O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI
MATEMATIK MODELLASHTIRISH KAFEDRASI

Ro’yxatga olindi:	“Tasdiqlayman”
№__________	O’quv ishlari bo’yicha prorektor
2019 yil «___» _________	_______ prof. A.S. Soleev
	“___” _________2019 yil

«KOMPYUTERLI MODELLASHTIRISH»

O’QUV – USLUBIY MAJMUA

(Moddle tizimi asosida)

Bilim sohasi: 100 000 – Gumanitar soha

Ta’lim sohasi: 140 000 –Tabiiy fanlar

Ta’lim yo’nalishi: 5110700 – Informatika o’qitish metodikasi

Tuzuvchilar:	SamDU Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi dotsenti **Maxmudov Jamol.** SamDU Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi assistenti **Qaytarov Zohidjon.**
Kafedra mudiri:	**Prof. Xo‘jayorov B.**
Fakultet dekani:	**dots. A.I. Babayarov**

Samarqand - 2019

Maxmudov J.M., Qaytarov Z.D "Kompyuterli modellashtirish" fanidan o'quv-uslubiy majmua. – Samarqand: SamDU nashri – 2019. 320 bet.

"Kompyuterli modellashtirish" fanidan ushbu o'quv-uslubiy majmua oliy o'quv yurtlari 5110700 – informatika o'qitish metodikasi bakalavriat ta'lim yo'nalishlari 4-kurs talabalariga mo'ljallangan.

Taqrizchi:

Akilov J. -SamDAQI, fizika-matematika fanlari doktori, professor;

SamDU o'quv – uslubiy kengashining 2019 yil _________ dagi ____ -qarori bilan o'quv-uslubiy majmua sifatida nashrga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar:	–Amaliy matematika va informatika fakulteti, "Matematik modellashtirish" kafedrasi assistenti	**Maxmudov J.M**
	–Amaliy matematika va informatika fakulteti, "Matematik modellashtirish" kafedrasi assistenti	**Qaytarov Z.D**

Mazkur o’quv-uslubiy majmua Samarqand davlat universiteti 5110700 – “Informatika o’qitish metodikasi” bakalavriat ta’lim yo’nalishlari o’quv rejasidagi “Interaktiv dasturiy vositalar yaratish texnologiyalari” fani bo’yicha Samarqand davlat universiteti tomonidan tasdiqlangan namunaviy va dasturi asosida ishlab chiqilgan.

“Matematik modellashtirish” kafedrasining 2019 yil ______________dagi __–son majlisida muhokama etilgan va fakultet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: __________ prof. B.X.Xo’jayorov

“Amaliy matematika va informatika” fakulteti o’quv-uslubiy kengashining 2019 yil “___” _____________dagi “___”–son qarori bilan tasdiqlangan.

O’quv-uslubiy kengashi raisi: _________ dots. Sh. Mamatov

“Amaliy matematika va informatika” fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil “___” _____________dagi “___”–son qarori bilan chop qilishga tavsiya etilgan.

Fakultet kengashi raisi: ________ dots. A.B. Babayarov

Kelishildi:
O’quv uslubiy boshqarma boshlig’i

_________________ **dots. B.S. Aliqulov**

ANNOTATSIYA

Hozirgi kunda ta’lim muassasalalarida fanlarni zamonaviy kommunikatsion texnologiyalarda foydalangan holda o’tish o’quvchilar ongiga fanning asos tushunchalarini singdirishda muhim hisoblanadi. Mazkur majmuada 5110700 – “Informatika o’qitish metodikasi” bakalavriat ta’lim yo’nalishi talabalari uchun darslarni talab darajasida tashkil etish uchun yordam beruvchi interaktiv dasturiy vositalar yaratish bo’yicha ko’rsatmalar berilgan.

Fanning maqsad va vazifalari:

Fanning maqsadi – bakalavrlarda amaliy masalalarni hal etishda modellashtirish usul va vositalaridan foydalanish, hususan matematik va kompyuterli modellashtirish texnologiyalarini chuqur o’zlashtirib olish, ta’lim tizimiga oid ilmiy izlanishlarda ulardan unumli foydalana olish malaka va ko’nikmalarini hosil qilishdan iborat.

Fanning asosiy masalasi – fizik, matematik va boshqa modellarni tuzish, formallashtirish, amaliy masalalar va ularni kompyuterda yechish, kompyuterda modellashtirish, hisoblash eksperimentini o’tkazish, matematik modellarni yechish usullari, sonli usullar, kuzatish natijalarini qayta ishlash, matematik dasturlash, chiziqli dasturlash, kompyuterli modellashtirish texnologiyasi, kompyuterli modellashtirishning dasturiy vositalari, o’quv kompyuterli modellar, kompyuterli modellarni ishlab chiqish va ulardan o’quv jarayonida foydalanish va ulardan muayan foydalanish haqida ma’lumot berishdan iborat.

M U N D A R I J A

«Kompyuterli modellashtirish» fanining
2019/2020 o‘quv yili uchun mo’ljallangan
SILLABUSI

<table>
<tr><td colspan="6">Fanning qisqacha tavsifi</td></tr>
<tr><td>OTMning nomi va joylashgan manzili:</td><td colspan="2">Samarqand davlat universiteti</td><td colspan="3">Universitet xiyoboni, 15</td></tr>
<tr><td>Kafedra:</td><td colspan="2">Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash</td><td colspan="3">Amaliy matematika va informatika fakulteti binosida</td></tr>
<tr><td>Ta’lim sohasi va yo‘nalishi:</td><td>Ta’lim sohasi: 110 000 – Pedagogika</td><td colspan="4">Ta’lim yo’nalishi: 5110700 – Informatika o’qitish metodikasi</td></tr>
<tr><td>Fanni (kursni) olib boradigan o‘qituvchi to‘g‘risida ma’lumot:</td><td>O'qituvchi: Maxmudov J, Qaytarov Z</td><td>e-mail:</td><td colspan="3">j.makhmudov@inbox.ru
z.qaytarov@gmail.com</td></tr>
<tr><td>Darsmashg‘ulotinio‘tkazishningvaqtivajoyi:</td><td>O'quv-uslubiy bo'lim tomonidan ishlab chiqilgan jadval asosida universitetning o'quv binolarida</td><td>Kursning boshlanish va davom etish muddati:</td><td colspan="3">Bakalavriat ta'lim yo'nalishi o'quv rejasiga muvofiq, ettinchi semestrlarda</td></tr>
<tr><td>Individual grafik asosida professor-o‘qituvchining talabalar bilan ishlash vaqti:</td><td colspan="5">Haftaning dushanba va payshanba kunlari 15.00 dan 17.00 gacha</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fanga ajratilgan o‘quv soatlarining o‘quv turlari bo‘yicha taqsimoti</td><td colspan="3">Auditoriya soatlari</td><td rowspan="2">Mustaqil ta’lim:</td><td rowspan="2">68</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ma'ruza: 32
Amaliy: 40
Laboratoriya: 40</td></tr>
<tr><td>Fanning boshqa fanlar bilan uzviy aloqasi (prerekvizitlari):</td><td colspan="5">Matematik analiz, Diskret matematika, Informatika, Oliy matematika, Informatsion texnologiyalar va dasturlash</td></tr>
</table>

Fanning maqsadi	Bakalavrlarda amaliy masalalarni hal etishda modellashtirish usul va vositalaridan foydalanish, hususan matematik va kompyuterli modellashtirish texnologiyalarini chuqur o'zlashtirib olish, ta'lim tizimiga oid ilmiy izlanishlarda ulardan unumli foydalana olish malaka va ko'nikmalarini hosil qilishdan iborat.
Fanning asosiy masalasi	Fizik, matematik va boshqa modellarni tuzish, formallashtirish, amaliy masalalar va ularni kompyuterda yechish, kompyuterda modellashtirish, hisoblash eksperimentni o'tkazish matematik modellarni yechish usullari, sonli usullar, kuzatish natijalarini qayta ishlash, matematik dasturlash, chiziqli dasturlash, kompyuterli modellashtirish texnologiyasi, kompyuterli modellashtirishning dasturiy vositalari, o'quv kompyuterli modellar, kompyuterli modellarni ishlab chiqish va ulardan o'quv jarayonida foydalanish va ulardan muayan foydalanish haqida ma'lumot berishdan iborat.
Fan bo'yicha talabalarning bilimiga, ko'nikma va malakasiga qo'yiladigan talablar.	« Kompyuterli modellashtirish » o'quv fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr: model tushunchasi va uning turlari, fan va texnikada modellashtirish asoslari, fizik va matematik modellarining turlari, ularning formallashtirish yo'llari, modellarni qurishning asosiy tamoyillari va qossalari, amaliy masalalar va ularni kompyuterda yechish bosqichlari, matematik va axborotli modellashtirish tushunchalari, kompyuterli modellashtirish tushunchasi va bosqichlari, qisoblash eksperimenti tununchasi va uning etaplari, eksperiment natijalarining aniqliligi va ishonchliligi, modelning taqlil qilish asoslarini, matematik modellarni yechish usullari, sonli usullari, algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish usullari, vatarlar, urinmalar va iterasiya usullari, tenglamalar sistemasini taqribiy yechish usullari, funksiyalarni interpolyasiyalash va yaqinlashtirish, sonli differensiallash va integrallash, kuzatish natijalarini

	qayta ishlash usullari, matematik dasturlash asoslari, chiziqli dasturlash masalasi va uni yechish usullari, kompyuterli modellashtirish texnologiyasi, kompyuterli modellashtirishning dasturiy vositalari, O'quv kompyuterli modellari, kompyuterli modellarni ishlab chiqish yo'llari va ulardan O'quv jarayonida foydalanish usullarini **bilishlari kerak**; - fizik va matematik modellarini tuzish, ularning formallashtirish va ularni kompyuterda yechish, qisoblash eksperimentini o'tkazish, eksperiment natijalarining aniqliligi va ishonchliligi asoslash, modelni taqlil etish, matematik modellarni yechish, sonli usullaridan foydalanib algebraik va transsendent tenglamalarini yechish, tenglamalar sistemasini taqribiy yechish, funksiyalarni interpolyasiyalash va yaqinlashtirish, sonli differensiallash va integrallash, kuzatish natijalarini qayta ishlash, matematik dasturlash va chiziqli dasturlash masalalarini yechish, kompyuterli modellarni ishlab chiqish va ulardan o'quv jarayonida foydalanish bo'yicha etarlik **ko'nikmalariga ega bo'lishlari kerak**; - fizik va matematik modellarini yaratish, formallashtirish, amaliy masalalar va ularni kompyuterda yechish, qisoblash eksperimentini o'tkazish, eksperiment natijalarining aniqliligi va ishonchliligi asoslash, matematik modellarni yechish usullaridan foydalanish, sonli usullaridan foydalanish, matematik dasturlash va chiziqli dasturlash masalasini yechish usullari, kompyuterli modellashtirish texnologiyasi, kompyuterli modellashtirishning dasturiy vositalari va ulardan o'quv jarayonida foydalana olish **malakalariga ega bo'lishlari kerak**.
Talabalar uchun talablar	Universitetning odob-ahloq kodeksi talablarigi qat'iy rioya qilish, shuningdek: -professor-o'qituvchi auditoriga kirganida o'tirgan joydan turib "Assalomu alaykum" deb kutib olish; - uyali aloqa vositalarini o'chirib qo'yish;

	- professor-o‘qituvchidan so‘ng dars mashg‘ulotiga kech kelgan talaba auditoriyaga kiritilmaydi; - professor-o‘qituvchi va guruhdoshlarga qo‘pollik qilmaslik, so‘z talashmaslik, hurmat bilan munosabatda bo‘lish; - universitet ichki tartib - intizom qoidalariga rioya qilish; -mashg‘ulotlar vaqtida o‘qituvchining ruxsatisiz auditoriyadan chiqmaslik; - uy vazifasi va mustaqil ish topshiriqlarini o‘z vaqtida va sifatli bajarish; -ko‘chirmachilik (plagiat) qilmaslik; - darslarga qatnashish majburiy, sababsiz 2 (ikki) va undan ortiq dars qoldirgan talaba keyingi mashg‘ulotlarga tegishli sabablarni aniqlaganidan keyin fakultet dekanining ruxsati bilan dars mashg’ulotlariga kiritiladi; - sababli dars qoldirilgan taqdirda, professor-o‘qituvchiga ma’lumotnoma taqdim etish; - har qanday holatlarda ham qoldirilgan darslar qayta o‘zlashtirilishi shart; - ma’ruza va amaliy darslariga oldindan tayyorlanib kelish va faol ishtirok etish; - qo‘shimcha ravishda bajarilgan taqdimot, mustaqil ish, referat, turli xil tadbirlar va ilmiy- amaliy anjumanlarda ma’ruzalar bilan ishtirok etganligi uchun qo’shimcha ballar beriladi; - talabaga o‘z vaqtida bajarilmagan mustaqil ish, uy vazifasi, tartib - intizomi bo‘yicha jarima ballari belgilanadi; - talaba reyting ballidan norozi bo‘lsa fan bo‘yicha nazorat turlari e’lon qilingan vaqtdan boshlab 1 kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat qiladi va apellyatsiya komissiyasi shu kunning o‘zida talabaning arizasini ko‘rib chiqib xulosa chiqaradi.

Elektron pochta orqali munosabatlar tartibi	Professor-o‘qituvchi va talaba o‘rtasidagi aloqa elektron pochta orqali ham amalga oshirilishi mumkin, telefon orqali baho masalasi muhokama qilimnaydi, lekin oraliq, joriy va yakuniy baholash faqatgina universitet hududida, ajratilgan xonalarda va dars davomida amalga oshiriladi. Elektron pochtani ochish vaqti soat 15.00 dan 20.00 gacha.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Ro'yxatga olindi:
№ 2064

"TASDIQLAYMAN"
SamDU o'quv ishlari prorektori
A.S.
____
2019 yil ________

«Kompyuterli modellashtirish» fanidan

ISHCHI O'QUV DASTUR

Bilim sohasi: 100 000 – Gumanitar soha

Ta'lim sohasi: 110 000 – Pedagogika

Ta'lim yo'nalishi: 5110700 – Informatika o'qitish metodikasi (4-kurslar uchun)

№	Mashg'ulot turi	Ajratilgan soat			Jami
		6-semestr (3-kurs)	7-semestr (4-kurs)	8-semestr (4-kurs)	
1.	Nazariy mashg'ulot	8	12	12	32
2.	Amaliy mashg'ulot	12	16	12	40
3.	Loboratoriya mashg'ulot	12	16	12	40
3.	Mustaqil ish	20	28	20	68
	JAMI:	**52**	**72**	**56**	**180**

Samarqand – 2019

Fanning ishchi o'quv dasturi o'quv reja va namunaviy o'quv dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

J.Maxmudov – kafedra katta o'qituvchisi, f.-m.f.d.
B.Fayziyev - kafedra katta o'qituvchisi, PhD

Taqrizchi:

J.Akilov – SamDAQI, «Oliy matematika» kafedrasi professori, f.-m.f.d., professor

Fanning ishchi o'quv dasturi kafedraning 2019 yil "29" avgustdagi 1–sonli yig'ilishida muhokama etilgan va ma'qullangan.

Kafedra mudiri **prof. B.Xo'jayorov**

Fanning ishchi o'quv dasturi amaliy matematika va informatika fakulteti fakulteti o'quv-uslubiy kengashining 2019 yil "___"________dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

O'quv-uslubiy kengash raisi: **dots.Mamatov Sh.S.**

Fanning ishchi o'quv dasturi amaliy matematika va informatika fakulteti fakulteti kengashining 2019 yil "___"________dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

Fakultet Kengashi raisi **A.Babayarov**

Kelishildi:
O'quv-uslubiy
boshqarma boshlig'i
________________dots. Aliqulov B.S.

K I R I S H

Ta’lim sohasidagi tub islohatlarning asosiy maqsadi jahon andozalari asosida bilimlar berish va raqobatdosh kadrlar tayyorlashdir. Shuning uchun ta’lim tizimidagi 5110700 – Informatika o’qitish metodikasi yo’nalishida o’qitiladigan fanlar ham zamonaviy fanlardan hisoblanadi. Ushbu ishchi o’quv dastur bugungi kunning zamonaviy bilimlari bilan yangilangan va qayta ishlangan dastur bo’lib, unda fanning nazariy va amaliy jihatlariga alohida e’tibor qaratilgan.

«Kompyuterli modellashtirish» fani insonlarda axborot muhitida ma’lum bir dunyoqarashni shakllantirishga hizmat qilishi bilan bir qatorda, uning axboriy madaniyatni egallashida asosiy rol o’ynaydi. Bugungi «Axborot» asrida yoshlarning kompyuter savodxonligini oshiribgina qolmay, balki grafik ma’lumotlar bilan ishlash imkoniyatlarini oshiradi. Umumiy o’rta ta’lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlarda «Informatika va axborot texnologiyalari» mutahassislaridagi fanlarni o’qitish uchun kadrlarni tayyorlab beradi.

Fanning maqsad va vazifalari:

Fanning maqsadi – bakalavrlarda amaliy masalalarni hal etishda modellashtirish usul va vositalaridan foydalanish, hususan matematik va kompyuterli modellashtirish texnologiyalarini chuqur o’zlashtirib olish, ta’lim tizimiga oid ilmiy izlanishlarda ulardan unumli foydalana olish malaka va ko’nikmalarini hosil qilishdan iborat.

Fanning asosiy masalasi – fizik, matematik va boshqa modellarni tuzish, formallashtirish, amaliy masalalar va ularni kompyuterda yechish, kompyuterda modellashtirish, hisoblash eksperimentini o’tkazish, matematik modellarni yechish usullari, sonli usullar, kuzatish natijalarini qayta ishlash, matematik dasturlash, chiziqli dasturlash, kompyuterli modellashtirish texnologiyasi, kompyuterli modellashtirishning dasturiy vositalari, o’quv kompyuterli modellar, kompyuterli modellarni ishlab chiqish va ulardan o’quv jarayonida foydalanish va ulardan muayan foydalanish haqida ma’lumot berishdan iborat.

“Kompyuterli modellashtirish” fani bo’yicha talabalarning bilim, ko’nikma va malakalariga quyidagi talablar qo’yiladi:

- model tushunchasi va uning turlarini, modellashtirish, modellarni qurishning asosiy tamoillari va xossalarini, amaliy masalalarni kompyuterda yechish bosqichlari, hisoblash eksperimenti, eksperiment natijalarining aniqliligi va ishonchliligi, modelning tahlili, matematik modellarni yechish usullari, matematik dasturlash, chiziqli dasturlash masalasi va uni yechish usullari, kompyuterli modellashtirish texnologiyasi, kompyuterli modellashtirishning dasturiy vositalari, kompyuterli modellarni ishlab chiqishga doir **bilimga**;
- fizik va matematik modellar, formallashtirish, modellarni qurishning asosiy tamoyillari va xossalarini, amaliy masalalar va ularni kompyuterda yechish bosqichlari, matematik va axborotli modellashtirish, kompyuterli modellashtirish, hisoblash eksperimenti, eksperiment natijalarining aniqliligi va ishonchliligi, modelning tahlili va talqini, sonli usullar, algebraik va transsendent tenglamalani taqribiy yechish usullari, vatarlar, urinmalar va iteraisiya usullari, tenglamalar sistemasini taqribiy yechish usullari,

funksiyalarni interpolyatsiyalash va yaqinlashtirish, sonli differensiallash va integrallash, kuzatish natijalarini qayta ishlash usullari, matematik dasturlash, chizlqli dasturlash masalasi va uni yechish usullari, kompyuterli modellarni ishlab chiqish ko'nikmasiga;

- modellarni qurish, amaliy masalalarni kompyuterda yechish. Matematik modellami yechish. algebraik va transsendent tenglamalarni, vatarlar, urinmalar va iteratsiya usullarida taqribiy yechish, funksiyalarni interpolyatsiyalash va yaqinlashtirish, sonli differensiallash va integrallash, kuzatish natijalarini qayta ishlash, dasturlash masalasi va uni yechish, kompyuterli modellashtirishning dasturiy vositalarida ishlash, o'quv kompyuterli modellar ishlab chiqish va ulardan o'quv jarayonida foydalanish **malakasiga ega bo'lishi lozim**.

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan bog'liqligi. Ushbu fan matematika, informatika, dasturlash tillari fanlari bilan bog'langan bo'lib, bu fanlarni talabalar chuqur o'zlashtirgan bo'lishlari zarur. Ushbu fan, texnika va ishlab chiqarishning amaliy masalalarini yechish bilan bog'liq bo'lgan hisoblash jarayonlarini taqribiy usullar bilan ishlash, bilim, ko'nikma va malakalarini egallashlarida asos bo'ladi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Talabalarning ushbu fanni o'zlashtirishlari uchun ular turli texnik obyektlar hisoblarini ilg'or va zamonaviy hisob usullarida bajara olishlari, hisob ishlarini shaxsiy kompyuterlarda bajara olishlari, informatika va axborot texnologiyalari fanini mukammal o'zlashtirib, yangi pedagogik va axborot texnologiyalarini tadbiq qilgan holda, Maple, Matlab kabi matematik dasturlar va mavjud darslik, ma'ruza matnlari, tarqatma materiallar, elektron materiallar va ko'rgazmali vositalardan unumli foydalanib, dastur tuzishlari hamda uni amalda bajara olishlari kerak. Bunda asosan, talabalar ma'ruzalar matnlarini o'rganish, uni amaliyot ishlari bilan birgalikda olib borish hamda amaliy mashg'ulotlar materiallarini shaxsiy kompyuterlarda bajarish ko'nikmalarni hosil qilishi kerak.

Fanni o'rganishda mashg'ulotlarning ma'ruza, amaliyot mashg'ulotlari, mustaqil ta'lim shakllaridan foydalaniladi va ilg'or pedagogik texnologiyaning zamonaviy elementlari qo'llaniladi.

Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim. Bu ta'lim o'z mohiyatiga ko'ra ta'lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to'laqonli rivojlantirishni ko'zda tutadi. Bu esa ta'limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma'lum bir ta'lim o;uvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog'liq o'qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondashilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondashuv. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o'zida mujassam etmog'i lozim: jarayonning mantiqiyligi, uning barcha bo'g'inlarini o'zaro bog'laganligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo'naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta'lim oluvchining faoliyatini aktivlashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo'naltirilgan ta'limni ifodalaydi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o’quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o’z-o’zini faollashtirishi va o’z-o’zini ko’rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta’limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta’lim beruvchi va ta’lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e’tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta’lim. Ta’lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta’lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni obyektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini, dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo’llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta’minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo’llash - yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o’quv jarayoniga qo’llash.

O’qitishning usullari va texnikasi. Ma’ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta’lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O’qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o’zaro o’rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

O’qitish vositalari: o’qitishning an’anaviy shakllari (darslik, ma’ruza matni) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikatsiya usullari: tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o’zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blis-so’rov, oraliq, joriy va yakunlovchi nazorat natijalarining tahlili asosida o’qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o’quv mashg’uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko’rinishidagi o’quv mashg’ulotlarini rejalashtirish, qo’yilgan maqsadga erishishda o’qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg’ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o’quv mashg’ulotida ham butun kurs davomida ham o’qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Kurs oxirida test topshiriqlari yoki yozma ish variantlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi.

Ushbu fanini o’qitish jarayonida kompyuter texnologiyasidan, matematik paketlardan (Maple, Matlab, Mathematica va MathCad) va maxsus dasturlardan foydalaniladi.

Ayrim mavzular bo’yicha talabalar bilimini baholash test asosida va kompyuter yordamida bajariladi. Internet tarmog’idagi materiallardan foydalaniladi, tarqatma materiallar tayyorlanadi, test tizimi hamda tayanch so’z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o’tkaziladi.

Ushbu fandan mashg’ulotlarning mavzular va soatlar bo’yicha taqsimlanishi

№	Mavzular nomi	Jami soat	Ma’-ruza	Ama-liyot	Labora-toriya	Mustaqil ta’lim

6-semestr						
1-mavzu. Model va modellashtirish tushunchalari.						
1.1	Model tushunchasi. Modellarning turlari: matematik model, iqtisodiy model, fizik model, modellashtirish tushunchasi.	5	1			4
2-mavzu. Matematik va axborotli modellashtirish.						
2.1	Axborotli va matematik modellar. Axborotli va matematik modellash. Axborotli va matematik modellarni qurish bosqichlari.	7	1	2		4
3-mavzu. Matematik modelni qurish metodlari.						
3.1	Matematik modellarni qurish metodlari. Tizimli yondashuv haqida tushuncha. Matematik modellarni qurishdagi asosiy tamoyillar.	10	2	2	2	4
4-mavzu. Xatoliklar arifmetikasi. Xatoliklarni aniqlashda differensial hisobini qo'llash.						
4.1	Xatolik, absolut va nisbiy xatoliklar. Taqribiy sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi, darajasi va ildizlarining absolut va nisbiy xatoliklari. Xatoliklarni aniqlashda differensial hisobini qo'llash.	14	2	4	4	4
5-mavzu. Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish usullari.						
5.1	Alfebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish metodlari. Kesmani ikkiga bo'lish, urimalar, vatarlar va birlashgan metodlar.	16	2	4	6	4
	6 semestr bo'yicha jami	52	8	12	12	20
6-mavzu. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari.						
6.1	Chiziqli tenglamalar sistemasini aniq va taqribiy yechish metodlari haqida tushuncha. Gauss va iteratsiya metodlari. Ularning hatoliklari.	12	2	4	4	4
7-mavzu. Funksiyalarni interpolyasiyalashning uniumiy masalasi. Chekli ayirmalar.						
7.1	Interpolyatsiyalash masalasini qo'yilishi, uning geometrik ma'nosi. Logranj interpolyasiyon formulasi.	10	2	2	2	4
8-mavzu. Nyutonning I va II interpolyatsion formulalari. Xatoliklarni baholash.						
8.1	Chekli ayirmalar. Nyutonning 1 va 2-interpolyasion formulalari. Interpolyatsion formulalarning hatoliklari.	10	2	2	2	4

9-mavzu. Sonli differensiallash.						
9.1	Sonli differensiallash tushunchasi. Lagranj va Nyutonning interpolyatsion formulalarini differensiallash.	10	2	2	2	4
10-mavzu. Aniq integralni taqriban hisoblash usullari.						
10.1	Aniq imtergrallami to'g'ri to'thurchak, trapetsiya va parabolalar metodi bilan hisoblash. Metodlarning hatoliklari.	16	2	4	4	6
11-mavzu. Birinchi tartibli ODTlarni taqribiy yechish.						
11.1	Oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini qo'yilishi. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning metodlari.	12	2	2	2	6
	7 semestr bo'yicha jami	72	12	16	16	28
12-mavzu. Eyler va Runge-Kutta usullari.						
12.1	Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning Eyler va Runge-Kutta metodlari, ularning hatoliklari.	10	2	2	2	4
13-mavzu. Chiziqli dasturlash masalalarining qo'yilishi va unda qo'llaniladigan modellar.						
13.1	Chiziqli dasturlash masalalarining qo'yilishi. Chiziqli dasturlashga keltiriladigan masalalarga doir turli sohalardan misollar.	10	2	2	2	4
14-mavzu. Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish.						
14.1	Chiziqli dasturlash masalalarini yechish metodlari. Simpleks usulida chiziqli dasturlash masalalarini yechish.	10	2	2	2	4
15-mavzu. Transpotga oid masalalar va ularni yechish usullari.						
15.1	Transpotga oid masalalarni yechish metodlari. Transpotga oid masalalarni shimoli–g'arb metodida yechish.	10	2	2	2	4
16-mavzu. Matematika statistika elementlari.						
16.1	Kuzatish natijalarini qayta ishlsh. Eng kichik kvadratlar metodi. Regressiya va korelyasiya koeffisientlari. Regressiya chizig'i.	16	4	4	4	4
	8 semestr bo'yicha jami	**56**	12	12	12	20

ASOSIY QISM

Fanning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Asosiy qismda (ma'ruza) fanning mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo'yicha talabalarga DTS asosida yetkazilishi zarur bo'lgan bilim va ko'nikmalar to'la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo'yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo'layotgan iztimoiy-siyosiy va demokratik o'zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalardagi islohatlarning ustivor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so'ngi yutuqlari e'tiborga olinishi tavsiya etiladi.

Ma'ruza mashg'ulotlarining tavsiya etiladigan mavzulari

6-semestr (8 soat)

1-mavzu. Model va modellashtirish tushunchalari. (1 soat). Model tushunchasi. Modellaming turlari: matematik model, iqtisodiy model, fizik model, modellashtirish tushunchasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *ma'ruza, namoyish etish, blis-so'rov, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

2-mavzu. Matematik va axborotli modellashtirish (1 soat). Axborotli va matematik modellar. Axborotli va matematik modellash. Axborotli va matematik modellarni qurish bosqichlari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *ma'ruza, namoyish etish, blis-so'rov, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

3-mavzu. Matematik modelni qurish metodlari. (2 soat). Matematik modellarni qurish metodlari. Tizimli yondashuv haqida tushuncha. Matematik modellarni qurishdagi asosiy tamoyillar.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *ma'ruza, namoyish etish, blis-so'rov, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

4-mavzu. Xatoliklar arifmetikasi. Xatoliklarni aniqlashda differensial hisobini qo'llash. (2 soat). Xatolik, absolut va nisbiy xatoliklar. Taqribiy sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi, darajasi va ildizlarining absolut va nisbiy xatoliklari. Xatoliklarni aniqlashda differensial hisobini qo'llash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *ma'ruza, namoyish etish, blis-so'rov, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

5-mavzu. Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish usullari. (2 soat). Alfebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish metodlari. Kesmani ikkiga bo'lish, urimalar, vatarlar va birlashgan metodlar.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *ma'ruza, namoyish etish, blis-so'rov, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

Ushbu fan bo'yicha ma'ruza mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi

№	**Ma'ruza mavzulari**	**Soat**
	6-semestr	
1.	Model tushunchasi. Modellarning turlari: matematik model, iqtisodiy model, fizik model, modellashtirish tushunchasi. Axborotli va matematik modellar. Axborotli va matematik modellash. Axborotli va matematik modellarni qurish bosqichlari.	2
2.	Matematik modellarni qurish metodlari. Tizimli yondashuv haqida tushuncha. Matematik modellarni qurishdagi asosiy tamoyillar.	2
3.	Xatolik, absolut va nisbiy xatoliklar. Taqribiy sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi, darajasi va ildizlarining absolut va nisbiy xatoliklari. Xatoliklarni aniqlashda differensial hisobini qo'llash.	2
4.	Alfebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish metodlari. Kesmani ikkiga bo'lish, urimalar, vatarlar va birlashgan metodlar.	2
	7-semestr	
5.	Chiziqli tenglamalar sistemasini aniq va taqribiy yechish metodlari haqida tushuncha. Gauss va iteratsiya metodlari. Ularning hatoliklari.	2
6.	Interpolyatsiyalash masalasini qo'yilishi, uning geometrik ma'nosi. Logranj interpolyasiyon formulasi.	2
7.	Chekli ayirmalar. Nyutonning 1 va 2-interpolyasion formulalari. Interpolyatsion formulalarning hatoliklari.	2
8.	Sonli differensiallash tushunchasi. Lagranj va Nyutonning interpolyatsion formulalarini differensiallash.	2
9.	Aniq imtergrallami to'g'ri to'thurchak, trapetsiya va parabolalar metodi bilan hisoblash. Metodlarning hatoliklari.	2
10	Oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini qo'yilishi. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning metodlari.	2
	8-semestr	

11.	Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning Eyler va Runge-Kutta metodlari, ularning hatoliklari.	2
12.	Chiziqli dasturlash masalalarining qo'yilishi. Chiziqli dasturlashga keltiriladigan masalalarga doir turli sohalardan misollar.	2
13.	Chiziqli dasturlash masalalarini yechish metodlari. Simpleks usulida chiziqli dasturlash masalalarini yechish.	2
14.	Transpotga oid masalalarni yechish metodlari. Transpotga oid masalalarni shimoli–g'arb metodida yechish.	2
15.	Kuzatish natijalarini qayta ishlsh. Eng kichik kvadratlar metodi. Regressiya va korelyasiya koeffisientlari. Regressiya chizig'i.	4

Amaliy mashg'ulotlarning tavsiya etiladigan mavzulari

6-semestr (12 soat)

1. Turli modeller tuzishga doir misollar yechish (2 soat). Matematik model. Model – algoritm – dastur.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

2. Xatoliklar nazariyasi elementlari. Xatoliklar. Absolyut va nisbiy xatolik. (2 soat). Xatoliklar. Absolyut va nisbiy xatolik. Funksiya xatoligi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

3. Xatoliklar nazariyasi elementlari. Funksiya xatoligi. (2 soat). Funksiya xatoligini aniqlash, funksiya xatoligini baholash usullari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

4. Bir noma'lumli algrebraik va transsendent tenglamalarni vatarlar va urinmalar usulida taqribiy yechish. (2 soat). Vatarlar usuli, Nyuton usuli.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blits-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

5. Bir noma'lumli algrebraik va transsendent tenglamalarni oddiy iteratsiya usulida echish. (2 soat). Oddiy iteratsiya usuli, iteratsiya xatoligini hisoblash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

7-semestr (16 soat)

6. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasini kvadrat ildizlar usulida yechish. (2 soat). Chiziqli tenglamalar sistemasi, Gauss usuli, kvadrat ildizlar usuli.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

7. Chiziqli tenglamalar sistemasini iterasiya usulida yechish. (2 soat). Itertsiya usuli.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

8. Funksiyalarni interpolyasiyalash. Lagranj interpolyasion formulasi. (2 soat). Interpolyatsiya, Lagranj usuli.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

9. Nyutonning 1-2 interpolyasion formulalari (Teng uzoqlikda va teng uzoqlikda bo'lmagan tugunlar uchun). Markaziy ayirmali interpolyasion formulasi va ularning yaqinlashishi. Gaussning 1-2-interpolyasion formulalari. (2 soat). Nyuton interpolyatsion formulalari, markaziy ayirmali interpolyatsion formulasi, Gaussning interpolyatsion formulalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

10. Lagranj va Nyutonning interpolyatsion formulalarini differensiallash. (2 soat). Interpolyatsion formulalarni differensiallash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

11. Trapesiya formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlikni baholash. (2 soat). Trapetsiya formulasi, trapetsiya formulasi xatoligi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

12. Simpson formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlikni baholash. (2 soat). Simpson formulasi, Simpson formulasi xatoligi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

13. Koshi masalasini taqribiy yechishning Eyler usuli. (2 soat). Koshi masalasi. Koshi masalasini yechishning Eyler usuli.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

8-semestr (16 soat)

14. Koshi masalasini taqribiy yechishning Runge-Kutta usuli. (2 soat). Runge-Kutta usuli.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

15. Chiziqli dasturlashga keltiriladigan masallarning matematik modelini qurish. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish. (2 soat). Chiziqli dasturlash masalasi, chiziqli dasturlash masalalarining matematik modeli, grafik usul.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

16. Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish. (2 soat). Simpleks usuli.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

17. Transport masalasini yechishning shimoli - g'arb burchak usuli. (2 soat). Transport masalasi, shimoli-g'arb burchak usuli.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

18. Kuzatish natijalarini qayta ishlashga doir masalalar yechish. (4 soat). Kuzatish natijalarini qayta ishlash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *muammoli ta'lim. Blis-so'rov, pinbord, aqliy hujum, BBB, Insert, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1; A2; A3; A4; A5; Q6; Q7; Q8 Q9; Q10; Q11; Q12.

Ushbu fan bo'yicha amaliy mashg'ulotlarning kalendar tematik rejasi

№	Amaliy mashg'ulotlar mavzulari	Soat
1	Turli modeller tuzishga doir misollar yechish	2
2	Xatoliklar nazariyasi elementlari. Xatoliklar. Absolyut va nisbiy xatolik.	2
3	Xatoliklar nazariyasi elementlari. Funksiya xatoligi.	2
4	Bir noma'lumli algrebraik va transsendent tenglamalarni vatarlar va urinmalar usulida taqribiy yechish.	4
5	Bir noma'lumli algrebraik va transsendent tenglamalarni oddiy iteratsiya usulida echish.	2
	Jami 6 semestr bo'yicha	**12**
6	Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasini kvadrat ildizlar usulida yechish.	2
7	Chiziqli tenglamalar sistemasini iterasiya usulida yechish.	2
8	Funksiyalarni interpolyasiyalash. Lagranj interpolyasion formulasi.	2
9	Nyutonning 1-2 interpolyasion formulalari (Teng uzoqlikda va teng uzoqlikda bo'lmagan tugunlar uchun). Markaziy ayirmali interpolyasion formulasi va ularning yaqinlashishi. Gaussning 1-2-interpolyasion formulalari.	2
10	Lagranj va Nyutonning interpolyatsion formulalarini differensiallash.	2
11	Trapesiya formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlikni baholash.	2
12	Simpson formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlini baholash.	2
13	Koshi masalasini taqribiy yechishning Eyler usuli.	2
	Jami 7 semestr bo'yicha	**16**
14	Koshi masalasini taqribiy yechishning Runge-Kutta usuli.	2
15	Chiziqli dasturlashga keltiriladigan masallarning matematik modelini qurish. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish.	2
16	Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish.	2
17	Transport masalasini yechishning shimoli - g'arb burchak usuli.	2
18	Kuzatish nalijalarini qayta ishlashga doir masalalar yechish.	4
	Jami 8 semestr bo'yicha	**12**

V. Laboratoriya mashg'ulotlar bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Laboratoriya mashg'ulotlarida talabalar kompyuter yordamida grafik ma'lumotlami hosil qilish va amalda uning nalijalarini ko'rib, ularni tahlil qiladi va xulosalar chiqaradilar.

Ushbu fan bo'yicha laboratoriya mashg'ulotlarning kalendar tematik rejasi

№	Laboratoriya mashg'ulotlari mavzulari	Soat
1	Turli modeller tuzishga doir misollar yechish	2
2	Xatoliklaning umumiy formulasidan foydalanib xatoliklarni aniqlashga doir masalalar yechish	2
3	Xatoliklar nazariyasi elementlari. Funksiya xatoligi.	2
4	Bir noma'lumli algrebraik va transsendent tenglamalarni vatarlar va urinmalar usulida taqribiy yechish.	2
5	Bir noma'lumli algrebraik va transsendent tenglamalarni oddiy iteratsiya usulida echish.	2
	Jami 6 semestr bo'yicha	**12**
6	Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasini kvadrat ildizlar usulida yechish.	2
7	Chiziqli tenglamalar sistemasini iterasiya usulida yechish.	2
8	Funksiyalarni interpolyasiyalash. Lagranj interpolyasion formulasi.	2
9	Nyutonning 1-2 interpolyasion formulalari. Gaussning 1-2-interpolyasion formulalari.	2
10	Lagranj va Nyutonning interpolyatsion formulalarini differensiallash.	2
11	Trapesiya formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlikni baholash.	2
12	Simpson formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlini baholash.	2
13	Koshi masalasini taqribiy yechishning Eyler usuli.	2
	Jami 7 semestr bo'yicha	**16**
14	Koshi masalasini taqribiy yechishning Runge-Kutta usuli.	2
15	Chiziqli dasturlashga keltiriladigan masallarning matematik modelini qurish. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish.	2
16	Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish.	2
17	Transport masalasini yechishning shimoli - g'arb burchak usuli.	2
18	Kuzatish nalijalarini qayta ishlashga doir masalalar yechish.	4
	Jami 8 semestr bo'yicha	**12**

Mustaqil ta'lim tashkil etishning shakli va mazmuni.

Ushbu fan bo'yicha talabaning mustaqil ta'limi shu fanni o'rganish jarayonining tarkibiy qismi bo'lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to'la ta'minlangan.

Talabalar auditoriya mashg'ulotlarida professor-o'qituvchilarning ma'ruzasini tinglaydilar, misol va masalalar yechadilar. Auditoriyadan tashqarida talaba darslarga tayyorlanadi, adabiyotlarni konspekt qiladi, uy vazifa sifatida berilgan misol va masalalarni yechadi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o'rganish maqsadida qo'shimcha adabiyotlarni o'qib referatlar tayyorlaydi hamda mavzu bo'yicha testlar yechadi. Mustaqil ta'lim natijalari reyting tizimi asosida baholanadi.

Uyga vazifalarni bajarish, qo'shimcha darslik va adabiyotlardan yangi bilimlarni mustaqil o'rganish, kerakli ma'lumotlarni izlash va ularni topish yo'llarini aniqlash, Internet tarmoqlaridan foydalanib, ma'lumotlar to'plash va ilmiy izlanishlar olib borish, ilmiy to'garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib, ilmiy maqola va ma'ruzalar tayyorlash kabilar talabalarning darsda olgan bilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobiliyatini rivojlantiradi. Shuning uchun ham mustaqil ta'limsiz o'quv faoliyati samarali bo'lishi mumkin emas.

Uy vazifalarini tekshirish va baholash amaliy mashg'ulot olib boruvchi o'qituvchi tomonidan, konspektlarni va mavzuni o'zlashtirish darajasini tekshirish va baholash esa ma'ruza darslarini olib boruvchi o'qituvchi tomonidan har darsda amalga oshiriladi. Ushbu fandan mustaqil ish majmuasi fanning barcha mavzularini qamrab olgan va quyidagi mavzular ko'rinishida shakllantirilgan.

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

№	Mustaqil ta'lim mavzulari	Berilgan topshiriqlar	Bajar. muddati	Hajmi (soat)
	6-semestr			
1.	Masalani formallash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	1, 2 - haftalar	4
2.	Fan va texnikada modellash	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	3, 4 - haftalar	4
3.	Modellarni tuzishning asosiy tamoyillari va xossalari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	5, 6 - haftalar	4
4.	Masalaini yechishning axborot texnologiyasi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	7, 8 - haftalar	4
5.	Amaliy masalalarni modellashtirish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	9, 10- haftalar	4
	Jami			**20**
	7-semestr			
1.	Matematik va axborotli modellashtirish. Matematik modellar qurish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	1, 2 - haftalar	8

2.	Fizik modellar qurish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	3-6 - haftalar	4
3.	Matematik modelni qurish melodlari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	7-9 - haftalar	4
4.	Matematik modellarga qo'yiladigan asosiy talablar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	10-12 - haftalar	4
5.	Matematik modellashtirishning asosiy bosqichlari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	13-15 - haftalar	4
6.	Matematik modelning real ob'ekti orasidagi bog'liqlik	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	16-17 - haftalar	4
	Jami			**28**
	8-semestr			
1	Matematik modellarning adekvatligi. Modellashtirishning statistik asoslari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	1, 2 - haftalar	2
2	Gipotezalarni qo'yish. Gipotezalarni tekshirish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	3-6 - haftalar	4
3	Eksperiment natijalarini ishonchliligini tekshirish. Eksperiment natijalarini haqqoniyligini tekshirish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	7-9 - haftalar	4
4	Stoxastik modellar haqida tushuncha. Stoxastik modellarga doir misollar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	10-12 - haftalar	4
5	Algebraik tenglamalarni vatar usulida taqribiy yechish.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	13 -hafta	4
6	Transpotga oid masalalar va ularni yechish usullari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	14 -hafta	2
	Jami			**20**
	Jami			**68**

Dasturning informasion uslubiy ta'minoti

Mazkur fanni o'qitish jarayonida ta'limning zamonaviy usullari, pedagogik va axborot-kommunikasiya texnologiyalarini qo'llash nazarda tutilgan:

- nazariy mavzular zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentasiya va elektron-didaktik texnologiyalaridan foydalanilgan holda o'tkaziladi;
- amaliy mashg'ulotlarda aqliy hujum, guruhli fikrlash, "ish o'yini" va boshqa pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi;
- seminar mashg'ulotlarida yakka tartibda mavzu bo'yicha doklad, kichik guruhlar musobaqalari, guruhli fikrlash pedagogik texnologiyalarini qo'llash nazarda tutiladi.

Ushbu fandan talabalar bilimini reyting tizimi asosida baholash mezoni

Mazkur fan bo'yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma'lumotlar fan bo'yicha birinchi mashg'ulotda talabalarga e'lon qilinadi. Fan bo'yicha talabalarning bilim saviyasi va o'zlashtirish darajasining Davlat ta'lim standartlariga muvofiqligini ta'minlash uchun quyidagi nazorat turlari o'tkaziladi:

joriy nazorat (*JN*) – talabaning fan mavzulari bo'yicha bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg'ulotlarda og'zaki so'rov, test o'tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollokvium, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o'tkazilishi mumkin;

oraliq nazorat (*ON*) – semestr davomida o'quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o'z ichiga olgan) bo'limi tugallangandan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat bir semestrda ikki martagacha o'tkaziladi va shakli (yozma, og'zaki, test va hokazo) o'quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;

yakuniy nazorat (*YaN*) – semestr yakunida muayyan fan bo'yicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni talabalar tomonidan o'zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan "Yozma ish" shaklida yoki ba'zilari esa "Test" shaklida o'tkaziladi.

ON o'tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, ON natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda ON qayta o'tkaziladi.

Oliy ta'lim muassasasi rahbarining buyrug'i bilan ichki nazorat va monitoring bo'limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida YaN ni o'tkazish jarayoni muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, YaN natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda YaN qayta o'tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi, ko'nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

Ushbu fani bo'yicha talabalarning semestr davomidagi o'zlashtirish ko'rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi. Ushbu 100 ball baholash turlari bo'yicha quyidagicha taqsimlanadi: YaN - 30 ball, qolgan 70 ball esa JN - 35 ball va ON - 35 ball qilib taqsimlanadi.

Ball	Ball	Talabalarning bilim darajasi
86-100	A’lo	Xulosa va qaror qabul qilish. Ijodiy fikrlay olish. Mustaqil mushohada yurita olish. Olgan bilimlarini amalda qo’llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo’lish.
71-85	Yaxshi	Mustaqil mushohada qilish. Olgan bilimlarini amalda qo’llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo’lish.
55-70	Qoniqarli	Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo’lish.
0-54	Qoniqarsiz	Aniq tasavvurga ega bo’lmaslik. Bilmaslik.

- Fan bo’yicha saralash bali 55 ballni tashkil etadi. Talabaning saralash balidan past bo’lgan o’zlashtirishi reyting daftarchasida qayd etilmaydi.
- Talabalarning o’quv fani bo’yicha mustaqil ishi joriy, oraliq va yakuniy nazoratlar jarayonida tegishli topshiriqlarni bajarishi va unga ajratilgan ballardan kelib chiqqan holda baholanadi.
- Talabaning fan bo’yicha reytingi quyidagicha aniqlanadi: R=(V·O’)/100, bu yerda: V - semestrda fanga ajratilgan umumiy o’quv yuklamasi (soatlarda); O’ - fan bo’yicha o’zlashtirish darajasi (ballarda).
- Fan bo’yicha joriy va oraliq nazoratlarga ajratilgan umumiy ballning 55 foizi saralash ball hisoblanib, ushbu foizdan kam ball to’plagan talaba yakuniy nazoratga kiritilmaydi.
- Joriy JN va oraliq ON turlari bo’yicha 55 bal va undan yuqori balni to’plagan talaba fanni o’zlashtirgan deb hisoblanadi va ushbu fan bo’yicha yakuniy nazoratga kirmasligiga yo’l qo’yiladi.
- Talabaning semestr davomida fan bo’yicha to’plagan umumiy bali har bir nazorat turidan belgilangan qoidalarga muvofiq to’plagan ballari yig’indisiga teng.
- ON va YaN turlari kalendar tematik rejaga muvofiq dekanat tomonidan tuzilgan reyting nazorat jadvallari asosida o’tkaziladi. YaN semestrning oxirgi 2 haftasi mobaynida o’tkaziladi.
- JN va ON nazoratlarda saralash balidan kam ball to’plagan va uzrli sabablarga ko’ra nazoratlarda qatnasha olmagan talabaga qayta topshirish uchun, navbatdagi shu nazorat turigacha, so’nggi joriy va oraliq nazoratlar uchun esa yakuniy nazoratgacha bo’lgan muddat beriladi.
- Talabaning semestrda JN va ON turlari bo’yicha to’plagan ballari ushbu nazorat turlari umumiy balining 55 foizidan kam bo’lsa yoki semestr yakuniy joriy, oraliq va yakuniy nazorat turlari bo’yicha to’plagan ballari yig’indisi 55 baldan kam bo’lsa, u akademik qarzdor deb hisoblanadi.
- Talaba nazorat natijalaridan norozi bo’lsa, fan bo’yicha nazorat turi natijalari e’lon qilingan vaqtdan boshlab bir kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat etishi mumkin. Bunday holda fakultet dekanining taqdimnomasiga ko’ra rektor buyrug’i bilan 3 (uch) a’zodan kam bo’lmagan tarkibda apellyasiya komissiyasi tashkil etiladi.

- Apellyasiya komissiyasi talabalarning arizalarini ko'rib chiqib, shu kunning o'zida xulosasini bildiradi.
- Baholashning o'rnatilgan talablar asosida belgilangan muddatlarda o'tkazilishi hamda rasmiylashtirilishi fakultet dekani, kafedra muduri, o'quv-uslubiy boshqarma hamda ichki nazorat va monitoring bo'limi tomonidan nazorat qilinadi.

Fan bo`yicha joriy nazoratlarda talabalar bilimi va amaliy ko`nikma darajasini aniqlash mezoni

(maks. ball – 35)

Maksimal ball		Nazorat qilinadigan va baqolanadigan ish turlari	Baqolashda e'tibor qaratiladigan jiqatlar
1 – JN	2- JN		
4	4	Mavzular bo`yicha nazariy tayyorgarlik darajasi va darsdagi faollik	Asosiy tushunchalar, operatorlar, funktsiyalar va texnologik vositalarni bilish, moqiyatini tushunish, ijodiy fikrlay olish, bilimlarni amalda qo`llay olish.
5	5	Uyga berilgan topshiriqlarni bajarish sifati	Topshiriqlarni to`qri va to`liq bajarish, algoritm va dasturlarni tuzishda ijodiy yondashish, tushuntirib bera olish.
5	5	Nazorat ishlarni bajarish sifati	Topshiriqlarni to`qri va to`liq bajarish ijodiy yondashish, mustaqil fikrlash, natijalarni asoslay olish.
4	3	Mustaqil topshiriqlarni bajarilish sifati	Berilgan topshiriqlarni to`qri va to`liq bajarish mustaqil muloqaza yurita olish, bilimlarni amalda qo`llay olish, masalaga ijodiy yondashish moqiyatni tushunish va aytib bera olish.
18	17		

Fan bo`yicha oraliq va yakuniy nazoratlarda talabalar bilimi va amaliy ko`nikma darajasini aniqlash mezoni

(ON bo`yicha maks. ball – 35, YaB bo`yicha maks ball 30)

Savollar		ON (maks ball)		YaN (maks. ball)	Baqolashda e'tibor qaratiladigan jiqatlar
		1 – ON	2 – ON		
Nazariy	1 2	3 4	3 4	6 6 6	Asosiy tushunchalar, operatorlar, funktsiyalar va texnologik vositalarni bilish, moqiyatini tushunish, ijodiy fikrlay

					olish, bilimlarni nazariy asosini bilish va amalda qo`llay olish.
Amaliy	3 4	3 4	3 4	6	Topshiriqlarni to`qri va to`liq bajarish ijodiy yondashish, mustaqil fikrlash, echimni asoslay olish moqiyatini tushunish
Must. ish	5	3	4	6	Savolga to`liq va to`qri javob berish misollar bilan asoslash ijodiy yondashish moqiyatini tushunish va tushuntirib bera olish.
Jami		17	18	30	

Tavsiya etiladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar

1. Abduqodirov A.A. va boshqalar. Hisoblash matematikasi va dasturlash. O'quv qo'llanma. Toshkent. "O'qituvchi", 1996.
2. Abduqodirov A.A. Hisoblash matemalikasi va dasturlashdan laboratoriya ishlari. O'quv qo'llanma. Toshkent, "O'qiluvchi", 1990
3. Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш. Дарслик. Тошкент. Ўқитувчи, 1989.
4. Сафоева К. Математик программалаш. Ўқув қўлланма. Т.:УАЖБҲТ, 2004 й.
5. Safoeva K., Beknazarova N. Operasiyalarni tekshirishning matemalik usullari. 2-qism. O'quv qo'llanma. Toshkent, "O'qituvchi", 1990.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Исраилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 1- ва 2-қисмлар. – Тошкент: Ўқитувчи, 2003. – 450 б., 2008. - 340 б.
2. Ismatullaev G'.P., Jo'raev G'.U. Hisoblash usullaridan metodik qo'llanma. – Toshkent: UzMU nashri, 2007. – 108 bet.
3. Абдухамидов А.У., Худойназаров С. Ҳисоблаш усулларидан амалиёт ва лаборатория машғулотлари. – Тошкент: Ўқитувчи, 1995. – 240 с.
4. Крылов В.И., Бобоков В.В., Монастырний П.И. Вычислительные методы высшей математики. 1-2 том. – Минск: Высшая школа, 1972. – 540 с., 1975. – 630 с.
5. Воробьева Г.К., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М: Высшая школа, 1990. – 208 с.
6. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М: Наука, 2009. – 368 с.
7. Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с.

8. Калиткин Н. Н., Корякин П. В. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с.
9. Richard L. Burden and J. Douglas Faires. Numerical Analysis. *9th Edition.* Youngstown State University Press, 2011. – *895 p.*
10. L. Ridgway Scott. Numerical Analysis. Princeton University Press, 2011. – 342 p.

Internet resurslari va ziyonet saytlari

1. http://www.edu.uz – ta'lim sayti.
2. http://www.edu.ru – ta'lim sayti.
3. http://www.intuit.ru – masofaviy ta'lim sayti.
4. http://www.eqworld.ru – adabiyotlarning elektron varianti.
5. http://ru.wikipedia.org – erkin ensiklopediya «Vikipediya».
6. http://www.twirpx.com – adabiyotlarning elektron varianti.
7. http://www.ziyonet.uz - adabiyotlarning elektron variantlari
8. http://www.techgidravlika.ru – adabiyotlarning elektron varianti.
9. http://www.prepodu.net – adabiyotlarning elektron varianti.

MA’RUZA MATNI

1-ma’ruza

Model tushunchasi. Modellarning turlari: matematik model, iqtisodiy model, fizik model, modellashtirish tushunchasi. Axborotli va matematik modellar. Axborotli va matematik modellash. Axborotli va matematik modellarni qurish bosqichlari.

Reja:

1. Model va modellashtirish tushunchasi
2. Modellashtirish bosqichlari
3. Model turlari.

Tayanch iboralar: *Model va modellashtirish, modellarni qurish usullari, modellashtirish bosqichlari, modellashtirishda turli yondashuvlar ziddiyatsizligi, model turlari, matematik modellar, fizik va fizik-kimyoviy modellar, biologik va ijtimoiy-iqtisodiy modellar.*

1. Model va modellashtirish tushunchasi. Model (lot. “Modulus” – o‘lchov, me'yor) – biror ob'ekt yoki ob'ektlar tizimining obrazi yoki namunasidir.
Masalan, yerning modeli–globus, osmon va undagi yulduzlar modeli–planetariy ekrani, pasportdagi suratni shu pasport egasining modeli deyish mumkin.
Insoniyatni farovon hayot shart-sharoitlarini yaratish, tabiiy ofatlarni oldindan aniqlash muammolari qadimdan qiziqtirib kelgan. Shuning uchun ham insoniyat tashqi dunyoning turli hodisalarini o‘rganishi tabiiy holdir.
Aniq fan sohasi mutaxassislari u yoki bu jarayonning faqat ularni qiziqtirgan xossalarinigina o‘rganadilar. Masalan, geologlar yerning rivojlanish tarixini, ya'ni qachon, qaerda va qanday hayvonlar yashaganlari, o‘simliklar o‘sganligi, iqlim qanday o‘zgarganligini o‘rganadi. Bu ularga foydali qazilma konlarini topishlarida yordam beradi. Lekin ular yerda kishilik jamiyatining rivojlanish tarixini o‘rganishmaydi – bu bilan tarixchilar shug‘ullanadi.
Atrofimizdagi dunyoni o‘rganish natijasida noaniq va to‘liq bo‘lmagan ma'lumotlar olish mumkin. Lekin bu koinotga uchish, atom yadrosining sirini aniqlash, jamiyatning rivojlanish qonunlarini egallash va boshqalarga xalaqit bermaydi. Ular asosida o‘rganilayotgan hodisa va jarayonning modeli yaratiladi. Model ularning xususiyatlarini mumkin qadar to‘laroq akslantirishi zarur.
Modelning taqribiylik xarakteri turli ko‘rinishda namoyon bo‘lishi mumkin. Masalan, tajriba o‘tkazish mobaynida foydalaniladigan asboblarning aniqligi olinayotgan natijaning aniqligiga ta'sir etadi.

Modellashtirish – bilish ob'ektlarini ularning modellari yordamida tadqiq qilish, mavjud predmet va hodisalarning modellarini yasash va o‘rganishdir.
Modellashtirish uslublaridan hozirgi zamon fanlarida keng foydalanilmoqda. U ilmiy tadqiqot jarayonini yengillashtiradi, ba'zi hollarda esa murakkab ob'ektlarni o‘rganishning yagona vositasiga aylanadi. Mavhum, olisda joylashgan ob'ektlar, juda kichik hajmdagi ob'ektlarni o‘rganishda modellashtirishning ahamiyati katta. Modellashtirish uslubidan fizika, astranomiya, biologiya, ijtimoiy fanlarda, iqtisod fanlarida ob'ektlarning faqat ma'lum xususiyat va munosabatlarini aniqlashda ham foydalaniladi.

Uslubiyat sifatidan matematik modellashtirish matematika, fizika, biologiya va boshqa ilmiy fanlar bilan almashtirib bo‘lmaydi, ular bilan raqobat qilmaydi. Aksincha uning sintezlash rolini ta'kidlamasdan bo‘lmaydi. Matematik modellashtirish uchligini yaratish va qo‘llash turli metodlar va yondoshuvlar – chiziqsiz modellar sifat analizidan tortib zamonaviy dasturlash tillariga asoslanadi va fanning turli – tuman yo‘nalishlarini qo‘shimcha yangi rag‘batlantiradi.

Masalaga kengroq yondoshgan holda aytish mumkinki, modellashtirish turli “mutaxassislar” ijodiy faoliyatida uchraydi – tadqiqotchilar va tadbirkorlar, siyosatchilar va harbiy qo‘mondonlar. Bu sohalarga aniq fanlarning joriy qilinishi intuitiv “ modellash” ni chegaralab, ratsional metodlar qo‘llanilish maydonini kengaytirdi. Albatta, matematik modellashtirish samarali bo‘lish uchun u yaxshi ma'lum bo‘lgan professional talablarga javob berishi kerak: asosiy tushunchalar va farazlarni aniq for-mulirovkasi, ishlatilayotgan modellar adekvatligining aposterior analizi, hisoblash algoritmlari to‘g‘riligining kafolatlanishi va h.k.

Agar “inson faktori”, ya'ni murakkab formallashgan ob'ektlar ishtirokida sistemalarni modellashtirish haqida gap ketganda, yuqoridagi talablardan tashqari matematik va maishiy atamalarni (bir xil eshitiluvchi, ammo turli ma'noga ega) aniq farqlash, hodisa va jarayonlarni o‘rganishga tayyor matematik apparatni ehtiyotkorlik bilan qo‘llash va boshqa bir qator talablar ham qo‘shiladi.

Axborot jamiyati muammolarini hal etishda faqatgina kompyuter qudratiga va informatikaning boshqa vositalarigagina ishonib qolish unchalik ham to‘g‘ri emas. Matematik modellashtirish bosqichlarining doimiy mukammallashib borishi va uning zamonaviy axborot – modellash sistemalariga tadbiq etilishi metodologik imperativdir. Faqat uning bajarilishigina zaruriy yuqori texnologiyali, raqobatbardosh va rang-barang moddiy va intellektual mahsulotga ega bo‘lish mumkin. Atrofimizdagi olam qonunlari o‘zgarmas va tadqiqotlarda bundan samarali foydalanish mumkin. Bu matematik modellar universalligi xossasida o‘z aksini topgan.

Shunday qilib, matematik modellashtirish vositalarining imkoniyatlaridan mexanikadan tortib sotsiologiya fanlarida (ijtimoiy fanlarda) ham samarali foydalanish mumkin ekan.

2. Modellashtirish bosqichlari. Biror ob'ektni matematik modellashtirish masalasining qo‘yilishi aniq harakatlar rejasini yuzaga keltiradi. Uni shartli ravishda uch bosqichga bo‘lish mumkin: model – algoritm – dastur.

Birinchi bosqichda ob'ektning matematik formada asosiy xossalarini u bo‘ysunuvchi qonunlarni, qismlari uchun o‘rinli bog‘liqliklar va h.k. larni aks ettiruvchi “ekvivalenti” tanlanadi (yoki quriladi). Matematik model (yoki uning fragmentlari) nazariy metodlar yordamida tadqiq qilinadi, natijada esa ob'ekt haqida dastlabki muhim ma'lumotlar olish mumkin.

Ikkinchi bosqich- modelni kompyuterda amalga oshiruvchi algoritm quriladi (yoki tanlanadi). Model sonli metodlar qo‘llash uchun qulay shakldа tasvirlanadi, izlanayotgan kattaliklarni berilgan aniqlikda (shartlarda) topish uchun zaruriy hisoblash va mantiqiy operatsiyalar ketma-ketligi aniqlanadi.

Uchinchi bosqichda model va algoritmni komyuter tushunadigan tilga “o‘giruvchi” dastur yaratiladi.

Ular uchun ham tejamlilik va moslashuvchanlik talablari qo‘yiladi. Dasturlarni bevosita “tajriba qurilmasi” – kompyuterda sinash uchun yaroqli bo‘lgan, o‘rganilayotgan ob'ektning “elektron” ekvivalenti, modeli deb atash ham mumkin.

“Model – algoritm – dastur” uchligi tadqiqotchi qo‘lida universal, egiluvchan va arzon vositaga aylanib, u avvalo “sinov” hisoblash tajribalarida to‘g‘rilanadi va testlanadi. Keyin modelning berilgan ob'ektning barcha zaruriy sonli va sifat xossalarini aniqlovchi turli – tuman va to‘la “sinov” lar o‘tkaziladi.

Modellashtirish jarayoni, kerak bo‘lsa, uchlikning barcha bo‘g‘inlarini (bosqichlarini) yaxshilash va aniqlashtirish bilan birga olib boriladi.

1.3. Model turlari. Modelni tanlash vositalariga qarab umumiy uch guruhga ajratish mumkin: **abstrakt, fizik** va **biologik modellar.**

Modellarning to‘laroq mazmuni bilan quyida tanishtirib o‘tiladi:

Abstrakt modellar qatoriga matematik, matematik-mantiqiy va shu kabi modellar kiradi. **Fizik** modellar qatoriga kichiklashtirilgan maketlar, turli asbob va qurilmalar, trenajyorlar va shu kabilar kiritiladi.

Fizik model. Tekshirilayotgan jarayonning tabiati va geometrik tuzilishi asl nusxadagidek, ammo undan miqdor (o‘lchami, tezligi, ko‘lami) jihatidan farq qiladigan modellar, masalan, samolyot, kema, avtomobil, poezd, GES va boshqalarning modellari fizik modelga misol bo‘la oladi.

Fizik-kimyoviy modellar biologik tuzilish, funksiya yoki jarayonlarni fizik yoki kimyoviy vositalar bilan qaytadan hosil qilishdir.

Matematik modellar. Tirik organizmlarning tuzilishi, o‘zaro aloqasi vazifasiga oid qonuniyatlarning matematik va mantiqiy-matematik tavsifidan iborat bo‘lib, tajriba ma'lumotlariga ko‘ra yoki mantiqiy asosida tuziladi, so‘ngra tajriba yo‘li bilan tekshirib ko‘riladi.

Biologik hodisalarning matematik modellarini kompyuterda o‘rganish tekshirilayotgan biologik jarayonning o‘zgarish xarakterini oldindan bilish imkonini beradi. Shuni ta'kidlash kerakki, bunday jarayonlarni tajriba yo‘li bilan tashkil qilish va o‘tkazish ba'zan juda qiyin kechadi.

Biologik model turli tirik ob'ektlar va ularning qismlari-molekula, hujayra, organizm va shu kabilarga xos biologik tuzilish, funksiya va jarayonlarni modellashda qo‘llaniladi. Biologiyada, asosan biologik, fizik va matematik modellardan foydalaniladi.

Ijtimoiy-iqtisodiy modellar taxminan, 18-asrdan qo‘llanila boshlandi. F. Kenening “Iqtisodiy jadvallar”ida birinchi marta butun ijtimoiy takror ishlab chiqarish jarayonining shakllanishini ko‘rsatishiga harakat qilingan. Iqtisodiy tizimlarning turli faoliyat yo‘nalishlarini o‘rganish uchun har xil modellardan foydalaniladi. Iqtisodiy taraqqiyotning eng umumiy qonuniyatlari xalq xo‘jaligi modellari yordamida tekshiriladi. Turli murakkab ko‘rsatkichlar, jumladan, milliy daromad, ish bilan bandlik, iste'mol, jamg‘armalar, investitsiya ko‘rsatkichlarining dinamikasi va nisbatini tahlil qilish, uni oldindan aytib berish uchun katta iqtisodiy modellar qo‘llaniladi. Aniq xo‘jalik vaziyatlarini tekshirishda kichik iqtisodiy tizimlardan, murakkab iqtisodiy tizimlarni tekshirishda, asosan, matematik modellardan foydalaniladi.

Mavzuni muctahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Model deganda nimani tushunasiz?
2. Model hodisa va jarayonni qanday akslantirishi kerak?
3. Modelning taqribiylik xarakteri qanday ko‘rinishlarda namoyon bo‘ladi?
4. Modellashtirish uslublaridan qaerda foydalaniladi?
5. Modellashtirish qanday ob'ektlarni o‘rganishda, ayniqsa, muhim?
6. Modellarni qanday turlarga ajratish mumkin?
7. Abstrakt va fizik modellarning farqi nimada?
8. Biologik model deganda nimani tushunasiz?
9. Iqtisodiy model deganda nimani tushunasiz?

2-Ma’ruza.
Matematik modellarni qurish metodlari. Tizimli yondashuv haqida tushuncha. Matematik modellarni qurishdagi asosiy tamoyillar.

Ma’ruza rejasi:

1. Matematik model obyektiv borliqni o’rganish vositasi sifatida.
2. Oddiy matematik modellarning sinteziga doir misollar.
3. Matematik model va o’rganilayotgan obyekt orasidagi muvofiqlik.

1. Matematik model obyektiv borliqni o’rganish vositasi sifatida.

Odatda teoremalarning yoki matematik masala shartlarining ta’rifi oshkor yoki oshkormas ravishda “... berilgan bo’lsin” so’zlari bilan tugallanadi. So’ngra qat’iy ta’riflangan matematik tushunchalar tilida boshlang’ich shartlarning tegishli sohadagi har bir mutaxassis tomonidan bir xil tushuniladigan bayoni keltiriladi.

Amaliy masalalarda esa ish boshqacharoq bo’ladi. Ularda tabiat hodisasi, ishlab chiqarish jarayoni, konstruksiya, boshqarish sistemasi, iqtisodiy reja va shu kabi real «nomatematik» obyektlar bevosita beriladi. Tadqiqot obyektni formallashtirishdan, tegishli matematik modelni qurishdan boshlanadi; obyektning eng muhim xususiyatlari va xossalari ajratiladi hamda matematik munosabatlar yordamida tavsiflanadi. Matematik model qurilgandan so’ng, ya’ni masalaga matematik forma berilgandan keyingina uni o’rganish uchun matematik metodlardan foydalanishimiz mumkin.

Siz bu terminni avval uchratmagan bo’lsangiz ham, lekin matematik modellar bilan tanishsiz. Yozuv stoli sirtining yuzini aniqlash lozim deb faraz qiling. Buning uchun uning bo’yi va enini o’lchab, topilgan sonlar o’zaro ko’paytiriladi. Bu elementar prosedura aslida quyidagini anglatadi. Real obyekt - stol sirti - abstrakt matematik model - to’g’ri to’rtburchak bilan almashtiriladi. O’lchash natijasida topilgan sonlar to’g’ri to’rtburchakning o’lchamlari deb qaraladi va bunday to’g’ri to’rtburchakning yuzi taqriban izlanayotgan sirtning yuzi deb qaraladi.

Yozuv stoli sirti uchun to’g’ri to’rtburchak modelini tanlaganda odatda biz o’z ko’rish tasavvurimizga asoslanamiz. Biroq odamning ko’zi o’lchov asbobi kabi katta aniqlikka ega emas. Shuning uchun masalaga jiddiy qaralganda yuzni aniqlashda to’g’ri to’rtburchak modelidan foydalanishdan avval uni tekshirish lozim. Tekshirishni quyidagicha amalga oshirish mumkin: stolning qarama-qarshi tomonlarining, shuningdek diagonallarining uzunliklari o’lchanadi hamda o’lchash natijalarini o’zaro taqqoslanadi. Agar qarama-qarshi tomonlar va diagonallar uzunliklari juft-juft bilan talab etilgan aniqlikda o’zaro teng bo’lsa, u holda stol sirtini haqiqatan to’g’ri to’rtburchak deb qarash mumkin. Aks holda to’g’ri to’rtburchak modelidan voz kechish va umumiy ko’rinishdagi to’rtburchak modeli bilan almashtirish lozim. Aniqlikka yuqori talab qo'yilganda modelni yanada aniqlashtirish, masalan, stolning yumaloqlangan burchaklarini ham hisobga olish zarurati tug'ilishi mumkin.

Shu sodda misolni bunchalik batafsil muhokama kilishimizdan maqsad boshidayoq quyidagi muhim fikrni ta'kidlab o'tishdir: matematik modelni tekshirilayotgan obyekt bir qiymatli aniqlamaydi. Bitta stolning o'zi uchun yo to'g'ri to'rtburchak modelini, yo umumiy ko'rinishdagi to'rtburchak modelini, yo yana ham murakkab - «yumaloq burchakli to'rtburchak» modelini kabul qilishimiz mumkin. U yoki bu modelni tanlash aniqlikka qo'yilgan talablarga bog'liq. Aniqlik ortib borishi bilan modelni o'rganilayotgan obyektning yangi-yangi xususiyatlarini hisobga olgan holda murakkablashtirishga to'g'ri keladi.

Maktabda matematik modellar qurish bilan ko'proq fizikadan masalalar yechish jarayonida uchrashgansiz. Masalalarda odatda biror fizik sistema beriladi hamda uning qanday holatda ekani tavsiflanadi. Siz bu sistemani mumkin bo'lgan ideallashtirish imkonlari haqida (masalan, biror real jismni moddiy nuqta deb qarash) o'ylab ko'rishingiz, uni o'rganishda e'tiborga olinadigan fizik qonunlarni aniqlashingiz va ularni matematik tenglamalar orqali ifodalashingiz lozim. Bu esa qaralayotgan fizik sistemaning matematik modelidir.

Misol sifatida mexanikaga doir ushbu masalani qarab chiqaylik. Jismga Yerda uning sirtiga α burchak ostida yo'nalgan v_0 boshlang'ich tezlik berildi. Jismning harakat trayektoriyasini toping va uning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari orasidagi masofani aniqlang.

Masalani yanada konkretlashtirish uchun gap katapulta yordamida tashlab yuborilgan tosh ustida boryapti deb qaraymiz. Bu bizga jismning xarakterli o'lchamlarini, uning massasini hamda mumkin bo'lgan boshlang'ich tezligini aniqlashga yordam beradi. Endi berilgan holda quyidagi farazlarga asoslangan matematik modelni quramiz;

1) Yer - inersial sanoq sistemasi;
2) erkin tushish tezlanishi g - o'zgarmas;
3) Yerning egriligini e'tiborga olmasdan, uni yassi deb qarash mumkin;
4) harakatdagi toshga havoning qarshilik kuchi ta'sirini e'tiborga olmaslik mumkin.

Koordinatalar sistemasini kiritamiz. Koordinatalar boshini katapulta bilan ustma-ust tushiramiz, x o'qini toshning harakat yo'nalishi bo'yicha gorizontal, u o'qini esa yuqoriga vertikal yo'naltiramiz. Bu farazlarga ko'ra toshning x o'qiga proyeksiyasi $v_x = v_0 \cos\alpha$, tezlik bilan tekis harakatlanadi. Toshning y o'qiga proyeksiyasi esa $a_y = -g$ tezlanish va $v_y = v_0 \sin\alpha$ boshlang'ich tezlik bilan tekis tezlanuvchan harakat qiladi. Shunday qilib, tosh harakatining xarakteri ushbu

$$x = tv_0 \cos\alpha \quad (1)$$

$$y = tv_0 \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

formulalar bilan aniqlanadi. Bu formulalar 1) - 4) shartlar bajarilganda masalaning matematik modelini beradi. Hosil qilingan model g’oyatda sodda va qo’yilgan savolga javob osonlik bilan olinishi mumkin. (1) dan t vaqtni x koordinata orqali ifodalaymiz:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

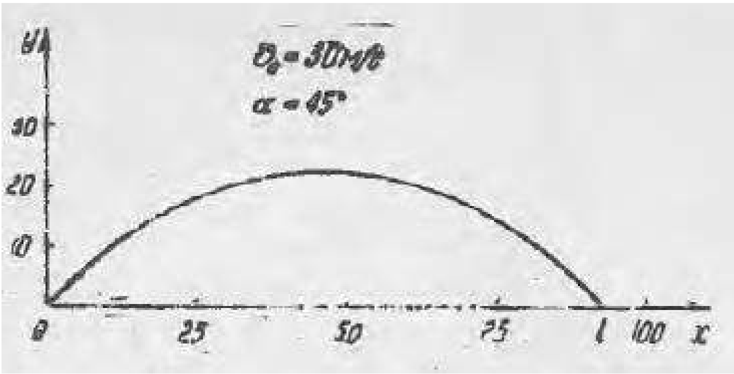
va uni (2) ga qo’yamiz. Natijada tosh trayektoriyasining parabolani (1-chizma) tasvirlovchi

$$y = x tg\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \quad (3)$$

tenglamasiga ega bo’lamiz. Bu parabola x o’qini ikki $x = 0$ va $x = l$ nuqtada kesib o’tadi, bunda

$$l = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \quad (4)$$

Birinchi nuqta trayektoriyaning boshi bo’lib, unda tosh katapultadan otilib chiqadi. Ikkinchi nuqta toshning yerga tushgan joyiga mos keladi. (4) formula qabul qilingan model doirasida izlangan masofa l ni aniqlaydi. Bu formula sizga yaxshi tanish: u 8-sinf fizika darsligida keltirib chiqariladi va to’liq tahlil qilinadi.



1-chizma. Tosh harakatining parabolik traetoriyasi

Amaliy masalalarda matematik modelni qurish ishning eng murakkab va mas’uliyatli bosqichlaridan biridir. Tajriba ko’rsatadiki, ko’p hollarda modelning to’g’ri tanlanishi - muammoning yarmidan ko’iini xal qilish demakdir. Bu bosqichning qiyinligi shuidai iboratki.u matematik va sosial bilimlarning uyg’uilashishiii talab etadi. O’rta maktab fizika kursiga doyr masalalar yechishda siz bir vaqtda ham fizik, ham matematik xizmatini o’taysiz. Ammo amaliy matematikada qaraladigan katta muammolar uchun mutaxassisliklarning buiday uyg'unlashishi tipik emas. Odatda matematik model ustida matematiklar hamda o'rganilayotgan obyekt tegishli bo'lgan sohaning mutaxassislari birgalikda ishlaydilar. Ularning faoliyati muvaffaqiyatli bo'lishi uchun bir-birini tushunishi g'oyatda muhim. Bunga matematiklar obyekt haqida maxsus bilimlarga ega bo'lganda, ularning sheriklari esa ma'lum darajada matematik bilimga, o'z sohasida tadqiqotyaing matematik metodlarini qo'llanish tajribasiga ega bo'lgandagina erishish mumkin.

2. Matematik modelning o'rganilayotgan obyektga mosligi. Amaliyot kriteriysi

Matematik model hyech qachon qaralayotgan obyekt bilan aynan bir xil bo'lmaydi, uning barcha xossalarini va xususiyatlarini bera olmaydi. Soddalashtirishga, ideallashtirishga asoslangan model obyektning taqribiy tavsifidan iborat. Shuning uchun modelni analiz qilishdan olingan iatijalar obyekt uchun doim taqribiy xarakterga ega bo'ladi. Ularning aniqligi model va obyektning moslik, adekvatlik darajasiga bog'liqdir. Aniqlik haqidagi, iatijalarning ishonchliligi haqidagi masala amaliy matematikaning eng nozik masalalaridan biridir. Obyektning holati va xossalarini aniqlaydigan qonunlar to'liq ma'lum va ularning qo'llanilishi bo'yicha katta amaliy tajribaga ega bo'lganda aniqlik masalasi osonlik bilan hal bo'ladi. Undan iatijalarning qaralayotgan model ta'minlaydigan a.niqligini apriori (tajribagacha, bu yerda - matematik masalani yechish boshlanguncha) baholash mumkin.

Misol keltiramiz. sobiq SSSRda 1959 yilning 2 yanvarida Luna-1 avtomatik stansiyasi uchirildi, bu insoniyat uchun rejayetalararo parvoz davrini ochib berdi. Planetalararo fazoda stansiya trayektoriyasining hisobi mexanika qonunlari va butun dunyo tortilish qonunidan foydalanadigan matematik modelga asoslanib olib borildi. Quyosh sistemasidagi osmon jismlarini kuzatishning ko'p asrlik tajribasi bu model ularning harakatini juda aniq tavsiflab berishini ko'rsatdi. Tabiat qonunlarining universalligi modelning inson qo'li bilan yaratilgan kosmik apparatga qo'llanishi mumkinligiga ishontirdi.

O'rganilayotgan obyekt haqida ma'lumotlar yetarli bo'lmaganda yanada murakkabroq holat yuz beradi. Bu holda gipoteza xarakteriga ega bo'lgan qo'shimcha farazlar kiritishga to'g'ri keladi. Bu gipotetik modelni tadqiq qilishdan olingan natijalar o'rganilayotgan obyekt uchun shartli xarakterga ega. Ularning o'rinliligi boshlang'ich farazlar qanchalik to'g'ri ekaniga bog'liq. Ularni tekshirish uchun modelni tadqiqot qilish natijalarini o'rganilayotgan obyekt haqidagi barcha ma'lumotlar bilan taqqoslash lozim. Hisoblab topilgan va eksperimental ma'lumotlarning yaqinlik darajasi gipotetik modelning sifati haqida, boshlang'ich farazlarning to'g'riligi yoki xatoligi haqida fikr yuritishga imkon beradi. Shunday qilib, qandaydir matematik modelni qaralayotgan obyektni o'rganishga tatbiq etish masalasi oddiy matematik masala emas va uni matematik metodlar yordamida hal etib bo'lmaydi. Haqiqatning asosiy kriteriysi eng keng ma'noda eksperiment, amaliyotdir. Amaliyot kriteriysi barcha gipotetik modellarni o'zaro taqqoslash va ular ichidan eng soddasini, shu bilan birga, talab etilgan aniqlikda o'rganilayotgay obyektning xossalarini to'g'ri akslantiradiganini ajratib olish imkonini beradi.

Bu mulohazalarni tushuntirish uchun katapulta tashlagan tosh harakati trayektoriyasi mzsalzsiga qaytamiz va uning tahlilini davom ettiramiz. Biz 1§ da tosh harakatining to'rtta soddalashtiruvchi farazga asoslangan matematik modelini qurdik va otilish uzoqligi uchun (4) formulani chiqardik. Endi bu formulaning aniqligini baholashimiz, uning qo'llanilish chegaralarini topishimiz lozim. Bunday tahlil uchun muzeydan olingan yoki eski chizmalar bo'yicha tiklangan katapulta bilan to'g'ridanto'g'ri eksperiment qilishimiz shart emas. Bizni qiziqtirgan savollar bo'yicha ko'pdan-ko'p eksperimental va nazariy material to'rejagan, faqat ulardan qo'yilgan masalaning tahlilida ustalik bilan foydalanish lozim.

Tosh harakatining matematik modelini quryshda asoslanilgan soddalashtiruvchi farazlarni yana bir marta o'qib chiqing hamda ularning ma'nosini o'ylab ko'ring. Katapulta toshlarni 100 m masofaga otishi mumkin deylik, bunda u toshlarga 30 m/s ga yaqin boshlang'ich tezlik berishi lozim. Shunda tosh 20-30 m balandlikka ko'tariladi va havoda 5 s ga yaqin bo'ladi. Shu shartlar bajarilganda birinchi uchta faraz o'zini oqlaydi va biz havoning ta'siri haqidagi to'rtinchi shartni tahlil qilishimiz kerak. Havoda harakat qilayotgan har bir jismga havo biror $\boldsymbol{F}$ kuch bilan ta'sir etadi. Uning moduli va yo'nalishn jismning formasi va harakat tezligiga bog'liq. $\boldsymbol{F}$ kuchni jismning harakat tezligi v ga parallel va perpendikulyar bo'lgan ikkita tashkil etuvchiga ajratish mumkin.

Perpendikulyar tashkil etuvchi jism shakli harakat yo'nalishiga nisbatan simmetrii bo'lmagan holdagina hosil bo'ladi. Uning eng xarakterli namoyon bo'lishi samolyot qanotiga ta'sir etadigan va busiz aviasiya mavjud bo'lmaydigan kutarish kuchidir. Bu kuch samolyotni yerdan ko'tarishi va uni havoda ushlab turishi uchun qanotga maxsus shaql beriladi va uni qarshi havo oqimi yo'nalishiga ma'lum ataka (.hujum) burchagi ostida joylashtiriladi. Ammo sfera shaklidagi tosh uchun $\boldsymbol{F}$ kuchning perpendikulyar tashkil etuvchisi nisbatan juda kichik bo'ladi va uni hisobga olmaslik mumkin (shar uchun, u simmetrik shaklda bo'lgani sababli perpendikulyar tashkil etuvchi aniq nolga teng).

