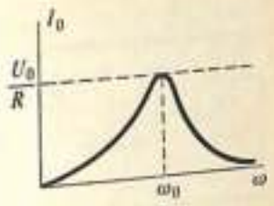
$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = \frac{R^2}{\omega L}. \tag{50.6}$$

В большинстве практически важных случаев соблюдается условие $\omega L \gg R$ и поэтому решение уравнений (50.6) и (50.5) может быть представлено в виде

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \tag{50.7}$$

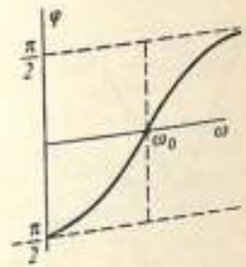
При этой резонансной частоте импеданс между точками A и D достигает максимума, а сила тока I_0 в цепи – минимума. Однако силы тока I_L и I_C при этом не являются минимальными. Векторная диаграмма сил токов в контуре между точками A и D приведена на рис. 207. При приближении к условиям резонанса диаграмма токов принимает вид, показанный на рис. 208. Таким образом, внутри контура, ограниченного точками A и D, циркулируют очень большие токи по сравнению с токами, которые подводятся к этому контуру. Заряд внутри контура, ограниченного точками A, D, протекает от емкости к индуктивности и наоборот, т. е. в этом контуре происходит колебание силы тока. В резонансе друг с другом, как это видно на рис. 208, находятся силы токов в емкости и индуктивности. Они компенсируют друг друга. Поэтому сам резонанс называется **резонансом токов.**

Колебательный контур. В обоих рассмотренных случаях контур, изображенный на рис. 192, ведет себя как резонансная система, совершающая вынужденные колебания под действием внешней силы. Колебания тока в LC-контуре впервые рассмотрел Томсон в 1853 г. Тогда же он получил формулу (50.7), названную позже **формулой Томсона** ($T = 2\pi\sqrt{LC}$). Для анализа колебаний силы тока в контуре можно непосредственно использовать результаты теории вынужденных механических колебаний точки. Для этого необходимо выяснить, какие величины в электрических колебаниях соот-



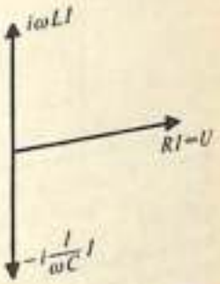
203

Зависимость силы тока от частоты при резонансе напряжений



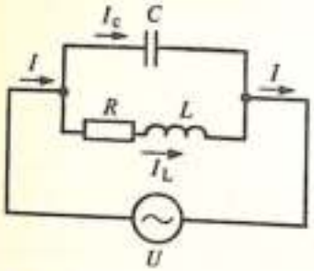
204

Зависимость сдвига фаз φ от частоты при резонансе напряжений



205

Векторная диаграмма напряжений при резонансе напряжений



206

Цепь, в которой осуществляется резонанс токов

ветствуют силе, отклонению и скорости для механических колебаний. Запишем уравнение для вынужденных механических колебаний:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F/m, \qquad (50.8)$$

где x – отклонение точки от положения равновесия; m – ее масса; F – внешняя сила; $\gamma = b/(2m)$ – декремент затухания; b – коэффициент трения. Точками обозначены производные по времени.

Теперь преобразуем уравнения (48.12) и (48.13) для электрического контура. Принимая во внимание, что $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, запишем уравнение (48.12) в виде

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = U. \qquad (50.9)$$

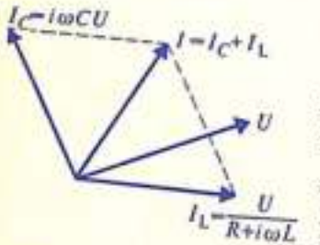
Разделив обе части (50.9) на L, получаем уравнение

$$\ddot{Q} + (R/L)\dot{Q} + [1/(LC)]\,Q = U/L, \qquad (50.10)$$

аналогичное (50.8). Роль отклонения в электрическом контуре играет заряд Q на пластинах конденсатора, роль массы – индуктивность L, роль силы – электродвижущая сила U, роль коэффициента трения – омическое сопротивление R. Частота собственных колебаний контура равна $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ [см. (50.3)]. Сила тока $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ играет роль скорости. Поскольку для механических колебаний точки обычно рассматривают ее отклонение от положения равновесия, амплитуду колебаний и т. д., при анализе электрических колебаний удобно пользоваться уравнением (50.10), а не (48.13). Кроме того, вместо заряда Q на пластинах конденсатора целесообразно пользоваться напряжением на конденсаторе ($U_C = Q/C$). Относительно этой величины уравнение (50.10) принимает вид

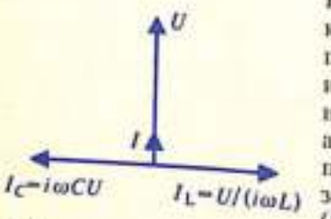
$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 U, \qquad (50.11)$$

где $\gamma = R/(2L)$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Все свойства этих колебаний получаются простым сопоставлением величин γ, ω_0, U, U_C электрического колебательного контура соответствующим величинам, характеризующим механические колебания точки. Частота собственных ко-



207

Векторная диаграмма токов в цепи с параллельными емкостью и индуктивностью



208

Векторная диаграмма токов при резонансе токов

лебаний контура при отсутствии сопротивления ($R = 0$) равна $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$. Колебания незатухающие. При наличии трения колебания становятся затухающими, причем время затухания равно

$$\tau_{\text{зат}} = 1/\gamma = 2L/R. \qquad (50.12)$$

В качестве частоты затухающих колебаний в общепринятом условном смысле принимается частота

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \qquad (50.13)$$

Логарифмический декремент затухания равен

$$\Theta = \gamma T, \qquad (50.14)$$

где $T = 2\pi/\omega_0$ – период собственных колебаний.

Амплитудная и фазовая резонансные кривые аналогичны соответствующим кривым для механических колебаний.

Добротность определяется равенством

$$Q = \left|\frac{U_{C\,\text{рез}}}{U_{C\,\text{стат}}}\right| = \frac{U_{C\,0\,\text{рез}}}{U_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad (50.15)$$

где $U_{0C\,\text{рез}}$ – амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе; U_0 – амплитуда приложенной к контуру сторонней э. д. с. Таким образом, в достаточно добротном контуре амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе может быть во много раз больше амплитуды приложенного к контуру напряжения.

Ширина резонансной кривой равна

$$2\Delta\omega = \omega_0/Q = R/L. \qquad (50.16)$$

Напомним, что *ширина $2\Delta\omega$ резонансной кривой определяется не относительно амплитуды колебаний, а относительно квадрата амплитуды.*

§ 51. Цепи с учетом взаимной индукции

Излагаются основные методы расчета цепей.
Обсуждается работа трансформатора.

Роль взаимной индукции. Каждый из контуров, по которому течет переменный ток, является источником переменного магнитного поля. По закону электромагнитной индукции Фарадея оно индуцирует в других контурах, находящихся в этом поле, электродвижущие силы, которые изменяют силу тока в этих контурах. Таким образом, *контуры оказываются связанными между собой посредством электромагнитной индукции.*

Уравнения для системы проводников с учетом самоиндукции и взаимоиндукции. Полный магнитный поток, пронизывающий k-й контур, определяется выражением

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{N} L_{ki} I_i, \qquad (51.1)$$

которое является непосредственным обобщением формул (47.6) и (47.10) на случай многих контуров с током на основании принципа суперпозиции. Здесь L_{kk} – индуктивность k-го контура, а L_{ki} при $k \neq i$ – взаимная индуктивность k-го и i-го контуров. Общее число проводников равно N.

Для упрощения предположим, что емкости в цепях отсутствуют. Тогда с учетом электромагнитной индукции для силы тока в k-м контуре получаем уравнение

$$I_k R_k = U_k - \mathrm{d}\Phi_k/\mathrm{d}t, \tag{51.2}$$

где U_k – сторонняя электродвижущая сила в k-м контуре. Подставляя (51.1) в (51.2), получаем для определения силы тока во всех контурах следующую систему уравнений:

$$I_k R_k = U_k - \sum_{i=1}^{N} L_{ki} \frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} \quad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{51.3}$$

Эта линейная система из N уравнений для N неизвестных сил токов I_k является полной и, в принципе, ее всегда нетрудно решить. Единственной нетривиальной задачей является определение взаимных индуктивностей и индуктивностей контуров. В уравнениях (51.3) эти величины представляются известными.

Случай двух контуров. Рассмотрим в качестве примера систему уравнений для двух проводников:

$$I_1 R_1 = U_1 - \left(L_{11} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + L_{12} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \right), \tag{51.4}$$

$$I_2 R_2 = U_2 - \left(L_{21} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + L_{22} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \right), \tag{51.5}$$

где L_{11} и L_{22} – индуктивности первого и второго контуров; L_{12} и L_{21} – взаимные индуктивности контуров.

Дальнейшее решение будет достаточно простым, если рассмотреть ситуацию, которая с достаточной точностью осуществляется в трансформаторе переменного тока (рис. 209).

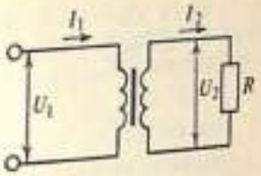
Трансформатор. В трансформаторе имеется два проводника, намотанных в виде катушек на замкнутый сердечник из материала с большой магнитной проницаемостью, благодаря чему потоки магнитной индукции, создаваемые текущими по проводам токами, сосредоточены практически полностью внутри сердечника. Проводники называют **обмотками трансформатора.** Обмотка, к которой присоединяется источник сторонних э. д. с., является **первичной**, а обмотка, к которой присоединяется нагрузка, – **вторичной.**

Величины, относящиеся к первичной и вторичной обмоткам, обозначим соответственно с индексами 1 и 2. Запишем уравнения (51.2) в виде:

$$I_1 R_1 = U_1 - \mathrm{d}\Phi_1/\mathrm{d}t,$$

$$I_2 R_2 = -\mathrm{d}\Phi_2/\mathrm{d}t, \tag{51.7}$$

где R_1 – омическое сопротивление первичной обмотки; R_2 – сумма омических сопротивлений вторичной обмотки и нагрузки, которая для простоты предполагается чисто омической; Φ_1 и Φ_2 – полные потоки магнитной индукции, охватываемые соответственно первичной и вторичной обмотками; U_1 – сторонняя э. д. с., приложенная к первичной обмотке.



209

Трансформатор

Сопротивление R_1 первичной обмотки достаточно мало и падение напряжения на ней за счет омического сопротивления может быть принято значительно меньшим U_1, т. е. $I_{10} R_1 \ll U_{10}$, где I_{10} и U_{10} – амплитуды силы тока и напряжения в первичной обмотке. Поэтому в соотношении (51.6) можно пренебречь произведением $I_1 R_1$ по сравнению с U_1 и записать его в виде

$$U_1 = \mathrm{d}\Phi_1/\mathrm{d}t. \tag{51.8}$$

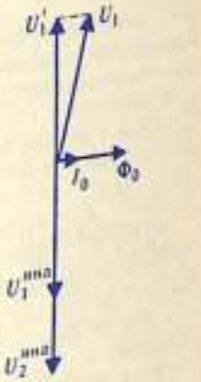
В обычных условиях омическое сопротивление нагрузки много больше омического сопротивления вторичной обмотки. Поэтому R_2 в (51.7) равно с большой точностью сопротивлению нагрузки. Следовательно, $I_2 R_2$ в левой части (51.7) равно напряжению U_2 на клеммах вторичной обмотки трансформатора. Поэтому (51.7) может быть записано следующим образом:

$$U_2 = -\mathrm{d}\Phi_2/\mathrm{d}t. \tag{51.9}$$

Поскольку сторонняя э. д. с. изменяется по гармоническому закону $[U_1 \sim \exp(i\omega t)]$, все величины изменяются по такому же закону. Следовательно, $\mathrm{d}\Phi_1/\mathrm{d}t = i\omega\Phi_1$, $\mathrm{d}\Phi_2/\mathrm{d}t = i\omega\Phi_2$. Так как весь поток магнитной индукции заключен внутри сердечника, то каждый из витков первичной и вторичной обмоток охватывает один и тот же магнитный поток Φ_0. Следовательно, потоки, охватываемые первичной и вторичной обмотками, равны

$$\Phi_1 = \Phi_0 N_1, \tag{51.10}$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 N_2, \tag{51.11}$$



210

Векторная диаграмма трансформатора при холостом ходе

○ Каковы физические условия реализации резонанса токов и резонанса напряжений? Какое соответствие существует между параметрами, характеризующими колебательный контур с сопротивлением, емкостью и индуктивностью, и параметрами механической колебательной системы с трением? В чем физический смысл условий согласования нагрузки с генератором? Перечислите случаи, когда токи Фуко играют полезную роль и когда они нежелательны?

где N_1 и N_2 – число витков соответственно первичной и вторичной обмоток. С учетом (51.10) и (51.11) уравнения (51.8) и (51.9) принимают вид:

$$U_1 = i\omega N_1 \Phi_0, \tag{51.12}$$

$$U_2 = -i\omega N_2 \Phi_0. \tag{51.13}$$

Разделив почленно левые и правые части (51.12) и (51.13) и перейдя к модулям, получим

$$|U_1|/|U_2| = N_1/N_2. \tag{51.14}$$

Учитывая, что $|U_1| = U_{10}$, $|U_2| = U_{20}$ – амплитуды напряжения на первичной и вторичной обмотках, запишем (51.14) в виде

$$U_{10}/N_1 = U_{20}/N_2, \tag{51.15}$$

т. е. амплитуда напряжения во вторичной обмотке во столько раз больше (меньше) амплитуды напряжения в первичной, во сколько раз число витков вторичной обмотки больше (меньше) числа витков первичной обмотки.

Если пренебречь потерями энергии в трансформаторе, то закон сохранения энергии имеет вид

$$I_1 U_1 = I_2 U_2. \tag{51.16}$$

Переходя в (51.16) к модулям, получаем на основании (51.15) соотношение

$$I_{10} N_1 = I_{20} N_2, \tag{51.17}$$

где I_{10} и I_{20} – амплитуды силы токов в первичной и вторичной обмотках.

Формулы (51.15) и (51.17) описывают закон преобразования амплитуд напряжений и сил токов в трансформаторе. Они строго справедливы для идеального трансформатора, в котором нет рассеяния магнитного потока и потерь энергии. Для реального трансформатора они соблюдаются с большой точностью.

Векторная диаграмма холостого хода трансформатора. Холостым ходом трансформатора является его работа при разомкнутой вторичной обмотке. Будем пренебрегать запаздыванием при размагничивании по сравнению с фазой силы тока в первичной обмотке из-за некоторой инерции перемагничивания материала сердечника. Это запаздывание пренебрежимо мало. Поэтому поток можно считать совпадающим по фазе с током в первичной обмотке, который называется током холостого хода. Ток во вторичной обмотке равен нулю. Из формулы

$$U^{инд} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t \tag{51.18}$$

следует, что $U^{инд}$ отстает на $\pi/2$ от потока Φ. Поэтому векторная диаграмма ненагруженного трансформатора имеет вид, изображенный на рис. 210: U_1 – внешнее напряжение, приложенное к первичной обмотке; $U_1^{инд}$ – напряжение в первичной обмотке в результате самоиндукции; $U_2^{инд}$ – напряжение на вторичной обмотке в результате взаим-

ной индукции; I_0 – сила тока холостого хода; Φ_0 – поток холостого хода, охватываемый каждым из витков обмоток трансформатора. Как и раньше, потерями и рассеянием потока в трансформаторе пренебрегаем.

По закону электромагнитной индукции

$$U_1^{инд} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t} N_1, \tag{51.19}$$

$$U_2^{инд} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t} N_2, \tag{51.20}$$

поскольку полные потоки индукции, пронизывающие первичную и вторичную обмотки, равны:

$$\Phi_1 = \Phi_0 N_1, \ \Phi_2 = \Phi_0 N_2. \tag{51.21}$$

Необходимо учесть, что сила тока холостого хода очень мала, как и омическое сопротивление первичной обмотки по сравнению с ее индуктивным сопротивлением. Поэтому (см. рис. 210)

$$U_1 \approx U_1' \approx -U_1^{инд}, \tag{51.22}$$

т. е.

$$U_1^{инд} \approx -U_1. \tag{51.23}$$

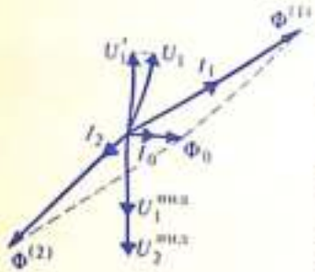
Разделив почленно левые и правые части равенства (51.20) на соответствующие части равенства (51.19) и принимая во внимание (51.23), находим

$$|U_2^{инд}|/|U_1| \approx N_2/N_1. \tag{51.24}$$

Векторная диаграмма нагруженного трансформатора. В нагруженном трансформаторе поток Φ_0, охватываемый каждым из витков обмоток, создается токами как первичной, так и вторичной обмоток. Э. д. с. самоиндукции в первичной обмотке должна все время компенсировать внешнее напряжение, т. е. сумма потоков $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$, создаваемых токами первичной и вторичной обмоток, должна быть примерно равна потоку Φ_0 холостого хода, т. е. $\Phi_0 = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$. А это приводит к тому, что напряжение во вторичной обмотке будет удовлетворять условию (51.24) и для нагруженного трансформатора.

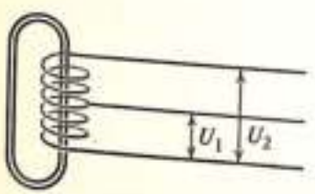
Следует обратить внимание, что потоки $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ не являются полными потоками Φ_1 и Φ_2, охватываемыми первичной и вторичной обмотками. Потоки $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ являются потоками, охватываемыми одним витком каждой из обмоток, созданными в сердечнике соответственно токами I_1 и I_2. Полные потоки, охватываемые первичной и вторичной обмотками, равны $\Phi_1 = N_1(\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)})$, $\Phi_2 = N_2(\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)})$.

Векторная диаграмма нагруженного трансформатора изображена на рис. 211. Силы токов I_1 и I_2 значительно больше силы тока I_0 холостого хода, поэтому и создаваемые ими потоки $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ значительно больше потока Φ_0. Так как $\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} = \Phi_0$ (комплексные числа), то



211

Векторная диаграмма нагруженного трансформатора



212

Автотрансформатор

○ Почему сердечник автотрансформатора должен быть замкнутым?

Каковы принципиальные преимущества и недостатки синхронных и асинхронных двигателей?

Какова роль проскальзывания в асинхронном двигателе? От чего она зависит?

Как должен быть включен трансформатор для согласования генератора с нагрузкой, если сопротивление нагрузки слишком мало?

Чем реальный трансформатор отличается от идеального?

$$\Phi^{(1)} \approx -\Phi^{(2)}, \quad |\Phi^{(1)}| \approx |\Phi^{(2)}|. \tag{51.25}$$

Примем во внимание равенства

$$|\Phi^{(1)}| = \text{const}\,|I_1|\,N_1, \quad |\Phi^{(2)}| = \text{const}\,|I_2|\,N_2, \tag{51.26}$$

которые будут очевидными, если учесть, что $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ – потоки, создаваемые каждой из обмоток. Тогда (51.25) принимает вид равенства

$$|I_1|\,N_1 = |I_2|\,N_2, \tag{51.27}$$

которое удобнее записать в форме

$$\frac{|I_2|}{|I_1|} = \frac{N_1}{N_2}, \tag{51.28}$$

что, как и должно быть, совпадает с (51.17).

Первые трансформаторы были созданы П. Н. Яблочковым (1847–1894) в 1877 г. и Ф. И. Усагиным (1855–1919) в 1882 г.

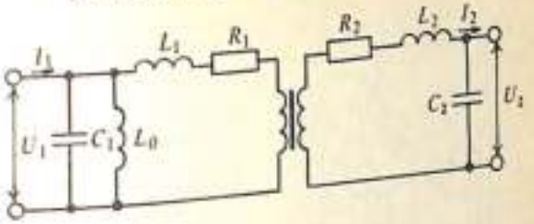
Автотрансформатор. Очень экономичной конструкцией трансформатора, помогающей сберечь обмоточные провода, является **автотрансформатор,** изображенный на рис. 212. Физические принципы его работы и формулы аналогичны рассмотренным выше. Эксплуатационное отличие состоит в том, что первичная и вторичная обмотки автотрансформатора находятся между собой в электрическом контакте, а обмотки трансформатора изолированы. Поэтому, например, статические электрические заряды могут перейти из первичной обмотки автотрансформатора во вторичную, а в трансформаторе это исключается. Эти особенности трансформаторов и автотрансформаторов в ряде случаев приходится принимать во внимание.

Трансформатор как элемент цепи. Сила тока во вторичной цепи равна (рис. 209)

$$I_2 = U_2/R. \tag{51.29}$$

Учитывая, что $I_1N_1 = I_2N_2$, $U_1/N_1 = U_2/N_2$, из (51.29) получаем

$$\frac{N_1}{N_2} I_1 = \frac{1}{R}\frac{N_2}{N_1} U_1, \tag{51.30}$$



213

Схема реального трансформатора

Следовательно, сопротивление R во вторичной цепи трансформатора представляется со стороны входа эффективным сопротивлением

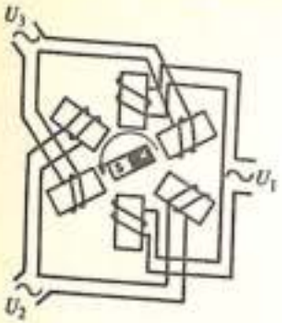
$$R_{эф} = \frac{U_1}{I_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R. \tag{51.31}$$

Это означает, что *трансформатор можно использовать для согласования источника мощности с нагрузкой для получения максимальной отдачи мощности* [см. (49.34)]. Например, с его помощью можно согласовать большое внутреннее сопротивление усилителя с малым сопротивлением громкоговорителя. Комплексные импедансы преобразуются также аналогично (51.31).

Реальный трансформатор. Из (51.31) видно, что идеальный трансформатор со стороны первичной обмотки представляется в виде чистого сопротивления. Индуктивность первичной обмотки никак не проявляется, что обусловлено взаимным уничтожением магнитных потоков, создаваемых токами в первичной и вторичной обмотках, т. е. трансформатор в цепи выступает как преобразователь эффективного сопротивления, не обладающий собственной индуктивностью.

Приведенные соотношения справедливы для идеального трансформатора. **Реальный трансформатор** обладает как индуктивностью, так и емкостью. Эквивалентная схема его представлена на рис. 213. Индуктивности L_1 и L_2 первичной и вторичной обмоток обусловлены рассеянием магнитного потока, в результате которого нет полной компенсации магнитных потоков, создаваемых токами первичной и вторичной обмоток. Сопротивления R_1 и R_2 являются омическими сопротивлениями проводников обмоток. Индуктивность L_0 в первичной обмотке обусловлена магнитным потоком, соответствующим току холостого хода в первичной обмотке. Емкости C_1 и C_2 в обмотках возникают за счет емкостной связи между витками проводников этих обмоток.

Из эквивалентной схемы трансформатора можно заключить, что на очень малых частотах трансформатор перестает работать из-за того, что индуктивное сопротивление ωL_0 становится очень малым и бóльшая часть тока идет через индуктивность L_0. На достаточно больших частотах трансформатор также не работает, поскольку ток в основном идет через емкость C_1, минуя витки трансформатора. В технической характеристике трансформатора всегда указываются пределы его нормальной эксплуатации.



214

Генератор трехфазного тока



215

Схематическое изображение обмоток генератора трехфазного тока

○ Каковы основные преимущества использования трехфазного тока по сравнению с однофазным? Начертите схемы соединения нагрузок и генераторов звездой и треугольником и перечислите соотношения между фазными и линейными напряжениями и токами.

§ 52. Трехфазный ток

Описываются основные физические явления в цепях трехфазного тока.

Определение. Рассмотренный до сих пор ток характеризовался амплитудой и фазой и назывался **однофазным.** Совокупность трех одинаковых однофазных токов, сдвинутых друг относительно друга по фазе на одну третью часть периода, называется **трехфазным током.**

Получение трехфазного тока. Рассмотрим генератор переменного тока с тремя отдельными обмотками, в которых генерируется ток, расположенными под углом 120° друг относительно друга (рис. 214). Вращающееся магнитное поле, возникшее вследствие вращения постоянного магнита, создает в обмотках генератора одинаковые, но сдвинутые по фазе напряжения:

$$U_1 = U_0 \sin \omega t, \quad U_2 = U_0 \sin (\omega t + 2\pi/3), \quad U_3 = U_0 \sin (\omega t - 2\pi/3). \tag{52.1}$$

Обмотки генератора удобно изобразить в виде схемы рис. 215.

Соединение обмоток генератора звездой. Если три обмотки генератора использовать без связи друг с другом, то генератор трехфазного тока становится просто совокупностью трех отдельных генераторов однофазного тока и никаких новых элементов не содержит. В частности, для передачи электроэнергии к потребителю требуется три пары проводов.

Если обмотки соединить между собой определенным способом, то у трехфазного тока обнаруживаются специфические свойства, очень полезные для технических применений. Существует два вида соединения обмоток генератора — **звездой и треугольником.**

Схема соединения звездой и векторная диаграмма напряжений на обмотках показаны на рис. 216, *а*, *б*. В этом случае имеется общая точка O одинакового потенциала. Напряжение на каждой из обмоток называется **фазным.** Проводник, соединенный с точкой общего потенциала, называется **нулевым проводом;** проводники, соединенные со свободными концами обмоток, называются **фазными проводами.** Таким образом, *фазные напряжения являются напряжениями между нулевым и фазными проводами.* Напряжение между фазными проводами называется **линейным.** Из векторной диаграммы видно, что амплитуды $U_{л}$ и $U_{ф}$ линейных и фазных напряжений находятся в следующем соотношении друг с другом:

$$U_{л} = 2U_{ф} \sin 60^\circ = U_{ф}\sqrt{3}. \tag{52.2}$$

В частности, если $U_{ф} = 127$ В, то $U_{л} = 220$ В. Ток $I_{ф}$, текущий через обмотки, называется **фазным током,** а ток $I_{л}$, текущий в линии, — током линии. При соединении звездой фазные токи равны токам в линии ($I_{ф} = I_{л}$). Если к каждой из обмоток присоединить одинаковые нагрузки R, то суммарная сила тока через нулевой провод равна нулю, поскольку

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{R}(U_1 + U_2 + U_3) = 0, \tag{52.3}$$

так как из векторной диаграммы видно, что $\sum_i U_i = 0$.

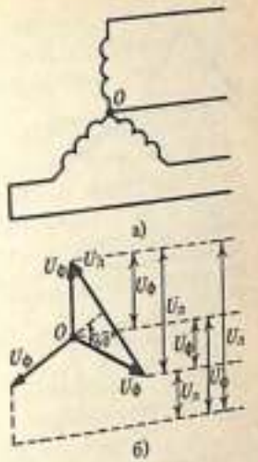
Соединение обмоток генератора звездой позволяет для передачи электроэнергии вместо шести проводов использовать только четыре, что является немаловажным преимуществом.

Соединение обмоток генератора треугольником. Схема такого соединения и векторная диаграмма изображены на рис. 217, *а*, *б*. В этом случае $U_{ф} = U_{л}$. Из векторной диаграммы токов (рис. 218) находим:

$$I_{л} = 2I_{ф} \cos 30^\circ = I_{ф}\sqrt{3}. \tag{52.4}$$

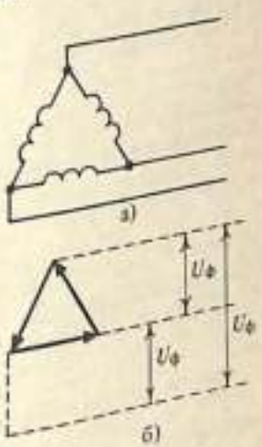
$$I_{1ф} + I_{2ф} + I_{3ф} = I_{л}. \tag{52.5}$$

При соединении обмоток генератора без нагрузки треугольником ток замыкания в обмотках отсутствует. Но это справедливо только для основной гармоники. Токи высших гармоник, всегда возбуждаемые в результате нелинейности колебаний, в обмот-



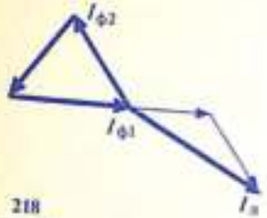
216

Соединение обмоток трехфазного генератора звездой (*а*); соответствующая векторная диаграмма напряжений (*б*)



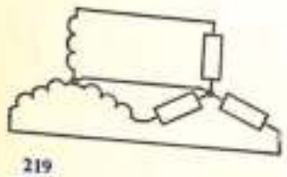
217

Соединение обмоток трехфазного генератора треугольником (*а*); соответствующая векторная диаграмма напряжений (*б*)



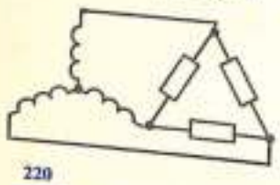
218

Векторная диаграмма токов при соединении обмоток треугольником



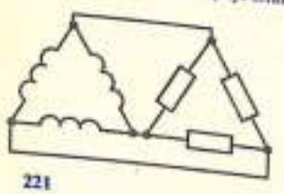
219

Соединение звезда – звезда



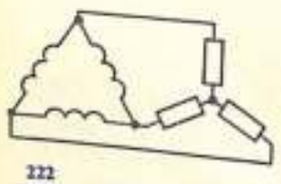
220

Соединение звезда – треугольник



221

Соединение треугольник – треугольник



222

Соединение треугольник – звезда

ках присутствуют. Поэтому обмотки мощных генераторов, как правило, не соединяют треугольником.

Соединение нагрузок. Нагрузки между собой также можно соединить звездой и треугольником и затем подключить к трехфазному генератору, обмотки которого между собой связаны по схеме звезды или треугольника. Таким образом, имеется четыре возможные комбинации соединения генератора и нагрузок (рис. 219–222).

Каждое из таких соединений имеет свои особенности.

При соединении звезда–звезда (рис. 219) на всех нагрузках имеется разное напряжение. При приблизительно равных нагрузках в соответствии с (52.3) сила тока по нулевому проводу очень мала. Тем не менее нулевой провод нельзя убрать, поскольку без него на каждую из пар нагрузок действует линейное напряжение $U_{л1} = U_{ф}\sqrt{3}$, которое распределяется между нагрузками в соответствии с их сопротивлениями. Однако такая зависимость напряжений от нагрузок недопустима, поэтому необходимо всегда сохранять нулевой провод и не вводить в него предохранители.

При соединении звезда – треугольник (рис. 220) на каждую нагрузку действует линейное напряжение $U_{л} = U_{ф}\sqrt{3}$ независимо от сопротивления нагрузки.

При соединении треугольник – треугольник (рис. 221) на всех нагрузках действует фазное напряжение независимо от сопротивления нагрузок.

При соединении треугольник – звезда (рис. 222) напряжение на каждой нагрузке равно $U_{ф}/\sqrt{3}$.

Получение вращающегося магнитного поля. Если к обмоткам генератора (см. рис. 214) подвести трехфазный ток, то в пространстве между ними возникает вращающееся магнитное поле, соответствующее полю вращающегося магнита, который генерировал ток. Если вместо магнита установить короткозамкнутый ротор, то он будет приведен во вращение, т. е. генератор будет работать как асинхронный двигатель. Таким образом, *при использовании трехфазного тока конструкция электродвигателей значительно упрощается*, что является также большим преимуществом.

Первым получил вращающееся магнитное поле с помощью трехфазного тока Доливо-Добровольский (1862–1919), им же в 1889 г. был построен первый асинхронный двигатель и затем осуществлена передача электрической энергии с помощью трехфазного тока на большое расстояние. Трехфазный ток обеспечил широкое и эффективное применение тока в технике.

§ 53. Скин-эффект

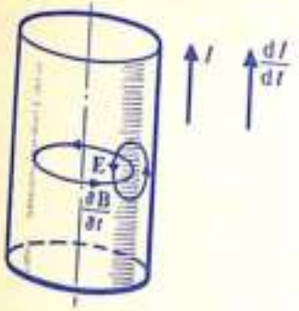
Обсуждаются физическая картина возникновения и элементарная теория скин-эффекта и его следствий. Дается понятие об аномальном скин-эффекте.

