O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI
MATEMATIK MODELLASHTIRISH KAFEDRASI

Ro’yxatga olindi:	“Tasdiqlayman”
№__________	O’quv ishlari bo’yicha prorektor
2019 yil «___» _________	_______ prof. A.S. Soleev
	“___” _________2019 yil

«KOMBINATORIKA VA GRAFLAR NAZARIYASI»

O’QUV – USLUBIY MAJMUA

(Moddle tizimi asosida)

Bilim sohasi: 100 000 – Gumanitar soha

Ta’lim sohasi: 140 000 –Tabiiy fanlar

Ta’lim yo’nalishi: 5130200 – Amaliy matematika va informatika

Tuzuvchilar:	SamDU Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi dotsenti **O‘runbayev Erkin.** SamDU Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi assistenti **Yusupov Ozod.** SamDU Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi assistenti **Qaytarov Zohidjon.**
Kafedra mudiri:	**Prof. Xo‘jayorov B.**
Fakultet dekani:	**dots. A.I. Babayarov**

Samarqand - 2019

O‘runbayev E.O‘., Yusupov O.R., Qaytarov Z “Kombinatorika va graflar nazariyasi” fanidan o’quv-uslubiy majmua. – Samarqand: SamDU nashri – 2019. 330 bet.

“Kombinatorika va graflar nazariyasi” fanidan ushbu o‘quv-uslubiy majmua oliy o’quv yurtlari 5130200 – Amaliy matematika va informatika bakalavriat ta’lim yo’nalishlari 2,3-kurs talabalariga mo’ljallangan.

Taqrizchilar:

A.Abdullayev.	-texnika fanlari nomzodi;
O. Mamaraupov.	PhD.

SamDU o’quv – uslubiy kengashining 2019 yil _________ dagi ____ -qarori bilan o’quv-uslubiy majmua sifatida nashrga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar:	–Amaliy matematika va informatika fakulteti, “Matematik modellashtirish” kafedrasi dotsenti	**O‘runbayev E.O‘**
	–Amaliy matematika va informatika fakulteti, “Matematik modellashtirish” kafedrasi assistenti	**Yusupov O.R**
	–Amaliy matematika va informatika fakulteti, “Matematik modellashtirish” kafedrasi assistenti	**Qaytarov Z.D**

Mazkur ushbu o’quv-uslubiy majmua Samarqand davlat universiteti 5130200 –”Amaliy matematika va informatika” bakalavriat ta’lim yo’nalishlari o’quv rejasidagi “Kombinatorika va graflar nazariyasi” fani bo’yicha Samarqand davlat universiteti tomonidan tasdiqlangan namunaviy va dasturi asosida ishlab chiqilgan.

“Matematik modellashtirish” kafedrasining 2019 yil ______________dagi __–son majlisida muhokama etilgan va fakultet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: __________ prof. B.X.Xo’jayorov

“Amaliy matematika va informatika” fakulteti o’quv-uslubiy kengashining 2019 yil “___” _____________dagi “___”–son qarori bilan tasdiqlangan.

O’quv-uslubiy kengashi raisi: _________ dots. Sh. Mamatov

“Amaliy matematika va informatika” fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil “___” _____________dagi “___”–son qarori bilan chop qilishga tavsiya etilgan.

Fakultet kengashi raisi: ________ dots. A.B. Babayarov

Kelishildi:
O’quv uslubiy boshqarma boshlig’i

_________________ dots. B.S. Aliqulov

ANNOTATSIYA

Tabiatda, ko‘pincha, narsa va hodisalarning xossalarini o‘rganish jarayonida o‘rganilayotgan ob’yekt elementlarini bir-birlari bilan taqqoslanadi, ularni birgalikda qarab yoki elementlarni bo‘laklarga ajratib turli xulosalar qilinadi. Kombinatorikada chekli to‘plamni qismlarga ajratish, ularni o‘rinlash va o‘zaro joylash bilan bog‘liq muammolar o‘rganiladi. Graflar nazariyasi esa, bo‘shqotirmalar va qiziqarli o‘yinlarni o‘rganish jarayonida paydo bo‘lib, hozirgi vaqtda graf tushunchasi yordamida yo‘llar, elektrik, informatsion va boshqa tarmoqlar, geografik xaritalar, kimyoviy birlashmalar, odamlar va jamiyatlar orasidagi munosabatlar bilan bog‘liq hamda boshqa ko‘plab masalalarni hal qilish mumkin. Graflar nazariyasi informatsion texnologiyalar rivojida muhim ahamiytga ega bo‘lgan diskret matematikaning bir tilidir.

Ushbu fanda har xil kombinatorik masalalarni yechishda kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar: betakror va takrorli o‘rin almashtirish, o‘rinlashtirish, gruppalashlar kombinatsiyalaridan foydalana olish, Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, ko‘phad formulasi, Fibonachchi sonlari, turli boshqotirma masalalarini yechishda graf va u bilan bog‘liq asosiy tushunchalar hamda graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko‘phad yordamida, qo‘shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi, grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko‘paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog‘lamliligi, Eyler va Gamilton graflari, grafda masofa tushunchasi, minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik sonini aniqlash, tarmoqlar va Ford algoritmlari haqida ma’lumotlar bayon qilingan.

Bu fanni o’rganish mobynida talabalar yuqorida sanab o’tilgan ma’lumotlar bo’yicha turli amaliy dasturlar tuzish bo’yicha bilimlarini shakllantirishi nazarda tutilgan.

M U N D A R I J A

1. **SILLABUS** ……………………………………………………………….
2. **NAZARIY O'QUV MATERIALLAR** ………………………………….
3. **GLOSSARIY** ………………..……………………………………..........
4. **FOYDALANILGAN ELEKTRON MANBALAR** …………………….
5. **MUSTAQIL TA'LIM UCHUN MATERIALLAR** …………………………
6. **AMALIYOT MASHG'ULOT ISHLANMALARI** ……………………
7. **ILOVALAR** ………………………………………………………………

Kombinatorika va graflar nazariyasi fanining
2019/2020 o‘quv yili uchun

SILLABUSI

1	**OTM**	SamDU	Manzili: Unisersitet xiyoboni, 15
2	**Fakultet**	Amaliy matematika va informatika	Manzili: Bosh bino, 3-qavat
3	**Kafedra**	Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash	Manzili: Bosh binoning hovlisi Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi binosi
4	**Bilim va ta’lim sohasi**	Bilim sohasi: 100000 – gumanitar soha	Ta’lim sohasi: 130000 – matematika
5	**Ta’lim yo’nalishi, kurs, guruh**	5130100 – amaliy matematika va informatika	2,3-kurslar, 2-mutaxassislik(sirtqi) 2-kurs,
6	**Fan (o’quv soatlari)**	Kombinatorika va graflar nazariyasi	O’quv soatlari: ma’ruza – 18 soat amal. mashg’. – 18 soat mustaqil ish – 24 soat
			O’quv soatlari: ma’ruza – 34 soat amal. mashg’. – 34 soat laboratoriya - 34 soat mustaqil ish – 100 soat
7	**Kursning davomiyligi**	Kuzgi semestr Bahorgi semestr	2.09.2019 – 20.01.2019 02.02.2020 – 02.06.2020
8	**O’qituvchi (lavozimi, unvoni, elektron pochta)**	Ma’ruza o’qituvchisi: Yusupov Ozod	O’qituvchi: e-mail: ozod200707@mail.ru
		Amaliy m. o’qituvchisi: Yusupov Ozod Qaytarov Zohidjon	O’qituvchi: e-mail: ozod200707@mail.ru e-mail: z.qaytarov@gmail.com
9	**Dars joyi va vaqti**	Ma’ruza	Amaliy matematika va informatika, – aud.,
		Amal. Mashg’ulot	– aud.
10	**Konsultasiya joyi va vaqti**	Ma’ruza	Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi binosi, payshanba, soat 14.00

			– 15.00
		Amaliy mashg'ulot	Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi binosi, chorshanba, soat 14.00 – 15.00
11	**Shaxsiy grafik asosida ishlash vaqti**	ARM o'quv zali, matematika kabineti	Seshanba, payshanba, shanba kunlari, 15.00 dan 17.00 gacha

Asosiy ma'lumotlar

1	**Fanning dolzarbligi va qisqacha mazmuni**	Fan maqsadi: talabalarga kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar yordamida matematik amallarni bajarish ko'nikmalarini hosil qilish hamda zamonaviy dasturlashtirish texnologiyalarining g'oya va usullarini amalga oshirish uchun ularning dasturlashtirish tizimlarini qo'llash amaliy sabog'iga ega bo'lish va bu bilimlarni tadbiqiy masalalarni yechishda qo'llashdan iborat. Fanni o'rganish asnosida talabalarda quyidagi ko'nikmalarni hosil qilish nazarda tutilgan: - kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar hamda betakror va takrorli o'rin almashtirish, o'rinlashtirish, gruppalashlar; - Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, binomial koeffitsientlarning xossalari, ko'phad formulasi; - Fibonachchi sonlari va ularning sodda xossalari; - grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar hamda graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko'phad yordamida, qo'shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi; - grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko'paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar,

		grafning bog‘lamliligi, Eyler va Gamilton graflari, grafda masofa tushunchasi, minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik sonini hosil qilish kabi amaliy masalalarni yechishda tadbiq qilish.
2	**Fanning maqsad va vazifalari**	**Fanni o‘qitishning maqsadi** – Fanni o’rganish asnosida talabalarda quyidagi ko’nikmalarni hosil qilish nazarda tutilgan: - kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar hamda betakror va takrorli o‘rin almashtirish, o‘rinlashtirish, gruppalashlar; - Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, binomial koeffitsientlarning xossalari, ko‘phad formulasi; - Fibonachchi sonlari va ularning sodda xossalari; - grafning abstrakt ta’rifi va u bilan bog‘liq boshlang‘ich tushunchalar hamda graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko‘phad yordamida, qo‘shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi; - grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko‘paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog‘lamliligi, Eyler va Gamilton graflari, grafda masofa tushunchasi, minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik sonini hosil qilish kabi amaliy masalalarni yechishda tadbiq qilish.
3	**El. pochta va boshqa elektron vositalar orqali aloqa tartibi**	O’qituvchi va talaba o’rtasidagi aloqa elektron pochta orqali ham amalga oshirilishi mumkin. Elektron pochtani ochish vaqti soat 15.00 dan 20.00 gacha. Baholash masalasi elektron pochta yoki telefon orqali muhokama qilinmaydi. Baholash faqat universitet hududida, belgilangan xona va belgilangan vaqtda hamda dars davomida (JN)

		amalga oshiriladi.
4	**Talaba uchun asosiy talablar**	- Universitet ichki tartib-qoidalariga va kiyinish madaniyatiga rioya qilish; - Darslarga kechikib kelmaslik va sababsiz qoldirmaslik, qoldirilgan darslarni muddatida qayta o’zlashtirish; -Uyali telefonni dars va nazoratlar paytida o’chirib qo’yish ; -Darslarga tayyorlanib kelish va faol ishtirok etish; -Ma’ruza, amaliy mashg’ulot, mustaqil ish va uy vazifasi uchun alohida daftar tutish va talab darajasida yuritish; - Berilgan uy vazifasi, mustaqil ish va boshqa topshiriqlarni o’z vaqtida sifatli bajarish; -Nazoratlarga puxta tayyorgarlik ko’rib kelish va yetarli ball to’plamagan holda takroriy nazoratlarni belgilangan muddatlarda topshirish; -Nazorat paytlarida ko’chirmachilik (plagiat) qilmaslik va ushbu holat ro’y berganda nazoratdan chetlashtirilishini e’tiborda tutish; - Qo’yilgan balga e’tirozi bo’lsa, ball e’lon qilingandan keyin bir kun mobaynida o’qituvchi, kafedra mudiri yoki dekanga (yakuniy nazoratlar bo’yicha apelyasiya komissiyasiga) murojaat qilish; - Dars paytida va undan tashqarida o’qituvchi va boshqalarga nisbatan odob-axloq doirasida hurmat bilan munosabatda bo’lish.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Ro'yxatga olindi:
№ _BD-5130200-2.12

"___" _______2019 yil

Samarqand davlat universiteti
rektori:
_____R.I.Xalmuradov

"___" _____________

KOMBINATORIKA VA GRAFLAR NAZARIYASI FANINING

O ' Q U V D A S T U R I

Bilim sohasi:	4100000 – Gumanitar soha
Ta'lim sohasi:	130000 – Matematika
Ta'lim yonalishi:	5130200 – Amaliy matematika va informatika

Samamarqand - 2019

Fan dasturi Samarqand davlat universiteti amaliy matematika va informatika fakulteti kengashida ko'rib chiqilgan va tavsiya qilingan (2019 yil "__" _________dagi "___"-sonli bayonnoma).

Fakultet dekani: A.I.Babayarov

Fan dasturi Samarqand davlat universitetida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

Urunbayev E. - SamDU, "Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash" kafedrasi dotsenti, t.f.n.

Yusupov O. - SamDU, "Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash" kafedrasi assistenti.

Taqrizchilar:

Bekmurodov Q.A. – TATU Samarqand filiali "Kompyuter tizimlari" kafedra mudiri dotsenti, t.f.n.

Bozorov I.N.. - SamDU, "Optimal boshqaruv usullari" kafedrasi mudiri, f.-m.f.n., dotsent;

Fanning dasturi Samarqand davlat universiteti o'quv-uslubiy kengashining 2019 yil "___"________dagi "____"-son majlis bayoni bilan ma'qullangan.

O'quv uslubiy kengash raisi: prof.A.S.Soleev

Kirish

Tabiatda, ko‘pincha, narsa va hodisalarning xossalarini o‘rganish jarayonida o‘rganilayotgan ob’yekt elementlarini bir-birlari bilan taqqoslanadi, ularni birgalikda qarab yoki elementlarni bo‘laklarga ajratib turli xulosalar qilinadi. Kombinatorikada chekli to‘plamni qismlarga ajratish, ularni o‘rinlash va o‘zaro joylash bilan bog‘liq muammolar o‘rganiladi. Graflar nazariyasi esa, bo‘shqotirmalar va qiziqarli o‘yinlarni o‘rganish jarayonida paydo bo‘lib, hozirgi vaqtda graf tushunchasi yordamida yo‘llar, elektrik, informatsion va boshqa tarmoqlar, geografik xaritalar, kimyoviy birlashmalar, odamlar va jamiyatlar orasidagi munosabatlar bilan bog‘liq hamda boshqa ko‘plab masalalarni hal qilish mumkin. Graflar nazariyasi informatsion texnologiyalar rivojida muhim ahamiytga ega bo‘lgan diskret matematikaning bir tilidir.

Fanining maqsadi va vazifalari

Fan maqsadi: talabalarga kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar yordamida matematik amallarni bajarish ko’nikmalarini hosil qilish hamda zamonaviy dasturlashtirish texnologiyalarining g’oya va usullarini amalga oshirish uchun ularning dasturlashtirish tizimlarini qo’llash amaliy sabog’iga ega bo’lish va bu bilimlarni tadbiqiy masalalarni yechishda qo’llashdan iborat.

Fanni o’rganish asnosida talabalarda quyidagi ko’nikmalarni hosil qilish nazarda tutilgan:

- kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar hamda betakror va takrorli o‘rin almashtirish, o‘rinlashtirish, gruppalashlar;
- Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, binomial koeffitsientlarning xossalari, ko‘phad formulasi;
- Fibonachchi sonlari va ularning sodda xossalari;
- grafning abstrakt ta’rifi va u bilan bog‘liq boshlang‘ich tushunchalar hamda graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko‘phad yordamida, qo‘shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi;
- grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko‘paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog‘lamliligi, Eyler va Gamilton graflari, grafda masofa tushunchasi, minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik sonini hosil qilish kabi amaliy masalalarni yechishda tadbiq qilish.

Fanning vazifalari: har xil kombinatorik masalalarni yechishda kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar: betakror va takrorli o‘rin almashtirish, o‘rinlashtirish, gruppalashlar kombinatsiyalaridan foydalana olish, Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, ko‘phad formulasi, Fibonachchi sonlari, turli boshqotirma masalalarini yechishda graf va u bilan bog‘liq asosiy tushunchalar hamda graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko‘phad yordamida, qo‘shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi, grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko‘paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog‘lamliligi, Eyler va Gamilton graflari, grafda masofa tushunchasi, minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik sonini aniqlash, amaliy dasturlar tuzish bo’yicha bilimlarni shakllantirish va ularning amal qilish tamoillarini o’zlashtirish–bu fanning asosiy vazifalari hisoblanadi.

Fan bo’yicha talabalarning bilim, malaka va ko’nikmalariga qo’yiladigan talablar

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanini o’zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida talaba:

- barcha turdagi ifodalar ustida algebraik amallarni bajarish, ularni soddalashtirish, chiziqli algebra amallarini bajarish, turli sinfdagi tenglama va tengsizliklarni yechish, grafiklarni chizish amaliy dasturlar tuzish kabi amaliy ko’nikma va **bilimga** ega bo’lishlari, ularning mohiyatlarini tushunishlari kerak;
- kompyuter dastur ta’minoti, dasturlar toifalari, maxsus dastur ta’minotlaridan (mutaxassislik bo’yicha) foydalana olish, konstruktiv matematika tushunchalari, kommutativ algebra bo’yicha bilimga va **ko’nikmaga** ega bo’lishi kerak;
- yuqori bosqichli dasturlash va zamonaviy dasturlash texnologiyalari asosida amaliy masalalarga dastur ta’minotini yaratish **malakasiga** ega bo’lishi kerak.

Fanning o’quv rejadagi boshqa fanlar bilan o’zaro bog’liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanida keltirilgan tushunchalar va omillar «Matematik mantiq va diskret matematika», «Matematik analiz», «Chiziqli algebra», «Geometriya», «Ehtimollar nazariyasi» «Jarayonlar tadqiqoti», «Amaliy masalalarni matematik modellashtirish» va maxsus fanlarning amaliy masalalarini yechishda qo’llaniladi.

Shu bilan birgalikda ushbu fan sonli usullar, analitik dasturlash va gafika bilan bevosita bog’langan tanlov fanlarini o’zlashtirish uchun amaliy asos hisoblanadi.

Fanning ishlab chiqarishdagi o’rni

Fan dasturida eng ommaviy zamonaviy matematik paketlar tizimi va dasturlashtirish tillarining asosiy mavzulari qaralgan bo’lib, fanni chuqur o’zlashtirgan talaba olgan bilim va ko’nikmalaridan ishlab-chiqarishda, ilmiy-tadqiqot ishlarida, shuningdek, talim tizimida yangi dasturlashtirish texnologiyalarini o’zlashtirish va samarali dastur ta’minotini yaratishda foydalanishi mumkin.

Fanni o’qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanini o’qitish ma’ruza, amaliy, laboratoriya va seminar mashg’ulotlari hamda mustaqil ta’lim ko’rinishida olib boriladi. Fanning mazmuni uni o’qitishda zamonaviy axborot texnologiyalaridan, xususan, kompyuter texnikasidan foydalanishni taqoza etadi. Shu bilan birgalikda fanni o’qitishda ilg’or va zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informasion-pedagogik texnologiyalarni tadbiq qilish katta samara berishi shubhasiz. Fanni o’qitishda elektron darslikliklardan va mustaqil ta’lim uchun masofaviy ta’lim saytlaridan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Asosiy qism
Fanning nazariy mashg’ulotlari mazmuni

Kombinatorika va graflar nazariyasi faniga kirish. Uning fanda va amaliyotda tutgan o’rni.

To’plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to’plamlar.

Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar: takrorli bo’lmagan o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar, guruhlashlar. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi, binomial koeffitsientlarning xossalari. Takrorli kombinatsiyalar: o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar. Ko‘phad formulasi. Fibbonachi sonlari va ularning ba’zi soda xossalari. Stirling va Katalan sonlari. Bo’laklashlar kombinatorikasi. Rekurrent munosabatlar. Ferrers diagrammasi. Bo‘laklashlarning xossalari. Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tadbiqi.

Graflar nazariyasining boshlang’ich ma’lumotlari. Graflarning berilish usullari: grafning geometrik ifodalanishi, graflarning qo‘shnilik va insidentlik matritsalari. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi. Graflar ustida sodda amallar: graflarni birlashtirish, biriktirish, ko‘paytirish amallari. Marshrutlar va zanjirlar. Grafning bog’lamliligi. Eyler va Gamilton graflari. Grafning metrik xarakteristikalari. Planar graflar.Daraxtlar. Graflarni bo'yash. Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar. Ford algoritmi.

Amaliy mashg’ulotlarni tashkil etish bo’yicha ko’rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlarni o'tkazishdan maqsad ma'ruza materiallari bo'yicha talabalar bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirish va kengaytirishdan iboratdir. Shu maqsadda hamma mavzularga doir va yetarli miqdordagi masalalar nazarda tutiladi. Amaliyot mashg'ulotlarida e'tibor tegishli mavzularni talabalar mustaqil o'rganib, ma'ruza qilishga tayyorlanish, mavzuni tahlil qilib fikrlash va notiqlik qobiliyatini oshirishga yo'naltiriladi.

Amaliy mashg’ulotlariga tavsiya etiladigan mavzulari

1. To’plamlar ustida amallar. To’plam Buleani. Dekart ko’paytma. Munosabatlar va funksiyalar. Tartib munosabati turlari.
2. Kombinatorikaning umumiy tushunchalari, usullari va qoidalari
3. Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar. O’rin almashtirishlar. O’rinlashtirishlar.
4. Gruppalashlar.
5. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi. Binomial koeffitsiyent
6. Takrorli kombinatsiyalar.
7. Fibbonachi sonlari. Stirling va Katalan sonlari.
8. Bo’laklashlar kombinatorikasi. Rekurrent munosabatlar metodi.
9. Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tadbiqi
10. Graflar nazariyasining boshlang’ich ma’lumotlari.
11. Graflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko’phad yordamida berilishi, matritsalar yordamida berilishi.
12. Graflar ustida amallar.
13. Marshrutlar va zanjirlar.
14. Eyler va Gamilton graflari.
15. Grafning metrik xarakteristikalari.
16. Planar graflar.
17. Daraxtlar.
18. Tarmoqlar. Tarmoqdagi oqimlar.
19. Ford algoritmi.

Laboratoriya mashg’ulotlariga tavsiya etiladigan mavzulari

1. O’rin almashtirishlar, o’rinlashtirishlar kombinatsiyalari namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.
2. Gruppalashlar kombinatsiyalari namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.
3. Paskal uchburchagi namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.
4. Nyuton binomi yoyilmasini namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.
5. Takrorli kombinatsiyalarni hosil qilishning algoritm va dasturlarini tuzish.
6. Fibbonachi sonlari hisoblashning samarali algoritmlarini tuzish.
7. Stirling va Katalan sonlari hisoblash algoritm va dasturlarini tuzish.
8. Bo’laklashlar kombinatorikasi namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.
9. Rekurrent munosabatlar metodi asosida amaliy masalalarni hisoblash algoritm va dasturlar tuzish.

10. Graflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko’phad yordamida berilishi, matritsalar yordamida berilishi orqali boshqa berilish usullariga o`tkazish algoritm va dasturlarini tuzish.
11. Graflar ustida amallar bajarishni namoyish qilish algoritm va dasturlar tuzish.
12. Berilgan marshrutlarni zanjirga tekshirish algoritmlari.
13. Grafni Eyler va Gamilton graflari graflariga tekshirish va yo`llarini topish usul va algoritmlari.
14. Grafning metrik xarakteristikalari hisoblash va namoyish qilish algoritm va dasturlarini tuzish.
15. Daraxtlarni ifodalash usullari dasturini tuzish.
16. Deysktra algoritmi asosida samarali dastur ishlab chiqish.
17. Ford algoritmi asosida samarali dastur ishlab chiqish.

Mustaqil ishni tashkil etishning shakli va mazmuni

Mustaqil ishlarni bajarish jarayonida talabalar quyidagi ishlarni bajaradilar:

- darslik va o’quv qo’llanmalar asosida fan mavzulari bo’yicha nazariy tayyorgarlik ko’rish, amaliy va laboratoriya mashg’ulotlariga tayyorlanish;
- tarqatma materiallar bo’yicha ma’ruzalarni chuqur o’zlashtirish;
- fan mazmunida ko’rsatilmagan kompyuter algebrasi tizimlari va muhitlari bilan tanishish va qiyosiy tahlil qilish;

Mustaqil ishlar mavzulari

1. To’plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari.
2. To’plamlar ustida amallar.
3. To’plamlar algebrasi. Kortej tushunchasi.
4. To`plamlar ustida amallar. To`plam Buleani. Dekart ko`paytma.
5. Musosabatlar va funksiyalar. Tartib munosabati turlari.
6. Kombinatorika predmeti va uning paydo bo`lish tarixi.
7. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar.
8. Kombinatorikada ko’p qo’llaniladigan usul va amallar.
9. Asosiy kombinasiyalar. O`tinlashtirish,o`rin almashtirishlar.
10. Gruppalashlar.
11. Takroriy kombinasiyalar.
12. Takroriy gruppalash.
13. Takroriy o`rinlashtirish amalini tahlil qilish algoritmi va dasturi.
14. Umumlashgan nyuton binomi.
15. Fibbonachi sonlari va ularning xossalari.
16. Stirling sonlari va ularning xossalari.
17. Katalan sonlari va ularning xossalari.
18. Eyler sonlari va ularning xossalari.

19. Bel sonlari va ularning xossalari.
20. Bo`laklash kombinatorikasining xossalari.
21. Rekurrent munosabatlar metodi va ularni amaliy tadbiqlari.
22. Hosil qiluvchi funksiyalar ta'rifi va ularning oddiy xossalari.
23. Graflar nazariyasi haqida umumiy ma`lumotlar.
24. Izoform graflar.
25. Graflarning berilish usullari.
26. Graflar ustida amallar.
27. Grafning bog`lamligi.
28. Eyler graflari.
29. Gamilton graflari.
30. Grafning metrik xarakteristikalari.
31. Grafning siklomatik soni.
32. Minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala.
33. Eng qisqa yo`lni topish algoritmlari.
34. Kommivoyajyor masalasi.
35. Planar graflar.
36. Graflarni bo`yash.
37. Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar.
38. Tarmoq tushunchasi.
39. Tarmoqdagi oqimlar.
40. Ford algoritmi.

Dasturning informasion - uslubiy ta'minoti

Fanni o'qitish jarayonida mavjud nashr qilingan o'quv qo'llanmalari va elektron manbalar, Internet tizimidagi mos ta'lim saytlari ma'lumotlaridan, xususan http://www.intuit.ru, http:://www.book.ru, http://www.ziyonet.uz, http://www.maple-soft.ru, http://www.aladjev.newmail.ru/, http://www.aladjev.narod.ru/ va shunga o'xshash saytlaridan foydalaniladi. Kompyuter texnikasini qo'llash bilan bog'liq zamonaviy pedagogik va informasion texnologiyalar asoslangan o'qitish metodlari qo'llaniladi.

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar ro'yxati

Asosiy darslik va o'quv qo'llanmalar

1. Harris, John M., Hirst, Jeffry L., Mossinghoff, Michael J. Combinatorics and Graph Theory (second edition). Nyu York. 2008, pp 382.
2. Kenneth H. R. Discrete Mathematics and its Applications. New Jersey. 2004, pp 382.
3. Mitchel T. Keller, William T. Trotter. Applied Combinatorics
4. To'rayev H.T., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. T:2009.
5. Носов В.А. Комбинаторика и теория графов. М.: 1999 г. -116 стр

6. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. Вильямс.2004.
7. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. – 213 с.
8. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

Qo‘shimcha adabiyotlar

1. Problems in Combinatorics and Graph Theory. Ioan Tomescu. Nyu York. 1985, pp 335.
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
3. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969.
4. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1966.
5. Лекции по теории графов. / Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. М.: Наука, 1990. – 384 с.
6. Захарова Л. Е. Алгоритмы дискретной математики: Учебное пособие. М: Изд-во Московского государственного института электроники и математики, 2002. – 120 с.
7. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Наука, 1980. – 208 с.
8. Тўраев Ҳ. Т. Математик мантиқ ва дискрет математика. Тошкент: Ўқитувчи, 2003. – 416 б.
9. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987. – 381 с.
10. Евстигнеев В. А. Применение теории графов в программировании. М.: Наука, 1985.
11. Ф.А. Новиков Дискретная математика для программистов. СПб: Питер, 2000. – 304 с.
12. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие / Лаборатория Базовых Знаний, 2003. –288 с.
13. Xudoyberdiyev A.X. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent:. 2017. 60 s

Internet manbalari

1. http://www.iissvit.narod.ru/ssilki.htm.
2. http://www.krf.bsu.by/ELib/Genetic/GenAlg_2/index.htm.
3. http://www.neuroproject.ru.
4. http://www.aic.nrl.navy.mil/galist/.
5. http://iridia.ulb.ac.be/dorigo/ACO/ACO.html.
6. http://www.agp.ru/projects/.
7. http://www.swarm.org.
8. http://programming-challeges.com

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Ro'yxatga olindi:
№ 2070
2019 yil «___»_______

"TASDIQLAYMAN"
O'quv ishlari bo'yicha prorektori:
________ prof.A.S.Soleyev
"___"_________ 2019 yil

«KOMBINATORIKA VA GRAFLAR NAZARIYASI»

fanining

I S H C H I O ' Q U V D A S T U R I

Bilim sohasi: 100000 – Gumanitar soha
Ta'lim sohasi: 130000 – Matematika
Ta'lim yo'nalishi: 5130200 – Amaliy matematika va informatika

№	Mashg`ulot turi	Jami soat (5-semestr)
1	Ma'ruza	18
2	Amaliy	18
3	Mustaqil ta'lim	24
	Jami:	**60**

Samarqand 2019

Fanning ishchi o'quv dasturi o'quv reja va namunaviy o'quv dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:	O'runbayev E	-texnika fanlari nomzodi, SamDU, "Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash" kafedrasi dotsenti
	Yusupov O.R.	- SamDU, "Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash" kafedrasi assistenti
Taqrizchilar:	Bozorov I.N..	- SamDU, "Optimal boshqaruv usullari" kafedrasi mudiri, f.-m.f.n., dotsent;
	Abdullayev A.	- SamDU, "Axborotlashtirish texnologiyalari" kafedrasi katta o`qituvchisi, t.f.n.

Fanning ishchi o'quv dasturi Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasining 2019 yil "__" _______dagi "____"-son majlisida muhokama etilgan va ma'qullangan.

Kafedra mudiri: prof.Xo'jayorov B.X.

Fanning ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti o'quv-uslubiy kengashining 2019 yil "___" _______dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

O'quv-uslubiy kengash raisi: dots.Mamatov Sh.S.

Fanning ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil "___" _______dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

Fakultet kengashi raisi: dots.Babayarov A.I.

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI

Kelishildi:
O'quv-uslubiy boshqarma boshlig'i ______________dots. Aliqulov B.S.

2

Kirish

Matematika va informatikada kombinatorika va graflar nazariyasi fani muhim o’rin tutib, diskret matematika va matematik mantiq fannninz tarkibiy qismlaridan hisoblanadi.

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanida to’plamlar, munosabatlar, o’rinlashtirish nazariyasi elemenlari, graf, marshrut, zanjir, daraxt va tarmoq tushunchalari va ularga oid bo’lgan masalalar ko’riladi.

Kombinatorika va graflar nazariyasi diskret matematika va matematik mantiqning bevosita davomidir. Bundan tashqari kurs barcha informatikaviy fanlar bilan bog’langan. Kurs mos ta’lim yo’nalishi bakalavrlarini tayyorlashda yetakchi o’rin tutadi.

O’quv fanining maqsadi va vazifalari

Mazkur kursning maqsadi talabalarda mantiqiy fikrlash kobiliyatini rivojlatirish hamda matematik kibernetika asoslarini o’rgatishdan iboratdir. Fanning vazifasi esa, talabalarga kombinatorika va graflar nazariyasi asoslarini berish, olgan nazariy bilimlarini amaliyotga qo’llay bilishga o’rgatishdan va oqibat natijada ularni kombinatorik fikrlash madaniyatini ko’tarishdan iboratdir.

Kombinatorika elementlari va graflar, graf turlari, tarmoq tushunchalari bilan tanishtirish kursning asosiy vazifasidir.

Fan buyicha talabalar bilim, ko’nikma va malakalariga qo’yiladigan talablar

«Kombinatorika va graflar nazariyasi»o’quv fanini o’zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr:

- matematika va informatikada kombinatorika va graflar nazariyasi fanining tutgan o’rni va unnng rivojlanish tarixiy etaplari, to’plamlar va ular ustida amallar, kombinatorika masalalari, kombinatsiyalar, bo’laklash kombinatorikasi, hosil qiluvchi funksiyalar, graflar, Eyler va Gamilton graflari, daraxtlar va tarmoqlar haqida *bilishi kerak*;
- kombinatorik masalalarni yechish, ularnimg algoritmlarini va dasturlarini tuzish, graflar ustida amallar bajarish, graflarning metrik xarakteristikalarini hisoblash *ko’nikmalariga ega bo’lshii kerak*;
- mazkur kursda o’zlashtirish natijasida olingan bilimlarini dasturlashda va axborotlarni himoyalashda amaliy qo’llash *malakasiga ega bo’lishi kerak*.

Fanning o’quv rejadagi boshqa fanlar bilan o’zaro bog’liqligi

Matematika va informatikada «Kombinatorika va graflar nazariyasi» fani muhim o’rin tutali. Ko’pgina matematik ob’yektlarni o’rganishda, avvalo ularga mos keladigan matematik modellar tuzib olinali. Zamonaviy kompyuterlarni dasturlashda va axborot texnologiyalarining nazariy asoslarida kombinatorika va graflar nazariyasi metollari keng qo’llaniladi.

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanining o’zlashtirish diskret matematika, Matematik mantiq fanlari bilan uzviy bog’langan. Fan mazmuni Informatika sohasidagi Tizimli programmalash, Web programmalash, Berilganlar bazasini boshqarish tizimlari, Tadbiqiy masalalarni matematik modellashtirish tizimlari (Mathcad, Maple. Statistika va boshqalar) o’rganish uchun **zarur hisoblanadi.**

Fanning ishlab chiqarishdagi o’rni

Mazkur dasturga ko’ra ushbu fan doirasida ko’plab model masalalar o’rganiladiki, bu mazkur fanni chuqur o’rgangan har bir bakalavr olgan bilim va ko’nikmalarini ilmiy-tadqiqot ishlarida, axborot texnologiyalari masalalarini hal qilishda, shuningdek, ta’lim tizimida samarali foydalanish imkonini beradi.

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanini o'qitish ma'ruza, amaliy mashg'ulotlar, seminar mashg'ulotlari va mustaqil ta'lim ko'rinishida olib borish bilan birga o'qitishning ilg'or va zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informatsion-pedagogik texnologiyalarni tadbiq qilish muhim ahamiyatga ega. Chunonchi, ushbu fanni o'qitish jarayonida yangi matematik dasturlar Maple, Mathcad va mavjud elektron darsliklar, vebsaytlarlan foydalaniladi.

«Kombinatorika va graflar nazariyasining tadbiqlari» kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondoshuvlardan foydalaniladi:

Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim. Bu ta'lim o'z mohiyatiga ko'ra ta'lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to'laqonli rivojlanishlarini ko'zda tutadi. Bu esa ta'limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma'lum bir ta'lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog'liq o'qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondoshuv. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o'zida mujassam etmog'i lozim: jarayonning mantiqiyligi, uning barcha bo'g'inlarini o'zaro bog'langanligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo'naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta'lim oluvchining faoliyatni aktivlashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo'naltirilgan ta'limni ifodalaydi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o'quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o'z-o'zini faollashtirishi va o'z-o'zini ko'rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta'limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta'lim beruvchi va ta'lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e'tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta'lim. Ta'lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta'lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni obyektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini,dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo'llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta'minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo'llash - yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o'quv jarayoniga qo'llash.

O'qitishning usullari va texnikasi. Ma'ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta'lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O'qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o'zaro o'rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

O'qitish vositalari: o'qitishning an'anaviy shakllari (darslik, ma'ruza matni) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikasiya usullari: tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o'zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blis-so'rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o'qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o'quv mashg'uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko'rinishidagi o'quv mashg'ulotlarini rejalashtirish, qo'yilgan maqsadga erishishda o'qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg'ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o'quv mashg'ulotida ham butun kurs davomida ham o'qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Kurs oxirida test topshiriqlari yoki yozma ish variantlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi.

«Kombinatorika va graflar nazariyasining tadbiqlari» fanini o'qitish jarayonida kompyuter texnologiyasidan, "Maple" tizimi va "Delphi" dasturlash tilidan foydalaniladi. Ayrim mavzular bo’yicha talabalar bilimini baholash test asosida va kompyuter yordamida bajariladi. “Internet” tarmog’idagi rasmiy dasturlardan foydalaniladi, tarqatma materiallar tayyorlanadi, test tizimi hamda tayanch so’z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o’tkaziladi.

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanidan mashg’ulotlarning mavzular va soatlar bo’yicha taqsimlanishi:

T/r	Mavzular nomi	Ma’ruza	Amaliy mashg’ulot	Mustaqil ta’lim
1	**Kombinatorika va graflar nazariyasi faniga kirish. Uning fanda va amaliyotda tutgan o’rni. To’plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to’plamlar.**	2	2	4
2	Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi.	2	2	2
3	Takrorli kombinatsiyalar. Fibbonachi sonlari.	2	2	2
4	Bo’laklashlar kombinatorikasi. Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tatbiqi	2	2	2
5	Graflar nazariyasining boshlang’ich ma’lumotlari. Graflarning berilish usullari.	2	2	2
6	Graflar ustida amallar. Marshrutlar va zanjirlar.	2	2	2
7	Eyler va Gamilton graflari. Grafning metrik xarakteristikalari.	2	2	4
8	Planar graflar.Daraxtlar. Graflarni bo'yash.	2	2	2
9	Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar	2	2	4
Jami:		18	**18**	**24**

Asosiy qism: Fanning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Asosiy qismda (ma’ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo’yicha talabalarga yetkazilishi zarur bo’lgan bilim va ko’nikmalar to’la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo’yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo’layotgan ijtimoiy-siyosiy va demokratik o’zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalardagi islohatlarning ustuvor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so’ngi yutuqlari e’tiborga olinishi tavsiya etiladi.

Ma’ruza mashg’ulotlari

Kombinatorika va graflar nazariyasi faniga kirish. Uning fanda va amaliyotda tutgan o'rni. To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pog'ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z- o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A5; A7; A8; Q11; Q12; Q14.

Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pog'ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z- o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A5; A7; A8; Q11; Q12; Q14.

Takrorli kombinatsiyalar. Fibbonachi sonlari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pog'ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z- o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A5; A7; A8; Q11; Q12; Q14.

Bo'laklashlar kombinatorikasi. Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tatbiqi

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pog'ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z- o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A5; A7; A8; Q11; Q12; Q14.

Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari. Graflarning berilish usullari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2; A4; A5; A7; A8; Q11; Q12; Q14.

Graflar ustida amallar. Marshrutlar va zanjirlar.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Blis-so'rov, zig-zag usuli, munozara, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A5; A7; A8; Q11; Q12; Q14.

Eyler va Gamilton graflari. Grafning metrik xarakteristikalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Integrativ, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2; A3; A4; A5; A7; A8; Q11; Q12; Q14.

Planar graflar.Daraxtlar. Graflarni bo'yash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. B/B/B jadvali, munozara, Venn diagrammasi, T-sxema, o'z-o'zini nazorat .*

Adabiyotlar: A1;A2; A3; A4; A5; A7; A8; Q11; Q12; Q14.

Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Ajurali arra, bumerang, 3x3 usuli, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A6; A7; A8; Q9; Q10; Q11; Q13.

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fani bo'yicha ma'ruza mashg'ulotining kalendar tematik rejasi

№	O`tiladigan mavzu	Soat	O`tkazish sanasi	Ijro muddati	Izoh
1.	**Kombinatorika va graflar nazariyasi faniga kirish. Uning fanda va amaliyotda tutgan o'rni.**	2			

	To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.				
2.	Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi.	2			
3.	Takrorli kombinatsiyalar. Fibbonachi sonlari.	2			
4.	Bo'laklashlar kombinatorikasi. Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tatbiqi	2			
5.	Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari. Graflarning berilish usullari.	2			
6.	Graflar ustida amallar. Marshrutlar va zanjirlar.	2			
7.	Eyler va Gamilton graflari. Grafning metrik xarakteristikalari.	2			
8.	Planar graflar.Daraxtlar. Graflarni bo'yash.	2			
9.	Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar	2			
	Jami:	**18**			

Amaliy mashg'ulotlarini tashkil qilish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlarni o'tkazishdan maqsad ma'ruza materiallari bo'yicha talabalar bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirish va kengaytishdan iboratlir. Shu maksadda hamma mavzularga doir va yetarli miqdoragi masalalar yechish nazarda tutiladi. Amaliy mashg'ulotlarida e'tibor tegishli mavzularni talabalar mustaqil o'rganib, ma'ruza qilishga tayyorlanish, mavzuni tahlil qilib fikrlash va notiqlik qobiliyatini oshirishga yo'naltiriladi.

Amaliy mashgulotlarnnng taxminiy tavsiya etiladigan mavzulari:

To'plamlar ustida amallar. To'plam Buleani. Dekart ko'paytma. Munosabatlar va funksiyalar. Tartib munosabati turlari. Kombinatorikaning umumiy tushunchalari, usullari va qoidalari. Asosiy kombinasiyalar. O'rinlashtirish, o'rin almashtirishlar. Gruppalashlar. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi. Binomial koeffitsiyent. Takroriy kombinatsiyalar. Fibonachchi sonlari. Bo'laklash kombinatorikasi. Rekkurrent munosabatlar metodi. Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning talbiki. Graflar nazariyasi haqila umumiy ma'lumotlar. Graflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko'phad yorlamida berilishi, matritsalar yordamida berilishi. Graflar ustila amallar. Marshrutlar. Zanjirlar. Eyler graflari. Gamilton graflari. Grafning metrik xarakteristikalari. Planar graflar. Daraxtlar. Graflarni bo'yash. Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar.

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fani bo'yicha amaliy mashg'ulotining kalendar tematik rejasi

№	O`tiladigan mavzu	Soat	O`tkazish sanasi	Ijro muddati	Izoh
1.	To'plamlar ustida amallar. To'plam Buleani. Dekart ko'paytma. Munosabatlar va funksiyalar. Tartib munosabati turlari. Kombinatorikaning umumiy tushunchalari, usullari va qoidalari.	2			

2	Asosiy kombinasiyalar. O'rinlashtirish, o'rin almashtirishlar. Gruppalashlar. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi. Binomial koeffitsiyent.	2			
3.	Takroriy kombinatsiyalar. Fibonachchi sonlari.	2			
4.	Bo'laklash kombinatorikasi. Rekkurrent munosabatlar metodi. Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning talbiki.	2			
5.	Graflar nazariyasi haqila umumiy ma'lumotlar. Graflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko'phad yorlamida berilishi, matritsalar yordamida berilishi.	2			
6.	Graflar ustila amallar. Marshrutlar. Zanjirlar.	2			
7.	Eyler graflari. Gamilton graflari. Grafning metrik xarakteristikalari.	2			
8.	Planar graflar. Daraxtlar. Graflarni bo'yash.	2			
9.	Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar.	2			
	Jami	**18**			

Mustaqil ta'limni tashkil etishning shakli va mazmuni

Talaba mustaqil ta'limning asosiy maqsadi o'qituvchining rahbarligi va nazoratida muayyan uquv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko'nikmalarini shakllantirish va rivojlantirish.

Mustaqil ishning maqsadi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, belgilangan mavzular asosida qo'shimcha bilim olishdan iborat. Bunda ushbu ishlarni bajaradilar:

Bunla talabalar ma'ruzalarla olgan bilimlarini amaliy mashg'ulotlarni bajarishlari bilan mustahkamlashi hamda statistikaning ba'zi mavzularini tushunishi hamda ularga oid masalalarni yechishlari kerak.

- amaliy mashg'ulotlarga tayyorgarlik;
- nazariy tayyorgarlik ko'rish;
- uy vazifazarni bajarish;
- o'tilgan materiallar mavzularini qaytarish;
- mustaqil nsh uchun mo'ljallangan nazariy bilim mavzularini o'zlashirish.

Muslaqil ish mavzularini o'zlashtnrish ta'lim jarayonila uzluksiz nazorat qilib borilali va yozma hisobot sifatida topshiriladi.

Talaba mustaqil ishini tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalanadi:

- ayrim nazariy mavzularni o'quv adabiyotlari yordamida mustaqil o'zlashtirish;
- berilgan mavzular bo'yicha axborot (referat) tayyorlash;
- nazariy bilimlarni amaliyotda qo'llash;
- maket, model va namunalar yaratish;
- ilmiy maqola, anajumanga ma'ruza tayyorlash va x.k.

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

№	Mustaqil ta'lim mavzulari	Berilgan topshiriqlar	Bajar. muddat.	Hajmi
1	To'plamlar ustida amallar. To'plam Buleani. Dekart ko'paytma. Munosabatlar va funksiyalar. Tartib munosabati turlari.		1-joriy nazorat oxirigacha	2
2	Kombinatorika predmeti va uning paydo bo'lish tarixi. Simmetrik gruppa.			2
3	Asosiy kombinatsiyalar. O'rinlashtirish, o'rin almashtirishlar. Gruppalashlar.			2
4	Takroriy kombinatsiyalar. Takroriy gruppalash.			2
5	Takroriy o'rinlashtirish amalini tahlil qilish algoritmi va dasturi.			2
6	Fibonachchi sonlari tatbiqlari.			2

7	Graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar.		2-joriy nazorat oxirigacha	2
8	Graflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko'phad yordamida berilishi, matritsalar yordamida berilishi.			2
9	Graflar ustida amallar. Grafning bog'lamliligi.			2
10	Eyler graflari. Gamilton graflari. Eng qisqa yo'l.			2
11	Planar graflar. Daraxtlar.			2
12	Ford algoritmi.			2
	Jami:			**24**

Dasturning informasion uslubiy ta'minoti

Mazkur fanni o'qitish jarayonida ta'limning zamonaviy metodlari, pedagogik va axborot-kommunikasiya texnologiyalarini qo'llash nazarda tutilgan:

- Ob'ektga yo'naltirilgan dasturlash tillari yordamida vizuallashtirilgan dasturiy vositalar, zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentasiya va elektron-didaktik texnologiyalaridan foydalanilgan holda o'tkaziladi;
- qo'shimcha imkoniyatlardan foydalanib amaliy masalalarini yechishga bag'ishlangan mashg'ulotlarda aqliy xujum, guruhli fikrlash, "ish o'yini" va boshqa pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi;
- amaliy masalalarni dasturini yaratishga bag'ishlangan mashg'ulotlarida kichik guruhlar musobaqalari, guruhli fikrlash pedagogik texnologiyalarini qo'llash nazarda tutiladi.

"Kombinatorika va graflar nazariyasi" fanidan talabalar bilimini reyting tizimi asosida baholash mezoni.

"Kombinatorika va graflar nazariyasining tadbiqlari" fani bo'yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma'lumotlar fan bo'yicha birinchi mashg'ulotda talabalarga e'lon qilinadi.

Fan bo'yicha talabalarning bilim saviyasi va o'zlashtirish darajasining Davlat ta'lim standartlariga muvofiqligini ta'minlash uchun quyidagi nazorat turlari o'tkaziladi:

joriy nazorat (JN) – talabaning fan mavzulari bo'yicha bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg'ulotlarda og'zaki so'rov, test o'tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollekvium, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o'tkazilishi mumkin;

oraliq nazorat (ON) – semestr davomida o'quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o'z ichiga olgan) bo'limi tugallangandan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat bir semestrda ikki marta o'tkaziladi va shakli (yozma, og'zaki, test va hokazo) o'quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;

yakuniy nazorat (YaN) – semestr yakunida muayyan fan bo'yicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni talabalar tomonidan o'zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan "Yozma ish" shaklida o'tkaziladi.

ON o'tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **ON** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **ON** qayta o'tkaziladi.

Oliy ta'lim muassasasi rahbarining buyrug'i bilan ichki nazorat va monitoring bo'limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida **YaN** ni o'tkazish jarayoni muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **YaN** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **YaN** qayta o'tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi, ko'nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

«Kombinatorika va graflar nazariyasining tadbiqlari» fani bo'yicha talabalarning semestr davomidagi o'zlashtirish ko'rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi.

Ushbu 100 ball baholash turlari bo'yicha quyidagicha taqsimlanadi:

Jami o'quv yuklama – 60 soat.
Ma'ruza – 18 s.
Amaliyot –18 s.
Mustaqil ta'lim – 24 s.

Adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar

1. To'rayev X., Azizov I., Otakulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. T.: 2009.
2. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1968.
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. - М.: Наука. -1969.

Qo'shimcha adabiyotlar

5. To'rayev X.T., Matematik mantik va diskret matematika. T.: O'qituvchi, 2003.
6. Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программировании. М.: Наука, 1985.
7. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.
8. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
9. Захарова Л. Е. Алгоритмы дискретной математики: Учебное пособие. М: Изд-во Московского государственного института электроники и математики, 2002. – 120 с.

Internet manbalari

9. http://www.iissvit.narod.ru/ssilki.htm.
10. http://www.krf.bsu.by/ELib/Genetic/GenAlg_2/index.htm.
11. http://www.neuroproject.ru.
12. http://www.aic.nrl.navy.mil/galist/.
13. http://iridia.ulb.ac.be/dorigo/ACO/ACO.html.
14. http://www.agp.ru/projects/.
15. http://www.swarm.org.
16. http://programming-challeges.com

FANNI O'ZLASHTIRISH UCHUN BAHOLASH MEZONLARI

Fan bo'yicha joriy nazoratlarda talabalar bilimi va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash mezoni (maks. ball – 35)

Maksimal ball	**Nazorat qilinadigan va baholanadigan ish turlari**	**Baholashda e'tibor qaratiladigan jihatlar**
JN		
7	Mavzular bo'yicha nazariy tayyorgarlik darajasi va darsdagi faollik	Asosiy tushunchalar, operatorlar, funksiyalar va texnologik vositalarni bilish, mohiyatini tushunish, ijodiy fikrlay olish, bilimlarni amalda qo'llay olish.
9	Uyga berilgan topshiriqlarni bajarish sifati	Topshiriqlarni to'g'ri va to'liq bajarish, algoritm va dasturlarni tuzishda ijodiy yondashish, tushuntirib bera olish.
12	Nazorat ishlarni bajarish sifati	Topshiriqlarni to'g'ri va to'liq bajarish ijodiy yondashish, mustaqil fikrlash, natijalarni asoslay olish.
7	Mustaqil topshiriqlarni bajarilish sifati	Berilgan topshiriqlarni to'g'ri va to'liq bajarish mustaqil mulohaza yurita olish, bilimlarni amalda qo'llay olish, masalaga ijodiy yondashish mohiyatni tushunish va aytib bera olish.
35		

Fan bo'yicha oraliq va yakuniy nazoratlarda talabalar bilimi va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash mezoni (ON bo'yicha maks. ball – 35, YaB bo'yicha maks ball 30)

Savollar		ON-(max. b.)	YaN (maks ball)	Baholashda e'tibor qaratiladigan jihatlar
Nazariy	1 2	6 8	6 6	Asosiy tushunchalar, operatorlar, funksiyalar va texnologik vositalarni bilish, mohiyatini tushunish, ijodiy fikrlay olish, bilimlarni nazariy asosini bilish va amalda qo'llay olish.
Amaliy	3 4	6 8	6 6	Topshiriqlarni to'g'ri va to'liq bajarish ijodiy yondashish, mustaqil fikrlash, yechimni asoslay olish mohiyatini tushunish
Must. ish	5	7	6	Savolga to'liq va to'g'ri javob berish misollar bilan asoslash ijodiy yondashish mohiyatini tushunish va tushuntirib bera olish.
Jami		**35**	**30**	

Fan bo'yicha reyting nazoratlarda o'zlashtirish ko'rsatkichini aniqlash mezoni

JN	**ON**	**YaN**	Baholashda e'tibor qaratiladigan asosiy jihatlar
31 – 35	31 – 35 ball	27 – 30	Asosiy tushunchalar, operatorlar, funksiyalar, texnologik

ball		ball	vositalarni bilish, mohiyatini tushunish, ijodiy fikrlay olish, bilimlarni nazariy asosini bilish va amalda qo’llay olish.
25 -30 ball	25 -30 ball	22 -26 ball	Asosiy tushunchalar, operatorlar, funksiyalar, texnologik vositalarni bilish, mohiyatini tushunish, bilimlarni nazariy asosini bilish va amalda qo’llay olish.
19 -24 ball	19 -24 ball	17 -21 ball	Asosiy tushunchalar, operatorlar, funksiyalar, sinflar va texnologik vositalarni bilish, bilimlarni amalda qo’llay olish.
0 -18 ball	0 -18 ball	0 -16 ball	Asosiy tushunchalar, operatorlar, funksiyalar va texnologik vositalarni bilmaslik, mustaqil mulohaza yurita olmaslik, yetarlicha tasavvurga ega bo’lmaslik va tushuntirib bera olmaslik, topshiriqlarni to’liq bajarmaslik va qo’pol xatolarga yo’l qo’yish.

Fanga ajratilgan amaliy soatlar hajmi – 18 soat bo’lganligi uchun 1 ta joriy nazorat belgilandi.

Fanga ajratilgan jami o’quv soat hajmi – 36 soat bo’lganligi uchun 1 ta oraliq nazorat belgilandi.

Maksimal ball –100, saralash bali – 55 ball.

Joriy – 35 ball.

Oraliq – 35 ball.

Joriy va oraliqdan 55 ball to’plagan talaba Yakuniy nazoratdan ozod qilinadi.

Yakuniy – 30 ball.

Yo’nalish: AM va Inf 4-kurs

Umumiy o’quv soati – 36 soat, shundan ma’ruza –18, amaliyot-18 soat

Ishchi o’quv dasturidagi ma’ruza mavzulari	Umumiy soat				Baho lash turi	Nazorat shakli	Ball		Muddati (hafta)
	Ma’ruza	Amaliy mash.	Mustaqil ishi	Jami			Max ball	Sar Bal 55 %	
1-9	18	18	34	70	JB	Kundalik nazorat, Mustaqil ish	35		Noyabr, 3- hafta
					OB	Yozma ish, og’zaki	35		Noyabr, 4- hafta
Jami	18	18	34	70	JB+ON		70	39	

					YaB	Yozma ish	30		Fevral (jadval bo'yicha)
Jami					JN+ON +YaN		100	55	

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Ro‘yxatga olindi:
№ 2071
2019 yil «___»_______

"TASDIQLAYMAN"
O‘quv ishlari bo‘yicha prorektori:
_________ prof.A.S.Soleev
"___" ________ 2019 yil

KOMBINATORIKA VA GRAFLAR NAZARIYASI FANINING

I S H C H I O ‘ Q U V D A S T U R I

Bilim sohasi: 4100000 – Gumanitar soha
Ta’lim sohasi: 130000 – Matematika
Ta’lim yo‘nalishi: 5130200 – Amaliy matematika va informatika

№	Mashg`ulot turi	Jami soat (6-semestr)
1	Ma’ruza	34
2	Amaliy	34
3	Laboratoriya	34
4	Mustaqil ta’lim	100
	Jami:	**202**

Samamarqand - 2019

Fanning ishchi o'quv dasturi o'quv reja va namunaviy o'quv dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar: Urunbayev E. – SamDU. "Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash" kafedrasi dotsenti, t.f.n.
O. Yusupov - SamDU. "Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash" kafedrasi assistenti.

Taqrizchilar: A. Abdullayev- texnika fanlari nomzodi;
O. Mamaraupov –PhD.

Fanning ishchi o'quv dasturi Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasining 201_ yil "__"_______dagi "____"-son majlisida muhokama etilgan va ma'qullangan.

Kafedra mudiri: prof . Xo`jayorov B.X.

Fanning ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti o'quv-uslubiy kengashining 201_ yil "__"_______dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

O'quv-uslubiy kengash raisi: dots.Mamatov Sh.S.

Fanning ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti ilmiy kengashining 201_ yil "__"_______dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

Fakultet kengashi raisi: dots. Babayarov A.I.

Kelishildi:
O'quv-uslubiy
boshqarma boshlig'i
_______________dots. Aliqulov B.S.

Kirish

Tabiatda, ko‘pincha, narsa va hodisalarning xossalarini o‘rganish jarayonida o‘rganilayotgan ob’yekt elementlarini bir-birlari bilan taqqoslanadi, ularni birgalikda qarab yoki elementlarni bo‘laklarga ajratib turli xulosalar qilinadi. Kombinatorikada chekli to‘plamni qismlarga ajratish, ularni o‘rinlash va o‘zaro joylash bilan bog‘liq muammolar o‘rganiladi. Graflar nazariyasi esa, bo‘shqotirmalar va qiziqarli o‘yinlarni o‘rganish jarayonida paydo bo‘lib, hozirgi vaqtda graf tushunchasi yordamida yo‘llar, elektrik, informatsion va boshqa tarmoqlar, geografik xaritalar, kimyoviy birlashmalar, odamlar va jamiyatlar orasidagi munosabatlar bilan bog‘liq hamda boshqa ko‘plab masalalarni hal qilish mumkin. Graflar nazariyasi informatsion texnologiyalar rivojida muhim ahamiytga ega bo‘lgan diskret matematikaning bir tilidir.

Fanining maqsadi va vazifalari

Fan maqsadi: talabalarga kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar yordamida matematik amallarni bajarish ko’nikmalarini hosil qilish hamda zamonaviy dasturlashtirish texnologiyalarining g’oya va usullarini amalga oshirish uchun ularning dasturlashtirish tizimlarini qo’llash amaliy sabog’iga ega bo’lish va bu bilimlarni tadbiqiy masalalarni yechishda qo’llashdan iborat.

Fanni o’rganish asnosida talabalarda quyidagi ko’nikmalarni hosil qilish nazarda tutilgan:

- kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar hamda betakror va takrorli o‘rin almashtirish, o‘rinlashtirish, gruppalashlar;
- Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, binomial koeffitsientlarning xossalari, ko‘phad formulasi;
- Fibonachchi sonlari va ularning sodda xossalari;
- grafning abstrakt ta’rifi va u bilan bog‘liq boshlang‘ich tushunchalar hamda graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko‘phad yordamida, qo‘shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi;
- grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko‘paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog‘lamliligi, Eyler va Gamilton graflari, grafda masofa tushunchasi, minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik sonini hosil qilish kabi amaliy masalalarni yechishda tadbiq qilish.

Fanning vazifalari: har xil kombinatorik masalalarni yechishda kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar: betakror va takrorli o‘rin almashtirish, o‘rinlashtirish, gruppalashlar kombinatsiyalaridan foydalana olish, Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, ko‘phad formulasi, Fibonachchi sonlari, turli boshqotirma masalalarini yechishda graf va u bilan bog‘liq asosiy tushunchalar hamda graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko‘phad yordamida, qo‘shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi, grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko‘paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog‘lamliligi, Eyler va Gamilton graflari, grafda masofa tushunchasi, minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik sonini aniqlash, amaliy dasturlar tuzish bo’yicha bilimlarni shakllantirish va ularning amal qilish tamoillarini o’zlashtirish–bu fanning asosiy vazifalari hisoblanadi.

Fan bo’yicha talabalarning bilim, malaka va ko’nikmalariga qo’yiladigan talablar

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanini o’zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida talaba:

- barcha turdagi ifodalar ustida algebraik amallarni bajarish, ularni soddalashtirish, chiziqli algebra amallarini bajarish, turli sinfdagi tenglama va tengsizliklarni yechish, grafiklarni chizish amaliy dasturlar tuzish kabi amaliy ko’nikma va **bilimga** ega bo’lishlari, ularning mohiyatlarini tushunishlari kerak;
- kompyuter dastur ta’minoti, dasturlar toifalari, maxsus dastur ta’minotlaridan (mutaxassislik bo’yicha) foydalana olish, konstruktiv matematika tushunchalari, kommutativ algebra bo’yicha bilimga va **ko’nikmaga** ega bo’lishi kerak;
- yuqori bosqichli dasturlash va zamonaviy dasturlash texnologiyalari asosida amaliy masalalarga dastur ta’minotini yaratish **malakasiga** ega bo’lishi kerak.

Fanning o’quv rejadagi boshqa fanlar bilan o’zaro bog’liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanida keltirilgan tushunchalar va omillar «Matematik mantiq va diskret matematika», «Matematik analiz», «Chiziqli algebra», «Geometriya», «Ehtimollar nazariyasi» «Jarayonlar tadqiqoti», «Amaliy masalalarni matematik modellashtirish» va maxsus fanlarning amaliy masalalarini yechishda qo’llaniladi.

Shu bilan birgalikda ushbu fan sonli usullar, analitik dasturlash va gafika bilan bevosita bog’langan tanlov fanlarini o’zlashtirish uchun amaliy asos hisoblanadi.

Fanning ishlab chiqarishdagi o’rni

Fan dasturida eng ommaviy zamonaviy matematik paketlar tizimi va dasturlashtirish tillarining asosiy mavzulari qaralgan bo’lib, fanni chuqur o’zlashtirgan talaba olgan bilim va ko’nikmalaridan ishlab-chiqarishda, ilmiy-tadqiqot ishlarida, shuningdek, talim tizimida yangi dasturlashtirish texnologiyalarini o’zlashtirish va samarali dastur ta’minotini yaratishda foydalanishi mumkin.

Fanni o’qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

«Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanini o’qitish ma’ruza, amaliy, laboratoriya va seminar mashg’ulotlari hamda mustaqil ta’lim ko’rinishida olib boriladi. Fanning mazmuni uni o’qitishda zamonaviy axborot texnologiyalaridan, xususan, kompyuter texnikasidan foydalanishni taqoza etadi. Shu bilan birgalikda fanni o’qitishda ilg’or va zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informasion-pedagogik texnologiyalarni tadbiq qilish katta samara berishi shubhasiz. Fanni o’qitishda elektron darslikliklardan va mustaqil ta’lim uchun masofaviy ta’lim saytlaridan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Asosiy qism

Fanning nazariy mashg’ulotlari mazmuni

Ma’ruza mashg`ulotlarining tavsiya etiladigan mavzulari

Kombinatorika va graflar nazariyasi faniga kirish. Uning fanda va amaliyotda tutgan o’rni. To’plamlar va ular ustida amallar.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Munosabatlar. Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to’plamlar.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Paskal uchburchagi. Nyuton binomi, binomial koeffitsientlarning xossalari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Takrorli kombinatsiyalar: o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar. Ko‘phad formulasi.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Fibbonachi sonlari va ularning ba’zi sodda xossalari. Stirling va Katalan sonlari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Bo’laklashlar kombinatorikasi. Rekurrent munosabatlar metodi. Ferrers diagrammasi. Bo‘laklashlarning xossalari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tadbiqi.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Graflar nazariyasining boshlang’ich ma’lumotlari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Graflarning berilish usullari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Graflar ustida sodda amallar: graflarni birlashtirish, biriktirish, ko‘paytirish amallari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Marshrutlar va zanjirlar. Grafning bog’lamliligi.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Eyler va Gamilton graflari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Grafning metrik xarakteristikalari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Planar graflar. Daraxtlar. Graflarni bo'yash.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Ford algoritmi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pog'ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z- o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1- A8; Q1-Q13; I1-I8.

Ushbu fan bo`yicha ma`ruza mashg`ulotlarining calendar tematik rejasi

№	Ma`ruza mashg`ulotlari	Soat
1.	Kombinatorika va graflar nazariyasi faniga kirish. Uning fanda va amaliyotda tutgan o'rni. To'plamlar va ular ustida amallar.	2
2.	Munosabatlar. Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.	2
3.	Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar.	2
4.	Paskal uchburchagi. Nyuton binomi, binomial koeffitsientlarning xossalari.	2
5.	Takrorli kombinatsiyalar: o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va guruhlashlar. Ko'phad formulasi.	2
6.	Fibbonachi sonlari va ularning ba'zi sodda xossalari. Stirling va Katalan sonlari.	2
7.	Bo'laklashlar kombinatorikasi. Rekurrent munosabatlar metodi. Ferrers diagrammasi. Bo'laklashlarning xossalari.	2
8.	Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tadbiqi.	2
9.	Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari.	2
10.	Graflarning berilish usullari.	2
11.	Graflar ustida sodda amallar: graflarni birlashtirish, biriktirish, ko'paytirish amallari.	2
12.	Marshrutlar va zanjirlar. Grafning bog'lamliligi.	2
13.	Eyler va Gamilton graflari.	2
14.	Grafning metrik xarakteristikalari.	2
15.	Planar graflar. Daraxtlar. Graflarni bo'yash.	2
16.	Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar.	2
17.	Ford algoritmi.	2
	Jami:	**34**

Amaliy mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlarni o'tkazishdan maqsad ma'ruza materiallari bo'yicha talabalar bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirish va kengaytirishdan iboratdir. Shu maqsadda hamma mavzularga doir va yetarli miqdordagi masalalar nazarda tutiladi. Amaliyot mashg'ulotlarida e'tibor tegishli mavzularni talabalar mustaqil o'rganib, ma'ruza qilishga tayyorlanish, mavzuni tahlil qilib fikrlash va notiqlik qobiliyatini oshirishga yo'naltiriladi.

Ushbu fan bo`yicha amaliy mashg’ulotlarning kalendar tematik rejasi

№	Ma`ruza mashg`ulotlari	Soat
1.	To’plamlar ustida amallar. To’plam Buleani. Dekart ko’paytma. Munosabatlar va funksiyalar. Tartib munosabati turlari.	2
2.	Kombinatorikaning umumiy tushunchalari, usullari va qoidalari	2
3.	Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar. O’rin almashtirishlar. O’rinlashtirishlar.Gruppalashlar	2
4.	Paskal uchburchagi. Nyuton binomi. Binomial koeffitsiyent	2
5.	Takrorli kombinatsiyalar.	2
6.	Fibbonachi sonlari. Stirling va Katalan sonlari.	2
7.	Bo’laklashlar kombinatorikasi. Rekurrent munosabatlar metodi.	2
8.	Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tadbiqi	2
9.	Graflar nazariyasining boshlang’ich ma’lumotlari.	2
10.	Graflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko’phad yordamida berilishi, matritsalar yordamida berilishi.	2
11.	Graflar ustida amallar.	2
12.	Marshrutlar va zanjirlar.	2
13.	Eyler va Gamilton graflari.	2
14.	Grafning metrik xarakteristikalari.	2
15.	Planar graflar.Daraxtlar.	2
16.	Tarmoqlar. Tarmoqdagi oqimlar.	2
17.	Ford algoritmi.	2
	Jami:	**34**

Ushbu fan bo`yicha laboratoriya mashg’ulotlarning kalendar tematik rejasi

№	Ma`ruza mashg`ulotlari	Soat
1.	O’rin almashtirishlar, o’rinlashtirishlar kombinatsiyalari namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.	2
2.	Gruppalashlar kombinatsiyalari namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.	2
3.	Paskal uchburchagi namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.	2

4.	Nyuton binomi yoyilmasini namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.	2
5.	Takrorli kombinatsiyalarni hosil qilishning algoritm va dasturlarini tuzish.	2
6.	Fibbonachi sonlari hisoblashning samarali algoritmlarini tuzish.	2
7.	Stirling va Katalan sonlari hisoblash algoritm va dasturlarini tuzish.	2
8.	Bo’laklashlar kombinatorikasi namoyish qilishning samarali algoritm va dasturlarini tuzish.	2
9.	Rekurrent munosabatlar metodi asosida amaliy masalalarni hisoblash algoritm va dasturlar tuzish.	2
10.	Graflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko’phad yordamida berilishi, matritsalar yordamida berilishi orqali boshqa berilish usullariga o`tkazish algoritm va dasturlarini tuzish.	2
11.	Graflar ustida amallar bajarishni namoyish qilish algoritm va dasturlar tuzish.	2
12.	Berilgan marshrutlarni zanjirga tekshirish algoritmlari.	2
13.	Grafni Eyler va Gamilton graflari graflariga tekshirish va yo`llarini topish usul va algoritmlari.	2
14.	Grafning metrik xarakteristikalari hisoblash va namoyish qilish algoritm va dasturlarini tuzish.	2
15.	Daraxtlarni ifodalash usullari dasturini tuzish.	2
16.	Deysktra algoritmi asosida samarali dastur ishlab chiqish.	2
17.	Ford algoritmi asosida samarali dastur ishlab chiqish.	2
	Jami:	**34**

Mustaqil ishni tashkil etishning shakli va mazmuni

Mustaqil ishlarni bajarish jarayonida talabalar quyidagi ishlarni bajaradilar:

- darslik va o’quv qo’llanmalar asosida fan mavzulari bo’yicha nazariy tayyorgarlik ko’rish, amaliy va laboratoriya mashg’ulotlariga tayyorlanish;
- tarqatma materiallar bo’yicha ma’ruzalarni chuqur o’zlashtirish;
- fan mazmunida ko’rsatilmagan kompyuter algebrasi tizimlari va muhitlari bilan tanishish va qiyosiy tahlil qilish;

Mustaqil ishlar mavzulari

№	Mustaqil ta'lim mavzulari	Berilgan topshiriqlar	Bajarish muddati	Hajmi (soat)
1.	To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	1-joriy nazorat oxirigacha	2
2.	To'plamlar ustida amallar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
3.	To'plamlar algebrasi. Kortej tushunchasi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
4.	To`plamlar ustida amallar. To`plam Buleani. Dekart ko`paytma.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
5.	Musosabatlar va funksiyalar. Tartib munosabati turlari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
6.	Kombinatorika predmeti va uning paydo bo`lish tarixi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
7.	Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
8.	Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va amallar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
9.	Asosiy kombinasiyalar. O`tinlashtirish,o`rin almashtirishlar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
10.	Gruppalashlar.	Adabiyotlardan		2

		konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		
11.	Takroriy kombinasiyalar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
12.	Takroriy o`rinlashtirish amalini tahlil qilish algoritmi va dasturi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
13.	Umumlashgan nyuton binomi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
14.	Fibbonachi sonlari va ularning xossalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
15.	Stirling sonlari va ularning xossalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
16.	Katalan sonlari va ularning xossalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
17.	Eyler sonlari va ularning xossalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
18.	Bel sonlari va ularning xossalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
19.	Bo`laklash kombinatorikasining xossalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
20.	Hosil qiluvchi funksiyalar ta’rifi va ularning oddiy xossalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni		4

		bajarish		
21.	Graflar nazariyasi haqida umumiy ma`lumotlar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	**2-joriy nazorat oxirigacha**	2
22.	Izoform graflar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
23.	Graflarning berilish usullari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
24.	Graflar ustida amallar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
25.	Grafning bog`lamligi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
26.	Eyler graflari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
27.	Gamilton graflari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
28.	Grafning metrik xarakteristikalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
29.	Grafning siklomatik soni.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
30.	Minimal uzunlikka ega yo’l haqidagi masala.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
31.	Eng qisqa yo`lni topish	Adabiyotlardan		2

	algoritmlari.	konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		
32.	Kommivoyajyor masalasi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		4
33.	Planar graflar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
34.	Graflarni bo`yash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
35.	Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
36.	Tarmoq tushunchasi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
37.	Tarmoqdagi oqimlar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
38.	Ford algoritmi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
39.		Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish		2
	Jami:			**100**

Dasturning informasion - uslubiy ta’minoti

Fanni o'qitish jarayonida mavjud nashr qilingan o'quv qo'llanmalari va elektron manbalar, Internet tizimidagi mos ta'lim saytlari ma'lumotlaridan, xususan http://www.intuit.ru, http:://www.book.ru, http://www.ziyonet.uz, http://www.maple-soft.ru, http://www.aladjev.newmail.ru/, http://www.aladjev.narod.ru/ va shunga o'xshash saytlaridan foydalaniladi. Kompyuter texnikasini qo'llash bilan bog'liq zamonaviy pedagogik va informasion texnologiyalar asoslangan o'qitish metodlari qo'llaniladi.

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar ro'yxati

Asosiy darslik va o'quv qo'llanmalar

1. Harris, John M., Hirst, Jeffry L., Mossinghoff, Michael J. Combinatorics and Graph Theory (second edition). Nyu York. 2008, pp 382.
2. Kenneth H. R. Discrete Mathematics and its Applications. New Jersey. 2004, pp 382.
3. Mitchel T. Keller, William T. Trotter. Applied Combinatorics
4. To'rayev H.T., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. T:2009.
5. Носов В.А. Комбинаторика и теория графов. М.: 1999 г. -116 стр
6. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. Вильямс.2004.
7. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. – 213 с.
8. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Problems in Combinatorics and Graph Theory. Ioan Tomescu. Nyu York. 1985, pp 335.
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
3. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969.
4. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1966.
5. Лекции по теории графов. / Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. М.: Наука, 1990. – 384 с.
6. Захарова Л. Е. Алгоритмы дискретной математики: Учебное пособие. М: Изд-во Московского государственного института электроники и математики, 2002. – 120 с.
7. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Наука, 1980. – 208 с.
8. Тўраев Ҳ. Т. Математик мантиқ ва дискрет математика. Тошкент: Ўқитувчи, 2003. – 416 б.
9. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987. – 381 с.
10. Евстигнеев В. А. Применение теории графов в программировании. М.: Наука, 1985.

11. Ф.А. Новиков Дискретная математика для программистов. СПб: Питер, 2000. – 304 с.
12. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие / Лаборатория Базовых Знаний, 2003. –288 с.
13. Xudoyberdiyev A.X. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent:. 2017. 60 s

Internet manbalari

17. http://www.iissvit.narod.ru/ssilki.htm.
18. http://www.krf.bsu.by/ELib/Genetic/GenAlg_2/index.htm.
19. http://www.neuroproject.ru.
20. http://www.aic.nrl.navy.mil/galist/.
21. http://iridia.ulb.ac.be/dorigo/ACO/ACO.html.
22. http://www.agp.ru/projects/.
23. http://www.swarm.org.
http://programming-challeges.com

Mashg'ulotlarning texnologik xaritasi

Umumiy o'quv soati – 78 soat, shundan ma'ruza –30, amaliyot-30 soat, laboratoriya – 2 soat, seminar – 16 soat

Ishchi o'quv dasturidagi ma'ruza mavzulari	Umumiy soat					Baho lash turi	Nazorat shakli	Ball		Muddati (hafta)
	Ma'ruza	Amaliy mash.	Seminar	Laboratoriya/must	Jami			Max ball	Sar Bal 55 %	
1-5	12	12	8	2/ 28	62	1-JB	Kundalik nazorat	15		Noyabr, 3- hafta
6-13	18	18	8	/46	90	2-JB	Kundalik nazorat, Mustaqil ish	20		Yanvar, 4-hafta
							JB	35		
1-13	30	30	20	2/ 74	152	OB	Yozma ish, og'zaki	35		Fevral, 2- hafta
						JB+ON		70	39	
	30	30	20	4/ 64	160	YaB	Yozma ish	30		Fevral (jadval bo'yicha)
						JN+ON +YaN		100	55	

Ta’lim texnologiyasi

Fanni o’qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

UNESKO tomonidan tan olingan pedagogik texnologiya oqimi 30-yillarda AQShda paydo bo’ldi va 70-80 yillarda barcha rivojlangan mamlakatlarni qamrab oldi.

Ta’lim nazariyasi va amaliyotida o’quv jarayoniga texnologik xususiyatni berish uchun 50-yillarda birinchi urinishlar qilib ko’rilgan. Ular o’z ifodasini an’anaviy o’qitish uchun mo’ljallangan majmuali texnik vositalarning yaratilishida namoyon qiladi.

Hozirgi vaqtda “pedagogik texnologiya ta’lim berishning texnik vositalari yoki kompyuterdan foydalanish sohasidagi tadqiqotlardek qaralmay, balki bu ta’limiy samaradorlikni oshiruvchi omillarni tahlil qilish yo’li orqali, yo’l va materiallarni tuzish hamda qo’llash, shuningdek qo’llanilayotgan usullarni baholash orqali ta’lim jarayoni tamoyillarini aniqlash va eng maqbul yo’llarini ishlab chiqish maqsadidagi tadqiqotdir” (Международный ежегодник по технологии образования и обучения, 1978/79. London, Nyu-York, 1978).

Pedagogik amaliyotda yangi yo’l va vositalarini jadal tatbiq etilayotganligini kuzatish mumkin. Biroq ba’zi ta’lim shakl va faol usullar o’rniga bo’linmas ta’limiy texnologiyalar zarur. Lekin ta’limiy jarayonni texnologiyali loyihalashtirish va rejalashtirishni, faqat texnologik bilim, ko’nikma va malakalarga ega bo’lgan o’qituvchi bajara olishi mumkin.

Texnologik bilimlar tizimi quyidagi tashkil etuvchilardan iborat:

- *tushunchaga oid qism* - texnologiyalashtirishning murakkabroq bo’lgan toifa va qoidlarini o’rganishga yo’l;
- *ta’lim texnologiyasining tarkibiy qismi va harakatlanuvchi tuzilma* - ta’lim jarayonini bashoratlash va loyihalashtirish asosi to’g’risida tushuncha;
- *ta’limiy texnologiyalarning konseptual asoslari* - har qanday ta’lim texnologiyasi negiziga pedagogik va psixologik fanlar yutug’ida ifodalangan pedagogik g’oya asos bo’ladi;
- *maqsadni belgilash* - pedagogik vazifalar aniqlangan bo’lsa va o’quv faoliyatining yakuniy natijalari bir ma’noda ifodalangan bo’lsa, boshlanish shartlari ma’lum bo’lsa, ta’lim jarayonini loyihlashtirish mumkin;
- *ta’lim berish modeli* – maqbul yo’l (usul va shakl)lar va vositalar yig’indisi - mavjud sharoitlar va belgilangan vaqtda obyektning boshlang’ich holatini o’zgartirish bo’yicha ko’zlanayotgan natijalarga erishish kafolati;

- *boshqaruvning yo’l va vositalar yig’indisi* - bashoratlash, loyihalashtirish, rejalashtirish, tashkillashtirish, nazorat va baholash, shuningdek tezkor o’zgartirish to’g’risida boshqaruv xulosasini qabul qilish maqsadida ta’lim jarayonini uzluksiz va muntazam kuzatish - monitoring.

Siz ta’lim berishni texnologiyalashtirish asosini o’rganishni boshlashingizdan avval, quyidagi *maslahat va tavsiyalarga* e’tiboringizni qarating.

1. Texnologiyalashtirish asosida ifodalangan va bu bilan albatta siz tanishishingiz zarur bo’lgan qoidalar, shu zahoti sizga tushuntirish bermaydi, faqat ko’zlanayotgan maqbul va samarali natijaga erishish uchun nima ish qilish zarurligini ko’rsatadi.

Har bir yo’l va vosita o’qituvchi-texnolog tomonidan, u intilayotgan, yakuniy natijaga erishishga ko’rinarli qo’shgan hissasi tomoni bilan baholanishi zarur. Qoidaning maqbulligini talqin qila turib, e’tiborni nafaqat unga, uni qo’llashni nazarda tutuvchi vaziyat yoki sharoitlarga qaratish zarur. Gap shundaki, qoidalar odatda formula emas, boshqaruv xususiyatga ega bo’ladi, madomiki ularni qo’llash mumkin bo’lgan, ta’lim jarayoni sharoitida ayrim noaniqliklar bor. Bundan tashqari, avvalda shu narsani o’quv vaziyatida qo’llab, muvaffaqiyatga erishgan o’qituvchi-amaliyotchi yoki hammaga ma’lum bo’lgan ta’lim berish texnologiyasining muallifida, shuni qoidasiz umumlashtirishdagi xatoliklar tarqalgan. Mohiyat shundaki, barcha turli-tumanlikdan mavjud sharoitda va o’quv rejasida berilgan vaqtda ko’zlanayotgan natijaga erishishni kafolatli ta’minlaydigan, so’ngra esa undan shu sharoit uchun mos keladigan, ta’lim berish texnologiyasining - yagona majmuini loyihalashtirish mumkin bo’ladigan, axborot, muloqot va boshqaruvning shunday yo’l va vositalarini baholashi, farqlashi va tanlashni uddalashi muhim.

2. Mashhur marketolog Dj. O’Shonessining “*...kitoblar hech qachon tajriba o’rnini bosa olmaydi* degan fikriga qo’shilish mumkin. Mahoratli oshpaz oshpazlik to’g’risida kitob yozishi mumkin, uni tayyorlash yo’liga amal qilib, xuddi shunday chiqishini kutmaslik kerak, chunki uning mahorati bilan taqqoslab bo’lmaydi - berilgan qoidani ishlatib muhim ko’nikma va malakalar ega bo’lish mumkin emas, ular faqat amaliyotda egallanadi va “qo’llaniladigan donishmandlik” deb ataluvchi amaliyotli donishmandlik bilan mustahkamlanadi, ya’ni vaziyat bilan muvofiqlikdagi donishimandlik” (Dj. O’Shonessi, 2000).

3. “Ta’lim jarayonini ixtiyoriy qurish va amalga oshirishdan, uning har bir qism va bosqichlarini izchil asoslangan, yakuniy natijani haqqoniy tashxislashga yo’naltirilgan” ga o’tish uchun asos zarur (V. Bespalko, 1989).

Agarda siz ta’lim jarayonini texnologiyalashtirishga o’tish muhimligini anglamas ekansiz, unda “biz yangi texnologiyalarning yutug’larini bermaylik, paydo bo’lgan muntazamlik mexanizmini chiqarib tashlay olmaydi, yo bo’lmasa majbur qilingan texnologiyalar ziyonli natijalarni ko’paytirishi mumkin”.

4. Nihoyat, shaxsiy ta’lim berish texnologiyasini loyihalashtirish va mavjud ta’lim berish texnologiyasini qo’llash “o’qituvchi, vaziyat madaniyati, shuningdek shaxsiy yoki talabalarning shaxsiy xususiyatlari bilan yuzma-yuz kelish yo’nalishi bilan ish tutmog’i kerak” (Ye.S. Polat, 2000).

“Kombinatorika va graflar nazariyasi” fani bo’yicha ta’lim texnologiyalari ma’ruza mashg’ulotlarni texnologiyalashtirish qoidalari asosida ishlab chiqildi.

Mazkur qo’llanma kirish, ta’lim texnologiyasining konseptual asoslari, ma’ruza mashg’ulotlarida o’qitish texnologiyalari, kurs bo’yicha monitoring va mustaqil ishni tashkil qilish texnologiyasi qismlaridan iborat.

Konseptual asoslar qismida “Kombinatorika va graflar nazariyasining tadbiqlari” o’quv kursining dolzarbligi va o’qitish strukturasi, kursning mazmuni, o’quv kursi bo’yicha ma’ruza mashg’ulotlarida o’qitish texnologiyalarini ishlab chiqishning konseptual asoslari yoritib berilgan. Ma’ruza mashg’ulotlarida 4 xil : kirish, kuzatish, muloqot va yakunlovchi ma’ruza.

Keltirilgan ta’lim texnologiyasi “Kombinatorika va graflar nazariyasi” fani o’qitiladigan barcha oliy o’quv yurtlari, malaka oshirish kurslarida, akademik lisey va kasb-hunar kollejlarida o’qituvchi tomonidan qo’llanilishi mumkin.

Mualliflar mazkur ta’lim texnologiyasini yaratishda avtorlar kollektivi: A.Sh.Bekmurodov, L.V.Golish, O.B.Gimranova, D.M.Fayzullayeva va boshkalar tomonidan ishlab chikilgan “Pedagogik texnologiyalarni loyihalashtirish va rejalashtirish” nomli uslubiy qo’llanmasidan (Toshkent. TDIU, 2010) foydalandilar.

O’quv kursi bo’yicha ma’ruza mashg’ulotlarda o’qitish texnologiyalarini ishlab chiqish konseptual asoslari

O’zbekiston mustaqilligining dastlabki kunlaridanoq yuksak malakali va yangicha dunyoqarashga ega bo’lgan milliy kadrlarni tayyorlash, hayotimizda muhim ahamiyatga ega bo’lgan masalalar qatorida ta’lim- tarbiya tizimini tubdan isloh qilish, uni zamon talablari darajasiga ko’tarish, barkamol avlodni tarbiyalab voyaga yetkazish dolzarb masala bo’lib qoldi.

Hozirgi kunda innovasion texnologiyalar, pedagogik va axborotlar texnologiyalarini o’quv jarayonida qo’llashga bo’lgan qiziqish, e’tibor kundan – kunga kuchayib bormoqda, bunday bo’lishining sabablaridan biri, shu vaqtgacha an’anaviy ta’limda o’quvchi talabalarni faqat tayyor bilimlarni egallashga o'rgatilgan bo'lsa, zamonaviy texnologiyalar ularni egallayotgan bilimlarini o'zlari qidirib topishlari, mustaqil o'rganib tahlil qilishlariga, hatto xulosalarni ham o'zlari chiqarishlariga o'rgatadi.

Aytilganlardan kelib chiqqan holda "Kombinatorika va graflar nazariyasining tadbiqlari" o'quv kursi bo'yicha ta'lim texnologiyasini loyihalashtirishdagi asosiy konseptual yondoshuvlarni keltiramiz:

Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim. Bu ta'lim o'z mohiyatiga ko'ra ta'lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to'laqonli rivojlanishlarini ko'zda tutadi. Bu esa ta'limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma'lum bir ta'lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog'liq o'qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondoshuv. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o'zida mujassam etmog'i lozim: jarayonning mantiqiyligi, uning barcha bo'g'inlarini o'zaro bog'langanligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo'naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta'lim oluvchining faoliyatni faollashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo'naltirilgan ta'limni ifodalaydi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o'quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o'z-o'zini faollashtirishi va o'z-o'zini ko'rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta'limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta'lim beruvchi va ta'lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e'tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta'lim. Ta'lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta'lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni obyektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini, dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo'llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta'minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo'llash - yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o'quv jarayoniga qo'llash.

O'qitishning usullari va texnikasi. Ma'ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta'lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O'qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o'zaro o'rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

O'qitish vositalari: o'qitishning an'anaviy shakllari (darslik, ma'ruza matni) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikasiya usullari: tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o'zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blis-so'rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o'qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o'quv mashg'uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko'rinishidagi o'quv mashg'ulotlarini rejalashtirish, qo'yilgan maqsadga erishishda o'qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg'ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o'quv mashg'ulotida ham butun kurs davomida ham o'qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Kurs oxirida test topshiriqlari yoki yozma ish variantlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi.

Ilova 1.1

Aqliy hujum qoidasi:

Hyech qanday birga baholash va tanqidga yo'l qo'yilmaydi!

Taklif etilayotgan g'oyani baholashga shoshma, agarda u hattoki ajoyib va g'aroyib bo'lsa ham hamma narsa mumkin.

Tanqid qilma, hamma aytilgan g'oyalar qimmatli teng kuchlidir.

O'rtaga chiquvchini bo'lma!

Turtki berishdan o'zingni ushla!

Maqsad miqdor hisoblanadi!

Qancha ko'p g'oyalar aytilsa, undan ham yaxshi: yangi va qimmatli g'oyalarni paydo bo'lishi uchun ko'p imkoniyatdir.

Agarda g'oyalar qaytarilsa, xafa bo'lma va hijolat chekma.

Tasavvuringni "jo'sh urishiga" ruxsat ber!

Ilova 1.2

Pinbord (inglizchadan: *pin*- mahkamlash, *board* – yozuv taxtasi) munozara usullari yoki o'quv suhbatini amaliy usul bilan moslashdan iborat.

Ta'lim beruvchi:

→ Taklif etilgan muammoni yechishga o'z nuqtai nazarini bayon qiladi.

→ Ommaviy to’g’ri aqliy hujumni tashkillashtiradi.

Ta’lim oluvchilar quyidagi g’oyalarni:

→ Taklif etadilar, muhokama qiladilar, baholaydilar eng ko’p maqbul (samarali va boshqa g’oyalarni tanlaydilar va ularni qog’oz varag’iga asosiy so’zlar ko’rinishida (2 so’zdan ko’p bo’lmagan) yozadilar va yozuv taxtasiga biriktiradilar.

→ Guruh a’zolari (ta’lim beruvchi tomonidan belgilangan 2-3 talaba yozuv taxtasiga chiqadilar va boshqalar bilan maslahatlashib:

- aniq xato yoki qaytariluvchi g’oyalarni saralaydilar;
- tortishuvlarni aniqlaydilar;
- g’oyalarni tizimlashtirish mumkin bo’lgan belgilar bo’yicha aniqlaydilar;
- shu belgilar bo’yicha hamma g’oyalarni yozuv taxtasida guruhlaydilar (kartochka/ varaqlar).

Ta’lim beruvchi:

→Umumlashtiradi va ish natijalarini baholaydi.

Monitoring va baholash

O’tilgan mavzu bo’yicha og’zaki so’rov, tezkor savol-javob qarab 1-2 ballgacha baholanadi

Asosiy qism: Fanning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Asosiy qismda (ma’ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo’yicha talabalarga yetkazilishi zarur bo’lgan bilim va ko’nikmalar to’la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo’yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo’layotgan ijtimoiy-siyosiy va demokratik o’zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalardagi islohatlarning ustuvor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so’ngi yutuqlari e’tiborga olinishi tavsiya etiladi.

NAZORAT TOPSHIRIQLARI

1. To‘plam elementlari uchun o‘rin almashtirishlar (*takrorli bo’lmagan o‘rin almashtirishlar*).
2. Graflar nazariyasining asosiy tushunchalari (*qirra (yoy), orgraf, insident qirra, qo’shni uchlar*)..
3. Ford algoritmi.
4. Bo‘laklashlarning xossalari (*xossalarni keltiring*).
5. Turli 6 rangdagi bo‘yoqlardan 3 xil rangli bo‘yoq tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
6. Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar.
7. Chekli elementli to’lamlar uchun o‘rinlashtirishlar (*takrorli bo’lmagan o‘rinlashtirishlar*).
8. Graflar nazariyasining asosiy tushunchalari (*karrali yoy, multigraf, sirtmoq, psevdograf*).
9. Chekli elementli to’lamlar uchun guruhlashlar (*takrorli bo’lmagan guruhlashlar*).
10. Bo’laklashlar haqidagi tasdiqlarni keltiring (*qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda*).
11. Paskal uchburchagi sonli jadval qanday tuziladi? (*Guruhlashlar soni*).
12. Grafning abstrakt ta’rifi (*uchlar to’plami, juftliklar korteji*)
13. Graflar nazariyasi haqida umumiy ma’lumotlar (*Graflar nazariyasining paydo bo’lishi va qo’llanilishi*).
14. Nyuton binomi (*ikkita son yig‘indisining natural darajasi, binomial koeffitsientlar*).
15. Binomial koeffitsientlarning xossalari. (*binomial koeffitsientlar haqida*).
16. Marshrutlar (*boshlang’ich, ichki, oxirgi uchlar, marshrutning uzunligi*).
17. Izomorf graflar (*o’zaro bir qiymatli moslik*).
18. Takrorli o‘rin almashtirishlar (*takrorli o‘rin almashtirishlar soni uchun tasdiqni keltiring*).
19. Takrorli o‘rinlashtirishlar (*takrorli o‘rin almashtirishlar soni uchun tasdiqni keltiring*).
20. Graflarning insidentligi matritsasi (*insidentlik, uch, qirra*).
21. Graflarning qirralari qo‘shniligi matritsasi (*grafning qo`shni qirralaqi, qo‘shnilik matritsasi*).
22. Takrorli guruhlashlar (*takrorli guruhlashlar soni uchun tasdiqni keltiring*).
23. Ko‘phad formulasi (*umumlashgan Nyuton binomi*).

24. Graflarning uchlari qo‘shniligi matritsasi (*grafning uchlari, qo‘shnilik matritsasi*).
25. Graflarning berilish usullari (*graf, orgraf, uch, qirra, yoy, sirtmoq, karrali qirralar*).
26. Fibonachchi sonlarining ta’rifi (*1 dan boshlanuvchi va o’zidan oldingisi bilan yig’indisi orqali keyingilari hosil bo’ladigan natural sonlar ketma-ketligi*).
27. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari (*xossalarini keltiring*).
28. Impulsning saqlanish qonuni (*Raketa harakatining matematik modeli*).
29. Graflar nazariyasining asosiy tushunchalari (*karrali yoy, multigraf, sirtmoq, psevdograf*).
30. Bo‘laklashlar ta’rifini keltiring (n *sonni* k *ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklash*).

Amaliy topshiriqlar

1. 12 nafar kishilarning rais, rais o‘rinbosari, kotib va ish yurituvchi vazifalariga tayinlanish imkoniyatlarini toping.
2. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo‘lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor graflarni geometrik ifodalang.
3. Musobaqada 10 jamoa ishtirok etayotgan bo‘lsa, ulardan uchtasi oltin, kumush va bronza medallarini olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
4. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish uchun tuzilgan graf elementlarini tahlil qiling va bu masalaning mumkin qadar qisqa yechimini toping.
5. To‘la graf bilan bog‘liq biror misol keltiring.
6. Kutubxonada 6 tilning har biridan boshqalariga bevosita tarjima qilish uchun yetarli lug‘atlar mavjud. Tillar soni 10ta bo‘lganda kutubxonaga yana qancha lug‘at kerak?
7. Minimal uzunlikka ega yo’l haqidagi masala.
8. Do‘konda 10 xil qo‘g‘irchoqlar sotilayotgan bo‘lsin. 8 dona turli qo‘g‘irchoqni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
9. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda 9 ning barcha bo‘laklanishlarini yozing va $R(9)$ ni hisoblang.
10. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8 ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$ larning qiymatlarini aniqlang.
11. Barcha raqamlari turlicha bo‘lgan 7 raqamli telefon nomerlari sonini toping.
12. Qavariq o‘nburchak diagonallari sonini aniqlang.