3. Matematik modelni rivojlantirish va aniqlashtirish.

Amaliy masalalarni tekshirish odatda qaralayotgan obyektning eng sodda, anchagina qo'pol matematik modelini qurish va analiz qilishdan boshlanadi (Yer sirtida rvboshlang'ich tezlik olgan jism uchishining parabolik trayektoriyasi modeli xarakterli misol bo’lib xizmat qiladi). Biroq keyin ko’pincha modelni aniqlashtirish, uni obyektga yanada to’laroq moslashtirish zarurati tug’iladi. Bunga yuqoriroq tartibli aniqlikning talab etilishi, obyekt haqida uning matematik modelida aks ettirilishi lozim bo’lgan yangi informasiyaning paydo bo’lishi, parametrlar diapazonining boshlang’ich modelni qo’llanish chegarasidan chiqaraDigan darajada kengayishi va h. k. lar sabab bo’lishi mumkin. Yangi modelni qurishda birinchi bossichda erishilgan tajriba va natijalardan maksimal to’liq foydalanish maqsadga muvofiqdir. Modelni ketma-ket rivojlantirish va aniqlashtirish jarayoni ko’pincha ko’p karra takrorlanadi.

Bu mulohazalarni tushuntirish uchun yana Yer sirtidan gorizontga nisbatan burchak ostida otilgan jism harakati (katapultadan otilgan tosh) haqidagi masalaga qaytamiz va uni tashqi ballistikaga tatbiqi nuqtai nazardan qaraymiz. Qurolning stvolidan otilib chiqqan snaryad harakati haqidagi fan shunday ataladi. Biz ballistikani uning masalalari matematik nuqtai nazardan qiziqarligi va amaliy nuqtai nazardan muhimligi uchungina tanlaganimiz yo’q. Masalaning boshqa tomoni bundan ham muhimdir: biz bu misolda qaralayotgan hodisaning matematik modelini tarixan 300 yildan ortiq davom etgan takomillashtirysh va aniqlashtirish jarayonini ochiqko’rsatishimiz mumkin.

Katapultadan dushman istehkomlarini buzishda foydalangan qadimiy askarlar mexanika qonunlarini bilmas va eng sodda model doirasida bo’lsa ham toshning uchish trayektoriyasini nazariy hisoblab chiqa olmas edilar. Bunga unchalik zarurat ham yo’q edi. Poroxning kashf etilishi va artilleriyaning paydo bo’lishi bilan otish uzoqligi, intensivligi va samaradorligi ancha ortdi va endi vaziyat o’zgardi.

Kosmik ballistikada trayektoriyaning har bir boshqariluvchi o’zgarishini manevr deyish qabul qilingan. Yer sun’iy yo’ldoshining bir orbitadan ikkinchi orbitaga o’tishi, tutashtirish, apparatning orbitadan. Yerga qaytishi, boshqa rejayetalarga uchishda trayektoriyani to’grilash, qandaydir rejayetaga yaqinlab qolganda uning sun’iy yo’ldoshi orbitasiga o’tkazish maqsadida trayektoriyani o’zgartirish, yumshoq qo’nishlar manyovrga misol bo’ladi. Manyovr - bu murakkab va mas’uliyatli operasiya, uchishning butun belgilangai programmasining bajarilishi odatda ko’proq manyovrning muvaffaqiyatli amalga oshirilishiga bog’liq. Manyovrni oldindan hisoblab chiqish va uni boshqarish EHM yordamida bajariladi. Kosmik tadqiqotlar inson bilimlarining ko’plab sohalaridagi eng yangi yutuqlariga asoslanadi. Xususan, ular zamonaviy hisoblash mashinalarisiz mumkin emas edi.
Xulosa qilib, yana bir marta ta’kidlab o’tamizki, matematik modellar real «nomatematik» obyektlarni tekshirishni matematik masalalarni yechishga keltirishga imkon beradi, bu bilan uni o’rganish uchun qudratli hisoblash texnikasi bilan yaxshi ishlab chiqilgan matematik apparatni qo’llanish imkoniyatlarini ochib

beradi. Real olam qonunlarini bilish va ulardan amalda foydalanishda - matematikaning qo’llanishi ana shunga asoslangan

3-ma'ruza

Xatolik, absolut va nisbiy xatoliklar. Taqribiy sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi, darajasi va ildizlarining absolut va nisbiy xatoliklari. Xatoliklarni aniqlashda differensial hisobini qo'llash.

Reja:

1. Aniq va taqribiy sonlar haqida tushuncha.
2. Xatolar manbai.
3. Absolyut va nisbiy xatolar

Tayanch iboralar: aniq sonlar, taqribiy sonlar, xatolik, boshlang'ich ma'lumotlar xatoligi, hisoblash xatoliklari, absolyut xato, nisbiy xato, aniqlik.

Aniq va taqribiy sonlar haqida tushuncha. Kundalik hayotimizda va texnikada uchraydigan ko`plab masalalarni yechishda turli sonlar bilan ish ko'rishga to`g'ri keladi. Bular aniq yoki taqribiy sonlar bo`lishi mumkin. *Aniq sonlar* biror kattalikning aniq qiymatini ifodalaydi. *Taqribiy sonlar* esa biror kattalikning aniq qiymatiga juda yaqin bo`lgan sonni ifodalaydi. Taqribiy sonning aniq songa yaqinlik darajasi hisoblash yoki o`lchash jarayonida *yo`l qo`yilgan xatolik* bilan ifodalanadi.

Masalan, ushbularda: «kitobda 738 ta varaq», «auditoriyada 30 nafar talaba», «uchburchakda 3 ta qirra», «telefon apparatida 10 ta raqam», 738, 30, 3, 10 aniq sonlar. Ushbularda esa: «Aylana bo`lagining uzunligi 210 sm», «YErning radiusi 6000 km», «Qalamning og'irligi 8 g», 210,60008 taqribiy sonlar. Bu kattaliklarning taqribiy bo`lishlariga sabab, o`lchov asboblarining takomillashmaganligidir. Mutloq aniq o`lchaydigan o`lchov asboblari yo`q bo`lib, ulardan foydalanganda ma`lum xatoliklarga yo`l qo`yiladi.

Bundan tashqari, Yer aniq shar shaklida bo'lmaganligi tufayli, uning radiusi taqribiy olingan. Uchinchi misolda esa qalamlar har xil bo`lganligi uchun ularning og'irligi turlicha. 8 g deb o'rtacha uzunlikdagi qalamning og'irligi olingan.

Amaliyotda taqribiy son a deb, aniq qiymatli A sondan biroz farq qiladigan va hisoblash jarayonida uning o'rnida ishlatiladigan songa aytiladi.

Qisqalik uchun bundan keyin aniq qiymatli son o`rniga aniq son, kattalikning taqribiy qiymati o`rniga esa taqribiy son deb yozamiz.

Amaliy masalalarni yechish asosan quyidagi ketma-ket qadamlardan iborat:

1) yechilayotgan masalani matematik ifodalar orqali yozish;
2) qo`yilgan matematik masalani yechish.

Xatoliklar manbai quyidagilardir:

- Real jarayonning matematik tavsiflanishi noaniqligidan kelib chiqadigan xatolik *matematik model xatoligi* deyiladi.
- Boshlang'ich ma'lumotlarning noaniqligi tufayli yuzaga keladigan xatolik *boshlang'ich ma'lumotlar xatoligi* deyiladi.
- Masalani yechishda qo`llanilayotgan usullarning noaniqligidan chiqadigan xatolik *usul xatoligi* deyiladi.
- Hisoblashlarda vujudga keladigan xatoliklar *hisoblash xatoligi* deyiladi.
- Yaxlitlash natijasida hosil bo`ladigan xato *yo`qotib bo`lmaydigan xatolik* deb ataladi.

Tabiatda uchraydigan masalalarni doim ham aniq matematik tilda ifodalash mumkin bo'lmaganligi tufayli masala ma`lum darajada ideallashgan model vositasida yoziladi, ya`ni xatolikka yo`l qo`yiladi (birinchi qadamda).

Ba'zan matematik model va boshlang'ich ma'lumotlar xatoliklarini *tuzatib bo`lmaydigan* (yoki *yo`qotib bo`lmaydigan*) *xatoliklar* deyiladi.

Masalaning tarkibiga kirgan ba`zi parametrlar tajribadan olinganligi tufayli, bunda ham xatolikka yo`l qo`yiladi. Bularning yig'indisi esa *boshlang'ich ma'lumotlar xatoligini* keltirib chiqaradi.

Juda ko`p hollarda matematik masalaning (ikkinchi qadam) aniq yechimini (analitik) topishning iloji bo`lmaydi. Shuning uchun amaliyotda taqribiy matematik usullar qo`llaniladi. Aniq, yechimning o`rniga taqribiy echimni qabul qilish (majburiy ravishda) yana xatolikni keltirib chikaradi. Masalani echish jarayonida boshlang'ich shartlarni va hisoblash natijalarini yaxlitlashda ham xatolikka yo`l qo`yiladi, bunga h*isoblash xatoliklari* deyiladi.

Taqribiy sonlar bilan ish kurilayotganda quyidagilarga amal qilish lozim:

1. taqribiy sonlarning aniqligi xakida ma`lumotga ega bo`lish;
2. boshlang'ich qiymatlarning aniqlik darajasini bilgan xolda natijaning aniqligini baxolash;
3. boshlangich qiymatlarning aniqlik darajasini shunday tanlash kerakki, natija belgilangan aniqlikda bo`lsin.

Xatolar manbai. Ko`pincha matematik masalalarni sonli echishda biz doimo aniq echimga ega bula olmasdan, balki echimni u yoki bu darajadagi aniqlikda topamiz. Demak, aniq echim bilan taqribiy echim orasidagi xatolik qanday kilib kelib koladi degan savol tugilishi tabiiydir. Bu savolga javob berish uchun xatoliklarning hosil bo`lish sabablarini o`rganish lozim.

1. Matematikada tabiat xodisalarining miqdoriy nisbati u yoki bu funktsiyalarni bir-birlari bilan boglaydigan tenglamalar yordamida tasvirlanadi va bu funktsiyalarning bir qismi ma`lum bo`lib *(dastlabki ma`lumotlar),* boshqalarni topishga to`g'ri keladi. Tabiiyki, topilishi kerak bo`lgan miqdorlar (masalaning

echimi) dastlabki ma`lumotlarning funktsiyasi bo`ladi. Kerakli echimni ajratib olish uchun dastlabki ma`lumotlarga konkret qiymatlar berish kerak. Bu dastlabki ma`lumotlar, odatda, tajribadan olinadi (masalan, yorug'lik tezligi, Plank doimiysi, Avogadro soni va x.k.) yoki boshqa biror masalani echishdan hosil bo`ladi. Har ikkala xolda ham biz dastlabki ma`lumotlarning aniq qiymatiga emas, balki uning taqribiy qiymatiga ega bo`lamiz. Shuning uchun agar dastlabki ma`lumotlarning har bir qiymati uchun tenglamani aniq, echganimizda ham, baribir (dastlabki ma`lumotlardagi qiymatlar taqribiy bo`lganligi uchun) taqribiy natijaga ega bo`lamiz va natijaning aniqligi dastlabki ma`lumotlarning aniqligiga bog'liq bo`ladi.

Aniq, echim bilan taqribiy echim orasidagi farq *xato* deyiladi. Dastlabki ma`lumotlarning noaniqligi natijasida hosil bo`lgan xato *yo`qotilmas xato* deyiladi. Bu xato masalani echayotgan matematikga bog'liq. bo`lmasdan, unga berilgan ma`lumotlarning aniqligiga bog'liqdir. Lekin matematik dastlabki ma`lumotlar xatosining kattaligini bilishi va shunga qarab natijaning yo`qotilmas xatosini baxolashi kerak. Agar dastlabki ma`lumotlarning aniqligi katta bo`lmasa, aniqligi juda katta bo`lgan metodni qo`llash urinsizdir. CHunki aniqligi katta bo`lgan metod ko`p mexnatni (hisoblashni) talab kiladi, lekin natijaning xatosi bari bir yo`qotilmas xatodan kam bo`lmaydi.

2. Ba`zi matematik ifodalar tabiat xodisasining ideallashtirilgan modelini tasvirlaydi. Shuning uchun tabiat xodisalarining aniq matematik ifodasini (formulasini, tenglamasini) berib bo`lmaydi, buning natijasida xato kelib chikadi. Yoki biror masala aniq matematik formada yozilgan bo`lsa va uni shu ko`rinishda echish mumkin bo`lmasa, bunday xolda bu masala unga yaqinrok va echish mumkin bo`lgan masalaga almashtirilishi kerak. Buning natijasida kelib chiqadigan xato *metod xatosi* deyiladi.

3. Biz doimo π, *e, 1p2* va shunga o`xshash irratsional sonlarning taqribiy qiymatlarini olamiz, bundan tashqari, hisoblash jarayonida oraliq natijalarda ko`p xonali sonlar hosil bo`ladi, bularni yaxlitlab olishga to`g'ri keladi. Ya`ni masalalarni echishda hisoblashni aniq olib bormaganligimiz natijasida ham xatoga yo`l kuyamiz, bu xato *hisoblash xatosi* deyiladi.

Shunday kilib, *tulik, xato* yuqorida aytilgan yo`qotilmas xato, metod xatosi va hisoblash xatolarining yig'indisidan iboratdir. Ravshanki, biror konkret masalani echayotganda yuqorida aytilgan xatolarning ayrimlari katnashmasligi yoki uning ta`siri deyarli bo`lmasligi mumkin. Lekin, umuman olganda, xato tulik. analiz kilinishi uchun bu xatolarning xammasi hisobga olinishi kerak.

Hisoblash xatosi. Masalani kulda yoki hisoblash mashinasida echayotganda biz barcha haqiqiy sonlar bilan ish kurmasdan, sonlarning ma`lum diskret to`plami bilan ish ko`ramizki, u yoki bu sanok sistemasida ma`lum miqdordagi xonalar bilan olingan sonlar shu to`plamda yotadi. Bu to`plam

$$\pm(a_1q^n + a_2q^{n-1} + ... + a_mq^{n-m+1}) \tag{1.1}$$

ko`rinishdagi sonlardan iborat bo`lib, by erda natural son q - sanok sistemasining asosidir; $a_1, a_2, ..., a_m$ - butun sonlar bo`lib, $0 \le a_i \le q-1$ shartni kanoatlantiradi; $t$ bu to`plamdagi sonlar xonasining miqdori, butun p son esa $|n| \le n_0$ shartni kanoatlantiradi. Kulda hisoblayotganda, asosan, unlik sanok sistemasi $(q = 10)$ bilan ish kuriladi. Kup EHM larda esa ikkilik sanok sistemasi $(q = 2)$ va ayrimlari uchun uchlik sanok, sistemasi $(q = 3)$ ishlatiladi.

EHM larning ko`pchiligi shunday tuzilganki, ularda $q = 2$, $m = 35$, $n_0 = 63$ bo`ladi.

Odatda, arifmetik amallarni bajarayotganda ko`p xonali sonlar hosil bo`ladi (masalan, ko`paytirishda xonalarning soni ikkilanadi, bo`lishda esa xonalarning soni nixoyatda kattalashib ketishi ham mumkin). Natijada hosil bo`lgan son karalayotgan to`plamdan chikib ketmasligi uchun t - xonasigacha yaxlitlanadi, ya`ni shu to`plamdagi boshqa son bilan almashtiriladi, tabiiyki yaxlitlanadigan son unga eng yaqin son bilan almashtirilishi, ya`ni yaxlitlash xatosi eng kichik bo`lishi kerak.

Agar biz juft rakam koidasini qo`llab 5,780475 sonini ketma-ket yaxlitlasak, quyidagi 5,78048; 5,7805; 5,780; 5,78; 5,8; 6 sonlar kelib chikadi.

Ko`pincha biror natijani olish uchun berilgan metodda ko`rsatilgan bir kator amallarni bajarishga to`g'ri keladi. Agar natijani katta aniqlik bilan topish talab kilinsa, bu kator yanada o`zayib ketadi.

Absolyut va nisbiy xatolar. Faraz kilaylik A aniq son, a - uning taqribiy qiymati bo`lsin. Agar $a<A$ bo`lsa, *a kami bilan olingan taqribiy son* deyiladi. Agar $a>A$ bo`lsa, *a ortigi bilan olingan taqribiy son* deyiladi.

1 - ta`rif. Taqribiy sonning *xatoligi* deb A va a orasidagi ayirmaga aytiladi.

Xatolikni Δa deb belgilasak, u holda quyidagicha bo`ladi:

$$\Delta a = A - a; \qquad A = \Delta a + a \tag{1.2}$$

2 - ta`rif. Taqribiy sonning *absolyut xatoligi* deb *A va a* orasidagi ayirmaning moduliga aytiladi.

Absalyut xatolikni Δ deb belgilasak, u holda quyidagicha bo`ladi:

$$\Delta = |A - a| \tag{1.3}$$

Amaliyotda ko`p xollarda 0,01 gacha aniqlik bilan, 1 sm gacha aniqlik bilan va x.k. lar uchraydi. Bu esa absolyut xatolikning 0,01; 1 sm va x.k. ga teng ekanligini bildiradi.

3 - ta`rif. Taqribiy son a ning nisbiy xatoligi $\delta(a)$ deb absolyut xatolik Δa ning A ning moduliga nisbatiga aytiladi:

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|A|} \tag{1.4}$$

yoki

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|a|} \tag{1.5}$$

(1.4) va (1.5) formulalarni 100 ga ko`paytirsak, nisbiy xatolik foiz (%) hisobida chikadi.

1 - misol. L uzunlikdagi kesmani 0,01 sm aniqlikda ulchadilar va $l = 21{,}4$ sm natijani oldilar.

Bu erda absolyut xatolik $\Delta l = 0{,}01$ sm. (1.2) formulaga asosan $L = 21{,}4 \pm 0{,}01$ ya`ni $21{,}39 \le L \le 21{,}41$.

Absolyut xatolik o`lchash yoki hisoblashni faqat miqdoriy tomondan ifodalaydi va sifat tomonlarini tavsiflamaydi. Shu munosabat bilan nisbiy xatolik tushunchasi kiritiladi.

2 - misol. $a = 35{,}148 \pm 0{,}00074$ taqribiy sonning nisbiy xatosi (foizlarda) topilsin.

Bu erda Δa= 0,00074; A=35,148 . 1.4) ga asosan

$$\delta(a) = \frac{0{,}00074}{35{,}148} = 0{,}000022 \approx 0{,}003\ \%$$

3 - misol. Nisbiy xatoligi $\delta(a)$ =0,01 % bo`lgan a=4,123 taqribiy sonning absolyut xatoligi Δa topilsin.

Foizni unli kasr orqali ifodalab va (1.5) formulaga asosan:

$$\Delta a = |a| \cdot \delta(a) = 4{,}123 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0005 \quad ; \qquad A = 4{,}123 \pm 0{,}0005$$

4-misol. Jismning og'irligini o`lchashda R = 23,4 ± 0,2 g natija olingan. Nisbiy xatolik topilsin.

Bu erda $\Delta P = 0{,}2$ u xolda

$$\delta(p) = \frac{0{,}2}{23{,}4} \cdot 100\% = 0{,}9\ \%$$

Taqribiy sonlar ustida amallar. Taqribiy sonlarni kushganda yoki ayirganda ularning
absolyut xatoliklari kushiladi:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b \tag{1.6}$$

bu erda a va b - taqribiy sonlar.

Taqribiy sonni taqribiy songa bo`lganda yoki ko`paytirganda ularning nisbiy xatoliklari kushiladi:

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b); \qquad \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b) \tag{1.7}$$

Taqribiy son darajaga oshirilganda, uning nisbiy xatoligi shu daraja ko`rsatkichiga ko`paytiriladi:

$$\delta(a^n) = n \cdot \delta(a) \tag{1.8}$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Aniq son va taqribiy son deb nimaga aytiladi?
2. Xato deganda nimani tushunasiz? Yo`qotilmas xato deb nimaga aytiladi?
3. Hisoblash xatosi, absalyut xato, nisbiy xato deb nimaga aytiladi?

Funksiyaning xatoligi va argumentlar xatoliklari orasida qanday munosbat mavjud?

4-Ma'ruza

Alfebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish metodlari. Kesmani ikkiga bo'lish, urimalar, vatarlar va birlashgan metodlar

Reja:

1. Nyuton metodi.
2. Vatarlar metodi
3. Modifikasiyalangan Nyuton metodi.

***Tayanch iboralar**: iterasiya, iterasiyaning geometrik ma'nosi, nyuton usuli, vatarlar usuli hisoblash xatosi.*

Nyuton metodi

Nyuton metodi sonli tenglamalarni yechishning juda ham effektiv metodidir. Bu metodning afzalligi shundan iboratki, hisoblash sxemasi murakkab bo'lmagan holda ketma-ket yaqinlashishlar ildizga tez yaqinlashadi. Nyuton metodi iterasiya metodi kabi universal metoddir. Bu metod yordamida sonli tenglamalarning haqiqiy va kompleks ildizlarini topish hamda keng sinfdagi chiziqli bo'lmagan funksional tenglamalarni yechish mumkin. Formal nuqtai nazardan qarlaganda Nyuton metodi iterasiya metodining xususiy holidir, aslida esa bu metodning asl g'oyasi iterasiya metodining g'oyasidan tamoman farqlidir. Bu metod chiziqli masalalarning ketma-ketligini yechishga olib keladi. Buning uchun berilgan tenglamadan uning bosh chiziqli qismi ajratib olinadi. Biz avval bita sonli tenglama uchun Nyuton metodini ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, bizga

$$f(x) = 0 \tag{5.1}$$

tenglama va uning ildiziga dastlabki yaqinlashish qiymati x_0 berilgan bo'lsin. Bu yerda $f(x)$ ni yetarlicha silliq funksiya deb olamiz. Odatdagidek, (1) tenglamaning aniq ildizini ξ orqali belgilaymiz. Endi $\xi = x_0 + h$ deb olib, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqta atrofidagi Teylor qatori yoyilmasidagi dastlabki ikkita hadini olib nolga tenglashtirsak, h ga nisbatan quyidagi

$$0 = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$$

chiziqli tenglama ega bo'lamiz. Bu tenglamani yechib, h xatoning taqribiy qiymatini topamiz:

$$h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Bu tenglamani $\xi = x_0 + h$ ga keltirib qo'yib, navbatdagi yaqinlashish

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ni topamiz. Xuddi shunga o'xshash

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,1,...) \tag{5.2}$$

ketma-ket yaqinlashishlarni hosil qilamiz. Bu formulalar yordamida Nyuton ketma-ketligini hosil qilish uchun x_n lar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasida yotish va ular uchun $f'(x_n) \neq 0$ bo'lishi kerak.

Nyuton metodi judda ham sodda geometrik ma'noga ega. Haqiqattan ham, $y = f(x)$ funksiyani

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \tag{5.3}$$

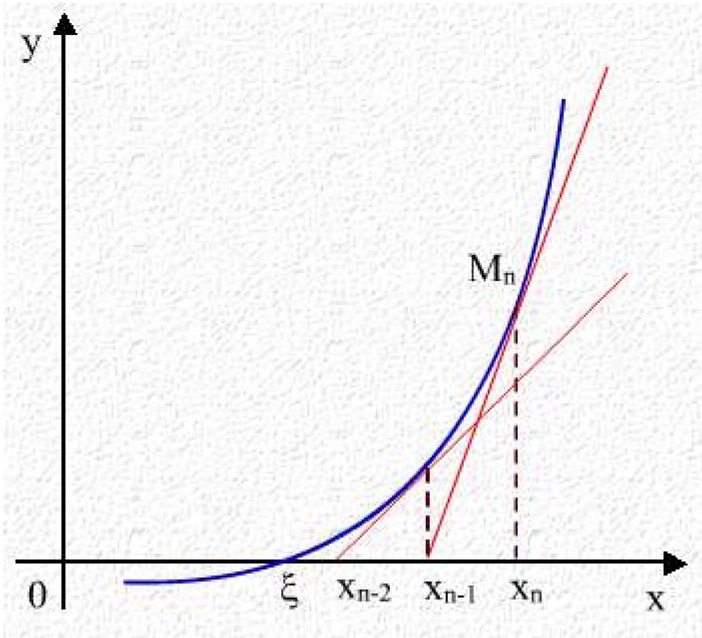
to'g'ri chiziq bilan almashtiramiz, bu to'g'ri chiziq esa $M_n(x_n, f(x_n))$ nuqtada $y = f(x)$ egri chiziqqa o'tkazilgan urinmadir (10-chizma). Bu urinmaning abssissa o'qi bilan kesishgan nuqtasini x_{n+1} bilan belgilasak, (5.3) dan (5.2) kelib chiqadi. Shuning uchun, Nyuton metodi *urinmalar metodi* deb ham yuritiladi. Nyuton metodini iterasiya metodidan keltirib chiqarish ham mumkin, buning uchun (5.1) tenglamaning $x = \varphi(x)$ kanonik ko'rinishida

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

deb olish kifoyadir.

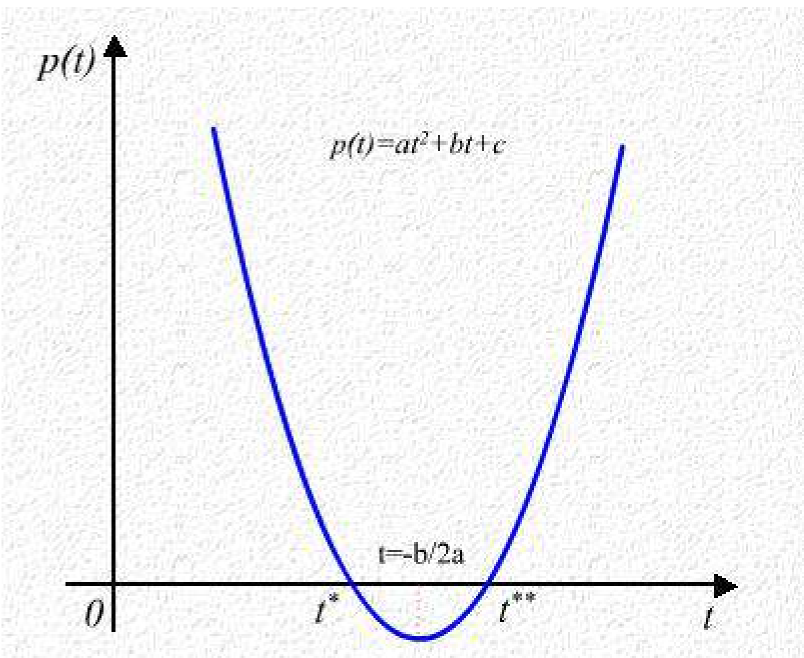
Nyuton metodining yaqinlashishi haqidagi teoremalar. Biz yuqorida aytganimizdek, Nyuton metodidan umumiy ko'rinishdagi funksional tenglamalarni yechishda ham foydalanish mumkin. Bunday tadqiqotlar L.V.Kantorovich tomonidan olib borilgan. Quyida keltirilgan teoremalar ham L.V.Kantorovichga tegishlidir. Bu teoremalarni isbotlashda

$$P(t) = at^2 + bt + c = 0 \tag{5.4}$$



10 - chizma

kvadrat tenglama uchun tuzilgan $\{t_n\}$ Nyuton ketma-ketligining yaqinlashishi muhim ahamiyatga egadir, bu yerda a, b, c lar haqiqiy sonlar bo'lib, $b^2-4ac\geq 0$. Bu tenglama haqiqiy ildizlarga ega. Ularning kichigini t^* va kattasini t^{**} bilan belgilab olamiz (11-chizma). Dastlabki yaqinlashish sifatida ixtiyoriy $t_0\neq -\frac{b}{2a}$ ni olamiz. Chizmada ko'rinib turibdiki, $t_0\in(t^*,t^{**})$ da yotsa, hisoblashning bir qadamidan keyin u bu oraliqdan chiqib ketadi va t_0 bu oraliqdan tashqarida yotsa, N'yutonning $\{t_n\}$ ketma-ketligi t_0 ga yaqin ildizga monoton yaqinlashadi.



11 - chizma

1-teorema. Agar $f(x)$ va daslabki qiymat x_0 quyidagi shartlarni qanoatlantirsa;

1. $f''(x)$ va $|f''(x)| \le K$;

(5.5)

2. B, K, η

(5.6)

tengsizlik o'rinli bo'lsa;

1. $f(x)$ funksiya

$$|x - x_0| \le \delta \tag{5.7}$$

oraliqda ikkinchi tartibli uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega va bu oraliqning barcha nuqtalarida

$$|f''(x)| \le K \tag{5.8}$$

bo'lsa;

4. B, K, η sonlar uchun

$$h = BK\eta \le \frac{1}{2} \tag{5.9}$$

shart bajarilsa;

5. hamda

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{n}\eta \le \delta \tag{5.10}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda:

1) (5.1) tenglama (5.7) oraliqda ξ yechimga ega bo'ladi;

2) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, ...)$

(5.11)

ketma-ket yaqinlashishlarni ko'rish mumkin va ular ξ ga yaqinlashadi: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$;

3) yaqinlashish tezligi uchun

$$|\xi - x_n| \le t^* - t_n \tag{5.12}$$

baho o'rinli bo'lib, bu yerda t_n esa

$$P(t) = \frac{K}{2}t^2 - \frac{t}{B} + \frac{\eta}{B} = 0 \tag{5.13}$$

kvadrat tenglamaning kichik ildizi t^* uchun $t_0 = 0$ dan boshlab qurilgan Nyuton ketma-ketligining n - elementidir:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{P(t_n)}{P'(t_n)}.$$

3-teorema (ildizning yagonaligi haqida). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya uchun 1-teoremaning shartlari bajarilsin. Agar $h \le \frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda $f(x) = 0$ tenglama

$$|x - x_0| \le \delta < t^{**} = \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\eta. \qquad (5.24)$$

oraliqda yagona ξ yechimga ega bo'ladi. Agar $h = \frac{1}{2}$ bo'lsa, ξ yechim

$$|x - x_0| \le \delta = t^{**} = 2\eta \qquad (5.25)$$

oraliqda yagona bo'ladi.

Misol. $f(x) \equiv x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x - 15 = 0$ tenglamaning musbat ildizi 10^{-8} aniqlik bilan topilsin.

Yechish. $f(1{,}5) = -0{,}9375$ va $f(2) = 1$ bo'lganligi uchun dastlabki yaqinlashish x_0 sifatida shu oraliqning o'rtasini olamiz: $x_0 = 1{,}75$. Bu nuqtada

$$f(1{,}75) = 0{,}10859375; \quad f'(1{,}75) = 3{,}68725; \quad \frac{f(1{,}75)}{f'(1{,}75)} = 0{,}02939629;$$

$$\frac{1}{f'(1{,}75)} < 0{,}272.$$

Demak, $\eta = 0{,}0294$ va $B = 0{,}272$ deb olishimiz mumkin, $0 < h < \frac{1}{2}$ bo'lganda, $1 \le \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} \le 2$ bo'ladi, shuning uchun $\delta = 2\eta$ deb olib $f''(x)$ ni $|x - 1{,}75| \le 2\eta$ oraliqda baholaymiz. Osonlik bilan ko'rish mumkinki, $1{,}6912 \le x \le 1{,}8088$ oraliqda $f''(x) = 12x^2 - 24x + 4$ monoton o'suvchi funksiya, shuning uchun ham $f''(x)$ ni $x = 1{,}81$ nuqtada hisoblaydi: $f''(1{,}81) = -0{,}1468$. Demak, $K = 0{,}147$ deb olishimiz mumkin, $h = BK\eta = 0{,}00118 \le 0{,}05$. Bundan ko'ramizki, 3-teoremaning hamma shartlari bajariladi, ya'ni qaralayotgan oraliqda yagona yechim mavjud va x_n ketma-ketlik bu yechimga yaqinlashadi. Xatoni baholash uchun 1-jadvaldan foydalanamiz, $h = 0{,}05$ bo'lganda $\tau^* - \tau_3 = 0{,}877 \cdot 10^{-11}$ bo'lgani uchun

$$|x_3 - \xi| < 0{,}0294 \cdot 0{,}877 \cdot 10^{-11} < 0{,}3 \cdot 10^{-12}$$

tengsizlik o’rinli bo’ladi. Demak, uchinchi qadamda ildizni hatto 12 xona aniqlik bilan topgan bo’lamiz. Bizga 8 xona aniqlik yetarli edi, bu aniqlikka erishish uchun $n=3$ deb olish kifoyadir. $h=0{,}0012$ uchun 1-jadvalda $\tau^*-\tau_2$ ning qiymati ko’rsatilmagan, shuning uchun ham biz 2-teoremadan foydalanamiz:

$$|x_2-\xi|\le\frac{1}{2^{2-1}}(2\cdot 0{,}0012)^{2^2-1}\cdot 0{,}0294<2{,}1\cdot 10^{-10}.$$

Hisoblash natijasida quyidagi qiumatlarga ega bo’lamiz:

$$x=1{,}75;\quad x_1=1{,}75-\frac{f(1{,}75)}{f'(1{,}75)}=1{,}75-0{,}02939629=1{,}72060371;$$

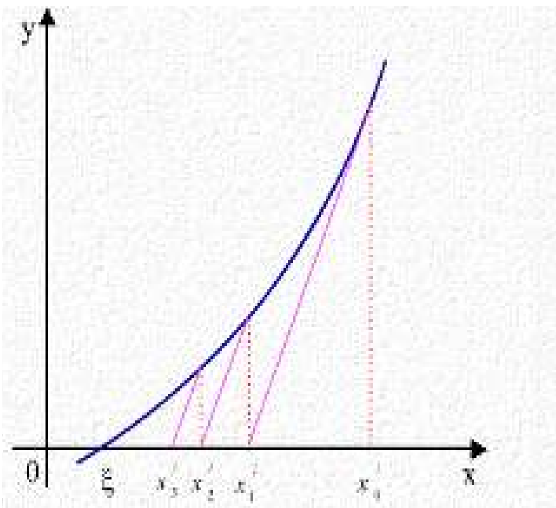
$$x_2=1{,}72060371-\frac{f(1{,}72060371)}{f'(1{,}72060371)}=1{,}732020918;\quad x_3=1{,}732050807;$$

$$x\ =1{,}732050807.$$

Modifikasiyalangan Nyuton metodi. Agar $f(x)$ ning hosilasi juda murakkab funksiya bo’lib, $f'(x_n)$ ni hisoblash katta qiyinchiliklar tug’dirsa, u vaqtda Nyuton metodining quyidagi modifikasiyasi ishlatiladi:

$$x'_{n+1}=x'_n-\frac{f(x'_n)}{f'(x_0)},\quad x_0=x'_0,\quad (n=0,1,2,...)\qquad (6.1)$$

Bu qoida bo’yicha hisoblash ancha qulay, chunki $f'(x)$ faqat bir marta hisoblanadi. Lekin modifikasiyalangan metod Nyutonning asosiy metodiga nisbatan sekin yaqinlashadi. Modifikasiyalangan metodning geometrik ma’nosi quyidagidan iborat: x'_{n+1} taqribiy yaqinlashish bu $(x'_n,\ f(x'_n))$ nuqtadan o’tuvchi va burchak koeffisiyenti $f'(x_0)$ ga teng bo’lgan to’g’ri chiziqning OX o’qi bilan kesishgan nuqtasidir.



12 - chizma.

Bu to’g’ri chiziq faqat birinchi qadamdagina $y=f(x)$ egri chiziqqa o’tkazilgan urinma bilan ustma-ust tushadi (12-chizma). Bu yerda ham yaqinlashish haqidagi teoremani isbot qilish mumkin.

4-teorema. Agar $f(x)$ funksiya va dastlabki yaqinlashish x_0 1-teorema (5-ma’ruzadagi 1-teorema) shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x_0)}, \quad x'_0 = x_0 \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

ketma-ket yaqinlashishlar (5.1) tenglamaning ξ ildizga yaqinlashadi, shu bilan birga xato uchun quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$| x'_n - \xi | \le t^* - t'_n \qquad (6.2)$$

bu yerda t'_n (5.13) kvadrat tenglama uchun qurilgan Nyutonning modifikasiyalangan ketma-ketligi, $t'_0 = 0,\ t^*$ esa (5.13) tenglamaning kichik musbat ildizi.

Bu yerdagi (6.2) baho yuzaki qaralganda 1-teoremadagi (5.12) bahoga o'xshash, lekin uning nolga intilish tezligi ancha sekindir. Biz hozir ana shu bahoni keltiramiz.

Faraz qilaylik, $h < \frac{1}{2}$ bo'lsin. (5.13) tenglamadan ko'rinadiki, aniq yechim

$$t^* = \eta + \frac{1}{2} BKt^{*2}$$

bo'lib, $\{t'_{n+1}\}$ va $\{t'_n\}$ ketma-ket yaqinlashishlar

$$t'_{n+1} = t'_n - \frac{P(t'_n)}{P'(0)} = \eta + \frac{1}{2} BK\, t'^2_n$$

tenglik bilan bog'langan. Bu tengliklardan

$$t'_{n+1} - t^* = \frac{1}{2} BK (t'^2_n - t^{*2}) = \frac{1}{2} BK (t'_n - t^*)(t'_n + t^*)$$

ni topamiz, $t'_n < t^* = \dfrac{1 - \sqrt{1-2h}}{h}\eta$ bo'lganligi sababli

$$t^* - t'_{n+1} < BK\, t^* (t^* - t'_n) = (1 - \sqrt{1-2h})(t^* - t'_n).$$

Bu tengsizlikni ketma-ket qo'llab, $t^* - t'_n < q^n (t^* - t')$ ga ega bo'lamiz, bu yerda $q = 1 - \sqrt{1-2h} < 1$. Oxirgi baho shuni ko'rsatadiki, $\{t'_n\}$ ketma-ketlik t^* ga cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya tezligida intilar ekan.

Vatarlar metodi. Endi Nyuton metodidagi hisoblashlarni soddalashtirishning yana bir usulini ko'ramiz. Nyuton metodida mehnatning asosiy qismi $f(x_n)$ va $f'(x_n)$ larni hisoblash uchun sarflanadi. Shularning birortasi, masalan, $f'(x_n)$ ni hisoblashdan qutulish mumkin emasmikin degan savol tug'iladi. Bu bizni *vatarlar usuliga* olib keladi, ya'ni agar $f'(x_n)$ ni taqribiy ravishda almashtirsak:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

u holda navbatdagi yaqinlashishni topish qoidasi quyidagicha bo'ladi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Bu qoidaning geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: $y = f(x)$ funksiyaning grafigida ikkita $M_{n-1}[x_{n-1}, f(x_{n-1})]$ va $M_n[x_n, f(x_n)]$ nuqtalardan vatar o'tkazamiz. Vatar tenglamasi esa quyidagicha:

$$\frac{x - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y - f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Agar bu vatarning OX o'qi bilan kesishgan nuqtasini x_{n+1} deb olsak, (6.3) qoida kelib chiqadi.

Vatarlar metodi ikki qadamli metod bo'lib x_{n+1} ni topish uchun x_{n-1} va x_n ni bilishimiz kerak. (6.3) qoidani qo'llash uchun:

1) barcha x_n lar $f(x)$ ning aniqlanish sohasida yotishi va
2) $f(x_n) - f(x_{n-1}) \neq 0 \ (n=1, 2, ...)$ shartlar bajarilishi kerak.

Avval $f(x_n) - f(x_{n-1}) = 0$ bo'lgan holni ko'rib chiqaylik, bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin: a) $x_n \neq x_{n-1}$ va b) $x_n = x_{n-1}$.

Agar $x_n \neq x_{n-1}$ bo'lsa,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

tenglikdan $f(x_{n-1}) \neq 0$ ligini ko'ramiz. Shuning uchun ham $f(x_n) \neq 0$ va navbatdagi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

yaqinlashishni qurish mumkin bo'lmaydi. Prosess shu yerda uziladi va yechimga olib kelmaydi.

Agar $x_n = x_{n-1}$ bo'lsa, $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ larni qurish mumkin, $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ lar o'zaro farqli va $f(x_k) - f(x_{k-1}) \neq 0 \ (k = \overline{1, n-1})$ deb hisoblaymiz. (6.4) tenglikdan ko'ramizki, $f(x_{n-1}) = 0$ va x_{n-1} berilgan tenglamaning yechimi ekanligi kelib chiqadi. Bu holda ketma-ket yaqinlashishlarni x_n gacha bajarish qiymatlar berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. Ildiz rasional son bo'lganda, shunday hol bo'lishi mumkin.

Endi biz yuqoridagi 1), 2) shartlar bajarilgan deb faraz qilib, vatarlar metodining yaqinlashishiga to'xtab o'tamiz. Xato $\varepsilon_n = \xi - x_n$ uchun (6.3) ni

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)(\xi - \varepsilon_n)}{f(\xi - \varepsilon_n) - f(\xi - \varepsilon_{n-1})}$$

munosabatni chiqaramiz. Agar biz bu yerda $f(\xi-\varepsilon_n)$ va $f(\xi-\varepsilon_{n-1})$ larning xatolar darajalariga nisbatan yoyilmalari

$$f(\xi-\varepsilon_n)=-f'(\xi)\varepsilon_n+\frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n^2+...,$$

$$f(\xi-\varepsilon_{n-1})=-f'(\xi)\varepsilon_{n-1}+\frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_{n-1}^2+...$$

ni qo'yib, tegishli amallarni bajarsak, quyidagi taqribiy

$$\varepsilon_{n+1}\approx-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \tag{6.5}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Agar bu tenglikni Nyuton metodi uchun chiqarilgan (31) tenglik bilan solishtirsak, vatarlar metodida xatoning o'zgarish qonuni Nyuton qoidasidagi qonunga yaqinligini ko'ramiz.

Nyuton metodining yaqinlashishi haqidagi 1-teoremaga o'xshash quyidagi teorema ham o'rinlidir.

5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya va dastlabki yaqinlashish x_0 1-teorema (5-ma'ruzadagi 1-teorema) shartlarini qanoatlantirsa va bundan tashqari x_1 uchun

$$|x_1-x_0|<\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta=t^* \quad \text{va} \quad |f(x_1)|\le P(|x_1-x_0|)=P(t_1)$$

tengsizliklar bajarilsa, u hoda:

1) (6.3) qoida bilan aniqlangan x_n yaqinlashishlar chekli qadamdan keyin yechiga olib keladi, yoki x_n larni barcha n lar uchun qurish mumkin bo'lib, ular yaqinlashuvchi ketma-ketlikni tashkil etadi
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi;$$
2) limitdagi qiymat ξ $f(x)=0$ tenglamaning yechimi bo'ladi;
3) yaqinlashish tezligi $|\xi-x_n|\le t^*-t_n$ tengsizlik bilan baholanadi, bu yerda t_n (5.13) tenglamaning kichik ildizi uchun $t_0=0$ va $t_1=|x_1-x_0|$ dan boshlab vatarlar usuli bilan qurilgan ketma-ket yaqinlashishlardir.

Endi bu metodni misol yechishga tadbiq qilamiz.

Misol.

$$f(x)\equiv x^4-4x^3+2x^2+12x-15=0$$

tenglamaning musbat ildizi 10^{-6} aniqlik bilan topilsin.

Ye**chish.** Biz yuqorida ko'rgan edikki, izlayotgan ildiz (1,5; 1,75) oraliqda yotadi va $x_0=1{,}75$ nuqtaning yaqin atrofida 5-teoremaning barcha shartlari bajariladi. Bu yerda $x_1=1{,}72$ deb olamiz. U vaqtda $|x_1-x_0|=0{,}03<2\eta=0{,}588$ va $f(1{,}72)\le P(0{,}03)$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

Shunday qilib, 5-teoremaning hamma shartlari bajariladi. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ξ ildizga intiladi. (36) qoidaga asosan x_2 ni topamiz:

$$x_2 = 1{,}75 - \frac{f(1{,}72)(1{,}72 - 1{,}75)}{f(1{,}72) - f(1{,}75)} = 1{,}7188829.$$

Yana uchta yaqinlashishlari quyidagidan iborat:

$$x_3 = 1{,}7320622; \quad x_4 = 1{,}7320508; \quad x_5 = 1{,}7320508.$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Nyuton metodining asosiy g'oyasi.
2. Nyuton metodining geometrik ma'nosi.
3. O'zgartirilgan Nyuton metodi.
4. Nyuton metodining yaqinlashishi.
5. Yaqinlashish tezligini baholash.

5-ma'ruza

Chiziqli tenglamalar sistemasini aniq va taqribiy yechish metodlari haqida tushuncha. Gauss va iteratsiya metodlari. Ularning hatoliklari

Reja:

1. *Gauss metodi.*
2. *Bosh elementlar metodi.*
3. *Optimal yo'qotish metodi.*
4. *Determinatni hisoblash.*
5. *Matrisalarning teskarisini topish.*

***Tayanch iboralar**: oddiy va iterasion usullar, uchburchakli matrisa, to'g'ri va teskari yo'l, Ermit matrisasi.*

Optimal yo'qotish metodi o'z strukturasi jihatidan Gauss metodiga yaqin bo'lishiga qaramasdan u mashina xotirasidan effektiv ravishda foydalanishga imkon beradi va shuning uchun ham bu metod yordamida tartibi ikki mart katta bo'lgan sistemani yechish mumkin.

Gauss metodi. Bu metod bir necha hisoblash sxemalariga ega. Shulardan biri Gaussning kompakt sxemasini ko'rib chiqamiz. Ushbu sistema berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{7.1}$$

Faraz qilaylik, $a_{11} \neq 0$ (yetakchi element) bo'lsin, aks holda tenglamalarning o'rinlarini almashtirib, x_1 oldidagi koeffisiyenti noldan farqli bo'lgan tenglamani birinchi o'ringa ko'chiramiz. Sistemadagi birinchi tenglamaning barcha koeffisiyentlarini a_{11} ga bo'lib,

$$x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \tag{7.2}$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \ (j \geq 2).$$

(2) tenglamadan foydalanib, (1) sistemaning qolgan tenglamalarida x_1 ni yo'qotish mumkin. Buning uchun (2) tenglamani ketma-ket $a_{21}, a_{31}, \ldots$ larga ko'paytirib, mos

ravishda sistemaning ikkinchi, uchinchi va h.k. tenglamalaridan ayiramiz. Natijada, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n,n+1}^{(1)}. \end{cases} \tag{7.3}$$

bu yerda $a_{ij}^{(1)}$ koeffisiyentlar

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}^{(1)} \ (i, j \geq 2)$$

formala yordamida hisoblanadi. Endi (7.3) sistema ustida ham shunga o'xshash almashtirishlar bajaramiz.

Buning uchun (3) sistemadagi birinchi tenglamaning barcha koeffisiyentlarini yetakchi element $a_{22}^{(1)}$ ga bo'lib,

$$x_2 + b_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)}x_n = b_{2,n+1}^{(2)} \tag{7.4}$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \ (j \geq 3)$$

(4) tenglama yordamida (3) sistemaning keyingi tenglamalarida yuqoridagidek x_2 ni yo'qotib,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = a_{3,n+1}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = a_{n,n+1}^{(2)} \end{cases}$$

sistemaga kelamiz, bu yerda

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(2)}, \ (i, j \geq 3)$$

Noma'lumlarni yo'qotish jarayonini davom ettirib va bu jarayonni m -qadamgacha bajarish mumkin deb faraz qilib, m -qadamda quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{m+1,n}^{(m)}x_n = a_{m,n+1}^{(m)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{nn}^{(m)}x_n = a_{n,n+1}^{(m)}, \end{cases} \tag{7.5}$$

bu yerda

$$b_{mj}^{(m)} = \frac{a_{mj}^{(m)}}{a_{mm}^{(m)}}, \ a_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)}b_{mj}^{(m)} \ (i, j \geq m+1)$$

Faraz qilaylik, m mumkin bo'lgan oxirgi qadamning nomeri bo'lsin. Ikki hol bo'lishi mumkin: $m = n$ yoki $m < n$. Agar $m = n$ bo'lsa, u vaqtda biz uchburchak matrisali va (1) sistemaga ekvivalent bo'lgan quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,\,n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,\,n+1}^{(2)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = b_{n,n+1}^{(n)} \end{cases} \qquad (7.6)$$

sistemaga ega bo'lamiz. Oxirgi sistemadan ketma-ket $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ larni topish mumkin:

$$\begin{cases} x_n = b_{n,n+1}^{(n)}, \\ x_{n-1} = b_{n-1,n+1}^{(n-1)} - b_{n-1,n}^{(n-1)} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 = b_{1,n+1}^{(1)} - b_{12}^{(1)} x_2 - \ldots - b_{1n}^{(1)} x_n. \end{cases} \qquad (7.7)$$

(6) uchburchak sistemaning koeffisiyentlarini topish Gauss metodining *to'g'ri yurishi*, (7.7) sistemani topish jarayoni *teskari yurishi* deyiladi.

Faraz qilaylik, $m < n$ bo'lsin va sistemanig m - va undan keyingi tenglamalari (7.5) ko'rinishga keltirilgan bo'lsin. Biz m - qadamni bajarilishi mumkin bo'lgan qadam deb hisoblagan Edik, bush uni bildiradiki (5) sistemaning ikkinchi tenglamasidan boshlab yetakchi elementni ajratish mumkin emas, barcha $a_{ij}^{(m)}\ (i, j = m+1, \ldots, n)$ lar nolga teng va (5) sistema quyidagi ko'rinishga ega

$$\begin{cases} x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ \qquad 0 = a_{m+1,n+1}^{(m)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad 0 = a_{n,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Agar bunda barcha ozod hadlar $a_{i,n+1}^{(m)}\ (i = m+1, \ldots, n)$ nolga teng bo'lsa, u holda biz faqat yagona birinchi tenglamaga ega bo'lamiz.

Barcha qadamdagi tenglamalarni birlashtirib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Bu sistemadan biz $x_1, x_2, \ldots, x_m$ noma'lumlarni $x_{m+1}, \ldots, x_n$ noma'lumlar va ozod hadlar yordamida ifodalab olishimiz mumkin. Bu holda (7.1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Agar $m < n$ bo'lib, hyech bo'lmaganda birorta $a_{i,m+1}^{(m)} \neq 0\ (m+1 \leq i \leq n)$ bo'lsa, u holda (7.1) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Qo'lda hisoblayotganda xatoga yo'l qo'ymaslik uchun, hisoblash jarayonini kontrol qilish ma'quldir. Buning uchun biz (7.1) matrisa satrlaridagi elementlar va ozod hadning yiqindisidan tuzilgan kontrol

$$a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \quad (i = \overline{1, n}) \tag{7.8}$$

yig'indidan foydalanamiz.

Agar $a_{i,\,n+2}$ larni (7.1) sistemaning ozod hadlari deb qabul qilsak, u holda almashtirilgan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j = a_{i,\,n+2} \quad (i = \overline{1, n}) \tag{7.9}$$

sistemaning yechimi x_j (7.1) sistemaning yechimi x_j oraliq quyidagicha ifodalanadi:

$$\bar{x}_j = x_j + 1 \quad (j = \overline{1, n}) \text{.} \tag{7.10}$$

Haqiqatan ham, (7.10) ni (7.9) sistemaga qo'ysak, (7.1) sistema va (7.8) formulaga ko'ra

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} = a_{i,\,n+2} \quad (i = \overline{1, n})$$

aytiyatga ega bo'lamiz.

Agar satr elementlar ustida bajarilgan amallarni har bir satrdagi kontrol yig'indi ustida ham bajarsak va hisoblashlar xatosiz bajarilgan bo'lsa, u holda kontrol yig'indilardan tuzilgan ustunning har bir elementi mos ravishda almashtirilgan satrlar elementlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Bu hol esa to'g'ri yurishni kontrol qilish uchun xizmat qiladi. Teskari yurishda esa, kontrol $\bar{x}_j$ larni topish bilan bajaraladi.

Tenglamalar sistemasi qo'lda yechilganda hisoblashlarni 1-jadvalda ko'rsatilgan Gaussning kompakt sxemasi bo'yicha olib borish ma'quldir. Soddalik uchun jadvalda to'rtta noma'lumli to'rtta tenglamalar sistemasini yechish sxemasi keltirilgan.

Gauss metodi bilan n ta noma'lumli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun bajariladigan arifmetik amallarning miqdori quyidagidan iborat: $\frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 - n)$ ta ko'paytirish va bo'lish, $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n)$ ta qo'shish.

Misol. Gauss metodi bilan quyidagi sistema yechilsin;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4{,}2x_2 + 1{,}6x_3 - 3x_4 = 3{,}2 \\ -0{,}4x_1 + 3x_2 - 2{,}4x_3 = -1{,}6 \\ 1{,}6x_1 - 0{,}8x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1{,}5x_4 = 0 \end{cases} \tag{7.11}$$

Sistemani yechish jarayoni 2-jadvalda keltirilgan.

1-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	**Ozod hadlar**	$\sum$	**Sxema qismlari**
a_{11} a_{21} a_{31} a_{41} $\ldots$ 1	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42} $\ldots$ $b_{12}^{(1)}$	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43} $\ldots$ $b_{13}^{(1)}$	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44} $\ldots$ $b_{14}^{(1)}$	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45} $\ldots$ $b_{15}^{(1)}$	a_{16} a_{26} a_{36} a_{46} $\ldots$ $b_{16}^{(1)}$	A
$\ldots$	$a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$ $\ldots$ 1	$a_{23}^{(3)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(3)}$ $\ldots$ $b_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$ $\ldots$ $b_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(1)}$ $a_{35}^{(1)}$ $a_{45}^{(1)}$ $\ldots$ $b_{25}^{(2)}$	$a_{26}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}$ $\ldots$ $b_{26}^{(2)}$	A_1
$\ldots$	$\ldots$	$a_{33}^{(2)}$ $a_{43}^{(2)}$ $\ldots$ 1	$a_{34}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$ $\ldots$ $b_{34}^{(3)}$	$a_{35}^{(2)}$ $a_{45}^{(2)}$ $\ldots$ $b_{35}^{(3)}$	$a_{36}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}$ $\ldots$ $b_{36}^{(3)}$	A_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$a_{44}^{(3)}$ $\ldots$ 1	$a_{45}^{(3)}$ $\ldots$ $b_{45}^{(4)}$	$a_{46}^{(3)}$ $\ldots$ $b_{46}^{(4)}$	A_3
1	1	1	1	x_4 x_3 x_2 x_1	$\bar{x}_4$ $\bar{x}_3$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1$	B

2-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	**Ozod hadlar**	$\sum$	**Sxema qismlari**

2 $-0,4$ 1,6 1 ... 1	4,2 3 $-0,8$ -2 ... 2,1	1,6 $-2,4$ 1 -1 ... 0,8	-3 0 -1 1,5 ... $-1,5$	3,2 $-1,6$ -1 0 ... 1,6	8 $-1,4$ $-0,2$ $-0,5$ ... 4	A
...	3,84 4,16 4,1 ... 1	$-2,08$ 0,28 1,8 ... $-0,54166$	$-0,60$ $-1,40$ -3 ... $-0,15625$	$-0,96$ 3,56 1,6 ... $-0,25$	0,2 6,6 4,5 ... 0,05208	A_1
...	...	$-2,53331$ $-4,02081$ ... 1	0,75 2,35937 ... $-0,29606$	$-4,6$ $-2,62500$ ... 1,81581	$-6,38331$ $-4,28644$ ... 2,51198	A_2
			1,16897	4,67603	5,84500	A_4
1	1	1	1	4,00013 3,00009 2,00005 1,00002	5,00013 4,00009 3,00005 2,00002	B

Shunday qilib, quyidagi $x_1 = 1,00002;\ \ x_2 = 2,00005;\ \ x_3 = 3,00009;\ \ x_4 = 4,00013$ taqribiy yechimga ega bo'ldik.

Sistemaning aniq yechimi $x_1 = 1;\ \ x_2 = 2;\ \ x_3 = 3;\ \ x_4 = 4$ ekanligi bevosita ishonch hosil qilish mumkin.

Bosh elementlar metodi. Gauss metodida yetakchi elementlar doim noldan farqli bo'lavermaydi. Yoki ular nolga yaqin sonlar bo'lishi mumkin: bunday sonlarga bo'lganda katta absolyut xatoga ega bo'lgan sonlar hosil bo'ladi. Buning natijasida taqribiy yechim aniq yechimdan sezilarli darajada chetlashib ketadi.

Hisoblash xatosining bunday halokatli ta'siridan qutulish uchun Gauss metodi bosh elementni tanlash yo'li bilan qo'llaniladi. Buning Gauss metodining kompakt sxemasidan farqi quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, noma'lumlarni yo'qotish jarayonida quyidagi sistemaga ega bo'lgan bo'laylik:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(2)}, \\ \quad\quad a_{m+1,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + a_{m+1,n}^{(m)} x_n = a_{m+1,\,n+1}^{(m)}, \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad a_{n,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + a_{n,\,n}^{(m)} x_n = a_{n,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Endi $|a_{m+1,k}^{(m)}| = \max\limits_{j} |a_{m+1,j}^{(m)}|$ tenglikni qanoatlantiradigan k nomerni topib, o'zgaruvchilarni qayta belgilaymiz: $x_{m+1} = x_k$ va $x_k = x_{m+1}$ so'ngra $(m+2)$ tenglamadan boshlab, barchasidan x_{m+1} noma'lumni yo'qotamiz. Bunday qayta belgilashlar yo'qotish tartibini o'zgartirishga olib keladi va ko'p hollarda hisoblash xatosini kamaytirishga xizmat qiladi.

Optimal yo'qotish metodi. Bu metodning dastlabki qadamlari Gauss metodiga o'xshashdir. Yetakchi element $a_{11} \neq 0$ deb faraz qilib, (7.1) sistemaning birinchi tenglamasini

$$x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \tag{7.2}$$

ko'rinishga keltiramiz. So'ngra (7.1) sistemaning faqat ikkinchi tenglamasidan x_1 ni yo'qotamiz:

$$a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2,n+1}^{(1)}.$$

Endi $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilib, bu tenglamani (7.4) ko'rinishga keltiramiz:

$$x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)}.$$

Bu tenglama yordamida (7.2) tenglamadan x_2 ni yo'qotamiz. Natijada

$$x_1 + c_{13}^{(2)} x_3 + \ldots + c_{1n}^{(2)} x_n = c_{1,n+1}^{(2)}$$
$$x_2 + c_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + c_{2n}^{(2)} x_n = c_{2,n+1}^{(2)}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$c_{1j}^{(2)} = b_{1j}^{(1)} - b_{12}^{(1)} b_{2j}^{(2)}, \quad c_{2j}^{(2)} = b_{2j}^{(2)} \quad (j \geq 3).$$

Faraz qilaylik, avvalgi k ta tenglamalar ustida almashtirishlar bajarish natijasida (7.1) sistema quyidagi teng kuchli sistemaga keltirilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \ldots + c_{1n}^{(k)} x_n = c_{1,n+1}^{(k)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + c_{k,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \ldots + c_{k,k+1}^{(k)} \\ a_{k+1,1} x_1 + \ldots + a_{k+1,\,k+1} x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,\,n} x_n = a_{k+1,n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} x_1 + \ldots + a_{n,\,k+1} x_{k+1} + \ldots + a_{nn} x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{7.12}$$

Bu sistemaning avvalgi k ta tenglemasini mos ravishda $a_{k+1,k}, a_{k+1,2}, ..., a_{k+1,k}$ larga ko'paytirib, natijalarni $(k+1)$ tenglamadan ayiramiz va hosil bo'lgan tenglamani x_{k+1} noma'lum oldingi koeffisiyentga bo'lamiz. Natijada $(k+1)$ - tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$x_{k+1} + c_{k+1,k+2}^{(k)} + \ldots + c_{k+1,n}^{(k)} x_n = c_{k+1,n+1}^{(k)}.$$

Endi bu tenglama yordamida (7.12) sistemaning avvalgi k ta tenglamasidan x_{k+1} ni yo'qotsak, u holda yana (7.12) ko'rinishdagi sistemaga, faqat k ning $(k+1)$ ga almashgan holiga, ega bo'lamiz.

Shu bilan birga, agar

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} c_{r,k+1}^{(k)} a_{k+1,r} \neq 0$$

bo'lsa, quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$c_{k+1,p}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1,p} - \sum_{r=1}^{k} a_{k+1,r} c_{r,p}^{(k)}}{a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} a_{k+1,r} c_{r,k+1}^{(k)}},$$

$$c_{ip}^{(k+1)} = c_{ip}^{(k)} - c_{i,k+1}^{(k)} c_{k+1,p}^{(k+1)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k; \; p = k+2, \; k+3, \ldots, n+1).$$

Almaщtirshdarning n-qadami ham bajarilgandan so'ng (7.1) sistemaning yechimi uchun quyidagi formulalar hosil bo'ladi:

$$x_i = c_{i,n+1}^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Bu yerda ham hisoblash jarayonini kontrol qilash Gauss metodidagiga o'xshashdir. Optimal yo'qotish metodida ham barcha yetakchi elementlar noldan farqli bo'lshi zarurdir. Agar bu fakt oldindan ma'lum bo'lmasa, u holda hisoblash sistemasini o'zgartirib, bosh elementlarni satr bo'yicha tanlash yo'li bilan noma'lumlarni yo'qotish maqsadga muvofiqdir. Buning uchun, agar $(k+1)$-tenglamada $x_1, x_2, ..., x_k$ noma'lumlarni yo'qotgandan keyin,

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{s=1}^{k} a_{k+1,s} c_{sp}^{(k+1)} \qquad (p > k+1)$$

moduli bo'yicha eng katta element bo'lsa, u holda o'zgaruvchilarni qaytadan belgilab: $x_{k+1} = x_p$ va $x_p = x_{k+1}$, so'ngra optimal yo'qotish qoidasiga ko'ra noma'lumlarni yo'qotishni davom ettirish kerak.

Optimal yo'qotish metodining ustunligi shundan iboratki n-tartibli sistemani yechish uchun zarur bo'lgan arifmetik amalalrning soni Gauss metodidagidek bo'lsa ham, bu metod EHM lar xotirasidan effektiv ravishda foydalanishga imkon beradi, ya'ni sistemaning tartibini ikki marta orttirish mumkin.

(7.12) sistemadan ko'rinib turibdiki, optimal yo'qotishning k-qadami bajarilgach, berilgan sistemaning oxirgi $(n-k)$ ta tenglamasi o'zgarishsiz qoladi. Buni hisobga olgan holda xotiraga matrisaning barcha elementlarini to'la kiritmasdan, har bir qadamdan oldin bittadan satrni kiritamiz. U holda $(k+1)$-qadamni amalga oshirish uchun xotiraning

$$f(k) = k(n-k+1)+n+1$$

ta yacheykasi yetarli bo'ladi, bular

$$\begin{bmatrix} c_{1,k+1}^{(k)} \; \ldots\ldots\ldots \; c_{1,n+1}^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{k,k+1}^{(k)} \; \ldots\ldots\ldots \; c_{k,n+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

matrisani va (12) sistemadagi $(k+1)$-tenglama koeffisiyentlarni joylashtirish uchun xizmat qiladi. Endi $f(k)$ ning maksimumini topib, n-tartibli sistemani yechish uchun $\dfrac{(n+1)(n+5)}{4}$ ta yacheykaga ega bo'lgan maydon yetarli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Masalan, operativ xotirasi 4095 yacheykadan iborat bo'lgan EHM da tashqi qurilmalardan foydalanmasdan 122-tartibli tenglamalar sistemasini yechish yoki shu tartibli ixtiyoriy matrisaning determinantini hisoblash mumkin.

Misol tariqasida

$$\begin{cases} 2x_1 + 4{,}2x_2 + 1{,}6x_3 - 3x_4 = 3{,}2 \\ -0{,}4x_1 + 3x_2 - 2{,}4x_3 = -1{,}6 \\ 1{,}6x_1 - 0{,}8x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1{,}5x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemani optimal yo'qotish motedi bilan yechaylik. Birini tenlamadan

$$x_1 + 2{,}1x_2 + 0{,}8x_3 - 1{,}5x_4 = 1{,}6 \tag{7.13}$$

ni hosil qilamiz va buni $-0{,}4$ ga ko'paytirib, sistemaning ikkinchi tenglamasidan ayiramiz:

$$3{,}84x_2 - 2{,}08x_3 - 0{,}60x_4 = -0{,}96 .$$

Buni $3{,}84$ ga bo'lib, kerakli tenglamani hosil qilamiz:

$$x_2 - 0{,}54167x_3 - 0{,}15625x_4 = -0{,}2500 . \tag{7.14}$$

Endi (7.13) dan x_2 ni yo'qotsak,

$$x_1 + 1{,}93750x_2 - 1{,}17182x_4 = 2{,}12501 . \tag{7.15}$$

(7.15) ni 1,6 ga (7.14) ni -0,8 ga ko'paytirib, sistemaning uchinchi tenglamasidan ayiramiz va hosil bo'lgan tenglamani x_3 oldidagi koeffisiyentga bo'lsak,

$$x_3 - 0{,}29611x_4 = 1{,}81556 \tag{7.16}$$

kelib chiqadi.

Bu tenglama yordamida (7.14) va (7.15) dan x_3 ni yo'qotsak,

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}59811x_4 = -1{,}39322 \\ x_2 - 0{,}31664x_4 = 0{,}73343 \end{cases} \tag{7.17}$$

hosil bo'ladi.

Endi (7.16)-(7.17) tenlamaoar yordamida sistemaning to'rtinchi tenglamasidan x_1, x_2, x_3 ni yo'qotamiz: $1{,}11872x_4 = 1{,}67564$. Bundan va (7.13)-(7.17) dan noma'lumlarni ketma-ket topamiz:

$$x_4 = 4{,}00065; \quad x_3 = 3{,}00019; \quad x_2 = 1{,}99999; \quad x_1 = 0{,}99922.$$

Determinantni hisoblash. Gauss metodini ham, optimal yo'qotish metodini ham determinantni hisoblash uchun qo'llash mumkin. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \dots \; a_{2n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1} \; a_{n2} \; \dots \; a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisaning determinantini topish talab qilinsin. Buning uchun, bir jinsli, chiziqli

$$A\bar{x} = \bar{0} \tag{7.18}$$

sistemani yechishga Gauss metodini qo'llaymiz. Natijada A matrisa

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12}^{(1)} & b_{13}^{(1)} & \dots & b_{1n}^{(1)} \\ 1 & 0 & b_{23}^{(2)} & \dots & b_{2n}^{(2)} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

uchbuchak matrisaga almashtiriladi, (18) sistema esa unga ekvivalent bo'lgan

$$B\bar{x} = \bar{0}$$

sistemaga o'tadi.

Agar diqqat qilinsa, B matrisaning elementlari A matrisa va keyingi yordamchi $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ matrisalardan quyidagi ikkita elementar alamashtirishlar natijasida hosil bo'lgan:

1) noldan farqli deb faraz qilingan $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ yetakchi elementlarga bo'lish;
2) A matrisa yordamchi $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ larning satrlaridan mos ravishdagi yetakchi satrlarga proporsional bo'lgan satrlarni ayirish.

Birinchi almashtirish natijasida matrisaning determinanti ham mos ravishdagi yetakchi elementga bo'linadi, ikkinchi almaщtirish esa determinantni o'zgarishsiz qoldiradi. Shuning uchun ham

$$1 = \det B = \frac{\det A}{a_{11}a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}},$$

bu yerda esa

$$\det A = a_{11}a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}. \tag{7.19}$$

Demak, determinant Gauss kompakt sxemasidagi yetakchi elementlarning ko'paytmasiga teng ekan.

Matrisa determinantini optimal yo'qotish metodi yordamida ham hisoblash mumkin. Bu yerda ham determinant barcha yetakchi

$$\alpha_k = a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} a_{k+1,r}c_{r,\,k+1}^{(k)}$$

elementlarning ko'paytmasiga teng:

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{7.20}$$

Agar yetakchi elemantlarning birortasi nolga teng bo'lsa u holda satr bo'yicha bosh elementni tanlash sxemasidan foydalanish kerak. Lekin bu holda determinantning ishorasini saqlash uchun α_k elementlarni $(-1)^{l_k+1}$ ga ko'paytirish kerak bo'ladi. Bu yerda l_k soni, agar avvalgi k qadamda yo'qotilmagan barcha noma'lumlar chapdan o'ngga qarab ketma-ket $1, 2, ..., n-k$ lar bilan nomerlangan bo'lsa, $k+1$-qadamda yo'qotilgan noma'lumlarning nomerini bildiradi. Lekin hisoblash odatdagicha (19) yoki (20) formulalar bilan bajarilganda $\det A$ aytarli kichik (katta) bo'lmasa-da biror $i<n$ uchun avvalgi i ta ko'paytuvchilarning ko'paytmasi mashina noliga teng bo'lishi yoki to'lib ortib ketishi mumkin.

Bunday nuqsondan qutilish uchun (19) formula bo'yicha $\det A$ ni quyidagicha hisoblash kerak:

$$\det A\left(q\prod_{j}(-1)^{l_j+1}\alpha_j\right)\left(r\prod_{k}(-1)^{l_k+1}\ \alpha_k\right).$$

Bu yerda q EHM dagi mumkin bo'lgan eng katta songa yaqin bo'lib, r eng kichik songa yaqin vash u bilan birga $q \cdot r = 1$; α_j yetakchi elementlar orasidagi moduli bo'yicha birdan kichik bo'lganlari, α_k esa qolgan yetakchi elementlar.

Matrisalarning teskarisini topish. Agar bir xil matrisaga ega bo'lib, faqat ozod hadlari bilan farq qiladigan bir qancha sistemani yechishga to'g'ri kelsa, u holda matrisaning teskarisini topish maqsadga muvofiqdir.ikkinchi tomondan statistik hisoblashlarda ayrim statistik parametrlarni baholash uchun teskari matrisalar katta ahamiyatga ega.

Faraz qilaylik, bizga maxsusmas matrisa $A=\left[a_{ij}\right]\ (i,j=\overline{1,n})$ berilgan bo'lsin. Unga teskari bo'lgan $A^{-1}=\left[x_{ij}\right]$ matrisani topish uchun asosiy $AA^{-1}=E$ munosabatdan foydalanamiz, bu yerda E birlik matrisa, A va A^{-1} matrisalarni o'zaro ko'paytirsak, n^2 ta x_{ij} noma'lumlarga nisbatan asosiy matrisasi bir xil va faqat ozod hadlari bilangina farq qiladigan n ta tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=1 & 0\ldots 0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 & 1\ldots 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0 & 0\ldots 1. \end{cases}$$

Bunday sistemani Gauss metodi bilan birdaniga yechish mumkin. Misol uchun (11) sistema

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4{,}2 & 1{,}6 & -3 \\ 0{,}4 & 3 & -2 & 0 \\ 1{,}6 & -0{,}8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

matrisasining teskarisini topaylik.

Yechish. Gauss kompakt sxemasini qo'llaymiz. Bu holda to'rtta ozodhadlar ustuniga ega bo'lamiz (11-jadval). Shuni ham eslatib o'tamizki, teskari matrisaning satr elementlari teskari tartibda hosil bo'ladi.

3-jadval natijasidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}28239 & -0{,}06801 & -0{,}06915 & 0{,}51865 \\ 0{,}38037 & -0{,}19364 & -1{,}70539 & 0{,}29046 \\ 0{,}51408 & -0{,}77686 & -1{,}04425 & 0{,}33195 \\ 0{,}66162 & -0{,}73076 & -1{,}59058 & 0{,}92945 \end{bmatrix}$$

3-jadval

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$\sum$
2	4,2	1,6	−3	1	0	0	0	5,8
−0,4	3	−2	0	0	1	0	0	1,6
1,6	−0,8	1	−1	0	0	1	0	1,8
1	−2	−1	1,5	0	0	0	1	2,5
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	
1	−2,1	−0,8	−1,5	0,5	0	0	0	2,9
	3,84	−1,68	−0,6	0,2	1	0	0	2,76
	−4,16	−0,28	1,4	−0,8	0	1	0	−2,84
	−4,1	−1,8	3	−0,5	0	0	1	−2,4
	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	1	−0,43750	−0,15625	0,05208	0,26042	0	0	0,71875

		$-2{,}10000$	0,75000	$-0{,}58335$	1,08334	1	0	0,14999
		$-3{,}59375$	2,35937	$-0{,}28647$	1,06772	0	1	$-3{,}52085$
		.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
		1	$-0{,}35714$	0,27779	$-0{,}51588$	$-0{,}47617$	0	$-0{,}47617$
			1,07590	0,71184	$-0{,}78622$	$-1{,}71131$	1	0,29022
				0,66162	$-0{,}73076$	$-1{,}59058$	0,92945	$-0{,}73027$
				0,51408	$-0{,}77686$	$-1{,}04425$	0,33195	$-0{,}97508$
				0,38037	$-0{,}19364$	$-0{,}70539$	0,29046	$-0{,}22820$
				0,28239	$-0{,}06801$	$-0{,}06915$	0,51865	0,66388

Oddiy iterasiya metodi. Faraz qilaylik,

$$A\bar{x} = \bar{b} \tag{9.11}$$

sistema biror usul bilan

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{b} \tag{9.12}$$

ko'rinishga keltirilgan bo'lsin, qanday keltirish kerakligini keyinchalik ko'rib o'tamiz va dastlabki yaqinlashish vektori $\bar{x}^{(0)}$ bi-ror usul bilan (masalan, $\bar{x}^{(0)} = \bar{c}$ kabi) topilgan bo'lsin. Agar keyingi yaqinlashishlar

$$\bar{x}^{(k)} = B\bar{x}^{(k-1)} + \bar{c}, \quad (\bar{k} = 1,2,...) \tag{9.13}$$

rekurrent formulalar yordamida topilsa, bunday metod oddiy iterasiya metodi deyiladi. (9.12) dan ko'ramizki, oddiy iterasiya metodi bu birinchi tartibli to'liq qadamli iterasion metoddir. Agar (9.13) ketma-ketlikning limiti $\bar{x}^*$ mavjud bo'lsa, (bu limit (9.13) sistemaning, (shu bilan (9.11) sistemaning ham) yechimi bo'ladi.

Haqiqatan ham, (9.13) tenglikda limitga o'tsak, $\bar{x}^* = B\bar{x}^* + \bar{c}$ kelib chiqadi.

Oddiy iterasiya metodining yaqinlashish shartini aniqlaylik.

1-teorema. (9.13) oddiy iterasiya jarayoni o'zining ixtiyoriy dastlabki yaqinlashish vektori $\bar{x}^{(0)}$ da yaqinlashuvchi bo'lishi uchun B matrisaning barcha xos sonlari birdan kichik bo'lishi zarur va kifoyadir.

Isbot. *Zarurligi.* Faraz qilaylik, ixtiyoriy dastlabki vektor uchun $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}^{(k)} = \bar{x}^*$ limit mavjud bo'lsin. U holda $\bar{x}^* = B\bar{x}^* + \bar{c}$ (9.13) ni bu tenglikdan ayirib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} = B(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k-1)}) = B^2(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k-2)}) = ... = B^k(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)}).$$

Endi $\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)}$ vektor k ga bog'liq bo'lmaganligi uchun

$$\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} = B^k(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)})$$

tenglikda $k \to \infty$ limitga o'tsak,

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

kelib chiqadi, B matrisaning barcha xos sonlarining modullari birdan kichikligi ko’rinadi.

Kifoyaligi. (9.13) orqali aniqlanadigan barcha yaqinlashishlarni dastlabki vektor $\bar{x}^{(0)}$ va $\bar{c}$ orqali ifodalaymiz:

$$\bar{x}^{(k)} = B\bar{x}^{(k-1)} + \bar{c} = B(B\bar{x}^{(k-2)} + \bar{c}) + \bar{c} = B^2\bar{x}^{(k-2)} + (E+B)\bar{c} =$$
$$= \ldots = B^k\bar{x}^{(0)} + (E + B + \ldots + B^{k-1})\bar{c}.$$

Endi, faraz qilaylik, B ning barcha xos sonlari birdan kichik bo’lsin. U holda

$$B^k \underset{k\to\infty}{\to} 0, \quad E + B + B^2 + \ldots + B^{k-1} \to (E-B)^{-1}.$$

Demak, $\bar{x}^{(0)}$ qanday bo’lishidan qat’i nazar $\bar{x}^{(k)}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir.

Isbot qilingan teorema nazariy jihatdan foydali, chunki u mavjud haqiqatni aniq ifodalaydi. Lekin, amaliy ishlar uchuya yaramaydi. Endi V matrisaning elementlari orqali ifodalanadi-gan kifoyalilik belgisini keltiramiz.

2-teorema. (9.13) oddiy iterasiya jarayonining yaqinlashuvchi bo’lishi uchun B matrisaning biror normasi birdan kichik bo’lishi kifoyadir.

Isbot. Haqiqatan ham, agar $\|B\|<1$ bo’lsa, bu matrisaning barcha xos sonlari modullari bo’yicha birdan kichik bo’lib, bundan 1-teoremaga asosan oddiy iterasion jarayonning yaqinlashishligi kelib chiqadi.

2-teorema bir necha qulay kifoyalilik belgilarini keltirishga imkon beradi.

3-teorema. (9.13) oddiy iterasiya jarayovd yaqinlashishi uchun B matrisaning elementlari quyidagi

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \le \mu < 1, \tag{9.14}$$

$$\max_j \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \le \mu < 1, \tag{9.15}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2 \le \mu < 1 \tag{9.16}$$

tengsizliklarning birortasini qanoatlantirishi kifoyadir.

Agar biz

$$\|B\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|, \quad \|B\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|$$

normalarni eslasak, teoremadagi avvalgi ikkita shart 2- teoremadan kelib chiqadi. Oxirgi shartdagi tengsizlik esa, $\|B\|_3 = \sqrt{\lambda_1}$ ning birdan kichik ekanligini ko’rsatadi. Haqiqatan ham, bu yerda λ_1 $B'B$ matrisaning eng katta xos soni bo’lganligi va $B'B$ ning barcha xos sonlari manfiy bo’lmaganligi uchun

$$\lambda_1 \le \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

Lekin bu tengsizlikning o’ng tomoyaidagi ifoda $B'B$ ning iziga (ya’ni $B'B$ matrisa diagonal elementlarining yig'indisiga) teng bo'lib, u esa $\sum_{i,j=1}^{n}|b_{ij}|^2$ ra tengdir.

Endi yaqinlashish tezligini baholaydigan quyidagi teoremani keltiramiz.

4-teorema. Agar B matrisaning, x vektorning berilgan normasiga moslangan biror normasi birdan kichik bo'lsa, u holda (9.13) oddiy iterasiya metodining xatosi quyidagicha baholanadi:

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\|B\|<1$, shuning uchun ham

$$\bar{x}^* = (E + B + B^2 + ... + B^{k-1} + ...)\bar{c} \quad (9.17)$$

Bu tenglikni (9.15) dan ayirsak,

$$\bar{x}^* - \bar{x}^k = -B^k \bar{x}^{(0)} + (B^k + B^{k+1} + ...)\bar{c} \quad (9.18)$$

Bundan esa

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \le \|B\|^k \|\bar{x}^{(0)}\| + (\|B\|^k + \|B\|^{k+1} + ...)\|\bar{c}\| = \|B\|^k \|\bar{x}^{(0)}\| + \frac{\|B\|^k \|\bar{c}\|}{1-\|B\|}.$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, agar $\bar{x}^{(0)}$ sifatida ozod hadlar ustuni c olingan bo'lsa, u holda iterasiyaning xatosi quyidagicha baholanadi:

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \le \frac{\|B^{k+1}\| \|\bar{c}\|}{1-\|B\|} \quad (9.19)$$

Haqiqatan ham, $\bar{x}^{(0)} = \bar{c}$ deb olsak, u holda (9.18) o'rniga

$$\bar{x}^* - \bar{x}^k = (B^{k+1} + B^{k+2} + ...)\bar{c}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bundan esa (9.19) kelib chiqadi.

Endi (9.11) sistemani (9.12) ko'rinishga keltirish va oddiy iterasiyaning amalda qo'llanilishi ustida to'xtalib o'tamiz. Shu maqsadda ixtmyoriy mdxsusmas R matrisa olib, iterasiyaning quyidagi

$$\bar{x}^{(\kappa+1)} = (E - PA)\bar{x}^{(k)} + P\bar{c} \quad (9.20)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Albatta, R matrisa shunday tanlangan bo'lishi kerakki,

$$B = E - PA$$

matrisa uchun yaqinlashish sharti bajarilsin. Quyidagi ikkita xususiy holni ko'rib chiqamiz.

1. $P = D^{-1}$, bu yerda D diagonal matriad bo'lib, diagonal elementlari A matrisaniig diagonal elementlari bilan ustma-ust tushsin. Bu holda (9.20) iterasiya jarayonini tuzish

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ a_{n1}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

sistema tenglamalarini mos ravishda $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ larga bo'lib, hosil bo'lgan tenglamalarda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larnn mos ravishda chap tomonda qoldirib, qolganlariii o'ng tomonga o'tkavishdan iboratdir. Natijada,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n, \\ &.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \ldots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \end{aligned}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Albatta bu usulni qo'llash mumkin bo'lishi uchun barcha ai lar noldan farqli bo'lishi kerak. Bundan tashqari diagonal elementlarning modullari boshqa elementlarining modullaridan ancha katta bo'lishi kerak. Aniqrog'i quyidagi tengsizliklarning birortasi bajarilishi lozim:

$$\max_i \sum_{i=1,\, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < |a_{ii}|, \tag{9.21}$$

$$\max_j \sum_{i=1,\, i\neq j} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1, \tag{9.22}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|a_{ij}|^2} \sum_{i=1,\, i\neq 1}^{n} |a_{ij}|^2 < 1. \tag{9.23}$$

Bu tengsizliklar, bajarilsa, u holda mos ravishda (9.14) — (9.16) tengsizliklar ham bajariladi.

2. $P = A^{-1} - s$, bu yerda $\varepsilon = \lfloor \varepsilon_{ij} \rfloor$ elementlarining modullari yetarlicha kichik bo'lgan matrisadir. Bu holda (9.20) tenglik

$$\bar{x}^{(k+1)} = \varepsilon A \bar{x}^{(k)} + (A^{-1} - \varepsilon)\bar{c}$$

ko'rinishga ega bo'lib, A matrisa yaqinlashish shartini qanoatlantiradi.