Сущность явления. Постоянный ток распределяется равномерно по поперечному сечению прямолинейного проводника. У переменного тока *благодаря индукционному взаимодействию различных элементов тока между собой происходит перераспределение плотности тока по поперечному сечению проводника, в результате чего ток сосредоточивается преимущественно в поверхностном слое проводника.* Концентрация переменного тока вблизи поверхности проводника называется **скин-эффектом.**

Физическая картина возникновения. Рассмотрим цилиндрический проводник, по которому течет ток (рис. 223). Вокруг проводника с током имеется магнитное поле, силовые линии которого являются концентрическими окружностями с центром на оси проводника. В результате увеличения силы тока возрастает индукция магнитного поля, а форма силовых линий при этом остается прежней. Поэтому в каждой точке внутри проводника производная $\partial\mathbf{B}/\partial t$ направлена по касательной к линии индукции магнитного поля и, следовательно, линии $\partial\mathbf{B}/\partial t$ также являются окружностями, совпадающими с линиями индукции магнитного поля. Изменяющееся магнитное поле по закону электромагнитной индукции

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \qquad (53.1)$$

создает электрическое индукционное поле, силовые линии которого представляют замкнутые кривые вокруг линии индукции магнитного поля (рис. 223). *Вектор напряженности индукционного поля в более близких к оси проводника областях направлен противоположно вектору напряженности электрического поля, создающего ток, а в более дальних — совпадает с ним. В результате плотность тока уменьшается в приосевых областях и увеличивается вблизи поверхности проводника, т. е. возникает скин-эффект.*



223

Физическая картина возникновения скин-эффекта

Элементарная теория. Прежде всего необходимо получить уравнение, описывающее скин-эффект. Исходим из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \tag{53.2}$$

и уравнения (53.1). Подставляя в (53.2) выражение для $\mathbf{j}$ по закону Ома

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \tag{53.3}$$

и дифференцируя обе части полученного уравнения по времени, находим

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{53.4}$$

или с учетом (53.1)

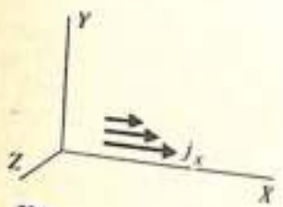
$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mu\gamma \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{53.5}$$

Поскольку

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \tag{53.6}$$

и $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, окончательно имеем

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{53.7}$$



224

Скин-эффект в бесконечном проводнике с плоской границей

Для упрощения решения этого уравнения предположим, что ток течет по однородному бесконечному проводнику, занимающему полупространство $y > 0$ вдоль оси X (рис. 224). Поверхностью проводника является плоскость $Y = 0$. Таким образом,

$$j_x = j_x(y, t),\ j_y = j_z = 0, \tag{53.8}$$

$$E_x = E_x(y, t),\ E_y = E_z = 0. \tag{53.9}$$

Тогда [см. (53.7)]

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \gamma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t}. \tag{53.10}$$

Поскольку все величины в (53.10) гармонически зависят от t, можно положить

$$E_x(y, t) = E_0(y)\, e^{i\omega t}. \tag{53.11}$$

После подстановки (53.11) в (53.10) и сокращения обеих частей уравнения на $\exp(i\omega t)$ получаем уравнение для $E_0(y)$:

$$\frac{d^2 E_0}{dy^2} = i\gamma\mu\omega E_0. \tag{53.12}$$

● **У переменного тока благодаря индукционному взаимодействию различных элементов тока между собой происходит перераспределение плотности тока по поперечному сечению проводника, в результате чего ток сосредоточивается преимущественно в поверхностном слое проводника.**

○ **В чем физическая причина зависимости сопротивления и индуктивности проводника от частоты переменного тока? При каких условиях возникает скин-эффект?**

Общее решение уравнения (53.12) таково:

$$E_0 = A_1 e^{-ky} + A_2 e^{ky}. \tag{53.13}$$

Учитывая, что

$$k = \sqrt{i\gamma\mu\omega} = \alpha(1 + i),\ \alpha = \sqrt{\gamma\mu\omega/2}, \tag{53.14}$$

находим

$$E_0(y) = A_1 e^{-\alpha y} e^{-i\alpha y} + A_2 e^{\alpha y} e^{i\alpha y}. \tag{53.15}$$

При удалении от поверхности проводника ($y \to \infty$) второе слагаемое в (53.15) неограниченно возрастает, что является физически недопустимой ситуацией. Следовательно, в (53.15) $A_2 = 0$ и в качестве физически приемлемого решения остается только первое слагаемое. Тогда решение задачи с учетом (53.11) имеет вид

$$E_x(x, t) = A_1 e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha y)}. \tag{53.16}$$

Взяв действительную часть этого выражения и перейдя с помощью соотношения $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ к плотности тока, получим

$$j_x(y, t) = \gamma A_1 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y). \tag{53.17}$$

Принимая во внимание, что $j_x(0, 0) = j_0$ – амплитуда плотности тока на поверхности проводника, приходим к следующему распределению объемной плотности тока в проводнике:

$$j_x(y, t) = j_0 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y). \tag{53.18}$$

Толщина скин-слоя. Объемная плотность тока максимальна у поверхности проводника. При удалении от поверхности она убывает и на расстоянии $\Delta = 1/\alpha$ становится меньше в e раз. Поэтому практически весь ток сосредоточен в слое Δ, называемом **толщиной скин-слоя.** Она на основании (53.14) равна

$$\Delta = [2/(\gamma\mu\omega)]^{1/2}. \tag{53.19}$$

Очевидно, что при достаточно большой частоте ω толщина скин-слоя может быть очень малой. Например, для хорошего проводника типа меди $\gamma = 10^7$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ и при $\omega = 10^4$ с$^{-1}$ толщина $\Delta = 4$ мм. Если частота ω увеличивается в 100 раз до $\omega = 10^6$ с$^{-1}$, то толщина скин-слоя уменьшается в 10 раз ($\Delta \approx 0{,}4$ мм). Это означает, что при достаточно большой частоте в не очень тонких проводниках весь ток течет лишь в небольшой части поперечного сечения проводника, вблизи его поверхности. Поэтому ничего не изменится, если убрать проводящий материал из цилиндрической области внутри проводника и оставить лишь его цилиндрическую оболочку толщиной скин-слоя. Если проводник достаточно толстый, а частота тока не очень велика, то ток течет по всему поперечному сечению, лишь немного ослабевая к его оси. Например, при техническом токе частотой 50 Гц скин-эффект в обычных проводниках выражен очень слабо.

Зависимость омического сопротивления проводника от частоты. Так как эффективная площадь поперечного сечения, по которому течет ток, с увеличением частоты уменьшается, то *сопротивление проводника с увеличением частоты увеличивается.*

Зависимость индуктивности проводника от частоты. Энергия магнитного поля, по которому течет ток, равна

$$W_m = {}^1/_2 LI^2. \qquad (53.20)$$

Если ток течет по полому цилиндру, то поле вне цилиндра такое же, как и у такого же тока, текущего по сплошному цилиндру, а поля в полости цилиндра нет. Поэтому энергия поля тока, текущего по полому цилиндру, меньше энергии поля такого же тока, текущего по сплошному цилиндру. Это означает, что за счет скин-эффекта энергия магнитного поля W_m уменьшается. Отсюда на основании (53.20) следует, что *с увеличением частоты индуктивность проводника уменьшается.*

Закалка металлов токами высокой частоты. Благодаря скин-эффекту на высоких частотах джоулева теплота выделяется преимущественно в поверхностном слое. Это позволяет раскалить проводник в тонком поверхностном слое без существенного изменения температуры внутренних областей. Это явление используется в важном с технологической точки зрения методе закалки металлов в промышленности.

Аномальный скин-эффект. Изложенный механизм возникновения скин-эффекта предполагает, что при своем движении электрон непрерывно теряет энергию на преодоление омического сопротивления проводника, в результате чего происходит выделение джоулевой теплоты. Ясно, что такая идеализация возможна лишь в том случае, когда движение электронов происходит в областях, линейные размеры которых много больше средней длины свободного пробега электрона между столкновениями с атомами вещества. Поэтому *изложенная теория справедлива лишь при условии, что толщина скин-слоя много больше средней длины свободного движения электронов.* Такое соотношение между ними соблюдается в весьма широких пределах. Например, даже при частоте 10 ГГц и температуре 300 К толщина скин-слоя в меди равна примерно 1 мкм, а длина свободного пробега составляет около 0,01 мкм. Однако *при очень низкой температуре ситуация резко меняется, поскольку проводимость сильно повышается, а следовательно, увеличивается длина свободного пробега и уменьшается толщина скин-слоя.* Например, при температуре жидкого гелия (4,2 К) проводимость чистой меди увеличивается приблизительно в 10^4 раз. Это приводит к увеличению средней длины свободного пробега электронов в 10^4 раз и уменьшению толщины скин-слоя в $\sqrt{10^4} = 10^2$ раз. Таким образом, длина свободного пробега и толщина скин-слоя становятся соответственно равными 100 и 0,01 мкм. При этих условиях механизм, приводящий к образованию скин-эффекта, уже не действует. *Эффективная толщина слоя, в котором сосредоточен ток, изменяется. Такое явление называется аномальным скин-эффектом.*

В условиях аномального скин-эффекта в пределах нормального скин-слоя в течение всего свободного пробега могут двигаться только те электроны, скорости которых почти параллельны поверхности проводника. Все другие электроны в процессе свободного движения успевают покинуть «нормальный» скин-слой и значительно изменить направление движения. Из-за этого уменьшается проводимость материала и изменяется эффективная «аномальная» толщина Δ' скин-слоя. Для того чтобы ее приближенно оценить, можно принять, что доля электронов проводимости имеет порядок Δ'/l от того числа электронов, которые осуществляли бы проводимость в рамках «нормального» скин-эффекта (l – средняя длина свободного пробега электронов). Уменьшение этой доли приводит к уменьшению проводимости, учитываемой приближенно заменой в формулах $\gamma \to \beta\gamma\,(\Delta'/l)$, где β – числовой коэффициент порядка единицы. Производя эту замену в формуле (53.19), находим

$$\Delta' = [2l/(\beta\gamma\mu\omega)]^{1/3}. \qquad (53.21)$$

§ 54. Четырехполюсники

Излагаются терминология и основные положения теории четырехполюсников.

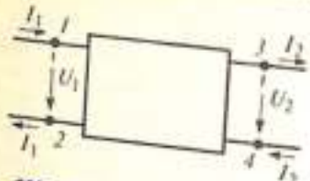
Определение. *Электрическая цепь с двумя входными и двумя выходными клеммами, через которую передается электрическая энергия, называется четырехполюсником.* Его символическое изображение показано на рис. 225. Примерами четырехполюсников являются преобразователи амплитуд колебаний, фильтры частот, трансформаторы и т. д. Требуется найти связь между напряжениями и силами токов на входе и выходе четырехполюсника. Если в четырехполюснике отсутствуют источники энергии, то он называется пассивным, если присутствуют – то активным. Предполагается, что сила тока, выходящего из клеммы 2, равна силе тока, входящего в клемму 1, и аналогично, сила тока, выходящего из клеммы 3, равна силе тока, входящего в клемму 4.

Уравнения. Пусть в четырехполюснике имеется n независимых контуров. Тогда для них можно составить n уравнений для контурных токов вида (48.27):

$$\sum_{i=1}^{n} Z_{1i} I_i = U_1, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_{2i} I_i = -U_2, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_{ki} I_i = 0 \quad (k = 3, 4, \ldots, n). \qquad (54.1)$$

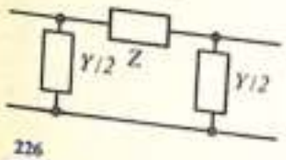
Знак минус во втором из уравнений (54.1) у U_2 появился вследствие того, что при написании этих уравнений при избранном направлении положительного обхода напряжения U_1 и U_2 проходятся в противоположных направлениях (см. рис. 225). Решение этой системы уравнений таково:

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} U_2, \quad I_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} U_2, \qquad (54.2)$$



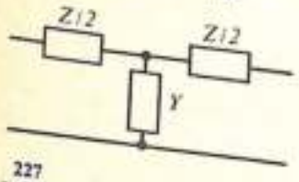
225

Четырехполюсник



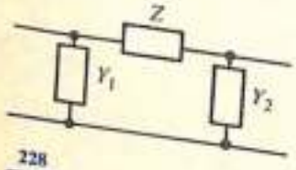
226

Продольно-симметричный П-образный четырехполюсник



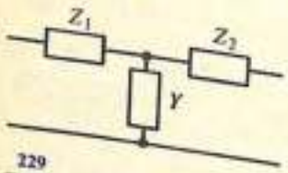
227

Продольно-симметричный Т-образный четырехполюсник



228

Несимметричный П-образный четырехполюсник



229

Несимметричный Т-образный четырехполюсник

где Δ и Δ_{ij} – определитель и соответствующие дополнения системы уравнений (54.1). Следовательно, между силами токов и напряжениями пассивного четырехполюсника имеются линейные зависимости вида (54.2), которые удобно записать так:

$$I_1 = B_{11}U_1 + B_{12}U_2,\ I_2 = B_{21}U_1 + B_{22}U_2. \tag{54.3}$$

Коэффициенты B_{ij} имеют размерность проводимостей. *Поэтому* (54.3) *называются уравнениями четырехполюсника с коэффициентами в виде проводимостей.*

Нетрудно решить уравнения (54.3) относительно напряжений:

$$U_1 = A_{11}I_1 + A_{12}I_2,\ U_2 = A_{21}I_1 + A_{22}I_2, \tag{54.4}$$

где коэффициенты A_{ij} имеют размерность сопротивлений (импедансы). *Уравнения* (54.4) *называются уравнениями четырехполюсника с коэффициентами в виде сопротивлений.*

Теорема взаимности. Поскольку у пассивного четырехполюсника коэффициенты Z_{ij} в уравнениях (54.1) симметричны [см. (48.30)]:

$$Z_{ij} = Z_{ji}, \tag{54.5}$$

можно показать, что коэффициенты A_{ij} в (54.4) в этом случае также симметричны:

$$A_{12} = A_{21}. \tag{54.6}$$

Отсюда следует, что

$$(U_2/I_1)_{I_1=0} = (U_1/I_2)_{I_2=0}, \tag{54.7}$$

т. е. *выходное напряжение на разомкнутой паре клемм при заданной силе входного тока не изменяется, если входные и выходные клеммы четырехполюсника поменять местами (теорема взаимности для пассивного четырехполюсника).*

Сопротивление четырехполюсника. Сопротивление A_{21} называется взаимным сопротивлением четырехполюсника, поскольку при разомкнутой выходной цепи ($I_2 = 0$) из второго уравнения (54.4) следует, что

$$A_{21} = U_2/I_1. \tag{54.8a}$$

При этом же условии первое из уравнений (54.4) дает:

$$A_{11} = U_1/I_1. \tag{54.8б}$$

Это означает, что A_{11} является входным сопротивлением четырехполюсника при разомкнутой выходной цепи. Аналогичный смысл имеют коэффициенты A_{12} и A_{22} в соответствии с теоремой взаимности.

Простейшие четырехполюсники. С помощью уравнений (54.3) и (54.4) напряжение и силу тока на входе четырехполюсника можно связать с этими же величинами на выходе:

$$U_1 = D_{11}U_2 + D_{12}I_2,\ I_1 = D_{21}U_2 + D_{22}I_2, \tag{54.9}$$

где D_{ij} легко выражаются через B_{ij} и A_{ij}, входящие в уравнения (54.3) и (54.4); коэффициент D_{12} имеет размерность сопротивления, D_{21} – проводимости; коэффициенты D_{11} и D_{22} безразмерны.

Четырехполюсник называется продольно-симметричным, если при перемене местами входных и выходных клемм силы токов и напряжения в присоединенных к клеммам цепях не изменяются. Из возможности такой замены с помощью (54.9) получаем для симметричных четырехполюсников

$$D_{11} = D_{22}. \tag{54.10}$$

Простейшие симметричные четырехполюсники П- и Т-образной формы показаны на рис. 226 и 227, а несимметричные – на рис. 228 и 229. Коэффициенты D_{ij} для четырехполюсника проще всего найти методом контурных токов. Для этого составляется система уравнений, затем из нее исключаются силы контурных токов внутренних контуров. Остаются два уравнения, в которые входят U_1, U_2 и I_1, I_2, преобразуют к виду (54.9) и из сравнения с (54.9) сразу же получают D_{ij}.

Для продольно-симметричного П-образного четырехполюсника (рис. 226) находим:

$$D_{11} = 1 + ZY/2,\ D_{12} = Z,\ D_{11} = Y(1 + ZY/4). \tag{54.11}$$

Для продольно-симметричного Т-образного четырехполюсника (рис. 227) имеем:

$$D_{11} = 1 + ZY/2,\ D_{12} = Z\,(1 + ZY/4),\ D_{21} = Y. \tag{54.12}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$D_{11}^2 - D_{12}D_{21} = 1, \tag{54.13}$$

т. е. детерминант коэффициентов преобразования (54.9) равен единице в случае продольно-симметричных П- и Т-образных четырехполюсников. Выражения коэффициентов для несимметричных четырехполюсников несколько сложнее и здесь не приведены.

Входное и выходное сопротивления. Для четырехполюсника они определяются как отношения соответствующих напряжений к силам тока:

$$Z_{вх} = U_1/I_1,\ Z_{вых} = U_2/I_2. \tag{54.14}$$

Из (54.9) с учетом (54.10) – (54.13) находим

$$Z_{вх} = \frac{Z_{вых} + D_{12}/D_{11}}{1 + Z_{вых}D_{21}/D_{11}}. \quad (54.15)$$

Таким образом, *четырехполюсник преобразует выходное сопротивление на входное.* При коротком замыкании выхода ($Z_{вых} = 0$) входное сопротивление четырехполюсника равно

$$Z_{0вх} = D_{12}/D_{11}, \quad (54.16)$$

а при разомкнутом выходе ($Z_{вых} = \infty$) оно определяется выражением

$$Z_{\infty вх} = D_{11}/D_{21}. \quad (54.17)$$

Коэффициент передачи. Преобразование напряжений и сил токов характеризуется отношением их значений на выходе к значениям на входе. Аналогично (54.15) получаем:

$$U_2/U_1 = Z_{вых}/(Z_{вых}D_{11} + D_{12}), \quad (54.18)$$

$$I_2/I_1 = 1/(D_{11} + Z_{вых}D_{21}). \quad (54.19)$$

Если четырехполюсник работает без преобразования сопротивления, т. е. *когда входное и выходное сопротивления одинаковы, то говорят, что выходное сопротивление согласовано с системой.* Подставляя в (54.15) значение сопротивления

$$Z_x = Z_{вх} = Z_{вых}, \quad (54.20)$$

находим для него значение

$$Z_x = \sqrt{D_{12}/D_{21}}. \quad (54.21)$$

Эта величина называется **характеристическим (волновым) сопротивлением** четырехполюсника. Следовательно, четырехполюсник согласован с линией передачи, если его входное и выходное сопротивления равны характеристическому. В этом случае соотношения (54.18) и (54.19) принимают вид:

$$U_2/U_1 = 1/(D_{11} + \sqrt{D_{12}D_{21}}), \quad (54.22)$$

$$I_2/I_1 = 1/(D_{11} + \sqrt{D_{12}D_{21}}). \quad (54.23)$$

С помощью соотношения

$$\operatorname{ch} g = D_{11} \quad (54.24)$$

определим коэффициент передачи g. Тогда на основании (54.13) получим

$$\operatorname{sh} g = \sqrt{\operatorname{ch}^2 g - 1} = \sqrt{D_{12}D_{21}}. \quad (54.25)$$

Используя (54.24) и (54.25), преобразуем формулы (54.22) и (54.23) к виду

$$U_2 = U_1 e^{-g}, \quad (54.26)$$

$$I_2 = U_1 e^{-g}. \quad (54.27)$$

Отметим, что выражения (54.26) и (54.27) справедливы только в условиях полного согласования. При отсутствии согласования необходимо пользоваться формулами (54.18) и (54.19).

С помощью коэффициента передачи и характеристического сопротивления формулы (54.18) и (54.19) можно представить так:

$$U_2/U_1 = Z_{вых}/(Z_{вых}\operatorname{ch} g + Z_x \operatorname{sh} g), \quad (54.28)$$

$$I_2/I_1 = Z_x/(Z_x \operatorname{ch} g + Z_{вых} \operatorname{sh} g). \quad (54.29)$$

Как и все величины, входящие в формулы (54.26)–(54.29), коэффициент передачи является комплексной величиной:

$$g = \alpha + i\beta. \quad (54.30)$$

Как видно из (54.26) и (54.27), в условиях согласований действительная часть коэффициента передачи определяет изменение амплитуд напряжения и сил токов на выходе четырехполюсника по сравнению с их входными значениями, а мнимая часть – изменение фаз. Действительная часть коэффициента передачи есть просто логарифм отношения амплитуд:

$$\alpha = \ln(U_1/U_2). \quad (54.31)$$

Поскольку g зависит от частоты, при проходе через четырехполюсник сигнала, включающего в себя многие частоты, его спектральный состав, а следовательно, и форма изменяются. Характер изменения частотного и фазового спектра сигнала может быть найден с помощью полученных в этом параграфе формул.

§ 55. Фильтры

Описываются принцип действия и свойства фильтров.

Определение. **Фильтром** называется устройство, изменяющее амплитуду колебаний в зависимости от их частоты. Если фильтр осуществлен в виде четырехполюсника, то коэффициент передачи должен существенно изменяться с частотой.

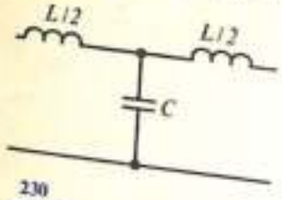
Фильтр низких частот. Рассмотрим Т-образный четырехполюсник, изображенный на рис. 230. Из сравнения с рис. 227 видно, что в полученных формулах надо положить:

$$Z = i\omega L, \quad Y = i\omega C. \quad (55.1)$$

Характеристическое сопротивление на основании (54.24) и (54.11) равно

$$Z_x = \sqrt{\frac{Z}{Y}}\sqrt{1 + \frac{ZY}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}. \quad (55.2)$$

Для коэффициента передачи g [см. (54.24)] с учетом (54.11) находим



230

Фильтр низких частот

$$\operatorname{ch}\gamma = 1 - \omega^2 LC/2. \tag{55.3}$$

Учитывая для γ его выражение (54.30), перепишем уравнение (55.3) в виде

$$\operatorname{ch}(\alpha + i\beta) = \operatorname{ch}\alpha\cos\beta + i\operatorname{sh}\alpha\sin\beta = 1 - \omega^2 LC/2, \tag{55.4}$$

откуда

$$\operatorname{ch}\alpha\cos\beta = 1 - \omega^2 LC/2, \tag{55.5}$$

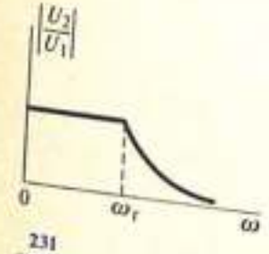
$$\operatorname{sh}\alpha\sin\beta = 0. \tag{55.6}$$

Уравнение (55.6) имеет решения:

$$\beta = \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{55.7}$$

при которых $\cos\beta = \pm 1$. Однако гиперболический косинус всегда больше или равен единице, т. е. $\operatorname{ch}\alpha \geqslant 1$. Поэтому из (55.5) следует, что $\cos\beta = -1$, и можно положить $\beta = \pi$. При этих условиях уравнение (55.5) принимает вид

$$1 + \operatorname{ch}\alpha = \omega^2 LC/2. \tag{55.8}$$



231

Характеристика фильтра низких частот

Поскольку $\operatorname{ch}\alpha \geqslant 1$, (55.8) имеет решение лишь для достаточно больших частот

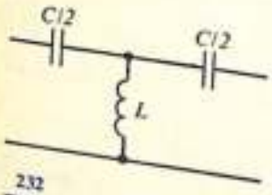
$$\omega \geqslant \omega_r, \tag{55.9}$$

где

$$\omega_r = 2/\sqrt{LC} \tag{55.10}$$

– граничная частота. С учетом (55.9) из (55.2) заключаем, что характеристическое сопротивление является чисто мнимым:

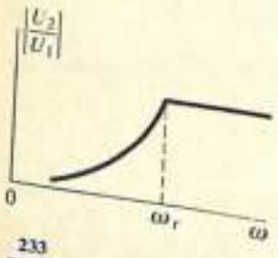
$$Z_{\text{вых}} = i\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega^2 LC}{4} - 1} = i\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_r^2} - 1}. \tag{55.11}$$



232

Фильтр высоких частот

Действительная часть коэффициента передачи определяется из уравнения (55.8). Видно, что с увеличением частоты она очень быстро возрастает. А это на основании (54.26) и (54.27) означает, что амплитуды колебаний на выходе четырехполюсника при $\omega \geqslant \omega_r$ быстро уменьшаются с увеличением частоты.

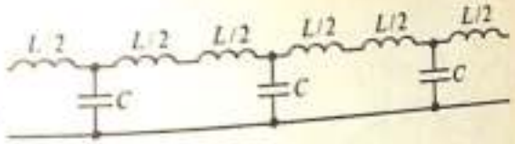


233

Характеристика фильтра высоких частот

Другое решение уравнения (55.6) имеет вид:

$$\operatorname{sh}\alpha = 0, \quad \alpha = 0. \tag{55.12}$$



234

Фильтр в виде цепочки Т-образных звеньев

Тогда уравнение (55.5) имеет вид

$$\cos\beta = 1 - \omega^2 LC/2. \tag{55.13}$$

Оно имеет решение лишь для $\cos\beta \geqslant -1$, т. е. при частотах

$$\omega \leqslant \omega_r = 2/\sqrt{LC}, \tag{55.14}$$

для которых первое решение не подходило. Характеристическое сопротивление в этом случае является действительным:

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}. \tag{55.15}$$

Поскольку здесь $\alpha = 0$, частоты $\omega \leqslant \omega_r$ пропускаются без затухания по амплитуде. Однако имеется зависящий от частоты сдвиг фаз, определяемый уравнением (55.13).

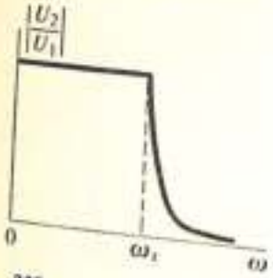
Зависимость амплитуды колебаний на выходе от амплитуды на входе приведена на рис. 231. Рассмотренный четырехполюсник является фильтром, пропускающим низкие частоты, меньшие некоторой граничной частоты ω_r. Частоты выше граничной очень быстро затухают. Для частот, значительно больших граничной, этот фильтр действует как затвор. Область частот $\omega \leqslant \omega_r$ называется полосой пропускания.

Фильтр высоких частот. Четырехполюсник, показанный на рис. 232, рассчитывается аналогично предыдущему случаю и действует как фильтр высоких частот с частотной характеристикой, показанной на рис. 233.

Цепочка из фильтров. Если к выходным клеммам четырехполюсника, изображенного на рис. 230, подключить входные клеммы такого же четырехполюсника и продолжить этот процесс, то получится четырехполюсник, изображенный на рис. 234. К его рассмотрению могут быть применены те же методы. Однако и без детального расчета можно выяснить основные свойства этого четырехполюсника, поскольку последовательные ячейки, из которых он состоит, имеют одинаковые характеристические сопротивления и работают в режиме согласования на каждой данной частоте. Граничная частота у всех ячеек одинакова. Следовательно, у этого четырехполюсника будет та же полоса пропускания $\omega \leqslant \omega_r$, а затухание частот $\omega \geqslant \omega_r$ будет значительно усилено. Частотная характеристика имеет вид, аналогичный рис. 231, но с более крутым спаданием амплитуд при $\omega > \omega_r$ (рис. 235).

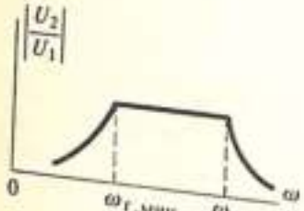
Полосовой фильтр. *Полосовым называется фильтр, пропускающий лишь полосу частот между некоторой минимальной и максимальной частотами:*

$$\omega_{r,\,\text{мин}} \leqslant \omega \leqslant \omega_{r,\,\text{макс}}. \tag{55.16}$$



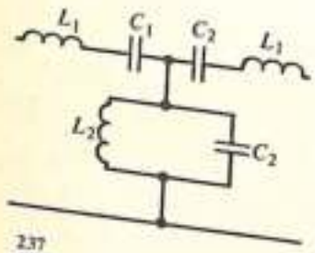
235

Характеристика фильтра из цепочки Т-образных звеньев



236

Характеристика полосового фильтра



237

Полосовой фильтр

○ Объясните физические процессы, лежащие в основе действия фильтров высоких и низких частот. Как устроен полосовой фильтр?

Его частотная характеристика показана на рис. 236.

В принципе, *такой фильтр можно осуществить в виде последовательности низкочастотного и высокочастотного фильтров.* Высокочастотный фильтр должен отсеять все частоты, меньшие $\omega_{г.мин}$, и пропустить большие частоты, а низкочастотный фильтр должен пропустить все частоты, меньшие $\omega_{г.макс}$, и отсечь все частоты, большие $\omega_{г.макс}$. Однако на практике обычно используют более сложные схемы (см., например, рис. 237). Такой фильтр также является четырехполюсником и может быть рассмотрен аналогичными методами.

§ 56. Бетатрон

Рассматриваются принцип действия бетатрона и основные положения теории устойчивости движения электронов в нем. Обсуждается предел энергий, достижимых в бетатроне.

Назначение. Бетатрон является примером устройства, в котором вихревое индукционное электрическое поле действует на свободные электроны в вакууме. Он предназначен для ускорения электронов до больших энергий порядка нескольких сотен мегаэлектрон-вольт. Ускорению до более значительных энергий препятствуют потери энергии на тормозное излучение, возникающее вследствие движения электронов с ускорением по круговым орбитам. Используемый в бетатроне механизм ускорения не в состоянии компенсировать эти потери и цикл ускорения прекращается.

Принцип действия. Основная идея: подобрать такие условия, при которых электрон в нарастающем магнитном поле ускорялся бы вихревым электрическим полем и одновременно магнитным полем удерживался бы на круговой орбите постоянного радиуса.

Оказывается, что такое условие возможно. Оно называется **бетатронным условием.**

Бетатронное условие. Запишем уравнение движения электрона по окружности постоянного радиуса в растущем магнитном поле, считая, что такое движение возможно. Решение даст условия, при которых это движение может быть осуществлено.

Обозначим: r_0 – радиус орбиты; p – импульс электрона, направленный все время по касательной к круговой орбите (рис. 238). Закон электромагнитной индукции для определения напряженности электрического поля на орбите дает уравнение

$$2\pi r_0 E = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t. \qquad (56.1)$$

С другой стороны, уравнение движения имеет вид

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = eE. \qquad (56.2)$$

Из (56.1) и (56.2) следует, что

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = -\frac{e}{2\pi r_0}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \qquad (56.3)$$

Поскольку $r_0 = \mathrm{const}$, можно обе части уравнения проинтегрировать по t от 0 до t:

$$p_t - p_0 = -\left[e/(2\pi r_0)\right](\Phi_t - \Phi_0), \qquad (56.4)$$

где индексами t и 0 обозначено значение соответствующих величин в момент времени t и в начальный момент $t = 0$. Уравнение Ньютона для центростремительного ускорения запишем в виде

$$mv^2/r_0 = -evB, \qquad (56.5)$$

где m – релятивистская масса. Из (56.5) следует, что $p = mv = -eBr_0$. Тогда [см. (56.4)]

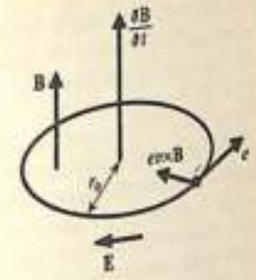
$$B_t - B_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi_t}{\pi r_0^2} - \frac{\Phi_0}{\pi r_0^2}\right). \qquad (56.6)$$

Так как вектор индукции **B** направлен перпендикулярно плоскости орбиты и поток магнитной индукции равен

$$\Phi = \int_S B\cdot\mathrm{d}S \qquad (56.7)$$

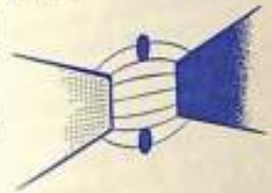
($S = \pi r_0^2$ – площадь, ограниченная орбитой), то

$$\Phi/(\pi r_0^2) = \langle B\rangle \qquad (56.8)$$



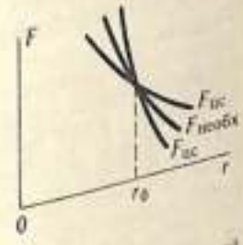
238

К выводу бетатронного условия



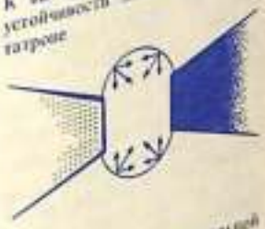
239

Схема бетатрона



240

К выводу условия радиальной устойчивости электронов в бетатроне



241

Схема обеспечения вертикальной устойчивости движения электронов в бетатроне

– средняя индукция поля на площади S, охватываемой орбитой. Считая, что в начальный момент поле отсутствует ($B_0 = 0$, $\Phi_0 = 0$), из (56.6) с учетом (56.8) находим

$$B_t = {}^1/_2 \langle B_t \rangle. \tag{56.9}$$

Это есть бетатронное условие: *магнитная индукция на орбите электрона равна половине величины средней магнитной индукции, охватываемой орбитой.* Следовательно, надо индукцию магнитного поля сделать уменьшающейся от центра к орбите по какому-либо закону, лишь бы выполнялось условие (56.9). Для этого необходимо соответствующим образом подобрать форму полюсов электромагнитов, создающих магнитное поле (рис. 239). Поскольку при заданной форме полюсов магнитов форма силовых линий не зависит от силы тока и индукции магнитного поля, условие (56.9) оказывается выполненным для любой силы тока в электромагните. А это означает, что *нет необходимости заботиться о законе изменения силы тока.* Единственный вопрос, вызывающий беспокойство, – устойчивость движения; если некоторые причины выведут электрон из режима движения строго по окружности радиусом r_0, то возникнут ли силы, стремящиеся удержать его в режиме ускорения вблизи окружности, или он выйдет из режима ускорения и будет потерян?