13. Homiylar teleshouda qatnashayotgan o‘yinchilarga kofe qaynatgichlar, dazmollar, uyali telefon apparatlari va duxilar sovg‘a qilishmoqchi. 9 nafar o‘yinchilarga bittadan sovg‘a berishi imkoniyatlari sonini toping (*takrorli kombinatsiyalar*).
14. Beshta turli o‘rindiqlar va yettita turli rangdagi materiallar bor. Har bir o‘rindiqni faqat bir xil rangdagi material bilan qoplash sharti bilan o‘rindiqlarga material qoplash imkoniyatlari sonini toping (*takrorli kombinatsiyalar*).
15. Tekislikda har uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan to‘qqizta nuqta berilgan. Agar bu nuqtalarning har uchtasidan birgina aylana o‘tkazish mumkin bo‘lsa, berilgan nuqtalardan nechta aylana o‘tkazish mumkinligini aniqlang.
16. Binomial koeffitsientlarning xossalaridan foydalanib quyidagi teglikni isbotlang:
17. $1^2+2^2+...+m^2=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.
18. Shirinlik sotiladigan do‘konda 4 xil shirinlik bo‘lsa, 7 dona shirinlikni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang (*takrorli kombinatsiyalar*).
19. Elementlari soni 100 ga teng bo‘lgan to‘plamning 40 elementli qism to‘plamlari soni bilan shu to‘plamning 60 elementli qism to‘plamlari sonini solishtiring (*takrorli kombinatsiyalar*).
20. Binomial koeffitsientlarning xossalaridan foydalanib quyidagi teglikni isbotlang:
21. $1^3+2^3+...+m^3=\dfrac{m^2(m+1)^2}{4}$.
22. 12 nafar kishilarning rais, rais o‘rinbosari, kotib va ish yurituvchi vazifalariga tayinlanish imkoniyatlarini toping.
23. Elementlari soni 100 ga teng bo‘lgan to‘plamning 40 elementli qism to‘plamlari soni bilan shu to‘plamning 60 elementli qism to‘plamlari sonini solishtiring (*takrorli kombinatsiyalar*).
24. Shirinlik sotiladigan do‘konda 4 xil shirinlik bo‘lsa, 7 dona shirinlikni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang (*takrorli kombinatsiyalar*).
25. Musobaqada 10 jamoa ishtirok etayotgan bo‘lsa, ulardan uchtasi oltin, kumush va bronza medallarini olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
26. Beshta turli o‘rindiqlar va yettita turli rangdagi materiallar bor. Har bir o‘rindiqni faqat bir xil rangdagi material bilan qoplash sharti bilan o‘rindiqlarga material qoplash imkoniyatlari sonini toping (*takrorli kombinatsiyalar*).
27. Homiylar teleshouda qatnashayotgan o‘yinchilarga kofe qaynatgichlar, dazmollar, uyali telefon apparatlari va duxilar sovg‘a qilishmoqchi. 9 nafar

o‘yinchilarga bittadan sovg‘a berishi imkoniyatlari sonini toping (*takrorli kombinatsiyalar*).

28. Kutubxonada 6 tilning har biridan boshqalariga bevosita tarjima qilish uchun yetarli lug‘atlar mavjud. Tillar soni 10ta bo‘lganda kutubxonaga yana qancha lug‘at kerak?
29. Do‘konda 10 xil qo‘g‘irchoqlar sotilayotgan bo‘lsin. 8 dona turli qo‘g‘irchoqni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
30. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8 ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$larning qiymatlarini aniqlang.

ON va YaN uchun testlar

1. Graflar nazariyasining paydo bo‘lishiga qanday masala sabab bo’lgan.

A) Kyonigsberg ko‘priklari.

B) Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko‘priklar joylashuvi.

C) Eyler sikli

D)* A va B

2. Graf elementlari -

A) Grafning uchlari

B) Qirralari

C) Yoylari

D)* A, B va C

3. Qirraning uchlari yoki **chetlari** deb-

A)* a va b elementlarga

B) (a,b) ga

C) (b,a) ga

D) To’ri javob yo’q

4. Qo‘shni uchlar deb-

A)* Grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo‘lsa

B) Grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo‘lmasa

C) Grafda ikkita qirra (yoy) umumiy chetga ega bo‘lsa

D) To’ri javob yo’q

5. Uchlari incident deb-

A) Grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo‘lsa

B) Grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo‘lmasa

C)* Grafda ikkita qirra (yoy) umumiy chetga ega bo‘lsa

D) To’ri javob yo’q

6. Graf uchlar soni-

A)* grafdagi elementlar soniga

B) yoylar soniga

C) yoylar soniga va grafdagi elementlar soniga

D) xamma javob to’g’ri

7. Agar $G=(V,U)$ **grafda** U **kortej faqat qirralardan iborat bo‘lsa-**

A)* yo‘naltirilmagan deyladi

B) yo‘naltirilgan deyladi

C) yo‘naltirilmagan va yo‘naltirilgan deyladi

D) graf deyladi

8. Oriyentirlangan graf qisqacha-
A)* orgraf
B) aralash graflar
C) yo‘naltirilmagan garaf
D) graf deyladi
9. Aralash graflar-
A) orgraf
B)* oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham bo‘lgan graflar
C) oriyentirlanmagan qirralari bo‘lgan graflar
D) yo‘naltirilmagan garafga
10. Karrali qirralari yoki yoylari bo‘lgan graf-
A)* multigraf deyiladi.
B) sirtmoq deyiladi.
C) psevdograf deyiladi
D) orgraf deyiladi.
11. Ikkala chetki (boshlang‘ich va oxirgi) uchlari ustma-ust tushgan qirra-
A) multigraf deyiladi.
B) * sirtmoq deyiladi.
C) psevdograf deyiladi
D) orgraf deyiladi.
12. Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo‘lgan graf-
A) multigraf deyiladi.
B) sirtmoq deyiladi.
C) * psevdograf deyiladi
D) orgraf deyiladi.
13. Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan graf-
A) nolgraf deyiladi.
B) bo‘sh graf deyiladi.
C) nolgraf yoki bo‘sh graf deyiladi
D) *xamma javob to’g’ri
14. Istalgan ikkita uchlari qo‘shni bo‘lgan sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz oriyentirlanmagan graf-
A) nolgraf deyiladi.
B) bo‘sh graf deyiladi.
C) nolgraf yoki bo‘sh graf deyiladi
D) * to‘la graf deyiladi.

15. Agar orgrafning istalgan ikkita uchini har bir yo‘nalishda tutashtiruvchi faqat bittadan yoy mavjud bo‘lsa, u holda unga-

A) nolgraf deyiladi.

B) bo‘sh graf deyiladi.

C)* to‘la orgraf deyiladi

D) to‘la graf deyiladi.

16. Agar grafning uchlariga qandaydir belgilar, masalan, $1,2,...,m$ sonlari mos qo‘yilgan bo‘lsa-

A) nolgraf deyiladi.

B) * belgilangan graf deyiladi.

C) to‘la orgraf deyiladi

D) to‘la graf deyiladi.

17. Graf uchiga insident qirralar soni shu-

A) uchning lokal darajasi

B) qisqacha, darajasi

C) valentligi

D) *xamma javob to’g’ri

18. Agar grafning barcha uchlari bir xil r darajaga ega bo‘lsa, u holda bunday graf-

A) nolgraf deyiladi.

B) * r darajali regulyar graf.

C) to‘la orgraf deyiladi

D) to‘la graf deyiladi.

19. Agar grafning uchlar to‘plamini o‘zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to‘plamlarga (bo‘laklarga) ajratish mumkin bo‘lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to‘plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to‘plamdan olingan biror uch bilan tutashtiradigan bo‘lsa-

A) ikki bo‘lakli graf

B) bixromatik graf.

C)* A, B va D javoblar to’g’ri

D) Kyonig grafi.

20. Biror bo‘lagida faqat bitta uch bo‘lgan to‘la ikki bo‘lakli graf-

A)*yulduz deb ataladi

B) bixromatik graf deb ataladi.

C) to’g’ri javob yo’q

D) Kyonig grafi deb ataladi.

ON va YaN uchun savollar va variantlar namunalari

Variant № 1

1. To‘plam elementlari uchun o‘rin almashtirishlar (*takrorli bo’lmagan o‘rin almashtirishlar*).
2. 12 nafar kishilarning rais, rais o‘rinbosari, kotib va ish yurituvchi vazifalariga tayinlanish imkoniyatlarini toping.
3. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo‘lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor graflarni geometrik ifodalang.
4. Ford algoritmi.

Variant № 2

1. Bo‘laklashlarning xossalari (*xossalarni keltiring*).
2. Uchlari va qirralari sonlari mos ravishda teng bo‘lib, o‘zaro izomorf bo‘lmagan graflarga misollar keltiring.
3. Turli 6 rangdagi bo‘yoqlardan 3 xil rangli bo‘yoq tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
4. Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar.

Variant № 3

1. Chekli elementli to’lamlar uchun o‘rinlashtirishlar (*takrorli bo’lmagan o‘rinlashtirishlar*).
2. Graflar nazariyasining asosiy tushunchalari (*karrali yoy, multigraf, sirtmoq, psevdograf*).
3. Musobaqada 10 jamoa ishtirok etayotgan bo‘lsa, ulardan uchtasi oltin, kumush va bronza medallarini olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
4. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish uchun tuzilgan graf elementlarini tahlil qiling va bu masalaning mumkin qadar qisqa yechimini toping.

Variant № 4

1. Chekli elementli to’lamlar uchun guruhlashlar (*takrorli bo’lmagan guruhlashlar*).
2. To‘la graf bilan bog‘liq biror misol keltiring.
3. Kutubxonada 6 tilning har biridan boshqalariga bevosita tarjima qilish uchun yetarli lug‘atlar mavjud. Tillar soni 10ta bo‘lganda kutubxonaga yana qancha lug‘at kerak?

4. Minimal uzunlikka ega yo’l haqidagi masala.

Variant № 5

1. Paskal uchburchagi sonli jadval qanday tuziladi? (*Guruhlashlar soni*).

2. Grafning abstrakt ta’rifi (*uchlar to’plami, juftliklar korteji*)

3. Do‘konda 10 xil qo‘g‘irchoqlar sotilayotgan bo‘lsin. 8 dona turli qo‘g‘irchoqni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.

4. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda 9 ning barcha bo‘laklanishlarini yozing va $R(9)$ ni hisoblang.

Variant № 6

1. Graflar nazariyasi haqida umumiy ma’lumotlar (*Graflar nazariyasining paydo bo’lishi va qo’llanilishi*).

2. Nyuton binomi (*ikkita son yig‘indisining natural darajasi, binomial koeffitsientlar*).

3. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8 ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$ larning qiymatlarini aniqlang.

4. Barcha raqamlari turlicha bo‘lgan 7 raqamli telefon nomerlari sonini toping.

Variant № 7

1. Binomial koeffitsientlarning xossalari. (*binomial koeffitsientlar haqida*).

2. Marshrutlar (*boshlang’ich, ichki, oxirgi uchlar, marshrutning uzunligi*).

3. Qavariq o‘nburchak diagonallari sonini aniqlang.

4. Homiylar teleshouda qatnashayotgan o‘yinchilarga kofe qaynatgichlar, dazmollar, uyali telefon apparatlari va duxilar sovg‘a qilishmoqchi. 9 nafar o‘yinchilarga bittadan sovg‘a berishi imkoniyatlari sonini toping (*takrorli kombinatsiyalar*).

Variant № 8

1. Izomorf graflar (*o’zaro bir qiymatli moslik*).

2. Takrorli o‘rin almashtirishlar (*takrorli o‘rin almashtirishlar soni uchun tasdiqni keltiring*).

3. Beshta turli o‘rindiqlar va yettita turli rangdagi materiallar bor. Har bir o‘rindiqni faqat bir xil rangdagi material bilan qoplash sharti bilan o‘rindiqlarga material qoplash imkoniyatlari sonini toping (*takrorli kombinatsiyalar*).

4. Tekislikda har uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan to‘qqizta nuqta berilgan. Agar bu nuqtalarning har uchtasidan birgina aylana o‘tkazish mumkin bo‘lsa, berilgan nuqtalardan nechta aylana o‘tkazish mumkinligini aniqlang.

Variant № 9

1. Takrorli o‘rinlashtirishlar (*takrorli o‘rin almashtirishlar soni uchun tasdiqni keltiring*).

2. Graflarning insidentligi matritsasi (*insidentlik*, *uch*, *qirra*).

3. Binomial koeffitsientlarning xossalaridan foydalanib quyidagi teglikni isbotlang:

$$1^2+2^2+...+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

4. Shirinlik sotiladigan do‘konda 4 xil shirinlik bo‘lsa, 7 dona shirinlikni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang (*takrorli kombinatsiyalar*).

Variant № 10

1. Graflarning qirralari qo‘shniligi matritsasi (*grafning qo`shni qirralaqi, qo‘shnilik matritsasi*).

2. Takrorli guruhlashlar (*takrorli guruhlashlar soni uchun tasdiqni keltiring*).

3. Elementlari soni 100 ga teng bo‘lgan to‘plamning 40 elementli qism to‘plamlari soni bilan shu to‘plamning 60 elementli qism to‘plamlari sonini solishtiring (*takrorli kombinatsiyalar*).

4. Binomial koeffitsientlarning xossalaridan foydalanib quyidagi teglikni isbotlang:

$$1^3+2^3+...+m^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Variant № 11

1. Ko‘phad formulasi (*umumlashgan Nyuton binomi*).

2. Graflarning uchlari qo‘shniligi matritsasi (*grafning uchlari*, *qo‘shnilik matritsasi*).

3. 12 nafar kishilarning rais, rais o‘rinbosari, kotib va ish yurituvchi vazifalariga tayinlanish imkoniyatlarini toping.

4. Elementlari soni 100 ga teng bo‘lgan to‘plamning 40 elementli qism to‘plamlari soni bilan shu to‘plamning 60 elementli qism to‘plamlari sonini solishtiring (*takrorli kombinatsiyalar*).

Variant № 12

1. Graflarning berilish usullari (*graf, orgraf, uch, qirra, yoy, sirtmoq, karrali qirralar*).

2. Fibonachchi sonlarining ta’rifi (*1 dan boshlanuvchi va o’zidan oldingisi bilan yig’indisi orqali keyingilari hosil bo’ladigan natural sonlar ketma-ketligi*).
3. Shirinlik sotiladigan do‘konda 4 xil shirinlik bo‘lsa, 7 dona shirinlikni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang (*takrorli kombinatsiyalar*).
4. Turli 6 rangdagi bo‘yoqlardan 3 xil rangli bo‘yoq tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

Variant № 13

1. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari (*xossalarini keltiring*).
2. Impulsning saqlanish qonuni (*Raketa harakatining matematik modeli*).
3. Musobaqada 10 jamoa ishtirok etayotgan bo‘lsa, ulardan uchtasi oltin, kumush va bronza medallarini olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
4. Beshta turli o‘rindiqlar va yettita turli rangdagi materiallar bor. Har bir o‘rindiqni faqat bir xil rangdagi material bilan qoplash sharti bilan o‘rindiqlarga material qoplash imkoniyatlari sonini toping (*takrorli kombinatsiyalar*).

Variant № 14

1. Graflar nazariyasining asosiy tushunchalari (*karrali yoy, multigraf, sirtmoq, psevdograf*).
2. Bo‘laklashlar ta’rifini keltiring (n *sonni* k *ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklash*).
3. Homiylar teleshouda qatnashayotgan o‘yinchilarga kofe qaynatgichlar, dazmollar, uyali telefon apparatlari va duxilar sovg‘a qilishmoqchi. 9 nafar o‘yinchilarga bittadan sovg‘a berishi imkoniyatlari sonini toping (*takrorli kombinatsiyalar*).
4. Kutubxonada 6 tilning har biridan boshqalariga bevosita tarjima qilish uchun yetarli lug‘atlar mavjud. Tillar soni 10ta bo‘lganda kutubxonaga yana qancha lug‘at kerak?

Variant № 15

1. Bo’laklashlar haqidagi tasdiqlarni keltiring (*qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda*).
2. Graflar nazariyasining asosiy tushunchalari (*qirra (yoy), orgraf, insident qirra, qo’shni uchlar*).
3. Do‘konda 10 xil qo‘g‘irchoqlar sotilayotgan bo‘lsin. 8 dona turli qo‘g‘irchoqni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
4. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8 ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$larning qiymatlarini aniqlang.

MA’RUZA MATNI

1- MA’RUZA
Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. O‘rin almashtirishlar 2. O‘rinlashtirishlar 3. Gruppalashlar
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Turli masalalarni yechishda qullaniladigan kombinatorikaning o’rin almashtirish, o’rinlashtirish va gruppalashlar kombinatsiyalari haqida umumiy tushunchalar berish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - o’rin almashtirish, o’rinlashtirish va gruppalashlar haqida umumiy tushunchalarga ega bo’ladilar; - mustaqil ravishda o’rin almashtirish, o’rinlashtirish va gruppalashlar kombinatsiyalarni qo’llab masalalar yecha oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: asosiy kombinatsiyalarni misollarda yozma ravishda keltirish orqali baholash.

Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar
	2.1. Talabalarning o’rin almashtirish, o’rinlashtirish va gruppalashlar kombinatsiyalari borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning	Savollarga javob beradilar

2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida o’rin almashtirish, o’rinlashtirish va gruppalashlar kombinatsiyalari haqida bilim va ko’nikmalarini chuqurlashtirib, o’rin almashtirish, o’rinlashtirish va gruppalashlar kombinatsiyalarini keltirishni tashkillashtiradi. Talabalar bilan birga tahlil qiladi, ularda paydo bo’lgan qiyinchiliklarni aniqlaydi. 2.3. Talabalar harxil sohalarda uchraydigan masalarni yechishda o’rin almashtirish, o’rinlashtirish va gruppalashlar kombinatsiyalaridan foydalani uchun kerakli tushunchalarni beradi. Shu tarzda asosiy kombinatsiyalar ustida amallarni bajarishni tashkillashtiradi. Buning uchun yordamchi savol va misollardan va ko’rgazmali materiallardan foydalanadi.(Ilova 2) 2.4. Talabalarni kichik guruhlarga bo’ladi va ularga o’rin almashtirish, o’rinlashtirish va gruppalashlar kombinatsiyalarini ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma’lum qiladi. 2.5. Taqdimot boshlanganligini ma’lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko’chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar misollarni yechadilar, klaster chizadilar Guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Takrorli bo’lmagan o‘rin almashtirishlar deb nimaga aytiladi?
2. Takrorli bo’lmagan o‘rinlashtirishlar deb nimaga aytiladi?

3. Takrorli bo'lmagan gruppalashlar deb nimaga aytiladi?
4. Takrorli bo'lmagan kombinatsiyalardan qanday masalalarni yechishda foydalanish mumkin?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Takrorli bo'lmagan o'rin almashtirishlar soni qanday topiladi?
2. Takrorli bo'lmagan o'rinlashtirishlar soni qanday topiladi?
3. Takrorli bo'lmagan gruppalashlar soni qanday topiladi?

Asosiy qism

1. O'rin almashtirishlar. Elementlari $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ bo'lgan to'plamni qaraymiz. Bu to'plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan,

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n;\ a_2, a_1, a_3, ..., a_n;\ a_2, a_3, a_1, ..., a_n.$$

Bu tuzilmalarning har birida berilgan to'plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarining joylashish o'rinlari bilan farq qiladilar.

1- ta'rif. *Shu usul yordamida hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri berilgan* $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ *to'plam elementlarining* ***o'rin almashtirishi*** *deb ataladi.*

Aslida "o'rin almashtirish" iborasi to'plam elementlarining o'rinlarini o'zgartirish harakatini anglatsada, bu yerda uni shu harakat natijasidagi hosil bo'lgan tuzilma sifatida qo'llaymiz. Bu iboradan uning asl ma'nosida ham foydalanamiz.

O'rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida "," (vergul) belgisidan foydalanildi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirilish ham mumkin. Bu eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o'rinlidir.

To'plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o'rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday o'rin almashtirishlarni **betakror** (**takrorli emas**) **o'rin almashtirishlar** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli o'rin almashtirishlar ko'riladi.

Berilgan n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar sonini P_n bilan belgilash qabul qilingan.

Bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun faqat bitta a ko‘rinishdagi o‘rin almashtirish borligi ravshandir: $P_1 = 1$.

Ikkita elementli $\{a,b\}$ to‘plam elementlaridan o‘rin almashtirishlarni bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun a o‘rin almashtirishidan foydalanib quyidagicha tashkil qilamiz: b element a elementdan keyin yozilsa ab o‘rin almashtirishga, oldin yozilsa esa ba o‘rin almashtirishga ega bo‘lamiz. Demak, ko‘paytirish qoidasiga (ushbu bobning 1- paragrafiga qarang) binoan ikkita o‘rin almashtirish bor: $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

Uchta elementli $\{a,b,c\}$ to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a,b\}$ to‘plam uchun tuzilgan ab va ba o‘rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to‘plamning c elementini ab va ba o‘rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko‘paytirish qoidasini qo‘llasak, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to‘plam uchun oltita ($P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$) har xil o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ \ cba\,.$$

To‘rtta elementli $\{a,b,c,d\}$ to‘plamni qarab, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to‘plam uchun tuzilgan oltita o‘rin almashtirishlarning har biriga d elementni to‘rt xil usul bilan joylashtirish imkoniyati borligini e’tiborga olsak, ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, $P_4 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ bo‘lishini topamiz. Bu yerda barcha o‘rin almashtirishlar quyidagilardir:

$$abcd,\ abdc,\ adbc,\ dabc\,,$$
$$acbd,\ acdb,\ adcb,\ dacb\,,$$
$$cabd,\ cadb,\ cdab,\ dcab\,,$$
$$bacd,\ badc,\ bdac,\ dbac\,,$$
$$bcad,\ bcda,\ bdca,\ dbca\,,$$
$$cbad,\ cbda,\ cdba,\ dcba\,.$$

Shu tarzda davom etib “n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar soni birdan n gacha bo‘lgan barcha natural sonlarning ko‘paytmasiga teng” deb faraz qilish mumkin: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$. Bu farazning to‘g‘riligi quyidagi 1- teoremada isbot qilinadi.

Dastlabki n ta natural sonlar ko‘paytmasini $n!$ ko‘rinishida belgilash qabul qilingan, ya’ni $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$. $n!$ belgisidan bunday ma’noda birinchi bo‘lib K. Kramp 1808 yilda nashr etilgan algebra bo‘yicha qo‘llanmada foydalangan.

$1\cdot 2\cdot 3\cdot ...n$ ifodada $n=1$ bo‘lganda faqat 1 soni ishtirok etadi, shuning uchun, ta’rif sifatida $1!=1$ deb hisoblash qabul qilingan. Bundan tashqari, $n=0$ bo‘lganda esa $n!$ ifoda umuman ma’nosini yo‘qotadi. Lekin, ta’rif sifatida $0!=1$ deb qabul qilinadi.

1- teorema. *Elementlari soni* n *ta bo‘lgan to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar soni* $n!$ *ga teng, ya’ni* $P_n = n!$.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Asos to‘g‘riligini, ya’ni teoremaning tasdig‘i $n=1$ uchun to‘g‘riligini yuqorida ko‘rdik. Induksion o‘tish uchun teoremaning tasdig‘i biror natural $n=k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin deb faraz qilamiz, ya’ni $P_k = k!$ bo‘lsin. Ravshanki, $(k+1)$ ta elementli to‘plamni k ta elementli to‘plamga yangi $(k+1)$- elementni kiritish yordamida hosil qilish mumkin. Bu $(k+1)$- elementni k elementli to‘plam uchun barcha $k!$ ta o‘rin almashtirishlarning har biriga quyidagicha $(k+1)$ xil usul bilan kiritish mumkin:

1- elementdan oldin,

1- va 2- elementlar orasiga,

2- va 3- elementlar orasiga,

....

$(k-1)$- va k- elementlar orasiga,

k- elementdan keyin.

Shunday qilib, ko‘paytirish qoidasiga binoan, $(k+1)$ ta elementli to‘plam uchun jami $k!(k+1)=(k+1)!$ ta o‘rin almashtirishlar hosil bo‘ladi, ya’ni $P_{k+1}=(k+1)!$
.

1- misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o‘rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a,b,c,d,e harflar bilan belgilasak, u holda $T=\{a,b,c,d,e\}$ tomoshabinlar to‘plamiga ega bo‘lamiz. Tomoshabinlarni o‘rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar T to‘plami elementlarining qandaydir o‘rin almashtirishi mos keladi. T to‘plam beshta elementli bo‘lgani uchun, 1- teoremaga asosan, $P_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ bo‘ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o‘rinni egallash imkoniyatlari soni 120ga teng.

2. O‘rinlashtirishlar. n ta elementli $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin.

2- ta’rif. $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ *to‘plamning ixtiyoriy* m *ta elementidan hosil qilingan tartiblangan* $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}\}$ *tuzilmaga (kombinatsiyaga)* n ***ta elementdan*** m ***tadan o‘rinlashtirish*** *deb ataladi.*

Bu ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, elementlari soni bir xil bo‘lgan ikkita har xil o‘rinlashtirishlar bir-biridan elementlari bilan yoki bu elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladilar. Bundan tashqari, n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar uchun $m \le n$ bo‘lishi ham ravshan. Bu yerda qaralayotgan o‘rinlashtirishlar tarkibidagi elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rinlashtirishlarni **betakror** (**takrorli emas**) **o‘rinlashtirishlar** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli o‘rinlashtirishlar ko‘riladi.

Berilgan n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni, odatda, A_n^m bilan belgilanadi.

Ravshanki, berilgan n ta $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ elementlardan bittadan o‘rinlashtirishlar n ta bo‘ladi (bular: a_1; a_2; va hokazo, a_n), ya’ni $A_n^1 = n$.

n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlar yordamida n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni quyidagicha tuzish mumkin. n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlarning har biridagi elementdan keyin yoki oldin qolgan $(n-1)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirsa bo‘ladi. Natijada, ko‘paytirish qoidasiga binoan, jami soni $A_n^2 = n(n-1)$ ta bo‘lgan n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shu kabi, n ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilish uchun n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarga murojaat qilish mumkin. Bu yerda n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarning har biri uchun uni tashkil etuvchi ikkita elementlardan oldin, elementlar orasiga yoki elementlardan keyin qolgan $(n-2)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirish imkoniyati bor. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra natijada jami soni $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ ta bo‘lgan n ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shunga o‘xshash mulohaza yuritib, n ta elementdan to‘rttadan, beshtadan va hokazo o‘rinlashtirishlar soni uchun mos ifodalarni aniqlash qiyin emas.

2- teorema. *n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni* $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$.

Isboti. n – ixtiyoriy natural son bo‘lsin. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo‘llab, teorema tasdig‘ining n dan oshmaydigan ixtiyoriy m natural son uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz (ya’ni induksiyani m bo‘yicha bajaramiz).

Baza: yuqorida $A_n^1 = n$ ekanligi aniqlangan edi, ya’ni teorema tasdig‘i $m = 1$ uchun to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish: $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$ formula $m = k < n$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin deb faraz qilamiz va uning $m = k+1$ uchun ham to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy bittasini quyidagicha hosil qilish mumkin. Bunday o‘rinlashtirishning birinchi elementi sifatida berilgan $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to‘plamning istalgan elementini, masalan, a_1 ni tuzilayotgan o‘rinlashtirishga joylashtiramiz. Undan keyin umumiy soni A_{n-1}^k ga teng bo‘lgan $(n-1)$ ta elementdan k tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy biridagi barcha elementlarni joylashtiramiz. Birinchi elementi a_1 dan iborat bo‘lgan barcha n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlarning soni A_{n-1}^k ga tengdir. Bunday o‘rinlashtirishlarning birinchi elementi sifatida $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to‘plamning ixtiyoriy elementini tanlash mumkinligini e’tiborga olsak, ko‘paytirish qoidasiga binoan, berilgan n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlar soni quyidagicha aniqlanishi kelib chiqadi:

$$A_n^{k+1} = nA_{n-1}^k = n(n-1)(n-2)...((n-1)-k+1) =$$
$$= n(n-1)...(n-(k+1)+1).$$

Bu munosabat isbotlanayotgan formulaning $m = k+1$ uchun to‘g‘riligini ko‘rsatadi.

2.2.3. Gruppalashlar. $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu n elementli to‘plamning elementlaridan m ta elemetga ega qism to‘plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlarining joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsinlar.

3- ta’rif. *Bunday m ta elementli qism to‘plamlarning har biriga n* ***ta elementdan*** *m* ***tadan gruppalash*** *deb ataladi.*

n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini C_n^m bilan belgilaymiz.

Gruppalashlar sonini $\binom{m}{n}$ yoki $\binom{n}{m}$ shaklda belgilashlar ham uchraydi. Gruppalash ta’rifidan $1 \le m \le n$ ekanligi va agar biror gruppalashda qandaydir usul bilan elementlar o‘rinlari almashtirilsa, u (gruppalash sifatida) o‘zgarmasligi kelib chiqadi. Bu yerda qaralaytgan gruppalash tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday gruppalashni **betakror** (**takrorli emas**) **gruppalash** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning

4- paragrafida takrorli gruppalashlar o‘rganiladi.

Bir ($n = 1$) elementli $\{a\}$ to‘plam uchun faqat bitta gruppalash mavjud, u ham bo‘lsa bir ($m = 1$) elementlidir: a. Demak, $C_1^1 = 1$.

Ikki ($n = 2$) elementli $\{a, b\}$ to‘plam uchun bittadan ($m = 1$) gruppalashlar ikkita (a va b), ikkitadan ($m = 2$) gruppalashlar esa faqat bitta (ab). Demak, $C_2^1 = 2$, $C_2^2 = 1$.

Uch ($n=3$) elementli $\{a, b, c\}$ to‘plam uchun gruppalashlar: bittadan ($m=1$) – a, b va c (uchta); ikkitadan ($m=2$) – ab, ac, bc (uchta); uchtadan ($m=3$) – abc (faqat bitta). Demak, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$.

To‘rtta ($n=4$) elementdan tashkil topgan $\{a, b, c, d\}$ to‘plam elementlaridan tuzilgan gruppalashlar: bittadan – a, b, c va d (to‘rtta); ikkitadan – ab, ac, ad, bc, bd, cd (oltita); uchtadan – abc, abd, acd, bcd (to‘rtta); to‘rttadan $abcd$ (faqat bitta). Demak, $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$.

Yuqoridagi mulsohazalar gruppalashlar sonini hisoblash formulasi qanday bo‘lishiga to‘liq oydinlik kiritmasada, dastlabki tahlil uchun muhimdir. Masalan, n ta elementdan barcha elementlarni o‘z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin degan yoki n ta elementdan bittadan n ta gruppalash bor degan xulosalar ustida o‘ylab ko‘rish mumkin.

C_n^m sonni hisoblash uchun formula topish maqsadida quyidagicha mulohaza yuritamiz. Ravshanki, agar n ta elementdan m tadan barcha gruppalashlarning har birida elementlarning o‘rinlari imkoniyat boricha almashtirilsa, natijada n ta elementdan m tadan barcha o‘rinlashtirishlar hosil bo‘ladi. Bu yerda n ta elementdan m tadan tuzilgan C_n^m ta gruppalashning har biridagi m ta elementdan $P_m = m!$ ta o‘rin almashtirishlar hosil qilish mumkin bo‘lganligi tufayli, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $P_m C_n^m = A_n^m$ tenglik to‘g‘ridir. Demak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$$

formula o‘rinlidir. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

3- teorema. *n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlar ko‘paytmasining dastlabki m ta natural sonlar ko‘paytmasiga nisbati kabidir:* $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Ixtiyoriy n natural son va chekli A to‘plam uchun $|A^n| = |A|^n$ tenglikning o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlang.
2. Yetti so‘mdan ortiq butun son bilan ifodalanuvchi pul to‘lovini faqat 3 so‘mlik va 5 so‘mliklar bilan amalga oshirish mumkinligini isbotlang.
3. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli yoki undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
4. 13 nafar qiz va 12 nafar o‘g‘il boladan tashkil topgan talabalar guruhidan

bir nafar talaba tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

5. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli va bitta undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
6. Qiroatxonada har biri ikki o‘rinli stollar to‘rt qatorga sakkiztadan joylashtirilgan. Haftaning yakshanba kunidan tashqari har kuni qiroatxona o‘quvchilarga sakkiz soat xizmat ko‘rsatadi. Qiroatxonaning bir haftada o‘quvchilarga mumkin bo‘lgan eng ko‘p xizmat ko‘rsatish vaqtini (o‘rin$\times$soat birligida) toping.
7. Agar A va B shaharlarni to‘rtta yo‘l, B va C shaharlarni esa uchta yo‘l bog‘lasa, u holda A shahardan B shahar orqali C shaharga borish imkoniyatlari sonini aniqlang.
8. Shaxmat taxtasiga oq va qora shohlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.
9. Shaxmat taxtasiga oq va qora ruxlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.
10. Yakkamualliflikda yozilgan Axmedovning n_A ta, Botirovning n_B ta va Davronovning n_D ta kitoblardan

    a) bitta kitobni, b) turli mualliflarning ikkita kitobini,

    d) turli mualliflarning uchta kitobini

    tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

2-MA’RUZA

Paskal uchburchagi. Nyuton binomi.

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Paskal uchburchagi haqida umumiy ma’lumotlar 2. Nyuton binomi haqida umumiy ma’lumotlar 3. Binomial koeffitsientlarning xossalari
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Paskal uchburchagi haqida umumiy ma’lumotlar, nyuton binomi haqida umumiy ma’lumotlar va binomial koeffitsientlarning xossalari haqida umumiy tushunchalar berish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - Paskal uchburchagi haqida umumiy ma’lumot, nyuton binomi haqida umumiy ma’lumot va binomial koeffitsientlar haqida tushunchalar oladilar - Mustaqil tarzda paskal uchburchagi haqida, nyuton binomi haqida va binomial koeffitsientlarni qo’llab masalalar yecha oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: paskal uchburchagi, nyuton binomi va binomial koeffitsientlarga oid masalalarni yechish orqali baholash.

Paskal uchburchagi. Nyuton binomi mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar

2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalar masalalarni yechish jarayonida paskal uchburchagi, nyuton binomi va binomial koeffitsientlardan foydalanish borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida paskal uchburchagi, nyuton binomi va binomial koeffitsientlar ba'zi bir masalalarni yechib namuna sifatida uchun keltirib chiqarishni tashkillashtiradi. So'ng talabalar bilan birga ularnung yechimlarini tahlil qiladi, ularda ba'zi paydo bo'lgan qiyinchiliklarni aniqlaydi. 2.3. Talabalarga har xil sohalarda uchraydigan paskal uchburchagi, nyuton binomi va binomial koeffitsientlardan foydalanishi uchun kerakli tushunchalarni beradi. Shu tarzda mavzuga oid masalalarni yechishni tashkillashtiradi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. 2.4. Talabalarni kichik guruhlarga bo'ladi va ularga paskal uchburchagi, nyuton binomi va binomial koeffitsientlar bo'yicha bittadan masala berib, ularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma'lum qiladi. 2.5. Taqdimot boshlanganligini ma'lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishinidaftarga ko'chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar misollarni yechadilar, klaster chizadilar Guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi.	Tinglaydidilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Paskal uchburchagi deb nimaga aytiladi?
2. Nyuton binomi deb nimaga aytiladi?

3. Binomial koeffitsientlar deb nimaga aytiladi?
4. Paskal uchburchagi va nyuton binomi orasida bog'liqlik bormi?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Paskal uchburchagi qanday topiladi?
2. Nyuton binomi qanday topiladi?
3. Binomial koeffitsientlar qanday topiladi?

Asosiy qism

1. Paskal uchburchagi haqida umumiy ma'lumotlar. Berilgan n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni C_n^m uchun bir necha qatorlarni 1-jadvaldagidek yozamiz:

1- jadval

n	Gruppalashlar soni C_n^m $(m=\overline{0,n})$
1	$C_1^0=1$, $C_1^1=1$
2	$C_2^0=1$, $C_2^1=2$, $C_2^2=1$
3	$C_3^0=1$, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$
4	$C_4^0=1$, $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$
5	$C_5^0=1$, $C_5^1=5$, $C_5^2=10$, $C_5^3=10$, $C_5^4=5$, $C_4^4=1$
…	…………………………………………………………

Bu jadvalda gruppalashlar sonining quyidagi xossalarini kuzatish mumkin:

– har bir qatorning chetlarida birlar joylashgan (bu tasdiq $C_n^0=C_n^n=1$ formula bilan ifodalanadi, ushbu bobning 2- paragrafiga qarang);

– har bir qatordagi C_n^m sonlar qatorning teng o'rtasiga nisbatan simmetrik joylashgan, ya'ni qatorning boshidan va oxiridan baravar uzoqlikda turgan sonlar o'zaro teng ($C_n^m=C_n^{n-m}$);

– ikkinchi qatordan boshlab har bir qatordagi birlardan tashqari ixtiyoriy son bu qatordan yuqorida joylashgan qatordagi biri shu son ustida, ikkinchisi esa undan chapda joylashgan ikkita gruppalashlar sonining yig'indisiga teng ($C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1}$);

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
……………………………

1- shakl

– har bir qatordagi C_n^m sonlar shu qator teng o‘rtasigacha o‘sib, so‘ng kamayadi (3.3 band, 5- xossaga qarang).

Ta’rif sifatida $C_0^0 = 1$ deb qabul qilinsa va bu son yuqoridagi jadvalning $n = 1$ raqamli qatoridan oldin $n = 0$ raqamli qatori sifatida joylashtirilsa, uchburchak figurasiga o‘xshash 1- shakldagi sonlar jadvalini hosil qilish mumkin.

1- ta’rif. *1- shakldagi sonlar jadvali* ***Paskal uchburchagi*** *deb ataladi.*

Bu jadval **arifmetik uchburchak** nomi bilan ham yuritiladi. Uning Paskal nomi bilan atalishiga qaramasdan, bunday sonlar jadvali juda qadimdan dunyoning turli mintaqalarida, jumladan, sharq mamlakatlarida ham ma’lum bo‘lgan. Masalan, Erondagi Tus shahrida (hozirgi Mashhadda) yashab ijod qilgan Nosir at-Tusiy XIII asrda bu jadvaldan foydalanib, berilgan ikkita son yig‘indisining natural darajasini hisoblash usulini o‘zining ilmiy ishlarida keltirgan bo‘lsa, g‘arbda Al-Kashi nomi bilan mashhur Samarqandlik olim Ali Qushchi butun sonning istalgan natural ko‘rsatkichli arifmetik ildizi qiymatini taqribiy hisoblashda bu jadvaldan foydalana bilganligi haqida ma’lumotlar bor. Keyinchalik G‘arbiy Yevropada bu sonlar uchburchagi haqida M. Shtifel arifmetika bo‘yicha qo‘llanmalarida yozgan va u ham butun sondan istalgan natural ko‘rsatkichli arifmetik ildizning taqribiy qiymatini hisoblashda bu uchburchakdan foydalana bilgan. 1556 yilda bu sonlar jadvali bilan N. Tartalya, keyinroq logarifmik lineyka ijodkori U. Otred (1631 yil) ham shug‘ullanganlar. 1654 yilga kelib B. Paskal o‘zining “Arifmetik uchburchak haqidagi traktat” nomli asarida bu sonlar jadvali haqidagi ma’lumotlarni e’lon qildi.

Paskal uchburchagidagi qatorlar istalgancha davom ettirilishi mumkin. Shunisi qiziqki, Paskal uchburchagi yordamida istalgan n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini faqat qo‘shish amali yordamida hosil qilish mumkin (ushbu bobning 2- paragrafdagi C_n^m sonni hisoblash $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $C_n^m = \frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)}$ va $C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$ formulalariga qarang). Bu amal $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ formulaga asoslanadi.

Paskal uchburchagi ko‘plab ajoyib xossalarga ega. B. Paskal yuqorida zikr etilgan traktatda: “Bu xossalarning haqiqatdan ham bitmas-tuganmasligi naqadar ajoyibdir” deb yozgan edi. Ushbu paragrafning 3.3 bandida Paskal uchburchagining ba’zi xossalari keltirilgan.

2. Nyuton binomi haqida umumiy ma’lumotlar. O‘rta maktab matematikasi kursidan quyidagi ikkita qisqa ko‘paytirish formulalarini eslaylik:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – yig‘indining kvadrati;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – yig‘indining kubi.

Yig‘indining navbatdagi ikkita, ya’ni 4- va 5- darajalarini hisoblaymiz:

$$(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^5=(a+b)(a+b)^4=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Shunday qilib, **yig‘indining bikvadrati** (ya’ni to‘rtinchi darajasi)

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

va yig‘indining beshinchi darajasi

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

formulalariga ega bo‘lamiz.

Yuqorida keltirilgan yig‘indining kvadrati, kubi, bikvadrati va beshinchi darajasi formulalari o‘ng tomonlaridagi ko‘phad koeffitsientlari Paskal uchburchagining mos qatorlaridagi C_n^m ($n=2,3,4,5$) sonlar ekanligini payqash qiyin emas.

1- teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

formula o‘rinlidir.

Isboti. Matematik induksiya usulini qo‘llaymiz.

Baza: $n=1$ bo‘lganda formula to‘g‘ri: $(a+b)^1=a+b$.

Induksion o‘tish: isbotlanishi kerak bo‘lgan formula $n=k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni

$$(a+b)^k=a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+...+C_k^{k-1}ab^{k-1}+b^k.$$

Formula $n=k+1$ bo‘lganda ham to‘g‘ri ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatdan ham, $C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1}$ formuladan foydalanib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k=$$

$$=(a+b)(a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+...+C_k^{k-1}ab^{k-1}+b^k)=$$

$$=a^{k+1}+C_k^1a^kb+C_k^2a^{k-1}b^2+...+C_k^kab^k+$$

$$+C_k^0a^kb+C_k^1a^{k-1}b^2+...+C_k^{k-1}ab^k+b^{k+1}=$$

$$=a^{k+1}+(C_k^0+C_k^1)a^kb+(C_k^1+C_k^2)a^{k-1}b^2+...$$

$$...+(C_k^{k-1}+C_k^k)ab^k+b^{k+1}=$$

$$=a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb+C_{k+1}^2a^{k-1}b^2+...+C_{k+1}^kab^k+b^{k+1}.$$

Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko‘phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) **Nyuton binomi** deb ataladi. Umuman olganda, “Nyuton binomi” iborasiga tanqidiy nuqtai nazardan yondoshilsa, undagi ikkala so‘zga nisbatan ham shubha tug‘iladi: birinchidan, $(a+b)^n$ ifoda birdan katta natural n sonlar uchun binom (ya’ni ikkihad) emas;

ikkinchidan, natural sonlar uchun bu ifodaning yoyilmasi Nyutongacha ma'lum edi.

Greklar $(a+b)^n$ ifodaning qatorga yoyilmasini $n$ning faqat $n=2$ bo'lgan holida (ya'ni, yig'indi kvadratining formulasini) bilar edilar. Umar Xayyom va Ali Qushchi $(a+b)^n$ ifodani $n>2$ bo'lgan natural sonlar uchun ham qatorga yoya bilganlar. Nyuton esa 1767 yilda yoyilma formulasini isbotsiz manfiy va kasr n sonlar uchun ham qo'llagan. L. Eyler 1774 yilda Nyuton binomi formulasini kasr n sonlar uchun isbotladi, K. Makloren esa bu formulani darajaning ratsional ko'rsatkichlari uchun qo'lladi. Nihoyat, 1825 yilda N. Abel daraja ko'rsatkichining istalgan kompleks qiymatlari uchun binom haqidagi teoremani isbotladi.

C_n^m sonlarni **binomial koeffitsientlar** deb ham atashadi. Bunday ta'rif bu koeffitsientlarning Nyuton binomi formulasida tutgan o'rniga qarab berilgan bo'lib, C_n^m son

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

yoyilmadagi $a^{n-m}b^m$ ifodaning koeffitsientidir.

2- teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a-b)^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m$$

formula o'rinlidir.

Isboti. Nyuton binomi formulasida $b$ni $(-b)$ga almashtirsak kerakli formulani hosil qilamiz. ■

Misol. Oxirgi formuladan xususiy holda quyidagi qisqa ko'paytirish formulalari kelib chiqadi:

$n=2$ bo'lganda ayirmaning kvadrati formulasi

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$n=3$ bo'lganda ayirmaning kubi formulasi

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Nyuton binomi formulasini kombinatorik amallar yordamida ham hosil qilish mumkin.

Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $a, b_1, b_2, ..., b_n$ sonlar uchun $(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n)$ ifodani

$$(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n) = a^n + a^{n-1}(b_1+b_2+...+b_n) +$$
$$+ a^{n-2}(b_1b_2 + b_1b_3 + ... + b_{n-1}b_n) +$$
$$+ a^{n-3}(b_1b_2b_3 + ... + b_{n-2}b_{n-1}b_n) + ... + b_1b_2...b_n.$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglikning o'ng tomonida joylashgan a^n oldidagi koeffitsient birga ($1=C_n^0$) teng. Birinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar soni $n$ga (

$n = C_n^1$) tengligi yaqqol ko‘rinib turibdi. Ikkinchi qavslar ichidagi qo‘shiluvchilar $b_1, b_2, ..., b_n$ (n ta) elementlardan ikkitadan ko‘paytmalar (soni C_n^2 ga teng gruppalashlar) ekanligini ham payqash qiyin emas. Uchinchi qavslar ichidagi qo‘shiluvchilar esa o‘sha n ta elementlardan uchtadan ko‘paytmalar bo‘lib, ularning soni C_n^3 ga teng va hokazo. Oxirgi qo‘shiluvchi oldidagi koeffitsient birga ($1 = C_n^n$) teng. Yuqoridagi tenglikda $b_1 = b_2 = ... = b_n = b$ deb olsak, Nyuton binomi formulasini hosil qilamiz.

3. Binomial koeffitsientlarning xossalari. Binomial koeffitsientlarning ba’zi xossalarini keltiramiz. Bu xossalar bevosita gruppalashlarga oid bo‘lib, tabiiyki, ular Paskal uchburchagining xossalarini ham ifodalaydi.

1- x o s s a. $\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{n-m}{m+1}$ *($m = 0,1,2,...,n-1$) tenglik o‘rinlidir.*

Haqiqatdan ham,

$$\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} = \frac{m!(n-m)!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{m!(n-m-1)!(n-m)}{m!(m+1)(n-m-1)!} = \frac{n-m}{m+1}.$$

Bu xossa binomial koeffitsientlar qatoridagi istalgan ketma-ket ikki elementning biri ma’lum bo‘lsa, boshqasini osonlik bilan hisoblash mumkinligini ko‘rsatadi:

$$C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m, \qquad C_n^m = \frac{m+1}{n-m} C_n^{m+1},$$

bu yerda $m = 0,1,2,...,n-1$.

2- x o s s a. *Ixtiyoriy natural* n *son uchun barcha* C_n^m ($m = \overline{0,n}$) *binomial koeffitsientlar yig‘indisi* 2^n *ga teng, ya’ni*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Bu tenglik Nyuton binomi formulasida $a = b = 1$ deb olganda hosil bo‘ladi.

3- x o s s a. *Toq o‘rinlarda turgan binomial koeffitsientlar yig‘indisi juft o‘rinlarda turgan binomial koeffitsientlar yig‘indisiga teng.*

Haqiqatdan ham, Nyuton binomi formulasida $a = 1$ va $b = -1$ deb olganda

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan xossadagi tasdiqning to‘g‘riligi kelib chiqadi.

2- va 3- xossalar asosida quyidagi xossani hosil qilamiz.

4- xossa. *n natural sondan oshmaydigan eng katta toq m son uchun $C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^m = 2^{n-1}$ tenglik hamda n sondan oshmaydigan eng katta juft m son uchun $C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^m = 2^{n-1}$ tenglik o'rinlidir.*

5- xossa. *Toq n son uchun*

$$C_n^0 < C_n^1 < ... < C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n-1}{2}+1}, \quad C_n^{\frac{n-1}{2}+1} > C_n^{\frac{n-1}{2}+2} > ... > C_n^n,$$

juft n son uchun esa

$$C_n^0 < C_n^1 < ... < C_n^{\frac{n}{2}}, \quad C_n^{\frac{n}{2}} > C_n^{\frac{n}{2}+1} > ... > C_n^n,$$

munosabatlar o'rinlidir.

Haqiqatdan ham, $m < \frac{n-1}{2}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural n va m sonlar uchun $\frac{n-m}{m+1} > 1$ tengsizlik o'rinlidir, $m > \frac{n-1}{2}$ bo'lganda esa $\frac{n-m}{m+1} < 1$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu yerda $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$ formulani (1- xossaga qarang) qo'llab, xossadagi barcha tengsizliklarni hosil qilamiz.

Agar n toq son bo'lsa, $m = \frac{n-1}{2}$ butun son bo'lib, $\frac{n-m}{m+1} = \frac{n - \frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2} + 1} = \frac{2n-n+1}{n-1+2} = \frac{n+1}{n+1} = 1$ munosabat o'rinlidir. Demak, $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$ formuladan $m = \frac{n-1}{2}$ bo'lganda $C_n^{\frac{n-1}{2}+1} = C_n^{\frac{n-1}{2}}$ tenglik kelib chiqadi.

Binomial koeffitsientlarning 5- xossasi Paskal uchburchagining yuqorida keltirilgan xossalari tasdig'i bo'lib, unga ko'ra binomial koeffitsientlar oldin $C_n^0 = 1$ dan $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$gacha o'sadi, keyin esa $C_n^n = 1$gacha kamayadi hamda n toq bo'lganda binomial koeffitsientlar qatorining o'rtasidagi ikkita hadi tengdir va n juft bo'lganda uning o'rtadasigi hadi eng katta va yagonadir.

Quyidagi 6–8- xossalar o'rinlidir.

6- xossa. $C_n^n + C_{n+1}^n + ... + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$.

7- xossa. $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

8- xossa. $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + ... + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$.

Oxirgi tenglik **Koshi ayniyati** deb aytiladi.

Endi bu uchta xossalarni isbotlaymiz. Dastlab 6- xossaning isbotini keltiramiz. Birinchidan,

$$s = (1+x)^n + (1+x)^{n+1} + ... + (1+x)^{n+k}$$

ko'phad uchun Nyuton binomi formulasini qo'llab, quyidagi tenglikni hosil qilamiz: $$s=\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^m+\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^m x^m+...+\sum_{m=0}^{n+k}C_{n+k}^m x^m$$

Bu yerdan, s ko‘phaddagi x^n ifodaning koeffitsienti

$$C_n^n+C_{n+1}^n+...+C_{n+k}^n$$

yig‘indiga tengligini aniqlash mumkin.

Ikkinchidan, $s=(1+x)^n(1+(1+x)+...+(1+x)^k)$ ifodani geometrik progressiya hadlari yig‘indisi formulasiga binoan quyidagicha ham yozish mumkin:

$$s=(1+x)^n\frac{(1+x)^{k+1}-1}{1+x-1}=\frac{1}{x}\left((1+x)^{n+k+1}-(1+x)^n\right).$$

Bu yerda ham Nyuton binomi formulasini qo‘llab, hosil bo‘lgan ko‘phadning x^n daraja qatnashgan hadi koeffitsienti C_{n+k+1}^{n+1} ekanligini ko‘rish mumkin. Keltirilgan bu mulohazalar asosida 6- xossadagi tenglikka ega bo‘lamiz.

Ravshanki, $C_n^m=C_n^{n-m}$ formula e’tiborga olinsa, 7- xossa 8- xossadan $m=k=n$ bo‘lganda xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Shuning uchun faqat 8- xossaning isbotini keltirish bilan chegaralanamiz.

Birinchidan, Nyuton binomi formulasiga ko‘ra

$$(1+x)^n=\sum_{s=0}^{n}C_n^s x^s\ ,\ (1+x)^m=\sum_{t=0}^{m}C_m^t x^t\ ,\ (1+x)^{n+m}=\sum_{p=0}^{n+m}C_{n+m}^p x^p$$

tengliklarga, bulardan esa $(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$ bo‘lgani uchun $\sum_{s=0}^{n}C_n^s x^s\sum_{t=0}^{m}C_m^t x^t=\sum_{p=0}^{n+m}C_{n+m}^p x^p$ tenglikka ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglikning ikkala tomonidagi x^k ($k=0,1,...,\min(m,n)$) daraja koeffitsientlarini bir-biriga tenglashtirsak, isbotlanishi kerak bo‘lgan formulani hosil qilamiz.

Albatta, yuqoridagu uchta xossalar boshqa usullar bilan ham isbotlanishi mumkin. Quyida 8- xossaning kombinatorik tahlilga asoslangan isboti keltirilgan.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Paskal uchburchagi deganda nimani tushunasiz?
2. Paskal uchburchagining qanday xossalarini bilasiz?
3. B. Paskalgacha Paskal uchburchagidan foydalangan sharq va g‘arb olimlaridan kimlarni bilasiz?
4. Nyuton binomi formulasini qanday qo‘llash mumkin?
5. Nyuton binomi formulasini Isaak Nyutondan oldin kimlar qo‘llagan?
6. Nima uchun binomial koeffitsientlarlarning xossalari Paskal uchburchagining xossalari ham hisoblanadi?

7. Nyuton binomi formulasini kombinatorik tahlil yordamida isbot qilganda qanday tushunchalar qo‘llaniladi?
8. Koshi ayniyatining kombinatorik tushunchalarga asoslangan isbotini bilasizmi?
9. Nima uchun gruppalashlar sonlarini binomial koeffitsientlar deb ham atashadi?
10. Nima uchun 7- xossa 8- xossaning xususiy holi bo‘ladi?

3- MA’RUZA
Takrorli kombinatsiyalar

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Takrorli o‘rin almashtirishlar 2. Takrorli o‘rinlashtirishlar 3. Takrorli gruppalashlar 4. Ko‘phad formulasi
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Turli masalalarni yechishda qullaniladigan takrorli kombinatsiyaning takrorli o‘rin almashtirishlar, takrorli o‘rinlashtirishlar, takrorli gruppalashlar va ko‘phad formulasi haqida bilim va ko’nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - takrorli o‘rin almashtirishlar, takrorli o‘rinlashtirishlar, takrorli gruppalashlar va ko‘phad formulasi haqida umumiy tushunchalarga ega bo’ladilar - Mustaqil tarzda takrorli o‘rin almashtirishlar, takrorli o‘rinlashtirishlar, takrorli gruppalashlar va ko‘phad formulasini qo’llab masalalar yecha oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: turli masalalarning takrorli o‘rin almashtirishlar, takrorli o‘rinlashtirishlar, takrorli gruppalashlar va ko‘phad formulasini sonini topish formulasini yoza olishini baholash.

Takrorli kombinatsiyalar mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi.	Tinglaydilar, yozib oladilar

mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalarning takrorli o‘rin almashtirishlar, takrorli o‘rinlashtirishlar, takrorli gruppalashlar va ko‘phad formulasini va uning mohiyati borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida takrorli o‘rin almashtirishlar, takrorli o‘rinlashtirishlar, takrorli gruppalashlar va ko‘phad formulalaridan foydalanish. So’ng talabalar bilan birga ularni tahlil qiladi, ularda ba’zi paydo bo’lgan qiyinchiliklarni aniqlaydi. 2.3. Talabalarga mavzuga oid kerakli tushunchalarni beradi. Shu tarzda har bir tushunchalarni misollar orqali keltirishni tashkillashtiradi. Buning uchun yordamchi savol va misollardan foydalanadi. 2.4. Talabalarni kichik guruhlarga bo’ladi va ularga har xil takrorli o‘rin almashtirishlar, takrorli o‘rinlashtirishlar, takrorli gruppalashlar va ko‘phad formulasini keltirish bo’yicha bittadan savol beradi va uni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma’lum qiladi. 2.5. Taqdimot boshlanganligini ma’lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishinidaftarga ko’chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, munozara va tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar. Kichik guruhlar misollarni yechadilar, klaster chizadilar Guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi.	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar deb nimaga aytiladi?

2. Takrorli o‘rinlashtirishlar deb nimaga aytiladi?
3. Takrorli gruppalashlar deb nimaga aytiladi?
4. Ko‘phad formulasi deb nimaga aytiladi?

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar qanday topiladi?
2. Takrorli o‘rinlashtirishlar qanday topiladi?
3. Takrorli gruppalashlar qanday topiladi?
4. Ko‘phad formulasi qanday topiladi?

Asosiy qism

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar. Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan boshqa birlashmalar ham o‘rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va gruppalashlar.

Avval o‘rganilgan o‘rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o‘rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo‘lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o‘rinlari almashtirilishi natijasida yangi o‘rin almashtirish hosil bo‘lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o‘zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o‘rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo‘ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir kortejning n ta elementlari orasida bir xil (aynan bir xil) n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, bir xil n_k ta k - tur elementlar bo‘lsin, bu yerda n_1, $n_2, \dots n_k$ – hech bo‘lmaganda bittasi 1dan farqli natural sonlar.

1- ta’rif. *Bu n ta elementlarning o‘rinlarini imkoniyati boricha almashtirishlar natijasida hosil bo‘lgan kortejlar (kombinatsiyalar)* ***takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar*** *(qisqacha,* ***takrorli o‘rin almashtirishlar****) deb ataladi.*

n ta elementlari orasida n_1 ta birinchi tur, n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, n_k ta k - tur bir xil elementlar bo‘lgan takrorli o‘rin almashtirishlar sonini $C_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ bilan belgilaymiz.

1- teorema. *Takrorli o‘rin almashtirishlar soni uchun*

$$C_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

formula o‘rinlidir, bu yerda $n_1+n_2+...+n_k=n$ *– elementlar soni,* k *– turlar soni.*

Isboti. Har bir o‘rin almashtirishdagi elementlar soni $n_1+n_2+...+n_k=n$ ga teng. Bu n ta elementlarni quyidagi tartibda joylashtirib, o‘rin almashtirishlardan birini qaraymiz: birinchi bo‘lib barcha n_1 ta birinchi tur, ulardan keyin barcha n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, oxirda barcha n_k ta k - tur elementlar joylashgan bo‘lsin. Qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda birinchi tur elementlar soni n_1 ga teng bo‘lgani uchun ularning mumkin bo‘lgan hamma o‘rin almashtirishlari soni $n_1!$ ga teng. Ammo bu elementlar bir-biridan farq qilmaganligi sababli ularning o‘rinlarini almashtirish natijasida yangi takrorli o‘rin almashtirish hosil bo‘lmaydi.

Qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda ikkinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlar soni $n_2!$ bo‘lib, bu yerda ham bir-biridan farq qilmagan elementlar o‘rinlarini almashtirishlar jarayonida yangi takrorli o‘rin almashtirish hosil qilinmaydi. Ikkinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlar birinchi tur elementlarning o‘rin almashtirishlariga bog‘liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkinligini ta’kidlaymiz.

Uchinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlar soni $n_3!$ bo‘lib, ularning ham hech qaysi biri yangi takrorli o‘rin almashtirish hosil qilmaydi. Bu o‘rin almashtirishlar $n_1!$ ta birinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlarga va $n_2!$ ta ikkinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlarga, jami, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!$ ta o‘rin almashtirishlarga bog‘liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkin.

Shunday davom etib, qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda oxirgi k - tur elementlar o‘rinlarini almashtiramiz. Bunday o‘rin almashtirishlar soni $n_k!$ ga teng bo‘lib, bu o‘rin almashtirishlar ham yangi takrorli o‘rin almashtirishni hosil qilmaydi. Bu o‘rin almashtirishlarni birinchi tur, ikkinchi tur va hokazo ($k-1$)- tur elementlarning jami soni, umumlashgan ko‘paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!...n_{k-1}!$ bo‘lgan o‘rin almashtirishlariga bog‘liqsiz ravishda bajarish mumkin.

Shunday qilib, $n!$ ta o‘rin almashtirishlarni har birida $n_1!n_2!...n_k!$ tadan bir xil o‘rin almashtirishlar bo‘lgan qismlarga ajratildi deb hisoblash mumkin. Demak, biz izlagan takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_n(n_1,n_2,...,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ bo‘ladi, bu yerda $n_1+n_2+...+n_k=n$.

1- misol. Ikkita a, bitta b va ikkita c harflardan tashkil topgan kortej uchun barcha takrorli o‘rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi ($k=3$) harflar soni beshga teng (n=5) bo‘lib, $n_1=2$ (ikkita a), $n_2=1$ (bitta b) va $n_3=2$ (ikkita c). Dastlabki ikkita harflarning (xuddi shuningdek, oxirgi ikkita harflarning ham) o‘rinlarini o‘zaro almashtirsak yangi o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lmaydi. Barcha takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_5(2,1,2)=\frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2}=30$ bo‘ladi. Bu o‘ttizta o‘rin almashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

$$aabcc, aacbc, aaccb, abacc, abcac, abcca\ ,$$
$$acabc.acacb, acbac, acbca, accab, accba\ ,$$
$$baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa\ ,$$
$$caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba\ ,$$
$$cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa\ .$$

2. Takrorli o‘rinlashtirishlar. n ta elementlardan tashkil topgan to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu elementlardan foydalanib, m ta elementdan tashkil topgan kortejlarni shunday tuzamizki, bu kortejlarga har bir element hohlagancha marta (albatta m dan oshmagan miqdorda) kirishi mumkin bo‘lsin va bu kortejlar bir-biridan ularni tashkil etuvchi elementlar turlari bilan yoki bu elementlarning joylashishlari bilan farq qilishsin.

2- ta’rif. *Shunday usul bilan tuzilgan kortejlarning har biri* n ***ta turli elementlardan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan*** m ***tadan o‘rinlashtirish*** *(qisqacha,* ***takrorli o‘rinlashtirish****) deb ataladi.*

n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar sonini $\overline{A}_n^m$ bilan belgilaymiz.

2- teorema. *n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni n^m ga teng, ya’ni $\overline{A}_n^m = n^m$.*

Isboti. Berilgan n uchun takrorli o‘rinlashtirishdagi elementlar soni m bo‘yicha matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. Baza: takrorli o‘rinlashtirishlar $m=1$ bo‘lganda bitta elementdan tuzilishi ravshan. Tabiiyki, bunda hech qanaqa takrorlanish haqida gap bo‘lishi mumkin emas. Bu holda elementlar soni n bo‘lgani uchun takrorli o‘rinlashtirishlar soni ham n ga teng: $\overline{A}_n^1 = n = n^1$.

Induksion o‘tish: teoremaning tasdig‘i $m=k$ bo‘lganda to‘g‘ri, ya’ni $\overline{A}_n^k = n^k$ bo‘lsin. Bu tasdiq $m=k+1$ bo‘lganda ham to‘g‘ri bo‘lishini isbotlaymiz. Buning uchun n ta turli elementlardan k tadan takrorli o‘rinlashtirishning istalgan birini olib, unga n elementli to‘plamning ixtiyoriy bitta elementini ($k+1$)- element sifatida kiritamiz. Natijada qandaydir ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishni paydo qilamiz. Tabiyki, qaralayotgan k tadan o‘rinlashtirishlarning har biridan yangi n ta ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishlar hosil qilish mumkin. Shunday usul bilan ishni davom ettirsak, barcha mumkin bo‘lgan ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz, bu yerda birorta ham ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishlar qolib ketmaydi va hech qaysi ilgari ko‘rilgan ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirish qaytadan paydo bo‘lmaydi. Ko‘paytirish qoidasiga asosan n ta turli elementlardan ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni k tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soniga nisbatan n marta ortiqdir, ya’ni $\overline{A}_n^{k+1} = n\overline{A}_n^k = nn^k = n^{k+1}$.

3. Takrorli gruppalashlar. Har bir elementi birlashmaga istalgancha marta kiritiladigan va turli n ta elementlardan m tadan olinadigan hamda elementlar tartibi e’tiborga olinmaydigan birlashmalarni (kortejlarni) qaraymiz.

3- ta’rif. *Bunaqa birlashmalar* n ***ta turli elementlardan*** m ***tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar*** *(qisqacha,* ***takrorli gruppalashlar****) deb ataladi.*

n ta elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar ta’rifidan ko‘rinib turibdiki, turli kombinatsiyalar bir-birlaridan hech bo‘lmasa bitta elementi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar sonini $\overline{C}_n^m$ deb belgilaymiz.

3- teorema. n ***ta elementdan*** m ***tadan takrorli gruppalashlar soni*** C_{n+m-1}^m ***ga teng, ya’ni*** $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Isboti. $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to‘plam uchun n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar sonini aniqlash zarur. Har bir takrorli gruppalashdagi elementlarni n ta qismga shunday bo‘lish mumkinki, har bir i- bo‘lakda a_i element qanchadir marta qatnashadi yoki biror marta ham qatnashmaydi. Har bir shunday gruppalashni nol va birlardan iborat kod yordamida quyidagicha shifrlaymiz: har bir a_i element o‘rniga bu element i- bo‘lakda necha marta qatnashsa, shuncha birlar yozamiz (tabiiyki, bu element biror marta ham qatnashmasligi mumkin, u holda hech narsa yozilmaydi); turli bo‘lak elementlarini bir-biridan nollar bilan ajratamiz (bu yerda yonma-yon joylashgan nollar hosil bo‘lishi mumkin – bu nollar mos elementlarning gruppalashda qatnashmaganligini anglatadi). Masalan, $\{a, b, c, d, e, f\}$ to‘plam elementlaridan tuzilgan 6ta elementdan 9tadan takrorli $bbbcddddf$ gruppalashga 01110101111001 shifr, 6ta elementdan 12tadan takrorli $aaaabeeeeeff$ gruppalashga esa 1111010011111011 shifr, aksincha, 10100011110 shifrga 6ta elementdan 6tadan takrorli $abeeee$ gruppalash mos keladi.

Shunday qilib, n ta elementdan m tadan har bir takrorli gruppalash uchun qandaydir m ta birlar va ($n-1$)ta nollardan iborat ketma-ketlikni va, aksincha, m ta birlar va ($n-1$)ta nollardan tashkil topgan har bir ketma-ketlik uchun n ta elementdan m tadan biror takrorli gruppalashni mos qo‘ygan bo‘lamiz (bir qiymatli moslik o‘rnatildi). Binobarin, n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni (

$n-1)$ta nol va m ta birlardan tashkil topgan kortej elementlaridan tuzilgan takrorli o‘rin almashtirishlar soniga, ya’ni $C_{n+m-1}(m,n-1)$ ga tengdir. Demak,

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}(m,n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m .$$

4. Ko‘phad formulasi. Takrorli kombinatsiyalar vositasida Nyuton binomi tushunchasini umumlashtiramiz, ya’ni $(a_1+a_2+...+a_m)^n$ ifodaning yoyilmasini topish muammosini qaraymiz. Buning uchun qaralayotgan ifodani n ta bir xil ifodalar ko‘paytmasi, ya’ni

$$\underbrace{(a_1+a_2+...+a_m)(a_1+a_2+...+a_m)...(a_1+a_2+...+a_m)}_{n \text{ ta ko'paytuvchi}}$$

shaklida yozib, qavslarni ochamiz va o‘xshash hadlarni ixchamlaymiz. Natijada, $(a_1+a_2+...+a_m)^n$ ifodaning yoyilmasi hosil bo‘ladi. Yoyilmaning tarkibidagi qo‘shiluvchilarning har birida $a_1, a_2, ..., a_m$ elementlardan tashkil topgan takrorli o‘rin almashtirishlar bor, bu yerda har bir qo‘shiluvchi qandaydir koeffitsient va n ta elementlarning $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ko‘rinishdagi ko‘paytmasidan iboratdir. Yoyilmadagi $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ko‘paytmaning koeffitsientini aniqlash uchun n ta $(n=n_1+n_2+...+n_m)$ elementli takrorli o‘rin almashtirishlar sonini topish kerak, ya’ni $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ sonni hisoblash kerak. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

4- teorema. *Ixtiyoriy haqiqiy $a_1, a_2, ..., a_m$ va natural n sonlar uchun*

$$(a_1+a_2+...+a_m)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_m=n} C_n(n_1,n_2,...,n_m)\, a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$$

formula o‘rinlidir, bu formulaning o‘ng tomonidagi yig‘indi $n_1+n_2+...+n_m=n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1,n_2,...,n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi.

Isbotlangan oxirgi tenglik **ko‘phad formulasi** yoki **umumlashgan Nyuton binomi formulasi** deb yuritiladi. $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ sonlarni **ko‘phadiy koeffitsientlar** deb ataymiz.

C_n^k binomial koeffitsient $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ ko‘phadiy koeffitsientning $m=2$ bo‘lgandagi xususiy holidir. Haqiqatdan ham, $n_1+n_2=n$ tenglikda $n_1=k$ deb olsak, u holda $n_2=n-n_1=n-k$ va $C_n(n_1,n_2)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k$ bo‘ladi.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar takrorlanishi bo‘lmagan o‘rin almashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?
2. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan o‘rin almashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?

3. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rinlashtirishlar takrorlanishi bo‘lmagan o‘rinlashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?
4. Takrorli o‘rinlashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan o‘rinlashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?
5. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar takrorlanishi bo‘lmagan gruppalashlardan nimasi bilan farq qiladi?
6. Takrorli gruppalashlar soni formulasini isbotlashda qanday usuldan foydalanilgan?
7. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan gruppalashlar sonini hisoblash mumkinmi?
8. Ko‘phad formulasining Nyuton binomi formulasidan qanday farqi bor?
9. Ko‘phadiy koeffitsientlarning qanday xossalarini bilasiz?

4- MA’RUZA
Fibonachchi sonlari

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Fibonachchi sonlarining ta’rifi 2. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda fibonachchi sonlarining ta’rifi va fibonachchi sonlarining oddiy xossalari haqida bilim va ko’nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - fibonachchi sonlarining ta’rifi va fibonachchi sonlarining oddiy xossalari foydalana oladilar. - Mustaqil tarzda fibonachchi sonlarini va fibonachchi sonlarining oddiy xossalaridan foydalanib uni qullay oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: fibonachchi sonlarining hosil qilish formulasini kiltirib chiqarish bo’yicha baholash.

Fibonachchi sonlari mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar
	2.1. Talabalarning fibonachchi sonlarini va fibonachchi sonlarining oddiy xossalari haqida umumiy ma’lumotlar borasidagi	Savollarga javob beradilar

	bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova).	
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida fibonachchi sonlarining ta'rifi va fibonachchi sonlarining oddiy xossalari, o'rganish va formulalarini kiltirib chiqarish. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarning tahlil qiladi, ularda ba'zi paydo bo'lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o'zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2)	Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar.
	2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo'ladi va ularga fibonachchi sonlarini va fibonachchi sonlarining oddiy xossalari foydalanish bo'yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma'lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma'lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko'chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadi-lar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Fibonachchi sonlarining ta'rifini aytiladi?
2. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari deb nimaga aytiladi?
3. Fibonachchi sonlarining xossalari?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Fibonacha qatori nima?
2. Fibonachchi sonlari qanday hosil qilinadi?
3. Fibonachchi sonlarini formulasi qanday hosil qilinadi?

Asosiy qism

1. Fibonachchi sonlarining ta'rifi. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlikdagi elementlarning uchinchisidan boshlab har biri o'zidan oldingi ikkita elementning yig'indisiga teng, ya'ni $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ bo'lsin. Ravshanki, bu ketma-ketlikni tashkil qilishda uning dastlabki ikkita hadi muhim bo'lib, keyingi barcha hadlari rekurrent tenglik vositasida aniqlanadi.

1- ta'rif. $u_1 = u_2 = 1$ *bo'lgan holda* $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ *rekurrent tenglik vositasida aniqlan ketma-ketlik* ***Fibonachchi qatori****, uning hadlari esa* ***Fibonachchi sonlari*** *deb ataladi.*

Tabiiyki, Fibonachchi qatoridagi Fibonachchi sonlarini aniqlash jarayoni cheksizdir. Fibonachchi sonlarining dastlabki 24tasi quyida keltirilgan:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368.

"Fibonachchi sonlari" iborasi birinchi bo'lib XIX asrda Eduard Lyuka tomonidan qiziqarli matematikaga bag'ishlab yozilngan asarda qo'llanilgan. Fibonachchi (bu so'z italyancha "filius Bonacci" so'zlaridan qisqartirilib tuzilgan bo'lib, Bonachchining o'g'li ma'nosini anglatadi) Italiyadagi Piza shahrida XII-XIII asrlarda yashagan Leonardo Pizanskiyning boshqacha ismidir (laqabidir). Bonachchi Italiya va Jazoirda savdo-sotiq bilan shug'ullangan. Leonardo boshlang'ich ma'lumotni Jazoirda olgan bo'lib, u o'zining arab o'qituvchilaridan hind pozitsion o'nlik sanoq tizimi va nolni o'rgangan edi. Fibonachchi "Liber abaci" ("Abak haqidagi kitob" – 1202 yilda yozilgan bo'lib, 1228 yildagi qo'lyozma nusxasi saqlangan) nomli kitobida arifmetika va algebra bo'yicha o'z davrining deyarli barcha ma'lumotlarini bayon qilgan. Xususan, o'sha kitobda hozir butun dunyoda ommabob hisoblangan "arab" raqamlari bayon qilingan. Qo'lyozmaning (1228 yil) 123-124 sahifalarida uy quyonlarining ko'payishi haqidagi quyidagi masala bayon qilingan.

"Bir kishi bir juft quyonni ko'paytirish maqsadida saqlagan bo'lsin.

Quyonning tabiati shundayki, har bir juft quyon bir oyda boshqa bir juft quyonni dunyoga keltiradi va yangi paydo bo'lgan juft quyonlar ikkinchi oydan boshlab nasl bera boshlaydilar. Bir yildan so‘ng dastlabki juft quyonlarning ko‘payishi natijasida necha juft quyon vujudga keladi?”

Bu masalani yechish jarayonida Fibonachchi dastlabki yilning har bir oyi uchun quyonlar juftlari sonini aniqlagan. Bu sonlar 1- jadvalda keltirilgan. “Liber abaci”dan bu masala yechimi bayonining so‘nggi satrlarini keltiramiz: “...Oxirgi oyda tug‘ilgan yangi 144 juft quyonlar qo‘shilsa 377 juft quyon hosil bo‘ladi. Shuncha juft quyon bir yil davomida bir juft quyondan ko‘payar ekan”. Quyonlar haqidagi masalada uchragan sonlar Fibonachchi qatorining dastlabki sonlari ekanligi yaqqol ko‘rinib turibdi.

Fibonachchining o‘zi Fibonachchi qatorining xossalarini o‘rganish bilan shug‘ullanmagan deb hisoblashadi (har ehtimolga qarshi, bizgacha yetib kelgan bunday izlanishlar haqida ma’lumotlar yo‘qligini ta’kidlaymiz). XIX asr boshlarida Fibonachchi qatorining turli xossalariga bag‘ishlangan ilmiy ishlar soni “Fibonachchi quyonlari sonidek o‘sgan”.

1- jadval

O‘tgan oylar soni	Tug‘ilgan juft quyonlar	Jami juftlar
0	0	1
1	1	2
2	1	3
3	2	5
4	3	8
5	5	13
6	8	21
7	13	34
8	21	55
9	34	89
10	55	144
11	89	233
12	144	377

Eduard Lyuka ixtiyoriy u_1 va u_2 sonlardan boshlanuvchi hamda $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ rekurrent tenglik bilan aniqlanuvchi sonlar qatorini **umumlashgan Fibonachchi qatori** deb nomlagan.

2. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari. Fibonachchi sonlari juda ko‘plab qiziqarli xossalarga ega. Quyida bu xossalardan ba’zilarini keltiramiz.

1- xossa. *Dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlarining yig‘indisi* $(u_{n+2} - 1)$*ga teng, ya’ni*

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2} - 1.$$

Haqiqatdan ham, Fibonachchi sonlarining ta’rifiga ko‘ra

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + ... + (u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) =$$

$$=u_{n+2}-u_2=u_{n+2}-1.$$

2- xossa. *Toq raqamli dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlarining yigindisi* u_{2n} *ga teng, ya'ni*

$$u_1+u_3+u_5+...+u_{2n-1}=u_{2n}.$$

Ravshanki,

$$u_1+u_3+u_5+...+u_{2n-1}=$$

$$=u_2+(u_4-u_2)+(u_6-u_4)+...+(u_{2n}-u_{2n-2})=u_{2n}.$$

3- xossa. *Juft raqamli dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlarining yig'indisi* ($u_{2n+1}-1$)*ga teng, ya'ni*

$$u_2+u_4+u_6+...+u_{2n}=u_{2n+1}-1.$$

Bu xossani isbotlash uchun, 1- xossaga ko'ra,

$$u_1+u_2+...+u_{2n}=u_{2n+2}-1$$

tenglik o'rinli ekanligini va 2-xossani hisobga olish kifoya:

$$u_2+u_4+u_6+...+u_{2n}=(u_1+u_2+u_3+...+u_{2n})-$$

$$-(u_1+u_3+u_5+...+u_{2n-1})=$$

$$=u_{2n+2}-1-u_{2n}=u_{2n+2}-u_{2n}-1=u_{2n+1}-1.$$

Yuqorida isbotlangan 1- va 2- xossalardan foydalanib, Fibonachchi sonlarining ishorasi almashuvchi qatori yig'indisi haqidagi quyidagi xossasini ham isbotlash mumkin.

4- xossa. *Dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlari uchun*

$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1$ *tenglik o'rinlidir.*

5- xossa. *Dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlari kvadratlarining yig'indisi* u_nu_{n+1}*ga teng, ya'ni*

$$u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=u_nu_{n+1}.$$

Haqiqatdan ham, Fibbonachi qatorining ta'rifiga ko'ra $u_1^2=u_1u_2$ bo'ladi va birdan katta ixtiyoriy natural n son uchun

$$u_n^2=u_nu_n=u_n(u_{n+1}-u_{n-1})=u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n$$

tenglik o'rinlidir. Shuning uchun

$$u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=u_1u_2+u_2u_3-u_1u_2+$$

$$+...+u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n=u_nu_{n+1}.$$

6- xossa. *Ixtiyoriy* u_n *Fibonachchi sonining kvadrati bilan* $u_{n-1}u_{n+1}$ *ko'paytma orasidagi farq birga teng, ya'ni*

$$u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}=(-1)^{n+1}.$$

Bu hossani matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz. Baza: $n=2$ uchun

$$u_2^2 - u_1u_3 = 1^2 - 1\cdot 2 = -1 = (-1)^{2+1}$$ – tasdiq to‘g‘ri.

Induksion o‘tish: bu xossa $n = k \geq 2$ uchun to‘g‘ri, ya’ni $u_k^2 - u_{k-1}u_{k+1} = (-1)^{k+1}$ yoki $u_k^2 = u_{k-1}u_{k+1} + (-1)^{k+1}$ bo‘lsin. Oxirgi tenglikning ikkala tomoniga u_ku_{k+1} ifodani qo‘shsak

$$u_k^2 + u_ku_{k+1} = u_{k-1}u_{k+1} + u_ku_{k+1} + (-1)^{k+1}$$

tenglik va bu tenglikdan

$$u_k(u_k + u_{k+1}) = u_{k+1}(u_{k-1} + u_k) + (-1)^{k+1}$$

kelib chiqadi. Fibonachchi qatorining aniqlanishidan foydalanib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$u_ku_{k+2} = u_{k+1}u_{k+1} + (-1)^{k+1},$$
$$-u_{k+1}^2 + u_ku_{k+2} = (-1)^{k+1}.$$

Oxirgi tenglikning ikkala tomonini (-1)ga ko‘paytirsak, $u_{k+1}^2 - u_{(k+1)-1}u_{(k+1)+1} = (-1)^{(k+1)+1}$ tenglik hosil bo‘ladi.

Matematik induksiya usulini qo‘llab $u_1, u_2, ...$ Fibonachchi sonlarining quyidagi 7–10- xossalarni ham isbotlash mumkin:

7- xossa. $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + ... + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$.

8- xossa. $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + ... + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$.

9- xossa. $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + ... + 2u_{n-1} + u_n =$
$= u_{n+4} - (n+3)$.

10- xossa. $u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n = nu_{n+2} - u_{n+3} + 2$.

Endi Fibonachchi sonlarining binomial koeffitsientlar (Paskal uchburchagi) bilan bog‘lanishini ifodalovchi xossani o‘rganamiz.

11- xossa. *Fibonachchi soni* u_n $(n \in \boldsymbol{N})$ *uchun* $u_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^k$ *tenglik o‘rinlidir.*

Bu xossani isbotlash uchun u_n $(n = 1, 2, ...)$ sonlardan tuzilgan $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ketma-ketlikning Fibonachchi qatori bo‘lishini ko‘rsatish kifoya. Buning uchun esa

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{1-1}{2}\right]} C_{1-k-1}^k = \sum_{k=0}^{0} C_{-k}^k = C_0^0 = 1,$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{2-1}{2}\right]} C_{2-k-1}^k = \sum_{k=0}^{0} C_{1-k}^k = C_1^0 = 1$$

ekanligini ta’kidlab, $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ketma-ketlik uchun $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ $(n \geq 2)$ rekurrent tenglikning bajarilishini ko‘rsatamiz.

Agar n juft son ($n = 2s$, $s \in \boldsymbol{N}$) bo‘lsa, u holda

$$u_{n+1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n-k}^{k}=\sum_{k=0}^{s}C_{n-k}^{k},$$

$$u_{n}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-k-1}^{k}=\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k-1}^{k},$$

$$u_{n-1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}C_{n-k-2}^{k}=\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k-2}^{k}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu tengliklardan foydalanib,

$$u_n+u_{n-1}=\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k-1}^{k}+\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k-2}^{k}=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k-1}^{k}+\sum_{p=1}^{s}C_{n-p-1}^{p-1}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k-1}^{k}+\sum_{p=1}^{s-1}C_{n-p-1}^{p-1}+C_{n-s-1}^{s-1}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{s-1}(C_{n-k-1}^{k}+C_{n-k-1}^{k-1})+C_{n-s-1}^{s-1}$$

munosobatlarni hosil qilamiz. Binomial koeffitsientlarning $C_{n-k-1}^{k}+C_{n-k-1}^{k-1}=C_{n-k}^{k}$ xossasiga binoan

$$u_n+u_{n-1}=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k}^{k}+C_{n-s-1}^{s-1}=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k}^{k}+C_{2s-s-1}^{s-1}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k}^{k}+C_{s-1}^{s-1}=C_{n-k}^{0}+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k}^{k}+C_{s}^{s}=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k}^{k}+C_{n-s}^{s}=\sum_{k=0}^{s}C_{n-k}^{k}=u_{n+1}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz.

n toq son bo‘lganda ham, yuqoridagidek mulohazalar yuritib, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ($n\geq 2$) tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatish mumkin. Demak, Fibonachchi qatorining ta’rifiga asosan, $u_1,u_2,...,u_n,...$ ketma-ketligi Fibonachchi qatoridir.

Yuqorida ta’kidlanganidek, $u_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-k-1}^{k}$ tenglik Fibonachchi sonlari bilan Paskal uchburchagi orasida bog‘lanishni ifodalayi. 1- shaklda tasvirlangan Paskal uchburchagidagi shtrixli chiziqlar bo‘ylab joylashgan sonlar yig‘indisi Fibonachchi sonlarini tashkil etadi.

12- xossa. *Fibonachchi soni* u_n $(n\in \mathbf{N})$ *uchun* $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ *tenglik o‘rinlidir.*

Bu xossani isbotlash maqsadida, avvalo, α haqiqiy son uchun $\alpha^2 = 1+\alpha$ tenglik o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilib, α^3, α^4, α^5, α^6 va hokazo darajalarni α orqali ifodalaymiz: $\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(1+\alpha) = 1+2\alpha$,

$$\alpha^4 = \alpha\alpha^3 = \alpha(1+2\alpha) = 2+3\alpha$$

$u_1=$
$u_2=$
$u_3=1+1$
$u_4=1+2$
$u_5=1+3+1$
$u_6=1+4+3$
$u_7=1+5+6+1$
$u_8=1+6+10+4$
$u_9=1+7+15+10+$

$n=0$ 1
$n=1$ 1 1
$n=2$ 1 2 1
$n=3$ 1 3 3 1
$n=4$ 1 4 6 4 1
$n=5$ 1 5 10 10 5 1
$n=6$ 1 6 15 20 15 6 1
$n=7$ 1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$ 1 8 28 56 70 56 28 8 1

1-

$$\alpha^5 = \alpha\alpha^4 = \alpha(2+3\alpha) = 3+5\alpha\,,$$

$$\alpha^6 = \alpha\alpha^5 = \alpha(3+5\alpha) = 5+8\alpha \text{ va hokazo.}$$

Bu ifodalardan ko‘rinib turibdiki, ulardagi ozod hadlar ham, α ning koeffitsientlari ham Fibonachchi sonlaridan iboratdir.

Matematik induksiya usulidan foydalanib, agar u_n Fibonachchi soni bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $n \geq 2$ natural sonlar uchun $\alpha^n = u_{n-1} + u_n\alpha$ formulaning to‘g‘riligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatdan ham, $n=2$ bo‘lganda $\alpha^2 = u_1 + u_2\alpha = 1+\alpha$ tenglikka ega bo‘lamiz, ya’ni baza bajarildi.

Induksion o‘tish: $n=k$ bo‘lgan hol uchun $\alpha^k = u_{k-1} + u_k\alpha$ formula to‘g‘ri bo‘lsin. U holda $n=k+1$ bo‘lganda quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\alpha^{k+1} = \alpha\alpha^k = \alpha(u_{k-1} + u_k\alpha) = u_{k-1}\alpha + u_k\alpha^2 =$$

$$= u_{k-1}\alpha + u_k(1+\alpha) = u_{k-1}\alpha + u_k + u_k\alpha =$$

$$= u_k + (u_{k-1} + u_k)\alpha = u_k + u_{k+1}\alpha\,.$$

Demak, $\alpha^{k+1} = u_k + u_{k+1}\alpha$.

Shunday qilib, $\alpha^2 = 1+\alpha$ va ixtiyoriy $n \geq 2$ natural sonlar uchun u_n Fibonachchi soni bo‘lsa, u holda $\alpha^n = u_{n-1} + u_n\alpha$ formula to‘g‘ri ekanligi isbotlandi. Endi $\alpha^2 = 1+\alpha$ tenglikni kvadrat tenglama sifatida qarab, uning biri musbat, ikkinchisi manfiy ikkita $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ va $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ildizlarini topamiz. $\alpha^n = u_{n-1} + u_n\alpha$ formulaga ko‘ra, $\begin{cases} \alpha_1^n = u_{n-1} + u_n\alpha_1, \\ \alpha_2^n = u_{n-1} + u_n\alpha_2. \end{cases}$

Bu tengliklarni u_{n-1} va u_n noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasi deb qaraymiz va uni hal qilib, 12- xossaning isbotiga ega bo‘lamiz.

Shunisi ajoyibki, 12- xossaga binoan, butun qiymatli u_n son irratsional sonlardan iborat bo‘lgan kvadrat ildizlar orqali ifodalanmoqda. 12- xossani ifodalovchi tenglik **Bine formulasi** deb yuritiladi.

Kesmani bo‘laklarga bo‘lishda **oltin kesim** tushunchasini eslaylik. Berilgan kesmaning oltin kesimi deb uni shunday ikki qismga ajratish tushuniladiki, bu yerda butun kesma uzunligining katta qism uzunligiga nisbati va katta qism uzunligining kichik qism uzunligiga nisbati o‘zaro tengdir. Bu nisbatning qiymati $\alpha_1$ga teng bo‘lishini aniqlash qiyin emas. “Oltin kesim” iborasining mazmuni shu bilan ham tasdiqlanadiki, masalan, tomonlari uzunliklarining nisbati $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ songa yaqin bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak inson ko‘ziga yoqimli bo‘lib ko‘rinishi qadim zamonlardayoq ma’lum bo‘lgan. Yana shunisi ham qiziqarliki, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = -\alpha_2$.

Hayratlanarlisi shuki, Fibonachchi sonlari tabiatning turli narsa

va hodisalarida kutilmaganda namoyon bo‘lishadi. Masalan, ular kungaboqarning urug‘lari joylashgan “savat”ida osonlik bilan sanab aniqlash mumkin bo‘lgan spirallar (aniqrog‘i spirallar yoylari) sonlari sifatida paydo bo‘ladi (2- shaklga qarang). Kungaboqarning urug‘lari joylashgan savatida logarifmik spirallarning ikki oilasini kuzatish mumkin. Bu oilalardan birining spirallari aylanishi soat millari yo‘nalishida, ikkinchisiniki esa teskari yo‘nalishda bo‘ladi.

Botanikada spirallar oilalarining bunday joylashishini **fillotaksis** deb atashadi. Oilalardagi spirallar sonlari Fibonachchi qatorida ketma-ket joylashgan ikkita Fibonachchi sonlaridan iborat bo‘lishadi. Ular kungaboqar savatining kattaligiga qarab 34 va 55, yoki 55 va 89, yoki 89 va 144 bo‘lgan Fibonachchi sonlari juftliklarini tashkil etishadi. Tabiatda, hattoki, spirallar sonlari 144 va 233 bo‘lgan ulkan kungaboqar savati ham uchraydi! Kungaboqar fillotaksisi va Fibonachchi sonlari orasidagi bu aloqani birinchi bo‘lib E. Lyuka e’lon qilgan edi.

1- misol. Elementlari 0 va 1 raqamlaridan iborat bo‘lib, ikkita 1 raqami yonma-yon joylashmydigan kortejlarni qaraymiz. Shunday tartibda tuziladigan n uzunlikka ega barcha kortejlar soni c_n Fibonachchi qatorining $(n+2)$- hadiga tengligini, ya’ni $c_n = u_{n+2}$ tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Buning uchun matematik induksiya usulidan foydalanaymiz. Matematik induksiya usulining bazasi sifatida $n=1$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda misol shartlarini qanoatlantiruvchi ikkita ($<0>$ va $<1>$) kortejlar tuzish mumkin, ya’ni $c_1=2$. Fibonachchi qatorining tuzilishiga asosan $n=1$ bo‘lgan hol uchun $u_{n+2}=u_{1+2}=u_3=2$. Demak, $n=1$ bo‘lganda $c_n=u_{n+2}$ tasdiq to‘g‘ri.

Induksion o‘tish: $n=k$ bo‘lganda misol shartlarini qanoatlantiruvchi kortejlar soni uchun isbotlanayotgan tenglik o‘rinli bo‘lsin, ya’ni $c_k=u_{k+2}$. Bu tenglikning $n=k+1$ uchun ham to‘g‘riligini ko‘rsatamiz. Ravshanki, uzunligi $n=k+1$ bo‘lgan barcha kortejlarni, tuzilishiga ko‘ra, ikki guruhga quyidagicha ajratish mumkin.

Birinchi guruhga talab qilingan shartlar asosida tuzilgan va uzunligi k ga teng kortejlarning har biriga o‘ng tomondan 0 raqamini joylashtirish usuli bilan hosil qilingan kortejlarni kiritamiz. Shuning uchun, birinchi guruhdagi kortejlar soni uzunligi k ga teng kortejlar soniga teng. Bu yerda induksiya farazini hisobga olsak birinchi guruhda u_{k+2} ta kortejlar bor degan xulosaga kelamiz.

Ikkinchi guruhga oxirgi elementi 1 raqamidan iborat bo‘lgan kortejlarni kiritamiz. Kortejlarni tuzishning misolda talab qilinayotgan shartiga ko‘ra ikkinchi guruhdagi har bir kortejda oxirgi 1 raqamidan oldin faqat 0 raqami joylashishi mumkinligi kelib chiqadi. Shuning uchun, ikkinchi guruhdagi kortejlarni uzunligi ($k-1$)ga teng bo‘lgan va talab qilingan shartlar asosida tuzilgan kortejlarning har biriga o‘ng tomondan 0, 1 raqamlarini (aynan shu tartibda) joylashtirib hosil qilish mumkin. Demak, induksion farazni hisobga olsak, ikkinchi guruhdagi kortejlar soni u_{k+1} bo‘ladi.

Shunday qilib, $k+1$ uzunlikka ega barcha kortejlar soni $c_{k+1}=u_{k+1}+u_{k+2}$. Fibonachchi qatorining aniqlanishiga ko‘ra, $u_{k+1}+u_{k+2}=u_{k+3}$. Bu yerdan $c_{k+1}=u_{k+3}=u_{(k+1)+2}$.