(8.11) sistemani P ga ko'paytirish sistema tenglamalari ustida elementar almashtirish bajarish bilan teng kuchlidir.

Odatda R ni 2-ko'rinishda olinganda misol yechish uchun quyidagicha ish tutiladi. Berilgan sistemadan shunday tenglamalarni ajratib olinadiki, bu tenglamalarda biror noma'lum oldidagi koeffisiyent moduli bo'yicha shu tenglamaning qolgan barcha koeffisiyentlari modullarining yig'indisidan katta bo'lsin. Ajratilgan tenglamalar shunday joylashtiriladiki, ularning eng katta koeffisiyentlari diagonal koeffisiyentlari bo'lsin. Tenglamalarning qolganllridan va ajratilganlaridan yuqoridagi prinsip saqlanadigan, ya'ni eng katta koeffisiyent diagonal koeffisiyent bo'ladigan qilib o'zaro chiziqli erkli bo'lgan chiziqli kombinasiyalar tuziladi va barcha bo'sh satrlar to'ldiriladi. Shu bilan birga dastlabki sistemaning har bir tenglamasi yangi sistema tenglamalarini tuzayotganda qatnashishi kerak.

Bu yerda ko'rsatilgan usullarni misollarda tushuntnramiz.

1-misol. Quyidagi sistema odiy iterasiya metodi bilan yechilsish:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ -x_1 + 25x_2 + x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 11, \\ x_2 - x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 20x_5 = -32 \end{cases} \tag{9.24}$$

Ye ch i sh. Birinchi usulda aytilganidek, bu sistemaning tenglamalarini mos ravishda olamiz 10, 25, —20, 10, —20 larga bo'lib, quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}6 - 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}1x_5, \\ x_2 = 0{,}44 + 0{,}04x_1 - 0{,}04x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}08x_5, \\ x_3 = 1 - 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}5x_5, \\ x_5 = 1{,}6 + 0{,}05x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}1x_4. \end{cases} \tag{9.25}$$

Bu yerda (9.14) dagi yig'indilar mos ravishda 0,7; 0,36; 0,4; 0,7; 0,3 bo'lib, bulardan esa $\|B\|_1 = 0{,}7 < 1$ kelib chiqadi.

Dastlabki yaqinlashish $\bar{x}^{(0)}$ sifatida ozod hadlar ustuni (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6)' ni olib, keyingi yaqinlashishlarni topamiz:

$$x_1^{(1)} = 0{,}6 - 0{,}1x_2^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} - 0{,}1x_5^{(0)} = 0{,}6 - 0{,}1 \cdot 0{,}44 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 1 - 0{,}1 \cdot 1{,}6 = 0{,}881,$$

$$x_2^{(1)} = 0{,}44 + 0{,}04 \cdot 0{,}6 - 0{,}04 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1{,}6 = 0{,}754$$

Shunga o'xshash $x_3^{(1)} = 0{,}892;\ x_4^{(1)} = 1{,}851;\ x_5^{(1)} = 1{,}72$. Hisoblashlarning davomi 1-jadvalda keltirilgan.

Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, hisoblashlarni qisqartirish maqsadida avvalgi bir necha yaqinlashishlarni kamroq o'nli raqamlari bilan hisoblash ham mumkin.

Hisoblashlar, odatda, $\bar{x}^{(k)}$ va $\bar{x}^{(k+1)}$ yaqinlashishlar kerakli aniqlikda ustma-ust tushgunlari qadar davom ettiriladi.

1- jadval

k	$x_i^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1.6
1	0,881	0,754	0,892	1,851	1,72
2	0,9884	0,9482	1 ,0029	1,9147	1,9859
3	0,9904	0,9814	0,9. 508	1 ,9939	1,9854
4	0,99944	0,99753	0,99769	1,99364	1 ,99897
5	0,99839	0,99865	0,99929	1,99954	1 ,99970
6	0,99986	0,99989	0,99977	1,99976	1,99960
7	0,999934	0,999920	1,000018	1,999788	1 ,999947
8	0,999974	0,999951	0,999976	2,000042	1,999978

Bu jadvaldan ko'ramizki 8-iterasiya $x_1 = 0{,}99997$; $x_2 = 0{,}99995$; x_3 = 0,99998; x_4 = 2,00004; x_5 = 1,99998 yechimdan iborat. Bu topilgan taqribiy yechim aniq yechim $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1$, $x_4^* = x_5^* = 2$ dan beshinchi xonaning birliklari bo'yichagina farqlanyapti.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Aniq va taqribiy usullar.
2. Matrisa elementlarini aniqlash.
3. Kramer va teskari matrisa usuli.
4. Ixtiyoriy sistemani uchburchakli sistemaga keltirish.
5. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish.

6-Ma'ruza

Funksiyalarni yaqinlashtirish usullari. Algebraik ko'phadlar bilan yaqinlashtirish. Interpolyatsion masala yechimining yagonaligi

Reja:

1. *Interpolyasiyalash masalasi.*
2. *Eytken sxemasi.*
3. *Tugunlar teng uzoqlikda joylashgan hol uchun nyuton interpolyasion formulalari.*
4. *Lagranj interpolyasion formulasi*
5. *Chekli ayirmalar va ularning xossalari.*
6. *Nyuton interpolyasion formulasining qoldiq hadlari.*

Tayanch iboralar*: Interpolyasiyalash, boshlang'ich qiymat, tugun nuqta, funksiya, Kroneker simvoli, ko'phad, xato.*

Aksariyat hisoblash metodlari masalaning qo'yilishida qatnashadigan funksiyalarni unga biror, muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funksiyalarga almashtirish g'oyasiga asoslangan.

Ushbu mavzuda funksiyalarni yaqinlashtirish masalasining eng sodda va juda keng qo'llaniladigan qismi — funksiyalarni interpolyasiyalash masalasi qaraladi.

Dastlab interpolyasiyalash deganda funksiyaning qiymatlarini argumentning jadvalda berilmagan qiymatlari uchun topish tushunilar edi. Bu holda interpolyasiyalashni «satrlar orasidagilarni o'qiy bilish san'ati» deb ham ta'riflash mumkin. Hozirgi vaqtda interpolyasiyalash tushunchasi juda keng ma'noda tushuniladi. Interpolyasiya masalasining mohiyati quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, $[a, b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiya berilgan yoki hyech bo'lmaganda uning $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ qiymatlari ma'lum bo'lsin. Shu oraliqda aniqlangan va hisoblash uchun qulay bo'lgan qandaydir funksiyalar $\{P(x)\}$ sinfini, masalan, ko'phadlar sinfini olamiz. Berilgan $y = f(x)$ *funksiyani* $[a, b]$ *oraliqda interpolyasiyalash masalasi* shu funksiyani berilgan sinfning shunday $P(x)$ funksiyasi bilan taqribiy ravishda

$$f(x) \approx P(x)$$

almashtirishdan iboratki, $P(x)$ berilgan $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = \overline{0, n}).$$

Bu yerda ko'rsatilgan $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalar interpolyasiya tugunlari yoki tugunlar deyiladi, $P(x)$ esa interpolyasiyalovchi funksaya deyiladi. Agar $\{P(x)\}$ sinfi sifatida darajali ko'phadlar sinfi olinsa, u holda interpolyasiyalash algebraik deyiladi. Algebraik interpolyasiyalash apparati hisoblash matematikasining ko'p sohalarida qo'llaniladi, chunonchi, differensiallash va integrallashda, transsendent, differensial va integral tenglamalarni yechishda, funksiya ekstremumini topishda, hamda funksiya jadvalini tuzishda. Teylor yoyilmasi klassik analizda qay darajada ahamiyatga ega bo'lsa, algebraik interpolyasiyalash ham hisoblash matematikasida shunday ahamiyatga egadir. Ayrim hollarda interpolyasiyalashning boshqa ko'rinishlarini qo'llash maqsadga muvofiqdir. Masalan, $f(x)$ Davriy funksiya bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida trigonometrik funksiyalar sinfi olinadi; agar interpolyasiyalanadigan funksiya berilgan nuqtalarda cheksizga aylanadigan bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida rasional funksiyalar sinfini olish ma'quldir.

Eytken sxemasi. Interpolyasion ko'phadni qurish uchun hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida Eytken sxemasini qo'llash qulaydir. $L_{(012..n)}(x)$ orqali $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlar yordamida qurilgan n-darajali ko'phadni belgilaymiz, Ma'lum (2.5) formulaga ko'ra

$$L_{(01)}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0 - x \\ f(x_1) & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0},$$

$$L_{(1,2)}(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_0} f(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_1) & x_1 - x \\ f(x_2) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1},$$

$$L_{(0,2)}(x) = \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} f(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0 - x \\ f(x_2) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}.$$

Endi $L_{(0,2)}(x)$ ifoda $f(x_0)$ va $f(x_2)$ lardan qanday qonuniyat bilan tuzilgan bo'lsa, xuddi shu qonuniyat bilan $L_{(01)}(x)$ va $L_{(12)}(x)$ yordamida tuzilgan

$$P(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{(01)}(x) & x_0 - x \\ L_{(12)}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

ifodani ko'rib chiqamiz. Ko'rinib turibdiki, $P(x)$ ikkinchi darajali ko'phad bo'lib,

$$P(x_0) = f(x_0),\ P(x_1) = f(x_1),\ P(x_2) = f(x_2)$$

tengliklar o'rinlidir. Demak,

$$P(x) = L_{(012)}(x).$$

Shunday qilib, $L_{(01)}(x)$ va $L_{(12)}(x)$ ga birinchi tartibli interpolyasiyani qo'llab, $L_{(012)}(x)$ ko'phadga ega bo'ldik. Xuddi shu natijani qolgan ikki formuladan ham hosil qila olamiz:

$$L_{(012)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{(01)}(x) & x_1 - x \\ L_{(02)}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1},$$

$$L_{(012)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{(02)}(x) & x_0 - x \\ L_{(12)}(x) & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}.$$

Bu jarayonni cheksiz davom ettirshshmiz mumkin.

Shunday qilib, $n+1$ ta nuqta yordamida n-darajali inter-polyasion ko'phad qurish uchun shu nuqtalarning n tasi yordamida tuzilgan ikkita bir-biridan farqli ($n-1$)-darajali interpolyasion ko'phadlarga birinchi tartibli interpolyasiyani qo'llash kerak. Masalan,

$$L_{(01234)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{(0123)}(x) & x_3 - x \\ L_{(0124)}(x) & x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_3} = \frac{\begin{vmatrix} L_{(0123)}(x) & x_0 - x \\ L_{(0124)}(x) & x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_0}.$$

Yuqorida keltirilgan sxema *Eytken sxemasi* deyiladi. Odatda Eytken sxemasi $L_n(x)$ ning umumiy ko'rinishini topish uchun emas, balki uning biror x nuqtadagi qiymatini hisoblashda foydalaniladi. Hisoblashlarni 1- jadval shaklida yozish ma'quldir.

1- jadval

x_i	y_i	$x_i - x$	$L(i-1,\, i)$	$L(i-2,\, \ldots, i)$	$L(i-3,\, \ldots, i)$	$L(i-4,\, \ldots, i)$	$L(i-4,\, \ldots, i)$
x_0	y_0	$x_0 - x$					
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{(01)}(x)$				
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{(12)}(x)$	$L_{(012)}(x)$			
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{(23)}(x)$	$L_{(123)}(x)$	$L_{(0123)}(x)$		
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{(34)}(x)$	$L_{(234)}(x)$	$L_{(1234)}(x)$	$L_{(01234)}(x)$	
x_5	y_5	$x_5 - x$	$L_{(45)}(x)$	$L_{(345)}(x)$	$L_{(2345)}(x)$	$L_{(12345)}(x)$	$L_{(012345)}(x)$

Tugunlar teng uzoqlikda joylashgan hol uchun nyuton interpolyasion formulalari

Interpolyasiya tugunlari teng uzoqlikda joylashgan holni, ya'ni $x_i = x_0 + ih \ \ (i = 0, 1, 2, \ldots)$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda interpolyasion formulaning ko'rinishlari ancha soddalashadi. Biz xozir Nyutonning ikkita interpolyasion formulasshi chiqaramiz. Bularning birinchisi funksiyani jadval boshida va ikkinchisi jadval oxirida interpolyasiyalash uchun mo'ljallangan.

Faraz qilaylik, $L_n(x)$ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugunlar bo'yicha tuzilgan Nyuton interpolyasion ko'phadi bo'lsin:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \ldots + f(x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}). \qquad (14.1)$$

Bundagi bo'lingan ayirmalarni chekli ayirmalar bilan almashtiraylik.

Ushbu $x = x_0 + th$ almashtirishni ham bajargandan keyin (9.1) ko'phad quyidagi ko'rinishga zga bo'ladi:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2} f^2_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f^3_{3/2} + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1)]}{n\,!} f^n_{n/2}. \qquad (14.2)$$

Bu formulaning qoldiq hadi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h)\ldots(x - x_0 - nh)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1)\ldots(t-n) \qquad (14.3)$$

(14.2) formula *Nyutonning jadval boshidagi* yoki *cum interpolyasion formulasi* deyiladi.

Endi (14.1) formulada interpolyasiyalash tugunlari sifatida $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}$ tugunlarni olamiz:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_{-1})(x - x_0) + f(x_0, x_{-1}, x_{-2})(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \ldots + f(x_0, \ldots, x_{-n})(x - x_0)\ldots(x - x_{-(n-1)}) \qquad (14.4)$$

Bo'lingan ayirmalar o'z argumentining simmetrik funksiyasi bo'lganligi uchun

$$f(x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-k}) = f(x_{-k}, \ldots, x_{-1}, x_0).$$

(14.4) formulada yana bo'lingan ayirmalarni chekli ayirmalar bilan almashtirib va $x = x_0 + th$ deb olib, quyidagini hosil qilamiz;

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + f^1_{-1/2} t + f^2_{-1} \frac{t(t+1)}{2} + \ldots + f^n_{-n/2} \frac{t(t+1)\ldots[t+(n-1)]}{n!}. \qquad (14.5)$$

Bu formulaning qoldiq hadi

$$\frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1\ldots(t+n))$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi qoldiq had to'g'risida bir oz to'xtalib o'taylik. Ayrim hollarda, xususan f_i qiymatlar tajriea yo'li bilan hosil qilingan bo'lsa, $f^{(n+1)}(\xi)$ ni baholash ancha mushkul bo'ladi. Shuning uchun qo'pol bo'lsa ham, soddaroq yo'l bilan baholash ma'quldir. Qaralayotgan oralikda hosila $f^{(n+1)}(x)$, demak, ayirma f_i^{n+1} ham sekin o'zgaradi deb faraz qilib, (14.3) formula bilai berilgan qoldiq hadda qatnashuvchi hosilani ayirma bilan alamashtiramiz, natijada

$$R_n \approx \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} f^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} \tag{14.6}$$

hosil bo'ladi. Shuningdek (9.5) formula o'rnida, quyidagi taqribiy, lekin qulay formulaga ega bo'lamiz:

$$R_n \approx \frac{t(t+1)\dots(t+n)}{(n+1)!} f^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} \tag{14.7}$$

Yuqoridagi formulalar ancha qo'pol, ulardan foydalanishda hushyor bo'lish kerak. Agar hosila sekin o'zgarmasa, u holda ma'nosiz natijaga ega bo'lamiz. Masalan,

$$f(x) = x + N\sin\pi x$$

funksiyani olib, interpolyaiiya tugunlari sifatida butun $x_i = 0$, $\pm 1, \pm 2, \dots$ qiymatlarni olaylik. Bu holda ikkinchisidan boshlab barcha ayirmalar nolga teng. Demak, qo'pol tarzda $f(x)$ ni chiziqli funksiya deb olishimiz mumkin. Lekin, N yetarlicha katta bo'lganda $x + N\sin\pi x$ funksiya chiziqli funksiyadan keskid farq qiladi.

5. Lagranj interpolyasion formulasi

Lagranj interpolyasion formulasi. Biz asosan algebraik interpolyasiyalash bilan shug'ullanamiz. Masalaning qo'yilishi quyidagichadir. Darajasi n dan yuqori bo'lmagan shunday ko'phad qurilsinki, u berilgan ($n+1$) ta $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda berilgan

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$$

qiymatlarni qabul qilsin. Bu masalani geometrik ta'riflash ham mumkin: darajasi n dan ortmaydigan shunday $P(x)$ ko'phad qurilsinki, uning grafigi berilgan ($n+1$) ta $M_k(x_k, f(x_k))$ $(k = \overline{0,n})$ nuqtalardan o'tsin.

Demak, c_m koeffisiyentlarni shunday aniqlash kerakki,

$$P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \tag{13.1}$$

ko'phad uchun ushbu

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n \tag{13.2}$$

tengliklar bajarilsin. Bu tengliklarni ochib yozsak, $c_m (m = \overline{0,n})$ larga nisbatan ($n+1$) noma'lumli ($n+1$) ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \ldots + c_n x_0^n = f(x_0), \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \ldots + c_n x_1^n = f(x_1), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \ldots + c_n x_n^n = f(x_n). \end{cases} \tag{13.3}$$

Bu sistemaning determinanti Vandermond determinantidir: $W(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Masala mazmunidan ravshanki, x_k nuqtalar bir-biridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (13.3) sistema va shu bilan birga qo'yilgan interpolyasiya masalasi yagona yechimga ega. Bu sistemaii yechib, c_m larni topib (13.1) ga qo'ysak, $P(x)$ ko'phad aniqlanadi. Biz $P(x)$ ning oshkor ko'rinishini topish uchun boshqacha yo'l tutamiz, avvalo fundamental ko'phadlar deb ataluvchi $Q_{nj}(x)$ larni, ya'ni

$$Q_{nj}(x_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \ \text{булганда}, \\ 1, & i = j \ \text{булганда} \end{cases}$$

shartlarni qanoatlantiradigan p- darajali ko'phadlarni quramnz. U holda

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{nj}(x) \tag{13.4}$$

izlanayotgan interpolyaiion ko'phad bo'ladi. Haqiqatan ham, barcha $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ uchun

$$L_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{nj}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \delta_i^j = f(x_i)$$

va ikkinchi tomondan $L_n(x)$ n - darajali ko'phaddir.

Endi $Q_{n,j}(x)$ ning oshkor ko'rinishini topamiz, $j \neq i$ bo'lganda $Q_{n,j}(x_i) = 0$, shuning uchun ham $Q_{n,j}(x)$ ko'phad $j \neq i$ bo'lganda $x - x_i$ ga bo'linadi. Shunday qilib, n - darajali ko'phadning n ta bo'luvchilari bizga ma'lum, bundan esa

$$Q_{n,j}(x) = C \prod_{i \neq j} (x - x_i)$$

kelib chiqadi. Noma'lum ko'paytuvchi C ni esa

$$Q_{n,j}(xl_j) = C \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) = 1$$

shartdan topamiz; natijada:

$$Q_{n,j}(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Bu ifodani (2.4) ga qo'yib, kerakli ko'phadni aniqlaymiz:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}. \tag{13.5}$$

Bu ko'phad *Lagranj interpolyasion* ko'phadi deyiladi,

Bu formulaning xususiy hollarini ko'raylik: $n=1$ bo'lganda. Lagranj ko'phadi ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq formulasini beradi:

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_1-x_0}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}f(x_1).$$

Arap $n=2$ bo'lsa, u vaqtda kvadratik interpolyasion ko'phadga ega bo'lamiz, bu ko'phad uchta nuqtadan o'tuvchi va vertikal o'qqa, ega bo'lgan parabolani aniqlaydi;

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2).$$

Endi Lagranj interpolyasion formulasshshng boshqa ko'rinishini keltiramiz. Buning uchun

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

ko'phadni kiritamiz. Bundan hosila olsak,

$$\omega'_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{i\neq j}(x-x_i)\right].$$

Kvadrat qavs ichidagi ifoda $x=x_j$ va $k\neq j$ bo'lganda nolga lanadi, chunki (x_j-x_i) ko'paytuvchi qatnashadi. Demak,

$$\omega'_{n+1}(x_j)=\prod_{i\neq j}(x_j-x_i).$$

Shuning uchun ham, $\prod_{i\neq j}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$ Lagranj koeffisiyentini

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_j)(x-x_j)}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan esa Lagranj ko'phadi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_j)(x-x_j)}. \tag{13.6}$$

Endi tugunlar bir xil uzoqlikda joylashgan:

$$x_1-x_0=x_2-x_1=...=x_n-x_{n-1}=h$$

xususiy holni ko'ramiz.

Bu holda soddalik uchun $x=x_0+th$ almashtirish bajaramiz, u holda

$$x-x_j=h(t-j),\ \ \omega_{n+1}(x)=h^{n+1}\omega^*_{n+1}(t),$$

bu yerda

$$\omega^*_{n+1}(t) = t(t-1)\ .\ .\ .\ (t-n), \quad \omega'_{n+1}(x_j) = (-1)^{n-j}\, j!(n-j)!h^n$$

bo'lib, (2.6) Lagranj interpolyasion ko'phadi quyidagi ko'rinish-yai oladi:

$$L_n(x_0+th) = \omega^*_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j} f(x_j)}{(t-j)j!(n-j)!}. \qquad (13.7)$$

Ushbu mavzuda interpolyasiya tugunlari teng uzoqlikda joylashgan holni, ya'ni $x_i = x_0 + ih \ \ (i = 0, 1, 2, \ldots)$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda interpolyasion formulaning ko'rinishlari ancha soddalashadi. Biz xozir Nyutonning ikkita interpolyasion formulasshi chiqaramiz. Bularning birinchisi funksiyani jadval boshida va ikkinchisi jadval oxirida interpolyasiyalash uchun mo'ljallangan.

Faraz qilaylik, $L_n(x)$ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugunlar bo'yicha tuzilgan Nyuton interpolyasion ko'phadi bo'lsin:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) + \ldots + f(x_0,\ldots,x_n)(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}). \qquad (14.1)$$

Bundagi bo'lingan ayirmalarni chekli ayirmalar bilan almashtiraylik.

Ushbu $x = x_0 + th$ almashtirishni ham bajargandan keyin (9.1) ko'phad quyidagi ko'rinishga zga bo'ladi:

$$L_n(x_0+th) = f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2} f^2_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f^3_{3/2} + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1)]}{n\,!} f^n_{n/2}. \qquad (14.2)$$

Bu formulaning qoldiq hadi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$R_n(x) = (x-x_0)(x-x_0-h)\ldots(x-x_0-nh)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t-1)\ldots(t-n) \qquad (14.3)$$

(14.2) formula *Nyutonning jadval boshidagi* yoki *cum interpolyasion formulasi* deyiladi.

Endi (14.1) formulada interpolyasiyalash tugunlari sifatida $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}$ tugunlarni olamiz:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_{-1})(x-x_0) + f(x_0, x_{-1}, x_{-2})(x-x_0)(x-x_1) + \\ + \ldots + f(x_0, \ldots, x_{-n})(x-x_0)\ldots(x-x_{-(n-1)}) \qquad (14.4)$$

Bo'lingan ayirmalar o'z argumentining simmetrik funksiyasi bo'lganligi uchun

$$f(x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-k}) = f(x_{-k}, \ldots, x_{-1}, x_0).$$

(14.4) formulada yana bo'lingan ayirmalarni chekli ayirmalar bilan almashtirib va $x = x_0 + th$ deb olib, quyidagini hosil qilamiz;

$$L_n(x_0+th) = f_0 + f^1_{-1/2}t + f^2_{-1}\frac{t(t+1)}{2} + \ldots + f^n_{-n/2}\frac{t(t+1)\ldots[t+(n-1)]}{n!}. \qquad (14.5)$$

Bu formulaning qoldiq hadi

$$\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t+1\ldots(t+n))$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi qoldiq had to'g'risida bir oz to'xtalib o'taylik. Ayrim hollarda, xususan f_i qiymatlar tajriea yo'li bilan hosil qilingan bo'lsa, $f^{(n+1)}(\xi)$ ni baholash ancha mushkul bo'ladi. Shuning uchun qo'pol bo'lsa ham, soddaroq yo'l bilan baholash ma'quldir. Qaralayotgan oralikda hosila $f^{(n+1)}(x)$, demak, ayirma f_i^{n+1} ham sekin o'zgaradi deb faraz qilib, (14.3) formula bilai berilgan qoldiq hadda qatnashuvchi hosilani ayirma bilan alamashtiramiz, natijada

$$R_n \approx \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}f_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} \tag{14.6}$$

hosil bo'ladi. Shuningdek (9.5) formula o'rnida, quyidagi taqribiy, lekin qulay formulaga ega bo'lamiz:

$$R_n \approx \frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{(n+1)!}f_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} \tag{14.7}$$

Yuqoridagi formulalar ancha qo'pol, ulardan foydalanishda hushyor bo'lish kerak. Agar hosila sekin o'zgarmasa, u holda ma'nosiz natijaga ega bo'lamiz. Masalan,

$$f(x) = x + N\sin\pi x$$

funksiyani olib, interpolyaiiya tugunlari sifatida butun $x_i = 0$, $\pm1, \pm2, \ldots$ qiymatlarni olaylik. Bu holda ikkinchisidan boshlab barcha ayirmalar nolga teng. Demak, qo'pol tarzda $f(x)$ ni chiziqli funksiya deb olishimiz mumkin. Lekin, N yetarlicha katta bo'lganda $x + N\sin\pi x$ funksiya chiziqli funksiyadan keskid farq qiladi.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Interpolyasiyalash masalasi.
2. Xususiy interpolyasiyalash.
3. Interpolyasiyalashning umumiy masalasi.
4. Lagranj interpolyasion formulasining har xil ko'rinishi.
5. Teng uzoqlikda joylashgan tugunlar.
6. Xatoni baholash.
7. Diognal va gorizontal chekli ayirmalar topilishi.
8. Teng uzoqlikda joylashgan tugunla uchun 1- va 2-Nyuton interpolyasion formulalari.
9. Diognal va gorizontal chekli ayirmalar topilishi.
10. Teng uzoqlikda joylashgan tugunla uchun 1- va 2-Nyuton interpolyasion formulalari

7-ma'ruza

Chekli ayirmalar. Nyutonning 1 va 2-interpolyasion formulalari. Interpolyatsion formulalarning hatoliklari

Reja:

1. Nyutonning 1-2 chi interpolyasion formulasi.
2. Teng kadamli interpolyasion formulalarni kullash uchun tavsiyalar

Nyutonning 1-2 chi interpolyasion formulasi.

Faraz qilamiz teng uzoqlikda joylashgan tugunlarda $y = f(x)$ funksiyaning $y_i = f(x_i)$ kiymatlari berilgan bulsin. $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ h -interpolyasiyalash kadami. Shunday darajasi n -dan yuqori bo'lmagan $P_n(x)$ ko'phadni tanlash talab qilinadiki y ko'phad x_i nuqtalarda

(2) $P_n(x_i) = y_i$ kiymatni

yoki $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0 \qquad (m = 0, 1, 2, ..., n)$

kiymtlarni kabul kilsin.

Nyuton ko'paytmasiga asosan ko'phadni quyidagi ko'rinishda axtaramiz

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \qquad (2)$$

Umumlashgan daraja orkali (2) ifodani kuyidagicha yozishimiz mumkin.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_0)^{[3]} + ... + a_n(x - x_0)^{[n]} \qquad (2)$$

Bizning vazifamiz $P_n(x)$ kupxadning a_i koeffitsientlarini topishdan iborat.

(2) -da $x = x_0$ deb

$P_n(x_0) = a_0 = y_0$ ni hosil kilamiz.

a_1 koeffitsientni topish uchun 1-chi tartibli chekli ayirmani tuzamiz

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]} h + 3a_3(x - x_0)^{[2]} h + ... + na_n(x - x_0)^{[n-1]} h$$

$x = x_0$ da $\Delta P_n(x_0) = a_1 h = \Delta y_0$ hosil qilamiz, buerdan

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!\, h};$$

a_2 koeffitsientni hosil kilish uchun 2 chi tartibli chekli ayirmani tuzamiz.

$$\Delta^2 P_n(x) = 1 \cdot 2 h^2 a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x - x_0)^{[1]} h^2 + ... + n(n-1)a_n(x - x_0)^{[n-2]} h^2$$

$x = x_0$ da

$$\Delta^2 P_n(x_0) = 1\cdot 2\ h^2 a_2 = \Delta^2 y_0$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2};$$

Shu protsessni davom etirib

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\ h^i}$$ ni topamiz.

Topilgan koeffitsientlarni (2^1) ifodaga kuyib Nyutonning teng uzoklikda joylashgan tugunlar uchun 1-chi interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\ h}(x-x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^0 y_0}{2!\ h^2}(x-x_0)^{[2]} + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!\ h^n}(x-x_0)^{[n]} \tag{3}$$

Nyutonning interpolyasion formulasini amalda qo'llash uchun uni quyidagi qulay formada yozish tavsiya etiladi.

Buning uchun yangi o'zgaruvchi kiritamiz.

$$q = \frac{x-x_0}{h};$$

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}}{h} = \frac{(x-x_0)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-h)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-2h)}{h}...$$

$$\frac{[x-x_0-(i-1)h]}{h} = q(q-1)(q-2)...(q-i+1)$$

Bu ifodalarni (3) formulaga qo'yib hosil qilamiz.

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... + \frac{q(q-1)(q-2)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Bu yerdan agar $n=1$ bo'lganda chiziqli interpolyatsiyalash formulasini

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0$$

va $n=2$ bo'lganda parabolik yoki kvadratik interpolyasiyalash formulasini

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

hosil qilamiz.

Nyutoning 1-chi interpolyatsion formulasini jadvalning oxiridagi qiymatlar uchun qo'llash noqulay bo'lib hisoblanadi.

Bu holatda Nyutonning 2-chi interpolyatsion formulasini qo'llash qulay bo'lib hisoblanadi.

Argumentning teng uzoqlikda joylashgan qiymatlari $x_i = x_0 + ih$ uchun $y_i = y(x_i)$ qiymatlar berilgan bo'lsin.

Nyuton nazariyasiga kura axtarayotgan ko'phad quyidagi shaklda yoziladi.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + a_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + ...$$
$$+ a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})...(x-x_1)$$

Umumlashgan daraja ifodasidan foydalanib hosil qilamiz.

$$P_n(x) = a_0,\ a_1(x-x_n)^{[1]} + a_2(x-x_{n-1})^{[2]} + a_3(x-x_{n-2})^{[3]} + ...$$
$$+ a_n(x-x_1)^{[n]}$$

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ *коэффициентларни шундай топиш керакки* (1)

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, ...\ n)$$

tenglik bajarilsin.
Buning uchun yetarli va zarur shart

(2) $\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i}$ bajarilishi kerak.

$x = x_n$ bulganda (1) dan

$$P_n(x_n) = y_n = a_0$$ ni

demak $a_0 = y_n$ hosil qilamiz.

a_1 -ni topish uchun (1)-chini chap va ung tomonlaridan 1-chi tartibli chekli ayirma olamiz.

$$\Delta P_n(x) = a_1 \cdot 1 \cdot h + a_2 \cdot 2 \cdot h(x-x_{n-1})^{[1]} + 3 \cdot a_3 h(x-x_{n-2})^{[2]} + ... + na_n(x-x_1)^{[n-1]}h$$

$x = x_{n-1}$ da

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1\ h$$
$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h};$$

a_2 -ni topish uchun 2-chi tartibli chekli ayirmani tuzib $x = x_{n-2}$ da

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = a_2\ 2!\ h^2$$

ni hosil qilamiz.

Bu yerdan $$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\ h^2};$$

Shu protsessni davom ettirib

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!\ h^i}$$ topamiz.

Topilgan qiymatlarni (1)-chi ifodaga qo'yib 2-chi Nyuton interpolyasion formulasini hosil qilamiz.

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!\ h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\ h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\ h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) +$$
$$... + \frac{\Delta^n y_0}{n!\ h^n}(x-x_n)...(x-x_1)$$

yangi o'zgaruvchi

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$ ni kiritib

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1; \qquad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2$$

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + ... + \frac{q(q+1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Teng qadamli interpolyatsion formulalarni qo'llash uchun tavsiyalar

Funksiyaning jadvaldagi qiymatlari odatda taqribiy bo'lib, ularning limit absolyut xatolari oxirgi xona birligining yarmiga, 1-chi tartibli ayirmalarning oxirgi xonaning bir birligiga 2-chi tartiblisiniki oxirgi xonaning ikki birligiga va hokazoga teng bo'lishi mumkin.

Silliq funksiyalarda odatda tartibi ortgan sari ayirma kamayib borib, biror tartibga yetganda deyarli o'zgarmas bo'ladi.

Ayrim hollarda funksiya qiymatidagi xato hisobiga, ayirma nolga aylanmasdan tartibsiz ishora bilan ortib ketishi ham mumkin.

Bunday natijalar noto'gri bo'lib ulardan foydalanish mumkin emas.

Shuning uchun ham muntazam o'zgaradigan ayirmalarning eng yuqori tartibini aniqlash kerak. So'ngra esa interpolyatsiyalash uchun interpolyatsion formulani quyidagicha asoslab tanlash kerak. Agar funksiyaning qiymati hisoblanishi kerak bo'lgan x-ning qiymati jadval boshida yoki oxirida bo'lsa, u holda mos ravishda Nyutonning 1-chi yoki 2-chi formulasini qo'llash kerak.

Agar bu qiymat jadvalni o'rtasida, masalan $[x_i, \quad x_{i+1}]$ oraliqda bo'lsa hamda x_i va x_{i+1} tugunlarga mos keladigan satrda barcha muntazam o'zgaradigan ayirmalar mavjud bulsa, u holda dastlabki tugun sifatida x_i yoki x_{i+1}ni qabul qilib Stirling yoki Bessel formulasini qo'llash kerak. Shuni ta'kidlash kerakki agar $|t| \le 0{,}25$ bo'lsa Stirling formulasi $0{,}25 \le t \le 0{,}75$ bo'lganda Bessel formulasini qo'llash kerak.

Bu yerda x-ni x_i yoki x_{i+1} tugunlarni qaysi biriga yaqin turishiga qarab, $t = \frac{x - x_i}{h}$ yoki $t = \frac{x - x_{i+1}}{h}$ deb olish kerak.

9-ma'ruza

Aniq imtergrallami to'g'ri to'thurchak, trapetsiya va parabolalar metodi bilan hisoblash. Metodlarning xatoliklari

Reja:

1. Kvadratur formulalar
2. Trapetsiya va Simpson formulalari

Tayanch iboralari: Interpolyatsiya tugunlari, xato, parabola formulasi.

Integral ostidagi funksiyani interpolyatsion ko'phad bilan almashtirib biz quyidagi ko'rinishdagi kvadratur formulani hosil qilamiz.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R$$

x_k - tanlangan interpolyatsion tugunlar,

A_k - tugunlarni tanlashiga bog'lik bo'lib funksiyani ko'rinishiga bog'lik bo'lmaydi.

R - qoldiq had yoki kvadratur formulani xatosi bo'lib hisoblanadi.

$[a,b]$ - kesmani n - ta teng bo'laklarga bo'lamiz.

$$x_i = x_0 + ih \qquad (i = 0,1,2,...n),\ x_0 = a,\ x_n = b \qquad h = \frac{b-a}{n};$$

va bu nuqtalarda integral ostidagi funksiyani qiymatlarini hisoblaymiz.

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0,1,2,\ ...,n)$$

Teng uzoqlikda bo'lgan tugun nuqtalardagi kvadratur formulalar Nyuton-Kotesa formulalari deb aytiladi.

1. Trapetsiya formulasi

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ...y_{n-1})$$

Bu yerda $y_i = f(x_i) \quad (i = 0,1,2,\ ...,n)$

qoldiq had

$$R_1 = -\frac{nh^3}{12} f^{''}(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f^{''}(\xi) \qquad a \prec \xi \prec b$$

2. Simpson formulasi (Parabola formulasi)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

Qoldiq had

$$R_2 = -\frac{m h^5}{90} f^{(V)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(V)}(\xi)$$

Simpson formulasida tugunlar soni juft $n = 2m$ bo'lishi shart.

3. Nyuton formulasi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h\left[y_0 + y_{3m} + 2(y_3 + y_6 + \dots + y_{3m-3}) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \dots + y_{3m-2} + y_{3m-1})\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{3m}$$

Misol: $\int_0^1 \ell^{-x^2} dx;$

Integralni trapetsiya formulasi bilan $n = 10$ bo'lganda hisoblang va hisoblash xatosini hisoblang.

$$y = \ell^{-x^2}; \quad y'' = 2(2x^2 - 1)\ell^{-x^2}$$

$[0,1]$ kesmada 2 – chi tartibli hosilani absolyut qiymati $|y''(x)|$ $x = 0$ da eng katta qiymatga ega shuning uchun

$$|R_1| \le \frac{\max |y''(x)|}{12}|b-a|h^2 = \frac{2\cdot(0,1)^2}{12} \prec 0,002$$

$$y = \ell^{-x^2} \qquad \int_0^1 \ell^{-x^2} dx \qquad [0,1], h = 0,1 \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1;$$

i	x_i	x_i^2	y_i	i	x_i	x_i^2	y_i
0	0	0	1,0000	6	0,6	0,36	0,6477
1	0,1	0,01	1,9900	7	0,7	0,49	0,6126
2	0,2	0,04	1,9608	8	0,8	0,64	0,5273
3	0,3	0,09	0,9139	9	0,9	0,81	0,4449
4	0,4	0,16	0,8521	10	1,0	1.00	0,3679
5	0,5	0,25	0,7788				

$$x = 0 \qquad x_0 = x_0 + ih \qquad y_i = f(x_i) = \ell_{x_i}^{-x^2}$$

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_{10}) + \sum_{i=1}^{9} y_i = 7,4620$$

Trapetsiya formulasi bilan

$$\int_0^1 \ell^{-x^2} dx \approx 0{,}1 \cdot 7{,}4620 = 0{,}7462$$

$\int_0^1 \ell^{-x^2} dx \quad n = 10$ da Simpson formulasi bilan hisoblang.

$y = \ell^{x^2}$ - ni 4 – chi hosilasini hisoblaymiz.

$$y^{(4)}(x) = 4(4x^4 + 12x^2 + 3)\ell^{x^2}$$

$y^{(4)}(x) \quad [0,1]$ da $x = 1$ eng katta qiymatga erishadi.

$$|R_2| \le \frac{5 \cdot (0{,}1)^5}{90} \cdot 76 \cdot 2{,}718 \approx 0{,}000115$$

i	x_0	x_0^2	$y_i = \ell^{x_i^2}$		
			$i = 0,\ i = 10$	i - juft	i - toq
0	0	0,0	1,0000		
1	0,1	0,01		1,0408	1,0101
2	0,2	0,04		1,1735	1,0942
3	0,3	0,09		1,4333	1,2840
4	0,4	0,16		1,8965	1,6323
5	0,5	0,25			2,2479
6	0,6	0,36			
7	0,7	0,49			
8	0,8	0,64			
9	0,9	0,81			
10	1	1,00	2,7188		
			3,7188	5,4441	7,2685

$$\int_0^1 \ell^{x^2} d\lambda \approx \frac{1}{30}(3{,}7188 + 47{,}62685 + 25{,}5441) = 1{,}46268$$

Simpsonning umumiy formulasi

Faraz qilamiz $n = 2_m$ juft son bo'lib $y_i = f(x_i)\ (i = 0,1,2,...,n)$. $y = f(x)$ funksiyaning $a = x_0,\ x_1, ...,\ x_{n=b}$ nuqtalardagi qiymati bo'lsin.

$$h = \frac{b-a}{2m}$$

Simpson formulasini har bir ikkilangan $[x_0,\ x_2]$, $[x_2,\ x_4]$, ..., $[x_{2m-2},\ x_{2m}]$ intervallarda 2- h qadam qo'llab hosil qilamiz.

$$\int_a^b ydx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + ... + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \qquad (4)$$

Bu yerdan Simpsonning umumiy formulasini hosil qilamiz.

$$\int_a^b ydx = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2})\right] \qquad (1)$$

Quyidagi belgilash kiritib

$$\tau_1 = y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}$$

$$\tau_2 = y_2 + y_4 + ... + y_{2m}$$

(1) formulani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\int_a^b ydx = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_n) + 4\tau_1 + 2\tau_2\right] \qquad (2)$$

$$R = -\frac{h^5}{90}\sum_{k=1}^{m} y^{1v}(\xi_k)$$

$$\xi \in [a, b]:$$

10-ma’ruza

Oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini qo’yilishi. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning metodlari.

Reja:

1. Eyler usuli
2. Eyler usulining geometrik ma'nosi
3. Runge-Kutta usuli
4. Eyler, Runge-Kutta usullarining sonli yaqinlashishini ko‘rsatuvchi misollar.

Tayanch iboralar: Balandlik. siniq chiziq, xato, boshlang‘ich shart.

1. Eyler usuli

Faraz qilamiz boshlang’ich $y(x_0) = y_0$ shartga ega bo’lgan

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

differensial tenglama berilgan bo’lsin

Yetarlicha kichik h qadam olib teng uzoqlikda joylashgan tugun nuqtalar sistemasini tuzamiz.

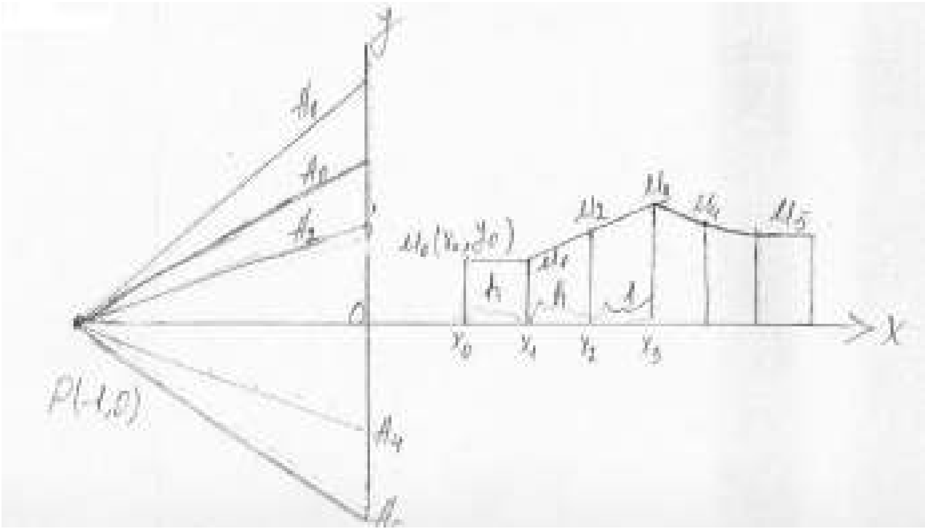
$$x_i = x_0 + ih(i = 0, 1, 2, ...,) \tag{2}$$

$M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o’tuvchi axtarilayotgan $y = y(x)$ integral egri chiziqni taqribiy ravishda $M_i(x_i, y_i)$ balandlikka ega bo’lgan $M_0 M_1 M_2 M_3 ...$ siniq chiziq bilan almashtirib olamiz va bu siniq chiziqni $M_i M_{i+1}$ zvenosi x_i, x_{i+1} to’g’ri chiziqlar orasida joylashgan bo’lib

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \tag{3}$$

balandlikka ega.

Shunday qilib Eyler siniq chizig’ining $M_i M_{i+1}$ zvenosi har bir M_i balandlikga ega bo’lgan qismi $M_i (x_i, y_i)$ nuqtadan o’tuvchi integral egri chiziq yo’nalishiga ega bo’lgan yo’nalishga ega bo’ladi.



(3) formuladan ko'rinadiki y_i - ning qiymatlari quyidagi formula bilan topiladi.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad \Delta y_i = hf(x_i, y_i) \qquad (i = 0, 1, 2, ...)$$

Bu Eyler metodining asosiy formulasi hisoblanadi.

Eyler metodining siniq chizig'ini geometrik tuzilishini qurish uchun $P(-1{,}0)$ qutb nuqta olib ordinata o'qiga $[0; A_0 = f(x_0, y_0)]$ kesmani belgilamiz. Tabiiyki PA_0 nurning burchak koeffitsienti $f(x_0, y_0)$ ga teng bo'ladi. Shuning uchun Eyler siniq chizig'ini hosil qilish uchun M_0 nuqtadan PA_0 nurga paralel qilib $M_0 M_1$ chiziqni o'tkazish kifoya. Bu chiziq to $x = x_1$ nuqtagacha davom ettiriladi. (ya'ni $M_1(x_1\ y_1)$ nuqtagacha).

$M_1(x_1, y_1)$ nuqtani boshlang'ich nuqta deb ordinata o'qiga $[0; A_1 = f(x_1, y_1)]$ kesmani belgilaymiz va PA_1 nurga paralel bo'lgan $M_1 M_2$ chiziqni o'tkazamiz to $x = x_2$ nuqtagacha va hokazo.

Eyler metodi differensial tenglamalarni integrallashni oddiy metodlaridan hisoblanadi.

Eyler metodi quyidagi kamchiliklarga ega.

1. Kichik aniqlik
2. Xatoni yig'ilib borishi

Eyler usuli umuman olganda qadamni h - ning kichik qiymatlari uchun qoniqarli natija beradi, chunki Eyler metodining asosiy g'oyasi (1) chi differensial tenglamaning integrali. Har bir $[x_i, x_{i+1}]$ xususiy kesmada Teylor qatorining 2 ta hadi bilan tasvirlanadi, ya'ni

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy^1(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, ...)$$

buning berilgan kesmadagi xatosining tartibi h^2 ga teng.

Bundan tashqari har bir qadamdagi yechimni hosil qilish uchun boshlang'ich shartga qo'yilgan xato takrorlanadi va bu yakuniy natijaga ta'sir ko'rsatadi.

Misol: Eyler metodini qo'llab $[0,1]$ kesmada $y(0)=1$ boshlang'ich shartga ega bo'lgan $y'=\frac{xy}{2}$ tenglamani jadval shaklidagi yechimini topish maqsadi qo'yiladi.

$h=0{,}1$ qadam olib quyidagi jadvalni tuzamiz

i	x	y	$f(x,y)=\frac{xy}{2}$	$\Delta y=0{,}1f(x,y)$	**Aniq yechim** $y=e\frac{x^2}{y}$
0	0	1	0	0	1
1	0,1	1	0,05	0,005	1,0 025
2	0,2	1,005	0,1005	0,0101	1,0100
3	0,3	1,0151	0,1523	0,0152	1,0227
4	0,4	1,0303	0,2067	0,0206	1,0408
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263	1,0645
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323	1,0942
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388	1,1303
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459	0,1735
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537	1,2244
10	1,0	1,2479			1,2840

Runge-Kutta metodi

Faraz qilamiz 1-chi tartibli differensial tenglama berilgan bo'lsin.

$$y'=f(x,\ y) \tag{1}$$

$$y(x_0)=y_0 \tag{2}$$

h -qadam olib $x_i=x_0+ih$ ва $y_i=y(x_i)$ $(i=0,1,2,...)$ deb belgilaymiz.

Quyidagi sonlarni quramiz.

$$\left.\begin{aligned} K_1^{(i)}&=h\,f(x_i,\,y_i)\\ K_2^{(i)}&=h\,f\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{K_1^{(i)}}{2}\right)\\ K_3^{(i)}&=h\,f\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{K_2^{(i)}}{2}\right)\\ K_4^{(i)}&=h\,f(x_i+h,\ y_i+K_3^{(i)}) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Runge-Kutta metodiga ko'ra y_i - ning qiymatlari quyidagi formula bilan topiladi.

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i \qquad (3)$$

Bu metodning har bir qadamdagi xatosi h^5 miqdordan ortmaydi. Hisoblashlarda quyidagi tablitsadan foydalanish ma'qul deb hisoblanadi.

i	x	y	$k = hf(x,\ y)$	Δy
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
-	-	-	-	$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_0$
1	x_1	y_1		

Runge-Kutta metodining xatosini baholash murakkab bo'lib hisoblanadi. Shuning uchun h qadamni to'gri tanlanganimizni tekshirish uchun ikki qadamda ikkilangan hisob bilan tekshirilib boriladi, ya'ni $y(x_i)$ ning qiymatlaridan foydalanib $y(x_i + 2h)$ - ning qiymatini ikkita yo'l bilan hisoblaydilar: 1). 1 chi marta hisob h qadam bilan. 2). 2 chi marta $H = 2h$ qadam bilan.

Agar olingan natijalar kutilgan natijalar bilan mos tushsa demak h qadam to'gri tanlangan va olingan qiymatlarni $y(x_i + 2h)$ deb olish mumkin. Agar bu shart bajarilmasa qadamni ikki marta kichraytirishga to'gri keladi. Bu hisoblash sxemasini EHM da dasturlash juda qulay bo'lib hisoblanadi.

Hisoblashlarning murakkabligiga qaramasdan Runge-Kutta metodi EHM da eng qulay va katta aniqlikka ega bo'lgan metod bo'lib hisoblanadi, yana qulayligi shundaki bu yerda o'zgaruvchi qadam olinadi.

Misol: $y' = x + y$ tenglamaning $[0;\ 0{,}5]$ kesmada $y(0) = 1$ shartni qanoatlantiradigan yechimini hisoblash kerak $h = 0{,}1$

$$K_1^{(0)} = (0+1)\cdot 0{,}1 = 0{,}1$$

$$K_2^{(0)} = [0{,}05 + (1 + 05)]\cdot 0{,}1 = 0{,}11$$

$$K_3^{(3)} = [0{,}05 + (1 + 0{,}055)]0{,}1 = 0{,}1105$$

$$K_4^{(0)} = [0{,}1 + (1 + 0{,}1105)]0{,}1 = 0{,}12105$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}1 + 2\cdot 0{,}11 + 2\cdot 0{,}1105 + 0{,}1205) = 0{,}1103$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1103 = 1{,}1103$$

i	x	y	$k = 0{,}1 f(x,\ y)$	Δy
0	0	1	0,1	0,1000
	0,05	1,05	0,11	0,2200

	0,05	1,055	0,1105	0,2210
	0,1	1,1105	0,1210	0,1210
				$\frac{1}{6}0{,}6620=0{,}1103$
1	0,1	1,1103	0,1210	0,1210
	0,15			
	0,15			
	0,2			

12-ma’ruza.

Chiziqli dasturlash masalalarining qo‘yilishi. Chiziqli dasturlashga keltiriladigan masalalarga doir turli sohalardan misollar

REJA:

1. Chiziqli dasturlash masalalarining qo‘yilishi va unda qo‘llaniladigan modellar.
2. Chiziqli dasturlash masalalarining matematik modellari.
3. Tuli xil hayotiy masalalarning matematik modellari va ularning tahlili

Tayanch tushunchalar. Dasturlash, matematik dasturlash, chiziqli dasturlash, chiziqsiz dasturlash, model, matematik model, iqtisodiy model, optimal, optimal tanlash.

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б.Саматов, Т. Эргашев «Оптималлаш усуллари» фанидан маърузалар матни (Ўкув услубий қўлланма). Наманган 2010.*
3. *A. Q. Rahimov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Smarqand 2010*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*
5. *А. В. Стариков И. С. Кущева. Экономико-математическое и компьютерное моделирование. Воронеж 2008.*

Chzizqli dasturlash masalalari. Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (\leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq (\leq) b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (\leq) b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0, \qquad (2)$$

$$Y_{\min(\max)} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad (3)$$

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3) chiziqli funktsiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (1) va (2) shartlari uning chegaraviy shartlari deb, (3) chiziqli funktsiya esa masalaning maqsadi yoki maqsad funktsiyasi deb ataladi.

Masaladagi barcha chegaralovchi shartlar va maqsad funktsiya chiziqli ekanligi ko'rinib turibdi. SHuning uchun ham (1)–(3) masala chiziqli dasturlash masalasi deb ataladi.

Konkret masalalarda (1) shart tenglamalar sistemasidan, «≥» yoki «≤» ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin. Lekin ko'rsatish mumkinki, (1)–(3) ko'rinishdagi masalani osonlik bilan quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ -------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0, \qquad (5)$$

$$Y_{\min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad (6)$$

(4)-(6) ko'rinish chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishi deb ataladi.

(4)–(6) masalani vektorlar yordamida quyidagicha ifodalash mumkin:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = P_0 \qquad (7)$$

$$X \geq 0$$

$$Y_{\min} = CX$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \; p_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

bu yerda

$S = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – vektor–qator.

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – vektor–ustun.

(4)-(6) masalaning <u>matritsa ko'rinishdagi ifodasi</u> quyidagicha yoziladi:

$$AX = P_0$$

$$X \geq 0,$$

$$Y_{\min} = CX$$

bu yerda $S = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – qator vektor, $A = (a_{ij})$ – (4) siste koeffitsientlaridan tashkil topgan matritsa; $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ $P_0 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – ustun vektorlar.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; (i = 1, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0, \; (j = 1, \dots, n)$$

$$Y_{\min} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

(4)-(6) masalani <u>yig'indilar yordamida</u> ham ifodalash mumkin:

<u>1-ta'rif</u>. Berilgan (4)–(6) masalaning <u>mumkin bo'lgan echimi</u> yoki <u>re</u> deb, uning (4) va (5) shartlarni qanoatlantiruvchi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vekto aytiladi.

<u>2-ta'rif.</u> Agar (7) yoyilmadagi musbat x_i koeffitsientli P_i, $(i = 1, \dots$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'iq bo'lmasa, u holda $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ reja <u>tayan</u> reja deb ataladi.

3-ta'rif. Agar $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tayanch rejadagi musbat komponentalar soni m ga teng bo'lsa, u hoda bu reja aynimagan tayanch reja, aks holda aynigan tayanch reja deyiladi.

4-ta'rif. CHiziqli funktsiya (6) ga eng kichik qiymat beruvchi $\boldsymbol{X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ tayanch reja masalaning optimal rejasi yoki optimal echimi deyiladi.

Nazorat savollari.

1. Chiziqli dasturlash masalalari deganda nimani tushunasiz?
2. Matematik dasturlash deganda nimani tushunasiz?
3. Chiziqli dasturlash masalalariga olib keladigan masalalar
4. Chiziqli dasturlash masalasining geometric ma'nosi aytib bering
5. Iqtisodiy masalalarning matematik modeli

13-ma’ruza.

Chiziqli dasturlash masalalarini yechish metodlari.

Simpleks usulida chiziqli dasturlash masalasini yechish.

REJA:

1. Chiziqli dasturlash masalasini yechishning grafik usuli.
2. Chiziqli dasturlash masalalarini yechish usullari
3. Simpleks jadval usulida yechish.
4. Sun’iy basis usullari.

Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini. Quyidagi ko’rinishda yozilgan chiziqli dasturlash masalasini ko’ramiz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le a_i \quad (i=\overline{1,m}) \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}) \qquad (2)$$

$$Y_{\max(\min)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3)$$

Ushbu chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini bilan tanishamiz.

Ma’lumki, **n** ta tartiblashgan $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ sonlar **n**-ligi (birlashmasi) **n** o’lchovli fazoning nuqtasi bo’ladi. Shuning uchun (1)-(3) chiziqli dasturlash masalasining rejasini **n** o’lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga ma’lumki, bunday nuqtalar to’plami qavariq to’plamdan iborat bo’ladi. Qavariq to’plam chegaralangan (qavariq ko’pburchak), chegaralanmagan (qavariq ko’p qirrali soha) bo’lishi, bitta nuqtadan iborat bo’lishi yoki bo’sh to’plam bo’lishi ham mumkin.

Koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a$$

tenglamani qanoatlantiruvchi ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) nuqtalar to’plami gipertekislik deb ataladi. Shu sababli

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = Y$$

ko’rinishda yozilgan maqsad funktsiyani **Y** funktsiyaning turli **P** qiymatlariga mos keluvchi o’zaro parallel gipertekisliklar oilasi deb qarash mumkin.

Har bir gipertekislikning ixtiyoriy nuqtasida **Y** funktsiya bir xil qiymatni qabul qiladi (demak, o’zgarmas sathda saqlanadi). SHuning uchun ular «sath tekisliklari» deyiladi. Geometrik nuqtai nazardan chiziqli dasturlash masalasini quyidagicha ta’riflash mumkin:

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko’pburchagiga tegishli bo’lgan shunday $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtada Y maqsad funktsiya maksimum (minimum) qiymat beruvchi (3) gipertekisliklar oilasiga tegishli bo’lgan gipertekislik o’tsin. Jumladan, ***n=2*** da (1)-(3) masala quyidagicha

talqin qilinadi: (1)-(2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtadan ***Y*** maqsad funktsiyaga eng katta (eng kichik) qiymat beruvchi va (3) daraja chiziqlar oilasiga tegishli bo'lgan chiziq o'tsin.

Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqiniga hamda oldingi ma'ruzalarda tanishgan chiziqli dasturlash masalasi yechimining xossalariga tayanib masalani ba'zi hollarda grafik usulda yechish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ ---------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \tag{5}$$

$$Y_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{6}$$

Ikki o'lchovli fazoda berilgan ushbu chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz.

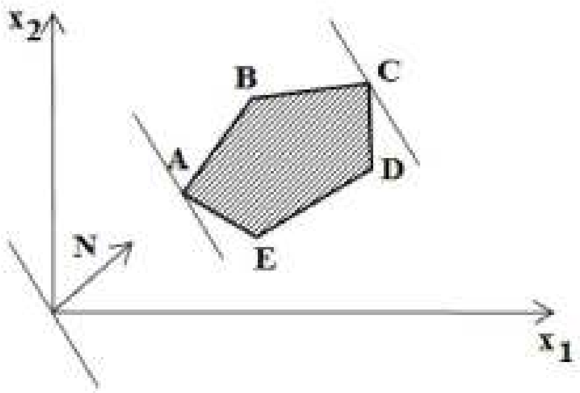
Faraz qilaylik, (4) sistema (5) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega bo'lsin. Hamda ulardan tashkil topgan to'plam chekli bo'lsin. (4) va (5) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \, (i = 1, \ldots, m),$$

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0$$

chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. Chiziqli funktsiya (6) ham ma'lum bir o'zgarmas $C_0 = const$ qiymatda $s_1x_1 + s_2x_2 = const$ to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Yechimlardan tashkil topgan qavariq to'plamni hosil qilish uchun $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$, $\ldots$, $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan ko'pburchakni yasaymiz.

Faraz qilaylik, bu ko'pburchak ABCDE beshburchakdan iborat bo'lsin



1-shakl

Chiziqli funktsiyani ixtiyoriy o'zgarmas $\mathbf{C_0}$ songa teng deb olamiz.
Natijada

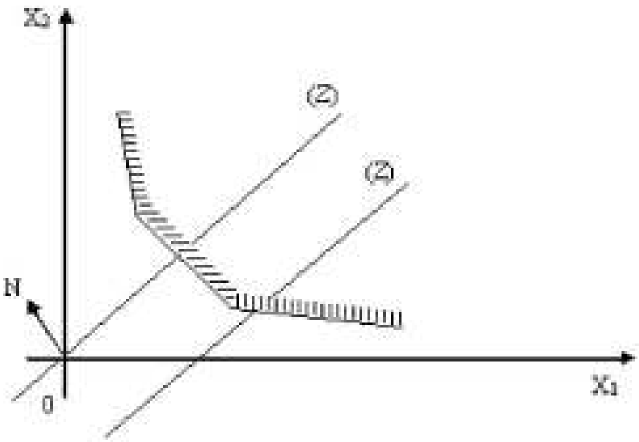
$$s_1x_1 + s_2x_2 = C_0 = const$$

to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqni $N(c_1, c_2)$ vektor yo'nalishida yoki unga teskari yo'nalishda o'ziga parallel surib borib, qavariq ko'pburchakning chiziqli funktsiyasiga eng kichik yoki eng katta qiymat beruvchi nuqtalarni aniqlaymiz.

1-shakldan ko'rinib turibdiki, chiziqli funktsiya o'zining minimal qiymatiga qavariq ko'pburchakning A nuqtasida erishadi. $\boldsymbol{C}$ nuqtada esa, u o'zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi. Birinchi holda $A(x_1, x_2)$ nuqtaning koordinatalari masalaning chiziqli funktsiyaga minimal qiymat beruvchi optimal yechimi bo'ladi. Uning koordinatalari $\boldsymbol{AB}$ va $\boldsymbol{AE}$ to'g'ri chiziqlarni ifodalanuvchi tenglamalar orqali aniqlanadi.

Agar yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chegaralanmagan bo'lsa, ikki hol bo'lishi mumkin.

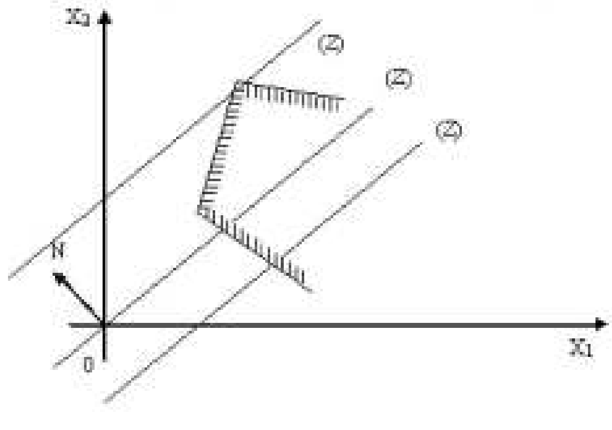
1- hol. $s_1x_1 + s_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq $\boldsymbol{N}$ vektor bo'yicha yoki unga qarama-qarshi yo'nalishda siljib borib, qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi. Ammo na minimal, na maksimal qiymatga erishmaydi. Bu holda chiziqli funktsiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi:



2-shakl

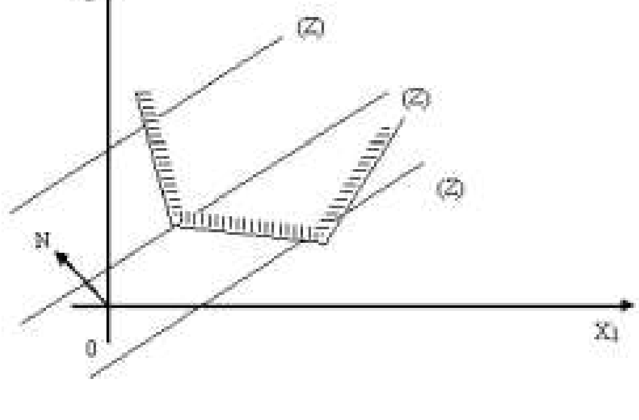
$$s_1x_1 + s_2x_2 = C_0$$

to'g'ri chiziq N vektor bo'yicha siljib borib qavariq ko'pburchakning birorta chetki nuqtasida o'zining minimum yoki maksimum qiymatiga erishadi. Bunday holda chiziqli funktsiya yuqoridan chegaralangan, quyidan esa chegaralanmagan:



3-shakl

yoki quyidan chegalangan, yuqoridan esa chegaralanmagan bo'lishi mumkin:



Dansig yaratgan simpleks usul har bir tenglamada bittadan ajratilgan no'malum (bazis o'zgaruvchi) qatnashishi shartiga asoslangan. Boshqacha aytganda, ChP masalasida m ta o'zaro chiziqli erkli vektorlar mavjud deb qaraladi. Umumiylikni buzmagan holda bu vektorlar birinchi m ta $P_1, P_2, \ldots, P_m$ vektorlardan iborat bo'lsin, deylik. U holda masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------ \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \qquad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to min. \qquad (3)$$

(1) sistemani vektor shaklida yozib olaylik:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ m \end{pmatrix},\ P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \ldots,\ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \ldots + P_nx_n = P_0 \qquad (4)$$

bu yerda

P_1, P_2, ..., P_m vektorlar sistemasi m-o'lchovli fazoda o'zaro chiziqli erkli bo'lgan birlik vektorlar sistemasidan iborat. Ular m o'lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi $x_1, x_2, \dots, x_m$ o'zgaruvchilarni «bazis o'zgaruvchilar» deb ataladi.

x_{m+1}, $x_{m+2}, \dots$, x_n – bazis bo'lmagan (erkli) o'zgaruvchilar. Agar erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o'zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo'ladi. Natijada $X_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ yechim hosil bo'ladi. Bu yechim boshlang'ich yechim bo'ladi. Ushbu yechimga $x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m = P_0$ yoyilma mos keladi. Bu yoyilmadagi $P_1, P_2, \dots, P_m$ vektorlar o'zaro erkli bo'lganligi sababli topilgan joiz yechim bazis yechim bo'ladi.

Dansig usulida simpleks jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_l	c_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$\Delta_j = Z_j - c_j$	...	$Y_0 = \sum_{i=0}^{m} c_i b_i - c_0$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 0$	...	$\Delta_m = 0$	$\Delta_{m+1} = \sum^{m} a_{lm+1} c_l - c_{m+1}$	...	$\Delta_k = \sum^{m} a_{lk} c_l - c_k$	...	$\Delta_n = \sum^{m} a_{ln} c_l - c_n$

Jadvaldagi C_{baz} bilan belgilangan ustun $x_1, x_2, \dots, x_m$ bazis o'zgaruvchilarning chiziqli funksiyadagi koeffisientlardan tashkil topgan vektor, ya'ni $C_{baz} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$.

Jadvalda har bir P_j vektorning ustiga x_j noma'lumning chiziqli funksiyadagi koeffisienti c_j yozilgan. $m+1$- qatorga esa $x_1, x_2, \dots, x_m$ bazis o'zgaruvchilardagi chiziqli funksiyaning qiymati

$$Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i c_i + c \qquad (5)$$

hamda bazis yechimning optimallik mezonini baholovchi son

$$\Delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i - c_j \qquad (j=1, \dots, n) \ (6)$$

yozilgan. Bazis o'zgaruvchilarga mos keluvchi P_1, P_2, ..., P_m vektorlar bazis vektorlar deb belgilangan. Bu vektorlar uchun $\Delta_j=Z_j$-$c_j=0$ $(j=1,\dots,n)$ bo'ladi.

Agar barcha ustunlarda $\Delta_j \le 0$ bo'lsa, $x=(x_1,x_2,\dots,x_m) = (b_1,b_2,\dots,b_m)$ yechim optimal yechim bo'ladi. Bu yechimdagi chiziqli funksiyaning qiymati Y_0 ga teng bo'ladi.

$$\max_{\Delta_j>0}(\Delta_j)=\Delta_k$$

agar kamida bitta j uchun $\Delta_j > 0$ bo'lsa, u holda masalaning optimal yechimi topilmagan bo'ladi. Shuning uchun topilgan bazis rejani optimal rejaga yaqin bo'lgan boshqa bazis rejaga almashtirish maqsadida bazisga

$$\min_{a_{ik}>0}(b_i / a_{ik}) = b_l / a_{lk}$$

shartni qanoatlantiruvchi P_k vektorni kiritish kerak. Agar P_k bazisga kiritilsa, eski bazis vektorlardan birortasini bazisdan chiqarish kerak. Bazisdan shart o'rinli bo'lgan P_l vektor chiqariladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan j-qatordagi P_l vektor o'rniga u joylashgan ustundagi P_k vektor bazisga kiritiladi. P_l vektorning o'rniga P_k vektorni kiritish uchun simpleks jadval quyidagi formulalar asosida almashtiriladi.

$$\begin{cases} b_i' = b_i - (b_l / a_{lk})\cdot a_{ik}, \\ b_l' = b_l / a_{lk}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}' = a_{ij} - (a_{lj} / a_{lk})\cdot a_{ik}, \\ a_{lj}' = a_{lj} / a_{lk}. \end{cases}$$

Simpleks jadval almashgandan so'ng yana qaytadan $\Delta_j \le 0$ baholar aniqlanadi. Agar barcha j lar uchun $\Delta_j \le 0$ bo'lsa, optimal yechim topilgan bo'ladi. Aks holda topilgan bazis reja boshqa bazis reja bilan almashtiriladi. Bunda quyidagi teoremalarga asoslanib ish ko'riladi.

1- teorema. Agar $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ bazis reja uchun $\Delta_j=Z_j$-$c_j \le 0$ $(j=1,\dots,n)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

2- teorema. Agar X_0 bazis rejada tayin bir j uchun $\Delta_j=Z_j$-$c_j>0$ shart o'rinli bo'lsa, u holda X_0 optimal reja bo'lmaydi va shunday X_1 rejani topish mumkin bo'ladiki, uning uchun

$$Y(X_1)<Y(X_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar tayin bir j uchun $\Delta_j=Z_j$-$c_j>0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda 2- teoremaga asosan bu bazis rejani ham yangi bazis rejaga almashtirish kerak bo'ladi. Bu jarayon optimal reja topilguncha yoki masaladagi maqsad funksiyaning quyidan chegaralanmagan ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Masalaning optimal yechimining mavjud bo'lmaslik sharti quyidagicha:

Agar tayin j uchun $\Delta_j=Z_j-c_j>0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu ustundagi barcha elementlar $a_{ij}\leq 0$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ bo'lsa, u holda masalaning maqsad funksiyasi chekli ekstremumga ega bo'lmaydi.

Faraz qilaylik, simpleks jadvalda optimallik sharti $(\Delta_j\leq 0,\ j=1,\dots,n)$ bajarilsin. Bu holda bu yechim

$$X_0=B^{-1}P_0$$

formula orqali topiladi. Bu yerda $B=(P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_m)$ matrisa bazis vektorlardan tashkil topgan matrisadir.

(1)-(3) masala uchun B matrisa m o'lchovli J_m - birlllik matrisadir, ya'ni $B=J_m$.

$BB^{-1}=J_m$ bo'lganligi sababli B^{-1} matrisa ham birlik matrisa bo'ladi.

Demak, $X_0=P_0=(b'_{10},\ b'_{20},\ \dots,\ b'_{m0},\ 0,\ \dots,\ 0)$ optimal yechim bo'ladi.

1-misol.

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_5=7, \\ -2x_2+4x_3+x_4=12, \\ -4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10, \end{cases}$$

masalani simpleks usul bilan yeching

$$x_j\geq 0,\ \ (j=1,\ 2,\dots,\ 6)$$

$$Y=x_2-3x_3+2x_5\rightarrow min.$$

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix},P_5=\begin{pmatrix}-2\\0\\8\end{pmatrix},\ P_6=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ P_0=\begin{pmatrix}7\\12\\10\end{pmatrix}$$

Yechish. Belgilashlar kiritamiz va simpleks jadvalni to'ldiramiz

$$C'=\ (0;\ 1;\ -3;\ 0;\ 2)$$

Simpleks usulning I bosqichida bazisga P_3 vektor kiritilib P_4 vektor chiqarildi, II bosqichida P_2 kiritildi va P_1 chiqarildi. Simpleks jadval (7) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi:

i	*Bazis vekt.*	C_{baz}	P_0	*0*	*1*	*-3*	*0*	*2*	*0*
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	*0*	*7*	*1*	*3*	*-1*	*0*	*-2*	*0*
2	P_4	*0*	*12*	*0*	*-2*	*4*	*1*	*0*	*0*
3	P_6	*0*	*10*	*0*	*-4*	*3*	*0*	*8*	*1*
Δ_j			*0*	*0*	*-1*	*3*	*0*	*-2*	*0*
1	P_1	*0*	*10*	*1*	*5/2*	*0*	*1/4*	*-2*	*0*
2	P_3	*-3*	*3*	*0*	*-1/2*	*1*	*1/4*	*0*	*0*
3	P_6	*0*	*1*	*0*	*-5/2*	*0*	*-3/4*	*8*	*1*
Δ_j			*-9*	*0*	*1/2*	*0*	*-3/4*	*-2*	*0*
1	P_2	*1*	*4*	*2/5*	*1*	*0*	*1/10*	*-4/5*	*0*
2	P_3	*-3*	*5*	*1/5*	*0*	*1*	*3/10*	*-2/5*	*0*
3	P_6	*0*	*11*	*1*	*0*	*0*	*-1/2*	*6*	*1*
Δ_j			*-11*	*-1/5*	*0*	*0*	*-4/5*	*-8/5*	*0*

$X = (0;\ 4;\ 5;\ 0;\ 0;\ 11),\ Y_{min} = -11.$

2-Masala. Korxonada to'rt xil mahsulot tayyorlanadi. Birlik mahsulotlarning sotuv narxlari mos ravishda 2, 1, 3 va 5 ming so'mdan bo'lsin. Mahsulotlarni tayyorlash uchun energiya, xomashyo va mehnat sarflanadi. Birlik mahsulot uchun saflanadigan resurslar miqdori quyidagi jadvalda kelitirilgan.

	1 xil mahsulot	2 xil mahsulot	3 xil mahsulot	4 xil mahsulot	Resurslar
Energiya	2	3	1	2	30
Xomashyo	4	2	1	2	40
Mehnat	1	2	3	1	25

Mahsulotlarni ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzish kerakki, mahsulotlarning sotuv narxlari yig'indisi maksimal bo'lsin.

Bu iqtisodiyot masalasini yechish uchun uning matematik modelini tuzamiz. Shu maqsadda x_1, x_2, x_3, x_4 lar orqali rejalashtirilgan mahsulotlar miqdorlarini belgilaymiz. Ularning narxi

$$\sum_{i=1}^{4} c_i x_i = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

bo'ladi. Mahsulotlarga sarflanadigan energiya miqdori $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$, xomashyo miqdori $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$ va mehnat miqdori $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$ dan iborat bo'ladi.

Masala shartiga ko'ra, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$\frac{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max}{2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30,} \tag{1}$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40, \tag{2}$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 25,}{x_i \ge 0, i = \overline{1,4}.} \tag{3}$$

Bu masalani simpleks usul yordamida yechish uchun uni kanonik ko'rinishga keltiramiz. Shu maqsadda (2) tengsizliklarga muvozanatlovchi, yordamchi, x_5, x_6 va x_7 miqdorlarni qo'shamiz. Bu miqdorlarni iqtisodiy talqin etsak, ular qaralayotgan reja uchun erkin resurslarni anglatadi. Natijada quyidagi kanonik masalaga ega bo'lamiz:

$$\frac{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max}{2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 30,} \tag{4}$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 40, \tag{5}$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 25,}{x_i \ge 0, i = \overline{1,7}.} \tag{6}$$

Bu masala uchun (0,0,0,0,30,40,25) bazis reja bo'ladi va unga

$$A_B = (a_5, a_6, a_7) = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

bazis mos keladi. Demak, (4)-(6) masalani simpleks metod yordamida yechish mumkin. Dastlab, yuqorida bayon etilgan algoritm asosida birinchi simpleks jadvalni to'ldiramiz.

	S_i \ S_B		2	1	3	5	0	0	0	
b, a_i \ a_B		b,x	a_1	a_2	a_3	A_4	a_5	a_6	a_7	θ
a_5	0	30	2	3	1	2	1	0	0	15
a_6	0	40	4	2	1	2	0	1	0	20
a_7	0	25	1	2	3	1	0	0	1	25
Z		0	0	0	0	0	0	0	0	
Z-C			-2	-1	-3	-5	0	0	0	

							↑			
a_4	5	15	1	3/2	1/2	1	1/2	0	0	30
a_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a_7	0	10	0	1/2	5/2	0	-1/2	0	1	4
Z		75	5	15/2	5/2	5	5/2	0	0	
Z-C			3	13/2	-1/2	0	5/2	0	0	
						↑				
a_4	5	13	1	7/5	0	1	3/5	0	-1/5	
a_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a_3	3	4	0	1/5	1	0	-1/5	0	2/5	
Z		77	5	38/5	3	5	12/5	0	1/5	
Z-C			3	33/5	0	0	12/5	0	1/5	

Demak ikkinchi iterasiya natijasida uchinchi qadamda optimallik sharti bajarildi. Optimal reja x_{opt}=(0,0,4,13,0,10,0) bo'lib, maqsad funksiyaning joiz maksimal qiymati $c'x/_{opt} = 77$ bo'ladi.

Izoh. Har bir jadvalning *Z* satridagi uchinchi katakda maqsad funksiyaning mos rejadagi qiymati hosil bo'ladi va har bir iterasiyada bu qiymat oshib boradi.

Chiziqli programmalashtirish masalasini yechishning Simpleks usuli bir tayanch yechimdan boshqasiga o'tish asosida maqsad funksiyasiga optimal qiymat beruvchi yechimni topishga asoslangandir. Har bir tayanch yechimdan boshqasiga o'tilganda maqsad funksiya qiymati o'sib boradi (maksimallashtirish masalasi uchun) yoki kamayib boradi (minimallashtirish masalasi uchun) . Chekli qadamdagi hisoblashlardan keyin masalaning optimal yechimi topiladi yoki maqsad funksiyasi yechimlar sohasida chegaralanmaganligi aniqlanadi. Barcha hisoblash jarayonlari, bir yechimdan boshqasiga o'tish va tayanch yechimning optimallik shartlarini tekshirish simpleks jadval deb ataluvchi maxsus jadvalda bajariladi.

Nazorat savollari.

1. Simplek usul deganda nimani tushunasiz?
2. Simpleks usulning mohiyatini tushuntirib bering
3. Simplek jadval usulida basis tushunchasi
4. Sun'iy basis usulining mahiyatini ayting

14-ma'ruza. Transportga oid masalalarni yechish metodlari. Transportga oid masalalarni shimoli-g'arb metodida yechish

REJA:

1. Transport masalalari va ularning qo'yilishi.
2. Transport masalalarini yechish usullari
3. Optimallashtirish masalalari va ularning qo'yilshi

Tayanch tushunchalar. *Transport masalasi, optimal optimal yechim, usul, shimol-g'arb burchak usuli, modellashtirish.*

Transport masalasi - chiziqli dasturlashning alohida xususiyatli masalasi bo'lib bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masala xususiyligiga qaramay qo'llanish sohasi juda kengdir.

Masalaning qo'vilishi va uning matematik modeli. m-ta Ai (i = 1,2,..., m) ta'minotchilarda yig'ilib qolgan bir jinsli a, miqdordagi mahsulotni n-ta B, iste'molchilarga mos ravishda **b, (j=l,2,...,n)** miqdorda etkazib berish talab qilinadi.

Har bir i-ta'minotchidan har bir j-iste'molchiga bir birlik yuk tashish yo'l xarajati ma'lum va u ***cy-*** so'mni tashkil qiladi.

Yuk tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta'minotchilardagi barcha yuklar olib chiqib ketilsin, iste'molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo'l xarajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun *i*-ta'minotchidan *j*-iste'molchiga yetkazib berish uchun rejalashtirilgan yuk miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz, u holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko'rinishda yozish mumkin

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahiralar
	B_1	B_2		B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C12 X12		C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C22 X22		C_{2n} X_{2n}	a_2
A_m	C_{nl} X_{nl}	Cn2 Xn2		Cnm Xmn	a_m
Talablar	b_1	b_2		b_n	$\sum a_i = \sum b_j$.

Jadvaldan ko'rinadiki, i-ta'minotchidan j-iste'molchiga rejadagi x_{ij} - birlik yuk etkazib berish yo'l xarajati C_{ij} X_{ij} - so'mni tashkil qiladi. Rejaning umumiy qiymati esa,

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

ga teng bo'ladi.

Masalaning birinchi shartiga ko'ra, ya'ni barcha yuklar olib chiqib ketilishi sharti uchun

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_{i,} \quad (j = i, \ldots, m)$$

tengliklarga ega bo'lamiz;

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_{j,} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

ikkinchi shartga ko'ra, ya'ni barcha talablar to'la qondirilishi uchun
tengliklarga ega bo'ldik;
Shunday qilib masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi:
chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, bu yechim

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

chiziqli fimktsiyaga eng kichik qiymat bersin.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Bu modelda

tenglik o'rinli deb faraz qilinadi. Bunday masalalar «yopiq modelli transport masalasi» deyiladi.

Teorema. Talablar hajmi zahiralar hajmiga teng bo'lgan istalgan transport masalasining optimal yechimi mavjud bo'ladi.

Boshlang'ich tayanch yechimni qurish.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch yechimini ko'rishdan boshlanadi.

Masalaning (1) va (2) sistemalari birgalikda **mn** - ta noma'lumli **m+n** - ta tenglamalardan iborat. Agar (1) sistemaning tenglamalarini hadma-had qo'shsak, va alohida (2) sistemaning tenglamalarini hadma-had qo'shsak, ikkita bir xil tenglama hosil bo'ladi. Bu esa (1) va (2) dan iborat sistemada bitta chiziqli bog'lik tenglama borligini ko'rsatadi. Bu tenglama umumiy sistemadan chiqarib tashlansa, masala **m+n-1** ta chiziqli bog'liq bo'lmagan tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib qoladi.

Demak, masalaning buzilmaydigan tayanch yechimi **m+n-1** ta musbat komponentalardan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, transport masalasining boshlang'ich tayanch yechimi biror usul bilan topilgan bo'lsa, (x,y) - matritsaning m+n-l ta komponentalari musbat bo'lib, qolganlari nolga teng bo'ladi. Agar transport masalasining shartlari va uning tayanch yechimi yuqoridagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, noldan farqli x_{ij}-lar joylashgan kataklar «band kataklar», qolganlari «bo'sh kataklar» deyiladi.

Agar band kataklami vertikal yoki gorizontal kesmalar bilan tutashtirilganda yopiq ko'pburchak hosil bo'lsa, bunday hol sikllanish deyiladi va yechim tayanch yechim bo'lmaydi. Demak, birorta yechim tayanch yechim bo'lishi uchun band kataklar soni m+n−1 ta bo'lib tsikllanish ro'y bermasligi kerak.

Shimoliv-g'arb burchak usuli.

Transport masalasi jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin. Yo'l xarajatlarini hisobga olmay **Bi** iste'molchining talabini **Ai** ta'minotchi hisobiga qondirishga kirishamiz. Buning uchun **ai** va **bi** yuk birliklaridan kichigini **AiBi** katakning chap pastki burchagiga yozamiz. Agar **ai< bi** bo'lsa, **Bi** ning ehtiyojini to'la qondirish uchun **A2B1** katakka etishmaydigan yuk birligini **A2** dan olib yozamiz va h. k. Bu jarayonni $\mathbf{A_mB_n}$ katakka etguncha davom etdiramiz. Agar (5) shart o'rinli bo'lsa, bu usul da tuzilgan yechim albatta tayanch yechim bo'ladi.