Имеются две возможности отклонения электрона от орбиты: либо по радиусу, либо по вертикали из плоскости его движения.

Радиальная устойчивость. Индукцию магнитного поля в области орбиты принято представлять в виде

$$B = \text{const}/r^n \tag{56.10}$$

и характеризовать скорость ее изменения величиной n. Центростремительная сила $F_{\text{цс}}^{\text{необх}}$, необходимая для обеспечения движения электрона по окружности радиусом r, и фактически возникающая центростремительная сила $F_{\text{цс}}$ на том же расстоянии r от центра равны:

$$F_{\text{цс}}^{\text{необх}} = mv^2/r = A_1/r, \quad F_{\text{цс}} = evB = A_2/r^n, \tag{56.11}$$

где A_1 и A_2 – постоянные ($v = \text{const}$). Графики этих величин при $n > 1$ и $0 < n < 1$ показаны на рис. 240. При $r = r_0$ выполняется равенство (56.5) и осуществляется движение по окружности радиусом r_0. Если по каким-то причинам произойдет смещение электрона на радиус $r > r_0$, то при $n > 1$ центростремительная сила $F_{\text{цс}} < F_{\text{цс}}^{\text{необх}}$. Это означает, что возникают факторы, стремящиеся удалить электрон от орбиты радиусом r_0. Поэтому при $n > 1$ движение оказывается неустойчивым. При $n < 1$ центростремительная сила $F_{\text{цс}} > F_{\text{цс}}^{\text{необх}}$ и возникают факторы, стремящиеся возвратить электрон на орбиту радиусом r_0, в результате чего достигается радиальная устойчивость. Рассмотрение случая $r < r_0$ приводит к тому же заключению. Следовательно, **условие радиальной устойчивости** движения имеет вид

$$0 < n < 1. \tag{56.12}$$

Вертикальная устойчивость. Она обеспечивается всегда при спадании индукции магнитного поля к периферии ($n > 0$), поскольку в этом случае силовые линии выпуклы наружу (рис. 241) и при отклонении электрона от средней плоскости возникает составляющая силы Лоренца, стремящаяся вернуть его к ней (рис. 241). Таким образом, при выполнении условия (56.12) обеспечивается также и вертикальная устойчивость движения, т. е. *неравенство* (56.12) *является общим условием устойчивости движения электрона в бетатроне.*

Бетатронные колебания. При небольших отклонениях от равновесной орбиты ($r = r_0$) электроны совершают около нее небольшие гармонические колебания как в радиальном, так и в вертикальном направлениях. Эти колебания называются бетатронными. Их амплитудой определяется сечение кольцевой вакуумной камеры, в которой осуществляется движение электрона. Обычно линейные размеры поперечного сечения этой камеры составляют примерно 5% от радиуса орбиты.

Предел энергий, достижимых в бетатроне. Как было уже сказано, этот предел обусловливается потерями энергии электронов на тормозное излучение (см. гл. 10). Практически в бетатронах можно получить максимальные энергии, не превышающие 300 МэВ.

Задачи

8.1. Вычислить индуктивность участка длиной l двухпроводной линии, пренебрегая внутренней индуктивностью проводов. Радиусы проводов одинаковы и равны r_0, расстояние между проводами равно d.

8.2. По прямому бесконечному круглому цилиндрическому проводнику течет ток плотностью $\mathbf{j}$. В проводнике имеется цилиндрическая полость круглого сечения. Оси цилиндра и полости параллельны (см. рис. 98). Найти индукцию магнитного поля внутри полости ($\mu = \mu_0$).

Указание: См. задачу 2.9.

8.3. Имеется очень длинный соленоид с плотностью намотки n витков на 1 м длины. Площадь поперечного сечения соленоида равна S. Через обмотку соленоида течет ток силой I. В соленоид с двух сторон вдвинуты очень длинные железные стержни с магнитной проницаемостью μ. Стержни плотно прилегают к обмотке соленоида. Между стержнями внутри соленоида имеется очень маленький промежуток. Определить силу, с которой стержни притягиваются друг к другу.

8.4. Имеется электромагнит U-образной формы, обмотка которого состоит из n витков. Площадь поперечного сечения, длина, магнитная проницаемость материала магнита и расстояние между полюсами равны соответственно S, l, μ и d. Сила тока, текущего через обмотку магнита, равна I. К полюсам магнита приложили полосу из того же материала и с тем же поперечным сечением, что и магнит. Определить силу, с которой полоса притягивается к магниту.

8.5. Горизонтальный металлический стержень вращается около вертикальной оси, проходящей на расстоянии $1/k$ его длины от одного

из концов, с частотой ν. Длина стержня равна l. Определить разность потенциалов между концами стержня, если он вращается в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B. Считать, что $k = 3$; $l = 1{,}2$ м; $\nu = 6\ с^{-1}$; $B = 10^{-2}$ Тл.

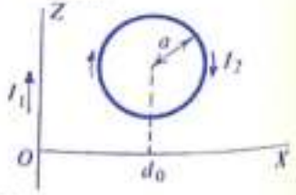
8.6. Между круглыми полюсами большого электромагнита, питаемого переменным током частотой $\nu = 1$ кГц, образуется синусоидально изменяющееся со временем магнитное поле с амплитудой индукции $B_0 = 0{,}5$ Тл. Считая магнитное поле однородным, определить максимальную напряженность электрического поля в зазоре между магнитами на расстоянии $r = 0{,}1$ м от центра.

8.7. Замкнутый на себя соленоид радиусом b с n витками вращается с угловой скоростью ω вокруг диаметра одного из витков в однородном магнитном поле с индукцией B. Ось вращения перпендикулярна вектору индукции. Сопротивление и индуктивность соленоида равны R и L соответственно. Определить силу тока, текущего через соленоид, как функцию времени.

8.8. Сверхпроводящее кольцо, которое может двигаться лишь в вертикальном направлении, лежит на столе над витком проводника. Через виток проводника начинает течь ток силой I. В результате этого сверхпроводящее кольцо поднимается. Взаимная индуктивность витка и кольца, поднятого на высоту x, равна $L_{12}(x)$. Индуктивность сверхпроводящего кольца равна L_{11}, масса кольца m, ускорение свободного падения g. Определить высоту h, на которую поднимается сверхпроводящее кольцо.

8.9. Через катушку A_1 пропускается ток силой $I_0 \sin \omega t$. В катушке A_2 индуцируется соответствующая сила тока. Индуктивности и взаимоиндуктивность равны L_1, L_2, L_{12}. Сопротивление катушки A_2 равно R_2. Пусть ξ_i – некоторая обобщенная координата, характеризующая положение катушки A_2. Найти обобщенную среднюю силу F_i, которая связана с обобщенной координатой ξ_i.

8.10. В плоскости лежат бесконечно длинный прямолинейный проводник и проводник в виде окружности радиусом a (рис. 242). Расстояние от центра кольцевого проводника до прямолинейного d. Найти взаимную индуктивность.



242

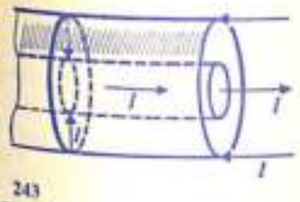
Взаимное расположение взаимодействующих прямого и кругового токов

8.11. По прямолинейному и кольцевому проводникам, описанным в задаче (8.10), протекают токи силой I_1 и I_2. Какая сила действует на кольцевой проводник?

8.12. Найти взаимную индуктивность обмотки тороида (рис. 195) и прямолинейного проводника бесконечной длины, совпадающего с аксиальной осью симметрии тороида.

8.13. Найти индуктивность обмотки тороида круглого сечения радиусом r с n витками. Большой радиус тороида равен R.

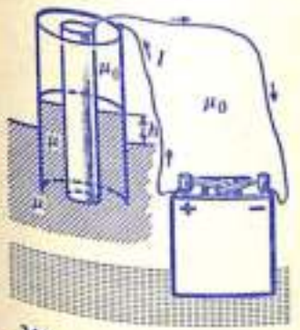
8.14. Коаксиальный кабель, жила и оболочка которого имеют бесконечную проводимость и радиусы r_1 и r_2, замкнут накоротко подвижной диафрагмой (рис. 243). Найти силу, которая действует на подвижную диафрагму, когда по кабелю протекает ток силой I.



243

Кабель с подвижной диафрагмой

8.15. Полый цилиндр радиусом r_2 и коаксиальный с ним цилиндрический проводник радиусом r_1 очень большой проводимости опущены в проводящий жидкий магнетик с магнитной проницаемостью μ и плотностью массы ρ (рис. 244). В цепи идет ток силой I. Найти высоту подъема жидкого магнетика в цилиндре.



244

Втягивание магнетика в пространство между коаксиальными проводниками с током

8.16. Диэлектрический цилиндр радиусом a вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω, параллельно которой направлен вектор индукции $\mathbf{B}$ постоянного магнитного поля. Найти поляризованность цилиндра и поверхностную плотность связанного заряда. Диэлектрическая проницаемость вещества цилиндра равна ε.

8.17. Тонкий проводящий диск с проводимостью γ расположен в переменном магнитном поле, индукция которого равна $\mathbf{B} = \mathbf{B} \cos(\omega t + \varphi)$ и направлена перпендикулярно плоскости диска. Найти плотность токов Фуко, индуцируемых в диске.

8.18. Найти индуктивность обмотки тороида из n витков квадратного сечения со стороной a. Большой радиус тороида равен R.

8.19. Круглая петля радиусом a вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B. Ее омическое сопротивление равно R, а ось вращения перпендикулярна $\mathbf{B}$. Найти силу тока $I(t)$, момент тормозящих вращение рамки сил $M(t)$ и среднюю мощность $\langle P \rangle$, которая расходуется на поддержание постоянной угловой скорости вращения рамки. В качестве начала отсчета $t = 0$ принять момент, когда плоскость петли перпендикулярна $\mathbf{B}$.

8.20. Участок цепи состоит из двух цилиндрических коаксиальных трубок радиусами a_1 и a_2 ($a_2 > a_1$) длиной l. На одном конце трубки соединены проводящей пластиной. Найти индуктивность участка цепи.

8.21. Два плоских замкнутых круглых витка проволоки радиусами a_1 и a_2 лежат в одной плоскости на расстоянии d друг от друга. Считая, что расстояние d достаточно велико и можно воспользоваться дипольным приближением, найти взаимную индуктивность контуров.

8.22. Магнитная индукция $\mathbf{B}_0$ между плоскими параллельными полюсами электромагнита может считаться однородной и постоянной. В пространство между полюсами вдвигается пластина площадью S из парамагнитного материала с парамагнитной восприимчивостью χ_0. Ее поверхности параллельны поверхностям

полюсов электромагнита. Найти действующую на пластину силу.

8.23. Найти радиальную силу, действующую на тороид, данные которого приведены в задаче 8.13, если по нему течет ток силой I.

8.24. Два идентичных контура с индуктивностями $L = L_{11} = L_{22}$ расположены так, что их взаимная индуктивность $L_{12}^{(0)} = 0$. В контурах протекают сверхпроводящие токи силой I_0. После этого изменяется взаимное положение контуров, в результате чего их взаимная индуктивность становится равной L_{12}. Найти силу токов в конечном состоянии.

8.25. Электрический контур состоит из четырех узлов. Три узла совпадают с вершинами равностороннего треугольника, а четвертый — с его центром (точка пересечения медиан или биссектрис). Между вершинами треугольника емкости участков равны $C\,(R = 0, L = 0)$, а между вершинами треугольника и его центром включены индуктивности $L\,(R = 0, C = 0)$. Найти резонансную частоту системы.

Ответы

8.1. $L = \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{d}{r_0}$. **8.2.** $\mathbf{B} = (\mu_0/2)\mathbf{j} \times \mathbf{r}$. **8.3.** $F = \frac{S}{2} \frac{(\mu - \mu_0)\mu}{\mu_0} n^2 I^2$. **8.4.** $F = \frac{S}{(l + sl)^2} \times \frac{\mu^2}{\mu_0} n^2 I^2$. **8.5.** $U = \pi \nu l^2 \frac{k-2}{k} B = 9{,}1$ В. **8.6.** $E = B_0 \omega r/2 = 156$ В/м. **8.7.** $I = \pi b^2 n B_0 \omega \times (R^2 + \omega^2 L^2)^{-1/2} \sin(\omega t + \varphi_0)$. **8.8.** $h = \frac{1}{2} \frac{I^2}{mg} \frac{1}{L_{11}} \{[L_{12}(0)]^2 - [L_{12}(h)]^2\}$. **8.9.** $F_i = -\frac{1}{2} \frac{I_0^2 \omega^2 L_2 L_{12}}{R^2 + \omega^2 L_2^2} \frac{\partial L_{12}}{\partial z_{21}}$. **8.10.** $L_{12} = \mu_0 (d - \sqrt{d^2 - a^2})$. **8.11.** $F_x = -\mu_0 I_1 I_2 \times \left(\frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} - 1\right)$. **8.12.** $L_{12} = \frac{\mu_0 n d}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$. **8.13.** $L = \mu_0 n^2 (R - \sqrt{R^2 - r^2})$. **8.14.** $F = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(r_2/r_1)$. **8.15.** $h = \frac{(\mu - \mu_0) I^2 \ln(r_2/r_1)}{4\pi^2 \rho g (r_2^2 - r_1^2)}$. **8.16.** $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) B \omega \mathbf{r}$, $\sigma_{связ} = (\varepsilon - \varepsilon_0) B \omega a$. **8.17.** $\mathbf{j} = (1/2)\gamma \omega \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} \sin(\omega t + \varphi)$. **8.18.** $L = \frac{\mu_0 n^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{2R + a}{2R - a}\right)$. **8.19.** $I(t) = \frac{\pi a^2 \omega B}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$, $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/R$; $M(t) = -\frac{\pi^2 a^4 B^2 \omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \omega t \times \sin(\omega t - \varphi)$; $\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} \frac{(\pi a^2 \omega B)^2}{R^2 + \omega L^2} R$. **8.20.** $L = [\mu_0 l/(2\pi)] \ln(a_2/a_1)$. **8.21.** $L_{12} = \mu_0 \pi a_1^2 a_2^2/(4d^3)$. **8.22.** $F = \chi_0 S B_0^2/[2\mu_0 (1 + \chi_0)]$. **8.23.** $F = -\mu_0 I^2 n^2 \times (R/\sqrt{R^2 - r^2} - 1)$. **8.24.** $I = I_0 L/(L + L_{12})$. **8.25.** $\omega_0 = (3LC)^{-1/2}$.

§ 57 Ток смещения

§ 58 Система уравнений Максвелла

§ 59 Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Поток энергии

§ 60 Движение электромагнитной энергии вдоль линий передач

§ 61 Излучение электромагнитных волн

§ 62 Распространение электромагнитных волн в диэлектриках

§ 63 Распространение электромагнитных волн в проводящих средах

§ 64 Инвариантность плоской волны

§ 65 Давление электромагнитных волн. Импульс фотона

§ 66 Волноводы и резонаторы

9

Электромагнитные волны

Изменяющееся магнитное поле порождает изменяющееся электрическое поле, которое, в свою очередь, порождает изменяющееся магнитное поле, которое, в свою очередь, порождает изменяющееся электрическое поле, и т. д. В результате порождаются сцепленные между собой электрическое и магнитное поля, составляющие электромагнитную волну. Она «отрывается» от зарядов и токов, которые ее породили. Способ существования электромагнитной волны делает невозможным ее неподвижность в пространстве и постоянство напряженностей ее полей во времени.

§ 57. Ток смещения

Обсуждается физическое содержание тока смещения. Проводится учет тока смещения в уравнениях Максвелла.

Сущность процесса. Постоянный ток не протекает в цепи с конденсатором, а переменный ток протекает. Сила квазистационарного тока проводимости во всех последовательно соединенных элементах цепи является одной и той же. В конденсаторе ток проводимости, связанный с движением электронов, не может существовать, поскольку обкладки конденсатора разделены диэлектриком. Поэтому необходимо заключить, что в конденсаторе происходит некоторый процесс, который как бы замыкает ток проводимости, т. е. в некотором смысле обеспечивает обмен зарядом между обкладками конденсатора без переноса заряда между ними. Этот процесс называется **током смещения.**

Рассмотрим цепь переменного тока с плоским конденсатором (рис. 245). Между обкладками конденсатора имеется электрическое поле с напряженностью $E = \sigma/\varepsilon$, где σ – плотность заряда на обкладке; ε – диэлектрическая проницаемость вещества между обкладками. Электрическое смещение между обкладками конденсатора равно $D = \sigma = Q/S$, где Q – заряд на каждой из обкладок конденсатора; S – площадь обкладки. Сила тока в цепи равна $I = \partial Q/\partial t$. Отсюда следует, что

$$I_{см} = S\,\frac{\partial D}{\partial t}, \qquad (57.1)$$

т. е. процессом, замыкающим ток проводимости в цепи, является изменение электрического смещения между обкладками конденсатора, причем в формуле (57.1) величина I дана с индексом «см» («смещение»), чтобы показать, что это не ток проводимости между обкладками, хотя $I = I_{см}$. Плотность тока смещения в пространстве между обкладками равна $j_{см} = I_{см}/S = \partial D/\partial t$. Учитывая, что направление $\mathbf{j}_{см}$ в каждой точке между обкладками плоского конденсатора совпадает с направлением $\partial D/\partial t$, можно вместо (57.1) написать следующее дифференциальное соотношение:

$$\boxed{\mathbf{j}_{см} = \partial \mathbf{D}/\partial t,} \qquad (57.2)$$

Из локального характера этого соотношения следует ожидать его независимость от нелокальной модели (плоский конденсатор), в рамках которой оно получено. Так оно и есть на самом деле. Формула (57.2) определяет объемную плотность тока смещения $\mathbf{j}_{см}$. Существование тока смещения теоретически было постулировано Максвеллом в 1864 г. и в последующем экспериментально подтверждено другими учеными.

Почему скорость изменения вектора смещения называется плотностью тока? Само по себе математическое равенство величины $S\partial D/\partial t$, характеризующей процесс между обкладками конденсатора, и силы тока проводимости вне обкладок конденсатора, т. е. равенство двух величин, относящихся к разным областям пространства и имеющим различную физическую природу, не содержит в себе, вообще говоря, какого-то физического закона. Поэтому называть $S\partial D/\partial t$ «током» можно только формально. Для того чтобы придать этому названию физический смысл, необходимо доказать, что $S\partial D/\partial t$ обладает наиболее характерными свойствами тока, хотя и не представляет движения электрических зарядов, подобного току проводимости. Главным свойством тока проводимости является его способность порождать магнитное поле. Поэтому *решающим является вопрос о том, порождает ли ток смещения магнитное поле так же, как его порождает ток проводимости, или, более точно, порождает ли величина* (57.2) *такое же магнитное поле, как равная ей объемная плотность тока проводимости? Максвелл дал утвердительный ответ на этот вопрос.*

Экспериментальная проверка правильности этого ответа состоит в следующем. По закону полного тока циркуляция вектора **B** по охватывающему ток контуру равна $\mu_0 I$. Циркуляция может быть измерена с помощью пояса Роговского. Перемещая его вдоль контура, отмечаем, что циркуляция не изменяется и тогда, когда пояс Роговского охватывает конденсатор. А это как раз и означает, что ток смещения в конденсаторе порождает такое же магнитное поле, как соответствующий ток проводимости. Однако наиболее ярким подтверждением порождения магнитного поля током смещения является существование электромагнитных волн. Если бы ток смещения не создавал магнитного поля, то не могли бы существовать электромагнитные волны.

Уравнение Максвелла с током смещения. Порождение магнитного поля током проводимости описывается уравнением

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}. \qquad (57.3)$$

Учитывая порождение поля током смещения, необходимо обобщить это уравнение в виде

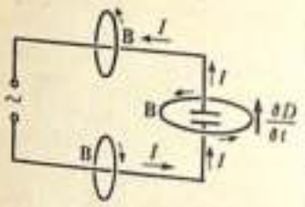
$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{см}. \qquad (57.4)$$

Тогда, принимая во внимание (57.2), окончательно получаем уравнение

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t,} \qquad (57.5)$$

являющееся одним из уравнений Максвелла.

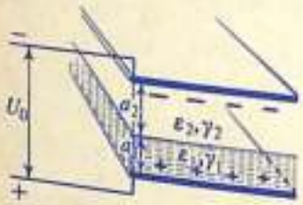
Релятивистская природа тока смещения. При преобразовании полей от одной системы координат к другой электрическое и магнитное поля обусловливают друг друга (см. § 11). Если в некоторой системе координат имеется неоднородное магнитное поле, то в другой системе



245

Ток смещения

координат это поле представляется переменным по времени и одновременно появляется электрическое поле. А это как раз и есть свидетельство того, что переменное электрическое поле порождает магнитное поле. Однако отсюда не следует, что порождение магнитного поля переменным электрическим полем не является новым фундаментальным явлением в физике электричества и магнетизма. Ситуация здесь аналогична той, которая была подробно разобрана в связи с электромагнитной индукцией в § 45, 46. *Порождение магнитного поля переменным электрическим полем является фундаментальным явлением природы.*



246

Двухслойный плоский конденсатор с утечкой

Пример 57.1. *Между обкладками плоского конденсатора имеются два слоя слабо проводящего материала с удельными проводимостями γ_1 и γ_2 и диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Толщины слоев равны соответственно a_1 и a_2 (рис. 246). Площади обкладок конденсатора S. Исследовать процесс установления силы тока в цепи, если в момент $t = 0$ к обкладкам конденсатора приложена постоянная разность потенциалов U_0. Рассмотреть процессы, возникающие при размыкании цепи и при шунтировании источника сторонних э. д. с.*

В момент включения напряжения на границе между слоями не может мгновенно возникнуть поверхностный заряд. Поэтому в начальное мгновение рассматриваемая система ведет себя так, как будто проводимость вещества между пластинами равна нулю, т. е. как идеальный конденсатор. Поэтому в пространстве между пластинами возникает смещение

$$D = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \tag{57.6}$$

где E_1 и E_2 – напряженности электрического поля в первом и втором слоях соответственно. В (57.6) учтена непрерывность D. Так как разность потенциалов между пластинами равна U_0, то

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = a_1 E_1 + a_2 E_2 = U_0, \tag{57.7}$$

где в качестве пути интегрирования от первой пластины ко второй взят путь по нормали к пластинам. Из (57.6) и (57.7) следует, что

$$D = \varepsilon_1\varepsilon_2 U_0/(\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2). \tag{57.8}$$

● **Формальное равенство токов смещения в конденсаторе и тока проводимости в присоединенных к его обкладкам проводах не содержит в себе какого-либо физического закона. Новый физический закон состоит в том, что ток смещения создает такое же магнитное поле как и соответствующий ему ток проводимости.**

Весь ток в начальный момент является током смещения. Он равен бесконечности, поскольку разность потенциалов включается мгновенно и D мгновенно возрастает от 0 до значения, определяемого по формуле (57.8). Поверхностная плотность заряда на пластинах также возрастает мгновенно от 0 до $\sigma_1 = -\sigma_2 = D$.

Мгновенные изменения электрического смещения от нуля до конечного значения обусловлены очень большой скоростью возникновения поляризованности вещества под влиянием внешнего поля. Поляризованность возникает за время, характерное для внутримолекулярных процессов.

В последующие моменты времени после включения начинает возрастать сила тока проводимости и по прошествии достаточного времени ($t \to \infty$) устанавливается равновесное значение плотности тока:

$$j = \gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2 = \gamma_1\gamma_2 U_0/(\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2), \tag{57.9}$$

где учтено соотношение (57.7). Поскольку проводимость неоднородна, на поверхности раздела между слоями существует заряд с поверхностной плотностью

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = (\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2)\, U_0/(\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2), \tag{57.10}$$

где использовано граничное условие (17.36), так как напряженность электрического поля не зависит от времени.

В переходном режиме, до достижения стационарных значений (57.9) и (57.10), токи проводимости в первом и втором слоях различны, а плотность заряда на границе раздела между слоями возрастает со временем. Одинаковое значение в обоих слоях в переходном режиме имеет сумма объемных плотностей токов проводимости и смещения, называемая полной объемной плотностью тока:

$$j_n = \gamma_1 E_1 + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_1 E_1) = \gamma_2 E_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_2 E_2). \tag{57.11}$$

Исключив E_2 из (57.11), с помощью (57.7) получаем уравнение для E_1:

$$\frac{dE_1}{dt} + \frac{E_1}{\tau} = \frac{\gamma_2 U_0}{\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2}, \tag{57.12}$$

где

$$\tau = (\varepsilon_1 a_2 + \varepsilon_2 a_1)/(\gamma_1 a_2 + \gamma_2 a_1). \tag{57.13}$$

Аналогичное уравнение получается и для E_2.

Решение этих уравнений при начальном условии (57.8) таково:

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \frac{\varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2} e^{-t/\tau}, \tag{57.14}$$

$$E_2 = \frac{\gamma_1 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \frac{\varepsilon_1 U_0}{\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2} e^{-t/\tau}. \tag{57.15}$$

При $t \to \infty$ эти решения, как и должно быть, принимают вид (57.9). Поверхностная плотность заряда между слоями изменяется по закону

$$\sigma = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) U_0. \tag{57.16}$$

При $t=0$ поверхностная плотность заряда $\sigma=0$, а при $t\to\infty$ она, как и следовало ожидать, стремится к (57.10).

Полная плотность тока находится из (57.11) с учетом (57.14) и (57.15):

$$j_0=\gamma_1E_1+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_1E_1)=\gamma_2E_2+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_2E_2)=\left[\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_2a_1+\gamma_1a_2}+\left(\gamma_1-\frac{\varepsilon_1}{\tau}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2a_1+\varepsilon_1a_2}-\frac{\gamma_2}{\gamma_2a_1+\gamma_1a_2}\right)e^{-t/\tau}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2a_1+\varepsilon_1a_2}\delta(t)\right]U_0, \tag{57.17}$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция. Она возникла из-за того, что смещение D при $t=0$ возросло мгновенно от 0 до (57.8). Другими словами, при вычислении производной по времени в (57.17) имеем

$$\frac{\partial(\varepsilon_1E_1)}{\partial t}=\varepsilon_1\frac{\partial E_1}{\partial t}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2U_0}{\varepsilon_2a_1+\varepsilon_1a_2}\delta(t), \tag{57.18}$$

а при вычислении $\partial E_1/\partial t$ в (57.18) пользуемся выражением (57.14), справедливым для всех $t>0$.

Проведенный анализ показывает, что распределение напряжений по различным участкам цепи в момент включения внешнего напряжения может существенно отличаться от распределения в установившемся режиме. Это обстоятельство необходимо принимать во внимание при расчете цепей.

При размыкании цепи $j_0=0$ и, следовательно, уравнения (57.11) принимают вид:

$$\gamma_1E_1+\frac{\partial(\varepsilon_1E_1)}{\partial t}=0,\quad \gamma_2E_2+\frac{\partial(\varepsilon_2E_2)}{\partial t}=0. \tag{57.19}$$

Поля распадаются независимо. В установившемся режиме, как это видно из (57.14) и (57.15),

$$E_{10}=\gamma_2U_0/(\gamma_2a_1+\gamma_1a_2),\quad E_{20}=\gamma_1U_0/(\gamma_2a_1+\gamma_1a_2). \tag{57.20}$$

Решение уравнений (57.19) при начальных условиях (57.20) имеет вид:

$$E_1=\frac{\gamma_2U_0}{\gamma_2a_1+\gamma_1a_2}e^{-t/\tau_1},\quad E_2=\frac{\gamma_1U_0}{\gamma_2a_1+\gamma_1a_2}e^{-t/\tau_2}, \tag{57.21}$$

где $\tau_1=\varepsilon_1/\gamma_1$, $\tau_2=\varepsilon_2/\gamma_2$.

Разность потенциалов между разомкнутыми клеммами изменяется так:

$$U=a_1E_1+a_2E_2=\frac{U_0}{\gamma_2a_1+\gamma_1a_2}[\gamma_2a_1e^{-t/\tau_1}+\gamma_1a_2e^{-t/\tau_2}]. \tag{57.22}$$

Поверхностная плотность заряда на границе между слоями в конденсаторе определяется формулой

$$\sigma=\varepsilon_2E_2-\varepsilon_1E_1=\frac{U_0}{\gamma_2a_1+\gamma_1a_2}[\varepsilon_2\gamma_1e^{-t/\tau_2}-\varepsilon_1\gamma_2e^{-t/\tau_2}]. \tag{57.23}$$

При шунтировании источника сторонних э. д. с. $U_0=0$ и уравнения (57.7) и (57.12) принимают вид:

$$a_1E_1+a_2E_2=0, \tag{57.24}$$

$$\frac{dE_1}{dt}+\frac{E_1}{\tau}=0, \tag{57.25}$$

где τ – определяется выражением (57.13). Начальное условие при $t=0$ находится из (57.10) с учетом (57.24):

$$\gamma_2E_{20}-\varepsilon_1E_{10}=-\left(\frac{\varepsilon_2a_1}{a_2}+\varepsilon_1\right)E_{10}=\frac{\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_2a_1+\gamma_1a_2}U_0. \tag{57.26}$$

Решение уравнения (57.25) с начальным значением E_{10} из (57.26) таково:

$$E_1=-E_2a_2/a_1=-\frac{(\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)a_2U_0}{(\varepsilon_2a_1+\varepsilon_1a_2)(\gamma_2a_1+\gamma_1a_2)}e^{-t/\tau}. \tag{57.27}$$

Сила тока в контуре и поверхностная плотность заряда между слоями равны:

$$I=\left[\left(\frac{\gamma_1\varepsilon_2-\gamma_2\varepsilon_1}{\varepsilon_2a_2+\varepsilon_2a_1}\right)^2\frac{a_1a_2U_0}{(\gamma_2a_1+\gamma_1a_2)}e^{-t/\tau}-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2U_0}{\varepsilon_1a_2+\varepsilon_2a_1}\delta(t)\right]S, \tag{57.28}$$

$$\sigma=\frac{\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_2a_1+\gamma_1a_2}U_0e^{-t/\tau}. \tag{57.29}$$

Член с δ-функцией в (57.28) появился из-за того, что в момент шунтирования источника сторонних э. д. с. вектор смещения D скачком изменился от значения, соответствующего формуле (57.9) для установившегося режима, к значению, соответствующему начальным условиям при $t=0$ по формуле (57.26).

§ 58. Система уравнений Максвелла

Обсуждаются физический смысл, условия применимости, полнота и совместность системы уравнений Максвелла.