Ilova 3

Mustaqil ishlash uchun uyga vazifa savollari

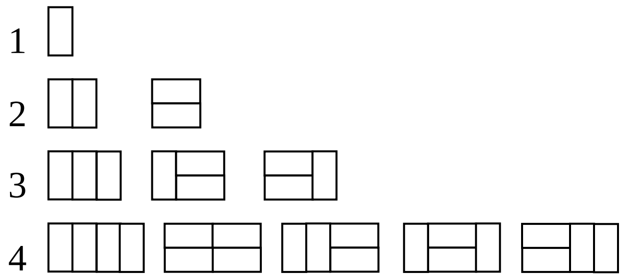
1. $u_1,u_2,...,u_n,...$ Fibonachchi sonlarining quyidagi xossalarini isbot qiling:

a) $u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}$; b) $u_{n+2}^2-u_{n+1}^2=u_nu_{n+3}$;

d) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}u_{n+1} & u_n\\ u_n & u_{n-1}\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$;

f) $u_{n+1}=\begin{vmatrix}1&1&0&\dots&0\\-1&1&1&\ddots&\vdots\\0&-1&1&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&-1&1\end{vmatrix}$, g) $u_{n+1}=\begin{vmatrix}1&i&0&\dots&0\\i&1&i&\ddots&\vdots\\0&i&1&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&i\\0&\cdots&0&i&1\end{vmatrix}$, bu yerda determinantning o‘lchovi $n\times n$, i – kompleks sonni ifodalashda ishlatiladigan mavhum birlik ($i=\sqrt{-1}$).

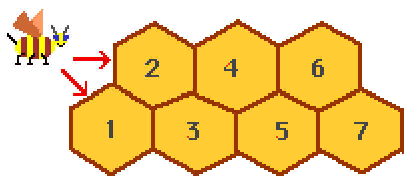
2. Qurilishda uzunligi enidan ikki baravar katta bo‘lgan g‘isht ko‘p qo‘llaniladi. Bunday g‘ishtlardan bir g‘isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari g‘ishtlar soni 1, 2, 3 va 4 bo‘lgan hollar uchun 5- shaklda keltirilgan. n ta



5- shakl

g‘ishtlardan bir g‘isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari sonini aniqlang.

3. Xonada o‘tirishga mo‘ljallangan n ta o‘rin bor. Bu o‘rinlarda o‘tirishi kerak bo‘lgan kishilarni ikki guruhga ajratish mumkin: do‘stlar (1) va dushmanlar (0). Agar $n=1$ bo‘lsa, u holda bitta o‘ringa bir kishini o‘tqazish imkoniyatlari soni ikkiga tengligi ravshan (bu o‘ringa yo do‘stlar yo dushmanlar guruhiga tegishli bir kishi o‘tiradi). n nafar kishini hech qaysi ikki dushman yonma-yon o‘tirmaslik sharti bilan o‘rinlarga o‘tqazish imkoniyatlari sonini aniqlang.



Asalari 1 yoki 2 raqamli xonachadan harakatlanishni boshlagan bo‘lsin Asalari faqat o‘ng tomondagi qo‘shni xonachaga o‘tishi mumkin bo‘lsa, uning n raqamli xonachaga kelishi imkoniyatlari sonini aniqlang

5- MA’RUZA
Bo’laklashlar kombinatorikasi

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1.Bo‘laklashlar ta’rifi 2. Qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olingan bo’laklashlar 3. Qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olinmagan bo’laklashlar
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda turli jarayonlarni bo‘laklashlar ta’rifi, qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olinganva olinmagan bo’laklashlar foydalanish haqida bilim va ko’nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - bo‘laklashlar ta’rifi, qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olingan va olinmagan bo’laklashlar foydalana oladilar; - Mustaqil tarzda bo‘laklashlar kombinatorikasi, qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olingan va olinmagan bo’laklashlar foydalanib,masalalar yecha olish.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: Qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olingan va olinmagan holda bo’laklashlar sonini topish algaritmini kiltira olishni baholash.

Jarayonlarni modellashtirishda impulsning saqlanish qonunidan foydalanish mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida	Tinglaydilar, yozib oladilar

kirish (10 daqiqa)	borishini ma’lum qiladi.	
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalarning bo‘laklashlar ta’rifi, qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olingan va olinmagan bo’laklashlar umumiy ma’lumotlar borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida bo‘laklashlar ta’rifi, qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olingan va olinmagan bo’laklashlar foydalanish haqidagi bilim va ko’nikmalarini chuqurlashtirib, bo‘laklashlar ta’rifi, qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olingan va olinmagan bo’laklashlar foydalanib, har xil masalalar tuzishni tashkillashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarning ba’zi paydo bo’lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o’zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo’ladi va ularga bo‘laklashlar ta’rifi, 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma’lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko’chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadi-lar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Bo‘laklashlar ta’rifi keltiring?
2. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olingan bo’laklashlar qanday hosil qilinadi?
3. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan bo’laklashlar qanday hosil qilinadi?
4. Bo’laklashlar kombinatorikasi qanday masalalarda qullaniladi?

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olingan jami bo’laklashlar soni qanday topiladi?
2. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan jami bo’laklashlar soni qanday topiladi?
3. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olingan jami bo’laklashlar sonini hosil qilish uchun qanday usuldan foydalaniladi?
4. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan jami bo’laklashlar sonini hosil qilish uchun qanday usuldan foydalaniladi?

Asosiy qism

1. Bo‘laklashlar ta’rifi. Kombinatorikada o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va gruppalashlar tushunchalari yordamida yechiladigan masalalar bilan bir qatorda bo‘laklashlarga doir masalalar ham qaraladi. Bunday masalalar turli vaziyatlarda paydo bo‘lishlari mumkin. Masalan, qutiga predmetlarni joylashda, axborotni uzatishda, pulni maydalashda, ko‘phad formulasidan foydalanish uchun daraja ko‘rsatkichini bo‘laklashda va hokazo.

Bo‘laklashlarga doir masalalar orasida natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo‘shiluvchilar yig‘indisi sifatida tasvirlash masalasi alohida o‘rin tutadi. Bu masalaning mohiyati quyidagidan iborat.

Berilgan natural n sonni $a_1, a_2, ..., a_k$ natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalash imkoniyatlari qancha?

Bu masala turli shartlarda qaralishi mumkin. Masalan:

- qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinishi yoki olinmasligi mumkin;
- bo‘laklashlarda faqat juft yoki toq sondagi qo‘shiluvchilar qatnashish sharti qo‘yilishi mumkin;

- qo‘shiluvchilar bir-biridan farqli yoki ixtiyoriy deb hisoblanishi mumkin va hokazo.

Tabiiyki, bo‘laklashlarga doir kombinatorik masalalarni yechishda, bo‘laklanayotgan son o‘rniga undan kichikroq son(lar)ni bo‘laklash yoki qaralayotgan bo‘laklashni kamroq sondagi qo‘shiluvchilari bo‘lgan bo‘laklashga keltirish usuli qo‘llanilishi maqsadga muvofiqdir.

1- ta’rif. *Natural n sonni ixtiyoriy k ta (k – natural son, $k \le n$) $a_1, a_2, ..., a_k$ natural sonlar yig‘indisi, ya’ni $n = a_1 + a_2 + ... + a_k$ ko‘rinishda tasvirlashga n sonni k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklash (qisqacha, bo‘laklash) deb ataladi.*

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, bo‘laklash masalasini ikki vaziyatda, ya’ni qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan yoki olinmagan hollarda qarash mumkin. Kombinatorik nuqtai nazardan olganda ikkala hol ham qiziqarlidir.

Bo‘laklash masalasini, avvalo, qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda qaraymiz.

Bu holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini $B(n,k)$ bilan va shu sonning barcha bo‘laklanishlari sonini $B(n)$ bilan belgilasak, ravshanki, $B(n) = \sum_{k=1}^{n} B(n,k)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1- misol. Faqat bir yo‘nalishda harakatlanganda besh pog‘onali zinapoyani hatlab o‘tish imkoniyatlari sonini aniqlash talab etilgan bo‘lsin.

Tabiiyki, har bir qadamda faqat bittadan pog‘onani bosib o‘tib, zinapoyani 5 qadamda hatlab o‘tish mumkin. Bu harakatni 5 sonning $5 = 1+1+1+1+1$ ko‘rinishda bo‘laklanishi kabi ifodalab, $B(5,5) = 1$ ekanligini qayd etamiz. Zinapoyani 4 qadamda ham hatlab o‘tish mumkin, bu ishning $B(5,4) = 4$ imkoniyati bor: $5 = 2+1+1+1$, $5 = 1+2+1+1$, $5 = 1+1+2+1$ va $5 = 1+1+1+2$. Shu usulda davom etib, 3 qadam uchun $B(5,3) = 6$ ta – $5 = 3+1+1$, $5 = 1+3+1$, $5 = 1+1+3$, $5 = 2+2+1$, $5 = 2+1+2$, $5 = 1+2+2$ hamda 2 qadam uchun $B(5,2) = 4$ ta – $5 = 4+1$, $5 = 3+2$, $5 = 2+3$, $5 = 1+4$ tengliklarni yozamiz. Endi barcha pog‘onalarni bir qadamda hatlab o‘tishga $B(5,1) = 1$ imkoniyat va $5 = 5$ tenglik mos kelishini e’tiborga olsak, mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlarni bayon qilgan bo‘lamiz.

Shunday qilib, faqat bir yo‘nalishda harakatlanganda besh pog‘onali zinapoyani hatlab o‘tish imkoniyatlari soni

$$B(5) = B(5,1) + B(5,2) + B(5,3) + B(5,4) + B(5,5) = 16$$

bo‘ladi.

Endi $B(n,k)$ va $B(n)$ miqdorlarni hisoblash formulalarini topish bilan shug‘ullanamiz.

Dastlab $n = 1$ bolgan holni qaraymiz. Tabiiyki, birni natural sonlar yig‘indisi qilib bo‘laklash haqida gap bo‘lishi mumkin emas. Shunday bo‘lishiga qaramasdan, birni faqat bitta qo‘shiluvchidan iborat deb qarab, yuqorida berilgan ta’rifga mos keluvchi $B(1,1)=1=C_0^0=C_{1-1}^0=C_{n-1}^0$ta bo‘laklashga ega bo‘lamiz. Jami bo‘laklashlar soni $B(1)=B(1,1)=C_{n-1}^0=2^{n-1}$ bo‘ladi.

$n=2$ bo‘lgan holda $k=1$ qo‘shiluvchili $B(2,1)=1=C_1^0=C_{2-1}^0=C_{n-1}^0$ta ($2=2$) va $k=2$ qo‘shiluvchili $B(2,2)=1=C_1^1=C_{2-1}^1=C_{n-1}^1$ta ($2=1+1$) bo‘laklashlarga ega bo‘lamiz. Bu hol uchun jami bo‘laklashlar soni

$$B(2)=B(2,1)+B(2,2)=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1=2^{n-1}.$$

Agar $n=3$ bo‘lsa, u holda $k=1$ qo‘shiluvchili $B(3,1)=1=C_2^0=C_{3-1}^0=C_{n-1}^0$ta ($3=3$), $k=2$ qo‘shiluvchili $B(3,2)=2=C_2^1=C_{3-1}^1=C_{n-1}^1$ta ($3=2+1=1+2$) va $k=3$ qo‘shiluvchili $B(3,3)=1=C_2^2=C_{3-1}^2=C_{n-1}^2$ta ($3=1+1+1$) bo‘laklashlar bor. Bu holda jami bo‘laklashlar soni uchun

$$B(3)=B(3,1)+B(3,2)+B(3,3)=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2=2^{n-1}$$

tenglik o‘rinlidir.

Shunday davom etib, “istalgan n natural sonning $k$ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni ($n-1$)ta elementdan ($k-1$)talab gruppalashlar soniga teng, ya’ni $B(n,k)=C_{n-1}^{k-1}$” degan farazga kelish mumkin. Agar bu faraz tasdiqlansa, binomial koeffitsientlarning yig‘indisi haqidagi xossasiga ko‘ra, $B(n)=\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i=2^{n-1}$ bo‘ladi.

1- teorema. *Qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda istalgan n natural sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni ($n-1$)ta elementdan ($k-1$)talab gruppalashlar soniga teng, ya’ni* $B(n,k)=C_{n-1}^{k-1}$.

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi. ■

Yuqorida bayon etilgan mulohazalar yordamida va 1- teoremaga tayangan holda isbotlash osonligini ta’kidlab, quyidagi teoremani boshqa usul bilan isbotlaymiz.

2- teorema. *Qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda ixtiyoriy n natural sonning barcha bo‘laklanishlari soni 2^{n-1}ga teng, ya’ni* $B(n)=2^{n-1}$.

Isboti. Natural n sonning barcha bo‘laklanishlari to‘plamini $S(n)$ deb, shu n sonning birinchi qo‘shiluvchisi $i$ga ($i=1,2,...,n$) teng bo‘lgan bo‘laklanishlari to‘plamini esa $S_i(n)$ bilan belgilaymiz. Tushunarliki, $S(n)=\bigcup_{i=1}^{n}S_i(n)$ bo‘ladi. Agar $S_i(n)$ to‘plam elementlari sonini $Q_i(n)$ deb belgilasak, yuqoridagi tenglikka asosan $B(n)=\sum_{i=1}^{n}Q_i(n)$ bo‘ladi. Endi $Q_i(n)=B(n-i)$ ($i=1,2,...,n-1$) va $Q_n(n)=1$ tengliklarni hisobga olib,

$$B(n)=\sum_{i=1}^{n-1}B(n-i)+1=1+\sum_{i=1}^{n-1}B(i)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglik ixtiyoriy n natural son uchun to‘g‘ri. Shuning uchun, bu tenglikdagi n ni ($n+1$)ga almashtirib,

$$B(n+1)=1+\sum_{i=1}^{n-1}B(i)+B(n)=B(n)+B(n)=2B(n),$$

ya’ni $B(n+1)=2B(n)$ ($n=1,2,...$) ko‘rinishdagi rekurrent munosabatni hosil qilamiz. Bu rekurrent munosabat ketma-ket qo‘llanilsa, $B(n)=2^{n-1}$ kelib chiqadi.

2- m i s o l. To‘qqiz qavatli binoning birinchi qavatidan sakkiz kishi liftda yuqoriga ko‘tarilayotgan bo‘lsin. Agar to‘qqizinchi qavatga liftdagi kishilarning faqat bittasi chiqishi shart bo‘lsa, lift yo‘lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari sonini aniqlang.

Masalaning shartiga binoan, liftdagi sakkiz kishidan faqat bir kishi to‘qqizinchi qavatga chiqishi shart bo‘lgani uchun, qolgan yetti kishining ikkinchi qavatdan sakkizinchi qavatgacha chiqishining ko‘p imkoniyatlari bor. Bu imkoniyatlar soni liftning birinchi va to‘qqizinchi qavatlar orasidagi to‘xtashlar sonidan bog‘liq bo‘lib, yettining barcha bo‘laklanishlari yordamida ifodalanishi mumkin. Masalan, lift binoning ikkinchi qavatidan sakkizinchi qavatigacha faqat bir marta to‘xtab, liftdagi yetti kishi tushib qolgan bo‘lsa, u holda bu hodisa $7=7$ ko‘rinishdagi bo‘laklash vositasida ifodalanadi; agar to‘qqizinchi qavatgacha lift ikki marta to‘xtab, oldin uch kishi, keyin to‘rt kishi tushib qolgan bo‘lsa, bu holatga $7=3+4$ ko‘rinishdagi bo‘laklash mos keladi va hokazo.

2- teoremadan foydalanib, yettining barcha bo‘laklanishlari soni $2^{7-1}=2^6=64$ ekanligini topamiz. Demak, agar to‘qqizinchi qavatga faqat bir kishi chiqishi shart bo‘lsa, u holda lift yo‘lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari soni 64ga tengdir. Agar hal qilingan masalada to‘qqizinchi qavatga faqat bir kishining chiqishi sharti bo‘lmasa edi, u holda sakkizning barcha bo‘laklanishlari sonini topishga to‘g‘ri kelar edi.

Endi natural sonlarni qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan vaziyatda bo‘laklash masalasi bilan shug‘ullanamiz.

Odatda, natural n sonning ixtiyoriy k ta (k – natural son, $k\le n$) $a_1,a_2,...,a_k$ qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishini qandaydir shartlarga, masalan, $a_1\ge a_2\ge...\ge a_k$ yoki $a_1\le a_2\le...\le a_k$ tengsizliklarga bo‘ysunadigan qilib olish qulay bo‘ladi.

Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini $R(n,k)$ bilan, uning barcha bo‘laklanishlari sonini esa $R(n)$ bilan belgilaymiz.

Bundan keyin, bo‘laklash deganda qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holdagi bo‘laklashni nazarda tutamiz.

Tabiiyki, quyidagi tenglik o‘rinlidir:

$$R(n)=\sum_{k=1}^{n}R(n,k).$$

Osonlik bilan ko‘rish mumkinki, $R(1)=1$, $R(2)=2$, $R(3)=3$, $R(4)=5$, $R(5)=7$, $R(6)=11$, $R(7)=15$.

3- m i s o l. 8 uchun barcha bo‘laklashlar 1- jadvalda ifodalangan. Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, 8 uchun, hammasi bo‘lib, 22 bo‘laklash imkoniyati bor:

$$R(8)=\sum_{k=1}^{8}R(8,k)=1+4+5+5+3+2+1+1=22.$$

Albatta, yuqorida keltirilgan formula yordamida ixtiyory natural n uchun uning barcha bo‘laklanishlari sonini aniqlash mumkin. Lekin n yetarlicha katta qiymatga ega bo‘lganda bu formuladan foydalanish juda ko‘p hisoblashlar bajarishni taqozo qiladi. Ushbu bobning navbatdagi 7- paragrafida $R(n)$ning qiymatini hisoblash uchun boshqacha yo‘l borligi ko‘rsatilgan.

1- jadval

Qo‘shi-luvchilar soni	Bo‘laklanishlar	Bo‘laklanishlar soni
1	8=8	$R(8,\ 1)=1$
2	8=7+1=6+2=5+3=4+4	$R(8,\ 2)=4$
3	8=6+1+1=5+2+1=4+3+1= =4+2+2=3+3+2	$R(8,\ 3)=5$
4	8=5+1+1+1=4+2+1+1=3+3+ 1+1= =3+2+2+1=2+2+2+2	$R(8,\ 4)=5$
5	8=4+1+1+1+1=3+2+1+1+1= =2+2+2+1+1	$R(8,\ 5)=3$
6	8=3+1+1+1+1+1=2+2+1+1+ 1+1	$R(8,\ 6)=2$
7	8=2+1+1+1+1+1+1	$R(8,\ 7)=1$
8	8=1+1+1+1+1+1+1+1	$R(8,\ 8)=1$

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$larning qiymatlarini aniqlang.

2. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda 9ning barcha bo‘laklanishlarini yozing va $R(9)$ ni hisoblang.
3. Bozorda dehqon 15 dona qovunni 7 nafar xaridorga donabay sotdi. Agar navbatdagi har bir savdoda dehqonning sotgan qovunlari soni oldingi savdodagiga qaraganda kamaymagan bo‘lsa, u holda barcha savdolarda sotilishi mumkin bo‘lgan qovunlar sonlarining barcha imkoniyatlarini toping. Odatda biror qarorni ko‘pchilik bo‘lib qabul qilish maqsadida ovoz berganda “tarafdor” va “qarshi” ovozlar sonlari o‘zaro teng bo‘lmasligi uchun a’zolari 3 nafardan kam bo‘lmagan toq sondagi ekspertlar komissiyasi tuziladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi 17 nafar ekspertlardan tashkil qilinishi mumkin bo‘lgan komissiyalar sonini hisoblang.
6. Kichik bir qishloqda hammasi bo‘lib 22 bosh qora mol bor va har bir oilada hech bo‘lmasa bir bosh qora mol topiladi. Bu qishloqning hech qaysi oilasida uch boshdan ko‘p qora mol bo‘lmasa, qishloqdagi qora mollarning oilalar orasida taqsimlanishining barcha variantlarini aniqlang.

6- MA’RUZA
Bo’laklashlar kombinatorikasi

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Ferrers diagrammas 2. Bo’laklashlarning xossalari
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda turli jarayonlarni ferrers diagrammas, bo’laklashlarning xossalaridan foydalanish haqida bilim va ko’nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - Ferrers diagrammas, bo’laklashlarning xossalari foydalana oladilar; - Mustaqil tarzda ferrers diagrammas, bo’laklashlarning xossalari foydalana oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: ferres diagrammasini hosil qilishi va bo’laklashlarni xossalaridan foydalana olishni.

Bo’laklashlar kombinatorikasi mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar
	2.1. Talabalarning ferrers diagrammas, bo’laklashlarning xossalari haqida umumiy ma’lumotlar borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova).	Savollarga javob beradilar

2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida ferrers diagrammas, bo'laklashlarning xossalaridan foydalanish haqidagi bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirib, ferrers diagrammas, bo'laklashlarning xossalaridan foydalanib, har xil masalalar uchun ferrers diagrammas, bo'laklashlarning tashkillashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarning modelini tahlil qiladi, ularda ba'zi paydo bo'lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o'zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo'ladi va ularga ferrers diagrammas, bo'laklashlarning xossalaridan foydalanish bo'yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma'lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma'lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko'chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadi-lar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Ferrers diagrammas ta'rifini kiltiring?
2. Diagrammali usul nima?
3. Normal ferrers diagrammasi deb nima aytiladi?
4. Diagrammani transpozitsiyasi deb nimaga aytiladi

2. Qanday masalalarda modda og'irligining saqlanish qonunidan foydalanish mumkin?

3. Modda og'irligining saqlanish qonunidan foydalanishga biror misol keltiring.

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Qushma deagrammalar deb nimaga aytiladi?
2. Bo'laklashlar xossalarini kiltiring?
3. Tartibi e'tiborga olingan holda bo'laklashlar soni qanday topiladi
4. Tartibi e'tiborga olinmagan holda bo'laklashlar soni qanday topiladi

Asosiy qism

1. Ferrers diagrammasi. Natural n son k ta $a_1, a_2, ..., a_k$ natural qo'shiluvchilarnung yig'indisi qilib bo'laklangan bo'lsin.

1- ta'rif. *k ta qatordan tashkil topgan va (yuqoridan pastga qarab hisoblaganda) i - qatorida a_i ta nuqtaga ega bo'lgan diagramma n sonni k ta $a_1, a_2, ..., a_k$ natural qo'shiluvchilarnung yig'indisi qilib bo'laklashga mos Ferrers diagrammasi deb ataladi.*

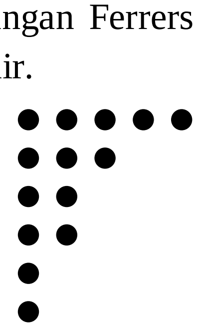
Ferrers diagrammasi tushunchasiga asoslangan diagrammali usul deb yuritiluvchi usul sonlarni qo'shiluvchilar yig'indisi qilib bo'laklash masalalarini tahlil qilishda keng qo'llaniladi.

Bo'laklashda qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmaganligi sababli Ferrers diagrammasini tuzishda, odatda, uning qatorlaridagi nuqtalar soni yuqoridan pastga qarab o'smaydigan, ya'ni $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k$ shart bajariladigan (yoki, kamaymaydigan ya'ni $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k$ shart bajariladigan) tartibga rioya qilinadi. Bundan tashqari, qatorlardagi nuqtalar diagrammaning vertikal ustunlarini tashkil etadigan qilib tuziladi.

2- ta'rif. *Shunday tartibda tuzilgan diagramma normal Ferrers diagrammasi deb ataladi.*

1- misol. 14=5+3+2+2+1+1 bo'laklashga 1- shaklda tasvirlangan Ferrers diagrammasi mos keladi. Bu diagramma normal Ferrers diagrammasidir.

Ixtiyoriy bo'laklashga mos keluvchi normal Ferrers diagrammasining qatorlarini ustun, ustunlarini esa qator qilib o'zgartirilsa (ya'ni diagramma trasponirlansa), tabiiyki, yana normal Ferrers diagrammasi hosil bo'ladi.



1- shakl

3- ta'rif. *Bu hosil bo'lgan diagrammaga dastlabki diagrammaning transpozitsiyasi (yoki ikkilanma diagrammasi) deb ataladi.*

Normal Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi natijasida hosil bo‘lgan ikkilanma diagramma transponirlansa dastlabki diagramma hosil bo‘lisi ravshandir. Demak, istalgan son uchun tuzilgan barcha diagrammalarni o‘zaro ikkilanma bo‘lgan diagrammalar juftlariga ajratish mumkin. Shuni e’tiborga olish kerakki, ba’zi diagrammalar o‘z-o‘ziga ikkilanma bo‘ladi, shuning uchun ular ikkita bir xil diagrammalar juftini tashkil etadi deb hisoblash mumkin.

Ikkilanma diagrammalarni qo‘shma diagrammalar deb, ularga mos keluvchi bo‘laklashlarni esa qo‘shma bo‘laklashlar deb ham ataydilar.

2. Bo‘laklashlarning xossalari. Quyidagi uchta 1–3- teoremalar bo‘laklashlarning ba’zi xossalarini ifodalaydi.

1- teorema. *Ixtiyoriy n natural sonning har xil natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni shu sonning toq qo‘shiluvchlarga bo‘laklanishlari soniga teng.*

Isboti. n natural sonning $b_1, b_2, ..., b_p$ toq qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlaridan ixtiyoriy birini qaraymiz:

$$n = \underbrace{b_1 + b_1 + ... + b_1}_{r_1} + \underbrace{b_2 + b_2 + ... + b_2}_{r_2} + ... + \underbrace{b_p + b_p + ... + b_p}_{r_p},$$

bu yerda har bir b_i $(i = \overline{1, p})$ qo‘shiluvchi bo‘laklanishda r_i $(1 \le r_i \le n)$ marta qatnashadi. r_i sonning ikkilik sanoq sistemasidagi $r_i = 2^{q_{i1}} + 2^{q_{i2}} + ... + 2^{q_{is}}$ tasvirlanishini yozamiz, bunda $q_{i1} > q_{i2} > ... > q_{is} \ge 0$ qandaydir (s ta) butun sonlar.

Qaralayotgan n sonning yuqoridagi bo‘laklanishida r_i ta b_i qo‘shiluvchilarni bir-biridan farqli $b_i 2^{q_{i1}}, b_i 2^{q_{i2}}, ..., b_i 2^{q_{is}}$ qo‘shiluvchilarga almashtiramiz. Tabiiyki, bunday almashtirish r_i ta b_i qo‘shiluvchilar yig‘indisining qiymatini o‘zgartirmaydi. Shu jarayonni barcha $i = 1, 2, ..., p$ qiymatlar uchun takrorlab va qo‘shiluvchilarning mos qiymatlarini yozib, n sonning har xil qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlaridan birini hosil qilamiz, chunki b_i, b_j sonlarning toqligi tufayli $b_i 2^{q_l} \ne b_j 2^{q_j}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, n sonning toq qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlaridan har biriga shu sonning har xil qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlaridan biri mos kelishi isbotlandi. Bu tasdiqning teskarisini ham isbotlash mumkin.

2- teorema. *Ixtiyoriy n natural sonni k ta natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklashlar soni shu n sonning eng katta qo‘shiluvchisi k ga teng bo‘lgan bo‘laklanishlari soniga teng.*

2- jadval

8 sonining 3ta qo‘shiluvchili bo‘laklanishlari	8 sonining eng katta qo‘shiluvchisi 3ga teng bo‘laklanishlari
6+1+1	3+1+1+1+1+1
5+2+1	3+2+1+1+1
4+3+1	3+2+2+1
4+2+2	3+3+1+1
3+3+2	3+3+2

Isboti. Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi tushunchasi yordamida natural n sonning $k$ta natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari va shu sonining eng katta qo‘shiluvchisi $k$ga teng bo‘lgan bo‘laklanishlari orasida bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin. Bu bir qiymatli moslikka ko‘ra teoremaning nasdig‘i to‘g‘ridir.

3- teorema. *Ixtiyoriy n natural sonning hech bir qo‘shiluvchisi $k$dan oshmaydigan bo‘laklanishlari soni $(n+k)$ sonining $k$ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlar soniga teng.*

Isboti. Birinchidan, shuni ta’kidlash lozimki, Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi n sonning hech bir qo‘shiluvchisi $k$dan oshmaydigan bo‘laklanishlari bilan shu sonning $k$tadan oshmaydigan qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatadi. Bu bir qiymatli moslik asosida n sonning hech bir qo‘shiluvchisi $k$dan oshmaydigan barcha bo‘laklanishlari soni shu n sonning $k$tadan oshmaydigan qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soniga teng deb xulosa qilish mumkin.

Ikkinchi tomondan, n sonning $k$tadan oshmaydigan qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishiga mos Ferrers diagrammasi $n$ta nuqtadan tashkil topgan bo‘lib, ular $k$tadan oshmaydigan qatorlarda joylashgan bo‘ladi. Bunday diagrammalarning har biriga $k$ta nuqtadan tuzilgan ustunni chap tomondan joylashtirsak, $k$ta qatorga va $(n+k)$ta nuqtali diagrammaga ega bo‘lamiz. Aksincha, $(n+k)$ta nuqtali har bir Ferrers diagrammasidan $k$ta qatorga ega birinchi ustunni olib tashlasak, $n$ta nuqtadan tashkil topgan va qatorlari soni $k$tadan ko‘p bo‘lmagan diagrammani hosil qilamiz.

Ko‘rsatilgan bu ikki turdagi diagrammalar orasidagi o‘zaro bir qiymatli moslik n sonni qo‘shiluvchilari $k$tadan oshmaydigan bo‘laklashlar soni $R(n+k,k)$ ifodaga tengligini tasdiqlaydi.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$larning qiymatlarini aniqlang.
2. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda 9ning barcha bo‘laklanishlarini yozing va $R(9)$ ni hisoblang.
3. Bozorda dehqon 15 dona qovunni 7 nafar xaridorga donabay sotdi. Agar navbatdagi har bir savdoda dehqonning sotgan qovunlari soni oldingi savdodagiga qaraganda kamaymagan bo‘lsa, u holda barcha savdolarda sotilishi mumkin bo‘lgan qovunlar sonlarining barcha imkoniyatlarini toping. Odatda biror qarorni ko‘pchilik bo‘lib qabul qilish maqsadida ovoz berganda “tarafdor” va “qarshi” ovozlar sonlari o‘zaro teng bo‘lmasligi uchun a’zolari 3 nafardan kam bo‘lmagan toq sondagi ekspertlar komissiyasi tuziladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi 17 nafar ekspertlardan tashkil qilinishi mumkin bo‘lgan komissiyalar sonini hisoblang.
6. Kichik bir qishloqda hammasi bo‘lib 22 bosh qora mol bor va har bir oilada hech bo‘lmasa bir bosh qora mol topiladi. Bu qishloqning hech qaysi oilasida uch boshdan ko‘p qora mol bo‘lmasa, qishloqdagi qora mollarning oilalar orasida taqsimlanishining barcha variantlarini aniqlang.

7- MA'RUZA
Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari

Ma'ruza mashg'ulotida ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Muammoli ma'ruza
Ma'ruza rejasi/o'quv mashg'ulotining tuzilishi	1. Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich 2. Graflarga misollar
O'quv mashg'uloti maqsadi:	Talabalarda graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar, grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich foydalanish haqida bilim va ko'nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko'rsatadi.	O'quv faoliyati natijalari: - graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar, grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ichdan foydalana oladilar; - Mustaqil tarzda graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ichdan foydalana oladilar.
Ta'lim usullari	Ma'ruza, aqliy hujum, klaster
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta'lim berish sharoiti	Ma'ruza uchun ajratilgan katta yorug' auditoriya, jamoaviy ta'lim olishga mo'ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, koseptual jadval Yozma so'rov: graflar orgraflar graflarni uchlari qirralari haqida misollar kiltira olishini.

Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari mavzusi bo'yicha o'quv mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta'lim beruvchi	ta'lim oluvchilar
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg'ulot axborotli ma'ruza shaklida borishini ma'lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar

(10 daqiqa)		
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalarning graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar, grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liqda umumiy ma'lumotlar borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlardan foydalanish haqidagi bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirib, graflarda qo'shni uchlar va yakkalangan uchlar foydalanib, har xil masalalar uchun qullashni tashkillashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarning graflar nazariyasi haqida ularda ba'zi paydo bo'lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o'zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo'ladi va ularga graflar nazariyasi bo'yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma'lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma'lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko'chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadi-lar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Graf haqida tushuncha bering?

2. Orgraf nima?
3. Graflarda qo'shni uchlar va yakkalangan uchlar haqida tushuncha bering?
4. Graflarda karrali qirralar haqida tushuncha bering?
5. Multigraf pisivdagraf novgraf deganda qanday graflarni tushunasiz?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Tula va elgilangan graflar haqida ma'lumotlar bering?
2. Qanday graflar ezomorf graflar deyiladi?
3. Grafning geometrik ifodalanishi misollarda tushuntiring?
4. Uchlar, qirralar va yoylar insidintligi deganda nimani tushunasiz?

Asosiy qism

1. Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar. Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifi

ni va boshqa ba'zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin. Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $< v_1, v_2 >$ ko'rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz.

Graf deb shunday $< V, U >$ juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \varnothing$ va U – $< v_1, v_2 >$ ($v_1 \in V$, $v_2 \in V$) ko'rinishdagi juftliklar korteji bo'lib, $V \times V$ to'plamning elementlaridan tuzilgandir.

Bundan buyon grafni belgilashda $< V, U >$ yozuv o'rniga (V, U) yozuvdan foydalanamiz. Grafning tashkil etuvchilarini ko'rsatish muhim bo'lmasa, u holda uni lotin alifbosining bitta harfi, masalan, G bilan belgilaymiz.

$G = (V, U)$ graf berilgan bo'lsin. V to'plamning elementlariga G **grafning uchlari**, V to'plamning o'ziga esa, **graf uchlari to'plami** deyiladi.

Graflar nazariyasida “uch” iborasi o‘rniga, ba’zan, **tugun** yoki **nuqta** iborasi ham qo‘llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba’zi iboralari bo‘yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. Shuning uchun, bundan keyingi ta’riflarda, imkoniyat boricha, muqobil (alternativ) iboralarni ham keltirishga harakat qilamiz.

$G=(V,U)$ grafning ta’rifiga ko‘ra, U bo‘sh kortej bo‘lishi ham mumkin. Agar U bo‘sh bo‘lmasa, u holda bu kortej (a,b) ($a\in V$, $b\in V$) ko‘rinishdagi juftliklardan tashkil topadi, bunda $a=b$ bo‘lishi hamda ixtiyoriy (a,b) juftlik U kortejda istalgancha marta qatnashishi mumkin.

$(a,b)\in U$ juftlikni tashkil etuvchi a va b uchlarning joylashish tartibidan bog‘liq holda, ya’ni yo‘nalishning borligi yoki yo‘qligiga qarab, uni turlicha atash mumkin. Agar (a,b) juftlik uchun uni tashkil etuvchilarning joylashish tartibi ahamiyatsiz, ya’ni $(a,b)=(b,a)$ bo‘lsa, (a,b) juftlikka **yo‘naltirilmagan** (**oriyentirlanmagan**) **qirra** (yoki, qisqacha, **qirra**) deyiladi. Agar bu tartib muhim, ya’ni $(a,b)\neq(b,a)$ bo‘lsa, u holda (a,b) juftlikka **yoy** yoki **yo‘naltirilgan** (**oriyentirlangan**) **qirra** deyiladi.

U kortejning tarkibiga qarab, uni yo **grafning qirralari korteji**, yo **yoylari korteji**, yoki **qirralari va yoylari korteji** deb ataymiz.

Grafning uchlari va qirralari (yoylari) uning **elementlari** deb ataladi. $G=(V,U)$ graf elementlarining soni ($|V|+|U|$)ga tengdir, bu yerda G grafning uchlari soni $|V|\neq 0$ va $|U|$ bilan uning qirralari (yoylari) soni belgilangan.

Grafning qirrasi (yoyi), odatda, uni tashkil etuvchi uchlar yordamida (a,b), yoki ab, yoki $(a;b)$ ko‘rinishda belgilanadi. Boshqa belgilashlar ham ishlatiladi: masalan, yoy uchun $(\overrightarrow{a,b})$ yoki $(\overleftarrow{a,b})$, qirra uchun $(\overleftrightarrow{a,b})$, yoy yoki qirra uchun u (ya’ni uchlari ko‘rsatilmasdan bitta harf vositasida) ko‘rinishda.

Graf yoyi uchun uning chetki uchlarini ko‘rsatish tartibi muhim ekanligini ta’kidlaymiz, ya’ni (a,b) va (b,a) yozuvlar bir-biridan farq qiluvchi yoylarni ifodalaydi. Agar yoy (a,b) ko‘rinishda ifodalangan bo‘lsa, u holda a uning

boshlang‘ich uchi, b esa **oxirgi uchi** deb ataladi. Bundan tashqari, yoy (a,b) ko‘rinishda yozilsa, u haqida a **uchdan chiquvchi** (**boshlanuvchi**) va b **uchga kiruvchi** (**uchda tugovchi**) yoy deb aytish ham odat tusiga kirgan.

Qirra uchun uning (a,b) yozuvidagi harflar joylashish tartibi muhim rol o‘ynamaydi va a va b elementlar **qirraning uchlari** yoki **chetlari** deb ataladi.

Agar grafda yo (a,b) qirra, yo (a,b) yoy, yoki (b,a) yoy topillsa, u holda a **va** b **uchlar tutashtirilgan** deyiladi. Agar grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo‘lsa, u holda ular **qo‘shni uchlar** deb, aks holda esa, **qo‘shni bo‘lmagan uchlar** deb aytiladi.

Grafning ikkita uchi qo‘shni bo‘lsa, ular shu uchlarni tutashtiruvchi **qirraga** (**yoyga**) **insident**, o‘z navbatida, qirra yoki yoy bu **uchlarga insident** deyiladi.

Grafda ikkita qirra (yoy) umumiy chetga ega bo‘lsa, ular **qo‘shni qirralar** (**yoylar**) deyiladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, qo‘shnilik tushunchasi grafning bir jinsli, insidentlik tushunchasi esa uning turli jinsli elementlari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

Ba’zan graf undagi elementlar soniga qarab, ya’ni **uchlar soni** m va **qirralar** (**yoylar**) **soni** $n$ga qarab belgilanadi va bu holda grafni (m,n)**-graf** deb ataydilar.

Agar $G=(V,U)$ grafda U kortej faqat qirralardan iborat bo‘lsa, u holda **yo‘naltirilmagan** (**oriyentirlanmagan**) va faqat yo‘naltirilgan (oriyentirlangan) qirralardan (ya’ni, yoylardan) tashkil topgan bo‘lsa, u holda u **yo‘naltirilgan** (**oriyentirlangan**) **graf** deb ataladi. Oriyentirlangan graf, qisqacha, **orgraf** deb ham ataladi.

Qator hollarda oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham bo‘lgan graflar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bunday graflar **aralash graflar** deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ grafning (orgrafning) U korteji tarkibida $V\times V$ to‘plamdan olingan takrorlanuvchi elementlar bo‘lsa, u holda ular **karrali** yoki **parallel**

qirralar (**yoylar**) deb ataladi. Karrali qirralari yoki yoylari bo‘lgan graf **multigraf** deyiladi.

Ikkala chetki (boshlang‘ich va oxirgi) uchlari ustma-ust tushgan qirra (yoy), ya’ni grafning $(a,a)\in U$ elementi **sirtmoq** deb ataladi. Sirtmoq, odatda, yo‘naltirilmagan deb hisoblanadi. Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo‘lgan graf **psevdograf** deyiladi.

Umumiy holda uchlar to‘plami V va (yoki) qirralar (yoylar, qirra va yoylar) korteji U cheksiz ko‘p elementli bo‘lishi mumkin. Bundan keyin V to‘plam va U kortej faqat chekli bo‘lgan $G=(V,U)$ graflarni qaraymiz. Bunday graflar **chekli graflar** deb ataladi.

Hech qanaqa qirra (yoy) bilan bog‘lanmagan uch **yakkalangan** (**ajralgan**, **xolis**, **yalong‘och**) **uch** deb ataladi.

Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan graf (ya’ni, grafda qirralar va yoylar bo‘lmasa) **nolgraf** yoki **bo‘sh graf** deb ataladi. Uchlari soni $m$ga teng bo‘lgan bo‘sh grafni O_m yoki N_m kabi belgilash qabul qilingan.

Istalgan ikkita uchlari qo‘shni bo‘lgan sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz oriyentirlanmagan graf **to‘la graf** deb ataladi. Uchlari soni $m$ga teng bo‘lgan to‘la graf K_m bilan belgilanadi. Ravshanki, K_m grafning qirralar soni $C_m^2=\frac{m(m-1)}{2}$ bo‘ladi.

Agar orgrafning istalgan ikkita uchini har bir yo‘nalishda tutashtiruvchi faqat bittadan yoy mavjud bo‘lsa, u holda unga **to‘la orgraf** deb ataladi. Ravshanki, to‘la grafdagi qirralarning har birini ikkita (yo‘nalishlari bir-biriga qarama-qarshi bo‘lgan) yoylarga almashtirilsa, natijada to‘la orgraf hosil bo‘ladi. Shuning uchun, to‘la orgrafdagi yoylar soni oriyentirlanmagan to‘la grafdagi qirralar sonidan ikki baravar ko‘pdir, ya’ni uchlari $m$ta bo‘lgan to‘la orgrafdagi yoylar soni $2C_m^2=m(m-1)$ bo‘ladi.

Agar grafning uchlariga qandaydir belgilar, masalan, $1,2,...,m$ sonlari mos qo‘yilgan bo‘lsa, u **belgilangan graf** deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflarning uchlari to‘plamlari, ya’ni V va V' to‘plamlar orasida uchlarning qo‘shnilik munosabatini saqlaydigan o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, u holda G va G' graflar **izomorf graflar** deb ataladi. Bu ta’rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin: agar $\forall x,y\in V$ va ularga mos bo‘lgan $x',y'\in V'$ ($x\leftrightarrow y$, $x'\leftrightarrow y'$) uchun $xy\leftrightarrow x'y'$ ($xy\in U$, $x'y'\in U'$) bo‘lsa, u holda G va G' graflar izomorfdir. Agar izomorf graflardan biri oriyentirlangan bo‘lsa, u holda ikkinchisi ham, albatta, oriyentirlangan bo‘lishi va ulardagi mos yoylarning yo‘nalishlari ham bir-birlariga mos bo‘lishlari shart.

Graf uchiga insident qirralar soni shu **uchning lokal darajasi**, yoki, qisqacha, **darajasi**, yoki **valentligi** deb ataladi. Grafdagi a uchning darajasini $\rho(a)$ bilan belgilaymiz.

Sirtmoqqa insident bo‘lgan uchning darajasini aniqlashda shuni e’tiborga olish kerakki, qaralayotgan masalaga bog‘liq holda sirtmoqni bitta qirra deb ham, ikkita qirra deb ham hisoblash mumkin. Ravshanki, ajralgan uchning darajasi nolga teng. Darajasi birga teng uch **chetki** (yoki **osilgan**) **uch** deb ataladi. Chetki (osilgan) uchga insident qirra ham **chetki** (yoki **osilgan**) **qirra** deb ataladi.

Agar grafning barcha uchlari bir xil r darajaga ega bo‘lsa, u holda bunday graf r **darajali regulyar graf** deb ataladi. Uch darajali regulyar graf **kubik** (yoki **uch valentli**) **graf** deb ataladi. O_m graf nol darajali regulyar graf ekanligini, K_m esa ($m-1$) darajali regulyar graf ekanligini ta’kidlaymiz.

Ko‘rinib turibdiki, oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalarining yig‘indisi qirralar sonining ikki baravariga teng juft son bo‘ladi, chunki qirralarni sanaganda har bir qirra hisobda ikki marta qatnashadi. Shunday qilib, XVIII asrdayoq L. Eyler tomonidan isbotlangan quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

1- lemma (“ko‘rishishlar” haqida). *Ixtiyoriy oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalari yig‘indisi qirralar sonining ikki baravariga teng.*

Agar grafning uchlar to‘plamini o‘zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to‘plamlarga (bo‘laklarga) ajratish mumkin bo‘lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to‘plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to‘plamdan olingan biror uch bilan tutashtiradigan bo‘lsa, u holda bunday graf **ikki bo‘lakli graf** (**bixromatik** yoki **Kyonig grafi**) deb ataladi. Ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, ikki bo‘lakli grafning har bir bo‘lagidagi ixtiyoriy ikkita uchlar qo‘shni bo‘la olmaydi. Biror bo‘lagida faqat bitta uch bo‘lgan to‘la ikki bo‘lakli graf **yulduz** deb ataladi.

Agar ikki bo‘lakli grafning turli bo‘laklariga tegishli istalgan ikkita uchi qo‘shni bo‘lsa, u holda bu graf **to‘la ikki bo‘lakli graf** deb ataladi. To‘la ikki bo‘lakli grafni $K_{m,n}$ bilan belgilaymiz, bu yerda m va n bilan grafning bo‘laklaridagi uchlar sonlari belgilangan. $K_{m,n}=(V,U)$ graf uchun $|V|=m+n$ va $|U|=mn$ bo‘lishi ravshan, bu yerda $|V|$ – $K_{m,n}$ grafning uchlari soni, $|U|$ – uning qirralari soni.

Grafning ikki bo‘lakli graf bo‘lishi haqidagi ba’zi qo‘shimcha ma’lumotlar (Kyonig teoremasi) ushbu bobning 4- paragrafida keltirilgan.

Ikkidan katta ixtiyoriy natural k son uchun k **bo‘lakli graf** tushunchasini ham kiritish mumkin.

2. **Graflarga misollar**

1- misol. O‘zbekiston Respublikasi hududidagi aeroportlar to‘plamini V bilan, bu shaharlar orasida belgilangan vaqt mobaynida amalga oshirilayotgan samolyotlarning uchib qo‘nish hodisalari kortejini U bilan belgilaymiz. U holda (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu yerda grafning uchlariga aeroportlar, yoylariga esa samolyotlarning uchib qo‘nish hodisalari mos keladi. Tabiiyki, (V,U) grafda karrali yoylar bo‘lishi mumkin, agar, qandaydir sababga ko‘ra, samolyot uchgan aeroportga qaytib qo‘nsa, u holda bu hodisaga qaralayotgan grafdagi sirtmoq mos keladi.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Graf tushunchasini qo‘llash mumkin bo‘lgan amaliy misol keltiring va qaralayotgan grafni tahlil qiling.
2. To‘la graf bilan bog‘liq biror misol keltiring.
3. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma

masalani hal qilish uchun tuzilgan graf elementlarini tahlil qiling va bu masalaning mumkin qadar qisqa yechimini toping.

4. Ko‘rishishlar haqidagi lemmaning qo‘llanilishiga doir amaliy misol keltiring.
5. Kubik graf bilan bog‘liq amaliy misollar keltiring.
6. Qadimgi boshqotirma masala: biror idishdagi hajmi 12 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 8 va 5 birlik hajmli idishlar yordamida teng ikki qismga ajrating. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.

7. Qadimgi boshqotirma masala: yo‘lovchi daryodan bo‘ri, qo‘y va bir bog‘ pichanni olib o’tishi kerak, lekin u qayiqda o‘zi bilan faqat bitta narsani olib o‘tish imkoniyatiga ega. Agar sohilda bo‘ri va qo‘y birga qolsa bo‘ri qo‘yni, qo‘y va pichan birga qolganda esa, qo‘y pichanni yeb qo‘yadi. Yo‘lovchi narsalarni daryoning bir sohilidan ikkinchi sohiliga olib o’tishni ularning butunligini saqlagan holda amalga oshirishi kerak. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.
8. Barcha belgilangan (m,n)-graflar sonini aniqlang.
9. O‘zaro izomorf bo‘lmagan

   a) uchta, b) to‘rtta, d) beshta

   uchga ega barcha belgilangan $G=(V,U)$ graflar uchun V to‘plam va U kortejlarni aniqlang.
10. Shaxmat o‘yinida shaxmat donalarining taxtada joylashuvi va o‘yin navbati birgalikda vaziyatni tashkil etadi. Barcha vaziyatlar to‘plamini graf uchlari to‘plami deb qarasak, vaziyatlarning biridan boshqasiga mumkin bo‘lgan o‘tishlar (yurishlar) grafning qirralari yoki yoylariga mos keladi deb hisoblash mumkin. Shaxmat o‘yinining qoidalariga rioya qilgan holda yuqorida bayon qilingan grafning shaxmat o‘yinidagi dastlabki vaziyatni ham o‘z ichiga oluvchi qandaydir oltita vaziyatlariga mos uchlari va bu uchlarni bog‘lovchi qirra va yoylarini aniqlang.

8- MA’RUZA
Graflarning berilish usullari

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Grafning geometrik ifodalanishi. 2. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi.
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda grafning geometrik ifodalanishi va grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishidan foydalanish haqida bilim va ko’nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - grafning geometrik ifodalanishi va grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi; - Mustaqil tarzda grafning geometrik ifodalanishi va grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi bajara oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: Grafning geometrik ifodalanishi va maxsus turdagi kuphad yordamida berilishini ifodalay olishini baholash.

Graflarning berilish usullari mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar

2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalarning grafning geometrik ifodalanishi va grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi umumiy ma’lumotlar borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida grafning geometrik ifodalanishi va grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishidan foydalanish haqidagi bilim va ko’nikmalarini chuqurlashtirib, grafning geometrik ifodalanishi va grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi foydalanib, har xil masalalar uchun modellar tuzishni tashkillashtiradi. Talabalar tomonidan o’zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo’ladi va ularga grafning geometrik ifodalanishi va grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishidan foydalanish bo’yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma’lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma’lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko’chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadi-lar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Grafning geometrik ifodalanishi nima uchun kerak?

2. Berilgan grafni geomitrik ifodalanishi aynan berxilmi?
3. Berilgan grafning uchlari va qirralari ayting?
4. Grafni maxsus kup had ko’rinishidagi shakli qanday?

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Turtta uchga va uchta qirraga ega bulgan karrali grafga misol keltiring?
2. Sirtmoqli grafgamisol keltiring?
3. Orgrafga misol keltiring?
4. Multigrafga misol keltiring?

Asosiy qism

1. Grafning geometrik ifodalanishi. Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta’rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta’rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalarini o‘rganish va bu xossalarni amalda qo‘llash jarayonida ba’zi qiyinchiliklar tug‘dirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya’ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi munkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga – **grafning ko‘rgazmali tasviriga** ega bo‘lamiz. Agar uchlar to‘plami va bu uchlarning tutashishlarini ko‘rgazmali qilib taqdim qilish kerak bo‘lsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qog‘ozda chizib grafni tasvirlash mumkin.

Shuni ta’kidlaymizki, ba’zi hollarda diagrammada graf uchlari doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning to‘g‘ri yoki egri bo‘lishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo‘lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo‘nalishga ega bo‘lsa (ya’ni u yoy bo‘lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo‘nalish biror usul bilan, masalan, strelka bilan ko‘rsatiladi.

Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mukinligi ravshan. Agar biror diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasa, bunday diagramma **grafning geometrik ifodalanishi** deyiladi. Shuni ta’kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

Graflar izomorfligining ta’rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqadiki, abstrakt ta’rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o‘zaro izomorf bo‘ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

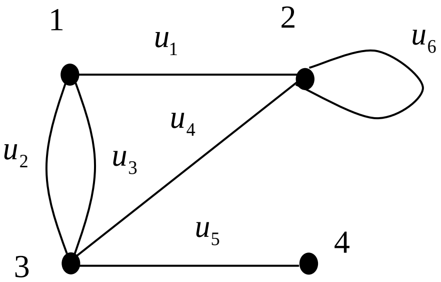
1- teorema. *Har qanday chekli grafni 3 o‘lchovli Evklid fazosida geometrik ifodalash mumkin.*

Isboti. Teoremaning quyidagi konstruktiv isbotini keltiramiz. Grafning abstrakt ta’rifiga binoan uning hech bo‘lmasa bitta uchi mavjud. Agar grafda faqat bitta uch bo‘lsa, u holda uni 3 o‘lchovli Evklid fazosining biror nuqtasi sifatida ifodalaymiz. Agar grafda uchlar bittadan ko‘p bo‘lsa, u holda ularni uch o‘lchovli Evklid fazosidagi biror to‘g‘ri chiziqning (hech qaysi ikkitasi ustma-ust tushmaydigan) nuqtalariga mos keladi deb hisoblaymiz. Shu to‘g‘ri chiziqdan qirralarning (yoylarning) har biriga mos keluvchi turli yarim tekisliklarni o‘tkazamiz (graf chekli bo‘lgani uchun buning imkoniyati bor). Har bir qirrani (yoyni) unga mos yarim tekislikda, chetlari mos uchlarni ifodalovchi nuqtalarda bo‘lgan hamda bu to‘g‘ri chiziq bilan boshqa umumiy nuqtasi bo‘lmagan qandaydir chiziq vositasida ifodalaymiz. Yarim tekisliklarning tuzilishiga ko‘ra bu chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega emas.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, 1- teoremadagi 3ni 2ga almashtirib bo‘lmaydi, chunki tekislikda qirralarini (yoylarini) ifodalovchi kesishmaydigan (aniqrog‘i, chetki nuqtalaridan boshqa umumiy nuqtalari bo‘lmagan) chiziqlar yordamida tasvirlash imkoniyati faqat ba’zi graflargagina xos, ya’ni har qanday grafning 2 o‘lchovli Evklid fazosida (tekislikda) geometrik ifodalanishi mavjud bo‘lavermaydi.

Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiramiz.

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni $G=(V,U)$ deb belgilaymiz. Berilgan G graf belgilangan graf bo‘lib, 4ta uch va 6ta qirraga ega. Demak, u (4,6)-grafdir. Bu graf uchun: $V=\{1,2,3,4\}$, $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$, $u_1=(1,\ 2)$, $u_2=u_3=(1,\ 3)$, $u_4=(2,\ 3)$, $u_5=(3,\ 4)$, $u_6=(2,2)$. G grafning barcha u_i $(i=\overline{1,6})$ qirralari oriyentirlanmagan (chunki uchlarini tutashtiruvchi chiziklarda yo‘nalish ko‘rsatilmagan) bo‘lgani uchun G oriyentirlanmagan grafdir. Grafning

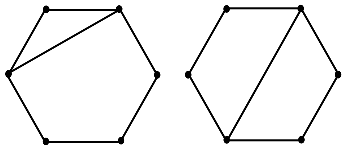


1-

qirralaridan biri, aniqrog‘i, u_6 sirtmoqdir, u_2 va u_3 esa karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo‘shni, 1 va 4 uchlar esa qo‘shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar u_4 qirraga insident va, aksincha, u_4 qirra 2 va 3 uchlarga insidentdir. Bu yerda u_4 va u_5 qirralar qo‘shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, u_1 va u_5 qirralar esa qo‘shni emas.

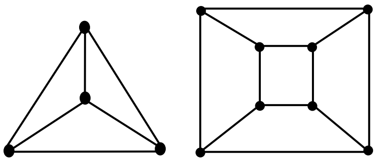
Petersen grafi deb ataluvchi 8- shaklda tasvirlangan graf ham kubik grafdir.

Agar graf tekislikda geometrik ifodalanishga ega bo‘lsa, u holda bunday graf **tekis** (**yassi**) **graf** deb ataladi. Bunday graf **tekislikda yotuvchi graf** deb ham atalishi mumkin.



6- shakl

Boshqacha so‘zlar bilan aytganda, tekis grafning barcha uchlari bir tekislikda yotadi hamda barcha qirralari (yoylari) o‘sha tekislikda yotuvchi o‘zaro kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar bo‘lib, ular faqat o‘zlari insident bo‘lgan uchlardagina umumiy nuqtalarga ega.



7- shakl

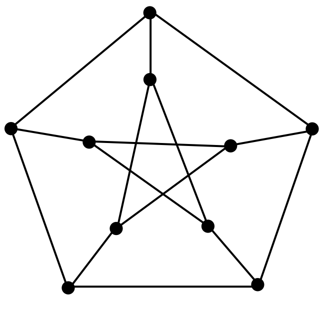
Platon jismlariga mos barcha graflar tekis graflardir.

Tekis grafga izomorf graf **planar graf** deb ataladi.

Tekis bo‘lmagan grafga ajoyib misol **uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga** mos grafdir. Uchta u_1, u_2, u_3 uylar va uchta q_1, q_2, q_3 quduqlar bor. Har bir uydan har bir quduqqa ixtiyoriy ikkitasi kesishmaydigan qilib uzluksiz yo‘lakchalar o‘tkazish mumkinmi?

Qog‘ozda masala shartini qanoatlantiradigan grafni chizishga urinishlar muvaffaqiyatsiz tugaydi. Shunday urinishlardan biri 9- shaklda keltirilgan.

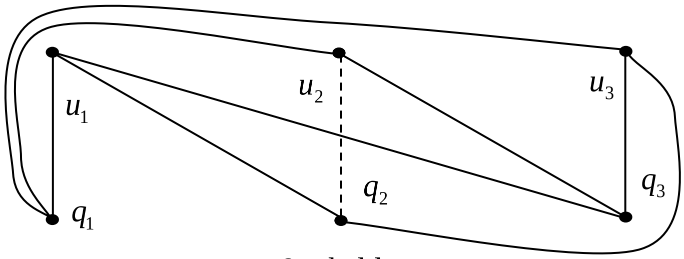
Darvoqe, uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga mos graf har bir bo‘lagida uchtadan uchi bo‘lgan ikki bo‘lakli to‘la grafga misol bo‘la oladi.



8- shakl

Tekis bo‘lmagan grafga yana bir misol beshta uchga ega bo‘lgan to‘la graf – K_5 grafdir. Bu grafning o‘nta qirralari borligi ravshan. Bu yerda ham K_5 grafni hech qaysi ikkita qirralari kesishmaydigan qilib tekislikda chizish muvaffaqiyatsiz tugaydi. 10- shaklda K_5 grafning to‘qqizta qirrasi kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar qilib chizilgan, lekin o‘ninchi chiziq esa uzilishlarga ega, unga tekislikda “joy yo‘q”!

2. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi. Grafni maxsus turdagi ko‘phad yordamida ham berish mumkinligini ta’kidlaymiz. Uchlari

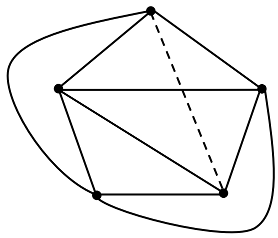


9- shakl

to‘plami $V=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ bo‘lgan G graf berilgan bo‘lsin. G grafning yakkalangan

uchlari yo‘q deb faraz qilamiz,. Bu grafni m ta $x_1,x_2,...,x_m$ o‘zgaruvchilarga bog‘liq

$$f(G)=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_m^{\sigma_m}\prod_{i<j}(x_j-x_i)^{\alpha_{ij}}$$



10- shakl

ko‘rinishdagi ko‘phad yordamida tasvirlash mumkin, bu yerda ko‘paytma $i<j$ shartni qanoatlantiruvchi barcha (i,j) juftlar bo‘yicha amalga oshiriladi, x_i o‘zgaruvchi $v_i\in V$ uchga mos keladi, α_{ij} – v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi qirralar soni, σ_i – v_i uchdagi sirtmoqlar soni.

$f(G)$ ko‘phad G grafga izomorflik aniqligida mos kelishini isbotlash mumkin.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Grafning abstrakt ta’rifi yordamida biror grafni ifodalang va unga izomorf grafni qog‘ozda tasvirlang.
2. Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiring.
3. Har qanday chekli grafni 3 o‘lchovli Evklid fazosida qirralariga to‘gri chiziq kesmalari mos keladigan qilib geometrik ifodalash mumkinligin isbotlang.
4. Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida mavjud yettita ko‘priklardan (3-shakl) tashqari shaharning B va C qismlarini bevosita tutashtiruvchi sakkizinchi ko‘prik ham bor deb hisoblab, bunday qo‘shimcha shartga ega Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos graf tuzing, uni geometrik ifodalang va tahlil qiling.
5. Uchlari va qirralari sonlari mos ravishda teng bo‘lib, o‘zaro izomorf bo‘lmagan graflarga misollar keltiring.
6. Barcha Platon jismlariga mos tekis graflarni geometrik ifodalang.

7. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikkita qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish maqsadida ushbu bobning 1- paragrafida tuzilgan grafni geometrik ifodalang.
8. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo‘lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor graflarni geometrik ifodalang, ularning har biriga mos maxsus ko‘phadlarni, uchlari qo‘shniligi, qirralari qo‘shniligi va insidentlik matritsalarni yozing.
9. 14- shaklda tasvirlangan G_1 va G_2 graflarning izomorfligini isbotlang.

9- MA'RUZA
Graflarning berilish usullari

Ma'ruza mashg'ulotida ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Muammoli ma'ruza
Ma'ruza rejasi/o'quv mashg'ulotining tuzilishi	1. Qo'shnilik matritsalari. 2. Insidentlik matritsalari.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	Talabalarda qo'shnilik matritsalari va insidentlik matritsalaridan foydalanish haqida bilim va ko'nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko'rsatadi.	O'quv faoliyati natijalari: - qo'shnilik matritsalari va insidentlik matritsalaridan foydalana oladilar; - Mustaqil qo'shnilik matritsalari va insidentlik matritsalaridan foydalanib, matematik modellar tuza oladilar.
Ta'lim usullari	Ma'ruza, aqliy hujum, klaster
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta'lim berish sharoiti	Ma'ruza uchun ajratilgan katta yorug' auditoriya, jamoaviy ta'lim olishga mo'ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, koseptual jadval Yozma so'rov: Qushnilik va insedintlik matritsasi tarifini keltirish va uni misollarda qullay olishini baholash.

Graflarning berilish usullari mavzusi bo'yicha o'quv mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta'lim beruvchi	ta'lim oluvchilar
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg'ulot axborotli ma'ruza shaklida borishini ma'lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar

2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalarning qo‘shnilik matritsalari va insidentlik matritsalaridan foydalanib, haqida umumiy ma’lumotlar borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida qo‘shnilik matritsalari va insidentlik matritsalaridan foydalanish haqidagi bilim va ko’nikmalarini chuqurlashtirib, ulardan foydalanib, har xil masalalar uchun namunali misollar tashkillashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarni tahlil qiladi, ularda ba’zi paydo bo’lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o’zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo’ladi va ularga qo‘shnilik matritsalari va insidentlik matritsalaridan foydalanish bo’yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma’lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma’lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko’chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadi-lar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Arintirlangan uchlar qushniligi matritsasi ta’rifini keltiring?
2. Arintirlangan qirralar qushniligi matritsasi ta’rifini keltiring?
3. Arintirlangan insidentlik matritsasini ta’rifini keltiring?

4. Arintirlangan graflarni geomitrik ifodalanishida nimalarga e'tibor beriladi?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi.

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Arintirlanmagan uchlar qushniligi matritsasi ta'rifini keltiring?
2. Arintirlanmagan qirralar qushniligi matritsasi ta'rifini keltiring?
3. Arintirlanmagan insidentlik matritsasini ta'rifini keltiring?
4. Arintirlanmagan graflarni geomitrik ifodalanishida nimalarga e'tibor beriladi?

Asosiy qism

1. Qo'shnilik matritsalari. Endi grafning boshqa bir berilish usuli negizida yotuvchi **graf uchlari qo'shniligi matritsasi** tushunchasini qarab chiqamiz.

$G=(V,U)$ – uchlari soni m ga teng bo'lgan belgilangan, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf bo'lsin.

Elementlari $$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ agar } i \text{ va } j \text{ uchlar qo'shni bo'lsa,}\\ 0, \text{ aks holda.}\end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,m; \quad j=1,2,...,m)$ matritsani grafning uchlari

qo'shniligi matritsasi deb ataymiz.

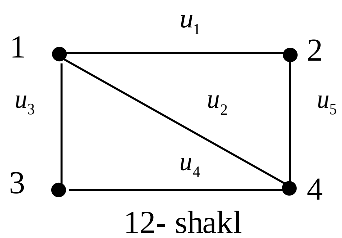
Bu ta'rifdan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan graf uchlari qo'shniligi matritsasining bosh diagonalida faqat nollar bo'lishi, satrlaridagi birlar soni esa mos uchlarning darajalariga tengligi kelib chiqadi.

1- misol. 12- shaklda tasvirlangan grafgning uchlari qo'shniligi matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$ ko'rinishda bo'ladi.

Uchlari soni m ga teng bo'lgan belgilangan **oriyentirlangan** $G=(V,U)$ **grafning uchlari qo'shniligi** $m\times m$ **-matritsasi** deb elementlari

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ agar } (i,j)\in U \text{ bo'lsa,}\\ 0, \text{ aks holda,}\end{cases}$$

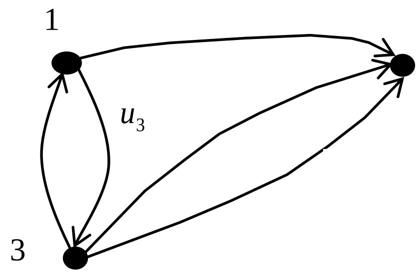


12- shakl

ko‘rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,...,m)$ matritsaga aytiladi.

1- teorema. *Graflar faqat va faqat uchlari qo‘shniligi matritsalari bir-birlaridan satrlarining o‘rinlarini va ustunlarining o‘rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo‘lsagina izomorf bo‘lishadi.*

Isboti. Abstrakt grafga, uning uchlarini belgilashga (raqamlashga) bog‘liq ravishda, turlicha qo‘shnilik matritsalari mos kelishi tabiiydir. Bu matritsalarni solishtirish maqsadida har birining m ta uchlari bo‘lgan ixtiyoriy ikkita belgilangan, o‘zaro izomorf G va H graflarni qaraymiz. G va H graflar uchlariga mos qo‘yilgan belgilar turlicha va ulardan biri boshqasidan uchlarning qo‘shniligini saqlovchi qandaydir f qoidani qo‘llab hosil qilingan bo‘lsin, ya’ni H grafdagi $f(u_i)$ va $f(u_j)$ uchlar faqat va faqat G grafning u_i va u_j uchlari qo‘shni bo‘lsagina qo‘shni bo‘lsin. G grafning uchlari qo‘shniligi matritsasini $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,...,m)$ bilan H grafning uchlari qo‘shniligi matritsasini esa $B=(b_{ij})$ $(i,j=1,2,...,m)$ bilan belgilasak, $b_{f(i)f(j)}=a_{ij}$ o‘rinli bo‘ladi.



13- shakl

Shunday qilib, manfiymas butun sonlardan tashkil topgan va graf uchun uchlari qo‘shniligi matritsasi bo‘lgan kvadrat matritsa bilan graf orasida bir qiymatli moslik (izomorflik aniqligida) bor degan xulosa va, bundan, graflar nazariyasi bo‘yicha izlanishlar maxsus shartlarni qanoatlantiruvchi matritsalarni tadqiq qilishga keltirilishi mumkinligi kelib chiqadi.

$u_1,u_2,...,u_n$ $(n\geq 1)$ qirralarga ega yakkalangan uchlari, sirtmoq va karrali qirralari bo‘lmagan graf uchun elementlari

$$c_{ij}=\begin{cases}1, \text{agar } u_i \text{ va } u_j \text{ qirralar umumiy uchga ega bo'lsa,}\\ 0, \text{agar } u_i=u_j \text{ bo'lsa yoki ularning umumiy uchi bo'lmasa,}\end{cases}$$

quyidagicha aniqlangan $C=(c_{ij})$ $(i=1,2,...,n,\ \ j=1,2,...,n)$ $n\times n$-matritsa **grafning qirralari qo‘shniligi matritsasi** deb ataladi.

2. Insidentlik matritsalari. Uchlari $1,2,...,m$ va qirralari $u_1,u_2,...,u_n$ $(n\geq 1)$ bo‘lgan belgilangan graf berilgan bo‘lsin. Bu grafning uchlariga satrlari, qirralariga esa ustunlari mos keluvchi va elementlari

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga insident bo'lsa,}\\ 0, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga intsident bo'lmasa,}\end{cases}$$

ko‘rinishda aniqlangan $B=(b_{ij})$ $(i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,...,n)$ matritsa grafning **insidentlik matritsasi** deb ataladi.

2- t e o r e m a . *Graflar* (*orgraflar*) *faqat va faqat insidentlik matritsalari bir-birlaridan satrlarining o'rinlarini va ustunlarining o'rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo'lsagina izomorf bo'lishadi.*

I s b o t i 2- teoremaning isbotiga o'xshash bajariladi.

Ilova 3

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar.

1. Grafning abstrakt ta'rifi yordamida biror grafni ifodalang va unga izomorf grafni qog'ozda tasvirlang.
2. Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiring.
3. Har qanday chekli grafni 3 o'lchovli Evklid fazosida qirralariga to'gri chiziq kesmalari mos keladigan qilib geometrik ifodalash mumkinligin isbotlang.
4. Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida mavjud yettita ko'priklardan (3-shakl) tashqari shaharning B va C qismlarini bevosita tutashtiruvchi sakkizinchi ko'prik ham bor deb hisoblab, bunday qo'shimcha shartga ega Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaga mos graf tuzing, uni geometrik ifodalang va tahlil qiling.
5. Uchlari va qirralari sonlari mos ravishda teng bo'lib, o'zaro izomorf bo'lmagan graflarga misollar keltiring.
6. Barcha Platon jismlariga mos tekis graflarni geometrik ifodalang.
7. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikkita qismga bo'lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish maqsadida ushbu bobning 1- paragrafida tuzilgan grafni geometrik ifodalang.
8. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo'lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor graflarni geometrik ifodalang, ularning har biriga mos maxsus ko'phadlarni, uchlari qo'shniligi, qirralari qo'shniligi va insidentlik matritsalarni yozing.
9. 14- shaklda tasvirlangan G_1 va G_2 graflarning izomorfligini isbotlang.
10. Uchlari qo'shniligi matritsalari quyida berilgan graflarni geometrik ifodalang, ularga mos maxsus ko'phad, qirralar qo'shniligi va insidentlik
11. matritsalarni yozing:
12. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10- MA’RUZA
Graflar ustida amallar

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Graflar ustida sodda amallar. 2. Graflarni birlashtirish. 3. Graflarni biriktirish. 4. Graflarni ko‘paytirish
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda graflar ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, graflarni biriktirish va graflarni ko‘paytirishdan foydalanish haqida bilim va ko’nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - graflar ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, graflarni biriktirish va graflarni ko‘paytirishdan foydalana oladilar; - Mustaqil tarzda graflar ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, graflarni biriktirish va graflarni ko‘paytirishdan foydalanib, misollar yecha oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: graflar ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, graflarni biriktirish va graflarni ko‘paytirishdan misollar yecha olishini baholash.

Graflar ustida amallar mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish	Faoliyat

bosqichlari va vaqti	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalarning graflar ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, graflarni biriktirish va graflarni ko‘paytirishdan haqida umumiy ma’lumotlar borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida graflar ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, graflarni biriktirish va graflarni ko‘paytirishdan foydalanish haqidagi bilim va ko’nikmalarini chuqurlashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarni tahlil qiladi, ularda ba’zi paydo bo’lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o’zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo’ladi va ularga graflar ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, graflarni biriktirish va graflarni ko‘paytirishdan foydalanish bo’yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma’lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma’lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko’chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadi-lar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga

		yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Graflar ustida qanday amallar bajarish mumkin?
2. Graflarni birlashtirish qanday amalga oshiriladi?
3. Graflarni biriktirish qanday amalga oshiriladi
4. Graflarni ko’paytirish qanday amalga oshiriladi

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Tuldiruvchi graf deb nimaga aytiladi?
2. Qism graf deb nimaga aytiladi?
3. Dizyunkt deb nimaga aytiladi?
4. N ulchovli ko’pning uchlari soni qanday aniqlanadi?

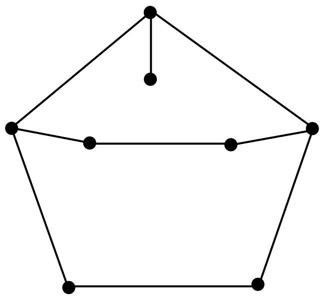
Asosiy qism

1. Graflar ustida sodda amallar. Graflar ustida turli amallar bajarish mumkin, masalan, graflarni birlashtirish, biriktirish, ko‘paytirish, grafni qismlarga ajratish va hokazo.

Eng sodda amallardan biri sifatida grafdan **uchni olib tashlash** amalini keltirsa bo‘ladi. Bu amalni qo‘llash berilgan grafning uchlari to‘plamidan birorta element yo‘qotishni (olib tashlashni) anglatadi. Natijada uchlari soni bittaga kamaygan yangi graf hosil bo‘ladi. Albatta, bu amalni uchlari soni ikkitadan kam bo‘lmagan graflar uchun qo‘llash mumkin bo‘lib, uni bajarish jarayonida olib tashlanayotgan uch bilan birgalikda shu uchga insident bo‘lgan barcha qirralar (yoylar) ham olib tashlanadi.

Eng sodda amallar qatoriga grafdan **qirrani** (**yoyni**) **olib tashlash** amalini ham kiritish mumkin. Bu amalga ko‘ra berilgan grafning qirralari (yoylari) to‘plamidan birorta element yo‘qotiladi (olib tashlanadi). Berilgan grafdan qirrani (yoyni) olib tashlayotganda shu qirraga (yoyga) insident uchlarni grafda qoldirish ham yo‘qotish ham mumkin. Bu yerda vaziyatga qarab ish yuritiladi.

$G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflar berilgan bo‘lsin. Agar $V\subseteq V'$ va G grafning barcha qirralari (yoylari) G' grafning ham qirralari (yoylari), ya’ni $U\subseteq U'$ bo‘lsa, u holda G graf G' grafning **qism grafi** deb ataladi.



1- shakl

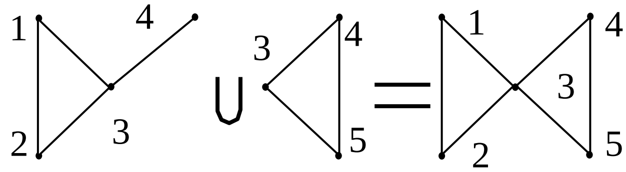
1- misol. 1- shaklda Petersen grafining (ushbu bobning 2- paragrafidagi 8- shaklga qarang) qism graflaridan biri tasvirlangan.

Agar G graf karrali qirralarga ega bo‘lmasa, u holda uchlari G grafning barcha uchlaridan iborat bo‘lgan shunday yagona $\overline{G}$ graf mavjudki, $\overline{G}$ grafdagi barcha juft uchlar faqat va faqat G grafda qo‘shni bo‘lmagandagina qo‘shnidir. Bunday $\overline{G}$ graf berilgan G grafning **to‘ldiruvchi grafi** deb ataladi.

Berilgan graf uchun to‘ldiruvchi grafni qurish jarayonini ham graflar ustida bajariladigan amallar qatoriga kiritish mumkin. G graf uchun **to‘ldiruvchi grafni qurish** amalini qo‘llash natijasida $\overline{G}$ graf hosil bo‘ladi. Isbotlash mumkinki, $\overline{\overline{G}}=G$ munosabat o‘rinlidir.

2. Graflarni birlashtirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. Uchlari to‘plami $V=V_1\cup V_2$ va qirralari (yoylari) korteji $U=U_1\cup U_2$ kabi aniqlangan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning birlashmasi** (**uyushmasi**) deb ataladi va $G=G_1\cup G_2$ ko‘rinishda belgilanadi.

3. Graflarni biriktirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. G_1 va G_2 graflar birlashtirilishi hamda G_1 grafning har bir uchi G_2 grafning har bir uchi bilan qirra vositasida tutashtirilishi natijasida hosil bo‘lgan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning birikmasi** (**tutashmasi**) deb ataladi va $G=G_1+G_2$ ko‘rinishda belgilanadi.



6- shakl

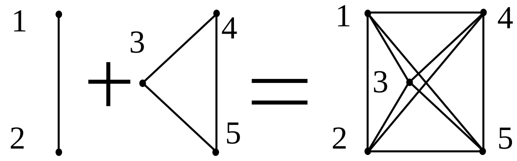
4. Graflarni ko‘paytirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. Uchlari to‘plami $V=V_1\times V_2$ bo‘lgan $G=(V,U)$ grafning qirralari (yoylari) kortejini quyidagicha aniqlaymiz: agar $v_1'=v_1''$ va $(v_2',v_2'')\in U_2$ yoki $v_2'=v_2''$ va $(v_1',v_1'')\in U_1$ bo‘lsa, u holda $(v',v'')\in U$ bo‘ladi, bu yerda $v_1',v_1''\in V_1$, $v_2',v_2''\in V_2$, $v'=(v_1',v_2')\in V$ va $v''=(v_1'',v_2'')\in V$. Shunday usul bilan hosol qurilgan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning ko‘paytmasi** deb ataladi va $G=G_1\times G_2$ kabi belgilanadi.

Graflarning ko‘paytmasi ta’rifiga asosan berilgan $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflarning ko‘paytmasi hisoblangan G grafdagi:

– uchlar (v_1,v_2) yoki (v_2,v_1) ko‘rinishdagi juftliklardan iboratdir, bu yerda $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$;

– $v'=(v_1',v_2')\in V$ va $v''=(v_1'',v_2'')\in V$ uchlar faqat va faqat shu holda qo‘shni bo‘ladilarki, qachonki bu uchlarni (juftliklarni) tashkil qiluvchi elementlarning biri unga mos element bilan ustma-ust tushgan holda boshqa elementlar o‘z grafida qo‘shni bo‘lishsa, bu yerda $v_1',v_1''\in V_1$, $v_2',v_2''\in V_2$;

– $|V_1|=m_1$, $|V_2|=m_2$, $|U_1|=n_1$ va $|U_2|=n_2$ munosabatlardan $|V|=m_1m_2$ va $|U|=m_1n_2+m_2n_1$ bo‘lishi kelib chiqadi.



7- shakl

Mavzuni mustaxkamlash uchun savollar (10 daqiqa)

1. 9- va 10- shakllarda tasvirlangan sakkizta graflar orasidan o‘zaro izomorf bo‘lgan graflar juftlarini aniqlang.
2. 9- shaklda tasvirlan to‘rtta grafning har biri uchun uchni olib tashlash va qirrani olib tashlash amallarini qo‘llang.
3. 10- shaklda tasvirlangan to‘rtta grafning har biri uchun uchtadan qism graf va to‘ldiruvchi grafni tuzing.
4. Gomeomorf va gomeomorf bo‘lmagan graflarga misollar keltiring.
5. K_3 va K_4 graflarning birlashmasini toping (bunda graflar uchlari to‘plamlari kesishadigan va kesishmaydigan hollarni alohida qarang).
6. Ikkita K_3 graflarning birikmasini toping (bunda graflar uchlari to‘plamlari kesishadigan va kesishmaydigan hollarni alohida qarang).
7. Graflarni ko‘paytirish amalini qo‘llab, $O_3\times O_4$, $O_3\times K_3$, $O_4\times K_3$ va $K_3\times K_3$ graflarni toping.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Matematik modellarning universalligi nima?
2. Chiziqli va chiziqsiz modellar. Misollar keltiring.
3. Chiziqli Maltus modeli (1) da populyasiya soni chegaralangan bo’lib qolishi uchun $r(t)=\alpha(t)-\beta(t)>0$ kattalik yetarli katta t larda ($t\to\infty$) da o’zini qanday tutish kerak?
4. Chiziqsiz Maltus modeli (3) da muvozanat vaziyatidan kichik og’ishlarni qarang, ya’ni yechim $N(t)=N_m+\delta N(t)$, bu yerda $|\delta N(t)|<<N_m$ ko’rinishda bo’ladigan vaziyatni qarab chiqing.

5. (5) tenglama tahlilidagi $N_0 < N_m$ hol uchun yechim ko’rinishini toping va grafigini yasang.
6. (5) tenglamani $N_0 > N_m$ hol uchun (6) yechimga ega ekanligini isbotlang va t_f kattalikni N_0, α_0, β_0 kattaliklar orqali hisoblang.

11- MA’RUZA
Marshrutlar va zanjirlar

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar. 2. Grafning bog‘lamliligi tushunchasi.
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar va grafning bog‘lamliligi tushunchasini hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar va grafning bog‘lamliligi tushunchasini - Mustaqil tarzda marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar va grafning bog‘lamliligi tushunchasini oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: har xil masalalarni yechishda marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar va grafning bog‘lamliligi tushunchasini tahlil qila olishini baholash.

Marshrutlar va zanjirlar mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalarning marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar va grafning bog‘lamliligi tushunchasini umumiy ma’lumotlar borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova).	Savollarga javob beradilar
	2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar va grafning bog‘lamliligi tushunchasidan foydalanish haqidagi bilim va ko’nikmalarini chuqurlashtirib, ulardan foydalanib, har xil masalalar uchun tashkillashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarning tahlil qiladi, ularda ba’zi paydo bo’lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o’zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2)	Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar.
	2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo’ladi va ularga marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar va grafning bog‘lamliligi tushunchasidan foydalanish bo’yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma’lum qiladi.	Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadi-lar, klaster chizadilar
	2.4. Taqdimot boshlanganligini ma’lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko’chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar

3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Mashrutlar deb nimaga aytiladi?
2. Zanjirlar deb nimaga aytiladi?
3. Mashrutlar qanday hosil qilinadi?
4. Zanjirlar qanday hosil qilinadi?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Mashrutlarda oraliq uchlar deganda nimani tushunamiz?
2. Yopiq zanjir deb nimaga aytiladi?
3. Mashrutda sikl deb nimaga aytiladi?
4. Arintirlangan mashrut deb nimaga aytiladi?
5. Arintirlangan zanjir deb nimaga aytiladi?

Asosiy qism

1. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma'lumotlar. Uchlari to'plami $V=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ va qirralar korteji $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ bo'lgan oriyentirlanmagan $G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu G grafdagi uchlar va qirralarning har ikki qo'shni qirralari umumiy chetki uchga ega

$$(...,v_{i_1},u_{j_1},v_{i_2},u_{j_2},v_{i_3},...)$$

ko'rinishdagi chekli yoki cheksiz ketma-ketligi **marshrut** deb ataladi. Marshrutni uning uchlari ketma-ketligi $(...,v_{i_1},v_{i_2},...)$ yoki qirralari ketma-ketligi $(...,u_{j_1},u_{j_2},...)$ ko'rinishda ham belgilash mumkin.

Agar marshrutda qandaydir uchdan oldin uchlar bo'lmasa, bu uchni marshrutning **boshlang'ich uchi** deb, shu uchdan keyin marshrutga tegishli uchlar bo'lmaganda esa, uni marshrutning **oxirgi uchi** deb ataydilar.

Agar marshrutning boshlang‘ich uchi v_p va oxirgi uchi v_q bo‘lsa, u holda uni v_p **uchdan** v_q **uchga yo‘nalgan marshrut** yoki **chetlari** v_p **va** v_q **bo‘lgan marshrut** deb ataladi.

Marshrutdagi ikkita qoshni qirralarga tegishli uch **ichki uch** yoki **oraliq uch** deb ataladi.

Marshrutda qirralar va uchlar takrorlanishi mumkin bo‘lgani uchun marshrutning ichki uchi, bir vaqtning o‘zida, uning boshlang‘ich va (yoki) oxirgi uchi bo‘lishi ham mumkin va teskarisi, marshrutning boshlang‘ich va (yoki) oxirgi uchi uning ichki uchi bo‘lishi ham mumkin.

Tabiiyki, marshrut:

– boshlang‘ich uchga ham oxirgi uchga ham ega bo‘lmasligi mumkin (bunday marshrut **ikki tomonlama cheksiz marshrut** deb ataladi);

– boshlangich uchga ega bo‘lib, oxirgi uchga ega bo‘lmasligi mumkin yoki, aksincha, oxirgi uchga ega bo‘lib, boshlangich uchga ega bo‘lmasligi mumkin (**bir tomonlama cheksiz marshrut**);

– yagona qirradan iborat bo‘lishi mumkin (**notrivial marshrut**);

– birorta ham qirraga ega bo‘lmasligi mumkin (**nol marshrut** yoki **trivial marshrut**).

Marshrutning uzunligi deb undagi qirralar soniga aytiladi.

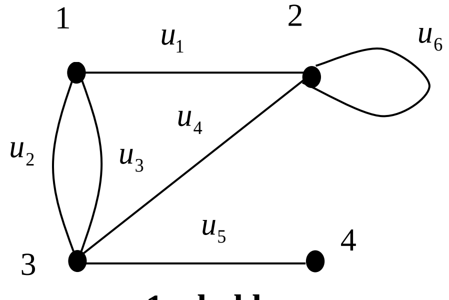
Turli qirralardan tashkil topgan marshrutga **zanjir** deb ataladi. Agar zanjirning chetlaridan tashqari barcha uchlari turlicha bo‘lsa, u holda uni **oddiy zanjir** deb ataydilar.

Berilgan $(v_1, v_2, ..., v_s)$ zanjir yoki oddiy zanjir uchun $v_1 = v_s$ bo‘lsa, u **yopiq zanjir** deb ataladi. Hech bo‘lmaganda bitta qirraga ega yopiq oddiy zanjir **sikl** deb ataladi.

Sirtmoq yoki bir juft karrali qirralar sikl tashkil etishi ravshandir.

Tushunarliki, grafdagi zanjir grafning qism grafi deb qaralishi mumkin.

1- misol. Ushbu 1-shaklda tasvirlangan graf uchun



1- shakl

$$(3, u_4, 2, u_1, 1, u_1, 2, u_6, 2, u_4, 3, u_5, 4)$$

ketma-ketlik 3 belgili uchdan 4 belgili uchga yo‘nalgan marshrutdir, bunda 3 – boshlang‘ich uch, 4 – oxirgi uchdir. Bu marshrutda 1, 2 va 3 belgili uchlar oraliq uchlar hisoblanadi. Qaralayotgan marshrutning uzunligi 6a teng bo‘lib, u zanjir bo‘la olmaydi, chunki unda 1 belgili uch 2 marta (bir marta oraliq uch sifatida, ikkinchi marta esa oxirgi uch sifatida) qatnashmoqda.

Yana o‘sha graf uchun $(3,2,1,3)$ zanjirning oxirgi bo‘g‘ini sifatida u_2 yoki u_3 qirralardan qaysisi olinishiga bog‘liqsiz ravishda, u yopiq zanjir va sikldir. ■

Oriyentirlangan graflar uchun ham undagi yoylarning yo‘nalishini (oriyentatsiyasini) inobatga olmasdan oriyentirlanmagan marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalarini kiritish mumkin. Lekin, oriyentirlangan graflar uchun oriyentirlangan marshrut tushunchasini kiritish tabiiydir.

Yoylarning oriyentatsiyalari hisobga olingan yoylar va uchlar ketma-ketligi **oriyentirlangan marshrut** deb ataladi.

Oriyentirlangan marshrut uchun zanjir tushunchasiga o‘xshash **yo‘l** (yoki **oriyentirlangan zanjir**) tushunchasini ham kiritish mumkin. Boshlang‘ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan oriyentirlangan zanjir **kontur** deb ataladi.

1- teorema. *Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo‘lmasa, u holda bu graf siklga ega.*

Isboti. Agar grafda sirtmoqlar yoki karrali qirralar bo‘lsa, teoremaning tasdig‘i to‘g‘riligi ravshandir. Shuning uchun teorema tasdig‘ini graf sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan holda isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $v \in V$ berilgan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan $G=(V,U)$ grafning ixtiyoriy uchi bo‘lsin. Qaralayotgan v uchga qo‘shni v_1 uchni va bu uchga $v$dan farqli boshqa qo‘shni v_2 uchni, v_2 uchga esa $v_1$dan farqli boshqa qo‘shni v_3 uchni, va hakozo, v_i uchga v_{i-1}dan farqli boshqa qo‘shni v_{i+1} uchni, va hakoza, tanlab,

$$((v,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3),...,(v_{i-1},v_i),(v_i,v_{i+1}),...)$$

qirralar ketma-ketligini tuzamiz. Teoremaning shartlariga ko‘ra yuqoridagi jarayonni amalga oshirish va talab etilgan xossaga ega v_{i+1} uchni topish mumkinligini ta’kidlaymiz.

Grafning uchlari to‘plami V chekli to‘plam bo‘lganligidan, yuqorida bayon etilgan uchlar ketma-ketligini qurish jarayonida chekli qadamdan so‘ng albatta oldin uchragan uchlardan birini tanlashga majbur bo‘lamiz. Agar v_k uch ketma-ketlikda ikki marta uchragan dastlabki uch bo‘lsa, ketma-ketlikka qirralar qo‘shish jarayonini to‘xtatamiz, chunki tuzilgan qirralar ketma-ketligining v_k uch ikki marta qatnashgan qismi biz izlayotgan sikldir. ■

2. Grafning bog‘lamliligi tushunchasi. Agar oriyentirlanmagan grafda chetlari a va b uchlardan iborat marshrut topilsa, bu a va b uchlar **bog‘langan** deb, marshrutning o‘zi esa a va b **uchlarni bog‘lovchi marshrut** debataladi.

Tabiiyki, agar qandaydir uchlarni bog‘lovchi marshrut biror a_i uchdan bir necha marta o‘tsa, u holda marshrutning siklik qismini olib tashlab (bunda siklik qismning o‘rniga marshrutda faqat a_i uch qoldiriladi) yana o‘sha uchlarni bog‘lovchi oddiy zanjir ko‘rinishdagi marshrutni hosil qilish mumkin. Shuning uchun, marshrut bilan bog‘langan uchlar doimo oddiy zanjir bilan ham bo‘glangan bo‘ladi degan xulosaga kelamiz.

Bir-biri bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy ikkita uchlari bog‘langan graf **bog‘lamli graf** deb ataladi.

Agar grafdagi ikkita uchni biror oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo‘lsa, u holda bu ikkita uch **ekvivalent** (**bog‘langan**) deyiladi. Bunday uchlar to‘plami grafda **ekvivalentlik munosabati** bilan aniqlangan deb hisoblanadi. Uchlar to‘plami bo‘yicha ekvivalentlik munosabatini inobatga olgan holda berilgan grafni **bog‘lamlilik komponentalari** (qisqacha, **komponentalari**) deb ataluvchi bog‘lamli qismlarning birlashmasi deb qarash mumkin. Bu yerda berilgan graf bog‘lamlilik komponentalariga bo‘laklandi (ajratildi) deb aytish mumkin. Isbotlash mumkinki, har qanday graf o‘zining bog‘lamlilik komponentalarining diz’yunktiv birlashmasi sifatida ifodalanishi mumkin, bunda grafning bog‘lamlilik komponentalariga bo‘laklanishi bir qiymatli aniqlanadi.

Keyingi ma’lumotlarni bayon etish uchun **yoq** tushunchasi zarur bo‘ladi. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi grafni qaraymiz. Bu grafga tegishli bo‘lmagan (ya’ni grafning hech qaysi uchi bilan ustma-ust tushmaydigan va uning hech qaysi qirrasida yotmaydigan) biror A nuqtani hech qaysi nuqtasi grafga tegishli bo‘lmagan uzluksiz chiziq bilan tutashtirish mumkin bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plami grafning A nuqtani o‘zida saqlovchi **yoqi** deb ataladi.

Yoq tushunchasiga berilgan ta’rifga ko‘ra yoq grafning geometrik ifodalanishi yordamida tekislikning “qirqib” olinadigan qismidan iboratdir. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi ixtiyoriy grafning hech bo‘lmaganda bitta yoqi bo‘lishi va uning bitta yoqi chegaraga ega emasligi (cheksizligi) o‘z-o‘zidan ravshandir.

2- teorema (Eyler 1752). *Tekis va bog‘lamli* $G=(V,U)$ *graf uchun* $m+r=2+n$ *tenglik o‘rinlidir, bu yerda* $m=|V|$, $n=|U|$, r *– yoqlar soni.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini grafdagi qirralar soni n bo‘yicha qo‘llaymiz. Induksiya usulining bazasi sifatida $n=0$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig‘iga ko‘ra $m+r=2$ bo‘lishi kerak. Haqiqatdan ham, G tekis va bog‘lamli graf bo‘lgani uchun, u yagona uchdan tashkil topadi va bu uch yagona (cheksiz) yoqda yotadi, ya’ni $m=1$ va $r=1$. Demak, bu holda teoremaning tasdig‘i to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish: teoremaning tasdig‘i $n=k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin deb faraz qilib, uning $n=k+1$ uchun ham to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. Farazimizga ko‘ra $m+r=2+k$ tenglik o‘rinlidir. k ta qirraga ega G tekis va bog‘lamli grafga ($k+1$)-qirrani (uni e bilan belgilaymiz) shunday qo‘shish kerakki, bunda e qirra G graf joylashgan tekislikda yotsin va hosil bo‘lgan graf ham bog‘lamli bo‘lsin. Bu amalni bajarganda quyidagi uchta holdan biri ro‘y beradi:

1) qo‘shilayotgan qirra sirtmoqdir – bu holda e qirra, albatta, G grafdagi uchlardan biriga insident bo‘lib, yoqlardan birida yotadi va bu yoqni ikkiga (sirtmoq yotgan yoqning sirtmoq chizig‘i bilan chegaralangan ichki va tashqi qismlari) ajratadi, ya’ni uchlar soni o‘zgarmaydi, yoqlar soni esa birga oshadi: $m+r+1=2+k+1$;

2) qo‘shilayotgan qirra G grafda bor bo‘lgan ikkita uchlarni tutashtiradi – bu holda ham grafning biror (e qirra yotgan) yoqi ikkiga ajraladi, uchlari soni esa o‘zgarmaydi: $m+r+1=2+k+1$;

3) qo‘shilayotgan qirra sirtmoq emas va u G grafdagi uchlardan faqat bittasiga insidentdir – bu holda grafning biror yoqida e qirraga insident bo‘lgan bitta boshqa uch yasaladi (grafning uchlari soni bittaga oshadi) va e qirra joylashgan yoq yaxlitlikni saqlagan holda e qirrani o‘z ichiga oladi (yoqlar soni o‘zgarmaydi): $m+1+r=2+k+1$. ■

2- teoremaning tasdig‘idagi $m+r=2+n$ tenglik **Eyler formulasi** deb ataladi.