1-misol. Transport masalasining boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar					Zahira hajmi
	Bi	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Minimal qiymat usuli.

Bu usulda boshlang'ich yechim qurish uchun awal yo'l xarajati eng kichik bo'lgan katakka $\boldsymbol{a}$, va $\boldsymbol{bj}$ lardan kichigi yoziladi va keyingi eng kichik qiymatli katakka o'tiladi va h. k. Bu usulda tuzilgan boshlang'ich yechimni buzilmaslik va tsikllanishga tekshirish shart.

Potensiallar usuli

Biror usul bilan topilgan boshlang'ich reja umuman olganda optimal reja bo'lavermaydi, biroq usulning samarasiga qarab, optimal rejaga yaqinroq bo'liShi mumkin. g'ar qanday yopiq modelli transport masalasi optimal rejaga ega ekanligini inobatga olib, optimal rejani topish usullaridan biri bo'lgan potensiallar usulini bayon qilamiz. Bu usulda, dastlabki reja topilgandan so'ng, har bir ta'minotchi va iste'molchiga, potensial deb ataluvchi $u_i, i=\overline{1,m}$ va $v_j, j=\overline{1,n}$ sonlami mos qo'yamiz. Bu sonlami aniqlash uchun, jadvaldagi barcha band (yuk taqsimlangan) kataklar uchun potensiallami aniqlovchi tenglamalar tuzamiz. Deylik, (*i,j*)- katak band bo'lsin. U holda u_i va v_j lami shunday tanlaymizki, ulaming yig'indisi mos tarifga teng bo'lsin:

Barcha u_i va v_j miqdorlar soni n+m ta, band kataklar soni esa n+m-1 ta bo'lgani sababli, n+m ta noma'lumni topish uchun n+m−1 ta tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamalardan noma'lumlami bir qiymatli topib bo'lmasligi tufayli, noma'lumlardan birini ixtiyoriy tanlaymiz (masalan, $u_1=0$ deb tanlaymiz), qolgan o'zgaruvchilar bir qiymatli aniqlanadi.

Optimallik shartini tekshirish maqsadida barcha bo'sh (yuk taqsimlanmagan) kattaklar uchun qalbaki tarif kiritamiz:

$$c'_{ke}=u_k+v_e$$

So'ngra har bir bo'sh katak uchun shu katakka mos tarif va qalbaki tariflar farqini hisoblaymiz:

$$s_{ke}=c_{ke}-c'_{ke}$$

Qaralayotgan masala uchun o'rinli bo'lgan ushbu teoremani keltiraylik:

Teorema. Transport masalasida qaralayotgan reja optimal bo'lishi uchun, barcha band kataklar uchun

$$u_i+v_j=c_{ij}$$

bo'lishi va barcha bo'sh kataklar uchun

$$s_{ke}=c_{ke}-c'_{ke}\geq 0$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu teorema isboti ikkilanmalik nazariyasi natijalaridan kelib chiqadi.

Optimal rejani topish algoritmini davom ettiraylik. Agar optimallik sharti bajarilsa, qaralayotgan reja optimal bo’ladi. Deylik, optimallik sharti bajarilmasin, ya’ni s_{ke} sonlar ichida manfiylari bor bo’lsin. Bunday sonlaming borligi planni yanada «yaxshilash» imkoniyatini beradi. Shu maqsadda, manfiy s_{kc} lar ichidan eng kichigini tanlaymiz (agar yagona bo’lsa o’zini, eng kichigi bir nechta bo’lsa, ulardan ixtiyoriy bittasini tanlaymiz). Tanlangan katakni qutb deb ataymiz va unga ⊕ ishorasini qo’yib, uni band kataklar safiga qo’shamiz. Natijada, jadvaldagi band kataklar soni n+m taga yetadi va bir uchi qutbda qolgan uchlari band kataklardan iborat yagona sikl qurish mumkin bo’ladi. So’ngra, sikl bo’ylab, qutbdan boshlab, qutbning barcha uchlariga soat strelkasi yo’nalishi bo’ylab navbat bilan 0 va - ishorasini qo’yib chiqamiz. Barcha - ishoraga mos keluvchi yuklami taqqoslab, eng kichik yukni o’lchov miqdori sifatida qabul qilib, - ishorali kataklardagi yuk miqdoridan o’lchov miqdorini ayirib, ustun bo’yicha, ⊕ ishorali kataklardagi yukka qo’shamiz. Natijada yangi reja hosil bo’ladi. Yangi reja uchun yana potensiallarni aniqlab, optimallik sharti bajarilmasa, yuqoridagi tadbirlarni optimal rejani topguncha davom ettiramiz va chekli qadamdan so’ng optimal reja topiladi.

Dinamik dasturlash masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog’liq bo’ladi xamda butun jarayonning optimal rivojini ta’minlovchi bir qator (ketma-ket xar bir vaqt davri uchun) optimal yechimlar topiladi. Dinamik dasturlash masalalari ko’p bosqichli voki ko’p qadamli deb ataladi.

Dinamik dasturlash - vaqtga bog’liq va ko’p bosqichli boshqariluvchi iqtisodiv iaravonlami optimal reialashtirish usullarini o’rganuvchi matematik dasturlashning bir bo’limidir.

Agar iqtisodiy jarayonning kyechishiga ta’sir ko’rsatish mumkin bo’lsa, bunday jarayon boshqariluvchi deb ataladi. Jarayoning kyechishiga ta’sir etish uchun qabul qilinuvchi qarorlar (yechimlar) to’plamiga boshqarish deb ataladi. Iqtisodiy jarayonlarda boshqarish rejalashtirishning xar bir davrida vositalami taqsimlash, mablag’ ajratish, direktiv xujjatlar qabul qilish va shu kabilar bilan ifodalanishi mumkin. Masalan, ixtiyoriy korxonaning ishlab chiqarish-boshqariluvchi jarayondir, chunki u ishlab chiqarish vositalarining tarkibi, xom ashyo ta’minoti xajmi, moliyaviy mablag’lar miqdori va xokazo bilan aniqlanadi. Rejalashtirish davridagi xar bir yil boshida xom ashyo bilan ta’minlash, ishlab chiqarish jixozlarini almashtirish, ko’shimcha mablag’lar miqdori xaqida qarorlar to’plami boshqarishdan iboratdir. Bir qarashda, eng ko’p miqdorda maxsulot ishlab chiqarish uchun korxonaga mumkin bo’lgan vositalarning xammasini berish va ishlab chiqarish jixozlaridan (stanoklaridan, texnikadan va x k. lardan) to’la foydalanish zarurdek tuyuladi. Lekin, bu jixozlami tezda eskirishiga (ishdan chiqishga) va natijada maxsulot ishlab chiqarish xajmining kamayishiga olib kelishi mumkin. Demak, korxonaning faoliyatini, noma'qul effektlardan xoli bo'lgan ravishda eskirgan jixozlami almashtirish yoki o'mini to'ldirish choralari belgilanishi lozim bo'ladi. Bu esa dastlabki davrda maxsulot kamaytirsa, keyingi davrlarda korxonaning butun ishlab chiqarish faoliyatini kuchayishiga olib kelishi mumkin. SHunday qilib, yuqoridagi iqtisodiy jarayon, xar bir davrda uning rivojlanishiga ta'sir etuvchi, bir qancha davrlardan iborat deb qaralishi mumkin. Odatda davr sifatida xo'jalik yili olinadi.

Ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonlami rejalashtirishda, xar bir aloxida oraliq bosqichda qaror qabul qilishda, butun jarayonning tub maqsadi ko'zlanadi. Butun jarayonning yechimi o'zaro bog'langan yechimlar ketma-ketligidan iborat bo'ladi. O'zaro bog'langan bunday yechimlar ketma-ketligi strategiva deb ataladi. Oldindan tanlangan kriteriyga nisbatan eng yaxshi natijani ta'minlovchi strategiya optimal strategiva deb ataladi. Ko'p bosqichli rejalashtirishda xar bir oraliq rejalashtirishda yechimini tanlashda butun jarayonning tub maqsadini ko'zlab yechimni tanlash printsipi optimallik printsipi deb ataladi.

Optimallashtirish masalalarini dinamik dasturlash usullari bilan yechishdan xar bir oraliq bosqichda qabul qilingan yechim butun jarayonning kelajakdagi xolatiga qanday ta'sir ko'rsatishini xisobga olish zarurdir. X,ar bir bosqichda oldingi bosqich biror xolatda bo'lganligi shartida xisoblangan optimal yechim shartli optimal deb ataladi.

Dinamik dasturlashga xos bo'lgan quyidagi misolni qo'ramiz.

Misol. Aytaylik, $P_1, P_2, ... P_n$ sanoat korxonalarning S sistemadan iborat faoliyatini k ta $t_1, t_2, \dots, t_k$ xo'jalik yilidan iborat

$$T = \sum_{i=1}^{k} t_i$$

davrga mo'ljallab rejalashtirilayotgan bo'lsin. T davrining boshidan korxonalarga **F** miqdordagi fondlar ajratilgan. Har bir xo'jalik yilining boshlanishida korxonalaming barcha S sistemalari mablag' bilan ta'minlanadi, ya'ni F fonddan ulush ajratiladi. S_0 - korxonalarga ajratilgan mablag'lar bilan foydalanuvchi sistemaning dastlabki holati va S_k - korxonalarga berilgan barcha qo'shimcha **F** mablag'lar bilan ifodalanuvchi oxirgi xolatlari ma'lum deylik. Davrning oxirida korxonalardan olinadigan ja'mi W foyda eng ko'p bo'lishi uchun mavjud F fondlami yillar bo'yicha korxonalar o'rtasida qanday taqsimlash maqsadga muvofiq ekanligini topish talab qilinadi. Masalaning matematik modelini tuzish maqsadida quyidagi belgilashlami kiritamiz.

x_{ij} — **i** - yil **j** - korxonalarga ajratilgan mablag' so'mmasi

$$\begin{cases} U_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) \\ U_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) \end{cases}$$

Ui - i - davr mobaynidagi boshqamv (bu mablag'lar miqdori va x. k. orqali ifodalanish mumkin). U holda $U_i = (x_{i1}, X_{i2}, X_{in})$ vektor **i** - bosqichdagi vositalar taqsimotining yig'indisi esa quyidagi vektorlar sistemasi orqali ifodalanadi.

k yil davomidagi ja'mi daromad esa U_i, U_k boshqaruvlarga bog'liq, ya'ni $W = W(U_1,U_2,...,U_k)$

Masala quyidagicha qo'yiladi:

Har bir bosqichda shunday boshqaruvni tanlash kerakki, korxonalardan olinadigan ja'mi daromad maksimal bo'lsin.

Dinamik dasturlash masalasining umumiv qo'vilishi.

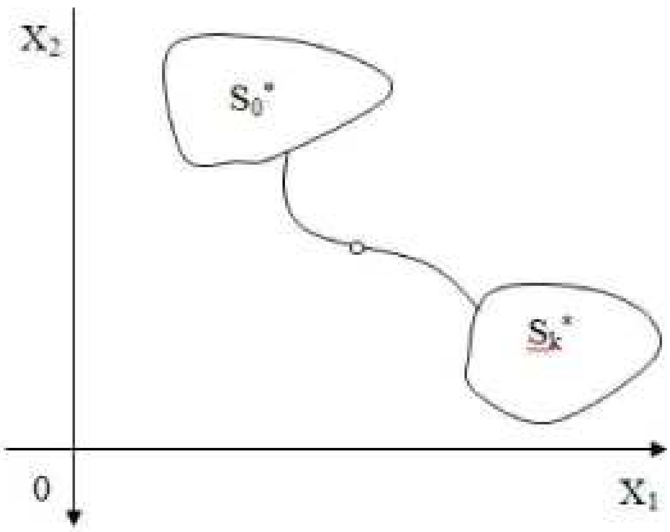
Umumiy xolda sistemaning boshlang'ich S_0 holati va oxirgi S_k holati aniq berilmaydi, hamda boshlang'ich xolatning butun bir S_o* soxasi va oxirgi xolatlaming S_o* sohasi ko'rsatiladi.

Umumiy holda dinamik dasturlash masalasi quyidagicha ta'riflanadi:

Biror boshqariluvchi S sistema boshlang'ich $S_0 \in S_0^*$ xolatda bo'lsin. Vaqt o'tishi bilan sistemaning xolati o'zgaradi va u $S_k \in S_0^*$ oxirgi holatga o'tadi, deb hisoblaylik. Sistema holatlarining o'zgarishi biror miqdoriy W-mezon (kriteriy) bilan bog'liq deylik. Sistemaning o'zgarish jarayonini shunday tashkil etish kerakki, bunda W-mezon o'zining optimal qiymatiga erishsin.

Y-mumkin bo'lgan boshqaruvlar to'plami bo'lsin. U holda, masala S sistemani $S_0 \in S_0^*$xolatdan $S_k \in S_0^*$xolatga o'tkazishga imkon beruvchi shunday $Y^* \in Y$ boshqaruvni topishdan iboratki, bunda W(Y) mezon o'zining W*=W(Y*) optimal qiymatiga erishsin.

Odatda sistemaning S_0 holatini sonli parametrlar bilan, masalan ajratilgan fondlar miqdori, jalb qilingan investitsiyalar miqdori, sarflangan yonilg'i miqdori va x.k. bilan ifodalash mumkin. Bu parametrlami sistemaning koordinatalari deb ataymiz. U holda sistemaning holatini S nuqta bilan va uning bir S_1 holatdan S_2 holatga o'tishini esa S nuqtaning trayektoriyasi bilan tasvirlash mumkin.



1. Transport masalasi deb nimaga aytiladi?
2. Transport masalasini qaysi soxalarda qo’yiladi?
3. Transport masalasini yechish usullari.
4. Tranport masalalaming chiziqli dasturlash masalasi bilan bogTikligini tushuntirib bering
5. Dinamik dasturlash masalalari xaqida gapirib bering?
6. Dinamik dasturlashning chiziqli dasturlashdan farqi nimalarda?
7. Boshqariluvchi jarayonlar qandayjarayon?
8. Optimallik prinsipining mohiyati nimada?

15-16 ma'ruza.

Kuzatish natijalarini qayta ishlash. Eng kichik kvadratlar metodi. Regressiya va korrelatsiya koeffitsiyentlari. Regressiya chizig'i

REJA:

1. **Matematika statistika elementlari.**
2. **Kuzatish natijalariga ishlov berish**
3. **O'rta qiymatlar va eng kichik kvadratlar usuli**

Taynch tushunchalar. *Tasodif, tasodifiy miqdor, kuzatish, kuzatish natijalari, taqsimot, tanlanma, nisbiy chastota, nisbiy chastotalar poligoni.*

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б.Саматов, Т.Эргашев «Оптималлаш усуллари» фанидан маърузалар матни (Ўкув услубий қўлланма). Наманган 2010.*
3. *Е. В. Бошкиново и др. Численное методы и их реализация в MS Excel. Самара 2009*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*
5. *А. В. Стариков И. С. Куцева. Экономико-математическое и компьютерное моделирование. Воронеж 2008.*

Statistik ehtimollik,

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1} \tag{1}$$

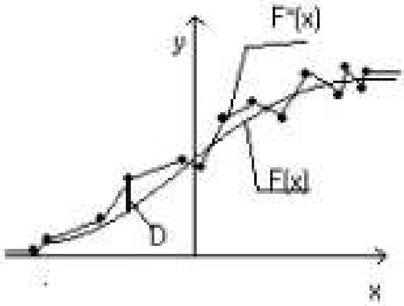
bu yerda S_x^2 - tanlanma dispersiyasi.

(1) - ifodadagi $n-1$ erkinlik darajasini sonini bildiradi. Tajriba ma'lumotlari uchun erkinlik darajasini soni quyidagicha aniqlanadi: tajriba kuzatuvlari sonidan (n) bog'liklik soni ayiriladi. Dispersiya tushunchasi boshqacha qilib aytganda ishonchsizlik darajasini miqdoriy o'lchovidir. *n* katta bo'lganda *n-1* va *n* ni bir xil deb olsa bo'ladi, aks holda mumkin emas. Tasodifiy miqdorlarni o'rtacha qiymati dispersiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

va kuzatuvlar sonini (n) o'sishiga qarab aniqlikni o'stirish qonuni deb yuritiladi. Statistikada nazariy taqsimotga empirik taqsimotlarning yaqinlik darajasini aniqlashning bir qancha kriteriyalari mavjud.

1. Akademik A.N. Kolmogorov kriteriyasi.



$F(x)$ – nazariy taqsimot funktsiyasi

$F^*(x)$ – emperik taqsimot funktsiyasi

$D = max\left| F^*(x) - F(x) \right|$, $\lambda = D\sqrt{n}$

Jadvaldan (λ) ni qiymati aniqlanadi. Agar (λ) ehtimollik ancha kichkina bo'lsa, qurilgan gipoteza hisobga olinmaydi. Agar (λ) katta qiymatga ega bo'lsa tajriba ma'lumotlari nazariyaga mos keladi deyish mumkin. Bu kriteriyadan foydalanishning cheklanganligi shundaki, biz oldindan $F(x)$ nazariy taqsimot funktsiyasini bilishimiz zarur, bu esa oson ish emas.

2. **K. Pirson kriteriyasi**. χ^2 (*xi - kvadrat kriteriyasi*)

$$\chi^2 = \sum \frac{\left| m - F(x)N \right|^2}{F(x)N}$$

bu yerda m va $F(x)$, N – empirik va nazariy chastotalar.

Maxsus jadvaldan χ^2_{jadv} - qiymati aniqlanadi va χ^2_{his} bilan solishtiriladi $\chi^2_{his} > \chi^2_{jadv}$ tanlangan r-ehtimollik uchun (r=0,95)

3.**V.I. Romanovskiy kriteriyasi.**

$$R = \frac{\left| \sum \frac{(n_x + y_x)^2}{y_x} - B \right|}{\sqrt{2B}}$$

bu yerda B -intervallar soni.

Agar R<3 bo'lsa, empirik va nazariy taqsimot orasidagi farq tasodifiy xarakterga ega. Tajriba ma'lumotlarini A.N.Kolmogorov va V.I. Romanovskiy kriteriyalari bo'yicha baholashga misol.

Intervallar	Interval o'rtasi x_{cp}	n_x	$x_{cp}n_x$	$x_{cp}-\overline{x}$	$(x_{cp}-\overline{x})^2$	$(x_{cp}-n_x)^2 n_x$
71,005 – 72,635		4				
72,635 – 74,265		5				
74,265 – 75,895		6				
75,895 – 77,525		10				
77,525 – 79,155		11				
79,155 – 80,785		8				
80,785 – 82,415		7				
82,415 – 84,045		6				
84,045 – 85,675		5				
85,675 – 87,305		1				

$a=\dfrac{x_{o'r}-\overline{x}}{s}$	$\Phi(u)$	n_x-y_x	n_x-y_x	$(n_x-y_x)^2$	$\dfrac{(n_x-y_x)^2}{y_x}$	$\sum n_x$	$\sum y_x$

$$\Delta=\frac{h\cdot n}{s}=\frac{1{,}63\cdot 63}{3{,}768}=27{,}1;\ y_x=\Phi(u)\cdot\Delta;\ R=\frac{\left|\sum\dfrac{(n_x-y_x)^2}{y_x}-B\right|}{\sqrt{2B}}=0{,}59;$$

$$\lambda=\frac{2{,}52}{63}\cdot\sqrt{63}=0{,}38$$
$;\ p(\lambda)=0{,}997;$

Ikkala kriteriya bo'yicha ham Gauss taqsimot qonuniga bo'y sunadi.

M-darajali polinom bilan approktsimatsiyalash.

X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_i	…	y_n

Jadval ko'rinishidagi ma'lumotlarni M-darajali polinom

$P_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m$, bu yerda $(m<n)$

ko'rinishdagi empirik funktsiya bilan almashtirish kerak bo'lsin. $P_m(x)$ polinom approktsimatsiyalovchi polinom deyiladi. EKU ga asosan noma'lum koeffitsientlar farqlari (jadval ko'rinishidagi va empirik orasidagi farqlar) kvadratlari yig'indisi eng kichik bo'ladigan qilib tanlanadi.

Jadval ko'rinishidagi berilgan funktsiya uchun masalani quyidagicha qo'yishimiz mumkin: M-darajali polinom $P_m(x)$ ni (m<=n) shunday olish kerak

$$s = \sum_{i=1}^{n} [y_i - P_m(x_i)]^2$$

kattalik eng kichik qiymat qabul qilsin.

S funktsiya ekstremumi mavjud bo'lishining zaruriy sharti quyidagidan iborat:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a_0} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_m} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) formula orqali differentsiyallash natijasini noma'lum koeffitsientlarga bog'liq bo'lgan quyidagi algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

Agar

$$\begin{aligned} c_j &= \sum_{i=0}^{n} x_i^j, \quad (j = 0,1,2,\dots,2m), \\ d_k &= \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i, \quad (k = 0,1,2,\dots,m), \end{aligned} \qquad (3)$$

deb olsak (2) formulani quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$\begin{cases} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m = d_0, \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \dots + c_{m+1} a_m = d_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + \dots + c_{2m} a_m = d_m \end{cases} \qquad (4)$$

c_j va d_k koeffitsientlarni qo'lda hisoblash uchun quyidagi jadvaldan foydalanish oson. (3) formuladagi koeffitsientlar jadvaldagi mos sonlarni qo'shish orqali topiladi.

N	x_i^0	x_i	....	x_i^{2m}	y_i	$x_i y_i$	....	$x_i^m y_i$
1	1	x_0	.....	x_0^{2m}	y_0	$x_0 y_0$	.....	$x_0^m y_0$
2	1	x_1	....	x_1^{2m}	y_1	$x_1 y_1$	.....	$x_1^m y_1$
...	...	....	....	.....	....	....	.....	.....
n+1	1	x_n	....	x_n^{2m}	y_n	$x_n y_n$	....	$x_n^m y_n$
$\sum$	c_0	c_1	....	c_{2m}	d_0	d_1	.....	d_m

$a_1, a_2, ..., a_m$ (1) empirik bog'lanishning noma'lum koeffitsientlardir. (4) ko'rinishdagi normal tenglamalar sistemasini biror usul (masalan Gauss usuli) bilan yechish orqali aniqlanadi.

Bu laboratoriya ishida jadval ko'rinishida berilgan funktsiyani 2-darajali ko'phad bilan aproksimatsiyalaymiz.

Bu holda

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

bo'lib, normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a_0} = \sum\limits_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) \cdot (-2) \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) \cdot (-2x_i) \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_2} = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) \cdot (-2x_i^2) \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 \quad + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 3} + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 4} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases} \tag{6}$$

a_0, a_1, a_2 koeffitsientlarni esa (6) tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish orqali aniqlaymiz.

Misol. Tajriba natijasida quyidagi

N	1	2	3	4	5	6
X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Y	0,02	0,05	0,08	0,18	0,24	0,33

ma'lumotlar olingan bo'lsin.

Ma'lumotlarni approksimatsiyalovchi funktsiya $u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 2- darajali empirik bog'lanish ko'rinishida tanlash talab etilsin.

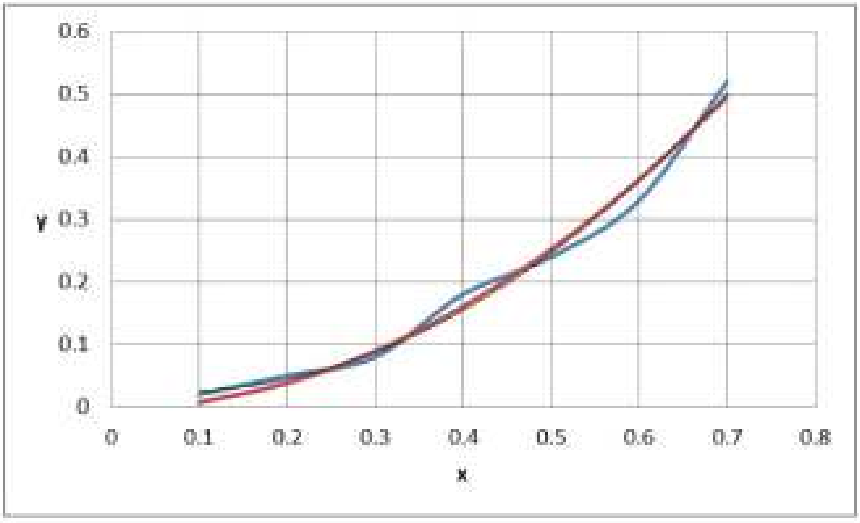
Hisoblashlarni quyidagi jadvalda keltiramiz.

N	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0,1	0,01	0,01	0,0001	0,02	0,002	0,0002
2	0,2	0,04	0,008	0,0016	0,05	0,01	0,002
3	0,3	0,09	0,027	0,0081	0,08	0,024	0,0072
4	0,4	0,16	0,064	0,0256	0,18	0,072	0,0288
5	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,24	0,12	0,06
6	0,6	0,36	0,216	0,1296	0,33	0,198	0,1188
7	0,7	0,49	0,343	0,2401	0,52	0,364	0,2548
$\sum$	2,8	1,40	0,784	0,4676	1,42	0,790	0,4718

olingan yig'indilarni (5) tenglamalar sistemasiga qo'yib, uni Gauss usuli bilan yechamiz va empirik funktsiyaga ega bo'lamiz.

$$u(x) = -0,003606 + 0,006908x + 1,00819x^2$$

Quyidagi rasmda tajriba ma'lumotlari (nuqtalar bilan) va approksimatsiyalovchi funktsiya grafiklari berilgan.



Kuzatish natijalariga ishlov berish. Tasodifiy hodisalar ustida o'tkaziladigan kuzatish natijalariga asoslanib, ommaviy tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash mumkin. Matematik statistikaning asosiy vazifasi kuzatish natijalarini (statistik ma'lumotlarni) to'plash, ularni guruhlarga ajratish va qo'yilgan masalaga muvofiq ravishda bu natijalarni tahlil qilish usullarini ko'rsatishdan iborat.

Biror X tasodifiy miqdor F(x) taqsimot funksiyasiga ega deylik. X tasodifiy miqdor ustida o'tkazilgan n ta tajriba (kuzatish) natijasida olingan $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlar to'plamiga n hajmli tanlanma deyiladi, $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarni birbiriga bog'liq bo'lmagan va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Ba'zan $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma F(x) nazariy taqsimot funksiyaga ega bo'lgan X bosh to'plamdan olingan deb ham ataladi.

Bosh to'plamdan tanlanma olingan bo'lsin. Birorta x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta va hokazo kuzatilgan hamda

$$\sum n_1 = n$$

bo'lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, kuzatishlar soni n_i chastotalar deyiladi. Kuzatishlar sonining tanlanma hajmiga nisbatini

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastotalar deyiladi. Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi. Shunday qilib, taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Aytaylik, X son belgi chastotalarining statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x-belgining x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni; n – kuzatishlarning umumiy soni.

Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymati uchun (X<x) hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

bu yerda: n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanma hajmi.

Tanlanmaning statistik taqsimotini ko'rgazmali tasvirlash hamda kuzatilayotgan X belgining taqsimot qonuni haqida xulosalar qilish uchun poligon va gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k)$, nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Bu yerda x_i – tanlanma variantalari, n_i – mos chastotalar.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, w_1), (x_2, w_2), ..., (x_k, w_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanma variantalari, W_i –ularga mos nisbiy chastotalar.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{n}$ (chastota zichligi) nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onali figuraga aytiladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi oraliqlar balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ (nisbiy chastota zichligi) nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onali figuraga aytiladi.

1-misol. Hajmi 30 bo'lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan.

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing.

Yechish: Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlama hajmiga bo'lamiz.

$$W_1 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \; W_2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \; W_3 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

u holda, nisbiy chastotalar taqsimoti

x_i	2	8	16
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2-misol. Quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Yechish:

$n = n_1 + n_2 + n_3 = 10 + 15 + 25 = 50$

$W_i = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0.2; \; W_2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{10} = 0.3; \; W_3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0.5$

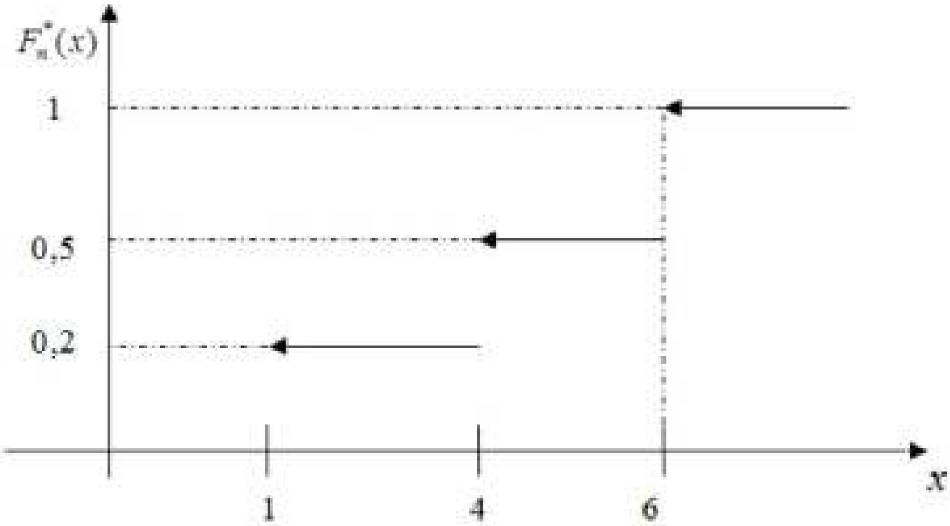
U holda, nisbiy chastotalar empirik taqsimoti

x_i	1	4	6
w_i	0.2	0.3	0.5

Empirik taqsimot funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & agar, x \le 1, bo'lsa \\ 0.2, & agar, 1 < x \le 4, bo'lsa \\ 0.5, & agar, 4 < x \le 6, bo'lsa \\ 1, & agar, x > 6, bo'lsa \end{cases}$$

Topilgan qiymatlar asosida grafikni yasaymiz.



X belgili bosh to'plamning taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ bo'lib, θ noma'lum parametr bo'lsin, $x_1, x_2, ... x_n$ esa bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'lsin. Tanlanmaning ixtiyoriy funksiyasi $L(x_1, x_2, ... x_n)$ statistika deyiladi.

Statistikaning kuzatilgan qiymati $L = L(x_1, x_2, ... x_n)$ θ parametrning taqribiy qiymati sifatida olinadi. Bu holda $L(x_1, x_2, ... x_n)$ statistika θ parametrning bahosi deyiladi.

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tanlanmaning o'rta qiymati,

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_T)^2$$

tanlanmaning dispersiyasi deyiladi.

Agar

$$ML(x_1, x_2, ..., x_n) = \theta$$

shart bajarilsa, L baho θ parametr uchun siljimagan baho deyiladi.

Agar L baho va har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(|L - \theta| \le \varepsilon) = 1$$

munosabat bajarilsa, L baho θ parametr uchun asosli baho deyiladi.

Agar L baho uchun

$$\lim_{n\to\infty} D(L) = 0$$

L baho θ parametr uchun asosli baho bo'ladi.

Agar θ parametrning $L_1 va L_2$ siljimagan baholari berilgan bo'lib, $D(L_1) < D(L_2)$ bo'lsa, L_1 baho L_2 bahoga nisbatan samarali baho deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyali baho samarali baho bo'ladi.

$\overline{x}_T$ –tanlanma o'rtacha bosh to'plam o'rta qiymati uchun siljimagan, asosli va samarali baho bo'ladi.

D_T -tanlanma dispersiya bosh to'plam dispersiyasi uchun asosli baho bo'ladi.

$S = \frac{n}{n-1} D_T$ – bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan, asosli baho bo'ladi.

Tanlanma o'rtacha va tanlanma dispersiyalarni hisoblashni soddalashtirish uchun ba'zan quyidagi formulalardan foydalaniladi:

$$u_i = \frac{x_i - c}{h},\ i = \overline{1,n},$$

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i,\quad \overline{x}_T = \overline{u}\cdot h + c,$$

$$D_T^u = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2,\quad D_T^x = h^2 \cdot D_T^u$$

bu yerda c va h sonlari hisoblashni yengillashtiradigan qilib tanlanadi.

4-misol. Sterjenning uzunligi 5 marta o'lchanganda quyidagi natijalar olingan: 92, 94, 103, 105, 106.

a) Sterjen uzunligining tanlanma o'rta qiymatini toping.

b) Yo'l qo'yilgan xatolarning tanlanma dispersiyasini toping.

Yechish: a)Tanlanma o'rtacha $\overline{x}_T$ ni topish uchun shartli variantalardan foydalanamiz, chunki dastlabki variantalar katta sonlardir.

$$u_i = x_i - 92$$

$$\overline{x}_T = 92 + \frac{0+2+11+13+14}{5} = 92 + 8 = 100$$

b) Tanlanma dispersiyani topamiz.

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_T)^2}{n} =$$

$$= \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34$$

Faraz qilaylik, $x_1, x_2, \dots \dots x_n$ tanlanma berilgan bo'lib, uning taqsimot funksiyasi $F(x, \theta)$bo'lsin. $L(x_1, x_2, \dots \dots x_n)$ statistika θ parametr uchun statistik baho bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $\alpha > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topish mumkin bo'lsa va uning uchun

$$P(|L-\theta|) < \delta) = 1-\alpha$$

bo'lsa, u holda ($L-\delta$; $L+\delta$) oraliq θ parametrning $1-\alpha$ ishonchlilik darajali ishonchli oralig'i deyiladi.

X belgisi normal taqsimlangan bosh to'plamning matematik kutilishi a uchun quyidagi ishonchli oraliqdan foydalaniladi:

a)

$$\overline{x}_T - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_T + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

bu yerda σ – o'rtacha kvadratik chetlanish, t_α – Laplas funksiyasi $\Phi(t)$ ning $\Phi(t_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ bo'ladigan qiymati.

a) σ – noma'lum bo'lib, tanlanma hajmi n>30 bo'lganda:

$$\overline{x_T} - t_{n-1;\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{n-1;\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Bu yerda S^2 – tuzatilgan tanlanma dispersiya, $t_{n-1;\alpha}$ – Styudent taqsimoti jadvalidan berilgan n va α lar bo'yicha topiladi.

Eslatma: $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ baho aniqligi deyiladi.

X belgisi normal taqsimlangan taqsimot funksiyasining dispersiyasi σ^2 uchun quyidagi ishonchli oraliqlardan foydalaniladi:

$S^2(1-q)^2 < \sigma^2 < S^2(1+q)^2$, q <1 bo'lganda, yoki

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$

$0 < \sigma^2 < S^2(1+q)^2$, q >1 bo'lganda, yoki $0 < \sigma < S(1+q)$

5-misol. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining noma'lum matematik kutilishi a ni $\nu=0,95$ ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma=5$, tanlanma o'rtacha $\overline{x_T}=14$ va tanlanma hajmi n=25 berilgan.

Yechish: $\phi(t)=\frac{1}{2}\nu$ munosabatdan $\phi(t)=\frac{0,95}{2}$ =0,475 jadvaldan t=1,96 ni topamiz. Topilganlarni

$$\overline{x_T}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x_T}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo'yib,

$$\left(14-1,96\cdot\frac{5}{\sqrt{25}};14+1,96\cdot\frac{5}{\sqrt{25}}\right)$$

yoki

(12,04; 15,96)

ishonchli oraliqni topamiz.

Nazorat savollari.

1. Berilgan funktsiyalarni qanday ko'phadlar bilan approksimatsiyalash mumkin.
2. Berilgan ko'rsatmadan katta darajali ko'phadlar bilan approksimatsiyalashda qiyinligi nimada.
3. Gauss usuli ma'nosi nima?

AMALIY MASHG‘ULOTLAR

1-amaliy mashg'ulot

Turli modellar tuzishga doir misollar yechish

Jismga yerda uning sirtiga α burchak ostida yo'nalgan υ_0 boshlang'ich tezlik berildi. Jismning harakat trayektoriyasini toping va uning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari orasidagi masofani aniqlang.

Masalani yanada konkretlashtirish uchun gap katapulta yordamida tashlab yuborilgan tosh ustida boryapti deb qaraymiz. Bu bizga jismning xarakterli o'lchamlarini, uning massasini hamda mumkin bo'lgan boshlang'ich tezligini aniqlashda yordam beradi. Endi berilgan holda quyidagi farazlarga asoslangan matematik modelni quramiz;

1) Yer — inersial sanoq sistemasi;

2) Erkin tushish tezlanishi g – o'zgarmas;

3) Yerning egriligini e'tiborga olmasdan, uni yassi deb qarash mumkin;

4) Harakatdagi toshga havoning qarshilik kuchi ta'sirini e'tiborga olmaslik mumkin.

Koordinatalar sistemasini kiritamiz. Koordinatalar boshini katapulta bilan ustma-ust tushiramiz, x o'qini toshning harakat yo'nalishi bo'yicha gorizontal, y o'qini esa yuqoriga vertikal yo'naltiramiz. Bu farazlarga ko'ra toshning x o'qiga proeksiyasi $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha$ tezlik bilan tekis harakatlanadi. Toshning y o'qiga proeksiyasi esa $a_y = -g$ tezlanish va $\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha$ boshlang'ich tezlik bilan tekis tezlanuvchan harakat qiladi. Shunday qilib tosh harakatining xarakteri ushbu

$$x = t\upsilon_0 \cos\alpha; \tag{1}$$

$$y = t\upsilon_0 \sin\alpha - gt; \tag{1}$$

formulalar bilan aniqlanadi. Bu formulalar (1)–(4) shartlar bajarilganda masalaning matematik modelini beradi. Hosil qilingan model g'oyatda sodda va qo'yilgan savolga javob osonlik bilan olinishi mumkin. (1) dan t vaqtni x koordinata orqali ifodalaymiz:

$$t = \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha}$$

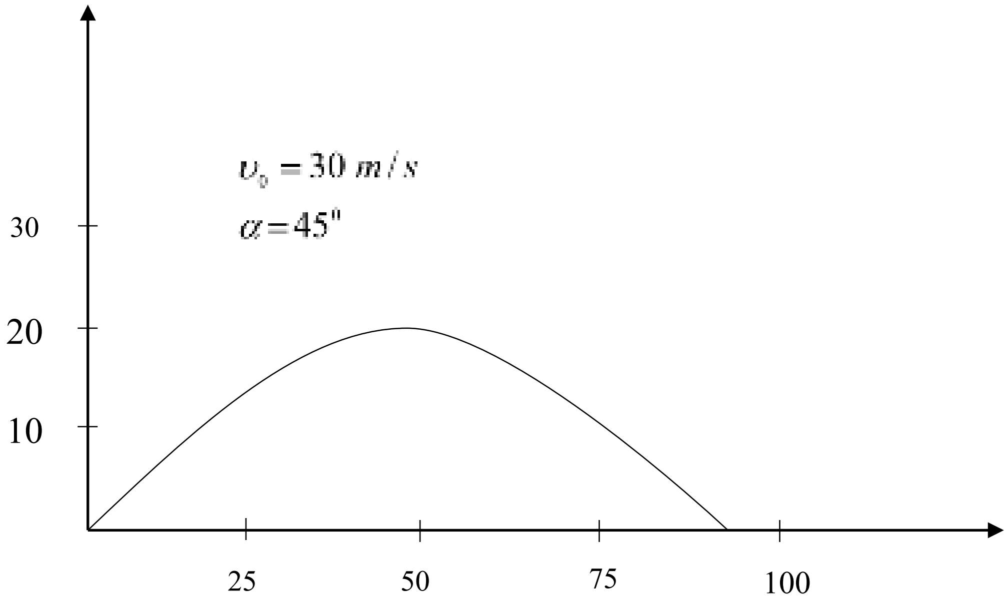
va uni (2) ga qo'yamiz. Natijada tosh trayektoriyasining parabolani (1-chizma) ifodalovchi.

$$y = x tg\alpha - x^2 \frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} \tag{3}$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu parabola x o'qini $x=0$ va $x=l$ nuqtada kesib o'tadi, bunda

$$l = \frac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\alpha. \qquad (4)$$

Birinchi nuqta traektoriyaning boshi bo‘lib, unda tosh katapultadan otilib chiqadi. Ikkinchi nuqta toshning yerga tushgan joyiga mos keladi. (4) formula qabul qilingan model doirasida izlangan masofa l ni aniqlaydi.



Amaliy masalalarda matematik modelni qurish ishning eng murakkab va mas'uliyatli bosqichlaridan biridir.

Tajriba ko‘rsatadiki, ko‘p hollarda modelning to‘g‘ri tanlanishi – muammoning yarmidan ko‘pini hal qilish demakdir. Bu bosqichning qiyinligi shundan iboratki.u matematika va sotsial bilimlarning uyg‘unlashishini talab etadi. O‘rta maktab fizika kursiga doir masalalar yechishda siz bir vaqtda ham fizik, ham matematik xizmatini o‘taysiz. Ammo amaliy matematikada qaraladigan katta muammolar uchun mutaxassisliklarning bunday uyg‘unlashishi tipik emas. Odatda matematik model ustida matematiklar hamda o‘rganilayotgan ob'ekt tegishli bo‘lgan sohaning mutaxassislari birgalikda ishlaydilar. Ularning faoliyati muvaffaqiyatli bo‘lishi uchun bir-birini tushunishi g‘oyatda muhim. Bunga matematiklar ob'ekt haqida maxsus bilimlarga ega bo‘lganda, ularning sheriklari esa ma'lum darajada matematik bilimga, o‘z sohasida tadqiqotning matematik metodlarini qo‘llanish tajribasiga ega bo‘lgandagina erishish mumkin.

Musataqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Qiya tekislikda turgan jism harakatini modellashtiring. Bu jarayonda havoning qarshilik kuchini hisobga olmaslik mumkin.

2. h balandlikdan gorizontal otilgan jism harakatini modellashtiring. Bu jarayonda havoning qarshilik juchini va erkin tushish tezlanishining yerning geografik hududlariga bog'liqligini hisobga olmaslik mumki.

2-Amaliy mashg'ulot
Xatoliklar nazariyasi elementlari. Xatoliklar. Absolyut va nisbiy xatolik.

Ishning maksadi: *talabalarni taqribiy sonlar bilan ishlashga o'rgatish, taqribiy sonning absolyut va nisbiy xatosini baholash, shuningdek, argumentlar xatoligi keltirib chiqaradigan differensiallanuvchi funksiya, klavishli hisoblash mashinalari ishlatilishini o'rgatish.*

Taqribiy sonlar. Ularning absolyut va nisbiy xatosi.
Qiymatga ega bo'lgan raqam. To'g'ri ishoralar soni.

$\boldsymbol{a}$ taqribiy soni deb, aniq $\boldsymbol{a}_0$ sonidan deyarli farq qilmaydigan va hisoblashlar oxirida almashtiriladigan songa aytiladi.

Taqribiy $\boldsymbol{a}$ soni va uning aniq qiymati a_0 orasidagi $a - a_0$ ayirma va $\boldsymbol{a}$ taqribiy sonining xatoligi deb yuritiladi va odatda bu ko'rsatkich naoma'lum bo'ladi..

a sonining taqribiy xatolik qiymati deganda

$$|a - a_0| \le \Delta_a \qquad (1.1)$$

ko'rinishdagi tengsizlik tushiniladi.

Δ_a soni taqribiy a soninig absolyut xatoligi (ayrim hollarda xato chegarasi) deb ataladi. Bu son bir qiymatli aniqlanmaydi: uning qiymatini oshirish mumkin. Odatda (1.1) tengsizlikni kanoatlantiruvchi Δ_a sonini imkon kadar kichikrok kursatishga harakat kilishadi.

(1.1) dan a_0 aniq soni

$$a - \Delta_a \le a_0 \le a + \Delta_a$$

chegaralarda bo'lishi kelib chikadi. Bundan kelib chikib $a - \Delta_a$ a_0 taqribiy sonining kamayishi, $a + \Delta_a$ a_0 taqribiy sonining kupayishidir.

Bu holda qisqalik uchun $a_0 = a \pm \Delta_a$ yozuvdan foydalaniladi.

Misol.

1 sm aniqlikda o'lchangan xonaning bo'yi va eni a=5,15m va b=3,07m ga teng. Xona yuzasini S=ab=5,15m*3,07m=15,8105 m^2. kabi hisoblashdagi xatolik baholansin.

Yechish.

Masala shartiga ko'ra Δ_a = 0,01m, Δ_b=0,01m. Imkon bo'lgan chegaraviy yuza qiymati

$$(a + 0{,}01)(b + 0{,}01) = 15{,}8929\ \text{m}^2$$

$$(a-0{,}01)(b-0{,}01)=15{,}7284\ \mathrm{m}^2$$

kabi bo’ladi. Bu qiymatlarni S ning qiymati bilan solishtirib,

$$\Delta_S=0{,}0824\ \mathrm{m}^2$$

ko’rinishdagi S sonining absolyut xatoligini ko’rsatishga imkon beradigan

$$|S-S_0|\le 0{,}0824$$

qiymatni olamiz.

Bu yerdan ko’rinib turibdiki, absolyut xatolik hisoblashlarning xatoligini to’la ifodalamaydi.

a taqribiy sonining δ_a nisbiy xatoligi (ayrim hollarda nisbiy xato chegarasi) deb uning absolyut xatoligining a sonining absolyut qiymatiga nisbatiga, ya’ni

$$\delta_a=\frac{\Delta_a}{|a|}\qquad (a\ne 0).$$

miqdorga aytiladi. Nisbiy xatolik odatda foizlarda ifodalanadi. Nisbiy xatolik odatda foizlarda ifodalanadi.

Shu tarika $a_0\approx a$ bo’lganligi sababli a sonining absolyut xatoligi sifatida

$$\Delta_a=|a|\,\delta_a \text{ yoki } \Delta_a=|a_0|\,\delta_a$$

qiymatni qabul qilish mumkin.

Bundan kelib chiqadiki δ_a nisbiy xatolikni bilgan holda aniq son uchun

$$a(1-\delta_a)\le a_0\le a(1+\delta_a)$$

$$a_0=a(1\pm\delta_a)$$

chegaralari olinadi.

Misol.

Havo uchun gaz doimiysini aniqlashda R=29,25 deb olinadi. Bu qiymatning nisbiy xatosi 0,1% ekanligini bilgan holda R yotadigan chegaralar topilsin.

Yechish.

Masala shartidan ko’ra δ_a=0,001, u holda 29,22≤R≤29,28.

Ma’lumki, ixtiyoriy musbat a son chekli yoki cheksiz o’nli kasr ko’rinishida ifodalanishi mumkin.

Taqribiy sonning qiymatga ega raqami deb uning o’nli ko’rinishdagi har xil noldan farqli yoki nol raqamiga aytiladi, agar u qiymatga ega raqamlar orasida mavjud bo’lsa yoki saqlangan o’nli razryada qatnashsa.

Agar a taqribiy son uchun almashtiriladigan aniq a_0 son ma’lum bo’lsa, u holda

$$|a-a_0|\le\frac{1}{2}*10^{m-n+1}$$

o’rinli va $d_m, d_{m-1}, ..., d_{m-n-1}$ raqamlarning birinchi n tasi qiymatga ega bo’ladi.

Sonning to'g'ri ishoralar miqdori sonning birinchi qiymatga ega raqamidan birinchi qiymatga ega raqam absolyut xatoligigacha xisoblanadi.

Teorema. *Agar **a** taqribiy musbat soni qisqa ma'noda **n** to'g'ri o'nlik belgilarga ega bo'lsa, u holda berilgan sonning birinchi qiymatga ega bo'lgan raqami bo'linmasi bu sonning nisbiy xatosi* $\delta\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ *dan oshmaydi, ya'ni*

$$\delta \le \frac{1}{d_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

*bunda d_m – **a** sonining birinchi qiymatga ega bo'lgan raqami.*

Misol.

π soning o'rniga a=3,14 sonini olsak, nisbiy xato qanday bo'ladi?

Yechish.

Qaralayotgan holda d_m=3 va n=3. bundan

$$\delta = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^{3-1} = \frac{1}{3}\%$$

kelib chiqadi.

Topshiriqlar

1. Quyidagi sonlarni qiymatli uch xona(raqam)gacha yaxlitlab, hosil bo'lgan taqribiy sonlarning absolyut Δ va nisbiy δ xatosini aniqlang:

a) 2,1514; 6)0,16152; v)0,01204; g) 1,225;

d) 0,001528; ye)-392,85; j) 0,1545; z) 0,03922.

2. Quyidagi taqribiy sonlarning absolyut xatosini ularning nisbiy xatosiga asoslanib aniqlang:

a) a = 13267, δ= **0,1** %; *b) a* = 2,32, δ = 0,7%;

v) a = 35,72, δ = 1 %; g) a = 0,896, δ = 10%.

3. Bir necha burchaklarning o'lchanishi natijasida quyidagilar olindi: d_1 = 21°37'3", d_2 =45°, d_3 =1°10", d_4 = 75°20'44".

d_1, d_2, d_3, d_4 sonlarining nisbiy xatosini absolyut xatolikni 1 ga teng deb hisoblab aniqlang.

4. Agar x sonining absolyut xatosi aniq bo'lsa, undagi qiymatli raqamlar sonini aniqlang.

a)x = 0,3941, Δ_x =0,25-10"; b)x = 0,1132, Δ_x=0,1*10"^{3};

v) x = 38,2543, Δ_x =0,27-10 ^{2}; g) x = 293,481, Δ_x=0,1.

5. a sonining nisbiy xatosi aniq bo'lsa, undagi qiymatli raqamlar sonini aniqlang.

a)a = 1,8921, δ_o=*0,1-Yu'²;* *b) a* = 0,2218, δa **=0,2-1**0"¹;

v) d = 22,351, δ_o = 0,1; g) a = 0,02425, δ_a = 0,5 • 10"².

6. Taqribiy sonlarning ko'paytmasini toping va hisoblashlarning xatoligini aniqlang (berilgan sonlarning barcha raqamlari qiymatli deb hisoblagan holda).

a) 3,49 • 8,6; b) 25,1 • 1,743; v) 0,02 • 16,5;

g) 0,253 • 6,54 • 86,6; d) 1,78 • 9,1 • 1,183; ye) 482,56 • 0,0052.

7. Taqribiy sonlarning bo'linmasini toping.

a) 5,687 ÷ 5,032; 6)0,144 ÷ 1,2; v) 216÷4;

g) 726,676÷829; d) 754,9367÷ 36,5.

8. To'g'ri to'rtburchakning tomonlari 4,02 ± 0,01 m, 4,96 ± 0,01 m.ga teng. To'g'ri to'rtburchakning yuzasini hisoblang.

9. Doiraning radiusi R ni 0,5 sm aniqliqda o'lchaganda 12 sm soni hosil bo'ldi. Doira yuzini hisoblashdagi absolyut va nisbiy xatoni toping.

10. Kubning har bir qirrasi 0,02 sm aniqlikda o'lchanganda 6 sm ga tengligi ma'lum bo'ldi. Kubning hajmini hisoblashdagi absolyut va nisbiy xatolikni toping.

3-Amaliy mashg’ulot

Xatoliklar nazariyasi elementlari. Funksiya xatoligi.

Ishning maksadi: *talabalarni taqribiy sonlar bilan ishlashga o’rgatish, taqribiy sonning absolyut va nisbiy xatosini baholash, shuningdek, argumentlar xatoligi keltirib chiqaradigan differensiallanuvchi funksiya, klavishli hisoblash mashinalari ishlatilishini o’rgatish.*

Agar argumentning qiymati taqribiy bo’lsa, biz esa funksiyaning qiymatini izlasak, u holda funksiya ham tug’riligini aniqlash kerak bo’ladigan taqribiy son bo’ladi. Differensiallanadigan funksiyaning $y = f(x_1,...,x_n)$ absolyut xatosi argumentlarning $x_1,...,x_n$ deyarli kichik xato bilan chiqariladigan $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2},...,\Delta_{x_n}$ o’lcham bilan baholanadi

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \,. \qquad (2)$$

Agar funksiyaning qiymati musbat bo’lsa, u holda nisbiy xato uchun quyidagi baholash o’rinli bo’ladi

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Misol.

Agar diametr *d*=3,7sm ± 0,05, π=3,14 bo’lsa, $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ shar hajmining absolyut va nisbiy xatosini toping.

Yechish.

π va *d* ni o’zgaruvchi kattalik sifatida ko’rib chiqib, quyidagi xususiy hosilalarni hisoblaymiz

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{6} d^3 = 8{,}442; \quad \frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{3}\pi d^2 \approx 21{,}5$$

$\Delta_d = 0{,}05$ va $\Delta_\pi = 0.0016$ bo’lganligi sababli kuch formulasi (2) hajmning absolyut xatosidir:

$$\Delta_V = \left| \frac{\partial f}{\partial \pi} \right| \Delta\pi + \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| \Delta_d = 1{,}0881 \approx 1{,}1 \text{ sm}^2.$$

Shuning uchun

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 27{,}5 \pm 1{,}1 \text{ sm}^2.$$

Bundan hajmning nisbiy xatosi

$$\delta_V = \frac{\Delta_V}{V} = \frac{1{,}088}{27{,}5} \approx 4\%.$$

kabi bo'ladi.

Topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning absolyut va nisbiy xatoligini aniqlang

1. $y = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$ a = 3,85 ±0,01; b = 2,0435 ± 0,004; c = 962,6 ±0,1.

2. $y = \left[\frac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$ a = 4,3 ±0,05; b = **17,2** + 0,02; c = 22 ±0,05; t = 12,477 ±0,003;

p = 8,37 ±0,005.

3. $y = \frac{\sqrt{a}b}{c}$ a = 228,6 + 0,05; b = 86,4±0,02; c = 68,7±0,05.

4. $y = \frac{m^3(a+b)}{c-d}$ a = 13,5 ±0,02; b = 7,5±0,02; c= 34,5±.0,022; d= *3,325* ±0,005;

t = 4,22 ±0,004.

5. $y = \frac{\sqrt{ab}}{c}$, a = 3,845 ± 0,004; b = 6,2 ±0,05; c = 0,8 ±0,1.

6. $y = \frac{a+b}{(c-d)^2}m$, a = 1,75 ±0,001; b = 11,7±0,04; c = 0,536±0,002;

d= 6,32 ±0,008; t = 0,56 ±0,005.

7. $y = \frac{a^2b}{c}$, a = 3,546 ±0,002; b = 8,23 ±0,005; c = 145±0,08.

8. $y = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, a = 23,16 ± 0,02; b = 8,23 ± 0,005; c = 145 ± 0,08; d= 28,6±1;

m = 0,28 ±0,006.

9. $y = \frac{ab^3}{c}$, a = 0,643 ± 0,0005; b = 2,17 ±0,002; c = 5,843 ±0,001.

10. $y=\dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$ a= 27,16 ± 0,006; b = 5,03 + 0,01; c = 3,6 ± 0,002;

t = 12,375 ±0,004; n = 8,64 ± 0,002.

11. $u=\dfrac{1}{6}\pi b\left(3a^2+b^2\right)$, a = 2,456 + 0,002; b = 1,76 ±0,001; π=3,14.

12. $y=\dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$, a = 16,342 ±0,001; b = 2,5 ±0,03; c = 38,17 ± 0,002;

d= 9,14 ±0,002; t = 9,14 ±0,005; n = 3,6 ±0,04.

13. $y=\dfrac{m^2n}{c^3}$, c = 0,158±0,0005; m= 1,653±0,0003; n= 3,78±0,02.

14. $y=\dfrac{\sqrt{a-bm}}{c+d}$, a = 9,542 ±0,01; b= 3,028 ± 0,002; c = 0,172 ±0,001;

d= 5,4 + 0,01; m = 26 ±0,03.

15. $y=\sqrt{\dfrac{cd}{b}}$, b= 2,65 ± 0,01; c = 0,7568 + 0,0002; d = 2,17 + 0,02.

4-Amaliy mashg'ulot

Bir noma'lumli algebraik va transendent tenglamalarni vatarlar va urinmalar usulida taqribiy yechish.

Ishning maqsadi: *talabalarni chiziqli bo'lmagan tenglamalarning ildizlarini ajratish usullari va taqribiy yechish usullariniqo'llab tenglamalarni sonli yechishni, hisoblash algoritm iva dasturini tuzish, olingan natijalarni tahlil qilishga o'rgatish.*

Ikkiga bulish usuli

$f(x)=0$ (1) tenglama berilgan bulsin.

$[a,b]$ da $f(x)$ uzluksiz va $f(a)f(b)\prec 0$ shartni kanoatlantiradi.

$[a,b]$ da joylashgan (1) tenglamani ildizini topish uchun $[a,b]$ kesmani ikkiga bulamiz.

Agar $f(\frac{a+b}{2})=0$ *булса* $\xi=\frac{a+b}{2}$ (1) tenglamaning ildizi buladi. $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$ bulsa $\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$ kesmalardan shunisini olamizki u kesmani chetki nuktalarida $f(x)$ funktsiya karama-karshi ishoralarga ega bulsin. $[a_1,\ b_1]$ intervalni yana ikkiga bulib bu jarayonni davom etiramiz natijada ma'lum bir etapda anik ildizni yoki bir birini ichiga joylashgan cheksiz ketma-ketlikni $[a_1,\ b_1],[a_2,\ b_2],...,[a_n,\ b_n],...$ xosil kilamizki

$$f(a_n)f(b_n)\prec 0 \quad (n=1,2,...) \qquad (2)$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a) \qquad (3)$$

kesmani oxirgi chap $a_1,\ a_2,...,a_n,...$ nuktalari kamaymovchi monoton chegaralangan ketma-ketligini, ung chetki nuktalari $b_1,\ b_2,...,\ b_n,...$ kupaymovchi chegaralangan monoton ketma – ketligini tashkil etadi, shuning uchun (3) tenglamaga asosan umumiy limit mavjud buladi.

$$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\leftarrow\infty}b_n$$

(2) tengsizlikdan $n\to\infty$ da limitga utib $f(x)$ - ni uzluksizligidan foydalanib

$$[f(\xi)]^2\le 0$$

Bu yerdan $f(\xi)=0$ ni, ya'ni ξ (1) – chi tenglamani ildizi ekanligiga ishonch xosil kilamiz va

$$0\le\xi-a_n\le\frac{1}{2^n}(b-a) \qquad (4)$$

kelib chikadi.

Misol: Ikkiga bulish usulidan foydalanib.

$f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1$ tenglamani

$[0,1]$ intervalda (kesimda) joylashgan ildizini toping.

$$f(0) = -1; \quad f(1) = 1 \quad [0{,}0{,}5]; \quad [0{,}5;1]$$

$$f(0{,}5) = 0{,}06 + 0{,}25 - 0{,}5 - 1 = -1{,}19$$

$$f(0{,}75) = 0{,}32 + 0{,}84 - 0{,}75 - 1 = -0{,}59$$

$$f(0{,}875) = 0{,}59 + 1{,}34 - 0{,}88 - 1 = 0{,}05$$

....

$$f(0{,}8594) = 0{,}546 + 1{,}270 - 0{,}859 - 1 = -0{,}043$$

$$\xi = \frac{1}{2}(0{,}859 + 0{,}875) = 0{,}867$$

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni Vatarlar, Nyuton (urinmalar) va oddiy iterasiya usullari yordamida taqribiy yechish mumkin.

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishdan avval ularning ildizlarini ajratib olish kerak bo'ladi. Ildizlarni ajratish deganda taqribiy ildizlar yotadigan oraliqlarni aniqlash tushuniladi. Ildizlarni ajratish uchun ildizlarni ajratishning grafik yoki analitik usullaridan foydalanish mumkin. Tenglamaning ildizlarni ajratib olganimizdan so'ng quyidagi usullarning biridan foydalanib tenglamaning yechimini topish mumkin. Faraz qilaylik, ildiz $[a, b]$ oraliqda yotsin.

Vatarlar usuli.

a) Agar [a, b] oraliqda $f(a) < 0$ bo'lsa, u holda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n),$$

bunda $x_0 = a$.

b) Agar [a, b] oraliqda $f(a) > 0$, u holda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a)$$

bunda $x_0 = b$.

Nyuton usuli (***Urinmalar usuli***). Agar [a, b] oraliqda $f(a)f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $x_0 = a$; agar $f(b)f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $x_0 = b$ bo'ladi va quyidagi formula bilan xisoblanadi.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Berilgan tenglamani vatarlar, ikki bo'lish va Nyuton usullarida yeching

1. $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$
2. $x^3 - 2x + 2 = 0$
3. $x^3 + x - 3 = 0$
4. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$
5. $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$
6. $x^3 - 0{,}1x^2 + +0{,}4x + 1{,}2 = 0$
7. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0$
8. $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$
9. $x^3 + 4x - 6 = 0$
10. $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$
11. $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$
12. $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$
13. $x^3 + 3x + 1 = 0$
14. $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$
15. $x^3 + 3x - 1 = 0$
16. $x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0$
17. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$
18. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$
19. $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$
20. $x^3 + 2x + 4 = 0$
21. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 0{,}8 = 0$
22. $x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0$
23. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$
24. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 1{,}2 = 0$
25. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2 = 0$
26. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0$

5-Amaliy mashg'ulot

Bir noma'lumli algebraik va transendent tenglamalarni oddiy iteratsiya usulida yechish.

Ishning maqsadi: *talabalarni chiziqli bo'lmagan tenglamalarning ildizlarini ajratish usullari va taqribiy yechish usullariniqo'llab tenglamalarni sonli yechishni, hisoblash algoritm iva dasturini tuzish, olingan natijalarni tahlil qilishga o'rgatish.*

Iteratsiya usuli

Tenglamani sonli yechish usullaridan biri iteratsiya usuli bulib xisoblanadi.

Faraz kilamiz $f(x)=0$ (1) tenglama berilgan bulsin. $f(x)$ - uzluksiz funktsiya. (1) tenglamani xakikiy ildizini aniklash kerak.

(1) tenglama teng kuchli bo'lgan $x=\varphi(x)$ (2) tenglama bilan almashtiramiz. Ildizning x_0 takribiy kiymatini tanlab (2) – chi tenglamani ung tomoniga kuyamiz.

$$x_1=\varphi(x_0) \qquad (3)$$

(3)– ning ung tomoniga x_1 kuyib $x_2=\varphi(x_1)$ ni xosil kilamiz. Bu jarayonni davom etirib

$$x_n=\varphi(x_{n-1}) \; (n=1,2,...) \qquad (4)$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz.

Agar bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, ya'ni $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ limit mavjud bo'lsa (4) dan limitga o'tib $\varphi(x)$ - ni uzluksiz deb

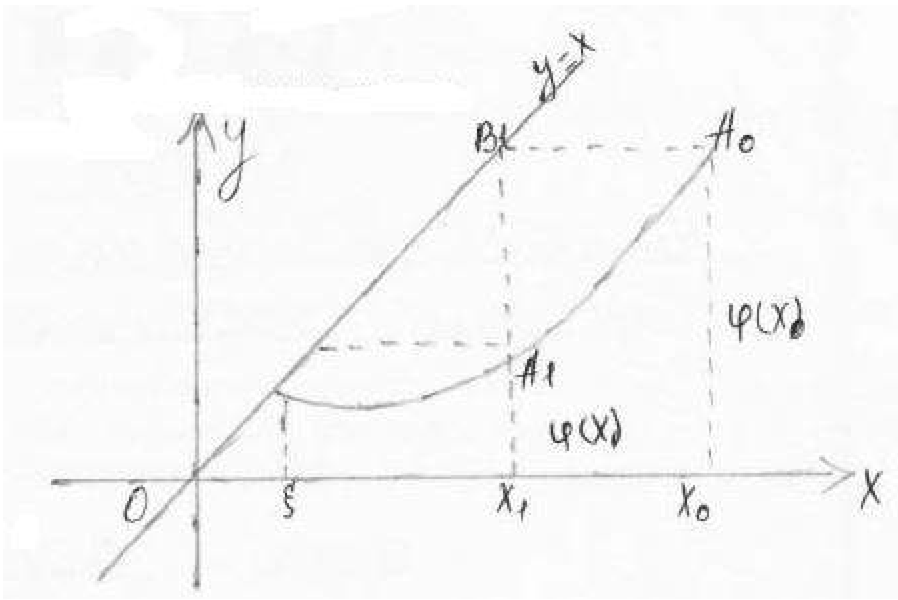
$$\lim_{n\to\infty} x_n=\varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) \text{ ni}$$

yoki

$$\xi=\varphi(\xi) \text{ (5) xosil kilamiz.}$$

Demak ξ - (2) – ning ildizi ekan.

Geometrik ma'nosi.



Misol: $x^3 + x = 1000$ tenglamani eng katta musbat ildizini 10^{-4} aniqlik bilan topish kerak.

Eng qo'pollik bilan ildizning taqribiy qiymatini $x_0 = 10$ topamiz. Ko'rinib turibdiki $\xi \prec x_0$ yuqoridagi tenglamani.

$$x = 1000 - x^3$$

yoki

$$x = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}$$

yoki

$x = \sqrt[3]{1000 - x}$ yozib olamiz.

Asosiy oraliq sifatida (9,10)ni olib

$\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$ ni olamiz.

$$\varphi^1(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$

bu yerda

$$\left|\varphi^1(x)\right| \le \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} \approx \frac{1}{300} = q$$

$$y_n = 1000 - x_n \qquad \textit{бу деган суз}$$

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1000 - x_n} \quad \textit{дегани}$$

n	x_n	y_n
0	10	990
1	9,96655	990,03345
2	9,96660	990,03334
3	9,9667	

$$\left.\begin{array}{l}(a,\, b) - \textit{оралик}\\ \left[a,\, b\right] - \textit{кесма}\end{array}\right\}\ \text{deb olinadi.}$$

Topshiriq

Berilgan tenglamani oddiy iteratsiya usulida yeching

1.	$x^3 + 2x^2 + 2 = 0$	14.	$x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$
2.	$x^3 - 2x + 2 = 0$	15.	$x^3 + 3x - 1 = 0$
3.	$x^3 + x - 3 = 0$	16.	$x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0$
4.	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$	17.	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$
5.	$x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$	18.	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$
6.	$x^3 - 0{,}1x^2 + +0{,}4x + 1{,}2 = 0$	19.	$x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$
7.	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0$	20.	$x^3 + 2x + 4 = 0$

8. $x^3-3x^2+12x-12=0$

9. $x^3+4x-6=0$

10. $x^3+3x^2+6x-1=0$

11. $x^3-3x^2+6x-2=0$

12. $x^3-3x^2+12x-9=0$

13. $x^3+3x+1=0$

21. $x^3+0{,}2x^2+0{,}5x+0{,}8=0$

22. $x^3+0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}2=0$

23. $x^3-0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}5=0$

24. $x^3-0{,}2x^2+0{,}3x-1{,}2=0$

25. $x^3+0{,}2x^2+0{,}5x-2=0$

26. $x^3+0{,}2x^2+0{,}5x-1{,}2=0$

6-amaliy mashg'ulot

Chiziqli tenglamalar Gauss usulida yechish. Chiziqli tenglamalar kvadrat ildizlar usulida yechish

Amaliyot rejasi:

1. Gauss metodi.
2. Bosh elementlar metodi.
3. Optimal yo'qotish metodi.
4. Determinatni hisoblash.
5. Matrisalarning teskarisini topish.

Tayanch iboralar: *oddiy va iterasion usullar, uchburchakli matrisa, to'g'ri va teskari yo'l, Ermit matrisasi.*

Optimal yo'qotish metodi o'z strukturasi jihatidan Gauss metodiga yaqin bo'lishiga qaramasdan u mashina xotirasidan effektiv ravishda foydalanishga imkon beradi va shuning uchun ham bu metod yordamida tartibi ikki mart katta bo'lgan sistemani yechish mumkin.

Gauss metodi. Bu metod bir necha hisoblash sxemalariga ega. Shulardan biri Gaussning kompakt sxemasini ko'rib chiqamiz. Ushbu sistema berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{7.1}$$

Faraz qilaylik, $a_{11} \neq 0$ (yetakchi element) bo'lsin, aks holda tenglamalarning o'rinlarini almashtirib, x_1 oldidagi koeffisiyenti noldan farqli bo'lgan tenglamani birinchi o'ringa ko'chiramiz. Sistemadagi birinchi tenglamaning barcha koeffisiyentlarini a_{11} ga bo'lib,

$$x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + ... + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \tag{7.2}$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \; (j \geq 2).$$

(2) tenglamadan foydalanib, (1) sistemaning qolgan tenglamalarida x_1 ni yo'qotish mumkin. Buning uchun (2) tenglamani ketma-ket $a_{21}, a_{31}, ...$ larga ko'paytirib, mos ravishda sistemaning ikkinchi, uchinchi va h.k. tenglamalaridan ayiramiz. Natijada, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n,n+1}^{(1)}. \end{cases} \qquad (7.3)$$

bu yerda $a_{ij}^{(1)}$ koeffisiyentlar

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}^{(1)} \ (i,j \geq 2).$$

formala yordamida hisoblanadi. Endi (7.3) sistema ustida ham shunga o'xshash almashtirishlar bajaramiz.

Buning uchun (3) sistemadagi birinchi tenglamaning barcha koeffisiyentlarini yetakchi element $a_{22}^{(1)}$ ga bo'lib,

$$x_2 + b_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)}x_n = b_{2,n+1}^{(2)} \qquad (7.4)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \ (j \geq 3).$$

(4) tenglama yordamida (3) sistemaning keyingi tenglamalarida yuqoridagidek x_2 ni yo'qotib,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = a_{3,n+1}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = a_{n,n+1}^{(2)} \end{cases}$$

sistemaga kelamiz, bu yerda

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(2)}, \ (i,j \geq 3).$$

Noma'lumlarni yo'qotish jarayonini davom ettirib va bu jarayonni m -qadamgacha bajarish mumkin deb faraz qilib, m -qadamda quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{m+1,n}^{(m)}x_n = a_{m,n+1}^{(m)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{nn}^{(m)}x_n = a_{n,n+1}^{(m)}, \end{cases} \qquad (7.5)$$

bu yerda

$$b_{mj}^{(m)} = \frac{a_{mj}^{(m)}}{a_{mm}^{(m)}}, \ a_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)}b_{mj}^{(m)} \ (i,j \geq m+1).$$

Faraz qilaylik, m mumkin bo'lgan oxirgi qadamning nomeri bo'lsin. Ikki hol bo'lishi mumkin: $m=n$ yoki $m<n$. Agar $m=n$ bo'lsa, u vaqtda biz uchburchak matrisali va (1) sistemaga ekvivalent bo'lgan quyidagi

$$
\begin{cases}
x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,\, n+1}^{(1)}, \\
\qquad x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,\, n+1}^{(2)}, \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad x_n = b_{n,n+1}^{(n)}
\end{cases}
\tag{7.6}
$$

sistemaga ega bo’lamiz. Oxirgi sistemadan ketma-ket $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ larni topish mumkin:

$$
\begin{cases}
x_n = b_{n,n+1}^{(n)}, \\
x_{n-1} = b_{n-1,n+1}^{(n-1)} - b_{n-1,n}^{(n-1)} x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1 = b_{1,n+1}^{(1)} - b_{12}^{(1)} x_2 - \ldots - b_{1n}^{(1)} x_n .
\end{cases}
\tag{7.7}
$$

(6) uchburchak sistemaning koeffisiyentlarini topish Gauss metodining *to’g’ri yurishi*, (7.7) sistemani topish jarayoni *teskari yurishi* deyiladi.
Faraz qilaylik, $m < n$ bo’lsin va sistemanig m - va undan keyingi tenglamalari (7.5) ko’rinishga keltirilgan bo’lsin. Biz m - qadamni bajarilishi mumkin bo’lgan qadam deb hisoblagan Edik, bush uni bildiradiki (5) sistemaning ikkinchi tenglamasidan boshlab yetakchi elementni ajratish mumkin emas, barcha $a_{ij}^{(m)}\ (i, j = m+1, \ldots, n)$ lar nolga teng va (5) sistema quyidagi ko’rinishga ega

$$
\begin{cases}
x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\
\qquad 0 = a_{m+1,n+1}^{(m)}, \\
\qquad \ldots\ldots\ldots \\
\qquad 0 = a_{n,n+1}^{(m)} .
\end{cases}
$$

Agar bunda barcha ozod hadlar $a_{i,n+1}^{(m)}\ (i = m+1, \ldots, n)$ nolga teng bo’lsa, u holda biz faqat yagona birinchi tenglamaga ega bo’lamiz.

Barcha qadamdagi tenglamalarni birlashtirib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$
\begin{cases}
x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\
\qquad x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)}, \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(m)} .
\end{cases}
$$

Bu sistemadan biz $x_1, x_2, \ldots, x_m$ noma’lumlarni $x_{m+1}, \ldots, x_n$ noma’lumlar va ozod hadlar yordamida ifodalab olishimiz mumkin. Bu holda (7.1) sistema cheksiz ko’p yechimga ega bo’ladi. Agar $m < n$ bo’lib, hyech bo’lmaganda birorta $a_{i,m+1}^{(m)} \neq 0\ (m+1 \leq i \leq n)$ bo’lsa, u holda (7.1) sistema yechimga ega bo’lmaydi.

Qo'lda hisoblayotganda xatoga yo'l qo'ymaslik uchun, hisoblash jarayonini kontrol qilish ma'quldir. Buning uchun biz (7.1) matrisa satrlaridagi elementlar va ozod hadning yiqindisidan tuzilgan kontrol

$$a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \quad (i = \overline{1, n}) \tag{7.8}$$

yig'indidan foydalanamiz.

Agar $a_{i,\, n+2}$ larni (7.1) sistemaning ozod hadlari deb qabul qilsak, u holda almashtirilgan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j = a_{i,\, n+2} \quad (i = \overline{1, n}) \tag{7.9}$$

sistemaning yechimi x_j (7.1) sistemaning yechimi x_j oraliq quyidagicha ifodalanadi:

$$\bar{x}_j = x_j + 1 \quad (j = \overline{1,n}) \tag{7.10}$$

Haqiqatan ham, (7.10) ni (7.9) sistemaga qo'ysak, (7.1) sistema va (7.8) formulaga ko'ra

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} = a_{i,\, n+2} \quad (i = \overline{1,n})$$

aytiyatga ega bo'lamiz.

Agar satr elementlar ustida bajarilgan amallarni har bir satrdagi kontrol yig'indi ustida ham bajarsak va hisoblashlar xatosiz bajarilgan bo'lsa, u holda kontrol yig'indilardan tuzilgan ustunning har bir elementi mos ravishda almashtirilgan satrlar elementlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Bu hol esa to'g'ri yurishni kontrol qilish uchun xizmat qiladi. Teskari yurishda esa, kontrol $\bar{x}_j$ larni topish bilan bajaraladi.

Tenglamalar sistemasi qo'lda yechilganda hisoblashlarni 1-jadvalda ko'rsatilgan Gaussning kompakt sxemasi bo'yicha olib borish ma'quldir. Soddalik uchun jadvalda to'rtta noma'lumli to'rtta tenglamalar sistemasini yechish sxemasi keltirilgan.

Gauss metodi bilan n ta noma'lumli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun bajariladigan arifmetik amallarning miqdori quyidagidan iborat: $\frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 - n)$ ta ko'paytirish va bo'lish, $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n)$ ta qo'shish.

Misol. Gauss metodi bilan quyidagi sistema yechilsin;

$$
\begin{cases}
2x_1 + 4{,}2x_2 + 1{,}6x_3 - 3x_4 = 3{,}2 \\
-0{,}4x_1 + 3x_2 - 2{,}4x_3 = -1{,}6 \\
1{,}6x_1 - 0{,}8x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\
x_1 - 2x_2 - x_3 + 1{,}5x_4 = 0
\end{cases}
\tag{7.11}
$$

Sistemani yechish jarayoni 2-jadvalda keltirilgan.

1-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	**Ozod hadlar**	$\sum$	**Sxema qismlari**
a_{11} a_{21} a_{31} a_{41} $\dots$ 1	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42} $\dots$ $b_{12}^{(1)}$	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43} $\dots$ $b_{13}^{(1)}$	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44} $\dots$ $b_{14}^{(1)}$	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45} $\dots$ $b_{15}^{(1)}$	a_{16} a_{26} a_{36} a_{46} $\dots$ $b_{16}^{(1)}$	A
$\dots$	$a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$ $\dots$ 1	$a_{23}^{(3)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(3)}$ $\dots$ $b_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$ $\dots$ $b_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(1)}$ $a_{35}^{(1)}$ $a_{45}^{(1)}$ $\dots$ $b_{25}^{(2)}$	$a_{26}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}$ $\dots$ $b_{26}^{(2)}$	A_1
$\dots$	$\dots$	$a_{33}^{(2)}$ $a_{43}^{(2)}$ $\dots$ 1	$a_{34}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$ $\dots$ $b_{34}^{(3)}$	$a_{35}^{(2)}$ $a_{45}^{(2)}$ $\dots$ $b_{35}^{(3)}$	$a_{36}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}$ $\dots$ $b_{36}^{(3)}$	A_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{44}^{(3)}$ $\dots$ 1	$a_{45}^{(3)}$ $\dots$ $b_{45}^{(4)}$	$a_{46}^{(3)}$ $\dots$ $b_{46}^{(4)}$	A_3
1	1	1	1	x_4 x_3 x_2 x_1	$\bar{x}_4$ $\bar{x}_3$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1$	B

2-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	**Ozod hadlar**	$\sum$	**Sxema qismlari**

2 $-0,4$ 1,6 1 ... 1	4,2 3 $-0,8$ -2 ... 2,1	1,6 $-2,4$ 1 -1 ... 0,8	-3 0 -1 1,5 ... $-1,5$	3,2 $-1,6$ -1 0 ... 1,6	8 $-1,4$ $-0,2$ $-0,5$ ... 4	A
...	3,84 4,16 4,1 ... 1	$-2,08$ 0,28 1,8 ... $-0,54166$	$-0,60$ $-1,40$ -3 ... $-0,15625$	$-0,96$ 3,56 1,6 ... $-0,25$	0,2 6,6 4,5 ... 0,05208	A_1
...	...	$-2,53331$ $-4,02081$ ... 1	0,75 2,35937 ... $-0,29606$	$-4,6$ $-2,62500$ ... 1,81581	$-6,38331$ $-4,28644$ ... 2,51198	A_2
			1,16897	4,67603	5,84500	A_4
1	1	1	1	4,00013 3,00009 2,00005 1,00002	5,00013 4,00009 3,00005 2,00002	B

Shunday qilib, quyidagi $x_1 = 1,00002;\ x_2 = 2,00005;\ x_3 = 3,00009;\ x_4 = 4,00013$ taqribiy yechimga ega bo'ldik.

Sistemaning aniq yechimi $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 4$ ekanligi bevosita ishonch hosil qilish mumkin.

Bosh elementlar metodi. Gauss metodida yetakchi elementlar doim noldan farqli bo'lavermaydi. Yoki ular nolga yaqin sonlar bo'lishi mumkin: bunday sonlarga bo'lganda katta absolyut xatoga ega bo'lgan sonlar hosil bo'ladi. Buning natijasida taqribiy yechim aniq yechimdan sezilarli darajada chetlashib ketadi.

Hisoblash xatosining bunday halokatli ta'siridan qutulish uchun Gauss metodi bosh elementni tanlash yo'li bilan qo'llaniladi. Buning Gauss metodining kompakt sxemasidan farqi quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, noma'lumlarni yo'qotish jarayonida quyidagi sistemaga ega bo'lgan bo'laylik:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(2)}, \\ \quad\quad a_{m+1,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + a_{m+1,n}^{(m)} x_n = a_{m+1,\,n+1}^{(m)}, \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad a_{n,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + a_{n,\,n}^{(m)} x_n = a_{n,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Endi $|a_{m+1,k}^{(m)}| = \max_j |a_{m+1,j}^{(m)}|$ tenglikni qanoatlantiradigan k nomerni topib, o'zgaruvchilarni qayta belgilaymiz: $x_{m+1} = x_k$ va $x_k = x_{m+1}$ so'ngra $(m+2)$ tenglamadan boshlab, barchasidan x_{m+1} noma'lumni yo'qotamiz. Bunday qayta belgilashlar yo'qotish tartibini o'zgartirishga olib keladi va ko'p hollarda hisoblash xatosini kamaytirishga xizmat qiladi.

Optimal yo'qotish metodi. Bu metodning dastlabki qadamlari Gauss metodiga o'xshashdir. Yetakchi element $a_{11} \neq 0$ deb faraz qilib, (7.1) sistemaning birinchi tenglamasini

$$x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \tag{7.2}$$

ko'rinishga keltiramiz. So'ngra (7.1) sistemaning faqat ikkinchi tenglamasidan x_1 ni yo'qotamiz:

$$a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2,n+1}^{(1)}.$$

Endi $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilib, bu tenglamani (7.4) ko'rinishga keltiramiz:

$$x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)}.$$

Bu tenglama yordamida (7.2) tenglamadan x_2 ni yo'qotamiz. Natijada

$$x_1 + c_{13}^{(2)} x_3 + \ldots + c_{1n}^{(2)} x_n = c_{1,n+1}^{(2)}$$
$$x_2 + c_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + c_{2n}^{(2)} x_n = c_{2,n+1}^{(2)}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$c_{1j}^{(2)} = b_{1j}^{(1)} - b_{12}^{(1)} b_{2j}^{(2)}, \quad c_{2j}^{(2)} = b_{2j}^{(2)} \quad (j \geq 3).$$

Faraz qilaylik, avvalgi k ta tenglamalar ustida almashtirishlar bajarish natijasida (7.1) sistema quyidagi teng kuchli sistemaga keltirilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \ldots + c_{1n}^{(k)} x_n = c_{1,n+1}^{(k)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + c_{k,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \ldots + c_{k,k+1}^{(k)} \\ a_{k+1,1} x_1 + \ldots + a_{k+1,\,k+1} x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,\,n} x_n = a_{k+1,n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} x_1 + \ldots + a_{n,\,k+1} x_{k+1} + \ldots + a_{nn} x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{7.12}$$

Bu sistemaning avvalgi k ta tenglemasini mos ravishda $a_{k+1,k}, a_{k+1,2}, ..., a_{k+1,k}$ larga ko'paytirib, natijalarni $(k+1)$ tenglamadan ayiramiz va hosil bo'lgan tenglamani x_{k+1} noma'lum oldingi koeffisiyentga bo'lamiz. Natijada $(k+1)$ - tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$x_{k+1} + c_{k+1,k+2}^{(k)} + \ldots + c_{k+1,n}^{(k)} x_n = c_{k+1,n+1}^{(k)}.$$

Endi bu tenglama yordamida (7.12) sistemaning avvalgi k ta tenglamasidan x_{k+1} ni yo'qotsak, u holda yana (7.12) ko'rinishdagi sistemaga, faqat k ning $(k+1)$ ga almashgan holiga, ega bo'lamiz.