Система уравнений Максвелла. Полученные в предыдущих параграфах в результате обобщения экспериментальных фактов уравнения (57.5), (46.5), (36.4), (17.30) составляют систему уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\partial\mathbf{D}/\partial t,\ \text{(I)}\qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\ \text{(III)} \tag{58.1a}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t,\ \text{(II)}\qquad \operatorname{div}\mathbf{D}=\rho.\ \text{(IV)}$$

Эти уравнения, называемые **полевыми**, применимы для описания всех макроскопических электромагнитных явлений. При рассмотрении конкретной ситуации необходимо учесть электромагнитные свойства материальных сред. Во многих случаях это достигается соотношениями (17.31), (38.24), (16.5):

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H},\ \mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}\ \text{(V)}, \tag{58.1б}$$

называемыми обычно материальными уравнениями. Однако существует много явлений, когда материальные уравнения имеют другой вид (например, нелинейные явления) и их установление составляет самостоятельную научную задачу.

Физический смысл уравнений. Уравнение (I) выражает закон, по которому магнитное поле порождается токами проводимости и смещения, являющимися двумя возможными источниками магнитного поля.

Уравнение (II) выражает закон электромагнитной индукции и указывает на изменяющееся магнитное поле как на один из возможных источников, порождающих электрическое поле. Вторым источником электрического поля являются электрические заряды, порождающие поля которыми описывается уравнением (IV), выражающим закон Кулона. Физический смысл уравнения (III) подробно обсуждается в связи с (36.4).

Материальные уравнения (V) являются соотношениями между векторами поля и токами, учитывающими свойства материальной среды. Учет диэлектрических свойств, феноменологически описываемых поляризованностью, содержится в диэлектрической проницаемости ε; учет магнитных свойств, феноменологически описываемых намагниченностью, содержится в магнитной проницаемости μ; учет проводящих свойств среды содержится в удельной проводимости γ.

Уравнения поля являются линейными, учитывающими принцип суперпозиции, который является независимым экспериментальным фактом.

Условия применимости уравнений. По ходу обоснования уравнения (58.1) видно, что они справедливы при следующих условиях:

1) материальные тела в поле неподвижны;

2) материальные константы ε, μ, γ могут зависеть от координат, но не должны зависеть от времени и векторов поля;

3) в поле отсутствуют постоянные магниты и ферромагнитные тела.

Для того чтобы учесть движение среды, проще всего поступить так. Наличие среды для электрических и магнитных явлений сводится в конечном счете к наличию зарядов среды и их движениям. Поэтому можно исходить из уравнений Максвелла для вакуума ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$), а среду учесть точно так же, как это делалось в § 17 и 38, но приняв во внимание движение зарядов. В результате получается, что уравнения поля (58.1) сохраняют без изменения свой вид, а весь учет движения среды сводится к модификации материальных уравнений (58.1б), которые становятся зависимыми от скорости среды и значительно усложняются. При этом они перестают быть соотношениями между двумя величинами (например, между **D** и **E** и т. д.), а «зацепляются» друг за друга. Например, плотность тока проводимости начинает зависеть от индукции магнитного поля, а не только от напряженности электрического поля и т. д.

Поле вне постоянных магнитов и ферромагнетиков в предположении, что известна их намагниченность, можно описать с помощью уравнений Максвелла. Однако решить задачу при наличии ферромагнетиков в пространстве, когда, например, заданы токи, с помощью уравнений Максвелла нельзя. Они неприменимы для этого случая.

Полнота и совместность системы уравнений. С помощью материальных уравнений (58.1б) можно исключить из полевых уравнений (58.1а) величины **D**, **H** и **j**, в результате чего они становятся уравнениями относительно векторов **E** и **B**, т. е. относительно шести неизвестных независимых компонент этих величин. С другой стороны, число скалярных уравнений в (58.1а) равно восьми. Получается, что имеется восемь уравнений для шести неизвестных величин, т. е. число уравнений превышает число неизвестных, что недопустимо, поскольку система уравнений кажется переполненной.

Однако в действительности система не переполнена и никаких трудностей не возникает. Это обусловлено тем, что уравнения (I) и (IV) и (II) и (III) имеют одинаковые дифференциальные следствия и потому связаны между собой, хотя и нельзя сказать, что какие-то из них являются следствиями других.

Для доказательства одинаковости дифференциальных следствий уравнений (II) и (III) применим к обоим частям уравнения (II) операцию div, а обе части уравнения (III) продифференцируем по времени. В обоих случаях получается одно и то же уравнение $\partial \operatorname{div} \mathbf{B}/\partial t = 0$.

Докажем, что с учетом закона сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \tag{58.2}$$

уравнение (IV) можно рассматривать как дифференциальное следствие уравнения (I). Для доказательства применим операцию div к обеим частям уравнения (I):

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \partial \operatorname{div} \mathbf{D}/\partial t = 0, \tag{58.3}$$

где $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$. Сравнивая (58.3) с (58.2), находим, что должно выполняться равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \tag{58.4}$$

совпадающее с уравнением (IV). Тем самым доказано, что (IV) является дифференциальным следствием уравнения (I) с учетом закона сохранения заряда.

Наличие двух дифференциальных связей между уравнениями (I–IV) делает эту систему совместной. Более подробный анализ показывает, что система уравнений является полной, а ее решение однозначно при заданных граничных и начальных условиях. Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности уравнений Максвелла является также решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии, заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т. е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана.

§ 59. Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Поток энергии

Дается математическая формулировка закона сохранения энергии и обсуждается понятие потока электромагнитной энергии.

Формулировка. Энергия электрического и магнитного поля определяется формулами (18.16) и (47.26). В § 19 и 39 были исследованы силы в электрическом и магнитном полях, под действием которых совершается работа. В § 49 была определена работа переменного тока, в § 27 изучено тепловое действие тока. Закон сохранения энергии требует, чтобы все эти процессы были сформулированы в виде закона сохранения и превращения различных форм энергии друг в друга. Поскольку при этом источники производства электромагнитной энергии пространственно отделены от мест ее потребления, возникает представление о движении энергии, характеризуемом ее потоком.

Рассмотрим некоторый замкнутый объем V, в котором имеются электромагнитное поле и токи (рис. 247). Джоулева теплота, выделяемая токами в этом объеме, равна

$$P = \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV. \tag{59.1}$$

Для упрощения расчета предполагается, что других превращений энергии в этом объеме нет. Подставляя в (59.1) выражения для $\mathbf{j}$ из уравнения (58.1а), получаем

$$P = \int_V \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}\,dV - \int_V \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,dV. \tag{59.2}$$

По формуле (П.15) имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H} \tag{59.3}$$

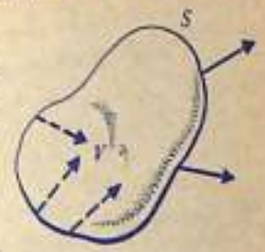
и, следовательно,

$$P = -\int_V \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{H}\,dV - \int_V \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,dV - \int_V \operatorname{div}\mathbf{E}\times\mathbf{H}\,dV, \tag{59.4}$$

где $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$. Учитывая, что $\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})}{\partial t}$ и $\frac{\mathbf{E}\cdot\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})}{\partial t}$, и преобразуя последний интеграл в (59.4) по теореме Гаусса – Остроградского в интеграл по поверхности σ, ограничивающей объем V, окончательно получаем

$$P = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\int_V(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dV\right] - \int_\sigma \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{59.5}$$

Здесь поверхность обозначена σ для того, чтобы букву S сохранить для обозначения плотности потока электромагнитной энергии.



247

К формулировке закона сохранения энергии

Поток энергии. Величина

$$W = \frac{1}{2}\int_V(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dV \tag{59.6}$$

характеризует электромагнитную энергию, заключенную в объеме V. Величина

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}} \tag{59.7}$$

является **плотностью потока энергии сквозь поверхность**, ограничивающую объем V, и называется **вектором Пойнтинга.** Она была получена Д. Г. Пойнтингом (1852–1914) в 1884 г. Однако на десять лет раньше, в 1874 г. Н. А. Умовым (1846–1915) было проведено общее исследование движения энергии в телах, которое характеризовалось соответствующим потоком энергии. Поэтому вектор (59.7) называется также вектором Умова – Пойнтинга. Равенство (59.4) удобнее переписать в виде

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} = -P - \int_\sigma \mathbf{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma},} \tag{59.8}$$

т. е. *изменение энергии электромагнитного поля в объеме происходит за счет работы токов проводимости в этом объеме и потока энергии сквозь поверхность, ограничивающую объем.* Если энергия электрического поля не изменяется $\partial W/\partial t = 0$, то [см. (59.8)]

$$P = -\int_\sigma \mathbf{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{59.9}$$

Следовательно, *вся производимая в замкнутом объеме работа совершается за счет потока электромагнитной энергии сквозь поверхность, ограничивающую объем.*

Равенство (59.8) выражает закон сохранения энергии электромагнитного поля.

Следует подчеркнуть, что (59.8) является именно выражением закона сохранения энергии, а не его доказательством.

● **Закон сохранения энергии как всеобщий закон природы предполагается данным при построении теории электричества и магнетизма. Исходя из закона сохранения энергии как всеобщего закона можно найти математическое выражение для объемной плотности энергии электрического и магнитного полей и плотности энергии электрического и магнитного полей и плотности потока электромагнитной энергии, а также установить связь между ними, выражающую идею движения электромагнитной энергии. В формуле (59.8) физическая величина P учитывает возможность взаимопревращения различных форм энергии друг в друга.**

§ 60. Движение электромагнитной энергии вдоль линий передач

Обсуждаются физическая картина движения энергии вдоль линий передач и основные характеристики линий передач.

Механизм компенсации потерь энергии на джоулеву теплоту. Рассмотрим участок проводника круглого сечения радиусом r, вдоль которого течет постоянный ток с объемной плотностью $\mathbf{j}$ (рис. 248). По закону Ома в дифференциальной форме напряженность электрического поля, параллельная оси проводника, равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}/\gamma. \tag{60.1}$$

Вследствие граничного условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического поля точно такое же поле существует вне проводника около его поверхности.

Вычислим по формуле (59.9) поток электромагнитной энергии сквозь замкнутую поверхность цилиндра, боковая поверхность которого совпадает с поверхностью проводника длиной l, а основаниями являются круглые сечения проводника.

Напряженность магнитного поля на поверхности проводника направлена по касательной к поверхности в плоскости, перпендикулярной оси проводника (и вектору $\mathbf{j}$) (рис. 248), и равна

$$H = j\pi r^2/(2\pi r) = j/(2r). \tag{60.2}$$

Таким образом, вектор Пойнтинга (59.7) направлен по радиусу к оси проводника и равен

$$S = EH = j^2 r/(2\gamma). \tag{60.3}$$

Это означает, что *электромагнитная энергия втекает в проводник из окружающего пространства через его боковую поверхность*. Поток энергии через основания цилиндра отсутствует. На участке проводника длиной l за 1 с в проводник втекает энергия

$$P = S \cdot 2\pi r l = (j^2/\gamma)\,\pi r^2 l. \tag{60.4}$$

По закону Джоуля–Ленца на длине l проводника в 1 с выделяется количество теплоты

$$P' = (j^2/\gamma)\,\pi r^2 l. \tag{60.5}$$

Сравнение (60.4) с (60.5) показывает, что вся выделяемая в проводнике при прохождении электрического тока в виде теплоты энергия поступает из окружающего пространства через боковую поверхность проводника. Следовательно, *передаваемая с помощью электрического тока энергия движется в окружающем проводник пространстве. Провода играют роль направляющих, вдоль которых движется электромагнитная энергия*, причем плотность потока энергии в любой точке пространства определяется вектором Пойнтинга.

Движение энергии вдоль кабеля. По центральному проводу ток движется в одном направлении, а по оболочке кабеля – в противоположном (рис. 249). Между центральной жилой и оболочкой находится диэлектрик. Для упрощения расчетов предположим, что сопротивление проводов кабеля ничтожно мало и им можно пренебречь, т. е. можно считать, что энергия передается без потерь. Тогда потенциал вдоль центральной жилы и оболочки постоянен, а изменение потенциала между ними происходит на потребителе энергии и на источнике (сторонняя э. д. с.). Пусть падение потенциала на потребителе энергии равно U. Это означает, что разность потенциалов между жилой и оболочкой равна U. Следовательно, между ними существует электрическое поле. Вследствие аксиальной симметрии задачи и того, что ток течет вдоль кабеля без сопротивления, напряженность этого поля направлена по радиусу, а касательная составляющая E_τ отсутствует. Ось Z цилиндрической системы координат совпадает с осью кабеля. Силовые линии магнитного поля являются концентрическими окружностями с центром на оси кабеля. Напряженность поля отлична от нуля только в пространстве между жилой и оболочкой, а вне кабеля она равна нулю. Радиальная составляющая вектора Пойнтинга равна нулю. Уравнение Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$ для пространства между жилой и оболочкой принимает вид

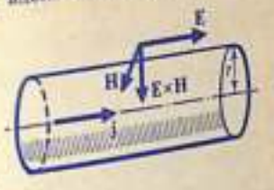
$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = 0, \tag{60.6}$$

где использована запись операции дивергенции в цилиндрических координатах и принято во внимание, что аксиальная и касательная составляющие вектора $\mathbf{E}$ отсутствуют. Из (60.6) получаем

$$E_r = a_0/r, \tag{60.7}$$

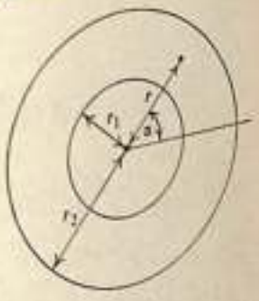
где a_0 – постоянная интегрирования, определяемая условиями задачи. Разность потенциалов между жилой и оболочкой равна

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r\,dr = a_0 \ln(r_2/r_1), \tag{60.8}$$



248

Механизм компенсации потерь тока на выделение джоулевой теплоты



249

Передача электромагнитной энергии с помощью тока по кабелю

● **Передаваемая с помощью электрического тока энергия движется в пространстве, окружающем проводники. Проводники играют роль направляющих, вдоль которых движется электромагнитная энергия. Джоулево тепло, та в проводнике выделяется за счет электромагнитной энергии, поступающей в проводник через его поверхность из окружающего пространства.**

○ Что такое характеристический импеданс линии и постоянная распространения? Опишите физические процессы, приводящие к отражению энергии от нагрузки. При каком условии отражение отсутствует и вся передаваемая по линии энергия поглощается нагрузкой?

которая позволяет найти значение постоянной $a_0 = U/\ln(r_2/r_1)$. С учетом этого значения формула (60.7) принимает вид

$$E_r = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)}\frac{1}{r}. \tag{60.9}$$

Напряженность магнитного поля в кабеле равна

$$H_\varphi = I/(2\pi r), \tag{60.10}$$

как это сразу следует из закона полного тока, с учетом аксиальной симметрии поля. Из (60.9) и (60.10) получаем

$$S_z = E_r H_\varphi = \frac{1}{2\pi}\frac{UI}{\ln(r_2/r_1)}\frac{1}{r^2}. \tag{60.11}$$

Эта величина представляет собой плотность потока электромагнитной энергии, направленного параллельно оси кабеля в пространстве между жилой и оболочкой. Вне кабеля, а также в центральной жиле и в оболочке никакого потока энергии нет, поскольку там вообще отсутствует электрическое поле при принятом допущении об отсутствии сопротивления. В 1 с времени через поперечное сечение кабеля проходит электромагнитная энергия

$$P = \int_\sigma S_z\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{r_2}\frac{dr}{r}\cdot\frac{UI}{\ln(r_2/r_1)} = UI. \tag{60.12}$$

При силе тока I, протекающего через нагрузку при разности потенциалов U, развивается мощность

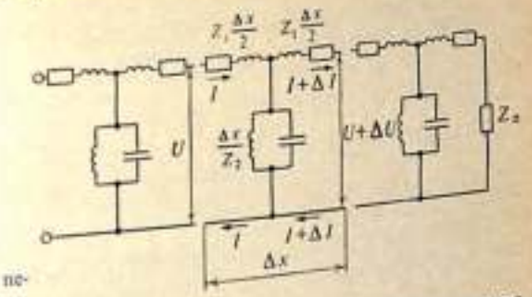
$$P_w = IU. \tag{60.13}$$

Сравнение (60.12) с (60.13) показывает, что *вся используемая потребителем энергия движется вдоль кабеля в пространстве между жилой и оболочкой в виде электромагнитной энергии.*

Ничего не изменяется в принципиальном отношении и для переменного тока не очень высокой частоты. Если ток в кабеле меняет направление на обратное, то составляющие E_r и H_φ векторов поля также изменяют направление на обратное, а направление вектора Пойнтинга остается прежним. Поэтому хотя направление тока меняется на обратное, направление движения электромагнитной энергии сохраняется: она все время движется от источника к потребителю.

В других линиях передачи в принципиальном смысле картина движения энергии не изменяется, лишь усложняется конфигурация полей и пути, по которым движется энергия.

Линия передачи для переменного тока. При не очень больших частотах и достаточно малых расстояниях, когда можно считать выполненными условия квазистационарности, токи в линии полностью описываются методами, изложенными в гл. 8. При несоблюдении условий квазистационарности картина усложняется, что очевидно уже из того обстоятельства, что сила тока в один и тот же момент времени



250

Эквивалентная схема линии передачи переменных токов

в различных участках линии различна. Любой участок проводника имеет определенную индуктивность и емкость, что делает всю линию передачи электрической цепью с непрерывно распределенными сопротивлениями, емкостями, индуктивностями.

Уравнения для силы тока и напряжения. Прежде всего необходимо найти закон, по которому сила тока и напряжение между проводниками изменяются вдоль линии. Эквивалентная схема распределения индуктивности, емкости и сопротивления показана на рис. 250. Индуктивность, емкость и сопротивление, приходящиеся на 1 м длины линии, обозначим L, C, R. Импедансы Z_1 и Z_2 также отнесены к 1 м длины. Участок Δx линии обладает последовательно включенным импедансом, дающим комплексное сопротивление

$$Z_1\Delta x = (R_1 + i\omega L)\,\Delta x, \tag{60.14}$$

и параллельно включенным импедансом Z_2, дающим комплексную проводимость

$$\frac{1}{Z_2}\Delta x = \left(\frac{1}{R_2} + i\omega C\right)\Delta x. \tag{60.15}$$

Пусть к началу участка линии Δx приложено напряжение U, а сила тока равна I. В конце участка эти величины равны соответственно $U + \Delta U$, $I + \Delta I$. Утечки через изоляцию здесь и в последующем не учитываются.

Применим правило Кирхгофа для внешнего контура всего участка, взяв в качестве положительного направления обход против часовой стрелки:

$$-Z_1\frac{\Delta x}{2}(I + \Delta I) - Z_1\frac{\Delta x}{2}I = U + \Delta U - U. \tag{60.16}$$

Разделив (60.16) на Δx, получим

$$-Z_1\Delta I/2 - Z_1 I = \Delta U/\Delta x. \tag{60.17}$$

Если $\Delta x \to 0$, то первое слагаемое в левой части (60.17) стремится к нулю ($\Delta I \to 0$). Тогда

$$\frac{dU}{dx} = -Z_1 I. \tag{60.18}$$

Аналогично, правило Кирхгофа, применяемое к левому контуру, включающему импеданс $Z_2/\Delta x$, дает

$$\frac{Z_2}{\Delta x}\Delta I - Z_2\frac{\Delta x}{2}I = -U, \tag{60.19}$$

откуда при $\Delta x \to 0$ получаем

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{1}{Z_2}U. \tag{60.20}$$

Дифференцируя обе части (60.18) по x и выражая dI/dx с помощью (60.20), находим следующее уравнение для U:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{Z_1}{Z_2}U. \tag{60.21}$$

Аналогично, дифференцирование (60.20) по x и использование (60.18) приводит к уравнению для силы тока:

$$\frac{d^2I}{dx^2} = \frac{Z_1}{Z_2}I. \tag{60.22}$$

Уравнения (60.21) и (60.22) называются **уравнениями линии передачи.**

Характеристический импеданс и постоянная распространения. Общее решение уравнений линии передачи имеет вид (например, для U):

$$U = Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x}, \tag{60.23}$$

причем для α, называемой **постоянной распространения,** после подстановки (60.23) в (60.21) находим выражение:

$$\alpha = \sqrt{Z_1/Z_2}. \tag{60.24}$$

Аналогичный вид имеет также и решение уравнения (60.22):

$$I = A_1e^{-\alpha x} + B_1e^{\alpha x}. \tag{60.25}$$

Подставляя решения (60.23) и (60.25) в (60.18) и (60.20), находим связь между постоянными A, B, A_1, B_1:

$$A_1 = A/Z_a,\ B_1 = -B/Z_a, \tag{60.26}$$

где

$$Z_a = \sqrt{Z_1Z_2} \tag{60.27}$$

— **характеристический импеданс линии.** Чтобы выяснить его смысл, предположим, что линия длиной l оканчивается нагрузкой, импеданс которой равен характеристическому (рис. 250). На основании равенств (60.23) – (60.27) для напряжения на выходе линии, т. е. на нагрузке Z_a, можно написать:

$$U_н = I_нZ_a, \tag{60.28}$$

или

$$Ae^{-\alpha l} + Be^{\alpha l} = Z_a\left(\frac{A}{Z_a}e^{-\alpha l} - \frac{B}{Z_a}e^{\alpha l}\right). \tag{60.29}$$

Отсюда следует, что $B = 0$, $A = U_{вх}$, где $U_{вх}$ – напряжение на входе в линию при $x = 0$. Таким образом, напряжение и сила тока в линии определяются выражениями:

$$U = U_{вх}e^{-\alpha x},\ I = U_{вх}e^{-\alpha x}/Z_a. \tag{60.30}$$

Следовательно, входной импеданс линии равен характеристическому:

$$Z_{вх} = U_{вх}/I_{вх} = Z_a. \tag{60.31}$$

Это означает, что *если линия оканчивается нагрузкой с характеристическим импедансом, то ее входной импеданс равен характеристическому, независимо от длины, т. е. в этом случае ток передается по линии без изменения отношения напряжения к силе тока.*

Характеристическое сопротивление. В большинстве практически важных случаев омические сопротивления элементов линии значительно меньше соответствующих индуктивных и емкостных сопротивлений ($R_1 \ll \omega L$, $1/R_2 \ll \omega C$) и ими можно пренебречь. При этом условии характеристический импеданс

$$Z_a = \sqrt{Z_1Z_2} = \sqrt{\frac{R_1 + i\omega L}{1/R_2 + i\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{60.32}$$

является действительной величиной, т. е. сопротивлением, и называется **характеристическим сопротивлением.**

Характеристическое сопротивление зависит от формы и размеров проводников, от расстояния между ними и других факторов, от которых зависят емкость и индуктивность участков линии. Например, характеристическое сопротивление параллельных цилиндрических проводников радиусом a, расстояние между осями которых D, равно

$$Z_a = 276\log(D/a). \tag{60.33}$$

Принимается, что проводники расположены в среде, относительная диэлектрическая проницаемость которой близка к единице (вакуум, воздух и т. д.).

Скорость распространения. Выше было рассмотрено распределение силы тока и напряжения вдоль линии передач в некоторый момент времени. Если на входе сила тока и напряжение периодически изменяются с частотой ω, то и во всех участках линии они изменяются с той же частотой. При тех условиях, когда характеристический импеданс является вещественной величиной (60.32), постоянная α [см. (60.24)] является чисто мнимой:

$$\alpha = i\omega\sqrt{LC}. \tag{60.34}$$

Поэтому, взяв зависимость величин от времени в виде $\exp i\omega t$, можно на основании (60.30) написать:

$$U(x, t) = U_0\exp\left[i(\omega t - \omega\sqrt{LC}\,x)\right],$$

$$I(x, t) = (U_0/\sqrt{L/C})\exp\left[i(\omega t - \omega\sqrt{LC}\,x)\right]. \tag{60.35}$$

Формула (60.35) описывает волну с частотой ω, распространяющуюся вдоль оси X со скоростью

$$v = 1/\sqrt{LC}. \tag{60.36}$$

Напомним, что в этой формуле L и C являются емкостью и индуктивностью линии передачи, отнесенными к 1 м длины. Для двух тонких цилиндрических проводников радиусами a, находящихся в вакууме на расстоянии D один от другого, емкости и индуктивности 1 м длины линии равны:

$$C = \varepsilon_0/[2\ln(D/a)],\quad L = 2\mu_0 \ln(D/a) \tag{60.37}$$

и поэтому скорость распространения волны равна

$$v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c, \tag{60.38}$$

Отражение. Если сопротивление нагрузки равно характеристическому, то вся передаваемая по линии энергия поглощается нагрузкой. Говорят, что нагрузка и линия передачи согласованы между собой. *Если такого согласования нет, то часть энергии отражается от нагрузки и движется по линии навстречу первоначальному потоку энергии.*

Рассмотрим в качестве примера закороченную на конце линию передачи, т. е. когда $U_n = 0$. Уравнения (60.23) и (60.25) принимают вид:

$$0 = Ae^{-i\beta l} + Be^{i\beta l}, \tag{60.39}$$

$$I_n = Ae^{-i\beta l}/\rho - Be^{i\beta l}/\rho, \tag{60.40}$$

где для упрощения написания формул введены обозначения: $\beta = \omega\sqrt{LC}$, $\rho = \sqrt{L/C}$. Разрешая эти уравнения относительно A и B, получаем

$$A = I_n\rho e^{i\beta l}/2,\quad B = -I_n\rho e^{-i\beta l}/2. \tag{60.41}$$

Поэтому выражения (60.23) и (60.25) для напряжения и силы тока вдоль линии передачи записываются следующим образом:

$$U = I_0\frac{\rho}{2}[e^{-i\beta(x-l)} - e^{i\beta(x-l)}], \tag{60.42}$$

$$I = \frac{I_0}{2}[e^{-i\beta(x-l)} + e^{i\beta(x-l)}]. \tag{60.43}$$

Поскольку зависимость величин от времени характеризуется множителем $\exp(i\omega t)$, можно заключить, что первые слагаемые в правой части этих формул описывают волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X, а вторые – в отрицательном (т. е. описывают отраженную от закороченного конца линии волну). Отсюда можно заключить, что не только невозможность полностью передать энергию в нагрузку при отсутствии согласования с линией диктует желательность согласования. Если сигналы передаются в виде импульсов, то последовательные отражения от нагрузки, а затем снова от входа, настолько искажают сигнал, приходящий в нагрузку, что с ним становится трудно работать.

§ 61. Излучение электромагнитных волн

Дается решение задачи об излучении линейного осциллятора. Полученное решение обобщается на случай произвольно ускоренного нерелятивистского электрона. Обсуждается реакция излучения.

Уравнение для векторного потенциала. Индукция и напряженность переменных полей выражаются формулами (46.8) и (46.12) через векторный и скалярный потенциалы, для нахождения которых необходимо иметь уравнения.

Исходим из уравнения Максвелла (58.1, I), которое удобно записать в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu\mathbf{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{61.1}$$

где для упрощения предполагается, что μ и ε не зависят от координат. Подставляя (46.8) и (46.12) в (61.1), получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mu\mathbf{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{61.2}$$

Принимая во внимание, что $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$, преобразуем (61.2) к виду

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{61.3}$$

Пользуясь неоднозначностью потенциалов, определенных с точностью до калибровочного преобразования (46.13), можно на них наложить некоторое условие. Для максимального упрощения уравнения (61.3) это условие выбирается в виде равенства

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,} \tag{61.4}$$

называемого **условием Лоренца.** В результате [см. (61.3)] получаем

$$\nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j} \tag{61.5}$$

– **уравнение Даламбера.**

Выбор калибровочной функции χ. При наложении на потенциалы условия Лоренца (61.4) функция χ, с помощью которой осуществляется калибровочное преобразование потенциалов (46.13), не может быть выбрана произвольно; необходимо, чтобы условие Лоренца (61.4) сохранялось при калибровочных преобразованиях. Имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{A}' + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi) + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\varphi - \partial\chi/\partial t) =$$

$$= \operatorname{div}\mathbf{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\nabla^2\chi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right).$$

Таким образом, *условие Лоренца инвариантно лишь при калибровочных преобразованиях с функцией χ, удовлетворяющей уравнению*

$$\nabla^2\chi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0. \tag{61.6}$$

Уравнение такого вида называется **волновым уравнением или однородным уравнением Даламбера.**

Уравнение для векторного потенциала. Подставляя (46.12) в уравнение Максвелла (58.1, IV), находим

$$\operatorname{div}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{61.7}$$

Исключая отсюда $\operatorname{div}\mathbf{A}$, с помощью (61.4) окончательно получаем следующее уравнение для скалярного потенциала:

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{61.8}$$

Таким образом, для декартовых проекций векторного потенциала (61.5) и для скалярного потенциала получается одно и то же уравнение вида

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t), \tag{61.9}$$

где вместо Φ можно подставить A_x, A_y, A_z, φ, а вместо f соответственно μj_x, μj_y, μj_z, ρ/ε. Выясним смысл $\varepsilon\mu = 1/v^2$.

Решение волнового уравнения. Прежде всего рассмотрим решения уравнения (61.9) при $f = 0$, т. е. однородного уравнения. Возьмем одномерный случай $\Phi = \Phi(x)$. Уравнение (61.9) имеет вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{61.10}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что решением (61.10) является любая функция Φ от аргумента $t - x/v$ или $t + x/v$. Проверим это, например, для функции $\Phi(t - x/v)$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \Phi', \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Phi'', \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{1}{v}\Phi', \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\Phi'', \tag{61.11}$$

где Φ' – производная по аргументу функции. Из (61.11) следует, что произвольная функция $\Phi(t - x/v)$ действительно удовлетворяет уравнению (61.10). Аналогично доказывается, что и функция $\Phi(t + x/v)$ также удовлетворяет этому уравнению.

Смысл этих решений очень прост. *Функция $\Phi(t - x/v)$ представляет собой волну, движущуюся в направлении положительных значений оси X со скоростью v.* Действительно,

$$t - x/v = t + \Delta t - (x + \Delta x)/v \tag{61.12}$$

при $\Delta x/\Delta t = v$. Это означает, что если в момент времени t функция $\Psi(t - x/v)$ представляется некоторой кривой (рис. 251), то в момент времени $t + \Delta t$ она изображается той же кривой, но сдвинутой в направлении положительных значений оси X на $v\,\Delta t$, т. е. это волна, движущаяся в направлении положительных значений оси X со скоростью v. Вот почему было введено обозначение $\varepsilon\mu = 1/v^2$.

Аналогично показывается, что *функция $\Phi(t + x/v)$ представляет собой волну, распространяющуюся со скоростью v в направлении отрицательных значений оси X.*

Рассмотрим решение волнового уравнения в оферически симметричном случае, т. е. считая, что в (61.9) $f = 0$, а $\Phi = \Phi(r)$, где r – расстояние от начала координат до рассматриваемой точки. В этом случае Φ от углов не зависит и оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi). \tag{61.13}$$

Поэтому волновое уравнение для Φ записывается в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial t^2} = 0. \tag{61.14}$$

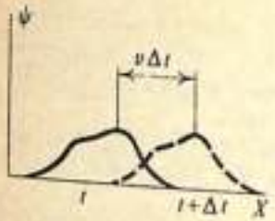
Решением этого уравнения для $r\Phi$, как и в предыдущем случае, являются произвольные функции от аргументов $t - r/v$ и $t + r/v$, т. е. общее выражение для Φ таково:

$$\Phi(r, t) = \frac{\Psi_1(t - r/v)}{r} + \frac{\Psi_2(t + r/v)}{r}. \tag{61.15}$$

Функция $\Psi_1(t - r/v)$ представляет волну, движущуюся в радиальном направлении от начала координат со скоростью v. Форма волны при этом не изменяется, а амплитуда уменьшается как $1/r$. Эта волна называется расходящейся. Функция $\Psi_2(t + r/v)$ представляет сходящуюся к началу координат волну.

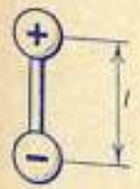
Возвращаясь к (61.5) и (61.8), видим, что потенциалы поля, а следовательно, и сами поля распространяются в свободном пространстве ($\rho = 0$) со скоростью $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. В вакууме $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, поэтому скорость распространения полей равна скорости света $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Таким образом *электромагнитные волны и всякие изменения электрического и магнитного поля распространяются в вакууме со скоростью света.* А это означает, что электромагнитные взаимодействия распространяются со скоростью света. Например, если два точечных заряда покоятся на расстоянии r друг от друга и один из зарядов распространяется момент сдвинут со своего места, то другой заряд «почувствует» этот сдвиг лишь спустя время $\tau = r/c$.