Eyler formulasi stereometriyada ham qo‘llaniladi: uchlari m ta, yoqlari r ta va qirralari n ta ixtiyoriy ko‘pyoqli uchun Eyler formulasi o‘rinlidir. Bu tasdiqning negizida isboti o‘quvchiga havola qilinayotgan quyidagi tasdiq yotadi: *stereometriyada berilgan ta’rifga ko‘ra aniqlangan ixtiyoriy ko‘pyoqliga mos tekis izomorf graf mavjuddir.*

Eyler teoremasidan bir qator natijalar kelib chiqadi. Masalan, bu teoremadan foydalanib uni osonlik bilan bog‘lamli bo‘lmagan graflar uchun quyidagicha umumlashtirish mumkin.

1- natija. *Tekis $G=(V,U)$ graf uchun $m+r=1+n+k$ tenglik o‘rinlidir, bunda $m=|V|$, $n=|U|$, r – yoqlar soni, k – bog‘lamlilik komponentalar soni.*

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi ■.

2- natija. *Karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz tekis (m,n)-graf uchun $n\leq 3m-6$ tengsizlik o‘rinlidir.*

Isboti. Haqiqatdan ham, har bir yoq hech bo‘lmaqanda uchta qirra bilan chegaralanganligi va yoqlarni chegaralovchi qirralarni sanaganda har bir qirra ikki marta hisobda qatnashganligi uchun $3r\leq 2n$ tengsizlik o‘rinlidir (ta’kidlaymizki, agar grafda uchta uch va ikkita qirra bo‘lsa, u holda $n \le 3m-6$ tengsizlik bajariladi). $3r \le 2n$ tengsizlikdan Eyler formulasini $r = 2+n-m$ ko‘rinishda qo‘llab, $n \le 3m-6$ tengsizlikni hosil qilamiz. ■

Ushbu bobning 2- paragrafida K_5 va $K_{3,3}$ graflarning planar emasligi ta’kidlangan (isbotsiz keltirilgan) edi. Endi bu tasdiqlarni qat’iy isbotlash mumkin.

3- teorema. *K_5 graf planar emas.*

Isboti. K_5 planar graf bo‘lsin deb faraz qilamiz. Planar graf uchun $n \le 3m-6$ tengsizlik o‘rinlidir. K_5 graf uchun $m=5$ va $n=10$ bo‘lganligidan bu tengsizlik $10 \le 9$ ko‘rinishdagi noto‘g‘ri munosabatga olib keladi. Demak, K_5 graf planar emas. ■

4- teorema. *$K_{3,3}$ graf planar emas.*

Isboti. $K_{3,3}$ planar graf bo‘lsin deb faraz qilamiz. Bu grafda 6ta uch ($m=6$) va 9ta qirra ($n=9$) bo‘lgani uchun, Eyler teoremasiga ko‘ra, unda 5ta ($r = 2+n-m = 2+9-6 = 5$) yoq bo‘lishi kerak. $K_{3,3}$ grafning har bir yoqi kamida to‘rtta qirra bilan chegaralanganligi sababli bu graf uchun $4r \le 2n$ tengsizlik o‘rinlidir. Lekin bu tengsizlik $K_{3,3}$ graf uchun $20 \le 18$ ko‘rinishdagi noto‘g‘ri munosabatga olib keladi. Demak, $K_{3,3}$ graf planar emas. ■

Isbotlash mumkinki, quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

5- teorema. *Agar biror graf K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf bo‘lgan qism grafga ega bo‘lsa, u holda bu graf tekislikda yotuvchi bo‘lmaydi*.

1930 yilda K. Kuratovskiy bu tasdiqqa teskari tasdiqni isbot qildi: *agar graf tekislikda yotuvchi bo‘lmasa, u holda u K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf bo‘lgan qism grafga ega bo‘ladi*. Umuman olganda, graflarning planarligi haqidagi bu asosiy natija K. Kuratovskiydan oldin 1922 yilda L. S. Pontryagin tomonidan isbotlangan, lekin bu natija o‘sha vaqtda matbuotda e’lon qilinmagan edi.

6- teorema (Pontryagin-Kuratovskiy). *Graf planar bo‘lishi uchun u K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf qism graflarga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir*.

Isboti topshiriq sifatida o‘quvchiga havola qilinadi. ■

7- teorema. *Agar karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz grafda m ta uch, n ta qirrai va k ta bog‘lamlilik komponentalari bo‘lsa, u holda quyidagi munosabat o‘rinlidir:*

$$m-k \le n \le \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}.$$

Isboti. Avval qirralar soni n bo‘yicha matematik induksiya usulini qo‘llab $m-k \le n$ tengsizlikni isbotlaymiz. Agar grafda qirralar bo‘lmasa (ya’ni, matematik induksiya usulining bazasi sifatida $n=0$ deb olinsa), u holda grafdagi uchlar soni uning bog‘lamlilik komponentalari soniga tengdir: $k = m$. Demak, $n = 0$ bo‘lganda $m - k \le n$ munosabat to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish. Grafdagi qirralar sonini n_0 bilan belgilab, bu son minimal bo‘lsin, ya’ni grafdan istalgan qirrani olib tashlash amali bog‘lamlilik komponentalari soni o‘zgargan graf hosil qilsin deb faraz qilamiz. Bundan tashqari, matematik induksiya usuli talabiga binoan $n = n_0$ uchun isbotlanishi kerak bo‘lgan tengsizlik o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilamiz. Tabiiyki, bu holda grafdan istalgan qirrani olib tashlasak (bunda olib tashlangan qirraning chetlaridagi uchlar grafga tegishli bo‘lib qolaveradi), hosil bo‘lgan grafning uchlari soni m ga, qirralari soni ($n_0 - 1$)ga, bog‘lamlilik komponentalari soni esa ($k + 1$)ga teng bo‘ladi.

Induksiya faraziga binoan $m - (k+1) \le n_0 - 1$ tengsizlik o‘rinlidir. Bu tengsizlikdan $m - k \le n_0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $m - k \le n$ tengsizlik isbotlandi.

Endi $n \le \dfrac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ tengsizlikni isbotlaymiz. Buning uchun grafning har bir bog‘lamlilik komponentasi to‘la graf bo‘lsin deb faraz qilamiz. Berilgan grafning uchlari sonlari mos ravishda m_i va m_j bo‘lgan ikkita bog‘lamlilik komponentalari D_i va D_j graflardan iborat bo‘lsin, bu yerda $m_i \ge m_j > 1$. Tushunarliki, D_i va D_j graflarning uchlari umumiy soni ($m_i + m_j$)ga tengdir. Bu D_i va D_j graflarni uchlari sonlari mos ravishda ($m_i + 1$) va ($m_j - 1$) bo‘lgan to‘la graflar bilan almashtirsak, uchlar umumiy soni o‘zgarmaydi, lekin qirralarning umumiy soni $(C^2_{m_i+1} + C^2_{m_j-1}) - (C^2_{m_i} + C^2_{m_j})$ miqdorga o‘zgaradi. Oxirgi ifodaning ko‘rinishini quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$(C^2_{m_i+1} + C^2_{m_j-1}) - (C^2_{m_i} + C^2_{m_j}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m_i+1)m_i + (m_j-1)(m_j-2) - m_i(m_i-1) - m_j(m_j-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(m_i^2 + m_i + m_j^2 - m_j - 2m_j + 2 - m_i^2 + m_i - m_j^2 + m_j) =$$

$$= m_i - m_j + 1 > 0\,.$$

Shunday qilib, uchlari soni m va bog‘lamlilik komponentalari soni k bo‘lgan grafda maksimal sondagi qirralar bo‘lishi uchun u ($k - 1$)ta yakkalangan uchlar va ($m - k + 1$)ta uchga ega to‘la graf birlashmasidan tashkil topishi kerak ekan. Bu yerdan isbotlanishi kerak bo‘lgan tengsizlik kelib chiqadi. ■

7- teoremaning tatbiqi sifatida quyidagi tasdiqni keltiramiz.

3- natija. *m ta uchga ega, qirralari soni $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ dan katta, karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz graf bog‘lamlidir.*

Isboti. Birinchidan, agar sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan grafning bog‘lamlilik komponentalari soni k ga teng bo‘lsa ($k \in \boldsymbol{N}$), u holda, 7-teoremaga binoan, bunday grafning qirralari soni $\frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ dan katta emas. Ikkinchidan, $\frac{(m-1)(m-2)}{2} < \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ tengsizlik faqat $k=1$ bo‘lsagina to‘g‘ridir. ■

Tabiiyki, bog‘lamli grafdan qirrani yoki bir necha qirralarni olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli bo‘lishi ham bo‘lmasligi ham mumkin. Agar bog‘lamli grafdan qirrani olib tashlash amali grafning bog‘lamlilik xususiyatini buzsa, u holda bunday qirrani **ajratuvchi qirra** deb ataymiz.

Ravshanki, berilgan bog‘lamli grafda ajratuvchi qirralar ko‘p bo‘lishlari mumkin. Ajratuvchi qirralar to‘plamining hech qaysi qism to‘plami elementlari ajratuvchi qirralar bo‘lmasa, bu qirralar to‘plamini **kesim** deb ataymiz. Grafdan kesimga tegishli qirralar olib tashlansa, natijada ikki bog‘lamli komponentalari bo‘lgan graf hosil bo‘lishi ravshandir. Agar kesim yagona qirradan iborat bo‘lsa, u holda bu qirra **ko‘prik** deb ataladi.

8- teorema (D. Kyonig). *Grafning ikki bo‘lakli bo‘lishi uchun uning tarkibida uzunligi toq son bilan ifodala-nuvchi sikl bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi. ■

Berilgan $G=(V,U)$ grafning ikki bo‘lakliligini aniqlashning sodda usuli bor. Bu usul **ko‘ndalangiga izlash** deb ataluvchi soddagina izlash g‘oyasiga asoslangan.

Ko‘ndalangiga izlash usuliga ko‘ra grafning uchlari $0,1,2,3,...$ raqamlar bilan quydagi qoida bo‘yicha belgilanadi. Dastlab grafning ixtiyoriy uchi 0 raqami bilan belgilab olinadi. Shu 0 belgili uchga qo‘shni barcha uchlarga 1 belgisi qo‘yiladi. Endi 1 belgili har bir uchga qo‘shni uchlarni aniqlab, ular orasidagi belgisi yo‘q uchlarga 2 belgisini qo‘aymiz. Keyin 2 belgisiga ega barcha uchlarni aniqlab, ular uchun ham yuqoridagiga o‘xshash ish yuritamiz. Bu jarayonni mumkin bo‘lgan qadar davom ettiramiz. Tushunarliki, agar G graf bog‘lamli bo‘lsa, u holda ko‘ndalangiga izlash usuli grafning barcha uchlarini raqamlab chiqish imkonini beradi.

Bog‘lamli graf uchlarini belgilash jarayoni tugagandan so‘ng, uning uchlari to‘plami V ni ikkita V_j va V_q to‘plamga quyidagicha ajratamiz: juft raqamli uchlarni V_j to‘plamga, qolgan uchlarni esa V_q to‘plamga kiritamiz (0 raqamli uch

V_j to‘plamga kiritiladi). G grafning ikkala uchi ham V_j to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini U_j bilan, uning ikkala uchi ham V_q to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini esa U_q bilan belgilaymiz. Agar U_j va U_q kortejlar bo‘sh bo‘lsa, u holda berilgan G graf ikki bo‘laklidir, aks holda u ikki bo‘lakli emas.

Hozirgacha $k > 2$ bo‘lgan hol uchun grafning k bo‘lakliligini aniqlash bo‘yicha oddiy usul topilmagan.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Graflarda marshrut deganda nimani tushunasiz?
2. Marshrutdagi boshlang‘ich, oraliq va oxirgi uchlarning bir-biridan qanday farqlari bor?
3. Qanday marshrutlar cheksiz marshrutlar deb ataladi?
4. Notrivial marshrut bilan nol marshrutning bir-biridan farqi nimada?
5. Marshrutning uzunligi deganda nimani tushunasiz?
6. Zanjir nima?
7. Oddiy va yopiq zanjirlarning bir-biridan farqi nimada?
8. Yo‘l, kontur deganda nimani tushunasiz?
9. Qanday zanjir sikl deb ataladi va qanday graf siklga ega?
10. Qanday uchlar bog‘langan deb ataladi?
11. Bog‘lamli graf deganda nimani tushunasiz?
12. Bog‘lamlilik komponentasi grafning qanday xususiyat(lar)ini ifodalaydi?
13. Grafning yoqi deganda nimani tushunasiz?
14. Eyler formulasi grafning qanday xossasini ifodalaydi?
15. Eyler formulasi bog‘lamli bo‘lmagan graflar uchun qanday umumlashtiriladi?
16. Nima uchun K_5 va $K_{3,3}$ graflar planar emas?
17. Pontryagin-Kuratovskiy teoremasi nimani ifodalaydi?
18. Karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz grafda uchlar, qirralar va bog‘lamlilik komponentalari orasida tengsizliklar bilan ifodalanuvchi qanday munosabat o‘rinli?
19. Sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan grafning bog‘lamlilik sharti nimadan iborat?
20. Grafdagi qanday qirralar ajratuvchi qirralar deb ataladi?
21. Kesim va ko‘prik tushunchalarining farqi nimada?
22. Ko‘ndalangiga izlash usuli qanday amalga oshiriladi?

12- MA’RUZA
Eyler va Gamilton graflari

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Eyler graflari 2. Gamilton graflari
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda eyler graflari va gamilton graflari haqida bilim va ko’nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - eyler graflari va gamilton graflaridan foydalana oladilar; - Mustaqil tarzda eyler graflari va gamilton graflarini tushuna oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: turli masalalarni yechishda eyler graflari va gamilton graflaridan foydalanib, misol va masalani yecha olishini baholash.

Eyler va Gamilton graflari mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar
	2.1. Talabalarning eyler graflari va gamilton graflaridan foydalanib, matematik modellar tuzish haqida umumiy ma’lumotlar borasidagi bilimini aqliy	Savollarga javob beradilar

2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida eyler graflari va gamilton graflaridan foydalanish haqidagi bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirib, ulardan foydalanib, har xil masalalar uchun qullashni tashkillashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarni tahlil qiladi, ularda ba'zi paydo bo'lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o'zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo'ladi va ularga eyler graflari va gamilton graflaridan foydalanish bo'yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma'lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma'lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko'chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadilar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Qanday graflar gamilton grafi deyiladi?
2. Qanday graflar eyler grafi deyiladi?
3. Arintirlangan eyler grafi deb nimaga aytiladi?
4. Gamilton zanjiri deganda nimani tushunasiz?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi.

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Arintirlangan eyler yuli deb nimaga aytiladi?
2. Gamilton sikli deganda nimani tushunasiz?
3. Kommivoyajer masalasini yechishda qanday zanjirdan foydalaniladi

Asosiy qism

1. Eyler graflari. Graflar nazariyasining shakllanishi Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masala bilan bog‘liq ekanligi yaxshi ma’lum. L. Eyler 1736 yilda bu masalaning yechimga ega emasligini isbotladi. U graflar nazariyasining ancha umumiy hisoblangan quyidagi savoliga ham javob topdi: qanday shartlar bajarilganda bog‘lamli grafda barcha qirralardan faqat bir marta o‘tadigan sikl mavjud bo‘ladi?

Grafning har bir qirrasidan faqat bir marta o‘tadigan zanjir **Eyler zanjiri** deb ataladi. Yopiq Eyler zanjiriga (ja’ni **Eyler sikliga**) ega graf **Eyler grafi** deb ataladi. Agar grafda yopiq bo‘lmagan Eyler zanjiri topilsa, u holda bunday graf **yarim Eyler grafi** deb ataladi.

1- teorema. *Bog‘lamli graf Eyler grafi bo‘lishi uchun undagi barcha uchlarning darajalari juft bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Zarurligi. G Eyler grafida C – Eyler sikli bo‘lsin. U holda C sikl bo‘ylab harakatlanganda grafning har bir uchidan o‘tish uchun bir juft qirradan foydalaniladi – bu qirralardan biri uchga kirish uchun, ikkinchisi esa uchdan chiqish uchun zarur bo‘ladi. Bu yerda har bir uch darajasining juftligi C sikldagi har bir qirraning bir marta uchrashi mumkinligidan kelib chiqadi.

Yetarliligi. Endi G grafning har bir uchi darajasi juft bo‘lsin deb faraz qilamiz. G graf bog‘lamli bo‘lgani uchun undagi har bir uchning darajasi ikkidan kichik emas. Ma’lumki, agar grafda har bir uchning darajasi ikkidan kichik bo‘lmasa, u holda bunday graf tarkibida sikl mavjud (ushbu bobning 4- paragrafidagi 1- teoremaga qarang).

Demak, G grafning qirralaridan tashkil etilgan qandaydir C_1 sikl bor. Bu siklni uning ixtiyoriy v_1 uchidan boshlab quramiz. Dastlab v_1 uchga insident bo‘lgan ixtiyoriy bir qirrani tanlab, bu qirra bo‘ylab harakatlanamiz va uning boshqa uchiga o‘tamiz. Har safar, imkoniyati boricha, yangi qirra tanlab va bu qirradan o‘tib uning boshqa uchiga boramiz. Shuni ta’kidlash zarurki, bunday o‘tislar jarayonida faqat qirraning yangisini tanlashga harakat qilinadi, uchlar esa istalgancha takrorlanishlari mumkin.

Har bir uchga insident qirralar soni juft bo‘lgani uchun C_1 siklni qurish jarayoni faqat v_1 uchga borgandagina tugaydi. Bu yerda ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) C_1 sikl G grafning barcha qirralaridan o‘tadi, yoki

2) C_1 sikl G grafning barcha qirralaridan o‘tmaydi. Birinchi holda teorema isbotlandi deyish mumkin. Ikkinchi holda G grafdan C_1 siklga tegishli barcha qirralarni olib tashlaymiz va natijada hosil bo‘lgan grafni G_1 deb belgilaymiz. Bu yerda yakkalanib qolgan uchlarni olib tashlash yoki olib tashlamaslik muhim emas. Agar yakkalanib qolgan uchlar olib tashlanmasa, natijada bog‘lamli bo‘lmagan G_1 grafni hosil qi-lishimiz ham mumkin. Grafdan qirralarni bunday olib tashlash amali, tabiiyki, grafning qirralari sonini kamaytiradi, lekin grafdagi uchlarning darajalari juftligi xossasini o‘zgartirmaydi.

G grafning bog‘lamliligiga ko‘ra C_1 sikl va G_1 graf hech bo‘lmasa bitta umumiy uchga ega bo‘lishlari kerak. Shu sababli, C_1 siklda G_1 grafning qirralariga ham insident bo‘lgan qandaydir v_2 uch bor. Bu v_2 uchdan boshlab faqat G_1 grafning qirralaridan tashkil topgan yangi C' siklni qurish mumkin. C' siklni qurish jarayoni faqat v_2 uchga kelib tugashi mumkin.

Oldin qurilgan C_1 siklni ikki qismga ajratamiz:

1) C_1 siklning v_1 uchidan boshlanib v_2 uchida tugovchi qismi (bu oddiy zanjirni $C_1(v_1,v_2)$ bilan belgilaymiz) va

2) C_1 siklning v_2 uchidan boshlanib v_1 uchida tugovchi qolgan qismi ($C_1(v_2,v_1)$).

U holda v_1 uchdan boshlab $C_1(v_1,v_2)$ zanjirning qirralari bo‘ylab v_2 uchga boruvchi, keyin C' siklning barcha qirralaridan o‘tuvchi va, nihoyat, $C_1(v_2,v_1)$ zanjirning qirralari bo‘ylab v_1 uchga qaytib keluvchi yangi

$$C_2 = C_1(v_1,v_2) \cup C' \cup C_1(v_2,v_1)$$

siklni hosil qilish mumkin.

Agar C_2 sikl Eyler sikli bo‘lsa, teoremaning tasdig‘i isbotlandi desa bo‘ladi. Aks holda yuqorida bayon etilgan jarayonni takrorlaymiz.

Berilgan G grafdagi qirralar soni chekli bo‘lganligidan, bu jarayon chekli jarayondir. Bu jarayonni yetarlicha takrorlagandan so‘ng, albatta, u Eyler siklini qurish bilan yakunlanadi.

1- natija. *Bog‘lamli graf yarim Eyler grafi bo‘lishi uchun undagi ikkitadan ko‘p bo‘lmagan uchlarning darajalari toq bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti 1- teoremaning isbotidan ba’zi o‘zgartirishlar natijasida hosil qilinishi mumkin.

1- teorema asosida Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaning (ushbu bobning 1- paragrafiga qarang) yechimi mavjud emas degan xulosaga kelamiz, ya’ni Kyonigsberg shahrining ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib Pregel daryosi ustiga qurilgan yettita ko‘priklardan faqat bir martadan o‘tgan holda, yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkin emas.

Oriyentirlangan graflarda oriyentirlangan Eyler yo‘lini izlash bilan shug‘ullanish mumkin. Har bir yoydan faqat bir marta o‘tadigan yo‘l **oriyentirlangan Eyler yo‘li** deb ataladi. Tarkibida oriyentirlangan Eyler yo‘li bor bo‘lgan oriyentirlangan graf **oriyentirlangan Eyler grafi** deb ataladi.

Endi qirralari soni n ga teng bo‘lgan berilgan Eyler grafida Eyler zanjirini tuzishning **Flyori algoritmini** keltiramiz. Bu algoritmga ko‘ra grafning qirralari Eyler siklida uchrashi tartibi bo‘yicha 1dan n gacha raqamlab chiqiladi.

Berilgan Eyler grafi uchun Flyori algoritmiga binoan quyidagi ikkita qoida asosida ishlar ketma-ket bajariladi:

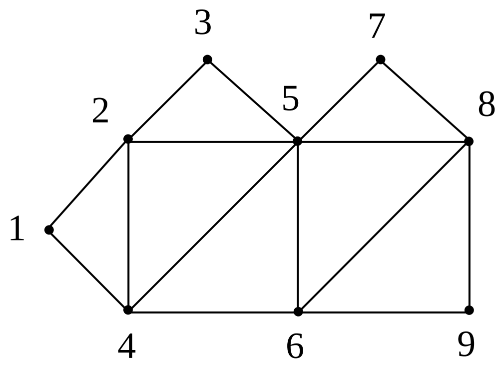
1. Grafning ixtiyoriy v uchidan boshlab bu uchga insident bo‘lgan istalgan qirraga (masalan, vv' qirraga) 1 raqami beriladi. Bu qirra grafdan olib tashlanadi va v uchdan v' uchga (ya’ni olib tashlangan qirraga insident uchga) o‘tiladi.

2. Oxirgi o‘tishdan oldingi o‘tish natijasida hosil bo‘lgan uch w bo‘lsin va oxirgi o‘tishda biror qirraga k raqami berilgan deylik. w uchga insident istalgan qirra imkoniyati boricha shunday tanlanadiki, bu qirrani olib tashlash grafdagi bog‘lamlilikni buzmasin. Tanlangan qirraga navbatdagi ($k+1$) raqami beriladi va bu qirra grafdan olib tashlanadi.

Flyori algoritmiga ko‘ra ish yuritish Eyler grafi uchun doimo chekli jarayon ekanligi va bu jarayon doimo grafdan barcha qirralarning olib tashlanishi, ya’ni Eyler zanjirini tuzish bilan tugashi isbotlangan. Shuni ham ta’kidlash kerakki, Flyori algoritmini qo‘llash jarayonida qirralarni tanlash imkoniyatlari ko‘p bo‘lgani uchun, bunday vaziyatlarda, algoritmni qo‘llash mavjud Eyler sikllaridan birini topish bilan cheklanadi. Tushunarliki, Flyori algoritmini takror qo‘llab (bunda qirralarni tanlash jaroyoni algoritmini avvalgi qo‘llashlardagidek aynan takrorlanmasligi kerak) grafda mavjud bo‘lgan barcha Eyler sikllarini topish mumkin.

1- misol. 1- shakldа tasvirlangan grafni qaraymiz. Avvalo bu grafning Eyler grafi bo‘lishi shartini, ya’ni 1- teorema shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

Berilgan grafda to‘qqizta uch bo‘lib, 1, 3, 7, 9 belgili uchlarning darajasi ikkiga, 2, 4, 6, 8 belgili uchlarning darajasi to‘rtga, 5 belgili uchning darajasi esa oltiga teng. Xullas, bu grafdagi barcha uchlarning darajalari juftdir. Shuning uchun, 1- teoremaga ko‘ra, 1- shakldа tasvirlangan graf Eyler grafidir va uning tarkibida Eyler sikli mavjud.



1- shakl

Berilgan grafga flyori algoritmini qo‘llab mavjud Eyler sikllaridan birini aniqlaymiz. Dastlabki uch sifatida grafdagi 1 belgili uch olingan bo‘lsin. Bu uchdan ikki yo‘nalishda: $(1;2)$ qirra bo‘ylab yoki $(1;4)$ qirra bo‘ylab harakatlanish mumkin. Masalan, $(1;2)$ qirra bo‘ylab harakatlanib 2 belgili uchga o‘tamiz. Endi harakatni 3 yo‘nalishda: yo $(2;3)$ qirra bo‘ylab, yo $(2;4)$ qirra bo‘ylab, yoki $(2;5)$ qirra bo‘ylab davom ettirish mumkin. Aytaylik, $(2;3)$ qirra bo‘ylab harakatlanib 3 belgili uchga o‘tgan bo‘laylik. Shu usulda davom etib mumkin bo‘lgan Eyler sikllaridan birini, masalan, quyidagi siklni hosil qilamiz:

$$\big((1,2),(2,3),(3,5),(5,4),(4,6),(6,9),(9,8),(8,6),$$
$$(6,5),(5,8),(8,7),(7,5),(5,2),(2,4),(4,1)\big).$$

2. Gamilton graflari. Graflar nazariyasining natijalari muayyan shartlarni qanoatlantiruvchi marshrutlarni topish masalasiga keltiriluvchi bir qator muammolarni hal etishda qo‘llanilishi mumkin. Shunday muammolardan biri sifatida Uilyam Gamilton nomi bilan bog‘liq masalani keltiramiz. U. Gamilton dodekaedrni tekshirib, uning har bir uchidan faqat bir marta o‘tadigan siklni izlab topgan va shu asosda 1859 yilda “Olam bo‘ylab sayohat” nomli o‘yinni topgan.

Grafning har bir uchidan faqat bir marta o‘tadigan zanjir **Gamilton zanjiri** deb ataladi. Yopiq Gamilton zanjiriga (ja’ni **Gamilton sikliga**) ega graf **Gamilton grafi** deb ataladi. Agar grafda yopiq bo‘lmagan Gamilton zanjiri topilsa, u holda bunday graf **yarim Gamilton grafi** deb ataladi.

Oriyentirlangan graflarda ham grafning har bir uchidan faqat bir marta o‘tuvchi oriyentirlangan sikllarni qarash mumkin

Eyler va Gamilton graflari bir-birlariga o‘xshash ta’riflansada, grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlaydigan alomat (mezon) topish masalasi ancha murakkab muammo hisoblanadi. Hozirgi vaqtgacha graflar nazariyasida grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlovchi shartlarni o‘rganish bo‘yicha izlanishlar davom etib, bu sohadagi ishlar hanuzgacha dolzarbligini yo‘qotmasdan kelmoqda.

Qandaydir shartlarga bo‘ysunuvchi graflarda Gamilton sikli mavjudligi haqida bir necha tasdiqlar mavjud. Qator hollarda bu tasdiqlarning isbotlari konstruktiv bo‘lganligidan, Gamilton siklini tuzishga doir samarali algoritmlar ham yaratilgan. 1952 yilda G. E. Dirak quyidagi teoremani isbotladi.

2- teorema (Dirak). *Uchlari soni uchtadan kam bo‘lmagan grafdagi istalgan uchning darajasi uchlar sonining yarmidan kam bo‘lmasa, bu graf Gamilton grafi bo‘ladi.*

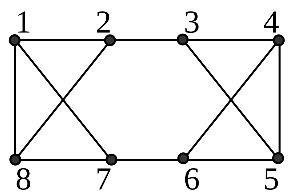
Isbot. Uchlari soni $m \geq 3$ bo‘lgan graf berilgan bo‘lsin. Bu grafning istalgan v uchi uchun $\rho(v) \geq \frac{m}{2}$ shart bajarilsada, u Gamilton grafi bo‘lmasin deb faraz qilamiz.

Tabiiyki, istalgan grafga yetarlicha sondagi yangi uchlarni qo‘shib olib, bu uchlarning har birini grafdagi har bir uch bilan qirra orqali tutashtirsak, berilgan grafdan Gamilton grafini hosil qilish mumkin. Bu usul bilan berilgan grafdan Gamilton grafini hosil qilish uchun qo‘shilayotgan zarur uchlarning minimal sonini $k > 0$ bilan belgilaymiz.

Yuqorida bayon qilingan usulni qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan grafdagi uchlardan tashkil topgan $(v_1, w, v_2, ..., v_1)$ ketma-ketlik biror Gamilton sikli bo‘lsin, bunda v_1, v_2 – berilgan grafning uchlari, w esa qo‘shib olingan uchlardan biri. Tushunarliki, v_2 uch v_1 uchga qo‘shni emas, aks holda siklni tuzishda w uchni ishlatmasligimiz mumkin bo‘lar edi. Bu esa k sonining minimalligiga ziddir.

Agar grafdagi v_1' uch v_1 uch bilan qo‘shni, v_2' uch esa v_2 uch bilan qo‘shni bo‘lsa, v_2' uch siklda v_1' uchdan bevosita keyingi uch bo‘la olmaydi, chunki bu holda $(v_1, w, v_2, ..., v_1', v_2', ..., v_1)$ siklni $(v_1, v_1', ..., v_2, v_2', ..., v_1)$ siklga almashtirish mumkin. Natijada hosil bo‘lgan grafning v_2 uchga qo‘shni bo‘lmagan uchlari soni v_1 uchga qo‘shni uchlari sonidan kichik emasligi (ya’ni bu son kamida $\left(\frac{m}{2} + k\right)$ga teng ekanligi) ravshan. Boshqa tomondan esa hosil bo‘lgan grafning v_2 uchga qo‘shni uchlari soni kamida $\left(\frac{m}{2} + k\right)$ga tengligi ko‘rinib turibdi. Hosil bo‘lgan grafning har bir uchi bir vaqtning o‘zida v_2 uchga qo‘shni ham, qo‘shnimas ham bo‘lishi mumkin emasligidan hosil bo‘lgan graf uchlarining umumiy soni ($m + k$) ushbu $2\left(\frac{m}{2} + k\right) = m + 2k$ sondan kichik emas, ya’ni $m + k \geq m + 2k$. Oxirgi tengsizlik faqat $k = 0$ bo‘lgandagina to‘g‘ridir. Bu esa $k > 0$ shartiga ziddir.

Dirak teoremasi shartlari berilgan grafning Gamilton grafi bo‘lishi uchun yetarli, lekin ular zaruriy emas. Bu tasdiq to‘g‘ri ekanligini 2- shaklda tasvirlangan graf misolida ko‘ramiz. Bu grafda sakkizta uch bo‘lib ($m = 8 \geq 3$), har bir v ($v = \overline{1, 8}$) uchning darajasi 3ga teng: $\rho(v) = 3$. Dirak



2- shakl

teoremasidagi $\rho(v) \geq \frac{m}{2}$ shart grafdagi hech qaysi uch uchun bajarilmasa ham, bu grafda $(1,2,3,4,5,6,7,8,1)$ ko‘rinishdagi Gamilton sikli bor bo‘lgani uchun u Gamilton grafidir.

1960 yilda O. Ore quyidagi teoremani isbotladi.

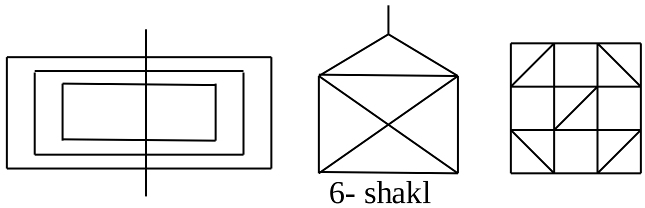
3- teorema (Ore). *Agar uchlari soni* m *ga* ($m > 2$) *teng bo‘lgan grafdagi qo‘shni bo‘lmagan ixtiyoriy uchlar darajalari yig‘ndisi* m *dan kam bo‘lmasa, u holda bu graf Gamilton grafi bo‘ladi.*

Isboti o‘quvchiga topshiriq sifatida beriladi.

Ilova 3

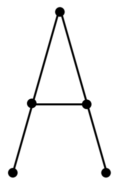
Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Yarim Eyler grafi bo‘lib, Eyler grafi bo‘la olmaydigan grafga misol keltiring. Sababini tushuntiring.
2. 6- shaklda tasvirlangan uchta grafni (bu graflarda qirralarga kesmalar, kesmalarning kesishish nuqtalariga esa uchlar mos qo‘yilgan deb hisoblanadi) tekshirib, ularning Eyler grafi bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlang. Eyler grafi bo‘lganlarining har biridagi Eyler sikllaridan bir nechasini toping. Eyler grafi bo‘lmaganlarining yarim Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.



6- shakl

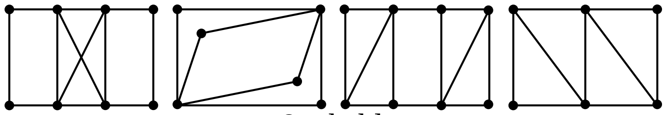
3. 3-, 5- va 6- shaklda tasvirlangan graflar orasida qalamni qog‘ozdan ko‘tarmasdan har bir kesmani faqat bir marta chizib (kesmalarning uchlari bundan mustasno) chiqish mumkin bo‘lganlarini aniqlang.
4. Lotin alifbosi bosma harflarning har biriga graf sifatida qarab (masalan A harfiga mos graf 7- shaklda tasvirlangan), ular orasidan Eyler grafi bo‘la olmaydiganlarini aniqlang.
5. K_n grafning Eyler grafi bo‘lishi sartlarini toping.
6. Berilgan n ta elementli to‘plam uchun tuzilgan barcha $n!$ ta o‘rin almashtirishlarning har biriga grafning uchi mos qo‘yilgan bo‘lsin. Agar biror o‘rin almashtirishdan undagi ikkita elementning o‘rinlarini almashtirib boshqa o‘rin almashtirishni hosil qilish mumkin bo‘lsa, u holda bu harakatga grafning qirrasini mos qo‘yamiz. Shunday usul bilan tuzilgan graf Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang.



7- shakl

7. K_n grafning Gamilton grafi bo‘lishi sartlarini aniqlang.
8. 8- shaklda tasvirlangan to‘rtta grafning har biri Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.

9. 8- shaklda tasvirlangan to‘rtta grafning har biri Gamilton grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.



8- shakl

10. Dirak teoremasini qo‘llab $K_{3,3}$ grafning Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang

13 - MA’RUZA
Grafning metrik xarakteristikalari

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Graflarda masofa tushunchasi 2. Minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda graflarda masofa tushunchasi va minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala haqida bilim va ko’nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - graflarda masofa tushunchasi va minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala; - Mustaqil tarzda graflarda masofa tushunchasi va minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala yecha oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov graflarda masofa tushunchasi va minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masalasini yecha olishi va uni izohlab berishini baholash.

Grafning metrik xarakteristikalari mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi.	Tinglaydilar, yozib oladilar

mashg'ulotig a kirish (10 daqiqa)	Mashg'ulot axborotli ma'ruza shaklida borishini ma'lum qiladi.	
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalarning graflarda masofa tushunchasi va minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masalasi haqida umumiy ma'lumotlar borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida graflarda masofa tushunchasi va minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala haqidagi bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirib, ulardan foydalanib, har xil masalalar uchun tashkillashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarni tahlil qiladi, ularda ba'zi paydo bo'lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o'zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo'ladi va graflarda masofa tushunchasi va minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala bo'yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma'lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma'lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko'chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadi-lar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi.	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

	(Ilova 3)	

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Mashrutda kuchlar orasidagimasofa deb nimaga aytiladi?
2. Grafning deamitri deb nimaga aytiladi?
3. Grafning markazi deb nimaga aytiladi?
4. Radial oddiy zanjir deb nimaga aytiladi?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi.

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Deykstra algaritmi qanday masala uchun qullaniladi?
2. Isudintlik matritsasi bilan berilgan grafning deamitri qanday topiladi?
3. Qirralar qushniligi matritsasi bilan berilgan grafning deamitri qanday topiladi?

Asosiy qism

1. Graflarda masofa tushunchasi. Bog'lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu grafda har qanday ikkita v_1 va v_2 uchlar bog'langan bo'lgani uchun chetlari v_1 va v_2 uchlardan iborat bo'lgan hech bo'lmasa bitta marshrut bor. v_1 va v_2 uchlarni bog'lovchi eng qisqa (v_1,v_2) marshrutning uzunligi v_1 va v_2 **uchlar orasidagi masofa** deb ataladi va u $d(v_1,v_2)$ bilan belgilanadi. Ravshanki, eng qisqa marshrut oddiy zanjirdir. Tabiiy ravishda $d(v,v)=0$ deb qabul qilamiz.

Shuni ta'kidlash kerakki, graflarda masofa tushunchasini boshqa usul bilan ham aniqlash mumkin.

Yuqoridagi usul bilan aniqlangan masofa **metrika aksiomalari** deb ataluvchi quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) $d(v_1,v_2)\geq 0$;
2) $v_1=v_2$ bo'lgandagina $d(v_1,v_2)=0$ bo'ladi;
3) $d(v_1,v_2)=d(v_2,v_1)$;
4) $d(v_1,v_2)+d(v_2,v_3)\geq d(v_1,v_3)$.

Oxirgi aksioma **uchburchak tengsizligi** deb ataladi.

Bog'lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. G grafning ixtiyoriy $v\in V$ uchi uchun aniqlangan

$$e(v) = \max_{w \in V} d(v, w)$$

miqdor shu v **uchning ekssentrisiteti** deb ataladi.

Bog‘lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kattasi (maksimali) shu **grafning diametri** deb ataladi.

G grafning diametri, odatda, $d(G)$ bilan belgilanadi: $d(G) = \max_{v \in V} e(v)$. Diametr bu grafning istalgan ikki uchi orasidagi mumkin bo‘lgan eng katta masofadir, ya’ni $d(G) = \max_{v_1, v_2 \in V} d(v_1, v_2)$.

Uzunligi $d(G)$ ga teng bo‘lgan oddiy zanjir **diametral zanjir** deb ataladi. Tabiiyki, grafda diametral zanjir yagona bo‘lmasligi mumkin.

Bog‘lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kichigi (minimali) shu **grafning radiusi** deb ataladi.

G grafning radiusi, odatda, $r(G)$ bilan belgilanadi: $r(G) = \min_{v \in V} e(v)$. Ravshanki, $r(G) = \min_{v_1 \in V} \max_{v_2 \in V} d(v_1, v_2)$.

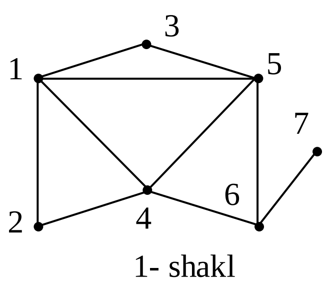
Bog‘lamli G grafdagi ekssentrisiteti radiusga teng v_0 uch **grafning markazi** (**markaziy uchi**) deb ataladi.

Agar v_0 uch G grafning markazi bo‘lsa, u holda $e(v_0) = \min_{v \in V} e(v)$ bo‘ladi, ya’ni grafning markaziy uchi minimal ekssentrisitetga egadir.

Agar grafning markazidan boshqa biror uchigacha bo‘lgan oddiy zanjir eng uzun masofaga ega bo‘lsa, u holda bu zanjir **radial oddiy zanjir** deb ataladi.

Tabiiyki, grafning radiusi uning diametridan katta emas va graf bittadan ko‘p markazga ega bo‘lishi ham mumkin. Bundan tashqari, grafning barcha uchlari uning markaziy uchlari bo‘lishi ham mumkin.

Grafning markaziy uchlarini topish bilan bog‘liq masalalar aholiga xizmat ko‘rsatadigan qandaydir ob’yektning (kasalxona, maktab va shu kabilarning) joylashish o‘rnini aniqlash bilan bog‘liq muammolarni hal qilishda qo‘llanilishi mumkin. Ta’kidlash kerakki, muayyan vaziyatlarda, ko‘pincha, boshqa holatlarni, jumladan, ob’yektgacha borish vaqti, punktlar orasidagi masofa va shu kabilarni hisobga olishga to‘g‘ri keladi. Bunday vaziyatlarda **joylashtirishning minimaks masalalari** deb ataluvchi masalalar vujudga keladi.



1- shakl

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu ghafda $d(1,6) = 2$, $d(2,7) = 3$, $d(G) = 3$; $(1,4,6,7)$ va $(1,5,6,7)$ zanjirlar diametral zanjirlardir, $(1,3)$ va $(1,3,5,6,7)$ zanjirlar esa diametral zanjirdirlar bo‘la olmaydi. Berilgan grafda 4, 5 va 6 belgili uchlar markazlar bo ‘lib, $r(G) = 2$ hamda $(6,7)$ va $(6,4,1)$ radial oddiy zanjirlardir. ■

2. Minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala. Berilgan bog‘lamli grafning har bir qirrasiga (agar berilgan graf oriyentirlangan bo‘lsa – yoyiga) qandaydir haqiqiy son mos qo‘yib, bu sonni **qirraning** (**yoyning**) **uzunligi** deb ataymiz. Qirraning (yoyning) uzunligi **additivlik** xossasiga ega deb faraz qilamiz, ya’ni qirralar (yoylar) yordamida tuzilgan **zanjirning** (**yo‘lning**) **uzunligi** shu zanjirni (yo‘lni) tashkil etuvchi qirralar (yoylar) uzunliklari yig‘indisiga tengdir.

Tabiiyki, qirraning yoki yoyning uzunligi tushunchasi yechilayotgan masalaning mohiyatiga qarab muayyan bir ma’noga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, ikkita shahar orasidagi masofa, qandaydir operatsiyani bajarish uchun zarur mablag‘ (xarajatlar) yoki vaqt va boshqalar. Shu nuqtai nazardan, umuman olganda, bu yerda manfiy uzunlikka ega yoki uzunligi nolga teng qirra (yoy) ham ma’noga ega deb hisoblanadi.

Amaliyotda uchraydigan ko‘plab masalalarda marshrut uzunligi maksimallashtirilishi yoki minimallashtirilishi talab etiladi. Shunday masalalardan biriga, aniqrog‘i, kommivoyajer masalasiga Gamilton graflari bilan shug‘ullanganda duch kelgan edik (ushbu bobning 5- paragrafiga qarang).

$G=(V,U)$ oriyentirlangan graf berilgan bo‘lsin, bu yerda $V=\{1,2,...,m\}$. G grafning biror $s\in V$ uchidan boshqa $t\in V$ uchiga boruvchi yo‘llar orasida uzunligi eng kichik bo‘lganini topish masalasi bilan shug‘ullanamiz. Bu masalani **minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala** deb ataymiz. Quyida bu masalaning umumlashmasi hisoblangan masalani qarab, uni ham o‘sha nom bilan ataymiz.

Grafdagi (i,j) yoyning uzunligini c_{ij} bilan belgilab, $C=(c_{ij}),\ i,j=\overline{1,m}$, matritsa berilgan deb hisoblaymiz. Yuqorida ta’kidlaganlarimizga ko‘ra, C matritsaning c_{ij} elementlari orasida manfiylari yoki nolga tenglari ham bo‘lishlari mumkin. Agar grafda biror i uchdan chiqib j uchga kirruvchi yoy mavjud bo‘lmasa, u holda bu yoyning uzunligini cheksiz katta deb qabul qilamiz ($c_{ij}=\infty$). Bundan tashqari, G grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl mavjud emas deb hisoblaymiz, chunki aks holda uzunligi eng kichik bo‘lgan yo‘l mavjud emas.

Minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Deykstra tomonidan taklif etilgan algoritm ko‘p qo‘llaniladi. Quyida grafning 1 belgili uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz) grafdagi ixtiyoriy k uchgacha (bu uchni oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish imkonini beruvchi **Deykstra algoritmi** keltirilgan.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1=0$ qiymatni mos qo‘yib, bu uchni dastlab $R=\varnothing$ deb qabul qilingan R to‘plamga kiritamiz: $R=\{1\}$. $\overline{R}=V\setminus R$ deb olamiz.

Umumiy qadam. Boshlang‘ich uchi R to‘plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R,\overline{R})$ bo‘lsin. Har bir $(i,j)\in(R,\overline{R})$ yoy uchun $h_{ij}=\varepsilon_i+c_{ij}$ miqdorni aniqlaymiz, bu yerda ε_i deb $i\in R$ uchga mos qo‘yilgan qiymat (grafning 1 belgili uchidan chiqib i belgili uchigacha eng qisqa yo‘l uzunligi) belgilangan.

$\varepsilon_j=\min\limits_{(i,j)\in(R,\overline{R})} h_{ij}$ qiymatni aniqlaymiz. $(R,\overline{R})$ to‘plamning oxirgi tenglikda minimum qiymat beruvchi barcha elementlarini, ya’ni (i,j) yoylarni ajratamiz. Ajratilgan yoylarning har biridagi $j\in\overline{R}$ belgili uchga ε_j qiymatni mos qo‘yamiz. ε_j qiymat mos qo‘yilgan barcha j uchlarni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib R to‘plamga kiritamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha (i,j) yoylar uchun $\varepsilon_i+c_{ij}\geq\varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz. Tekshirilayotgan tengsizlik o‘rinli bo‘lmagan (ja’ni $\varepsilon_{j_*}>\varepsilon_i+c_{ij_*}$ bo‘lgan) barcha j_* belgili uchlarning har biriga mos qo‘yilgan eski ε_{j_*} qiymat o‘rniga yangi $\varepsilon_i+c_{ij_*}$ qiymatni mos qo‘yamiz va (i,j_*) yoyni ajratamiz. Bunda eski ε_{j_*} qiymat aniqlangan paytda ajratilgan yoyni ajratilmagan deb hisoblaymiz.

Uchlarga qiymat mos qo‘yish jarayonini oxirgi (k belgili) uchga qiymat mos qo‘yilguncha davom ettiramiz. Grafning 1 belgili uchidan (manbadan) chiqib uning ixtiyoriy k uchigacha (oxirgi uchigacha) eng qisqa yo‘l uzunligi ε_k bo‘ladi.

Oxirgi qadam. Grafning oxirgi uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda uning 1 belgili uchiga kelguncha harakatlanib, natijada grafdagi 1 belgili uchdan ixtiyoriy k uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo‘l(lar)ni topamiz. ■

Umumiy qadam. 1- iteratsiya. $R=\{1\}$ va $\overline{R}=\{2,3,4,5,6\}$ bo‘lgani uchun boshlang‘ich uchi R to‘plamga tegishli, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plam elementi bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R,\overline{R})=\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$ga ega bo‘lamiz. $(R,\overline{R})$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir yoy uchun h_{ij} ning qiymatlarini topamiz:

$(1,2)$ yoy uchun $h_{12}=\varepsilon_1+c_{12}=0+2=2$;

$(1,3)$ yoy uchun $h_{13}=\varepsilon_1+c_{13}=0+10=10$;

$(1,4)$ yoy uchun $h_{14}=\varepsilon_1+c_{14}=0+13=13$.

Bu h_{12}, h_{13} va h_{14} miqdorlar orasida eng kichigi h_{12} bo‘lgani uchun $(1,2)$ yoyni ajratamiz (3- shaklda bu yoy qalin chiziq bilan belgilangan) va 2 belgili uchga $\varepsilon_2=2$ qiymatni mos qo‘yamiz. Algoritmga ko‘ra 2 uchni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib, R to‘plamga kiritamiz. Natijada $R=\{1,2\}$ va $\overline{R}=\{3,4,5,6\}$ to‘plamlarga ega bo‘lamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan bitta $(1, 2)$ yoy bo‘lgani uchun faqat bitta $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish kifoya. Bu tengsizlik $0 + 2 \geq 2$ ko‘rinishdagi to‘g‘ri munosabatdan iborat bo‘lgani uchun 2- iteratsiyaga o‘tamiz.

2- iteratsiya. $(R, \overline{R}) = \{(1, 3),(1, 4),(2, 3),(2, 5)\}$ bo‘lgani sababli $h_{13} = 10$, $h_{14} = 13$, $h_{23} = 7$ va $h_{25} = 11$ qiymatlarni va $\min\{h_{13}, h_{14}, h_{23}, h_{25}\} = h_{23} = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Bu yerda eng kichik qiymat $(2, 3)$ yoyga mos keladi. Shuning uchun, $(2, 3)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_3 = 7$ qiymatni 3 belgili uchga mos qo‘yamiz. 3 belgili uchni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib, R to‘plamga kiritgandan so‘ng $R = \{1, 2, 3\}$ va $\overline{R} = \{4, 5, 6\}$ to‘plamlar hosil bo‘ladi.

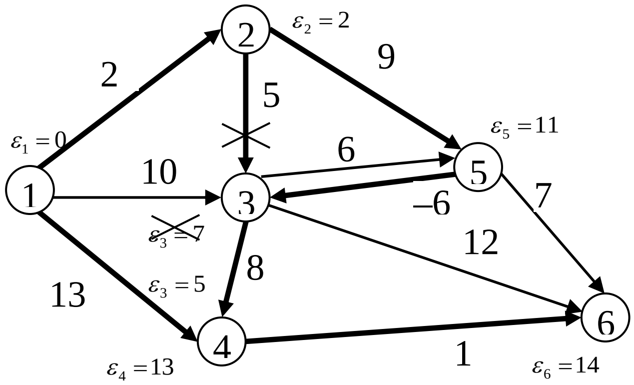
Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan uchta $(1, 2)$, $(1, 3)$ va $(2, 3)$ yoylardan birinchisi uchun $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishi 1- iteratsiyada tekshirilganligi va ε_1, ε_2 qiymatlarning o‘zgarmaganligi sababli faqat ikkinchi va uchinchi yoylarga mos $\varepsilon_1 + c_{13} \geq \varepsilon_3$ va $\varepsilon_2 + c_{23} \geq \varepsilon_3$ munosabatlarni tekshirish kifoya. Bu munosabatlar $0 + 10 \geq 7$ va $2 + 5 \geq 7$ ko‘rinishda bajariladi. Shuning uchun 3- iteratsiyaga o‘tamiz.

3- iteratsiya. Boshlang‘ich uchi $R = \{1, 2, 3\}$ to‘plamga tegishli, oxiri esa $\overline{R} = \{4, 5, 6\}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan yoylar to‘rtta: $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$ va $(3, 5)$. Shu yoylarga mos h_{ij} ning qiymatlari $h_{14} = 13$, $h_{25} = 11$, $h_{34} = 15$, $h_{35} = 13$ va, shuning uchun, $\min\{h_{14}, h_{25}, h_{34}, h_{35}\} = h_{25} = 11$ bo‘ladi. Demak, bu iteratsiyada $(2, 5)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_5 = 11$ deb olamiz. Endi, algoritmga ko‘ra, $R = \{1, 2, 3, 5\}$ va $\overline{R} = \{4, 6\}$ to‘plamlarni hosil qilamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan yoylar oltita: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$. Bu yoylarning har biri uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshirishimiz kerak. Lekin, 1- va 2- iteratsiyalarda $(1, 2)$, $(2, 3)$ va $(1, 3)$ yoylar uchun bu ish bajarilganligi sababli tekshirishni tarkibida 5 belgili uch qatnashgan $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$ yoylar uchun amalga oshirib, quyidagilarga ega bo‘lamiz: $(2, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_2 + c_{25} \geq \varepsilon_5$ munosabat to‘g‘ri ($2 + 9 \geq 11$), $(3, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_3 + c_{35} \geq \varepsilon_5$ munosabat to‘g‘ri ($7 + 6 \geq 11$), lekin $(5, 3)$ yoy uchun $\varepsilon_5 + c_{53} \geq \varepsilon_3$ munosabat noto‘g‘ri ($11 + (-6) = 5 < 7$). Oxirgi munosabatni hisobga olib, algoritmga ko‘ra $\varepsilon_3 = 7$ o‘rniga $\varepsilon_3 = 5$ deb olamiz va $(5, 3)$ yoyni ajratilgan deb, ilgari ajratilgan $(2, 3)$ yoyni esa ajratilmagan deb hisoblaymiz (3- shaklda $\varepsilon_3 = 7$ yozuvning va $(2, 3)$ yoyning qalin chiziq’i ustiga ajratilganlikni inkor qiluvchi $\times$ belgisi qo‘yilgan).

4- iteratsiya. $R=\{1, 2, 3, 5\}$, $\overline{R}=\{4, 6\}$ bo‘lgani uchun $(R,\overline{R})=\{(1, 4),(3, 4),(3, 6),(5, 6)\}$ va $h_{14}=13$, $h_{34}=13$, $h_{36}=17$, $h_{56}=18$ hamda $\min\{h_{14},h_{34},h_{36},h_{56}\}=h_{14}=h_{34}=13$ bo‘ladi. Demak, $(1, 4)$ va $(3, 4)$ yoylarni ajratamiz hamda 4 belgili uchga $\varepsilon_4=13$ qiymatni mos qo‘yamiz. Natijada $R=\{1, 2, 3, 5, 4\}$, $\overline{R}=\{6\}$ to‘plamlarga ega bo‘lamiz.

$\varepsilon_i+c_{ij}\geq\varepsilon_j$ munosabatning to‘g‘riligi $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$ va $(3, 4)$ yoylar uchun tekshirilib ko‘rilganda, uning barcha yoylar uchun bajarilishi ma’lum



3- shakl

bo‘ladi.

5- iteratsiya. Endi $(R,\overline{R})=\{(3, 6),(4, 6),(5, 6)\}$ bo‘lgani uchun $h_{36}=17$, $h_{46}=14$, $h_{56}=18$ va $\min\{h_{36},h_{46},h_{56}\}=h_{46}=14$ bo‘ladi. Bu yerda minimum $(4, 6)$ yoyda erishilgani uchun uni ajratib, orgrafning oxirgi 6 belgili uchiga $\varepsilon_6=14$ qiymatni mos qo‘yamiz.

Oxirgi qadam. Berilgan orgrafda 1 belgili uchdan 6 belgili uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo‘l(lar)ni topish maqsadida, algoritmga asosan, grafning oxirgi 6 belgili uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda harakatlanib, uning 1 belgili uchiga kelishimiz kerak. 6 belgili uchga kiruvchi uchta yoydan faqat bittasi ($(4, 6)$ yoy) ajratilgan bo‘lgani uchun $(4, 6)$ yoy yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda harakat qilib, 6 belgili uchdan 4 belgili uchga kelamiz. 4 belgili uchga kiruvchi ikkala ($(1, 4)$ va $(3, 4)$) yoylar ham ajratilgan bo‘lgani uchun biz tuzmoqchi bo‘lgan eng qisqa uzunlikka ega yo‘l yagona emas.

Agar harakatni $(1, 4)$ yoy yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 1 belgili uchga kelib, eng qisqa uzunlikka ega yo‘llardan biri bo‘lgan $\mu_1=(1, 4, 6)$ marshrutni topamiz.

Agarda harakatni $(3, 4)$ yoy yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 3 belgili uchga kelamiz. 3 belgili uchga kiruvchi ikkita yoydan faqat bittasi ($(5, 3)$ yoy) ajratilgan bo‘lgani uchun 3 belgili uchdan 5 belgili uchga kelamiz. Shu usulda davom etsak, oldin 2 belgili, keyin esa 1 belgili uchga o‘tib mumkin bo‘lgan eng qisqa uzunlikka ega bo‘lgan yo‘llardan ikkinchisini, ya’ni $\mu_2 = (1, 2, 5, 3, 4, 6)$ marshrutni aniqlaymiz.

Shunday qilib, 2- shaklda tasvirlangan grafda eng qisqa uzunlikka ega μ_1 va μ_2 yo‘llar borligini aniqladik. Bu yo‘llarning har biri minimal $\varepsilon_6 = 14$ uzunlikka ega. ■

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Graf uchlari orasidagi masofa deb nimaga aytiladi?
2. Graf uchlari orasidagi masofa metrikaning qanday aksiomalarini qanoatlantiradi?
3. Metrika aksiomalarining qaysi biri uchburchak tengsizligi aksiomasi deb ataladi?
4. Graf uchining ekssentrisiteti deganda nimani tushunasiz?
5. Grafning diametri deb nimaga aytiladi?
6. Diametral zanjir nima?
7. Grafning radiusi qanday aniqlanadi?
8. Grafning markazi yagona uchdan iborat bo‘lmasligi mumkinmi?
9. Grafning radial oddiy zanjiri qanday topiladi?
10. Graf qirrasining (yoyining) uzunligi deganda nimani tushunasiz?
11. Additivlik xossasini qanday tushunasiz?
12. Grafdagi zanjirning (yo‘lning) uzunligi qanday aniqlanadi?
13. Qanday masalaga minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala deb aytiladi?
14. Agar grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl bor bo‘lsa, u holda Deykstra algoritmini qo‘llab minimal uzunlikka ega yo‘lni topish mumkinmi?
15. Deykstra algoritmining umumiy qadamida qanday ishlar amalga oshiriladi?

14- MA’RUZA
Daraxtlar

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar 2. Grafning siklomatik soni
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda daraxt va unga ekvivalent tushunchalar va grafning siklomatik sonini o’rganish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - daraxt va unga ekvivalent tushunchalar va grafning siklomatik soni - Mustaqil tarzda daraxt va unga ekvivalent tushunchalar va grafning siklomatik soni oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: turli “Yirtqich–qurbon“ sistemasi uchun matematik modellar tuza olishini baholash.

Daraxtlar mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar
	2.1. Talabalarning turli “Yirtqich–qurbon“ sistemasi uchun matematik modellar tuzish haqida umumiy ma’lumotlar borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova).	Savollarga javob beradilar

2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida variatsion va Gamilton prinsiplaridan foydalanish haqidagi bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirib, ulardan foydalanib, turli "Yirtqich–qurbon" sistemasi uchun matematik modellar tuzishni tashkillashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda bu masalalarning modelini tahlil qiladi, ularda ba'zi paydo bo'lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o'zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo'ladi va turli "Yirtqich–qurbon" sistemasi uchun matematik modellar tuzishish bo'yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma'lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma'lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko'chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadilar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Grafda daraxtlar deb nimaga aytiladi?
2. Grafdagi daraxtlar uchun qanday xossalarni belasiz?
3. Grafdagi daraxtlardan qayerlarda foydalaniladi?
4. Grafning sinch grafi deb nimaga aytiladi?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Grafning siklamatik soni deb nimaga aytiladi
2. Grafdagi daraxtlar uchun Keli teorimasini kiltiring
3. Grafdagi daraxtlardan qanday foydalaniladi?

Asosiy qism

1. Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar. Siklga ega boʻlmagan orientirlanmagan bogʻlamli graf **daraxt** deb ataladi. Ta'rifga koʻra daraxt sirtmoqlar va karrali qirralarga ega emas. Siklga ega boʻlmagan orientirlanmagan graf **oʻrmon** (**asiklik graf**) deb ataladi.

1- misol. 1- shaklda bogʻlamli komponentali soni beshga teng boʻlgan graf tasvirlangan boʻlib, u oʻrmondir. Bu grafdagi bogʻlamli komponentalarning har biri daraxtdir. ■

1- teorema. *Uchlari soni m va qirralari soni n boʻlgan G graf uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:*

1) G *daraxtdir;*

2) G *asiklikdir va* $n = m - 1$*;*

3) G *bogʻlamlidir va* $n = m - 1$*;*

4) G *bogʻlamlidir va undan istalgan qirrani olib tashlash amalini qoʻllash natijasida bogʻlamli boʻlmagan graf hosil boʻladi, ya'ni* G*ning har bir qirrasi koʻprikdir;*

5) G *grafninng oʻzaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtiriladi;*

6) G *asiklik boʻlib, uning qoʻshni boʻlmagan ikkita uchini qirra bilan tutashtirish amalini qoʻllash natijasida faqat bitta siklga ega boʻlgan graf hosil boʻladi.*

Isboti. Teoremaning 1) tasdigʻidan uning 2) tasdigʻi kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf daraxt boʻlsin. Daraxtning ta'rifiga koʻra, u asiklik boʻlishini ta'kidlab, m boʻyicha matematik induksiya usulini qoʻllaymiz.

Matematik induksiya usulining bazasi: agar $m = 1$ boʻlsa, u holda G daraxt faqat bitta uchdan tashkil topgan boʻladi. Tabiiyki, agar bitta uchga ega boʻlgan grafda sikl boʻlmasa, u holda unda birorta ham qirra yoʻq, ya'ni $n = 0$. Demak, bu holda tasdiq toʻgʻridir.

Induksion oʻtish: G daraxt uchun $k \geq 2$ va $m = k$ boʻlganda 2) tasdiq oʻrinli boʻlsin deb faraz qilamiz. Endi uchlari soni $m = k + 1$ va qirralari soni n boʻlgan daraxtni qaraymiz. Bu daraxtning ixtiyoriy qirrasini (v_1, v_2) bilan belgilab, undan bu qirrani olib tashlasak, v_1 uchdan v_2 uchgacha marshruti (aniqrog‘i, zanjiri) mavjud bo‘lmagan grafni hosil qilamiz, chunki agar hosil bo‘lgan grafda bunday zanjir bor bo‘lsa edi, u holda G daraxtda sikl topilar edi. Bunday bo‘lishi esa mumkin emas.

Hosil bo‘lgan graf ikkita G_1 va G_2 bog‘lamli komponentalardan iborat bo‘lib, bu komponentalarning har biri daraxtdir. Yana shuni ham e’tiborga olish kerakki, G_1 va G_2 daraxtlarning har biridagi uchlar soni k dan oshmaydi.

Matematik induksiya usuliga ko‘ra, bu daraxtlarning har birida qirralar soni uning uchlari sonidan bitta kam bo‘lishini ta’kidlaymiz, ya’ni G_i graf (m_i, n_i)-graf bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinlidir: $n = n_1 + n_2 + 1$, $k + 1 = m_1 + m_2$ va $n_i = m_i - 1$ ($i = 1, 2$). Bu tengliklardan

$$n = n_1 + n_2 + 1 = m_1 - 1 + m_2 - 1 + 1 = (m_1 + m_2) - 1 = (k+1) - 1$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $m = k + 1$ bo‘lganda ham $n = m - 1$ tenglik o‘rinlidir. Bu esa, matematik induksiya usuliga ko‘ra, kerakli tasdiqning isbotlanganligini anglatadi.

Endi daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 2) tasdig‘idan uning 3) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf asiklik, ya’ni u siklga ega bo‘lmagan graf va $n = m - 1$ bo‘lsin. G grafning bog‘lamli bo‘lishini isbotlash kerak.

Agar G graf bog‘lamli bo‘lmasa, u holda uni har bir bog‘lamli komponentasi siklsiz graf G_i (ya’ni, daraxt) bo‘lgan qandaydir k ta ($k > 1$) graflar diz’yunktiv birlashmasi sifatida $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ tenglik bilan ifodalash mumkin. Har bir $i = \overline{1, k}$ uchun G_i graf daraxt bo‘lgani uchun, yuqorida isbotlagan tasdiqqa ko‘ra, agar unda m_i ta uch va n_i ta qirra bo‘lsa, u holda G_i asiklikdir va $n_i = m_i - 1$ tenglik o‘rinlidir. Tushunarliki, $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ va $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Demak,

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} m_i - k = m - k,$$

ya’ni G graf uchlarining umumiy soni undagi qirralar umumiy sonidan k ta ortiqdir. Bu esa, $k > 1$ bo‘lgani uchun, $n = m - 1$ tenglikka ziddir. Zarur tasdiq isbotlandi.

Teoremaning 3) tasdig‘idan uning 4) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. G – bog‘lamli graf va $n = m - 1$ bo‘lsin. Avvalo k ta bog‘lamlilik komponentalariga ega karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz (m, n)-graf uchun

$$m - k \le n \le \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$$

munosabat o‘rinli bo‘lishini eslatamiz (ushbu bobning 4- paragrafidagi 7-teoremaga qarang).

$n=m-1$ bo‘lgani sababli G bog‘lamli grafdan istalgan qirra olib tashlansa, natijada m ta uch va $(m-2)$ ta qirralari bo‘lgan graf hosil bo‘ladiki, bunday graf $m-k \leq n$ shartga binoan bog‘lamli bo‘la olmaydi. Kerakli tasdiq isbotlandi.

Daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 4) tasdig‘idan uning 5) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. G bog‘lamli graf va uning har bir qirrasi ko‘prik bo‘lsin deb faraz qilib, bu grafninng o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtirilishi mumkinligini ko‘rsatamiz. G bog‘lamli graf bo‘lgani uchun, uning istalgan ikkita uchi hech bo‘lmasa bitta oddiy zanjir vositasida tutashtiriladi.

Agar qandaydir ikkita uch bittadan ko‘p, masalan, ikkita turli oddiy zanjir vositasida tutashtirilishi imkoniyati bo‘lsa, u holda bu uchlarning biridan zanjirlarning birortasi bo‘ylab harakatlanib ikkinchi uchga, keyin bu uchdan ikkinchi zanjir bo‘ylab harakatlanib dastlabki uchga qaytish imkoniyati bor bo‘lar edi. Ya’ni qaralayotgan grafda sikl topilar edi.

Tabiiyki, tarkibida sikl mavjud bo‘lgan grafning siklga tegishli istalgan bitta qirrasini olib tashlash uning bog‘lamliligi xossasini o‘zgartirmaydi, ya’ni bu holda grafning siklga tegishli istalgan qirrasi ko‘prik bo‘lmaydi. Bu esa qilingan farazga ziddir. Teoremaning 4) tasdig‘idan uning 5) tasdig‘i kelib chiqishi isbotlandi.

Endi teoremaning 5) tasdig‘idan uning 6) tasdig‘i kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Berilgan G grafninng o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi mumkin bo‘lsin. Teskarisini, yaini G graf asiklik emas deb faraz qilamiz. Bu holda, G da sikl topiladi va undagi ixtiyoriy siklga tegishli istalgan turli ikkita uchni kamida ikkita oddiy zanjir vositasida tutashtirish imkoniyati bor. Bu esa G grafninng o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi shartiga ziddir.

G grafninng qo‘shni bo‘lmagan v_1 va v_2 uchlarini qirra bilan tutashtirish amalini qo‘llash natijasida faqat bitta siklga ega bo‘lgan graf hosil bo‘lishini ko‘rsatamiz. Shartga binoan qaralayotgan v_1 va v_2 uchlarni faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtirish mumkin. Oddiy zanjir ta’rifiga ko‘ra esa bu zanjir tarkibida sikl yo‘q. Shuning uchun v_1 va v_2 uchlarni G grafninng tarkibida bo‘lmagan (v_1, v_2) qirra bilan tutashtirish, albatta, tarkibida sikl topiladigan va bu sikl yagona bo‘lgan grafni hosil qiladi. Teoremaning 5) tasdig‘idan uning 6) tasdig‘i kelib chiqishi ham isbotlandi.

Nihoyat, 1- teoremaning 6) tasdig‘idagi shartlar baja-rilsa, G grafning daraxt bo‘lishini, ya’ni teoremaning 1) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, asiklik G graf bog‘lamli bo‘lmasin. U holda, bu grafning ixtiyoriy bog‘lamli komponentasidagi ixtiyoriy uchni uning boshqa bog‘lamli komponentasidagi ixtiyoriy uch bilan qirra vositasida tutashtirish amalini qo‘llash natijasida tarkibida sikl bo‘lgan graf hosil bo‘lmaydi. Bu esa 6) tasdiqning ikkinchi qismiga ziddir. ■

1- natija. *Bittadan ko‘p uchga ega bo‘lgan istalgan daraxtda hech bo‘lmasa ikkita darajasi birga teng uchlar mavjud.*

Isboti. Haqiqatdan ham, agar $v_1, v_2, ..., v_m$ berilgan daraxtning uchlari bo‘lsa, “ko‘rishishlar” haqidagi lemmaga binoan $\sum_{i=1}^{m} \rho(v_i) = 2(m-1)$ tenglik o‘rinlidir. Daraxtning ta’rifiga ko‘ra, u bog‘lamlidir, shuning uchun $\rho(v_i) \geq 1$ ($i = \overline{1, m}$). Bundan yuqoridagi tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun $\rho(v_1), \rho(v_2), ..., \rho(v_m)$ ketma-ketlikdagi hech bo‘lmaganda ikkita son birga teng bo‘lishi kelib chiqadi. ■

2- natija. m *ta uch va* k *ta bog‘lamli komponentali o‘rmondagi qirralar soni* $(m-k)$ *ga tengdir*.

Isboti. 1- teorema isbotining 2) tasdiqdan 3) tasdiq kelib chiqishiga bag‘ishlangan qismiga qarang. ■

2- teorema. *Istalgan daraxtning markazi uning bitta uchidan yoki ikkita qo‘shni uchlaridan iborat bo‘ladi.*

Isboti. Agar daraxt bitta uch yoki ikkita qo‘shni uch va ularni turashtiruvch qirradan tashkil topgan bo‘lsa, teorema tasdig‘i to‘g‘riligi oydindir.

G daraxt tarkibida ikkitadan ko‘p uch bor deb faraz qilamiz. G daraxtdagi darajalari birga teng barcha uchlarni (ya’ni, daraxtning barcha chetki uchlarini) bu uchlarga insident barcha qirralar (ya’ni, daraxtning barcha chetki qirralari) bilan birgalikda G daraxtdan olib tashlaymiz. Natijada uchlari va qirralari soni berilgan G daraxtdagi uchlar va qirralar sonidan kam bo‘lgan qandaydir G' daraxtni hosil qilamiz. G' daraxtdagi har bir uch ekssentrisiteti G daraxtdagi mos uch ekssentrisitetidan bitta kam bo‘lishi va bu daraxtlarning markazlari ustma-ust tushishi ravshandir.

Berilgan graf chekli bo‘lgani uchun, yuqoridagi bayon etilgan jarayonni yetarlicha marta takrorlash natijasida bitta uch yoki ikkita qo‘shni uch va ularni turashtiruvch qirradan tashkil topgan qandaydir daraxtni hosil qilamiz. ■

Uchlari soni ma’lum, o‘zaro izomorf bo‘lmagan va qandaydir shartlarni qanoatlantiruvchi daraxtlar sonini aniqlash masalasi daraxtlarni o‘rganishda muhim masala hisoblanadi. Yuqorida 4, 5 va 6ta uchlarga ega o‘zaro izomorf bo‘lmagan daraxtlar mos ravishda 2, 3 va 6ta ekanligi ta’kidlangan edi. A. Keli uglerod atomlari soni berilgan va C_nH_{2n+2} ko‘rinishdagi kimyoviy formula bilan ifodalanuvchi to‘yingan uglevodorodlar sonini topish masalasini har bir uchining darajasi bir yoki to‘rt bo‘lgan daraxtlar sonini topish masalasiga keltirib hal qilgan. Quyidagi teorema Keli nomi bilan yuritiladi.

3- teorema (Keli). *Uchlari soni m bo‘lgan belgilangan daraxtlar soni m^{m-2} ga teng.*

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi.

2. Grafning siklomatik soni. Faraz qilaylik, G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan qandaydir bog‘lamli graf bo‘lsin. Bu gfafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli graf bo‘lishi ravshandir. Grafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash amalini hosil bo‘lgan graflarga, imkoni boricha, ketma-ket qo‘llash natijasida G grafning barcha uchlarini bog‘lovchi graf – daraxtni hosil qilish mumkin. Bunday daraxt G **grafning sinch daraxti** (**sinchi**, **karkasi**, **qobirg‘asi**) deb ataladi.

Tabiiyki, bitta grafning bir necha sinch daraxtlari mavjud bo‘lishi mumkin.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qanday grafga daraxt deyiladi?
2. O‘rmon deb nimaga aytiladi?
3. O‘rmon bilan daraxt bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?
4. Daraxtning uchlari va qirralari sonlari orasida qanday bog‘lanish bor?
5. Daraxtdan biror qirra olib tashlansa natijada qanday xossalarga ega bo‘lgan graf hosil bo‘ladi?
6. Daraxtning har bir qirrasi haqida nima deyish mumkin?
7. Daraxtdagi o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchini nechta oddiy zanjir bilan tutahtirish mumkin?
8. O‘rmondagi o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uch oddiy zanjir bilan tutahtirilsa natijada qanday graf hosil bo‘lishi mumkin?
9. Daraxtning qo‘shni bo‘lmagan ikkita uchini qirra bilan tutashtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘ladi?
10. O‘rmondagi qo‘shni bo‘lmagan ikkita uchni qirra bilan tutashtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘ladi?
11. Bittadan ko‘p uchga ega bo‘lgan istalgan daraxtda qancha darajasi birga teng uchlar bor?
12. m ta uch va k ta bog‘lamli komponentasi bo‘lgan o‘rmonda qancha qirra bor?
13. Istalgan daraxtning markazi haqida nima deyish mumkin?
14. Grafning sinch daraxti deganda nimani tushunasiz?
15. Petersen grafidan bog‘lamlilikni buzmasdan nechta qirrani olib tashlash mumkin?

16. Oktaedrga mos grafdan bog‘lamlilikni buzmasdan nechta qirrani olib tashlash mumkin?
17. Grafning siklomatik soni qanday aniqlanadi?

15- MA’RUZA
Tarmoqlar. Fort algoritmi

Ma’ruza mashg’ulotida ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining shakli va turi	Muammoli ma’ruza
Ma’ruza rejasi/o’quv mashg’ulotining tuzilishi	1. Tarmoq tushunchasi 2. Tarmoqdagi oqimlar 3. Ford algoritmi
O’quv mashg’uloti maqsadi:	Talabalarda tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar va ford algoritmi haqida bilim va ko’nikmalar hosil qilish.
Pedagogik vazifalar: mavzuda rejalashtirilgan asosiy vazifalarni bajarib ko’rsatadi.	O’quv faoliyati natijalari: - tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar va ford algoritmi; - Mustaqil tarzda tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar va ford algoritmi tahlil qila oladilar.
Ta’lim usullari	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, proyektor, kompyuter, ekran
Ta’lim berish sharoiti	Ma’ruza uchun ajratilgan katta yorug’ auditoriya, jamoaviy ta’lim olishga mo’ljallangan xona va texnik vositalar
Monitoring va baholash	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, koseptual jadval Yozma so’rov: tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar va ford algoritmi tushuntira bilish olishini baholash.

Tarmoqlar. Fort algoritmi mavzusi bo’yicha o’quv mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Faoliyat	
	ta’lim beruvchi	ta’lim oluvchilar
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsad va kutilayotgan natijalarni yetkazadi. Mashg’ulot axborotli ma’ruza shaklida borishini ma’lum qiladi.	Tinglaydilar, yozib oladilar

2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Talabalarning tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar va ford algoritmi borasidagi bilimini aqliy hujum shaklida faollashtiradi. Buning uchun tegishli savollr beradi. (1-ilova). 2.2. Faollashtirilgan bilimlar asosida tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar va ford algoritmi haqidagi bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirib, ulardan foydalanib, tahliq qilishni tashkillashtiradi. Keyin talabalar bilan birgalikda ba'zi paydo bo'lgan savollariga javob beradi. Talabalar tomonidan o'zlashtirilmay qolgan tushunchalarni aniqlaydi. Buning uchun yordamchi savol va masalalardan foydalanadi. (Ilova 2) 2.3. Talabalarni kichik guruhlarga bo'ladi va ularga tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar va ford algoritmi masalasining boshqa shartlarda matematik modelni keltirib chiqarish bo'yicha bittadan topshiriq beradi va bularni ifodalovchi klaster tuzishlarini aytadi va guruhlarda ish boshlanganini ma'lum qiladi. 2.4. Taqdimot boshlanganligini ma'lum qiladi, guruhlar chiqishlarini boshqaradi. Taqdimotni yakunlaydi topshiriqni eng yaxshi bajargan talabaning ishini daftarga ko'chirib olishni aytadi va yakuniy xulosani qiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar Kichik guruhlar masalalarni yechadilar, klaster chizadilar va guruh vakillari taqdimot qiladilar, yakuniy xulosani beradilar, daftarga yozadilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi. (Ilova 3)	Tinglaydilar topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Tarmoq tushunchasi haqida ayting?
2. Tarmoqning uchlari deb nimaga aytiladi?
3. Tarmoqning qutblari deb nimaga aytiladi?
4. Giprgraf deganda nimani tushunasiz?
5. Ford algoritmi haqida tushuncha bering

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Tarmoqdagi oqimlar haqida tushuncha bering?
2. Tarmoqda yunalgan oqim deb nimaga aytiladi?
3. Tarmoqda oqimning miqdori deb nimaga aytiladi?
4. Tarmoqda maksimal oqim deb nimaga aytiladi?

Asosiy qism

1. Tarmoq tushunchasi. Graflar nazariyasida hozirgacha ba'zi iboralar bo'yicha umumiy kelishuv qaror topmaganligini qayd qilgan edik. Bu fikr graflar nazariyasining **tarmoq** va tarmoqqa oid tushunchalari bilan ish ko'rganda yaqqol namoyan bo'ladi. Ba'zan, "tarmoq" iborasi o'rniga "to'r" iborasini ham qo'llaydilar. Masalan, S.V. Yablonskiyning 1986 yilda bosilib chiqqan Введение в дискретную математику (Diskret matematikaga kirish) nomli o'quv qo'llanmasida ([1]da) graf tushunchasi umumlashtirilib, tarmoqning quyidagi ta'rifi berilgan va "tarmoq" tushunchasi xususida fikrlar ham bayon qilingan.

"Berilgan $M=\{a_1,a_2,...\}$ to'plam va har bir E_i elementi M dan olingan $R=\{E_0;E_1,E_2,...\}$ majmuani (naborni) **tarmoq** deb ataymiz va $M(E_0;E_1,E_2,...)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $E_i=(a_{v_1(i)},a_{v_2(i)},...)$. M to'plamning ob'yektlari tarmoqning **uchlari** deb, E_0 majmuadagi ob'yektlar esa – **tarmoqning qutblari** deb ataladi".

Yuqorida eslatilgan kitobda ta'kidlanishicha: "Adabiyotda tarmoq tushunchasiga yaqin tushunchalar ham uchraydi, masalan, "**blok-sxema**" tushunchasi, "**gipergraf**" tushunchasi. Blok-sxema tushunchasi tarmoq tushunchasidan oldin paydo bo'lgan, gipergraf tushunchasi esa – keyinroq".

Gipergraf tushunchasi – bu graf tushunchasining shunday umumlashmasiki, bunda qirralar na faqat ikki elementli bo'lishlari, ular uchlar to'plamining istalgan qism to'plamlari bo'lishlari ham mumkin.

Graf tushunchasining turli umumlashmalarini ma'qullagan hamda bunday umumlashmalar turli masalarni hal etishda zarur qurol sifatida ishlatilishini ta'kidlagan holda [10] kitobdagi tarmoq tushunchasining bir-biriga ekvivalent bo'lgan quyidagi ikki ta'rifini keltiramiz:

1) har bir a yoyiga $\psi(a)$ manfiymas haqiqiy son mos qo'yilgan N orgraf **tarmoq** deb ataladi;

2) **tarmoq** deb shunday (D,ψ) juftlikka aytiladiki, bunda $D=(V,U)$ – orgraf, ψ esa D orgrafning yoylari to‘plamini manfiymas haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya.

2. Tarmoqdagi oqimlar. Graflar (orgraflar) bilan bog‘liq ko‘plab tushunchalarni osonlik bilan tarmoqlar uchun ko‘chirish mumkin.

$T=(G,b)$ tarmoq berilgan bo‘lsin, bu yerda $G=(V,U)$ – bog‘lamli graf (yoki orgraf, yo bo‘lmasa, aralash graf), b esa G grafning yoylarini manfiymas b_{ij} ($v_i,v_j \in V$) haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya. G grafda sirtmoq va karrali qirra va/yoki yoylar bo‘lmasin deb faraz qilamiz. Ikkita v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi oriyentirlanmagan yoyni (qirrani) ikkita oriyentirlangan yoylarga almashtirish mumkin deb hisoblaymiz. Shuning uchun bundan buyon G grafni orgraf deb hisoblash mumkin.

Ta’kidlaymizki, “tarmoq” tushunchasi har bir yoyga bir necha sonlarni mos qo‘yish imkoniyatini beradi, grafda (orgrafda) esa yoy faqatgina mos uchlarning tutashtirilgan yoki tutashtirilmaganligini aniqlaydi, xolos. Har bir (v_i,v_j) yoyga manfiymas b_{ij} sonni mos qo‘yib, bu sonni **yoyning o‘tkazish qobiliyati** deb ataymiz. Tarmoqning har bir $v \in V$ uchi uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz: v **uchning chiqish yarim darajasi** $\vec{\rho}(v)$ – bu v uchdan chiquvchi barcha yoylar o‘tkazish qobiliyatlari yig‘indisi, v **uchning kirish yarim darajasi** $\overleftarrow{\rho}(v)$ – bu v uchga kiruvchi barcha yoylar o‘tkazish qobiliyatlari yig‘indisi.

“Ko‘rishishlar” haqidagi lemma bu yerda quyidagicha ifodalanadi: *tarmoqning barcha uchlari chiqish yarim darajalari yig‘indisi ularning kirish yarim darajalari yig‘indisiga tengdir.*

Grafning uchlari orasida kirish yarim darajalari nolga teng bo‘lganlari guruhini ajratamiz. Bu guruhga tegishli uchlarning har biri **manba** deb ataladi. Shunga o‘xshash, orgrafning chiqish yarim darajalari nolga teng bo‘lgan uchlari guruhini ham ajratish mumkin. Bu guguhga tegishli har bir uch **o‘pqon** deb ataladi.

Faraz qilaylik, G orgraf faqat bitta v_s manbaga va faqat bitta v_t o‘pqonga ega bo‘lsin. Bir necha manba va/yoki o‘pqonga ega bo‘lgan tarmoqning orgrafiga yangi elementlar qo‘shib olish yo‘li bilan yuqoridagi xususiy holga osonlik bilan keltiriladi.

G orgrafning har bir (v_i,v_j) yoyiga manfiymas x_{ij} sonlar mos qo‘yilgan bo‘lib, biror $p \geq 0$ uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $\sum\limits_{(v_i,v_k)\in U} x_{ik} - \sum\limits_{(v_k,v_j)\in U} x_{kj} = \begin{cases} -p, \text{ agar } k=s \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } k\neq s \text{ va } k\neq t \text{ bo'lsa,} \\ p, \text{ agar } k=t \text{ bo'lsa,} \end{cases}$

2) G orgrafda mavjud barcha (v_i,v_j) yoylar uchun $0\le x_{ij}\le b_{ij}$.

Bu shartlar bajarilganda $X=\{x_{ij}\,|\,(v_i,v_j)\in U\}$ to‘plamga T tarmoqdagi v_s manbadan v_t o‘pqonga yo‘nalgan **oqim** deb, p miqdorga esa, bu X **oqimning miqdori** deb ataladi. 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi har bir x_{ij} songa (v_i,v_j) **yoy bo‘ylab oqim** yoki **yoy oqimi** deyiladi.

Yuqoridagi 1) shartga ko‘ra manba va o‘pqondan farqli istalgan uchga “kiruvchi” oqim shu uchdan “chiquvchi” oqimga tengdir, 2) shartga ko‘ra esa, istalgan yoy bo‘ylab oqim miqdori shu yoyning o‘tkashish qobiliyatidan oshmaydi. 1) shartdan ko‘rinib turibdiki, manbaga insident yoylar bo‘yicha oqimlar yig‘indisi o‘pqonga insident yoylar bo‘yicha oqimlar yig‘indisiga tengdir: $\sum\limits_{(v_s,v_j)\in U} x_{sj} = \sum\limits_{(v_i,v_t)\in U} x_{it} = p$

.

1- misol. 1- shaklda v_0 manba va v_5 o‘pqoni bo‘lgan $T=(G,b)$ tarmoq tasvirlangan bo‘lib, uning yoylari yoniga mos o‘tkazish qobiliyatlari yozilgan, bunda $G=(V,U)$,

$$V=\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},$$

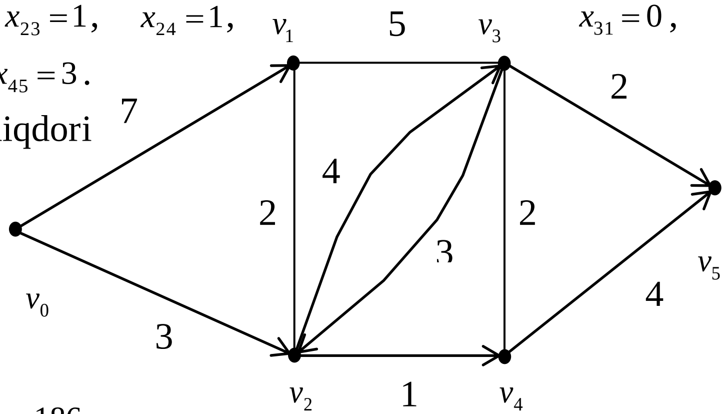
$$U=\{\overrightarrow{(v_0,v_1)},\overrightarrow{(v_0,v_2)},(v_1,v_2),(v_1,v_3),\overrightarrow{(v_2,v_3)},$$
$$\overleftarrow{(v_2,v_3)},\overrightarrow{(v_2,v_4)},(v_3,v_4),\overrightarrow{(v_3,v_5)},\overrightarrow{(v_4,v_5)}\}$$

Bu tarmoq uchun $b_{01}=7$, $b_{02}=3$, $b_{12}=2$, $b_{13}=5$, $b_{21}=2$, $b_{23}=4$, $b_{24}=1$, $b_{31}=5$, $b_{32}=3$, $b_{34}=2$, $b_{35}=2$, $b_{43}=2$, $b_{45}=4$ ekanligi shakldan ko‘rinib turibdi.

Tarmoqning har bir uchi uchun chiqish yarim darajalari va kirish yarim darajalarini aniqlaymiz: $\vec{\rho}(v_0)=10$, $\vec{\rho}(v_1)=7$, $\vec{\rho}(v_2)=7$, $\vec{\rho}(v_3)=12$, $\vec{\rho}(v_4)=6$, $\vec{\rho}(v_5)=0$, $\overleftarrow{\rho}(v_0)=0$, $\overleftarrow{\rho}(v_1)=14$, $\overleftarrow{\rho}(v_2)=8$, $\overleftarrow{\rho}(v_3)=11$, $\overleftarrow{\rho}(v_4)=3$, $\overleftarrow{\rho}(v_5)=6$.

Berilgan T tarmoq orqali v_0 manbadan v_5 o‘pqonga 4 kattalikka ega bo‘lgan X^1 oqimni quyidagi sonlar to‘plami bilan ifodalash mumkin: $x_{01}=2$, $x_{02}=2$, $x_{12}=0$, $x_{13}=2$, $x_{21}=0$, $x_{23}=1$, $x_{24}=1$, $x_{31}=0$, $x_{32}=0$, $x_{34}=2$, $x_{35}=1$, $x_{43}=0$, $x_{45}=3$. Qaralayotgan X^1 oqimning miqdori $p_1=x_{01}+x_{02}=x_{35}+x_{45}=4$. ■

Tarmoq bo‘ylab o‘tkazish mumkin bo‘lgan oqimlar orasida miqdori eng katta (maksimal)



1-

oqimni topish amaliyot nuq-tai nazaridan katta ahamiyatga egadir. Bunday oqimlar **maksimal oqimlar** deb ataladi. 1- misolda keltirilgan oqim maksimal oqim emas, chunki berilgan tarmoq uchun miqdori 5 bo‘lgan oqim bor (ushbu paragrafning oxiriga qarang).

Albatta, umumiy holda, tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo‘lishi mumkin.

Maksimal oqimni o‘rganishda quyidagi tushunchalarni kiritish maqsadga muvofiqdir. **To‘yingan yoy** – bu yoy bo‘ylab oqim miqdori uning o‘tkazish qobiliyatiga teng, **to‘yinmagan yoy** – bu yoy bo‘ylab oqim miqdori uning o‘tkazish qobiliyatidan kichik.

1- teorema. $T=(G,b)$ tarmoqdagi ixtiyoriy X oqim miqdori $p(X)$ shu tarmoqdagi v_s manba va v_t o‘pqonni ajratuvchi har qanday $(R,\overline{R})$ kesimning o‘tkazish qobiliyatidan oshmaydi, ya’ni $p(X)\le b(R,\overline{R})$.

Isboti. $T=(G,b)$ tarmoqdagi X oqim ta’rifidan bevosita quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$p(X)=\sum_{(v_s,v_j)\in U} x_{sj}\,,\quad 0=\sum_{(v_i,v_k)\in U} x_{ik}-\sum_{(v_k,v_j)\in U} x_{kj}\,,\quad v_k\in R.$$

Bu tengliklarning mos tomonlaridagi ifodalarni qo‘shib va o‘xshash hadlarini ixchamlab,

$$p(X)=\sum_{(v_i,v_j)\in(R,\overline{R})} x_{ij}-\sum_{v_j\in\overline{R},v_i\in R} x_{ji}$$

tenglikni olamiz. 2) shartni va $\sum_{v_j\in\overline{R},v_i\in R} x_{ji}\ge 0$ ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglikdan $p(X)\le\sum_{(v_i,v_j)\in(R,\overline{R})} b_{ij}=b(R,\overline{R})$ munosabat kelib chiqadi. ■

1955 yilda L. R. Ford va D. R. Falkerson tomonidan **maksimal oqim va minimal kesim haqidagi teorema** deb ataluvchi quyidagi teorema isbotlangan.

2- teorema (Ford-Falkerson). Istalgan tarmoqda manbadan o‘pqonga maksimal oqimning miqdori manbani o‘pqondan ajratuvchi minimal kesimning o‘tkazish qobiliyatiga teng.

Isboti. $T=(G,b)$ tarmoq, $G=(V,U)$ orgraf, $v_s\in V$ manba, $v_t\in V$ o‘pqon va berilgan tarmoqdagi maksimal oqimning miqdori bo‘lsin. Agar tarmoqda shunday $X^*=\{x_{ij}^*\,|\,(v_i,v_j)\in U\}$ oqim topilsaki, uning $p^*=p(X^*)$ miqdori biror $(R^*,\overline{R^*})$ kesimning o‘tkazish qobiliyatiga teng bo‘lsa, 1- teoremadan shu X^* maksimal oqim, $(R^*,\overline{R^*})$ esa minimal kesim bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, teorema isbotiga ega bo‘lish uchun $p^*=b(R^*,\overline{R^*})$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan $(R^*,\overline{R^*})$ kesimni qurish mumkinligini ko‘rsatish yetarli.

Bunday kesimni qurish maqsadida tarkibida albatta v_s uch bor bo‘lgan, lekin v_t uchni saqlamaydigan R^* to‘plamni aniqlash zarur. Bu R^* to‘plam v_s uchdan chiquvchi zanjir bilan tutashtirish mumkin bo‘lgan uchlar to‘plamidan iborat bo‘ladi. V to‘plamning qolgan uchlari $\overline{R^*}$ to‘plamni tashkil etadi.

$X^* = \{x_{ij}^* \mid (v_i, v_j) \in U\}$ maksimal oqim bo‘lsin deb faraz qilamiz. Shu oqimga mos R^* to‘plamning elementlarini ketma-ket ravishda quyidagi qoida bo‘yicha aniqlaymiz:

– $v_s \in R^*$;

– agar $v_i \in R^*$ va $x_{ij}^* < b_{ij}$ bo‘lsa, u holda $v_j \in R^*$;

– agar $v_i \in R^*$ va $x_{ji}^* > 0$ bo‘lsa, u holda $v_j \in R^*$.

Agar R^* to‘plamni aniqlash jarayonida v_t uchni R^* to‘plamga kiritish imkoniyati topilmasa, ya’ni $v_t \notin R^*$ bo‘lsa, u holda izlanayotgan $(R^*, \overline{R^*})$ kesimni qurish mumkin bo‘ladi.

Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $v_t \in R^*$ bo‘lsin. U holda, R^* to‘plamning aniqlanish qoidasiga asoslanib, shunday $\mu = (v_s, v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_m}, v_t)$ zanjirni qurish mumkinki, uning barcha to‘g‘ri yoylari oqimga to‘yinmagan, teskari yoylarida esa oqim musbat bo‘ladi. μ zanjirning barcha to‘g‘ri yoylari to‘plamini $U_+(\mu)$, teskari yoylari to‘plamini esa $U_-(\mu)$ deb belgilaymiz.