Shu bilan birga, agar

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} c_{r,k+1}^{(k)} a_{k+1,r} \neq 0$$

bo'lsa, quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$c_{k+1,p}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1,p} - \sum_{r=1}^{k} a_{k+1,r} c_{r,p}^{(k)}}{a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} a_{k+1,r} c_{r,k+1}^{(k)}},$$

$$c_{ip}^{(k+1)} = c_{ip}^{(k)} - c_{i,k+1}^{(k)} c_{k+1,p}^{(k+1)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k; \ p = k+2, \ k+3, \ldots, n+1).$$

Almaщtirshdarning n-qadami ham bajarilgandan so'ng (7.1) sistemaning yechimi uchun quyidagi formulalar hosil bo'ladi:

$$x_i = c_{i,n+1}^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Bu yerda ham hisoblash jarayonini kontrol qilash Gauss metodidagiga o'xshashdir. Optimal yo'qotish metodida ham barcha yetakchi elementlar noldan farqli bo'lshi zarurdir. Agar bu fakt oldindan ma'lum bo'lmasa, u holda hisoblash sistemasini o'zgartirib, bosh elementlarni satr bo'yicha tanlash yo'li bilan noma'lumlarni yo'qotish maqsadga muvofiqdir. Buning uchun, agar $(k+1)$-tenglamada $x_1, x_2, ..., x_k$ noma'lumlarni yo'qotgandan keyin,

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{s=1}^{k} a_{k+1,s} c_{sp}^{(k+1)} \qquad (p > k+1)$$

moduli bo'yicha eng katta element bo'lsa, u holda o'zgaruvchilarni qaytadan belgilab: $x_{k+1} = x_p$ va $x_p = x_{k+1}$, so'ngra optimal yo'qotish qoidasiga ko'ra noma'lumlarni yo'qotishni davom ettirish kerak.

Optimal yo'qotish metodining ustunligi shundan iboratki n-tartibli sistemani yechish uchun zarur bo'lgan arifmetik amalalrning soni Gauss metodidagidek bo'lsa ham, bu metod EHM lar xotirasidan effektiv ravishda foydalanishga imkon beradi, ya'ni sistemaning tartibini ikki marta orttirish mumkin.

(7.12) sistemadan ko'rinib turibdiki, optimal yo'qotishning k-qadami bajarilgach, berilgan sistemaning oxirgi $(n-k)$ ta tenglamasi o'zgarishsiz qoladi. Buni hisobga olgan holda xotiraga matrisaning barcha elementlarini to'la kiritmasdan, har bir qadamdan oldin bittadan satrni kiritamiz. U holda $(k+1)$-qadamni amalga oshirish uchun xotiraning

$$f(k)=k(n-k+1)+n+1$$

ta yacheykasi yetarli bo'ladi, bular

$$\begin{bmatrix} c_{1,k+1}^{(k)} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; c_{1,n+1}^{(k)} \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ c_{k,k+1}^{(k)} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; c_{k,n+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

matrisani va (12) sistemadagi $(k+1)$-tenglama koeffisiyentlarni joylashtirish uchun xizmat qiladi. Endi $f(k)$ ning maksimumini topib, n-tartibli sistemani yechish uchun $\frac{(n+1)(n+5)}{4}$ ta yacheykaga ega bo'lgan maydon yetarli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Masalan, operativ xotirasi 4095 yacheykadan iborat bo'lgan EHM da tashqi qurilmalardan foydalanmasdan 122-tartibli tenglamalar sistemasini yechish yoki shu tartibli ixtiyoriy matrisaning determinantini hisoblash mumkin.

Misol tariqasida

$$\begin{cases} 2x_1+4{,}2x_2+1{,}6x_3-3x_4=3{,}2 \\ -0{,}4x_1+3x_2-2{,}4x_3=-1{,}6 \\ 1{,}6x_1-0{,}8x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2-x_3+1{,}5x_4=0 \end{cases}$$

sistemani optimal yo'qotish motedi bilan yechaylik. Birini tenlamadan

$$x_1+2{,}1x_2+0{,}8x_3-1{,}5x_4=1{,}6 \tag{7.13}$$

ni hosil qilamiz va buni $-0{,}4$ ga ko'paytirib, sistemaning ikkinchi tenglamasidan ayiramiz:

$$3{,}84x_2-2{,}08x_3-0{,}60x_4=-0{,}96\,.$$

Buni $3{,}84$ ga bo'lib, kerakli tenglamani hosil qilamiz:

$$x_2-0{,}54167x_3-0{,}15625x_4=-0{,}2500\,. \tag{7.14}$$

Endi (7.13) dan x_2 ni yo'qotsak,

$$x_1+1{,}93750x_2-1{,}17182x_4=2{,}12501\,. \tag{7.15}$$

(7.15) ni 1,6 ga (7.14) ni -0,8 ga ko'paytirib, sistemaning uchinchi tenglamasidan ayiramiz va hosil bo'lgan tenglamani x_3 oldidagi koeffisiyentga bo'lsak,

$$x_3-0{,}29611x_4=1{,}81556 \tag{7.16}$$

kelib chiqadi.

Bu tenglama yordamida (7.14) va (7.15) dan x_3 ni yo'qotsak,

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}59811x_4 = -1{,}39322 \\ x_2 - 0{,}31664x_4 = 0{,}73343 \end{cases} \tag{7.17}$$

hosil bo'ladi.

Endi (7.16)-(7.17) tenlamaoar yordamida sistemaning to'rtinchi tenglamasidan x_1, x_2, x_3 ni yo'qotamiz: $1{,}11872x_4 = 1{,}67564$. Bundan va (7.13)-(7.17) dan noma'lumlarni ketma-ket topamiz:

$$x_4 = 4{,}00065; \quad x_3 = 3{,}00019; \quad x_2 = 1{,}99999; \quad x_1 = 0{,}99922.$$

Determinantni hisoblash. Gauss metodini ham, optimal yo'qotish metodini ham determinantni hisoblash uchun qo'llash mumkin. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisaning determinantini topish talab qilinsin. Buning uchun, bir jinsli, chiziqli

$$A\bar{x} = \bar{0} \tag{7.18}$$

sistemani yechishga Gauss metodini qo'llaymiz. Natijada A matrisa

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12}^{(1)} & b_{13}^{(1)} & \dots & b_{1n}^{(1)} \\ 1 & 0 & b_{23}^{(2)} & \dots & b_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

uchbuchak matrisaga almashtiriladi, (18) sistema esa unga ekvivalent bo'lgan

$$B\bar{x} = \bar{0}$$

sistemaga o'tadi.

Agar diqqat qilinsa, B matrisaning elementlari A matrisa va keyingi yordamchi $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ matrisalardan quyidagi ikkita elementar alamashtirishlar natijasida hosil bo'lgan:

3) noldan farqli deb faraz qilingan $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ yetakchi elementlarga bo'lish;
4) A matrisa yordamchi $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ larning satrlaridan mos ravishdagi yetakchi satrlarga proporsional bo'lgan satrlarni ayirish.

Birinchi almashtirish natijasida matrisaning determinanti ham mos ravishdagi yetakchi elementga bo'linadi, ikkinchi almaщtirish esa determinantni o'zgarishsiz qoldiradi. Shuning uchun ham

$$1 = \det B = \frac{\det A}{a_{11}a_{22}^{(1)}\,\ldots\,a_{nn}^{(n-1)}},$$

bu yerda esa

$$\det A = a_{11}a_{22}^{(1)}\,\ldots\,a_{nn}^{(n-1)}. \qquad (7.19)$$

Demak, determinant Gauss kompakt sxemasidagi yetakchi elementlarning ko'paytmasiga teng ekan.

Matrisa determinantini optimal yo'qotish metodi yordamida ham hisoblash mumkin. Bu yerda ham determinant barcha yetakchi

$$\alpha_k = a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} a_{k+1,r}c_{r,\,k+1}^{(k)}$$

elementlarning ko'paytmasiga teng:

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k. \qquad (7.20)$$

Agar yetakchi elemantlarning birortasi nolga teng bo'lsa u holda satr bo'yicha bosh elementni tanlash sxemasidan foydalanish kerak. Lekin bu holda determinantning ishorasini saqlash uchun α_k elementlarni $(-1)^{l_k+1}$ ga ko'paytirish kerak bo'ladi. Bu yerda l_k soni, agar avvalgi k qadamda yo'qotilmagan barcha noma'lumlar chapdan o'ngga qarab ketma-ket $1, 2, ..., n-k$ lar bilan nomerlangan bo'lsa, $k+1$-qadamda yo'qotilgan noma'lumlarning nomerini bildiradi. Lekin hisoblash odatdagicha (19) yoki (20) formulalar bilan bajarilganda $\det A$ aytarli kichik (katta) bo'lmasa-da biror $i<n$ uchun avvalgi i ta ko'paytuvchilarning ko'paytmasi mashina noliga teng bo'lishi yoki to'lib ortib ketishi mumkin.

Bunday nuqsondan qutilish uchun (19) formula bo'yicha $\det A$ ni quyidagicha hisoblash kerak:

$$\det A\left(q\prod_{j}(-1)^{l_j+1}\alpha_j\right)\left(r\prod_{k}(-1)^{l_k+1}\;\alpha_k\right).$$

Bu yerda q EHM dagi mumkin bo'lgan eng katta songa yaqin bo'lib, r eng kichik songa yaqin vash u bilan birga $q \cdot r = 1$; α_j yetakchi elementlar orasidagi moduli bo'yicha birdan kichik bo'lganlari, α_k esa qolgan yetakchi elementlar.

Matrisalarning teskarisini topish. Agar bir xil matrisaga ega bo'lib, faqat ozod hadlari bilan farq qiladigan bir qancha sistemani yechishga to'g'ri kelsa, u holda matrisaning teskarisini topish maqsadga muvofiqdir.ikkinchi tomondan statistik hisoblashlarda ayrim statistik parametrlarni baholash uchun teskari matrisalar katta ahamiyatga ega.

Faraz qilaylik, bizga maxsusmas matrisa $A=[a_{ij}]\ (i,j=\overline{1,n})$ berilgan bo'lsin. Unga teskari bo'lgan $A^{-1}=[x_{ij}]$ matrisani topish uchun asosiy $AA^{-1}=E$ munosabatdan foydalanamiz, bu yerda E birlik matrisa, A va A^{-1} matrisalarni o'zaro ko'paytirsak, n^2 ta x_{ij} noma'lumlarga nisbatan asosiy matrisasi bir xil va faqat ozod hadlari bilangina farq qiladigan n ta tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 1 \quad 0\ldots0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \quad 1\ldots0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \quad 0\ldots1. \end{cases}$$

Bunday sistemani Gauss metodi bilan birdaniga yechish mumkin. Misol uchun (11) sistema

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4{,}2 & 1{,}6 & -3 \\ 0{,}4 & 3 & -2 & 0 \\ 1{,}6 & -0{,}8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

matrisasining teskarisini topaylik.

Yechish. Gauss kompakt sxemasini qo'llaymiz. Bu holda to'rtta ozodhadlar ustuniga ega bo'lamiz (11-jadval). Shuni ham eslatib o'tamizki, teskari matrisaning satr elementlari teskari tartibda hosil bo'ladi.

3-jadval natijasidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}28239 & -0{,}06801 & -0{,}06915 & 0{,}51865 \\ 0{,}38037 & -0{,}19364 & -1{,}70539 & 0{,}29046 \\ 0{,}51408 & -0{,}77686 & -1{,}04425 & 0{,}33195 \\ 0{,}66162 & -0{,}73076 & -1{,}59058 & 0{,}92945 \end{bmatrix}$$

3-jadval

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$\sum$
2	4,2	1,6	−3	1	0	0	0	5,8
−0,4	3	−2	0	0	1	0	0	1,6
1,6	−0,8	1	−1	0	0	1	0	1,8
1	−2	−1	1,5	0	0	0	1	2,5
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	
1	−2,1	−0,8	−1,5	0,5	0	0	0	2,9
	3,84	−1,68	−0,6	0,2	1	0	0	2,76
	−4,16	−0,28	1,4	−0,8	0	1	0	−2,84
	−4,1	−1,8	3	−0,5	0	0	1	−2,4
	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	1	−0,43750	−0,15625	0,05208	0,26042	0	0	0,71875

		$-2,10000$	0,75000	$-0,58335$	1,08334	1	0	0,14999
		$-3,59375$	2,35937	$-0,28647$	1,06772	0	1	$-3,52085$
		. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
		1	$-0,35714$	0,27779	$-0,51588$	$-0,47617$	0	$-0,47617$
			1,07590	0,71184	$-0,78622$	$-1,71131$	1	0,29022
				0,66162	$-0,73076$	$-1,59058$	0,92945	$-0,73027$
				0,51408	$-0,77686$	$-1,04425$	0,33195	$-0,97508$
				0,38037	$-0,19364$	$-0,70539$	0,29046	$-0,22820$
				0,28239	$-0,06801$	$-0,06915$	0,51865	0,66388

Chiziqli tenglamalar sistemasini iteratsiya usulida yeching.

1. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 11 \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0,2x_1 + 0,5x_2 - 2x_3 = 3 \\ 14x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 4 \\ 7x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 1,1x_3 = 22 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ -15x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4 \\ 4x_1 + 0,8x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 2 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x_1 + 3,5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 2 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 0{,}2x_1\text{-}2x_2+5x_3=1 \\ 6x_1\text{-}2x_2+3x_3=4 \\ 3x_1\text{-}7x_2+x_3=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 0{,}3x_1-8x_2+2x_3=4 \\ 0{,}2x_1+0{,}5x_2-2x_3=3 \\ 14x_1-2x_2+x_3=-6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1+0{,}3x_2-6x_3=4 \\ 7x_1-0{,}3x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+6x_2-0{,}3x_3=1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1-2x_2+3{,}5x_3=5 \\ 4x_1-2x_2+1{,}1x_3=2 \\ 2{,}5x_1+7x_2+2x_3=2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -x_1+4x_2+x_3=3 \\ 2x_1-2x_2+5x_3=3 \\ -15x_1+2x_2+4x_3=4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1-x_2+6x_3=1 \\ 2x_1+7x_2+2{,}5x_3=3{,}4 \\ 4{,}5x_1+0{,}8x_2+2x_3=2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1-x_2+7x_3=0 \\ x_1+6x_2-3x_3=2 \\ 7{,}5x_1-x_2+2x_3=3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+7x_2-3x_3=2 \\ 4x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2-6x_3=1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1+x_2-3x_3=2 \\ 2x_1+x_2-12x_3=2 \\ x_1-4x_2+x_3=-1 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x_1+6x_2-x_3=3 \\ 2x_1-x_2+5x_3=-2 \\ 7x_1+x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1\text{-}2x_2+5x_3=1 \\ 7x_1\text{-}2x_2+3x_3=4 \\ 3x_1\text{-}8x_2+2x_3=5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1-8x_2+2x_3=1{,}5 \\ 2x_1+5x_2-9x_3=3 \\ 14x_1-3x_2+2x_3=-2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+3x_2-6x_3=2 \\ 8x_1-3x_2+3x_3=1 \\ 2x_1-6x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=7 \\ 6x_1-x_2+1{,}1x_3=2 \\ 2x_1+7x_2+2x_3=1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} -x_1+4x_2+x_3=4 \\ x_1-3x_2+5x_3=2 \\ -15x_1+2x_2+8x_3=3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 0{,}5x_1-x_2+3x_3=1{,}5 \\ x_1+7x_2+5x_3=4{,}5 \\ 4x_1+0{,}8x_2+2x_3=2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -3 \\ x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 2 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

30 $\begin{cases} x_1 + 3{,}5x_2 - x_3 = 0{,}3 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = -1 \end{cases}$

7-amaliy mashg'ulot

Chiziqli tenglamalar sistemasini iteratsiya usulida yechish

Amaliyot rejasi

1. Iteratsiya usulining asosiy g'oyasi
2. Iteratsiya usulining yaqinlashishi

Tayanch iboralar: Yaqinlashish, maxsusmas matritsa, teskari matritsa, norma;

Faraz qilamiz chizikli bo'lmagan tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1,...,x_n) \\ x_2 &= \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n) \\ &.............................. \\ x_n &= \varphi_n(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Bu yerda $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksiyalar xakikiy va yakkalangan (chegara) $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ yechimning ω atrofida aniqlangan va uzluksiz.

Quyidagi vektorlarni kiritib

$$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ ва } \bar{\varphi}(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}), \varphi_2(\bar{x}), ..., \bar{\varphi}_n(\bar{x}))$$

1- chi sistemani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x}) \qquad (2)$$

(2) – chi vektorli tenglamani ildiz vektorini $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ topish uchun iteratsiya metodini qo'llash maqsadga muvofiq bo'ladi.

$$\bar{x}^{(P+1)} = \bar{\varphi}(\bar{x}^{(P)}) \qquad (P = 0, 1,2...,n) \qquad (3)$$

boshlangich yakinlashish sifatida $\bar{x}^{(0)} \approx \bar{x}^*$ olish mumkin. Quyida bu jarayonni yaqinlashishi ko'rsatiladi.

Ta'kidlash kerakki (3) iteratsiya jarayoni yaqinlashsa u vaqtda yozish mumkin.

$$\bar{\xi} = \lim_{P\to\infty} \bar{x}^{(P)} \qquad (4)$$

va bu kiymat albatta (2) – chi tenglamani ildizi bo'ladi.

Haqiqattan ham (4)-chi bajariladi deb (3) dan $p \to \infty$ da limitga o'tib va bundan tashqari $\bar{\varphi}(\bar{x})$ - ning uzluksizligidan foydalanib quyidagini hosil qilamiz

$$\lim_{P\to\infty} \bar{x}^{(P+1)} = \bar{\varphi}(\lim_{P\to\infty} \bar{x}^{(P)}) \text{ bundan}$$

$$\bar{\xi} = \bar{\varphi}(\bar{\xi})$$

Shunday qilib $\bar{\xi}$ (2)- chi vektorli tenglamani ildizi bo'ladi.

Bundan tashqari hamma $\bar{x}^{(P)} (P = 0,1,2,...)$ yaqinlashishlar ω sohasida tegishli bo'lib $\bar{x}$ ω sohasida yagona ildizi bo'lsa, $\bar{\xi} = \bar{x}^*$ teng ekanligi anik bulib koladi.

Iteratsiya usulini umumiy chizikli bulmagan tenglamalar sistemasiga

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{0} \qquad (5)$$

Qo'llash mumkin. $\bar{f}(\bar{x})$- vektor funksiya chegaralangan $\bar{x}$ atrofning ω- soha atrofida aniqlangan uzluksiz funksiya bo'lib hisoblanadi. Misol tariqasida (5) sistemani

$$\bar{x} = \bar{x} + \Lambda \bar{f}(\bar{x}) \qquad (5^1)$$

kurinishida yozib olamiz. Bu yerda Λ (nabla) maxsusmas matritsadan iborat.

$$\bar{x} + \Lambda \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{x}) \qquad (6)$$

Belgilash kiritib

(7) $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ ni hosil qilamiz.

(7)- chiga oddiy iteratsiya metodini kullash mumkin, ya'ni agar ω sohada $\bar{f}(\bar{x})$ funksiya $\bar{f}^1(\bar{x})$ uzluksiz xosilaga ega bulsa (6) – chi formuladan

$$\varphi^1(x) = E + \Lambda \bar{f}^1(\bar{x})$$

kelib chikadi.

Iteratsiya jarayoni yakinlashadi agar $\bar{\varphi}^1(\bar{x})$ funksiya normasi buyicha juda kichik mikdor bulsa.

Bu xolatni xisobga olib Λ maxsusmas matrnitsani shunday tanlab olamiz.

$$\bar{\varphi}^1(\bar{x}^{(0)}) = E + \Lambda \bar{f}^1(x^{(0)}) = \bar{0}:$$

Bu yerdan agar $\bar{f}^1(\bar{x}^{(0)})$ – matrisa maxsusmas bo'lsa.

$$\Lambda = -\left[\bar{f}^1(\bar{x}^{(0)})\right]^{-1} \qquad (8)$$

(8) – ni (5^1) ga kuyib xosil kilamizki

$$(9) \quad \bar{x}^{(P+1)} = \bar{x}^{(P)} - \left[\bar{f}^1(\bar{x}^{(P)})\right]^{-1} \bar{f}(\bar{x}^{(P)})$$

bu modifikatsiyalangan Nyuton metodini (5) sistemaga kullashdan xosil bulgan formuladan iborat.

Agar $\det \bar{f}^1(\bar{x}^{(0)}) = \bar{0}$ булса $\bar{x}^{(0)}$ dastlabki yakinlashishni boshkacha tanlashga tugri keladi.

Misol: Kuyidagi sistemani iteratsiya usuli bilan yeching

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_1^3 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Grafikdan kurinadiki (9) sistema 2 ta ishorasi bilan fark kiladigan yechimga ega buladi.

Biz fakat musbat yechimni topish bilan chegaralanamiz, shuning uchun rasmdan musbat yechimni dastlabki kiymati sifatida $\overline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} -$ ni olish mumkin.

yakobian

$$\overline{f}(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{pmatrix} \text{ deb}$$

Bu yerdan

$$\overline{f}^1(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{f}^1(\overline{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 1 \\ 2{,}43 & -1 \end{pmatrix}$$

va

$$\det \overline{f}^1(\overline{x}^{(0)}) = \begin{vmatrix} 1{,}8 & 1 \\ 2{,}43 & -1 \end{vmatrix} = 1{,}8 - 2{,}43 = -4{,}23 \neq 0$$

$\overline{f}^1(\overline{x}^{(0)}) -$ maxsusmas maritsa bulganligi uchun teskari matritsa mavjud buladi.

$$\left[\overline{f}^1(\overline{x}^{(0)})\right]^{-1} = -\frac{1}{4{,}23}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2{,}43 & 1{,}8 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib

$$\Lambda = -\left[\overline{f}^1(\overline{x}^{(0)})\right]^{-1} = \frac{1}{4{,}23}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2{,}43 & 1{,}8 \end{pmatrix}$$

Barcha topilgan kiymatlarni joyiga kuysak yakinlashish jarayonining 1-chi yakinlashishini xosil kilamiz. 1, 2, 3 yakinlashishlar xudi yukoridagidek topiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini iteratsiya usulida yeching.

1. $\begin{cases} 2x_1\text{-}2x_2 + 5x_3 = 11 \\ 7x_1\text{-}2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1\text{-}8x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 - 2x_3 = 3 \\ 14x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 4 \\ 7x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 1{,}1x_3 = 22 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x_1+4x_2+x_3=2 \\ x_1-3x_2+5x_3=1 \\ -15x_1+2x_2+8x_3=7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+7x_2+5x_3=4 \\ 4x_1+0{,}8x_2+2x_3=2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-4x_2+7x_3=0 \\ 2x_1+12x_2-3x_3=2 \\ 7x_1-x_2+2x_3=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+7x_2-3x_3=1 \\ 4x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-6x_3=1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2-12x_3=2 \\ x_1-4x_2+x_3=-3 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x_1+3{,}5x_2-x_3=3 \\ 2x_1-6x_2+3x_3=2 \\ 7x_1+x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 0{,}2x_1\text{-}2x_2+5x_3=1 \\ 6x_1\text{-}2x_2+3x_3=4 \\ 3x_1\text{-}7x_2+x_3=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 0{,}3x_1-8x_2+2x_3=4 \\ 0{,}2x_1+0{,}5x_2-2x_3=3 \\ 14x_1-2x_2+x_3=-6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1+0{,}3x_2-6x_3=4 \\ 7x_1-0{,}3x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+6x_2-0{,}3x_3=1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1-2x_2+3{,}5x_3=5 \\ 4x_1-2x_2+1{,}1x_3=2 \\ 2{,}5x_1+7x_2+2x_3=2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -x_1+4x_2+x_3=3 \\ 2x_1-2x_2+5x_3=3 \\ -15x_1+2x_2+4x_3=4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1-x_2+6x_3=1 \\ 2x_1+7x_2+2{,}5x_3=3{,}4 \\ 4{,}5x_1+0{,}8x_2+2x_3=2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1-x_2+7x_3=0 \\ x_1+6x_2-3x_3=2 \\ 7{,}5x_1-x_2+2x_3=3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+7x_2-3x_3=2 \\ 4x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2-6x_3=1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1+x_2-3x_3=2 \\ 2x_1+x_2-12x_3=2 \\ x_1-4x_2+x_3=-1 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x_1+6x_2-x_3=3 \\ 2x_1-x_2+5x_3=-2 \\ 7x_1+x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1\text{-}2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 7x_1\text{-}2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1\text{-}8x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 1{,}5 \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 3 \\ 14x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \\ 6x_1 - x_2 + 1{,}1x_3 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ -15x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 0{,}5x_1 - x_2 + 3x_3 = 1{,}5 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4{,}5 \\ 4x_1 + 0{,}8x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -3 \\ x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 2 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

30 $\begin{cases} x_1 + 3{,}5x_2 - x_3 = 0{,}3 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = -1 \end{cases}$

8-amaliy mashg'ulot.

Funksiyalarni interpolyatsiyalash. Lanranj interpolyatsion formulasi

Reja:

1. Funksiyalarni interpolyatsiyalash masalasining qo'yilishi

2. Lagranj interpolyatsion formulasi.

3. Namunaviy misollar

4. Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Funksiyalarni interpolyatsiyalash masalasining qo'yilishi

Aksariyat hisoblash metodlari, masalaning qo'yilishida qatnashadigan, funksiyalarni unga biror muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funksiyalar bilan almashtirish g' oyasiga asoslangan.

Ushbu §-da funksiyalarni yaqinlashtirish masalasining eng sodda va juda keng qo'llaniladigan qismi-funksiyalarni interpolyatsiyalash masalasi qaraladi. Interpolyatsiya masalasining mohiyati quyidagidan iborat. Faraz qilaylik $[a,\ b]$ segmentda funksiya berilgan yoki hech bo'lmaganda uning $f(x_0),\ f(x_1)\,j...,\ f(x_n)$ qiymatlari ma'lum bo'lsin. Shu oraliqda aniqlangan va hisoblash uchun qulay bo'lgan qandaydir funksiyalar $\{P(x)\}$ sinfini, masalan, darajali ko'phadlar sinfini, olamiz.

Berilgan $y = f(x)$ funksiyani $[a,\ b]$ segmentda interpolyatsiyalash masalasi deb $f(x)$ funksiyani berilgan sinfning shunday $P(x)$ funksiyasi bilan taqribiy ravishda $f(x) \approx P(x)$ almashtirishidan iboratki $P(x)$-berilgan $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin.

$$P(x_i) = f(x_i). \qquad (i = \overline{0,n})$$

Bu yerda ko'rsatilgan $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ nuqtalar interpolyatsiya tugunlari yoki tugunlar deyiladi, $P(x)$ esa interpolyatsiyalovchi funksiya deyiladi. Agar $\{P(x)\}$ sinfi sifatida darajali ko'phadlar olinsa, u holda interpolyatsiyalash algebraik yoki parabolik deyiladi.

Algebraik interpolyatsiyalash apparati hisoblash matematikasining ko'p sohalarida qo'llaniladi, chunonchi: differensiallash va integrallashda, differensial va integral tenglamalarni yechishda, funksiya ekstrimumini topishda hamda funksiya jadvalini tuzishda, Teylor yoyilmasi klassik analizda qay darajada ahamiyatga ega bo'lsa algebraik interpolyatsiyalash ham hisoblash matematikasida shunday ahamiyatga egadir.

Ayrim hollarda interpolyatsiyalashning boshqa ko'rinishlarini qo'llash maqsadga muvofiqdir. Masalan, $f(x)$- davriy funksiya bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida trigonometrik funksiyalar sinfi olinadi; agar interpolyatsiyalaydigan funksiya berilgan nuqtalarda cheksizga aylanadigan bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida ratsional funksiyalar sinfini olish ma'quldir.

Lagranj interpolyasion formulasi

Biz asosan algebraik interpolyatsiyalash bilan shug'ullanamiz. Masalaning qo'yilishi quyidagilardir. Darajasi n- dan yuqori bo'lmagan shunday ko'phad quriladiki u berilgan $(n+1)$ ta $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$ nuqtalarda

$$f(x_0),\ \ f(x_1), ...,\ f(x_n)$$

qiymatlarni qabul qilsin. Bu masalani geometrik ta'riflash ham mumkin. Darajasi n - dan ortmaydigan shunday $P(x)$ ko'phad quriladiki uning grafigi berilgan $(n+1)$ ta Mк $M_k\ (x_k,\ f(x_k),\ k=\overline{(0,n)}$ nuqtalardan o'tsin.

Demak C_m koeffitsientlarni shunday aniqlash kerakki

$$P(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n \qquad (1)$$

ko'phad uchun ushbu

$$P(x_k) = f(x_k) \qquad (2) \qquad (k=0,1,...,\ n)$$

tengliklar bajarilsin. Bu tengliklarni ochib yozsak, C_m-larga nisbati $(n+1)$ nomalumli $(n+1)$ ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$
\left.\begin{array}{l}
C_0 + C_1 x_0 + C_2 x_0^2 + \ldots + C_n x_0^n = f(x_0) \\
C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_1^2 + \ldots C_n x_1^n = f(x_1) \\
------------------ \\
C_0 + C_1 x_n + C_2 x_n^2 + \ldots + C_n x_n^n = f(x_n)
\end{array}\right\} \qquad (3)
$$

Bu sistemaning determinanti Vandermond determinantidir va u $N(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$. Bilan birgalikda. Masala mazmunidan ko’rinadiki nuqtalar bir-biridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (3) sistema va shu bilan birga qo’yilgan interpolyatsiya masalasi yagona yechimga ega. Bu sistemani yechib C_n -larni topib (1)-ga qo’ysak $P(x)$ ko’phad aniqlanadi. Biz $P(x)$- ning oshkor ko’rinishini topish uchun boshqacha yo’l topamiz, avvalo fundamental ko’phadlar deb ataluvchi $Q_{n,j}(x_i)$ -larni, ya’ni

$$
Q_{n,j}(x_i) = \delta_i^h = \left\{\begin{array}{l} 0,\ i \neq j \\ 1,\ i = j \end{array}\right\} \text{ Kroneker savoli}
$$

Shartlarni qanoatlantiradigan n- chi darajali ko’phadlarni quramiz, u holda

$$
L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{n,j}(x) \qquad (4)
$$

izlanayotgan ko’phad bo’ladi, haqiqatdan ham

$$
L_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{n,j}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \delta_i^j = f(x_i)
$$

$$
i = j \ da
$$

va ikkinchi tomondan $L_n(x)$ n - darajali ko’phaddir.

Endi $Q_{n,j}(x)$ - ning oshkor ko’rinishini topamiz, $i \neq j$ bo’lganda $Q_{n,j}(x_i) = 0$

Shuning uchun ham $Q_{n,j}(x)$ ko'phad $i \neq j$ bo’lgandaa $x - x_i$ - ga bo’linadi. Shunday qilib n-darajali ko’phadning n- ta bo’linuvchilari bizga ma'lum,

Bu yerda

$$
Q_{n,j}(x) = C \prod_{i \neq j} (x - x_i) \text{ kelib chiqadi.}
$$

Noma'lum ko’paytiruvchi S-ni esa shartdan topamiz.

$$Q_{n,j}(x_j) = C \prod_{i \neq j}(x_j - x_i) = 1$$

$$C = \frac{1}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$$

Demak,

$$Q_{n,j}(x_j) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

bu ifodani (4)-ga qo'yib, kerakli ko'phadni aniqlaymiz:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_1}{x_j - x_i} \qquad (5)$$

Bu ko'phad Lagranj interpolyasion formulasi deyiladi

Bu formulaning xususiy hollarini quraylik $n = 1$ bo'lganda Lagranj ko'phadi ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq formulasini beradi.

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} f(x_1)$$

Agar $n = 2$ bo'lsa. u vaqtda kvadratik interpolyatsion ko'phadga ega bo'lamiz, bu ko'phad uchta nuqtadan o'tuvchi va vertikal o'qqa ega bo'lgan parabolani aniqlaydi.

Misol. 0, 1, 2,- nuqtalarda mos ravishda 1, 2, 5 qiymatlarni qabul qiluvchi kvadratik ko'phad quring

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ L_i = 2; \quad f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 2, \quad f(x_2) = 5$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2),}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2),} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1),}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),} f(x_2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} 5 = x^2 + 1$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Lagranj interpolyatsion ko‘phadini ishlatib argumentning berilgan qiymatida funksiya qiymatini taqriban toping.

x	y
0,43	1,63597
0,48	1,73234
0,55	1,87686
0,62	2,03345
0,70	2,22846
0,75	2,35973

Variant №	x
1	0,702
6	0,512
11	0,645
16	0,736
21	0,608

x	y
0,02	1,02316
0,08	1,09590
0,12	1,14725
0,17	1,21483
0,23	1,30120
0,30	1,40976

Variant №	x
2	0,102
7	0,114
12	0,125
17	0,203
22	0,154

x	y
0,35	2,73951
0,41	2,30080
0,47	1,96864
0,51	1,78776
0,56	1,59502
0,64	1,34310

Variant №	x
3	0,526
8	0,453
13	0,482
18	0,552
23	0,436

x	y
0,41	2,57418
0,46	2,32513
0,52	2,09336
0,60	1,86203
0,65	1,74926
0,72	1,62098

Variant №	x
4	0,616
9	0,478
14	0,665
19	0,537
24	0,673

x	y
0,68	0,80866
0,73	0,89492
0,80	1,02964
0,88	1,20966
0,93	1,34087
0,99	1,52368

Variant №	x
5	0,896
10	0,812
15	0,774
20	0,955
25	0,715

9-amaliy mashg'ulot

Nyutonning 1-2 interpolyatsion formulalari (Teng uzoqlikda va teng uzoqlikda bo'lmagan tugunlar uchun). Markaziy ayirmali interpolyatsion formula va ularning yaqinlashishi. Gaussning 1-2 interpolyatsion formulalari.

Amaliyot rejasi

1. Nyutonning 1-2 interpolyatsion formulalari
2. Teng qadamli interpolyatsion formulalarni qo'llash uchun tavsiyalar
3. Markaziy ayirmali interpolyatsion formulalari
4. Gauss interpolyatsion formulalari

Faraz kilamiz teng uzoklikda joylashgan tugunlarda $y = f(x)$ funksiyaning $y_i = f(x_i)$ kiymatlari berilgan bulsin. $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ h - interpolyasiyalash kadami.
Shunday darajasi n-dan yuqori bo'lmagan $P_n(x)$ kupxadni tanlash talab kilinadiki y kupxad x_i nuktalarda

(2) $P_n(x_i) = y_i$ qiymatni

yoki $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0$ $(m = 0, 1, 2, ..., n)$

kiymtlarni kabul kilsin.

Nyuton kupaytmasiga asosan kupxadni kuyidagi kurinishda axtaramiz

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \quad (2)$$

Umumlashgan daraja orkali (2) ifodani kuyidagicha yozishimiz mumkin.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_0)^{[3]} + ... + a_n(x - x_0)^{[n]} \qquad (2)$$

Bizning vazifamiz $P_n(x)$ ko'phadning a_i koeffitsientlarini topishdan iborat.
(2) -da $x = x_0$ deb

$P_n(x_0) = a_0 = y_0$ ni hosil qilamiz.

a_1 koeffitsientni topish uchun 1-chi tartibli chekli ayirmani tuzamiz

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]} h + 3a_3(x - x_0)^{[2]} h + ... + na_n(x - x_0)^{[n-1]} h$$

$x = x_0$ da $\Delta P_n(x_0) = a_1 h = \Delta y_0$ ni hosil qilamiz, bu yerdan

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!\, h};$$

a_2 koeffitsientni xosil kilish uchun 2 chi tartibli chekli ayirmani tuzamiz.

$$\Delta^2 P_n(x) = 1 \cdot 2 h^2 a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 (x - x_0)^{[1]} h^2 + \ldots + n(n-1) a_n (x - x_0)^{[n-2]} h^2$$

$x = x_0$ da

$$\Delta^2 P_n(x_0) = 1 \cdot 2\ h^2 a_2 = \Delta^2 y_0$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2};$$

Shu jarayonni davom ettirib

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\, h^i} \text{ ni topamiz.}$$

Topilgan koeffitsientlarni (2^1) ifodaga kuyib Nyutonning teng uzoklikda joylashgan tugunlar uchun 1-chi interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\, h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^0 y_0}{2!\, h^2}(x - x_0)^{[2]} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_0)^{[n]} \qquad (3)$$

Nyutonning interpolyasion formulasini amalda kullash uchun uni kuyidagi kulay formada yozish tavsiya etiladi.

Buning uchun ya'ni uzgaruvchi kiritamiz.

$$q = \frac{x - x_0}{h};$$

$$\frac{(x - x_0)^{[i]}}{h} = \frac{(x - x_0)}{h} \cdot \frac{(x - x_0 - h)}{h} \cdot \frac{(x - x_0 - 2h)}{h} \ldots$$

$$\frac{\left[x - x_0 - (i-1)h\right]}{h} = q(q-1)(q-2)\ldots(q-i+1)$$

Bu ifodalarni (3) formulaga kuyib xosil kilamiz.

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Bu yerdan agar $n = 1$ bulganda chizikli interpolyasiyalash formulasini

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0$$

va $n = 2$ bulganda parabolik yoki kvadratik interpolyasiyalash formulasini

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

xosil kilamiz.

Nyutoning 1-chi interpolyasion formulasini tablitsaning oxiridagi kiymatlar uchun kullash nokulay bulib xisoblanadi.

Bu xolatda Nyutonning 2-chi interpolyasion formulasini kullash kulay bulib xisoblanadi.

Argumentning teng uzoklikda joylashgan kiymatlari $x_i = x_0 + ih$ uchun $y_i = y(x_i)$ kiymatlar berilgan bulsin.
Nyuton nazariyasiga kura axtarayotgan kupxad kuyidagi shaklda yoziladi.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + ...$$
$$+ a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1)$$

Umumlashgan daraja ifodasidan foydalanib xosil kilamiz.

$$P_n(x) = a_0, a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_{n-1})^{[2]} + a_3(x - x_{n-2})^{[3]} + \dots$$
$$+ a_n(x - x_1)^{[n]} \qquad (1)$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ *koeffitsiyentlarni shunday deb topish* ker*akki*

$$P_n(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, 2, ... n)$$

tenglik bajarilsin.

Buning uchun yetarli va zarur shart

(2) $\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i}$ bajarishimiz kerak.

$x = x_n$ bo’lganda (1) dan

$P_n(x_n) = y_n = a_0$ ni

demak $a_0 = y_n$ hosil qilamiz.

a_1 -ni toppish uchun (1) ni chap va ung tomonlaridan 1-chi tartibli chekli ayirma olamiz.

$$\Delta P_n(x) = a_1 \cdot 1 \cdot h + a_2 \cdot 2 \cdot h(x - x_{n-1})^{[1]} + 3 \cdot a_3 h(x - x_{n-2})^{[2]} + \ldots + n a_n (x - x_1)^{[n-1]} h$$

$x = x_{n-1}$ да

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 \ h$$

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h};$$

a_2 - ni topish uchun 2-chi tartibli chekli ayirmani tuzib $x = x_{n-2}$ da

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = a_2 \ 2! \ h^2$$

ni hosil qilamiz.

Bu yerdan $a_2 = \dfrac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! \ h^2};$

Shu jarayonni davom ettirib

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! \ h^i} \text{ topamiz.}$$

Topilgan kiymatlarni (1)-chi ifodaga kuyib 2-chi Nyuton interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! \ h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! \ h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3! \ h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) +$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \ h^n}(x - x_n)\ldots(x - x_1)$$

Yangi o’zgaruvchi

$$q = \frac{x - x_n}{h} \text{ ni kiritib}$$

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1; \qquad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2$$

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Teng kadamli interpolyasion formulalarni kullash uchun tavsiyalar

Funksiyaning jadvaldagi kiymatlari odatda takribiy bulib, ularning limit obsalyut xatolari oxirgi xona birligining yarmiga, 1-chi tartibli ayirmalarning oxirgi xonaning bir birligiga 2-chi tartiblisiniki oxirgi xonaning ikki borligiga va xo kazoga teng bulishi mumkin.

Sillik funksiyalarda odatda tartibi ortgan sari ayirma kamayib borib, biror tartibga yetganda deyarli uzgarmas buladi.

Ayrim xollarda funksiya kiymatidagi xato xisobiga, ayirma nolga aylanmasdan tartibsiz ishora bilan ortib ketishi xam mumkin.

Bunday natijalar notugri bulib ulardan foydalanish mumkin emas.

Shuning uchun xam muntazam uzgaradigan ayirmalarning eng yukori tartibini aniklash kerak. Sungra esa interpolyasiyalash uchun interpolyasion formulani kuyidagicha asoslab tanlash kerak. Agar funksiyaning kiymati xisoblanishi kerak bulgan x-ning kiymati jadval boshida yoki oxirida bulsa, u xolda mos ravishda Nyutonning 1-chi yoki 2-chi formulasini kullash kerak.

Agar bu kiymat jadvalni urtasida, masalan $[x_i, \quad x_{i+1}]$ ораликда булса хамда x_i ва x_{i+1} тугунларга мос келадиган сатрда барча мунтазам узгарадиган айирмалар мавжуд булса, у холда дастлабки тугун сифатида x_i ёки x_{i+1}ни кабул килиб Стирлинг ёки Бессел формуласини куллаш керак. Шуни таъкидлаш керакки агар $|t| \le 0{,}25$ булса Стирлинг формуласи $0{,}25 \le t \le 0{,}75$ булганда Бессел формуласини куллаш керак.
Буерда x-ни x_i ёки x_{i+1} тугунларни кайси бирига якин туришига караб, $t = \dfrac{x - x_i}{h}$ ёки $t = \dfrac{x - x_{i+1}}{h}$ деб олиш керак.

Markaziy ayirmali interpolyasion formulalari

Markaziy ayirmalar tablitsasi

Nyuton interpolyasion formulalarini chikarishda bu tanlangan boshlan³ich yakinlashishdan bir tomonda joylashgan funksiyalar kiymati bilan foydalandik. Shuning uchun bu formulalar birtomonli formulalar bulib xisoblanadi.

Kup xollarda shu boshlangich kiymatni xar ikkala tomonida joylashgan funksiyaning kiymatlaridan foydalanishga tugri keldi.

Bulardan eng kup foydalanadigani x_0, y_0 ga tugri keladigan diognal tablitsaning gorizontal chizigida joylashgan chekli ayirmalarni uz ichiga oladigani bulib xisoblanadi. Ya'ni Δy_{-1}, Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$,...

Bular markaziy ayirmalar deb aytiladi.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-4} Δy_{-3} Δy_{-2} Δy_{-1} Δy_0 Δy_1 Δy_2 Δy_3	$\Delta^2 y_{-4}$	$\Delta^3 y_{-4}$ $\Delta^3 y^{-3}$ $\Delta^3 y_{-2}$ $\Delta^3 y_{-1}$ $\Delta^3 y_0$ $\Delta^3 y_1$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$	$\Delta^5 y_{-4}$ $\Delta^5 y_{-3}$ $\Delta^5 y_{-2}$ $\Delta^5 y_{-1}$	$\Delta^6 y_{-4}$
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-3}$
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-2}$
x_1	y_1		$\Delta^2 y_{-0}$		$\Delta^4 y_{-1}$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$				
x_4	y_4						

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1; \pm 2;...), \quad y_i = f(x_i)$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

Bunga tugri keladigan interpolyasion formulalar markaziy ayirmali deb aytiladi.

Bu tipdagi interpolyasion formulalar Gauss, Stirling, Bessel formulalari bulib xisoblanadi.

Gauss interpolyasion formulalari:

Faraz kilamiz 2n+1 ga teng uzoklikga joylashagan tugunlar berilgan bulsin.

$$x_{-n},\ x_{-(n-1)},\ ...,\ x_{-1},\ x_{0,}\ x_1,\ ...,\ x_{n-1},\ x_n$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const \qquad (i = -n, -(n-1), ..., n-1)$$

Bu nuqtalarda $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari berilgan

$$y_i = f(x_i)$$

Darajasi 2_h - dan katta bulmagan shunday p(x) kupxadni kurish kerakki

$$P(x_i) = y_i \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n$$

bo'lsin

bu yerdan (1) $\Delta^k P(y_i) = \Delta^k y_i$ kelib chiqadi.

Bu kupxadni kuyidagi kurinishga axtaramiz.

$$\begin{aligned}
&P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\
&+ a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\
&+ a_5(x - x_2)(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + ... + a_{2n-1}\ (x - x_{-n+n})\ ... \\
&...(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \qquad (2) \\
&a_{2n}(x - x_{-(n-1)})...(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)...\ (x - x_{n-1})(x - x_n)
\end{aligned}$$

Umumlashgan daraja ta'rifidan foydalanib

$$\begin{aligned}
&P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_{-1})^{[3]} + a_4(x - x_{-1})^{[4]} + ... + \\
&+ a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})^{[2n-1]} + a_{2n}(x - x_{-(n-1)})^{[2n]}: \qquad (3)
\end{aligned}$$

$a_i (i = 0, 1, 2, ..., n)$ koeffitsientlarni topish uchun Nyuton interpolyasion formulalarni chikarish uchun kullangan metodlarni kullab va (1)-chini xisobga olib

$$a_0 = y_0; \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1! h}; \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\, h^2}; \ a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!\, h^3};$$

$a_4 = \dfrac{\Delta^4 y_{-2}}{4!\, h^4}; ..., a_{2n-1} = \dfrac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!\, h^{2n-1}}, \quad a_{2n} = \dfrac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!\, h^{2n}}; \quad q = \dfrac{x - x_0}{h}$ ni kiritib

1-chi Gauss interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$\begin{aligned}
&P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \\
&+ \frac{(q+2)\ (q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + ... \frac{(q+n-1)\ ...\ (q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\ ...\ (q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_n \qquad (4)
\end{aligned}$$

yoki

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[5]}}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \tag{4'}$$
$$+\frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

$$x = x_0 + qh; \quad q^{[m]} = q(q-1)\ \ldots\ [q-(m-1)]$$

Gaussning 1-chi interpolyasion formulasi

$$\Delta y_0, \quad \Delta^2 y_{-1}, \quad \Delta^3 y_{-1}, \quad \Delta^4 y_{-2}, \quad \Delta^5 y_{-2}, \quad \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

markaziy ayirmalarni uz ichiga oladi.

Xuddiy shunday

$$\Delta y_{-1}, \quad \Delta^2 y_{-1}, \quad \Delta^3 y_{-2}, \quad \Delta^4 y_{-2}, \quad \Delta^5 y_{-3}, \quad \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

markaziy ayirmalarni uz ichiga oladigan Gaussning 2 – chi interpolyasion formulasini chakirish mumkin.

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$
$$+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)\ (q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

yoki

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots$$
$$+\frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Gaussning 1-chi va 2-chi interpolyasion formulalarni urta arifmetik kiymatlarini olib Stirling interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$P(x)=y_0+q\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1}+\frac{q(q^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+$$
$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\ldots$$
$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2)\ldots\left[q^2-(n+1)^2\right]}{(2n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n}+\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2}+$$
$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots\left[q^2-(n-1)^2\right]}{(2n!)}\Delta^{2n}y_{-n};$$

$$q=\frac{x-x_0}{h};\quad P(x_i)=y_i$$
$$i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm n.$$

Stirling interpolyasion formulasidan farkli kup xollarda Bessel interpolyasion formulasini ishlatish mumkin.

Buninng uchun Gaussning 2-chi interpolyasion formulasidan foydalanish mumkin.

Buning uchun $2n+2$ ta teng uzoklikda joylashgan interpolyasiya tugunlarini olamiz. kadam h bilan $x_{-n},\ x_{-(n-1)},\ \ldots,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1}$

$$y_i=f(x_0)\qquad\qquad (i=-n,\ \ldots,\ n+1)$$

berilgan $y=f(x)$ - ning qiymatlari.

Agar boshlang'ich qiymat sifatida $x=x_0$ va $y=y_0$ ni olib $x_k(k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n)$ tugunlardan foydalanilsin.

$$P(x)=y_0+q\Delta y_{-1}+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$
$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\ldots+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n}+\qquad(1)$$
$$+\frac{(q+n)(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}$$

Endi boshlang'ich kiymat sifatida $x=x_1$, $y=y_1$ ni olib $x_{1+k}(k=o,\pm1,\ldots,\pm n)$ tugunlardan foydalansak. $\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=q-1$ bulib chekli ayirmalar indeksi 1-ga oshadi, ya'ni yordamchi interpolyasion formulani xosil kilamiz.

$$P(x) = y_1 + (q-1)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$
$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \ldots \qquad (2)$$
$$+\frac{(q+n-2)\ldots(q-n)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\ldots(q-n)}{(2n!)}\Delta^{2n} y_{-(n-1)}$$

(1) va (2) larni urta arifmetik kiymatini olib uncha murakkab bulmagan uzgartirishlar kiritsin. Bessel interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$P(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (q - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{-1}}{2} +$$
$$+\frac{(q-\frac{1}{2})q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} +$$
$$+\frac{(q-\frac{1}{2})q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!} \cdot \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2} +}{2}$$
$$+\ldots+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)\cdot}{(2n)!}\frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} +$$
$$+\frac{(q\frac{1}{2})q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)\Delta^{2n+1} y_{-n}}{(2n+1)!}$$
$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

Bessel interpolyasion formulasi $y = f(x)$ bilan $2n+2$ nuktalarda bir biriga mos tushadi

$$x_{-n}, \quad x_{-(n-1)}, \ldots, x_n, \ x_0, \ \ldots, \ x_n, \quad x_{n+1}$$

Xususiy xolda n=1 bulganda $\Delta^3 y_1$ turdagi ayirmalarni xisobga olmasak kvadratik interpolyasiya formulasiga ega bulamiz.

$$P(x) = \frac{y_0 + y_0 + \Delta y_0}{2} + (q - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \cdot \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1} + \Delta y_1 - \Delta y_0}{2}$$

yoki

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 - q_1(\Delta y_1 - \Delta y_{-1})$$
$$q_1 = \frac{q(1-q)}{4}$$

Bessel formulasida tok darajadagi ayirma oldida $(q-\frac{1}{2})$ kupaytuvchi katnashadi. Shuning uchun $q=\frac{1}{2}$ kiymatda Bessel formulasi juda sodda kurinishga ega buladi.

$$P(\frac{x_0+x_1}{2})=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{8}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{3}{128}\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}-\frac{5}{1024}\frac{\Delta^6 y_{-2}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{\left[1\cdot 3\cdot 5-(2n-1)\right]^2\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2^{2n}(2n)!}$$

Besselning urtada interpolyasiyalash formulasi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

x	y	№	x
0,43	1,63597	1	0,702
0,48	1,73234	3	0,512
0,55	1,87686	5	0,645
0,62	2,03345	7	0,736
0,70	2,22846	9	0,608
0,75	2,35973	11	0,478

x	y	№	x
0,02	1,02316	2	0,102
0,08	1,09590	4	0,114
0,12	1,14725	6	0,125
0,17	1,21483	8	0,203
0,23	1,30120	10	0,154
0,30	1,40976	12	0,087

X	y	№	x
0,35	2,73951	13	0,526
0,41	2,30080	15	0,453
0,47	1,96864	17	0,482
0,51	1,78776	19	0,552
0,56	1,59502	21	0,436
0,64	1,34310	23	0,635
0,69	1,16321	25	0,667

x	y	№	x
0,68	0,80866	14	0,896
0,73	0,89492	16	0,812
0,80	1,02964	18	0,774
0,88	0,20966	20	0,955
0,93	1,34087	22	0,715
0,99	1,52368	24	0,984
1,07	1,75826	26	0,845

11-amaliy mashg'ulot

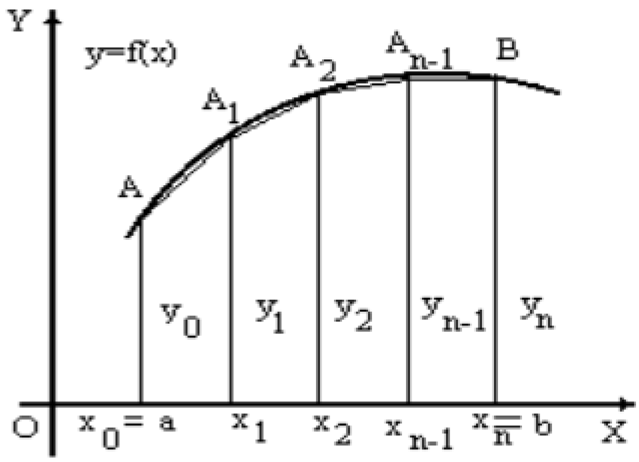
Trapetsiya formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlikni baholash

Amaliyot rejasi

1. Trapetsiya formulasi va uning xatoligini baholash
2. Namunaviy misollar yechish
3. Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Trapetsiya formulasi va uning xatoligini baholash

[a,b] kesmani n ta teng bo'lakka bo'lamiz. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ $y = f(x)$ chiziqning har bir yoyini bu yoyning uchlarini tutashtiruvchi vatar bilan almashtiramiz.



Berilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini n ta to`g`ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarini yig`indisi bilan almashtiramiz

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x \right) \tag{1}$$

Bu trapetsiyalar formulasidir.

Trapetsiyalar formulasini absolyut xatoligi $R = M\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ dan katta emas. Bu yerda

$$M = \max_{[a,b]}|f''(x)|$$

Namunaviy misollar yechish

Ushbu $I=\int_0^2 \sin\left(x^2\right)dx$ integralni taqribiy qiymatini trapetsiya formulasidan foydalanib hisoblang.

Yechish

$$n=10,\quad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{10}=0{,}2$$

quyidagi jadvalni to'ldiramiz.

i	x_i	y_i
0	0	0
1	0,2	0,004
2	0,4	0,1593
3	0,6	0,3523
4	0,8	0,5972
5	1,0	0,8415
6	1,2	0,9915
7	1,4	0,9249
8	1,6	0,5487
9	1,8	0,3427
10	2,0	0,1576

Trapetsiya formulasiga asosan

$$I=\int_0^2 \sin\left(x^2\right)dx\approx 0{,}2\left(\frac{0+0{,}1576}{2}+0.04+0.1593+0.3523+0.5972+0.8415+\right.$$
$$\left.+0.9915+0.9249+0.5487+0.3427\right)=1{,}11722$$

Endi absolyut xatolikni topamiz

$$f'(x) = \left(\sin\left(x^2\right)\right)' = 2x\cos\left(x^2\right)$$
$$f''(x) = 2\cos\left(x^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2\right)$$
$$M_2 = \max\left|2\cos\left(x^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2\right)\right| \le 2$$
$$R_2 = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2*8}{12*100} = \frac{4}{300} = 0.013$$

dan katta emas

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Integrallarning qiymatini 3 xona aniqlikda trapesiya formulasi yordamida hisoblang.

1. $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ 2. $\int\limits_{1,2}^{2,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$ 3. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$

4. $\int\limits_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 5. $\int\limits_{0,6}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ 6. $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$

7. $\int\limits_{1,4}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$ 8. $\int\limits_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$ 9. $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

10. $\int\limits_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$ 11. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ 12. $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

13. $\int\limits_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$ 14. $\int\limits_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$ 15. $\int\limits_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

16. $\int\limits_{1,8}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,25}}$ 17. $\int\limits_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$ 18. $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$

19. $\int\limits_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,6}}$ 20. $\int\limits_{3,2}^{4,2} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$ 21. $\int\limits_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$

22. $\int\limits_{1,2}^{2,0} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$ 23. $\int\limits_{2,1}^{3,1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ 24. $\int\limits_{1,3}^{2,3} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$

25. $\int\limits_{0,4}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{12x^2+0,5}}$ 26. $\int\limits_{1,3}^{2,3} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-0,4}}$ 27. $\int\limits_{1,4}^{2,8} \frac{dx}{\sqrt{1,5x^2+0,7}}$

12-amaliy mashg'ulot

Simpson formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlikni baholash

Amaliyot rejasi

1. Simpson formulasi va uning xatoligini baholash
2. Namunaviy misollar yechish
3. Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Simpson formulasi va uning xatoligini baholash

[a,b] kesmani n=2 ta teng juft miqdordagi teng qismlarga bo'lamiz. Uchta nuqta olamiz va bu $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$ nuqtalar orqali $y = Ax^2 + \mathbf{B}x + C$ parabolani o'tkazamiz. Bu parabola bilan $\mathbf{y} = f(x)$ funksiya grafigini almashtiramiz. Xuddi shunga o'xshash $\mathbf{y} = f(x)$ $[a,b]$ funksiya grafigi $[x_2;x_4]$, $[x_4;x_6]$ va boshqa kesmalarga almashtiramiz.

Shunday qilib $\mathbf{y} = f(x)$ egri chiziqli trapetsiya yuzini bu kesmadagi parabolalar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyalar yuzlarini yig'indisi bilan almashtiramiz.

Bunday egri chiziqli trapetsiyalar parabolik trapetsiyalar deyiladi. Parabola tenglamasining A, B , C koeffisentlari parabolaning berilgan uchta nuqtadan o`tish shartidan aniqlanadi.

A, B , C koeffisentlarni parabolaning $(-h;y_0)$, $(0;y_2)$, $(h;y_2)$ nuqtalardan o'tish shartidan topamiz.

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

$$\begin{cases} y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 = C \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib

$A = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$ $C = y_1$ $B = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)$ ni aniqlaymiz.

Endi parabolik trapetsiyaning S yuzasini aniq integral yordamida topamiz.

$$S_1 = \int_{-h}^{h}\left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}\left(2Ah^3 + 6C\right)$$

A va B ning topilgan qiymatlarini o`rniga qo`yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$S_1 = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$$S_2 = \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

$$S_3 = \frac{h}{3}\left(y_4 + 4y_5 + y_6\right)$$

....

$$S_{2m} = \frac{h}{3}\left(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2m} + 4\left(y_1 + \ldots + y_{2m-1}\right) + 2\left(y_2 + \ldots + y_{2m-2}\right)\right)$$

Bunda $h = \Delta x = \dfrac{b-a}{2m}$

Shunday qilib, aniq integralni taqribiy hisoblashning Simpson formulasi (parabolik trapetsiyalarni formulasi) bunday ko`rinishni oladi.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left(y_0 + y_{2m} + 4\left(y_1 + \ldots + y_{2m-1}\right) + 2\left(y_2 + \ldots + y_{2m-2}\right)\right)$$

Simpson formulasining absolyut xatosi $R = M\dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}$ $\quad h = \Delta x = \dfrac{b-a}{2m}$ dan katta

emas. Bu yerda $M = \max\limits_{[a,b]}\left|f^{IV}(x)\right|$

Namunaviy misollar yechish

Ushbu $I = \int_2^{12}\sqrt{x^3 + 13}dx$ integralni taqribiy qiymatini Simpson formulasidan foydalanib hisoblang.

Yechish

$$n = 10, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{12-2}{10} = 1$$

quyidagi jadvalni to'ldiramiz.

i	x_i	y_i
0	2	4,582
1	3	6,324
2	4	8,775
3	5	11,747
4	6	15,133
5	7	18,868
6	8	22,913
7	9	27,240
8	10	31,828
9	11	36,661
10	12	41,725

Simpson formulasiga asosan

$$I = \int_2^{12} \sqrt{x^3 + 13}dx \approx \frac{1}{3}[4,5882 + 41,725 + 4(6,324 11,747 18,868 27,240 36,661) +$$
$$+ 2(8,775 15,133 22,913 31,828)] = 197,808$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Integrallarning qiymatini 3 xona aniqlikda trapesiya formulasi yordamida hisoblang.

1. $\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$

2. $\int_{1,2}^{2,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$

3. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$

4. $\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

5. $\int_{0,6}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

6. $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$

7. $\int_{1,4}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

8. $\int_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$

9. $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

10. $\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

11. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

12. $\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

13. $\int_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$

14. $\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$

15. $\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

16. $\int_{1,8}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,25}}$

17. $\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$

18. $\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$

19. $\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,6}}$

20. $\int_{3,2}^{4,2} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$

21. $\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$

22. $\int_{1,2}^{2,0} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$

23. $\int_{2,1}^{3,1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$

24. $\int_{1,3}^{2,3} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$

25. $\int_{0,4}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{12x^2+0,5}}$

26. $\int_{1,3}^{2,3} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-0,4}}$

27. $\int_{1,4}^{2,8} \frac{dx}{\sqrt{1,5x^2+0,7}}$

13-amaliy mashg'ulot

Mavzu: Koshi masalasini yechishning Eyler usuli

Ishdan maqsad: *Birinchi tartibli differensial tenglama uchun qo`yilgan Koshi masalasini Eyler usulida yechishni talabalarga o'rgatish quyidagilarni o'z ichiga oladi:*

- *differensial tenglamani integrallashga sonli usulni qo'llash;*
- *hisoblash ishini tashkil qilish va bajarish;*

masalani yechish dasturini tuzish va sonli natijalar olish.

1. Eyler usuli

Faraz kilamiz boshlangich $y(x_0) = y_0$ shartga ega bulgan

$$(1) \quad y^1 = f(x, y)$$

differentsial tenglama berilgan bulsin

Etarlicha kichik h kadam olib teng uzoklikda joylashgan tugun nuktalar sistemasini tuzamiz.

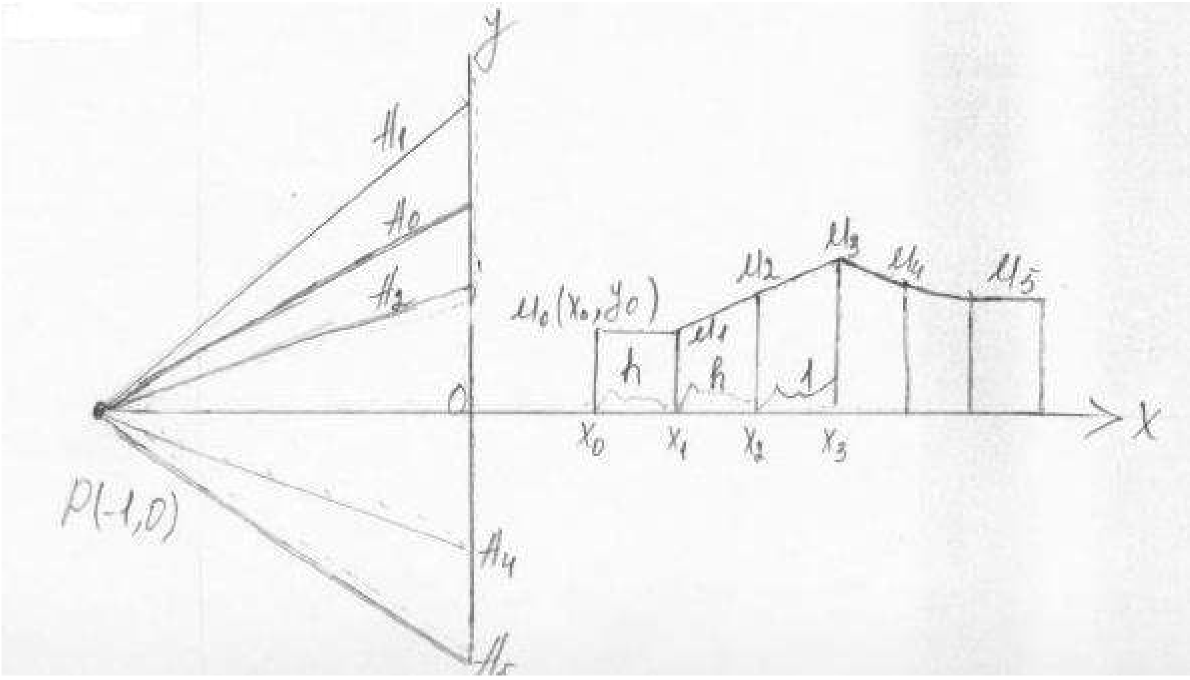
$$x_i = x_0 + ih(i = 0, 1, 2, ...,) \qquad (2)$$

$M_0(x_0, y_0)$ nuktadan utuvchi axtarilayotgan $y = y(x)$ integral egri chizikni takribiy ravishda $M_i(x_i, y_i)$ balandlikga ega bulgan $M_0 M_1 M_2 M_3 ...$ sinik chizik bilan almashtirib olamiz va bu sinik chizikni $M_i M_{i+1}$ zvenosi x_i, x_{i+1} tugri chiziklar orasida joylashgan bulib

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \qquad (3)$$

balandlikga ega.

SHunday kilib Eyler sinik chizikining $M_i M_{i+1}$ zvenosi xar bir M_i balandlikga ega bulgan kismi $M_i (x_i, y_i)$ nuktadan utuvchi integral egri chizik yunalishiga ega bulgan yunalishga ega buladi.



(3) formuladan kurinadiki y_i -ning kiymatlari kuyidagi formula bilan topiladi.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad \Delta y_i = hf(x_i, y_i) \qquad (i = 0, 1, 2, ...)$$

Bu Eyler metodining asosiy formulasi xisoblanadi.

Eyler metodining sinik chizikini geometrik tuzilishini kurish uchun $P(-1,0)$ kutb nukta olib ordinat ukiga $0A_0 = f(x_0, y_0)$ kesmani belgilamiz. Tabiiyki PA_0 nurning burchak koeffitsienti $f(x_0, y_0)$ ga teng buladi. SHuning uchun Eyler sinik chizikini xosil kilish uchun M_0 nuktadan PA_0 nurga paralel kilib M_0M_1 chizikni utkazish kifoya. Bu chizik to $x = x_1$ nuktagacha davom ettiriladi. (ya'ni $M_1(x_1\, y_1)$ nuktagacha).

$M_1(x_1, y_1)$ nuktani boshlangich nukta deb ordinata ukiga $0A_1 = f(x_1, y_1)$ kesmani belgilaymiz va PA_1 nurga paralel bulgan M_1M_2 chizikni utkazamiz ta $x = x_2$ nuktagacha va xo kazo.

Eyler metodi differentsial tenglamalarni integrallashni oddiy metodlaridan xisoblanadi.

Eyler metodi kuyidagi kamchiliklarga ega.

1. Kichik aniklik

2. Xatoni yigilib borishi

Eyler usuli umuman olganda kadamni h -ning kichik kiymatlari uchun konikarli natija beradi, chunki Eyler metodining asosiy goyasi (1) –chi differentsial tenglamaning integrali. Xar bir $[x_i, x_{i+1}]$ xususiy kesmada Teylor katorining 2 ta xadi bilan tasvirlanadi, ya’ni

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy^1(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, ...)$$

buning berilgan kesmadagi xatosining tartibi h^2 ga teng.

Bundan tashkari xar bir kadamdagi yechimni xosil kilish uchun boshlangich shartga kuyilgan xato takrorlanadi va bu yakuniy natijaga ta’sir kursatadi.

Misol: Kuyidagi sistemani Eyler usuli bilan takribiy kiymatlari xisoblansin.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= x + y_1 y_2; \\ \frac{dy_2}{dx} &= x^2 - y_1^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Boshlangich shartlari

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0;$$

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x + y_1 y_2)dx; \qquad y_2 = \int_0^x (x^2 - y_1^2)dx;$$

bu yerdan

$$y_1^{(0)} = 1; \qquad y_1^{(0)} = 0 \text{ deb}$$

$$y_1^{(1)},\ y_2^{(1)} \text{ -ni topamiz.}$$

$$y_1^{(1)} = 1 + \int_0^x (x + 0)dx = 1 + \frac{x^2}{2};$$

$$y_2^{(1)} = \int_0^x (x^2 - 1)dx = -x + \frac{x^3}{3};$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \int_0^x \left[x + (2 + \frac{x^2}{2})(-x + \frac{x^3}{3}) \right] dx = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{36}$$

$$y_2^{(2)} = \int_0^x \left[x^2 - (1 + x^2 + \frac{x^4}{4}) \right] dx = -x - \frac{x^5}{20};$$

Eyler metodi sistema uchun juda sodda kengaytiriladi.

$$\frac{d\overline{y}}{dx}=\overline{f}(x,\ \overline{y}) \quad (1)$$

$$\overline{y}(x_0)=\overline{y}_0 \quad (2)$$

(1)-chi vektorli tenglamani integral formada yozamiz

$$\overline{y}=\overline{y}_0+\int_{x_0}^{x}\overline{f}(x,\ \overline{y})dx$$

$$\overline{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad \int_{x_0}^{x}\overline{f}dx=\begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_{x_0}^{x} f_n(x)dx \end{pmatrix}$$

$\overline{y}^{(p)}$ -ketma-ket yakinlashishlar kuyidagi formula orkali topiladi.

$$\overline{y}^{(p)}=\overline{y}_0+\int_{x}^{x_0}\overline{f}(x,\ \overline{y}^{(p-1)})dx$$

odatda

$\overline{y}^{(0)}\equiv\overline{y}_0$ deb olinadi.

Misol: Eyler metodini kullab $[0,\ 1]$ kesmada $y(0)=1$ boshlangich shartga ega bulgan $y^1=\frac{xy}{2}$ tenglamani jadval shaklidagi yechimini topish maksadi kuyiladi.

Kadam $h=0{,}1$ kadam olib kuyidagi jadvalni tuzamiz

i	x	y	$f(x,y)=\frac{xy}{2}$	$\Delta y=0{,}1f(x,y)$	**Aniq yechim** $y=e\frac{x^2}{y}$
0	0	1	0	0	1
1	0,1	1	0,05	0,005	1,0 025

2	0,2	1,005	0,1005	0,0101	1,0100
3	0,3	1,0151	0,1523	0,0152	1,0227
4	0,4	1,0303	0,2067	0,0206	1,0408
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263	1,0645
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323	1,0942
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388	1,1303
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459	0,1735
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537	1,2244
10	1,0	1,2479			1,2840

Topshiriqlar

Berilgan birinchi tartibli differensial tenglamani Eyler usulida yeching.

1. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$ $\quad y_0(1{,}8) = 2{,}6$ $\quad x \in [1{,}8;\ 2{,}8]$

2. $y' = x + \cos\frac{y}{3}$ $\quad y_0(1{,}6) = 4{,}6$ $\quad x \in [1{,}6;\ 2{,}6]$

3. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$ $\quad y_0(0{,}6) = 0{,}8$ $\quad x \in [0{,}6;\ 1{,}6]$

4. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$ $\quad y_0(0{,}8) = 1{,}4$ $\quad x \in [0{,}8;\ 1{,}8]$

5. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$ $\quad y_0(2{,}1) = 2{,}5$ $\quad x \in [2{,}1;\ 3{,}1]$

6. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$ $\quad y_0(1{,}8) = 2{,}6$ $\quad x \in [1{,}8;\ 2{,}8]$

7.	$y' = x + \sin\frac{y}{3}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$x \in [1,6;\ 2,6]$
8.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6;\ 1,6]$
9.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(0,8) = 1,4$	$x \in [0,8;\ 1,8]$
10.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2,1) = 2,5$	$x \in [2,1;\ 3,1]$
11.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{12}}$	$y_0(1,8) = 2,6$	$x \in [1,8;\ 2,8]$
12.	$y' = x + \cos\frac{y}{2}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$x \in [1,6;\ 2,6]$
13.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{4}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6;\ 1,6]$
14.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(0,8) = 1,4$	$x \in [0,8;\ 1,8]$
15.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(2,1) = 2,5$	$x \in [2,1;\ 3,1]$
16.	$y' = \frac{y}{x} - y^2$	$y_0(1) = 1,0$	$x \in [1,0;\ 2,0]$
17.	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$	$y_0(1,4) = 2,5$	$x \in [1,4; 2,4]$
18.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0,8) = 1,3$	$x \in [0,8;\ 1,8]$
19.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1,1) = 1,5$	$x \in [1,1;\ 2,1]$
20.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(0,6) = 1,2$	$x \in [0,6;\ 1,6]$

21. $y' = x + \sin\frac{y}{1{,}25}$ $y_0(0{,}5) = 1{,}8$ $x \in [0{,}5;\ 1{,}5]$

22. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}$ $y_0(0{,}2) = 1{,}1$ $x \in [0{,}2;\ 1{,}2]$

23. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$ $y_0(0{,}1) = 0{,}8$ $x \in [0{,}1;\ 1{,}1]$

24. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$ $y_0(0{,}5) = 0{,}6$ $x \in [0{,}5;\ 1{,}5]$

25. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$ $y_0(1{,}2) = 1{,}4$ $x \in [1{,}2;\ 2{,}2]$

26. $y' = x + \cos\frac{y}{1{,}25}$ $y_0(0{,}4) = 0{,}8$ $x \in [0{,}4;\ 1{,}4]$

14-Amaliy mashg'ulot

Mavzu: Koshi masalasini yechishning Runge-Kutta usuli

Ishdan maqsad: *Birinchi tartibli differensial tenglama uchun qo`yilgan Koshi masalasini Eyler, Runge-Kutta usulida yechishni talabalarga o'rgatish quyidagilarni o'z ichiga oladi:*

- *differensial tenglamani integrallashga sonli usulni qo'llash;*
- *hisoblash ishini tashkil qilish va bajarish;*

masalani yechish dasturini tuzish va sonli natijalar olish.

Runge-Kutta metodi

Faraz kilamiz 1-chi tartibli differentsial tenglama berilgan bulsin.

$$y^1 = f(x, y) \qquad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

h -kadam olib $x_i = x_0 + ih$ va $y_i = y(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, ...)$ deb belgilaymiz.

Kuyidagi sonlarni kuramiz.

$$\left.\begin{aligned} K_1^{(i)} &= h\,f(x_i,\, y_i) \\ K_2^{(i)} &= h\,f(x_i + \frac{h}{2},\; y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}) \\ K_3^{(i)} &= h\,f(x_i + \frac{h}{2},\; y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}) \\ K_4^{(i)} &= h\,f(x_i + h,\; y_i + K_3^{(i)}) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Runge-Kutta metodiga kura y_i -ning kiymatlari kuyidagi formula bilan topiladi.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$(3) \qquad \Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}) \;\; (i = 0, 1, 2, ...)$$

Bu metodning xar bir kadamdagi xatosi h^5 mikdordan ortmaydi. Xisoblashlarda kuyidagi tablitsadan foydalanish makul deb xisoblanadi.

i	x	y	$k = hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
-	-	-	-	$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_0$
1	x_1	y_1		

Runge-Kutta metodining xatosini baxolash murakkab bulib xisoblanadi. SHuning uchun h -kadamni tugri tanlanganimizni tekshirish uchun ikki kadamda ikkilangan xisob bilan tekshirilib boriladi, ya'ni $y(x_i)$ -ning kiymatlaridan foydalanib $y(x_i + 2h)$ -ning kiymatini ikkita yul bilan xisoblaydilar: 1). 1-chi marta xisob h kadam bilan. 2). 2-chi marta $H = 2h$ kadam bilan.

Agar olingan natijalar kutilgan natijalar bilan mos tushsa demak h kadam tugri tanlangan va olingan kiymatlarni $y(x_i + 2h)$ deb olish mumkin. Agar bu shart bajarilmasa kadamni ikki marta kichraytirishga tugri keladi. Bu xisoblash sixemasini EXM-da dasturlash juda kulay bulib xisoblanadi.

Xisoblashlarning murakkabligiga karamasdan Runge-Kutta metodi EXM-da eng kulay va katta aniklashga ega bulgan metod bulib xisoblanadi, yana kulayligi shundaki buerda uzgaruvchi kadam olinadi.

Misol: $y^1 = x + y$ tenglamaning $[0; 0{,}5]$ kesmada $y(0) = 1$ shartni kanoatlantiradigan yechimini xisoblash kerak $h = 0{,}1$

$$K_1^{(0)} = (0+1)\cdot 0{,}1 = 0{,}1$$
$$K_2^{(0)} = \left[0{,}05 + (1+05)\right]\cdot 0{,}1 = 0{,}11$$
$$K_3^{(3)} = \left[0{,}05 + (1+0{,}055)\right]0{,}1 = 0{,}1105$$
$$K_4^{(0)} = \left[0{,}1 + (1+0{,}1105)\right]0{,}1 = 0{,}12105$$
$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}1 + 2\cdot 0{,}11 + 2\cdot 0{,}1105 + 0{,}1205) = 0{,}1103$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1103 = 1{,}1103$$

i	x	y	$k = 0{,}1 f(x,\ y)$	Δy
0	0	1	0,1	0,1000
	0,05	1,05	0,11	0,2200
	0,05	1,055	0,1105	0,2210
	0,1	1,1105	0,1210	0,1210
				$\frac{1}{6}0{,}6620 = 0{,}1103$
1	0,1	1,1103	0,1210	0,1210
	0,15			
	0,15			
	0,2			

Runge-Kutta metodini differentsial tenglamalar sistemasi uchun xam kullash mumkin.

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \overline{f}(x,\ \overline{y}) \qquad (1)$$

$$\overline{y}(x_0) = \overline{y}_0 \qquad (2)$$

h kadam olib $x_0 = x_0 + ih$ va $\overline{y}_i = \overline{y}_i(x_0)$ deb $\Delta\overline{y}_i = \overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i$ ni topamiz.

$$\overline{K}_1^{(0)} = h\overline{f}(x_0, \overline{y}_0)$$
$$\overline{K}_2^{(0)} = h\overline{f}(x_0 + \frac{h}{2}, \frac{\overline{K}_1^{(0)}}{2})$$
$$\overline{K}_3^{(0)} = h\overline{f}(x_0 + \frac{h}{2}, \frac{\overline{K}_2^{(0)}}{2})$$
$$\overline{K}_4^{(0)} = h\overline{f}(x_0 + h, \overline{y}_0 + \overline{K}_3^{(0)})$$
$$\Delta\overline{y}_0 = \frac{1}{6}(\overline{K}_1^{(0)} + 2\overline{K}_2^{(0)} + 2\overline{K}_3^{(0)} + \overline{K}_4^{(0)})$$

bu yerda

$$\overline{y}_1 = \overline{y}_0 + \Delta\overline{y}_0$$

Topshiriqlar

Berilgan birinchi tartibli differensial tenglamani Runge-Kutta usulida yeching.

1.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1{,}8) = 2{,}6$	$x \in [1{,}8;\ 2{,}8]$
2.	$y' = x + \cos\frac{y}{3}$	$y_0(1{,}6) = 4{,}6$	$x \in [1{,}6;\ 2{,}6]$
3.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0{,}6) = 0{,}8$	$x \in [0{,}6;\ 1{,}6]$
4.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0{,}8) = 1{,}4$	$x \in [0{,}8;\ 1{,}8]$
5.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2{,}1) = 2{,}5$	$x \in [2{,}1;\ 3{,}1]$
6.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1{,}8) = 2{,}6$	$x \in [1{,}8;\ 2{,}8]$
7.	$y' = x + \sin\frac{y}{3}$	$y_0(1{,}6) = 4{,}6$	$x \in [1{,}6;\ 2{,}6]$

8.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0{,}6) = 0{,}8$	$x \in [0{,}6;\ 1{,}6]$
9.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(0{,}8) = 1{,}4$	$x \in [0{,}8;\ 1{,}8]$
10.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2{,}1) = 2{,}5$	$x \in [2{,}1;\ 3{,}1]$
11.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{12}}$	$y_0(1{,}8) = 2{,}6$	$x \in [1{,}8;\ 2{,}8]$
12.	$y' = x + \cos\frac{y}{2}$	$y_0(1{,}6) = 4{,}6$	$x \in [1{,}6;\ 2{,}6]$
13.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{4}}$	$y_0(0{,}6) = 0{,}8$	$x \in [0{,}6;\ 1{,}6]$
14.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(0{,}8) = 1{,}4$	$x \in [0{,}8;\ 1{,}8]$
15.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(2{,}1) = 2{,}5$	$x \in [2{,}1;\ 3{,}1]$
16.	$y' = \frac{y}{x} - y^2$	$y_0(1) = 1{,}0$	$x \in [1{,}0;\ 2{,}0]$
17.	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$	$y_0(1{,}4) = 2{,}5$	$x \in [1{,}4; 2{,}4]$
18.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0{,}8) = 1{,}3$	$x \in [0{,}8;\ 1{,}8]$
19.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1{,}1) = 1{,}5$	$x \in [1{,}1;\ 2{,}1]$
20.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(0{,}6) = 1{,}2$	$x \in [0{,}6;\ 1{,}6]$
21.	$y' = x + \sin\frac{y}{1{,}25}$	$y_0(0{,}5) = 1{,}8$	$x \in [0{,}5;\ 1{,}5]$

22. $y' = x + \sin\dfrac{y}{\sqrt{15}}$ $\quad y_0(0,2) = 1,1$ $\quad x \in [0,2;\ 1,2]$

23. $y' = x + \sin\dfrac{y}{\sqrt{1,3}}$ $\quad y_0(0,1) = 0,8$ $\quad x \in [0,1;\ 1,1]$

24. $y' = x + \sin\dfrac{y}{\sqrt{0,3}}$ $\quad y_0(0,5) = 0,6$ $\quad x \in [0,5;\ 1,5]$

25. $y' = x + \sin\dfrac{y}{\sqrt{0,7}}$ $\quad y_0(1,2) = 1,4$ $\quad x \in [1,2;\ 2,2]$

26. $y' = x + \cos\dfrac{y}{1,25}$ $\quad y_0(0,4) = 0,8$ $\quad x \in [0,4;\ 1,4]$

15-amaliyot.