Запаздывающие и опережающие потенциалы. Учитывая свойства решений волнового уравнения, следует ожидать, что решение уравнений (61.5) и (61.8) для потенциалов переменных полей отличается от решений уравнений (37.11а) и (14.35) для потенциалов постоянных полей только тем, что надо учесть конечную скорость распространения электромагнитных взаимодействий. Другими словами, движущийся



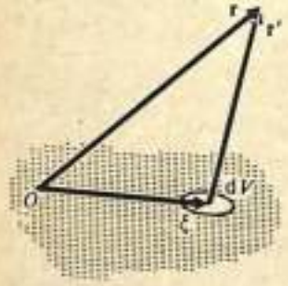
251

Изменение со временем решения одномерного волнового уравнения



252

Модель вибратора



253

К вычислению потенциала диполя

заряд и элемент переменного тока создают в каждой точке окружающего пространства такой же потенциал, как если бы заряд был неподвижным, а ток постоянным, но с тем различием, что такой потенциал в каждой точке создается не в тот же момент времени, а позднее на время запаздывания, т. е. на время, необходимое электромагнитному полю для распространения от источника до точки наблюдения. Поэтому для зарядов и токов, находящихся в конечной области пространства, получаем вместо формул (37.11а) и (14.35) следующие формулы:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dV', \quad (61.16)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dV', \quad (61.17)$$

где $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$; $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ – расстояние между точкой, в которой вычисляется потенциал, и элементом dV' объема интегрирования.

В данный момент времени в данной точке потенциал обусловлен не положением и величиной зарядов и сил токов в данный момент времени, а их положениями и величинами в предшествующие моменты времени, определяемыми с учетом скорости распространения электромагнитного поля. Например, пусть некоторый электрический заряд быстро приближается к какой-то точке. Скалярный потенциал, созданный зарядом в точке, определяется не расстоянием от заряда до точки в данный момент времени, а расстоянием в некоторый предшествующий момент времени, т. е. большим расстоянием. *При скорости заряда, близкой к скорости света, различие в расстояниях может быть весьма значительным.*

Здесь не приводится формальная проверка того, что формулы (63.16) и (61.17) удовлетворяют уравнениям (61.5) и (61.8). В принципе это делается так же, как и для решений (14.35) и (37.11а).

Потенциалы вида (61.16) и (61.17) называются **запаздывающими,** потому что они описывают потенциалы в более поздний момент

времени t по сравнению с моментом времени $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$ для зарядов и токов, которые этот потенциал создали. Формально решениями уравнений (61.5) и (61.8) являются также решения, аналогичные (61.16) и (61.17), но с заменой временных аргументов $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$ на $t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$, что соответствует двум возможным знакам в аргументах решений (61.15) волнового уравнения. Решение со знаком «+» в аргументе не имеет ясного физического смысла, поскольку оно формально соответствует ситуации, в которой сначала создается потенциал, а потом появляются соответствующие ему заряды и токи, т. е. потенциал опережает заряды и токи. Поэтому он называется **опережающим.** *Для получения решений задач с граничными условиями опережающим потенциалом приходится пользоваться наряду с запаздывающим.* Это можно понять из следующего. Пусть надо найти электромагнитное поле, удовлетворяющее некоторым условиям на границе. Ясно, что в точках внутри объема поле должно быть таким, чтобы, достигнув в более поздний момент времени границы, иметь значения, предписанные граничными условиями. Ясно, что при решении таких задач необходимо руководствоваться не только прошедшим, но и принимать во внимание, что должно произойти в будущем, т. е. необходимо использовать опережающие потенциалы. *Но это ни в какой степени не означает нарушения принципа причинности,* как это непосредственно видно из проведенного выше рассуждения. С физической точки зрения это есть просто ответ на вопрос о том, что должно было произойти в прошлом, чтобы настоящее являлось таким, каким оно есть при известных законах развития.

Вибратор Герца. Это электрический диполь, момент которого изменяется со временем. Реальным прототипом вибратора Герца может служить совокупность двух металлических шариков (рис. 252), соединенных проводником. Если шарикам сообщить равные, но противоположные по знаку, заряды и предоставить систему самой себе, то будет происходить колебательный процесс перезарядки шариков. Колебания тока будут затухающими. Если сопротивление проводников мало и потери на излучение за один период невелики, то в течение достаточно большого числа периодов затуханием можно пренебречь. Тогда на расстояниях, много больших l, система может рассматриваться как диполь, момент которого изменяется со временем. Таким вибратором пользовался Герц, впервые экспериментально получивший электромагнитные волны. Поэтому он называется вибратором Герца.

Скалярный потенциал диполя определяется формулой (61.17), которую удобно переписать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\xi, t - r'/c)}{r'}\,dV_\xi. \quad (61.18)$$

где предполагается, что диполь расположен в вакууме ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$). При вычислении (61.18) начало координат целесообразно поместить

в области распределения заряда; местоположение начала в пределах области распределения заряда несущественно, потому что размеры диполя предполагаются сколь угодно малыми по сравнению с расстояниями до точек, в которых рассматривается его поле. Положение точки, в которой вычисляется потенциал поля, характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}$; ξ – радиус-вектор элемента объема dV_ξ, а r' – есть расстояние между элементом объема dV_ξ и точкой наблюдения (рис. 253).

Рассмотрим потенциал на больших расстояниях от диполя ($\xi/r \ll 1$). Учитывая, что

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \xi,\ r' = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\xi + \xi^2}, \tag{61.19}$$

можно выражение для r' разложить в ряд по ξ/r и ограничиться линейным членом разложения

$$r' = r\left(1 - 2\frac{\mathbf{r}\cdot\xi}{r^2} - \frac{\xi^2}{r^2}\right)^{1/2} = r - \frac{\mathbf{r}\cdot\xi}{r} + \dots \tag{61.20}$$

Пользуясь этой формулой, разложим подынтегральное выражение в (61.18) в ряд Тэйлора в точке r:

$$\frac{\rho(\xi, t - r'/c)}{r'} = \frac{\rho(\xi, t - r/c)}{r} - \frac{\mathbf{r}\cdot\xi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\rho(\xi, t - r/c)}{r}\right] + \dots \tag{61.21}$$

Подставляя (61.21) в (61.18), находим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int \rho\, dV_\xi - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\int \xi\rho\, dV_\xi, \tag{61.22}$$

где принято во внимание, что r является при интегрировании постоянной величиной. Вследствие электрической нейтральности системы первый интеграл в правой части (61.22) равен нулю, а второй представляет собой момент диполя [см. (17.2)]

$$\int \xi\rho(t - r/c)\, dV_\xi = \mathbf{p}(t - r/c). \tag{61.23}$$

Поэтому окончательно потенциал диполя, изменяющегося со временем, определяется формулой

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r}\right]. \tag{61.24}$$

Пользуясь выражением для дивергенции в сферических координатах, формулу (61.24) можно представить в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{div}\frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r}. \tag{61.25}$$

Векторный потенциал. Он вычисляется разложением подынтегрального выражения (61.16) в ряд вида (61.21):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r}\right]. \tag{61.26}$$

Электрическое и магнитное поля. Для упрощения написания последующих формул введем обозначение

$$\Pi = \frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r} = \mathbf{p}_0\Phi(t, r), \tag{61.27}$$

где $\mathbf{p}_0$ – постоянный вектор, характеризующий направление колебаний диполя. Исходя из (61.25) и (61.26), получаем:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\Pi,$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \tag{61.28}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi,$$

где принято во внимание, что $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, учтена формула (П.10), а вектор Π удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla^2\Pi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = 0. \tag{61.30}$$

Значение $\operatorname{rot}\Pi$ вычисляется по формуле (П.16):

$$\operatorname{rot}\Pi = \operatorname{rot}\mathbf{p}_0\Phi = \operatorname{grad}\Phi\times\mathbf{p}_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{r}\times\mathbf{p}_0. \tag{61.31}$$

Дальнейшие вычисления удобнее провести в сферической системе координат. Направим полярную ось Z вдоль вектора $\mathbf{p}_0$, поместив начало координат в центре диполя. Полярный и азимутальный углы обозначим соответственно θ и α (рис. 254). Очевидно,

$$(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_0)_r = (\mathbf{r}\times\mathbf{p}_0)_\theta = 0,\ (\mathbf{r}\times\mathbf{p}_0)_\alpha = -rp_0\sin\theta, \tag{61.32}$$

поэтому

$$\operatorname{rot}_r\Pi = \operatorname{rot}_\theta\Pi = 0,\ \operatorname{rot}_\alpha\Pi = -\sin\theta\frac{\partial\Pi}{\partial t}. \tag{61.33}$$

Отсюда на основании (61.28) получаем:

$$B_r = B_\theta = 0,\ B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}_\alpha\Pi = -\frac{\mu_0}{4\pi}\sin\theta\frac{\partial^2\Pi}{\partial t\,\partial r}. \tag{61.34}$$

Проекции вектора $\mathbf{E}$ вычисляются с помощью формулы для ротора в сферической системе координат:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\operatorname{rot}_\alpha\Pi) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial r},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\operatorname{rot}_\alpha\Pi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right). \tag{61.35}$$

Формулы (61.34) и (61.35) показывают, что вектор напряженности электрического поля лежит в меридиональных плоскостях, а вектор

индукции магнитного поля перпендикулярен меридиональной плоскости, проведенной через соответствующую точку, причем магнитные силовые линии совпадают с параллелями рассматриваемой сферической системы координат. Векторы электрического и магнитного полей в каждой точке взаимно перпендикулярны.

Формулы (61.34) и (61.35) справедливы при произвольной зависимости функции $\Phi(t, r)$ в (61.27) от времени. Считая, что момент диполя изменяется по гармоническому закону

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}, \tag{61.36}$$

получаем

$$\Pi = p_0 \frac{e^{i(\omega t - r/c)}}{r}. \tag{61.37}$$

Выполняя соответствующие дифференцирования в формулах (61.34) и (61.35), находим выражения для отличных от нуля проекций:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \sin\theta \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c}\right)\Pi, \quad E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cos\theta\left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr}\right)\Pi,$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\Pi. \tag{61.38}$$

Поле в непосредственной близости к осциллятору на расстояниях, меньших длины волны $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$, одинаково с полем статического диполя и тока. На расстояниях, много больших длины волны, поле осциллятора принципиально отличается от поля постоянного диполя и тока. Соответствующая область называется волновой зоной.

Поле вибратора в волновой зоне. Расстояние r до точек волновой зоны удовлетворяет, по определению, следующему неравенству:

$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}. \tag{61.39}$$

Поэтому в формулах (61.38) можно пренебречь $1/r$ и $1/r^2$ по сравнению с ω/c и ω^2/c^2. В результате получаем следующие выражения для проекций векторов поля:

$$B_\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c}\Pi\sin\theta, \quad B_r = B_\theta = 0; \tag{61.40}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{c^2}\Pi\sin\theta, \quad E_r = E_\varphi = 0. \tag{61.41}$$

В этих формулах в качестве Π можно взять либо действительную, либо мнимую часть выражения (61.37), например:

$$\Pi = \frac{p_0\cos\omega(t - r/c)}{r}. \tag{61.42}$$

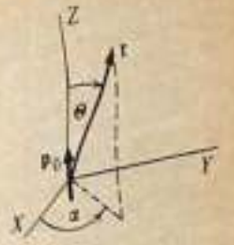
Поэтому окончательно напряженность и индукция электромагнитного поля в волновой зоне вибратора могут быть представлены

следующим образом:

$$E_\theta = cB_\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\sin\theta}{r}p_0\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right), \tag{61.43}$$

$$E_r = E_\varphi = 0, \; B_r = B_\theta = 0.$$



Выбор сферической системы координат при вычислении поля диполя

Эти формулы показывают, что в волновой зоне электрический и магнитный векторы перпендикулярны друг другу и радиус-вектору $\mathbf{r}$. Векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{r}$ составляют правовинтовую тройку векторов в каждой точке. *Напряженность поля убывает обратно пропорционально первой степени расстояния.* Представляемая формулами (61.43) волна называется сферической. Она распространяется в направлении радиус-вектора. Поверхности постоянной фазы этой волны являются сферами. Скорость волны (фазовая) равна скорости света. Поскольку $E_\theta = cB_\varphi$, малые участки поверхности сферической волны могут рассматриваться как плоские электромагнитные волны.



Мощность, излучаемая вибратором. Плотность потока электромагнитной энергии характеризуется вектором Пойнтинга (59.7). Поэтому поток электромагнитной энергии P сквозь поверхность S сферы радиусом r, окружающую вибратор, равен

$$P = \int_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = \int_S E_\theta H_\varphi \, dS =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{\omega^4 p_0^2}{c^3}\cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4 p_0^2}{c^3}\cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{61.44}$$

Это есть мощность потока, т. е. энергия излучения вибратора в 1 с. Средняя за период излучения мощность излучения равна

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P\, dt = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4 p_0^2}{c^3}. \tag{61.45}$$

Рамка с током



Соотношение между скоростями электрических зарядов, создающих дипольный электрический момент, и током в рамке, создающим магнитный момент

Эта формула показывает, что *мощность излучения вибратора очень сильно зависит от частоты и пропорциональна ее четвертой степени.* Это означает, что для увеличения мощности излучения целесообразно переходить к более коротким длинам волн.

Так как вектор Пойнтинга убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, а площадь поверхности сферы растет прямо пропорционально квадрату расстояния, то полный поток энергии, пересекающий поверхность сферы, не изменяется с расстоянием, следовательно, энергия без потерь переносится от вибратора в отдаленные участки пространства в виде электромагнитных волн. Плотность потока излучения уменьшается с увеличением расстояния обратно пропорционально квадрату расстояний. Благодаря потери энергии на излучение колебания вибратора должны быть затухающими. Чтобы иметь незатухающие колебания вибратора, необходимо к нему извне постоянно подводить энергию. Вибратор является простейшим излучателем электромагнитных волн.

Излучение рамки с током. Другим простейшим излучателем электромагнитных волн является рамка с током, которая характеризуется магнитным моментом $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}$ (рис. 255). Ее излучение аналогично излучению диполя. Приведем лишь результат. Магнитный момент рамки с током изменяется по закону

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{p}_{m_0} \cos \omega t. \tag{61.46}$$

Поместим начало сферической системы координат в центр рамки, а ось Z направим вдоль магнитного момента, т. е. на рис. 254 следует себе представлять ток текущим в плоскости $z = 0$, а магнитный момент тока $\mathbf{p}_m$ расположенным как $\mathbf{p}$. Для поля излучения рамки с током получаются следующие формулы:

$$E_\varphi = -cB_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \frac{\sin\theta}{r} p_{m_0} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right),$$
$$E_r = E_\theta = 0,\ B_r = B_\varphi = 0. \tag{61.47}$$

Сравнение формул (61.47) и (61.43) показывает, что если между магнитным моментом $\mathbf{p}_{m_0}$ тока и дипольным моментом $\mathbf{p}_0$ соблюдается соотношение (рис. 256)

$$\mathbf{p}_{m_0} = c\mathbf{p}_0, \tag{61.48}$$

то напряженность электрического поля и магнитная индукция излучения диполя равны по модулю соответствующим модулям векторов поля излучения рамки с током, изменяется лишь их направление в пространстве. У диполя напряженность электрического поля направлена по меридианам, а у рамки перпендикулярно меридиональным плоскостям по параллелям. Соответствующим образом изменяется и ориентировка векторов магнитного поля. Как видно из (61.47) и (61.43), векторы поля излучения диполя и рамки с током находятся между собой в следующем соотношении:

$$E_\varphi \text{ (рамки)} = -cB_\varphi \text{ (диполя)},\ cB_\theta \text{ (рамки)} = E_\theta \text{ (диполя)}. \tag{61.49}$$

Мощность излучения рамки с током определяется формулами (61.44) и (61.45) с заменой в них дипольного момента на магнитный момент по формуле (61.48).

Вибратор и рамка с током являются элементарными излучателями электромагнитных волн. Излучение более сложных систем может быть сведено к элементарным излучателям с помощью принципа суперпозиции.

Излучение ускоренно движущегося электрона. Поместим мысленно в начало координат положительный заряд, равный по величине заряду электрона. Он неподвижен и по закону Кулона создает в окружающем пространстве постоянное по времени электрическое поле, напряженность которого убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Совокупность движущегося электрона и неподвижного положительного заряда составляет диполь, момент которого изменяется со временем. Векторы поля излучения диполя являются переменными и убывают обратно пропорционально первой степени расстояния. Ясно, что постоянное электрическое поле неподвижного заряда компенсируется электрическим полем электрона и какого-либо отношения к полю излучения иметь не может, т. е. поле излучения является полем излучения колеблющегося электрона. Положительный заряд помещен в начало координат лишь мысленно, что позволяет воспользоваться полученными выше формулами для излучения диполя с переменным во времени моментом.

Возникающий при отклонении электрона от начала координат на $z(t)$ дипольный момент равен

$$\mathbf{p}(t) = -|e|z(t)\,\mathbf{i}_z, \tag{61.50}$$

где $\mathbf{i}_z$ – единичный вектор вдоль оси Z. Знак минус возник из-за того, что дополнительный момент направлен от отрицательного заряда к положительному. Принимая, что

$$z = b\cos\omega t, \tag{61.51}$$

где b – амплитуда колебания электрона, для дипольного момента (61.50) получаем

$$\mathbf{p} = -\mathbf{i}_z |e| b \cos\omega t. \tag{61.52}$$

Сравнение (61.52) с действительной частью (61.36) для диполя показывает, что момент $\mathbf{p}_0$ в формуле (61.36) связан с величинами, характеризующими движение электрона, соотношениями:

$$\mathbf{p}_0 = -\mathbf{i}_z |e| b,\ p_0 = |e| b. \tag{61.53}$$

Формула (61.43), характеризующая векторы поля излучения, принимает теперь вид:

$$E_\theta = cB_\varphi = -\frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} |e| b \cos\omega\left(\tau - \frac{r}{c}\right), \tag{61.54}$$

$$E_\vartheta = E_r = 0,\ B_r = B_\vartheta = 0,$$

где τ – время прихода волны в точку наблюдения на сфере радиусом r. Переменная $t = \tau - r/c$ зарезервирована для времени, характеризующего движение электрона. Из формулы (61.51) следует, что

$$\ddot{z} = -\omega^2 b \cos \omega t, \tag{61.55}$$

и поэтому (61.54) можно переписать:

$$E_\vartheta(r, \tau) = cB_\varphi(r, \tau) = \frac{|e|}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \ddot{z}\Big|_{\tau = t - r/c} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \ddot{z}\Big|_{t = \tau - r/c}, \tag{61.56}$$

где учтено, что заряд электрона отрицателен. Формула (61.44) для мощности излучения принимает следующий вид:

$$\boxed{P = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2.} \tag{61.57}$$

Т. е. *мощность излучения пропорциональна квадрату ускорения электрона. Равномерно движущийся заряд не излучает.*

Формулы (61.56) и (61.57) получены для модели колеблющегося электрона. Однако они зависят только от ускорения электрона в любой данный момент времени. Следовательно, описываемое ими поле излучения не зависит от того, как электрон двигался до данного момента и как он будет двигаться после этого момента. Поэтому они всегда применимы и представляют выражения для напряженности и индукции поля излучения и мощности излучения в зависимости от ускорения при любом движении. Однако при этом скорости электрона должны быть малы, поэтому, строго говоря, это формулы для покоящегося электрона, обладающего ускорением, что очевидно из определения диполя, занимающего бесконечно малую область пространства и покоящегося в ней.

Однако обобщение этих формул на произвольные скорости не составляет труда. Для этого надо просто перейти в ту систему координат, где электрон движется с произвольной скоростью, и воспользоваться формулами преобразования полей и ускорений. В результате получаются формулы, справедливые для произвольных скоростей и ускорений заряда. Здесь они не приводятся.

Сила торможения излучением. Из-за излучения электрон теряет свою энергию и замедляется, т. е. на него действует тормозящая сила. Найдем ее. Очевидно, что уравнение колебаний электрона с учетом силы торможения имеет вид

$$m\ddot{z} + m\omega^2 z = F, \tag{61.58}$$

где ω – частота свободных колебаний при отсутствии силы торможения излучением. Умножая обе части этого уравнения на $\dot{z}$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2} z^2\right) = F\dot{z}. \tag{61.59}$$

В правой части (61.59) стоит работа силы торможения излучением, отнесенная ко времени. По определению она равна мощности излучения [см. (61.57)], поэтому

$$F\dot{z} = -\frac{1}{6\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2. \tag{61.60}$$

Равенство (61.60) выражает закон сохранения энергии при излучении. В общем виде из него нельзя найти силы F в виде функции от z и ее производных. Это можно сделать лишь приближенно, предполагая, что:

1) излучение, а следовательно, и затухание колебаний не очень велики, так что в течение некоторого числа периодов движение можно считать практически периодическим;

2) из закона сохранения энергии для средних величин, относящихся к небольшому числу периодов, можно вывести заключения о равенстве мгновенных значений соответствующих величин.

Исходим из очевидного равенства:

$$\ddot{z}^2 = -\dddot{z}\dot{z} + (\ddot{z}\dot{z})'. \tag{61.61}$$

Усредняя $(\ddot{z}\dot{z})'$ по одному периоду и пользуясь первым из предположений, имеем

$$\langle(\ddot{z}\dot{z})'\rangle = \frac{1}{T}\left[(\dot{z}\ddot{z})_{t=T} - (\dot{z}\ddot{z})_{t=0}\right] = 0. \tag{61.62}$$

Тогда (61.60) с учетом (61.61) и (61.62) принимает вид

$$\langle F\dot{z}\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \langle -\dddot{z}\dot{z}\rangle. \tag{61.63}$$

На основании второго допущения находим

$$F = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}. \tag{61.64}$$

Эта формула определяет силу торможения излучением. Уравнение колебаний электрона с учетом силы торможения имеет вид

$$m\ddot{z} + m\omega^2 z - \left[e^2/(6\pi\varepsilon_0 c^3)\right] \dddot{z} = 0. \tag{61.65}$$

В электродинамике выражение для силы торможения обобщается на произвольное движение. Оно там тоже описывается третьей производной по собственному времени от соответствующих величин, характеризующих движение электрона. Получаемое при этом уравнение релятивистски инвариантно. Долго считалось, что это уравнение описывает реакцию излучения. Однако недавно был проведен расчет на ЭВМ ряда простых случаев движения и были получены заведомо бессмысленные результаты. Поэтому вопрос о релятивистски инвари-

антном классическом описании движения электрона с учетом реакции излучения в настоящее время не может считаться решенным.

Наличие силы торможения подтверждено экспериментально в ускорителях. Как уже было сказано, заряженные частицы в ускорителе испытывают небольшие гармонические колебания около равновесной орбиты, называемые бетатронными (см. § 56). Кроме того, заряд при своем движении интенсивно излучает. Сила торможения излучением вызывает затухание бетатронных колебаний.

§ 62. Распространение электромагнитных волн в диэлектриках

Рассматриваются основные свойства и особенности распространения электромагнитных волн в диэлектриках.

Плоские волны. *Электромагнитная волна называется плоской, если вектор волны имеет одну и ту же величину во всех точках любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.* От плоскости к плоскости эти векторы, конечно, изменяются. Можно сказать, что поверхностями постоянной фазы в плоской волне являются плоскости, перпендикулярные направлению распространения. *Волна называется монохроматической, если векторы волны изменяются со временем по гармоническому закону с определенной одной частотой.* Например, если плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси Z, то векторы поля волны имеют вид:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}(z)\, e^{i\omega t};\ \mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}(z)\, e^{i\omega t}. \tag{62.1}$$

Если поверхности постоянной фазы совпадают с поверхностями постоянной амплитуды, то волна называется однородной.

Уравнения для векторов поля волны. Будем исходить не из потенциалов, как в § 61, а непосредственно из векторов поля. Рассмотрим случай однородной неограниченной среды $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Проводимость диэлектрика $\gamma = 0$. Уравнения Максвелла имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{62.2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{62.3}$$

Дифференцируя обе части уравнения (62.2) по времени и исключая в левой части полученного равенства производную $\partial \mathbf{B}/\partial t$ с помощью (62.3), получаем

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{62.4}$$

Воспользовавшись формулой (П.10) и учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, поскольку свободные заряды отсутствуют, находим уравнение для $\mathbf{E}$:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{62.5}$$

Аналогично находим уравнение для $\mathbf{B}$:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{62.6}$$

Таким образом, векторы поля удовлетворяют волновому уравнению, в котором скорость распространения равна

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = c/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}. \tag{62.7}$$

Формула (62.7) показывает, что *в диэлектрике скорость распространения или меньше, чем в вакууме.*

Векторы волны. Совместим ось Z с направлением распространения электромагнитной волны. Векторы поля при этом определяются формулами вида (62.1). Подставляя в (62.5) выражение для $\mathbf{E}$ [см. (62.1)] и сокращая обе части уравнения на $e^{i\omega t}$ после дифференцирования, находим для $\mathbf{E}(z)$ уравнение

$$d^2\mathbf{E}(z)/dz^2 + k^2 \mathbf{E}(z) = 0, \tag{62.8}$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Общее решение этого уравнения таково:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_{01} e^{-ikz} + \mathbf{E}_{02} e^{ikz}, \tag{62.9}$$

где $\mathbf{E}_{01}$ и $\mathbf{E}_{02}$ — постоянные. Подставляя (62.9) в (62.1), находим

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_{01} e^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{E}_{02} e^{i(\omega t + kz)}. \tag{62.10}$$

Первое слагаемое в правой части (62.10) представляет собой волну, распространяющуюся в направлении положительных значений оси Z, а второе — в отрицательном направлении [см. (61.12)].

Аналогично находим и решение для $\mathbf{B}$. Допустим, что волна распространяется в положительном направлении оси Z. Тогда

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)};\ \mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - kz)}. \tag{62.11}$$

Такая волна является плоской, монохроматической и однородной.

Фазовая скорость. Формулы (62.11) показывают, что плоские волны в однородном диэлектрике распространяются без изменения амплитуды, т. е. без поглощения. Скорость движения плоскости постоянной фазы называется **фазовой**. Она находится дифференцированием по времени условия постоянства фазы:

$$\omega t - kz = \text{const}, \tag{62.12}$$

которое дает

$$\omega - k\frac{dz}{dt} = 0, \tag{62.13}$$

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}. \tag{62.14}$$

Формулы (62.11) записаны при специальном выборе системы координат, когда ось Z совпадает с направлением распространения волны. От этого ограничения можно освободиться с помощью волнового вектора $\mathbf{k}$, который направлен вдоль распространения волн, а по модулю определяется (61.8). По определению плоской волны, распространяющейся в направлении вектора $\mathbf{k}$, векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в любой точке плоскости, перпендикулярной этому направлению, а в данном случае оси Z, одни и те же. Пусть $\mathbf{r}$ – радиус-вектор некоторой точки на такой плоскости постоянной фазы.

Очевидно, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kz$ (рис. 257), и вместо (62.11) можно написать:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})};\quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \tag{62.15a}$$

Длина волны. По определению, это расстояние, на которое точка постоянной фазы перемещается за один период колебаний:

$$\lambda = vT = \omega T/k = 2\pi/k, \tag{62.15б}$$

где

$$k = 2\pi/\lambda \tag{62.15в}$$

– **волновое число.**

Свойства волн. Для исследования свойств плоских волн подставим выражения (62.15а) в (62.2) и (62.3). Для упрощения вычислений целесообразно воспользоваться символическим операторным представлением векторных операций. Исходным является **векторный оператор набла:**

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{62.16}$$

где $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ – единичные векторы в направлении осей координат.

Нетрудно проверить, что с помощью этого оператора основные операции векторного анализа представляются так:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi,\ \operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A},\ \operatorname{rot} = \nabla\times\mathbf{A}, \tag{62.17}$$

где $\nabla\cdot\mathbf{A}$ и $\nabla\times\mathbf{A}$ – скалярное и векторное произведения оператора ∇ на вектор $\mathbf{A}$. Учтем, что

$$\nabla e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -i\mathbf{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{62.18}$$

С помощью уравнений Максвелла и выражений (63.15а) можно исследовать свойства плоских волн. Уравнение Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ дает

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla\cdot\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0. \tag{62.19}$$

Это означает, что вектор напряженности $\mathbf{E}$ волны перпендикулярен $\mathbf{k}$, т. е. перпендикулярен направлению ее распространения. Аналогично, уравнение Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \nabla\cdot\mathbf{B} = -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{62.20}$$

показывает, что и $\mathbf{B}$ также перпендикулярно направлению распространения волны. Подставляя выражения (62.15а) в (62.2) и (62.3), находим:

$$-\mathbf{k}\times\mathbf{B} = \varepsilon\mu\omega\mathbf{E}, \tag{62.21}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \omega\mathbf{B}. \tag{62.22}$$

Пусть $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны. Тогда на основании (62.8) можно написать

$$\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \mathbf{n}\omega/v. \tag{62.23}$$

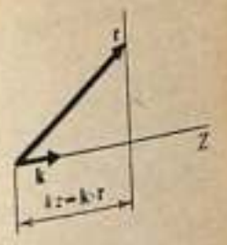
Поэтому [см. (62.22)]

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} = v\mathbf{B}. \tag{62.24}$$

С помощью (62.19) и (62.20) было показано, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ перпендикулярны $\mathbf{n}$. Формулы (62.21), (62.22) и (62.24) показывают, что эти векторы также перпендикулярны друг другу. Взяв от обеих частей равенства (62.24) модули величин, находим

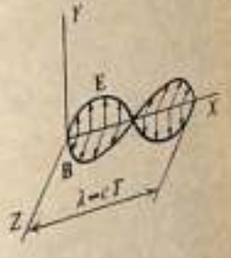
$$E = vB, \tag{62.25}$$

Из соотношения (62.24) можно заключить, что в однородном диэлектрике векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ изменяются в одной фазе. Все формулы этого параграфа справедливы для вакуума, если положить $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $v = c$ – скорость света. Изменение векторов плоской волны в пространстве показано на рис. 258.



257

Поверхность постоянной фазы плоской волны



258

Гармоническая плоская электромагнитная волна

Плотность потока энергии. Она определяется вектором Пойнтинга, модуль которого в случае плоской волны равен

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E}\times\mathbf{H}| = |\mathbf{E}||\mathbf{H}| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu^2}B^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}), \tag{62.26а}$$

где $1/\sqrt{\varepsilon\mu} = v$ – скорость распространения волны, а

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \tag{62.26б}$$

– объемная плотность энергии в ней. Выражение для потока энергии может быть

● **Электромагнитные волны излучаются лишь переменными токами и ускоренно движущимися электрическими зарядами. Постоянные ток и заряды, движущиеся равномерно и прямолинейно, не излучают.**

○ **В чем состоит физическая процессы, приводящие к возможности существования электромагнитных волн? Каково строение плоской волны и чему равна скорость ее распространения в вакууме?**

представлено в виде

$$\mathbf{S} = w\mathbf{v}. \tag{62.27}$$

Это означает, что *скорость переноса энергии плоской волной в однородном диэлектрике равна фазовой скорости волны.*

§ 63. Распространение электромагнитных волн в проводящих средах

Рассматриваются основные свойства и особенности распространения электромагнитных волн в проводящих средах.

Комплексная диэлектрическая проницаемость. Рассматривается случай однородной среды: $\mu = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$ ($\gamma \neq 0$, т. е. среда является проводящей). Уравнения Максвелла при этом имеют вид:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{j} + \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu\gamma\mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{63.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{63.2}$$

где использованы символические обозначения векторных операций и учтено, что $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$. Подставляя в эти уравнения выражения (62.15а) для векторов поля, находим:

$$-\mathbf{k}_\omega \times \mathbf{B} = \omega\mu\left[\varepsilon + \gamma/(i\omega)\right]\mathbf{E}, \tag{63.3}$$

$$\mathbf{k}_\omega \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}, \tag{63.4}$$

причем $\mathbf{k}$ в (62.15а) обозначено $\mathbf{k}_\omega = \mathbf{k}^{(0)}k_\omega$, где $\mathbf{k}^{(0)}$ – единичный вектор.