Quyidagi miqdorlarni qaraymiz: $\vec{\varepsilon} = \min\limits_{(v_i, v_j) \in U_+(\mu)} (b_{ij} - x_{ij}^*)$, $\overleftarrow{\varepsilon} = \min\limits_{(v_i, v_j) \in U_-(\mu)} x_{ij}^*$.

Tushunarliki, $\varepsilon = \min(\vec{\varepsilon}, \overleftarrow{\varepsilon}) > 0$ bo‘ladi. Agar μ yo‘lning barcha to‘g‘ri yoylarida oqim ε miqdorga oshirilib, uning barcha teskari yoylarida esa ε miqdorga kamaytirilsa, u holda tarmoqdagi oqim miqdori ε ga ortadi. Bu esa x^* oqimning maksimal oqim ekanligiga ziddir. Olingan qarama-qarshilik $v_t \notin R^*$ ekanligini ko‘rsatadi.

Endi yuqorida bayon qilingan qoidani ketma-ket qo‘llab hosil qurilgan R^* to‘plam uchun $\overline{R^*} = V \setminus R^*$ deb olsak, G orgrafning R^* to‘plamga tegishli uchlarning biridan chiqib $\overline{R^*}$ to‘plamga tegishli uchlarning biriga kiruvchi barcha yoylari to‘plami $(R^*, \overline{R^*})$ kesimni tashkil etadi.

R^* to‘plamning aniqlanishiga asosan barcha $(v_i, v_j) \in (R^*, \overline{R^*})$ yoylar oqimga to‘yingan ($x_{ij}^* = b_{ij}$), $\overline{R^*}$ to‘plamga tegishli uchlardan chiqib R^* to‘plamga tegishli uchlarga kiruvchi barcha $(v_j, v_i) \in U$ yoylarda esa oqim nolga teng ($x_{ji}^* = 0$) bo‘ladi. Shuning uvhun, 1- teoremaning isbotida hosil qilingan $p(X) = \sum\limits_{(v_i, v_j) \in (R, \overline{R}),} x_{ij} - \sum\limits_{v_j \in \overline{R}, v_i \in R} x_{ji}$ formulaga ko‘ra,

$$p^* = p^*(X) = \sum_{(v_i,v_j)\in(R^*,\overline{R^*})} x^*_{ij} = \sum_{(v_i,v_j)\in(R^*,\overline{R^*})} b_{ij} = b(R^*,\overline{R^*})$$

munosabatni olamiz. Demak, qurilgan $(R^*,\overline{R^*})$ kesim uchun $p^* = b(R^*,\overline{R^*})$ tenglik bajariladi. Bu yerdan, yuqoridagi eslatilgan mulohazalarga ko‘ra, teorema isbotiga ega bo‘lamiz.

3. Ford algoritmi. $T = (G,b)$ tarmoqni qaraymiz, bu yerda $G = (V,U)$ – orgraf, b esa G orgrafning yoylarini manfiymas b_{ij} ($v_i, v_j \in V$) haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya.

G orgraf faqat bitta manbaga va faqat bitta o‘pqonga ega bo‘lsin deb faraz qilamiz. Maksimal oqim va minimal kesim haqidagi Ford-Falkerson teoremasining yuqorida keltirilgan isboti tarmoqdagi maksimal oqimni topish algoritmini tuzish nuqtai nazardan konstruktivdir.

T tarmoqning uchlariga, ya’ni V to‘plam elementlariga $0,1,2,...,m$ raqamlarni mos qo‘yib, tarmoqning manbasi 0 uch, o‘pqoni esa m uch bo‘lsin deb hisoblaymiz. Bu tarmoqda Ford tomonidan taklif etilgan maksimal oqimni topish algoritmi bilan tanishamiz. **Ford algoritmining** jadvallar bilan ish ko‘riladigan jarayoni dastlabki, umumiy (takrorlanuvchi) va yakuniy qadamlardan iborat bo‘lib, u quyida keltirilgan.

Dastlabki qadam. O‘lchamlari $(m+1)\times(m+1)$ bo‘lgan jadvalni quyidagicha tuzamiz. Agar (i,j) yoyning o‘tkazish qobiliyati b_{ij} noldan katta va unga simmetrik (j,i) yoyining o‘tkazish qobiliyati b_{ji} nolga teng bo‘lsa, u holda jadvalning (i,j) katagiga b_{ij} sonni, uning asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik (j,i) katagiga esa, nolni yozamiz. Agar $b_{ij} = b_{ji} = 0$ bo‘lsa, u holda jadvalning (i,j) va (j,i) kataklari bo‘sh qoldiriladi.

Umumiy qadam. 1. Tarmoqning manbasidan o‘pqoniga o‘tkazish qobiliyati noldan katta bo‘lgan yo‘l izlaymiz. Buning uchun jadvalning tarmoqdagi 0 uchga mos keluvchi ustuniga “*” belgisini qo‘yamiz. Jadvalning 0 uchga mos satridan $b_{0j} > 0$ ($j = \overline{1,m}$) elementlarni topib, bu elementlar joylashgan ustunlarni 0 raqami bilan belgilaymiz.

Natijada tarmoqning musbat o‘tkazish qobiliyatiga ega bo‘lgan barcha $(0,j)$ yoylari aniqlanadi. Bu yoylar manbadan o‘pqonga boruvchi yo‘lning dastlabki yoylaridir.

Belgiga ega ustunlar raqamlari bilan bir xil raqamli satrlarning har birini ketma-ket tekshirib chiqamiz. Tekshirish jarayonida har bir sunday satrda, masalan, jadvalning i uchga mos satrida belgiga ega bo‘lmagan ustunlarda $b_{ij} > 0$

elementlarni izlaymiz va shunday element(lar) topilsa bu element(lar) joylashgan ustun(lar)ni tekshirilayotgan satr raqami (ya'ni i) bilan belgilaymiz.

Shu tarzda davom ettirilsa, natijada manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish qobiliyatli izlangan yo'lning navbatdagi yoylari bo'lib xizmat qilishi mumkin bo'lgan yoylar topilgan bo'ladi. Jadvaldagi belgiga ega ustunlar raqamlariga mos raqamli tarmoqning uchlariga to'gri keluvchi satrlarni tekshirish jarayonini quyidagi mumkin bo'lgan hollardan biri amalga oshguncha davom ettiramiz:

a) jadvalning o'pqonga mos ustuni belgilandi;

b) jadvalning yangi ustunlarini (shu jumladan, o'pqonga mos ustunini ham) belgilash imkoniyati yo'q.

Agar a) hol ro'y bersa, u holda tarmoqda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan biror μ yo'l bor. Bu yo'l quyidagicha aniqlanadi.

Jadvalning o'pqonga mos m ustunining belgisi k bo'lsin deb faraz qilaylik. Demak, μ yo'lda m uchdan oldingi uch k uchdir. Jadvalning k uchga mos satri va m uchga mos ustuni kesishgan (k,m) katagidagi b_{km} elementiga "–" belgisi (b^-_{km}), shu katakka asosiy diagonalga nisbatan simmetrik hisoblangan (m,k) katakdagi b_{km} elementga esa "+" belgisi (b^+_{mk}) qo'yamiz.

Endi jadvalning k uchga mos ustuni belgisi r raqami bo'lsin deb faraz qilamiz. Jadvaldagi b^+_{mk} elementdan jadvalning k uchga mos ustuni bo'ylab harakatlanib, uning r uchga mos satriga o'tamiz va b_{rk} elementga "–" belgisi, asosiy diagonalga nisbatan simmetrik b_{kr} elementga esa "+" belgisi qo'yamiz. "+" va "–" belgilari qo'yish jarayonini manbaga mos 0 satrga kelib undagi mos elementga "–" belgisi, simmetrik elementga esa "+" belgisi qo'yguncha davom ettiramiz.

Umumiy qadamning 2- bandiga o'tamiz.

Agar b) hol bajarilsa, bu holda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan boshqa yo'l yo'q. Shuning uchun umumiy qadamni bajarish jarayoni tugaydi.

Jadvalning belgilangan ustunlariga mos orgrafning uchlari minimal o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan $(R,\overline{R})$ kesim uchun R to'plamni tashkil etadi, orgrafning qolgan uchlari esa $\overline{R}$ to'plamga tegishlidir. $i \in R$ uchdan chiquvchi va $j \in \overline{R}$ uchga kiruvchi barcha (i,j) yoylar to'plami berilgan tarmoq uchun minimal kesimdir. Yakuniy qadamga o'tamiz.

2. Topilgan μ yo‘l o‘tkazish qobiliyatining θ qiymatini topamiz. Tabiiyki, θ son μ yo‘lni tashkil etuvchi yoylar o‘tkazish qobiliyatlarining eng kichigiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\theta = \min_{(i,j)\in\mu} b_{ij}^{-} .$$

Umumiy qadamning 3- bandiga o‘tamiz.

3. Topilgan μ yo‘lga tegishli yoylarning va ularga simmetrik yoylarning qolgan o‘tkazish qobiliyatlarini aniqlaymiz. Buning uchun jadvalning “–” belgisi bo‘lgan b_{ij}^{-} elementlaridan θ sonni ayirib, “+” belgili b_{ij}^{+} elementlariga esa θ sonni qo‘shib, natijalarni jadvaldagi mos o‘rinlariga yozamiz. Jadvalning “–” yoki “+” belgisi bo‘lmagan elementlari ozgarmaydi. Jadvaldagi barcha belgilarni olib tashlaymiz. Natijada o‘tkazish qobiliyatlari o‘zgargan tarmoqqa mos va dastlabki jadvalga o‘xshash bo‘lgan yangi jadvalni hosil qilamiz. Umumiy qadamning 1-bandiga o‘tamiz.

Yakuniy qadam. Dastlabki jadvalning elementlaridan oxirgi qadamda hosil bo‘lgan jadvalning mos elementlarini ayi-ramiz. Natijada musbat elementlari (i, j) yoyning mos x_{ij} oqim miqdorlariga teng bo‘lgan, elementlari esa asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik joylashgan oxirgi jadvalni hosil qilamiz. Tarmoqdagi maksimal oqim miqdori p oxirgi jadvalning manbaga mos satri yoki o‘pqonga mos ustuni elementlari yig‘indisiga, ya’ni

$$p = \sum_{j=1}^{m} x_{0j} = \sum_{i=0}^{m-1} x_{im} .$$

Bu maksimal oqim qiymatini umumiy qadamni bajarish jarayonlarida aniqlangan barcha θ sonlarni qo‘shib ham hosil qilish mumkin. ■

Ilova 3

Mavzuni mutahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Graf tushunchasi qanday umumlashtirilishi mumkin?
2. Tarmoqdagi oqim deganda nimani tushunasiz?
3. Yoyning o‘tkazish qobiliyati nima?
4. Graf uchlarining chiqish va kirish yarim darajalari deb nimaga aytiladi?
5. Tarmoqda manba va o‘pqon deganda nimani tushunasiz?
6. Yoy bo‘ylab oqim nima?
7. Tarmoqdagi oqim miqdori qanday aniqlanadi?
8. Tarmoqdagi maksimal oqim deganda nimani tushunasiz?
9. To‘yingan yoy bilan to‘yinmagan yoy bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?
10. To‘g‘ri yoy bilan teskari yoy orasida qanday farq bor?
11. Tarmoqdagi manbani o‘pqondan ajratuvchi kesim qanday aniqlanadi?

12. Tarmoqdagi minimal kesim deganda nimani tushunasiz?
13. Ford-Falkerson teoremasiga ko‘ra istalgan tarmoqda manbadan o‘pqonga maksimal oqimning miqdori nimaga teng?
14. Tarmoqdagi maksimal oqimni topishga mo‘ljallangan Ford algoritmning jadvallar bilan ish ko‘radigan jarayoni qanday qadamlardan iborat?

Mashq va masalalar to’plami

1. Ixtiyoriy n natural son va chekli A to‘plam uchun $|A^n| = |A|^n$ tenglikning o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlang.
2. Yetti so‘mdan ortiq butun son bilan ifodalanuvchi pul to‘lovini faqat 3 so‘mlik va 5 so‘mliklar bilan amalga oshirish mumkinligini isbotlang.
3. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli yoki undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
4. 13 nafar qiz va 12 nafar o‘g‘il boladan tashkil topgan talabalar guruhidanbir nafar talaba tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
5. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli va bitta undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
6. Qiroatxonada har biri ikki o‘rinli stollar to‘rt qatorga sakkiztadan joylashtirilgan. Haftaning yakshanba kunidan tashqari har kuni qiroatxona o‘quvchilarga sakkiz soat xizmat ko‘rsatadi. Qiroatxonaning bir haftada o‘quvchilarga mumkin bo‘lgan eng ko‘p xizmat ko‘rsatish vaqtini (o‘rin$\times$soat birligida) toping.
7. Agar A va B shaharlarni to‘rtta yo‘l, B va C shaharlarni esa uchta yo‘l bog‘lasa, u holda A shahardan B shahar orqali C shaharga borish imkoniyatlari sonini aniqlang.
8. Shaxmat taxtasiga oq va qora shohlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.
9. Shaxmat taxtasiga oq va qora ruxlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.
10. Yakkamualliflikda yozilgan Axmedovning n_A ta, Botirovning n_B ta va Davronovning n_D ta kitoblardan
    a) bitta kitobni, b) turli mualliflarning ikkita kitobini,
    d) turli mualliflarning uchta kitobini
    tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
11. Ixtiyoriy chekli A to‘plamning juft quvvatli qism to‘plamlari to‘plamining quvvati shu A to‘plamning toq quvvatli qism to‘plamlari to‘plamining quvvatiga tengligini isbotlang.

12. Quvvati 100ga teng bo‘lgan to‘plamning 40 elementli qism to‘plamlari soni bilan shu to‘plamning 60 elementli qism to‘plamlari sonini solishtiring.
13. Figurali sonlarning Paskal uchburchagidagi o‘rnini aniqlang.
14. Paskal uchburchagi yordamida ixtiyoriy k- tartibli figurali sonlarning dastlanki n tasi yig‘indisini hisoblash formulasini toping va bu formulani matematik induksiya usuli yordamida isbot qiling.
15. Paskal uchburchagidan foydalanib 11^n $(n \in \boldsymbol{N})$ ifodaning qiymatini hisoblash formulasini keltirib chiqaring va bu formulani isbot qiling.
16. Paskal uchburchagining ixtiyoriy n- satridan yuqorida joylashgan elementlari yig‘indisini hisoblash formulasini ifodalang va bu formulani isbot qiling.
17. Paskal uchburchagining bir necha o‘n qatorini yozib, undagi ikkiga, uchga, beshga qoldiqsiz bo‘linadiganlarini ajrating.
18. Paskal uchburchagining 256- qatorida qancha toq son borligini aniqlang.
19. Paskal uchburchagidan foydalanib $\sin nx$ va $\cos nx$ ifodalarni $\sin x$ va $\cos x$ orqali ifodalash formulalarini keltirib chiqaring.
20. To‘la o‘yin qartalari (13x4=52ta) orasidan turli mastga ega bo‘lgan bir-biridan farq qiluvchi 4ta qartani tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
21. Matematika so‘zidagi harflar o‘rinlarini almashtirib ma’noga ega bo‘lmaganlarini ham e’tiborga olganda tuzish mumkin bo‘lgan barcha so‘zlar sonini toping.
22. Shaxmat taxtasining bir qatoriga shoh, farzin, 2 dona rux, 2 dona fil va 2 dona otni joylashtirishlar sonini aniqlang.
23. 0 raqami birinchi raqam sifatida kelganda, uni tashlab yuborilish qoidasiga amal qilib 0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlaridan tuzish mumkin bo‘lgan barcha olti xonali sonlar qancha?
24. 1, 2, 3, 4, 5 sonlaridan tuzish mumkin bo‘lgan barcha uch xonali sonlar qancha?
25. Shirinlik sotiladigan do‘konda 4 xil shirinlik bo‘lsa, 7 dona shirinlikni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
26. Beshta turli o‘rindiqlar va yettita turli rangdagi materiallar bor. Har bir o‘rindiqni faqat bir xil rangdagi material bilan qoplash sharti bilan o‘rindiqlarga material qoplash imkoniyatlari sonini toping.
27. Homiylar teleshouda qatnashayotgan o‘yinchilarga kofe qaynatgichlar, dazmollar, uyali telefon apparatlari va duxilar sovg‘a qilishmoqchi. 9 nafar o‘yinchilarga bittadan sovg‘a berishi imkoniyatlari sonini toping.
28. Turli 5 dona qalam va 6 dona ruchkalardan 2ta qalam va 4ta ruchkani tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
29. 36 ta o‘yin qartasini 4 o‘yinchiga teng bo‘lib berganda mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlar sonini hisoblang.

30. $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Fibonachchi sonlarining quyidagi xossalarini isbot qiling:

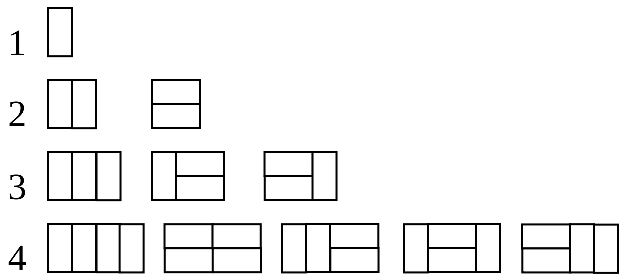
a) $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$; b) $u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2 = u_n u_{n+3}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$;

f) $u_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, g) $u_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \dots & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}$, bu yerda

determinantning o‘lchovi $n \times n$, i – kompleks sonni ifodalashda ishlatiladigan mavhum birlik ($i = \sqrt{-1}$).

31. Qurilishda uzunligi enidan ikki baravar katta bo‘lgan g‘isht ko‘p qo‘llaniladi. Bunday g‘ishtlardan bir g‘isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari g‘ishtlar soni 1, 2, 3 va 4 bo‘lgan hollar uchun 5- shaklda keltirilgan. n ta

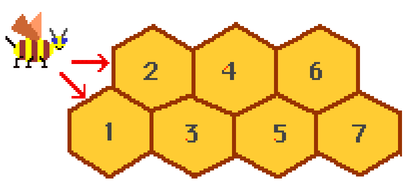


5- shakl

g‘ishtlardan bir g‘isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari sonini aniqlang.

32. Xonada o‘tirishga mo‘ljallangan n ta o‘rin bor. Bu o‘rinlarda o‘tirishi kerak bo‘lgan kishilarni ikki guruhga ajratish mumkin: do‘stlar (1) va dushmanlar (0). Agar $n = 1$ bo‘lsa, u holda bitta o‘ringa bir kishini o‘tqazish imkoniyatlari soni ikkiga tengligi ravshan (bu o‘ringa yo do‘stlar yo dushmanlar guruhiga tegishli bir kishi o‘tiradi). n nafar kishini hech qaysi ikki dushman yonma-yon o‘tirmaslik sharti bilan o‘rinlarga o‘tqazish imkoniyatlari sonini aniqlang.

33. Asalari 1 yoki 2 raqamli xonachadan harakatlanishni boshlagan bo‘lsin



Asalari faqat o‘ng tomondagi qo‘shni xonachaga o‘tishi mumkin bo‘lsa, uning n raqamli xonachaga kelishi imkoniyatlari sonini aniqlang

34. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$larning qiymatlarini aniqlang.
35. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda 9ning barcha bo‘laklanishlarini yozing va $R(9)$ni hisoblang.
36. Bozorda dehqon 15 dona qovunni 7 nafar xaridorga donabay sotdi. Agar navbatdagi har bir savdoda dehqonning sotgan qovunlari soni oldingi savdodagiga qaraganda kamaymagan bo‘lsa, u holda barcha savdolarda sotilishi mumkin bo‘lgan qovunlar sonlarining barcha imkoniyatlarini toping. Odatda biror qarorni ko‘pchilik bo‘lib qabul qilish maqsadida ovoz berganda “tarafdor” va “qarshi” ovozlar sonlari o‘zaro teng bo‘lmasligi uchun a’zolari 3 nafardan kam bo‘lmagan toq sondagi ekspertlar komissiyasi tuziladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi 17 nafar ekspertlardan tashkil qilinishi mumkin bo‘lgan komissiyalar sonini hisoblang.
39. Kichik bir qishloqda hammasi bo‘lib 22 bosh qora mol bor va har bir oilada hech bo‘lmasa bir bosh qora mol topiladi. Bu qishloqning hech qaysi oilasida uch boshdan ko‘p qora mol bo‘lmasa, qishloqdagi qora mollarning oilalar orasida taqsimlanishining barcha variantlarini aniqlang.
40. Graf tushunchasini qo‘llash mumkin bo‘lgan amaliy misol keltiring va qaralayotgan grafni tahlil qiling.
41. To‘la graf bilan bog‘liq biror misol keltiring.
42. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish uchun tuzilgan graf elementlarini tahlil qiling va bu masalaning mumkin qadar qisqa yechimini toping.
43. Ko‘rishishlar haqidagi lemmaning qo‘llanilishiga doir amaliy misol keltiring.
44. Kubik graf bilan bog‘liq amaliy misollar keltiring.
45. Qadimgi boshqotirma masala: biror idishdagi hajmi 12 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 8 va 5 birlik hajmli idishlar yordamida teng ikki qismga ajrating. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.
46. Qadimgi boshqotirma masala: yo‘lovchi daryodan bo‘ri, qo‘y va bir bog‘ pichanni olib o’tishi kerak, lekin u qayiqda o‘zi bilan faqat bitta narsani olib o‘tish imkoniyatiga ega. Agar sohilda bo‘ri va qo‘y birga qolsa bo‘ri qo‘yni, qo‘y va pichan birga qolganda esa, qo‘y pichanni yeb qo‘yadi. Yo‘lovchi narsalarni daryoning bir sohilidan ikkinchi sohiliga olib o’tishni ularning butunligini saqlagan holda amalga oshirishi kerak. Bu boshqotirma masalani

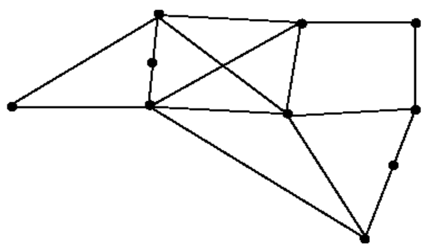
hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.

47. Barcha belgilangan (m,n)-graflar sonini aniqlang.
48. O‘zaro izomorf bo‘lmagan
    a) uchta, b) to‘rtta, d) beshta
    uchga ega barcha belgilangan $G=(V,U)$ graflar uchun V to‘plam va U kortejlarni aniqlang.
49. Shaxmat o‘yinida shaxmat donalarining taxtada joylashuvi va o‘yin navbati birgalikda vaziyatni tashkil etadi. Barcha vaziyatlar to‘plamini graf uchlari to‘plami deb qarasak, vaziyatlarning biridan boshqasiga mumkin bo‘lgan o‘tishlar (yurishlar) grafning qirralari yoki yoylariga mos keladi deb hisoblash mumkin. Shaxmat o‘yinining qoidalariga rioya qilgan holda yuqorida bayon qilingan grafning shaxmat o‘yinidagi dastlabki vaziyatni ham o‘z ichiga oluvchi qandaydir oltita vaziyatlariga mos uchlari va bu uchlarni bog‘lovchi qirra va yoylarini aniqlang.
50. Grafning abstrakt ta’rifi yordamida biror grafni ifodalang va unga izomorf grafni qog‘ozda tasvirlang.
51. Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiring.
52. Har qanday chekli grafni 3 o‘lchovli Evklid fazosida qirralariga to‘gri chiziq kesmalari mos keladigan qilib geometrik ifodalash mumkinligin isbotlang.
53. Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida mavjud yettita ko‘priklardan (3-shakl) tashqari shaharning B va C qismlarini bevosita tutashtiruvchi sakkizinchi ko‘prik ham bor deb hisoblab, bunday qo‘shimcha shartga ega Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos graf tuzing, uni geometrik ifodalang va tahlil qiling.
54. Uchlari va qirralari sonlari mos ravishda teng bo‘lib, o‘zaro izomorf bo‘lmagan graflarga misollar keltiring.
55. Barcha Platon jismlariga mos tekis graflarni geometrik ifodalang.
56. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikkita qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish maqsadida ushbu bobning 1- paragrafida tuzilgan grafni geometrik ifodalang.
57. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo‘lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor graflarni geometrik ifodalang, ularning har biriga mos maxsus ko‘phadlarni, uchlari qo‘shniligi, qirralari qo‘shniligi va insidentlik matritsalarni yozing.
58. 14- shaklda tasvirlangan G_1 va G_2 graflarning izomorfligini isbotlang.

59. Uchlari qo‘shniligi matritsalari quyida berilgan graflarni geometrik ifodalang, ularga mos maxsus ko‘phad, qirralar qo‘shniligi va insidentlik matritsalarni yozing:

$$a)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ b)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ c)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

60. Elementlari siz yashayotgan aholi punktidagi chorraha va yo‘llarga mos keluvchi grafni geometrik ifodalab, bu grafda marshrutlar, zanjirlar, oddiy zanjirlar va sikllarni aniqlang.
61. Ixtiyoriy graf uchun yo shu grafning o‘zi, yoki uning to‘ldiruvchi grafi bo‘g‘lamli bo‘lishini isbotlang.
62. Agar G bog‘lamli graf va uning qandaydir sikliga tegishli qirrasi u bo‘lsa, u holda G grafdan u qirrani olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli bo‘lishini isbotlang.
63. 4- shakldа tasvirlangan graf uchun uchlar, qirralar va yoqlar sonini aniqlang hamda Eyler formulasi va Eyler teoremasining 2-natijasidagi tengsizlik

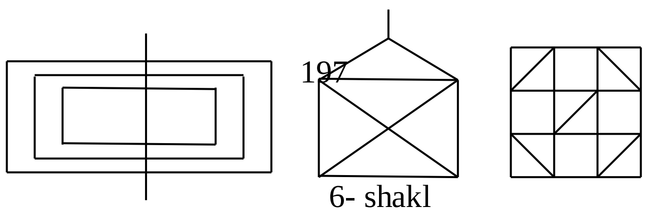


4- shakl

o‘rinliligini tekshiring.
63. Eyler teoremasining 1-natijasida ifodalangan tengsizlikni 3-shakldа tasvirlangan graf uchun tekshib ko‘ring.
64. Pontryagin-Kuratovskiy teoremasini isbotini o‘rganing.
65. Agar 1- topshiriqni bajarish natijasida hosil bo‘lgan grafda ajratuvchi qirra(lar), kesim(lar) va ko‘prik(lar)

a) topilsa, u holda ularni aniqlang;

b) topilmasa, u holda bu grafga yangi elementlarni shunday qo‘shingki, natijada ajratuvchi qirrasi(lari), kesim(lar)i va ko‘prigi(klari) topiladigan graf hosil bo‘lsin.
66. 6- shakldа tasvirlangan uchta grafni (bu graflarda qirralarga kesmalar, kesmalarning kesishish nuqtalariga esa uchlar mos qo‘yilgan deb hisoblanadi) tekshirib, ularning Eyler grafi bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlang. Eyler grafi



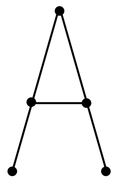
6- shakl

bo‘lganlarining har biridagi Eyler sikllaridan bir nechasini toping. Eyler grafi bo‘lmaganlarining yarim Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.

67. 3-, 5- va 6- shaklda tasvirlangan graflar orasida qalamni qog‘ozdan ko‘tarmasdan har bir kesmani faqat bir marta chizib (kesmalarning uchlari bundan mustasno) chiqish mumkin bo‘lganlarini aniqlang.

68. Lotin alifbosi bosma harflarning har biriga graf sifatida qarab (masalan A harfiga mos graf 7- shaklda tasvirlangan), ular orasidan Eyler grafi bo‘la olmaydiganlarini aniqlang.

69. K_n grafning Eyler grafi bo‘lishi sartlarini toping.



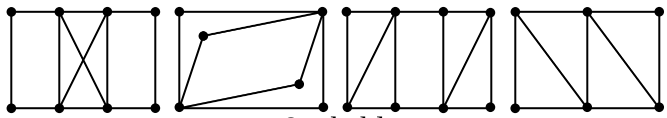
7- shakl

70. Berilgan n ta elementli to‘plam uchun tuzilgan barcha $n!$ ta o‘rin almashtirishlarning har biriga grafning uchi mos qo‘yilgan bo‘lsin. Agar biror o‘rin almashtirishdan undagi ikkita elementning o‘rinlarini almashtirib boshqa o‘rin almashtirishni hosil qilish mumkin bo‘lsa, u holda bu harakatga grafning qirrasini mos qo‘yamiz. Shunday usul bilan tuzilgan graf Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang.

71. K_n grafning Gamilton grafi bo‘lishi sartlarini aniqlang.

72. 8- shaklda tasvirlangan to‘rtta grafning har biri Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.

73. 8- shaklda tasvirlangan to‘rtta grafning har biri Gamilton grafi bo‘lishi yoki



8- shakl

bo‘lmasligini tekshiring.

74. Dirak teoremasini qo‘llab $K_{3,3}$ grafning Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang.

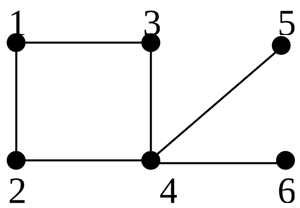
75. 4- shaklda tasvirlangan grafning diametri, radiusi va markaz(lar)ini toping.

76. Petersen grafining markazini toping.

77. Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos grafning diametri va markazini toping.

78. Uchta uy va uchta quduq haqidagi masalaga mos grafning diametri va radiusini toping.

79. Insidentlik matritsasi quyida berilgan grafning diametri, radiusi va markaz(lar)ini aniqlang:



4- shakl

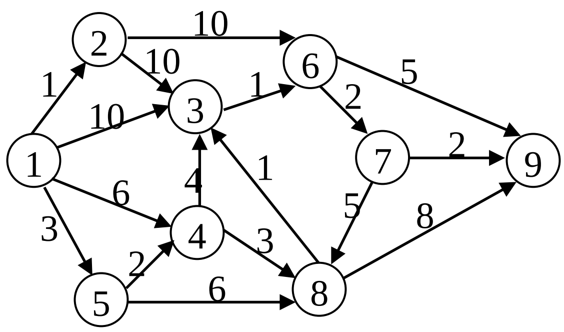
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

80. Uchlari to‘plamlari kesishmaydigan K_3 va O_4 graflarga birikma amalini qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan grafning diametri va radiusini aniqlang.

81. Qirralari qo‘shniligi matrisasi quyida berilgan graflarning radiuslarini aniqlang:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

82. Deykstra algoritmini 5- shaklda tasvirlangan grafga qo‘llab, eng qisqa



5- shakl

uzunlikka ega yo‘lni toping.

83. Siz yashayotgan hududda har bir aholi punktidan boshqasiga bevosita borish mumkin bo’lgan yo’llarni va ular-ning uzunliklarini aniqlang. Bu ma’lumotlarga mos ke-luvchi graf tuzing va Deykstra algoritmini qo’llab, o’zingiz yashayotgan aholi punktidan boshqa aholi punktiga borish mumkin bo’lgan yo’llarning eng qisqa uzunlikka ega bo’lganlarini toping.

84. Bir-biriga izomorf bo‘lmagan
a) oltita,
b) yettita,
d) sakkizta,
e) to‘qqizta
uchga ega barcha daraxtlarni geometrik ifodalang.

85. 1- shaklda tasvirlangan o‘rmondagi daraxtlarning har biri uchun markaz(lar) bo‘luvchi uchlarni toping.

86. Keli teoremasining isbotini o‘rganing (masalan, [10] kitobga qarang).

87. Uchlari uchta va to‘rtta bo‘lgan barcha belgilangan daraxtlarni geometrik ifodalang.

88. Petersen grafining sinch daraxtlaridan birini aniqlang.

89. $K_{4,5}$ grafning sinch daraxtlaridan bir nechasini toping.

90. 12ta uchi, 10ta qirrasi va 3ta bog‘lamli komponentasi bo‘lgan, sirtmoqsiz, karrali qirralari bo‘lmagan grafning sinch o‘rmonini hosil qilish uchun uning nechta qirrasini olib tashlash kerakligini aniqlang.

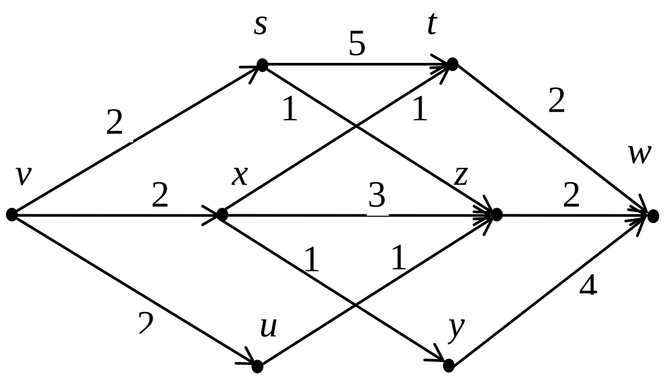
91. Insidentlik matrisalari quyida berilgan graflarning siklomatik sonlarini toping:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

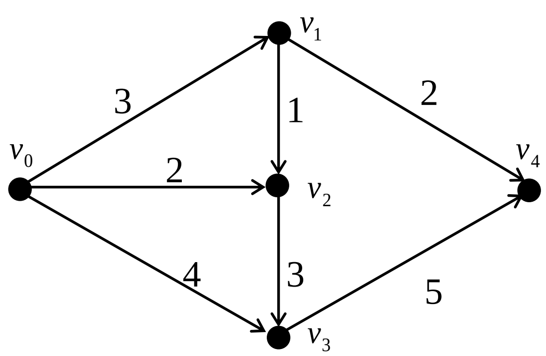
92. Uchlari qo‘shniligi matrisalari quyida berilgan graflarning sinch daraxtlaridan bir nechasini toping:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**,** **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

93. 2- shaklda tasvirlangan tarmoqda v uchni manba, w uchni esa o‘pqon deb hisoblab, undagi bir necha oqimni aniqlang.



2-



3-

94. Ford algoritmni qo‘llab 3- shaklda tasvirlangan tarmoq uchun v_0 dan v_4 ga maksimal oqimni anqlang.

95. Ford algoritmni qo‘llab 2- shaklda tasvirlangan tarmoq uchun v dan w ga maksimal oqimni anqlang.

96. $T = (G, b)$ tarmoqda $G = (V, U)$, $V = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$, U – yoylar korteji, b_{ij} – (a_i, a_j) yoyning o’tkazish qobiliyati, $X = \{x_{ij} : (a_i, a_j) \in U\}$ esa maksimal oqim bo‘lsin.

U vaqtda hech bo‘lmaganda bitta $(a_i, a_j) \in U$ yoy topilib, shu yoy uchun $x_{ij} = b_{ij}$ tenglik bajarilishini ko‘rsating.

GLOSSARI

Kombinatorika va graflar nazariyasining tadbiqlari tanlov fanidan atamalar

Kombinatsiya – bu kombinatorikaning asosiy tushunchasidir. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to‘plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi.

Grafning o‘shni uchlar – buning uchun grafning uchlari qirra yoki yoylar bilan tutashishi lozim.

Aralash graflar – oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham bo‘lgan graflar**.**

Oriyentirlangan graf- yo‘nalishga ega bo’ladi **yoki** qisqacha, **orgraf** deb ham ataladi.

Oriyentirlanmagan graf- yo‘naltirilmagan ya’ni yo’nalishga eaga bo’lmagan graflarga aytiladi.

Multigraf- Karrali qirralari yoki yoylari bo‘lgan graf.

Sirtmoq- Ikkala chetki (boshlang‘ich va oxirgi) uchlari ustma-ust tushgan qirra (yoy), ya’ni grafning $(a,a)\in U$ elementlariga aytiladi.

Psevdograf- Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo‘lsa

Nolgraf yoki **bo‘sh graf-** Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan graf (ya’ni, grafda qirralar va yoylar bo‘lmasa).

To‘la graf- Istalgan ikkita uchlari qo‘shni bo‘lgan sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz oriyentirlanmagan graf.

Belgilangan graf- Agar grafning uchlariga qandaydir belgilar, masalan, $1,2,...,m$ sonlari mos qo‘yilgan bo‘lsa

Izomorf graflar- Uchlarning qo‘shnilik munosabatini saqlaydigan o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish.

Uchning lokal darajasi- Graf uchiga insident qirralar soni (**darajasi**, yoki **valentligi**).

Darajali regulyar graf- Agar grafning barcha uchlari bir xil r darajaga ega bo‘lsa

Bixromatik yoki **Kyonig grafi**- Agar grafning uchlar to‘plamini o‘zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to‘plamlarga (bo‘laklarga) ajratish mumkin bo‘lsa

Planar graf- Tekis grafga izomorf graf.

Platon jismlari- Ko‘pyoqlilarning umumiy nomi.

Gomeomorf graflar- Bo‘linish graflari izomorf bo‘lgan graflar.

Diz’yunkt birlashma- Agar birlashtirilayotgan graflarning uchlari to‘plamlari kesishmasa.

Marshrut- umumiy chetki uchga ega $(...,v_{i_1},u_{j_1},v_{i_2},u_{j_2},v_{i_3},...)$ ko‘rinishdagi chekli yoki cheksiz ketma-ketligi.

ikki tomonlama cheksiz marshrut- boshlang‘ich uchga ham oxirgi uchga ham ega bo‘lmaydigan marshrut.

Notrivial marshrut- yagona qirradan iborat bo‘lisa

Bir tomonlama cheksiz marshrut- boshlangich uchga ega bo‘lib, oxirgi uchga ega bo‘lmasligi mumkin yoki, aksincha.

Nol marshrut yoki trivial marshrut- birorta ham qirraga ega bo‘lmasa

Marshrutning uzunligi- undagi qirralar soniga.

Zanjir- turli qirralardan tashkil topgan marshrutga.

Oddiy zanjir- agar zanjirning chetlaridan tashqari barcha uchlari turlicha bo‘lsa

Sikl- hech bo‘lmaganda bitta qirraga ega yopiq oddiy zanjir.

Oriyentirlangan marshrut- yoylarning oriyentatsiyalari hisobga olingan yoylar va uchlar ketma-ketligi.

Kontur- boshlang‘ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan oriyentirlangan zanjir.

Bog‘lamli graf- bir-biri bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy ikkita uchlari bog‘langan graf.

Ekvivalent (bog‘langan)- agar grafdagi ikkita uchni biror oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo‘lsa

Bog‘lamlilik komponentalari- uchlar to‘plami bo‘yicha ekvivalentlik munosabatini inobatga olgan holda berilgan grafga.

Kesim- ajratuvchi qirralar to‘plamining hech qaysi qism to‘plami elementlari ajratuvchi qirralar bo‘lmasa

Ko‘prik- agar kesim yagona qirradan iborat bo‘lsa, u holda bu qirra.

Eyler zanjiri- grafning har bir qirrasidan faqat bir marta o‘tadigan zanjir.

Eyler grafi- yopiq Eyler zanjiriga.

Oriyentirlangan Eyler yo‘li- har bir yoydan faqat bir marta o‘tadigan yo‘l.

Oriyentirlangan Eyler grafi- Eyler yo‘li bor bo‘lgan oriyentirlangan graf.

Gamilton zanjiri- grafning har bir uchidan faqat bir marta o‘tadigan zanjir.

Gamilton grafi- yopiq Gamilton zanjiriga (ja’ni **Gamilton sikliga**) ega graf.

AMALIY MASHG’ULOTLAR

AMALIY MASHG’ULOTLAR ISHLANMALARI

1-AMALIY MASHG’ULOT

Kombinatorikada asosiy kombinatsiyalar

Amaliy mashg’ulotda ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining tuzulishi	4. O‘rin almashtirishlar 5. O‘rinlashtirishlar 6. Guruhlashlar
Mashg’ulot maqsadi:	Kombinatorikaning o’rin almashtirish, o’rinlashtirish va guruhlashlar kombinatsiyalariga oid turli masalalar yechiladi.
Ta’lim usullari	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta’limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta’lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma’ruza.

1-amaliy mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o’quv mashg’ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o’quv natijalarni e’lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	1. Takrorli bo’lmagan o‘rin almashtirishlarning kombinatsiyalari sonini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 2. Takrorli bo’lmagan o‘rinlashtirishlarning kombinatsiyalari sonini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 3. Takrorli bo’lmagan guruhlashlarning kombinatsiyalari sonini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida	O’z-o’zini o’zaro baholashni

(10 daqiqa)	ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	o'tkazadilar. Savol beradilar Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Takrorli bo'lmagan o'rin almashtirishlar deb nimaga aytiladi?
2. Takrorli bo'lmagan o'rinlashtirishlar deb nimaga aytiladi?
3. Takrorli bo'lmagan guruhlashlar deb nimaga aytiladi?
4. Takrorli bo'lmagan kombinatsiyalardan qanday masalalarni yechishda foydalanish mumkin?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Takrorli bo'lmagan o'rin almashtirishlar soni qanday topiladi?
2. Takrorli bo'lmagan o'rinlashtirishlar soni qanday topiladi?
3. Takrorli bo'lmagan guruhlashlar soni qanday topiladi?

Asosiy qism

1. O'rin almashtirishlar. Elementlari $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ bo'lgan to'plamni qaraymiz. Bu to'plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan,

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n;\ a_2, a_1, a_3, ..., a_n;\ a_2, a_3, a_1, ..., a_n.$$

Bu tuzilmalarning har birida berilgan to'plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarining joylashish o'rinlari bilan farq qiladilar.

1- ta'rif. *Shu usul yordamida hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri berilgan* $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ *to'plam elementlarining* ***o'rin almashtirishi*** *deb ataladi.*

Aslida "o'rin almashtirish" iborasi to'plam elementlarining o'rinlarini o'zgartirish harakatini anglatsada, bu yerda uni shu harakat natijasidagi hosil bo'lgan tuzilma sifatida qo'llaymiz. Bu iboradan uning asl ma'nosida ham foydalanamiz.

O'rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida "," (vergul) belgisidan foydalanildi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirilish ham mumkin. Bu eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o‘rinlidir.

To‘plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o‘rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rin almashtirishlarni **betakror** (**takrorli emas**) **o‘rin almashtirishlar** deb ham atash mumkin.

Takrorli bo’lmagan o‘rin almashtirishlarni hosil qilish algoritmi.

Bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun faqat bitta a ko‘rinishdagi o‘rin almashtirish borligi ravshandir: $P_1 = 1$.

Ikkita elementli $\{a,b\}$ to‘plam elementlaridan o‘rin almashtirishlarni bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun a o‘rin almashtirishidan foydalanib quyidagicha tashkil qilamiz: b element a elementdan keyin yozilsa ab o‘rin almashtirishga, oldin yozilsa esa ba o‘rin almashtirishga ega bo‘lamiz. Demak, ko‘paytirish qoidasiga (ushbu bobning 1- paragrafiga qarang) binoan ikkita o‘rin almashtirish bor: $P_2 = 2 = 1\cdot 2$.

Uchta elementli $\{a,b,c\}$ to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a,b\}$ to‘plam uchun tuzilgan ab va ba o‘rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to‘plamning c elementini ab va ba o‘rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko‘paytirish qoidasini qo‘llasak, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to‘plam uchun oltita ($P_3 = 6 = 1\cdot 2\cdot 3$) har xil o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba\,.$$

To‘rtta elementli $\{a,b,c,d\}$ to‘plamni qarab, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to‘plam uchun tuzilgan oltita o‘rin almashtirishlarning har biriga d elementni to‘rt xil usul bilan joylashtirish imkoniyati borligini e’tiborga olsak, ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, $P_4 = 24 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ bo‘lishini topamiz. Bu yerda barcha o‘rin almashtirishlar quyidagilardir:

$$abcd,\ abdc,\ adbc,\ dabc\,,$$
$$acbd,\ acdb,\ adcb,\ dacb\,,$$
$$cabd,\ cadb,\ cdab,\ dcab\,,$$
$$bacd,\ badc,\ bdac,\ dbac\,,$$
$$bcad,\ bcda,\ bdca,\ dbca\,,$$
$$cbad,\ cbda,\ cdba,\ dcba\,.$$

Shu tarzda davom etib "n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar soni birdan n gacha bo‘lgan barcha natural sonlarning ko‘paytmasiga teng" deb faraz qilish mumkin: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1)n$. Bu farazning to‘g‘riligi quyidagi 1- teoremada isbot qilinadi.

Dastlabki n ta natural sonlar ko‘paytmasini $n!$ ko‘rinishida belgilash qabul qilingan, ya’ni $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$. $n!$ belgisidan bunday ma’noda birinchi bo‘lib K. Kramp 1808 yilda nashr etilgan algebra bo‘yicha qo‘llanmada foydalangan.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... n$ ifodada $n=1$ bo‘lganda faqat 1 soni ishtirok etadi, shuning uchun, ta’rif sifatida $1! = 1$ deb hisoblash qabul qilingan. Bundan tashqari, $n=0$ bo‘lganda esa $n!$ ifoda umuman ma’nosini yo‘qotadi. Lekin, ta’rif sifatida $0! = 1$ deb qabul qilinadi.

1- teorema. *Elementlari soni n ta bo‘lgan to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya’ni $P_n = n!$.*

1- misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o‘rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a, b, c, d, e harflar bilan belgilasak, u holda $T = \{a, b, c, d, e\}$ tomoshabinlar to‘plamiga ega bo‘lamiz. Tomoshabinlarni o‘rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar T to‘plami elementlarining qandaydir o‘rin almashtirishi mos keladi. T to‘plam beshta elementli bo‘lgani uchun, 1- teoremaga asosan, $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo‘ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o‘rinni egallash imkoniyatlari soni 120ga teng.

2- misol. Shaxmat bo‘yicha musobaqada har birining tarkibida to‘rt nafar o‘yinchi bo‘lgan ikkita komanda ishtirok etmoqda. Har bir komanda rahbariga to‘rtta shaxmat taxtasida o‘yinlar o‘tkazish uchun o‘yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash imkoniyati berilgan. Musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Har bir komanda a’zolari uchun shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlarini $P_n = n!$ formula yordamida hisoblash mumkin: $P_4 = 4! = 24$. Komandalardagi o‘yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash mumkin bo‘lganligidan, ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) soni $24 \cdot 24 = 576$ bo‘ladi.

2. O‘rinlashtirishlar. n ta elementli $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin.

2- ta’rif. $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ *to‘plamning ixtiyoriy m ta elementidan hosil qilingan tartiblangan $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}\}$ tuzilmaga (kombinatsiyaga) n* ***ta elementdan*** m ***tadan o‘rinlashtirish*** *deb ataladi.*

Bu ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, elementlari soni bir xil bo‘lgan ikkita har xil o‘rinlashtirishlar bir-biridan elementlari bilan yoki bu elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladilar. Bundan tashqari, n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar uchun $m \le n$ bo‘lishi ham ravshan. Bu yerda qaralayotgan o‘rinlashtirishlar tarkibidagi elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rinlashtirishlarni **betakror** (**takrorli emas**) **o‘rinlashtirishlar** deb ham atash mumkin.

Takrorli bo’lmagan o‘rinlashtirishlarni hosil qilish algoritmi.

Ravshanki, berilgan n ta $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ elementlardan bittadan o‘rinlashtirishlar n ta bo‘ladi (bular: a_1; a_2; va hokazo, a_n), ya’ni $A_n^1 = n$.

n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlar yordamida n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni quyidagicha tuzish mumkin. n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlarning har biridagi elementdan keyin yoki oldin qolgan $(n-1)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirsa bo‘ladi. Natijada, ko‘paytirish qoidasiga binoan, jami soni $A_n^2 = n(n-1)$ ta bo‘lgan n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shu kabi, n ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilish uchun n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarga murojaat qilish mumkin. Bu yerda n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarning har biri uchun uni tashkil etuvchi ikkita elementlardan oldin, elementlar orasiga yoki elementlardan keyin qolgan $(n-2)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirish imkoniyati bor. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra natijada jami soni $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ ta bo‘lgan n ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shunga o‘xshash mulohaza yuritib, n ta elementdan to‘rttadan, beshtadan va hokazo o‘rinlashtirishlar soni uchun mos ifodalarni aniqlash qiyin emas.

2- teorema. *n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni* $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$.

3- misol. Guruh 25 nafar talabadan tashkil topgan bo‘lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25ta elementli talabalar to‘plamining tartiblangan uchta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakili) qism to‘plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo‘yilgan savolga javob topish maqsadida 2- teoremadagi isbotlangan formulani $n = 25$ va $m = 3$ bo‘lgan holda qo‘llab, $A_{25}^{3}=25\cdot 24\cdot 23=13800$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800ta imkoniyat mavjud.

$A_n^m=n(n-1)...(n-m+1)$ formulani $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ ko‘rinishda ham yozish mumkin.

Yuqorida ta’kidlaganganidek, $n$ta elementdan $m$tadan o‘rilashtirishlar n elementli to‘plamning bir-biridan tarkibi bilan ham, elementlarining joylashishi bilan ham farqlanadigan qism to‘plamlaridan iboratdir. Agar bu o‘rinlashtirishlarda $n$ta elementli to‘plamning barcha elementlari qatnashsa (ya’ni $m=n$ bo‘lsa), $n$ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lishi tabiiydir. Shu tufayli, o‘rin almashtirishlarning oldin keltirilgan ta’rifiga ekvivalent quyidagi ta’rifni ham berish mumkin.

$n$ta elementli to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar deb $n$ta elementdan n tadan o‘rinlashtirishlarga aytiladi. Bunda har bir element faqat bir marta qatnashadi va ular bir-biridan faqat o‘zaro joylashishlari bilan farq qiladilar.

O‘rin almashtirishlarning bu ta’rifiga asoslanib $n$ta elementli to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar soni formulasini o‘rinlashtirishlar soni formulasi yordamida hosil qilish mumkin.

$$P_n=A_n^n=n(n-1)...(n-(n-1))=n(n-1)...2\cdot 1=n!$$

yoki $P_n=A_n^n=\dfrac{n!}{(n-n)!}=\dfrac{n!}{0!}=\dfrac{n!}{1}=n!$.

2.2.3. Guruhlashlar. $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu n elementli to‘plamning elementlaridan $m$ta elemetga ega qism to‘plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlarining joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsinlar.

3- ta’rif. *Bunday $m$ta elementli qism to‘plamlarning har biriga **$n$ta elementdan m tadan gruppalash** deb ataladi.*

$n$ta elementdan $m$tadan guruhlashlar sonini C_n^m bilan belgilaymiz.

Guruhlashlar sonini $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ yoki $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ shaklda belgilashlar ham uchraydi. Gruppalash ta’rifidan $1\le m\le n$ ekanligi va agar biror gruppalashda qandaydir usul bilan elementlar o‘rinlari almashtirilsa, u (gruppalash sifatida) o‘zgarmasligi kelib chiqadi. Bu yerda qaralaytgan gruppalash tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday gruppalashni **betakror** (**takrorli emas**) **gruppalash** deb ham atash mumkin.

Takrorli bo’lmagan gruppalashtirishlarni hosil qilish algoritmi.

Bir ($n=1$) elementli $\{a\}$ to‘plam uchun faqat bitta gruppalash mavjud, u ham bo‘lsa bir ($m=1$) elementlidir: a. Demak, $C_1^1=1$.

Ikki ($n=2$) elementli $\{a, b\}$ to‘plam uchun bittadan ($m=1$) guruhlashlar ikkita (a va b), ikkitadan ($m=2$) guruhlashlar esa faqat bitta (ab). Demak, $C_2^1=2$, $C_2^2=1$.

Uch ($n=3$) elementli $\{a, b, c\}$ to‘plam uchun guruhlashlar: bittadan ($m=1$) – a, b va c (uchta); ikkitadan ($m=2$) – ab, ac, bc (uchta); uchtadan ($m=3$) – abc (faqat bitta). Demak, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$.

To‘rtta ($n=4$) elementdan tashkil topgan $\{a, b, c, d\}$ to‘plam elementlaridan tuzilgan guruhlashlar: bittadan – a, b, c va d (to‘rtta); ikkitadan – ab, ac, ad, bc, bd, cd (oltita); uchtadan – abc, abd, acd, bcd (to‘rtta); to‘rttadan $abcd$ (faqat bitta). Demak, $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$.

Yuqoridagi mulsohazalar guruhlashlar sonini hisoblash formulasi qanday bo‘lishiga to‘liq oydinlik kiritmasada, dastlabki tahlil uchun muhimdir. Masalan, n ta elementdan barcha elementlarni o‘z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin degan yoki n ta elementdan bittadan n ta gruppalash bor degan xulosalar ustida o‘ylab ko‘rish mumkin.

C_n^m sonni hisoblash uchun formula topish maqsadida quyidagicha mulohaza yuritamiz. Ravshanki, agar n ta elementdan m tadan barcha guruhlashlarning har birida elementlarning o‘rinlari imkoniyat boricha almashtirilsa, natijada n ta elementdan m tadan barcha o‘rinlashtirishlar hosil bo‘ladi. Bu yerda n ta elementdan m tadan tuzilgan C_n^m ta gruppalashning har biridagi m ta elementdan $P_m=m!$ ta o‘rin almashtirishlar hosil qilish mumkin bo‘lganligi tufayli, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $P_m C_n^m = A_n^m$ tenglik to‘g‘ridir. Demak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$$

formula o‘rinlidir. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

3- teorema. *n ta elementdan m tadan guruhlashlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlar ko‘paytmasining dastlabki m ta natural sonlar ko‘paytmasiga nisbati kabidir:* $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$.

4- misol. Qurilish tashkilotining duradgorlar bo‘limida 15 nafar ishchi bor. Ko‘p qavatli uyning eshiklarini ta’mirlash uchun 3 nafar duradgorni tanlash zarur. Agar bo‘limdagi har bir duradgor bu topshiriqni bajarishga layoqatli bo‘lsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

Bo‘limdagi har bir duradgor ta’mirlash ishini bajarishga layoqatli bo‘lgani uchun, bu masalani hal qilishda guruhlashlar sonini topish formulasidan foydalanish mumkin. Bu yerda $n=15$, $m=3$ va $C_{15}^3=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=455$. Demak, 15 nafar duradgorlar orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlari soni 455 ekan.

Agar ta’rif sifatida $C_n^0=1$ qabul qilinsa, n ta elementdan m tadan guruhlashlar soni uchun yuqorida keltirilgan formula $m=0$ bo‘lgan holda ham to‘g‘ri bo‘ladi: $C_n^0=\frac{n!}{0!n!}=1$. Tabiiyki, n ta elementdan barcha elementlarni o‘z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin: $C_n^n=\frac{n!}{n!0!}=1$.

Guruhlashlar sonini hisoblash uchun

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},\qquad C_n^m=\frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)}$$

ko‘rinishdagi formulalardan ham foydalanish mumkin. Bu formulalar quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{\frac{n!}{m!}}{(n-m)!}=$$

$$=\frac{\frac{n!}{(n-(n-m))!}}{(n-m)!}=\frac{A_n^{n-m}}{P_{n-m}}=\frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)}.$$

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli yoki undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
2. 13 nafar qiz va 12 nafar o‘g‘il boladan tashkil topgan talabalar guruhidan bir nafar talaba tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
3. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli va bitta undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
4. Qiroatxonada har biri ikki o‘rinli stollar to‘rt qatorga sakkiztadan joylashtirilgan. Haftaning yakshanba kunidan tashqari har kuni qiroatxona o‘quvchilarga sakkiz soat xizmat ko‘rsatadi. Qiroatxonaning bir haftada o‘quvchilarga mumkin bo‘lgan eng ko‘p xizmat ko‘rsatish vaqtini (o‘rin×soat birligida) toping.
5. Agar A va B shaharlarni to‘rtta yo‘l, B va C shaharlarni esa uchta yo‘l bog‘lasa, u holda A shahardan B shahar orqali C shaharga borish imkoniyatlari sonini aniqlang.
6. Shaxmat taxtasiga oq va qora shohlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.

7. Shaxmat taxtasiga oq va qora ruxlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.

2- AMALIY MASHG'ULOT

Paskal uchburchagi. Nyuton binomi

Amaliy mashg'ulotda ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining tuzulishi	4. Paskal uchburchagi haqida umumiy ma'lumotlar 5. Nyuton binomi haqida umumiy ma'lumotlar 6. Binomial koeffitsientlarning xossalari
Mashg'ulot maqsadi:	Paskal uchburchagi haqida umumiy ma'lumotlar, nyuton binomi haqida umumiy ma'lumotlar va binomial koeffitsientlarga oid masalalar yechiladi.
Ta'lim usullari	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta'limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta'lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma'ruza.

2-amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o'quv mashg'ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o'quv natijalarni e'lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	4. Paskal uchburchagi sonini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 5. Nyuton binomi sonini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 6. Binomial koeffitsientlardan sonini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich.	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan	O'z-o'zini o'zaro

Yakuniy (10 daqiqa)	ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	baholashni o'tkazadilar. Savol beradilar Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Paskal uchburchagi deb nimaga aytiladi?
2. Nyuton binomi deb nimaga aytiladi?
3. Binomial koeffitsientlar deb nimaga aytiladi?
4. Paskal uchburchagi va nyuton binomi orasida bog'liqlik bormi?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Paskal uchburchagi qanday topiladi?
2. Nyuton binomi qanday topiladi?
3. Binomial koeffitsientlar qanday topiladi?

Asosiy qism

1. Paskal uchburchagi haqida umumiy ma'lumotlar. Berilgan n ta elementdan m tadan guruhlashlar soni C_n^m uchun bir necha qatorlarni 1-jadvaldagidek yozamiz:

1- jadval

n	Guruhlashlar soni C_n^m $(m=\overline{0,n})$
1	$C_1^0=1,\ C_1^1=1$
2	$C_2^0=1,\ C_2^1=2,\ C_2^2=1$
3	$C_3^0=1,\ C_3^1=3,\ C_3^2=3,\quad C_3^3=1$
4	$C_4^0=1,\ C_4^1=4,\ C_4^2=6,\quad C_4^3=4,\quad C_4^4=1$
5	$C_5^0=1,\ C_5^1=5,\ C_5^2=10,\ C_5^3=10,\ C_5^4=5,\ C_4^4=1$
…	……………………………………………………………

Bu jadvalda guruhlashlar sonining quyidagi xossalarini kuzatish mumkin:

– har bir qatorning chetlarida birlar joylashgan (bu tasdiq $C_n^0 = C_n^n = 1$ formula bilan ifodalanadi, ushbu bobning 2- paragrafiga qarang);
– har bir qatordagi C_n^m sonlar qatorning teng o‘rtasiga nisbatan simmetrik joylashgan, ya’ni qatorning boshidan va oxiridan baravar uzoqlikda turgan sonlar o‘zaro teng ($C_n^m = C_n^{n-m}$);
– ikkinchi qatordan boshlab har bir qatordagi birlardan tashqari ixtiyoriy son bu qatordan yuqorida joylashgan qatordagi biri shu son ustida, ikkinchisi esa undan chapda joylashgan ikkita guruhlashlar sonining yig‘indisiga teng ($C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$);
– har bir qatordagi C_n^m sonlar shu qator teng o‘rtasigacha o‘sib, so‘ng kamayadi (3.3 band, 5- xossaga qarang).

Ta’rif sifatida $C_0^0 = 1$ deb qabul qilinsa va bu son yuqoridagi jadvalning $n = 1$ raqamli qatoridan oldin $n = 0$ raqamli qatori sifatida joylashtirilsa, uchburchak figurasiga o‘xshash 1- shakldagi sonlar jadvalini hosil qilish mumkin.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
…………………………

1- shakl

1- ta’rif. *1- shakldagi sonlar jadvali* ***Paskal uchburchagi*** *deb ataladi.*

Bu jadval **arifmetik uchburchak** nomi bilan ham yuritiladi. Uning Paskal nomi bilan atalishiga qaramasdan, bunday sonlar jadvali juda qadimdan dunyoning turli mintaqalarida, jumladan, sharq mamlakatlarida ham ma’lum bo‘lgan. Masalan, Erondagi Tus shahrida (hozirgi Mashhadda) yashab ijod qilgan Nosir at-Tusiy XIII asrda bu jadvaldan foydalanib, berilgan ikkita son yig‘indisining natural darajasini hisoblash usulini o‘zining ilmiy ishlarida keltirgan bo‘lsa, g‘arbda Al-Kashi nomi bilan mashhur Samarqandlik olim Ali Qushchi butun sonning istalgan natural ko‘rsatkichli arifmetik ildizi qiymatini taqribiy hisoblashda bu jadvaldan foydalana bilganligi haqida ma’lumotlar bor. Keyinchalik G‘arbiy Yevropada bu sonlar uchburchagi haqida M. Shtifel arifmetika bo‘yicha qo‘llanmalarida yozgan va u ham butun sondan istalgan natural ko‘rsatkichli arifmetik ildizning taqribiy qiymatini hisoblashda bu uchburchakdan foydalana bilgan. 1556 yilda bu sonlar jadvali bilan N. Tartalya, keyinroq logarifmik lineyka ijodkori U. Otred (1631 yil) ham shug‘ullanganlar. 1654 yilga kelib B. Paskal o‘zining “Arifmetik uchburchak haqidagi traktat” nomli asarida bu sonlar jadvali haqidagi ma’lumotlarni e’lon qildi.

Paskal uchburchagidagi qatorlar istalgancha davom ettirilishi mumkin. Shunisi qiziqki, Paskal uchburchagi yordamida istalgan n ta elementdan m tadan guruhlashlar sonini faqat qo‘shish amali yordamida hosil qilish mumkin (ushbu bobning 2- paragrafdagi C_n^m sonni hisoblash $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)}$ va $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$ formulalariga qarang). Bu amal $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ formulaga asoslanadi.

Paskal uchburchagi ko‘plab ajoyib xossalarga ega. B. Paskal yuqorida zikr etilgan traktatda: “Bu xossalarning haqiqatdan ham bitmas-tuganmasligi naqadar ajoyibdir” deb yozgan edi. Ushbu paragrafning 3.3 bandida Paskal uchburchagining ba’zi xossalari keltirilgan.

2. Nyuton binomi haqida umumiy ma’lumotlar. O‘rta maktab matematikasi kursidan quyidagi ikkita qisqa ko‘paytirish formulalarini eslaylik:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – yig‘indining kvadrati;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – yig‘indining kubi.

Yig‘indining navbatdagi ikkita, ya’ni 4- va 5- darajalarini hisoblaymiz:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Shunday qilib, **yig‘indining bikvadrati** (ya’ni to‘rtinchi darajasi)

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

va yig‘indining beshinchi darajasi

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

formulalariga ega bo‘lamiz.

Yuqorida keltirilgan yig‘indining kvadrati, kubi, bikvadrati va beshinchi darajasi formulalari o‘ng tomonlaridagi ko‘phad koeffitsientlari Paskal uchburchagining mos qatorlaridagi C_n^m ($n = 2,3,4,5$) sonlar ekanligini payqash qiyin emas.

1- teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

formula o‘rinlidir.

Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko‘phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) **Nyuton binomi** deb ataladi. Umuman olganda, “Nyuton binomi” iborasiga tanqidiy nuqtai nazardan yondoshilsa, undagi ikkala so‘zga nisbatan ham shubha tug‘iladi: birinchidan, $(a+b)^n$ ifoda birdan katta natural n sonlar uchun binom (ya’ni ikkihad) emas; ikkinchidan, natural sonlar uchun bu ifodaning yoyilmasi Nyutongacha ma’lum edi.

Greklar $(a+b)^n$ ifodaning qatorga yoyilmasini $n$ning faqat $n=2$ bo‘lgan holida (ya’ni, yig‘indi kvadratining formulasini) bilar edilar. Umar Xayyom va Ali Qushchi $(a+b)^n$ ifodani $n>2$ bo‘lgan natural sonlar uchun ham qatorga yoya bilganlar. Nyuton esa 1767 yilda yoyilma formulasini isbotsiz manfiy va kasr n sonlar uchun ham qo‘llagan. L. Eyler 1774 yilda Nyuton binomi formulasini kasr n sonlar uchun isbotladi, K. Makloren esa bu formulani darajaning ratsional ko‘rsatkichlari uchun qo‘lladi. Nihoyat, 1825 yilda N. Abel daraja ko‘rsatkichining istalgan kompleks qiymatlari uchun binom haqidagi teoremani isbotladi.

C_n^m sonlarni **binomial koeffitsientlar** deb ham atashadi. Bunday ta’rif bu koeffitsientlarning Nyuton binomi formulasida tutgan o‘rniga qarab berilgan bo‘lib, C_n^m son

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

yoyilmadagi $a^{n-m}b^m$ ifodaning koeffitsientidir.

2- teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a-b)^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m$$

formula o‘rinlidir.

1- misol. Oxirgi formuladan xususiy holda quyidagi qisqa ko‘paytirish formulalari kelib chiqadi:

$n=2$ bo‘lganda ayirmaning kvadrati formulasi

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$n=3$ bo‘lganda ayirmaning kubi formulasi

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Nyuton binomi formulasini kombinatorik amallar yordamida ham hosil qilish mumkin.

Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $a, b_1, b_2, ..., b_n$ sonlar uchun $(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n)$ ifodani

$$(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n) = a^n + a^{n-1}(b_1+b_2+...+b_n)+$$
$$+a^{n-2}(b_1b_2+b_1b_3+...+b_{n-1}b_n)+$$
$$+a^{n-3}(b_1b_2b_3+...+b_{n-2}b_{n-1}b_n)+...+b_1b_2...b_n.$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu tenglikning o‘ng tomonida joylashgan a^n oldidagi koeffitsient birga ($1=C_n^0$) teng. Birinchi qavslar ichidagi qo‘shiluvchilar soni $n$ga ($n=C_n^1$) tengligi yaqqol ko‘rinib turibdi. Ikkinchi qavslar ichidagi qo‘shiluvchilar $b_1, b_2, ..., b_n$ (n ta) elementlardan ikkitadan ko‘paytmalar (soni C_n^2ga teng guruhlashlar) ekanligini ham payqash qiyin emas. Uchinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar esa o'sha n ta elementlardan uchtadan ko'paytmalar bo'lib, ularning soni C_n^3 ga teng va hokazo. Oxirgi qo'shiluvchi oldidagi koeffitsient birga ($1 = C_n^n$) teng. Yuqoridagi tenglikda $b_1 = b_2 = ... = b_n = b$ deb olsak, Nyuton binomi formulasini hosil qilamiz.

3. Binomial koeffitsientlarning xossalari. Binomial koeffitsientlarning ba'zi xossalarini keltiramiz. Bu xossalar bevosita guruhlashlarga oid bo'lib, tabiiyki, ular Paskal uchburchagining xossalarini ham ifodalaydi.

1- xossa. $\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{n-m}{m+1}$ *($m = 0,1,2,...,n-1$) tenglik o'rinlidir.*

Haqiqatdan ham,

$$\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} = \frac{m!(n-m)!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{m!(n-m-1)!(n-m)}{m!(m+1)(n-m-1)!} = \frac{n-m}{m+1}.$$

Bu xossa binomial koeffitsientlar qatoridagi istalgan ketma-ket ikki elementning biri ma'lum bo'lsa, boshqasini osonlik bilan hisoblash mumkinligini ko'rsatadi:

$$C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m, \qquad C_n^m = \frac{m+1}{n-m} C_n^{m+1},$$

bu yerda $m = 0,1,2,...,n-1$.

2- xossa. *Ixtiyoriy natural n son uchun barcha C_n^m ($m = \overline{0,n}$) binomial koeffitsientlar yig'indisi 2^n ga teng, ya'ni*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Bu tenglik Nyuton binomi formulasida $a = b = 1$ deb olganda hosil bo'ladi.

3- xossa. *Toq o'rinlarda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisi juft o'rinlarda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisiga teng.*

Haqiqatdan ham, Nyuton binomi formulasida $a = 1$ va $b = -1$ deb olganda

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan xossadagi tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi.

2- va 3- xossalar asosida quyidagi xossani hosil qilamiz.

4- xossa. *n natural sondan oshmaydigan eng katta toq m son uchun $C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^m = 2^{n-1}$ tenglik hamda n sondan oshmaydigan eng katta juft m son uchun $C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^m = 2^{n-1}$ tenglik o'rinlidir.*

5- xossa. *Toq n son uchun*

$$C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n-1}{2}+1}, \quad C_n^{\frac{n-1}{2}+1} > C_n^{\frac{n-1}{2}+2} > \ldots > C_n^n,$$

juft n *son uchun esa*

$$C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{\frac{n}{2}}, \quad C_n^{\frac{n}{2}} > C_n^{\frac{n}{2}+1} > \ldots > C_n^n,$$

munosabatlar o‘rinlidir.

Haqiqatdan ham, $m < \frac{n-1}{2}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural n va m sonlar uchun $\frac{n-m}{m+1} > 1$ tengsizlik o‘rinlidir, $m > \frac{n-1}{2}$ bo‘lganda esa $\frac{n-m}{m+1} < 1$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bu yerda $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$ formulani (1- xossaga qarang) qo‘llab, xossadagi barcha tengsizliklarni hosil qilamiz.

Agar n toq son bo‘lsa, $m = \frac{n-1}{2}$ butun son bo‘lib, $\frac{n-m}{m+1} = \frac{n - \frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}+1} = \frac{2n-n+1}{n-1+2} = \frac{n+1}{n+1} = 1$ munosabat o‘rinlidir. Demak, $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$ formuladan $m = \frac{n-1}{2}$ bo‘lganda $C_n^{\frac{n-1}{2}+1} = C_n^{\frac{n-1}{2}}$ tenglik kelib chiqadi.

Binomial koeffitsientlarning 5- xossasi Paskal uchburchagining yuqorida keltirilgan xossalari tasdig‘i bo‘lib, unga ko‘ra binomial koeffitsientlar oldin $C_n^0 = 1$ dan $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ gacha o‘sadi, keyin esa $C_n^n = 1$ gacha kamayadi hamda n toq bo‘lganda binomial koeffitsientlar qatorining o‘rtasidagi ikkita hadi tengdir va n juft bo‘lganda uning o‘rtadasigi hadi eng katta va yagonadir.

Quyidagi 6–8- xossalar o‘rinlidir.

6- xossa. $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$.

7- xossa. $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

8- xossa. $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$.

Oxirgi tenglik **Koshi ayniyati** deb aytiladi.

Endi bu uchta xossalarni isbotlaymiz. Dastlab 6- xossaning isbotini keltiramiz. Birinchidan,

$$s = (1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^{n+k}$$

ko‘phad uchun Nyuton binomi formulasini qo‘llab, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$s = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m + \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m x^m + \ldots + \sum_{m=0}^{n+k} C_{n+k}^m x^m$$

Bu yerdan, s ko‘phaddagi x^n ifodaning koeffitsienti

$$C_n^n + C_{n+1}^n + ... + C_{n+k}^n$$

yig‘indiga tengligini aniqlash mumkin.

Ikkinchidan, $s = (1+x)^n(1+(1+x)+...+(1+x)^k)$ ifodani geometrik progressiya hadlari yig‘indisi formulasiga binoan quyidagicha ham yozish mumkin:

$$s = (1+x)^n \frac{(1+x)^{k+1} - 1}{1+x-1} = \frac{1}{x}\left((1+x)^{n+k+1} - (1+x)^n\right).$$

Bu yerda ham Nyuton binomi formulasini qo‘llab, hosil bo‘lgan ko‘phadning x^n daraja qatnashgan hadi koeffitsienti C_{n+k+1}^{n+1} ekanligini ko‘rish mumkin. Keltirilgan bu mulohazalar asosida 6- xossadagi tenglikka ega bo‘lamiz.

Ravshanki, $C_n^m = C_n^{n-m}$ formula e’tiborga olinsa, 7- xossa 8- xossadan $m = k = n$ bo‘lganda xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Shuning uchun faqat 8- xossaning isbotini keltirish bilan chegaralanamiz.

Birinchidan, Nyuton binomi formulasiga ko‘ra

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s, \ (1+x)^m = \sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t, \ (1+x)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p$$

tengliklarga, bulardan esa $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ bo‘lgani uchun $\sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s \sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t = \sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p$ tenglikka ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglikning ikkala tomonidagi x^k ($k = 0,1,...,\min(m,n)$) daraja koeffitsientlarini bir-biriga tenglashtirsak, isbotlanishi kerak bo‘lgan formulani hosil qilamiz.

Albatta, yuqoridagu uchta xossalar boshqa usullar bilan ham isbotlanishi mumkin. Quyida 8- xossaning kombinatorik tahlilga asoslangan isboti keltirilgan.

2- misol. Koshi ayniyatini kombinatorik tahlilga asoslangan holda isbotlaymiz. n nafar o‘g‘il va m nafar qiz bolalardan tashkil topgan talabalar guruhidan k ($k = 0,1,...,\min(m,n)$) nafar talaba tanlash zarur bo‘lsin. $n+m$ nafar talabalardan k nafar talabani C_{n+m}^k xil usul bilan tanlash mumkinligi ravshan.

Boshqa tomondan olib qaraganda, $n+m$ nafar talabalardan iborat to‘plamdan tanlanadigan barcha k elementli qism to‘plamlarni ularning tarkibidagi o‘g‘il bolalar soniga qarab sinflarga ajratishning quyidagicha imkoniyati bor. Tarkibida s ($0 \le s \le k$) nafar o‘g‘il bola bo‘lgan k elementli qism to‘plamni oldin C_n^s xil usul bilan tanlab, keyin $(k-s)$ nafar qiz bolalarni C_m^{k-s} xil usullardan birortasi yordamida tanlash mumkin. Demak, tarkibida s nafar o‘g‘il bola bo‘lgan k nafar talabadan iborat qism to‘plamlar soni, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $C_n^s C_m^{k-s}$ songa tengdir. Noldan k gacha bo‘lgan barcha butun s sonlar uchun barcha kombinatsiyalarni hosil qilib va bu kombinatsiyalarga mos ko‘paytmalarni yig‘ib, Koshi ayniyatining chap tomonini hosil qilamiz.

Binomial koeffitsientlarning yuqorida keltirilgan xossalarini tahlil qilish natijasida ularning turli sohalardagi tadbiqlari doirasining kengligini payqash mumkin. Misol sifatida to‘plamlamlar nazariyasiga tadbiqini qaraymiz.

3- misol. Chekli A to‘plam 2^A buleanining elementlari va bu elementlar soni bilan binomial koeffitsientlarning uzviy bog‘lanishi bor. Bu bog‘lanish quyidagicha ifodalashi mumkin. Chekli A to‘plam 2^A buleani tarkibidagi elementlar A to‘plamning qism to‘plamlaridan iborat bo‘lgani uchun, shu qism to‘plamlarni quvvatlari bo‘yicha $(|A|+1)$ta guruhlarga ajratish mumkin. Tushunarliki, bu yerda k raqamli guruh ($k=\overline{0,|A|}$) quvvati $k$ga teng bo‘lgan barcha qism to‘plamlardan tashkil topadi va undagi qism to‘plamlar soni C_n^k ga teng. Bu mulohazani hisobga olgan holda 2- xossa yordamida ushbu bobning 1- paragrafidagi 1- teoremaning boshqa bir isbotiga ega bo‘lamiz.

Binomial koeffitsientlarning yana bir xossasi ushbu bobning 7- paragrafda isbotlanadi.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Paskal uchburchagi deganda nimani tushunasiz?
2. Paskal uchburchagining qanday xossalarini bilasiz?
3. B. Paskalgacha Paskal uchburchagidan foydalangan sharq va g‘arb olimlaridan kimlarni bilasiz?
4. Nyuton binomi formulasini qanday qo‘llash mumkin?
5. Nyuton binomi formulasini Isaak Nyutondan oldin kimlar qo‘llagan?
6. Nima uchun binomial koeffitsientlarlarning xossalari Paskal uchburchagining xossalari ham hisoblanadi?
7. Nyuton binomi formulasini kombinatorik tahlil yordamida isbot qilganda qanday tushunchalar qo‘llaniladi?
8. Koshi ayniyatining kombinatorik tushunchalarga asoslangan isbotini bilasizmi?
9. Nima uchun guruhlashlar sonlarini binomial koeffitsientlar deb ham atashadi?
10. Nima uchun 7- xossa 8- xossaning xususiy holi bo‘ladi?

3-AMALIY MASHG'ULOT
Takrorli kombinatsiyalar

Amaliy mashg'ulotda ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining tuzulishi	5. Takrorli o'rin almashtirishlar 6. Takrorli o'rinlashtirishlar 7. Takrorli guruhlashlar 8. Ko'phad formulasi
Mashg'ulot maqsadi:	Turli masalalarni yechishda qullaniladigan takrorli kombinatsiyaning takrorli o'rin almashtirishlar, takrorli o'rinlashtirishlar, takrorli guruhlashlar va ko'phad formulasiga oid turli masalalar yechish.
Ta'lim usullari	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta'limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta'lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma'ruza.

3-amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o'quv mashg'ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o'quv natijalarni e'lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	7. takrorli o'rin almashtirishlar sonini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 8. takrorli o'rinlashtirishlar sonini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 9. takrorli guruhlashlar sonini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida	O'z-o'zini o'zaro baholashni

(10 daqiqa)	ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	o’tkazadilar. Savol beradilar Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar deb nimaga aytiladi?
2. Takrorli o‘rinlashtirishlar deb nimaga aytiladi?
3. Takrorli guruhlashlar deb nimaga aytiladi?
4. Ko‘phad formulasi deb nimaga aytiladi?

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar qanday topiladi?
2. Takrorli o‘rinlashtirishlar qanday topiladi?
3. Takrorli guruhlashlar qanday topiladi?
4. Ko‘phad formulasi qanday topiladi?

Asosiy qism

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar. Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan boshqa birlashmalar ham o‘rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar.

Avval o‘rganilgan o‘rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o‘rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo‘lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o‘rinlari almashtirilishi natijasida yangi o‘rin almashtirish hosil bo‘lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o‘zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o‘rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo‘ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir kortejning n ta elementlari orasida bir xil (aynan bir xil) n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, bir xil n_k ta k- tur elementlar bo‘lsin, bu yerda $n_1,\ n_2,\dots n_k$ – hech bo‘lmaganda bittasi 1dan farqli natural sonlar.

1- ta'rif. *Bu n ta elementlarning o'rinlarini imkoniyati boricha almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan kortejlar (kombinatsiyalar)* ***takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar*** *(qisqacha,* ***takrorli o'rin almashtirishlar****) deb ataladi.*

n ta elementlari orasida n_1 ta birinchi tur, n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, n_k ta k - tur bir xil elementlar bo'lgan takrorli o'rin almashtirishlar sonini $C_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ bilan belgilaymiz.

1- teorema. *Takrorli o'rin almashtirishlar soni uchun*

$$C_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

formula o'rinlidir, bu yerda $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ *– elementlar soni,* k *– turlar soni.*

1- misol. Ikkita a, bitta b va ikkita c harflardan tashkil topgan kortej uchun barcha takrorli o'rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi ($k=3$) harflar soni beshga teng (n=5) bo'lib, $n_1 = 2$ (ikkita a), $n_2 = 1$ (bitta b) va $n_3 = 2$ (ikkita c). Dastlabki ikkita harflarning (xuddi shuningdek, oxirgi ikkita harflarning ham) o'rinlarini o'zaro almashtirsak yangi o'rin almashtirishlar hosil bo'lmaydi. Barcha takrorli o'rin almashtirishlar soni $C_5(2,1,2) = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2} = 30$ bo'ladi. Bu o'ttizta o'rin almashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

$$aabcc, aacbc, aaccb, abacc, abcac, abcca,$$
$$acabc.acacb, acbac, acbca, accab, accba,$$
$$baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa,$$
$$caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba,$$
$$cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa.$$

2. Takrorli o'rinlashtirishlar. n ta elementlardan tashkil topgan to'plam berilgan bo'lsin. Bu elementlardan foydalanib, m ta elementdan tashkil topgan kortejlarni shunday tuzamizki, bu kortejlarga har bir element hohlagancha marta (albatta m dan oshmagan miqdorda) kirishi mumkin bo'lsin va bu kortejlar bir-biridan ularni tashkil etuvchi elementlar turlari bilan yoki bu elementlarning joylashishlari bilan farq qilishsin.

2- ta'rif. *Shunday usul bilan tuzilgan kortejlarning har biri* n ***ta turli elementlardan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan*** m ***tadan o'rinlashtirish*** *(qisqacha,* ***takrorli o'rinlashtirish****) deb ataladi.*

n ta turli elementlardan m tadan takrorli o'rinlashtirishlar sonini $\overline{A}_n^m$ bilan belgilaymiz.

2- teorema. *n ta turli elementlardan m tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni n^m ga teng, ya'ni* $\overline{A}_n^m = n^m$.

2- misol. Oila a'zolari besh kishidan iborat bo'lib, ular ikkita ishni bajarishlari zarur (masalan, non sotib olish va uni bo'laklash), bunda oilaning har bir a'zosi ikkala ishni ham bajarish imkoniyatiga ega. Oila a'zolariga bu ishlarni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni aniqlansin.

Bu masalani hal qilish uchun oila a'zolarini a, b, c, d, va e harflari bilan belgilab, ishlar ikkita bo'lgani uchun beshta turli elementlardan ikkitadan barcha takrorli o'rinlashtirishlarni tuzamiz:

$$aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc,$$

$$cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee.$$

Hammasi bo'lib 25ta ($\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$) takrorli o'rinlashtirishlar tuzildi. Demak, besh kishidan iborat oila a'zolariga ikkita ishlarni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni 25dir.

3- misol. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqami ikki qismdan iborat: lotin alifbosining ikkita harfi va yetti xonali son. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining barcha mumkin bo'lgan raqamlari sonini aniqlang.

Lotin alifbosidagi yigirma oltita turli harflar yordamida 676ta ($\overline{A}_{26}^2 = 26^2 = 676$) ikkitadan takrorli o'rinlashtirishlar tashkil etish mumkin. O'nta 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 va 9 raqamlardan esa 10.000.000ta ($\overline{A}_{10}^7 = 10^7 = 10000000$) turli yetti xonali raqamlarni (bu raqamlarda dastlabki nollar tashlab yuborilmaydi) hosil qilish mumkin. Shunday qilib, O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqamlari soni 6.760.000.000ga ($\overline{A}_{26}^2 \overline{A}_{10}^7 = 6760000000$) teng.

3. Takrorli guruhlashlar. Har bir elementi birlashmaga istalgancha marta kiritiladigan va turli n ta elementlardan m tadan olinadigan hamda elementlar tartibi e'tiborga olinmaydigan birlashmalarni (kortejlarni) qaraymiz.

3- ta'rif. *Bunaqa birlashmalar n* ***ta turli elementlardan*** *m* ***tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan guruhlashlar*** *(qisqacha,* ***takrorli guruhlashlar****) deb ataladi.*

n ta elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan guruhlashlar ta'rifidan ko'rinib turibdiki, turli kombinatsiyalar bir-birlaridan hech bo'lmasa bitta elementi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan takrorli guruhlashlar sonini $\overline{C}_n^m$ deb belgilaymiz.

3- teorema. ***n ta elementdan m tadan takrorli guruhlashlar soni C_{n+m-1}^m ga teng, ya'ni*** $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

4- misol. Har birining yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5 va 6 sonlari yozilgan kub shaklidagi ikkita soqqalarni tashlaganda jami nechta sonlar juftligini hosil qilish mumkin?

Soqqalarni tashlaganda jami quyidagi 21 imkoniyatlardan biri ro‘y beradi:

$$<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,2>,$$
$$<2,3>,<2,4>,<2,5>,<2,6>,<3,3>,<3,4>,<3,5>,$$
$$<3,6>,<4,4>,<4,5>,<4,6>,<5,5>,<5,6>,<6,6>.$$

Bu juftliklar oltita elementdan ikkitadan takrorli guruhlashlarni tashkil etadi. Ularning soni 3- teoremaga asosan $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ bo‘ladi.

4. Ko‘phad formulasi. Takrorli kombinatsiyalar vositasida Nyuton binomi tushunchasini umumlashtiramiz, ya’ni $(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n$ ifodaning yoyilmasini topish muammosini qaraymiz. Buning uchun qaralayotgan ifodani n ta bir xil ifodalar ko‘paytmasi, ya’ni

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + ... + a_m)(a_1 + a_2 + ... + a_m)...(a_1 + a_2 + ... + a_m)}_{n\text{ta ko‘paytuvchi}}$$

shaklida yozib, qavslarni ochamiz va o‘xshash hadlarni ixchamlaymiz. Natijada, $(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n$ ifodaning yoyilmasi hosil bo‘ladi. Yoyilmaning tarkibidagi qo‘shiluvchilarning har birida $a_1, a_2, ..., a_m$ elementlardan tashkil topgan takrorli o‘rin almashtirishlar bor, bu yerda har bir qo‘shiluvchi qandaydir koeffitsient va n ta elementlarning $a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_m^{n_m}$ ko‘rinishdagi ko‘paytmasidan iboratdir. Yoyilmadagi $a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_m^{n_m}$ ko‘paytmaning koeffitsientini aniqlash uchun n ta $(n = n_1 + n_2 + ... + n_m)$ elementli takrorli o‘rin almashtirishlar sonini topish kerak, ya’ni $C_n(n_1, n_2, ..., n_m)$ sonni hisoblash kerak. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

4- teorema. *Ixtiyoriy haqiqiy* $a_1, a_2, ..., a_m$ *va natural* n *sonlar uchun*

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_m=n} C_n(n_1, n_2, ..., n_m)\, a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_m^{n_m}$$

formula o‘rinlidir, bu formulaning o‘ng tomonidagi yig‘indi $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$ *shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun* $n_1, n_2, ..., n_m$ *sonlar uchun amalga oshiriladi.*

5- misol. $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasini toping. Avvalo 3 sonini bo‘laklaymiz, ya’ni 3ni mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlar bilan manfiymas butun sonlar yig‘indisi shaklida yozamiz:

3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=2+0+1, 3=1+2+0, 3=1+1+1,
3=1+2+0, 3=0+3+0, 3=0+2+1, 3=0+1+2, 3=0+0+3.

Demak, ko‘phad formulasiga ko‘ra,

$$(a+b+c)^3 = C_3(3,0,0)a^3 + C_3(2,1,0)a^2 b + C_3(2,0,1)a^2 c +$$

$$+C_3(1,2,0)ab^2+C_3(1,1,1)abc+C_3(1,0,2)ac^2+C_3(0,3,0)b^3+$$
$$+C_3(0,2,1)b^2c+C_3(0,1,2)bc^2+C_3(0,0,3)c^3.$$

Takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_n(n_1,n_2,...,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ **formulasini qo‘llab quyidag tenglikni hosil qilamiz:**

$$(a+b+c)^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3.\ ■$$

Ko‘phad yoyilmasining hadlarini yozganda shunga e’tibor berish kerakki, agar $n_1,n_2,...,n_m$ $(n_1+n_2+...+n_m=n)$ sonlar $k_1,k_2,...,k_m$ $(k_1+k_2+...+k_m=n)$ sonlarning o‘rin almashtirishlari yordamida hosil qilinishi mumkin bo‘lsa, u holda $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ va $a_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_m^{k_m}$ hadlarning koefitsientlari o‘zaro teng bo‘ladi. Shuning uchun n sonining $n=n_1+n_2+...+n_m$ ko‘rinishda ifodalanishlaridan qandaydir shartni bajaradigan birortasini, masalan, $n_1\geq n_2\geq...\geq n_m$ (yoki $n_1\leq n_2\leq...\leq n_m$) shartni qanoatlantiradiganini topib, unga mos $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ifodada daraja ko‘rsatgichlarini mumkin bo‘lgan barcha usullar bilan almashtirish kerak bo‘ladi.

Masalan, 5- misoldagi a^2b, a^2c, ab^2, ac^2, b^2c va bc^2 hadlarning ko‘phadiy koeffitsientlari o‘zaro tengdir. Yuqorida ko‘rsatilgan shart asosida 3 sonini manfiymas butun sonlar yigindisi ko‘rinisida bo‘laklashning 3 imkoniyati bor: 3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=1+1+1. Shuning uchun, $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasida 3 xil turli koeffitsientlarga egamiz: $C_3(3,0,0)=1$, $C_3(2,1,0)=3$ va $C_3(1,1,1)=6$. Demak,

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+$$
$$+3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc.$$

Ko‘phad formulasi yordamida ko‘phadiy koeffitsientlarning, ya’ni $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ sonlarning ba’zi xossalarini osonlik bilan isbotlash mumkin. Masalan,

$$\sum_{n=n_1+n_2+...+n_m}C_n(n_1,n_2,...,n_m)=m^n,$$

bu yerda yig‘indi $n_1+n_2+...+n_m=n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1,n_2,...,n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi va qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinadi.

Haqiqatdan ham, agar ko‘phad formulasida $a_1=a_2=...=a_m=1$ deb olsak, kerakli tenglikni hosil qilamiz.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar takrorlanishi bo‘lmagan o‘rin almashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?

2. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan o‘rin almashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?
3. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rinlashtirishlar takrorlanishi bo‘lmagan o‘rinlashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?
4. Takrorli o‘rinlashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan o‘rinlashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?
5. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan guruhlashlar takrorlanishi bo‘lmagan guruhlashlardan nimasi bilan farq qiladi?
6. Takrorli guruhlashlar soni formulasini isbotlashda qanday usuldan foydalanilgan?
7. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan guruhlashlar sonini hisoblash mumkinmi?
8. Ko‘phad formulasining Nyuton binomi formulasidan qanday farqi bor?
9. Ko‘phadiy koeffitsientlarning qanday xossalarini bilasiz?

4-AMALIY MASHG’ULOT
Fibonachchi sonlari

Amaliy mashg’ulotda ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining tuzulishi	3. Fibonachchi sonlarining ta’rifi 4. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari
Mashg’ulot maqsadi:	Talabalarda fibonachchi sonlarining ta’rifi va fibonachchi sonlarining oddiy xossalariga oid turli masalalarni yechish.
Ta’lim usullari	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta’limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta’lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma’ruza.

4-amaliy mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o’quv mashg’ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o’quv natijalarni e’lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	10. Fibonachchi sonlarini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 11. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 12. Fibonachchi qatori aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2).	O’z-o’zini o’zaro baholashni o’tkazadilar. Savol beradilar

	3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

4. Fibonachchi sonlarining ta'rifini aytiladi?
5. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari deb nimaga aytiladi?
6. Fibonachchi sonlarining xossalari?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

4. Fibonacha qatori nima?
5. Fibonachchi sonlari qanday hosil qilinadi?
6. Fibonachchi sonlarini formulasi qanday hosil qilinadi?

Asosiy qism

1. Fibonachchi sonlarining ta'rifi. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlikdagi elementlarning uchinchisidan boshlab har biri o'zidan oldingi ikkita elementning yig'indisiga teng, ya'ni $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ bo'lsin. Ravshanki, bu ketma-ketlikni tashkil qilishda uning dastlabki ikkita hadi muhim bo'lib, keyingi barcha hadlari rekurrent tenglik vositasida aniqlanadi.

1- ta'rif. *$u_1 = u_2 = 1$ bo'lgan holda $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ rekurrent tenglik vositasida aniqlan ketma-ketlik* ***Fibonachchi qatori****, uning hadlari esa* ***Fibonachchi sonlari*** *deb ataladi.*

Tabiiyki, Fibonachchi qatoridagi Fibonachchi sonlarini aniqlash jarayoni cheksizdir. Fibonachchi sonlarining dastlabki 24tasi quyida keltirilgan:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368.

"Fibonachchi sonlari" iborasi birinchi bo'lib XIX asrda Eduard Lyuka tomonidan qiziqarli matematikaga bag'ishlab yozilngan asarda qo'llanilgan. Fibonachchi (bu so'z italyancha "filius Bonacci" so'zlaridan qisqartirilib tuzilgan bo'lib, Bonachchining o'g'li ma'nosini anglatadi) Italiyadagi Piza shahrida XII-

XIII asrlarda yashagan Leonardo Pizanskiyning boshqacha ismidir (laqabidir). Bonachchi Italiya va Jazoirda savdo-sotiq bilan shug'ullangan. Leonardo boshlang'ich ma'lumotni Jazoirda olgan bo'lib, u o'zining arab o'qituvchilaridan hind pozitsion o'nlik sanoq tizimi va nolni o'rgangan edi. Fibonachchi "Liber abaci" ("Abak haqidagi kitob" – 1202 yilda yozilgan bo'lib, 1228 yildagi qo'lyozma nusxasi saqlangan) nomli kitobida arifmetika va algebra bo'yicha o'z davrining deyarli barcha ma'lumotlarini bayon qilgan. Xususan, o'sha kitobda hozir butun dunyoda ommabob hisoblangan "arab" raqamlari bayon qilingan. Qo'lyozmaning (1228 yil) 123-124 sahifalarida uy quyonlarining ko'payishi haqidagi quyidagi masala bayon qilingan.

"Bir kishi bir juft quyonni ko'paytirish maqsadida saqlagan bo'lsin.

Quyonning tabiati shundayki, har bir juft quyon bir oyda boshqa bir juft quyonni dunyoga keltiradi va yangi paydo bo'lgan juft quyonlar ikkinchi oydan boshlab nasl bera boshlaydilar. Bir yildan so'ng dastlabki juft quyonlarning ko'payishi natijasida necha juft quyon vujudga keladi?"