Chiziqli dasturlashga keltiriladigan masalalarning matematik modelini qurish. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish

REJA:

4. Chiziqli dasturlash masalalarining qo'yilishi.
5. Chiziqli dasturlash masalalarining matematik modellari.
6. Tuli xil hayotiy masalalarning matematik modellari va ularning tahlili

Chzizqli dasturlash masalalari. Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (\leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq (\leq) b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (\leq) b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0, \quad (2)$$

$$Y_{\min(\max)} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots\ + c_nx_n \quad (3)$$

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3) chiziqli funktsiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (1) va (2) shartlari uning chegaraviy shartlari deb, (3) chiziqli funktsiya esa masalaning maqsadi yoki maqsad funktsiyasi deb ataladi.

Masaladagi barcha chegaralovchi shartlar va maqsad funktsiya chiziqli ekanligi ko'rinib turibdi. SHuning uchun ham (1)–(3) masala chiziqli dasturlash masalasi deb ataladi.

Konkret masalalarda (1) shart tenglamalar sistemasidan, «≥» yoki «≤» ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin. Lekin ko'rsatish mumkinki, (1)–(3) ko'rinishdagi masalani osonlik bilan quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0, \quad (5)$$

$$Y_{\min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots\ + c_nx_n \quad (6)$$

(4)-(6) ko'rinish chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishi deb ataladi.

(4)–(6) masalani vektorlar yordamida quyidagicha ifodalash mumkin:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ \dots\ + P_nx_n = P_0 \quad (7)$$

$$X \geq 0 \tag{8}$$

$$Y_{\min} = CX \tag{9}$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad p_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

bu yerda

$S = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – vektor–qator.

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – vektor–ustun.

(4)-(6) masalaning matritsa ko'rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$AX = P_0 \tag{10}$$

$$X \geq 0, \tag{11}$$

$$Y_{\min} = CX \tag{12}$$

bu yerda $S = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – qator vektor, $A = (a_{ij})$ – (4) sistema koeffitsientlaridan tashkil topgan matritsa; $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ va $P_0 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – ustun vektorlar.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ (i = 1, \dots, m) \tag{13}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, \dots, n) \tag{14}$$

$$Y_{\min} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \tag{15}$$

(4)-(6) masalani yig'indilar yordamida ham ifodalash mumkin:

1-ta'rif. Berilgan (4)–(6) masalaning mumkin bo'lgan echimi yoki rejasi deb, uning (4) va (5) shartlarni qanoatlantiruvchi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorga aytiladi.

2-ta'rif. Agar (7) yoyilmadagi musbat x_i koeffitsientli P_i, $(i = 1, \dots, m)$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'iq bo'lmasa, u holda $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ reja tayanch reja deb ataladi.

3-ta'rif. Agar $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tayanch rejadagi musbat komponentalar soni m ga teng bo'lsa, u hoda bu reja aynimagan tayanch reja, aks holda aynigan tayanch reja deyiladi.

4-ta'rif. CHiziqli funktsiya (6) ga eng kichik qiymat beruvchi $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tayanch reja masalaning optimal rejasi yoki optimal echimi deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalasi yechimining ayrim xossalarini qaraymiz:

1. chiziqli dasturlash masalasi cheklash shartlari sistemasiningg rejalari : (mumkin bo'lgan yechimlari) to'plami bo'sh to'plam yoki *Rn* fazodagi qavariq to'plamni tashkil etadi:
2. chiziqli dasturlash masalasi rejalari to'plami bosh to'plam bo'lmasa va maqsad funksiya bu to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, masala maksimum (minimum) optimal yechimga ega bo'ladi;
3. chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimi mavjud bo'lsa, bu yechim mumkin bo'lgan yechimlar to'plamining chegaraviy nuqtalarida bo'ladi.

Chiziqli dasturlash masalasiga keltiriladigan quyidagi masalalarning matematik modellarini quring

1. Gazlama tayyorlash fabrikasida 3 xil xom ashyodan 2 xil gazlama ishlab chiqariladi. Gazlamaga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va xom ashyolarning umumiy miqdori hamda gazlama narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 gazlama	2 gazlama	Xom ashyo miqdori
Ipak	4	5	50
Paxta	6	8	70
Buyoq	–	3	12
birlik mah. Narxi	2	5	

Korxona ishini shunday rejalashtirish kerakki uning daromadi maksimal bo'lsin.

2. Ishlab chiqarish fermasida 3 ta sex mavjud bo'lib, bu sexlarga ishchilarni qabul qishishi soni va 1 kunlik ish haqi quyidagicha:

   1-sex 260 dan kam bo'lmagan 340 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 4;

   1-sex 420 dan kam bo'lmagan 470 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 3;

   1-sex 370 dan kam bo'lmagan 400 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 2,5.

   Fermada 1100 ishchi mavjud bo'lib, ularni shunday joylashtirish kerakki ishchilarga sarflanadigan xarajatlar minimal bo'lsin.

3. Ip yigiruv sexida 3 xil xom ashyodan 2 xil ip tayyorlanadi. Iplarga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va foizlari hamda iplarni narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 ip	2 ip	Xom ashyo miqdori
Ipak	30%	–	40
Paxta	70%	65%	60
Sun. Tola	–	45%	12
birlik mah. narxi	3	5	

   Mahsulotlarni ishlab chiqarishni shunday taminlash kerakki, korxona daromadi maksimal bo'lsin.

4. Sexda 2 xil turdagi mahsulotni tayyorlashda 2 turdagi stanoklardan foydalaniladi. Stanoklarning ishlash vaqti 9 soatdan oshmasligi lozim. Stanoklarning har birlik mahsulotga sarflash vaqti va mahsulot narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1sta.sarf.vaqti	2sta.sarf.vaqti	Mah. narxi
1-mahsulot	9 min	5 min	6
2-mahsulot	4 min	7 min	8

   Korxonada maksimal daromad olish rejasini ishlab chiqing.

5. Gazlama tayyorlash fabrikasida 3 xil xom ashyodan 2 xil gazlama ishlab chiqariladi. Gazlamaga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va xom ashyolarning umumiy miqdori hamda gazlama narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 gazlama	2 gazlama	Xom ashyo miqdori
Ipak	6	5	50
Paxta	4	9	80
Buyoq	–	3	12
birlik mah. narxi	3	6	

Korxona ishini shunday rejalashtirish kerakki uning daromadi maksimal bo'lsin.

6. Ishlab chiqarish fermasida 3 ta sex mavjud bo'lib, bu sexlarga ishchilarni qabul qishishi soni va 1 kunlik ish haqi quyidagicha:

1-sex 260 dan kam bo'lmagan 340 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 5;

21-sex 410 dan kam bo'lmagan 470 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 3;

3-sex 365 dan kam bo'lmagan 400 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 3,5.

Fermada 1100 ishchi mavjud bo'lib, ularni shunday joylashtirish kerakki ishchilarga sarflanadigan xarajatlar minimal bo'lsin.

7. Ip yigiruv sexida 3 xil xom ashyodan 2 xil ip tayyorlanadi. Iplarga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va foizlari hamda iplarni narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 ip	2 ip	Xom ashyo miqdori
Ipak	35%	–	24
Paxta	65%	70%	40
Suniy tola	–	30%	15
birlik mah. narxi	3	5	

Mahsulotlarni ishlab chiqarishni shunday taminlash kerakki, korxona daromadi maksimal bo'lsin.

8. Sexda 2 xil turdagi mahsulotni tayyorlashda 2 turdagi stanoklardan foydalaniladi. Stanoklarning ishlash vaqti 9 soatdan oshmasligi lozim. Stanoklarning har birlik mahsulotga sarflash vaqti va mahsulot narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1sta.sarf.vaqti	2sta.sarf.vaqti	Mah. narxi
1-mahsulot	4 min	3 min	6
2-mahsulot	3 min	5 min	8

Korxonada maksimal daromad olish rejasini ishlab chiqing.

9. Gazlama tayyorlash fabrikasida 3 xil xom ashyodan 2 xil gazlama ishlab chiqariladi. Gazlamaga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va xom ashyolarning umumiy miqdori hamda gazlama narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 gazlama	2 gazlama	Xom ashyo miqdori
Ipak	7	5	50
Paxta	9	11	75
Buyoq	–	2	12
birlik mah. narxi	2	5	

Korxona ishini shunday rejalashtirish kerakki uning daromadi maksimal bo'lsin.

10. Ishlab chiqarish fermasida 3 ta sex mavjud bo'lib, bu sexlarga ishchilarni qabul qishishi soni va 1 kunlik ish haqi quyidagicha:

1-sex 270 dan kam bo'lmagan 360 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 4;

1-sex 410 dan kam bo'lmagan 470 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 3;

1-sex 390 dan kam bo'lmagan 410 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 2,5.

Fermada 1100 ishchi mavjud bo'lib, ularni shunday joylashtirish kerakki ishchilarga sarflanadigan xarajatlar minimal bo'lsin.

16-amaliy mashg'ulot

Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish

1.Chiziqli dasturlash masalasini yechishning simpleks usuli.
2. Sun'iy bazis usuli.
3. Aralash shartli masalalar.

Endi sismples usulning optimallik shartini qaraymiz. Chiziqli dasturlashning (5)-(7) masalasi qo'yilgan bo'lib, reja mavjud va u maxsusmas bo'lsin. Bu holda (9) tayanch yechim uchun ushbuni hosil qilamiz:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m = A_0, \quad (11)$$

$$x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_mc_m = Z(X_0), \quad (12)$$

bunda hamma $x_i > 0, Z(X_0)$ chiziqli funksiyaning bu rejaga mos kelgan qiymatini ifodalaydi.

Istalgan A_j vektor $A_1, A_2, ..., A_m$ bazis vektorlari orqali yagona yoyilmaga:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + ... + x_{mj}A_m = A_j \ (j = 1,2,...,n) \quad (13)$$

ega bo'ladi, shuning uchun A_j vektor yoyilmasiga bu bazisda chiziqli funksiyaning yagona

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + ... + x_{mj}c_j = Z_j \ (j = 1,2,...,n) \quad (14)$$

qiymati mos keladi. C_j - A_j vektorga mos chiziqli funksiyadagi koeffitsiyentlari bo'lsin. Kuyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

1-teorema. Biror A_j vektor uchun $Z_j - C_j > 0$ baho bajarilsa, X_0 reja optimal bo'lmaydi va shunday X_1 rejani topish mumkinki, $Z(X_1) < Z(X_0)$ tengsizlik bajariladi (teoremaning isbotini o'quv rejasi kengroq kurslardan topish mumkin).

1-natija. Biror X_0 reja uchun hamma A_j $(j = 1,2,...,n)$ vektorlar uchun shu bazisdagi yoyilmasi uchun

$$Z_j - C_j \leq 0$$

shart bajarilsa, X_0 reja optimal bo'ladi.

(5)-(7) chiziqli dasturlash masalasi maksimumga yechilayotgan bo'lsa quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

2-teorema. Biror A_j vektor uchun $Z_j - C_j < 0$ baho bajarilsa, X_0 reja optimal bo'lmaydi va shunday X_1 yechim mavjudki, $Z(X_1) > Z(X_0)$ tengsizlik bajariladi.

2-natija. Biror X_0 reja va hamma A_j $(j = 1,2,...,n)$ lar uchun

$$Z_j - C_j \geq 0$$

shart bajarilsa, X_0 reja optimal bo'ladi.

Endi simpleks usul algoritmini qaraymiz.

$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m, x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, ..., x_n = 0)$ reja (5)-(7) chiziqli dasturlash masalasining tayanch yechimi bo'lsin. Bu tayanch yechim optimalligini tekshirish uchun (6) sistema A_j $(j = 1,2,...,n)$ vektorlarni $A_1, A_2, ..., A_m$ bazis vektorlari orqali yoyib $Z_j - C_j$ baholarni hisoblaymiz. Bazis birlik bazis bo'lganligi uchun A_j vektorlarning bu bazisdagi yoyilmasi koeffitsiyentlari uchun uning komponentlari xizmat qiladi, ya'ni $x_{ij} = a_{ij}$ $(i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n)$ bo'ladi. Keyingi hisoblashlarni bajarish uchun jadvallar tuzish kulay. *Sb* - bazis ustunga bazis vektoriga mos kelgan chiziqli funksiyadagi koeffitsiyentlarni yozamiz. A_0 ustuniga boshlang'ich rejani yozib, hisoblashlar natijasida shu ustundan optimal yechim qiymatini aniqlaymiz. A_j $(j = 1,2,...,n)$ ustunlarga, j - vektorning bazis yoyilmasidagi koeffitsiyentlari yozilib, bundan keyin ularni X_j bilan belgilaymiz. $(m+1)$ - satrning A_0 ustuniga chiziqli funksiyaning $Z(X_0)$ qiymati yoziladi, A_j lar ustunlariga $Z_j - C_j$ bahoning qiymatlari yoziladi.

Funksiyaning $Z(X_0)$ va $Z_j = Z(X_j)$ qiymatlarini quyidagi skalyar ko'paytmalar shaklida topiladi:

$$Z(X_0) = C_0 X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i\ ,$$

$$Z_j = C_6 X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij},\ j = 1,2,...,n\ ,$$

bunda C_i bazis vektorlarining chiziqli funksiyadagi mos koeffitsiyent-laridir. Shunday qilib, 1-simpleks jadvalni hosil qilamiz.

1-simpleks jadval.

i	*Bazislar*	*Bazis koef. Sb*	A_0	C_1	C_2	...	C_l	...	C_m	C_{m+1}	...	C_j	...	C_k	...	C_n
				A_1	A_2	...	A_l	...	A_m	A_{m+1}	...	A_j	...	A_k	...	A_n
1	A_1	C_1	x_1	*1*	*0*	...	*0*	...	*0*	$x_{1,m+1}$	...	x_{1j}	...	x_{1k}	...	x_{1n}
2	A_2	C_2	x_2	*0*	*1*	...	*0*	...	*0*	$x_{2,m+1}$	...	x_{2j}	...	x_{2k}	...	x_{2n}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
l	A_l	C_l	x_l	*0*	*0*	...	*1*	...	*0*	$x_{l,m+1}$	...	x_{lj}	...	x_{lk}	...	x_{ln}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
m	A_m	C_m	x_m	*0*	*0*	...	*0*	...	*1*	$x_{m,m+1}$	...	x_{mj}	...	x_{mk}	...	x_{mn}

$m+l$	Z_j-C_j	Z_0	0	0	...	0	...	0	$Z_{m+1}-C_{m+1}$	...	Z_j-C_j	...	Z_k-C_k	...	Z_n-C_n

Birinchi simpleks jadval tuzilgandan keyin uning $(m+l)$ satrini qaraymiz. Chiziqli dasturlash masalasi minimumga yechilayotgan bo'lsa, barcha $j=1,2,...,n$ lar uchun $Z_j-C_j\le 0$ yoki masala maksimumga yechilayotgan bo'lsa, $Z_j-C_j\ge 0$ bo'lsa, tayanch yechim optimal bo'ladi va chiziqli funksiyaning optimal qiymati $Z(X_0)$ dan iborat bo'ladi.

Chiziqli dasturlash masalasi minimumga yechilayotgan bo'lib, $Z_j-C_j>0$ bo'lsa, X_0 yechim optimal bo'lmaydi va bu bahoga mos vektorni bazisga kiritib yechimni yaxshilash mumkin, ya'ni chiziqli funksiyaning oldingi qiymatidan kichikroq qiymatini topish mumkin bo'ladi.

Musbat baholar bir nechta bo'lsa, ulardan eng kattasini bazisga kiritiladi. Eng kattalari bir nechta bo'lsa, ulardan $\min(C_j)$ bo'lgani oldin bazisga kiritiladi. Hech bo'lmaganda bitta musbat $Z_j-C_j>0$ baho uchun mos vektor yoyilmasidagi x_{ij} koeffitsiyentlari ichida manfiylari bo'lsa, chiziqli funksiya yechimlar ko'pburchagida chegarlanmagan bo'ladi.

Eng katta $\theta_{0j}(Z_j-C_j)=\theta_{0k}(Z_k-C_k)$ bo'lsin, ya'ni maksimal qiymat k - vektor uchun bo'lsin, $m<k\le n$. Bu holda A_k vektor bazisga kiritilib, $\min(x_i/x_{ik})$ $(x_{ik}>0)$ mos kelgan vektor bazisdan chiqariladi. $\min(x_i/x_{ik})=x_l/x_{lk}$ bo'lsin, ya'ni l - satrdagi A_l vektor bazisdan chiqariladi. x_{lk} element ochuvchi (kalitli) element deyiladi va bu elementga mos ustun va satrlar yo'naltiruvchi (kalitli) deb ataladi.

Yangi tayanch yechim va vektorlar yangi bazisdagi yoyilmasi ($j=1,2,...,n$ uchun)

$$\begin{cases} x'_{ij}=x_{ij}-\dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}x_{ik}, \quad i\ne l \\ x'_{lj}=\dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}, \quad (i=l) \end{cases}$$

formulalar yordamida topiladi. Bu Jordan-Gauss noma'lumlarni to'la yo'qotish formulalaridir, haqiqatan $j=k$ uchun

$$\begin{cases} x'_{ik}=x_{ik}-\dfrac{x_{lk}}{x_{lk}}x_{ik}=0, \quad (i\ne l), \\ x'_{lk}=\dfrac{x_{lk}}{x_{lk}}=1, \quad (i=l), \end{cases}$$

hosil bo'ladi, ya'ni bazisga kiritilgan vektor yoyilmasi uchun ochuvchi element koeffitsiyenti 1 bo'lib qolgan koeffitsiyentlari 0 lardan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, A_0, A_j $(j=1,2,...,n)$ vektorlarning yangi bazisdagi yoyilmasi koeffitsiyentlarini, yangi tayanch yechim bahosi qiymatini hamda chiziqli funksiya qiymatini topish uchun yo'naltiruvchi satr hamma elementlarini yechuvchi elementga bo'lamiz va bir marta to'liq Jordan-Gauss metodidan foydalanib, 2-simpleks jadvalni tuzamiz.

2-simpleks jadval.

i	*Bazislar*	*Bazis koef. Sb*	A_0	C_1	C_2	...	C_l	...	C_m	C_{m+1}	...	C_j	...	C_k	...	C_n
				A_1	A_2	...	A_l	...	A_m	A_{m+1}	...	A_j	...	A_k	...	A_n
1	A_1	C_1	x'_1	*1*	*0*	...	x'_{1l}	...	*0*	$x'_{1,m+1}$	...	x'_{1j}	...	*0*	...	x'_{1n}
2	A_2	C_2	x'_2	*0*	*1*	...	x'_{2l}	...	*0*	$x'_{2,m+1}$	...	x'_{2j}	...	*0*	...	x'_{2n}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
l	A_l	C_l	x'_l	*0*	*0*	...	x'_{ll}	...	*0*	$x'_{l,m+1}$	...	x'_{lj}	...	*1*	...	x'_{ln}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
m	A_m	C_m	x'_m	*0*	*0*	...	x'_{ml}	...	*1*	$x'_{m,m+1}$	...	x'_{mj}	...	*0*	...	x'_{mn}
$m+1$	Z_j-C_j		Z'_0	*0*	*0*	...	Z'_l-C_l	Z'_0	*0*	$Z'_{m+1}-C_{m+1}$	...	Z'_j-C_j	...	*0*	...	Z'_n-C_n

Hisoblashlarning to'g'ri bajarilganligini

$Z(X_0)=C_6X_0$; $\quad Z_j-C_j=C_6X_j-C_j$

formulalar yordamida nazorat qilish mumkin.

2-simpleks jadvalning $(m+1)$ satrida hamma baholar $Z_j-C_j\le 0$ bo'lsa olingan X_0 yechim optimal bo'ladi. Musbat baholar bo'lsa, keyingi tayanch yechimni topishga o'tiladi. Jarayon optimal yechimni olguncha davom ettiriladi yoki chiziqli funksiya chegaralanmaganligi ko'rsatiladi. Optimal yechim baholar ichidagi *0* baho fakat bazis vektorlariga mos kelsa, optimal yechim yagona bo'ladi, *0* baho bazisda bo'lmagan vektorga ham mos kelsa, umuman optimal yechim yagona bo'lmaydi.

Chiziqli dasturlash masalasida chiziqli funksiyaning maksimum qiymati topilayotgan bo'lsa va $\min(Z_j-C_j)<0$ baholar bir nechta bo'lsa, ulardan $\min(C_j)$ bo'lgan vektor oldin bazisga kiritiladi. Bu holda ham simpleks usul jarayoni, chiziqli funksiyaning minimum qiymatini topishdagidek bo'ladi.

1-misol. $z=4x_1+6x_2$ chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} 16x_1+4x_2\le 784, \\ -8x_1-7x_2\ge -552, \\ 5x_1+9x_2\le 567, \quad x_1\ge 0,\, x_2\ge 0 \end{cases}$$

cheklash shartlari sistemasini qanoatlantiruvchi maksimum qiymatini toping.

Yechish. Boshlang'ich tayanch yechim qaralgan usulda ozod hadlarning faqat musbat qiymatlarida topilganligi uchun ikkinchi tengsizlikni (-1)ga ko'paytirib

$$\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 \le 784, \\ 8x_1 + 7x_2 \le 552, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 567, \quad x \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

cheklash shartlarini hosil qilamiz. Endi tengsizliklardan tengliklarga o'tamiz:

$$\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 + x_3 = 784, \\ 8x_1 + 7x_2 + x_4 = 552, \\ 5x_1 + 9x_2 + x_5 = 567, \quad x_j \ge 0\ (j = 1,2,3,4,5). \end{cases}$$

Oxirgi sistemani vektor formada yozamiz:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 784 \\ 552 \\ 567 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

A_3, A_4, A_5 birlik vektorlarni boshlang'ich tayanch yechim uchun qabul qilib, x_1, x_2 noma'lumlarni *0* ga teng deymiz. Natijada $X_0 = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 784,\ x_4 = 552,\ x_5 = 567)$ tayanch yechimni olmiz, bunga

$$x_3 A_3 + x_4 A_4 + x_5 A_5 = A_0$$

yoyilma mos keladi.

X_0 yechimning optimalligini tekshirish uchun birinchi simpleks jadvalni tuzamiz:

1-simpleks jadval.

i	*Bazis-lar*	*Bazis koeffi-siyent-lar Sb*	A_0	*4*	*6*	*0*	*0*	*0*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	*0*	*784*	*16*	*4*	*1*	*0*	*0*
2	A_4	*0*	*552*	*8*	*7*	*0*	*1*	*0*
3	A_5	*0*	*567*	*5*	*9*	*0*	*0*	*1*
m+1	$Z_j - C_j$		*0*	*-4*	*-6*	*0*	*0*	*0*

$Z(X_0)$ va $Z_j - C_j$ baholarni hisoblaymiz:

$$Z(X_0) = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 784 + 0 \cdot 552 + 0 \cdot 567 = 0,$$

$Z_1 = C_B X_1 = 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 9 = 0$, $\quad Z_2 = C_B X_2 = 0$, $\quad Z_3 = C_B X_3 = 0$, $\quad Z_4 = C_B X_4 = 0$, $Z_5 = C_B X_5 = 0$, $\quad Z_1 - C_1 = 0 - 4 = -4$, $\quad Z_2 - C_2 = 0 - 6 = -6$, $\quad Z_3 - C_3 = 0 - 0 = 0$, $Z_4 - C_4 = 0 - 0 = 0$, $Z_5 - C_5 = 0 - 0 = 0$.

Olingan baholar ichida ikkita, $Z_1 - C_1 = -4 < 0$, $Z_2 - C_2 = -6 < 0$ manfiy baholar mavjud bo'lib, ular boshlang'ich tayanch yechim optimal emasligini bildiradi. Bazisga $\min(C_j) = -6$ bo'lgan vektor A_2 ni kiritamiz. $\min\left(\frac{784}{4}; \frac{552}{7}; \frac{567}{9}\right) = 63$ bo'lganligi uchun ochuvchi (kalit) element 9 bo'lib, u joylashgan ustun va satrlar yo'naltiruvchi bo'ladi. Demak, bazisga A_2 vektorni kiritib A_6 vektorni bazisdan chiqaramiz. 2-simpleks jadvalni tuzamiz:

2-simpleks jadval.

i	*Bazis-lar*	*Bazis koeffi-siyent-lar Sb*	A_0	*4*	*6*	*0*	*0*	*0*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	*0*	*532*	*124/9*	*0*	*1*	*0*	*-4/9*
2	A_4	*0*	*111*	*37/9*	*0*	*0*	*1*	*-7/9*
3	A_2	*6*	*63*	*5/9*	*1*	*0*	*0*	*1/9*
m+1	$Z_j - C_j$		*378*	*-6/9*	*0*	*0*	*0*	*6/9*

Birinchi simpleks jadvaldagi yo'naltiruvchi (kalit) satrga mos ikkinchi simpleks jadvaldagi satrga <u>bosh satr</u> deb ataymiz va uning elementlarini hisoblashdan boshlaymiz: 3-satr ya'ni yo'naltiruvchi (kalit) satr elementlarini ochuvchi (kalit) elementga bo'lib, 63, 5/9, 1, 0, 0, 1/9 larni topamiz. Bu satrni 4 ga ko'paytirib 1-satr mos elementlaridan ayirib 532, 124/9, 0, 1, 0, -4/9, 2-simpleks jadval birinchi satr elementlarini, 7 ga ko'paytirib 2-satr elementlaridan ayirib, 111, 37-9, 0, 0, -7/9, 2-jadvalning 2-satr elementlarini hisobladik. Endi 6 ga ko'paytirib (*m+1*) satr mos elementlariga qo'shib 378, -6/9, 0, 0, 0, 6/9 2-jadvalning (*m+1*) satr elementlarini olamiz.

2-simpleks jadvalda

$$X_0^{(1)} = (x_1 = 0, x_2 = 63, x_3 = 532, x_4 = 111, x_5 = 0)$$

2-tayanch yechim olindi. Bu yechimga chiziqli funksiyaning

$$Z(X_0^{(1)}) = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 63 + 0 \cdot 532 + 0 \cdot 111 + 0 \cdot 0 = 372$$

qiymati mos keladi.

(*m+1*) - satrda $Z_1 - C_1 = -6/9$ manfiy baho mavjud bo'lganligi uchun $X_0^{(1)}$ yechim optimal emas. A_1 vektor bazisga kiritilishi kerak. $\min\left(\frac{532}{124/9}; \frac{111}{37/9}; \frac{63}{5/9}\right) = \frac{111}{37/9} = 27$ bo'lib, 37/9 ochuvchi (kalit) element bo'ladi.

Bazisdan A_4 vektor chiqariladi, 3-simpleks jadvalda bosh satr 2-satr bo'lib uning elementlari mos ravishda

27, 1, 0, 0, 9/37, -7/37

bo'ladi. Oldingi jadvaldagidek, Jordan-Gauss to'la yo'qotish usulidan foydalanib, boshqa satrlar elementlarni hisoblab, 3-simpleks jadvalni tuzamiz:

3-simpleks jadval.

i	*Bazis-lar*	*Bazis koeffi-siyent-lar Sb*	A_0	*4*	*6*	*0*	*0*	*0*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	*0*	*160*	*0*	*0*	*1*	*-124/37*	*80/37*
2	A_1	*4*	*27*	*1*	*0*	*0*	*9/37*	*-7/37*

3-simpleks jadval.

i	*Bazislar*	*Bazis koeffi-siyent-lar Sb*	A_0	5	3	4	1	-M	-M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_2	3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4
2	A_1	5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4
M+1	$Z_j - C_j$		6	0	0	-3	2	-1	3
M+2	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	0	1	1

3-jadvalda ($m+2$) katrda sun'iy bazis baholaridan tashqari hamma baholar 0 ga teng bo'ladi:

M sonning tanlanishiga asosan A_5 va A_6 vektorlar endi bazisga tushmaydi, shuning uchun uni bundan keyin qaramasak ham bo'ladi, lekin, teskari matritsani olish uchun uni saqlash mumkin.

$\overline{X}_0^2 = (3/4, 3/4, 0, 0, 0, 0)$ tayanch yechim berilgan masalaning ham yechimi bo'ladi, lekin u optimal emas, chunki ($m+1$) satrda manfiy baho mavjud. Endi yechimni yaxshilash ($m+1$) satr bo'yicha olib boriladi. $Z_3 - C_3 = -3 < 0$ bo'lganligi uchun A_3 vektor ustuni yo'naltiruvchi (kalit) ustun, A_2 vektor satri yo'naltiruvchi (kalit) satr, 3/4 ochuvchi (kalit) element bo'lib, $m+2$ katr endi hisobga olinmaydi. Yuqorida ko'rsatilgan usul bilan 4-simpleks jadvalni tuzamiz:

4-simpleks jadval.

i	*Bazislar*	*Bazis koeffi-siyent-lar Sb*	A_0	5	3	4	1	-M	-M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3
2	A_1	5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3
M+1	$Z_j - C_j$		9	0	4	0	5	1+M	2+M

4-simpleks jadvaldan qo'yilgan masalaning optimal yechimi $\overline{X} = (1, 0, 1)$ bo'lib, $Z_{max}(\overline{X}) = 9$ bo'ladi. Birinchi va ikkinchi satrlarni o'zaro almashtirib, A_5 va A_6 vektorlar ustunida teskari matritsani hosil qilamiz.

Qaralgan misoldan ko'rinadiki, cheklash shartlarida birlik matritsa mavjud bo'lsa, m ta jadval, sun'iy bazis kiritilgan bo'lsa, taxminan $2m$ ta jadval tuziladi.

5. Aralash shartli masalalar.

Chiziqli dasturlash masalasi quyidagicha qo'yilgan bo'lsin:

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0 \; (j = 1,2,...,n) \end{cases}$$

cheklash shartlari sistemasini qanoatlantiruvchi minimal qiymatini toping.

Bu cheklash shartlari k ta tengsizliklar $(1 \le k \le m)$ va m-k ta tenglamalardan iborat bo'lib, m tartibli, birlik matritsaga ega emas. Bunday cheklash shartlari mavjud bo'lgan chiziqli dasturlash masalasiga chiziqli dasturlashning aralash shartli masalasi deyiladi. Bunday masalalarning bazisi qo'shimcha va sun'iy bazis vektorlaridan iborat bo'ladi.

Aralash shartlar sistemasida d ta tenglamalar bo'lsin. Boshlang'ich tayanch yechimni olish uchun d dan ko'p bo'lmagan sun'iy o'zgaruvchilar kiritish kerak bo'ladi.

1-misol. $z = -x_1 - 2x_2 + x_3$ chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ \;\; x_1 + \; x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - \; x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \ge 0 \; (j = 1,2,3) \end{cases}$$

cheklash shartlarini qanoatlantiruvchi minimal qiymatini toping.

Yechish. Bu masalada tengsizliklardan tenglamalarga o'tsak, ikkita sun'iy o'zgaruvchi kiritishga to'g'ri keladi. Bunday qilmaslik uchun, ikkinchi tengsizlikni 2 ga bo'lib, keyin uni tenglamaga aylantiramiz va hosil bo'lgan tenglamani uchinchi tenglamadan ayiramiz, hamda 3-tenglamaga sun'iy o'zgaruvchi kiritamiz: natijada ushbu chiziqli dasturlash masalasini hosil qilamiz:

$$z = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot x_6$$

chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ 3/2 \cdot x_1 + 3/2 \cdot x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - \; x_2 + 2x_3 + x_6 = 4, \\ x_j \ge 0 \; (j = 1,2,...,6) \end{cases}$$

cheklash shartlari sistemasini qanoatlantiruvchi minimal qiymatini toping.

Masala, vektor formada

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 = A_0$$

bo'ladi. A_4, A_5, A_6 vektorlarni bazis uchun olamiz, bular aralash bazisdan iborat bo'ladi. Erkin o'zgaruvchi x_1, x_2, x_3 larni 0 ga tenglashtirib, $X_0 = (0, 0, 0, 6, 1, 4)$ boshlang'ich tayanch yechimga ega bo'lamiz. Simpleks usul bilan 1-jadvalni hosil qilib, optimal yechim $X_0^{(3)} = (14/5, 12/5, 2/5)$ ekanligini aniqlaymiz va $Z_{min} = -36/5$ bo'ladi.

1-jadval.

i	*Bazislar*	*Bazis koeffi-siyent-lar Sb*	***A₀***	*-1*	*-2*	*1*	*0*	*0*	*M*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	*0*	*6*	*-1*	*4*	*-2*	*1*	*0*	*0*
2	A_5	*0*	*1*	*3/2*	*-3/2*	*1*	*0*	*1*	*0*
3	A_6	*M*	*4*	*2*	*-1*	*2*	*0*	*0*	*1*
m+1	$Z_j - C_j$		*0*	*1*	*2*	*-1*	*0*	*0*	*0*
m+2	$Z_j - C_j$		*4*	*2*	*-1*	*2*	*0*	*0*	*0*
1	A_4	*0*	*8*	*2*	*1*	*0*	*1*	*2*	*0*
2	A_3	*1*	*1*	*3/2*	*-3/2*	*1*	*0*	*1*	*0*
3	A_6	*M*	*2*	*-1*	*2*	*0*	*0*	*-2*	*1*
m+1	$Z_j - C_j$		*1*	*5/2*	*1/2*	*0*	*0*	*1*	*0*
m+2	$Z_j - C_j$		*2*	*-1*	*2*	*0*	*0*	*-2*	*0*
1	A_4	*0*	*7*	*5/2*	*0*	*0*	*1*	*3*	*-1/2*
2	A_3	*1*	*5/2*	*3/4*	*0*	*1*	*0*	*-1/2*	*3/4*
3	A_2	*-2*	*1*	*-1/2*	*1*	*0*	*0*	*-1*	*1/2*
m+1	$Z_j - C_j$		*1/2*	*11/4*	*0*	*0*	*0*	*3/2*	*(-1/4)-M*
1	A_1	*-1*	*14/5*	*1*	*0*	*0*	*2/5*	*6/5*	*-1/5*
2	A_3	*1*	*2/5*	*0*	*0*	*1*	*-3/10*	*-7/5*	*9/10*
3	A_2	*-2*	*12/5*	*0*	*1*	*0*	*1/5*	*-2/5*	*2/5*
m+1	$Z_j - C_j$		*-36/5*	*0*	*0*	*0*	*-11/5*	*-9/5*	*(3/10)-M*

chiziqli dasturlash masalasi cheklash shartlari fakat $AX \geq A_0, A_0 \geq 0$ ko'rinishdagi shartlardan iborat bo'lsa, uni bazisda bitta sun'iy vektor bo'lgan masalaga keltirish mumkin. Buning uchun oldin tengsizliklarni $AX - X' = A_0$, (bunda $X' = (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+m})$) qo'shimcha o'zgaruvchilar ko'rinish-dagi tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Tenglamalardan $\max b_i \; (i = 1, 2, ..., m)$ bo'lganidan qolgan tenglamalarni ayirib, (*m-1*) shartlarda birlik vektorlarni hosil qilish mumkin bo'ladi. $\max b_i$ bo'lgan tenglamada sun'iy o'zgaruvchi kiritiladi.

Mavzuning tayanch tushunchalari

Mumkin bo'lgan yechim, tayanch reja, maxsusmas reja, maxsus reja, optimal reja, yechimlar ko'pburchagi, sath chizig'i, simpleks usul, rejani ketma-ket yaxshilash, ochuvchi (kalit) element, yo'naltiruvchi (kalit) satr, yo'naltiruvchi (kalit) ustun, bosh satr, chiziqli dasturlashning kanonik masalasi, boshlang'ich reja, optimallik sharti, simpleks usul algoritmi, sun'iy bazis, aralash shartli masalalar.

Takrorlash uchun savollar

22. Chiziqli dasturlash (CHD) nima?
23. Chiziqli dasturlash masalasi (CHDM) vektor formada qanday yoziladi?
24. CHDM ning kanonik ko'rinishi nima?
25. CHDMning geometrik tasvirini nechta o'zgaruvchi uchun ko'rsatish mumkin?
26. Simpleks usulning mohiyati nimadan iborat?
27. Simpleks usulning optimallik sharti qanday?
28. Ochuvchi (kalit) element deb nimaga aytiladi?
29. Yo'naltiruvchi (kalit) ustun va satr deb nimaga aytiladi?
30. Bosh satr qanday satr?
31. Maqsadli funksiya nima?
32. Cheklash shartlarida qanday shartlar bo'lishi mumkin?
33. $(m+1)$ satr baholari qanday topiladi?
34. Birinchi simpleks jadval qanday tuziladi?
35. Qanday holda 2-simpleks jadvalni tuzishga o'tiladi?
36. 2-simpleks jadval qanday tuziladi?
37. Chiziqli funksiyaning chegaralanmaganlik sharti simpleks jadvalda qanday ifodalanadi?
38. Simpleks jadvallardan optimal yechimning yagonaligi qanday aniqlanadi?
39. Sun'iy o'zgaruvchi qanday holda kiritiladi?
40. Sun'iy bazis usuli nima?
41. Qanday masalalarga aralash shartli masalalar deyiladi?
42. Aralash shartli masalalar qanday masalaga keltiriladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

Ushbu CHDMning maksimum va minimum qiymatlarini geometrik usulda toping.

1. $f = 5x_1 + 3x_2$,
2. $f = x_1 + 2x_2$,

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ -2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ x_1 \le 5, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + 6x_2 \le 3, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $f = 10x_1 + 6x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 7x_1 + 9x_2 \le 63, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $f = 4x_1 + 2x_2$,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \ge 15, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. $f = 3x_1 + x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 5x_1 - 4x_2 \ge -2, \\ 7x_1 + 5x_2 \ge 35, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. $f = 12x_1 + 15x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. $f = x_1 + 3x_2$,

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. $f = x_1 + x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9. $f = 2x_1 + 3x_2$,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 6x_2 \le 12, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10-19 masalalarda ikki xildagi mahsulot ishlab chiqarish uchun uch turdagi xom ashyo ishlatiladi. $i\,(i = 1,2,3)$ turdagi xom ashyo miqdori b_i. Bir birlik $j\,(j = 1,2)$ xildagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan $i\,(i = 1,2,3)$ turdagi xom ashyo miqdori (a_{ij}), xom ashyo zahirasi b_i va 1 birlik mahsulotni realizatsiya qilishdan olinadigan foyda (c_j), quyidagi matritsa bilan berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \\ c_1 & c_2 & f \end{pmatrix},$$

Umumiy foyda f eng katta bo'ladigan mahsulotlar ishlab chiqarish rejasini simpleks usuldan foydalanib tuzing:

10. $\begin{pmatrix} 10 & 9 & 1870 \\ 5 & 11 & 1455 \\ 4 & 15 & 1815 \\ 7 & 9 & f \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 15 & 4 & 1095 \\ 11 & 5 & 855 \\ 9 & 10 & 1080 \\ 3 & 2 & f \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 840 \\ 6 & 3 & 870 \\ 3 & 2 & 560 \\ 6 & 2 & f \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 11 & 3 & 671 \\ 8 & 4 & 588 \\ 5 & 3 & 423 \\ 5 & 2 & f \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 438 \\ 3 & 6 & 747 \\ 3 & 7 & 812 \\ 7 & 5 & f \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 16 & 4 & 784 \\ 8 & 7 & 552 \\ 5 & 9 & 567 \\ 4 & 6 & f \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 428 \\ 3 & 6 & 672 \\ 2 & 8 & 672 \\ 3 & 8 & f \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 440 \\ 3 & 4 & 393 \\ 3 & 5 & 450 \\ 6 & 5 & f \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 480 \\ 3 & 4 & 444 \\ 2 & 6 & 556 \\ 2 & 4 & f \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 684 \\ 10 & 5 & 690 \\ 3 & 6 & 558 \\ 2 & 3 & f \end{pmatrix}$

20. $z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$ chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_j \ge 0, \ (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

cheklash shartlarini qanoatlantiruvchi maksimum qiymatini sun'iy bazis usulidan foydalanib toping.

21. $z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$ chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0, \ (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

cheklash shartlari sistemasini qanoatlantiruvchi minimum qiymatini simpleks usul bilan toping.

22. $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4$ chiziqli funksiyaning

17-amaliy mashg'ulot

Transport masalasini yechishning shimoli-g'arb burchak usuli.

1. Transport masalasining qo'yilishi.
2. Transport masalasini yechishning shimoli-g'arb burchak usuli.
3. Transport masalasini yechishning potensiallar usuli.

Hozirgi paytda transport masalasi modeli nazariyada ham, har xil iqtisodiy jarayonlarni rejalashtirishda ham keng qo'llanilmoqda. Ayniqsa, muhim bo'lgan sanoat va qishloq xo'jalik mahsulotlarini ratsional yetishtirib berishda, hamda katta yuklar oqimini tashishda va boshqa transport ishlarini optimal rejalashtirishda katta ahamiyatga egadir.

1) Masalaning qo'yilishi va matematik modeli. Bir jinsli mahsulot m ta A_i $(i=\overline{1,m})$ ta'minlovchilarda mos ravishda a_i $(i=\overline{1,m})$ birlik miqdorda bo'lsin, shu mahsulotlarni n ta iste'molchilarga mos ravishda b_j $(j=\overline{1,n})$ birlik miqdorda yetkazib berish kerak bo'lsin, i-ta'minlovchidan j-iste'molchiga tashish harajati C_{ij} aniq bo'lsin. Yukni tashishni shunday rejalashtirish kerakki, hamma iste'molchilarning talabi qondirilib tashishga ketgan harajat minimal bo'lsin. x_{ij} - i-ta'minlovchidan j - iste'molchiga rejalashtirilgan yukning miqdori bo'lsin. Bu holda masala shartini quyidagi jadval ko'rinishida yozish mumkin.

1-jadval

Ta'minlovchilar	Iste'molchilar				Zahiralar
	V_1	V_2	...	Vn	
A_1	K_{11} x_{11}	K_{12} x_{12}	...	K_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	K_{21} x_{21}	K_{22} x_{22}	...	K_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
Am	Km_1 xm_1	Km_2 xm_2	...	Kmn xmn	am
Talablar	b_1	b_2	...	bn	$\sum a_{ij} = \sum b_{ij}$

Bu jadvalga rejalashtirish matritsasi deyiladi.

Masalaning matematik modelini tuzamiz. i - ta'minlovchidan j - iste'molchiga rejalashtirilgan yukning miqdori x_{ij} yuk birligida bo'lganligi uchun, tashish bahosi $C_{ij}x_{ij}$ bo'ladi. Butun rejalashtirish bahosi quyidagi yig'indidan iborat bo'ladi:

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}\ .$$

Cheklash shartlari sistemasi quyidagicha bo'ladi:

a) hamma yuk tashilishi kerak, ya'ni $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ (i=1,2,\ldots,m)$

bu tenglamalar yuqoridagi jadval satrlaridan olinadi;

b) hamma talablar qanoatlantirilishi kerak, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ (j=1,\ldots,n),$$

bu tenglamalar jadvaldagi ustunlardan olinadi.

Shunday qilib, transport masalasining matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$ chiziqli funksiyaning

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ (i=\overline{1,m}),\tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ (j=1,2,\ldots,n),\tag{2}$$

$$x_{ij}\geq 0,\ (i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$$

cheklash shartlar sistemasini qanoatlantiradigan, eng kichik qiymatini toping.

Qaralayotgan modelda

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\tag{3}$$

bo'ladi. Bunday modelga yopiq model deyiladi.

Teorema: Zahiralar jami miqdori talablar jami miqdoriga teng bo'lgan istalgan transport masalasi yechimga ega.

3-tenglik bajarilmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\neq\sum_{j=1}^{n}b_j$$

bo'lsa, transport masalasining ochiq modeli kelib chiqadi. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin: a) ta'minlovchilardagi yuklar jami miqdori, iste'molchilar jami talabidan kam bo'lishi, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m}a_i<\sum_{j=1}^{n}b_j\ ;$$

b) ta'minlovchilardagi yuklarning jami miqdori, iste'molchilar jami talabi miqdoridan ko'p bo'lishi, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j\ .$$

Ikkala holda ham, birinchisida soxta ta'minlovchi, ikkinchisida soxta iste'molchi kiritish bilan masalani transport masalasining yopiq modeliga keltirish mumkin.

Birinchi holda, yuk miqdori

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

ayirmaga teng, soxta ta'minlovchi, ikkinchi holda esa talab miqdori

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ayirmaga teng bo'lgan soxta iste'molchi kiritib, yopiq modelga kelamiz. Bunda soxta ta'minlovchidan yuklarni tashish harajati sifatida soxta ta'minlovchi satrida, bir xil bo'lgan istalgan sonni olish mumkin. Odatda ularni 0 deb olinadi. Soxta iste'molchi ustunida ham tashish harajati sifatida bir xil ixtiyoriy sonni olish mumkin, bu yerda ham odatda 0 olinadi.

Transport masalasining ochiq modelida optimal yechim topilgandan keyin mavjud bitta yoki bir nechta iste'molchining talabi ta'minlanmay qoladi, xuddi shuningdek, ikkinchi holda, mavjud yuklarning ortig'i bir yoki bir necha ta'minlovchida taqsimlanmay qoladi.

Transport masalasining (1) va (2) shartlar sistemasini qaraymiz. Bu sistema $m \cdot n$ noma'lumdan va (3) munosabat bilan bog'langan $m+n$ tenglamalardan iborat. (1) va (2) sistemalarni alohida hadlab qo'shsak ikkita bir xil tenglama hosil qilamiz. 1-jadvalda bunday qo'shish ustunlarni va satrlarni hadlab qo'shish, bilan teng kuchlidir. Cheklash shartlar sistemasida ikkita bir xil tenglamalarning bo'lishi, ularning chiziqli bog'langanligini bildiradi. Bulardan birini hisobga olmasak shartlar sistemasi $m+n-1$ chiziqli bog'lanmagan tenglamalarni o'z ichiga oladi. Demak, boshlang'ich mumkin bo'lgan bazis yechim $m+n-1$ bazis o'zgaruvchisini o'z ichiga olishi kerak. Boshlang'ich rejani tuzishning bir necha usullari mavjud.

2). Shimoliy-g'arbiy burchak usuli.

Bu usulda x_{ij} larning qiymatini aniqlash shimoliy-g'arbiy burchakdan boshlanadi. $x_{ij} = \min(a_1, b_1)$ olinib, bu yerda 3 ta hol bo'lishi mumkin: a) $a_1 < b_1$ bo'lsa, $x_{11} = a_1$ bo'lib, $i = 1$ satr keyin qaralmay, birinchi iste'molchining talabi a_1 ga kamayadi;

b) $a_1 > b_1$ bo'lsa, $x_{11} = b_1$ bo'lib, $j = 1$ ustun keyin qaralmaydi va birinchi ta'minlovchidagi yuk b_1 ga kamayadi;

v) $a_1 = b_1$ bo'lsa, $x_{11} = a_1 = b_1$ bo'lib, $i = 1$ satr va $j = 1$ ustun keyin qaralmaydi, bu variant maxsus rejaga olib keladi. Oxirgi qadamda bitta satr va bitta ustun qolib, u to'ldirilib jarayon tamom bo'ladi.

Ma'lumki, olingan yechimda to'ldirilgan katakchalar soni $m+n-1$ bo'lishi kerak, shuning uchun ham bu rejada uni tekshirib ko'rish kerak bo'ladi. Agar bu shart bajarilmasa, ya'ni to'ldirilgan katakchalar soni $m+n-1$ dan kam bo'lsa, olingan plan maxsus bo'lib, bunda eng kam baholi katakchalarga *0* qo'yish bilan ular sonini $m+n-1$ ga yetkaziladi. *0* larni qo'yishda jadvalda hamma uchlari to'ldirilgan to'g'ri to'rtburchaklar bo'lmasligi kerak. Masalan, $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ yoki $x_{11}, x_{1n}, x_{21}, x_{2n}$ lar birdaniga to'ldirilmasligi kerak.

3) Transport masalasini taqsimot usuli bilan yechish. Transport masalasini bu usul bilan yechishni sonli misolda qaraymiz. Transport masalasi 1-jadval bilan berilgan bo'lsin.

1-jadval.

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1	*250 t*	7	9	16	10	16
A_2	*350 t*	13	12	18	12	20
A_3	*300 t*	19	15	10	13	13
Talablar	900	*150 t*	*170 t*	*190 t*	*210 t*	*180 t*

Yechish: Bu masalada zahiralar miqdori talablar yig'indisiga teng, demak, masala yopiq transport masalasidir.

Birinchi rejani shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib tuzamiz. V_1 iste'molchiga A_1 ta'minlovchidan 150 t rejalashtirib, A_1 ta'minlovchidagi yuk 150 t ga kamayib 100 t bo'ladi va V_1 iste'molchi qanoatlantiriladi. A_1 ta'minlovchidagi qolgan 100 t yukni V_2 iste'molchiga rejalashtiramiz, uning talabi 170 t bo'lganligi uchun A_2 ta'minlovchidan 70 t berilib, V_2 iste'molchi ham qanoatlantiriladi va A_2 ta'minlovchidagi yuk 70 t ga kamayib, 280 t bo'ladi. A_2 ta'minlovchidagi yukdan 190 t yukni V_3 iste'molchiga rejalashtirib, qolgan yukni V_4 iste'molchiga va hokazo, bu jarayonni davom ettirib, oxiri A_3 ta'minlovchida 180 t yuk qolib, uni V_5 iste'molchiga rejalashtirib, hamma talablar qanoatlantiriladi, zahirada yuk qolmaydi. Bularni quyidagi jadvalda yozamiz.

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1	*250 t*	7 150	9 100	16	10	16
A_2	*350 t*	13	12 70	18 190	12 90	20
A_3	*300 t*	19	15	10	13 120	13 180
Talablar	900	*150 t*	*170 t*	*190 t*	*210 t*	*180 t*

Shunday qilib, boshlang'ich rejani shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib tuzdik. Bu masalada ta'minlovchilar soni $m=3$, iste'molchilar soni

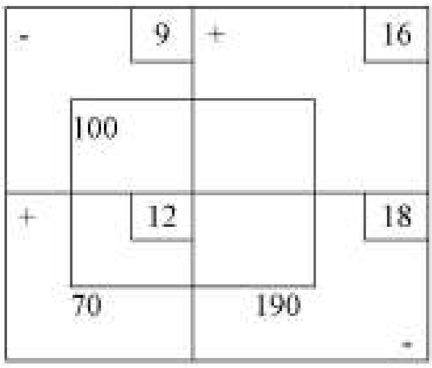
$n=5$, to'ldirilgan katakchalar soni 7 ta. $m+n-1=3+5-1=7$ bo'lganligi uchun, olingan reja maxsusmas bo'ladi.

Boshlang'ich taqsimlash uchun umumiy tashish harajatini hisoblaymiz:

$S_1 = 150\cdot 7 + 100\cdot 9 + 70\cdot 12 + 190\cdot 18 + 90\cdot 12 + 120\cdot 13 + 180\cdot 13 =$

$= 1050 + 900 + 840 + 3420 + 1080 + 1560 + 2340 = 11190$ so'm (ta'riflar so'mlarda deb olindi).

Endi tuzilgan rejaning optimal yoki optimalmasligini tekshiramiz. Buning uchun har bir bo'sh katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl) hosil qilib, bular bo'yicha baholarning algebraik yig'indisini hisoblaymiz. Masalan, 1-satr va 3-ustun uchun yopiq siniq chiziq zanjiri quyidagicha bo'ladi:



Bunda bo'sh katak ishorasi (+) bo'lib, qolganlari navbat bilan almashinadi (bu yerda navbat soat strelkasi yo'nalishi yoki unga qarama-qarshi yo'nalishda bo'lishi mumkin, uning farqi yo'q).

Bu baholar algebraik yig'indisini Δ_{13} bilan belgilasak, $\Delta_{13} = 16-18+12-9=1;$ bo'ladi. Xuddi yuqoridagidek qolgan bo'sh kataklar uchun ular quyidagicha bo'ladi:

$\Delta_{14} = 10-12+12-9 = 22-21 = 1;$

$\Delta_{15} = 16-13+13-12+12-9 = 7;$

$\Delta_{21} = 13-7+9-12 = 22-19 = 3;$

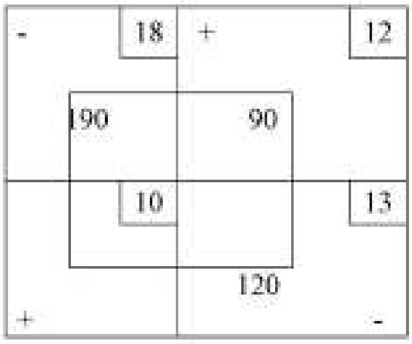
$\Delta_{25} = 20-12+13-13 = 8;$

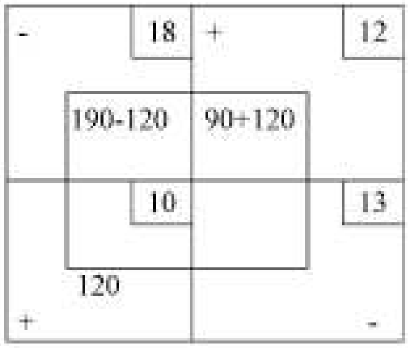
$\Delta_{31} = 19-7+9-12+12-13 = 18-20 = -2;$

$\Delta_{32} = 15-12+12-13 = 15-13 = 2;$

$\Delta_{33} = 10-18+12-13 = 22-31 = -9.$

Baholar (ta'riflar) algebraik yig'indilarida manfiy sonlarning bo'lishi, tuzilgan reja optimal emasligini ko'rsatadi va rejani yaxshilash mumkin bo'ladi. Endi yangi reja tuzamiz, buning uchun manfiy sonlardan eng kichigi olinadi, ular bir necha bo'lsa, ixtiyoriysini olib taqsimlashni shu katak uchun tuzilgan yopiq siniq chiziq zanjiri bo'yicha o'zgartiramiz. Qaralayotgan misolda eng kichik manfiy algebraik yig'indi (-9) bo'lganligi uchun 3-satr 3-ustundagi katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl)ni qaraymiz:





Manfiy kataklardagi yuk miqdorining eng kichigini (bu 13 baholi katakchada bo'lib, 120 ga teng) olib, uni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo'shib, yangi reja hosil qilamiz. Bu o'zgarishni jadvalda amalga oshirib (boshqa katakchalardagi sonlar o'zgarmaydi) quyidagi yangi rejani olamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1	*250 t*	7 *150*	9 *100*	16	10	16
A_2	*350 t*	13	12 *70*	18 *70*	12 *210*	20
A_3	*300 t*	19	15	10 *120*	13	13 *180*
Talablar	900	*150 t*	*170 t*	*190 t*	*210 t*	*180 t*

Bu tuzilgan yangi reja uchun yuk tashish jami bahosini hisoblaymiz:

$$S_2 = 150\cdot 7 + 100\cdot 9 + 70\cdot 12 + 70\cdot 18 + 210\cdot 12 + 120\cdot 10 + 180\cdot 13 =$$
$$= 1050 + 900 + 840 + 1260 + 2520 + 1200 + 2340 = 10110 \text{ so'm.}$$

Demak, umumiy harajat $S_2 - S_1 = 11190 - 10110 = 1080$ ga kamaydi.

Endi tuzilgan rejaning optimalligini tekshiramiz. Buning uchun yangi tuzilgan rejadagi bo'sh katakchalar uchun baholarning algebraik yig'indisini hisoblaymiz:

$\Delta_{13} = 16 - 18 + 12 - 9 = 28 - 27 = 1;$

$\Delta_{14} = 10 - 12 + 12 - 9 = 10 - 9 = 1;$

$\Delta_{15} = 16 - 13 + 10 - 18 + 12 - 9 = 38 - 40 = -2;$

$\Delta_{21} = 13 - 7 + 9 - 12 = 22 - 19 = 3;$

$\Delta_{25} = 20 - 18 + 10 - 13 = 30 - 31 = -1;$

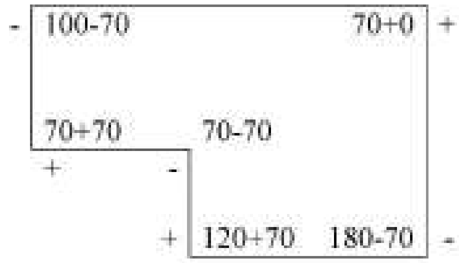
$\Delta_{31} = 19 - 7 + 9 - 12 + 18 - 10 = 46 - 29 = 17;$

$\Delta_{32} = 15 - 12 + 18 - 10 = 33 - 22 = 11;$

$\Delta_{34} = 13 - 12 + 18 - 10 = 31 - 22 = 9.$

Δ_{15} va Δ_{25} baholar manfiy, bulardan kichigi $\Delta_{15} = -2$ bo'lganligi uchun shu katakcha uchun yopiq siniq chiziqlar zanjirini qaraymiz:

	- 9 100		+ 16
	+ 12 70	- 18 70	
		+ 10 120	- 13 180



Bu zanjirda manfiy burchaklardagi eng kichik yuk 70 bo'lib, uni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo'shib, yaxshilangan planni tuzamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1	*250 t*	*7* *150*	*9* *30*	*16*	*10*	*16* *70*
A_2	*350 t*	*18*	*12* *140*	*18*	*12* *210*	*20*
A_3	*300 t*	*19*	*15*	*10* *190*	*13*	*13* *110*
Talablar	900	*150 t*	*170 t*	*190 t*	*210 t*	*180 t*

Bu olingan reja bo'yicha umumiy harajat:
$S_3 = 150 \cdot 7 + 30 \cdot 9 + 70 \cdot 16 + 140 \cdot 12 + 210 \cdot 12 + 190 \cdot 10 + 110 \cdot 13 = 9940$ so'm bo'lib oldingi rejaga nisbatan $S_3 - S_2 = 170$ so'mga yaxshilandi.

Olingan rejadagi bo'sh katakchalar uchun baholarning algebraik yig'indisini hisoblaymiz:

$\Delta_{13} = 16 - 16 + 13 - 10 = 29 - 26 = 3;$

$\Delta_{14} = 10 - 12 + 12 - 9 = 1;$

$\Delta_{21} = 13 - 12 + 9 - 7 = 22 - 19 = 3;$

$$\Delta_{23} = 18 - 10 + 13 - 16 + 9 - 12 = 40 - 38 = 2;$$
$$\Delta_{24} = 20 - 16 + 9 - 12 = 29 - 28 = 1;$$
$$\Delta_{31} = 19 - 13 + 16 - 7 = 35 - 20 = 15;$$
$$\Delta_{32} = 15 - 13 + 16 - 9 = 31 - 22 = 9;$$
$$\Delta_{34} = 13 - 13 + 16 - 9 + 12 - 12 = 7.$$

Shunday qilib, tuzilgan reja uchun baholarning algebraik yig'indilari ichida manfiylari yo'q, shuning uchun bu tuzilgan reja optimal bo'lib, umumiy harajat $S_2 = 9940$ ko'm bo'ladi va uni endi yaxshilash mumkin emas.

4). <u>Transport masalasini potensiallar usuli bilan yechish</u>. Biror usuldan foydalanib boshlang'ich yechim topilgandan keyin uni optimal yechimgacha yaxshilash uchun potensiallar deb ataluvchi usuldan foydalanish mumkin.

Potensiallar usuli algorifmini qaraymiz:

1-qadam. Har bir A_i - ta'minlovchiga α_i $(i = \overline{1,m})$ sonni mos qo'yamiz, bu songa A_i ning potensiali deb ataladi. B_j iste'molchiga ham β_j $(j = \overline{1,n})$ sonni mos qo'yamiz va unga B_j ning potensiali deyiladi.

Har bir to'ldirilgan katak uchun ya'ni har bir bazis o'zgaruvchi uchun

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \qquad (1)$$

tenglik tuziladi. Hosil qilingan sistema $m + n - 1$ ta tenglamadan iborat, chunki bazis o'zgaruvchilari soni $m + n - 1$ (to'ldirilgan kataklar soni) edi. Hamda $m + n$ ta no'malumga ega bo'ladi. Ma'lumki, bunday tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lib, ularning istalgani izlanayotgan potensiallarni o'z ichiga oladi. Bu yechimlardan birontasini topish uchun, sistemadagi birorta potensialga ixtiyoriy qiymat beriladi. Odatda $\alpha_1 = 0$ yoki $\alpha_1 = 1$ deb olinib, boshqa potensiallar qiymati topiladi.

2-qadam. Har bir to'ldirilmagan katak uchun ya'ni bazisda bo'lmagan o'zgaruvchi uchun qo'shimcha tarif (narx) deb ataluvchi

$$c'_{ij} = \alpha_i + \beta_j \qquad (2)$$

larni hisoblaymiz.

3-qadam. Olingan yechimning optimalligini tekshiramiz. Har bir to'ldirilmagan katak uchun

$$S_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} \qquad (3)$$

larni hisoblaymiz. Hamma S_{ij} lar uchun $S_{ij} \geq 0$ bo'lsa, olingan reja optimal bo'ladi, aks holda reja optimal bo'lmaydi va uni yaxshilash kerak bo'ladi. Rejani qo'shimcha ta'rif eng kichik manfiy sonli katak uchun, yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl) bo'yicha o'zgartiramiz. Bu hol taqsimot usulidagidek bajariladi. Bu o'zgarishni jadvalda bajarib yangi yaxshilangan reja olinadi va yana 1-qadamga o'tiladi.

Potensiallar usulini sonli misolda qaraymiz.

1-misol. A_1 ta'minlovchida $a_1 = 11$ tonna, A_2 ta'minlovchida $a_2 = 14$ tonna yuk bor. Ta'minlovchilardagi yuklarni B_1 iste'molchiga $b_1 = 10$ tonna, B_2 iste'molchiga $b_2 = 8$ tonna, B_3 iste'molchiga $b_3 = 7$ tonna miqdorda taqsimlashni tashkil qilish kerak bo'lsin. C_{ij} i-ta'minlovchidan j-iste'molchiga yuk 1 birligini tashish bahosi (so'mlarda) quyidagi matritsa bilan berilgan:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(sonlar shartli, ataylab kichik qilib olindi).

Yukni taqsimlashning shunday rejasini tuzingki, uni tashish uchun ketadigan umumiy transport harajati minimal bo'lsin. Masalani potensiallar usuli bilan yeching.

Yechish. Masala shartida berilganlarni jadval ko'rinishda yozamiz va boshlang'ich bazis yechimni shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib tuzamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar		
		V_1	V_2	V_3
A_1	$a_1=11$	8 10	6 1	5
A_2	$a_2=14$	4	5 7	7 7
Talablar	25	$b_1=10$	$b_2=8$	$b_3=7$

2+3-1=4, to'ldirilgan katakchalar soni ham 4 ta, demak olingan reja maxsusmas bo'lib, umumiy transport harajati

$S_1 = 10 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 7 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 170$ ko'm.

1-qadam. A_1 ta'minlovchiga α_1, A_2 ta'minlovchiga α_2 potensiallarni, B_1, B_2, B_3 iste'molchilarga mos ravishda $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ potensiallarni mos qo'yamiz.

Har bir to'ldirilgan katakcha uchun (1) formulaga asosan tenglama hosil qilib, quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 8, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 6, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 7. \end{cases}$$

Sistemada noma'lumlar soni 5 ta tenglamalar soni esa 4 ta, shuning uchun α_1 ni ixtiyoriy, masalan, $\alpha_1 = 0$ deb olib, qolgan noma'lumlar qiymatini topamiz. Birinchi tenglamada $\alpha_1 = 0$ bo'lsa, $0 + \beta_1 = 8, \beta_1 = 8$ bo'ladi.

Ikkinchi tenglamadan esa $\beta_2 = 6$, uchinchi tenglamadan $\alpha_2 + 6 = 5,\ \alpha_2 = -1$ shuningdek $-1 + \beta_3 = 7, \beta_3 = 8$ ekanligini topamiz, ya'ni $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1, \beta_1 = 8$, $\beta_2 = 6, \beta_3 = 8$.

2-qadam. Har bir to'ldirilmagan katakchalar uchun c'_{ij} qo'shimcha ta'riflarni (2) formula bo'yicha topamiz:

$c'_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 8 = 8$,

$c'_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = -1 + 8 = 7$.

3-qadam. Olingan boshlang'ich yechimning optimalligini (3) formula yordamida tekshiramiz:

$S_{ij}=c_{ij}-c'_{ij}$, $S_{13}=c_{13}-c'_{13}=5-8=-3$, $S_{21}=c_{21}-c'_{21}=4-7=-3$,

$S_{13}=-3<0$, $S_{21}=-3<0$.

Ikkala katakcha uchun ham optimallik mezoni bajarilmaydi. Demak, olingan yechimni yaxshilash mumkin. Ikkala to'ldirilmagan katakchalar uchun ham

$S_{13}=S_{21}=-3$

bo'lganligi uchun ularning ixtiyoriysini olib, bu katakcha uchun yopiq siniq chiziqlar zanjirini masalan 1-3 katakcha uchun a) jadvalni tuzamiz:

a)

-	+
6 1	5
5 7	7 7
+	-

b)

6 	5 1
5 8	7 6

Manfiy burchaklardagi eng kam yukni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo'shib, b) jadvalga ega bo'lamiz. Bu o'zgarishni boshlang'ich yechim jadvaliga kirgizib ikkinchi yaxshilangan yechimni olamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar		
		V_1	V_2	V_3
A_1	$a_1=11$	8 10	6	5 1
A_2	$a_2=14$	4	5 8	7 6
Talablar	25	$b_1=10$	$b_2=8$	$b_3=7$

$S_2=8\cdot10+5\cdot1+5\cdot8+7\cdot6=80+5+40+42=167$ ko'm.

Olingan rejaning maxsusmasligini tekshiramiz: $m+n-1=2+3-1=4$ bo'lib, to'ldirilgan katakchalar soni ham 4 ta, shuning uchun olingan yechim maxsusmasdir.

1-qadamga o'tamiz:

$$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1=8, & \alpha_1=0,\ \beta_1=8,\\ \alpha_1+\beta_3=5, & 0+\beta_3=5,\ \beta_3=5,\\ \alpha_2+\beta_3=5, & \alpha_2+5=7,\ \alpha_2=2,\\ \alpha_2+\beta_2=7, & 2+\beta_2=5,\ \beta_2=3.\end{cases}$$

$c'_{12}=\alpha_1+\beta_2=0+8=8$, $\quad c'_{21}=\alpha_2+\beta_1=2+8=10$,

$S_{12} = c_{12} - c'_{12} = 6 - 8 = -2$, $S_{21} = c_{21} - c'_{21} = 4 - 10 = -6$.

2-1 katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjirini tuzamiz (v jadval):

v)

-	+
8 10	5 1
4	7 6
+	-

g)

8 4	5 7
4 6	7

Manfiy burchaklardagi yukning kichigi 6, bu yukni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo'shib g) jadvalni olamiz. Bu o'zgarishni oxirgi yechim jadvaliga kirgizib quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar		
		V_1	V_2	V_3
A_1	$a_1=11$	8 4	6	5 7
A_2	$a_2=14$	4 6	5 8	7
Talablar	25	$b_1=10$	$b_2=8$	$b_3=7$

$S_3 = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 32 + 35 + 24 + 40 = 131$ ko'm.

Olingan yechim ham maxsusmasdir.

Yana, 1-qadamga qaytamiz.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 8, & \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 8, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 5, & \beta_3 = 5, \alpha_2 + 8 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 5, & \alpha_2 = -4, -4 + \beta_2 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 7, & \beta_2 = 9. \end{cases}$$

$c'_{12} = \alpha_1 + \beta_2 = 0 + 9 = 9$, $c'_{23} = \alpha_2 + \beta_3 = -4 + 5 = 1$,

$S_{12} = 6 - 9 = -3$, $S_{23} = c_{23} - c'_{23} = 7 - 1 = 6$.

$S_{12} = -3 < 0$ bo'lganligi uchun yechim optimal emas, uni yaxshilaymiz.

1-2 katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjirini tuzamiz (d jadval):

d)

-	+
8 4	6
4 6	5 8
+	-

e)

8	6 4
4 10	5 4

Manfiy burchaklardagi yuklarning kichigi 4 bo'lganligi uchun uni manfiy burchaklardan ayiramiz, musbat burchaklarga qo'shamiz va ye) jadvalni hosil qilib, bu o'zgarishni oldingi yechim jadvaliga kirgizib quyidagi rejaga ega bo'lamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar		
		V_1	V_2	V_3
A_1	$a_1=11$	8	6 4	5 7
A_2	$a_2=14$	4 10	5 4	7
Talablar	25	$b_1=10$	$b_2=8$	$b_3=7$

$S_4 = 6\cdot 4 + 5\cdot 7 + 4\cdot 10 + 5\cdot 4 = 119$ ko'm.

Oxirgi tuzilgan yechim uchun yana 1-qadamga qaytamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 6, \quad \alpha_1 = 0, \ \beta_2 = 6, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 5, \quad 0 + \beta_1 = 5, \beta_3 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 4, \quad \alpha_2 + 6 = 5, \alpha_2 = -1, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 5, \quad -1 + \beta_2 = 5, \beta_2 = 6. \end{cases}$$

$$c'_{11} = \alpha_1 + \beta_1 = 0 + 5 = 5, \qquad c'_{23} = \alpha_2 + \beta_3 = -1 + 5 = 4,$$
$$S_{11} = c_{11} - c'_{11} = 8 - 5 = 3, \qquad S_{23} = c_{23} - c'_{23} = 7 - 4 = 3,$$
$$S_{11} = 3 > 0, \quad S_{23} = 3 > 0.$$

Olingan yechim optimaldir, chunki to'ldirilmagan katakchalar uchun hamma $S_{ij} > 0$ musbatdir. Shunday qilib, optimal rejada bazis o'zgaruvchilar qiymati:

$x_{12} = 4, x_{13} = 7, x_{21} = 10, x_{22} = 4$ bo'lib, umumiy transport harajati S=119 so'm bo'ladi.

Mavzuning tayanch tushunchalari

Transport masalasi, rejalashtirish matritsasi, transport masalasining matematik modeli, yopiq model, ochik model, shimoliy-g'arbiy burchak usuli, taqsimot usuli, yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl), baholarning algebraik yig'indisi, potensiallar, potensiallar usuli, stanoklarda detallarga ishlov berish operatsiyalarini taqsimlash masalasi, avtotransportning yuksiz bosib o'tadigan yo'lini minimallashtirish masalasi, parametrli chiziqli dasturlash masalasi, butun sonli dasturlash masalasi, Gomori usuli.

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1-10 misollarda, bir xildagi mahsulotni taqsimlashda uchta ta'minlovchi va beshta iste'molchi bor. a_i $(i=1,2,3)$ ta'minlovchilardagi yuklar miqdori, b_j $(j=1,2,3,4,5)$ iste'molchilarning yuklarga talablari, C_{ij} i -ta'minlovchidan j -iste'molchigacha yuk 1 birligining tashish bahosi (so'm) quyidagi matritsa bilan berilgan bo'lsin:

$$\begin{array}{c|ccccc} a_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ a_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ a_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array}$$

Yuk tashishning shunday rejasini tuzingki, uni tashish uchun ketadigan umumiy transport harajati minimal bo'lsin. Masalani taqsimot va potensiallar usullari bilan yeching.

1. $$\begin{array}{c|ccccc} 160 & 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 400 & 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 240 & 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \\ \hline & 170 & 190 & 140 & 180 & 120 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{c|ccccc} 350 & 5 & 13 & 18 & 17 & 8 \\ 400 & 6 & 10 & 15 & 6 & 3 \\ 250 & 24 & 21 & 9 & 16 & 17 \\ \hline & 175 & 225 & 230 & 170 & 200 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{c|ccccc} 350 & 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \\ 200 & 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 300 & 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \\ \hline & 170 & 140 & 200 & 195 & 145 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{c|ccccc} 150 & 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 250 & 17 & 10 & 19 & 11 & 5 \\ 200 & 15 & 11 & 6 & 13 & 8 \\ \hline & 180 & 120 & 90 & 105 & 105 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{c|ccccc} 280 & 4 & 7 & 8 & 14 & 9 \\ 340 & 15 & 11 & 6 & 17 & 11 \\ 280 & 13 & 18 & 10 & 12 & 22 \\ \hline & 170 & 160 & 190 & 200 & 180 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{c|ccccc} 250 & 7 & 9 & 16 & 10 & 16 \\ 350 & 13 & 12 & 18 & 12 & 20 \\ 300 & 9 & 15 & 0 & 13 & 13 \\ \hline & 150 & 170 & 190 & 210 & 180 \end{array}$$

7.

400	13	9	5	11	17
250	14	5	12	14	22
350	20	17	13	18	21
	200	170	230	225	175

8.

220	20	17	13	2	17
400	6	10	9	4	15
280	3	7	13	6	23
	160	180	170	200	190

9.

150	8	20	7	11	16
200	4	14	12	15	17
150	15	22	11	12	19
	160	70	90	80	100

10.

200	5	7	4	2	5
175	7	1	3	1	10
225	2	3	6	8	7
	100	130	80	190	100

Adabiyotlar

1. Safayeva Q., Beknazarova N. Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. 1-qism, -Toshkent, O'qituvchi, 1984.
2. Karasev A.I. i dr. Kurs visshey matematiki dlya ekonomicheskix vuzov. Chast II. – M.: Visshaya shkola, 1982, 320 s.
3. Kuznesov A.V., i dr. Matematicheskoye programmirovaniye. Uchebnoye posobiye. –M.: Visshaya shkola, 1980, 300 s.
4. Karmanov V.G. Matematicheskoye programmirovaniye. Uchebnoye posobiye, Izd-vo: FIZMATLIT, 2001 g., 264 str.
5. Kostevich L.S. Matematicheskoye programmirovaniye. Izd-vo: Novoye znaniye, 2003 g., 214 s.

18-19 amaliy mashg'ulot

Kuzatish natijalarini qayta ishlashga doir masalalar yechish.

REJA:

1. Eksperiment, uning maqsadi va vazifalari. Eksperiment turlari. Hisoblash eksperimenti. Eksperiment o‘tkazish bosqichlari.
2. Eksperimentni loyihalash, rejalashtirish va o‘tkazishda yangi axborot texnologiyalaridan foydalanish.
3. Eksperimentning matematik va dasturiy ta’minotlari. Eksperimentn natijalariga ishlov berishda kompyuterdan foydalanish.

Tayanch tushunchalar. Formallashtirilgan masalalar, modellashtirish, kompyuterli modellashtirish, tajriba, eksperiment, dastur, dasturiy ta'minot.

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Издательство «Наука» Москва 1966. С. 664.*
3. *Е. В. Бошкиново и др. Численное методы и их реализация в MS Excel. Самара 2009*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*

Formallashtirish deganda ma'lum bir modelni ma'lum bir sohaga moslab ajratib tadqiq etish hamda hulosalar qilish tushuniladi. Ya'ni bitta obe'ktni turlicha yo'nalishda talqin etib uning modelini yaratish mumkin.

Eksperiment turlar:
- Fizik eksperiment;
- Kompyuterli eksperiment;
- Psixologik eksperiment;
- Tasavvur etish orqali qilinadigan eksperimenti;

Fizik eksperimentga mahsus yaratilgan sharoitda tabiy yo'l bilan o'tadigan tajribalar misol bo'la oladi.

Kompyuterli (sonli) tajriba- bu tadqiqot ob'ektining matematik modelini o'rganishda o'tkaziladigan EHMdagi sonli tajribalardir, ya'ni bunda modelning bitta parametric yordamida boshqa parametrlarini aniqlash va shu asosda hulosalar qilish

Masalani kompyuterda yechish texnologiyasi quyidagi bosqichlarda olib boriladi:
- Masalani qo'yish;
- Masalaning modelini tuzish;
- Formallashtirish;
- Algoritmni tuzish;
- Dasturlash tillari yordamida dasturini yozish;
- Hisoblash tajribasini o'tkazish.

Masalani qo'yish jarayonida uning aniqligiga va ravshanligiga e'tibor beriladi hamda nimalar berilgan va nimalarni topish kerak? degan sovolga javob berishi kerak.

Berilgan ob'ektni modellashtirishda, modellashtirish maqsadidan kelib chiqqan holda avval uni tahlil etishdan boshlanadi. Bu bosqichda obe'ktning modellashtirish husuyatlarini ifodalaovchi hamma ma'lum sube'ktlari belgilanadi. Belgilangan sub'ektlar ob'ekt modelini imkoni boricha to'liq ifodalashi lozim. Modelni tasvirlash shakllari turlicha bo'lishi mumkin, Bularga
- Modelni so'zlar orqali ifodalash;
- Modelni turli chizmalar orqali ifodalash;
- Modelni jadvallar ko'rinishida ifodalash;
- Modelni formulalar orqali ifodalash;
- Modelni sxematik ko'rinishda ifodalash;
- Hisoblash algoritmni tuzish;
- Kompyuterda dasturini tuzish
- Kompyuterda hisoblash tajribasini o'tkazish va h.k.

Modelning tasvirlangan shakli tanlangandan keyin uni formallashtirishga o'tkaziladi.

Formallashtirish bosqichining natijasi axborotli model hisoblanadi. Qurilgan modelni qarama-qarshiligi tekshiriladi va tahlil etiladi hamda uning qanchalik maqsadga muvofiqligi va adekvatligi tekshiriladi.

Ma'lumki kompyuter ma'lum bir algoritmik tilde yozilgan formallashtirilgan buyruqlar ketma-ketligida ishlaydi. Shuning uchun ham keying bosqichda kompyuterda masalani yechish uchun avval uning algoritmi tuziladi.

Algoritm- qo'yilgan masalani aniq yechishga yo'naltirilagan amallar ketma-ketligini to'gri ifodalashdir.

Algoritmni quyidagi keng tarqalgan usullarda ifodalash mumkin:

- ✓ Algoritmni so'zlar orqali ifodalash, ya'ni qo'yilgan masalani yechish uchun so'zlar orqali ifodalangan amallar ketma-ketligi;
- ✓ Algoritmni grafik usulda tasvirlash, ya'ni bajariladigan amallar ketma-ketligini blok-sxema yoki chizmalar orqali ifodalash;
- ✓ Algoritmni algoritmik tillar yordamida ifodalash, ya'ni natijalarni olish va tahlil etish uchun dasturlash tillari orqali dasturini yozish.

Dasturiy vositasi tuzilgandan keyin hisoblash tajribasi o'tkaziladi. Olingan natijalar modelning adekvatligiga tekshiriladi va shu tarzda model takomillastirib boriladi.

Yuqorida keltirib o'tilgan barcha amallar <u>kompyuterli modellashtirish</u> ga misol bo'la oladi.

Kompyuterli modellashtirish bizga quyidagi imkoniyatlarni taqdim etadi:

- ✓ Ob'ektning tadqiq etish ko'lamini kengatiradi- real sharoitda tadqiq etib bo'lmaydigan takrorlanuvchi, takrorlanmaydigan, yuz bergan va yuz berishi mumkin bo'lgan hodisalarni o'rganish imkoniyatini beradi;
- ✓ Ob'ektning har qanday hususiyatlarini vizuallashtirish imkoniyati;
- ✓ Dinamik jarayonlarini va hodisalarini tadqiq etish;
- ✓ Vaqtni boshqarish (tezlashtirish? Sekinlashtirish va h.k.)
- ✓ Model ustida dastlabki vaziyatiga qaytgan holda ko'p martalik tajribalar o'tkazish;
- ✓ Grafik va sonli ko'rinishdagi tavsiflarini olish;
- ✓ Sinov konstruksion nusxasini yasamay turib, optimal konstruksiyasini toppish;
- ✓ Atrof muhitga va sog'likga zarar yetkazmay turib tajribalar o'tkazish.

Kompyuterli modellashtirishning asosiy bosqichlari quyidagicha:

1. Masalaning qo'yilishi va uning tahlili;
   1.1. Model maqsadini aniqlash;
   1.2. Natijalar qanday ko'rinishda olishni aniqlashtirish;
   1.3. Modelni qurishda qanday natijalar kerakligini aniqlash;

2. Information modelini qurish;
    2.1. Modelning parametrlari va ularning o'zaro bog'liqligini aniqlash;
    2.2. Qo'yilgan masalaga qaysi parametrlar kuchli bog'langanligini baholash;
    2.3. Parametrlar o'zaro bog'liqligini matematik ifodalash;

3. Kompyuter modeliga tadbiq etish algoritmi va uslubini ishlab chiqish;
    3.1. Natijalarni olish usullarini ishlab chiqish va tanlash;
    3.2. Tanlangan usul asosida natijalarni olish uchun algoritmnni yaratish;
    3.3. Algoritmni to'griligini tekshirish;

4. Kompyuterli modelini yaratish;
    4.1. Kompyuterda tadbiq etish uchun dasturiy vositasini yaratish;
    4.2. Kompyuter modelini yaratish;
    4.3. Kompyuter modelning to'g'riligini tekshirish;

5. Tajribalar o'tkazish;
    5.1. Tadqiq etish rejasini tuzish;
    5.2. Yaratilgan kompyuter modeli asosida tajribalar o'tkazish;
    5.3. Olingan natijalarni tahlil etish;
    5.4. Hulosalar chiqarish.

LABORATORIYA MASHG‘ULOTLARI

1-Laboratoriya mashg'uloti

Turli modellar tuzishga doir misollar yechish

Jismga yerda uning sirtiga α burchak ostida yo'nalgan υ_0 boshlang'ich tezlik berildi. Jismning harakat trayektoriyasini toping va uning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari orasidagi masofani aniqlang.

Masalani yanada konkretlashtirish uchun gap katapulta yordamida tashlab yuborilgan tosh ustida boryapti deb qaraymiz. Bu bizga jismning xarakterli o'lchamlarini, uning massasini hamda mumkin bo'lgan boshlang'ich tezligini aniqlashda yordam beradi. Endi berilgan holda quyidagi farazlarga asoslangan matematik modelni quramiz;

1) Yer — inersial sanoq sistemasi;

2) Erkin tushish tezlanishi g – o'zgarmas;

3) Yerning egriligini e'tiborga olmasdan, uni yassi deb qarash mumkin;

4) Harakatdagi toshga havoning qarshilik kuchi ta'sirini e'tiborga olmaslik mumkin.