Уравнение (63.3) переходит в уравнение (62.21) для диэлектриков при $\gamma = 0$. Уравнение (63.4) не отличается от соответствующего уравнения для диэлектриков. Таким образом, проводящая среда в математическом отношении отличается от диэлектрика лишь тем, что в уравнении для нее вместо диэлектрической проницаемости ε входит комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon + \gamma/(i\omega) = \varepsilon - i\gamma/\omega. \tag{63.5}$$

Все последующие вычисления совпадают с вычислениями для диэлектриков, надо лишь вместо ε пользоваться ε_ω. Таким образом, вместо действительного волнового числа k появляется комплексная величина k_ω, причем

$$k_\omega^2 = \omega^2\varepsilon_\omega\mu = \omega^2\varepsilon\mu - i\omega\gamma\mu. \tag{63.6}$$

Представив k_ω в виде комплексного числа:

$$k_\omega = k - is, \tag{63.7}$$

перепишем равенство (63.6) в виде

$$k^2 - 2iks - s^2 = \omega^2\varepsilon\mu - i\omega\gamma\mu. \tag{63.8}$$

Приравнивая действительные и мнимые части (63.8), находим:

$$k^2 - s^2 = \omega^2\varepsilon\mu \equiv a, \tag{63.9}$$

$$2ks = \omega\gamma\mu \equiv b. \tag{63.10}$$

Решение этой алгебраической системы уравнений таково:

$$k^2 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + 1\right) = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1\right), \tag{63.11}$$

$$s^2 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - 1\right) = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon\mu}\right)^2} - 1\right). \tag{63.12}$$

Глубина проникновения. Исследуем амплитуду плоской волны, распространяющейся в направлении положительных значений оси Z:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_\omega z)} = E_0 e^{-sz} e^{i(\omega t - kz)}. \tag{63.13}$$

Таким образом, амплитуда волны в процессе распространения уменьшается, т. е. в проводящей среде электромагнитная волна распространяется с затуханием амплитуды. На пути

$$\Delta = 1/s \tag{63.14}$$

амплитуда напряженности поля волны уменьшается в e раз, поэтому Δ называется **глубиной проникновения** плоской волны в проводящую среду.

Оценим глубину проникновения волн различной длины волны. Для видимого света длина волны равна

$$\lambda \approx (0{,}4 \div 0{,}75)\,10^{-6}\ \text{м}, \tag{63.15}$$

что соответствует частоте ω порядка $5 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$. Проводимость металлов имеет порядок $10^7\ \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, а значение ε может быть приято равным ε_0. Таким образом,

$$\gamma/(\varepsilon\omega) \approx 2 \cdot 10^2 \gg 1. \tag{63.16}$$

При длинах волн, больших, чем световая, это неравенство усиливается. Поэтому в формуле (63.12) можно пренебречь единицей по сравнению с $\gamma/(\varepsilon\omega)$ и записать выражение для s в виде

$$s \approx \sqrt{\omega\gamma\mu/2}. \tag{63.17}$$

Следовательно, глубина проникновения равна

$$\Delta \approx 1/s \approx \sqrt{2/(\omega\gamma\mu)}. \tag{63.18}$$

Поскольку длина волны λ связана с частотой ω соотношением $\omega = 2\pi/(\lambda\sqrt{\varepsilon\mu})$, формулу (63.18) можно переписать:

$$\Delta \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\gamma}}\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \tag{63.19}$$

где $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ имеет размерность сопротивления и является характеристическим сопротивлением среды. Для вакуума оно равно

$$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377 \text{ Ом}. \tag{63.20}$$

Рассмотрим, например, медь, для которой $\gamma = 5 \cdot 10^7$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$, $\mu \approx \mu_0$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0$. При $\lambda = 1$ м глубина проникновения равна $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-6}$ м. Поэтому ни о каком проникновении волны в проводящую среду, в сущности, не может быть и речи, есть просто поглощение в очень малом поверхностном слое. Даже для очень коротких волн это заключение остается справедливым. Например, для длин волн порядка световых ($\lambda \approx 10^{-6}$ м) глубина проникновения составляет $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-9}$ м.

Физическая причина поглощения. Физической причиной такого быстрого затухания электромагнитных волн в проводящей среде является преобразование электромагнитной энергии волны в джоулеву теплоту: *напряженность электрического поля волны возбуждает в проводящей среде токи проводимости, которые по закону Джоуля — Ленца нагревают вещество среды.*

Интерпретация скин-эффекта. Теперь можно дать интерпретацию скин-эффекта. Формула (53.19) для толщины скин-слоя совпадает с формулой (63.18) для глубины проникновения электромагнитной волны в проводник, что имеет глубокую физическую основу.

Энергия, переносимая током, движется в пространстве вокруг проводников в виде электромагнитной энергии. Часть ее через поверхность проводника проникает внутрь проводника, чтобы поддержать движение электронов, и там превращается в кинетическую энергию электронов, которая, в свою очередь, превращается в джоулеву теплоту. Поэтому ток может поддерживаться в тех частях проводника, в которые из окружающего пространства поступает электромагнитная энергия. Поскольку эта энергия может проникнуть в проводник лишь на глубину Δ [см. (63.18)], то только в пределах такой глубины около поверхности проводника и может существовать ток, т. е. Δ есть толщина скин-слоя.

Фазовая скорость и длина волны в проводящей среде. Формула (62.14) с учетом (63.13) и (63.11) принимает вид:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left\{ \frac{2}{\left\{1 + \left[\gamma/(\omega\varepsilon)\right]^2\right\}^{1/2} + 1} \right\}^{1/2}. \tag{63.21}$$

Эта скорость меньше скорости волн в непроводящей среде с теми же значениями μ и ε, т. е. наличие в среде проводимости уменьшает фазовую скорость. Длина волны в проводящей среде равна

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \left\{ \frac{2}{\left\{1 + \left[\gamma/(\omega\varepsilon)\right]^2\right\}^{1/2} + 1} \right\}^{1/2}, \tag{63.22}$$

т. е. уменьшается по сравнению с длиной волны в непроводящей среде с теми же значениями μ и ε.

Формула (63.22) показывает, что в проводящей среде фазовая скорость зависит от частоты, т. е. наблюдается явление дисперсии. Поэтому проводящая среда всегда является диспергирующей. Наиболее существенной особенностью распространения сигналов в диспергирующих средах является изменение их формы в процессе распространения.

Соотношение между фазами колебаний векторов поля. Комплексную величину k_ω в (63.7) удобно представить в экспоненциальной форме:

$$k_\omega = |k_\omega| e^{i\varphi}. \tag{63.23}$$

Формула (63.4) может быть представлена в виде

$$\mathbf{B} = \frac{|k_\omega|}{\omega} e^{i\varphi} \mathbf{k}^{(0)} \times \mathbf{E}, \tag{63.24}$$

где $\mathbf{k}^{(0)}$ – единичный вектор в направлении распространения волны, в данном случае в направлении оси Z. Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ перпендикулярны этой оси.

Пусть напряженность электрического поля волны в соответствии с (63.13) выражается формулой

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-sz} e^{i(\omega t - kz)}, \tag{63.25}$$

где без ограничения общности можно считать вектор $\mathbf{E}_0$ действительным, поскольку выбор начала отсчета времени t всегда произволен. Подставляя (63.25) в (63.24), находим

$$\mathbf{B} = \frac{|k_\omega|}{\omega} \mathbf{k}^{(0)} \times \mathbf{E}_0 e^{-sz} e^{i(\omega t - kz + \varphi)}. \tag{63.26}$$

Определив действительные части выражений (63.25) и (63.26), найдем формулы для действительных колебаний векторов поля в плоской волне, распространяющейся в проводящей среде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-sz} \cos(\omega t - kz),$$

$$\mathbf{B} = \frac{|k_\omega|}{\omega} \mathbf{k}^{(0)} \times \mathbf{E}_0 e^{-sz} \cos(\omega t - kz + \varphi). \tag{63.27}$$

Следовательно, фазы колебаний электрического и магнитного векторов плоской волны различны. Из (63.7) находим

$$\operatorname{tg}\varphi = -s/k = \sqrt{\varepsilon\mu/\gamma} - \sqrt{1 + (\varepsilon\mu/\gamma)^2}, \tag{63.28}$$

т. е. угол φ отрицателен. Это означает, что фаза $\mathbf{B}$ достигает некоторого значения позднее, чем фаза $\mathbf{E}$. Это проявляется двумя путями.

Если рассматривать колебания векторов волны в фиксированной точке, мимо которой движется волна, то $\mathbf{B}$ достигает своего, например, максимального значения позднее, чем $\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{B}$ как функция времени отстает от $\mathbf{E}$.

Если рассматривать волну в фиксированный момент времени, то $\mathbf{B}$ достигает своего, например, максимального значения при меньших значениях z, чем $\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{B}$ как функция от z опережает $\mathbf{E}$.

Эти утверждения взаимно дополняют друг друга и находят свое единство в том факте, что бегущая электромагнитная волна движется в направлении своего распространения (в данном случае в направлении положительных значений оси Z).

Соотношение между амплитудами векторов поля. Из (63.25) и (63.26) следует, что

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} = \frac{|k_\omega|}{\omega} = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\{1 + [\gamma/(\varepsilon\mu)]^2\}^{1/4}. \tag{63.29}$$

Сравнивая (63.29) с (62.25), видим, что в проводящей среде $|\mathbf{B}|$ относительно $|\mathbf{E}|$ больше, чем в непроводящей среде с теми же значениями μ и ε.

§ 64. Инвариантность плоской волны

Обсуждаются инварианты преобразований электромагнитного поля и следствия из анализа инвариантов.

Преобразование полей. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой напряженности полей изменяются. Формулами преобразования являются равенства (11.15).

Может случиться, что в одной инерциальной системе отсчета имеются электрическое и магнитное поля, а в другой – только электрическое и т. д.

Плоская электромагнитная волна характеризуется вполне определенными свойствами: векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ взаимно перпендикулярны и их модули связаны соотношением $E = cB$. Спрашивается, сохраняются ли эти свойства векторов поля при переходе в другую инерциальную систему отсчета? Если сохраняются, то понятие плоской электромагнитной волны является релятивистски инвариантным, отражающим внутренние свойства электромагнитного поля плоской волны. Если нет, то это понятие зависит от случайного выбора той или иной инерциальной системы отсчета и не определяет объективно существующего физического объекта. С помощью формул (11.15) нетрудно проверить, что векторы напряженностей электромагнитного поля, удовлетворяющие условию плоской волны в одной системе координат, удовлетворяют этим условиям в любой другой системе координат, т. е. *плоская волна является релятивистски инвариантным понятием, определяющим объективно существующий физический объект.* Вместо прямой проверки частного утверждения об инвариантности плоской волны целесообразно проанализировать более широкий вопрос об инвариантах преобразований электромагнитного поля и утверждение об инвариантности плоской волны обосновать как частный вывод, наряду с которым, однако, получаются и многие другие важные выводы.

Инварианты преобразований электромагнитного поля. Инвариантами преобразований электромагнитного поля называются такие величины, составленные из векторов поля, которые не изменяют своего

значения при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Векторы поля в разных системах координат связаны между собой преобразованиями (11.15).

Существуют способы нахождения инвариантов преобразований. С помощью формул (11.15) прямым вычислением можно проверить, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не изменяют своей величины следующие инварианты:

$$I_1 = c^2B^2 - E^2,\ I_1' = H^2 - c^2D^2; \tag{64.1}$$

$$I_2 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E},\ I_2' = \mathbf{H}\cdot\mathbf{D}; \tag{64.2}$$

$$I_3 = \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}. \tag{64.3}$$

Проверим, для примера, что величина I_2 является инвариантом. По формулам (11.15) имеем

$$\mathbf{B}'\cdot\mathbf{E}' = B_x'E_x' + B_y'E_y' + B_z'E_z' = B_xE_x + \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{B_y + (v/c^2)E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} +$$

$$+ \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{B_z - (v/c^2)E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = B_xE_x + B_yE_y + B_zE_z = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E}. \tag{64.4}$$

Аналогично доказывается инвариантность и других величин.

Плоская волна определяется равенством нулю инвариантов $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$, а ее инвариантность не требует дальнейшего доказательства, поскольку I_1 и I_2 – инварианты. Однако инвариантность величин (64.1)–(64.3) позволяет сделать и некоторые другие важные выводы о поведении электромагнитных полей при переходе от одной системы отсчета к другой.

Анализ инвариантов поля. Из инвариантности величин (64.1)–(64.3) можно сделать следующие выводы:

1) если в некоторой инерциальной системе отсчета $c^2B^2 > E^2$ и $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$, то можно выбрать такую инерциальную систему отсчета, где электрическое поле отсутствует, а магнитное отлично от нуля. Если же $\mathbf{B}$ не перпендикулярно $\mathbf{E}$, то такой инерциальной системы отсчета не существует;

2) если в некоторой инерциальной системе отсчета $c^2B^2 < E^2$ и $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$, то можно выбрать такую инерциальную систему отсчета, где магнитное поле отсутствует, а электрическое отлично от нуля. Если же $\mathbf{B}$ не перпендикулярно $\mathbf{E}$, то такой инерциальной системы отсчета не существует;

3) если в какой-либо инерциальной системе отсчета имеется только электрическое поле или только магнитное, то при переходе к другой инерциальной системе отсчета имеется, вообще говоря, как электрическое, так и магнитное поля, которые перпендикулярны друг другу. $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, во всех инерциальных

4) плоская волна, для которой $E = cB$, системах отсчета остается плоской волной.

§ 65. Давление электромагнитных волн. Импульс фотона

Описывается механизм возникновения давления электромагнитных волн. Вычисляется объемная плотность импульса электромагнитной волны и определяется импульс фотона.

Механизм возникновения давления. Если плоская волна распространяется в проводящей среде, то ее электрическое поле возбуждает в среде объемную плотность тока проводимости по закону Ома:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \tag{65.1}$$

На элемент тока $\mathbf{j}\,dV$ со стороны магнитного поля волны действует сила (рис. 259):

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}\,dV = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B}\,dV, \tag{65.2}$$

направленная по вектору $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, т. е. в сторону распространения волны. Обозначив $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны, можно написать:

$$d\mathbf{F} = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B}\,dV = \mathbf{n}\gamma EB\,dV = \mathbf{n}jE\,dV/v = \mathbf{n}\,dP/v, \tag{65.3}$$

где использовано соотношение между модулями векторов плоской волны ($E = vB$) и принят во внимание закон Джоуля – Ленца $dP = jE\,dV$. Следует обратить внимание, что в формуле (65.3) величина dP – поглощенная энергия, отнесенная ко времени.

Давление. Пусть из вакуума на проводящую среду падает поток энергии электромагнитных волн, который весь поглощается. В 1 с на элемент поверхности dS падает в соответствии с формулой (62.27) энергия

$$dP = vw\,dS, \tag{65.4}$$

которая поглощается и создает на нормали к поверхности силу (65.3), на основании (65.4) равную

$$d\mathbf{F} = \mathbf{n}w\,dS. \tag{65.5}$$

Поэтому давление по нормали к поверхности равно

$$p_д = \frac{dF}{dS} = nw. \tag{65.6}$$

Величина

$$w = {}^1/_2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \tag{65.7}$$

есть объемная плотность энергии электромагнитных волн.

Импульс луча электромагнитных волн. Допустим, что энергия W, заключенная в некотором объеме в луче электромагнитных волн, поглощается в некотором объеме проводящего тела в течение промежутка времени Δt. Тогда в соответствии с (65.3) на этот объем тела

действует сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{n}\frac{W}{\Delta t}\frac{1}{v}. \tag{65.8}$$

По закону Ньютона, сила, действующая на объем, связана с импульсом, приобретенным объемом, соотношением

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}/\Delta t. \tag{65.9}$$

Подставляя (65.9) в (65.8), получаем

$$\mathbf{p} = \mathbf{n}\frac{W}{v}. \tag{65.10}$$

Формула (65.10) содержит фундаментальное утверждение: *луч электромагнитных волн, обладающий энергией W и движущийся со скоростью v, обладает импульсом $\mathbf{p}$, связанным с энергией соотношением (65.10). Импульс направлен в сторону распространения волн.*

Объемная плотность импульса электромагнитных волн. Разделив обе части (62.10) на объем, в котором содержится энергия W, получим для объемной плотности импульса электромагнитных волн формулу

$$\mathbf{G} = \mathbf{p}/V = \mathbf{n}w/v, \tag{65.11}$$

где $w = W/V$ – плотность электромагнитной энергии в плоской волне. С помощью (62.27) выражение (65.11) может быть записано в виде

$$\mathbf{G} = \mathbf{S}/v^2, \tag{65.12}$$

где $\mathbf{S}$ – вектор Пойнтинга, v – скорость движения волн.

Давление электромагнитных волн может рассчитываться по изменению их импульса. Например, если электромагнитные волны падают по нормали к поверхности и полностью поглощаются, то давление, в соответствии с формулой (65.12), равно

$$p_д = vG = S/v = w, \tag{65.13}$$

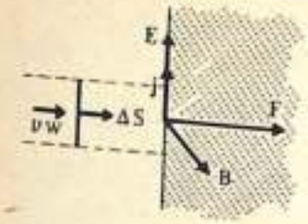
что, конечно, совпадает с (65.6). Если же волна полностью отражается, по телу передается двойной импульс и давление равно

$$p_д = 2vG = 2w. \tag{65.14}$$

Аналогично может быть рассчитано давление при частичном поглощении, при косом падении на поверхность и т. д.

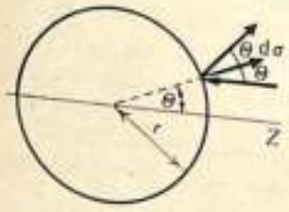
Впервые экспериментально давление световых волн было обнаружено в 1900 г. П. Н. Лебедевым (1866 – 1912). Как видно из (65.14), давление очень мало. Например, при потоке 1,4 кВт/м², что приблизительно равно потоку солнечной энергии на орбите Земли, световое давление составляет около 5 мкПа. Поэтому потребовалась разработка очень тонких методов измерения.

Импульс фотона. В соответствии с квантовыми представлениями свет представляет собой совокупность квантов энергии, называемых фотонами. Энергия фотона связана с частотой света соотношением



259

Схема возникновения давления электромагнитной волны



260

К вычислению давления электромагнитного излучения на абсолютно отражающую сферу

● **Напряженность электрического поля плоской волны возбуждает в проводящей среде токи проводимости, в результате взаимодействия которых с индукцией магнитного поля волны возникает сила Лоренца, проявляющаяся в виде давления электромагнитной волны.**

○ Что представляет собой в классической модели сила, приводящая к возникновению давления при поглощении электромагнитной волны в проводящей среде? Чем определяется плотность импульса электромагнитной волны?

Эйнштейна:

$$\boxed{\varepsilon = \hbar\omega,} \tag{65.15}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка. *Наличие светового давления заставляет признать, что фотоны обладают также и импульсом.* В соответствии с (65.10) импульс фотона равен

$$\mathbf{p} = \mathbf{n}\hbar\omega/c, \tag{65.16}$$

где c – скорость распространения света в вакууме. Перепишем формулу (65.16) с учетом (62.23):

$$\boxed{\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}} \tag{65.17}$$

Соотношение (65.17) является наряду с (65.15) фундаментальным уравнением квантовой теории света.

Пример 65.1. *Определить силу, с которой фотоны, объемная плотность потока энергии которых S, действуют на абсолютно отражающую сферу радиусом r* (рис. 260).

Вследствие аксиальной симметрии распределения давлений от нуля отлична только составляющая силы в направлении первоначального потока фотонов. На элемент поверхности $d\sigma$ (рис. 260) в соответствии с формулой (65.13) действует направленная к центру сферы сила $dF = (2S/c)\cos\theta\, d\sigma$, а составляющая этой силы в направлении оси Z равна

$$dF_z = -(2S/c)\cos^2\theta\, d\sigma.$$

Площадь элемента поверхности в сферической системе координат $d\sigma = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\alpha$, где α – аксиальный угол в плоскости, перпендикулярной оси Z. Для полной силы вдоль оси Z получаем

$$F_z = -\left(\frac{2S}{c}\right) r^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3}\,\frac{S}{c}\,r^2,$$

т. е. сила в $^4/_3$ раза больше, чем в случае, когда вся энергия потока поглощается сферой

§ 66. Волноводы и резонаторы

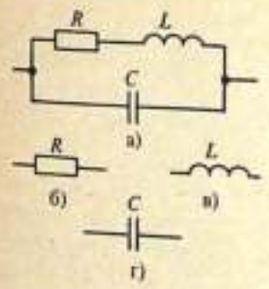
Описываются основные характеристики волноводов и особенности распространения электромагнитных волн в них. Дается классификация волн в волноводах. Обсуждается принцип действия резонатора.

Участок цепи. Любой участок цепи обладает омическим сопротивлением, емкостью и индуктивностью. Эквивалентная схема участка цепи изображена на рис. 261, *а*. Омическое сопротивление R всегда имеется потому, что провода обладают омическим сопротивлением. Емкость возникает потому, что на участке цепи всегда имеются поверхностные или объемные заряды и электрические поля, в которых запасается энергия электрического поля. При протекании тока по участку цепи возбуждается магнитное поле, в котором запасается энергия. Следовательно, участок цепи обладает также индуктивностью. Относительная роль R, C и L зависит от конкретных свойств участка цепи и от частоты.

Участок проводника. На небольшой прямолинейный участок проводника приходятся очень небольшой поверхностный заряд и энергия магнитного поля. Это означает, что емкость и индуктивность его достаточно малы. Поэтому на малых частотах емкостное сопротивление участка оказывается больше омического, а индуктивное – меньше, т. е. имеет место неравенство $1/(\omega C) \gg R \gg \omega L$. Поэтому на схеме, изображенной на рис. 261, *а*, ток протекает главным образом по участку R, L, а емкость как бы отключается. Поскольку $\omega L \ll R$, индуктивное сопротивление не имеет существенного значения и участок проводника на малых частотах изображается так, как показано на рис. 261, *б*.

С увеличением частоты сопротивление R растет. Поскольку толщина скин-слоя уменьшается как $1/\sqrt{\omega}$, можно считать, что сопротивление растет как $\sqrt{\omega}$. Индуктивность L при росте частоты уменьшается незначительно и поэтому индуктивное сопротивление ωL растет как ω. Следовательно, с увеличением частоты относительная роль индуктивности участка проводника возрастает и его уже нельзя считать просто участком с омическим сопротивлением. С увеличением частоты уменьшается емкостное сопротивление $1/(\omega C)$. Поэтому на достаточно больших частотах значительная часть тока осуществляется в виде токов смещения. Это означает, что на больших частотах эквивалентная схема участка проводника имеет вид, показанный на рис. 261, *а*, причем как R, так и L, C должны быть приняты во внимание. Их относительная роль зависит от частоты. При крайне больших частотах определяющую роль играет емкость.

Катушка индуктивности. На малых частотах у катушки $1/(\omega C) \gg \omega L \gg R$. Ток в основном протекает через R, L (рис. 261, *в*), и поскольку $R \ll \omega L$, эквивалентная схема катушки индуктивности на малых частотах имеет вид, показанный на рис. 261, *г*.



261

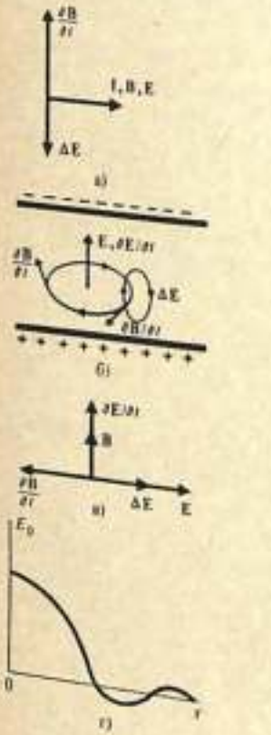
Эквивалентные схемы участка цепи при различных частотах

При увеличении частоты индуктивное сопротивление катушки растет, а емкостное уменьшается. Поэтому все большая часть тока проходит в виде тока смещения через емкости, имеющиеся между отдельными витками катушки. Наряду с индуктивностью и омическим сопротивлением начинает существенную роль играть емкость. В результате эквивалентная схема катушки индуктивности превращается в схему, изображенную на рис. 261, *а*, причем относительная роль R, L, C зависит от частоты. При очень большой частоте почти весь ток идет в виде тока смещения, как бы перескакивая с витка на виток, а индуктивность как бы выключается из цепи.

Конденсатор. На малых частотах у конденсатора емкостное сопротивление меньше, чем омическое и индуктивное [$1/(\omega C) \ll R$, $1/(\omega C) \ll \omega L$]. В результате на схеме (рис. 261, *а*) участок R, L как бы отключается и эквивалентная схема конденсатора имеет вид, показанный на рис. 261, *г*.

При увеличении частоты ситуация изменяется. Чтобы выяснить, что при этом происходит, рассмотрим для примера плоский конденсатор.

В плоском конденсаторе при росте частоты увеличивается отклонение электрического поля от однородного. Причиной этого является взаимодействие электромагнитной индукции и токов смещения. На первый взгляд кажется, что здесь картина явления должна быть аналогичной той, которая приводит к возникновению скин-эффекта (рис. 223), но это не так. Различие обусловливается другими фазовыми соотношениями между векторами полей.



262

Соотношение между напряженностями полей в конденсаторе на высоких частотах

Рассмотрим векторную диаграмму полей и токов в случае скин-эффекта (рис. 223). Индукция магнитного поля находится в фазе с силой тока и напряженностью порождающего его электрического поля. Производная от индукции магнитного поля опережает их на $\pi/2$, а порождаемая изменением магнитного поля напряженность $\Delta\mathbf{E}$ дополнительного электрического поля, непосредственно приводящего к скин-эффекту, отстает на $\pi/2$ от напряженности $\mathbf{E}$ поля. Поэтому при более строгом подходе на рис. 223 необходимо было бы принять во внимание не только пространственное распределение полей, но и фазы изменения напряженностей.

Векторная диаграмма возникновения скин-эффекта показана на рис. 262, *а*.

Расчетные формулы автоматически учитывают соотношение между фазами векторов.

В конденсаторе (рис. 262, *б*) соотношение между фазами векторов поля другое. Поскольку магнитное поле порождается токами смещения по закону

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$

его индукция находится в фазе с $\partial\mathbf{E}/\partial t$ и, следовательно, опережает на $\pi/2$ напряженность $\mathbf{E}$ (рис. 262, *в*). Поэтому возникающая по закону электромагнитной индукции напряженность $\Delta\mathbf{E}$, приводящая к перераспределению напряженности поля $\mathbf{E}$ в конденсаторе, находится в фазе с напряженностью $\mathbf{E}$ (рис. 262, *в*). Главное различие с явлениями, происходящими при возникновении скин-эффекта, состоит в разном соотношении фаз между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$: при образовании скин-эффекта их фазы совпадают, а в конденсаторе индукция магнитного поля опережает по фазе напряженность электрического поля на $\pi/2$. Поэтому, например, при нулевом электрическом поле в картине скин-эффекта индукция магнитного поля равна нулю, а в конденсаторе она имеет максимальное значение. При росте напряженности $\mathbf{E}$ поля при скин-эффекте от нулевого значения индукция магнитного поля растет и линия $\partial\mathbf{B}/\partial t$ составляет с $\mathbf{E}$ правовинтовую систему (рис. 223), а в конденсаторе она уменьшается и поэтому линии $\partial\mathbf{B}/\partial t$ составляют с $\mathbf{E}$ левовинтовую систему (рис. 262, *б*). Следовательно, напряженность $\Delta\mathbf{E}$ вихревого электрического поля направлена так, что увеличивает напряженность электрического поля в центре конденсатора и ослабляет на периферии, т. е. в конденсаторе поле ослабляется от центра к периферии. На некотором расстоянии от центра напряженность обращается в нуль, а затем изменяет свое направление на обратное (рис. 262, *г*).

Количественная характеристика этого явления может быть получена в результате решения уравнения для напряженности $\mathbf{E}$ поля, исходя из (62.5). В данном случае имеется одна компонента E и осевая симметрия задачи, т. е. $E = E(r)$, где r – расстояние от оси конденсатора до точки, в которой определяется напряженность. Полагая, как обычно,

$$E(r, t) = E_0(r)\,e^{i\omega t}$$

и считая, для определенности, что между обкладками конденсатора $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, получаем для $E_0(r)$ уравнение

$$\frac{d^2E_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_0}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2}E_0 = 0,$$

записанное в цилиндрических координатах. Это уравнение называется уравнением Бесселя с нулевым индексом, решение которого записывается в виде $J_0(\omega r/c)$. Функции Бесселя хорошо изучены. На рис. 277, *г* показан ход функции $J_0(\omega r/c)$. Наименьшими корнями функции с индексом нуль являются $\xi_1 = 2{,}40$; $\xi_2 = 5{,}52$; $\xi_3 = 8{,}65$; .... Учтем, что $\omega/c = 2\pi/\lambda$, где λ – длина электромагнитной волны с частотой ω в вакууме. Поэтому расстояния, на которых напряженность поля в конденсаторе обращается в нуль, равны

$r_i = \lambda\xi_i/(2\pi)$.

В частности, первый раз напряженность обращается в нуль на расстоянии $r_1 = \lambda\xi_1/(2\pi) = 0{,}38\lambda$. Благодаря такому поведению напряженности конденсатор уже перестает играть роль чистой емкости. Ясно, что магнитные поля в конденсаторе становятся существенными, а это означает, что вступает в игру индуктивность. Другими словами, конденсатор также теряет на высоких частотах свои первоначальные функции емкости.

Излучение. В § 61 было показано, что мощность излучения вибратора растет пропорционально четвертой степени частоты ($\sim\omega^4$), т. е. очень быстро. А это означает, что при прохождении по проводам токов высокой частоты имеет место интенсивное излучение электромагнитной энергии. При высокой частоте потери становятся столь значительными, что передача по проводам становится нецелесообразной. Необходимо найти другие способы передачи электромагнитной энергии с высокой частотой, поскольку разработанные для низких частот методы генерирования и передачи электромагнитных колебаний неприменимы для очень высоких частот.

Волноводы. Основная идея волновода состоит в том, чтобы направить электромагнитные волны по некоторому каналу, сведя к минимуму возможные потери в процессе распространения. Для этого, очевидно, надо по возможности избежать возбуждения токов проводимости и исключить проникновение электромагнитной энергии за стенки канала. Простейшей моделью волновода является полая труба, внутри которой распространяются электромагнитные волны. Основные особенности этих электромагнитных волн рассмотрим на простейшем примере – прямоугольном прямолинейном волноводе.

Прямоугольный волновод. Стенки волновода предполагаются идеально проводящими, размеры волновода и положение системы координат даны на рис. 263. В волноводах, вообще говоря, могут распространяться многие типы волн. Рассмотрим один из них.

Допустим, что электрический вектор волны направлен вдоль оси Y. Для упрощения ситуации примем длину волновода вдоль оси Y бесконечной. Это избавляет от необходимости учета граничных условий для вектора $\mathbf{E}$ на поверхностях волновода, параллельных плоскости XZ, и значительно облегчает решение задачи. Кроме того, при бесконечной протяженности волновода в направлении оси Y задачу можно

рассмотреть методом изображений, что позволяет провести физическую ситуацию и суть процессов, которые происходят при распространении волн в волноводе.

Таким образом, задача сводится к двум измерениям. Волновое уравнение для напряженности электрического поля имеет вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \tag{66.1}$$

где $E = E_y(x, z, t)$.

Поскольку стенки волновода идеально проводящие, граничное условие для E имеет вид

$$E(x, 0, t) = 0, \quad E(x, a, t) = 0. \tag{66.2}$$

Будем искать решение уравнения в виде

$$E = E_0 \sin k_z z e^{i(\omega t - k_x x)}, \tag{66.3}$$

причем для удовлетворения граничным условиям (66.2) надо положить

$$k_z a = n\pi \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{66.4}$$

Очевидно также, что решение (66.3) удовлетворяет условию отсутствия свободных зарядов в волноводе: $\operatorname{div}\mathbf{E} = \partial E_y/\partial y = 0$, $E_y = E_z = 0$. Подставляя (66.3) в (66.1), получаем

$$(-k_x^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2)\,E = 0. \tag{66.5}$$

Это равенство может быть удовлетворено лишь при условии

$$-k_x^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2 = 0, \tag{66.6}$$

из которого следует, что

$$k_x = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2}. \tag{66.7}$$

Граничная частота. Электромагнитная волна распространяется в волноводе без затухания, если в (66.3) величина k_x действительная. Это означает, что в (66.7) подкоренное выражение не должно быть отрицательным. Отсюда получаем условие, при котором в волноводе распространяются волны:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \geqslant 0 \tag{66.8}$$

или

$$\omega \geqslant \frac{\pi c}{a} n. \tag{66.9}$$

Таким образом, при заданном значении n, характеризующем форму волны в направлении оси Z, имеется **граничная частота**. Электромагнитные волны с меньшей частотой не могут распространяться в волноводе. Значение этой частоты получается из (66.9) при $n = 1$:

$$\omega_0 = \pi c/a. \tag{66.10}$$

Наличие граничной частоты означает, другими словами, существование волны с максимальной длиной волны, которая в состоянии распро-

страняться в волноводе. Учитывая, что $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$, получаем для граничной длины волны

$$\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 2a. \tag{66.11}$$

Это равенство имеет очень ясный геометрический смысл: *в рассматриваемом волноводе могут распространяться лишь волны, длина волны которых меньше удвоенного поперечного сечения волновода.*

Наличие граничной частоты является характерной чертой всех волноводов, хотя ее конкретное значение различно для различных волноводов.