Bu masalani yechish jarayonida Fibonachchi dastlabki yilning har bir oyi uchun quyonlar juftlari sonini aniqlagan. Bu sonlar 1- jadvalda keltirilgan. "Liber abaci"dan bu masala yechimi bayonining so'nggi satrlarini keltiramiz: "...Oxirgi oyda tug'ilgan yangi 144 juft quyonlar qo'shilsa 377 juft quyon hosil bo'ladi. Shuncha juft quyon bir yil davomida bir juft quyondan ko'payar ekan". Quyonlar haqidagi masalada uchragan sonlar Fibonachchi qatorining dastlabki sonlari ekanligi yaqqol ko'rinib turibdi.

Fibonachchining o'zi Fibonachchi qatorining xossalarini o'rganish bilan shug'ullanmagan deb hisoblashadi (har ehtimolga qarshi, bizgacha yetib kelgan bunday izlanishlar haqida ma'lumotlar yo'qligini ta'kidlaymiz). XIX asr boshlarida Fibonachchi qatorining turli xossalariga bag'ishlangan ilmiy ishlar soni "Fibonachchi quyonlari sonidek o'sgan".

1- jadval

O‘tgan oylar soni	Tug‘ilgan juft quyonlar	Jami juftlar
0	0	1
1	1	2
2	1	3
3	2	5
4	3	8
5	5	13
6	8	21
7	13	34
8	21	55
9	34	89
10	55	144
11	89	233
12	144	377

Eduard Lyuka ixtiyoriy u_1 va u_2 sonlardan boshlanuvchi hamda $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ rekurrent tenglik bilan aniqlanuvchi sonlar qatorini **umumlashgan Fibonachchi qatori** deb nomlagan.

2. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari. Fibonachchi sonlari juda ko‘plab qiziqarli xossalarga ega. Quyida bu xossalardan ba’zilarini keltiramiz.

1- xossa. *Dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlarining yig‘indisi* $(u_{n+2} - 1)$*ga teng, ya’ni*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1.$$

Haqiqatdan ham, Fibonachchi sonlarining ta’rifiga ko‘ra

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \ldots + (u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) =$$

$$= u_{n+2} - u_2 = u_{n+2} - 1\,.$$

2- xossa. *Toq raqamli dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlarining yigindisi* u_{2n} *ga teng, ya’ni*

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}\,.$$

Ravshanki,

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} =$$

$$= u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \ldots + (u_{2n} - u_{2n-2}) = u_{2n}\,.$$

3- xossa. *Juft raqamli dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlarining yig‘indisi* ($u_{2n+1} - 1$)*ga teng, ya’ni*

$$u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1\,.$$

Bu xossani isbotlash uchun, 1- xossaga ko‘ra,

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

tenglik o‘rinli ekanligini va 2-xossani hisobga olish kifoya:

$$u_2+u_4+u_6+...+u_{2n}=(u_1+u_2+u_3+...+u_{2n})-$$
$$-(u_1+u_3+u_5+...+u_{2n-1})=$$
$$=u_{2n+2}-1-u_{2n}=u_{2n+2}-u_{2n}-1=u_{2n+1}-1.$$

Yuqorida isbotlangan 1- va 2- xossalardan foydalanib, Fibonachchi sonlarining ishorasi almashuvchi qatori yig‘indisi haqidagi quyidagi xossasini ham isbotlash mumkin.

4- xossa. *Dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlari uchun*
$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1$ *tenglik o‘rinlidir.*

5- xossa. *Dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlari kvadratlarining yig‘indisi* $u_n u_{n+1}$ *ga teng, ya’ni*

$$u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=u_n u_{n+1}.$$

Haqiqatdan ham, Fibbonachi qatorining ta’rifiga ko‘ra $u_1^2=u_1u_2$ bo‘ladi va birdan katta ixtiyoriy natural n son uchun

$$u_n^2=u_nu_n=u_n(u_{n+1}-u_{n-1})=u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n$$

tenglik o‘rinlidir. Shuning uchun

$$u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=u_1u_2+u_2u_3-u_1u_2+$$
$$+...+u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n=u_nu_{n+1}.$$

6- xossa. *Ixtiyoriy* u_n *Fibonachchi sonining kvadrati bilan* $u_{n-1}u_{n+1}$ *ko‘paytma orasidagi farq birga teng, ya’ni*

$$u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}=(-1)^{n+1}.$$

Bu hossani matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz. Baza: $n=2$ uchun

$$u_2^2-u_1u_3=1^2-1\cdot 2=-1=(-1)^{2+1}\ \text{– tasdiq to‘g‘ri.}$$

Induksion o‘tish: bu xossa $n=k\geq 2$ uchun to‘g‘ri, ya’ni $u_k^2-u_{k-1}u_{k+1}=(-1)^{k+1}$ yoki $u_k^2=u_{k-1}u_{k+1}+(-1)^{k+1}$ bo‘lsin. Oxirgi tenglikning ikkala tomoniga u_ku_{k+1} ifodani qo‘shsak

$$u_k^2+u_ku_{k+1}=u_{k-1}u_{k+1}+u_ku_{k+1}+(-1)^{k+1}$$

tenglik va bu tenglikdan

$$u_k(u_k+u_{k+1})=u_{k+1}(u_{k-1}+u_k)+(-1)^{k+1}$$

kelib chiqadi. Fibonachchi qatorining aniqlanishidan foydalanib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$u_ku_{k+2}=u_{k+1}u_{k+1}+(-1)^{k+1},$$
$$-u_{k+1}^2+u_ku_{k+2}=(-1)^{k+1}.$$

Oxirgi tenglikning ikkala tomonini (-1)ga ko‘paytirsak, $u_{k+1}^2-u_{(k+1)-1}u_{(k+1)+1}=(-1)^{(k+1)+1}$ tenglik hosil bo‘ladi.

Matematik induksiya usulini qo‘llab $u_1, u_2, \ldots$ Fibonachchi sonlarining quyidagi 7–10- xossalarni ham isbotlash mumkin:

7- xossa. $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \ldots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$.

8- xossa. $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \ldots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$.

9- xossa. $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \ldots + 2u_{n-1} + u_n =$
$= u_{n+4} - (n+3)$.

10- xossa. $u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n = nu_{n+2} - u_{n+3} + 2$.

Endi Fibonachchi sonlarining binomial koeffitsientlar (Paskal uchburchagi) bilan bog‘lanishini ifodalovchi xossani o‘rganamiz.

11- xossa. *Fibonachchi soni* u_n ($n \in \boldsymbol{N}$) *uchun* $u_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^k$ *tenglik o‘rinlidir.*

Bu xossani isbotlash uchun u_n ($n = 1, 2, \ldots$) sonlardan tuzilgan $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ketma-ketlikning Fibonachchi qatori bo‘lishini ko‘rsatish kifoya. Buning uchun esa

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{1-1}{2}\right]} C_{1-k-1}^k = \sum_{k=0}^{0} C_{-k}^k = C_0^0 = 1,$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{2-1}{2}\right]} C_{2-k-1}^k = \sum_{k=0}^{0} C_{1-k}^k = C_1^0 = 1$$

ekanligini ta’kidlab, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ketma-ketlik uchun $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ($n \geq 2$) rekurrent tenglikning bajarilishini ko‘rsatamiz.

Agar n juft son ($n = 2s$, $s \in \boldsymbol{N}$) bo‘lsa, u holda

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^k = \sum_{k=0}^{s} C_{n-k}^k,$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^k = \sum_{k=0}^{s-1} C_{n-k-1}^k,$$

$$u_{n-1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-k-2}^k = \sum_{k=0}^{s-1} C_{n-k-2}^k$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu tengliklardan foydalanib,

$$u_n + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{s-1} C_{n-k-1}^k + \sum_{k=0}^{s-1} C_{n-k-2}^k = 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C_{n-k-1}^k + \sum_{p=1}^{s} C_{n-p-1}^{p-1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C_{n-k-1}^k + \sum_{p=1}^{s-1} C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-s-1}^{s-1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{s-1} (C_{n-k-1}^k + C_{n-k-1}^{k-1}) + C_{n-s-1}^{s-1}$$

munosobatlarni hosil qilamiz. Binomial koeffitsientlarning $C^{k}_{n-k-1} + C^{k-1}_{n-k-1} = C^{k}_{n-k}$ xossasiga binoan

$$u_n + u_{n-1} = 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C^{k}_{n-k} + C^{s-1}_{n-s-1} = 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C^{k}_{n-k} + C^{s-1}_{2s-s-1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C^{k}_{n-k} + C^{s-1}_{s-1} = C^{0}_{n-k} + \sum_{k=1}^{s-1} C^{k}_{n-k} + C^{s}_{s} =$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} C^{k}_{n-k} + C^{s}_{n-s} = \sum_{k=0}^{s} C^{k}_{n-k} = u_{n+1}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz.

n toq son bo‘lganda ham, yuqoridagidek mulohazalar yuritib, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ($n \ge 2$) tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatish mumkin. Demak, Fibonachchi qatorining ta’rifiga asosan, $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ketma-ketligi Fibonachchi qatoridir.

Yuqorida ta’kidlanganidek, $u_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C^{k}_{n-k-1}$ tenglik Fibonachchi sonlari bilan Paskal uchburchagi orasida bog‘lanishni ifodalayi. 1- shaklda tasvirlangan Paskal uchburchagidagi shtrixli chiziqlar bo‘ylab joylashgan sonlar yig‘indisi Fibonachchi sonlarini tashkil etadi.

12- xossa. *Fibonachchi soni* u_n *(*$n \in \mathbf{N}$*) uchun*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$ *tenglik o‘rinlidir.*

Bu xossani isbotlash maqsadida, avvalo, α haqiqiy son uchun $\alpha^2 = 1 + \alpha$ tenglik o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilib, α^3, α^4, α^5, α^6 va hokazo darajalarni α orqali ifodalaymiz: $\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(1+\alpha) = 1 + 2\alpha$,

$$\alpha^4 = \alpha\alpha^3 = \alpha(1+2\alpha) = 2 + 3\alpha$$

$u_1 =$
$u_2 =$
$u_3 = 1+1$
$u_4 = 1+2$
$u_5 = 1+3+1$
$u_6 = 1+4+3$
$u_7 = 1+5+6+1$
$u_8 = 1+6+10+4$
$u_9 = 1+7+15+10+$

n=0	1
n=1	1 1
n=2	1 2 1
n=3	1 3 3 1
n=4	1 4 6 4 1
n=5	1 5 10 10 5 1
n=6	1 6 15 20 15 6 1
n=7	1 7 21 35 35 21 7 1
n=8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

1-

$$\alpha^5 = \alpha\alpha^4 = \alpha(2+3\alpha) = 3+5\alpha\,,$$
$$\alpha^6 = \alpha\alpha^5 = \alpha(3+5\alpha) = 5+8\alpha \text{ va hokazo.}$$
Bu ifodalardan ko‘rinib turibdiki, ulardagi ozod hadlar ham, α ning koeffitsientlari ham Fibonachchi sonlaridan iboratdir.

Matematik induksiya usulidan foydalanib, agar u_n Fibonachchi soni bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $n \geq 2$ natural sonlar uchun $\alpha^n = u_{n-1} + u_n\alpha$ formulaning to‘g‘riligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatdan ham, $n=2$ bo‘lganda $\alpha^2 = u_1 + u_2\alpha = 1+\alpha$ tenglikka ega bo‘lamiz, ya’ni baza bajarildi.

Induksion o‘tish: $n=k$ bo‘lgan hol uchun $\alpha^k = u_{k-1} + u_k\alpha$ formula to‘g‘ri bo‘lsin. U holda $n=k+1$ bo‘lganda quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:
$$\alpha^{k+1} = \alpha\alpha^k = \alpha(u_{k-1} + u_k\alpha) = u_{k-1}\alpha + u_k\alpha^2 =$$
$$= u_{k-1}\alpha + u_k(1+\alpha) = u_{k-1}\alpha + u_k + u_k\alpha =$$
$$= u_k + (u_{k-1} + u_k)\alpha = u_k + u_{k+1}\alpha\,.$$
Demak, $\alpha^{k+1} = u_k + u_{k+1}\alpha$.

Shunday qilib, $\alpha^2 = 1+\alpha$ va ixtiyoriy $n \geq 2$ natural sonlar uchun u_n Fibonachchi soni bo‘lsa, u holda $\alpha^n = u_{n-1} + u_n\alpha$ formula to‘g‘ri ekanligi isbotlandi. Endi $\alpha^2 = 1+\alpha$ tenglikni kvadrat tenglama sifatida qarab, uning biri musbat, ikkinchisi manfiy ikkita $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ va $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ildizlarini topamiz. $\alpha^n = u_{n-1} + u_n\alpha$ formulaga ko‘ra,
$$\begin{cases} \alpha_1^n = u_{n-1} + u_n\alpha_1, \\ \alpha_2^n = u_{n-1} + u_n\alpha_2. \end{cases}$$
Bu tengliklarni u_{n-1} va u_n noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasi deb qaraymiz va uni hal qilib, 12- xossaning isbotiga ega bo‘lamiz.

Shunisi ajoyibki, 12- xossaga binoan, butun qiymatli u_n son irratsional sonlardan iborat bo‘lgan kvadrat ildizlar orqali ifodalanmoqda. 12- xossani ifodalovchi tenglik **Bine formulasi** deb yuritiladi.

Kesmani bo‘laklarga bo‘lishda **oltin kesim** tushunchasini eslaylik. Berilgan kesmaning oltin kesimi deb uni shunday ikki qismga ajratish tushuniladiki, bu yerda butun kesma uzunligining katta qism uzunligiga nisbati va katta qism uzunligining kichik qism uzunligiga nisbati o‘zaro tengdir. Bu nisbatning qiymati α_1 ga teng bo‘lishini aniqlash qiyin emas. “Oltin kesim” iborasining mazmuni shu bilan ham tasdiqlanadiki, masalan, tomonlari uzunliklarining nisbati $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ songa yaqin bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak inson ko‘ziga yoqimli bo‘lib ko‘rinishi qadim zamonlardayoq ma’lum bo‘lgan. Yana shunisi ham qiziqarliki, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha_1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=-\alpha_2$.

Hayratlanarlisi shuki, Fibonachchi sonlari tabiatning turli narsa

va hodisalarida kutilmaganda namoyon bo‘lishadi. Masalan, ular kungaboqarning urug‘lari joylashgan “savat”ida osonlik bilan sanab aniqlash mumkin bo‘lgan spirallar (aniqrog‘i spirallar yoylari) sonlari sifatida paydo bo‘ladi (2- shaklga qarang). Kungaboqarning urug‘lari joylashgan savatida logarifmik spirallarning ikki oilasini kuzatish mumkin. Bu oilalardan birining spirallari aylanishi soat millari yo‘nalishida, ikkinchisiniki esa teskari yo‘nalishda bo‘ladi.

Botanikada spirallar oilalarining bunday joylashishini **fillotaksis** deb atashadi. Oilalardagi spirallar sonlari Fibonachchi qatorida ketma-ket joylashgan ikkita Fibonachchi sonlaridan iborat bo‘lishadi. Ular kungaboqar savatining kattaligiga qarab 34 va 55, yoki 55 va 89, yoki 89 va 144 bo‘lgan Fibonachchi sonlari juftliklarini tashkil etishadi. Tabiatda, hattoki, spirallar sonlari 144 va 233 bo‘lgan ulkan kungaboqar savati ham uchraydi! Kungaboqar fillotaksisi va Fibonachchi sonlari orasidagi bu aloqani birinchi bo‘lib E. Lyuka e’lon qilgan edi.

1- misol. Elementlari 0 va 1 raqamlaridan iborat bo‘lib, ikkita 1 raqami yonma-yon joylashmydigan kortejlarni qaraymiz. Shunday tartibda tuziladigan n uzunlikka ega barcha kortejlar soni c_n Fibonachchi qatorining ($n+2$)- hadiga tengligini, ya’ni $c_n=u_{n+2}$ tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Buning uchun matematik induksiya usulidan foydalanaymiz. Matematik induksiya usulining bazasi sifatida $n=1$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda misol shartlarini qanoatlantiruvchi ikkita ($<0>$ va $<1>$) kortejlar tuzish mumkin, ya’ni $c_1=2$. Fibonachchi qatorining tuzilishiga asosan $n=1$ bo‘lgan hol uchun $u_{n+2}=u_{1+2}=u_3=2$. Demak, $n=1$ bo‘lganda $c_n=u_{n+2}$ tasdiq to‘g‘ri.

Induksion o‘tish: $n=k$ bo‘lganda misol shartlarini qanoatlantiruvchi kortejlar soni uchun isbotlanayotgan tenglik o‘rinli bo‘lsin, ya’ni $c_k=u_{k+2}$. Bu tenglikning $n=k+1$ uchun ham to‘g‘riligini ko‘rsatamiz. Ravshanki, uzunligi $n=k+1$ bo‘lgan barcha kortejlarni, tuzilishiga ko‘ra, ikki guruhga quyidagicha ajratish mumkin.

Birinchi guruhga talab qilingan shartlar asosida tuzilgan va uzunligi k ga teng kortejlarning har biriga o‘ng tomondan 0 raqamini joylashtirish usuli bilan hosil qilingan kortejlarni kiritamiz. Shuning uchun, birinchi guruhdagi kortejlar soni uzunligi k ga teng kortejlar soniga teng. Bu yerda induksiya farazini hisobga olsak birinchi guruhda u_{k+2} ta kortejlar bor degan xulosaga kelamiz.

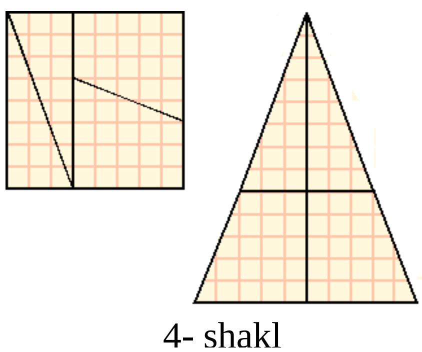
Ikkinchi guruhga oxirgi elementi 1 raqamidan iborat bo‘lgan kortejlarni kiritamiz. Kortejlarni tuzishning misolda talab qilinayotgan shartiga ko‘ra ikkinchi guruhdagi har bir kortejda oxirgi 1 raqamidan oldin faqat 0 raqami joylashishi mumkinligi kelib chiqadi. Shuning uchun, ikkinchi guruhdagi kortejlarni uzunligi ($k-1$)ga teng bo‘lgan va talab qilingan shartlar asosida tuzilgan kortejlarning har biriga o‘ng tomondan 0, 1 raqamlarini (aynan shu tartibda) joylashtirib hosil qilish mumkin. Demak, induksion farazni hisobga olsak, ikkinchi guruhdagi kortejlar soni u_{k+1} bo‘ladi.

Shunday qilib, $k+1$ uzunlikka ega barcha kortejlar soni $c_{k+1}=u_{k+1}+u_{k+2}$. Fibonachchi qatorining aniqlanishiga ko‘ra, $u_{k+1}+u_{k+2}=u_{k+3}$. Bu yerdan $c_{k+1}=u_{k+3}=u_{(k+1)+2}$.

2- misol. Oltin kesim juda qadimdan ma’lum bo‘lgan. Bu tushunchadan qadimgi yunonlar haykaltaroshlikda, suv saqlashga mo‘ljallangan xum idishlarni yasashda foydalana bilishgan. 1854 yilda A. Seyzing oltin kesim tushunchasini qayta “ochib”, bu tushunchani absolyutlashtirishga uringan. U o‘z asarlaridan birida “oltin kesim tabiatning barcha hodisalarida va san’atda universal kesimdir” deb e’lon qilgan. Bunday xulosaga A. Seyzing tabiatda uchraydigan turli hodisa va jarayonlarni tahlil qilish asosida, jumladan, qushlarning tuxumlari, o‘simliklar, hayvonlar, turli tovushlar, insonlar tomonidan yaratilgan binolar, idishlar, she‘riy va musiqiy asarlar va boshqalarni kuzatish va zarur hisoblashlarni bajarish asosida kelgan.

A. Seyzing ikki mingga yaqin kishilarning badan o‘lchovlarini olib, bu qiymatlar asosida o‘rtacha statistik qiymatlarni hisoblagan. Qilingan hisoblashlarga ko‘ra, erkak kishining badanidagi katta o‘lchovning kichik o‘lchovga nisbati $13:8=1{,}625$, ayollar uchun bu ko‘rsatkich $8:5=1{,}6$, chaqolaqlar uchun esa $1:1$ kabi bo‘lishi aniqlangan. Inson bolasi 13 yoshga kelganda bu nisbat 1,6 bo‘lishi, 21 yoshda esa proporsiya insonning jinsiga qarab yuqorida ta’kidlangan nisbatga yaqin bo‘lar ekan. Bu yerdagi nisbatlarda qatnashayotgan sonlar va insonning yoshlari (13 va 21) Fibonachchi qatori sonlaridir.

3- misol. Tomoni 8 birlik kvadratni (yuzasi 64 kv. birlik) 4- shaklda ko‘rsatilgandek 4 bo‘lakka (A, B, C va D) ajratib, bu 4 bo‘laklardan shaklning o‘ng tomonidagi figurani yasash mumkin. Yasalgan figurani uchburchak deb hisoblab, uning yuzasi hisoblansa 65 kv. birlik (dastlabki yuzaga qaraganda 1 kv. birlik ortiq!) javob hosil bo‘lishi tabiiydir. Tomoni 13 birlik kvadrat bilan ham xuddi shunga o‘xshash ishlarni bajarib, 169 kv. birlik yuzadan 168 kv. birlik (dastlabki yuzaga qaraganda 1 kv. birlik kam!) yuzani “hosil qilish” mumkin. Bu yerdagi xatoni aniqlash o‘quvchiga havola qilinadi.



4- shakl

Shunisi qiziqki, bo‘laklanayotgan kvadrat tomoni va bo‘laklashda qatnashayotgan sonlar uchta ketma-ket Fibonachchi sonlaridan iboratdir. Tabiiyki, yoqoridagi usul yordamida istalgan uchta ketma-ket Fibonachchi sonlaridan foydalanib yuqoridagiga o‘xshash istalgancha jumboqlar tuzish mumkin.

Ilova 3

Mustaqil ishlash uchun uyga vazifa savollari

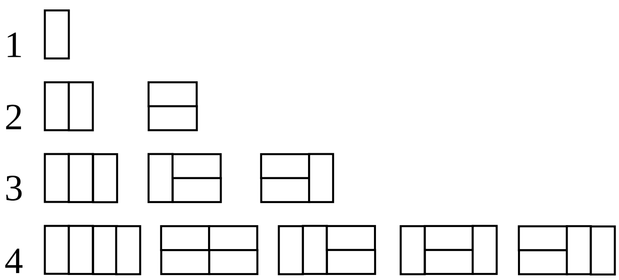
1. $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Fibonachchi sonlarining quyidagi xossalarini isbot qiling:

a) $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$; b) $u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2 = u_n u_{n+3}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$;

f) $u_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, g) $u_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & ... & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}$, bu yerda determinantning o‘lchovi $n \times n$, i – kompleks sonni ifodalashda ishlatiladigan mavhum birlik ($i = \sqrt{-1}$).

2. Qurilishda uzunligi enidan ikki baravar katta bo‘lgan g‘isht ko‘p qo‘llaniladi. Bunday g‘ishtlardan bir g‘isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari g‘ishtlar soni 1, 2, 3 va 4 bo‘lgan hollar uchun 5- shaklda keltirilgan. n ta



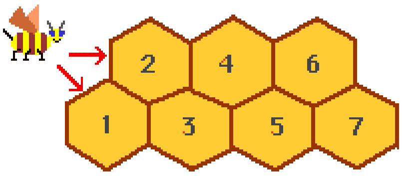
5- shakl

g‘ishtlardan bir g‘isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari sonini aniqlang.

3. Xonada o‘tirishga mo‘ljallangan n ta o‘rin bor. Bu o‘rinlarda o‘tirishi kerak bo‘lgan kishilarni ikki guruhga ajratish mumkin: do‘stlar (1) va dushmanlar (0). Agar $n = 1$ bo‘lsa, u holda bitta o‘ringa bir kishini o‘tqazish imkoniyatlari soni ikkiga tengligi ravshan (bu o‘ringa yo do‘stlar yo dushmanlar guruhiga tegishli

bir kishi o‘tiradi). n nafar kishini hech qaysi ikki dushman yonma-yon o‘tirmaslik sharti bilan o‘rinlarga o‘tqazish imkoniyatlari sonini aniqlang.

Asalari 1 yoki 2 raqamli xonachadan harakatlanishni boshlagan bo‘lsin Asalari



faqat o‘ng tomondagi qo‘shni xonachaga o‘tishi mumkin bo‘lsa, uning n raqamli xonachaga kelishi imkoniyatlari sonini aniqlang

5-AMALIY MASHG’ULOT
Bo’laklashlar kombinatorikasi

Amaliy mashg’ulotda ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining tuzulishi	1.Bo‘laklashlar ta’rifi 2.Qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olingan bo’laklashlar 3. Qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olinmagan bo’laklashlar
Mashg’ulot maqsadi:	Talabalarda turli jarayonlarni bo‘laklashlar ta’rifi, qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olinganva olinmagan bo’laklashlar foydalanib turli masalalarni yechish.
Ta’lim usullari	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta’limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta’lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma’ruza.

5-amaliy mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o’quv mashg’ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o’quv natijalarni e’lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	13. Bo‘laklashlar ta’rifi oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 14. Qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olingan oddiy xossalari aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 15. Qo’shuvchilar tartibi e‘tiborga olinmagan aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi	O’z-o’zini o’zaro baholashni o’tkazadilar.

	3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	Savol beradilar Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Bo‘laklashlar ta’rifi keltiring?
2. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olingan bo’laklashlar qanday hosil qilinadi?
3. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan bo’laklashlar qanday hosil qilinadi?
4. Bo’laklashlar kombinatorikasi qanday masalalarda qullaniladi?

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olingan jami bo’laklashlar soni qanday topiladi?
2. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan jami bo’laklashlar soni qanday topiladi?
3. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olingan jami bo’laklashlar sonini hosil qilish uchun qanday usuldan foydalaniladi?
4. Qushuluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan jami bo’laklashlar sonini hosil qilish uchun qanday usuldan foydalaniladi?

Asosiy qism

1. Bo‘laklashlar ta’rifi. Kombinatorikada o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar tushunchalari yordamida yechiladigan masalalar bilan bir qatorda bo‘laklashlarga doir masalalar ham qaraladi. Bunday masalalar turli vaziyatlarda paydo bo‘lishlari mumkin. Masalan, qutiga predmetlarni joylashda, axborotni uzatishda, pulni maydalashda, ko‘phad formulasidan foydalanish uchun daraja ko‘rsatkichini bo‘laklashda va hokazo.

Bo‘laklashlarga doir masalalar orasida natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo‘shiluvchilar yig‘indisi sifatida tasvirlash masalasi alohida o‘rin tutadi. Bu masalaning mohiyati quyidagidan iborat.

Berilgan natural n sonni $a_1, a_2, ..., a_k$ natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalash imkoniyatlari qancha?

Bu masala turli shartlarda qaralishi mumkin. Masalan:

- qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinishi yoki olinmasligi mumkin;
- bo‘laklashlarda faqat juft yoki toq sondagi qo‘shiluvchilar qatnashish sharti qo‘yilishi mumkin;
- qo‘shiluvchilar bir-biridan farqli yoki ixtiyoriy deb hisoblanishi mumkin va hokazo.

Tabiiyki, bo‘laklashlarga doir kombinatorik masalalarni yechishda, bo‘laklanayotgan son o‘rniga undan kichikroq son(lar)ni bo‘laklash yoki qaralayotgan bo‘laklashni kamroq sondagi qo‘shiluvchilari bo‘lgan bo‘laklashga keltirish usuli qo‘llanilishi maqsadga muvofiqdir.

1- ta’rif. *Natural n sonni ixtiyoriy k ta (k – natural son, $k \le n$) $a_1, a_2, ..., a_k$ natural sonlar yig‘indisi, ya’ni $n = a_1 + a_2 + ... + a_k$ ko‘rinishda tasvirlashga n sonni k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklash (qisqacha, bo‘laklash) deb ataladi.*

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, bo‘laklash masalasini ikki vaziyatda, ya’ni qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan yoki olinmagan hollarda qarash mumkin. Kombinatorik nuqtai nazardan olganda ikkala hol ham qiziqarlidir.

Bo‘laklash masalasini, avvalo, qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda qaraymiz.

Bu holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini $B(n,k)$ bilan va shu sonning barcha bo‘laklanishlari sonini $B(n)$ bilan belgilasak, ravshanki, $B(n) = \sum_{k=1}^{n} B(n,k)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1- misol. Faqat bir yo‘nalishda harakatlanganda besh pog‘onali zinapoyani hatlab o‘tish imkoniyatlari sonini aniqlash talab etilgan bo‘lsin.

Tabiiyki, har bir qadamda faqat bittadan pog‘onani bosib o‘tib, zinapoyani 5 qadamda hatlab o‘tish mumkin. Bu harakatni 5 sonning $5 = 1+1+1+1+1$ ko‘rinishda bo‘laklanishi kabi ifodalab, $B(5,5) = 1$ ekanligini qayd etamiz. Zinapoyani 4 qadamda ham hatlab o‘tish mumkin, bu ishning $B(5,4) = 4$ imkoniyati bor: $5 = 2+1+1+1$, $5 = 1+2+1+1$, $5 = 1+1+2+1$ va $5 = 1+1+1+2$. Shu usulda davom etib, 3 qadam uchun $B(5,3) = 6$ ta – $5 = 3+1+1$, $5 = 1+3+1$, $5 = 1+1+3$, $5 = 2+2+1$, $5 = 2+1+2$, $5 = 1+2+2$ hamda 2 qadam uchun $B(5,2) = 4$ ta – $5 = 4+1$, $5 = 3+2$, $5 = 2+3$, $5 = 1+4$ tengliklarni yozamiz. Endi barcha pog‘onalarni bir qadamda hatlab o‘tishga $B(5,1) = 1$ imkoniyat va $5 = 5$ tenglik mos kelishini e’tiborga olsak, mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlarni bayon qilgan bo‘lamiz.

Shunday qilib, faqat bir yo‘nalishda harakatlanganda besh pog‘onali zinapoyani hatlab o‘tish imkoniyatlari soni

$$B(5)=B(5,1)+B(5,2)+B(5,3)+B(5,4)+B(5,5)=16$$

bo‘ladi.

Endi $B(n,k)$ va $B(n)$ miqdorlarni hisoblash formulalarini topish bilan shug‘ullanamiz.

Dastlab $n=1$ bolgan holni qaraymiz. Tabiiyki, birni natural sonlar yig‘indisi qilib bo‘laklash haqida gap bo‘lishi mumkin emas. Shunday bo‘lishiga qaramasdan, birni faqat bitta qo‘shiluvchidan iborat deb qarab, yuqorida berilgan ta’rifga mos keluvchi $B(1,1)=1=C_0^0=C_{1-1}^0=C_{n-1}^0$ ta bo‘laklashga ega bo‘lamiz. Jami bo‘laklashlar soni $B(1)=B(1,1)=C_{n-1}^0=2^{n-1}$ bo‘ladi.

$n=2$ bo‘lgan holda $k=1$ qo‘shiluvchili $B(2,1)=1=C_1^0=C_{2-1}^0=C_{n-1}^0$ ta ($2=2$) va $k=2$ qo‘shiluvchili $B(2,2)=1=C_1^1=C_{2-1}^1=C_{n-1}^1$ ta ($2=1+1$) bo‘laklashlarga ega bo‘lamiz. Bu hol uchun jami bo‘laklashlar soni

$$B(2)=B(2,1)+B(2,2)=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1=2^{n-1}.$$

Agar $n=3$ bo‘lsa, u holda $k=1$ qo‘shiluvchili $B(3,1)=1=C_2^0=C_{3-1}^0=C_{n-1}^0$ ta ($3=3$), $k=2$ qo‘shiluvchili $B(3,2)=2=C_2^1=C_{3-1}^1=C_{n-1}^1$ ta ($3=2+1=1+2$) va $k=3$ qo‘shiluvchili $B(3,3)=1=C_2^2=C_{3-1}^2=C_{n-1}^2$ ta ($3=1+1+1$) bo‘laklashlar bor. Bu holda jami bo‘laklashlar soni uchun

$$B(3)=B(3,1)+B(3,2)+B(3,3)=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2=2^{n-1}$$

tenglik o‘rinlidir.

Shunday davom etib, “istalgan n natural sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni $(n-1)$ ta elementdan $(k-1)$ talab guruhlashlar soniga teng, ya’ni $B(n,k)=C_{n-1}^{k-1}$” degan farazga kelish mumkin. Agar bu faraz tasdiqlansa, binomial koeffitsientlarning yig‘indisi haqidagi xossasiga ko‘ra, $B(n)=\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i=2^{n-1}$ bo‘ladi.

1- t e o r e m a . *Qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda istalgan n natural sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni $(n-1)$ ta elementdan $(k-1)$ talab guruhlashlar soniga teng, ya’ni $B(n,k)=C_{n-1}^{k-1}$.*

2- t e o r e m a . *Qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda ixtiyoriy n natural sonning barcha bo‘laklanishlari soni 2^{n-1} ga teng, ya’ni $B(n)=2^{n-1}$.*

2- m i s o l. To‘qqiz qavatli binoning birinchi qavatidan sakkiz kishi liftda yuqoriga ko‘tarilayotgan bo‘lsin. Agar to‘qqizinchi qavatga liftdagi kishilarning faqat bittasi chiqishi shart bo‘lsa, lift yo‘lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari sonini aniqlang.

Masalaning shartiga binoan, liftdagi sakkiz kishidan faqat bir kishi to‘qqizinchi qavatga chiqishi shart bo‘lgani uchun, qolgan yetti kishining ikkinchi qavatdan sakkizinchi qavatgacha chiqishining ko‘p imkoniyatlari bor. Bu imkoniyatlar soni liftning birinchi va to‘qqizinchi qavatlar orasidagi to‘xtashlar sonidan bog‘liq bo‘lib, yettining barcha bo‘laklanishlari yordamida ifodalanishi mumkin. Masalan, lift binoning ikkinchi qavatidan sakkizinchi qavatigacha faqat bir marta to‘xtab, liftdagi yetti kishi tushib qolgan bo‘lsa, u holda bu hodisa $7=7$ ko‘rinishdagi bo‘laklash vositasida ifodalanadi; agar to‘qqizinchi qavatgacha lift ikki marta to‘xtab, oldin uch kishi, keyin to‘rt kishi tushib qolgan bo‘lsa, bu holatga $7=3+4$ ko‘rinishdagi bo‘laklash mos keladi va hokazo.

2- teoremadan foydalanib, yettining barcha bo‘laklanishlari soni $2^{7-1}=2^6=64$ ekanligini topamiz. Demak, agar to‘qqizinchi qavatga faqat bir kishi chiqishi shart bo‘lsa, u holda lift yo‘lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari soni 64ga tengdir. Agar hal qilingan masalada to‘qqizinchi qavatga faqat bir kishining chiqishi sharti bo‘lmasa edi, u holda sakkizning barcha bo‘laklanishlari sonini topishga to‘g‘ri kelar edi.

Endi natural sonlarni qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan vaziyatda bo‘laklash masalasi bilan shug‘ullanamiz.

Odatda, natural n sonning ixtiyoriy k ta (k – natural son, $k \le n$) $a_1, a_2, ..., a_k$ qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishini qandaydir shartlarga, masalan, $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_k$ yoki $a_1 \le a_2 \le ... \le a_k$ tengsizliklarga bo‘ysunadigan qilib olish qulay bo‘ladi.

Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini $R(n,k)$ bilan, uning barcha bo‘laklanishlari sonini esa $R(n)$ bilan belgilaymiz.

Bundan keyin, bo‘laklash deganda qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holdagi bo‘laklashni nazarda tutamiz.

Tabiiyki, quyidagi tenglik o‘rinlidir:

$$R(n) = \sum_{k=1}^{n} R(n,k).$$

Osonlik bilan ko‘rish mumkinki, $R(1)=1$, $R(2)=2$, $R(3)=3$, $R(4)=5$, $R(5)=7$, $R(6)=11$, $R(7)=15$.

3- m i s o l. 8 uchun barcha bo‘laklashlar 1- jadvalda ifodalangan. Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, 8 uchun, hammasi bo‘lib, 22 bo‘laklash imkoniyati bor:

$$R(8) = \sum_{k=1}^{8} R(8,k) = 1+4+5+5+3+2+1+1 = 22.$$

Albatta, yuqorida keltirilgan formula yordamida ixtiyory natural n uchun uning barcha bo‘laklanishlari sonini aniqlash mumkin. Lekin n yetarlicha katta qiymatga ega bo‘lganda bu formuladan foydalanish juda ko‘p hisoblashlar bajarishni taqozo qiladi. Ushbu bobning navbatdagi 7- paragrafida $R(n)$ning qiymatini hisoblash uchun boshqacha yo‘l borligi ko‘rsatilgan.

1- jadval

Qo‘shi-luvchilar soni	Bo‘laklanishlar	Bo‘laklanishlar soni
1	8=8	$R(8, 1) = 1$
2	8=7+1=6+2=5+3=4+4	$R(8, 2) = 4$
3	8=6+1+1=5+2+1=4+3+1= =4+2+2=3+3+2	$R(8, 3) = 5$
4	8=5+1+1+1=4+2+1+1=3+3+ 1+1= =3+2+2+1=2+2+2+2	$R(8, 4) = 5$
5	8=4+1+1+1+1=3+2+1+1+1= =2+2+2+1+1	$R(8, 5) = 3$
6	8=3+1+1+1+1+1=2+2+1+1+ 1+1	$R(8, 6) = 2$
7	8=2+1+1+1+1+1+1	$R(8, 7) = 1$
8	8=1+1+1+1+1+1+1+1	$R(8, 8) = 1$

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$larning qiymatlarini aniqlang.
2. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda 9ning barcha bo‘laklanishlarini yozing va $R(9)$ni hisoblang.
3. Bozorda dehqon 15 dona qovunni 7 nafar xaridorga donabay sotdi. Agar navbatdagi har bir savdoda dehqonning sotgan qovunlari soni oldingi savdodagiga qaraganda kamaymagan bo‘lsa, u holda barcha savdolarda sotilishi mumkin bo‘lgan qovunlar sonlarining barcha imkoniyatlarini toping. Odatda biror qarorni ko‘pchilik bo‘lib qabul qilish maqsadida ovoz berganda “tarafdor” va “qarshi” ovozlar sonlari o‘zaro teng bo‘lmasligi uchun a’zolari 3 nafardan

kam bo‘lmagan toq sondagi ekspertlar komissiyasi tuziladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi 17 nafar ekspertlardan tashkil qilinishi mumkin bo‘lgan komissiyalar sonini hisoblang.

6. Kichik bir qishloqda hammasi bo‘lib 22 bosh qora mol bor va har bir oilada hech bo‘lmasa bir bosh qora mol topiladi. Bu qishloqning hech qaysi oilasida uch boshdan ko‘p qora mol bo‘lmasa, qishloqdagi qora mollarning oilalar orasida taqsimlanishining barcha variantlarini aniqlang.

6-AMALIY MASHG'ULOT
Bo'laklashlar kombinatorikasi

Amaliy mashg'ulotda ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining tuzulishi	3. Ferrers diagrammas 4. Bo'laklashlarning xossalari
Mashg'ulot maqsadi:	Talabalarda turli jarayonlarni ferrers diagrammas, bo'laklashlarning xossalaridan foydalanish haqida bilim va ko'nikmalar hosil qilinib turli masalalarni yechiladi.
Ta'lim usullari	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta'limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta'lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma'ruza.

6-amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o'quv mashg'ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o'quv natijalarni e'lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	16. Ferrers diagrammas oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 17. Bo'laklashlarning xossalarini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 18. Normal ferrers diagrammasi aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob	O'z-o'zini o'zaro baholashni o'tkazadilar. Savol beradilar

	orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

5. Ferrers diagrammas ta’rifini kiltiring?
6. Diagrammali usul nima?
7. Normal ferrers diagrammasi deb nima aytiladi?
8. Diagrammani transpozitsiyasi deb nimaga aytiladi

2. Qanday masalalarda modda og’irligining saqlanish qonunidan foydalanish mumkin?

3. Modda og’irligining saqlanish qonunidan foydalanishga biror misol keltiring.

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

5. Qushma deagrammalar deb nimaga aytiladi?
6. Bo’laklashlar xossalarini kiltiring?
7. Tartibi e’tiborga olingan holda bo’laklashlar soni qanday topiladi
8. Tartibi e’tiborga olinmagan holda bo’laklashlar soni qanday topiladi

Asosiy qism

1. Ferrers diagrammasi. Natural n son k ta $a_1, a_2, ..., a_k$ natural qo‘shiluvchilarnung yig‘indisi qilib bo‘laklangan bo‘lsin.

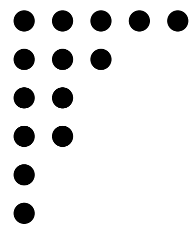
1- ta’rif. *k ta qatordan tashkil topgan va (yuqoridan pastga qarab hisoblaganda) i - qatorida a_i ta nuqtaga ega bo‘lgan diagramma n sonni k ta $a_1, a_2, ..., a_k$ natural qo‘shiluvchilarnung yig‘indisi qilib bo‘laklashga mos Ferrers diagrammasi deb ataladi.*

Ferrers diagrammasi tushunchasiga asoslangan diagrammali usul deb yuritiluvchi usul sonlarni qo‘shiluvchilar yig‘indisi qilib bo‘laklash masalalarini tahlil qilishda keng qo‘llaniladi.

Bo‘laklashda qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmaganligi sababli Ferrers diagrammasini tuzishda, odatda, uning qatorlaridagi nuqtalar soni yuqoridan pastga qarab o‘smaydigan, ya’ni $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k$ shart bajariladigan (yoki, kamaymaydigan ya’ni $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k$ shart bajariladigan) tartibga rioya qilinadi. Bundan tashqari, qatorlardagi nuqtalar diagrammaning vertikal ustunlarini tashkil etadigan qilib tuziladi.

2- ta’rif. *Shunday tartibda tuzilgan diagramma normal Ferrers diagrammasi deb ataladi.*

1- misol. 14=5+3+2+2+1+1 bo‘laklashga 1- shaklda tasvirlangan Ferrers diagrammasi mos keladi. Bu diagramma normal Ferrers diagrammasidir.


1- shakl

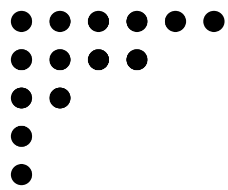
Ixtiyoriy bo‘laklashga mos keluvchi normal Ferrers diagrammasining qatorlarini ustun, ustunlarini esa qator qilib o‘zgartirilsa (ya’ni diagramma trasponirlansa), tabiiyki, yana normal Ferrers diagrammasi hosil bo‘ladi.

3- ta’rif. *Bu hosil bo‘lgan diagrammaga dastlabki diagrammaning transpozitsiyasi (yoki ikkilanma diagrammasi) deb ataladi.*

Normal Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi natijasida hosil bo‘lgan ikkilanma diagramma transponirlansa dastlabki diagramma hosil bo‘lisi ravshandir. Demak, istalgan son uchun tuzilgan barcha diagrammalarni o‘zaro ikkilanma bo‘lgan diagrammalar juftlariga ajratish mumkin. Shuni e’tiborga olish kerakki, ba’zi diagrammalar o‘z-o‘ziga ikkilanma bo‘ladi, shuning uchun ular ikkita bir xil diagrammalar juftini tashkil etadi deb hisoblash mumkin.

Ikkilanma diagrammalarni qo‘shma diagrammalar deb, ularga mos keluvchi bo‘laklashlarni esa qo‘shma bo‘laklashlar deb ham ataydilar.

2- misol. 1- misolda qaralgan 14=5+3+2+2+1+1 bo‘laklashga mos Ferrers diagrammasiga qo‘shma diagrammani 2- shakldagidek tasvirlash mumkin. Mos qo‘shma bo‘laklash esa: 14=6+4+2+1+1.


2- shakl

2. Bo‘laklashlarning xossalari. Quyidagi uchta 1–3- teoremalar bo‘laklashlarning ba’zi xossalarini ifodalaydi.

1- teorema. *Ixtiyoriy n natural sonning har xil natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni shu sonning toq qo‘shiluvchlarga bo‘laklanishlari soniga teng.*

3- misol. 3- misolda 8ning barcha bo‘laklashlari keltirilgan va bu bo‘laklashlar soni 22ga tengligi ko‘rsatilgan edi. 22ta bo‘laklashlardan oltitasi har xil qo‘shiluvchilardan tuzilgan. Xuddi shuncha toq qo‘shiluvchili bo‘laklashlar mavjud. 3- teoremaning isbotidagidek mulohaza yuritib 8ning har xil qo‘shiluvchili va toq qo‘shiluvchili barcha bo‘laklanishlari orasidagi bir qiymatli moslikni ko‘rsatish mumkin.

Haqiqatdan ham,

$$8=7+1=7\cdot 1+1\cdot 1=7\cdot 2^0+1\cdot 2^0=7+1,$$

$$8=5+3=5\cdot 1+3\cdot 1=5\cdot 2^0+3\cdot 2^0=5+3,$$

$$8=5+1+1+1=5\cdot1+1\cdot3=5\cdot2^0+1\cdot(2^1+2^0)=$$
$$=5\cdot2^0+1\cdot2^1+1\cdot2^0=5+2+1,$$
$$8=3+3+1+1=3\cdot2+1\cdot2=3\cdot2^1+1\cdot2^1=6+2\,,$$
$$8=3+1+1+1+1+1=3\cdot1+1\cdot5=3\cdot2^0+1\cdot(2^2+2^0)=$$
$$=3\cdot2^0+1\cdot2^2+1\cdot2^0=3+4+1,$$
$8=1+1+1+1+1+1+1+1=1\cdot8=1\cdot2^3=8$.

Diagrammali usul yordamida bo‘laklashlarning turli xossalarini osonlik bilan isbotlash mumkin. Quyida shunday xossalardan ikkitasini ifodalovchi 2- va 3- teoremalarni keltiramiz.

2- teorema. *Ixtiyoriy* n *natural sonni* k *ta natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklashlar soni shu* n *sonning eng katta qo‘shiluvchisi* k *ga teng bo‘lgan bo‘laklanishlari soniga teng.*

4- misol. 8 uchun uchta qo‘shiluvchili beshta bo‘laklash mavjud, bu son uchun qo‘shiluvchilarning eng kattasi uchga teng bo‘lgan bo‘laklashlar ham beshtadir. 2- jadvalda bu bo‘laklashlar bir-biriga mos ravishda ikki ustun qilib keltirilgan.

3- teorema. *Ixtiyoriy* n *natural sonning hech bir qo‘shiluvchisi* k *dan oshmaydigan bo‘laklanishlari soni* $(n+k)$ *sonining* k *ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlar soniga teng.*

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$larning qiymatlarini aniqlang.
2. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda 9ning barcha bo‘laklanishlarini yozing va $R(9)$ ni hisoblang.
3. Bozorda dehqon 15 dona qovunni 7 nafar xaridorga donabay sotdi. Agar navbatdagi har bir savdoda dehqonning sotgan qovunlari soni oldingi savdodagiga qaraganda kamaymagan bo‘lsa, u holda barcha savdolarda sotilishi mumkin bo‘lgan qovunlar sonlarining barcha imkoniyatlarini toping. Odatda biror qarorni ko‘pchilik bo‘lib qabul qilish maqsadida ovoz berganda “tarafdor” va “qarshi” ovozlar sonlari o‘zaro teng bo‘lmasligi uchun a’zolari 3 nafardan kam bo‘lmagan toq sondagi ekspertlar komissiyasi tuziladi. Bu shartni

qanoatlantiruvchi 17 nafar ekspertlardan tashkil qilinishi mumkin bo‘lgan komissiyalar sonini hisoblang.

7-AMALIY MASHG'ULOT
Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari

Amaliy mashg'ulotda ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining tuzulishi	3. Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich 4. Graflarga misollar
Mashg'ulot maqsadi:	Talabalarda graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar, grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich foydalanib turli masalalarni yechiladi.
Ta'lim usullari	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta'limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta'lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma'ruza.

8-amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o'quv mashg'ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o'quv natijalarni e'lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	19. Graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlarga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 20. Grafning abstrakt ta'rifi aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 21. Graflarda karrali qirralar haqida aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob	O'z-o'zini o'zaro baholashni o'tkazadilar. Savol beradilar

	orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Graf haqida tushuncha bering?
2. Orgraf nima?
3. Graflarda qo'shni uchlar va yakkalangan uchlar haqida tushuncha bering?
4. Graflarda karrali qirralar haqida tushuncha bering?
5. Multigraf pisivdagraf novgraf deganda qanday graflarni tushunasiz?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Tula va elgilangan graflar haqida ma'lumotlar bering?
2. Qanday graflar ezomorf graflar deyiladi?
3. Grafning geometrik ifodalanishi misollarda tushuntiring?
4. Uchlar, qirralar va yoylar insidintligi deganda nimani tushunasiz?

Asosiy qism

1. Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar. Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini va boshqa ba'zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin. Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $< v_1, v_2 >$ ko'rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz.

Graf deb shunday $< V, U >$ juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \varnothing$ va U – $< v_1, v_2 >$ ($v_1 \in V$, $v_2 \in V$) ko'rinishdagi juftliklar korteji bo'lib, $V \times V$ to'plamning elementlaridan tuzilgandir.

Bundan buyon grafni belgilashda $< V, U >$ yozuv o'rniga (V, U) yozuvdan foydalanamiz. Grafning tashkil etuvchilarini ko'rsatish muhim bo'lmasa, u holda uni lotin alifbosining bitta harfi, masalan, G bilan belgilaymiz.

$G=(V,U)$ graf berilgan bo‘lsin. V to‘plamning elementlariga G **grafning uchlari**, V to‘plamning o‘ziga esa, **graf uchlari to‘plami** deyiladi.

Graflar nazariyasida “uch” iborasi o‘rniga, ba’zan, **tugun** yoki **nuqta** iborasi ham qo‘llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba’zi iboralari bo‘yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. Shuning uchun, bundan keyingi ta’riflarda, imkoniyat boricha, muqobil (alternativ) iboralarni ham keltirishga harakat qilamiz.

$G=(V,U)$ grafning ta’rifiga ko‘ra, U bo‘sh kortej bo‘lishi ham mumkin. Agar U bo‘sh bo‘lmasa, u holda bu kortej (a,b) ($a \in V$, $b \in V$) ko‘rinishdagi juftliklardan tashkil topadi, bunda $a=b$ bo‘lishi hamda ixtiyoriy (a,b) juftlik U kortejda istalgancha marta qatnashishi mumkin.

$(a,b)\in U$ juftlikni tashkil etuvchi a va b uchlarning joylashish tartibidan bog‘liq holda, ya’ni yo‘nalishning borligi yoki yo‘qligiga qarab, uni turlicha atash mumkin. Agar (a,b) juftlik uchun uni tashkil etuvchilarning joylashish tartibi ahamiyatsiz, ya’ni $(a,b)=(b,a)$ bo‘lsa, (a,b) juftlikka **yo‘naltirilmagan** (**oriyentirlanmagan**) **qirra** (yoki, qisqacha, **qirra**) deyiladi. Agar bu tartib muhim, ya’ni $(a,b)\neq(b,a)$ bo‘lsa, u holda (a,b) juftlikka **yoy** yoki **yo‘naltirilgan** (**oriyentirlangan**) **qirra** deyiladi.

U kortejning tarkibiga qarab, uni yo **grafning qirralari korteji**, yo **yoylari korteji**, yoki **qirralari va yoylari korteji** deb ataymiz.

Grafning uchlari va qirralari (yoylari) uning **elementlari** deb ataladi. $G=(V,U)$ graf elementlarining soni ($|V|+|U|$)ga tengdir, bu yerda G grafning uchlari soni $|V|\neq 0$ va $|U|$ bilan uning qirralari (yoylari) soni belgilangan.

Grafning qirrasi (yoyi), odatda, uni tashkil etuvchi uchlar yordamida (a,b), yoki ab, yoki $(a;b)$ ko‘rinishda belgilanadi. Boshqa belgilashlar ham ishlatiladi: masalan, yoy uchun $(\overrightarrow{a,b})$ yoki $(\overleftarrow{a,b})$, qirra uchun $(\overleftrightarrow{a,b})$, yoy yoki qirra uchun u (ya’ni uchlari ko‘rsatilmasdan bitta harf vositasida) ko‘rinishda.

Graf yoyi uchun uning chetki uchlarini ko‘rsatish tartibi muhim ekanligini ta’kidlaymiz, ya’ni (a,b) va (b,a) yozuvlar bir-biridan farq qiluvchi yoylarni ifodalaydi. Agar yoy (a,b) ko‘rinishda ifodalangan bo‘lsa, u holda a uning **boshlang‘ich uchi**, b esa **oxirgi uchi** deb ataladi. Bundan tashqari, yoy (a,b) ko‘rinishda yozilsa, u haqida a **uchdan chiquvchi** (**boshlanuvchi**) va b **uchga kiruvchi** (**uchda tugovchi**) yoy deb aytish ham odat tusiga kirgan.

Qirra uchun uning (a,b) yozuvidagi harflar joylashish tartibi muhim rol o‘ynamaydi va a va b elementlar **qirraning uchlari** yoki **chetlari** deb ataladi.

Agar grafda yo (a,b) qirra, yo (a,b) yoy, yoki (b,a) yoy topillsa, u holda a **va** b **uchlar tutashtirilgan** deyiladi. Agar grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo‘lsa, u holda ular **qo‘shni uchlar** deb, aks holda esa, **qo‘shni bo‘lmagan uchlar** deb aytiladi.

Grafning ikkita uchi qo‘shni bo‘lsa, ular shu uchlarni tutashtiruvchi **qirraga** (**yoyga**) **insident**, o‘z navbatida, qirra yoki yoy bu **uchlarga insident** deyiladi.

Grafda ikkita qirra (yoy) umumiy chetga ega bo‘lsa, ular **qo‘shni qirralar** (**yoylar**) deyiladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, qo‘shnilik tushunchasi grafning bir jinsli, insidentlik tushunchasi esa uning turli jinsli elementlari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

Ba’zan graf undagi elementlar soniga qarab, ya’ni **uchlar soni** m va **qirralar** (**yoylar**) **soni** n ga qarab belgilanadi va bu holda grafni (m,n)**-graf** deb ataydilar.

Agar $G=(V,U)$ grafda U kortej faqat qirralardan iborat bo‘lsa, u holda **yo‘naltirilmagan** (**oriyentirlanmagan**) va faqat yo‘naltirilgan (oriyentirlangan) qirralardan (ya’ni, yoylardan) tashkil topgan bo‘lsa, u holda u **yo‘naltirilgan** (**oriyentirlangan**) **graf** deb ataladi. Oriyentirlangan graf, qisqacha, **orgraf** deb ham ataladi.

Qator hollarda oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham bo‘lgan graflar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bunday graflar **aralash**

graflar deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ grafning (orgrafning) U korteji tarkibida $V\times V$ to‘plamdan olingan takrorlanuvchi elementlar bo‘lsa, u holda ular **karrali** yoki **parallel qirralar** (**yoylar**) deb ataladi. Karrali qirralari yoki yoylari bo‘lgan graf **multigraf** deyiladi.

Ikkala chetki (boshlang‘ich va oxirgi) uchlari ustma-ust tushgan qirra (yoy), ya’ni grafning $(a,a)\in U$ elementi **sirtmoq** deb ataladi. Sirtmoq, odatda, yo‘naltirilmagan deb hisoblanadi. Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo‘lgan graf **psevdograf** deyiladi.

Umumiy holda uchlar to‘plami V va (yoki) qirralar (yoylar, qirra va yoylar) korteji U cheksiz ko‘p elementli bo‘lishi mumkin. Bundan keyin V to‘plam va U kortej faqat chekli bo‘lgan $G=(V,U)$ graflarni qaraymiz. Bunday graflar **chekli graflar** deb ataladi.

Hech qanaqa qirra (yoy) bilan bog‘lanmagan uch **yakkalangan** (**ajralgan**, **xolis**, **yalong‘och**) **uch** deb ataladi.

Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan graf (ya’ni, grafda qirralar va yoylar bo‘lmasa) **nolgraf** yoki **bo‘sh graf** deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo‘lgan bo‘sh grafni O_m yoki N_m kabi belgilash qabul qilingan.

Istalgan ikkita uchlari qo‘shni bo‘lgan sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz oriyentirlanmagan graf **to‘la graf** deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo‘lgan to‘la graf K_m bilan belgilanadi. Ravshanki, K_m grafning qirralar soni $C_m^2=\dfrac{m(m-1)}{2}$ bo‘ladi.

Agar orgrafning istalgan ikkita uchini har bir yo‘nalishda tutashtiruvchi faqat bittadan yoy mavjud bo‘lsa, u holda unga **to‘la orgraf** deb ataladi. Ravshanki, to‘la grafdagi qirralarning har birini ikkita (yo‘nalishlari bir-biriga qarama-qarshi bo‘lgan) yoylarga almashtirilsa, natijada to‘la orgraf hosil bo‘ladi. Shuning uchun, to‘la orgrafdagi yoylar soni oriyentirlanmagan to‘la grafdagi qirralar sonidan ikki baravar ko‘pdir, ya’ni uchlari m ta bo‘lgan to‘la orgrafdagi yoylar soni $2C_m^2 = m(m-1)$ bo‘ladi.

Agar grafning uchlariga qandaydir belgilar, masalan, $1,2,...,m$ sonlari mos qo‘yilgan bo‘lsa, u **belgilangan graf** deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflarning uchlari to‘plamlari, ya’ni V va V' to‘plamlar orasida uchlarning qo‘shnilik munosabatini saqlaydigan o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, u holda G va G' graflar **izomorf graflar** deb ataladi. Bu ta’rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin: agar $\forall x,y \in V$ va ularga mos bo‘lgan $x',y' \in V'$ ($x \leftrightarrow y$, $x' \leftrightarrow y'$) uchun $xy \leftrightarrow x'y'$ ($xy \in U$, $x'y' \in U'$) bo‘lsa, u holda G va G' graflar izomorfdir. Agar izomorf graflardan biri oriyentirlangan bo‘lsa, u holda ikkinchisi ham, albatta, oriyentirlangan bo‘lishi va ulardagi mos yoylarning yo‘nalishlari ham bir-birlariga mos bo‘lishlari shart.

Graf uchiga insident qirralar soni shu **uchning lokal darajasi**, yoki, qisqacha, **darajasi**, yoki **valentligi** deb ataladi. Grafdagi a uchning darajasini $\rho(a)$ bilan belgilaymiz.

Sirtmoqqa insident bo‘lgan uchning darajasini aniqlashda shuni e’tiborga olish kerakki, qaralayotgan masalaga bog‘liq holda sirtmoqni bitta qirra deb ham, ikkita qirra deb ham hisoblash mumkin. Ravshanki, ajralgan uchning darajasi nolga teng. Darajasi birga teng uch **chetki** (yoki **osilgan**) **uch** deb ataladi. Chetki (osilgan) uchga insident qirra ham **chetki** (yoki **osilgan**) **qirra** deb ataladi.

Agar grafning barcha uchlari bir xil r darajaga ega bo‘lsa, u holda bunday graf r **darajali regulyar graf** deb ataladi. Uch darajali regulyar graf **kubik** (yoki **uch valentli**) **graf** deb ataladi. O_m graf nol darajali regulyar graf ekanligini, K_m esa ($m-1$) darajali regulyar graf ekanligini ta’kidlaymiz.

Ko‘rinib turibdiki, oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalarining yig‘indisi qirralar sonining ikki baravariga teng juft son bo‘ladi, chunki qirralarni sanaganda har bir qirra hisobda ikki marta qatnashadi. Shunday qilib, XVIII asrdayoq L. Eyler tomonidan isbotlangan quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

1- lemma ("ko'rishishlar" haqida). *Ixtiyoriy oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalari yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng.*

Agar grafning uchlar to'plamini o'zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to'plamlarga (bo'laklarga) ajratish mumkin bo'lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to'plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to'plamdan olingan biror uch bilan tutashtiradigan bo'lsa, u holda bunday graf **ikki bo'lakli graf** (**bixromatik** yoki **Kyonig grafi**) deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, ikki bo'lakli grafning har bir bo'lagidagi ixtiyoriy ikkita uchlar qo'shni bo'la olmaydi. Biror bo'lagida faqat bitta uch bo'lgan to'la ikki bo'lakli graf **yulduz** deb ataladi.

Agar ikki bo'lakli grafning turli bo'laklariga tegishli istalgan ikkita uchi qo'shni bo'lsa, u holda bu graf **to'la ikki bo'lakli graf** deb ataladi. To'la ikki bo'lakli grafni $K_{m,n}$ bilan belgilaymiz, bu yerda m va n bilan grafning bo'laklaridagi uchlar sonlari belgilangan. $K_{m,n} = (V,U)$ graf uchun $|V| = m+n$ va $|U| = mn$ bo'lishi ravshan, bu yerda $|V|$ – $K_{m,n}$ grafning uchlari soni, $|U|$ – uning qirralari soni.

Grafning ikki bo'lakli graf bo'lishi haqidagi ba'zi qo'shimcha ma'lumotlar (Kyonig teoremasi) ushbu bobning 4- paragrafida keltirilgan.

Ikkidan katta ixtiyoriy natural k son uchun k **bo'lakli graf** tushunchasini ham kiritish mumkin.

2. **Graflarga misollar**

1- misol. O'zbekiston Respublikasi hududidagi aeroportlar to'plamini V bilan, bu shaharlar orasida belgilangan vaqt mobaynida amalga oshirilayotgan samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari kortejini U bilan belgilaymiz. U holda (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu yerda grafning uchlariga aeroportlar, yoylariga esa samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari mos keladi. Tabiiyki, (V,U) grafda karrali yoylar bo'lishi mumkin, agar, qandaydir sababga ko'ra, samolyot uchgan aeroportga qaytib qo'nsa, u holda bu hodisaga qaralayotgan grafdagi sirtmoq mos keladi.

2- misol. Qadimgi boshqotirma masalalar qatoriga kiruvchi quyidagi masalani qaraymiz. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘ling 8, 5 va 3 birlik hajmli idishlardagi suyuqlik hajmini mos ravishda a, b va c bilan belgilab, muayyan bir vaqt uchun idishlardagi suyqlikning hajmlari asosida qaralayotgan sistemaning holatini ifodalovchi $<a,b,c>$ uchliklarni tuzamiz. Masalaning shartiga ko‘ra a, b va c o‘zgaruvchilar butun qiymatlar qabul qilgan holda $0 \le a \le 8$, $0 \le b \le 5$, $0 \le c \le 3$ va $a+b+c=8$ shartlarni qanoatlantirishlari kerak. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi barcha holatlar (uchliklar) quyidagilardir:

$$<8,0,0>,\ <7,1,0>,\ <7,0,1>,\ <6,2,0>,\ <6,1,1>,\ <6,0,2>,\ <5,3,0>,\ <5,2,1>,$$

$$<5,1,2>,\ <5,0,3>,\ <4,4,0>,\ <4,3,1>,\ <4,2,2>,\ <4,1,3>,\ <3,5,0>,\ <3,4,1>,$$

$$<3,3,2>,\ <3,2,3>,\ <2,5,1>,\ <2,4,2>,\ <2,3,3>,\ <1,5,2>,\ <1,4,3>,\ <0,5,3>.$$

Holatlar to‘plamini V bilan belgilaymiz. Suyuqlikni (yoki uning bir qismini) idishlarning biridan boshqa birortasiga quyish natijasida sistema bir holatdan boshqa holatga o‘tishi mumkin. Ta’kidlash kerakki, yuqoridagi holatlarning ixtiyoriysidan boshqa birortasiga bevosita yoki bilvosita o‘tish imkoniyati mavjud bo‘lmasligi ham mumkin. Sistemaning bir holatdan boshqa holatga bevosita o‘tishlari to‘plamini U bilan belgilaymiz. Natijada hosil bo‘lgan (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu grafning uchlari sistema holatlariga, yoylari (qirralari) esa, bevosita o‘tishlarga mos keladi.

Berilgan masalani hal qilish uchun (V,U) grafning yoylaridan tashkil topgan shunday ketma-ketlik tuzish kerakki, bu ketma-ketlikning birinchi hadi $<8,0,0>$, oxirgi hadi esa $<4,4,0>$ bo‘lsin. Bunday ketma-ketliklardan biri quyida keltirilgan:

$$<8,0,0>,\ <5,0,3>,\ <5,3,0>,\ <2,3,3>,\ <2,5,1>,$$

$$<7,0,1>,\ <7,1,0>,\ <4,1,3>,\ <4,4,0>.$$

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Graf tushunchasini qo‘llash mumkin bo‘lgan amaliy misol keltiring va qaralayotgan grafni tahlil qiling.
2. To‘la graf bilan bog‘liq biror misol keltiring.
3. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish uchun tuzilgan graf elementlarini tahlil qiling va bu masalaning mumkin qadar qisqa yechimini toping.
4. Ko‘rishishlar haqidagi lemmaning qo‘llanilishiga doir amaliy misol keltiring.
5. Kubik graf bilan bog‘liq amaliy misollar keltiring.
6. Qadimgi boshqotirma masala: biror idishdagi hajmi 12 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 8 va 5 birlik hajmli idishlar yordamida teng ikki qismga ajrating. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.

8-AMALIY MASHG’ULOT
Graflarning berilish usullari

Amaliy mashg’ulotda ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining tuzulishi	3. Grafning geometrik ifodalanishi. 4. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi.
Mashg’ulot maqsadi:	Talabalarda grafning geometrik ifodalanishi va grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishidan foydalanib turli masalalarni yechiladi.
Ta’lim usullari	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta’limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta’lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma’ruza.

8-amaliy mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o’quv mashg’ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o’quv natijalarni e’lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	22. Grafning geometrik ifodalanishi oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 23. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 24. Graflarda orgrafni aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2).	O’z-o’zini o’zaro baholashni o’tkazadilar. Savol beradilar

	3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Grafning geometrik ifodalanishi nima uchun kerak?
2. Berilgan grafni geomitrik ifodalanishi aynan berxilmi?
3. Berilgan grafning uchlari va qirralari ayting?
4. Grafni maxsus kup had ko'rinishidagi shakli qanday?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Turtta uchga va uchta qirraga ega bulgan karrali grafga misol keltiring?
2. Sirtmoqli grafgamisol keltiring?
3. Orgrafga misol keltiring?
4. Multigrafga misol keltiring?

Asosiy qism

1. Grafning geometrik ifodalanishi. Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalarini o‘rganish va bu xossalarni amalda qo‘llash jarayonida ba'zi qiyinchiliklar tug‘dirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya'ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi munkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga – **grafning ko‘rgazmali tasviriga** ega bo‘lamiz. Agar uchlar to‘plami va bu uchlarning tutashishlarini ko‘rgazmali qilib taqdim qilish kerak bo‘lsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qog‘ozda chizib grafni tasvirlash mumkin.

Shuni ta'kidlaymizki, ba'zi hollarda diagrammada graf uchlari doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning to‘g‘ri yoki egri bo‘lishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo‘lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo‘nalishga ega bo‘lsa (ya’ni u yoy bo‘lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo‘nalish biror usul bilan, masalan, strelka bilan ko‘rsatiladi.

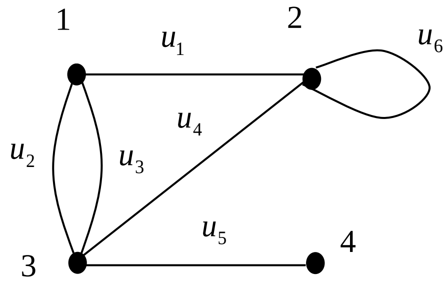
Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mukinligi ravshan. Agar biror diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasa, bunday diagramma **grafning geometrik ifodalanishi** deyiladi. Shuni ta’kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

Graflar izomorfligining ta’rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqadiki, abstrakt ta’rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o‘zaro izomorf bo‘ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

1- teorema. *Har qanday chekli grafni 3 o‘lchovli Evklid fazosida geometrik ifodalash mumkin.*

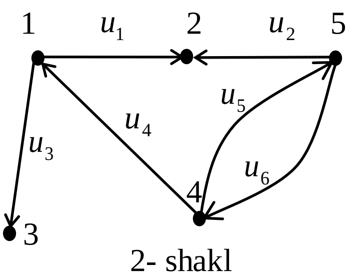
Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiramiz.

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni $G=(V,U)$ deb belgilaymiz. Berilgan G graf belgilangan graf bo‘lib, 4ta uch va 6ta qirraga ega. Demak, u (4,6)-grafdir. Bu graf uchun: $V=\{1,2,3,4\}$, $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$, $u_1=(1,\ 2)$, $u_2=u_3=(1,\ 3)$, $u_4=(2,\ 3)$, $u_5=(3,\ 4)$, $u_6=(2,2)$. G grafning barcha u_i ($i=\overline{1,6}$) qirralari oriyentirlanmagan (chunki uchlarini tutashtiruvchi chiziklarda yo‘nalish ko‘rsatilmagan) bo‘lgani uchun G oriyentirlanmagan grafdir. Grafning qirralaridan biri, aniqrog‘i, u_6 sirtmoqdir, u_2 va u_3 esa karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo‘shni, 1 va 4 uchlar esa qo‘shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar u_4 qirraga insident va, aksincha, u_4 qirra 2 va 3 uchlarga insidentdir. Bu yerda u_4 va u_5 qirralar qo‘shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, u_1 va u_5 qirralar esa qo‘shni emas.



1-

2- misol. Geometrik ifodalanishi 2- shakldagi ko‘rinishda bo‘lgan oriyentirlangan grafni qaraymiz. Bu grafda o‘n bitta element bor: 5ta uch va 6ta yoy, ya’ni shaklda (5,6)-orgraf berilgan. Bu grafni $G=(V,U)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $V=\{1,2,3,4,5\}$, $U=<(1,2),(1,3),(5,2),(4,1),(4,5),(5,4)>$ yoki



2- shakl

$U = < u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 >$. Berilgan G orgrafda sirtmoq ham, karrali yoylar ham yo‘q. Bu grafning $(1,3)$ yoyi uchun 1 boshlang‘ich, 3 uch esa oxirgi uchdir.

3- misol. XVIII asrda Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaning qo‘yilishi va L. Eyler tomonidan yechlishi graflarning matematik nazariyasi paydo bo‘lishiga xizmat qilganligi yuqorida ta’kidlangan edi.

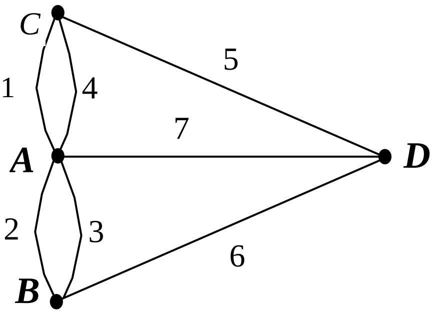
Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko‘priklar joylashuvi 3- shaklda tasvirlangan (bu shakl L. Eylerning birinchi sahifasi ushbu bobning 1- paragrafda keltirilgan ilmiy ishidan olindi).

Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalada quyidagi savolga javob berish so‘raladi: “Shaharning to‘rtta A, B, C va D qismlaridan birida joylashgan uydan chiqib, yettita ko‘priklarning har biridan faqat bir marta o‘tgan holda yana o‘sha

3- shakl

uyga qaytib kelish mumkinmi?”

Bu savolga javob izlash maqsadida ko‘priklardan o‘tishlar muhimligini e’tiborga olgan holda qo‘yilgan masalani tahlil qilish uchun 4- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu grafning uchlari shaharning A, B, C va D qismlariga, qirralari esa ko‘priklarga mos keladi. Qaralayotgan graf oriyentirlanmagan graf bo‘lib, 4ta uch va 7ta qirralardan tashkil topgan. Uning qirralari orasida karralilari bor, lekin sirtmoqlar yo‘q.



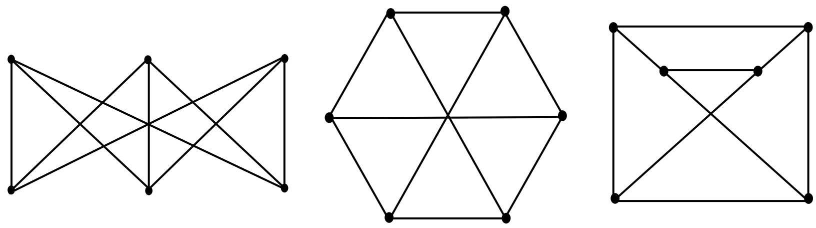
4- shakl

Kyonigsberg shahridagi ko‘priklardan faqat bir marta o‘tgan holda yurish boshlangan joyga qaytib kelish muammosi, 4- shakldagi grafdan foydalangan holda, ushbu bobning 5- paragrafida hal qilinadi.

4- misol. 5- shaklda tasvirlangan graflar bir-biriga izomorfdir.

5- misol. 6- shaklda tasvirlangan graflarning har biri oltita uch va yettita qirralarga ega bo‘lib, ular izomorf emas.

Hammasi bo‘lib beshta **qavariq muntazam ko‘pyoqli** mavjudligi qadimdan ma’lum (Evklid isbotlagan): **tetraedr**, **kub**, **oktaedr**, **dodekaedr** va **ikosaedr**. Bu ko‘pyoqlilarning umumiy nomi ham bor – **Platon jismlari**. Shunisi qiziqki, barcha Platon jismlariga mos graflar tekislikda geometrik ifodalanadi. Masalan, tetraedr



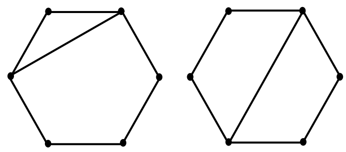
5- shakl

va kubga mos graflarning geometrik ifodalanishi 7- shaklda tasvirlangan.

Darvoqe, Platon jismlaridan tetraedr, kub va dodekaedr kubik grafga misol bo‘ladi.

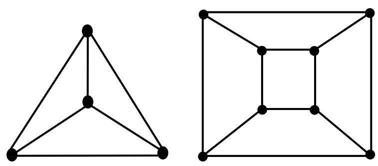
Petersen grafi deb ataluvchi 8- shaklda tasvirlangan graf ham kubik grafdir.

Agar graf tekislikda geometrik ifodalanishga ega bo‘lsa, u holda bunday graf **tekis** (**yassi**) **graf** deb ataladi. Bunday graf **tekislikda yotuvchi graf** deb ham atalishi mumkin.



6- shakl

Boshqacha so‘zlar bilan aytganda, tekis grafning barcha uchlari bir tekislikda yotadi hamda barcha qirralari (yoylari) o‘sha tekislikda yotuvchi o‘zaro kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar bo‘lib, ular faqat o‘zlari insident bo‘lgan uchlardagina umumiy nuqtalarga ega.



7- shakl

Platon jismlariga mos barcha graflar tekis graflardir.

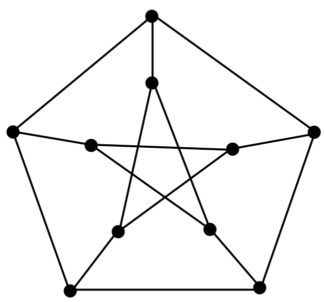
Tekis grafga izomorf graf **planar graf** deb ataladi.

Tekis bo‘lmagan grafga ajoyib misol **uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga** mos grafdir. Uchta u_1, u_2, u_3 uylar va uchta q_1, q_2, q_3 quduqlar bor. Har bir uydan har bir quduqqa ixtiyoriy ikkitasi kesishmaydigan qilib uzluksiz yo‘lakchalar o‘tkazish mumkinmi?

Qog‘ozda masala shartini qanoatlantiradigan grafni chizishga urinishlar muvaffaqiyatsiz tugaydi. Shunday urinishlardan biri 9- shaklda keltirilgan.

Darvoqe, uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga mos graf har bir bo‘lagida uchtadan uchi bo‘lgan ikki bo‘lakli to‘la grafga misol bo‘la oladi.

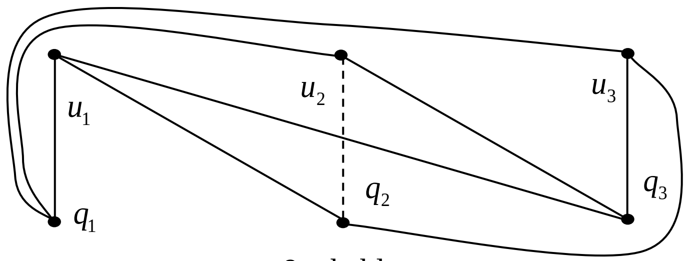
Tekis bo‘lmagan grafga yana bir misol beshta uchga ega bo‘lgan to‘la graf – K_5 grafdir. Bu grafning o‘nta



8- shakl

qirralari borligi ravshan. Bu yerda ham K_5 grafni hech qaysi ikkita qirralari kesishmaydigan qilib tekislikda chizish muvaffaqiyatsiz tugaydi. 10- shaklda K_5 grafning to‘qqizta qirrasi kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar qilib chizilgan, lekin o‘ninchi chiziq esa uzilishlarga ega, unga tekislikda “joy yo‘q”!

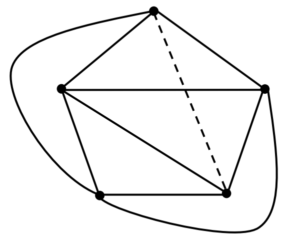
2. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi. Grafni maxsus turdagi ko‘phad yordamida ham berish mumkinligini ta’kidlaymiz. Uchlari



9- shakl

to‘plami $V=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ bo‘lgan G graf berilgan bo‘lsin. G grafning yakkalangan uchlari yo‘q deb faraz qilamiz,. Bu grafni m ta $x_1,x_2,...,x_m$ o‘zgaruvchilarga bog‘liq

$$f(G)=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_m^{\sigma_m}\prod_{i<j}(x_j-x_i)^{\alpha_{ij}}$$


10- shakl

ko‘rinishdagi ko‘phad yordamida tasvirlash mumkin, bu yerda ko‘paytma $i<j$ shartni qanoatlantiruvchi barcha (i,j) juftlar bo‘yicha amalga oshiriladi, x_i o‘zgaruvchi $v_i\in V$ uchga mos keladi, α_{ij} – v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi qirralar soni, σ_i – v_i uchdagi sirtmoqlar soni.

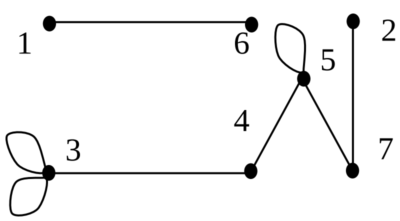
$f(G)$ ko‘phad G grafga izomorflik aniqligida mos kelishini isbotlash mumkin.

6- misol. 11- shaklda tasvirlangan G grafga mos ko‘phadni aniqlaymiz. Berilgan oriyentirlanmagan grafda yettita uch va sakkizta qirra bor. Uning har bir uchiga bitta x_i $(i=1,2,...,7)$ o‘zgaruvchini mos q1ilib qo‘yamiz. G grafda karrali qirralari yo‘q, uning uchta qirrasi sirtmoq-lardan iborat bo‘lib, ulardan ikkitasi 3 uchga, biri esa 5 uchga insidentdir. Shuning uchun $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_4=\sigma_6=\sigma_7=0$, $\sigma_3=2$, $\sigma_5=1$; $\alpha_{16}=\alpha_{27}=\alpha_{34}=\alpha_{45}=\alpha_{57}=1$, qolgan barcha $\alpha_{ij}=0$ bo‘ladi. Berilgan G grafga mos ko‘phad

$$f(G)=x_3^2x_5(x_6-x_1)(x_7-x_2)(x_4-x_3)(x_5-x_4)(x_7-x_5)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

7- misol. $f(G)=x_2(x_2-x_1)(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)(x_4-x_3)$ ko‘phadga mos keluvchi grafning geometrik tasvirini



11- shakl

topamiz. Bu ko‘phadning tarkibiga ko‘ra unga mos keluvchi oriyentirlanmagan grafda 4ta uch va 6ta qirra bo‘lib, bu qirralardan ikkitasi karrali ($\alpha_{13} = 2$) va bittasi sirtmoq ($\sigma_2 = 1$) ekanligini ta’kidlaymiz. Berilgan grafning geometrik tasvirlanishlaridan biri 1- shaklda keltirilgan.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Grafning abstrakt ta’rifi yordamida biror grafni ifodalang va unga izomorf grafni qog‘ozda tasvirlang.
2. Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiring.
3. Har qanday chekli grafni 3 o‘lchovli Evklid fazosida qirralariga to‘gri chiziq kesmalari mos keladigan qilib geometrik ifodalash mumkinligin isbotlang.
4. Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida mavjud yettita ko‘priklardan (3-shakl) tashqari shaharning B va C qismlarini bevosita tutashtiruvchi sakkizinchi ko‘prik ham bor deb hisoblab, bunday qo‘shimcha shartga ega Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos graf tuzing, uni geometrik ifodalang va tahlil qiling.
5. Uchlari va qirralari sonlari mos ravishda teng bo‘lib, o‘zaro izomorf bo‘lmagan graflarga misollar keltiring.
6. Barcha Platon jismlariga mos tekis graflarni geometrik ifodalang.
7. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikkita qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish maqsadida ushbu bobning 1- paragrafida tuzilgan grafni geometrik ifodalang.

9-AMALIY MASHG'ULOT
Graflarning berilish usullari

Amaliy mashg'ulotda ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining tuzulishi	3. Qo'shnilik matritsalari. 4. Insidentlik matritsalari.
Mashg'ulot maqsadi:	Talabalarda qo'shnilik matritsalari va insidentlik matritsalaridan foydalanib turli masalalar yechiladi
Ta'lim usullari	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta'limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta'lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma'ruza.

9-amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o'quv mashg'ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o'quv natijalarni e'lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	25. Qo'shnilik matritsalariga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 26. Insidentlik matritsalariga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 27. Arintirlangan graflarni aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	O'z-o'zini o'zaro baholashni o'tkazadilar. Savol beradilar Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Arintirlangan uchlar qushniligi matritsasi ta'rifini keltiring?
2. Arintirlangan qirralar qushniligi matritsasi ta'rifini keltiring?
3. Arintirlangan insidentlik matritsasini ta'rifini keltiring?
4. Arintirlangan graflarni geomitrik ifodalanishida nimalarga e'tibor beriladi?

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi.

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Arintirlanmagan uchlar qushniligi matritsasi ta'rifini keltiring?
2. Arintirlanmagan qirralar qushniligi matritsasi ta'rifini keltiring?
3. Arintirlanmagan insidentlik matritsasini ta'rifini keltiring?
4. Arintirlanmagan graflarni geomitrik ifodalanishida nimalarga e'tibor beriladi?

Asosiy qism

1. Qo'shnilik matritsalari. Endi grafning boshqa bir berilish usuli negizida yotuvchi **graf uchlari qo'shniligi matritsasi** tushunchasini qarab chiqamiz.

$G=(V,U)$ – uchlari soni m ga teng bo'lgan belgilangan, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf bo'lsin.

Elementlari $$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{agar } i \text{ va } j \text{ uchlar qo'shni bo'lsa,}\\ 0, & \text{aks holda.}\end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,m;\quad j=1,2,...,m)$ matritsani grafning uchlari
qo'shniligi matritsasi deb ataymiz.

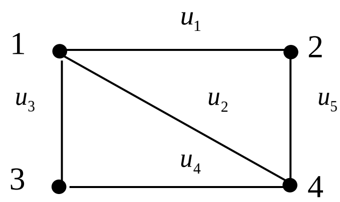
Bu ta'rifdan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan graf uchlari qo'shniligi matritsasining bosh diagonalida faqat nollar bo'lishi, satrlaridagi birlar soni esa mos uchlarning darajalariga tengligi kelib chiqadi.

1- misol. 12- shaklda tasvirlangan grafgning uchlari qo'shniligi matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$ ko'rinishda bo'ladi.

Uchlari soni m ga teng bo‘lgan belgilangan **oriyentirlangan** $G=(V,U)$ **grafning uchlari qo‘shniligi** $m\times m$ **-matritsasi** deb elementlari

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{agar } (i,j)\in U \text{ bo'lsa},\\ 0, & \text{aks holda},\end{cases}$$



12- shakl

ko‘rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,m, \quad j=1,2,...,m)$ matritsaga aytiladi.

2- misol. 2- shaklda tasvirlangan orgrafning uchlari qo‘shniligi matritsasi quyidagicha bo‘ladi:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Endi G uchlari $1,2,...,m$ bo‘lgan belgilangan oriyentirlanmagan multigraf bo‘lsin. a_{ij} elementlari G grafning i va j uchlarini tutashtiruvchi qirralar soniga teng bo‘lgan $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,...,m)$ matritsa **oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qo‘shniligi matritsasi** deb ataladi.

3- misol. 1- shaklda tasvirlangan oriyentirlanmagan multigraf uchlari qo‘shniligi matritsasi quyidagicha bo‘ladi: $A=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&1&1&0\\2&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$

Karrali yoylari bo‘lgan **sirtmoqsiz orgraf uchlari qo‘shniligi matritsasi** tushunchasini ham yuqoridagiga o‘xshash ta’riflash mumkin.

1- teorema. *Graflar faqat va faqat uchlari qo‘shniligi matritsalari bir-birlaridan satrlarining o‘rinlarini va ustunlarining o‘rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo‘lsagina izomorf bo‘lishadi.*

4- misol. 12- shaklda tasvirlangan grafda 5ta qirra bo‘lib, uning qirralari qo‘shniligi matritsasi

$$C=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&0&1\\1&1&0&1&0\end{pmatrix}$$ ko‘rinishga egadir.

Ravshanki, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf qirralari qo‘shniligi matritsasi bosh diagonalga nisbatan simmetrik kvadrat matritsadir va uning bosh diagonali nollardan iborat.

2. Insidentlik matritsalari. Uchlari $1,2,...,m$ va qirralari $u_1,u_2,...,u_n$ $(n\geq 1)$ boʻlgan belgilangan graf berilgan boʻlsin. Bu grafning uchlariga satrlari, qirralariga esa ustunlari mos keluvchi va elementlari

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga insident bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga intsident bo'lmasa,} \end{cases}$$

koʻrinishda aniqlangan $B=(b_{ij})$ $(i=1,2,...,m,\quad j=1,2,...,n)$ matritsa grafning **insidentlik matritsasi** deb ataladi.

5- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha boʻladi:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi uchlari $1,2,...,m$ va qirralari $u_1,u_2,...,u_n$ $(n\geq 1)$ boʻlgan belgilangan sirtmoqsiz orgrafni qaraymiz. Elementlari

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ yoyning boshlang'ich uchi bo'lsa,} \\ -1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ yoyning oxirgi uchi bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } i \text{ uch va } u_j \text{ yoy intsident bo'lmasa.} \end{cases}$$

koʻrinishda aniqlangan $B=(b_{ij})$ $(i=1,2,...,m,\quad j=1,2,...,n)$ matritsaga grafning **insidentlik matritsasi** deb ataladi.

6- misol. 13- shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha boʻladi:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2- teorema. *Graflar* (*orgraflar*) *faqat va faqat insidentlik matritsalari bir-birlaridan satrlarining oʻrinlarini va ustunlarining oʻrinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil boʻlsagina izomorf boʻlishadi.*

Ilova 3

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar.

1. Grafning abstrakt ta'rifi yordamida biror grafni ifodalang va unga izomorf grafni qogʻozda tasvirlang.
2. Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiring.
3. Har qanday chekli grafni 3 oʻlchovli Evklid fazosida qirralariga toʻgri chiziq kesmalari mos keladigan qilib geometrik ifodalash mumkinligin isbotlang.
4. Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida mavjud yettita koʻpriklardan (3-shakl) tashqari shaharning B va C qismlarini bevosita tutashtiruvchi

sakkizinchi ko‘prik ham bor deb hisoblab, bunday qo‘shimcha shartga ega Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos graf tuzing, uni geometrik ifodalang va tahlil qiling.

5. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo‘lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor graflarni geometrik ifodalang, ularning har biriga mos maxsus ko‘phadlarni, uchlari qo‘shniligi, qirralari qo‘shniligi va insidentlik matritsalarni yozing.
6. 14- shaklda tasvirlangan G_1 va G_2 graflarning izomorfligini isbotlang.
7. Uchlari qo‘shniligi matritsalari quyida berilgan graflarni geometrik ifodalang, ularga mos maxsus ko‘phad, qirralar qo‘shniligi va insidentlik
8. matritsalarni yozing:
9. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10-AMALIY MASHG’ULOT
Graflar ustida amallar

Amaliy mashg’ulotda ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining tuzulishi	5. Graflar ustida sodda amallar. 6. Graflarni birlashtirish. 7. Graflarni biriktirish. 8. Graflarni ko‘paytirish
Mashg’ulot maqsadi:	Talabalarda graflar ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, graflarni biriktirish va graflarni ko‘paytirishdan foydalanishga oid misollar yechiladi
Ta’lim usullari	Og’zaki so’rov: tezkor so’rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta’limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta’lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma’ruza.

10-amaliy mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o’quv mashg’ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o’quv natijalarni e’lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	1. Graflar ustida sodda amallarga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 2. Graflarni birlashtirishga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 3. graflarni biriktirish va graflarni ko‘paytirishga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2).	O’z-o’zini o’zaro baholashni o’tkazadilar. Savol beradilar

	3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

5. Graflar ustida qanday amallar bajarish mumkin?
6. Graflarni birlashtirish qanday amalga oshiriladi?
7. Graflarni biriktirish qanday amalga oshiriladi
8. Graflarni ko’paytirish qanday amalga oshiriladi

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

5. Tuldiruvchi graf deb nimaga aytiladi?
6. Qism graf deb nimaga aytiladi?
7. Dizyunkt deb nimaga aytiladi?
8. N ulchovli ko’pning uchlari soni qanday aniqlanadi?

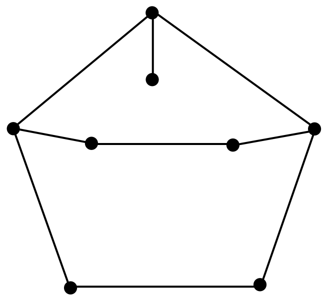
Asosiy qism

1. Graflar ustida sodda amallar. Graflar ustida turli amallar bajarish mumkin, masalan, graflarni birlashtirish, biriktirish, ko‘paytirish, grafni qismlarga ajratish va hokazo.

Eng sodda amallardan biri sifatida grafdan **uchni olib tashlash** amalini keltirsa bo‘ladi. Bu amalni qo‘llash berilgan grafning uchlari to‘plamidan birorta element yo‘qotishni (olib tashlashni) anglatadi. Natijada uchlari soni bittaga kamaygan yangi graf hosil bo‘ladi. Albatta, bu amalni uchlari soni ikkitadan kam bo‘lmagan graflar uchun qo‘llash mumkin bo‘lib, uni bajarish jarayonida olib tashlanayotgan uch bilan birgalikda shu uchga insident bo‘lgan barcha qirralar (yoylar) ham olib tashlanadi.

Eng sodda amallar qatoriga grafdan **qirrani** (**yoyni**) **olib tashlash** amalini ham kiritish mumkin. Bu amalga ko‘ra berilgan grafning qirralari (yoylari) to‘plamidan birorta element yo‘qotiladi (olib tashlanadi). Berilgan grafdan qirrani (yoyni) olib tashlayotganda shu qirraga (yoyga) insident uchlarni grafda qoldirish ham yo‘qotish ham mumkin. Bu yerda vaziyatga qarab ish yuritiladi.

$G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflar berilgan bo‘lsin. Agar $V\subseteq V'$ va G grafning barcha qirralari (yoylari) G' grafning ham qirralari (yoylari), ya’ni $U\subseteq U'$ bo‘lsa, u holda G graf G' grafning **qism grafi** deb ataladi.



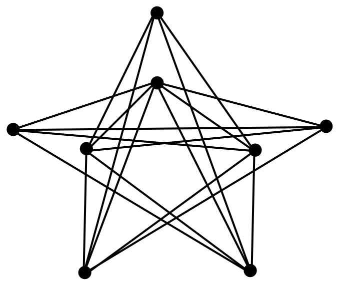
1- shakl

1- misol. 1- shaklda Petersen grafining (ushbu bobning 2- paragrafidagi 8- shaklga qarang) qism graflaridan biri tasvirlangan.

Agar G graf karrali qirralarga ega bo‘lmasa, u holda uchlari G grafning barcha uchlaridan iborat bo‘lgan shunday yagona $\overline{G}$ graf mavjudki, $\overline{G}$ grafdagi barcha juft uchlar faqat va faqat G grafda qo‘shni bo‘lmagandagina qo‘shnidir. Bunday $\overline{G}$ graf berilgan G grafning **to‘ldiruvchi grafi** deb ataladi.

Berilgan graf uchun to‘ldiruvchi grafni qurish jarayonini ham graflar ustida bajariladigan amallar qatoriga kiritish mumkin. G graf uchun **to‘ldiruvchi grafni qurish** amalini qo‘llash natijasida $\overline{G}$ graf hosil bo‘ladi. Isbotlash mumkinki, $\overline{\overline{G}} = G$ munosabat o‘rinlidir.