Koordinatalar sistemasini kiritamiz. Koordinatalar boshini katapulta bilan ustma-ust tushiramiz, x o'qini toshning harakat yo'nalishi bo'yicha gorizontal, y o'qini esa yuqoriga vertikal yo'naltiramiz. Bu farazlarga ko'ra toshning x o'qiga proeksiyasi $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha$ tezlik bilan tekis harakatlanadi. Toshning y o'qiga proeksiyasi esa $a_y = -g$ tezlanish va $\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha$ boshlang'ich tezlik bilan tekis tezlanuvchan harakat qiladi. Shunday qilib tosh harakatining xarakteri ushbu

$$x = t\upsilon_0 \cos\alpha; \tag{1}$$

$$y = t\upsilon_0 \sin\alpha - gt; \tag{1}$$

formulalar bilan aniqlanadi. Bu formulalar (1)–(4) shartlar bajarilganda masalaning matematik modelini beradi. Hosil qilingan model g'oyatda sodda va qo'yilgan savolga javob osonlik bilan olinishi mumkin. (1) dan t vaqtni x koordinata orqali ifodalaymiz:

$$t = \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha}$$

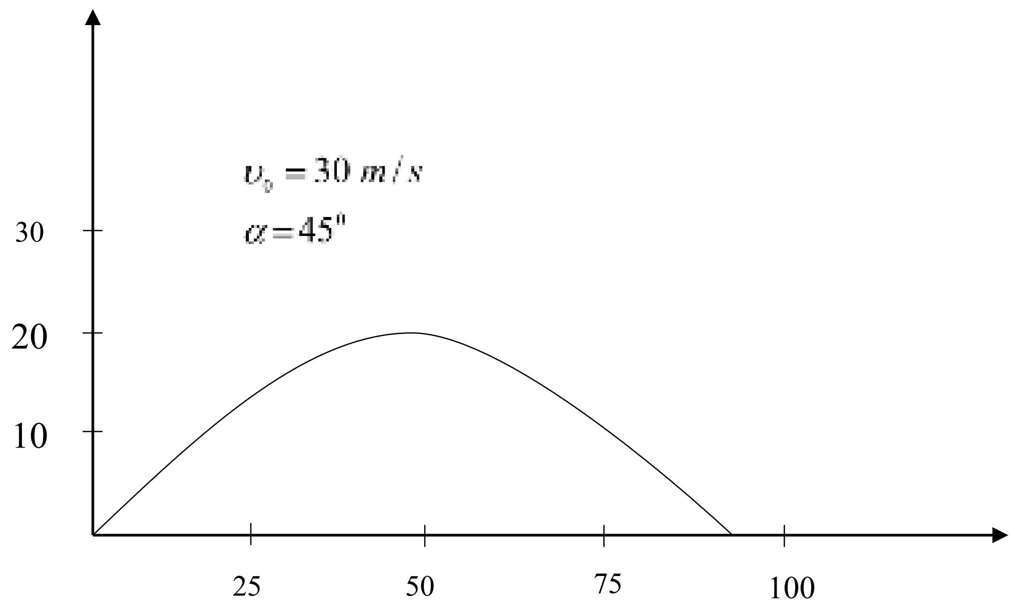
va uni (2) ga qo'yamiz. Natijada tosh trayektoriyasining parabolani (1-chizma) ifodalovchi.

$$y = x tg\alpha - x^2 \frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} \tag{3}$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu parabola x o'qini $x=0$ va $x=l$ nuqtada kesib o'tadi, bunda

$$l = \frac{\upsilon_0^2}{g} \sin 2\alpha. \tag{4}$$

Birinchi nuqta traektoriyaning boshi bo‘lib, unda tosh katapultadan otilib chiqadi. Ikkinchi nuqta toshning yerga tushgan joyiga mos keladi. (4) formula qabul qilingan model doirasida izlangan masofa l ni aniqlaydi.



Amaliy masalalarda matematik modelni qurish ishning eng murakkab va mas'uliyatli bosqichlaridan biridir.

Tajriba ko‘rsatadiki, ko‘p hollarda modelning to‘g‘ri tanlanishi – muammoning yarmidan ko‘pini hal qilish demakdir. Bu bosqichning qiyinligi shundan iboratki.u matematika va sotsial bilimlarning uyg‘unlashishini talab etadi. O‘rta maktab fizika kursiga doir masalalar yechishda siz bir vaqtda ham fizik, ham matematik xizmatini o‘taysiz. Ammo amaliy matematikada qaraladigan katta muammolar uchun mutaxassisliklarning bunday uyg‘unlashishi tipik emas. Odatda matematik model ustida matematiklar hamda o‘rganilayotgan ob'ekt tegishli bo‘lgan sohaning mutaxassislari birgalikda ishlaydilar. Ularning faoliyati muvaffaqiyatli bo‘lishi uchun bir-birini tushunishi g‘oyatda muhim. Bunga matematiklar ob'ekt haqida maxsus bilimlarga ega bo‘lganda, ularning sheriklari esa ma'lum darajada matematik bilimga, o‘z sohasida tadqiqotning matematik metodlarini qo‘llanish tajribasiga ega bo‘lgandagina erishish mumkin.

Musataqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Qiya tekislikda turgan jism harakatini modellashtiring. Bu jarayonda havoning qarshilik kuchini hisobga olmaslik mumkin.

2. h balandlikdan gorizontal otilgan jism harakatini modellashtiring. Bu jarayonda havoning qarshilik juchini va erkin tushish tezlanishining yerning geografik hududlariga bog'liqligini hisobga olmaslik mumki.

2--Laboratoriya mashg'uloti
Xatoliklar nazariyasi elementlari. Xatoliklar. Absolyut va nisbiy xatolik.

Ishning maksadi: *talabalarni taqribiy sonlar bilan ishlashga o'rgatish, taqribiy sonning absolyut va nisbiy xatosini baholash, shuningdek, argumentlar xatoligi keltirib chiqaradigan differensiallanuvchi funksiya, klavishli hisoblash mashinalari ishlatilishini o'rgatish.*

Taqribiy sonlar. Ularning absolyut va nisbiy xatosi.
Qiymatga ega bo'lgan raqam. To'g'ri ishoralar soni.

$\boldsymbol{a}$ taqribiy soni deb, aniq $\boldsymbol{a_0}$ sonidan deyarli farq qilmaydigan va hisoblashlar oxirida almashtiriladigan songa aytiladi.

Taqribiy $\boldsymbol{a}$ soni va uning aniq qiymati a_0 orasidagi $a - a_0$ ayirma va $\boldsymbol{a}$ taqribiy sonining xatoligi deb yuritiladi va odatda bu ko'rsatkich naoma'lum bo'ladi..

a sonining taqribiy xatolik qiymati deganda

$$|a - a_0| \leq \Delta_a \qquad (1.1)$$

ko'rinishdagi tengsizlik tushiniladi.

Δ_a soni taqribiy a soninig absolyut xatoligi (ayrim hollarda xato chegarasi) deb ataladi. Bu son bir qiymatli aniqlanmaydi: uning qiymatini oshirish mumkin. Odatda (1.1) tengsizlikni kanoatlantiruvchi Δ_a sonini imkon kadar kichikrok kursatishga harakat kilishadi.

(1.1) dan a_0 aniq soni

$$a - \Delta_a \leq a_0 \leq a + \Delta_a$$

chegaralarda bo'lishi kelib chikadi. Bundan kelib chikib $a - \Delta_a$ a_0 taqribiy sonining kamayishi, $a + \Delta_a$ a_0 taqribiy sonining kupayishidir.

Bu holda qisqalik uchun $a_0 = a \pm \Delta_a$ yozuvdan foydalaniladi.

Misol.

1 sm aniqlikda o'lchangan xonaning bo'yi va eni a=5,15m va b=3,07m ga teng. Xona yuzasini S=ab=5,15m*3,07m=15,8105 m^2. kabi hisoblashdagi xatolik baholansin.

Yechish.

Masala shartiga ko'ra Δ_a = 0,01m, Δ_b=0,01m. Imkon bo'lgan chegaraviy yuza qiymati

$$(a + 0{,}01)(b + 0{,}01) = 15{,}8929\ \text{m}^2$$

$$(a-0{,}01)(b-0{,}01)=15{,}7284\ \mathrm{m}^2$$

kabi bo'ladi. Bu qiymatlarni S ning qiymati bilan solishtirib,

$$\Delta_S=0{,}0824\ \mathrm{m}^2$$

ko'rinishdagi S sonining absolyut xatoligini ko'rsatishga imkon beradigan

$$|S-S_0|\le 0{,}0824$$

qiymatni olamiz.

Bu yerdan ko'rinib turibdiki, absolyut xatolik hisoblashlarning xatoligini to'la ifodalamaydi.

a taqribiy sonining δ_a nisbiy xatoligi (ayrim hollarda nisbiy xato chegarasi) deb uning absolyut xatoligining a sonining absolyut qiymatiga nisbatiga, ya'ni

$$\delta_a=\frac{\Delta_a}{|a|}\qquad (a\ne 0).$$

miqdorga aytiladi. Nisbiy xatolik odatda foizlarda ifodalanadi. Nisbiy xatolik odatda foizlarda ifodalanadi.

Shu tarika $a_0\approx a$ bo'lganligi sababli a sonining absolyut xatoligi sifatida

$$\Delta_a=|a|\,\delta_a \ \text{ yoki } \ \Delta_a=|a_0|\,\delta_a$$

qiymatni qabul qilish mumkin.

Bundan kelib chiqadiki δ_a nisbiy xatolikni bilgan holda aniq son uchun

$$a(1-\delta_a)\le a_0\le a(1+\delta_a)$$

$$a_0=a(1\pm\delta_a)$$

chegaralari olinadi.

Misol.

Havo uchun gaz doimiysini aniqlashda R=29,25 deb olinadi. Bu qiymatning nisbiy xatosi 0,1% ekanligini bilgan holda R yotadigan chegaralar topilsin.

Yechish.

Masala shartidan ko'ra δ_a=0,001, u holda $29{,}22\le R\le 29{,}28$.

Ma'lumki, ixtiyoriy musbat a son chekli yoki cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ifodalanishi mumkin.

Taqribiy sonning qiymatga ega raqami deb uning o'nli ko'rinishdagi har xil noldan farqli yoki nol raqamiga aytiladi, agar u qiymatga ega raqamlar orasida mavjud bo'lsa yoki saqlangan o'nli razryada qatnashsa.

Agar a taqribiy son uchun almashtiriladigan aniq a_0 son ma'lum bo'lsa, u holda

$$|a-a_0|\le\frac{1}{2}*10^{m-n+1}$$

o'rinli va $d_m, d_{m-1}, \ldots, d_{m-n-1}$ raqamlarning birinchi n tasi qiymatga ega bo'ladi.

Sonning to'g'ri ishoralar miqdori sonning birinchi qiymatga ega raqamidan birinchi qiymatga ega raqam absolyut xatoligigacha xisoblanadi.

Teorema. *Agar **a** taqribiy musbat soni qisqa ma'noda **n** to'g'ri o'nlik belgilarga ega bo'lsa, u holda berilgan sonning birinchi qiymatga ega bo'lgan raqami bo'linmasi bu sonning nisbiy xatosi* $\delta\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ *dan oshmaydi, ya'ni*

$$\delta \le \frac{1}{d_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

*bunda d_m – **a** sonining birinchi qiymatga ega bo'lgan raqami.*

Misol.

π soning o'rniga a=3,14 sonini olsak, nisbiy xato qanday bo'ladi?

Yechish.

Qaralayotgan holda d_m=3 va n=3. bundan

$$\delta = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^{3-1} = \frac{1}{3}\%$$

kelib chiqadi.

Topshiriqlar

1. Quyidagi sonlarni qiymatli uch xona(raqam)gacha yaxlitlab, hosil bo'lgan taqribiy sonlarning absolyut Δ va nisbiy δ xatosini aniqlang:

a) 2,1514; 6)0,16152; v)0,01204; g) 1,225;

d) 0,001528; ye)-392,85; j) 0,1545; z) 0,03922.

2. Quyidagi taqribiy sonlarning absolyut xatosini ularning nisbiy xatosiga asoslanib aniqlang:

a) a = 13267, δ= **0,1** %; *b)* a = 2,32, δ = 0,7%;

v) a = 35,72, δ = 1 %; g) a = 0,896, δ = 10%.

3. Bir necha burchaklarning o'lchanishi natijasida quyidagilar olindi: d_1 = 21°37'3", d_2 =45°, d_3 =1°10", d_4 = 75°20'44".

d_1, d_2, d_3, d_4 sonlarining nisbiy xatosini absolyut xatolikni 1 ga teng deb hisoblab aniqlang.

4. Agar x sonining absolyut xatosi aniq bo'lsa, undagi qiymatli raqamlar sonini aniqlang.

a)x = 0,3941, Δ_x =0,25-10"; b)x = 0,1132, Δ_x=0,1*10"^{3};

v) x = 38,2543, Δ_x =0,27-10 ^{2}; g) x = 293,481, Δ_x=0,1.

5. a sonining nisbiy xatosi aniq bo'lsa, undagi qiymatli raqamlar sonini aniqlang.

a)a = 1,8921, δ_o=*0,1-Yu'²;* *b) a* = 0,2218, δa **=0,2-1**0"¹;

v) d = 22,351, δ_o = 0,1; g) a = 0,02425, δ_a = 0,5 • 10"².

6. Taqribiy sonlarning ko'paytmasini toping va hisoblashlarning xatoligini aniqlang (berilgan sonlarning barcha raqamlari qiymatli deb hisoblagan holda).

a) 3,49 • 8,6; b) 25,1 • 1,743; v) 0,02 • 16,5;

g) 0,253 • 6,54 • 86,6; d) 1,78 • 9,1 • 1,183; ye) 482,56 • 0,0052.

7. Taqribiy sonlarning bo'linmasini toping.

a) 5,687 ÷ 5,032; 6)0,144 ÷ 1,2; v) 216÷4;

g) 726,676÷829; d) 754,9367÷ 36,5.

8. To'g'ri to'rtburchakning tomonlari 4,02 ± 0,01 m, 4,96 ± 0,01 m.ga teng. To'g'ri to'rtburchakning yuzasini hisoblang.

9. Doiraning radiusi R ni 0,5 sm aniqliqda o'lchaganda 12 sm soni hosil bo'ldi. Doira yuzini hisoblashdagi absolyut va nisbiy xatoni toping.

10. Kubning har bir qirrasi 0,02 sm aniqlikda o'lchanganda 6 sm ga tengligi ma'lum bo'ldi. Kubning hajmini hisoblashdagi absolyut va nisbiy xatolikni toping.

3--Laboratoriya mashg'uloti
Xatoliklar nazariyasi elementlari. Funksiya xatoligi.

Ishning maksadi: *talabalarni taqribiy sonlar bilan ishlashga o'rgatish, taqribiy sonning absolyut va nisbiy xatosini baholash, shuningdek, argumentlar xatoligi keltirib chiqaradigan differensiallanuvchi funksiya, klavishli hisoblash mashinalari ishlatilishini o'rgatish.*

Agar argumentning qiymati taqribiy bo'lsa, biz esa funksiyaning qiymatini izlasak, u holda funksiya ham tug'riligini aniqlash kerak bo'ladigan taqribiy son bo'ladi. Differensiallanadigan funksiyaning $y = f(x_1,...,x_n)$ absolyut xatosi argumentlarning $x_1,...,x_n$ deyarli kichik xato bilan chiqariladigan $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2},...,\Delta_{x_n}$ o'lcham bilan baholanadi

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i . \qquad (2)$$

Agar funksiyaning qiymati musbat bo'lsa, u holda nisbiy xato uchun quyidagi baholash o'rinli bo'ladi

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Misol.

Agar diametr d=3,7sm ± 0,05, π=3,14 bo'lsa, $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ shar hajmining absolyut va nisbiy xatosini toping.

Yechish.

π va d ni o'zgaruvchi kattalik sifatida ko'rib chiqib, quyidagi xususiy hosilalarni hisoblaymiz

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{6} d^3 = 8{,}442; \quad \frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{3}\pi d^2 \approx 21{,}5$$

$\Delta_d = 0{,}05$ va $\Delta_\pi = 0.0016$ bo'lganligi sababli kuch formulasi (2) hajmning absolyut xatosidir:

$$\Delta_V = \left| \frac{\partial f}{\partial \pi} \right| \Delta\pi + \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| \Delta_d = 1{,}0881 \approx 1{,}1 \text{ sm}^2.$$

Shuning uchun

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 27{,}5 \pm 1{,}1 \text{ sm}^2.$$

Bundan hajmning nisbiy xatosi

$$\delta_V = \frac{\Delta_V}{V} = \frac{1{,}088}{27{,}5} \approx 4\%.$$

kabi bo'ladi.

Topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning absolyut va nisbiy xatoligini aniqlang

1. $y = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$ $\quad a = 3{,}85 \pm 0{,}01;\ b = 2{,}0435 \pm 0{,}004;\ c = 962{,}6 \pm 0{,}1.$

2. $y = \left[\frac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$ $\quad a = 4{,}3 \pm 0{,}05;\ b = \mathbf{17{,}2} + 0{,}02;\ c = 22 \pm 0{,}05;\ t = 12{,}477 \pm 0{,}003;$

$p = 8{,}37 \pm 0{,}005.$

3. $y = \frac{\sqrt{a}b}{c}$ $\quad a = 228{,}6 + 0{,}05;\ b = 86{,}4 \pm 0{,}02;\ c = 68{,}7 \pm 0{,}05.$

4. $y = \frac{m^3(a+b)}{c-d}$ $\quad a = 13{,}5 \pm 0{,}02;\ b = 7{,}5 \pm 0{,}02;\ c = 34{,}5 \pm .0{,}022;\ d = 3{,}325$ $\pm 0{,}005;$

$t = 4{,}22 \pm 0{,}004.$

5. $y = \frac{\sqrt{ab}}{c}$, $\quad a = 3{,}845 \pm 0{,}004;\ b = 6{,}2 \pm 0{,}05;\ c = 0{,}8 \pm 0{,}1.$

6. $y = \frac{a+b}{(c-d)^2} m$, $\quad a = 1{,}75 \pm 0{,}001;\ b = 11{,}7 \pm 0{,}04;\ c = 0{,}536 \pm 0{,}002;$

$d = 6{,}32 \pm 0{,}008;\ t = 0{,}56 \pm 0{,}005.$

7. $y = \frac{a^2 b}{c}$, $\quad a = 3{,}546 \pm 0{,}002;\ b = 8{,}23 \pm 0{,}005;\ c = 145 \pm 0{,}08.$

8. $y = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, $\quad a = 23{,}16 \pm 0{,}02;\ b = 8{,}23 \pm 0{,}005;\ c = 145 \pm 0{,}08;\ d = 28{,}6 \pm 1;$

$m = 0{,}28 \pm 0{,}006.$

9. $y = \frac{ab^3}{c}$, $\quad a = 0{,}643 \pm 0{,}0005;\ b = 2{,}17 \pm 0{,}002;\ c = 5{,}843 \pm 0{,}001.$

10. $y = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$ a= 27,16 ± 0,006; b = 5,03 + 0,01; c = 3,6 ± 0,002;

t = 12,375 ±0,004; n = 8,64 ± 0,002.

11. $u = \frac{1}{6}\pi b\left(3a^2 + b^2\right)$, a = 2,456 + 0,002; b = 1,76 ±0,001; π=3,14.

12. $y = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$, a = 16,342 ±0,001; b = 2,5 ±0,03; c = 38,17 ± 0,002;

d= 9,14 ±0,002; t = 9,14 ±0,005; n = 3,6 ±0,04.

13. $y = \frac{m^2 n}{c^3}$, c = 0,158±0,0005; m= 1,653±0,0003; n= 3,78±0,02.

14. $y = \frac{\sqrt{a-bm}}{c+d}$, a = 9,542 ±0,01; b= 3,028 ± 0,002; c = 0,172 ±0,001;

d= 5,4 + 0,01; m = 26 ±0,03.

15. $y = \sqrt{\frac{cd}{b}}$, b= 2,65 ± 0,01; c = 0,7568 + 0,0002; d = 2,17 + 0,02.

4--Laboratoriya mashg'uloti
Bir noma'lumli algebraik va transendent tenglamalarni vatarlar va urinmalar usulida taqribiy yechish.

Ishning maqsadi: *talabalarni chiziqli bo'lmagan tenglamalarning ildizlarini ajratish usullari va taqribiy yechish usullariniqo'llab tenglamalarni sonli yechishni, hisoblash algoritm iva dasturini tuzish, olingan natijalarni tahlil qilishga o'rgatish.*

Ikkiga bulish usuli

$f(x)=0$ (1) tenglama berilgan bulsin.

$[a,b]$ da $f(x)$ uzluksiz va $f(a)f(b)\prec 0$ shartni kanoatlantiradi.

$[a,b]$ da joylashgan (1) tenglamani ildizini topish uchun $[a,b]$ kesmani ikkiga bulamiz.

Agar $f(\frac{a+b}{2})=0$ *булса* $\xi=\frac{a+b}{2}$ (1) tenglamaning ildizi buladi. $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$ bulsa $\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right],\ \left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$ kesmalardan shunisini olamizki u kesmani chetki nuktalarida $f(x)$ funktsiya karama-karshi ishoralarga ega bulsin. $[a_1,\ b_1]$ intervalni yana ikkiga bulib bu jarayonni davom etiramiz natijada ma'lum bir etapda anik ildizni yoki bir birini ichiga joylashgan cheksiz ketma-ketlikni $[a_1,\ b_1],[a_2,\ b_2],...,[a_n,\ b_n],...$ xosil kilamizki

$$f(a_n)f(b_n)\prec 0\quad (n=1,2,...)\qquad (2)$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)\qquad (3)$$

kesmani oxirgi chap $a_1,\ a_2,...,a_n,...$ nuktalari kamaymovchi monoton chegaralangan ketma-ketligini, ung chetki nuktalari $b_1,\ b_2,...,\ b_n,...$ kupaymovchi chegaralangan monoton ketma – ketligini tashkil etadi, shuning uchun (3) tenglamaga asosan umumiy limit mavjud buladi.

$$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\leftarrow\infty}b_n$$

(2) tengsizlikdan $n\to\infty$ da limitga utib $f(x)$ - ni uzluksizligidan foydalanib

$$[f(\xi)]^2\leq 0$$

Bu yerdan $f(\xi)=0$ ni, ya'ni ξ (1) – chi tenglamani ildizi ekanligiga ishonch xosil kilamiz va

$$0\leq\xi-a_n\leq\frac{1}{2^n}(b-a)\qquad (4)$$

kelib chikadi.

Misol: Ikkiga bulish usulidan foydalanib.

$f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1$ tenglamani

$[0,1]$ intervalda (kesimda) joylashgan ildizini toping.

$$f(0) = -1; \quad f(1) = 1 \quad [0{,}0{,}5]; \quad [0{,}5;1]$$

$$f(0{,}5) = 0{,}06 + 0{,}25 - 0{,}5 - 1 = -1{,}19$$

$$f(0{,}75) = 0{,}32 + 0{,}84 - 0{,}75 - 1 = -0{,}59$$

$$f(0{,}875) = 0{,}59 + 1{,}34 - 0{,}88 - 1 = 0{,}05$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(0{,}8594) = 0{,}546 + 1{,}270 - 0{,}859 - 1 = -0{,}043$$

$$\xi = \frac{1}{2}(0{,}859 + 0{,}875) = 0{,}867$$

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni Vatarlar, Nyuton (urinmalar) va oddiy iterasiya usullari yordamida taqribiy yechish mumkin.

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishdan avval ularning ildizlarini ajratib olish kerak bo'ladi. Ildizlarni ajratish deganda taqribiy ildizlar yotadigan oraliqlarni aniqlash tushuniladi. Ildizlarni ajratish uchun ildizlarni ajratishning grafik yoki analitik usullaridan foydalanish mumkin. Tenglamaning ildizlarni ajratib olganimizdan so'ng quyidagi usullarning biridan foydalanib tenglamaning yechimini topish mumkin. Faraz qilaylik, ildiz $[a, b]$ oraliqda yotsin.

Vatarlar usuli.

a) Agar [a, b] oraliqda $f(a) < 0$ bo'lsa, u holda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n),$$

bunda $x_0 = a$.

b) Agar [a, b] oraliqda $f(a) > 0$, u holda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a)$$

bunda $x_0 = b$.

Nyuton usuli (***Urinmalar usuli***). Agar [a, b] oraliqda $f(a)f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $x_0 = a$; agar $f(b)f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $x_0 = b$ bo'ladi va quyidagi formula bilan xisoblanadi.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Berilgan tenglamani vatarlar, ikki bo'lish va Nyuton usullarida yeching

1. $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$
2. $x^3 - 2x + 2 = 0$
3. $x^3 + x - 3 = 0$
4. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$
5. $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$
6. $x^3 - 0{,}1x^2 + +0{,}4x + 1{,}2 = 0$
7. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0$
8. $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$
9. $x^3 + 4x - 6 = 0$
10. $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$
11. $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$
12. $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$
13. $x^3 + 3x + 1 = 0$
14. $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$
15. $x^3 + 3x - 1 = 0$
16. $x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0$
17. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$
18. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$
19. $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$
20. $x^3 + 2x + 4 = 0$
21. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 0{,}8 = 0$
22. $x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0$
23. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$
24. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 1{,}2 = 0$
25. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2 = 0$
26. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0$

5--Laboratoriya mashg'uloti

Bir noma'lumli algebraik va transendent tenglamalarni oddiy iteratsiya usulida yechish.

***Ishning maqsadi**: talabalarni chiziqli bo'lmagan tenglamalarning ildizlarini ajratish usullari va taqribiy yechish usullariniqo'llab tenglamalarni sonli yechishni, hisoblash algoritm iva dasturini tuzish, olingan natijalarni tahlil qilishga o'rgatish.*

Iteratsiya usuli

Tenglamani sonli yechish usullaridan biri iteratsiya usuli bulib xisoblanadi.

Faraz kilamiz $f(x)=0$ (1) tenglama berilgan bulsin. $f(x)$ - uzluksiz funktsiya. (1) tenglamani xakikiy ildizini aniklash kerak.

(1) tenglama teng kuchli bo'lgan $x=\varphi(x)$ (2) tenglama bilan almashtiramiz. Ildizning x_0 takribiy kiymatini tanlab (2) – chi tenglamani ung tomoniga kuyamiz.

$$x_1=\varphi(x_0) \qquad (3)$$

(3)– ning ung tomoniga x_1 kuyib $x_2=\varphi(x_1)$ ni xosil kilamiz. Bu jarayonni davom etirib

$$x_n=\varphi(x_{n-1}) \ (n=1,2,...) \qquad (4)$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz.

Agar bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, ya'ni $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ limit mavjud bo'lsa (4) dan limitga o'tib $\varphi(x)$ - ni uzluksiz deb

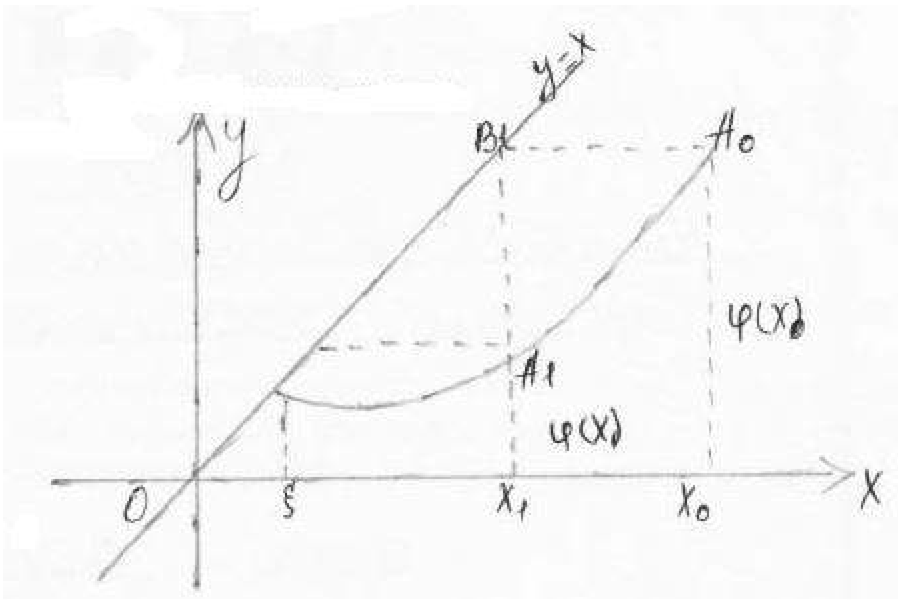
$$\lim_{n\to\infty} x_n=\varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) \text{ ni}$$

yoki

$$\xi=\varphi(\xi) \text{ (5) xosil kilamiz.}$$

Demak ξ - (2) – ning ildizi ekan.

Geometrik ma'nosi.



Misol: $x^3 + x = 1000$ tenglamani eng katta musbat ildizini 10^{-4} aniqlik bilan topish kerak.

Eng qo'pollik bilan ildizning taqribiy qiymatini $x_0 = 10$ topamiz. Ko'rinib turibdiki $\xi \prec x_0$ yuqoridagi tenglamani.

$$x = 1000 - x^3$$

yoki

$$x = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}$$

yoki

$x = \sqrt[3]{1000 - x}$ yozib olamiz.

Asosiy oraliq sifatida (9,10)ni olib

$\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$ ni olamiz.

$$\varphi^1(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$

bu yerda

$$\left|\varphi^{1}(x)\right| \le \frac{1}{3\sqrt[3]{990^{2}}} \approx \frac{1}{300} = q$$

$$y_n = 1000 - x_n \qquad \text{\textit{бу деган суз}}$$

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1000 - x_n} \quad \text{\textit{дегани}}$$

n	x_n	y_n
0	10	990
1	9,96655	990,03345
2	9,96660	990,03334
3	9,9667	

$$\left.\begin{matrix}(a,\ b) - \text{\textit{оралик}} \\ [a,\ b] - \text{\textit{кесма}}\end{matrix}\right\}\ \text{deb olinadi.}$$

Topshiriq

Berilgan tenglamani oddiy iteratsiya usulida yeching

1. $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$
2. $x^3 - 2x + 2 = 0$
3. $x^3 + x - 3 = 0$
4. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$
5. $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$
6. $x^3 - 0{,}1x^2 + +0{,}4x + 1{,}2 = 0$
7. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0$

14. $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$
15. $x^3 + 3x - 1 = 0$
16. $x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0$
17. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$
18. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$
19. $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$
20. $x^3 + 2x + 4 = 0$

8. $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$

9. $x^3 + 4x - 6 = 0$

10. $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$

11. $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$

12. $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$

13. $x^3 + 3x + 1 = 0$

21. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 0{,}8 = 0$

22. $x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0$

23. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$

24. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 1{,}2 = 0$

25. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2 = 0$

26. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0$

6--Laboratoriya mashg'uloti

Chiziqli tenglamalar Gauss usulida yechish. Chiziqli tenglamalar kvadrat ildizlar usulida yechish

Reja:

6. Gauss metodi.
7. Bosh elementlar metodi.
8. Optimal yo'qotish metodi.
9. Determinatni hisoblash.
10. Matrisalarning teskarisini topish.

Tayanch iboralar: *oddiy va iterasion usullar, uchburchakli matrisa, to'g'ri va teskari yo'l, Ermit matrisasi.*

Optimal yo'qotish metodi o'z strukturasi jihatidan Gauss metodiga yaqin bo'lishiga qaramasdan u mashina xotirasidan effektiv ravishda foydalanishga imkon beradi va shuning uchun ham bu metod yordamida tartibi ikki mart katta bo'lgan sistemani yechish mumkin.

Gauss metodi. Bu metod bir necha hisoblash sxemalariga ega. Shulardan biri Gaussning kompakt sxemasini ko'rib chiqamiz. Ushbu sistema berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{7.1}$$

Faraz qilaylik, $a_{11} \neq 0$ (yetakchi element) bo'lsin, aks holda tenglamalarning o'rinlarini almashtirib, x_1 oldidagi koeffisiyenti noldan farqli bo'lgan tenglamani birinchi o'ringa ko'chiramiz. Sistemadagi birinchi tenglamaning barcha koeffisiyentlarini a_{11} ga bo'lib,

$$x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \tag{7.2}$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \ (j \geq 2).$$

(2) tenglamadan foydalanib, (1) sistemaning qolgan tenglamalarida x_1 ni yo'qotish mumkin. Buning uchun (2) tenglamani ketma-ket $a_{21}, a_{31}, \ldots$ larga ko'paytirib, mos ravishda sistemaning ikkinchi, uchinchi va h.k. tenglamalaridan ayiramiz. Natijada, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n,n+1}^{(1)}. \end{cases} \qquad (7.3)$$

bu yerda $a_{ij}^{(1)}$ koeffisiyentlar

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}^{(1)} \ (i, j \geq 2).$$

formala yordamida hisoblanadi. Endi (7.3) sistema ustida ham shunga o'xshash almashtirishlar bajaramiz.

Buning uchun (3) sistemadagi birinchi tenglamaning barcha koeffisiyentlarini yetakchi element $a_{22}^{(1)}$ ga bo'lib,

$$x_2 + b_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)}x_n = b_{2,n+1}^{(2)} \qquad (7.4)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \ (j \geq 3).$$

(4) tenglama yordamida (3) sistemaning keyingi tenglamalarida yuqoridagidek x_2 ni yo'qotib,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = a_{3,n+1}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = a_{n,n+1}^{(2)} \end{cases}$$

sistemaga kelamiz, bu yerda

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(2)}, \ (i, j \geq 3).$$

Noma'lumlarni yo'qotish jarayonini davom ettirib va bu jarayonni m -qadamgacha bajarish mumkin deb faraz qilib, m -qadamda quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{m+1,n}^{(m)}x_n = a_{m,n+1}^{(m)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{nn}^{(m)}x_n = a_{n,n+1}^{(m)}, \end{cases} \qquad (7.5)$$

bu yerda

$$b_{mj}^{(m)} = \frac{a_{mj}^{(m)}}{a_{mm}^{(m)}}, \ a_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)}b_{mj}^{(m)} \ (i, j \geq m+1).$$

Faraz qilaylik, m mumkin bo'lgan oxirgi qadamning nomeri bo'lsin. Ikki hol bo'lishi mumkin: $m = n$ yoki $m < n$. Agar $m = n$ bo'lsa, u vaqtda biz uchburchak matrisali va (1) sistemaga ekvivalent bo'lgan quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,\,n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,\,n+1}^{(2)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = b_{n,n+1}^{(n)} \end{cases} \tag{7.6}$$

sistemaga ega bo’lamiz. Oxirgi sistemadan ketma-ket $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ larni topish mumkin:

$$\begin{cases} x_n = b_{n,n+1}^{(n)}, \\ x_{n-1} = b_{n-1,n+1}^{(n-1)} - b_{n-1,n}^{(n-1)} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 = b_{1,n+1}^{(1)} - b_{12}^{(1)} x_2 - \ldots - b_{1n}^{(1)} x_n. \end{cases} \tag{7.7}$$

(6) uchburchak sistemaning koeffisiyentlarini topish Gauss metodining *to’g’ri yurishi*, (7.7) sistemani topish jarayoni *teskari yurishi* deyiladi.

Faraz qilaylik, $m<n$ bo’lsin va sistemanig m - va undan keyingi tenglamalari (7.5) ko’rinishga keltirilgan bo’lsin. Biz m - qadamni bajarilishi mumkin bo’lgan qadam deb hisoblagan Edik, bush uni bildiradiki (5) sistemaning ikkinchi tenglamasidan boshlab yetakchi elementni ajratish mumkin emas, barcha $a_{ij}^{(m)}\ (i,j=m+1,\ldots,n)$ lar nolga teng va (5) sistema quyidagi ko’rinishga ega

$$\begin{cases} x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ \qquad 0 = a_{m+1,n+1}^{(m)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad 0 = a_{n,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Agar bunda barcha ozod hadlar $a_{i,n+1}^{(m)}\ (i=m+1,\ldots,n)$ nolga teng bo’lsa, u holda biz faqat yagona birinchi tenglamaga ega bo’lamiz.

Barcha qadamdagi tenglamalarni birlashtirib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Bu sistemadan biz $x_1, x_2, \ldots, x_m$ noma’lumlarni $x_{m+1},\ldots,x_n$ noma’lumlar va ozod hadlar yordamida ifodalab olishimiz mumkin. Bu holda (7.1) sistema cheksiz ko’p yechimga ega bo’ladi. Agar $m<n$ bo’lib, hyech bo’lmaganda birorta $a_{i,m+1}^{(m)} \neq 0\ (m+1 \leq i \leq n)$ bo’lsa, u holda (7.1) sistema yechimga ega bo’lmaydi.

Qo'lda hisoblayotganda xatoga yo'l qo'ymaslik uchun, hisoblash jarayonini kontrol qilish ma'quldir. Buning uchun biz (7.1) matrisa satrlaridagi elementlar va ozod hadning yiqindisidan tuzilgan kontrol

$$a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \quad (i = \overline{1,\, n}) \tag{7.8}$$

yig'indidan foydalanamiz.

Agar $a_{i,\, n+2}$ larni (7.1) sistemaning ozod hadlari deb qabul qilsak, u holda almashtirilgan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j = a_{i,\, n+2} \quad (i = \overline{1,\, n}) \tag{7.9}$$

sistemaning yechimi x_j (7.1) sistemaning yechimi x_j oraliq quyidagicha ifodalanadi:

$$\bar{x}_j = x_j + 1 \quad (j = \overline{1, n}) . \tag{7.10}$$

Haqiqatan ham, (7.10) ni (7.9) sistemaga qo'ysak, (7.1) sistema va (7.8) formulaga ko'ra

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} = a_{i,\, n+2} \quad (i = \overline{1, n})$$

aytiyatga ega bo'lamiz.

Agar satr elementlar ustida bajarilgan amallarni har bir satrdagi kontrol yig'indi ustida ham bajarsak va hisoblashlar xatosiz bajarilgan bo'lsa, u holda kontrol yig'indilardan tuzilgan ustunning har bir elementi mos ravishda almashtirilgan satrlar elementlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Bu hol esa to'g'ri yurishni kontrol qilish uchun xizmat qiladi. Teskari yurishda esa, kontrol $\bar{x}_j$ larni topish bilan bajaraladi.

Tenglamalar sistemasi qo'lda yechilganda hisoblashlarni 1-jadvalda ko'rsatilgan Gaussning kompakt sxemasi bo'yicha olib borish ma'quldir. Soddalik uchun jadvalda to'rtta noma'lumli to'rtta tenglamalar sistemasini yechish sxemasi keltirilgan.

Gauss metodi bilan n ta noma'lumli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun bajariladigan arifmetik amallarning miqdori quyidagidan iborat: $\frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 - n)$ ta ko'paytirish va bo'lish, $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n)$ ta qo'shish.

Misol. Gauss metodi bilan quyidagi sistema yechilsin;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4{,}2x_2 + 1{,}6x_3 - 3x_4 = 3{,}2 \\ -0{,}4x_1 + 3x_2 - 2{,}4x_3 = -1{,}6 \\ 1{,}6x_1 - 0{,}8x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1{,}5x_4 = 0 \end{cases} \qquad (7.11)$$

Sistemani yechish jarayoni 2-jadvalda keltirilgan.

1-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	**Ozod hadlar**	$\sum$	**Sxema qismlari**
a_{11} a_{21} a_{31} a_{41} $\dots$ 1	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42} $\dots$ $b_{12}^{(1)}$	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43} $\dots$ $b_{13}^{(1)}$	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44} $\dots$ $b_{14}^{(1)}$	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45} $\dots$ $b_{15}^{(1)}$	a_{16} a_{26} a_{36} a_{46} $\dots$ $b_{16}^{(1)}$	A
$\dots$	$a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$ $\dots$ 1	$a_{23}^{(3)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(3)}$ $\dots$ $b_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$ $\dots$ $b_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(1)}$ $a_{35}^{(1)}$ $a_{45}^{(1)}$ $\dots$ $b_{25}^{(2)}$	$a_{26}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}$ $\dots$ $b_{26}^{(2)}$	A_1
$\dots$	$\dots$	$a_{33}^{(2)}$ $a_{43}^{(2)}$ $\dots$ 1	$a_{34}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$ $\dots$ $b_{34}^{(3)}$	$a_{35}^{(2)}$ $a_{45}^{(2)}$ $\dots$ $b_{35}^{(3)}$	$a_{36}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}$ $\dots$ $b_{36}^{(3)}$	A_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{44}^{(3)}$ $\dots$ 1	$a_{45}^{(3)}$ $\dots$ $b_{45}^{(4)}$	$a_{46}^{(3)}$ $\dots$ $b_{46}^{(4)}$	A_3
1	1	1	1	x_4 x_3 x_2 x_1	$\bar{x}_4$ $\bar{x}_3$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1$	B

2-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	**Ozod hadlar**	$\sum$	**Sxema qismlari**

2 $-0,4$ 1,6 1 ... 1	4,2 3 $-0,8$ -2 ... 2,1	1,6 $-2,4$ 1 -1 ... 0,8	-3 0 -1 1,5 ... $-1,5$	3,2 $-1,6$ -1 0 ... 1,6	8 $-1,4$ $-0,2$ $-0,5$ ... 4	A
...	3,84 4,16 4,1 ... 1	$-2,08$ 0,28 1,8 ... $-0,54166$	$-0,60$ $-1,40$ -3 ... $-0,15625$	$-0,96$ 3,56 1,6 ... $-0,25$	0,2 6,6 4,5 ... 0,05208	A_1
...	...	$-2,53331$ $-4,02081$ ... 1	0,75 2,35937 ... $-0,29606$	$-4,6$ $-2,62500$ ... 1,81581	$-6,38331$ $-4,28644$ ... 2,51198	A_2
			1,16897	4,67603	5,84500	A_4
1	1	1	1	4,00013 3,00009 2,00005 1,00002	5,00013 4,00009 3,00005 2,00002	B

Shunday qilib, quyidagi $x_1 = 1,00002;\ x_2 = 2,00005;\ x_3 = 3,00009;\ x_4 = 4,00013$ taqribiy yechimga ega bo'ldik.

Sistemaning aniq yechimi $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 4$ ekanligi bevosita ishonch hosil qilish mumkin.

Bosh elementlar metodi. Gauss metodida yetakchi elementlar doim noldan farqli bo'lavermaydi. Yoki ular nolga yaqin sonlar bo'lishi mumkin: bunday sonlarga bo'lganda katta absolyut xatoga ega bo'lgan sonlar hosil bo'ladi. Buning natijasida taqribiy yechim aniq yechimdan sezilarli darajada chetlashib ketadi.

Hisoblash xatosining bunday halokatli ta'siridan qutulish uchun Gauss metodi bosh elementni tanlash yo'li bilan qo'llaniladi. Buning Gauss metodining kompakt sxemasidan farqi quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, noma'lumlarni yo'qotish jarayonida quyidagi sistemaga ega bo'lgan bo'laylik:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \quad x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(2)}, \\ \qquad a_{m+1,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + a_{m+1,n}^{(m)} x_n = a_{m+1,\,n+1}^{(m)}, \\ \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \qquad a_{n,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + a_{n,\,n}^{(m)} x_n = a_{n,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Endi $|a_{m+1,k}^{(m)}| = \max\limits_j |a_{m+1,j}^{(m)}|$ tenglikni qanoatlantiradigan k nomerni topib, o'zgaruvchilarni qayta belgilaymiz: $x_{m+1} = x_k$ va $x_k = x_{m+1}$ so'ngra $(m+2)$ tenglamadan boshlab, barchasidan x_{m+1} noma'lumni yo'qotamiz. Bunday qayta belgilashlar yo'qotish tartibini o'zgartirishga olib keladi va ko'p hollarda hisoblash xatosini kamaytirishga xizmat qiladi.

Optimal yo'qotish metodi. Bu metodning dastlabki qadamlari Gauss metodiga o'xshashdir. Yetakchi element $a_{11} \neq 0$ deb faraz qilib, (7.1) sistemaning birinchi tenglamasini

$$x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \tag{7.2}$$

ko'rinishga keltiramiz. So'ngra (7.1) sistemaning faqat ikkinchi tenglamasidan x_1 ni yo'qotamiz:

$$a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2,n+1}^{(1)}.$$

Endi $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilib, bu tenglamani (7.4) ko'rinishga keltiramiz:

$$x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)}.$$

Bu tenglama yordamida (7.2) tenglamadan x_2 ni yo'qotamiz. Natijada

$$x_1 + c_{13}^{(2)} x_3 + \ldots + c_{1n}^{(2)} x_n = c_{1,n+1}^{(2)}$$
$$x_2 + c_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + c_{2n}^{(2)} x_n = c_{2,n+1}^{(2)}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$c_{1j}^{(2)} = b_{1j}^{(1)} - b_{12}^{(1)} b_{2j}^{(2)}, \quad c_{2j}^{(2)} = b_{2j}^{(2)} \quad (j \geq 3).$$

Faraz qilaylik, avvalgi k ta tenglamalar ustida almashtirishlar bajarish natijasida (7.1) sistema quyidagi teng kuchli sistemaga keltirilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \ldots + c_{1n}^{(k)} x_n = c_{1,n+1}^{(k)}, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ x_k + c_{k,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \ldots + c_{k,k+1}^{(k)} \\ a_{k+1,1} x_1 + \ldots + a_{k+1,\,k+1} x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,\,n} x_n = a_{k+1,n+1} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n,1} x_1 + \ldots + a_{n,\,k+1} x_{k+1} + \ldots + a_{nn} x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{7.12}$$

Bu sistemaning avvalgi k ta tenglemasini mos ravishda $a_{k+1,k}, a_{k+1,2}, \ldots, a_{k+1,k}$ larga ko’paytirib, natijalarni $(k+1)$ tenglamadan ayiramiz va hosil bo’lgan tenglamani x_{k+1} noma’lum oldingi koeffisiyentga bo’lamiz. Natijada $(k+1)$ - tenglama quyidagi ko’rinishga ega bo’ladi:

$$x_{k+1} + c_{k+1,k+2}^{(k)} + \ldots + c_{k+1,n}^{(k)} x_n = c_{k+1,n+1}^{(k)}.$$

Endi bu tenglama yordamida (7.12) sistemaning avvalgi k ta tenglamasidan x_{k+1} ni yo’qotsak, u holda yana (7.12) ko’rinishdagi sistemaga, faqat k ning $(k+1)$ ga almashgan holiga, ega bo’lamiz.

Shu bilan birga, agar

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} c_{r,k+1}^{(k)} a_{k+1,r} \neq 0$$

bo’lsa, quyidagi formulalarga ega bo’lamiz:

$$c_{k+1,p}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1,p} - \sum_{r=1}^{k} a_{k+1,r} c_{r,p}^{(k)}}{a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} a_{k+1,r} c_{r,k+1}^{(k)}},$$

$$c_{ip}^{(k+1)} = c_{ip}^{(k)} - c_{i,k+1}^{(k)} c_{k+1,p}^{(k+1)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k;\ p = k+2,\ k+3, \ldots, n+1).$$

Almaщtirshdarning n-qadami ham bajarilgandan so’ng (7.1) sistemaning yechimi uchun quyidagi formulalar hosil bo’ladi:

$$x_i = c_{i,n+1}^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Bu yerda ham hisoblash jarayonini kontrol qilash Gauss metodidagiga o’xshashdir. Optimal yo’qotish metodida ham barcha yetakchi elementlar noldan farqli bo’lshi zarurdir. Agar bu fakt oldindan ma’lum bo’lmasa, u holda hisoblash sistemasini o’zgartirib, bosh elementlarni satr bo’yicha tanlash yo’li bilan noma’lumlarni yo’qotish maqsadga muvofiqdir. Buning uchun, agar $(k+1)$-tenglamada $x_1, x_2, \ldots, x_k$ noma’lumlarni yo’qotgandan keyin,

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{s=1}^{k} a_{k+1,s} c_{sp}^{(k+1)} \qquad (p > k+1)$$

moduli bo’yicha eng katta element bo’lsa, u holda o’zgaruvchilarni qaytadan belgilab: $x_{k+1} = x_p$ va $x_p = x_{k+1}$, so’ngra optimal yo’qotish qoidasiga ko’ra noma’lumlarni yo’qotishni davom ettirish kerak.

Optimal yo’qotish metodining ustunligi shundan iboratki n-tartibli sistemani yechish uchun zarur bo’lgan arifmetik amalalrning soni Gauss metodidagidek bo’lsa ham, bu metod EHM lar xotirasidan effektiv ravishda foydalanishga imkon beradi, ya’ni sistemaning tartibini ikki marta orttirish mumkin.

(7.12) sistemadan ko'rinib turibdiki, optimal yo'qotishning k-qadami bajarilgach, berilgan sistemaning oxirgi $(n-k)$ ta tenglamasi o'zgarishsiz qoladi. Buni hisobga olgan holda xotiraga matrisaning barcha elementlarini to'la kiritmasdan, har bir qadamdan oldin bittadan satrni kiritamiz. U holda $(k+1)$-qadamni amalga oshirish uchun xotiraning

$$f(k)=k(n-k+1)+n+1$$

ta yacheykasi yetarli bo'ladi, bular

$$\begin{bmatrix} c_{1,k+1}^{(k)} & \dots\dots & c_{1,n+1}^{(k)} \\ & \dots\dots\dots\dots & \\ c_{k,k+1}^{(k)} & \dots\dots & c_{k,n+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

matrisani va (12) sistemadagi $(k+1)$-tenglama koeffisiyentlarni joylashtirish uchun xizmat qiladi. Endi $f(k)$ ning maksimumini topib, n-tartibli sistemani yechish uchun $\frac{(n+1)(n+5)}{4}$ ta yacheykaga ega bo'lgan maydon yetarli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Masalan, operativ xotirasi 4095 yacheykadan iborat bo'lgan EHM da tashqi qurilmalardan foydalanmasdan 122-tartibli tenglamalar sistemasini yechish yoki shu tartibli ixtiyoriy matrisaning determinantini hisoblash mumkin.

Misol tariqasida

$$\begin{cases} 2x_1+4{,}2x_2+1{,}6x_3-3x_4=3{,}2 \\ -0{,}4x_1+3x_2-2{,}4x_3=-1{,}6 \\ 1{,}6x_1-0{,}8x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2-x_3+1{,}5x_4=0 \end{cases}$$

sistemani optimal yo'qotish motedi bilan yechaylik. Birini tenlamadan

$$x_1+2{,}1x_2+0{,}8x_3-1{,}5x_4=1{,}6 \qquad (7.13)$$

ni hosil qilamiz va buni $-0{,}4$ ga ko'paytirib, sistemaning ikkinchi tenglamasidan ayiramiz:

$$3{,}84x_2-2{,}08x_3-0{,}60x_4=-0{,}96\,.$$

Buni $3{,}84$ ga bo'lib, kerakli tenglamani hosil qilamiz:

$$x_2-0{,}54167x_3-0{,}15625x_4=-0{,}2500\,. \qquad (7.14)$$

Endi (7.13) dan x_2 ni yo'qotsak,

$$x_1+1{,}93750x_2-1{,}17182x_4=2{,}12501\,. \qquad (7.15)$$

(7.15) ni 1,6 ga (7.14) ni -0,8 ga ko'paytirib, sistemaning uchinchi tenglamasidan ayiramiz va hosil bo'lgan tenglamani x_3 oldidagi koeffisiyentga bo'lsak,

$$x_3-0{,}29611x_4=1{,}81556 \qquad (7.16)$$

kelib chiqadi.

Bu tenglama yordamida (7.14) va (7.15) dan x_3 ni yo'qotsak,

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}59811x_4 = -1{,}39322 \\ x_2 - 0{,}31664x_4 = 0{,}73343 \end{cases} \tag{7.17}$$

hosil bo'ladi.

Endi (7.16)-(7.17) tenlamaoar yordamida sistemaning to'rtinchi tenglamasidan x_1, x_2, x_3 ni yo'qotamiz: $1{,}11872x_4 = 1{,}67564$. Bundan va (7.13)-(7.17) dan noma'lumlarni ketma-ket topamiz:

$$x_4 = 4{,}00065; \quad x_3 = 3{,}00019; \quad x_2 = 1{,}99999; \quad x_1 = 0{,}99922.$$

Determinantni hisoblash. Gauss metodini ham, optimal yo'qotish metodini ham determinantni hisoblash uchun qo'llash mumkin. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \ldots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \ldots \; a_{2n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1} \; a_{n2} \; \ldots \; a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisaning determinantini topish talab qilinsin. Buning uchun, bir jinsli, chiziqli

$$A\bar{x} = \bar{0} \tag{7.18}$$

sistemani yechishga Gauss metodini qo'llaymiz. Natijada A matrisa

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12}^{(1)} & b_{13}^{(1)} & \ldots & b_{1n}^{(1)} \\ 1 & 0 & b_{23}^{(2)} & \ldots & b_{2n}^{(2)} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

uchbuchak matrisaga almashtiriladi, (18) sistema esa unga ekvivalent bo'lgan

$$B\bar{x} = \bar{0}$$

sistemaga o'tadi.

Agar diqqat qilinsa, B matrisaning elementlari A matrisa va keyingi yordamchi $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ matrisalardan quyidagi ikkita elementar alamashtirishlar natijasida hosil bo'lgan:

5) noldan farqli deb faraz qilingan $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(n-1)}$ yetakchi elementlarga bo'lish;

6) A matrisa yordamchi $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ larning satrlaridan mos ravishdagi yetakchi satrlarga proporsional bo'lgan satrlarni ayirish.

Birinchi almashtirish natijasida matrisaning determinanti ham mos ravishdagi yetakchi elementga bo'linadi, ikkinchi almaщtirish esa determinantni o'zgarishsiz qoldiradi. Shuning uchun ham

$$1 = \det B = \frac{\det A}{a_{11}a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}} \ ,$$

bu yerda esa

$$\det A = a_{11}a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}. \tag{7.19}$$

Demak, determinant Gauss kompakt sxemasidagi yetakchi elementlarning ko'paytmasiga teng ekan.

Matrisa determinantini optimal yo'qotish metodi yordamida ham hisoblash mumkin. Bu yerda ham determinant barcha yetakchi

$$\alpha_k = a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} a_{k+1,r} c_{r,\,k+1}^{(k)}$$

elementlarning ko'paytmasiga teng:

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{7.20}$$

Agar yetakchi elemantlarning birortasi nolga teng bo'lsa u holda satr bo'yicha bosh elementni tanlash sxemasidan foydalanish kerak. Lekin bu holda determinantning ishorasini saqlash uchun α_k elementlarni $(-1)^{l_k+1}$ ga ko'paytirish kerak bo'ladi. Bu yerda l_k soni, agar avvalgi k qadamda yo'qotilmagan barcha noma'lumlar chapdan o'ngga qarab ketma-ket $1, 2, \dots, n-k$ lar bilan nomerlangan bo'lsa, $k+1$-qadamda yo'qotilgan noma'lumlarning nomerini bildiradi. Lekin hisoblash odatdagicha (19) yoki (20) formulalar bilan bajarilganda $\det A$ aytarli kichik (katta) bo'lmasa-da biror $i < n$ uchun avvalgi i ta ko'paytuvchilarning ko'paytmasi mashina noliga teng bo'lishi yoki to'lib ortib ketishi mumkin.

Bunday nuqsondan qutilish uchun (19) formula bo'yicha $\det A$ ni quyidagicha hisoblash kerak:

$$\det A \left(q \prod_j (-1)^{l_j+1} \alpha_j \right) \left(r \prod_k (-1)^{l_k+1} \ \alpha_k \right).$$

Bu yerda q EHM dagi mumkin bo'lgan eng katta songa yaqin bo'lib, r eng kichik songa yaqin vash u bilan birga $q \cdot r = 1$; α_j yetakchi elementlar orasidagi moduli bo'yicha birdan kichik bo'lganlari, α_k esa qolgan yetakchi elementlar.

Matrisalarning teskarisini topish. Agar bir xil matrisaga ega bo'lib, faqat ozod hadlari bilan farq qiladigan bir qancha sistemani yechishga to'g'ri kelsa, u holda matrisaning teskarisini topish maqsadga muvofiqdir.ikkinchi tomondan statistik hisoblashlarda ayrim statistik parametrlarni baholash uchun teskari matrisalar katta ahamiyatga ega.

Faraz qilaylik, bizga maxsusmas matrisa $A=[a_{ij}]\ (i,j=\overline{1,n})$ berilgan bo'lsin. Unga teskari bo'lgan $A^{-1}=[x_{ij}]$ matrisani topish uchun asosiy $AA^{-1}=E$ munosabatdan foydalanamiz, bu yerda E birlik matrisa, A va A^{-1} matrisalarni o'zaro ko'paytirsak, n^2 ta x_{ij} noma'lumlarga nisbatan asosiy matrisasi bir xil va faqat ozod hadlari bilangina farq qiladigan n ta tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=1 & 0\ldots 0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 & 1\ldots 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0 & 0\ldots 1. \end{cases}$$

Bunday sistemani Gauss metodi bilan birdaniga yechish mumkin. Misol uchun (11) sistema

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4{,}2 & 1{,}6 & -3 \\ 0{,}4 & 3 & -2 & 0 \\ 1{,}6 & -0{,}8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

matrisasining teskarisini topaylik.

Yechish. Gauss kompakt sxemasini qo'llaymiz. Bu holda to'rtta ozodhadlar ustuniga ega bo'lamiz (11-jadval). Shuni ham eslatib o'tamizki, teskari matrisaning satr elementlari teskari tartibda hosil bo'ladi.

3-jadval natijasidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}28239 & -0{,}06801 & -0{,}06915 & 0{,}51865 \\ 0{,}38037 & -0{,}19364 & -1{,}70539 & 0{,}29046 \\ 0{,}51408 & -0{,}77686 & -1{,}04425 & 0{,}33195 \\ 0{,}66162 & -0{,}73076 & -1{,}59058 & 0{,}92945 \end{bmatrix}$$

3-jadval

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
2	4,2	1,6	−3	1	0	0	0	5,8
−0,4	3	−2	0	0	1	0	0	1,6
1,6	−0,8	1	−1	0	0	1	0	1,8
1	−2	−1	1,5	0	0	0	1	2,5
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	
1	−2,1	−0,8	−1,5	0,5	0	0	0	2,9
	3,84	−1,68	−0,6	0,2	1	0	0	2,76
	−4,16	−0,28	1,4	−0,8	0	1	0	−2,84
	−4,1	−1,8	3	−0,5	0	0	1	−2,4
	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	1	−0,43750	−0,15625	0,05208	0,26042	0	0	0,71875

		−2,10000	0,75000	−0,58335	1,08334	1	0	0,14999
		−3,59375	2,35937	−0,28647	1,06772	0	1	−3,52085
		. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
		1	−0,35714	0,27779	−0,51588	−0,47617	0	−0,47617
			1,07590	0,71184	−0,78622	−1,71131	1	0,29022
				0,66162	−0,73076	−1,59058	0,92945	−0,73027
				0,51408	−0,77686	−1,04425	0,33195	−0,97508
				0,38037	−0,19364	−0,70539	0,29046	−0,22820
				0,28239	−0,06801	−0,06915	0,51865	0,66388

Chiziqli tenglamalar sistemasini iteratsiya usulida yeching.

1. $\begin{cases} 2x_1\text{-}2x_2+5x_3=11 \\ 7x_1\text{-}2x_2+3x_3=4 \\ 3x_1\text{-}8x_2+x_3=15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1-8x_2+2x_3=1 \\ 0{,}2x_1+0{,}5x_2-2x_3=3 \\ 14x_1-3x_2+2x_3=-2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-6x_3=4 \\ 7x_1-3x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+6x_2-3x_3=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=5 \\ 4x_1-x_2+1{,}1x_3=22 \\ 2x_1+7x_2+2x_3=12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x_1+4x_2+x_3=2 \\ x_1-3x_2+5x_3=1 \\ -15x_1+2x_2+8x_3=7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+7x_2+5x_3=4 \\ 4x_1+0{,}8x_2+2x_3=2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-4x_2+7x_3=0 \\ 2x_1+12x_2-3x_3=2 \\ 7x_1-x_2+2x_3=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+7x_2-3x_3=1 \\ 4x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-6x_3=1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2-12x_3=2 \\ x_1-4x_2+x_3=-3 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x_1+3{,}5x_2-x_3=3 \\ 2x_1-6x_2+3x_3=2 \\ 7x_1+x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 0{,}2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 0{,}3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 - 2x_3 = 3 \\ 14x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 0{,}3x_2 - 6x_3 = 4 \\ 7x_1 - 0{,}3x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 0{,}3x_3 = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3{,}5x_3 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 1{,}1x_3 = 2 \\ 2{,}5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ -15x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2{,}5x_3 = 3{,}4 \\ 4{,}5x_1 + 0{,}8x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2 \\ 7{,}5x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 12x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 1{,}5 \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 3 \\ 14x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \\ 6x_1 - x_2 + 1{,}1x_3 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ -15x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 0{,}5x_1 - x_2 + 3x_3 = 1{,}5 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4{,}5 \\ 4x_1 + 0{,}8x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -3 \\ x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 2 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

30 $\begin{cases} x_1 + 3{,}5x_2 - x_3 = 0{,}3 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = -1 \end{cases}$

7--Laboratoriya mashg'uloti

Chiziqli tenglamalar sistemasini iteratsiya usulida yechish

Reja

3. Iteratsiya usulining asosiy g'oyasi
4. Iteratsiya usulining yaqinlashishi

Tayanch iboralar: Yaqinlashish, maxsusmas matritsa, teskari matritsa, norma;

Faraz qilamiz chizikli bo'lmagan tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(x_1,...,x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2,...,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2,...,x_n) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Bu yerda $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksiyalar xakikiy va yakkalangan (chegara) $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ yechimning ω atrofida aniqlangan va uzluksiz.

Quyidagi vektorlarni kiritib

$$\bar{x} = (x_1, x_2,...,x_n) \text{ва } \bar{\varphi}(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}), \varphi_2(\bar{x}),...,\bar{\varphi}_n(\bar{x}))$$

1- chi sistemani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x}) \qquad (2)$$

(2) – chi vektorli tenglamani ildiz vektorini $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*,...,x_n^*)$ topish uchun iteratsiya metodini qo'llash maqsadga muvofiq bo'ladi.

$$\bar{x}^{(P+1)} = \bar{\varphi}(\bar{x}^{(P)}) \qquad (P = 0, 1,2...,n) \qquad (3)$$

boshlangich yakinlashish sifatida $\bar{x}^{(0)} \approx \bar{x}^*$ olish mumkin. Quyida bu jarayonni yaqinlashishi ko'rsatiladi.

Ta'kidlash kerakki (3) iteratsiya jarayoni yaqinlashsa u vaqtda yozish mumkin.

$$\bar{\xi} = \lim_{P\to\infty} \bar{x}^{(P)} \qquad (4)$$

va bu kiymat albatta (2) – chi tenglamani ildizi bo'ladi.

Haqiqattan ham (4)-chi bajariladi deb (3) dan $p \to \infty$ da limitga o'tib va bundan tashqari $\bar{\varphi}(\bar{x})$ - ning uzluksizligidan foydalanib quyidagini hosil qilamiz

$$\lim_{P\to\infty} \bar{x}^{(P+1)} = \bar{\varphi}(\lim_{P\to\infty} \bar{x}^{(P)}) \text{ bundan}$$

$$\bar{\xi} = \bar{\varphi}(\bar{\xi})$$

Shunday qilib $\bar{\xi}$ (2)- chi vektorli tenglamani ildizi bo'ladi.

Bundan tashqari hamma $\bar{x}^{(P)}(P = 0,1,2,...)$ yaqinlashishlar ω sohasida tegishli bo'lib $\bar{x}$ ω sohasida yagona ildizi bo'lsa, $\bar{\xi} = \bar{x}^*$ teng ekanligi anik bulib koladi.

Iteratsiya usulini umumiy chizikli bulmagan tenglamalar sistemasiga

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{0} \qquad (5)$$

Qo'llash mumkin. $\bar{f}(\bar{x})$- vektor funksiya chegaralangan $\bar{x}$ atrofning ω- soha atrofida aniqlangan uzluksiz funksiya bo'lib hisoblanadi. Misol tariqasida (5) sistemani

$$\bar{x} = \bar{x} + \Lambda \bar{f}(\bar{x}) \qquad (5^1)$$

kurinishida yozib olamiz. Bu yerda Λ (nabla) maxsusmas matritsadan iborat.

$$\bar{x} + \Lambda \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{x}) \qquad (6)$$

Belgilash kiritib

$$(7) \quad \bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x}) \text{ ni hosil qilamiz.}$$

(7)- chiga oddiy iteratsiya metodini kullash mumkin, ya'ni agar ω sohada $\bar{f}(\bar{x})$ funksiya $\bar{f}^1(\bar{x})$ uzluksiz xosilaga ega bulsa (6) – chi formuladan

$$\varphi^1(x) = E + \Lambda \bar{f}^1(\bar{x})$$

kelib chikadi.

Iteratsiya jarayoni yakinlashadi agar $\bar{\varphi}^1(\bar{x})$ funksiya normasi buyicha juda kichik mikdor bulsa.

Bu xolatni xisobga olib Λ maxsusmas matrnitsani shunday tanlab olamiz.

$$\bar{\varphi}^1(\bar{x}^{(0)}) = E + \Lambda \bar{f}^1(x^{(0)}) = \bar{0}:$$

Bu yerdan agar $\bar{f}^1(\bar{x}^{(0)})$ – matrisa maxsusmas bo'lsa.

$$\Lambda = -\left[\bar{f}^1(\bar{x}^{(0)})\right]^{-1} \qquad (8)$$

(8) – ni (5^1) ga kuyib xosil kilamizki

$$(9) \quad \bar{x}^{(P+1)} = \bar{x}^{(P)} - \left[\bar{f}^1(\bar{x}^{(P)})\right]^{-1} \bar{f}(\bar{x}^{(P)})$$

bu modifikatsiyalangan Nyuton metodini (5) sistemaga kullashdan xosil bulgan formuladan iborat.

Agar $\det \bar{f}^1(\bar{x}^{(0)}) = \bar{0}$ булса $\bar{x}^{(0)}$ dastlabki yakinlashishni boshkacha tanlashga tugri keladi.

Misol: Kuyidagi sistemani iteratsiya usuli bilan yeching

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_1^3 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Grafikdan kurinadiki (9) sistema 2 ta ishorasi bilan fark kiladigan yechimga ega buladi.

Biz fakat musbat yechimni topish bilan chegaralanamiz, shuning uchun rasmdan musbat yechimni dastlabki kiymati sifatida $\overline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,5 \end{pmatrix} -$ ni olish mumkin.

yakobian

$$\overline{f}(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{pmatrix} \text{ deb}$$

Bu yerdan

$$\overline{f}^1(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{f}^1(\overline{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1,8 & 1 \\ 2,43 & -1 \end{pmatrix}$$

va

$$\det \overline{f}^1(\overline{x}^{(0)}) = \begin{vmatrix} 1,8 & 1 \\ 2,43 & -1 \end{vmatrix} = 1,8 - 2,43 = -4,23 \neq 0$$

$\overline{f}^1(\overline{x}^{(0)}) -$ maxsusmas maritsa bulganligi uchun teskari matritsa mavjud buladi.

$$\left[\overline{f}^1(\overline{x}^{(0)})\right]^{-1} = -\frac{1}{4,23}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2,43 & 1,8 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib

$$\Lambda = -\left[\overline{f}^1(\overline{x}^{(0)})\right]^{-1} = \frac{1}{4,23}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2,43 & 1,8 \end{pmatrix}$$

Barcha topilgan kiymatlarni joyiga kuysak yakinlashish jarayonining 1-chi yakinlashishini xosil kilamiz. 1, 2, 3 yakinlashishlar xudi yukoridagidek topiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini iteratsiya usulida yeching.

1. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 11 \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0,2x_1 + 0,5x_2 - 2x_3 = 3 \\ 14x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 4 \\ 7x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 1,1x_3 = 22 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x_1+4x_2+x_3=2 \\ x_1-3x_2+5x_3=1 \\ -15x_1+2x_2+8x_3=7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+7x_2+5x_3=4 \\ 4x_1+0{,}8x_2+2x_3=2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-4x_2+7x_3=0 \\ 2x_1+12x_2-3x_3=2 \\ 7x_1-x_2+2x_3=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+7x_2-3x_3=1 \\ 4x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-6x_3=1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2-12x_3=2 \\ x_1-4x_2+x_3=-3 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x_1+3{,}5x_2-x_3=3 \\ 2x_1-6x_2+3x_3=2 \\ 7x_1+x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 0{,}2x_1\text{-}2x_2+5x_3=1 \\ 6x_1\text{-}2x_2+3x_3=4 \\ 3x_1\text{-}7x_2+x_3=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 0{,}3x_1-8x_2+2x_3=4 \\ 0{,}2x_1+0{,}5x_2-2x_3=3 \\ 14x_1-2x_2+x_3=-6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1+0{,}3x_2-6x_3=4 \\ 7x_1-0{,}3x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+6x_2-0{,}3x_3=1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1-2x_2+3{,}5x_3=5 \\ 4x_1-2x_2+1{,}1x_3=2 \\ 2{,}5x_1+7x_2+2x_3=2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -x_1+4x_2+x_3=3 \\ 2x_1-2x_2+5x_3=3 \\ -15x_1+2x_2+4x_3=4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1-x_2+6x_3=1 \\ 2x_1+7x_2+2{,}5x_3=3{,}4 \\ 4{,}5x_1+0{,}8x_2+2x_3=2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1-x_2+7x_3=0 \\ x_1+6x_2-3x_3=2 \\ 7{,}5x_1-x_2+2x_3=3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+7x_2-3x_3=2 \\ 4x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2-6x_3=1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1+x_2-3x_3=2 \\ 2x_1+x_2-12x_3=2 \\ x_1-4x_2+x_3=-1 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x_1+6x_2-x_3=3 \\ 2x_1-x_2+5x_3=-2 \\ 7x_1+x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1\text{-}2x_2+5x_3=1 \\ 7x_1\text{-}2x_2+3x_3=4 \\ 3x_1\text{-}8x_2+2x_3=5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1-8x_2+2x_3=1{,}5 \\ 2x_1+5x_2-9x_3=3 \\ 14x_1-3x_2+2x_3=-2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+3x_2-6x_3=2 \\ 8x_1-3x_2+3x_3=1 \\ 2x_1-6x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=7 \\ 6x_1-x_2+1{,}1x_3=2 \\ 2x_1+7x_2+2x_3=1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} -x_1+4x_2+x_3=4 \\ x_1-3x_2+5x_3=2 \\ -15x_1+2x_2+8x_3=3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 0{,}5x_1-x_2+3x_3=1{,}5 \\ x_1+7x_2+5x_3=4{,}5 \\ 4x_1+0{,}8x_2+2x_3=2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1-4x_2+7x_3=-3 \\ x_1+12x_2-3x_3=2 \\ 7x_1-x_2+2x_3=3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1+8x_2-3x_3=3 \\ 4x_1-x_2+x_3=-1 \\ x_1+3x_2-6x_3=1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x_1+x_2-3x_3=-1 \\ x_1+3x_2-12x_3=2 \\ x_1-4x_2+x_3=-3 \end{cases}$

30 $\begin{cases} x_1+3{,}5x_2-x_3=0{,}3 \\ 5x_1-x_2+3x_3=2 \\ x_1+x_2-6x_3=-1 \end{cases}$

8--Laboratoriya mashg'uloti.

Funksiyalarni interpolyatsiyalash. Lanranj interpolyatsion formulasi

Reja:

1. Funksiyalarni interpolyatsiyalash masalasining qo'yilishi
2. Lagranj interpolyatsion formulasi.
3. Namunaviy misollar
4. Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Funksiyalarni interpolyatsiyalash masalasining qo'yilishi

Aksariyat hisoblash metodlari, masalaning qo'yilishida qatnashadigan, funksiyalarni unga biror muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funksiyalar bilan almashtirish g' oyasiga asoslangan.

Ushbu §-da funksiyalarni yaqinlashtirish masalasining eng sodda va juda keng qo'llaniladigan qismi-funksiyalarni interpolyatsiyalash masalasi qaraladi. Interpolyatsiya masalasining mohiyati quyidagidan iborat. Faraz qilaylik $[a,\ b]$ segmentda funksiya berilgan yoki hech bo'lmaganda uning $f(x_0),\ f(x_1)\, j ...,\ f(x_n)$ qiymatlari ma'lum bo'lsin. Shu oraliqda aniqlangan va hisoblash uchun qulay bo'lgan qandaydir funksiyalar $\{P(x)\}$ sinfini, masalan, darajali ko'phadlar sinfini, olamiz.

Berilgan $y = f(x)$ funksiyani $[a,\ b]$ segmentda interpolyatsiyalash masalasi deb $f(x)$ funksiyani berilgan sinfning shunday $P(x)$ funksiyasi bilan taqribiy ravishda $f(x) \approx P(x)$ almashtirishidan iboratki $P(x)$-berilgan $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin.

$$P(x_i) = f(x_i). \qquad (i = \overline{0, n})$$

Bu yerda ko'rsatilgan $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ nuqtalar interpolyatsiya tugunlari yoki tugunlar deyiladi, $P(x)$ esa interpolyatsiyalovchi funksiya deyiladi. Agar $\{P(x)\}$ sinfi sifatida darajali ko'phadlar olinsa, u holda interpolyatsiyalash algebraik yoki parabolik deyiladi.

Algebraik interpolyatsiyalash apparati hisoblash matematikasining ko’p sohalarida qo’llaniladi, chunonchi: differensiallash va integrallashda, differensial va integral tenglamalarni yechishda, funksiya ekstrimumini topishda hamda funksiya jadvalini tuzishda, Teylor yoyilmasi klassik analizda qay darajada ahamiyatga ega bo’lsa algebraik interpolyatsiyalash ham hisoblash matematikasida shunday ahamiyatga egadir.

Ayrim hollarda interpolyatsiyalashning boshqa ko’rinishlarini qo’llash maqsadga muvofiqdir. Masalan, $f(x)$- davriy funksiya bo’lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida trigonometrik funksiyalar sinfi olinadi; agar interpolyatsiyalaydigan funksiya berilgan nuqtalarda cheksizga aylanadigan bo’lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida ratsional funksiyalar sinfini olish ma'quldir.

Lagranj interpolyasion formulasi

Biz asosan algebraik interpolyatsiyalash bilan shugʻullanamiz. Masalaning qo’yilishi quyidagilardir. Darajasi n- dan yuqori bo’lmagan shunday ko’phad quriladiki u berilgan $(n+1)$ ta $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$ nuqtalarda

$$f(x_0),\ \ f(x_1), ...,\ f(x_n)$$

qiymatlarni qabul qilsin. Bu masalani geometrik ta'riflash ham mumkin. Darajasi n - dan ortmaydigan shunday $P(x)$ ko’phad quriladiki uning grafigi berilgan $(n+1)$ ta Mк $M_k\ (x_k,\ f(x_k),\ k=\overline{(0,n)}$ nuqtalardan o’tsin.

Demak C_m koeffitsientlarni shunday aniqlash kerakki

$$P(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_n x^n \qquad (1)$$

ko’phad uchun ushbu

$$P(x_k) = f(x_k) \qquad (2) \qquad (k = 0,1,...,\ n)$$

tengliklar bajarilsin. Bu tengliklarni ochib yozsak, C_m-larga nisbati $(n+1)$ nomalumli $(n+1)$ ta tenglamalar sistemasi hosil bo’ladi:

$$
\left.\begin{array}{l}
C_0 + C_1x_0 + C_2x_0^2 + ... + C_nx_0^n = f(x_0) \\
C_0 + C_1x_1 + C_2x_1^2 + ...C_nx_1^n = f(x_1) \\
------------------------ \\
C_0 + C_1x_n + C_2x_n^2 + ... + C_nx_n^n = f(x_n)
\end{array}\right\} \qquad (3)
$$

Bu sistemaning determinanti Vandermond determinantidir va u $N(x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n)$. Bilan birgalikda. Masala mazmunidan ko'rinadiki nuqtalar bir-biridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (3) sistema va shu bilan birga qo'yilgan interpolyatsiya masalasi yagona yechimga ega. Bu sistemani yechib C_n -larni topib (1)-ga qo'ysak $P(x)$ ko'phad aniqlanadi. Biz $P(x)$- ning oshkor ko'rinishini topish uchun boshqacha yo'l topamiz, avvalo fundamental ko'phadlar deb ataluvchi $Q_{n,j}(x_i)$ -larni, ya'ni

$$
Q_{n,j}(x_i) = \delta_i^h = \left\{\begin{array}{l} 0,\ i \neq j \\ 1,\ i = j \end{array}\right\} \text{ Kroneker savoli}
$$

Shartlarni qanoatlantiradigan n- chi darajali ko'phadlarni quramiz, u holda

$$
L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)Q_{n,j}(x) \qquad (4)
$$

izlanayotgan ko'phad bo'ladi, haqiqatdan ham

$$
L_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)Q_{n,j}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\delta_i^j = f(x_i)
$$
$$
i = j\ da
$$

va ikkinchi tomondan $L_n(x)$ n - darajali ko'phaddir.

Endi $Q_{n,j}(x)$ - ning oshkor ko'rinishini topamiz, $i \neq j$ bo'lganda $Q_{n,j}(x_i) = 0$

Shuning uchun ham $Q_{n,j}(x)$ ko'phad $i \neq j$ bo'lgandaa $x - x_i$ - ga bo'linadi. Shunday qilib n-darajali ko'phadning n- ta bo'linuvchilari bizga ma'lum,

Bu yerda

$$
Q_{n,j}(x) = C \prod_{i \neq j}(x - x_i) \text{ kelib chiqadi.}
$$

Noma'lum ko'paytiruvchi S-ni esa shartdan topamiz.

$$Q_{n,j}(x_j) = C \prod_{i \neq j}(x_j - x_i) = 1$$

$$C = \frac{1}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$$

Demak,

$$Q_{n,j}(x_j) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

bu ifodani (4)-ga qo'yib, kerakli ko'phadni aniqlaymiz:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_1}{x_j - x_i} \qquad (5)$$

Bu ko'phad Lagranj interpolyasion formulasi deyiladi

Bu formulaning xususiy hollarini quraylik $n = 1$ bo'lganda Lagranj ko'phadi ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq formulasini beradi.

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} f(x_1)$$

Agar $n = 2$ bo'lsa. u vaqtda kvadratik interpolyatsion ko'phadga ega bo'lamiz, bu ko'phad uchta nuqtadan o'tuvchi va vertikal o'qqa ega bo'lgan parabolani aniqlaydi.

Misol. 0, 1, 2,- nuqtalarda mos ravishda 1, 2, 5 qiymatlarni qabul qiluvchi kvadratik ko'phad quring

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ L_i = 2; \quad f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 2, \quad f(x_2) = 5$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2),}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2),} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1),}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),} f(x_2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} 5 = x^2 + 1$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Lagranj interpolyatsion ko‘phadini ishlatib argumentning berilgan qiymatida funksiya qiymatini taqriban toping.

x	y
0,43	1,63597
0,48	1,73234
0,55	1,87686
0,62	2,03345
0,70	2,22846
0,75	2,35973

Variant №	x
1	0,702
6	0,512
11	0,645
16	0,736
21	0,608

x	y
0,02	1,02316
0,08	1,09590
0,12	1,14725
0,17	1,21483
0,23	1,30120
0,30	1,40976

Variant №	x
2	0,102
7	0,114
12	0,125
17	0,203
22	0,154

x	y
0,35	2,73951
0,41	2,30080
0,47	1,96864
0,51	1,78776
0,56	1,59502
0,64	1,34310

Variant №	x
3	0,526
8	0,453
13	0,482
18	0,552
23	0,436

x	y
0,41	2,57418
0,46	2,32513
0,52	2,09336
0,60	1,86203
0,65	1,74926
0,72	1,62098

Variant №	x
4	0,616
9	0,478
14	0,665
19	0,537
24	0,673

x	y
0,68	0,80866
0,73	0,89492
0,80	1,02964
0,88	1,20966
0,93	1,34087
0,99	1,52368

Variant №	x
5	0,896
10	0,812
15	0,774
20	0,955
25	0,715

9--Laboratoriya mashg'uloti

Nyutonning 1-2 interpolyatsion formulalari (Teng uzoqlikda va teng uzoqlikda bo'lmagan tugunlar uchun). Markaziy ayirmali interpolyatsion formula va ularning yaqinlashishi. Gaussning 1-2 interpolyatsion formulalari.

Reja

1. Nyutonning 1-2 interpolyatsion formulalari
2. Teng qadamli interpolyatsion formulalarni qo'llash uchun tavsiyalar
3. Markaziy ayirmali interpolyatsion formulalari
4. Gauss interpolyatsion formulalari

Faraz kilamiz teng uzoklikda joylashgan tugunlarda $y = f(x)$ funksiyaning $y_i = f(x_i)$ kiymatlari berilgan bulsin. $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ h - interpolyasiyalash kadami.

Shunday darajasi n-dan yuqori bo'lmagan $P_n(x)$ kupxadni tanlash talab kilinadiki y kupxad x_i nuktalarda

(2) $P_n(x_i) = y_i$ qiymatni

yoki $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0$ $\quad (m = 0, 1, 2, ..., n)$

kiymtlarni kabul kilsin.

Nyuton kupaytmasiga asosan kupxadni kuyidagi kurinishda axtaramiz

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \qquad (2)$$

Umumlashgan daraja orkali (2) ifodani kuyidagicha yozishimiz mumkin.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_0)^{[3]} + ... + a_n(x - x_0)^{[n]} \qquad (2)$$

Bizning vazifamiz $P_n(x)$ ko'phadning a_i koeffitsientlarini topishdan iborat.