Фазовая скорость. Согласно выражению (66.3) эта скорость находится из условия

$$\omega t - k_x x = \text{const}, \tag{66.12}$$

откуда

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2}} = c\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \pi^2 c^2/a^2}} > c, \tag{66.13}$$

т. е. *фазовая скорость электромагнитных волн в волноводе больше скорости света. Это также является характерной чертой волноводов, хотя конкретное значение фазовой скорости зависит от свойств волновода и типов волн.*

С учетом выражения (66.10) и (66.11) формулу (66.13) удобно представить в виде

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}}. \tag{66.14}$$

Следовательно, $\omega \geqslant \omega_0$, $\lambda \leqslant \lambda_0$, поскольку в противном случае фазовая скорость становится мнимой, т. е. распространение волн невозможно.

Длина волны в волноводе. По определению длины волны имеем

$$\lambda_в = v_\phi T = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}} > \lambda, \tag{66.15}$$

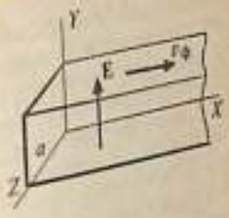
где $\lambda = cT$. Длина волны в волноводе всегда больше длины волны в свободном пространстве. Возведя обе части (66.15) в квадрат и взяв от них обратные величины, получим

$$1/\lambda_в^2 = 1/\lambda^2 - 1/\lambda_0^2. \tag{66.16}$$

Соотношение (66.16) справедливо для волноводов любой формы, хотя и было выведено здесь для частного случая.

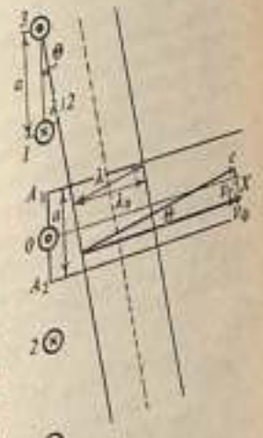
Применение метода изображений к анализу волноводов. Для более четкого выяснения физической картины распространения волн в волноводе и смысла полученных соотношений проанализируем рассмотренный пример методом изображений. В качестве элементарного

излучателя можно себе представить бесконечный прямой проводник, по которому течет переменный ток частоты ω. Этот излучатель аналогично вибратору Герца испускает волны, электрический вектор которых направлен параллельно проводнику. В случае бесконечно длинного проводника волны будут, очевидно, цилиндрическими. Однако на достаточно большом расстоянии от излучателя их можно считать плоскими.



263 Прямоугольный волновод

На рис. 264 показаны проекции стенок волновода на плоскость XZ, электрический вектор волн направлен перпендикулярно плоскости чертежа. Расположим первый излучатель в середине волновода, на расстоянии $a/2$ от каждой из его перпендикулярных плоскости чертежа стенок. Фаза колебаний излучателя обозначена точкой, т. е. ток в данный момент течет к нам. Излучатель испускает по всем направлениям волны, и поэтому на стенках волновода напряженность поля отлична от нуля. Задача состоит в том, чтобы так подобрать систему излучателей, чтобы суммарная напряженность их полей на стенках волновода все время была равна нулю. Удовлетворяющее этому условию поле и будет искомым полем в волноводе. Конечно, когда волны распространяются от воображаемых излучателей, стенки волновода тоже считаются воображаемыми и через них без препятствий проходят воображаемые волны.



264 Рассмотрение прямоугольного волновода методом изображений

Для того чтобы на стенке A_1 волновода ликвидировать поле, порождаемое излучателем *0*, необходимо на расстоянии $a/2$ от нее поместить излучатель *1*, который колеблется со сдвигом колебаний на полпериода относительно излучателя *0*. Следовательно, излучатель *1* должен колебаться в противоположной излучателю *0* фазе, что обозначено знаком (+) («ток от нас»). Волны от излучателя *1* приходят в точки стенки A_1 волновода через тот же промежуток времени, что и от излучателя *0*. Так как фазы волны от *0* и *1* на стенке A_1 отличаются на π, то сумма

● **Характерной особенностью любого волновода является наличие граничной частоты. В любом волноводе фазовая скорость электромагнитных волн больше скорости света.**

напряженностей этих волн равна нулю. Аналогично излучатель *2* гасит на стенке A_2 излучение *0*.

Однако излучатель *1* создает поле на стенке A_2, а излучатель *2* – на стенке A_1. Необходимо добавить следующие излучатели, которые погасили бы эти поля. Для того чтобы погасить излучение от *1* на стенке A_2, необходимо взять излучатель *4*, а для погашения излучения от *2* на стенке A_1 служит излучатель *3* и т. д. до бесконечности. Напряженность поля от бесконечной системы этих излучателей равна нулю на стенках A_1 и A_2. Следовательно, полученное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла, будучи суперпозицией полей, каждое из которых удовлетворяет этим уравнениям, и представляет собой искомую электромагнитную волну в волноводе. Поле вне волновода имеет вспомогательное значение и нас не интересует.

Дискретность направлений распространения плоских волн от системы излучателей. От индивидуального излучателя плоские волны распространяются во всех направлениях. Однако от системы излучателей плоские волны могут распространяться лишь во вполне определенных направлениях, а не в любых. Такими направлениями могут быть лишь те, в которых плоские волны отдельных излучателей взаимно усиливаются. Это возможно лишь в том случае, когда разность хода волн, излученных соседними излучателями, равна целому числу длин волн или половиной, поскольку соседние излучатели испускают волны в противофазе. В результате получается, что в обсуждаемом направлении от всех излучателей распространяются волны с разностью фаз в целое число периодов и, следовательно, эти волны усиливают друг друга. На рис. 264 направление распространения волн характеризуется углом θ. Условие взаимного усиления волн имеет вид

$$a \sin\theta = \lambda (m + 1/2) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{66.17}$$

Аналогичное условие можно записать для волн, распространяющихся в другую сторону от оси волновода, т. е. для отрицательных углов θ.

Граничная длина волны. Условие (66.17) показывает, что для каждой длины волны имеется минимальный к оси угол, распространения, достигаемый при $m = 0$, а также максимальное значение числа m, при котором угол равен $\theta = \pi/2$, т. е. волна распространяется перпендикулярно длине волновода. При достаточно большой длине волны уже $m = 0$ приводит к условию $\sin\theta = 1$, т. е. эта волна может распространяться только перпендикулярно оси волновода. Это означает, что волны с такой длиной волны и бóльшими длинами в волноводе распространяться не могут. Это есть граничная длина волны λ_0, определяемая из (66.17) при $\sin\theta = 1$, $m = 0$:

$$a = \lambda_0/2, \tag{66.18а}$$

что совпадает с (66.11). Этой длине волны соответствует граничная частота (66.10).

Длина волны и фазовая скорость в волноводе. Фазовой скоростью является скорость точек поверхности постоянной фазы волны в направлении волновода, т. е. скорость точки пересечения фронтом плоской волны стенок волновода. Из рис. 264 видно, что она равна

$$v_\phi = c/\cos\theta. \tag{66.18б}$$

Взяв в (66.17) волну с $m = 0$, получим $\sin\theta = \lambda/(2a)$ и представим формулу (66.18б) в виде

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{c}{\sqrt{1-[\lambda/(2a)]^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_0)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_0/\omega)^2}}, \tag{66.19}$$

что совпадает с (66.14). Таким образом, *фазовая скорость не связана с движением в пространстве какого-либо физического объекта и энергии.* Можно себе представить, что на рис. 264 ось *X* изображает кромку письменного стола, а линия, изображающая фронт волны, является линейкой. Тогда при угле θ, достаточно близком к $\pi/2$, малые скорости перемещения линейки перпендикулярно ее длине приводят к скоростям точки соприкосновения линейки с кромкой стола, превосходящим скорость света. Ясно, что наличие этой скорости не находится в противоречии с ограничением, налагаемым теорией относительности на скорость движения физических объектов и распространения взаимодействий.

Длина волны $\lambda_в$ также определяется в результате геометрического построения на рис. 264:

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\cos\theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_0)^2}}, \tag{66.20}$$

что совпадает с (66.15). Из (66.20) следует также и (66.16).

Групповая скорость. Ясно, что фазовая скорость не представляет скорости движения энергии волны вдоль волновода. Энергия в плоской волне движется в вакууме со скоростью c перпендикулярно фронту волны. В направлении оси волновода скорость движения энергии определяется проекцией скорости c на ось. Эта скорость называется **групповой.** Как видно на рис. 264, она равна

$$v_г = c\cos\theta = c\sqrt{1-(\lambda/\lambda_0)^2}. \tag{66.21}$$

Групповая скорость всегда меньше скорости света. Свое название она получила потому, что равна скорости цика суммарной амплитуды группы волн с близкими частотами, распространяющимися с различными фазовыми скоростями, зависящими от частоты. Совокупность волн с различными частотами в волноводе составляет такую группу волн, зависимость фазовых скоростей которых от частоты определяется формулой (66.14). Важнейшее физическое свойство групповой скорости уже было сформулировано – это скорость движения энергии, связанной с волнами.

Соотношение между групповой и фазовой скоростями. Перемножая почленно (66.21) и (66.19), получаем

$$\boxed{v_\phi v_г = c^2.} \tag{66.22}$$

Это соотношение является фундаментальным в теории распространения волн и имеет универсальный характер, хотя и получено для частного примера и специальным методом.

Магнитное поле. Индукция магнитного поля плоской волны перпендикулярна напряженности ее электрического поля. Поэтому векторы магнитной индукции расположены в плоскостях, параллельных плоскости рис. 264. Поскольку плоские волны распространяются под углом к оси волновода, индукция магнитного поля каждой из плоских волн имеет компоненты вдоль оси волновода и перпендикулярно ей.

То же можно сказать и о индукции магнитного поля суперпозиции плоских волн, составляющих волну в волноводе. Это означает, что электромагнитные волны, движущиеся в волноводе, не являются чисто поперечными, они имеют составляющую индукции магнитного поля в направлении распространения. В других случаях возможны типы волн, когда имеется компонента напряженности электрического поля вдоль направления распространения, и т. д. Следует также отметить, что волны в волноводе, вообще говоря, не являются однородными.

Классификация волн в волноводах. Общепринятой является следующая классификация волн в волноводах:

1. Поперечно-магнитные волны (ТМ-волны), определяемые требованием $H_x = 0$, т. е. отсутствием составляющей напряженности магнитного поля в направлении распространения волн. Можно показать, что в этом случае все характеристики волн выражаются только через E_x.

2. Поперечно-электрические волны (ТЕ-волны), определяемые требованием $E_x = 0$. В этом случае решения выражаются только через H_x.

3. Поперечные электромагнитные волны (ТЕМ-волны), определяемые требованиями $E_x = 0$, $H_x = 0$.

4. Гибридные волны, когда одновременно $H_x \neq 0$, $E_x \neq 0$. Они возникают в том случае, когда граничные условия требуют, чтобы отличными от нуля были одновременно и E_x и H_x, что осуществляется в реальных волноводах, проводимость стенок которых конечна.

Резонаторы. Рассмотрим конденсатор, график изменения напряженности поля которого на высоких частотах изображен на рис. 277, *г*. На цилиндрической поверхности радиусом r_1 электрическое поле отсутствует. Это означает, что вектор Пойнтинга на этой поверхности равен нулю и, следовательно, отсутствует движение электромагнитной энергии через нее. Будем считать эту цилиндрическую поверхность идеальным проводником, соединяющим обкладки конденсатора. Электрическое поле на его поверхности по-прежнему останется равным нулю. Магнитное поле не равно нулю и его силовые линии являются окружностями, концентрическими с точками оси цилиндра. Вдоль цилиндрического проводника текут токи от одной пластины конденсатора к другой, как это следует из граничного условия (38.35) для тангенциальной составляющей вектора **H**. Теперь весь цилиндрический замкнутый объем, ограниченный идеально проводящими стенками, может быть изолирован и предоставлен самому себе. Электрическое поле в нем будет колебаться с частотой ω и с такой же частотой будет происходить перезарядка пластин конденсатора. Замкнутый объем, внутри которого происходят колебания электромагнитного поля, называется резонатором. Частота колебаний поля при отсутствии потерь электромагнитной энергии называется собственной частотой резонатора. Такой резонатор называется цилиндрическим. В резонаторе, так же как и в волноводе, могут существовать колебания и стоячие волны различных типов. Они обладают различными резонансными частотами. Для того типа колебаний в цилиндрическом конденсаторе, который только что рассмотрен, резонансные частоты ω_i колебаний равны $\omega_i = \xi_i c/r_0$, где ξ_i – корни функции Бесселя с нулевым индексом. Таким образом, резонатор для этого типа колебаний имеет не одну резонансную частоту, а бесчисленное множество. Для других возможных типов колебаний получаются другие резонансные частоты. В реальном резонаторе имеются потери энергии и колебания являются затухающими. Терминология и понятия, связанные с колебаниями в резонаторах, полностью совпадают с употребляемыми при рассмотрении механических колебаний.

Задачи

9.1. Определить среднюю мощность излучения рамки с током $I = I_0 \cos \omega t$. Площадь рамки равна σ. Считать, что $I_0 = 10$ А, $\sigma = 100$ см^2, $\omega = 10^9$ с$^{-1}$.

9.2. Используя данные задачи 9.1, найти максимальную плотность потока излучения в плоскости рамки с током на расстоянии 200 м от нее.

9.3. Определить плечо диполя, если мощность его излучения равна мощности излучения рамки с током в задаче 9.1. Частота колебаний диполя равна частоте колебаний силы тока в рамке, а каждый из зарядов диполя равен $|q| = 10^{-4}$ Кл.

9.4. Пробой в воздухе происходит при напряженности электрического поля, равной $E \approx 30$ кВ/см. При какой плотности потока энергии плоских электромагнитных волн не очень большой частоты наступает пробой в воздухе?

9.5. Плоская поляризованная электромагнитная волна с круговой частотой $\omega = 10^9$ с$^{-1}$ падает с ребра на рамку из проводника, причем вектор индукции волны направлен перпендикулярно плоскости рамки. Линейные размеры рамки малы по сравнению с длиной волны. Площадь рамки $\sigma = 100$ см^2, среднюю плотность потока энергии в волне $\langle S \rangle = 1$ Вт/м^2. Найти максимальную э. д. с. индукции, наводимую в контуре.

9.6. На орбите Земли поток солнечной энергии излучения равен примерно $S \approx 1{,}4$ кВт/м^2. Найти радиус абсолютно черной шарообразной частицы с плотностью $\rho = 5$ г/см^3, для которой световое давление

в межпланетном пространстве равно солнечному притяжению. Масса Солнца равна $m_C = 2 \times 10^{30}$ кг, гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг². Расстояние от Земли до Солнца $R = 150 \cdot 10^6$ км.

9.7. Плоский конденсатор с круглыми пластинами радиусом a подсоединен к постоянному источнику сторонних э. д. с. $\mathscr{E}_{стор}$. Расстояние между пластинами медленно изменяется по гармоническому закону $d = d_0 + \Delta \sin \omega t$. Найти напряженность магнитного поля между пластинами, порождаемого токами смещения.

9.8. Рамка из n витков, охватывающая площадь S, лежит в плоскости XZ. В направлении оси X распространяется плоская электромагнитная волна, электрический вектор которой параллелен оси Y: $E_y = E_0 \cos(\omega t - kx)$. Найти электродвижущую силу, индуцируемую в рамке. Длина волны много больше линейных размеров рамки.

9.9. Поток солнечной энергии на орбите Земли равен $S = 1340$ Вт/м². Чему равны амплитуды E_0 и B_0 плоской электромагнитной волны с такой плотностью потока энергии?

9.10. Как следует из формулы (65.14), давление электромагнитной волны на идеально отражающую поверхность при угле падения θ равно $p_0 = 2w \cos^2 \theta$, где w — плотность электромагнитной энергии в падающей волне. Допустим, что на поверхность падает изотропное излучение, т. е. плотность потоков энергии, приходящих со всевозможных направлений, одинакова. Найти давление волны на поверхность.

9.11. Найти амплитуду напряженности электрического поля излучения электрического диполя в плоскости, проходящей через диполь перпендикулярно его направлению, на расстоянии 10 км от диполя при мощности излучения диполя 10 кВт.

9.12. Среда между обкладками плоского конденсатора имеет диэлектрическую проницаемость ε и обладает небольшой электропроводимостью γ (неидеальный диэлектрик). Емкость конденсатора C. К обкладкам конденсатора прикладывается разность потенциалов U, после чего они изолируются. Найти закон изменения величины заряда со временем на каждой из обкладок конденсатора и ток смещения, протекающий через конденсатор.

Ответы

9.1. $\langle P \rangle = \mu_0 \omega^4 I_0^2 \sigma^2 / (12\pi c^3) = 0{,}124$ Вт. **9.2.** $S_{max} = \mu_0 \omega^4 I_0^2 \sigma^2 / (16\pi^3 c^3 r^2) = 0{,}47 \times 10^{-5}$ Вт/м². **9.3.** $l = I_0 \sigma / (|q| c) = 3{,}3 \cdot 10^{-4}$ м $= 0{,}33$ мм. **9.4.** $\langle S \rangle = [\varepsilon_0/(4\mu_0)]^{1/2} E_0^2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ кВт/см² $= 12$ ГВт/м². **9.5.** $\mathscr{E}_{макс}^{поля} = \sqrt{2 \langle S \rangle \mu_0} \times (\varepsilon_0 \mu_0)^{1/4} \sigma \omega = 9$ мВ. **9.6.** $r = \dfrac{3SR^2}{4Gm_C \rho} = 0{,}5 \cdot 10^{-7}$ м. **9.7.** $H_\varphi = -\varepsilon_0 \mathscr{E}_{стор} \omega \Delta r \times \cos \omega t / [2(d_0 + \Delta \sin \omega t)^2]$. **9.8.** $\mathscr{E}_{инд} = nkSE_0 \sin \omega t$. **9.9.** $E_0 = 1005$ В/м, $B_0 = 3{,}35 \cdot 10^{-6}$ Тл. **9.10.** $p = w_{поп}/3$. **9.11.** $E_0 = 0{,}095$ В/м. **9.12.** $Q = CUe^{-\gamma t/\varepsilon}$, $I_{см} = -(\gamma/\varepsilon) CUe^{-\gamma t/\varepsilon}$.

10

Флуктуации и шумы

Шумы в контуре с током обусловлены дискретным характером носителей заряда и флуктуациями тока. Шумы принципиально полностью неустранимы, но могут быть уменьшены. В определенных условиях возможно детектирование полезных сигналов ниже уровня шумов.

§ 67
Флуктуации в контуре с током. Шум сопротивления

§ 68
Дробовой шум

§ 67. Флуктуации в контуре с током. Шум сопротивления

Обсуждаются физические причины, обусловливающие существование шума, и рассматриваются количественные характеристики шума в цепях с током.

Теорема о равнораспределении энергии по степени свободы. В статистической физике важную роль играет положение о том, что в состоянии термодинамического равновесия на каждую степень свободы системы приходится одна и та же энергия, равная $kT/2$ (k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура). Наглядным проявлением справедливости этого утверждения является броуновское движение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения $\langle(mv^2/2)\rangle$ броуновской частицы удовлетворяет соотношению $\langle mv^2/2\rangle = 3kT/2$, поскольку имеется три степени поступательного движения.

Применение теоремы о равнораспределении энергии к свободному гальванометру. Если на упругой нити свободно подвешено зеркальце, то по теореме о равнораспределении оно не может быть абсолютно неподвижным. В результате взаимодействия зеркальца с тепловым движением молекул воздуха возбуждаются его крутильные колебания и на каждую степень свободы при этом должна приходиться энергия $kT/2$. Напомним, что теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы относится не только к кинетической, но и к потенциальной энергии осциллятора.

Обозначим D – модуль кручения нити, φ – угол отклонения зеркальца от положения равновесия (рис. 265). Уравнение крутильных колебаний имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi, \tag{67.1}$$

где J – момент инерции зеркальца относительно оси кручения. Умножая обе части (67.1) на $\dot{\varphi}$ и интегрируя полученное выражение, находим закон сохранения энергии:

$$^1/_2 J\dot{\varphi}^2 + {}^1/_2 D\varphi^2 = \text{const}. \tag{67.2}$$

Поскольку на каждую степень свободы приходится энергия $kT/2$, из (67.2) получаем

$$\langle {}^1/_2 J\dot{\varphi}^2\rangle = \langle {}^1/_2 D\varphi^2\rangle = {}^1/_2 kT \tag{67.3}$$

и, следовательно,

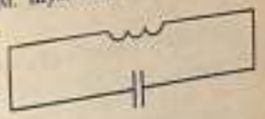
$$\langle\varphi^2\rangle = kT/D. \tag{67.4}$$

Это означает, что зеркальце не может находиться в положении равновесия, а колеблется около него со средним квадратом угла отклонения (67.4). Таким образом (67.4) характеризует отклонение угла



265

Флуктуации крутильных колебаний



266

Флуктуации в колебательном контуре

от средней величины, т. е. описывает флуктуации. Ясно, что если имеется некоторое крутильное колебание, то по принципу суперпозиции можно заключить, что (67.4) характеризует флуктуацию квадрата амплитуды.

Флуктуации в колебательном контуре. В колебательном контуре (рис. 266) происходят колебания с частотой $\omega = 1/\sqrt{LC}$, физическая сущность которых заключается во взаимопревращении энергии электрического поля в конденсаторе и энергии магнитного поля в индуктивности. Закон сохранения энергии имеет вид

$$Q^2/(2C) + LI^2/2 = \text{const}, \tag{67.5}$$

где Q – заряд на обкладках конденсатора, I – сила тока в контуре.

Нельзя себе представить контур, в котором абсолютно отсутствуют токи, а на обкладках конденсатора не возникают заряды. Точнее говоря, такую ситуацию можно себе представить лишь при температуре 0 К. При температуре, отличной от 0 К, тепловое движение электронов приведет к возникновению зарядов на обкладках конденсатора и токов в контуре. По теореме о равнораспределении имеем

$$\langle Q^2/(2C)\rangle = \langle LI^2/2\rangle = kT/2. \tag{67.6}$$

Следовательно, средний квадрат заряда на обкладках конденсатора и средний квадрат силы тока равны

$$\boxed{\langle(Q)^2\rangle = kTC,\ \langle(I)^2\rangle = kT/L.} \tag{67.7}$$

Исходя из принципа суперпозиции, можно сказать, что (67.7) представляет собой средние квадратичные флуктуации величин заряда и силы тока в колебательном контуре.

Распределение флуктуаций по частотам. Формула (67.7) дает лишь полную среднюю квадратичную величину флуктуаций и ничего не говорит о том, как она распределяется по частотам. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо решить уравнение колебаний для контура, на который действуют случайные силы, представив их в виде ряда (интеграла) Фурье по частотам:

$$U = \sum_{\omega} U_\omega e^{i\omega t}. \tag{67.8}$$

Уравнение (50.10) для колебаний заряда конденсатора принимает вид

$$I\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = \sum_{\omega} U_{\omega} e^{i\omega t}, \tag{67.9}$$

откуда

$$Q = \sum_{\omega} \frac{U_{\omega} e^{i\omega t}}{-L\omega^2 + iR\omega + 1/C}, \tag{67.10}$$

что проверяется дифференцированием. Для среднего квадрата амплитуды $\langle |QQ^*| \rangle = \langle |Q|^2 \rangle$, отсюда находим

$$\langle |Q|^2 \rangle = \langle QQ^* \rangle = \left\langle \sum_{\omega,\,\omega'} \frac{U_{\omega} U_{\omega'}^* e^{i\omega t} e^{-i\omega' t}}{(-L\omega^2 + iR\omega + 1/C)(-L\omega^2 - iR\omega + 1/C)} \right\rangle. \tag{67.11}$$

Электродвижущие силы, возбуждающие колебания различных частот, являются независимыми и некоррелированными между собой. Поэтому при усреднении в (67.11) члены с $\omega \neq \omega'$ пропадают и остается

$$\langle Q^2 \rangle = \langle |Q|^2 \rangle = \sum_{\omega} \frac{\langle U_{\omega}^2 \rangle}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}, \tag{67.12}$$

где $\langle Q^2 \rangle$ и $\langle U_{\omega}^2 \rangle$ – средние значения от действительных квадратов амплитуд соответствующих величин.

Теперь перейдем к непрерывному спектру частот, поскольку предшествующие вычисления проделаны для дискретного спектра лишь с целью упрощения вычислений. Фактический спектр является непрерывным. От средних квадратичных величин для частот дискретного спектра необходимо перейти к плотностям соответствующих величин.

Средний квадрат полного заряда составляется из вкладов отдельных частот. Поэтому

$$\langle Q^2 \rangle = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\langle Q_{\omega}^2 \rangle}{\mathrm{d}\omega} \mathrm{d}\omega, \tag{67.13а}$$

где $\mathrm{d}\langle Q_{\omega}^2 \rangle/\mathrm{d}\omega$ – плотность квадратов амплитуд колебаний заряда; $\mathrm{d}\langle Q_{\omega}^2 \rangle$ – средний квадрат амплитуды колебаний заряда, приходящейся на интервал частот $(\omega, \omega + \mathrm{d}\omega)$. Под знаком суммы в (67.12) произведем замену:

$$\langle U_{\omega}^2 \rangle \to \frac{\mathrm{d}\langle U_{\omega}^2 \rangle}{\mathrm{d}\omega} \mathrm{d}\omega, \tag{67.13б}$$

понимая под $\mathrm{d}\langle U_{\omega}^2 \rangle/\mathrm{d}\omega$ – плотность распределения квадратов амплитуд напряжений по частотам. После такой замены можно в (67.12) перейти от суммы к интегралу. В результате получаем

$$\langle Q^2 \rangle = \int_0^{\infty} \frac{[\mathrm{d}\langle U_{\omega}^2 \rangle/\mathrm{d}\omega]\,\mathrm{d}\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\langle Q_{\omega}^2 \rangle}{\mathrm{d}\omega} \mathrm{d}\omega, \tag{67.14}$$

откуда

$$\mathrm{d}\langle Q_{\omega}^2 \rangle = \frac{\mathrm{d}\langle U_{\omega}^2 \rangle}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}. \tag{67.15}$$

Шум сопротивления. Средняя энергия гармонических колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому *плотность среднего квадрата амплитуды колебаний характеризует плотность их энергии.* Дальнейший анализ основывается на предположении, что средняя плотность квадратов амплитуд $\left(\dfrac{\mathrm{d}\langle U_{\omega}^2 \rangle}{\mathrm{d}\omega} = A\right)$ не зависит от частоты. Обоснование его справедливости основывается на случайном характере электродвижущих сил. Поэтому (67.14) можно записать в виде:

$$\langle Q^2 \rangle = A \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}, \quad A = \frac{\mathrm{d}\langle U_{\omega}^2 \rangle}{\mathrm{d}\omega}. \tag{67.16}$$

Интеграл вычисляется элементарными методами и приводит к равенству

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2} = \frac{\pi C}{2R}. \tag{67.17}$$

Из (67.7) с учетом (67.16) и (67.17) находим

$$\mathrm{d}\langle U_{\omega}^2 \rangle = (2/\pi)\, kRT\, \mathrm{d}\omega. \tag{67.18}$$

Отсюда на основании (67.15) следует, что

$$\mathrm{d}\langle Q_{\omega}^2 \rangle = \frac{(2/\pi)\, kTR\, \mathrm{d}\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}. \tag{67.19}$$

Необходимо обратить внимание на то, что $\dfrac{\mathrm{d}\langle U_{\omega}^2 \rangle}{\mathrm{d}\omega}$ определяет плотность среднего квадрата амплитуды, отнесенную к интервалу круговых частот ω. Очень часто пользуются плотностью среднего квадрата амплитуды, отнесенной не к круговой частоте $\omega = 2\pi/T$, а просто к частоте $\nu = 1/T$, т. е. величиной $\dfrac{\mathrm{d}\langle U_{\nu}^2 \rangle}{\mathrm{d}\nu}$. Учитывая, что

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \mathrm{d}\omega = 2\pi\, \mathrm{d}\nu, \text{ находим} \tag{67.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle U_{\omega}^2 \rangle}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\langle U_{\nu}^2 \rangle}{\mathrm{d}\nu}. \tag{67.21}$$

Тогда [см. (67.18)]

$$\mathrm{d}\langle U_{\nu}^2 \rangle = 4kTR\, \mathrm{d}\nu.$$

– формула Найквиста: *средний квадрат амплитуды напряжения флуктуаций пропорционален интервалу частот и зависит только от сопротивления в контуре и температуры. Экспериментально существование*

таких флуктуаций было обнаружено Джонсоном. Эти флуктуации называют шумом сопротивлений или шумом Джонсона.

Эквивалентный генератор шума. Флуктуации, обусловленные сопротивлением R, средний квадрат напряжения которых определяется формулой (67.21), могут быть представлены как результат действия генератора э. д. с. U_ν и внутреннего сопротивления R. Эквивалентный генератор тока шунтирован сопротивлением R и характеризуется (в соответствии с законом Ома) средним квадратом силы тока:

$$\mathrm{d}\langle I_\nu^2\rangle = 4kT\,\mathrm{d}\nu/R. \tag{67.22}$$

Мощность шума генератора. Антенна, с помощью которой принимаются радиосигналы, направляющиеся затем в приемник, по своей роли в цепи эквивалентна генератору с соответствующим внутренним импедансом. Ее согласование с приемником состоит в том, чтобы сделать сумму реактивных составляющих импедансов антенны и приемника равной нулю, а их активные сопротивления равными между собой (см. § 49). При этом максимальная мощность, которую генератор (антенна) может отдать в приемник [см. (49.35)], равна

$$P_{\text{п. макс}} = \langle U^2\rangle/(4R), \tag{67.23}$$

где $\langle U^2\rangle$ – средний квадрат э. д. с. антенны; R – ее внутреннее сопротивление, равное сопротивлению нагрузки.

Пусть нагрузочное сопротивление R само по себе не производит шума и является, например, омическим сопротивлением, поддерживаемым вблизи температуры 0 К. Можно также представить себе в качестве нагрузки идеальный приемник, который сам по себе не обладает никаким внутренним шумом. Тем не менее, в принимаемом с антенны сигнале будет содержаться шум, мощность которого в соответствии с (67.23) и (67.21) равна

$$\mathrm{d}P_{\text{ш}} = \frac{\mathrm{d}\langle U_\nu^2\rangle}{4R} = kT\,\mathrm{d}\nu. \tag{67.24}$$

Этот шум в наушниках при достаточном усилении будет слышен и никакими усовершенствованиями приемника от него избавиться нельзя. Его можно также увидеть на экране осциллографа. Увеличение коэффициента усиления приемника пропорционально увеличит на выходе из приемника как полезный сигнал, так и шум (67.24), поданный на его вход, не изменив соотношения между ними.

Максимальная чувствительность. Сигнал можно детектировать, если его мощность будет больше мощности шума. Поэтому из (67.24) для минимальной мощности детектируемого сигнала получается выражение

$$\mathrm{d}P_0 = kT\,\mathrm{d}\nu, \tag{67.25}$$

справедливое для идеального приемника. Эта мощность представляет порог чувствительности приемника.

Единственной возможностью повышения чувствительности (при фиксированной температуре) является уменьшение ширины полосы используемых частот $\mathrm{d}\nu$. Однако при этом уменьшается количество информации, которую несет с собой сигнал, и в каждом случае имеется нижний предел, до которого можно сужать полосу. Например, для передачи речи по радио с помощью амплитудной модуляции без очень большого искажения необходимо иметь полосу порядка $\mathrm{d}\nu = 10$ кГц. При комнатной температуре ($T = 290$ К) это для минимальной детектируемой мощности дает

$$\mathrm{d}P_0 = 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 290\cdot 10^4\ \text{Вт} = 4\cdot 10^{-17}\ \text{Вт}. \tag{67.26}$$

Для передачи телевизионных изображений минимальная ширина полосы должна быть порядка 4 МГц, поскольку объем информации для восстановления изображения значительно больше, чем для восстановления речи. При этих условиях минимальная мощность сигнала, подаваемого на идеальный приемник, составляет $1{,}6\cdot 10^{-14}$ Вт.