2- misol. 2- shaklda tasvirlangan graf 1- shaklda ifodalangan graf uchun to‘ldiruvchi grafdir.



2- shakl

Graflar ustida shunday amallarni bajarish mumkinki, ular elementlari soni berilgan grafdagidan ko‘proq bo‘lgan boshqa graflarning hosil bo‘lishiga olib keladi. Bunday amallar qatoriga **uchni qo‘shish amali** yoki **qirrani** (**yoyni**) **qo‘shish amalini** kiritish mumkin.

Grafga yangi uchni qo‘shish turlicha usul bilan amalga oshirilishi mumkin. Masalan, yangi v uchni berilgan grafga qo‘shish shu grafning v_1 va v_2 uchlariga insident bo‘lgan qandaydir u qirrasiga qo‘shish orqali quyidagicha ikki bosqichda bajarilishi mumkin:

1) u qirra berilgan grafdan olib tashlanadi;

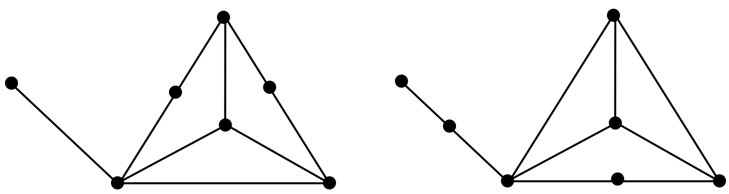
2) hosil bo‘lgan grafga ikkita yangi qirralar: v va v_1 uchlarga insident u_1 qirra hamda v va v_2 uchlarga insident u_2 qirra qo‘shiladi.

Bu jarayon grafda **qirraga darajasi 2 bo‘lgan yangi uchni qo‘shish** (**kiritish**) yoki **qirrani ikkiga bo‘lish amali** deb ataladi.

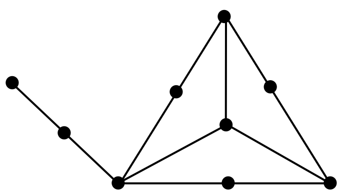
Agar G graf G' grafdan qirrani ikkiga bo‘lish amalini chekli marta ketma-ket qo‘llash vositasida hosil qilingan bo‘lsa, u holda G **graf** G' **grafning bo‘linish grafi** deb ataladi.

Bo‘linish graflari izomorf bo‘lgan graflar **gomeomorf graflar** deb ataladi.

3- shaklda tasvirlangan graflar izomorf emas, lekin ular gomeomorf, chunki



3- shakl

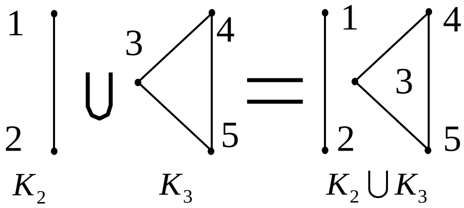


4- shakl

bu graflarning har biri 4- shaklda tasvirlangan bo‘linish grafiga ega.

2. Graflarni birlashtirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. Uchlari to‘plami $V=V_1\bigcup V_2$ va qirralari (yoylari) korteji $U=U_1\bigcup U_2$ kabi aniqlangan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning birlashmasi** (**uyushmasi**) deb ataladi va $G=G_1\bigcup G_2$ ko‘rinishda belgilanadi.

3- misol. 5- shaklda uchlari to‘plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birlashmasi amali tasvirlangan.

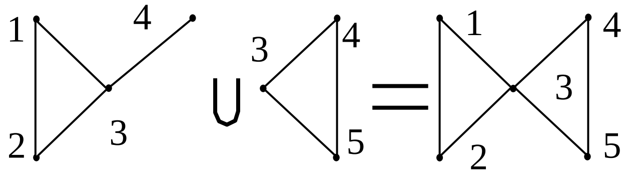


5- shakl

4- misol. Uchlari to‘plamlari kesishadigan graflarning birlashmasi amali 6- shaklda tasvirlangan.

Agar birlashtirilayotgan graflarning uchlari to‘plamlari kesishmasa, u holda bu graflarning birlashmasi **diz’yunkt birlashma** deb ataladi. Masalan, 5- shaklda tasvirlangan birlashma diz’yunkt, 6- shakldagi birlashma esa – diz’yunkt emas.

3. Graflarni biriktirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. G_1 va G_2 graflar birlashtirilishi hamda G_1 grafning har bir uchi G_2 grafning har bir uchi bilan qirra vositasida tutashtirilishi natijasida hosil bo‘lgan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning birikmasi** (**tutashmasi**) deb ataladi va $G=G_1+G_2$ ko‘rinishda belgilanadi.



6- shakl

5- misol. Uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga mos graf (ushbu bobning 2- paragrafidagi 9- shaklga qarang) uchlari to‘plamlari kesishmaydigan ikkita (O_3) nolgraflarning birikmasidir.

6- misol. 7- shaklda uchlari to‘plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birikmasi amali tasvirlangan.

Agar uchlari to‘plamlari kesishmasi bo‘sh bo‘lmagan graflarni biriktirish zarur bo‘lsa, u holda hal qilinayotgan masala xossalarini e’tiborga olib ish ko‘rish kerakligini ta’kidlaymiz.

4. Graflarni ko‘paytirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. Uchlari to‘plami $V=V_1\times V_2$ bo‘lgan $G=(V,U)$ grafning qirralari (yoylari) kortejini quyidagicha aniqlaymiz: agar $v_1'=v_1''$ va $(v_2',v_2'')\in U_2$ yoki $v_2'=v_2''$ va $(v_1',v_1'')\in U_1$ bo‘lsa, u holda $(v',v'')\in U$ bo‘ladi, bu yerda $v_1',v_1''\in V_1$, $v_2',v_2''\in V_2$,

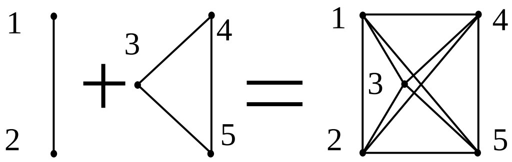
$v'=(v_1',v_2')\in V$ va $v''=(v_1'',v_2'')\in V$. Shunday usul bilan hosol qurilgan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning ko‘paytmasi** deb ataladi va $G=G_1\times G_2$ kabi belgilanadi.

Graflarning ko‘paytmasi ta’rifiga asosan berilgan $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflarning ko‘paytmasi hisoblangan G grafdagi:

– uchlar (v_1,v_2) yoki (v_2,v_1) ko‘rinishdagi juftliklardan iboratdir, bu yerda $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$;

– $v'=(v_1',v_2')\in V$ va $v''=(v_1'',v_2'')\in V$ uchlar faqat va faqat shu holda qo‘shni bo‘ladilarki, qachonki bu uchlarni (juftliklarni) tashkil qiluvchi elementlarning biri unga mos element bilan ustma-ust tushgan holda boshqa elementlar o‘z grafida qo‘shni bo‘lishsa, bu yerda $v_1',v_1''\in V_1$, $v_2',v_2''\in V_2$;

– $|V_1|=m_1$, $|V_2|=m_2$, $|U_1|=n_1$ va $|U_2|=n_2$ munosabatlardan $|V|=m_1m_2$ va $|U|=m_1n_2+m_2n_1$ bo‘lishi kelib chiqadi.



7- shakl

I bobning 4- paragrafida ta’kidlanganidek, Dekart ko‘paytmalar bilan bog‘liq tuzilmalar ustida bajariladigan amallar boshqalaridan o‘ziga xosligi bilan ajralib turadi. Bu o‘ziga xoslik graflarni ko‘paytirish amalida namoyon bo‘ladi. Aniqrog‘i, graflar ko‘patmasida qatnashgan birorta grafning qirralari korteji bo‘sh bo‘lsada, ko‘paytirish amalini qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan grafning qirralari korteji bo‘sh bo‘lmasligi ham mumkin. Haqiqatdan ham, yuqorida keltirilgan graflarning ko‘paytmasi ta’rifidan kelib chiqadiki, agar $G=(V,U)$ graf $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflarning ko‘paytmasi, ya’ni, $G=G_1\times G_2$ bo‘lsa, u holda $V=V_1\times V_2$ bo‘ladi va U kortej elementlari bilan $(V_1\times U_2)\cup(U_1\times V_2)$ birlashma elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Shuning uchun, agar, masalan, $U_1=\varnothing$, $U_2\neq\varnothing$ bo‘lsa, u holda $(V_1\times U_2)\cup(U_1\times V_2)=V_1\times U_2\neq\varnothing$ bo‘ladi, chunki grafning tarifiga ko‘ra $V_1\neq\varnothing$. Demak, $U\neq\varnothing$, ya’ni G_1 bo‘sh graf bo‘lsada, $G=G_1\times G_2$ bo‘sh bo‘lmagan grafdir.

Graflarni ko‘paytirish amalini takror qo‘llash usuli bilan graflar nazariyasining muhim sinfini tashkil etuvchi n o‘lchovli kublarni aniqlash mumkin. n **o‘lchovli kub** (Q_n) uchlari soni ikkiga teng bo‘lgan to‘la graf K_2 yordamida quyidagi rekurrent formula bilan aniqlanadi:

$$Q_1=K_2,\ Q_n=K_2\times Q_{n-1}.$$

Yuqorida graflar ustidagi ba’zi amallar haqida qisqacha ma’lumot berildi. Shuni ta’kidlash lozimki, graflar ustida bundan boshqa bir qator amallar ham bor.

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Matematik modellarning universalligi nima?
2. Chiziqli va chiziqsiz modellar. Misollar keltiring.
3. Chiziqli Maltus modeli (1) da populyasiya soni chegaralangan bo'lib qolishi uchun $r(t)=\alpha(t)-\beta(t)>0$ kattalik yetarli katta t larda ($t \to \infty$) da o'zini qanday tutish kerak?
4. Chiziqsiz Maltus modeli (3) da muvozanat vaziyatidan kichik og'ishlarni qarang, ya'ni yechim $N(t)=N_m+\delta N(t)$, bu yerda $|\delta N(t)| << N_m$ ko'rinishda bo'ladigan vaziyatni qarab chiqing.
5. (5) tenglama tahlilidagi $N_0 < N_m$ hol uchun yechim ko'rinishini toping va grafigini yasang.
6. (5) tenglamani $N_0 > N_m$ hol uchun (6) yechimga ega ekanligini isbotlang va t_f kattalikni N_0, α_0, β_0 kattaliklar orqali hisoblang.

11-AMALIY MASHG'ULOT
Marshrutlar va zanjirlar

Amaliy mashg'ulotda ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining tuzulishi	3. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma'lumotlar. 4. Grafning bog'lamliligi tushunchasi.
Mashg'ulot maqsadi:	Talabalarda marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma'lumotlar va grafning bog'lamliligi tushunchalariga oid masalalar yechiladi.
Ta'lim usullari	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta'limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta'lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma'ruza.

11-amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o'quv mashg'ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o'quv natijalarni e'lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	1. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma'lumotlarga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 2. Grafning bog'lamliligi tushunchasiniga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va	O'z-o'zini o'zaro baholashni o'tkazadilar. Savol beradilar Topshiriqni yozadilar

	uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Mashrutlar deb nimaga aytiladi?
2. Zanjirlar deb nimaga aytiladi?
3. Mashrutlar qanday hosil qilinadi?
4. Zanjirlar qanday hosil qilinadi?

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Mashrutlarda oraliq uchlar deganda nimani tushunamiz?
2. Yopiq zanjir deb nimaga aytiladi?
3. Mashrutda sikl deb nimaga aytiladi?
4. Arintirlangan mashrut deb nimaga aytiladi?
5. Arintirlangan zanjir deb nimaga aytiladi?

Asosiy qism

1. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar. Uchlari to‘plami $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ va qirralar korteji $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ bo‘lgan oriyentirlanmagan $G = (V, U)$ graf berilgan bo‘lsin. Bu G grafdagi uchlar va qirralarning har ikki qo‘shni qirralari umumiy chetki uchga ega

$$(..., v_{i_1}, u_{j_1}, v_{i_2}, u_{j_2}, v_{i_3}, ...)$$

ko‘rinishdagi chekli yoki cheksiz ketma-ketligi **marshrut** deb ataladi. Marshrutni uning uchlari ketma-ketligi $(..., v_{i_1}, v_{i_2}, ...)$ yoki qirralari ketma-ketligi $(..., u_{j_1}, u_{j_2}, ...)$ ko‘rinishda ham belgilash mumkin.

Agar marshrutda qandaydir uchdan oldin uchlar bo‘lmasa, bu uchni marshrutning **boshlang‘ich uchi** deb, shu uchdan keyin marshrutga tegishli uchlar bo‘lmaganda esa, uni marshrutning **oxirgi uchi** deb ataydilar.

Agar marshrutning boshlang‘ich uchi v_p va oxirgi uchi v_q bo‘lsa, u holda uni v_p **uchdan** v_q **uchga yo‘nalgan marshrut** yoki **chetlari** v_p **va** v_q **bo‘lgan marshrut** deb ataladi.

Marshrutdagi ikkita qoshni qirralarga tegishli uch **ichki uch** yoki **oraliq uch** deb ataladi.

Marshrutda qirralar va uchlar takrorlanishi mumkin bo‘lgani uchun marshrutning ichki uchi, bir vaqtning o‘zida, uning boshlang‘ich va (yoki) oxirgi uchi bo‘lishi ham mumkin va teskarisi, marshrutning boshlang‘ich va (yoki) oxirgi uchi uning ichki uchi bo‘lishi ham mumkin.

Tabiiyki, marshrut:

– boshlang‘ich uchga ham oxirgi uchga ham ega bo‘lmasligi mumkin (bunday marshrut **ikki tomonlama cheksiz marshrut** deb ataladi);

– boshlangich uchga ega bo‘lib, oxirgi uchga ega bo‘lmasligi mumkin yoki, aksincha, oxirgi uchga ega bo‘lib, boshlangich uchga ega bo‘lmasligi mumkin (**bir tomonlama cheksiz marshrut**);

– yagona qirradan iborat bo‘lishi mumkin (**notrivial marshrut**);

– birorta ham qirraga ega bo‘lmasligi mumkin (**nol marshrut** yoki **trivial marshrut**).

Marshrutning uzunligi deb undagi qirralar soniga aytiladi.

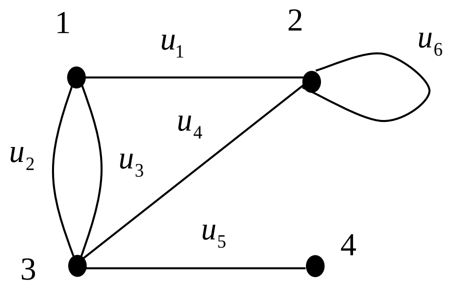
Turli qirralardan tashkil topgan marshrutga **zanjir** deb ataladi. Agar zanjirning chetlaridan tashqari barcha uchlari turlicha bo‘lsa, u holda uni **oddiy zanjir** deb ataydilar.

Berilgan $(v_1, v_2, ..., v_s)$ zanjir yoki oddiy zanjir uchun $v_1 = v_s$ bo‘lsa, u **yopiq zanjir** deb ataladi. Hech bo‘lmaganda bitta qirraga ega yopiq oddiy zanjir **sikl** deb ataladi.

Sirtmoq yoki bir juft karrali qirralar sikl tashkil etishi ravshandir.

Tushunarliki, grafdagi zanjir grafning qism grafi deb qaralishi mumkin.

2- misol. Ushbu 1-shaklda tasvirlangan graf uchun



1- shakl

$$(3, u_4, 2, u_1, 1, u_1, 2, u_6, 2, u_4, 3, u_5, 4)$$

ketma-ketlik 3 belgili uchdan 4 belgili uchga yo‘nalgan marshrutdir, bunda 3 – boshlang‘ich uch, 4 – oxirgi uchdir. Bu marshrutda 1, 2 va 3 belgili uchlar oraliq uchlar hisoblanadi. Qaralayotgan marshrutning uzunligi 6a teng bo‘lib, u zanjir bo‘la olmaydi, chunki unda 1 belgili uch 2 marta (bir marta oraliq uch sifatida, ikkinchi marta esa oxirgi uch sifatida) qatnashmoqda.

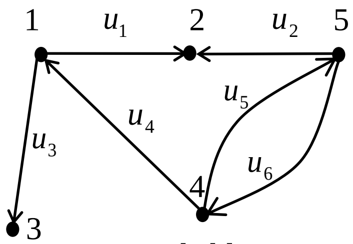
Yana o‘sha graf uchun $(3,2,1,3)$ zanjirning oxirgi bo‘g‘ini sifatida u_2 yoki u_3 qirralardan qaysisi olinishiga bog‘liqsiz ravishda, u yopiq zanjir va sikldir. ■

Oriyentirlangan graflar uchun ham undagi yoylarning yo‘nalishini (oriyentatsiyasini) inobatga olmasdan oriyentirlanmagan marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalarini kiritish mumkin. Lekin, oriyentirlangan graflar uchun oriyentirlangan marshrut tushunchasini kiritish tabiiydir.

Yoylarning oriyentatsiyalari hisobga olingan yoylar va uchlar ketma-ketligi **oriyentirlangan marshrut** deb ataladi.

Oriyentirlangan marshrut uchun zanjir tushunchasiga o‘xshash **yo‘l** (yoki **oriyentirlangan zanjir**) tushunchasini ham kiritish mumkin. Boshlang‘ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan oriyentirlangan zanjir **kontur** deb ataladi.

2- misol. Ushbu 2-shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Uning uch va qirralaridan tuzilgan $(3,u_3,1,u_4,4,u_5,5,u_2,2,u_1,1)$ ketma-ketlik oriyentirlanmagan marshrut va zanjirdir, lekin u oddiy zanjir bo‘la olmaydi. Bu ketma-ketlik oriyentirlangan marshrut ham bo‘la olmaydi, chunki unda marshrut yo‘nalishiga teskari yo‘nalishga ega yoylar bor (u_3,u_4,u_1).



2- shakl

Qaralayotgan graf uchun (u_6,u_5,u_2) ketma-ketlik oriyentirlangan marshrutni tashkil etadi. Bu marshrut yo‘ldir, lekin u kontur emas. Berilgan grafda faqat bitta kontur bo‘lib, bu konturni $(4,u_5,5,u_6,4)$ yoki $(5,u_6,4,u_5,5)$ ko‘rinishda ifodalash mumkin. ■

1- teorema. *Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo‘lmasa, u holda bu graf siklga ega.*

2. Grafning bog‘lamliligi tushunchasi. Agar oriyentirlanmagan grafda chetlari a va b uchlardan iborat marshrut topilsa, bu a va b uchlar **bog‘langan** deb, marshrutning o‘zi esa a va b **uchlarni bog‘lovchi marshrut** debataladi.

Tabiiyki, agar qandaydir uchlarni bog‘lovchi marshrut biror a_i uchdan bir necha marta o‘tsa, u holda marshrutning siklik qismini olib tashlab (bunda siklik qismning o‘rniga marshrutda faqat a_i uch qoldiriladi) yana o‘sha uchlarni bog‘lovchi oddiy zanjir ko‘rinishdagi marshrutni hosil qilish mumkin. Shuning uchun, marshrut bilan bog‘langan uchlar doimo oddiy zanjir bilan ham bo‘glangan bo‘ladi degan xulosaga kelamiz.

Bir-biri bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy ikkita uchlari bog‘langan graf **bog‘lamli graf** deb ataladi.

Agar grafdagi ikkita uchni biror oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo‘lsa, u holda bu ikkita uch **ekvivalent** (**bog‘langan**) deyiladi. Bunday uchlar to‘plami grafda **ekvivalentlik munosabati** bilan aniqlangan deb hisoblanadi. Uchlar to‘plami bo‘yicha ekvivalentlik munosabatini inobatga olgan holda berilgan grafni **bog‘lamlilik komponentalari** (qisqacha, **komponentalari**) deb ataluvchi bog‘lamli qismlarning birlashmasi deb qarash mumkin. Bu yerda berilgan graf bog‘lamlilik komponentalariga bo‘laklandi (ajratildi) deb aytish mumkin. Isbotlash mumkinki, har qanday graf o‘zining bog‘lamlilik komponentalarining diz’yunktiv birlashmasi sifatida ifodalanishi mumkin, bunda grafning bog‘lamlilik komponentalariga bo‘laklanishi bir qiymatli aniqlanadi.

Keyingi ma’lumotlarni bayon etish uchun **yoq** tushunchasi zarur bo‘ladi. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi grafni qaraymiz. Bu grafga tegishli bo‘lmagan (ya’ni grafning hech qaysi uchi bilan ustma-ust tushmaydigan va uning hech qaysi qirrasida yotmaydigan) biror A nuqtani hech qaysi nuqtasi grafga tegishli bo‘lmagan uzluksiz chiziq bilan tutashtirish mumkin bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plami grafning A nuqtani o‘zida saqlovchi **yoqi** deb ataladi.

Yoq tushunchasiga berilgan ta’rifga ko‘ra yoq grafning geometrik ifodalanishi yordamida tekislikning “qirqib” olinadigan qismidan iboratdir. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi ixtiyoriy grafning hech bo‘lmaganda bitta yoqi bo‘lishi va uning bitta yoqi chegaraga ega emasligi (cheksizligi) o‘z-o‘zidan ravshandir.

2- teorema (Eyler 1752). *Tekis va bog‘lamli* $G=(V,U)$ *graf uchun* $m+r=2+n$ *tenglik o‘rinlidir, bu yerda* $m=|V|$, $n=|U|$, r *– yoqlar soni.*

3- teorema. K_5 *graf planar emas.*

4- teorema. $K_{3,3}$ *graf planar emas.*

5- teorema. *Agar biror graf* K_5 *yoki* $K_{3,3}$ *grafga gomeomorf bo‘lgan qism grafga ega bo‘lsa, u holda bu graf tekislikda yotuvchi bo‘lmaydi*.

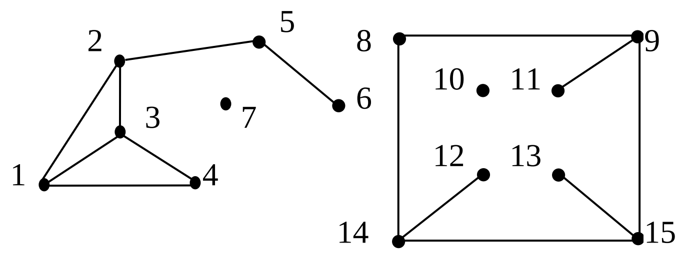
1930 yilda K. Kuratovskiy bu tasdiqqa teskari tasdiqni isbot qildi: *agar graf tekislikda yotuvchi bo‘lmasa, u holda u* K_5 *yoki* $K_{3,3}$ *grafga gomeomorf bo‘lgan qism grafga ega bo‘ladi.* Umuman olganda, graflarning planarligi haqidagi bu asosiy natija K. Kuratovskiydan oldin 1922 yilda L. S. Pontryagin tomonidan isbotlangan, lekin bu natija o‘sha vaqtda matbuotda e’lon qilinmagan edi.

6- teorema (Pontryagin-Kuratovskiy). *Graf planar bo‘lishi uchun u* K_5 *yoki* $K_{3,3}$ *grafga gomeomorf qism graflarga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir*.

7- teorema. *Agar karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz grafda* m *ta uch,* n *ta qirrai va* k *ta bog‘lamlilik komponentalari bo‘lsa, u holda quyidagi munosabat o‘rinlidir:*

$$m-k \le n \le \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}.$$

3- misol. 3- shaklda tasvirlangan (15,14)-grafni G bilan belgilaymiz.



3- shakl

Bu graf bog‘lamli graf emas, uning to‘rtta bog‘lamli komponentalari bor: $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, bu yerda G_1 – uchlari to‘plami $\{1,2,3,4,5,6\}$ bo‘lgan oriyentirlanmagan (6,7)-graf, G_2 – bitta 7 belgili uchga ega oriyentirlanmagan (1,0)-graf, G_3 ham bitta 10 belgili uchga ega oriyentirlanmagan (1,0)-graf, G_4 esa uchlari to‘plami $\{8,9,11,12,13,14,15\}$ bo‘lgan oriyentirlanmagan (7,7)-grafdir. Agar G grafning G_4 bog‘lamli komponentasini alohida graf deb qarasak, bu grafda $\{(8,9),(14,15)\}$ ko‘rinishdagi ajratuvchi qirralar to‘plamini ko‘rsatish mumkin. Bu qirralar kesim tashkil etadi. G grafning G_1 va G_4 bog‘lamli komponentalari ko‘priklarga egadir. Masalan, $(2,5)$ va $(5,6)$ qirralar G_1 graf uchun ko‘priklardir. ■

Endi D. Kyonig tomonidan 1936 yilda isbotlangan ushbu teoremani grafning ikki bo‘lakli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshirish alomati (mezoni) sifatida keltiramiz.

8- teorema (D. Kyonig). *Grafning ikki bo‘lakli bo‘lishi uchun uning tarkibida uzunligi toq son bilan ifodala-nuvchi sikl bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Ko‘ndalangiga izlash usuliga ko‘ra grafning uchlari $0,1,2,3,...$ raqamlar bilan quydagi qoida bo‘yicha belgilanadi. Dastlab grafning ixtiyoriy uchi 0 raqami bilan belgilab olinadi. Shu 0 belgili uchga qo‘shni barcha uchlarga 1 belgisi qo‘yiladi. Endi 1 belgili har bir uchga qo‘shni uchlarni aniqlab, ular orasidagi belgisi yo‘q uchlarga 2 belgisini qo‘aymiz. Keyin 2 belgisiga ega barcha uchlarni aniqlab, ular uchun ham yuqoridagiga o‘xshash ish yuritamiz. Bu jarayonni mumkin bo‘lgan qadar davom ettiramiz. Tushunarliki, agar G graf bog‘lamli bo‘lsa, u holda ko‘ndalangiga izlash usuli grafning barcha uchlarini raqamlab chiqish imkonini beradi.

Bog‘lamli graf uchlarini belgilash jarayoni tugagandan so‘ng, uning uchlari to‘plami V ni ikkita V_j va V_q to‘plamga quyidagicha ajratamiz: juft raqamli uchlarni V_j to‘plamga, qolgan uchlarni esa V_q to‘plamga kiritamiz (0 raqamli uch V_j to‘plamga kiritiladi). G grafning ikkala uchi ham V_j to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini U_j bilan, uning ikkala uchi ham V_q to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini esa U_q bilan belgilaymiz. Agar U_j va U_q kortejlar bo‘sh bo‘lsa, u holda berilgan G graf ikki bo‘laklidir, aks holda u ikki bo‘lakli emas.

Hozirgacha $k > 2$ bo‘lgan hol uchun grafning k bo‘lakliligini aniqlash bo‘yicha oddiy usul topilmagan.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Graflarda marshrut deganda nimani tushunasiz?
2. Marshrutdagi boshlang‘ich, oraliq va oxirgi uchlarning bir-biridan qanday farqlari bor?
3. Qanday marshrutlar cheksiz marshrutlar deb ataladi?
4. Notrivial marshrut bilan nol marshrutning bir-biridan farqi nimada?
5. Marshrutning uzunligi deganda nimani tushunasiz?
6. Zanjir nima?
7. Oddiy va yopiq zanjirlarning bir-biridan farqi nimada?
8. Yo‘l, kontur deganda nimani tushunasiz?
9. Qanday zanjir sikl deb ataladi va qanday graf siklga ega?
10. Qanday uchlar bog‘langan deb ataladi?

12-AMALIY MASHG'ULOT

Eyler va Gamilton graflari

Amaliy mashg'ulotda ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining tuzulishi	3. Eyler graflari 4. Gamilton graflari
Mashg'ulot maqsadi:	Talabalarda eyler graflari va gamilton graflari haqida bilim va ko'nikmalarga oid masalalar yechiadi.
Ta'lim usullari	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta'limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta'lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma'ruza.

12-amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o'quv mashg'ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o'quv natijalarni e'lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	28. Eyler graflari haqida umumiy ma'lumotlarga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 29. Gamilton graflaridan tushunchasiniga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi	O'z-o'zini o'zaro baholashni o'tkazadilar. Savol beradilar Topshiriqni yozadilar

	(Ilova 3,4).	

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Qanday graflar gamilton grafi deyiladi?
2. Qanday graflar eyler grafi deyiladi?
3. Arintirlangan eyler grafi deb nimaga aytiladi?
4. Gamilton zanjiri deganda nimani tushunasiz?

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi.

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Arintirlangan eyler yuli deb nimaga aytiladi?
2. Gamilton sikli deganda nimani tushunasiz?
3. Kommivoyajer masalasini yechishda qanday zanjirdan foydalaniladi

Asosiy qism

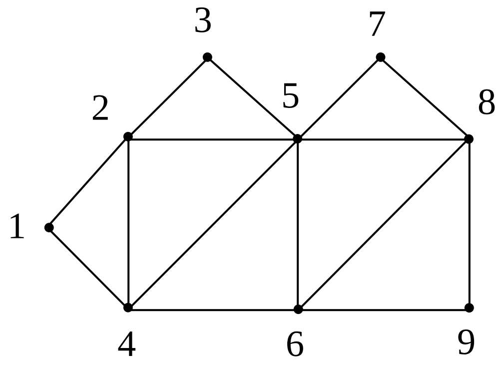
1. Eyler graflari. Graflar nazariyasining shakllanishi Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masala bilan bog‘liq ekanligi yaxshi ma’lum. L. Eyler 1736 yilda bu masalaning yechimga ega emasligini isbotladi. U graflar nazariyasining ancha umumiy hisoblangan quyidagi savoliga ham javob topdi: qanday shartlar bajarilganda bog‘lamli grafda barcha qirralardan faqat bir marta o‘tadigan sikl mavjud bo‘ladi?

Grafning har bir qirrasidan faqat bir marta o‘tadigan zanjir **Eyler zanjiri** deb ataladi. Yopiq Eyler zanjiriga (ja’ni **Eyler sikliga**) ega graf **Eyler grafi** deb ataladi. Agar grafda yopiq bo‘lmagan Eyler zanjiri topilsa, u holda bunday graf **yarim Eyler grafi** deb ataladi.

1- teorema. *Bog‘lamli graf Eyler grafi bo‘lishi uchun undagi barcha uchlarning darajalari juft bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Avvalo bu grafning Eyler grafi bo‘lishi shartini, ya’ni 1- teorema shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

Berilgan grafda to‘qqizta uch bo‘lib, 1, 3, 7, 9 belgili uchlarning darajasi ikkiga, 2, 4, 6, 8 belgili uchlarning darajasi to‘rtga, 5 belgili uchning darajasi esa oltiga teng. Xullas, bu grafdagi barcha uchlarning darajalari juftdir. Shuning uchun, 1- teoremaga ko‘ra, 1- shaklda tasvirlangan graf Eyler grafidir va uning



1- shakl

tarkibida Eyler sikli mavjud.

Berilgan grafga flyori algoritmini qo‘llab mavjud Eyler sikllaridan birini aniqlaymiz. Dastlabki uch sifatida grafdagi 1 belgili uch olingan bo‘lsin. Bu uchdan ikki yo‘nalishda: $(1;2)$ qirra bo‘ylab yoki $(1;4)$ qirra bo‘ylab harakatlanish mumkin. Masalan, $(1;2)$ qirra bo‘ylab harakatlanib 2 belgili uchga o‘tamiz. Endi harakatni 3 yo‘nalishda: yo $(2;3)$ qirra bo‘ylab, yo $(2;4)$ qirra bo‘ylab, yoki $(2;5)$ qirra bo‘ylab davom ettirish mumkin. Aytaylik, $(2;3)$ qirra bo‘ylab harakatlanib 3 belgili uchga o‘tgan bo‘laylik. Shu usulda davom etib mumkin bo‘lgan Eyler sikllaridan birini, masalan, quyidagi siklni hosil qilamiz:

$$\big((1,2),(2,3),(3,5),(5,4),(4,6),(6,9),(9,8),(8,6),$$
$$(6,5),(5,8),(8,7),(7,5),(5,2),(2,4),(4,1)\big).$$

2. Gamilton graflari. Graflar nazariyasining natijalari muayyan shartlarni qanoatlantiruvchi marshrutlarni topish masalasiga keltiriluvchi bir qator muammolarni hal etishda qo‘llanilishi mumkin. Shunday muammolardan biri sifatida Uilyam Gamilton nomi bilan bog‘liq masalani keltiramiz. U. Gamilton dodekaedrni tekshirib, uning har bir uchidan faqat bir marta o‘tadigan siklni izlab topgan va shu asosda 1859 yilda “Olam bo‘ylab sayohat” nomli o‘yinni topgan.

Grafning har bir uchidan faqat bir marta o‘tadigan zanjir **Gamilton zanjiri** deb ataladi. Yopiq Gamilton zanjiriga (ja’ni **Gamilton sikliga**) ega graf **Gamilton grafi** deb ataladi. Agar grafda yopiq bo‘lmagan Gamilton zanjiri topilsa, u holda bunday graf **yarim Gamilton grafi** deb ataladi.

Oriyentirlangan graflarda ham grafning har bir uchidan faqat bir marta o‘tuvchi oriyentirlangan sikllarni qarash mumkin

Eyler va Gamilton graflari bir-birlariga o‘xshash ta’riflansada, grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlaydigan alomat (mezon) topish masalasi ancha murakkab muammo hisoblanadi. Hozirgi vaqtgacha graflar nazariyasida grafning

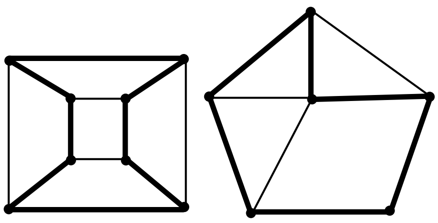
Gamilton grafi ekanligini tasdiqlovchi shartlarni o‘rganish bo‘yicha izlanishlar davom etib, bu sohadagi ishlar hanuzgacha dolzarbligini yo‘qotmasdan kelmoqda.

Qandaydir shartlarga bo‘ysunuvchi graflarda Gamilton sikli mavjudligi haqida bir necha tasdiqlar mavjud. Qator hollarda bu tasdiqlarning isbotlari konstruktiv bo‘lganligidan, Gamilton siklini tuzishga doir samarali algoritmlar ham yaratilgan. 1952 yilda G. E. Dirak quyidagi teoremani isbotladi.

2- teorema (Dirak). *Uchlari soni uchtadan kam bo‘lmagan grafdagi istalgan uchning darajasi uchlar sonining yarmidan kam bo‘lmasa, bu graf Gamilton grafi bo‘ladi.*

3- teorema (Ore). *Agar uchlari soni* m *ga* $(m>2)$ *teng bo‘lgan grafdagi qo‘shni bo‘lmagan ixtiyoriy uchlar darajalari yig‘ndisi* m *dan kam bo‘lmasa, u holda bu graf Gamilton grafi bo‘ladi.*

2- misol. 3- shaklda tasvirlangan graflar Gamilton graflariga misol bo‘la oladilar. Bir qarashdayoq sezish mumkinki, bu graflarning har birida bir nechtadan Gamilton sikllari mavjud. Mumkin bo‘lgan ba’zi Gamilton sikllari shaklda qalin chiziqlar bilan ifodalangan.



3- shakl

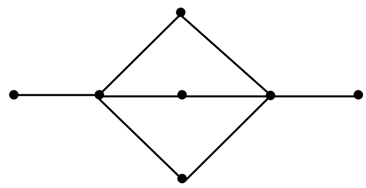
3- misol. Shaxmat o‘yinidagi otning yurishi haqidagi Eyler masalasi deb ataluvchi quyidagi masalani qaraymiz. Shaxmat taxtasidagi istalgan katakda turgan shaxmat oti uchun yurishlarning shunday ketma-ketligini tuzingki, u barcha kataklardan faqat bir martadan o‘tsin va yurish boshlangan katakka qaytib kelsin. Bu masalani hal qilish maqsadida tuzilgan graf (shaxmat taxtasidagi kataklarga grafning uchlari, otning yurishlariga esa uning qirralari mos

8	56		58		50		60	
7		44		40		34		38
6	42		46		36		32	
5		48		54		62		52
4	20		30		22		16	
3		64		4		14		10
2	6		2		8		12	
1	1	28		18		26		24
	A	B	C	D	E	F	G	H

qo‘yilishi nazarda tutilmoqda) ham Gamilton grafiga misol bo‘la oladi. Bu masalaning yechimlaridan biri 4- shaklda keltirilgan.

4- misol. 5- shaklda tasvirlangan grafda Gamilton zanjiri mavjud emas.

Berilgan grafda Gamilton zanjirining mavjudligi shartlarni o‘rganish bo‘yicha izlanishlar davom etayotganligi va bu sohadagi ishlar bugungi kunda ham dolzarbligini yo‘qotmaganligi yuqorida qayd etilgan edi. Grafdagi uchlar soni m ning qiymatiga nisbatan ko‘phad bilan chegaralangan sondagi qadam ishlatib istalgan grafda Gamilton zanjiri mavjudligini tekshiradigan algoritm hozirgacha topilmagan. Shuning uchun ham Gamilton zanjirini topish masalasi graflar nazariyasida markaziy masalalardan biri bo‘lib qolmoqda, Albatta, grafdagi m ta uchlarning $m!$ ta turli ketma-ketliklarini (aniqrog‘i, takrorlanmaydigan o‘rin almashtirishlarini) tuzib grafda Hamilton zanjiri mavjudligi masalasini hal qilish mumkin. Shunday bo‘lishiga qaramasdan, barcha $m!$ ta o‘rin almashtirishlarini bajarmasdan qadamlar sonini jiddiy qisqartiradigan umumiy algoritm bor.



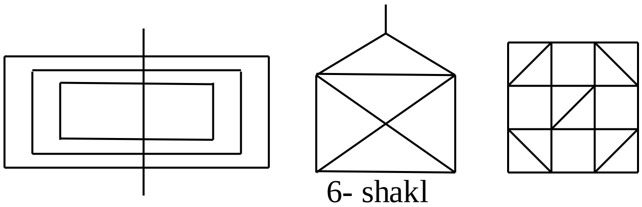
5- shakl

Grafda Gamilton zanjirini topish masalasi quyidagi **kommivoyajer masalasi** deb ataluvchi masalada oshkora namoyon bo‘ladi. Bir-birlari bilan yo‘llar (graf qirralari) vositasida bog‘langan shaharlar (graf uchlari) tarmog‘i berilgan bo‘lib, shaharlarning har bir (a,b) jufti uchun masofa (uni $\mu(a,b)$ bilan belgilaymiz) mos qo‘yilgan hamda o‘zaro bog‘lanmagan shaharlar orasidagi masofa cheksiz katta deb hisoblaymiz. Kommivoyajer uchun shunday Gamilton sikli to-pish kerakki, $\sum_{i=0}^{n-1}\mu(a_i,a_{i+1})$ ifodaning qiymati minimal bo‘lsin, bu yerda a_i – tarmoqdagi i- shahar ($i=\overline{0,n}$). Boshqacha aytganda, kommivoyajerning biror shahardan chiqib va qolgan barcha shaharlardan faqat bir martadan o‘tib, yana dastlabki shaharga qaytishi imkonini beruvchi eng kichik umumiy uzunlikka ega bolgan yo‘lni topish kerak

Ilova 3

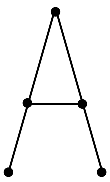
Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Yarim Eyler grafi bo‘lib, Eyler grafi bo‘la olmaydigan grafga misol keltiring. Sababini tushuntiring.
2. 6- shaklda tasvirlangan uchta grafni (bu graflarda qirralarga kesmalar, kesmalarning kesishish nuqtalariga esa uchlar mos qo‘yilgan deb hisoblanadi) tekshirib, ularning Eyler grafi bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlang. Eyler grafi bo‘lganlarining har biridagi Eyler sikllaridan bir nechasini toping. Eyler grafi bo‘lmaganlarining yarim Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.



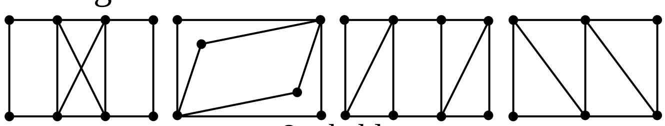
6- shakl

3. 3-, 5- va 6- shaklda tasvirlangan graflar orasida qalamni qog‘ozdan ko‘tarmasdan har bir kesmani faqat bir marta chizib (kesmalarning uchlari bundan mustasno) chiqish mumkin bo‘lganlarini aniqlang.
4. Lotin alifbosi bosma harflarning har biriga graf sifatida qarab (masalan A harfiga mos graf 7- shaklda tasvirlangan), ular orasidan Eyler grafi bo‘la olmaydiganlarini aniqlang.



7- shakl

5. K_n grafning Eyler grafi bo‘lishi sartlarini toping.
6. Berilgan n ta elementli to‘plam uchun tuzilgan barcha $n!$ ta o‘rin almashtirishlarning har biriga grafning uchi mos qo‘yilgan bo‘lsin. Agar biror o‘rin almashtirishdan undagi ikkita elementning o‘rinlarini almashtirib boshqa o‘rin almashtirishni hosil qilish mumkin bo‘lsa, u holda bu harakatga grafning qirrasini mos qo‘yamiz. Shunday usul bilan tuzilgan graf Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang.
7. K_n grafning Gamilton grafi bo‘lishi sartlarini aniqlang.
8. 8- shaklda tasvirlangan to‘rtta grafning har biri Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.
9. 8- shaklda tasvirlangan to‘rtta grafning har biri Gamilton grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.



8- shakl

10. Dirak teoremasini qo‘llab $K_{3,3}$ grafning Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang

13 -AMALIY MASHG'ULOT
Grafning metrik xarakteristikalari

Amaliy mashg'ulotda ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining tuzulishi	3. Graflarda masofa tushunchasi 4. Minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala
Mashg'ulot maqsadi:	Talabalarda graflarda masofa tushunchasi va minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala haqida bilim va ko'nikmalarga oid masalalar yechiladi.
Ta'lim usullari	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta'limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta'lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma'ruza.

13-amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o'quv mashg'ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o'quv natijalarni e'lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	30. Graflarda masofa tushunchasi haqida umumiy ma'lumotlarga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 31. Minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masalasiga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 32. Grafning markazini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob	O'z-o'zini o'zaro baholashni o'tkazadilar. Savol beradilar

	orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

5. Mashrutda kuchlar orasidagimasofa deb nimaga aytiladi?
6. Grafning deamitri deb nimaga aytiladi?
7. Grafning markazi deb nimaga aytiladi?
8. Radial oddiy zanjir deb nimaga aytiladi?

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi.

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

4. Deykstra algaritmi qanday masala uchun qullaniladi?
5. Isudintlik matritsasi bilan berilgan grafning deamitri qanday topiladi?
6. Qirralar qushniligi matritsasi bilan berilgan grafning deamitri qanday topiladi?

Asosiy qism

1. Graflarda masofa tushunchasi. Bog‘lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo‘lsin. Bu grafda har qanday ikkita v_1 va v_2 uchlar bog‘langan bo‘lgani uchun chetlari v_1 va v_2 uchlardan iborat bo‘lgan hech bo‘lmasa bitta marshrut bor. v_1 va v_2 uchlarni bog‘lovchi eng qisqa (v_1,v_2) marshrutning uzunligi v_1 va v_2 **uchlar orasidagi masofa** deb ataladi va u $d(v_1,v_2)$ bilan belgilanadi. Ravshanki, eng qisqa marshrut oddiy zanjirdir. Tabiiy ravishda $d(v,v)=0$ deb qabul qilamiz.

Shuni ta’kidlash kerakki, graflarda masofa tushunchasini boshqa usul bilan ham aniqlash mumkin.

Yuqoridagi usul bilan aniqlangan masofa **metrika aksiomalari** deb ataluvchi quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) $d(v_1,v_2)\geq 0$;
2) $v_1=v_2$ bo‘lgandagina $d(v_1,v_2)=0$ bo‘ladi;
3) $d(v_1,v_2)=d(v_2,v_1)$;
4) $d(v_1,v_2)+d(v_2,v_3)\geq d(v_1,v_3)$.

Oxirgi aksioma **uchburchak tengsizligi** deb ataladi.

Bog‘lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo‘lsin. G grafning ixtiyoriy $v\in V$ uchi uchun aniqlangan

$$e(v)=\max_{w\in V} d(v,w)$$

miqdor shu v **uchning ekssentrisiteti** deb ataladi.

Bog‘lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kattasi (maksimali) shu **grafning diametri** deb ataladi.

G grafning diametri, odatda, $d(G)$ bilan belgilanadi: $d(G)=\max\limits_{v\in V} e(v)$. Diametr bu grafning istalgan ikki uchi orasidagi mumkin bo‘lgan eng katta masofadir, ya’ni $d(G)=\max\limits_{v_1,v_2\in V} d(v_1,v_2)$.

Uzunligi $d(G)$ga teng bo‘lgan oddiy zanjir **diametral zanjir** deb ataladi. Tabiiyki, grafda diametral zanjir yagona bo‘lmasligi mumkin.

Bog‘lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kichigi (minimali) shu **grafning radiusi** deb ataladi.

G grafning radiusi, odatda, $r(G)$ bilan belgilanadi: $r(G)=\min\limits_{v\in V} e(v)$. Ravshanki, $r(G)=\min\limits_{v_1\in V}\max\limits_{v_2\in V} d(v_1,v_2)$.

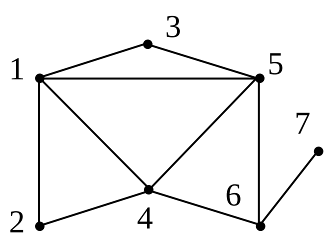
Bog‘lamli G grafdagi ekssentrisiteti radiusga teng v_0 uch **grafning markazi** (**markaziy uchi**) deb ataladi.

Agar v_0 uch G grafning markazi bo‘lsa, u holda $e(v_0)=\min\limits_{v\in V} e(v)$ bo‘ladi, ya’ni grafning markaziy uchi minimal ekssentrisitetga egadir.

Agar grafning markazidan boshqa biror uchigacha bo‘lgan oddiy zanjir eng uzun masofaga ega bo‘lsa, u holda bu zanjir **radial oddiy zanjir** deb ataladi.

Tabiiyki, grafning radiusi uning diametridan katta emas va graf bittadan ko‘p markazga ega bo‘lishi ham mumkin. Bundan tashqari, grafning barcha uchlari uning markaziy uchlari bo‘lishi ham mumkin.

Grafning markaziy uchlarini topish bilan bog‘liq masalalar aholiga xizmat ko‘rsatadigan qandaydir ob’yektning (kasalxona, maktab va shu kabilarning) joylashish o‘rnini aniqlash bilan bog‘liq muammolarni hal qilishda qo‘llanilishi mumkin. Ta’kidlash kerakki, muayyan vaziyatlarda, ko‘pincha, boshqa holatlarni, jumladan, ob’yektgacha borish vaqti, punktlar orasidagi masofa va shu kabilarni hisobga olishga to‘g‘ri keladi. Bunday vaziyatlarda **joylashtirishning minimaks masalalari** deb ataluvchi masalalar vujudga keladi.



1- shakl

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu ghafda $d(1,6)=2$, $d(2,7)=3$, $d(G)=3$; $(1,4,6,7)$ va $(1,5,6,7)$ zanjirlar diametral zanjirlardir, $(1,3)$ va $(1,3,5,6,7)$

zanjirlar esa diametral zanjirdirlar bo‘la olmaydi. Berilgan grafda 4, 5 va 6 belgili uchlar markazlar bo ‘lib, $r(G)=2$ hamda $(6,7)$ va $(6,4,1)$ radial oddiy zanjirlardir. ■

2. Minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala. Berilgan bog‘lamli grafning har bir qirrasiga (agar berilgan graf oriyentirlangan bo‘lsa – yoyiga) qandaydir haqiqiy son mos qo‘yib, bu sonni **qirraning** (**yoyning**) **uzunligi** deb ataymiz. Qirraning (yoyning) uzunligi **additivlik** xossasiga ega deb faraz qilamiz, ya’ni qirralar (yoylar) yordamida tuzilgan **zanjirning** (**yo‘lning**) **uzunligi** shu zanjirni (yo‘lni) tashkil etuvchi qirralar (yoylar) uzunliklari yig‘indisiga tengdir.

Tabiiyki, qirraning yoki yoyning uzunligi tushunchasi yechilayotgan masalaning mohiyatiga qarab muayyan bir ma’noga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, ikkita shahar orasidagi masofa, qandaydir operatsiyani bajarish uchun zarur mablag‘ (xarajatlar) yoki vaqt va boshqalar. Shu nuqtai nazardan, umuman olganda, bu yerda manfiy uzunlikka ega yoki uzunligi nolga teng qirra (yoy) ham ma’noga ega deb hisoblanadi.

Amaliyotda uchraydigan ko‘plab masalalarda marshrut uzunligi maksimallashtirilishi yoki minimallashtirilishi talab etiladi. Shunday masalalardan biriga, aniqrog‘i, kommivoyajer masalasiga Gamilton graflari bilan shug‘ullanganda duch kelgan edik (ushbu bobning 5- paragrafiga qarang).

$G=(V,U)$ oriyentirlangan graf berilgan bo‘lsin, bu yerda $V=\{1,2,...,m\}$. G grafning biror $s\in V$ uchidan boshqa $t\in V$ uchiga boruvchi yo‘llar orasida uzunligi eng kichik bo‘lganini topish masalasi bilan shug‘ullanamiz. Bu masalani **minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala** deb ataymiz. Quyida bu masalaning umumlashmasi hisoblangan masalani qarab, uni ham o‘sha nom bilan ataymiz.

Grafdagi (i,j) yoyning uzunligini c_{ij} bilan belgilab, $C=(c_{ij})$, $i,j=\overline{1,m}$, matritsa berilgan deb hisoblaymiz. Yuqorida ta’kidlaganlarimizga ko‘ra, C matritsaning c_{ij} elementlari orasida manfiylari yoki nolga tenglari ham bo‘lishlari mumkin. Agar grafda biror i uchdan chiqib j uchga kirruvchi yoy mavjud bo‘lmasa, u holda bu yoyning uzunligini cheksiz katta deb qabul qilamiz ($c_{ij}=\infty$). Bundan tashqari, G grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl mavjud emas deb hisoblaymiz, chunki aks holda uzunligi eng kichik bo‘lgan yo‘l mavjud emas.

Minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Deykstra tomonidan taklif etilgan algoritm ko‘p qo‘llaniladi. Quyida grafning 1 belgili uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz) grafdagi ixtiyoriy k uchgacha (bu uchni oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish imkonini beruvchi **Deykstra algoritmi** keltirilgan.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo‘yib, bu uchni dastlab $R = \varnothing$ deb qabul qilingan R to‘plamga kiritamiz: $R = \{1\}$. $\overline{R} = V \setminus R$ deb olamiz.

Umumiy qadam. Boshlang‘ich uchi R to‘plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R, \overline{R})$ bo‘lsin. Har bir $(i, j) \in (R, \overline{R})$ yoy uchun $h_{ij} = \varepsilon_i + c_{ij}$ miqdorni aniqlaymiz, bu yerda ε_i deb $i \in R$ uchga mos qo‘yilgan qiymat (grafning 1 belgili uchidan chiqib i belgili uchigacha eng qisqa yo‘l uzunligi) belgilangan.

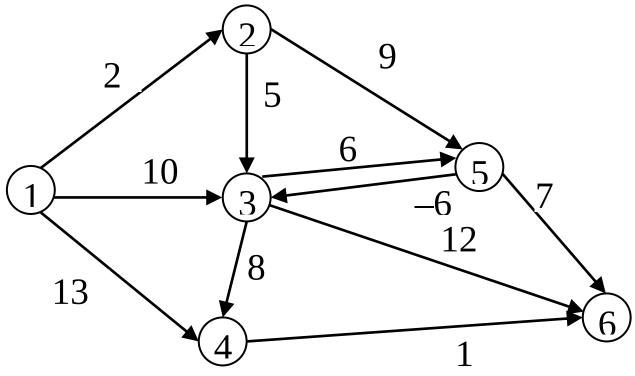
$\varepsilon_j = \min\limits_{(i,j)\in(R,\overline{R})} h_{ij}$ qiymatni aniqlaymiz. $(R, \overline{R})$ to‘plamning oxirgi tenglikda minimum qiymat beruvchi barcha elementlarini, ya’ni (i, j) yoylarni ajratamiz. Ajratilgan yoylarning har biridagi $j \in \overline{R}$ belgili uchga ε_j qiymatni mos qo‘yamiz. ε_j qiymat mos qo‘yilgan barcha j uchlarni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib R to‘plamga kiritamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha (i, j) yoylar uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz. Tekshirilayotgan tengsizlik o‘rinli bo‘lmagan (ja’ni $\varepsilon_{j_*} > \varepsilon_i + c_{ij_*}$ bo‘lgan) barcha j_* belgili uchlarning har biriga mos qo‘yilgan eski ε_{j_*} qiymat o‘rniga yangi $\varepsilon_i + c_{ij_*}$ qiymatni mos qo‘yamiz va (i, j_*) yoyni ajratamiz. Bunda eski ε_{j_*} qiymat aniqlangan paytda ajratilgan yoyni ajratilmagan deb hisoblaymiz.

Uchlarga qiymat mos qo‘yish jarayonini oxirgi (k belgili) uchga qiymat mos qo‘yilguncha davom ettiramiz. Grafning 1 belgili uchidan (manbadan) chiqib uning ixtiyoriy k uchigacha (oxirgi uchigacha) eng qisqa yo‘l uzunligi ε_k bo‘ladi.

Oxirgi qadam. Grafning oxirgi uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda uning 1 belgili uchiga kelguncha harakatlanib, natijada grafdagi 1 belgili uchdan ixtiyoriy k uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo‘l(lar)ni topamiz. ■

2- misol. 2- shaklda tasvirlangan orgrafda oltita uch ($V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) va o‘n bitta yoy bo‘lib, har bir yoy uzunligi uning yoniga yozilgan. Ko‘rinib turibdiki,



2- shakl

berilgan grafda manfiy uzunlikka ega $(5,3)$ yoy ham bor. Isbotlash mumkinki, bu grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl mavjud emas.

Yuqorida bayon qilingan Deykstra algoritmini berilgan grafga qo‘llab, eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish bilan shug‘ullanamiz.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo‘yamiz va $R = \{1\}$ to‘plamga ega bo‘lamiz. Shuning uchun, $\overline{R} = V \setminus R = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ bo‘ladi.

Umumiy qadam. 1- iteratsiya. $R = \{1\}$ va $\overline{R} = \{2,3,4,5,6\}$ bo‘lgani uchun boshlang‘ich uchi R to‘plamga tegishli, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plam elementi bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R,\overline{R}) = \{(1, 2),(1, 3),(1, 4)\}$ga ega bo‘lamiz. $(R,\overline{R})$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir yoy uchun h_{ij} ning qiymatlarini topamiz:

$(1, 2)$ yoy uchun $h_{12} = \varepsilon_1 + c_{12} = 0 + 2 = 2$;

$(1, 3)$ yoy uchun $h_{13} = \varepsilon_1 + c_{13} = 0 + 10 = 10$;

$(1, 4)$ yoy uchun $h_{14} = \varepsilon_1 + c_{14} = 0 + 13 = 13$.

Bu h_{12}, h_{13} va h_{14} miqdorlar orasida eng kichigi h_{12} bo‘lgani uchun $(1, 2)$ yoyni ajratamiz (3- shaklda bu yoy qalin chiziq bilan belgilangan) va 2 belgili uchga $\varepsilon_2 = 2$ qiymatni mos qo‘yamiz. Algoritmga ko‘ra 2 uchni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib, R to‘plamga kiritamiz. Natijada $R = \{1, 2\}$ va $\overline{R} = \{3, 4, 5, 6\}$ to‘plamlarga ega bo‘lamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan bitta $(1, 2)$ yoy bo‘lgani uchun faqat bitta $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish kifoya. Bu tengsizlik $0 + 2 \geq 2$ ko‘rinishdagi to‘g‘ri munosabatdan iborat bo‘lgani uchun 2- iteratsiyaga o‘tamiz.

2- iteratsiya. $(R,\overline{R}) = \{(1, 3),(1, 4),(2, 3),(2, 5)\}$ bo‘lgani sababli $h_{13} = 10$, $h_{14} = 13$, $h_{23} = 7$ va $h_{25} = 11$ qiymatlarni va $\min\{h_{13}, h_{14}, h_{23}, h_{25}\} = h_{23} = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Bu yerda eng kichik qiymat $(2, 3)$ yoyga mos keladi. Shuning uchun, $(2, 3)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_3 = 7$ qiymatni 3 belgili uchga mos qo‘yamiz. 3 belgili uchni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib, R to‘plamga kiritgandan so‘ng $R = \{1, 2, 3\}$ va $\overline{R} = \{4, 5, 6\}$ to‘plamlar hosil bo‘ladi.

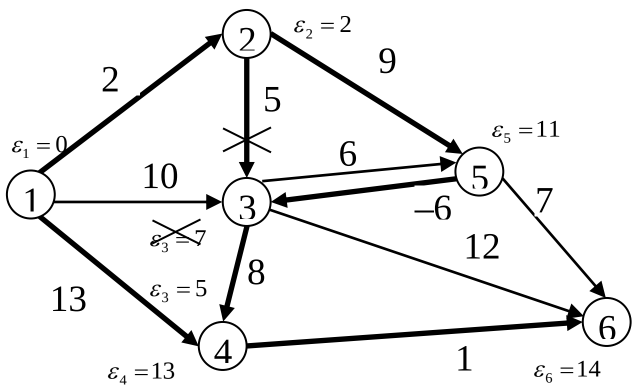
Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan uchta $(1, 2)$, $(1, 3)$ va $(2, 3)$ yoylardan birinchisi uchun $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishi 1- iteratsiyada tekshirilganligi va ε_1, ε_2 qiymatlarning o‘zgarmaganligi sababli faqat ikkinchi va uchinchi yoylarga mos $\varepsilon_1 + c_{13} \geq \varepsilon_3$ va $\varepsilon_2 + c_{23} \geq \varepsilon_3$ munosabatlarni tekshirish kifoya. Bu munosabatlar $0 + 10 \geq 7$ va $2 + 5 \geq 7$ ko‘rinishda bajariladi. Shuning uchun 3- iteratsiyaga o‘tamiz.

3- iteratsiya. Boshlang‘ich uchi $R=\{1, 2, 3\}$ to‘plamga tegishli, oxiri esa $\overline{R}=\{4, 5, 6\}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan yoylar to‘rtta: $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$ va $(3, 5)$. Shu yoylarga mos h_{ij} ning qiymatlari $h_{14}=13$, $h_{25}=11$, $h_{34}=15$, $h_{35}=13$ va, shuning uchun, $\min\{h_{14}, h_{25}, h_{34}, h_{35}\}=h_{25}=11$ bo‘ladi. Demak, bu iteratsiyada $(2, 5)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_5=11$ deb olamiz. Endi, algoritmga ko‘ra, $R=\{1, 2, 3, 5\}$ va $\overline{R}=\{4, 6\}$ to‘plamlarni hosil qilamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan yoylar oltita: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$. Bu yoylarning har biri uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \ge \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshirishimiz kerak. Lekin, 1- va 2- iteratsiyalarda $(1, 2)$, $(2, 3)$ va $(1, 3)$ yoylar uchun bu ish bajarilganligi sababli tekshirishni tarkibida 5 belgili uch qatnashgan $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$ yoylar uchun amalga oshirib, quyidagilarga ega bo‘lamiz: $(2, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_2 + c_{25} \ge \varepsilon_5$ munosabat to‘g‘ri ($2+9 \ge 11$), $(3, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_3 + c_{35} \ge \varepsilon_5$ munosabat to‘g‘ri ($7+6 \ge 11$), lekin $(5, 3)$ yoy uchun $\varepsilon_5 + c_{53} \ge \varepsilon_3$ munosabat noto‘g‘ri ($11+(-6)=5<7$). Oxirgi munosabatni hisobga olib, algoritmga ko‘ra $\varepsilon_3=7$ o‘rniga $\varepsilon_3=5$ deb olamiz va $(5, 3)$ yoyni ajratilgan deb, ilgari ajratilgan $(2, 3)$ yoyni esa ajratilmagan deb hisoblaymiz (3- shaklda $\varepsilon_3=7$ yozuvning va $(2, 3)$ yoyning qalin chiziq’i ustiga ajratilganlikni inkor qiluvchi $\times$ belgisi qo‘yilgan).

4- iteratsiya. $R=\{1, 2, 3, 5\}$, $\overline{R}=\{4, 6\}$ bo‘lgani uchun $(R, \overline{R})=\{(1, 4), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$ va $h_{14}=13$, $h_{34}=13$, $h_{36}=17$, $h_{56}=18$ hamda $\min\{h_{14}, h_{34}, h_{36}, h_{56}\}=h_{14}=h_{34}=13$ bo‘ladi. Demak, $(1, 4)$ va $(3, 4)$ yoylarni ajratamiz hamda 4 belgili uchga $\varepsilon_4=13$ qiymatni mos qo‘yamiz. Natijada $R=\{1, 2, 3, 5, 4\}$, $\overline{R}=\{6\}$ to‘plamlarga ega bo‘lamiz.

$\varepsilon_i + c_{ij} \ge \varepsilon_j$ munosabatning to‘g‘riligi $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$ va $(3, 4)$ yoylar uchun tekshirilib ko‘rilganda, uning barcha yoylar uchun bajarilishi ma’lum



3- shakl

bo‘ladi.

5- iteratsiya. Endi $(R,\overline{R})=\{(3,\ 6),(4,\ 6),(5,\ 6)\}$ bo‘lgani uchun $h_{36}=17$, $h_{46}=14$, $h_{56}=18$ va $\min\{h_{36},h_{46},h_{56}\}=h_{46}=14$ bo‘ladi. Bu yerda minimum $(4,\ 6)$ yoyda erishilgani uchun uni ajratib, orgrafning oxirgi 6 belgili uchiga $\varepsilon_6=14$ qiymatni mos qo‘yamiz.

Oxirgi qadam. Berilgan orgrafda 1 belgili uchdan 6 belgili uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo‘l(lar)ni topish maqsadida, algoritmga asosan, grafning oxirgi 6 belgili uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda harakatlanib, uning 1 belgili uchiga kelishimiz kerak. 6 belgili uchga kiruvchi uchta yoydan faqat bittasi ($(4,\ 6)$ yoy) ajratilgan bo‘lgani uchun $(4,\ 6)$ yoy yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda harakat qilib, 6 belgili uchdan 4 belgili uchga kelamiz. 4 belgili uchga kiruvchi ikkala ($(1,\ 4)$ va $(3,\ 4)$) yoylar ham ajratilgan bo‘lgani uchun biz tuzmoqchi bo‘lgan eng qisqa uzunlikka ega yo‘l yagona emas.

Agar harakatni $(1,\ 4)$ yoy yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 1 belgili uchga kelib, eng qisqa uzunlikka ega yo‘llardan biri bo‘lgan $\mu_1=(1,\ 4,\ 6)$ marshrutni topamiz.

Agarda harakatni $(3,\ 4)$ yoy yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 3 belgili uchga kelamiz. 3 belgili uchga kiruvchi ikkita yoydan faqat bittasi ($(5,\ 3)$ yoy) ajratilgan bo‘lgani uchun 3 belgili uchdan 5 belgili uchga kelamiz. Shu usulda davom etsak, oldin 2 belgili, keyin esa 1 belgili uchga o‘tib mumkin bo‘lgan eng qisqa uzunlikka ega bo‘lgan yo‘llardan ikkinchisini, ya’ni $\mu_2=(1,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 6)$ marshrutni aniqlaymiz.

Shunday qilib, 2- shaklda tasvirlangan grafda eng qisqa uzunlikka ega μ_1 va μ_2 yo‘llar borligini aniqladik. Bu yo‘llarning har biri minimal $\varepsilon_6=14$ uzunlikka ega. ■

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Graf uchlari orasidagi masofa deb nimaga aytiladi?
2. Graf uchlari orasidagi masofa metrikaning qanday aksiomalarini qanoatlantiradi?
3. Metrika aksiomalarining qaysi biri uchburchak tengsizligi aksiomasi deb ataladi?
4. Graf uchining ekssentrisiteti deganda nimani tushunasiz?
5. Grafning diametri deb nimaga aytiladi?
6. Diametral zanjir nima?
7. Grafning radiusi qanday aniqlanadi?

8. Grafning markazi yagona uchdan iborat bo‘lmasligi mumkinmi?
9. Grafning radial oddiy zanjiri qanday topiladi?

14-AMALIY MASHG’ULOT
Daraxtlar

Amaliy mashg’ulotda ta’lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O’quv mashg’ulotining tuzulishi	3. Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar 4. Grafning siklomatik soni
Mashg’ulot maqsadi:	Talabalarda daraxt va unga ekvivalent tushunchalar va grafning siklomatik sonini o’rganishga oid masalalar yechiladi.
Ta’lim usullari	O’quv faoliyati natijalari: - daraxt va unga ekvivalent tushunchalar va grafning siklomatik soni - Mustaqil tarzda daraxt va unga ekvivalent tushunchalar va grafning siklomatik soni oladilar.
Ta’limni shakllantirish shakli	Ma’ruza, aqliy hujum, klaster
Ta’lim vositalari	Frontal, jamoaviy

14- amaliy mashg’ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O’quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o’quv mashg’ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o’quv natijalarni e’lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	33. Daraxt va unga ekvivalent tushuncha haqida umumiy ma’lumotlarga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 34. Grafning siklomatik soniniga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 35. Grafdagi daraxtlar uchun Keli teorimasini aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo’yicha o’z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo’yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo’yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e’tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob	O’z-o’zini o’zaro baholashni o’tkazadilar. Savol beradilar

	orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	Topshiriqni yozadilar

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Grafda daraxtlar deb nimaga aytiladi?
2. Grafdagi daraxtlar uchun qanday xossalarni belasiz?
3. Grafdagi daraxtlardan qayerlarda foydalaniladi?
4. Grafning sinch grafi deb nimaga aytiladi?

Monitoring va baholash

Og’zaki so’rov, tezkor savol javob va klasterni to’ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Grafning siklamatik soni deb nimaga aytiladi
2. Grafdagi daraxtlar uchun Keli teorimasini kiltiring
3. Grafdagi daraxtlardan qanday foydalaniladi?

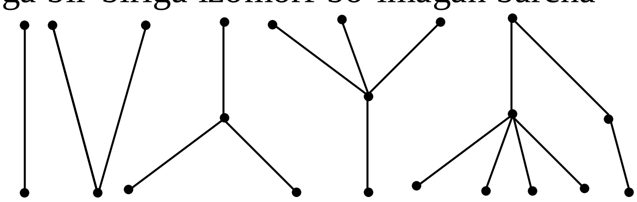
Asosiy qism

1. Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar. Siklga ega bo‘lmagan orientirlanmagan bog‘lamli graf **daraxt** deb ataladi. Ta’rifga ko‘ra daraxt sirtmoqlar va karrali qirralarga ega emas. Siklga ega bo‘lmagan orientirlanmagan graf **o‘rmon** (**asiklik graf**) deb ataladi.

1- misol. 1- shaklda bog‘lamli komponentali soni beshga teng bo‘lgan graf tasvirlangan bo‘lib, u o‘rmondir. Bu grafdagi bog‘lamli komponentalarning har biri daraxtdir. ■

2- misol. 2- shaklda to‘rtta uchga ega bir-biriga izomorf bo‘lmagan barcha (ular bor-yog‘i ikkita) daraxtlarning geometrik ifodalanishi tasvirlangan. ■

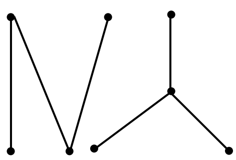
Beshta uchga ega bir-biriga izomorf bo‘lmagan barcha daraxtlar uchta, oltita uchga ega bunday barcha daraxtlar esa oltita ekanligini ko‘rsatish qiyin emas.



1-

Daraxt tushunchasiga boshqacha ham ta’rif berish mumkin. Umuman olganda, $G\ (m,n)$- graf uchun **daraxtlar haqidagi asosiy teorema** deb ataluvchi quyidagi teorema o‘rinlidir.

1- teorema. *Uchlari soni* m *va qirralari soni* n *bo‘lgan* G *graf uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:*



2-

1) G daraxtdir;

2) G asiklikdir va $n = m - 1$;

3) G bog‘lamlidir va $n = m - 1$;

4) G bog‘lamlidir va undan istalgan qirrani olib tashlash amalini qo‘llash natijasida bog‘lamli bo‘lmagan graf hosil bo‘ladi, ya’ni Gning har bir qirrasi ko‘prikdir;

5) G grafninng o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtiriladi;

6) G asiklik bo‘lib, uning qo‘shni bo‘lmagan ikkita uchini qirra bilan tutashtirish amalini qo‘llash natijasida faqat bitta siklga ega bo‘lgan graf hosil bo‘ladi.

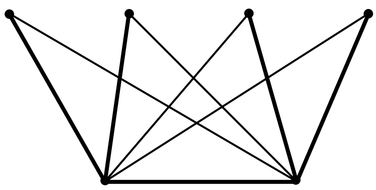
2- teorema. *Istalgan daraxtning markazi uning bitta uchidan yoki ikkita qo‘shni uchlaridan iborat bo‘ladi.*

3- teorema (Keli). *Uchlari soni m bo‘lgan belgilangan daraxtlar soni m^{m-2} ga teng.*

2. Grafning siklomatik soni. Faraz qilaylik, G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan qandaydir bog‘lamli graf bo‘lsin. Bu gfafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli graf bo‘lishi ravshandir. Grafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash amalini hosil bo‘lgan graflarga, imkoni boricha, ketma-ket qo‘llash natijasida G grafning barcha uchlarini bog‘lovchi graf – daraxtni hosil qilish mumkin. Bunday daraxt G **grafning sinch daraxti** (**sinchi**, **karkasi**, **qobirg‘asi**) deb ataladi.

Tabiiyki, bitta grafning bir necha sinch daraxtlari mavjud bo‘lishi mumkin.

2- misol. 3- shaklda tasvirlangan graf sinchlaridan birining qirralari berilgan grafning boshqa qirralariga qaraganda qalinroq chizichlar vositasida ifodalangan. ■



3- shakl

Endi G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan m ta uch, n ta qirra va k ta bog‘lamli komponentalardan tashkil topgan graf bo‘lsin. Agar yuqorida tavsiflangan usul yordamida G grafdan qirralarni ketma-ket olib tashlash amalini qo‘llash natijasida uning har bir komponentasi bog‘lamliligi buzilmasa, u holda berilgan G **grafning sinch o‘rmoni** deb ataluvchi grafni hosil qilish mumkin.

Berilgan G grafdan uning sinch o‘rmonini hosil qilish maqsadida olib tashlanishi kerak bo‘lgan qirralar soni $\lambda = \lambda(G)$ bu qirralarni olib tashlash tartibiga bog‘liq emasligi va $\lambda = n - m + k$ bo‘lishi ravshandir. Qaralayotgan G graf uchun $m - k \le n$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligidan, $\lambda(G) \ge 0$ bo‘ladi. $\lambda(G)$ sonni G **grafning siklomatik soni** (**siklik rangi**) deb ataymiz.

Grafning siklomatik soni tushunchasi, qandaydir ma’noda, grafning bog‘lamlilik darajasini aniqlovchi vositadir. Ravshanki, daraxt uchun $\lambda = 0$ bo‘ladi (1- teoremaga qarang).

Grafning o‘rmon bo‘lishi uchun uning siklomatik soni nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir (2- natijaga qarang).

Grafning yagona siklga ega bo‘lishi uchun uning siklomatik soni birga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir. Qirralari soni uchlari sonidan kichik bo‘lmagan graf siklga egadir. Bu tasdiqlar ham 1- teoremaning natijalaridir.

3- misol. 3- shaklda tasvirlangan graf $(6,9)$-graf bo‘lib, uning bog‘lamlilik komponentalari soni birga teng. Bu grafning siklomatik sonini aniqlasak, $\lambda = 9 - 6 + 1 = 4$ bo‘ladi. Olib tashlangan qirralar 3- shaklda ingichka chiziqlar bilan ifodalangan.

Ilova 3

Mavzuni mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qanday grafga daraxt deyiladi?
2. O‘rmon deb nimaga aytiladi?
3. O‘rmon bilan daraxt bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?
4. Daraxtning uchlari va qirralari sonlari orasida qanday bog‘lanish bor?
5. Daraxtdan biror qirra olib tashlansa natijada qanday xossalarga ega bo‘lgan graf hosil bo‘ladi?
6. Daraxtning har bir qirrasi haqida nima deyish mumkin?
7. Daraxtdagi o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchini nechta oddiy zanjir bilan tutahtirish mumkin?
8. O‘rmondagi o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uch oddiy zanjir bilan tutahtirilsa natijada qanday graf hosil bo‘lishi mumkin?
9. Daraxtning qo‘shni bo‘lmagan ikkita uchini qirra bilan tutashtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘ladi?
10. O‘rmondagi qo‘shni bo‘lmagan ikkita uchni qirra bilan tutashtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘ladi?

15-AMALIY MASHG'ULOT

Tarmoqlar. Fort algoritmi

Amaliy mashg'ulotda ta'lim texnologiyasi modeli

Vaqt: 80 minut	Talabalar soni: 18 ta
O'quv mashg'ulotining tuzulishi	4. Tarmoq tushunchasi 5. Tarmoqdagi oqimlar 6. Ford algoritmi
Mashg'ulot maqsadi:	Talabalarda tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar va ford algoritmi haqida bilim va ko'nikmalar hosil qilishga oid masalalar yechiladi.
Ta'lim usullari	Og'zaki so'rov: tezkor so'rov, test, bilmayman, bilishni hohlayman, bildim
Ta'limni shakllantirish shakli	Kichik guruh, jamoaviy, yakka tartibda
Ta'lim vositalari	Slaydlar, proyektor animatsiyalar, elektron ma'ruza.

15- amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ishlash bosqichlari, vaqti	Faoliyat	
	Ishlar bosqichlari	Natijasi
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. tashkiliy qism: auditoriyani tayyorgarligi talabalarning davomati tekshiriladi. 1.2. o'quv mashg'ulotini mavzusini, maqsadini va rejalashtirilayotgan o'quv natijalarni e'lon qiladi.	Tinglaydilar, aniqlashtirishadi, svollar berishadi.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	36. Tarmoq tushunchasi haqida umumiy ma'lumotlarga oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 37. Tarmoqdagi oqimlar oid algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi. 38. Ford algoritmi aniqlovchi algoritm (umumiy qonuniyat) ishlab chiqiladi.	Savollarga javob beradilar Shu mavzu bo'yicha o'z fikrlarini beradilar. Oddiy misolni yechish bo'yicha fikr bildiradilar, Munozara qiladilar, tahlil qiladilar, xulosa chiqaradilar
3-bosqich. Yakuniy (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakun qiladi, qilingan ishlarni kelgusida kasbiy faoliyatlarida ahamiyatga ega ekanligi muhimligiga talabalar e'tiborini qaratadi 3.2. Talabalar bilimini tezkor savol-javob orqali baholaydi (Ilova 1,2). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriq beradi va	O'z-o'zini o'zaro baholashni o'tkazadilar. Savol beradilar Topshiriqni yozadilar

	uning baholash mezonlari bilan tanishtiradi (Ilova 3,4).	

Ilova 1

Talabalar bilimini faollashtirish uchun tezkor savollar

1. Tarmoq tushunchasi haqida ayting?
2. Tarmoqning uchlari deb nimaga aytiladi?
3. Tarmoqning qutblari deb nimaga aytiladi?
4. Giprgraf deganda nimani tushunasiz?
5. Ford algoritmi haqida tushuncha bering

Monitoring va baholash

Og'zaki so'rov, tezkor savol javob va klasterni to'ldirishiga qarab 1-5 ballgacha baholanadi

Ilova 2

Talabalar bilimini baholash uchun tezkor savollar

1. Tarmoqdagi oqimlar haqida tushuncha bering?
2. Tarmoqda yunalgan oqim deb nimaga aytiladi?
3. Tarmoqda oqimning miqdori deb nimaga aytiladi?
4. Tarmoqda maksimal oqim deb nimaga aytiladi?

Asosiy qism

1. Tarmoq tushunchasi. Graflar nazariyasida hozirgacha ba'zi iboralar bo'yicha umumiy kelishuv qaror topmaganligini qayd qilgan edik. Bu fikr graflar nazariyasining **tarmoq** va tarmoqqa oid tushunchalari bilan ish ko'rganda yaqqol namoyan bo'ladi. Ba'zan, "tarmoq" iborasi o'rniga "to'r" iborasini ham qo'llaydilar. Masalan, S.V. Yablonskiyning 1986 yilda bosilib chiqqan Введение в дискретную математику (Diskret matematikaga kirish) nomli o'quv qo'llanmasida ([1]da) graf tushunchasi umumlashtirilib, tarmoqning quyidagi ta'rifi berilgan va "tarmoq" tushunchasi xususida fikrlar ham bayon qilingan.

"Berilgan $M=\{a_1,a_2,...\}$ to'plam va har bir E_i elementi M dan olingan $R=\{E_0;E_1,E_2,...\}$ majmuani (naborni) **tarmoq** deb ataymiz va $M(E_0;E_1,E_2,...)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $E_i=(a_{v_1(i)},a_{v_2(i)},...)$. M to'plamning ob'yektlari tarmoqning **uchlari** deb, E_0 majmuadagi ob'yektlar esa – **tarmoqning qutblari** deb ataladi".

Yuqorida eslatilgan kitobda ta'kidlanishicha: "Adabiyotda tarmoq tushunchasiga yaqin tushunchalar ham uchraydi, masalan, "**blok-sxema**" tushunchasi, "**gipergraf**" tushunchasi. Blok-sxema tushunchasi tarmoq tushunchasidan oldin paydo bo'lgan, gipergraf tushunchasi esa – keyinroq".

Gipergraf tushunchasi – bu graf tushunchasining shunday umumlashmasiki, bunda qirralar na faqat ikki elementli bo‘lishlari, ular uchlar to‘plamining istalgan qism to‘plamlari bo‘lishlari ham mumkin.

Graf tushunchasining turli umumlashmalarini ma’qullagan hamda bunday umumlashmalar turli masalarni hal etishda zarur qurol sifatida ishlatilishini ta’kidlagan holda [10] kitobdagi tarmoq tushunchasining bir-biriga ekvivalent bo‘lgan quyidagi ikki ta’rifini keltiramiz:

1) har bir a yoyiga $\psi(a)$ manfiymas haqiqiy son mos qo‘yilgan N orgraf **tarmoq** deb ataladi;

2) **tarmoq** deb shunday (D,ψ) juftlikka aytiladiki, bunda $D=(V,U)$ – orgraf, ψ esa D orgrafning yoylari to‘plamini manfiymas haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya.

2. Tarmoqdagi oqimlar. Graflar (orgraflar) bilan bog‘liq ko‘plab tushunchalarni osonlik bilan tarmoqlar uchun ko‘chirish mumkin.

$T=(G,b)$ tarmoq berilgan bo‘lsin, bu yerda $G=(V,U)$ – bog‘lamli graf (yoki orgraf, yo bo‘lmasa, aralash graf), b esa G grafning yoylarini manfiymas b_{ij} ($v_i,v_j \in V$) haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya. G grafda sirtmoq va karrali qirra va/yoki yoylar bo‘lmasin deb faraz qilamiz. Ikkita v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi oriyentirlanmagan yoyni (qirrani) ikkita oriyentirlangan yoylarga almashtirish mumkin deb hisoblaymiz. Shuning uchun bundan buyon G grafni orgraf deb hisoblash mumkin.

Ta’kidlaymizki, “tarmoq” tushunchasi har bir yoyga bir necha sonlarni mos qo‘yish imkoniyatini beradi, grafda (orgrafda) esa yoy faqatgina mos uchlarning tutashtirilgan yoki tutashtirilmaganligini aniqlaydi, xolos. Har bir (v_i,v_j) yoyga manfiymas b_{ij} sonni mos qo‘yib, bu sonni **yoyning o‘tkazish qobiliyati** deb ataymiz. Tarmoqning har bir $v \in V$ uchi uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz: v **uchning chiqish yarim darajasi** $\vec{\rho}(v)$ – bu v uchdan chiquvchi barcha yoylar o‘tkazish qobiliyatlari yig‘indisi, v **uchning kirish yarim darajasi** $\overleftarrow{\rho}(v)$ – bu v uchga kiruvchi barcha yoylar o‘tkazish qobiliyatlari yig‘indisi.

“Ko‘rishishlar” haqidagi lemma bu yerda quyidagicha ifodalanadi: *tarmoqning barcha uchlari chiqish yarim darajalari yig‘indisi ularning kirish yarim darajalari yig‘indisiga tengdir*.

Grafning uchlari orasida kirish yarim darajalari nolga teng bo‘lganlari guruhini ajratamiz. Bu guruhga tegishli uchlarning har biri **manba** deb ataladi. Shunga o‘xshash, orgrafning chiqish yarim darajalari nolga teng bo‘lgan uchlari guruhini ham ajratish mumkin. Bu guguhga tegishli har bir uch **o‘pqon** deb ataladi.

Faraz qilaylik, G orgraf faqat bitta v_s manbaga va faqat bitta v_t o‘pqonga ega bo‘lsin. Bir necha manba va/yoki o‘pqonga ega bo‘lgan tarmoqning orgrafiga yangi elementlar qo‘shib olish yo‘li bilan yuqoridagi xususiy holga osonlik bilan keltiriladi.

G orgrafning har bir (v_i, v_j) yoyiga manfiymas x_{ij} sonlar mos qo‘yilgan bo‘lib, biror $p \geq 0$ uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $$\sum_{(v_i,v_k)\in U} x_{ik} - \sum_{(v_k,v_j)\in U} x_{kj} = \begin{cases} -p, \text{ agar } k = s \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } k \neq s \text{ va } k \neq t \text{ bo'lsa,} \\ p, \text{ agar } k = t \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

2) G orgrafda mavjud barcha (v_i, v_j) yoylar uchun $0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}$.

Bu shartlar bajarilganda $X = \{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U\}$ to‘plamga T tarmoqdagi v_s manbadan v_t o‘pqonga yo‘nalgan **oqim** deb, p miqdorga esa, bu X **oqimning miqdori** deb ataladi. 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi har bir x_{ij} songa (v_i, v_j) **yoy bo‘ylab oqim** yoki **yoy oqimi** deyiladi.

Yuqoridagi 1) shartga ko‘ra manba va o‘pqondan farqli istalgan uchga “kiruvchi” oqim shu uchdan “chiquvchi” oqimga tengdir, 2) shartga ko‘ra esa, istalgan yoy bo‘ylab oqim miqdori shu yoyning o‘tkashish qobiliyatidan oshmaydi. 1) shartdan ko‘rinib turibdiki, manbaga insident yoylar bo‘yicha oqimlar yig‘indisi o‘pqonga insident yoylar bo‘yicha oqimlar yig‘indisiga tengdir: $\sum_{(v_s,v_j)\in U} x_{sj} = \sum_{(v_i,v_t)\in U} x_{it} = p$

.

1- misol. 1- shaklda v_0 manba va v_5 o‘pqoni bo‘lgan $T = (G, b)$ tarmoq tasvirlangan bo‘lib, uning yoylari yoniga mos o‘tkazish qobiliyatlari yozilgan, bunda $G = (V, U)$,

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

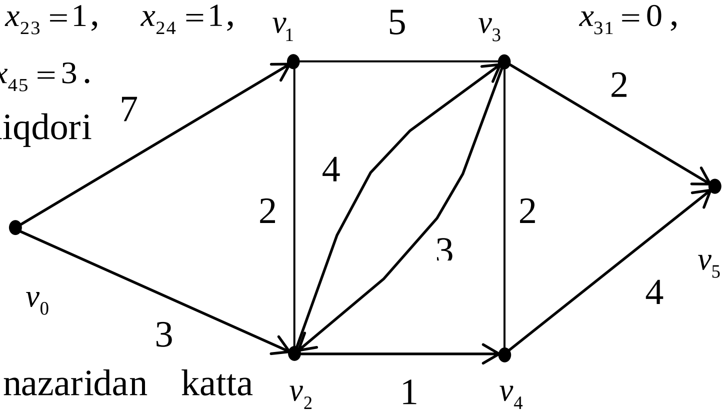
$$U = \{(\overrightarrow{v_0, v_1}), (\overrightarrow{v_0, v_2}), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (\overrightarrow{v_2, v_3}),$$
$$(\overleftarrow{v_2, v_3}), (\overrightarrow{v_2, v_4}), (v_3, v_4), (\overrightarrow{v_3, v_5}), (\overrightarrow{v_4, v_5})\}$$

Bu tarmoq uchun $b_{01} = 7$, $b_{02} = 3$, $b_{12} = 2$, $b_{13} = 5$, $b_{21} = 2$, $b_{23} = 4$, $b_{24} = 1$, $b_{31} = 5$, $b_{32} = 3$, $b_{34} = 2$, $b_{35} = 2$, $b_{43} = 2$, $b_{45} = 4$ ekanligi shakldan ko‘rinib turibdi.

Tarmoqning har bir uchi uchun chiqish yarim darajalari va kirish yarim darajalarini aniqlaymiz: $\vec{\rho}(v_0) = 10$, $\vec{\rho}(v_1) = 7$, $\vec{\rho}(v_2) = 7$, $\vec{\rho}(v_3) = 12$, $\vec{\rho}(v_4) = 6$, $\vec{\rho}(v_5) = 0$, $\overleftarrow{\rho}(v_0) = 0$, $\overleftarrow{\rho}(v_1) = 14$, $\overleftarrow{\rho}(v_2) = 8$, $\overleftarrow{\rho}(v_3) = 11$, $\overleftarrow{\rho}(v_4) = 3$, $\overleftarrow{\rho}(v_5) = 6$.

Berilgan T tarmoq orqali v_0 manbadan v_5 o‘pqonga 4 kattalikka ega bo‘lgan X^1 oqimni quyidagi sonlar to‘plami bilan ifodalash mumkin: $x_{01} = 2$,

$x_{02}=2$, $x_{12}=0$, $x_{13}=2$, $x_{21}=0$, $x_{23}=1$, $x_{24}=1$, $x_{31}=0$, $x_{32}=0$, $x_{34}=2$, $x_{35}=1$, $x_{43}=0$, $x_{45}=3$.



Qaralayotgan X^1 oqimning miqdori $p_1=x_{01}+x_{02}=x_{35}+x_{45}=4$. ■

Tarmoq bo‘ylab o‘tkazish mumkin bo‘lgan oqimlar orasida miqdori eng katta (maksimal) oqimni topish amaliyot nuq-tai nazaridan katta ahamiyatga egadir. Bunday oqimlar **maksimal 1- oqimlar** deb ataladi. 1- misolda keltirilgan oqim maksimal oqim emas, chunki berilgan tarmoq uchun miqdori 5 bo‘lgan oqim bor (ushbu paragrafning oxiriga qarang).

Albatta, umumiy holda, tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo‘lishi mumkin.

Maksimal oqimni o‘rganishda quyidagi tushunchalarni kiritish maqsadga muvofiqdir. **To‘yingan yoy** – bu yoy bo‘ylab oqim miqdori uning o‘tkazish qobiliyatiga teng, **to‘yinmagan yoy** – bu yoy bo‘ylab oqim miqdori uning o‘tkazish qobiliyatidan kichik.

2- misol. 1- misolda qaralgan tarmoq uchun aniqlangan X^1 oqimda $x_{01}=2<b_{01}=7$ va $x_{24}=1=b_{24}$ bo‘lgani uchun (v_0,v_1) to‘yinmagan, (v_2,v_4) esa to‘yingan yoylardir. ■

Tarmoqdagi oqimlarni o‘rganishda **zanjir** tushunchasi muhim rol o‘ynaydi. Bu yerda zanjir deganda tarmoqdagi yo‘nalishi e’tiborga olinmasdan bir-biriga ulangan yoylar ketma-ketligini tushunamiz. Biror zanjirga tegishli yoyning yo‘nalishi zanjirdagi uchlar ketma-ketligini o‘tish yo‘nalishiga mos tushsa, bu yoyni **to‘g‘ri yoy** deb, aks holda esa, uni **teskari yoy** deb ataymiz.

Tarmoqdagi oqimlarni tadqiq qilganda **kesim** tushunchasi ham muhim hisoblanadi. T tarmoqning G orgrafi uchlari to‘plami V ni o‘zaro kesishmaydigan hamda har biri bo‘sh bo‘lmagan ikkita R va $\overline{R}$ qism to‘plamlarga ajratamiz, ya’ni $V=R\bigcup\overline{R}$, $R\bigcap\overline{R}=\varnothing$, $R\neq\varnothing$ va $\overline{R}\neq\varnothing$.

Boshlang‘ich uchi R to‘plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha yoylar to‘plamini **kesim** deb ataymiz. Kesimni $(R,\overline{R})$ bilan belgilaymiz.

Agar $(R,\overline{R})$ kesim bo‘lib, v_s manba R to‘plamga, v_t o‘pqon esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lsa, u holda $(R,\overline{R})$ga v_s **manbani** v_t **o‘pqondan ajratuvchi** (yoki **ayiruvchi**) **kesim** deb ataladi.

Har bir kesimga qiymati kesimni tashkil etuvchi barcha yoylar o‘tkazish qobiliyatlari yig‘indisiga teng bo‘lgan va **kesimning o‘tkazish qobiliyati** (yoki **miqdori**) deb ataluvchi $b(R,\overline{R})$ son mos qo‘yilishi mumkin:

$$b(R,\overline{R}) = \sum_{v_i \in R, v_j \in \overline{R}} b_{ij} \ .$$

Barcha mumkin bo‘lgan kesimlar ichida o‘tkazish qobiliyati eng kichik bo‘lganini **minimal kesim** deb ataymiz.

Tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo‘lishi mumkin ekanligini yuqorida ta’kidlagan edik. Xuddi shunga o‘xshash, tarmoqda bir necha turli minimal kesimlar bo‘lishi ham mumkin.

Ravshanki, agar tarmoq boshlang‘ich uchi v_s manbada va oxirgi uchi v_t o‘pqonda bo‘lgan zanjirdangina iborat bo‘lsa, bu tarmoq bo‘ylab o‘tkazish mumkin bo‘lgan maksimal oqim qiymati shu zanjirni tashkil etuvchi yoylarning o‘tkazish qobiliyatlarining minimal qiymati bilan chegaralangan bo‘ladi. Shu tufayli, bu yerda, minimal o‘tkazish qobiliyatiga ega bo‘lgan yoy **tarmoqning** (**zanjirning**) “**tor joyi**” deb atalishi joyizdir.

Tarmoqdagi v_s manbani v_t o‘pqondan ajratuvchi $(R,\overline{R})$ kesim iborasi istalgan tarmoqda “tor joy” iborasining o‘xshashi sifatida qaralishi mumkin.

Faraz qilaylik, $X = \{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U\}$ – T tarmoqdagi qandaydir oqim bo‘lsin. Bu tarmoqdagi v_s uchdan v_t uchga yo‘nalgan biror μ **yo‘l bo‘ylab oqim** shu yo‘l yoylaridagi oqimlarning eng kichik qiymati sifatida aniqlanadi:

$$p(\mu, X) = \min_{(v_i, v_j) \in \mu} x_{ij} \ .$$

Tabiiyki, tarmoqdagi X oqimning miqdori $p(X)$ uchun

$$p(X) = \sum_{\mu \in M} p(\mu, X)$$

tenglik o‘rinlidir, bu yerda M – G orgrafdagi v_s uchdan v_t uchga yo‘nalgan barcha yo‘llar to‘plamidan iborat.

Kesimning ta’rifidan ko‘rinib turibdiki, v_s uchdan v_t uchga olib boruvchi ixtiyoriy μ yo‘l shu v_s va v_t uchlarni ajratuvchi har qanday $(R,\overline{R})$ kesimning hech bo‘lmaganda bitta yoyini o‘zida saqlaydi. Shuning uchun, agar ixtiyoriy $(R,\overline{R})$ kesimning barcha yoylarini tarmoqdan olib tashlasak, u holda G orgrafda v_s uchdan v_t uchga boradigan birorta ham yo‘l(va, demak, oqim ham) mavjud bo‘lmaydi.

Demak, yuqorida aytilganlarni hisobga olib tarmoqdagi oqim miqdori $p(X)$ bilan ixtiyoriy $(R,\overline{R})$ kesimning o‘tkazish qobiliyati $b(R,\overline{R})$ uzviy bog‘langan degan xulosaga kelish mumkin. Bu bog‘lanish quyidagi teoremada o‘zining aniq ifodasini topgan.

1- teorema. $T=(G,b)$ tarmoqdagi ixtiyoriy X oqim miqdori $p(X)$ shu tarmoqdagi v_s manba va v_t o‘pqonni ajratuvchi har qanday $(R,\overline{R})$ kesimning o‘tkazish qobiliyatidan oshmaydi, ya’ni $p(X)\le b(R,\overline{R})$.

2- teorema (Ford-Falkerson). Istalgan tarmoqda manbadan o‘pqonga maksimal oqimning miqdori manbani o‘pqondan ajratuvchi minimal kesimning o‘tkazish qobiliyatiga teng.

3. Ford algoritmi. $T=(G,b)$ tarmoqni qaraymiz, bu yerda $G=(V,U)$ – orgraf, b esa G orgrafning yoylarini manfiymas b_{ij} $(v_i,v_j\in V)$ haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya.