Эквивалентная шумовая температура приемника. Фактически приемник сам является источником дополнительных шумов, которые накладываются на шумы антенны. Поэтому мощность $\mathrm{d}P_1$, минимального сигнала, который может быть детектирован, больше, чем $\mathrm{d}P_0$, на мощность $\mathrm{d}P_{\text{пр}}$ внутреннего шума приемника:

$$\mathrm{d}P_1 = \mathrm{d}P_0 + \mathrm{d}P_{\text{пр}}. \tag{67.27}$$

Мощность $\mathrm{d}P_{\text{пр}}$ внутреннего шума приемника принято выражать по формуле (67.25) посредством эквивалентной шумовой температуры $T_\text{э}$ в виде

$$\mathrm{d}P_{\text{пр}} = kT_\text{э}\,\mathrm{d}\nu. \tag{67.28}$$

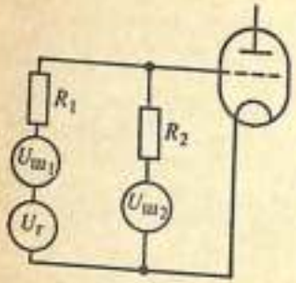
У идеального приемника $T_\text{э} = 0$ К. Однако очень близко подходить к этому пределу в практике нет необходимости. Достаточно эквивалентную температуру сделать примерно раз в десять меньше соответствующей температуры генератора (антенны), чтобы дополнительный шум приемника был практически несуществен.

Коэффициент шума приемника. При комнатной температуре на интервал частот $\mathrm{d}\nu = 1$ в соответствии с (67.26) приходится мощность $\mathrm{d}P_{01} = 4\cdot 10^{-21}$ Вт. Шумовая характеристика приемника описывается коэффициентом шума

$$F = \frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}P_{01}}. \tag{67.29}$$

Обычно он выражается в децибелах.

Отношение сигнал – шум. Сигнал детектируется тем надежнее, чем больше он превышает уровень шума, что особенно важно, например, для качественной передачи и воспроизведения музыкальных произведений. Эта характеристика приемных и воспроизводящих устройств определяется отношением амплитуды напряжения сигнала к



267

К вычислению шума на сетке вакуумного триода

амплитуде напряжения шума. Поскольку это отношение в обычных условиях составляет очень большое число, его выражают в децибелах по формуле

$$N = 20 \log \frac{U_c}{U_ш} = 10 \log \frac{U_c^2}{U_ш^2}, \qquad (67.30)$$

где U_c и $U_ш$ – соответственно амплитуды напряжения сигнала и шума.

Рассмотрим для примера отношение сигнал – шум у вакуумного триода (рис. 267). Сигнал подается на вход в цепь между сеткой и катодом. Источник сигнала характеризуется электродвижущей силой $U_г$ и внутренним сопротивлением R_1. Мощность шума сопротивления генератора на основании (67.21) равна

$$4kT\,dv = U_{ш1}^2/R_1, \qquad (67.31)$$

где $U_{ш1}$ – э. д. с. эквивалентного генератора шума, который включен в цепь последовательно с R_1 и генератором $U_г$.

Другим источником шума является сопротивление R, с которого снимается напряжение. Мощность шума этого источника равна

$$4kT\,dv = U_{ш2}^2/R, \qquad (67.32)$$

где $U_{ш2}$ – э. д. с. эквивалентного генератора шума.

Для вычисления мощности шума на сетке примем во внимание, что нагрузкой для генератора шума $U_{ш1}$ является сопротивление R_2, а для генератора шума $U_{ш2}$ – сопротивление R_1. Ясно, что генераторы шума действуют независимо и поэтому средний квадрат напряжения полного шума равен сумме средних квадратов напряжений шумов, создаваемых каждым из генераторов.

Поэтому для среднего квадрата шумового напряжения на сетке получаем

$$U_ш^2 = \left(\frac{U_{ш1}}{R_1+R_2}R_2\right)^2 + \left(\frac{U_{ш2}}{R_1+R_2}R_1\right)^2 =$$
$$= 4kT\,dv\left[\frac{R_1R_2^2}{(R_1+R_2)^2} + \frac{R_2R_1^2}{(R_1+R_2)^2}\right] =$$
$$= 4kT\,dv\,\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}. \qquad (67.33)$$

○ При полном согласовании нагрузки с генератором отношение сигнал–шум не является самым лучшим. При рассогласовании нагрузки с генератором посредством увеличения сопротивления нагрузки R_2 можно улучшить это отношение примерно в два раза. К такому же заключению можно прийти и через оценку чувствительности – при рассогласовании нагрузки с генератором посредством увеличения сопротивления нагрузки R_2 чувствительность увеличивается.

Примем во внимание, что средний квадрат амплитуды сигнала на сетке равен

$$U_c^2 = \left(\frac{U_г}{R_1+R_2}R_2\right)^2. \qquad (67.34)$$

Из (67.33) и (67.34) получаем отношение среднего квадрата напряжения сигнала к среднему квадрату напряжения шума на сетке:

$$\frac{U_c^2}{U_ш^2} = \frac{U_г^2}{4kT\,dv}\,\frac{R_2}{R_1+R_2}\,\frac{1}{R_1} = \frac{P}{kT\,dv}\,\frac{R_2}{R_1+R_2}, \qquad (67.35)$$

где $P = U_г^2/(4R_1)$ – максимальная мощность сигнала, отдаваемого генератором во внешнюю цепь [см. (67.23)]. Из формулы (67.35) видно, что *при полном согласовании нагрузки с генератором* ($R_2 = R_1$) *отношение сигнал – шум не является самым лучшим. Наоборот, при рассогласовании путем увеличения сопротивления нагрузки* R_2 *можно улучшить это отношение примерно в два раза.*

К такому заключению можно прийти и через оценку чувствительности. Минимальная мощность сигнала генератора, который на сетке еще можно отличить от шума, получается из (67.35), если $U_c^2/U_ш^2 = 1$:

$$P_1 = kT\,dv\,\frac{R_1+R_2}{R_2}. \qquad (67.36)$$

Очевидно, что минимальная детектируемая мощность при согласовании нагрузки с генератором ($R_2 = R_1$) равна $2kT\,dv$, а при рассогласовании ($R_2 \gg R_1$) – $kT\,dv$, т. е. *при рассогласовании нагрузки с генератором чувствительность увеличивается.*

Если генератором в рассматриваемой схеме является антенна, то все эти заключения применимы к системе антенна – приемник.

§ 68. Дробовой шум и шум тока

Рассматривается физическая причина возникновения дробового шума и анализируется его распределение по частотам. Даются основные характеристики шума тока.

Источник дробового шума. Электрический ток представляет собой движение дискретных элементарных зарядов, а не непрерывный поток заряда. Поэтому он дает последовательность импульсов тока, каждый из которых обусловлен прибытием в рассматриваемую точку отдельного электрона. Ток через некоторую площадку подобен потоку дробинок через нее, выброшенных из некоторого устройства и распределенных по времени хаотически. Ясно, что число дробинок, пересекающих поверхность в последовательные одинаковые малые промежутки времени, будет испытывать значительные флуктуации. Аналогично, из-за дискретного характера зарядов будет флуктуировать и сила тока. Эти флуктуации называются **дробовым шумом.**

Распределение шума по частотам. Прибытие каждого электрона эквивалентно импульсу тока, продолжительность которого чрезвычайно мала. При точечном электроне ее следует считать нулевой, а импульс тока бесконечным, т. е. импульс представлять δ-функцией. Поскольку заряд, содержащийся в импульсе тока, равен заряду электрона e, можно представить ток, обусловленный прибытием электрона в момент времени t_i, в виде

$$i(t) = e\delta(t - t_i). \tag{68.1}$$

Пусть T – большой интервал времени, в течение которого прибывает в среднем N электронов. Средняя сила тока, обусловленного прибытием одного электрона на этом интервале времени, равна $\langle i \rangle = e/T$, а средняя сила тока, обусловленного прибытием N электронов, определяется выражением $\langle I \rangle = N\langle i \rangle = Ne/T$. Однако электроны прибывают неравномерно, вследствие чего возникают флуктуации тока, порождающие шум. Для определения спектрального состава шума представим силу тока $i(t)$ в виде ряда Фурье на интервале $(-T/2,\ T/2)$:

$$i(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (\omega = 2\pi/T), \tag{68.2}$$

где

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i(t)\cos n\omega t\, dt \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{68.3а}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i(t)\sin n\omega t\, dt \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{68.3б}$$

Учитывая правило интегрирования с δ-функцией

$$\int f(t)\,\delta(t - t_i)\,dt = f(t_i),$$

из (68.3а) и (68.3б) с учетом (68.1) получаем

$$a_n = \frac{2e}{T}\cos n\omega t_i,\ b_n = \frac{2e}{T}\sin n\omega t_i. \tag{68.4}$$

Тогда [см. (68.2)]

$$i(t) = \frac{e}{T} + \frac{2e}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\omega(t - t_i). \tag{68.5}$$

Среднее значение квадрата силы тока n-й компоненты равно

$$\langle i_n^2 \rangle = \frac{4e^2}{T^2}\left\langle \cos^2 \frac{2\pi n}{T} t \right\rangle = \frac{2e^2}{T^2}. \tag{68.6}$$

Поскольку отдельные электроны движутся беспорядочно и некоррелированно друг с другом, их вклады в разложение в ряд Фурье для силы тока будут отличаться фазами. При вычислении квадрата флуктуации силы тока усреднение по фазе обратит в нуль все члены с неравными частотами и в ряду останутся лишь члены с одинаковыми частотами. Поэтому для среднего квадрата флуктуаций n-й компоненты Фурье силы тока N электронов, прибывающих в течение времени T, имеем

$$\langle T_n^2 \rangle = N\langle i_n^2 \rangle = 2e^2N/T^2 = 2eI_0/T, \tag{68.7}$$

где $I_0 = eN/T$ – средняя сила тока.

Число компонент ряда Фурье, частоты которых заключены между ν и $\nu + d\nu$, равно $T\,d\nu$, поскольку эти компоненты отстоят друг от друга на равных расстояниях по частотам на $1/T$. Интервал T можно считать очень большим, а расстояние между соседними частотами $[(n + 1)/T] - (n/T) = 1/T$ – очень малым.

Суммируя вклады от этих компонент в интервале частот $d\nu$ получим на основе формулы (68.7) для средней квадратичной флуктуации силы тока следующее выражение:

$$d\langle I^2 \rangle = \langle I_n^2 \rangle T\,d\nu = 2eI_0\,d\nu. \tag{68.8}$$

Эта формула описывает дробовой шум.

Соотношение (68.8) называется **формулой Шоттки**. Заметим, что если в спектральный интервал частот ν включить их отрицательные значения, то множитель 2 в формуле (68.8) пропадает. Так обычно поступают при использовании экспоненциальной формы рядов или интегралов Фурье.

Шум тока. На очень малых частотах возникают шумы, обусловленные различными неоднородностями сопротивлений. Средний квадрат амплитуд напряжений этого шума убывает обратно пропорционально частоте.

$$\langle (\Delta U)^2 \rangle = \alpha I_0^2/\nu, \tag{68.9}$$

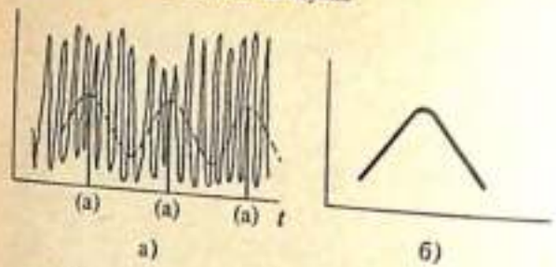
Экспериментальное изучение этого шума, называемого **шумом тока**, приводит к формуле

где α – эмпирическая постоянная, зависящая от геометрии сопротивления и его материала. В массивных металлических проводниках шум практически отсутствует. В различного рода композиционных сопротивлениях он очень велик.

Природа этого шума в настоящее время еще до конца не выяснена. Однако с увеличением частоты его роль во всех случаях становится пренебрежимо малой.

Методы уменьшения шумовых помех. Шумовые помехи искажают форму полезного сигнала и их желательно уменьшить. Количественно соотношение между сигналом и шумом характеризуется отношением сигнал – шум. Задача состоит в том, чтобы увеличить это отношение.

Усиление сигнала для этой цели не подходит, поскольку усилитель в одинаковое число раз изменяет как сигнал, так и шум, подаваемые



268

Иллюстрация процесса выделения сигнала на фоне сильного шума

на его вход, а, кроме того, в процессе прохождения сигнала добавляет к нему свой внутренний шум. Поэтому усиление уменьшает отношение сигнал – шум, т. е. ухудшает этот показатель и не может служить методом уменьшения шумовых помех.

Шум сопротивления может быть уменьшен за счет уменьшения температуры, при которой работают соответствующие устройства. Этот метод широко применяется, однако он имеет свои пределы. Во-первых, он значительно усложняет работу и, во-вторых, при сильных охлаждениях элементы устройств изменяют свои электрические характеристики, причем иногда необратимо.

Дробовой шум и шум тока ослабляются при уменьшении силы тока, а шум тока уменьшается еще и при увеличении частоты сигнала. Увеличение частоты сигнала ограничено высокочастотными характеристиками контуров и элементов цепи.

Все виды шумов уменьшаются при уменьшении полосы пропускания. Однако ширина полосы пропускания ограничена свойствами сигнала, поскольку любой сигнал имеет конечную ширину и уменьшение полосы пропускания ниже этой ширины существенно искажает сигнал, т. е. вводит новый шум.

Таким образом, улучшение технических характеристик устройств для приема сигналов позволяет улучшить отношение сигнал – шум, но наталкивается на ограничения принципиального порядка. Поэтому разработаны методы приема сигналов, позволяющие преодолевать эти ограничения. Один из распространенных методов состоит в следующем.

Пусть имеется некоторый периодически повторяющийся сигнал, очень сильно искаженный шумовым фоном (рис. 268, *а*). Период сигналов может быть определен с достаточной точностью, поскольку шум не искажает периода. После этого можно синхронизировать момент измерения сигнала с периодичностью его изменения, т. е. производить измерение значения сигнала много раз в одной и той же точке его периода, например, точке *а* на рис. 268, *а*. Каждое измерение из-за наложения шума дает различное значение, но среднее значение большого числа измерений приводит с соответствующей точностью к величине сигнала в этой точке периода. В принципе, эта точность может быть беспредельно повышена, если только соответствующим образом увеличить число измерений. Проделав такие измерения для различных точек периода, получим форму сигнала на одном периоде без шумовых искажений (рис. 268, *б*).

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. Единицы СИ, используемые в книге

Величина			Единица	
наименование	обозначение	размерность	наименование	обозначение
Основные единицы				
Длина	l	L	метр	м
Масса	m	M	килограмм	кг
Время	t	T	секунда	с
Сила тока	I	I	ампер	А
Температура	T	Θ	кельвин	К
Количество вещества	ν	N	моль	моль
Сила света	I	J	кандела	кд
Производные единицы				
Скорость	v, u	LT^{-1}	метр в секунду	м/с
Ускорение	a	LT^{-2}	метр в секунду в квадрате	м/с²
Сила	F	LMT^{-2}	ньютон	Н
Давление	p	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Импульс	p	LMT^{-1}	килограмм-метр в секунду	кг·м/с
Энергия	W, U, E	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
Мощность	P	L^2MT^{-3}	ватт	Вт
Момент инерции	J	L^2M	килограмм-метр в квадрате	кг·м²
Момент силы	M	L^2MT^{-2}	ньютон-метр	Н·м
Момент импульса	L	L^2MT^{-1}	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг·м²/с
Электрический заряд	Q, q	TI	кулон	Кл
Плотность заряда объемная	ρ	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	Кл/м³
Плотность заряда поверхностная	σ	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м²
Плотность заряда линейная	τ	$L^{-1}TI$	кулон на метр	Кл/м
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	ε_a	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	Ф/м
Электрическая постоянная	ε_r	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	Ф/м
Относительная диэлектрическая проницаемость	E	безразмерная величина		
Напряженность электрического поля		$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м

Продолжение

Величина			Единица	
наименование	обозначение	размерность	наименование	обозначение
Поток напряженности электрического поля	N	$L^3MT^{-3}I^{-1}$	вольт-метр	В·м
Потенциал электрического поля	φ	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В
Электрический момент диполя	p	LTI	кулон-метр	Кл·м
Поляризованность	P	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м²
Электрическое смещение	D	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м²
Поток электрического смещения	Ψ	TI	кулон	Кл
Электрическая емкость	C	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф
Объемная плотность энергии электрического и магнитного полей	w	$L^{-1}MT^{-2}$	джоуль на кубический метр	Дж/м³
Электрическое напряжение	U	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В
Электрическое сопротивление	R	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом
Подвижность носителей зарядов	b	$M^{-1}T^2I$	квадратный метр на вольт-секунду	м²/(В·с)
Плотность объемного тока	j	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	А/м²
Магнитный момент электрического тока	P_m	L^2I	ампер — квадратный метр	А·м²
Магнитная индукция	B	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл
Магнитный поток	Φ	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб
Напряженность магнитного поля	H	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м
Индуктивность	L	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн
Абсолютная магнитная проницаемость	μ	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м
Магнитная постоянная	μ_0	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м
Относительная магнитная проницаемость	μ_r		безразмерная величина	
Намагниченность	J	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м
Частота колебаний	ν	T^{-1}	герц	Гц
Круговая частота колебаний	ω	T^{-1}	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$
Плотность потока энергии электромагнитного поля	S	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м²

II. Соотношение между формулами СИ и системы Гаусса

Хотя в настоящее время уже почти везде произведен переход к СИ, умение переводить формулы из записи в одной системе единиц к записи в другой все еще иногда требуется. Для этого используется следующая таблица:

Наименование величины	СИ	Система Гаусса	Наименование величины	СИ	Система Гаусса
Сила тока	I	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}I$	Электрический дипольный момент	p	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}p$
Плотность тока	j	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}j$	Магнитный момент тока	Pm	$(4\pi/\mu_0)^{1/2}Pm$
Электрический заряд	Q	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}Q$	Скалярный потенциал	φ	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}\varphi$
Плотность заряда	ρ	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}\rho$	Векторный потенциал	A	$[\mu_0/(4\pi)]^{1/2}A$
Проводимость	γ	$4\pi\varepsilon_0\gamma$	Скорость света	$(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$	c
Емкость	C	$4\pi\varepsilon_0C$	Магнитная восприимчивость	χ	$4\pi\chi$
Напряженность электрического поля	E	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}E$	Диэлектрическая восприимчивость	$\varkappa$	$4\pi\varkappa$
Электрическое смещение	D	$(\varepsilon_0/4\pi)^{1/2}D$	Диэлектрическая проницаемость	ε	$\varepsilon\varepsilon_0$
Напряженность магнитного поля	H	$(4\pi\mu_0)^{-1/2}H$	Магнитная проницаемость	μ	$\mu\mu_0$
Магнитная индукция	B	$[\mu_0/(4\pi)]^{1/2}B$	Относительная диэлектрическая проницаемость	ε_r	$\varepsilon/\varepsilon_0$
Поток магнитной индукции	Φ	$[\mu_0/(4\pi)]^{1/2}\Phi$	Относительная магнитная проницаемость	μ_r	μ/μ_0
Индуктивность	L	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}L$			
Поляризованность	P	$4\pi\varepsilon_0P$			
Намагниченность	J	$(4\pi/\mu_0)^{1/2}J$			
Электрическое сопротивление	R	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}R$			

Правила пользования таблицей. Для того чтобы перевести соотношение, записанное в СИ, в соответствующую формулу в системе Гаусса, необходимо символ, обозначенный в колонке «СИ», заменить символом в колонке «Система Гаусса». Пользуясь этим правилом в обратном направлении, можно перейти от формул в системе Гаусса к формулам в СИ. При этих переходах механические и другие неэлектрические и немагнитные величины остаются неизменными. Неизменны также производные по координатам и времени.

Примеры использования таблицы

1. Записать уравнение Максвелла

$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t$ (СИ)

в системе Гаусса. Имеем

$$\operatorname{rot}\left[(4\pi\mu_0)^{-1/2}\mathbf{H}\right] = (4\pi\varepsilon_0)^{1/2}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi}\right)^{1/2}\mathbf{D}\right],$$

т. е.

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

2. Записать вектор Пойнтинга

$\mathbf{S} = [c/(4\pi)]\,\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (система Гаусса)

в СИ. Имеем

$$\mathbf{S} = \frac{(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}}{4\pi}\left[(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}\mathbf{E} \times (4\pi\mu_0)^{1/2}\mathbf{H}\right] = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Примечание. Переход из СИ в систему Гаусса всегда приводит к правильному результату. При переходе из системы Гаусса в СИ возможны ошибки, если формула в системе Гаусса написана для вакуума. В этом случае $D = E$, $B = H$ и одна из величин в формуле может оказаться замененной другой, а коэффициенты перевода для этих величин различны. Поэтому прежде чем переводить формулу из системы Гаусса в СИ, необходимо позаботиться о том, чтобы она была записана в форме, справедливой для среды, а не только для вакуума.

Перевод числовых значений величин из одной системы единиц в другую производится с помощью таблиц, приводимых в книгах по системам единиц.

III. Формулы векторной алгебры и анализа

1. Свойство смешанного произведения векторов:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}. \tag{П.1}$$

2. Разложение двойного векторного произведения:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}). \tag{П.2}$$

3. Определение векторного оператора набла:

$$\nabla = \mathbf{i}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z}, \tag{П.3}$$

где $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ – единичные векторы декартовой ортогональной системы координат.

4. Определение операции градиента:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi. \tag{П.4}$$

5. Определение оператора дивергенции:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A}. \tag{П.5}$$

6. Определение операции ротора:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{П.6}$$

7. Векторные тождества:

$$\nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \tag{П.7}$$

$$\nabla\times\nabla\varphi = 0, \tag{П.8}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0, \tag{П.9}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}, \tag{П.10}$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi, \tag{П.11}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A}) = \varphi(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot\nabla\varphi, \tag{П.12}$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}), \tag{П.13}$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{B}\times\nabla)\times\mathbf{A} + (\mathbf{A}\times\nabla)\times\mathbf{B}, \tag{П.14}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}), \tag{П.15}$$

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{A}) = \varphi(\nabla\times\mathbf{A}) + (\nabla\varphi)\times\mathbf{A}, \tag{П.16}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}). \tag{П.17}$$

8. Теоремы Гаусса: замкнутая поверхность S окружает объем V. Вектор $d\mathbf{S}$ элемента поверхности направлен по внешней нормали к ней:

$$\int_V(\nabla\cdot\mathbf{A})\,dV = \oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}, \tag{П.18}$$

$$\int_V(\nabla\varphi)\,dV = \oint_S\varphi\,d\mathbf{S}, \tag{П.19}$$

$$\int_V(\nabla\times\mathbf{A})\,dV = \oint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A}. \tag{П.20}$$

9. Теоремы Стокса: замкнутый контур L ограничивает поверхность S. Вектор $d\mathbf{l}$ элемента контура L совпадает с направлением положительного обхода, который связан с направлением положительной нормали к поверхности S правилом правого винта:

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S} = \oint_L\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}, \tag{П.21}$$

$$\int_S d\mathbf{S}\times\nabla\varphi = \oint_L\varphi\,d\mathbf{l}, \tag{П.22}$$

$$\int_S(d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{A} = \oint_L d\mathbf{l}\times\mathbf{A}. \tag{П.23}$$

10. Теоремы Грина:

$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\,dV = \oint_S(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\cdot d\mathbf{S}, \tag{П.24}$$

$$\int_V(\nabla\varphi\times\nabla\psi)\,dV = \frac{1}{2}\oint_S d\mathbf{S}\times(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi), \tag{П.25}$$

$$\int_S(\nabla\varphi\times\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2}\oint_L(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\cdot d\mathbf{l}. \tag{П.26}$$

Предметный указатель

Автотрансформатор 364
Аккумуляторы 208
Ампер 60
Анизотропия 302
Антисегнетоэлектрики 193
Антиферромагнетики 304
Атомы 22
– неполярные 137
– полярные 137

Бетатрон 380
Вектор Пойнтинга 397
– смещения 143
Взаимодействие спин-орбитальное 294
Вибратор Герца 409
Волноводы 434, 440
Время релаксации 106

Газы плотные 182, 187
– разреженные 181, 186
Генератор тока переменного 314
– шума 448
Глубина проникновения 423
Градиент 91

Давление волн электромагнитных 428
Двигатели асинхронные 351, 353
– синхронные 351
Декремент затухания логарифмический 359
Диамагнетизм 291
Диамагнетики 264, 283, 288
Дивергенция 38, 39
Диполь 124
Диссоциация 234
Диэлектрики 22, 25, 139
– изотропные 139
– линейные 139
– нелинейные 139
– неполярные 180
– полярные 183
Добротность 359
Домены диэлектрические 191

Емкость 116
– конденсатора 122
– проводника 120

Жидкости полярные 188

Заряд 16, 29, 30, 31, 32, 44, 83, 85
– неподвижный 80
– объемный 200
– поверхностный 200
– – связанный 141
– пробный 54
– связанный 146
Закон Ампера 64
– Био – Савара 69, 259
– – – Лапласа 66
– Джоуля – Ленца 210, 212
– индукции электромагнитной 316, 318
– Кулона 44, 47, 48, 49, 84, 98, 144
– Кюри 293
– – Вейсса 191, 293, 302
– Ома 104, 105, 211
– сохранения заряда 37, 38, 43
– – энергии 206, 315
Закон тока полного 251, 252, 253
– трех вторых 245

Импеданс 341
Импульс фотона 429
– пуга волн электромагнитных 428
Индуктивность 322, 327
– взаимная 323, 324
Индукция взаимная 359
– поля магнитного 274, 301
– – обменного 301
– – электрическая 312
– электромагнитная 312

Кварк 19
Колебания бетатронные 383
Конденсатор 122, 123
Контур колебательный 357
Концентрация зарядов 34
Концепция близкодействия 49
– дальнодействия 49
Кристаллы ионные 188

Линии силовые 84, 85

Магнетики 264
Магнетосопротивление 230
Магниты 272
Метод измерения заряда резонансный 29
– изображений 128, 131, 147
– Кавендиша 45
– токов контурных 344
Момент дипольный 127, 135
– магнитный 19, 261, 282, 290, 294, 295
– сил 162
Мощность тока 209
– – переменного 346
– шума генератора 448

Намагниченность 265
– спонтанная 302
Напряжение 347
– шага 222
Напряженность задерживающая 299
– поля диполя 128
– – локального 178
– – магнитного 270, 276
– – насыщения 18
– – электрического 50, 109, 110, 111, 125
Нейтрон 18
Нормировка потенциала 92

Облако электронное 136, 244
Оператор Лапласа 101
Опыт Эйнштейна – де Гааз 307
Опыты Милликена 28, 29
– Толмена и Стюарта 226
Отношение гиромагнитное 307
Парамагнетики 265, 283, 292
Перемагничивание 303
Петля гистерезиса 189, 298
Пироэлектрики 195
Плотность диполя 127

Плотность заряда объемная 33, 140, 161, 162
– – поверхностная 34, 111, 113, 140, 200
– потока энергии 397, 421
– сил поверхностная 167, 169
– силы Ампера 228
– тока 35, 36, 198, 237
– – насыщения 238, 244
– – объемная 266, 267, 335
– – поверхностная 269
– – смещения 378
– энергии поля магнитного 325
– – – электрического 155
Подвижность зарядов 240
– электронов 230
Полрешетка 305
Поле квазистационарное 336
– критическое 232
– локальное 178
– магнитное 55, 59, 61, 66, 255, 411, 440
– – вращающееся 353, 368
– насыщения 186
– потенциальное 201
– сил потенциальное 86, 90, 91
– соленоида 327
– тока элементарного 259
– Холла 229
– центрально-симметричное 255
– электрическое 50, 411
Поляризация 136
– ионная решеточная 137
– спонтанная 191
– элемента 207
Поляризованность 136
Потенциал 91, 92, 93, 94, 98, 100
– векторный 257, 265, 319, 405, 406, 410
Потенциал запаздывающий 408
– опережающий 409
– поля 409
– – проводника 116
– скалярный 320, 409
Поток вектора 38
Правила Кирхгофа 213, 342
Правило Ленца 337

Прецессия ларморова 290
– магнитная 288
Принцип суперпозиции 53, 54, 55
Проводимость электрическая 343
– – удельная 105
Протон 17
Пьезоэлектрики 193
Пьезоэффект 194, 195

Работа выхода термоэлектронная 24
– тока 209
Разность потенциалов 92
– – контактная 25, 26, 27
Распределение Больцмана 20
Резонанс напряжений 356
– парамагнитный 296
– токов 357
– ферромагнитный 305
Резонаторы 440
Ротор 87

Самоиндукция 337
Сверхпроводимость 231, 232
Сверхпроводники 232
Сегнетоэлектрики 189
Сила Ампера 64
– взаимодействия токов прямолинейных 69
– Лоренца 63, 64, 72
– объемная 162, 165, 169, 282, 332
– поверхностная 165
– тока 37
– – насыщения 242
– электродвижущая сторонняя 202, 205
Скин-эффект 369, 424
– – аномальный 372
Скорость групповая 439, 440
– дрейфа 238
– фазовая 419, 424, 436, 439, 440
Спектр электронов энергетический 21, 22, 23
Спин 19
Среда неоднородная 218, 219
– однородная 217

Температура критическая 231
– Кюри 190
– – Вейсса 190, 191, 202, 304
– Нееля 304
Теория зонная 227
Теорема взаимности 118
– Гаусса 81, 82, 84, 99, 108, 114
– Ирншоу 95
Толщина скин-слоя 371
Ток квазистационарный 336
– несамостоятельный 237
– однофазный 366
– переменный 340
– поверхностный 232
– – молекулярный 267
– самостоятельный 237, 239
– смещения 388, 389
– трехфазный 366
Токи Фуко 355
Точка Кюри 190
Трансформатор 360
– реальный 365

Угол Холла 230
Уравнение Даламбера 405, 406
– для потенциала векторного 258
– Лапласа 100
– непрерывности 43
– Пуассона 97, 100
Уравнения линии передачи 402
– четырехполюсника 374
Условие бетатронное 380, 381, 382
– калибровки потенциалов 258
– Лоренца 405
Условия граничные 145, 146
Устойчивость вертикальная 383
– радиальная 382

Ферромагнетики 298
Ферримагнетизм 305
Фильтры 377
Флуктуации 445
Формула Гаусса – Остроградского 42, 43
– Клаузиуса – Моссотти 182
– Найквиста 447
– Ричардсона – Дешмана 245
– Стокса 89, 90
– Томсона 357

Функция Ланжевена 185
– Ферми – Дирака 24

Цепи разветвленные 214
Цепь замкнутая 213

Частота граничная 485
– ларморова 289
Четырехполюсники 373
Число волновое 420
Чувствительность максимальная 448

Шум дробовой 451
– сопротивления 447
– тока 453

Экран металлический 114
Экранировка магнитная 278
Электризация 26, 27
Электродвигатели 349
Электроды коаксиальные 218
Электролиты 236
Электропроводимость 234, 235, 236
Электропроводность 213
Электрон 16, 18
Элемент Вольта 205
– Даниэля 207
Элементы гальванические 204
Эмиссия термоэлектронная 241
Энергия взаимодействия обменного 300
– диполя 157
– зарядов 152, 153
– магнетика 328, 329
– момента магнитного 333
– поля зарядов поверхностных 156
– – полная 326
– – магнитного 321, 322, 325
– проводников заряженных 157
– собственная 153, 154, 160
– тела диэлектрического 157
– Ферми 23
– электромагнитная 398
Эфир мировой 49
Эффект Барнетта 309
– Мейснера 232
– Холла 229

Алексей Николаевич Матвеев

Электричество и магнетизм

Зав. редакцией *Е. С. Гридасова*
Редактор *Г. Н. Чернышева*
Мл. редакторы *С. А. Доровских, Н. П. Майкова, Н. Г. Закалюкина*
Художественный редактор *В. И. Пономаренко*
Технический редактор *З. А. Муслимова*
Корректор *В. В. Кожуткина*

ИБ № 3590

Изд. № ФМ-678. Сдано в набор 04.08.82. Подп. в печать 25.05.83. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. кн.-журн. Гарнитура таймс. Печать высокая. Объем 29 усл. печ. л. 58,25 усл. кр.-отт. 29,90 уч.-изд. л. Тираж 30 000 экз. Зак. № 555. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Высшая школа»,
101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Орденa Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

1 р. 50 к