G orgraf faqat bitta manbaga va faqat bitta o‘pqonga ega bo‘lsin deb faraz qilamiz. Maksimal oqim va minimal kesim haqidagi Ford-Falkerson teoremasining yuqorida keltirilgan isboti tarmoqdagi maksimal oqimni topish algoritmini tuzish nuqtai nazardan konstruktivdir.

T tarmoqning uchlariga, ya’ni V to‘plam elementlariga $0,1,2,...,m$ raqamlarni mos qo‘yib, tarmoqning manbasi 0 uch, o‘pqoni esa m uch bo‘lsin deb hisoblaymiz. Bu tarmoqda Ford tomonidan taklif etilgan maksimal oqimni topish algoritmi bilan tanishamiz. **Ford algoritmining** jadvallar bilan ish ko‘riladigan jarayoni dastlabki, umumiy (takrorlanuvchi) va yakuniy qadamlardan iborat bo‘lib, u quyida keltirilgan.

Dastlabki qadam. O‘lchamlari $(m+1)\times(m+1)$ bo‘lgan jadvalni quyidagicha tuzamiz. Agar (i,j) yoyning o‘tkazish qobiliyati b_{ij} noldan katta va unga simmetrik (j,i) yoyining o‘tkazish qobiliyati b_{ji} nolga teng bo‘lsa, u holda jadvalning (i,j) katagiga b_{ij} sonni, uning asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik (j,i) katagiga esa, nolni yozamiz. Agar $b_{ij}=b_{ji}=0$ bo‘lsa, u holda jadvalning (i,j) va (j,i) kataklari bo‘sh qoldiriladi.

Umumiy qadam. 1. Tarmoqning manbasidan o‘pqoniga o‘tkazish qobiliyati noldan katta bo‘lgan yo‘l izlaymiz. Buning uchun jadvalning tarmoqdagi 0 uchga mos keluvchi ustuniga “*” belgisini qo‘yamiz. Jadvalning 0 uchga mos satridan $b_{0j}>0$ $(j=\overline{1,m})$ elementlarni topib, bu elementlar joylashgan ustunlarni 0 raqami bilan belgilaymiz.

Natijada tarmoqning musbat o‘tkazish qobiliyatiga ega bo‘lgan barcha $(0,j)$ yoylari aniqlanadi. Bu yoylar manbadan o‘pqonga boruvchi yo‘lning dastlabki yoylaridir.

Belgiga ega ustunlar raqamlari bilan bir xil raqamli satrlarning har birini ketma-ket tekshirib chiqamiz. Tekshirish jarayonida har bir sunday satrda, masalan, jadvalning i uchga mos satrida belgiga ega bo‘lmagan ustunlarda $b_{ij}>0$

elementlarni izlaymiz va shunday element(lar) topilsa bu element(lar) joylashgan ustun(lar)ni tekshirilayotgan satr raqami (ya'ni i) bilan belgilaymiz.

Shu tarzda davom ettirilsa, natijada manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish qobiliyatli izlangan yo'lning navbatdagi yoylari bo'lib xizmat qilishi mumkin bo'lgan yoylar topilgan bo'ladi. Jadvaldagi belgiga ega ustunlar raqamlariga mos raqamli tarmoqning uchlariga to'gri keluvchi satrlarni tekshirish jarayonini quyidagi mumkin bo'lgan hollardan biri amalga oshguncha davom ettiramiz:

a) jadvalning o'pqonga mos ustuni belgilandi;

b) jadvalning yangi ustunlarini (shu jumladan, o'pqonga mos ustunini ham) belgilash imkoniyati yo'q.

Agar a) hol ro'y bersa, u holda tarmoqda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan biror μ yo'l bor. Bu yo'l quyidagicha aniqlanadi.

Jadvalning o'pqonga mos m ustunining belgisi k bo'lsin deb faraz qilaylik. Demak, μ yo'lda m uchdan oldingi uch k uchdir. Jadvalning k uchga mos satri va m uchga mos ustuni kesishgan (k,m) katagidagi b_{km} elementiga "–" belgisi (b_{km}^{-}), shu katakka asosiy diagonalga nisbatan simmetrik hisoblangan (m,k) katakdagi b_{km} elementga esa "+" belgisi (b_{mk}^{+}) qo'yamiz.

Endi jadvalning k uchga mos ustuni belgisi r raqami bo'lsin deb faraz qilamiz. Jadvaldagi b_{mk}^{+} elementdan jadvalning k uchga mos ustuni bo'ylab harakatlanib, uning r uchga mos satriga o'tamiz va b_{rk} elementga "–" belgisi, asosiy diagonalga nisbatan simmetrik b_{kr} elementga esa "+" belgisi qo'yamiz. "+" va "–" belgilari qo'yish jarayonini manbaga mos 0 satrga kelib undagi mos elementga "–" belgisi, simmetrik elementga esa "+" belgisi qo'yguncha davom ettiramiz.

Umumiy qadamning 2- bandiga o'tamiz.

Agar b) hol bajarilsa, bu holda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan boshqa yo'l yo'q. Shuning uchun umumiy qadamni bajarish jarayoni tugaydi.

Jadvalning belgilangan ustunlariga mos orgrafning uchlari minimal o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan $(R,\overline{R})$ kesim uchun R to'plamni tashkil etadi, orgrafning qolgan uchlari esa $\overline{R}$ to'plamga tegishlidir. $i \in R$ uchdan chiquvchi va $j \in \overline{R}$ uchga kiruvchi barcha (i,j) yoylar to'plami berilgan tarmoq uchun minimal kesimdir. Yakuniy qadamga o'tamiz.

2. Topilgan μ yo‘l o‘tkazish qobiliyatining θ qiymatini topamiz. Tabiiyki, θ son μ yo‘lni tashkil etuvchi yoylar o‘tkazish qobiliyatlarining eng kichigiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\theta = \min_{(i,j)\in\mu} b_{ij}^{-} .$$

Umumiy qadamning 3- bandiga o‘tamiz.

3. Topilgan μ yo‘lga tegishli yoylarning va ularga simmetrik yoylarning qolgan o‘tkazish qobiliyatlarini aniqlaymiz. Buning uchun jadvalning “–” belgisi bo‘lgan b_{ij}^{-} elementlaridan θ sonni ayirib, “+” belgili b_{ij}^{+} elementlariga esa θ sonni qo‘shib, natijalarni jadvaldagi mos o‘rinlariga yozamiz. Jadvalning “–” yoki “+” belgisi bo‘lmagan elementlari ozgarmaydi. Jadvaldagi barcha belgilarni olib tashlaymiz. Natijada o‘tkazish qobiliyatlari o‘zgargan tarmoqqa mos va dastlabki jadvalga o‘xshash bo‘lgan yangi jadvalni hosil qilamiz. Umumiy qadamning 1- bandiga o‘tamiz.

Yakuniy qadam. Dastlabki jadvalning elementlaridan oxirgi qadamda hosil bo‘lgan jadvalning mos elementlarini ayi-ramiz. Natijada musbat elementlari (i, j) yoyning mos x_{ij} oqim miqdorlariga teng bo‘lgan, elementlari esa asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik joylashgan oxirgi jadvalni hosil qilamiz. Tarmoqdagi maksimal oqim miqdori p oxirgi jadvalning manbaga mos satri yoki o‘pqonga mos ustuni elementlari yig‘indisiga, ya’ni

$$p = \sum_{j=1}^{m} x_{0j} = \sum_{i=0}^{m-1} x_{im} .$$

Bu maksimal oqim qiymatini umumiy qadamni bajarish jarayonlarida aniqlangan barcha θ sonlarni qo‘shib ham hosil qilish mumkin. ■

3- misol. 1- misolda qaralgan tarmoq uchun v_0 manbadan v_5 o‘pqonga maksimal oqimni topish uchun Ford algoritmini qo‘llaymiz. Ford algoritmining dastlabki qadami va umumiy qadamining 1- bandini bajarib 1- jadvalni hosil qilamiz.

Umumiy qadamning 2- bandini bajarsak, $\theta_1 = \min\{7, 5, 2\} = 2$ qiymatni topamiz. Endi umumiy qadam-ning 3- bandini bajarib 2- jadvalni va algoritmni qo‘llashda davom etib 3- va 4- jadvallarni navbatma-navbat tuzamiz:

– 2- jadval uchun $\theta_2 = \min\{3, 1, 4\} = 1$;

– 3- jadval uchun $\theta_3 = \min\{5, 3, 2, 3\} = 2$.

Demak, qaralayotgan tarmoqda quyida aniqlanuvchi 5 kattalikka ega oqim maksimal oqimdir: $x_{01} = 4$, $x_{02} = 1$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 4$, $x_{21} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 1$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 0$, $x_{34} = 2$, $x_{35} = 2$, $x_{43} = 0$, $x_{45} = 3$.

1- jadval

	(*) 0	(0) 1	(0) 2	(1) 3	(2) 4	(3) 5
0		7^{-}	3			
1	0^{+}		2	5^{-}		
2	0	2		4	1	
3		5^{+}	3		2	2^{-}
4			0	2		4
5				0^{+}	0	

2- jadval

	(*) 0	(0) 1	(0) 2	(1) 3	(2) 4	(4) 5
0		5	3^{-}			
1	2		2	3		
2	0^{+}	2		4	1^{-}	
3		7	3		2	0
4			0^{+}	2		4^{-}
5				2	0^{+}	

3- jadval

	(*) 0	(0) 1	(0) 2	(1) 3	(3) 4	(4) 5
0		5^{-}	2			
1	2^{+}		2	3^{-}		
2	1	2		4	0	
3		7^{+}	3		2^{-}	0
4			1	2^{+}		3^{-}
5				2	1^{+}	

4- jadval

	(*) 0	(0) 1	(0) 2	(1) 3	4	5
0		4	1			
1	−4		[illegible]	[illegible]		
2	−1	0		0	1	
3		−4	0		2	2
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

5- jadval

	0	1	2	3	4	5
0		3	2			
1	4		2	1		
2	1	2		4	0	
3		9	3		0	0
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Minimal kesim sifatida tarkibidagi R va $\bar{R}$ qism to'plamlari $R=\{0, 1, 2, 3\}$

va $\overline{R}=\{4, 5\}$ ko‘rinishda aniqlangan $(R,\overline{R})$ kesimni ko‘rsatish mumkin. Bu kesim $(2, 4)$, $(3, 4)$ va $(3, 5)$ yoylardan tashkil topishi ravshan

Ilova 3

Mavzuni mutahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Graf tushunchasi qanday umumlashtirilishi mumkin?
2. Tarmoqdagi oqim deganda nimani tushunasiz?
3. Yoyning o‘tkazish qobiliyati nima?
4. Graf uchlarining chiqish va kirish yarim darajalari deb nimaga aytiladi?
5. Tarmoqda manba va o‘pqon deganda nimani tushunasiz?
6. Yoy bo‘ylab oqim nima?
7. Tarmoqdagi oqim miqdori qanday aniqlanadi?
8. Tarmoqdagi maksimal oqim deganda nimani tushunasiz?
9. To‘yingan yoy bilan to‘yinmagan yoy bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?
10. To‘g‘ri yoy bilan teskari yoy orasida qanday farq bor?

MUSTAQIL ISH MAVZULARI, UNI TASHKIL ETISH VA BAJARISH BO'YICHA BA'ZI USLUBIY TAVSIYALAR

Mustaqil ishni tashkil etish va bajarish bo'yicha ba'zi uslubiy tavsiyalar

Nazariy mashg'ulotlarga tayyorgarlik bo'yicha tavsiyalar:

Bu jarayonga tayyorgarlik ko'rishda faqatgina ma'ruza materiallari bilan cheklanib qolmasdan, balki bir necha uslubiy qo'llanma va darsliklardan foydalanish lozim. Bu bir tomondan dars hajmining kamligi sababli ma'ruza darslarida yetkazishning imkoni bo'lmagan mavzularni to'ldirishga, ikkinchi tomondan esa chuqur bilim olish va masalalarni yechish ko'nikmalarni shakllantirishga yordam beradi. Bu o'z navbatida talabaning mustaqil bilim olishini, adabiyotlar bilan ishlash ko'nikmalarini shakllantiradi.

Amaliy mashg'ulotlariga tayyorgarlik bo'yicha tavsiyalar:

Talabaning nazariy ma'lumotlarni va umumiy fanni o'zlashtirish darajasi uning amaliy masalalarni, seminar mashg'uloti materiallarini bajarishi, masalalarni mustaqil yecha olishi, uy vazifalarini bajara olishi darajasi va samaradorligi bilan aniqlanadi. Shuning uchun talaba fanning har xil bo'limlaridagi tipik masalalarni mustaqil yechish ko'nikmalarini egallashi lozim. Bu jarayonda talaba o'rganilayotgan fanning ma'nosiga chuqurroq yetib borgan holda aniq amaliy masalalarni yechishda umumiy nazariy qonuniyatlarni qo'llay oladi. Buning uchun talaba amaliyot darslarida qiyinlik darajasi oshib boruvchi kamida 5-6 ta masalani yechishi zarur. Darsdan tashqari mustaqil ish va uy vazifasi sifatida talabaga o'rtacha qiyinlikdagi va uslubiy manbalardan foydalangan holda yechish mumkin bo'lgan masalalarni berish maqsadga muvofiq. Bunda o'tilgan nazariy ma'lumotlar va masalalar yechishning maxsus uslublaridan foydalanilishiga e'tibor berish kerak. Shunday qilib, talabani shu fanga kiruvchi har xil bo'limlarga oid masalalarni nazariy ma'lumotlarga tayanib yechishga o'rgatiladi. Bu jarayonda quyidagi uslubiy xarakterga ega qoidalarni e'tiborga olish maqsadga muvofiq:

- masalaning qo'yilishini qisqacha yozish, bunda berilgan ma'lumotlarning hammasini yagona birliklar sitemasiga o'tkazish, lozim bo'lganda ba'zi spravochnik o'zgarmaslarini kiritish;
- masalani yechish jarayonida qo'llaniladigan barcha zaruriy qonuniyatlarni o'zida aks ettiruvchi noma'lum miqdorlarni izlashning mantiqiy yo'llarini topgan holda masalani tahlil qilish;
- masala shartining grafik tasvirini (eskizini) chiza bilish;
- masalani yechishning ketma-ketligini izohlashlar bilan bajara olish;

- o’lchamlarni tekshira olish, berilgan ma’lumotlardan to’la foydalana olish, yechimning ishonchliligini baholay olish;
- masalaning yechimini yetarlicha aniqlik bilan hisoblay bilish;
- olingan sonli natijalarning mantiqiy maqsadini baholay bilish va ulardan zaruriy xulosalar chiqara bilish.

Talabaning amaliyot darslaridagi topshiriqlarni, uy vazifalarini va mustaqil ish topshiriqlarini bajarishini nazorat qilish va baholashning quyidagi uslubiga e’tiborni qaratish maqsadga muvofiq:

- uy vazifalarini tekshirish;
- nazorat topshiriqlarini bajarishini tekshirish;
- dars davomida o’zlashtirishini nazorat qilish;
- mustaqil ish topshiriqlari himoyasi.

Amaliyot mashg’uloti topshirig’ini bajarishdan kutiladigan natijalar:

- mavzu yuzasidan bilimlarni tizimlashtirish va mustahkamlash;
- amaliy masalalarni yechishda nazariy tushunchalardan foydalana bilish;
- masalani yechishning to’g’ri usulini tanlay bilish;
- masalani mustaqil yechish ko’nikmasini hosil qilish;
- masalaning yechimini mustaqil tahlil qila bilish.

Laboratoriya mashg’uloti topshirig’ini bajarishdan kutiladigan natijalar:

- mavzu yuzasidan bilimlarni tizimlashtirish va mustahkamlash;
- laboratoriya mashg’uloti topshirig’ini bajarishda nazariy tushunchalardan foydalana bilish;
- topshiriqni bajarishning to’g’ri usuli va ketma-ketligini tanlay bilish;
- topshiriqni mustaqil bajarish va uni amaliyotga qo’llay bilish ko’nikmasini hosil qilish;
- topshiriqning yechimini mustaqil tahlil qila bilish.

Seminar mashg’uloti va mustaqil ish topshirig’ini bajarishdan kutiladigan natijalar:

- mavzuga oid qo’shimcha materiallarni axborot manbalari (kutubxona, internet tarmog’i, vaqtli matbuot va hokazo) dan topish, konspektlashtirish va ularni o’rganish;
- mavzu yuzasidan matn bilan ishlash, bilimlarni tizimlashtirish va mustahkamlash;
- fikrlar ketma-ketligini tanlay bilish;
- o’z ustida malakaviy ishlashni o’rganib borish;
- nutqni rivojlantirish va eslab qolish qobiliyatini kuchaytirish;

- o’z fikri va guruh fikrini tahlil qilib, bir yechimga kelib, yakuniy xulosani bayon qilish;
- mavzuni hayotiy voqyealar bilan bog’lash;
- mustaqil tahlil va xulosalar chiqara bilish;
- pedagogik mahoratni shakllantirib borish.

Mustaqil ish turlari:

- *takrorlash va mashq qilish:* takrorlash; tahlil qilish; qayta ishlash; mustahkamlash; chuqurlashtirish; eslab qolish; ko’nikma hosil qilish; malakani shakllantirish;
- *yangi bilimlarni mustaqil o’zlashtirish:* yangi mavzular; axborot manbaini izlab topish va konspektlashtirish; mustaqil fikrlar tuzish;
- *ijodiy xarakterdagi ishlar:* muammoli vaziyatlarni aniqlash; test va topshiriq tuzish; slaydlar tayyorlash; mustaqil qaror qabul qilish; yangi usullar yaratishga intilish.

Mustaqil ta’limni tashkil qilishda foydalanadigan vositalar:

- nazariy mashg’ulotlarda foydalanadigan vositalar (darslik; o’quv qo’llanma; masala va mashq to’plami; diapozitivlar; lug’atlar; masalalar to’plami; magnit yozuv; video yozuv; o’rgatuvchi dasturlar; multimedia va hokazo);
- amaliy mashg’ulotlarda foydalaniladigan vositalar (yo’riqnomalar to’plami; tabiiy o’qitish vositalari; xarakatlanuvchi modellar; o’quv plakatlari; yo’riqnoma; texnologik xaritalar; modellar; elektron kitoblar; maketlar; testlar va hokazo).

Referat yozish bo’yicha qisqacha ko’rsatmalar:

- *Referat tayyorlashda hal etilishi nazarda tutiladigan vazifalar*: o’quv predmetning dolzarb nazariy masalalari bo’yicha bilimlarni chuqurlashtirish, talaba tomonidan mavzuga oid olingan nazariy bilimlarni ijodiy qo’llash ko’nikmalarini hosil qilish; tanlangan kasbiy sohada mavjud mahalliy va xorijiy tajribalarni mavjud sharoitlarda ularni amaliy jihatdan qo’llash imkoniyatlari va muammolarni o’zlashtirish; tanlangan mavzu bo’yicha har xil manbalarni (monografiyalar, davriy nashrlardagi ilmiy maqolalar va shu kabilar) o’rganish qobiliyatini takomillashtirish va ularning natijalari asosida tanqidiy yondashgan tarzda mustaqil holda materialni ifoda etish, ishonchli xulosa va takliflar qilish; yozma ko’rinishdagi ishlarni to’g’ri rasmiylashtirish ko’nikmalarini rivojlantirish.
- *Referat ustida ishlash tartibi*: mavzuni tanlash; mavzu bo’yicha asosiy manbalarni o’rganish; zaruriy materiallarni konspektlashtirish; tadqiqot rejasini tuzish; yig’ilgan materiallarni tartibga solish va yozish; foydalanilgan adabiyotlar ro’yxatini rasmiylashtirish; referatni rasmiylashtirish.
- *Referatni rasmiylashtirish tartibi*: A4 shakldagi qog’ozga 12-shrift, 1,5 interval, qog’ozning bir tomonida chapdan – 2,5 sm, o’ngdan – 1,5 sm, yuqori va

pastdan – 2 sm xoshiya qoldiriladi; matn sahifalariga tartib raqami beriladi, 1-titul varag'i, 2-reja, 3-betdan boshlab sahifalanadi; referat hajmi 15-20 betdan oshmasligi lozim.

- *Referat matnini rasmiylashtirish tartibi*: titul varag'i; ish rejasi; kirish; asosiy qism (kamida 3 ta banddan iborat bo'lishi lozim); xulosa; foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati; ilova (jadval, diagramma, grafik, rasm, sxema va hokazo).

Talabaning pedagogik mahoratini oshirishga oid ba'zi tavsiyalar

Ta'lim usullari:

- *an'anaviy usullar* (og'zaki, amaliy, ko'rgazmali, kitob bilan ishlash, video va audio usullar);
- *aniq maqsadli usullar* (bilimlarni egallash; malaka va ko'nikmalarni shakllantirish; bilimlarni qo'llash; ijodiy faoliyat; mustahkamlash; bilim, malaka va ko'nikmalarni tekshirish);
- *idrok etish-bilish faoliyati xarakteriga ko'ra usullar* (tushuntirish – illyustrativ (axborot – reseptiv); reproduktiv; muammonli bayon qilish; qisman ijodiy (evristik); tadqiqiy);
- *didaktik maqsadli yo'naltirilgan usullar* (ilk bor bilimlarni o'zlashtirish; egallangan bilimlarni mustahkamlash va takomillashtirish).

Yangi pedagogik va innovasion texnologiyalar uslublari:

"Ma'ruza", "Tanishuv", "Tushunchalar tahlili", "Zinama-zina", "Charxpalak", "Bumerang", "Rezyume", "Muammo", "Labirint", "Blis-so'rov", "Fikr, sabab, misol, umumlashtirish (FSMU)", "Skarabey", "Yelpig'ich", "Muloqot", "Yozma bahs", "Kuzatish, bahslashish, ishontirish (KBI)", "Munosabat", "Tashviqot guruhi", "Amaliyotda jamoaviy ijodiy ishlar", "Ssenariy (sahna)", "Ishontirish maktabi", "Kelishuv va ziddiyat", "Uchlik - samarali, axloqiy, nazokatli (SAN)", "Tushuntiruvchi, talqin qiluvchi (germenevtik)", "Aniq vaziyat, hodisa (keys-stadi)", "Haqiqiy vaziyatlarni o'yin qilib ko'rish (simulyasiya)", "Taqdimot", "Olmos", "Jadvallar", "Kungaboqar", "3x4", "6x6x6", "Muzyorar", "Yumaloqlangan qor", "Fikrlar hujumi", "Aqliy hujum", "Kichik guruhlarda ishlash", "Insert", "Tarmoqlar (klaster)", "Bahs-munozara", "Davra suhbati", "Davra stoli", "Kim ko'p, kim tezroq", "Kim chaqqon, kim topqir", "Kuchsiz halqa", "Loyiha", "To'rt pog'onali", "So'qrot suhbati", "Tanqid qilishni o'rganing", "Iyerarxiya", "Boshqaruv", "Murabbiy va jamoa" va hokazo.

Ta'lim vositalari:

- *matnli vositalar* (o'quv dastur; darslik; o'quv qo'llanma; elektron darsliklar va qo'llanmalar; uslubiy qo'llanma va ko'rsatmalar; tarqatma materiallar; imtihon va nazorat variantlari; testlar va hokazo);

- *tasvirli vositalar* (fotosuratlar; eskiz; chizma; sxema; ramziy tasvir; reja jadvallar; simvollar; diagrammalar; grafiklar; slaydlar va hokazo);
- *audio-video vositalar* (videofilmlar; kompakt disklar; audio va video kassetalar; tasvir va matnni yozish va saqlash; doskalar (oq doska, flipchart doska, pinbord doska); videomagnitafon; kamera; kompyuter va hokazo);
- *modelli vositalar* (asbob-uskunalar; stanoklar; yarim tayyor va tayyor mahsulotlar).

Didaktik tamoyillar tizimi: ilmiylik, qulaylik, izchillik, uzviylik, nazariyaning amaliyot bilan bog'liqligi, onglilik, faollik va mustaqillik, ko'rgazmalilik, mustahkamlik, guruh qilib o'qitish hamda unda individual yondashishni qo'shib olib borish, o'qitishning tarbiyalovchi, rivojlantiruvchi va takomillashtiruvchi xarakteri, o'qitishning kasbiy yo'naltirilganligi.

Ta'limda o'quv-tarbiyaviy jarayonni tashkil etish shakllari: dars, fan, texnika to'garaklari, o'quvchilar ilmiy uyushmalari, sayohatlar.

Tarbiya usullari: ishontirish; ijobiy namuna; mashq qilish; talablar; xulqi ustidan nazorat; faoliyatning boshqa ko'rinishlariga o'tish.

Dars turlari:

- *an'anaviy* (standart, uning tuzilishi: so'rash, tushuntirish, mustahkamlash, uyga vazifa berish),
- *zamonaviy* (uning tuzilishi: didaktik (asosiy), mantiqiy - psixologik, motivlangan va uslubiy);
- *noan'anaviy* (nostandart), uning turlari:
  - muammoli;
  - texnologik;
  - virtual;
  - musobaqa va o'yin (tanlov, turnir, estafeta, duel, KVN, tadbirli, rolli (rassom, loyihachi, bezatuvchi, muharrir, rejisser va hokazo), krossvord, viktorina);
  - ijtimoiy amaliyotga ma'lum bo'lmagan ish shakllari, janrlari va uslublariga asoslangan (tadqiq etish, ixtirochilik, birlamchi manbalar tahlili, intervyu, reportaj, taqriz);
  - muloqotning og'zaki shaklini eslatuvchi (matbuot anjumani, auksion, benefis, miting, vaqti chegaralangan munozara, panorama, teleko'prik, bildirgi, muloqot, "jonli gazeta", og'zaki jurnal);
  - o'quv materialini noan'anaviy tashkil etishga asoslangan (donolik, ochiq tan olish, "dublyor harakat boshlaydi");
  - hayoliylashgan (ertak, sovg'a, XXI asr darslari);

- muassasa va tashkilotlar faoliyatiga o'xshash asoslangan (sud, tergov, tribunal, patent byurosi, ilmiy yoki muharrirlik kengashi va h.k.).

Dars ko'rinishlari: ma'ruza, seminar va amaliy mashg'ulotlar, laboratoriya mashg'ulotlari, o'quv anjumanlari, o'quv-seminar, suhbat, kinodars, kompyuter mashg'ulotlari, mashqlar, maslahatlar, ekskursiya, ekspedisiya, o'quv ishlab chiqarish va pedagogik amaliyoti, kurs, loyiha va bitiruv malakaviy ishlari, talabalarning mustaqil tahsili va hokazo.

Darsning asosiy tarkibiy elementlari: tashkiliy qism; uyga berilgan yozma vazifalarni tekshirish; talabalar bilimini og'zaki tekshirish (yoki so'rash); yangi materiallarni tushuntirish; yangi materiallarni mustahkamlash; uyga vazifa berish; darsni uyushqoqlik bilan yakunlash.

Dars tahlilining asosiy tarkibiy qismlari: o'qituvchining darsga tayyorgarlik darajasi, darsning maqsad va vazifalari, tashkiliy ishlar, didaktik, uslubiy, metodologik, psixologik, pedagogik, o'quvchilar bilan hamkorlikda ishlash va yakuniy tahlillar.

Darsga kirgan o'qituvchining qo'lida bo'lishi lozim: guruh jurnali, fan o'quv dasturi, kalendar-mavzu rejasi, dars texnologik xaritasi, o'quv-uslubiy materiallar.

O'qituvchining darsga kirishdan oldin o'ziga qo'yadigan savoli: nega, nimani va qanday o'qitaman?

Didaktik vositalar:

- *jixozlar va uskunalar, moslamalar*: videoproyektor; elektoron doska; kodoskop;
- *video-audio uskunalar*: videokamera;
- *kompyuter va multimediali vosita*: kompyuter, videoglazok; sab-bufer.

Mustaqil ish mavzulari

1. To’plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari.
2. To’plamlar ustida amallar.
3. To’plamlar algebrasi.
4. Kortej tushunchasi.
5. To’plamlarning Dekart ko’paytmasi va u bilan bog’liq ba’zi amallar.
6. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar.
7. Kombinatorikada ko’p qo’llaniladigan usul va amallar.
8. Bo’laklashlarning xossalari.
9. Hosil qiluvchi funksiyalar ta’rifi va ularning oddiy xossalari.
10. Grafning metrik xarakteristikalari.
11. Minimal uzunlikka ega yo’l haqidagi masala.
12. Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar.
13. Grafning siklomatik soni.
14. Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar.
15. Ford algoritmi.

BITIRUV MALAKAVIY ISHLAR MAVZULARI BANKI VA ULARNI BAJARISHGA OID USLUBIY TAVSIYALAR

“Amaliy masalalarni matematik modellashtirish” fanidan bitiruv malakaviy ishlari mavzulari banki

1. Kombinatorika masalalarini yechishning algoritmlarini namoyish qilish dasturiy ta’minotini yaratish.
2. Takrorli bo’lmagan kombinatsiyalar (o’rin almashtirishla, o’rinlashtirishlar va guruhlashlar)ni namoyish qilish dasturiy ta’minotini yaratish.
3. Takrorli kombinatsiyalar (o’rin almashtirishla, o’rinlashtirishlar va guruhlashlar)ni namoyish qilish dasturiy ta’minotini yaratish.
4. Asosiy kombinatsiyalar (o’rin almashtirishla, o’rinlashtirishlar va guruhlashlar)ni namoyish qilish bo’yicha virtual laboratoriya yaratish.
5. Ekstremal masalalarni yechishda graflar nazariyasi usullaridan foydalanish jarayonini namoyish qilish.
6. Iqtisodiy masalalarni yechishda graflar nazariyasi usullaridan foydalanish jarayonini namoyish qilish.
7. Kombinatorikaning asosiy kombinatsiyalarini tavsiflovchi dasturiy taminot yaratish.
8. Muayan ob’yektlarning graf modelini hosil qilish va ularni tahlil qilishning dasturiy vositalarini yaratish.

Bitiruv malakaviy ishlarni bajarishga oid uslubiy tavsiyalar

A.Jumabayev, F.X.Tuxvatullin, A.A.Yakubov Bakalavrlik bitiruv malakaviy ishni bajarish, rasmiylashtirish va himoya qilish. Uslubiy qo‘llanma – Tuzatilgan 2-nashri. – Samarqand: SamDU nashri, 2011 – 40 bet (Ushbu uslubiy qo’llanma quyida qisqartirib keltirilmoqda).

1. Bitiruv malakaviy ishni bajarishning maqsad va vazifalari

Bitiruv malakaviy ish (BMI) ni bajarish oliy ta’lim muassasasi bakalavriatida talabalarni o‘qitishning yakuniy bosqichi bo‘lib, uning maqsad va vazifalari quyidagilardan iborat: ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha nazariy va amaliy bilimlarni mustahkamlash va kengaytirish, olingan bilimlarni muayyan ilmiy, texnikaviy, ishlab chiqarish, iqtisodiy, ijtimoiy, madaniy masalalarni hal etishda qo‘llash; ijodiy ishlash, hal etilayotgan masalaning (muammoning) qo‘yilish jarayonidan boshlab, uni to‘la nihoyasiga yetkazish bo‘yicha qaror qabul qilishda mas’uliyatni his etishga o‘rgatish; zamonaviy ishlab chiqarish, iqtisodiyot, texnika va madaniyatning rivojlanishi sharoitida talabalarni mustaqil ishlashga tayyorligini ta’minlash.

2. Bitiruv malakaviy ishlarning mavzusi

BMIlar mavzusi muammoning zamonaviy holatini va iqtisodiyot, ishlab chiqarish, texnika, ijtimoiy sohalar, fan, ta’lim va madaniyatning istiqboliy rivojlanishini aks ettirishi kerak.

BMIlar mavzusi mutaxassis chiqaruvchi kafedra tomonidan belgilanadi va oliy ta’lim muassasasi yoki fakultetning Ilmiy kengashi tomonidan tasdiqlanadi hamda har o‘quv yili boshida qayta ko‘rib chiqiladi.

BMIlar mavzusining yillik ro‘yxati bitiruv amaliyoti boshlanishiga qadar yoki bitiruv kursining boshida e’lon qilinadi.

Talabalarga (reytinglari bo‘yicha kamayish tartibida) BMIlarning mavzularini tanlash huquqi beriladi. Talaba yoki talabaning o‘qishi uchun to‘lov-kontrakt mablag’ini to‘layotgan buyurmachi zaruriy asoslar bilan BMIlar mavzusi bo‘yicha o‘z variantlarini taklif etishlari mumkin.

BMI mavzusi va rahbarni talabaga biriktirish kafedraning taqdimnomasi bo‘yicha oliy ta’lim muassasasi rektori bo‘yrug’i bilan rasmiylashtiriladi.

BMI rahbari talabaga mavzuga tegishli materiallarni to‘plash bo‘yicha (jumladan, malakaviy amaliyot o‘tkazish davrida ham) topshiriq beradi. Topshiriqning shakli oliy ta’lim muassasasining o‘quv bo‘limi tomonidan belgilanadi. Topshiriq namunasi 1-ilovada keltirilgan. Topshiriq BMIni bajarish bo‘yicha talabaga ko‘rsatma vazifasini bajarib, u BMI bilan birgalikda Yakuniy Davlat attestasiya komissiyasi (YaDAK) ga taqdim etiladi.

3. Bitiruv malakaviy ishga rahbarlik qilish

BMIlarga rahbarlar ushbu oliy ta’lim muassasasining professor va dotsentlari yoki ilmiy xodimlari, boshqa muassasa va korxonalarning yuqori malakali mutaxassislari safidan tayinlanadi.

BMI rahbari: topshiriq beradi; BMI ning bajarilish jadvalini rejalashtiradi; asosiy adabiyotlar, ma’lumot va arxiv materiallarini hamda mavzu bo‘yicha boshqa manbalarni tavsiya etadi; talabalar bilan muntazam ravishda konsultasiyalar o‘tkazadi; BMI ning bajarilish jarayonini nazorat qiladi; BMI ning sifati va mualliflgiga javob beradi, mavzularning qaytarilishiga yoki boshqa manbalardan aynan ko‘chirilishiga yo‘l qo‘ymaydi.

BMI rahbarining taklifiga binoan, kafedra BMI ga rahbarlik qilishga ajratilgan vaqt byudjeti hisobidan ishning ayrim bo‘limlari bo‘yicha maslahatchi (konsultant) larni taklif etishi mumkin. BMI ning bo‘limlari bo‘yicha maslahatchilar sifatida oliy ta’lim muassasasining professorlari va dotsentlari, ilmiy xodimlari hamda boshqa muassasa va korxonalarning yuqori malakali mutaxassislari tayinlanishi mumkin. Maslahatchilar talaba bajargan ishning muvofiq qismini tekshiradi, tegishli ko‘rsatmalar beradi.

Mutaxassis chiqaruvchi kafedra BMIga qo‘yiladigan talablar hajmini belgilagan holda BMIni bajarish bo‘yicha uslubiy qo‘llanmalarni ishlab chiqadi va ular bilan talabalarni ta’minlaydi.

4. Bitiruv malakaviy ishni bajarish

Bitiruv malakaviy ishni bajarish bosqichlari. BMI berilgan topshiriq asosida shaxsan talaba tomonidan bajariladi. BMI, odatda, oliy ta’lim muassasasining ushbu maqsadda maxsus ajratilgan xonalarida bajariladi. Ayrim hollarda BMI korxonalar, muassasalar, ilmiy, loyihalash va boshqa muassasalarda bajarilishi mumkin.

BMIning bajarilishi bo‘yicha talabaning hisobot berish muddatlarini dekan nazorat qiladi. Dekanat belgilagan muddatlarda talaba BMIning bajarilishi haqida rahbar va kafedra mudiri oldida hisobot beradi. Kafedra mudiri BMIning tayyorlik darajasini belgilaydi. Shu maqsadda kafedrada har bir bitiruvchi kesimida

BMIlarning bajarilish monitoringi tashkil etilib, uning bajarilish holati rahbarning haftalik hisobotlari asosida foizlarda aniqlab boriladi.

Talaba BMIning muallifi sifatida tanlangan qarorning to‘g’riligiga va uning topshiriqqa muvofiqligiga, BMIda ko‘chirmachilik holatining yo‘qligiga javob beradi.

BMIlarni bajarish bosqichlarida belgilangan muddatlardan kechikish hollari aniqlanganda, ularni bartaraf etish bo‘yicha tegishli choralar kafedra mudiri tomonidan belgilanadi.

BMI – bu ilmiy ishdir va uni bajarishda talabalar tadqiq qilishning, ya’ni ilmiy ijodning muhim ko‘nikmalarini egallaydilar. Odatda, nazariy (fundamental) va amaliy ilmiy-tadqiqot ishlarini bajarish jarayoni oltita asosiy bosqichdan iborat bo‘lib, ular muayyan mantiqiy ketma-ketlikda joylashadi.

<u>1-bosqich. Tanlangan mavzuning dolzarbligini asoslash va ifoda etish;</u>

<u>2-bosqich. Tadqiqotning maqsadi va vazifasini aniqlash;</u>

<u>3-bosqich. Nazariy tadqiqotlar o‘tkazish;</u>

<u>4-bosqich. Tajribaviy tadqiqotlar o‘tkazish </u>(nazariy tadqiqotlarni tasdiqlash, tuzatish yoki inkor etish uchun);

<u>5-bosqich. Ilmiy tadqiqotlarni tahlil qilish va rasmiylashtirish;</u>

<u>6-bosqich. Natijalarni joriy etish va iqtisodiy samarani aniqlash.</u>

Bakalavriat o‘quv rejasi bo‘yicha BMIni bajarishga o‘quv davri umumiy hajmining 2-3 % i ajratilgan. Bunga agar bitiruv malakaviy amaliyot davri qo‘shilsa ham, bu vaqt to‘laqonli ilmiy-tadqiqot o‘tkazish uchun kamdir. Shuning uchun BMI ilmiy-tadqiqot o‘tkazishning yuqorida sanab o‘tilgan hamma bosqichlarini qamrab ololmaydi.

Odatda talabaga tadqiqot mavzusi beriladi, uning maqsadi va vazifalari aniqlanadi. Shu o‘rinda ko‘pincha mavzuni tanlash tadqiqotni bajarishdan ko‘ra murakkabroq ekanini ta’kidlab o‘tish joiz. Bundan tashqari, talabalar mavzu bo‘yicha yoki nazariy hisob-kitob, yoki tajribaviy tadqiqot o‘tkazadilar. Kamdan-kam hollarda talaba birdaniga ishlab chiqarishga tadbiq qilinishi mumkin bo‘lgan natijalar olishi mumkin va shuning uchun talaba amalda ilmiy-tadqiqotning oltinchi bosqichini ham bajarmaydi. Lekin bu talaba olingan natijalarning qo‘llanilishini ko‘rmasligi kerakligini bildirmaydi. Bu BMIda o‘z ifodasini topmog’i lozim.

Shunday qilib, talaba ko‘p hollarda ilmiy-tadqiqotning 2, 4 (yoki 3) va 5-bosqichlarini bajaradi. Bu bosqichlarni batafsil qarab chiqamiz.

Tadqiqotning maqsadi va vazifasini aniqlash. Garchi talaba BMI rahbaridan mavzuning nomini, ishni bajarish rejasini va ishning natijasi qanday bo‘lishi haqida tasavvur olsa-da, talabaning o‘zi tadqiqot maqsadi va vazifasini ta’riflashi, ishni bajarishning o‘ziga xos jihatlarini tushunishi, kutilayotgan natijani oldindan aniqlashi va ularni tahlil qilishi kerak. Shuning uchun adabiyot sharhini tayyorlash BMI ning muhim tarkibiy qismidir. Uning maqsadi oldingi tadqiqotlar natijalari bilan tanishish, ularni tahlil qilish va talaba hal qilishi kerak bo‘lgan vazifani aniqlashdan iborat.

Har qanday ilmiy tadqiqot mavzu bo‘yicha ilmiy-texnikaviy axborotni izlashdan boshlanadi. Asosiy manbalarni BMI rahbari tavsiya qilishi mumkin. Keyinchalik talaba mustaqil ravishda adabiyot ro‘yxatini to‘ldiradi.

Ilmiy-texnikaviy axborot manbai bo‘lib quyidagi hujjatlar xizmat qiladi: kitoblar (darsliklar, o‘quv qo‘llanmalar, monografiyalar, ensiklopediyalar, broshyuralar va boshq.); davriy matbuot (jurnallar, ilmiy to‘plamlar va boshq.); me’yoriy hujjatlar (standartlar, texnikaviy shartlar, yo‘riqnomalar, ko‘rsatmalar va boshq.); katalog va preyskurantlar; patent hujjatlari; ilmiy-tadqiqotlar va tajribaviy konstruktorlik ishlari haqida hisobotlar; axborot nashrlar (analitik sharhlar, informasion varaqalar, to‘plamlar, ekspress informasiya, ko‘rgazmalarning prospektlari va boshq.); xorijiy ilmiy-texnikaviy adabiyotlar (asl va tarjima nusxalari); dissertatsiyalar, avtoreferatlar; ilmiy-texnikaviy konferensiyalar va ishlab chiqarish yig’ilishlarining materiallari; ikkilamchi hujjatlar (referativ sharhlar, bibliografik kataloglar, referativ jurnallar va boshq.).

Sanab o‘tilgan hujjatlar ulkan axborot oqimini hosil qiladi, uning sur’ati yildan yilga oshib bormoqda. Bunday ulkan informasiya oqimida zarur axborotni izlab topish ancha murakkab jarayondir.

Zarur axborotni izlash qo‘lda yoki avtomatlashtirilgan holda amalga oshirilishi mumkin.

Qo‘lda izlash odatdagi bibliografik varaqchalar, kartotekalar va nashr ko‘rsatkichlari bo‘yicha amalga oshirilsa, avtomatlashtirilgan izlash kompyuterlarni qo‘llashga asoslangan. Hozirgi davrda tez su’atlar bilan rivojlanayotgan “Internet” tizimi zarur axborotni izlashni osonlashtirmoqda.

Talabaga tavsiya etilgan va o‘zi izlab topib tanlagan adabiyotlar qo‘yilgan masalalar nuqtayi nazaridan ishlab chiqilishi, ya’ni o‘rganilishi, eslab qolinishi va tahlil qilinishi kerak. Adabiyotdan ish rejasidagi savollarga javob axtarilishi kerak. Adabiy ish muallif fikrini va muammoning fizikaviy mohiyatini to‘liq va aniq tushunish bilan tugallanishi kerak. Bu ish natijasida talaba qaralayotgan masala bo‘yicha o‘z fikrini aytishi kerak.

Axborotni ishlab chiqish samaradorligini maqsadning aniqligi, ilhomlanish, diqqatni bir joyga to‘plash, qat’iyat, muntazamlik, to‘g’ri ish tartibi kabi omillar oshiradi.

Axborotni ishlab chiqishda ko‘chirma, annotatsiya, konspektlar qo‘llaniladi.

Axborotni tahlil qilish jarayonida axborot manbalarini ham, ulardagi axborotni ham tasniflash va tizimlashtirish (tartibga solish) zarur.

Manbalarni ikki xil usulda: xronologik tartibda va mavzu bo‘yicha tizimlashtirish mumkin. Birinchi holda barcha axborot mavzu bo‘yicha ilmiy bosqichlarga ajratiladi, keyin esa har bir bosqichga tegishli manbalar tanqidiy tahlil qilinadi. Ikkinchi holda esa barcha axborot mavzu masalalari bo‘yicha sistemalashtiriladi.

Axborotni ishlab chiqish natijasi asosida mavzuning dolzarbligi va yangiligi, uning maqsad va vazifalari belgilanadi.

Tajribaviy tadqiqotlar o‘tkazish. Tajribaviy tadqiqot yangi ilmiy bilimlar olishning asosiy usulidir. Tajribalar tabiiy va sun’iy, laboratoriyadagi va ishlab chiqarishdagiga bo‘linadi. Tajribaviy tadqiqotlarni samarali o‘tkazish uchun tajriba metodologiyasi ishlab chiqiladi. U quyidagi asosiy bosqichlarni o‘z ichiga oladi: tajriba reja-dasturini ishlab chiqish; o‘lchamlarni baholash va tajriba o‘tkazish vositalarini tanlash; tajribani o‘tkazish; tajriba natijasida olingan ma’lumotlarni ishlab chiqish va tahlil qilish.

Reja-dastur tajribaviy tadqiqotlarning uslubiy (metodologik) asosi bo‘lib, u quyidagilarni o‘z ichiga oladi: tadqiqot mavzulari ro‘yxati va ishchi ilmiy faraz mazmuni; tajriba uslubi va uni bajarish uchun zarur materiallar, asboblar, qurilmalar ro‘yxati; tajribani bajarish uchun xarajatlar ro‘yxati.

Tajriba uslubi (usulikasi) - tajriba usullari (metodlari) majmui bo‘lib, u umumiy tarzda quyidagilarni o‘z ichiga oladi: tajriba maqsadi va vazifasi; omil (faktor) larni tanlash va ularning o‘zgarish darajasi; o‘lchash vositalari va o‘lchashlarining zarur miqdori; tajriba mohiyati va bajarish tartibi; tajriba natijalarini ishlab chiqish va tahlil qilish usullari.

Tajribaviy tadqiqotlar o‘tkazishga talabalar mavzuga tegishli adabiyotni o‘rganib, adabiyot sharhini yozganlaridan keyin kirishadilar. Buning uchun eng avvalo adabiyot sharhida bayon qilingan tadqiqot maqsadi va vazifalariga muvofiq tajriba reja-dasturi ishlab chiqiladi. Bu reja BMI rahbari bilan muhokama qilinadi, topshiriqda qayd qilinadi va kafedra mudiri tomonidan tasdiqlanadi.

Tajriba tasdiqlangan reja-dasturga muvofiq o‘tkaziladi. Bunda talaba birinchi navbatda tajriba o‘tkaziladigan joy (laboratoriya) da texnika xavfsizligi, sanoat sanitariyasi, yong’in oldini olish qoidalariga amal qilish bo‘yicha yo‘l-yo‘riq va ishga ijozat olishi kerak.

Ishning keyingi bosqichida, agar tajribada standart, yalpi ishlab chiqariladigan qurilma (asbob)dan foydalanilmasa, qo‘yilgan vazifani bajarish uchun tajribaviy qurilma yaratiladi yoki mavjud qurilma takomillashtiriladi.

Qurilma ishga tayyorlangandan keyin talaba tajribaviy tadqiqotga kirishadi. Bunda u tajriba rejasiga tayanadi. Bu rejada, yuqorida aytilgandek, tadqiqotlar ketma-ketligi, kerakli moddalar, ularning miqdori va xarakteristikalari, tajriba sikli (davri) ning tamom bo‘lish muddatlari ko‘rsatilgan bo‘ladi. Albatta ish daftari (kundaligi) tutiladi va unga hamma tajribaviy ma’lumotlar tajriba vaqti, sharoiti va aniq natijalari ko‘rsatilgan holda yoziladi. Tajriba natijalari ularning to‘planishiga qarab qayta ishlana boriladi.

O‘lchashlar o‘tkazilishi bilan bir vaqtda natijalarni qayta ishlash va ularni tahlil qila borish tekshiriluvchi jarayonlarni nazorat qilishga, tajribani to‘g’rilab turishga, tajriba uslubini yaxshilashga va tajriba samaradorligini oshirishga imkon beradi.

Tajribaning har bir davrini tugatgandan keyin olingan natijalar statistik tahlil qilinadi, ularning xatoliklari hisoblanadi, jadvallar tuziladi, grafiklar chiziladi. Olingan natijalar va ularning ma’lum bo‘lgan yoki ilgari surilgan ilmiy faraz va modellarga munosabati ilmiy rahbar bilan muntazam ravishda muhokama qilib boriladi. Talabaning ish rejasiga kerakli tuzatishlar kiritiladi.

Ishning tajribaviy qismini bajarishda asbob ko‘rsatishlarinng barqarorligiga (takrorlanishiga) e’tibor berish kerak. O‘lchov vositalarini tekshirishdan o‘tkazib, xatoliklar yo‘l qo‘yilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar chegarasidan chiqmasligiga erishish lozim. Bunday tekshirishlar tajriba o‘tkazuvchi tomonidan o‘lchashlar oldidan o‘tkaziladi; bunda o‘lchashlarning diapazoni va juz’iy o‘zgarishlari tekshiriladi. Kerak bo‘lganda o‘lchov vositalarining noli va sezgirligi rostlanadi va ular darajalanadi. Bunday ishchi tekshiruvlardan tashqari, o‘lchov vositalari davlat tekshiruvidan o‘tganligi haqida guvohnomaga ega bo‘lishi kerak.

Tajriba o‘tkazishda talaba sabr-toqatli va qat’iyatli bo‘lishi kerak. Bu unga tajribani oxirigacha olib borishga imkon beradi. Ilgari surilgan ilmiy farazni tasdiqlamaydigan natijalarni ham tashlab yubormaslik kerak. Noto‘g’ri natija va katta xatolarga olib keladigan pala-partishlikka yo‘l qo‘ymaslik kerak. Har bir shunday holda tajribani qaytadan o‘tkazish kerak.

Tadqiqotni tahlil qilish va rasmiylashtirish. Tajribaviy materialni qayta ishlash (ishlab chiqish) va tahlil qilish usullarini tanlash tadqiqotning muhim bosqichlaridan biridir. Tajriba natijalarini tizimlashtirish, tasniflash va natijalarni tezda taqqoslashga imkon beradigan yozuvning qo‘lay shakllariga - jadvallar, grafiklar, formulalarga keltirish kerak. Asosiy diqqat-e’tiborni tajriba natijalarini qayta ishlash va tahlil qilishning matematik usullariga - empirik bog’lanishlarni va o‘zgaruvchan xarakteristikalar o‘rtasidagi bog’lanishlarni o‘rnatishga, ishonchli intervallarni aniqlashga va boshqa shu kabilarga qaratish kerak.

Tajribaviy tadqiqotlarni tugatgandan keyin talaba olingan natijalarni nazariy tushuntirishga kirishadi. Bunda yoki jarayonning fizikaviy modeli ishlab chiqiladi (agar bunday model adabiyotlarda mavjud bo‘lmasa), yoki ma’lum nazariya o‘tkazilgan tajriba natijalariga qo‘llaniladi (BMIlar uchun ko‘proq xarakterli). Bu bosqichdagi ish talabaning nazariy bilimlarini chuqurlashtiradi, unga matematik apparatdan foydalanish ko‘nikmalarini singdiradi.

Ishning nazariy qismini bajarishda birinchi navbatda fizikaviy jarayon mexanizmini to‘g’ri aks ettirishga intilish kerak. Buning uchun, imkoni boricha, jarayonga har xil omillar ta’sirini baholash va ulardan eng asosiylarini ajratish kerak. Bundan tashqari, masalani yechishning optimal usulini tanlash kerak. Agar analitik yechim topilmasa, kompyuterda hisoblash o‘tkazish lozim. Hisoblash natijalari tajriba natijalari bilan taqqoslanadi, bunda tajriba xatoliklariga e’tibor berish kerak. Agar tajriba va nazariya natijalari orasida ancha farq bo‘lsa, bu farqni tahlil qilib, sabablarini ko‘rsatish kerak. Agar fan rivojining shu bosqichida nazariy model yaratish iloji bo‘lmasa, bu holni isbotlash lozim. Bu holda tadqiq qilinayotgan jarayon sifatiy tahlil qilinishi va imkoni boricha jarayonning ishchi ilmiy farazi ilgari surilishi kerak.

Nazariy xarakterga ega bo‘lgan BMIlari uchun ishning yuqorida ko‘rsatilgan bosqichi asosiy bo‘lib, unda olingan natijalar adabiyotda mavjud tajriba bilan taqqoslanishi, agar bunday tajriba bo‘lmasa, uni o‘tkazish bo‘yicha mulohazalar aytilishi kerak.

Tadqiqotning keyingi bosqichida tadqiqotni rasmiylashtirish kerak. Bu bosqichda talaba BMIni yozishi va uni himoya qilishi kerak.

5. Bitiruv malakaviy ishni tayyorlash

5.1. Bitiruv malakaviy ishga qo‘yiladigan umumiy talablar. BMIning maqsadlari 1-bobda bayon qilingan edi. Tadqiqotning asosiy vazifasi va BMI ga qo‘yiladigan asosiy talablar ana shu maqsadlardan kelib chiqadi.

Bitiruv ishlariga qo‘yiladigan asosiy talablar quyidagilardan iborat:

-ishda mavzuning nazariy masalalari fizikaviy jihatdan to‘g’ri yoritilishi, talabaning zamonaviy fan asoslarini tushunishi va matematik apparatni egallagani ayon bo‘lishi kerak;

-ish talabaning tadqiqotlarning zamonaviy usullari bilan tanish ekanligini va qurilmalarda ishlash ko‘nikmalarini egallaganligini ko‘rsatishi kerak;

-ish ijodiy xarakterga ega bo‘lishi, talabaning tadqiqotni mustaqil bajarishga o‘quvi borligini ko‘rsatishi kerak;

-ishning mazmuni muallif mavzu bo‘yicha hamma manbalardan foydalanganidan dalolat berishi kerak;

-BMI nomlari tadqiqot reja-dasturidagi vazifalarga mos keluvchi boblar va boblardagi paragraflarni o‘z ichiga olishi kerak.

BMI lotin yozuviga asoslangan o‘zbek alifbosida yoziladi.

BMI talaba o‘qigan tilda yoziladi. Kafedra tavsiyasiga muvofiq BMI chet tillarning birida ham yozilishi mumkin. Chet tilda yozilgan ishga davlat tilidagi annotatsiya ilova etiladi va himoya vaqtida tarjima bilan o‘tkaziladi.

BMI kamida 10-15 ming so‘z hajmida belgilanadi. Bu hajmga ilovalar kirmaydi.

BMI (ilovalar bilan birgalikda) qattiq muqova bilan muqovalanishi kerak.

BMIni talabaning shaxsan o‘zi yozadi, u ishning to‘g’ri yozilishiga javob beradi va buni BMI matnida adabiyot ro‘yxati tagida “ISHNI BAJARUVCHI” yozuvidan keyin o‘z imzosi bilan tasdiqlaydi.

BMI talaba tomonidan o‘tkazilgan tadqiqot haqida to‘liq ma’lumot beruvchi asosiy hujjatdir. U boshqa har qanday ilmiy asar (ilmiy maqola, ilmiy tadqiqot hisoboti, magistrlik, fan nomzodligi va doktorligi dissertatsiyalari) kabi tadqiqot o‘tkazish maqsadi, tadqiqot texnikasi va usulikasi, olingan natijalar, chiqarilgan xulosalar va tavsiyalarni o‘z ichiga olishi hamda aniq tuzilish, mantiqiy bayon, ishonchli dalillar, qisqa va aniq ta’riflar, ko‘rgazmali tasvirlar, aniq natijalar, isbotli xulosalar, asosli tavsiyalar bilan xarakterlanishi kerak.

5.2. Bitiruv malakaviy ishning tuzilishi va tarkibi. BMI ishni bajarishning 4-bobda ko‘rsatilgan bosqichlariga mos tushgan quyidagi tarkibiy qismlarni o‘z ichiga oladi va ular ko‘rsatilgan tartibda joylashtiritiladi: titul varag’i; BMI bo‘yicha topshiriq varaqasi; annotatsiya (xorijiy tillarda yozilgan bitiruv ishlarida); mundarija; kirish; asosiy qism (topshiriqqa mos 2-3 bobdan iborat); xulosa; foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati; ilovalar.

BMIning har bir bobi yakunida qisqa xulosa va takliflar beriladi.

Titul varag’i, topshiriq varaqasi, annotatsiya, mundarija va ilovalarni rasmiylashtirish keyingi 6-bobda bayon qilingan.

5.2.1. Kirish. Kirishda tadqiqot ob’ekti va predmeti (muammo) ko‘rsatiladi, muammoning hozirgi holati baholanib, tadqiqotni o‘tkazish zarurligi (dolzarbligi) asoslanadi. Ishning maqsadi va undan kelib chiqadigan vazifalar ko‘rsatiladi. Muammo yechilganda erishiladigan ilmiy yangilik va amaliy ahamiyat ko‘rsatiladi. Ular alohida bandlar sifatida ko‘rsatiladi va nomlanadi.

Kirishda ishning tuzilishi (boblar, hajmi, rasmlar, jadvallar, foydalanilgan adabiyotlar soni) ham yoritiladi.

5.2.2. Adabiyot sharhi va tanlangan yo‘nalishni asoslash. Bu qismda mavzu bo‘yicha oldin qilingan ishlar tahliliy bayon qilinadi, bunda hali yechilmagan masalalar aniqlanadi-ki, BMI ularni (yoki ulardan birini) yechishga bag’ishlangan bo‘ladi. Qo‘yilgan maqsaddan kelib chiqadigan vazifalar ifoda etiladi. Ko‘p hollarda, ayniqsa fundamental tadqiqotlarda, adabiyot tahlili va tanlangan yo‘nalishni asoslash ilmiy asarning mustaqil tarkibiy qismlari sifatida ajratilib yoziladi.

5.2.3. Tajriba qismi. Bu qismda tajriba texnikasi va uslubi (usulikasi) yoritiladi. Tajribada qo‘llanilgan standart apparatura va asboblar xarakteristikalari qisqacha ko‘rsatiladi yoki ular tavsif qilingan adabiyotga havola beriladi. Agar tajriba o‘tkazish uchun maxsus apparatura yoki asbob yaratilgan bo‘lsa, u batafsil tavsiflanadi. Tajriba o‘tkazish uslubi bayon qilinadi, o‘lchashlar ishonchliligi va aniqligi baholanadi. Moddalar tozaligi va fiziko-kimyoviy xossalari ko‘rsatiladi.

5.2.4. Natijalar va ularning muhokamasi. Bu qismda bajarilgan asosiy nazariy va tajribaviy tadqiqotlar tizimli ravishda, kerakli tahlil va umumlashtirishlar bilan, hisoblashlar, tasvirlar, jadvallar bilan tavsiflanadi; olingan natijalarning boshqa nazariy va tajribaviy tadqiqotlar natijalari va xalq xo‘jaligining masalalari va talablari bilan taqqoslanishi keltiriladi.

5.2.5. Xulosa. Bu qismda tadqiqotga yakun yasaladi. Natijalar qo‘yilgan maqsad va vazifalar nuqtayi nazaridan baholanib, xulosalar chiqariladi, ishning asosiy yutuqlari qisqa, aniq va umumlashtirilgan holda ifodalanadi. Amaliy tadqiqotlarda natijalar qo‘llanilganda olinadigan texnikaviy-iqtisodiy samara baholanadi. Fundamental tadqiqotlarda natijalarning ilmiy, ijtimoiy ahamiyati ko‘rsatiladi va natijalarni qo‘llash bo‘yicha takliflar beriladi. Har bir alohida fikr raqamlanadi.

Xulosa so‘nggida ish nima bilan (ilmiy asarlar nashr qilish; yangi ob’ektlar, jarayonlar, hodisalar, qonuniyatlar haqida ilmiy ma’lumotlar olish; tadqiqot uslublarini ishlab chiqish; loyihaviy, konstruktorlik va me’yoriy hujjatlar tuzish; mahsulotlarning sinov va laboratoriya natijalarini tayyorlash va sinash; yangi mahsulot va moddalar yaratish; yangi texnologik va ishlab chiqarish jarayonlarini, rejimlarini, reglamentlarini yaratish va mukammallashtirish; salbiy natijalar va boshqalar bilan) tugagani ko‘rsatiladi.

5.2.6. Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati. BMIlarda bu qism ko‘pincha “Adabiyot” (ishda qo‘llanilgan yoki qo‘llanilmaganligidan qat’iy nazar, hamma o‘rganilgan adabiyotlar kiritilsa), “Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati” (agar faqat tahlil qilingan yoki matnda ishlatilgan adabiyotlar kiritilsa) yoki “Foydalanilgan manbalar va adabiyotlar ro‘yxati” (agar adabiyotdan tashqari manbalar (hujjatlar, arxiv materiallar va h.k.) ham kiritilsa) deb nomlanadi.

Adabiyotlar ro‘yxatida hamma foydalanilgan adabiyotlar (manbalar) ko‘rsatiladi. Materialdan uning muallifi va manbasini ko‘rsatmasdan foydalanish umuman mumkin emasligini ta’kidlab o‘tamiz. Agar BMIda bu hol mavjudligi aniqlansa, ish himoyaga qo‘yilmaydi.

Ro‘yxatda adabiyotlarni alfavit, sistematik va matnda ko‘rsatish tartibida joylashtirish usullari keng tarqalgan. BMIlarda adabiyotlarni matnda ko‘rsatish tartibida joylashtirish tavsiya etiladi, bunda adabiyotlarning ro‘yxatda joylashish tartibi ularga matndagi havola tartibiga mos tushadi.

Adabiyotlarning bibliografik tavsifi Davlat standartiga mos bo‘lishi kerak. Bibliografik tavsif – bu hujjat yoki uning tarkibiy qismi haqida bibliografik ma’lumotlar to‘plamidir. Bibliografik tavsiflash qoidalari Davlat standarti orqali o‘rnatiladi. Adabiyot “Internet” tizimidan olingan bo‘lsa, bibliografik tavsif oxirida Web sayti ham ko‘rsatiladi.

Bibliografik tavsiflar namunalari 2-ilovada keltirilgan.

5.2.7. Ilovalar. Ilovada BMI matnini to‘ldiruvchi va tasvirlovchi har xil yordamchi hamda asosiy qismda joylashtirish qiyin bo‘lgan materiallar keltiriladi. Jumladan, oraliq matematik isbotlar, formulalar, hisoblashlar; statistik ma’lumotlar va ularni qayta ishlash uslublari; muayyan tajriba natijalari; birlamchi materiallar; yordamchi nomogrammalar va jadvallar; ishda foydalanilgan apparatura va asboblarning tavsiflari; ikkinchi darajali algoritm va dasturlar tavsiflari; yordamchi xarakterdagi tasvirlar; keng izohlar ilovada keltirilishi mumkin.

Ilovalarning joylashish tartibi ularga matnda berilgan havola tartibiga mos kelishi kerak.

Agar talaba BMI mavzusida ilmiy maqolalar nashr qilgan, mualliflik guvohnomasi va patentlar olgan bo‘lsa, ularning ro‘yxati ilovada keltiriladi.

5.3. Bitiruv malakaviy ishni yozish. BMIni yozishga kirishishdan oldin batafsil reja tuzib olish kerak. Rejaning asosiy bo‘limlari ishning tarkibi haqida yuqorida aytib o‘tilganlarga mos tushishi lozim.

Ish tushunarli va aniq yozilishi kerak. Materialni aniq bayon qilishga erishish uchun bir-biriga yaqin masalalarni guruhlarga birlashtirish va bu guruhlarni mantiqiy ketma-ketlikda joylashtirish lozim.

Yaxshi til bilan yozish - bu nafaqat grammatika qoidalariga amal qilish, balki so‘zlarni shunday tanlash va gaplarni shunday tuzish kerakki, fikr iloji boricha qisqa, lo‘nda va o‘qish uchun yoqimli ifodalansin. Tavtologiya (bir fikrni boshqa so‘zlar bilan takrorlash) lar, isbotsiz da’volar, til shtamplari (ma’lum gaplarni takrorlashlar) bo‘lmasligi lozim. Monotonlikdan qochish uchun qisqa gaplar bilan bir qatorda uzun gaplardan ham foydalanish kerak.

Mutaxassislarning tor doirasi uchun tushunarli bo‘lgan juda ham maxsus ifodalarni ishlatmaslik va mayda tafsilotlarni keltirmaslik kerak.

Matn agar abzaslarga to‘g’ri ajratilgan bo‘lsa, uni o‘qish yengillashadi. Yangi fikrga o‘tilganda yoki bitta fikr boshqa nuqtai nazardan qaralganda yangi satrdan boshlash kerak.

Tajriba natijalarini qanday taqdim qilishni puxta o‘ylab ko‘rish kerak. Bevosita va bilvosita o‘lchashlarning natijalari jadvallar va grafiklar ko‘rinishida keltiriladi. O‘lchash natijalari grafik ko‘rinishda berilgan taqdirda ham ular jadvalda keltiriladi. Jadvalda natijalar tajriba shart-sharoitlaridan kelib chiqqan holda u yoki bu belgi bo‘yicha sistemalashtirilgan bo‘lishi kerak. Jadvalda har bir miqdor qaysi kattalikka tegishli ekani va u qanday sharoitda olingani ko‘rinib turishi kerak.

Tanlangan jadval shakli materialni tizimlashtirish bilan birga, natijalarni qayta ishlash, kerak boʻlganda oraliq natijalarni saqlash va hisoblashlarning oxirgi natijalarini tezda tekshirish uchun qoʻlaylik yaratishi lozim. Bu talablarni qondiradigan jadval shakli hisoblash formulasining koʻrinishiga bogʼliq ravishda tanlanadi.

Jadvaldagi har bir son (miqdor) birinchi ishonchsiz raqami qoʻyilgan holda oʻzining hamma ahamiyatli raqamlari bilan yozilishi kerak. Masalan, agar birinchi ishonchsiz raqam yuzlarda boʻlsa, 0,20 mm oʻrniga 0,2 mm deb yozish mumkin emas, chunki bu oʻlchash natijasini aniqlash xatoligini oshiradi. Agar natijalarda bittadan koʻp ishonchsiz raqam qoldirilsa, bu ularning haqiqiy qiymatiga nisbatan notoʻgʼri aniqlikni oshiradi.

Natijalarni grafik usulda tasvirlashda odatda tadqiq qilinayotgan kattalik (funksiya) ordinata oʻqiga, maʼlum kattalik (argument) esa abssissa oʻqiga qoʻyiladi.

Grafikda tasvirlanuvchi bogʼliqlik iloji boricha koʻrgazmali, yetarlicha aniq va oʻqimishli boʻlishi kerak. Bunga oʻqlardagi shkala qadami va uning shtrixi tagiga yoziladigan sonlarni toʻgʼri tanlash orqali erishiladi. Qoʻshni shtrixlar sonlari oʻrtasidagi farq juda oson va tez, hech bir hisoblashlarsiz oʻqilishi kerak. Baʼzan shkalani oʻqishni osonlashtirish uchun shkala shtrixlari tagiga yoziladigan sonlarning umumiy koʻpaytuvchisi oʻqning oxiriga chiqariladi. Bu shkalani ortiqcha raqamlardan xalos qiladi.

Koordinata oʻqlarida tajriba natijalarining sonli qatoriga mos keluvchi nuqtalarsiz shkala - toza shkala chiziladi. Bundan tashqari, oʻq shkalasi faqat shkalaning foydali boʻlagidan iborat boʻlishi, yaʼni faqat tajriba qiymatlarinigina oʻz ichiga olishi kerak. Shkalaning foydali boʻlagida intervallar soni 10-15 tadan koʻp, 4-5 tadan kam boʻlmasligi kerak. Shu chegaradagi intervallar soni, shkala qadami va shtrixlar tagiga yoziladigan sonlar shkalada joylashtiriladigan kattalikning tajriba natijalari qatoriga bogʼliq ravishda tanlanadi.

Grafik tuzilishi va oʻqilishi aniqligi shkalaning foydali boʻlagi uzunligiga bogʼliq. Shkala uzunligini shunday tanlash kerakki, grafik tuzilishi yoki oʻqilishi noaniqligi tajriba natijalari noaniqligidan (absolyut xatolaridan) oshmasligi kerak.

BMIni yozishda orfografiya (imlo) va punktuasiya qoidalariga amal qilish kerak. Bundan tashqari quyidagilarga eʼtibor berish kerak:

-soʻzlarni koʻchirishda inisiallar familiyadan, atamali sonlarda - nomi raqamdan ajratilmaydi. Koʻchirishda “va h.k.”, “sh.k.”, “FIK”(“foydali ish koeffisiyenti”) kabi qisqartmalarni ajratish, tireni keyingi satrga koʻchirish tavsiya etilmaydi;

-ko‘chirishda bitta sonni tashkil qiluvchi raqamlar, qavsli (yoki nuqtali) raqamlar va harflar ulardan keyin keladigan so‘zlardan, hamda ishora va belgilar ulardan keyin keluvchi raqamlardan ajratilmaydi.

6. Bitiruv malakaviy ishni rasmiylashtirish

Umumiy talablar. BMI matni A4 formatli (210x297 mm o‘lchamli) oq bir turdagi yozuv qog’ozi standart varag’ining bir tomoniga (topshiriq varaqasidan tashqari) kompyuterda WORD tizimida satrlar orasini 1,5 intervaldan qilib, 14 shrift bilan chop qilinishi kerak.

Sahifada matnning to‘rt tomonida bo‘sh joy qoldiriladi. Uning o‘lchamlari: chapdan - 30 mm, o‘ngdan - 15 mm, yuqoridan va pastdan - 25 mm bo‘lishi kerak.

BMIga qo‘yiladigan umumiy talablarga ko‘ra (5.1 ga qarang), BMInig hajmi kamida 10-15 ming so‘z bo‘lishi kerak. Bir betda 28 satr, bir satrda o‘rtacha 8 ta so‘z va bir betda 224 so‘z joylashsa, u holda BMI kamida 45-70 bet bo‘lishi kerak.

Ishning hamma sahifalari, titul varag’idan tortib oxirgi sahifagacha, matn ichida yoki undan keyin joylashgan hamma tasvirlar, jadvallar va sh.k.lar, hamda ilovalar, ketma-ket sahifaning yuqorisidagi bo‘sh joy o‘rtasiga qo‘yiladigan arab raqamlari bilan raqamlanadi. Titul varag’i va topshiriq varaqasi umumiy raqamlanishga qo‘shiladi, lekin ularga tartib raqami qo‘yilmaydi.

Matnda aniqlangan xatolar, umuman olganda, shu sahifani qayta yozish bilan to‘g’rilanishi kerak. Ba’zi hollarda matnda aniqlangan xatolar ustiga to‘g’ri matn yozilgan xuddi shunday turdagi va tusdagi oq qog’oz yopishtirish bilan to‘g’rilanishi mumkin. Maxsus tuzatuvchi vositalar (“Shtrix”, “Redaktor” va h.k.) dan ham foydalanish mumkin. Agar bitta sahifada to‘g’rilashlar soni 4-5 tadan ko‘p bo‘lsa, sahifa qaytadan yozilishi kerak.

Titul varag’i. Titul varag’ini rasmiylashtirish namunasi 3-ilovada keltirilgan. Titul varag’ida so‘zlar ko‘chirilmasligi, elementlari oxiriga nuqta qo‘yilmasligi kerak. Titul varag’ida ishni bajaruvchi, ilmiy rahbar, maslahatchilar (agar ular topshiriqda ko‘rsatilgan bo‘lsa, ularga tegishli BMI bo‘limlari ko‘rsatilgan holda), kafedra mudiri va YaDAK raisi va a’zolarining inisiallari va familiyasi, hamda imzolari bo‘lishi kerak. Tegishli joylarda imzo qo‘yilgan sanalar ko‘rsatiladi.

Topshiriq varaqasi. BMI bo‘yicha topshiriq varaqasi birinchi ilovada ko‘rsatilgan shaklda rasmiylashtiriladi.

Annotatsiya. Annotatsiya ishning qisqacha xarakteristikasi bo‘lib, uning yozilish shakli 4-ilovada keltirilgan. Chet tilda yozilgan ishda o‘zbek tilidagi annotatsiya ham bo‘lishi kerak.

Mundarija. Mundarijada matndagi hamma bob, paragraf va bandlar (agar ular sarlavhaga ega bo‘lsa) ning sarlavhalari va ularning boshlanishi joylashgan sahifalar raqamlari ko‘rsatiladi.

Ilovalar

1-ilova

Ishchi o’quv rejada ko’rsatilgan darsliklar, o’quv qo’llamalar

Asosiy adabiyotlar

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
2. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
3. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969.
4. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1966.
5. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. – 213 с.
6. Лекции по теории графов. / Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. М.: Наука, 1990. – 384 с.
7. Ф.А. Новиков Дискретная математика для программистов. СПб: Питер, 2000. – 304 с.
8. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие / Лаборатория Базовых Знаний, 2003. –288 с.

Qo‘shimcha adabiyotlar

10

14. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Наука, 1980. – 208 с.
15. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987. – 381 с.
16. To‘rayev H.T., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Uslubiy qo‘llanma: Samarqand. 2006. – 262 b.
17. Тўраев Ҳ. Т. Математик мантиқ ва дискрет математика. Тошкент: Ўқитувчи, 2003. – 416 б.
10. Евстигнеев В. А. Применение теории графов в программировании. М.: Наука, 1985.
11. Захарова Л. Е. Алгоритмы дискретной математики: Учебное пособие. М: Изд-во Московского государственного института электроники и математики, 2002. – 120 с.

Internet manbalari

24. http://www.iissvit.narod.ru/ssilki.htm.
25. http://www.krf.bsu.by/ELib/Genetic/GenAlg_2/index.htm.
26. http://www.neuroproject.ru.
27. http://www.aic.nrl.navy.mil/galist/.
28. http://iridia.ulb.ac.be/dorigo/ACO/ACO.html.
29. http://www.agp.ru/projects/.
30. http://www.swarm.org.

31. http://programming-challeges.com

2-ilova

Tarqatma materiallar

TOPSHIRIQ №1

1. Takrorli bo’lmagan o‘rin almashtirishlar deb nimaga aytiladi?
2. Ixtiyoriy n natural son va chekli A to‘plam uchun $\left|A^n\right| = \left|A\right|^n$ tenglikning o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlang.

TOPSHIRIQ №2

1. Takrorli bo’lmagan o‘rinlashtirishlar deb nimaga aytiladi?
2. Yetti so‘mdan ortiq butun son bilan ifodalanuvchi pul to‘lovini faqat 3 so‘mlik va 5 so‘mliklar bilan amalga oshirish mumkinligini isbotlang.

TOPSHIRIQ №3

1. Takrorli bo’lmagan gruppalashlar deb nimaga aytiladi?
2. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli yoki undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №4

1. Takrorli bo’lmagan kombinatsiyalardan qanday masalalarni yechishda foydalanish mumkin?
2. 13 nafar qiz va 12 nafar o‘g‘il boladan tashkil topgan talabalar guruhidanbir nafar talaba tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №5

4. Takrorli bo’lmagan o‘rin almashtirishlar soni qanday topiladi?
5. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli va bitta undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №6

1. Takrorli bo’lmagan o‘rinlashtirishlar soni qanday topiladi?
2. Qiroatxonada har biri ikki o‘rinli stollar to‘rt qatorga sakkiztadan joylashtirilgan. Haftaning yakshanba kunidan tashqari har kuni qiroatxona o‘quvchilarga sakkiz soat xizmat ko‘rsatadi. Qiroatxonaning bir haftada o‘quvchilarga mumkin bo‘lgan eng ko‘p xizmat ko‘rsatish vaqtini (o‘rin$\times$soat birligida) toping.

TOPSHIRIQ №7

1. Takrorli bo’lmagan gruppalashlar soni qanday topiladi?
2. Agar A va B shaharlarni to‘rtta yo‘l, B va C shaharlarni esa uchta yo‘l bog‘lasa, u holda A shahardan B shahar orqali C shaharga borish imkoniyatlari sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №8

5. Paskal uchburchagi deb nimaga aytiladi?
6. Shaxmat taxtasiga oq va qora shohlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.

TOPSHIRIQ №9

1. Nyuton binomi deb nimaga aytiladi?
2. Shaxmat taxtasiga oq va qora ruxlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.

TOPSHIRIQ №10

1. Binomial koeffitsientlar deb nimaga aytiladi?
2. Yakkamualliflikda yozilgan Axmedovning n_A ta, Botirovning n_B ta va Davronovning n_D ta kitoblardan

a) bitta kitobni, b) turli mualliflarning ikkita kitobini,

d) turli mualliflarning uchta kitobini

tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №11

1. Paskal uchburchagi va nyuton binomi orasida bog’liqlik bormi?
2. Ixtiyoriy chekli A to‘plamning juft quvvatli qism to‘plamlari to‘plamining quvvati shu A to‘plamning toq quvvatli qism to‘plamlari to‘plamining quvvatiga tengligini isbotlang.

TOPSHIRIQ №12

4. Paskal uchburchagi qanday topiladi?
5. Ixtiyoriy chekli A to‘plamning juft quvvatli qism to‘plamlari to‘plamining quvvati shu A to‘plamning toq quvvatli qism to‘plamlari to‘plamining quvvatiga tengligini isbotlang.

TOPSHIRIQ №13

1. Nyuton binomi qanday topiladi?

2. Quvvati 100ga teng bo‘lgan to‘plamning 40 elementli qism to‘plamlari soni bilan shu to‘plamning 60 elementli qism to‘plamlari sonini solishtiring.

TOPSHIRIQ №14

1. Binomial koeffitsientlar qanday topiladi?
2. Figurali sonlarning Paskal uchburchagidagi o‘rnini aniqlang.

TOPSHIRIQ №15

11. Paskal uchburchagi deganda nimani tushunasiz?
12. Paskal uchburchagi yordamida ixtiyoriy k - tartibli figurali sonlarning dastlanki n tasi yig‘indisini hisoblash formulasini toping va bu formulani matematik induksiya usuli yordamida isbot qiling.

TOPSHIRIQ №16

1. Paskal uchburchagining qanday xossalarini bilasiz?
2. Paskal uchburchagidan foydalanib 11^n $(n \in \boldsymbol{N})$ ifodaning qiymatini hisoblash formulasini keltirib chiqaring va bu formulani isbot qiling.

TOPSHIRIQ №17

1. B. Paskalgacha Paskal uchburchagidan foydalangan sharq va g‘arb olimlaridan kimlarni bilasiz?
2. Paskal uchburchagining ixtiyoriy n- satridan yuqorida joylashgan elementlari yig‘indisini hisoblash formulasini ifodalang va bu formulani isbot qiling.

TOPSHIRIQ №18

1. Nyuton binomi formulasini qanday qo‘llash mumkin?
2. Paskal uchburchagining bir necha o‘n qatorini yozib, undagi ikkiga, uchga, beshga qoldiqsiz bo‘linadiganlarini ajrating.

TOPSHIRIQ №19

1. Nyuton binomi formulasini Isaak Nyutondan oldin kimlar qo‘llagan?
2. Paskal uchburchagining 256- qatorida qancha toq son borligini aniqlang.

TOPSHIRIQ №20

1. Nima uchun binomial koeffitsientlarlarning xossalari Paskal uchburchagining xossalari ham hisoblanadi?
2. Paskal uchburchagidan foydalanib $\sin nx$ va $\cos nx$ ifodalarni $\sin x$ va $\cos x$ orqali ifodalash formulalarini keltirib chiqaring.

TOPSHIRIQ №21

1. Nyuton binomi formulasini kombinatorik tahlil yordamida isbot qilganda qanday tushunchalar qo‘llaniladi?
2. To‘la o‘yin qartalari (13x4=52ta) orasidan turli mastga ega bo‘lgan bir-biridan farq qiluvchi 4ta qartani tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №22

1. Koshi ayniyatining kombinatorik tushunchalarga asoslangan isbotini bilasizmi?
2. Matematika so‘zidagi harflar o‘rinlarini almashtirib ma’noga ega bo‘lmaganlarini ham e’tiborga olganda tuzish mumkin bo‘lgan barcha so‘zlar sonini toping.

TOPSHIRIQ №23

1. Nima uchun gruppalashlar sonlarini binomial koeffitsientlar deb ham atashadi?
2. Shaxmat taxtasining bir qatoriga shoh, farzin, 2 dona rux, 2 dona fil va 2 dona otni joylashtirishlar sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №24

1. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar takrorlanishi bo‘lmagan o‘rin almashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?
2. 0 raqami birinchi raqam sifatida kelganda, uni tashlab yuborilish qoidasiga amal qilib 0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlaridan tuzish mumkin bo‘lgan barcha olti xonali sonlar qancha?

TOPSHIRIQ №25

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan o‘rin almashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?

2. 1, 2, 3, 4, 5 sonlaridan tuzish mumkin bo‘lgan barcha uch xonali sonlar qancha?

TOPSHIRIQ №26

1. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rinlashtirishlar takrorlanishi bo‘lmagan o‘rinlashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?
2. Shirinlik sotiladigan do‘konda 4 xil shirinlik bo‘lsa, 7 dona shirinlikni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №27

1. Takrorli o‘rinlashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan o‘rinlashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?
2. Beshta turli o‘rindiqlar va yettita turli rangdagi materiallar bor. Har bir o‘rindiqni faqat bir xil rangdagi material bilan qoplash sharti bilan o‘rindiqlarga material qoplash imkoniyatlari sonini toping.

TOPSHIRIQ №28

1. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar takrorlanishi bo‘lmagan gruppalashlardan nimasi bilan farq qiladi?
2. Homiylar teleshouda qatnashayotgan o‘yinchilarga kofe qaynatgichlar, dazmollar, uyali telefon apparatlari va duxilar sovg‘a qilishmoqchi. 9 nafar o‘yinchilarga bittadan sovg‘a berishi imkoniyatlari sonini toping.

TOPSHIRIQ №29

1. Takrorli gruppalashlar soni formulasini isbotlashda qanday usuldan foydalanilgan?
2. Turli 5 dona qalam va 6 dona ruchkalardan 2ta qalam va 4ta ruchkani tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №30

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan gruppalashlar sonini hisoblash mumkinmi?
2. 36 ta o‘yin qartasini 4 o‘yinchiga teng bo‘lib berganda mumkin bo‘lgan barcha

imkoniyatlar sonini hisoblang.

TOPSHIRIQ №31

1. Ko‘phad formulasining Nyuton binomi formulasidan qanday farqi bor?
2. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda 6, 7 va 8ni natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$larning qiymatlarini aniqlang.

TOPSHIRIQ №32

1. Ko‘phadiy koeffitsientlarning qanday xossalarini bilasiz?
2. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda 9ning barcha bo‘laklanishlarini yozing va $R(9)$ni hisoblang.

TOPSHIRIQ №33

1. Fibonachchi sonlari haqidagi dastlabki ma’lumotni Ltonardo Pizanskiy qaysi asarida keltirgan?
2. Bozorda dehqon 15 dona qovunni 7 nafar xaridorga donabay sotdi. Agar navbatdagi har bir savdoda dehqonning sotgan qovunlari soni oldingi savdodagiga qaraganda kamaymagan bo‘lsa, u holda barcha savdolarda sotilishi mumkin bo‘lgan qovunlar sonlarining barcha imkoniyatlarini toping. Odatda biror qarorni ko‘pchilik bo‘lib qabul qilish maqsadida ovoz berganda “tarafdor” va “qarshi” ovozlar sonlari o‘zaro teng bo‘lmasligi uchun a’zolari 3 nafardan kam bo‘lmagan toq sondagi ekspertlar komissiyasi tuziladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi 17 nafar ekspertlardan tashkil qilinishi mumkin bo‘lgan komissiyalar sonini hisoblang.

TOPSHIRIQ №34

1. Tarkibida dastlabki n ta Fibonachchi sonlari ishtirok etgan qanday formulalarni bilasiz?
2. Kichik bir qishloqda hammasi bo‘lib 22 bosh qora mol bor va har bir oilada hech bo‘lmasa bir bosh qora mol topiladi. Bu qishloqning hech qaysi oilasida uch boshdan ko‘p qora mol bo‘lmasa, qishloqdagi qora mollarning oilalar orasida taqsimlanishining barcha variantlarini aniqlang.

TOPSHIRIQ №35

1. Juft raqamli dastlabki n ta Fibonachchi sonlarining yig‘indisi formulasi qanday keltirib chiqariladi?
2. Graf tushunchasini qo‘llash mumkin bo‘lgan amaliy misol keltiring va qaralayotgan grafni tahlil qiling.

TOPSHIRIQ №36

1. Toq raqamli dastlabki n ta Fibonachchi sonlarining yig‘indisi formulasini isbotlay olasizmi?
2. To‘la graf bilan bog‘liq biror misol keltiring.

TOPSHIRIQ №37

1. Bir-biriga q’o‘shni bo‘lgan uchta Fibonachchi sonlarining qanday xossalarni bilasiz?
2. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish uchun tuzilgan graf elementlarini tahlil qiling va bu masalaning mumkin qadar qisqa yechimini toping.

TOPSHIRIQ №38

1. Fibonachchi sonlarining Paskal uchburchagi bilan bog‘lanishi ifodalovchi formula qanday isbotlanadi?
2. Ko‘rishishlar haqidagi lemmaning qo‘llanilishiga doir amaliy misol keltiring.

TOPSHIRIQ №39

1. Bine formulasining tarkibida qanday irratsional son bor?
2. Kubik graf bilan bog‘liq amaliy misollar keltiring.

TOPSHIRIQ №40

1. Siz tabiatda Fibonachchi sonlarining uchrashiga kitobda bayon qilinmagan misol keltira olasizmi?

2. Qadimgi boshqotirma masala: biror idishdagi hajmi 12 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 8 va 5 birlik hajmli idishlar yordamida teng ikki qismga ajrating. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.

TOPSHIRIQ №41

1. Natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo‘shiluvchilar yig‘indisi sifatida tasvirlash masalasining mohiyati nimadan iborat?
2. Qadimgi boshqotirma masala: yo‘lovchi daryodan bo‘ri, qo‘y va bir bog‘ pichanni olib o’tishi kerak, lekin u qayiqda o‘zi bilan faqat bitta narsani olib o‘tish imkoniyatiga ega. Agar sohilda bo‘ri va qo‘y birga qolsa bo‘ri qo‘yni, qo‘y va pichan birga qolganda esa, qo‘y pichanni yeb qo‘yadi. Yo‘lovchi narsalarni daryoning bir sohilidan ikkinchi sohiliga olib o’tishni ularning butunligini saqlagan holda amalga oshirishi kerak. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.

TOPSHIRIQ №42

1. Natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo‘shiluvchilar yig‘indisi sifatida tasvirlash masalasi qanday shartlarda qaralishi mumkin?
2. Barcha belgilangan (m,n)-graflar sonini aniqlang.

TOPSHIRIQ №43

1. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni $B(n,k)$ bilan shu sonning barcha bo‘laklanishlari soni $B(n)$ orasida qanday munosabat bor?
2. O‘zaro izomorf bo‘lmagan

a) uchta, b) to‘rtta, d) beshta

uchga ega barcha belgilangan $G=(V,U)$ graflar uchun V to‘plam va U kortejlarni aniqlang.

TOPSHIRIQ №44

1. Qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda istalgan n natural sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini hisoblash formulasini bilasizmi?
2. Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiring.

TOPSHIRIQ №45

1. Qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda istalgan n natural sonning barcha bo‘laklanishlari sonini qanday hisoblash mumkin?
2. Shaxmat o‘yinida shaxmat donalarining taxtada joylashuvi va o‘yin navbati birgalikda vaziyatni tashkil etadi. Barcha vaziyatlar to‘plamini graf uchlari to‘plami deb qarasak, vaziyatlarning biridan boshqasiga mumkin bo‘lgan o‘tishlar (yurishlar) grafning qirralari yoki yoylariga mos keladi deb hisoblash mumkin. Shaxmat o‘yinining qoidalariga rioya qilgan holda yuqorida bayon qilingan grafning shaxmat o‘yinidagi dastlabki vaziyatni ham o‘z ichiga oluvchi qandaydir oltita vaziyatlariga mos uchlari va bu uchlarni bog‘lovchi qirra va yoylarini aniqlang.

TOPSHIRIQ №46

1. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni $R(n,k)$ bilan, uning barcha bo‘laklanishlari soni $R(n)$ orasida qanday munosabat bor?
2. Grafning abstrakt ta’rifi yordamida biror grafni ifodalang va unga izomorf grafni qog‘ozda tasvirlang.

TOPSHIRIQ №47

1. Ferrers diagrammasi nima?
2. Har qanday chekli grafni 3 o‘lchovli Evklid fazosida qirralariga to‘gri chiziq kesmalari mos keladigan qilib geometrik ifodalash mumkinligin isbotlang.

TOPSHIRIQ №48

1. Diagrammali usul deganda nimani tushunasiz?
2. Uchlari va qirralari sonlari mos ravishda teng bo‘lib, o‘zaro izomorf bo‘lmagan graflarga misollar keltiring.

TOPSHIRIQ №49

1. Normal Ferrers diagrammasi nima?
2. Barcha Platon jismlariga mos tekis graflarni geometrik ifodalang.

TOPSHIRIQ №50

1. Ikkilanma Ferrers diagrammasi qanday tuziladi?
2. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo‘lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor graflarni geometrik ifodalang, ularning har biriga mos maxsus ko‘phadlarni, uchlari qo‘shniligi, qirralari qo‘shniligi va insidentlik matritsalarni yozing.

TOPSHIRIQ №51

1. Qo‘shma bo‘laklash nima?
2. Uchlari qo‘shniligi matritsalari quyida berilgan graflarni geometrik ifodalang, ularga mos maxsus ko‘phad, qirralar qo‘shniligi va insidentlik matritsalarni yozing:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{b)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{c)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

TOPSHIRIQ №52

1. Ixtiyoriy n natural sonning har xil natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni bilan shu sonning toq qo‘shiluvchlarga bo‘laklanishlari soni orasida qanday bog‘lanish bor?
2. Elementlari siz yashayotgan aholi punktidagi chorraha va yo‘llarga mos keluvchi grafni geometrik ifodalab, bu grafda marshrutlar, zanjirlar, oddiy zanjirlar va sikllarni aniqlang.

TOPSHIRIQ №53

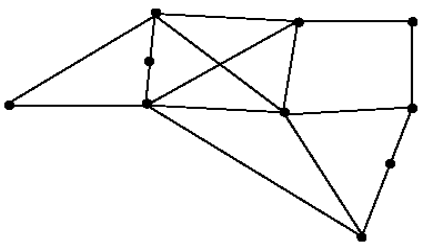
1. Ixtiyoriy n natural sonni $k$ta natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklashlar soni bilan shu n sonning eng katta qo‘shiluvchisi $k$ga teng bo‘lgan bo‘laklanishlari soni orasidagi bog‘lanish qanday ifodalanadi?
2. Ixtiyoriy graf uchun yo shu grafning o‘zi, yoki uning to‘ldiruvchi grafi bo‘g‘lamli bo‘lishini isbotlang.

TOPSHIRIQ №54

1. Ixtiyoriy n natural sonning hech bir qo‘shiluvchisi $k$dan oshmaydigan bo‘laklanishlari soni bilan $(n+k)$ sonining $k$ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlar soni orasida qanday bog‘lanish bor?
2. Agar G bog‘lamli graf va uning qandaydir sikliga tegishli qirrasi u bo‘lsa, u holda G grafdan u qirrani olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli bo‘lishini isbotlang.

TOPSHIRIQ №55

1. Sonli cheksiz qator deganda nimani tushunasiz?
2. 4- shaklda tasvirlangan graf uchun uchlar, qirralar va yoqlar sonini aniqlang hamda Eyler formulasi va Eyler teoremasining 2-natijasidagi tengsizlik



4- shakl

o‘rinliligini tekshiring.

TOPSHIRIQ №56

1. Qatorning xususiy yig‘indisi qanday tuziladi?
2. Pontryagin-Kuratovskiy teoremasini isbotini o‘rganing.

TOPSHIRIQ №57

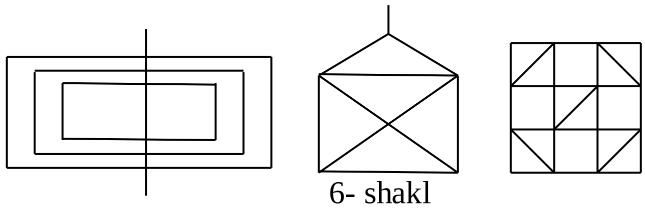
1. Qanday qator yaqinlashuvchi deb ataladi?
2. Agar 1- topshiriqni bajarish natijasida hosil bo‘lgan grafda ajratuvchi qirra(lar), kesim(lar) va ko‘prik(lar)

a) topilsa, u holda ularni aniqlang;

b) topilmasa, u holda bu grafga yangi elementlarni shunday qo‘shingki, natijada ajratuvchi qirrasi(lari), kesim(lar)i va ko‘prigi(klari) topiladigan graf hosil bo‘lsin.

TOPSHIRIQ №58

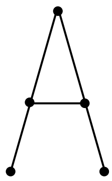
1. Qator uzoqlashuvchi bo‘lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
2. 6- shaklda tasvirlangan uchta grafni (bu graflarda qirralarga kesmalar, kesmalarning kesishish nuqtalariga esa uchlar mos qo‘yilgan deb hisoblanadi) tekshirib, ularning Eyler grafi bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlang. Eyler grafi bo‘lganlarining har biridagi Eyler sikllaridan bir nechasini toping. Eyler grafi bo‘lmaganlarining yarim Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.



6- shakl

TOPSHIRIQ №59

1. Funksional qator sonli qatordan nima bilan farq qiladi?
2. Lotin alifbosi bosma harflarning har biriga graf sifatida qarab (masalan A harfiga mos graf 7- shaklda tasvirlangan), ular orasidan Eyler grafi bo‘la olmaydiganlarini aniqlang.



7- shakl

TOPSHIRIQ №60

1. Darajali qator qanday ko‘rinishga ega?
2. K_n grafning Eyler grafi bo‘lishi sartlarini toping.