(2) -da $x = x_0$ deb

$P_n(x_0) = a_0 = y_0$ ni hosil qilamiz.

a_1 koeffitsientni topish uchun 1-chi tartibli chekli ayirmani tuzamiz

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]} h + 3a_3(x - x_0)^{[2]} h + ... + na_n(x - x_0)^{[n-1]} h$$

$x = x_0$ da $\Delta P_n(x_0) = a_1 h = \Delta y_0$ ni hosil qilamiz, bu yerdan

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!\,h};$$

a_2 koeffitsientni xosil kilish uchun 2 chi tartibli chekli ayirmani tuzamiz.

$$\Delta^2 P_n(x) = 1\cdot 2h^2 a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3 (x-x_0)^{[1]} h^2 + \ldots + n(n-1) a_n (x-x_0)^{[n-2]} h^2$$

$x = x_0$ da

$$\Delta^2 P_n(x_0) = 1\cdot 2\ h^2 a_2 = \Delta^2 y_0$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2};$$

Shu jarayonni davom ettirib

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\,h^i}$$ ni topamiz.

Topilgan koeffitsientlarni (2^1) ifodaga kuyib Nyutonning teng uzoklikda joylashgan tugunlar uchun 1-chi interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x-x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^0 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)^{[2]} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)^{[n]} \qquad (3)$$

Nyutonning interpolyasion formulasini amalda kullash uchun uni kuyidagi kulay formada yozish tavsiya etiladi.

Buning uchun ya'ni uzgaruvchi kiritamiz.

$$q = \frac{x-x_0}{h};$$

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}}{h} = \frac{(x-x_0)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-h)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-2h)}{h}\ldots$$

$$\frac{[x-x_0-(i-1)h]}{h} = q(q-1)(q-2)\ldots(q-i+1)$$

Bu ifodalarni (3) formulaga kuyib xosil kilamiz.

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Bu yerdan agar $n=1$ bulganda chizikli interpolyasiyalash formulasini

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0$$

va $n = 2$ bulganda parabolik yoki kvadratik interpolyasiyalash formulasini

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

xosil kilamiz.

Nyutoning 1-chi interpolyasion formulasini tablitsaning oxiridagi kiymatlar uchun kullash nokulay bulib xisoblanadi.

Bu xolatda Nyutonning 2-chi interpolyasion formulasini kullash kulay bulib xisoblanadi.

Argumentning teng uzoklikda joylashgan kiymatlari $x_i = x_0 + ih$ uchun $y_i = y(x_i)$ kiymatlar berilgan bulsin.
Nyuton nazariyasiga kura axtarayotgan kupxad kuyidagi shakldа yoziladi.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + ...$$
$$+ a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1)$$

Umumlashgan daraja ifodasidan foydalanib xosil kilamiz.

$$P_n(x) = a_0,\, a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_{n-1})^{[2]} + a_3(x - x_{n-2})^{[3]} + ...$$
$$+ a_n(x - x_1)^{[n]} \qquad (1)$$

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ *koeffitsiyentlarni shunday deb topish* ker*akki*

$$P_n(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, 2, ... n)$$

tenglik bajarilsin.

Buning uchun yetarli va zarur shart

(2) $\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i}$ bajarishimiz kerak.

$x = x_n$ bo'lganda (1) dan

$P_n(x_n) = y_n = a_0$ ni

demak $a_0 = y_n$ hosil qilamiz.

a_1 -ni toppish uchun (1) ni chap va ung tomonlaridan 1-chi tartibli chekli ayirma olamiz.

$$\Delta P_n(x) = a_1 \cdot 1 \cdot h + a_2 \cdot 2 \cdot h(x - x_{n-1})^{[1]} + 3 \cdot a_3 h(x - x_{n-2})^{[2]} + \ldots + n a_n (x - x_1)^{[n-1]} h$$

$x = x_{n-1}$ да

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 \ h$$

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h};$$

a_2 - ni topish uchun 2-chi tartibli chekli ayirmani tuzib $x = x_{n-2}$ da

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = a_2 \ 2! \ h^2$$

ni hosil qilamiz.

Bu yerdan $a_2 = \dfrac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! \ h^2}$;

Shu jarayonni davom ettirib

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! \ h^i} \text{ topamiz.}$$

Topilgan kiymatlarni (1)-chi ifodaga kuyib 2-chi Nyuton interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! \ h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! \ h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3! \ h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) +$$
$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \ h^n}(x - x_n)\ldots(x - x_1)$$

Yangi o’zgaruvchi

$$q = \frac{x - x_n}{h} \text{ ni kiritib}$$

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1; \qquad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2$$

$$P_n(x) = y_n + q \Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Teng kadamli interpolyasion formulalarni kullash uchun tavsiyalar

Funksiyaning jadvaldagi kiymatlari odatda takribiy bulib, ularning limit obsalyut xatolari oxirgi xona birligining yarmiga, 1-chi tartibli ayirmalarning oxirgi xonaning bir birligiga 2-chi tartiblisiniki oxirgi xonaning ikki borligiga va xo kazoga teng bulishi mumkin.

Sillik funksiyalarda odatda tartibi ortgan sari ayirma kamayib borib, biror tartibga yetganda deyarli uzgarmas buladi.

Ayrim xollarda funksiya kiymatidagi xato xisobiga, ayirma nolga aylanmasdan tartibsiz ishora bilan ortib ketishi xam mumkin.

Bunday natijalar notugri bulib ulardan foydalanish mumkin emas.

Shuning uchun xam muntazam uzgaradigan ayirmalarning eng yukori tartibini aniklash kerak. Sungra esa interpolyasiyalash uchun interpolyasion formulani kuyidagicha asoslab tanlash kerak. Agar funksiyaning kiymati xisoblanishi kerak bulgan x-ning kiymati jadval boshida yoki oxirida bulsa, u xolda mos ravishda Nyutonning 1-chi yoki 2-chi formulasini kullash kerak.

Agar bu kiymat jadvalni urtasida, masalan $[x_i, \quad x_{i+1}]$ ораликда булса хамда x_i ва x_{i+1} тугунларга мос келадиган сатрда барча мунтазам узгарадиган айирмалар мавжуд булса, у холда дастлабки тугун сифатида x_i ёки x_{i+1}ни кабул килиб Стирлинг ёки Бессел формуласини куллаш керак. Шуни таъкидлаш керакки агар $|t| \leq 0{,}25$ булса Стирлинг формуласи $0{,}25 \leq t \leq 0{,}75$ булганда Бессел формуласини куллаш керак.
Буерда х-ни x_i ёки x_{i+1} тугунларни кайси бирига якин туришига караб, $t = \dfrac{x - x_i}{h}$ ёки $t = \dfrac{x - x_{i+1}}{h}$ деб олиш керак.

Markaziy ayirmali interpolyasion formulalari

Markaziy ayirmalar tablitsasi

Nyuton interpolyasion formulalarini chikarishda bu tanlangan boshlan³ich yakinlashishdan bir tomonda joylashgan funksiyalar kiymati bilan foydalandik. Shuning uchun bu formulalar birtomonli formulalar bulib xisoblanadi.

Kup xollarda shu boshlangich kiymatni xar ikkala tomonida joylashgan funksiyaning kiymatlaridan foydalanishga tugri keldi.

Bulardan eng kup foydalanadigani x$_0$, y$_0$ ga tugri keladigan diognal tablitsaning gorizontal chizigida joylashgan chekli ayirmalarni uz ichiga oladigani bulib xisoblanadi. Ya'ni Δy_{-1}, Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$,...

Bular markaziy ayirmalar deb aytiladi.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-4} Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-4}$	$\Delta^3 y_{-4}$ $\Delta^3 y^{-3}$			
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2} Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-4}$	$\Delta^5 y_{-4}$ $\Delta^5 y_{-3}$	$\Delta^6 y_{-4}$
x_{-1}	y_{-1}	Δy_0 Δy_1	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-1}$ $\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_{-3}$	$\Delta^5 y_{-2}$	$\Delta^6 y_{-3}$
x_0	y_0	Δy_2 Δy_3	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_{-2}$	$\Delta^5 y_{-1}$	$\Delta^6 y_{-2}$
x_1	y_1		$\Delta^2 y_{-0}$		$\Delta^4 y_{-1}$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$				
x_4	y_4						

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1; \pm 2;...), \qquad y_i = f(x_i)$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

Bunga tugri keladigan interpolyasion formulalar markaziy ayirmali deb aytiladi.

Bu tipdagi interpolyasion formulalar Gauss, Stirling, Bessel formulalari bulib xisoblanadi.

Gauss interpolyasion formulalari:

Faraz kilamiz 2n+1 ga teng uzoklikga joylashagan tugunlar berilgan bulsin.

$$x_{-n},\ x_{-(n-1)},\ ...,\ x_{-1},\ x_{0,}\ x_1,\ ...,\ x_{n-1},\ x_n$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const \qquad (i = -n, -(n-1), ..., n-1)$$

Bu nuqtalarda $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari berilgan

$$y_i = f(x_i)$$

Darajasi 2_h - dan katta bulmagan shunday p(x) kupxadni kurish kerakki

$$P(x_i) = y_i \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n$$

bo'lsin

bu yerdan (1) $\Delta^k P(y_i) = \Delta^k y_i$ kelib chiqadi.

Bu kupxadni kuyidagi kurinishga axtaramiz.

$$\begin{aligned}
&P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\
&+ a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\
&+ a_5(x - x_2)(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + ... + a_{2n-1}\ \ (x - x_{-n+n}) \ ... \\
&...(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \qquad (2) \\
&a_{2n}(x - x_{-(n-1)})...(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)...\ (x - x_{n-1})(x - x_n)
\end{aligned}$$

Umumlashgan daraja ta'rifidan foydalanib

$$\begin{aligned}
&P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_{-1})^{[3]} + a_4(x - x_{-1})^{[4]} + ... + \\
&+ a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})^{[2n-1]} + a_{2n}(x - x_{-(n-1)})^{[2n]} : \qquad (3)
\end{aligned}$$

$a_i (i = 0, 1, 2, ..., n)$ koeffitsientlarni topish uchun Nyuton interpolyasion formulalarni chikarish uchun kullangan metodlarni kullab va (1)-chini xisobga olib

$$a_0 = y_0; \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1! h}; \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\, h^2};\ a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!\, h^3};$$

$$a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!\, h^4};\ ...,\ a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!\, h^{2n-1}},\quad a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!\, h^{2n}}; \quad q = \frac{x - x_0}{h}$$ ni kiritib

1-chi Gauss interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$\begin{aligned}
&P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \\
&+ \frac{(q+2)\ (q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + ... \frac{(q+n-1)\ ...\ (q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\ ...\ (q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_n \qquad (4)
\end{aligned}$$

yoki

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[5]}}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \\ + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (4')$$

$$x = x_0 + qh; \quad q^{[m]} = q(q-1)\ \ldots\ \left[q-(m-1)\right]$$

Gaussning 1-chi interpolyasion formulasi

$$\Delta y_0, \quad \Delta^2 y_{-1}, \quad \Delta^3 y_{-1}, \quad \Delta^4 y_{-2}, \quad \Delta^5 y_{-2}, \quad \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

markaziy ayirmalarni uz ichiga oladi.

Xuddiy shunday

$$\Delta y_{-1}, \quad \Delta^2 y_{-1}, \quad \Delta^3 y_{-2}, \quad \Delta^4 y_{-2}, \quad \Delta^5 y_{-3}, \quad \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

markaziy ayirmalarni uz ichiga oladigan Gaussning 2 – chi interpolyasion formulasini chakirish mumkin.

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \\ + \frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)\ (q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

yoki

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots \\ + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Gaussning 1-chi va 2-chi interpolyasion formulalarni urta arifmetik kiymatlarini olib Stirling interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$P(x)=y_0+q\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1}+\frac{q(q^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+$$
$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\ldots$$
$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2)\ldots\left[q^2-(n+1)^2\right]}{(2n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n}+\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2}+$$
$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots\left[q^2-(n-1)^2\right]}{(2n!)}\Delta^{2n}y_{-n};$$

$$q=\frac{x-x_0}{h};\quad P(x_i)=y_i$$
$$i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm n.$$

Stirling interpolyasion formulasidan farkli kup xollarda Bessel interpolyasion formulasini ishlatish mumkin.

Buninng uchun Gaussning 2-chi interpolyasion formulasidan foydalanish mumkin.

Buning uchun $2n+2$ ta teng uzoklikda joylashgan interpolyasiya tugunlarini olamiz. kadam h bilan x_{-n}, $x_{-(n-1)}$, ..., x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1}

$$y_i=f(x_0)\qquad\qquad (i=-n,\ \ldots,\ n+1)$$

berilgan $y=f(x)$ - ning qiymatlari.

Agar boshlang'ich qiymat sifatida $x=x_0$ va $y=y_0$ ni olib $x_k(k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n)$ tugunlardan foydalanilsin.

$$P(x)=y_0+q\Delta y_{-1}+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$
$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\ldots+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n}+\qquad(1)$$
$$+\frac{(q+n)(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}$$

Endi boshlang'ich kiymat sifatida $x=x_1$, $y=y_1$ ni olib $x_{1+k}(k=o,\pm1,\ldots,\pm n)$ tugunlardan foydalansak. $\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=q-1$ bulib chekli ayirmalar indeksi 1-ga oshadi, ya'ni yordamchi interpolyasion formulani xosil kilamiz.

$$P(x) = y_1 + (q-1)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$
$$+ \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + ... \qquad (2)$$
$$+ \frac{(q+n-2)...(q-n)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)...(q-n)}{(2n!)}\Delta^{2n} y_{-(n-1)}$$

(1) va (2) larni urta arifmetik kiymatini olib uncha murakkab bulmagan uzgartirishlar kiritsin. Bessel interpolyasion formulasini xosil kilamiz.

$$P(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (q - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{-1}}{2} +$$
$$+ \frac{(q-\frac{1}{2})q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} +$$
$$+ \frac{(q-\frac{1}{2})q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!}\cdot\frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2} +}{2}$$
$$+ ... + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)...(q-n)(q+n-1)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} +$$
$$+ \frac{(q\frac{1}{2})q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)...(q-n)(q+n-1)\Delta^{2n+1} y_{-n}}{(2n+1)!}$$
$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

Bessel interpolyasion formulasi $y = f(x)$ bilan $2n+2$ nuktalarda bir biriga mos tushadi

$$x_{-n}, \quad x_{-(n-1)}, ..., x_n, \ x_0, \ ..., \ x_n, \quad x_{n+1}$$

Xususiy xolda n=1 bulganda $\Delta^3 y_1$ turdagi ayirmalarni xisobga olmasak kvadratik interpolyasiya formulasiga ega bulamiz.

$$P(x) = \frac{y_0 + y_0 + \Delta y_0}{2} + (q - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\cdot\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1} + \Delta y_1 - \Delta y_0}{2}$$

yoki

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 - q_1(\Delta y_1 - \Delta y_{-1})$$
$$q_1 = \frac{q(1-q)}{4}$$

Bessel formulasida tok darajadagi ayirma oldida $(q-\frac{1}{2})$ kupaytuvchi katnashadi. Shuning uchun $q=\frac{1}{2}$ kiymatda Bessel formulasi juda sodda kurinishga ega buladi.

$$P(\frac{x_0+x_1}{2})=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{8}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{3}{128}\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}-\frac{5}{1024}\frac{\Delta^6 y_{-2}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{\left[1\cdot 3\cdot 5-(2n-1)\right]^2\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2^{2n}(2n)!}$$

Besselning urtada interpolyasiyalash formulasi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

x	y	№	x
0,43	1,63597	1	0,702
0,48	1,73234	3	0,512
0,55	1,87686	5	0,645
0,62	2,03345	7	0,736
0,70	2,22846	9	0,608
0,75	2,35973	11	0,478

x	y	№	x
0,02	1,02316	2	0,102
0,08	1,09590	4	0,114
0,12	1,14725	6	0,125
0,17	1,21483	8	0,203
0,23	1,30120	10	0,154
0,30	1,40976	12	0,087

X	y	№	x
0,35	2,73951	13	0,526
0,41	2,30080	15	0,453
0,47	1,96864	17	0,482
0,51	1,78776	19	0,552
0,56	1,59502	21	0,436
0,64	1,34310	23	0,635
0,69	1,16321	25	0,667

x	y	№	x
0,68	0,80866	14	0,896
0,73	0,89492	16	0,812
0,80	1,02964	18	0,774
0,88	0,20966	20	0,955
0,93	1,34087	22	0,715
0,99	1,52368	24	0,984
1,07	1,75826	26	0,845

11--Laboratoriya mashg'uloti

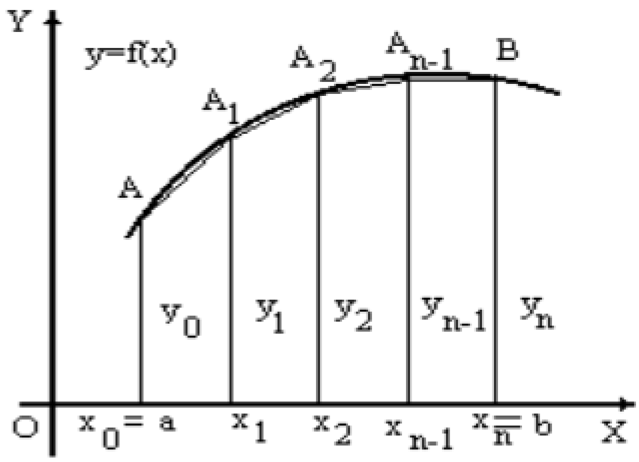
Trapetsiya formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlikni baholash

Reja

1. Trapetsiya formulasi va uning xatoligini baholash
2. Namunaviy misollar yechish
3. Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Trapetsiya formulasi va uning xatoligini baholash

[a,b] kesmani n ta teng bo'lakka bo'lamiz. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ $y = f(x)$ chiziqning har bir yoyini bu yoyning uchlarini tutashtiruvchi vatar bilan almashtiramiz.



Berilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini n ta to`g`ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarini yig`indisi bilan almashtiramiz

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x \right) \qquad (1)$$

Bu trapetsiyalar formulasidir.

Trapetsiyalar formulasini absolyut xatoligi $R = M\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ dan katta emas. Bu yerda

$$M = \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Namunaviy misollar yechish

Ushbu $I=\int_0^2 \sin\left(x^2\right)dx$ integralni taqribiy qiymatini trapetsiya formulasidan foydalanib hisoblang.

Yechish

$$n=10, \quad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{10}=0,2$$

quyidagi jadvalni to'ldiramiz.

i	x_i	y_i
0	0	0
1	0,2	0,004
2	0,4	0,1593
3	0,6	0,3523
4	0,8	0,5972
5	1,0	0,8415
6	1,2	0,9915
7	1,4	0,9249
8	1,6	0,5487
9	1,8	0,3427
10	2,0	0,1576

Trapetsiya formulasiga asosan

$$I=\int_0^2 \sin\left(x^2\right)dx \approx 0,2\left(\frac{0+0,1576}{2}+0.04+0.1593+0.3523+0.5972+0.8415+\right.$$
$$\left.+0.9915+0.9249+0.5487+0.3427\right)=1,11722$$

Endi absolyut xatolikni topamiz

$$f'(x) = \left(\sin\left(x^2\right)\right)' = 2x\cos\left(x^2\right)$$
$$f''(x) = 2\cos\left(x^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2\right)$$
$$M_2 = \max\left|2\cos\left(x^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2\right)\right| \le 2$$
$$R_2 = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2*8}{12*100} = \frac{4}{300} = 0.013$$

dan katta emas

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Integrallarning qiymatini 3 xona aniqlikda trapesiya formulasi yordamida hisoblang.

1. $\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$	2. $\int_{1,2}^{2,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$	3. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$
4. $\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	5. $\int_{0,6}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$	6. $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$
7. $\int_{1,4}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$	8. $\int_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$	9. $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$
10. $\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$	11. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	12. $\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$
13. $\int_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$	14. $\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$	15. $\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$
16. $\int_{1,8}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,25}}$	17. $\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$	18. $\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$
19. $\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,6}}$	20. $\int_{3,2}^{4,2} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$	21. $\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$

22. $\int_{1,2}^{2,0} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$ 23. $\int_{2,1}^{3,1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ 24. $\int_{1,3}^{2,3} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$

25. $\int_{0,4}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{12x^2+0,5}}$ 26. $\int_{1,3}^{2,3} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-0,4}}$ 27. $\int_{1,4}^{2,8} \frac{dx}{\sqrt{1,5x^2+0,7}}$

12--Laboratoriya mashg'uloti

Simpson formulasi bo'yicha sonli integrallash va aniqlikni baholash

Reja:

1. Simpson formulasi va uning xatoligini baholash
2. Namunaviy misollar yechish
3. Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Simpson formulasi va uning xatoligini baholash

[a,b] kesmani n=2 ta teng juft miqdordagi teng qismlarga bo'lamiz. Uchta nuqta olamiz va bu $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$ nuqtalar orqali $y = Ax^2 + \mathbf{B}x + C$ parabolani o'tkazamiz. Bu parabola bilan $\mathbf{y} = f(x)$ funksiya grafigini almashtiramiz. Xuddi shunga o'xshash $\mathbf{y} = f(x)$ $[a,b]$ funksiya grafigi $[x_2;x_4]$, $[x_4;x_6]$ va boshqa kesmalarga almashtiramiz.

Shunday qilib $\mathbf{y} = f(x)$ egri chiziqli trapetsiya yuzini bu kesmadagi parabolalar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyalar yuzlarini yig'indisi bilan almashtiramiz.

Bunday egri chiziqli trapetsiyalar parabolik trapetsiyalar deyiladi. Parabola tenglamasining A, B , C koeffisentlari parabolaning berilgan uchta nuqtadan o`tish shartidan aniqlanadi.

A, B , C koeffisentlarni parabolaning $(-h;y_0)$, $(0;y_2)$, $(h;y_2)$ nuqtalardan o'tish shartidan topamiz.

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

$$\begin{cases} y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 = C \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib

$A = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$ $C = y_1$ $B = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)$ ni aniqlaymiz.

Endi parabolik trapetsiyaning S yuzasini aniq integral yordamida topamiz.

$$S_1=\int_{-h}^{h}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=\left(A\frac{x^3}{3}+B\frac{x^2}{2}+Cx\right)\Bigg|_{-h}^{h}=\frac{h}{3}\left(2Ah^3+6C\right)$$

A va B ning topilgan qiymatlarini o`rniga qo`yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$S_1=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$$

$$S_2=\frac{h}{3}\left(y_2+4y_3+y_4\right)$$

$$S_3=\frac{h}{3}\left(y_4+4y_5+y_6\right)$$

…………………………

$$S_{2m}=\frac{h}{3}\left(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left(y_0+y_{2m}+4\left(y_1+\ldots+y_{2m-1}\right)+2\left(y_2+\ldots+y_{2m-2}\right)\right)$$

Bunda $h=\Delta x=\dfrac{b-a}{2m}$

Shunday qilib, aniq integralni taqribiy hisoblashning Simpson formulasi (parabolik trapetsiyalarni formulasi) bunday ko`rinishni oladi.

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6m}\left(y_0+y_{2m}+4\left(y_1+\ldots+y_{2m-1}\right)+2\left(y_2+\ldots+y_{2m-2}\right)\right)$$

Simpson formulasining absolyut xatosi $R=M\dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}$ $\quad h=\Delta x=\dfrac{b-a}{2m}$ dan katta

emas. Bu yerda $M=\max\limits_{[a,b]}\left|f^{IV}(x)\right|$

Namunaviy misollar yechish

Ushbu $I=\int_2^{12}\sqrt{x^3+13}dx$ integralni taqribiy qiymatini Simpson formulasidan foydalanib hisoblang.

Yechish

$$n=10,\quad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{12-2}{10}=1$$

quyidagi jadvalni to'ldiramiz.

i	x_i	y_i
0	2	4,582
1	3	6,324
2	4	8,775
3	5	11,747
4	6	15,133
5	7	18,868
6	8	22,913
7	9	27,240
8	10	31,828
9	11	36,661
10	12	41,725

Simpson formulasiga asosan

$$I=\int_2^{12}\sqrt{x^3+13}dx\approx\frac{1}{3}[4,5882+41,725+4(6,32411,74718,86827,24036,661)+$$
$$+2(8,77515,13322,91331,828)]=197,808$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Integrallarning qiymatini 3 xona aniqlikda trapesiya formulasi yordamida hisoblang.

1. $\displaystyle\int_{0,8}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$

2. $\displaystyle\int_{1,2}^{2,8}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$

3. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$

4. $\displaystyle\int_{0,2}^{1,2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

5. $\displaystyle\int_{0,6}^{1,4}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

6. $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2}\frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$

7. $\displaystyle\int_{1,4}^{2,4}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

8. $\displaystyle\int_{1,2}^{2,4}\frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$

9. $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2}\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

10. $\displaystyle\int_{0,6}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

11. $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

12. $\displaystyle\int_{0,5}^{1,5}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

13. $\displaystyle\int_{1,2}^{2,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$

14. $\displaystyle\int_{1,4}^{2,2}\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$

15. $\displaystyle\int_{0,8}^{1,8}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

16. $\displaystyle\int_{1,8}^{2,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,25}}$

17. $\displaystyle\int_{0,6}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$

18. $\displaystyle\int_{1,2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$

19. $\displaystyle\int_{1,4}^{2,2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,6}}$

20. $\displaystyle\int_{3,2}^{4,2}\frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$

21. $\displaystyle\int_{0,8}^{1,8}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$

22. $\displaystyle\int_{1,2}^{2,0}\frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$

23. $\displaystyle\int_{2,1}^{3,1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$

24. $\displaystyle\int_{1,3}^{2,3}\frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$

25. $\displaystyle\int_{0,4}^{1,4}\frac{dx}{\sqrt{12x^2+0,5}}$

26. $\displaystyle\int_{1,3}^{2,3}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-0,4}}$

27. $\displaystyle\int_{1,4}^{2,8}\frac{dx}{\sqrt{1,5x^2+0,7}}$

13--Laboratoriya mashg'uloti

Mavzu: Koshi masalasini yechishning Eyler usuli

Ishdan maqsad: *Birinchi tartibli differensial tenglama uchun qo`yilgan Koshi masalasini Eyler usulida yechishni talabalarga o'rgatish quyidagilarni o'z ichiga oladi:*

- *differensial tenglamani integrallashga sonli usulni qo'llash;*
- *hisoblash ishini tashkil qilish va bajarish;*

masalani yechish dasturini tuzish va sonli natijalar olish.

1. Eyler usuli

Faraz kilamiz boshlangich $y(x_0) = y_0$ shartga ega bulgan

$$(1) \quad y^1 = f(x, y)$$

differentsial tenglama berilgan bulsin

Etarlicha kichik h kadam olib teng uzoklikda joylashgan tugun nuktalar sistemasini tuzamiz.

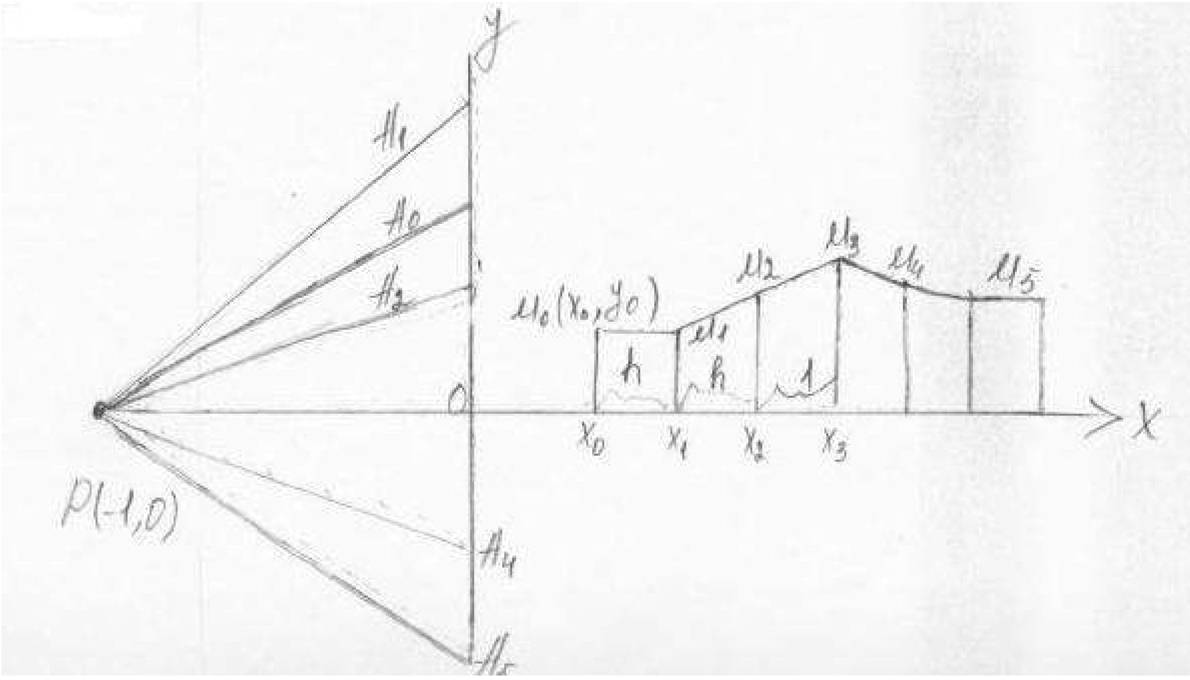
$$x_i = x_0 + ih(i = 0, 1, 2, ...,) \qquad (2)$$

$M_0(x_0, y_0)$ nuktadan utuvchi axtarilayotgan $y = y(x)$ integral egri chizikni takribiy ravishda $M_i(x_i, y_i)$ balandlikga ega bulgan $M_0 M_1 M_2 M_3 ...$ sinik chizik bilan almashtirib olamiz va bu sinik chizikni $M_i M_{i+1}$ zvenosi x_i, x_{i+1} tugri chiziklar orasida joylashgan bulib

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \qquad (3)$$

balandlikga ega.

SHunday kilib Eyler sinik chizikining $M_i M_{i+1}$ zvenosi xar bir M_i balandlikga ega bulgan kismi $M_i (x_i, y_i)$ nuktadan utuvchi integral egri chizik yunalishiga ega bulgan yunalishga ega buladi.



(3) formuladan kurinadiki y_i -ning kiymatlari kuyidagi formula bilan topiladi.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad \Delta y_i = hf(x_i, y_i) \qquad (i = 0, 1, 2, ...)$$

Bu Eyler metodining asosiy formulasi xisoblanadi.

Eyler metodining sinik chizikini geometrik tuzilishini kurish uchun $P(-1{,}0)$ kutb nukta olib ordinat ukiga $0A_0 = f(x_0, y_0)$ kesmani belgilamiz. Tabiiyki PA_0 nurning burchak koeffitsienti $f(x_0, y_0)$ ga teng buladi. SHuning uchun Eyler sinik chizikini xosil kilish uchun M_0 nuktadan PA_0 nurga paralel kilib M_0M_1 chizikni utkazish kifoya. Bu chizik to $x = x_1$ nuktagacha davom ettiriladi. (ya'ni $M_1(x_1\, y_1)$ nuktagacha).

$M_1(x_1, y_1)$ nuktani boshlangich nukta deb ordinata ukiga $0A_1 = f(x_1, y_1)$ kesmani belgilaymiz va PA_1 nurga paralel bulgan M_1M_2 chizikni utkazamiz ta $x = x_2$ nuktagacha va xo kazo.

Eyler metodi differentsial tenglamalarni integrallashni oddiy metodlaridan xisoblanadi.

Eyler metodi kuyidagi kamchiliklarga ega.

3. Kichik aniklik

4. Xatoni yigilib borishi

Eyler usuli umuman olganda kadamni h -ning kichik kiymatlari uchun konikarli natija beradi, chunki Eyler metodining asosiy goyasi (1) –chi differentsial tenglamaning integrali. Xar bir $[x_i, x_{i+1}]$ xususiy kesmada Teylor katorining 2 ta xadi bilan tasvirlanadi, ya'ni

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy^1(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, ...)$$

buning berilgan kesmadagi xatosining tartibi h^2 ga teng.

Bundan tashkari xar bir kadamdagi yechimni xosil kilish uchun boshlangich shartga kuyilgan xato takrorlanadi va bu yakuniy natijaga ta'sir kursatadi.

Misol: Kuyidagi sistemani Eyler usuli bilan takribiy kiymatlari xisoblansin.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= x + y_1 y_2; \\ \frac{dy_2}{dx} &= x^2 - y_1^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Boshlangich shartlari

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0;$$

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x + y_1 y_2)dx; \qquad y_2 = \int_0^x (x^2 - y_1^2)dx;$$

bu yerdan

$$y_1^{(0)} = 1; \quad y_1^{(0)} = 0 \text{ deb}$$

$$y_1^{(1)},\ y_2^{(1)} \text{ -ni topamiz.}$$

$$y_1^{(1)} = 1 + \int_0^x (x + 0)dx = 1 + \frac{x^2}{2};$$

$$y_2^{(1)} = \int_0^x (x^2 - 1)dx = -x + \frac{x^3}{3};$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \int_0^x \left[x + (2 + \frac{x^2}{2})(-x + \frac{x^3}{3}) \right] dx = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{36}$$

$$y_2^{(2)} = \int_0^x \left[x^2 - (1 + x^2 + \frac{x^4}{4}) \right] dx = -x - \frac{x^5}{20};$$

Eyler metodi sistema uchun juda sodda kengaytiriladi.

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \overline{f}(x, \overline{y}) \quad (1)$$

$$\overline{y}(x_0) = \overline{y}_0 \quad (2)$$

(1)-chi vektorli tenglamani integral formada yozamiz

$$\overline{y} = \overline{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \overline{f}(x, \overline{y})dx$$

$$\overline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \int_{x_0}^{x} \overline{f}dx = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_{x_0}^{x} f_n(x)dx \end{pmatrix}$$

$\overline{y}^{(p)}$ -ketma-ket yakinlashishlar kuyidagi formula orkali topiladi.

$$\overline{y}^{(p)} = \overline{y}_0 + \int_{x}^{x_0} \overline{f}(x, \overline{y}^{(p-1)})dx$$

odatda

$\overline{y}^{(0)} \equiv \overline{y}_0$ deb olinadi.

Misol: Eyler metodini kullab $[0, 1]$ kesmada $y(0) = 1$ boshlangich shartga ega bulgan $y^1 = \frac{xy}{2}$ tenglamani jadval shaklidagi yechimini topish maksadi kuyiladi.

Kadam $h = 0{,}1$ kadam olib kuyidagi jadvalni tuzamiz

i	x	y	$f(x,y) = \frac{xy}{2}$	$\Delta y = 0{,}1 f(x,y)$	**Aniq yechim** $y = e\frac{x^2}{y}$
0	0	1	0	0	1
1	0,1	1	0,05	0,005	1,0 025

2	0,2	1,005	0,1005	0,0101	1,0100
3	0,3	1,0151	0,1523	0,0152	1,0227
4	0,4	1,0303	0,2067	0,0206	1,0408
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263	1,0645
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323	1,0942
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388	1,1303
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459	0,1735
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537	1,2244
10	1,0	1,2479			1,2840

Topshiriqlar

Berilgan birinchi tartibli differensial tenglamani Eyler usulida yeching.

1. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$ $\quad y_0(1,8) = 2,6$ $\quad x \in [1,8;\ 2,8]$

2. $y' = x + \cos\frac{y}{3}$ $\quad y_0(1,6) = 4,6$ $\quad x \in [1,6;\ 2,6]$

3. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$ $\quad y_0(0,6) = 0,8$ $\quad x \in [0,6;\ 1,6]$

4. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$ $\quad y_0(0,8) = 1,4$ $\quad x \in [0,8;\ 1,8]$

5. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$ $\quad y_0(2,1) = 2,5$ $\quad x \in [2,1;\ 3,1]$

6. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$ $\quad y_0(1,8) = 2,6$ $\quad x \in [1,8;\ 2,8]$

7.	$y' = x + \sin\frac{y}{3}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$x \in [1,6;\ 2,6]$
8.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6;\ 1,6]$
9.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(0,8) = 1,4$	$x \in [0,8;\ 1,8]$
10.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2,1) = 2,5$	$x \in [2,1;\ 3,1]$
11.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{12}}$	$y_0(1,8) = 2,6$	$x \in [1,8;\ 2,8]$
12.	$y' = x + \cos\frac{y}{2}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$x \in [1,6;\ 2,6]$
13.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{4}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6;\ 1,6]$
14.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(0,8) = 1,4$	$x \in [0,8;\ 1,8]$
15.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(2,1) = 2,5$	$x \in [2,1;\ 3,1]$
16.	$y' = \frac{y}{x} - y^2$	$y_0(1) = 1,0$	$x \in [1,0;\ 2,0]$
17.	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$	$y_0(1,4) = 2,5$	$x \in [1,4; 2,4]$
18.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0,8) = 1,3$	$x \in [0,8;\ 1,8]$
19.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1,1) = 1,5$	$x \in [1,1;\ 2,1]$
20.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(0,6) = 1,2$	$x \in [0,6;\ 1,6]$

21. $y' = x + \sin\frac{y}{1{,}25}$ $y_0(0{,}5) = 1{,}8$ $x \in [0{,}5;\ 1{,}5]$

22. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}$ $y_0(0{,}2) = 1{,}1$ $x \in [0{,}2;\ 1{,}2]$

23. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$ $y_0(0{,}1) = 0{,}8$ $x \in [0{,}1;\ 1{,}1]$

24. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$ $y_0(0{,}5) = 0{,}6$ $x \in [0{,}5;\ 1{,}5]$

25. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$ $y_0(1{,}2) = 1{,}4$ $x \in [1{,}2;\ 2{,}2]$

26. $y' = x + \cos\frac{y}{1{,}25}$ $y_0(0{,}4) = 0{,}8$ $x \in [0{,}4;\ 1{,}4]$

14--Laboratoriya mashg'uloti

Mavzu: Koshi masalasini yechishning Runge-Kutta usuli

Ishdan maqsad: *Birinchi tartibli differensial tenglama uchun qo`yilgan Koshi masalasini Eyler, Runge-Kutta usulida yechishni talabalarga o'rgatish quyidagilarni o'z ichiga oladi:*

- *differensial tenglamani integrallashga sonli usulni qo'llash;*
- *hisoblash ishini tashkil qilish va bajarish;*

masalani yechish dasturini tuzish va sonli natijalar olish.

Runge-Kutta metodi

Faraz kilamiz 1-chi tartibli differentsial tenglama berilgan bulsin.

$$y^1 = f(x, y) \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

h -kadam olib $x_i = x_0 + ih$ va $y_i = y(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, ...)$ deb belgilaymiz.

Kuyidagi sonlarni kuramiz.

$$\left.\begin{aligned} K_1^{(i)} &= h\,f(x_i, y_i) \\ K_2^{(i)} &= h\,f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right) \\ K_3^{(i)} &= h\,f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right) \\ K_4^{(i)} &= h\,f(x_i + h,\ y_i + K_3^{(i)}) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Runge-Kutta metodiga kura y_i -ning kiymatlari kuyidagi formula bilan topiladi.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$(3) \qquad \Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}) \ (i = 0, 1, 2, ...)$$

Bu metodning xar bir kadamdagi xatosi h^5 mikdordan ortmaydi. Xisoblashlarda kuyidagi tablitsadan foydalanish makul deb xisoblanadi.

i	x	y	$k = hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
-	-	-	-	$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_0$
1	x_1	y_1		

Runge-Kutta metodining xatosini baxolash murakkab bulib xisoblanadi. SHuning uchun h -kadamni tugri tanlanganimizni tekshirish uchun ikki kadamda ikkilangan xisob bilan tekshirilib boriladi, ya'ni $y(x_i)$ -ning kiymatlaridan foydalanib $y(x_i + 2h)$ -ning kiymatini ikkita yul bilan xisoblaydilar: 1). 1-chi marta xisob h kadam bilan. 2). 2-chi marta $H = 2h$ kadam bilan.

Agar olingan natijalar kutilgan natijalar bilan mos tushsa demak h kadam tugri tanlangan va olingan kiymatlarni $y(x_i + 2h)$ deb olish mumkin. Agar bu shart bajarilmasa kadamni ikki marta kichraytirishga tugri keladi. Bu xisoblash sixemasini EXM-da dasturlash juda kulay bulib xisoblanadi.

Xisoblashlarning murakkabligiga karamasdan Runge-Kutta metodi EXM-da eng kulay va katta aniklashga ega bulgan metod bulib xisoblanadi, yana kulayligi shundaki buerda uzgaruvchi kadam olinadi.

Misol: $y^1 = x + y$ tenglamaning $[0; 0,5]$ kesmada $y(0) = 1$ shartni kanoatlantiradigan yechimini xisoblash kerak $h = 0,1$

$$K_1^{(0)} = (0+1)\cdot 0{,}1 = 0{,}1$$
$$K_2^{(0)} = [0{,}05 + (1+05)]\cdot 0{,}1 = 0{,}11$$
$$K_3^{(3)} = [0{,}05 + (1+0{,}055)]0{,}1 = 0{,}1105$$
$$K_4^{(0)} = [0{,}1 + (1+0{,}1105)]0{,}1 = 0{,}12105$$
$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}1 + 2\cdot 0{,}11 + 2\cdot 0{,}1105 + 0{,}1205) = 0{,}1103$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1103 = 1{,}1103$$

i	x	y	$k = 0{,}1 f(x,\ y)$	Δy
0	0	1	0,1	0,1000
	0,05	1,05	0,11	0,2200
	0,05	1,055	0,1105	0,2210
	0,1	1,1105	0,1210	0,1210
				$\frac{1}{6}0{,}6620 = 0{,}1103$
1	0,1	1,1103	0,1210	0,1210
	0,15			
	0,15			
	0,2			

Runge-Kutta metodini differentsial tenglamalar sistemasi uchun xam kullash mumkin.

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \overline{f}(x,\ \overline{y}) \qquad (1)$$

$$\overline{y}(x_0) = \overline{y}_0 \qquad (2)$$

h kadam olib $x_0 = x_0 + ih$ va $\overline{y}_i = \overline{y}_i(x_0)$ deb $\Delta\overline{y}_i = \overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i$ ni topamiz.

$$\overline{K}_1^{(0)} = h\overline{f}(x_0, \overline{y}_0)$$

$$\overline{K}_2^{(0)} = h\overline{f}(x_0 + \frac{h}{2}, \frac{\overline{K}_1^{(0)}}{2})$$

$$\overline{K}_3^{(0)} = h\overline{f}(x_0 + \frac{h}{2}, \frac{\overline{K}_2^{(0)}}{2})$$

$$\overline{K}_4^{(0)} = h\overline{f}(x_0 + h, \overline{y}_0 + \overline{K}_3^{(0)})$$

$$\Delta\overline{y}_0 = \frac{1}{6}(\overline{K}_1^{(0)} + 2\overline{K}_2^{(0)} + 2\overline{K}_3^{(0)} + \overline{K}_4^{(0)})$$

bu yerda

$$\overline{y}_1 = \overline{y}_0 + \Delta\overline{y}_0$$

Topshiriqlar

Berilgan birinchi tartibli differensial tenglamani Runge-Kutta usulida yeching.

1. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$ $\quad y_0(1{,}8) = 2{,}6$ $\quad x \in [1{,}8;\ 2{,}8]$

2. $y' = x + \cos\frac{y}{3}$ $\quad y_0(1{,}6) = 4{,}6$ $\quad x \in [1{,}6;\ 2{,}6]$

3. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$ $\quad y_0(0{,}6) = 0{,}8$ $\quad x \in [0{,}6;\ 1{,}6]$

4. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$ $\quad y_0(0{,}8) = 1{,}4$ $\quad x \in [0{,}8;\ 1{,}8]$

5. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$ $\quad y_0(2{,}1) = 2{,}5$ $\quad x \in [2{,}1;\ 3{,}1]$

6. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$ $\quad y_0(1{,}8) = 2{,}6$ $\quad x \in [1{,}8;\ 2{,}8]$

7. $y' = x + \sin\frac{y}{3}$ $\quad y_0(1{,}6) = 4{,}6$ $\quad x \in [1{,}6;\ 2{,}6]$

8.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6;\, 1,6]$
9.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(0,8) = 1,4$	$x \in [0,8;\, 1,8]$
10.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2,1) = 2,5$	$x \in [2,1;\, 3,1]$
11.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{12}}$	$y_0(1,8) = 2,6$	$x \in [1,8;\, 2,8]$
12.	$y' = x + \cos\frac{y}{2}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$x \in [1,6;\, 2,6]$
13.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{4}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6;\, 1,6]$
14.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(0,8) = 1,4$	$x \in [0,8;\, 1,8]$
15.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(2,1) = 2,5$	$x \in [2,1;\, 3,1]$
16.	$y' = \frac{y}{x} - y^2$	$y_0(1) = 1,0$	$x \in [1,0;\; 2,0]$
17.	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$	$y_0(1,4) = 2,5$	$x \in [1,4; 2,4]$
18.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0,8) = 1,3$	$x \in [0,8;\, 1,8]$
19.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1,1) = 1,5$	$x \in [1,1;\; 2,1]$
20.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(0,6) = 1,2$	$x \in [0,6;\, 1,6]$
21.	$y' = x + \sin\frac{y}{1,25}$	$y_0(0,5) = 1,8$	$x \in [0,5;\, 1,5]$

22. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}$ $y_0(0{,}2) = 1{,}1$ $x \in [0{,}2;\ 1{,}2]$

23. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$ $y_0(0{,}1) = 0{,}8$ $x \in [0{,}1;\ 1{,}1]$

24. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$ $y_0(0{,}5) = 0{,}6$ $x \in [0{,}5;\ 1{,}5]$

25. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$ $y_0(1{,}2) = 1{,}4$ $x \in [1{,}2;\ 2{,}2]$

26. $y' = x + \cos\frac{y}{1{,}25}$ $y_0(0{,}4) = 0{,}8$ $x \in [0{,}4;\ 1{,}4]$

15--Laboratoriya mashg'uloti.

Chiziqli dasturlashga keltiriladigan masalalarning matematik modelini qurish. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish

REJA:

1. Chiziqli dasturlash masalalarining qo'yilishi.
2. Chiziqli dasturlash masalalarining matematik modellari.
3. Tuli xil hayotiy masalalarning matematik modellari va ularning tahlili

Chzizqli dasturlash masalalari. Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (\leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq (\leq) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (\leq) b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \qquad (2)$$

$$Y_{\min(\max)} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (3)$$

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3) chiziqli funktsiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (1) va (2) shartlari uning chegaraviy shartlari deb, (3) chiziqli funktsiya esa masalaning maqsadi yoki maqsad funktsiyasi deb ataladi.

Masaladagi barcha chegaralovchi shartlar va maqsad funktsiya chiziqli ekanligi ko'rinib turibdi. SHuning uchun ham (1)-(3) masala chiziqli dasturlash masalasi deb ataladi.

Konkret masalalarda (1) shart tenglamalar sistemasidan, «≥» yoki «≤» ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin. Lekin ko'rsatish mumkinki, (1)-(3) ko'rinishdagi masalani osonlik bilan quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \qquad (5)$$

$$Y_{\min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (6)$$

(4)-(6) ko'rinish chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishi deb ataladi.

(4)-(6) masalani vektorlar yordamida quyidagicha ifodalash mumkin:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = P_0 \qquad (7)$$

$$X \geq 0 \quad (8)$$

$$Y_{\min} = CX \quad (9)$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \; p_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

bu yerda

$S = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – vektor–qator.

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – vektor–ustun.

(4)-(6) masalaning matritsa ko'rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$AX = P_0 \quad (10)$$

$$X \geq 0, \quad (11)$$

$$Y_{\min} = CX \quad (12)$$

bu yerda $S = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – qator vektor, $A = (a_{ij})$ – (4) sistema koeffitsientlaridan tashkil topgan matritsa; $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ va $P_0 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – ustun vektorlar.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; (i = 1, \dots, m) \quad (13)$$

$$x_j \geq 0, \; (j = 1, \dots, n) \quad (14)$$

$$Y_{\min} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \quad (15)$$

(4)-(6) masalani yig'indilar yordamida ham ifodalash mumkin:

1-ta'rif. Berilgan (4)–(6) masalaning mumkin bo'lgan echimi yoki rejasi deb, uning (4) va (5) shartlarni qanoatlantiruvchi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorga aytiladi.

2-ta'rif. Agar (7) yoyilmadagi musbat x_i koeffitsientli P_i, $(i = 1, \dots, m)$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'iq bo'lmasa, u holda $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ reja tayanch reja deb ataladi.

3-ta'rif. Agar $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tayanch rejadagi musbat komponentalar soni m ga teng bo'lsa, u hoda bu reja aynimagan tayanch reja, aks holda aynigan tayanch reja deyiladi.

4-ta'rif. CHiziqli funktsiya (6) ga eng kichik qiymat beruvchi $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tayanch reja masalaning optimal rejasi yoki optimal echimi deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalasi yechimining ayrim xossalarini qaraymiz:

4. chiziqli dasturlash masalasi cheklash shartlari sistemasiningg rejalari : (mumkin bo'lgan yechimlari) to'plami bo'sh to'plam yoki *Rn* fazodagi qavariq to'plamni tashkil etadi:
5. chiziqli dasturlash masalasi rejalari to'plami bosh to'plam bo'lmasa va maqsad funksiya bu to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, masala maksimum (minimum) optimal yechimga ega bo'ladi;
6. chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimi mavjud bo'lsa, bu yechim mumkin bo'lgan yechimlar to'plamining chegaraviy nuqtalarida bo'ladi.

Chiziqli dasturlash masalasiga keltiriladigan quyidagi masalalarning matematik modellarini quring

11. Gazlama tayyorlash fabrikasida 3 xil xom ashyodan 2 xil gazlama ishlab chiqariladi. Gazlamaga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va xom ashyolarning umumiy miqdori hamda gazlama narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 gazlama	2 gazlama	Xom ashyo miqdori
Ipak	4	5	50
Paxta	6	8	70
Buyoq	–	3	12
birlik mah. Narxi	2	5	

Korxona ishini shunday rejalashtirish kerakki uning daromadi maksimal bo'lsin.

12. Ishlab chiqarish fermasida 3 ta sex mavjud bo’lib, bu sexlarga ishchilarni qabul qishishi soni va 1 kunlik ish haqi quyidagicha:

    1-sex 260 dan kam bo’lmagan 340 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 4;

    1-sex 420 dan kam bo’lmagan 470 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 3;

    1-sex 370 dan kam bo’lmagan 400 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 2,5.

    Fermada 1100 ishchi mavjud bo’lib, ularni shunday joylashtirish kerakki ishchilarga sarflanadigan xarajatlar minimal bo’lsin.

13. Ip yigiruv sexida 3 xil xom ashyodan 2 xil ip tayyorlanadi. Iplarga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va foizlari hamda iplarni narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 ip	2 ip	Xom ashyo miqdori
Ipak	30%	–	40
Paxta	70%	65%	60
Sun. Tola	–	45%	12
birlik mah. narxi	3	5	

    Mahsulotlarni ishlab chiqarishni shunday taminlash kerakki, korxona daromadi maksimal bo’lsin.

14. Sexda 2 xil turdagi mahsulotni tayyorlashda 2 turdagi stanoklardan foydalaniladi. Stanoklarning ishlash vaqti 9 soatdan oshmasligi lozim. Stanoklarning har birlik mahsulotga sarflash vaqti va mahsulot narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1sta.sarf.vaqti	2sta.sarf.vaqti	Mah. narxi
1-mahsulot	9 min	5 min	6
2-mahsulot	4 min	7 min	8

    Korxonada maksimal daromad olish rejasini ishlab chiqing.

15. Gazlama tayyorlash fabrikasida 3 xil xom ashyodan 2 xil gazlama ishlab chiqariladi. Gazlamaga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va xom ashyolarning umumiy miqdori hamda gazlama narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 gazlama	2 gazlama	Xom ashyo miqdori
Ipak	6	5	50
Paxta	4	9	80
Buyoq	–	3	12
birlik mah. narxi	3	6	

Korxona ishini shunday rejalashtirish kerakki uning daromadi maksimal bo'lsin.

16. Ishlab chiqarish fermasida 3 ta sex mavjud bo'lib, bu sexlarga ishchilarni qabul qishishi soni va 1 kunlik ish haqi quyidagicha:

1-sex 260 dan kam bo'lmagan 340 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 5;

21-sex 410 dan kam bo'lmagan 470 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 3;

3-sex 365 dan kam bo'lmagan 400 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 3,5.

Fermada 1100 ishchi mavjud bo'lib, ularni shunday joylashtirish kerakki ishchilarga sarflanadigan xarajatlar minimal bo'lsin.

17. Ip yigiruv sexida 3 xil xom ashyodan 2 xil ip tayyorlanadi. Iplarga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va foizlari hamda iplarni narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 ip	2 ip	Xom ashyo miqdori
Ipak	35%	–	24
Paxta	65%	70%	40
Suniy tola	–	30%	15
birlik mah. narxi	3	5	

Mahsulotlarni ishlab chiqarishni shunday taminlash kerakki, korxona daromadi maksimal bo'lsin.

18. Sexda 2 xil turdagi mahsulotni tayyorlashda 2 turdagi stanoklardan foydalaniladi. Stanoklarning ishlash vaqti 9 soatdan oshmasligi lozim. Stanoklarning har birlik mahsulotga sarflash vaqti va mahsulot narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1sta.sarf.vaqti	2sta.sarf.vaqti	Mah. narxi
1-mahsulot	4 min	3 min	6
2-mahsulot	3 min	5 min	8

Korxonada maksimal daromad olish rejasini ishlab chiqing.

19. Gazlama tayyorlash fabrikasida 3 xil xom ashyodan 2 xil gazlama ishlab chiqariladi. Gazlamaga sarflanayotgan xom ashyo miqdori va xom ashyolarning umumiy miqdori hamda gazlama narxlari quyidagicha

Xom ashyo	1 gazlama	2 gazlama	Xom ashyo miqdori
Ipak	7	5	50
Paxta	9	11	75
Buyoq	–	2	12
birlik mah. narxi	2	5	

Korxona ishini shunday rejalashtirish kerakki uning daromadi maksimal bo'lsin.

20. Ishlab chiqarish fermasida 3 ta sex mavjud bo'lib, bu sexlarga ishchilarni qabul qishishi soni va 1 kunlik ish haqi quyidagicha:

1-sex 270 dan kam bo'lmagan 360 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 4;

1-sex 410 dan kam bo'lmagan 470 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 3;

1-sex 390 dan kam bo'lmagan 410 dan oshmagan, 1 ishchi ish haqi 2,5.

Fermada 1100 ishchi mavjud bo’lib, ularni shunday joylashtirish kerakki ishchilarga sarflanadigan xarajatlar minimal bo’lsin.

16--Laboratoriya mashg'uloti

Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish

1.Chiziqli dasturlash masalasini yechishning simpleks usuli.
2. Sun'iy bazis usuli.
3. Aralash shartli masalalar.

Endi sismples usulning optimallik shartini qaraymiz. Chiziqli dasturlashning (5)-(7) masalasi qo'yilgan bo'lib, reja mavjud va u maxsusmas bo'lsin. Bu holda (9) tayanch yechim uchun ushbuni hosil qilamiz:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m = A_0, \qquad (11)$$

$$x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_mc_m = Z(X_0), \qquad (12)$$

bunda hamma $x_i > 0, Z(X_0)$ chiziqli funksiyaning bu rejaga mos kelgan qiymatini ifodalaydi.

Istalgan A_j vektor $A_1, A_2, ..., A_m$ bazis vektorlari orqali yagona yoyilmaga:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + ... + x_{mj}A_m = A_j \ (j = 1,2,...,n) \qquad (13)$$

ega bo'ladi, shuning uchun A_j vektor yoyilmasiga bu bazisda chiziqli funksiyaning yagona

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + ... + x_{mj}c_j = Z_j \ (j = 1,2,...,n) \qquad (14)$$

qiymati mos keladi. C_j - A_j vektorga mos chiziqli funksiyadagi koeffitsiyentlari bo'lsin. Kuyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

1-teorema. Biror A_j vektor uchun $Z_j - C_j > 0$ baho bajarilsa, X_0 reja optimal bo'lmaydi va shunday X_1 rejani topish mumkinki, $Z(X_1) < Z(X_0)$ tengsizlik bajariladi (teoremaning isbotini o'quv rejasi kengroq kurslardan topish mumkin).

1-natija. Biror X_0 reja uchun hamma A_j $(j = 1,2,...,n)$ vektorlar uchun shu bazisdagi yoyilmasi uchun

$$Z_j - C_j \le 0$$

shart bajarilsa, X_0 reja optimal bo'ladi.

(5)-(7) chiziqli dasturlash masalasi maksimumga yechilayotgan bo'lsa quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

2-teorema. Biror A_j vektor uchun $Z_j - C_j < 0$ baho bajarilsa, X_0 reja optimal bo'lmaydi va shunday X_1 yechim mavjudki, $Z(X_1) > Z(X_0)$ tengsizlik bajariladi.

2-natija. Biror X_0 reja va hamma A_j $(j = 1,2,...,n)$ lar uchun

$$Z_j - C_j \ge 0$$

shart bajarilsa, X_0 reja optimal bo'ladi.

Endi simpleks usul algoritmini qaraymiz.

$X_0 = (x_1 = b_1,\ x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m,\ x_{m+1} = 0,\ x_{m+2} = 0, \ldots,\ x_n = 0)$ reja (5)-(7) chiziqli dasturlash masalasining tayanch yechimi bo'lsin. Bu tayanch yechim optimalligini tekshirish uchun (6) sistema A_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ vektorlarni $A_1, A_2, \ldots, A_m$ bazis vektorlari orqali yoyib $Z_j - C_j$ baholarni hisoblaymiz. Bazis birlik bazis bo'lganligi uchun A_j vektorlarning bu bazisdagi yoyilmasi koeffitsiyentlari uchun uning komponentlari xizmat qiladi, ya'ni $x_{ij} = a_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n)$ bo'ladi. Keyingi hisoblashlarni bajarish uchun jadvallar tuzish kulay. *Sb* - bazis ustunga bazis vektoriga mos kelgan chiziqli funksiyadagi koeffitsiyentlarni yozamiz. A_0 ustuniga boshlang'ich rejani yozib, hisoblashlar natijasida shu ustundan optimal yechim qiymatini aniqlaymiz. A_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ ustunlarga, j - vektorning bazis yoyilmasidagi koeffitsiyentlari yozilib, bundan keyin ularni X_j bilan belgilaymiz. $(m+1)$ - satrning A_0 ustuniga chiziqli funksiyaning $Z(X_0)$ qiymati yoziladi, A_j lar ustunlariga $Z_j - C_j$ bahoning qiymatlari yoziladi.

Funksiyaning $Z(X_0)$ va $Z_j = Z(X_j)$ qiymatlarini quyidagi skalyar ko'paytmalar shaklida topiladi:

$$Z(X_0) = C_6 X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i\,,$$

$$Z_j = C_6 X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij},\ j = 1,2,\ldots,n\,,$$

bunda C_i bazis vektorlarining chiziqli funksiyadagi mos koeffitsiyent-laridir. Shunday qilib, 1-simpleks jadvalni hosil qilamiz.

1-simpleks jadval.

i	*Bazislar*	*Bazis koef. Sb*	A_0	C_1	C_2	...	C_l	...	C_m	C_{m+1}	...	C_j	...	C_k	...	C_n
				A_1	A_2	...	A_l	...	A_m	A_{m+1}	...	A_j	...	A_k	...	A_n
1	A_1	C_1	x_1	*1*	*0*	...	*0*	...	*0*	$x_{1,m+1}$	...	x_{1j}	...	x_{1k}	...	x_{1n}
2	A_2	C_2	x_2	*0*	*1*	...	*0*	...	*0*	$x_{2,m+1}$	...	x_{2j}	...	x_{2k}	...	x_{2n}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
l	A_l	C_l	x_l	*0*	*0*	...	*1*	...	*0*	$x_{l,m+1}$	...	x_{lj}	...	x_{lk}	...	x_{ln}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
m	A_m	C_m	x_m	*0*	*0*	...	*0*	...	*1*	$x_{m,m+1}$	...	x_{mj}	...	x_{mk}	...	x_{mn}

$m+1$	Z_j-C_j	Z_0	0	0	...	0	...	0	$Z_{m+1}-C_{m+1}$	...	Z_j-C_j	...	Z_k-C_k	...	Z_n-C_n

Birinchi simpleks jadval tuzilgandan keyin uning $(m+1)$ satrini qaraymiz. Chiziqli dasturlash masalasi minimumga yechilayotgan bo'lsa, barcha $j=1,2,...,n$ lar uchun $Z_j-C_j\leq 0$ yoki masala maksimumga yechilayotgan bo'lsa, $Z_j-C_j\geq 0$ bo'lsa, tayanch yechim optimal bo'ladi va chiziqli funksiyaning optimal qiymati $Z(X_0)$ dan iborat bo'ladi.

Chiziqli dasturlash masalasi minimumga yechilayotgan bo'lib, $Z_j-C_j>0$ bo'lsa, X_0 yechim optimal bo'lmaydi va bu bahoga mos vektorni bazisga kiritib yechimni yaxshilash mumkin, ya'ni chiziqli funksiyaning oldingi qiymatidan kichikroq qiymatini topish mumkin bo'ladi.

Musbat baholar bir nechta bo'lsa, ulardan eng kattasini bazisga kiritiladi. Eng kattalari bir nechta bo'lsa, ulardan $\min(C_j)$ bo'lgani oldin bazisga kiritiladi. Hech bo'lmaganda bitta musbat $Z_j-C_j>0$ baho uchun mos vektor yoyilmasidagi x_{ij} koeffitsiyentlari ichida manfiylari bo'lsa, chiziqli funksiya yechimlar ko'pburchagida chegarlanmagan bo'ladi.

Eng katta $\theta_{0j}(Z_j-C_j)=\theta_{0k}(Z_k-C_k)$ bo'lsin, ya'ni maksimal qiymat k - vektor uchun bo'lsin, $m<k\leq n$. Bu holda A_k vektor bazisga kiritilib, $\min(x_i/x_{ik})$ $(x_{ik}>0)$ mos kelgan vektor bazisdan chiqariladi. $\min(x_i/x_{ik})=x_l/x_{lk}$ bo'lsin, ya'ni l - satrdagi A_l vektor bazisdan chiqariladi. x_{lk} element ochuvchi (kalitli) element deyiladi va bu elementga mos ustun va satrlar yo'naltiruvchi (kalitli) deb ataladi.

Yangi tayanch yechim va vektorlar yangi bazisdagi yoyilmasi ($j=1,2,...,n$ uchun)

$$\begin{cases} x'_{ij}=x_{ij}-\dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}x_{ik}, & i\neq l \\ x'_{lj}=\dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}, & (i=l) \end{cases}$$

formulalar yordamida topiladi. Bu Jordan-Gauss noma'lumlarni to'la yo'qotish formulalaridir, haqiqatan $j=k$ uchun

$$\begin{cases} x'_{ik}=x_{ik}-\dfrac{x_{lk}}{x_{lk}}x_{ik}=0, & (i\neq l), \\ x'_{lk}=\dfrac{x_{lk}}{x_{lk}}=1, & (i=l), \end{cases}$$

hosil bo'ladi, ya'ni bazisga kiritilgan vektor yoyilmasi uchun ochuvchi element koeffitsiyenti 1 bo'lib qolgan koeffitsiyentlari 0 lardan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, A_0, A_j $(j=1,2,...,n)$ vektorlarning yangi bazisdagi yoyilmasi koeffitsiyentlarini, yangi tayanch yechim bahosi qiymatini hamda chiziqli funksiya qiymatini topish uchun yo'naltiruvchi satr hamma elementlarini yechuvchi elementga bo'lamiz va bir marta to'liq Jordan-Gauss metodidan foydalanib, 2-simpleks jadvalni tuzamiz.

2-simpleks jadval.

i	*Bazislar*	*Bazis koef. Sb*	A_0	C_1	C_2	...	C_l	...	C_m	C_{m+1}	...	C_j	...	C_k	...	C_n
				A_1	A_2	...	A_l	...	A_m	A_{m+1}	...	A_j	...	A_k	...	A_n
1	A_1	C_1	x'_1	*1*	*0*	...	x'_{1l}	...	*0*	$x'_{1,m+1}$	...	x'_{1j}	...	*0*	...	x'_{1n}
2	A_2	C_2	x'_2	*0*	*1*	...	x'_{2l}	...	*0*	$x'_{2,m+1}$	...	x'_{2j}	...	*0*	...	x'_{2n}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
l	A_l	C_l	x'_l	*0*	*0*	...	x'_{ll}	...	*0*	$x'_{l,m+1}$	...	x'_{lj}	...	*1*	...	x'_{ln}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
m	A_m	C_m	x'_m	*0*	*0*	...	x'_{ml}	...	*1*	$x'_{m,m+1}$	...	x'_{mj}	...	*0*	...	x'_{mn}
$m+1$	Z_j-C_j		Z'_0	*0*	*0*	...	Z'_l-C_l	Z'_0	*0*	$Z'_{m+1}-C_{m+1}$	...	Z'_j-C_j	...	*0*	...	Z'_n-C_n

Hisoblashlarning to'g'ri bajarilganligini

$Z(X_0)=C_бX_0$; $\quad Z_j-C_j=C_бX_j-C_j$

formulalar yordamida nazorat qilish mumkin.

2-simpleks jadvalning $(m+1)$ satrida hamma baholar $Z_j-C_j\le 0$ bo'lsa olingan X_0 yechim optimal bo'ladi. Musbat baholar bo'lsa, keyingi tayanch yechimni topishga o'tiladi. Jarayon optimal yechimni olguncha davom ettiriladi yoki chiziqli funksiya chegaralanmaganligi ko'rsatiladi. Optimal yechim baholar ichidagi *0* baho fakat bazis vektorlariga mos kelsa, optimal yechim yagona bo'ladi, *0* baho bazisda bo'lmagan vektorga ham mos kelsa, umuman optimal yechim yagona bo'lmaydi.

Chiziqli dasturlash masalasida chiziqli funksiyaning maksimum qiymati topilayotgan bo'lsa va $\min(Z_j-C_j)<0$ baholar bir nechta bo'lsa, ulardan $\min(C_j)$ bo'lgan vektor oldin bazisga kiritiladi. Bu holda ham simpleks usul jarayoni, chiziqli funksiyaning minimum qiymatini topishdagidek bo'ladi.

1-misol. $z=4x_1+6x_2$ chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} 16x_1+4x_2\le 784, \\ -8x_1-7x_2\ge -552, \\ 5x_1+9x_2\le 567, \quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \end{cases}$$

cheklash shartlari sistemasini qanoatlantiruvchi maksimum qiymatini toping.

Yechish. Boshlang'ich tayanch yechim qaralgan usulda ozod hadlarning faqat musbat qiymatlarida topilganligi uchun ikkinchi tengsizlikni (-1)ga ko'paytirib

$$\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 \le 784, \\ 8x_1 + 7x_2 \le 552, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 567, \quad x \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

cheklash shartlarini hosil qilamiz. Endi tengsizliklardan tengliklarga o'tamiz:

$$\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 + x_3 = 784, \\ 8x_1 + 7x_2 + x_4 = 552, \\ 5x_1 + 9x_2 + x_5 = 567, \quad x_j \ge 0\ (j = 1,2,3,4,5). \end{cases}$$

Oxirgi sistemani vektor formada yozamiz:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 784 \\ 552 \\ 567 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

A_3, A_4, A_5 birlik vektorlarni boshlang'ich tayanch yechim uchun qabul qilib, x_1, x_2 noma'lumlarni *0* ga teng deymiz. Natijada $X_0 = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 784,\ x_4 = 552,\ x_5 = 567)$ tayanch yechimni olmiz, bunga

$$x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 = A_0$$

yoyilma mos keladi.

X_0 yechimning optimalligini tekshirish uchun birinchi simpleks jadvalni tuzamiz:

1-simpleks jadval.

i	*Bazis-lar*	*Bazis koeffi-siyent-lar Sb*	A_0	*4*	*6*	*0*	*0*	*0*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	*0*	*784*	*16*	*4*	*1*	*0*	*0*
2	A_4	*0*	*552*	*8*	*7*	*0*	*1*	*0*
3	A_5	*0*	*567*	*5*	*9*	*0*	*0*	*1*
m+1	$Z_j - C_j$		*0*	*-4*	*-6*	*0*	*0*	*0*

$Z(X_0)$ va $Z_j - C_j$ baholarni hisoblaymiz:

$$Z(X_0) = 4\cdot 0 + 6\cdot 0 + 0\cdot 784 + 0\cdot 552 + 0\cdot 567 = 0,$$

$Z_1 = C_6X_1 = 0\cdot 16 + 0\cdot 8 + 0\cdot 9 = 0$, $Z_2 = C_6X_2 = 0$, $Z_3 = C_6X_3 = 0$, $Z_4 = C_6X_4 = 0$, $Z_5 = C_6X_5 = 0$, $Z_1 - C_1 = 0 - 4 = -4$, $Z_2 - C_2 = 0 - 6 = -6$, $Z_3 - C_3 = 0 - 0 = 0$, $Z_4 - C_4 = 0 - 0 = 0$, $Z_5 - C_5 = 0 - 0 = 0$.

Olingan baholar ichida ikkita, $Z_1 - C_1 = -4 < 0$, $Z_2 - C_2 = -6 < 0$ manfiy baholar mavjud bo'lib, ular boshlang'ich tayanch yechim optimal emasligini bildiradi. Bazisga $\min(C_j) = -6$ bo'lgan vektor A_2 ni kiritamiz. $\min\left(\frac{784}{4}; \frac{552}{7}; \frac{567}{9}\right) = 63$ bo'lganligi uchun ochuvchi (kalit) element 9 bo'lib, u joylashgan ustun va satrlar yo'naltiruvchi bo'ladi. Demak, bazisga A_2 vektorni kiritib A_6 vektorni bazisdan chiqaramiz. 2-simpleks jadvalni tuzamiz:

2-simpleks jadval.

i	Bazis-lar	Bazis koeffi-siyent-lar Sb	A_0	4	6	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	532	124/9	0	1	0	-4/9
2	A_4	0	111	37/9	0	0	1	-7/9
3	A_2	6	63	5/9	1	0	0	1/9
$m+1$	$Z_j - C_j$		378	-6/9	0	0	0	6/9

Birinchi simpleks jadvaldagi yo'naltiruvchi (kalit) satrga mos ikkinchi simpleks jadvaldagi satrga bosh satr deb ataymiz va uning elementlarini hisoblashdan boshlaymiz: 3-satr ya'ni yo'naltiruvchi (kalit) satr elementlarini ochuvchi (kalit) elementga bo'lib, 63, 5/9, 1, 0, 0, 1/9 larni topamiz. Bu satrni 4 ga ko'paytirib 1-satr mos elementlaridan ayirib 532, 124/9, 0, 1, 0, -4/9, 2-simpleks jadval birinchi satr elementlarini, 7 ga ko'paytirib 2-satr elementlaridan ayirib, 111, 37-9, 0, 0, -7/9, 2-jadvalning 2-satr elementlarini hisobladik. Endi 6 ga ko'paytirib ($m+1$) satr mos elementlariga qo'shib 378, -6/9, 0, 0, 0, 6/9 2-jadvalning ($m+1$) satr elementlarini olamiz.

2-simpleks jadvalda

$X_0^{(1)} = (x_1 = 0, x_2 = 63, x_3 = 532, x_4 = 111, x_5 = 0)$

2-tayanch yechim olindi. Bu yechimga chiziqli funksiyaning

$Z(X_0^{(1)}) = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 63 + 0 \cdot 532 + 0 \cdot 111 + 0 \cdot 0 = 372$

qiymati mos keladi.

($m+1$) - satrda $Z_1 - C_1 = -6/9$ manfiy baho mavjud bo'lganligi uchun $X_0^{(1)}$ yechim optimal emas. A_1 vektor bazisga kiritilishi kerak, $\min\left(\frac{532}{124/9}; \frac{111}{37/9}; \frac{63}{5/9}\right) = \frac{111}{37/9} = 27$ bo'lib, 37/9 ochuvchi (kalit) element bo'ladi.

Bazisdan A_4 vektor chiqariladi, 3-simpleks jadvalda bosh satr 2-satr bo'lib uning elementlari mos ravishda

27, 1, 0, 0, 9/37, -7/37

bo'ladi. Oldingi jadvaldagidek, Jordan-Gauss to'la yo'qotish usulidan foydalanib, boshqa satrlar elementlarni hisoblab, 3-simpleks jadvalni tuzamiz:

3-simpleks jadval.

i	Bazis-lar	Bazis koeffi-siyent-lar Sb	A_0	4	6	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	160	0	0	1	-124/37	80/37
2	A_1	4	27	1	0	0	9/37	-7/37

3-simpleks jadval.

i	Bazislar	Bazis koeffi-siyent-lar Sb	A_0	5	3	4	1	-M	-M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_2	3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4
2	A_1	5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4
M+1	Z_j-C_j		6	0	0	-3	2	-1	3
M+2	Z_j-C_j		0	0	0	0	0	1	1

3-jadvalda ($m+2$) katrda sun'iy bazis baholaridan tashqari hamma baholar 0 ga teng bo'ladi:

M sonning tanlanishiga asosan A_5 va A_6 vektorlar endi bazisga tushmaydi, shuning uchun uni bundan keyin qaramasak ham bo'ladi, lekin, teskari matritsani olish uchun uni saqlash mumkin.

$\overline{X}_0^2=(3/4,3/4,0,0,0,0)$ tayanch yechim berilgan masalaning ham yechimi bo'ladi, lekin u optimal emas, chunki ($m+1$) satrda manfiy baho mavjud. Endi yechimni yaxshilash ($m+1$) satr bo'yicha olib boriladi. $Z_3-C_3=-3<0$ bo'lganligi uchun A_3 vektor ustuni yo'naltiruvchi (kalit) ustun, A_2 vektor satri yo'naltiruvchi (kalit) satr, 3/4 ochuvchi (kalit) element bo'lib, $m+2$ katr endi hisobga olinmaydi. Yuqorida ko'rsatilgan usul bilan 4-simpleks jadvalni tuzamiz:

4-simpleks jadval.

i	Bazislar	Bazis koeffi-siyent-lar Sb	A_0	5	3	4	1	-M	-M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3
2	A_1	5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3
M+1	Z_j-C_j		9	0	4	0	5	1+M	2+M

4-simpleks jadvaldan qo'yilgan masalaning optimal yechimi $\overline{X}=(1,0,1)$ bo'lib, $Z_{max}(\overline{X})=9$ bo'ladi. Birinchi va ikkinchi satrlarni o'zaro almashtirib, A_5 va A_6 vektorlar ustunida teskari matritsani hosil qilamiz.

Qaralgan misoldan ko'rinadiki, cheklash shartlarida birlik matritsa mavjud bo'lsa, *m* ta jadval, sun'iy bazis kiritilgan bo'lsa, taxminan *2m* ta jadval tuziladi.

5. Aralash shartli masalalar.

Chiziqli dasturlash masalasi quyidagicha qo'yilgan bo'lsin:

$z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$

chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

cheklash shartlari sistemasini qanoatlantiruvchi minimal qiymatini toping.

Bu cheklash shartlari k ta tengsizliklar $(1 \le k \le m)$ va m-k ta tenglamalardan iborat bo'lib, m tartibli, birlik matritsaga ega emas. Bunday cheklash shartlari mavjud bo'lgan chiziqli dasturlash masalasiga chiziqli dasturlashning aralash shartli masalasi deyiladi. Bunday masalalarning bazisi qo'shimcha va sun'iy bazis vektorlaridan iborat bo'ladi.

Aralash shartlar sistemasida d ta tenglamalar bo'lsin. Boshlang'ich tayanch yechimni olish uchun d dan ko'p bo'lmagan sun'iy o'zgaruvchilar kiritish kerak bo'ladi.

1-misol. $z = -x_1 - 2x_2 + x_3$ chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ \ \ x_1 + \ x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - \ x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3) \end{cases}$$

cheklash shartlarini qanoatlantiruvchi minimal qiymatini toping.

Yechish. Bu masalada tengsizliklardan tenglamalarga o'tsak, ikkita sun'iy o'zgaruvchi kiritishga to'g'ri keladi. Bunday qilmaslik uchun, ikkinchi tengsizlikni 2 ga bo'lib, keyin uni tenglamaga aylantiramiz va hosil bo'lgan tenglamani uchinchi tenglamadan ayiramiz, hamda 3-tenglamaga sun'iy o'zgaruvchi kiritamiz: natijada ushbu chiziqli dasturlash masalasini hosil qilamiz:

$$z = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot x_6$$

chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ 3/2 \cdot x_1 + 3/2 \cdot x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - \ x_2 + 2x_3 + x_6 = 4, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,2,\ldots,6) \end{cases}$$

cheklash shartlari sistemasini qanoatlantiruvchi minimal qiymatini toping.

Masala, vektor formada

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 = A_0$$

bo'ladi. A_4, A_5, A_6 vektorlarni bazis uchun olamiz, bular aralash bazisdan iborat bo'ladi. Erkin o'zgaruvchi x_1, x_2, x_3 larni 0 ga tenglashtirib, $X_0 = (0, 0, 0, 6, 1, 4)$ boshlang'ich tayanch yechimga ega bo'lamiz. Simpleks usul bilan 1-jadvalni hosil qilib, optimal yechim $X_0^{(3)} = (14/5, 12/5, 2/5)$ ekanligini aniqlaymiz va $Z_{min} = -36/5$ bo'ladi.

1-jadval.

i	*Bazislar*	*Bazis koeffi-siyent-lar Sb*	A_0	*-1*	*-2*	*1*	*0*	*0*	*M*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	*0*	*6*	*-1*	*4*	*-2*	*1*	*0*	*0*
2	A_5	*0*	*1*	*3/2*	*-3/2*	*1*	*0*	*1*	*0*
3	A_6	*M*	*4*	*2*	*-1*	*2*	*0*	*0*	*1*
m+1	$Z_j - C_j$		*0*	*1*	*2*	*-1*	*0*	*0*	*0*
m+2	$Z_j - C_j$		*4*	*2*	*-1*	*2*	*0*	*0*	*0*
1	A_4	*0*	*8*	*2*	*1*	*0*	*1*	*2*	*0*
2	A_3	*1*	*1*	*3/2*	*-3/2*	*1*	*0*	*1*	*0*
3	A_6	*M*	*2*	*-1*	*2*	*0*	*0*	*-2*	*1*
m+1	$Z_j - C_j$		*1*	*5/2*	*1/2*	*0*	*0*	*1*	*0*
m+2	$Z_j - C_j$		*2*	*-1*	*2*	*0*	*0*	*-2*	*0*
1	A_4	*0*	*7*	*5/2*	*0*	*0*	*1*	*3*	*-1/2*
2	A_3	*1*	*5/2*	*3/4*	*0*	*1*	*0*	*-1/2*	*3/4*
3	A_2	*-2*	*1*	*-1/2*	*1*	*0*	*0*	*-1*	*1/2*
m+1	$Z_j - C_j$		*1/2*	*11/4*	*0*	*0*	*0*	*3/2*	*(-1/4)-M*
1	A_1	*-1*	*14/5*	*1*	*0*	*0*	*2/5*	*6/5*	*-1/5*
2	A_3	*1*	*2/5*	*0*	*0*	*1*	*-3/10*	*-7/5*	*9/10*
3	A_2	*-2*	*12/5*	*0*	*1*	*0*	*1/5*	*-2/5*	*2/5*
m+1	$Z_j - C_j$		*-36/5*	*0*	*0*	*0*	*-11/5*	*-9/5*	*(3/10)-M*

chiziqli dasturlash masalasi cheklash shartlari fakat $AX \geq A_0, A_0 \geq 0$ ko'rinishdagi shartlardan iborat bo'lsa, uni bazisda bitta sun'iy vektor bo'lgan masalaga keltirish mumkin. Buning uchun oldin tengsizliklarni $AX - X' = A_0$, (bunda $X' = (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+m})$) qo'shimcha o'zgaruvchilar ko'rinish-dagi tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Tenglamalardan $\max b_i$ $(i = 1,2,...,m)$ bo'lganidan qolgan tenglamalarni ayirib, $(m\text{-}1)$ shartlarda birlik vektorlarni hosil qilish mumkin bo'ladi. $\max b_i$ bo'lgan tenglamada sun'iy o'zgaruvchi kiritiladi.

Mavzuning tayanch tushunchalari

Mumkin bo'lgan yechim, tayanch reja, maxsusmas reja, maxsus reja, optimal reja, yechimlar ko'pburchagi, sath chizig'i, simpleks usul, rejani ketma-ket yaxshilash, ochuvchi (kalit) element, yo'naltiruvchi (kalit) satr, yo'naltiruvchi (kalit) ustun, bosh satr, chiziqli dasturlashning kanonik masalasi, boshlang'ich reja, optimallik sharti, simpleks usul algoritmi, sun'iy bazis, aralash shartli masalalar.

Takrorlash uchun savollar

22. Chiziqli dasturlash (CHD) nima?
23. Chiziqli dasturlash masalasi (CHDM) vektor formada qanday yoziladi?
24. CHDM ning kanonik ko'rinishi nima?
25. CHDMning geometrik tasvirini nechta o'zgaruvchi uchun ko'rsatish mumkin?
26. Simpleks usulning mohiyati nimadan iborat?
27. Simpleks usulning optimallik sharti qanday?
28. Ochuvchi (kalit) element deb nimaga aytiladi?
29. Yo'naltiruvchi (kalit) ustun va satr deb nimaga aytiladi?
30. Bosh satr qanday satr?
31. Maqsadli funksiya nima?
32. Cheklash shartlarida qanday shartlar bo'lishi mumkin?
33. $(m+1)$ satr baholari qanday topiladi?
34. Birinchi simpleks jadval qanday tuziladi?
35. Qanday holda 2-simpleks jadvalni tuzishga o'tiladi?
36. 2-simpleks jadval qanday tuziladi?
37. Chiziqli funksiyaning chegaralanmaganlik sharti simpleks jadvalda qanday ifodalanadi?
38. Simpleks jadvallardan optimal yechimning yagonaligi qanday aniqlanadi?
39. Sun'iy o'zgaruvchi qanday holda kiritiladi?
40. Sun'iy bazis usuli nima?
41. Qanday masalalarga aralash shartli masalalar deyiladi?
42. Aralash shartli masalalar qanday masalaga keltiriladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

Ushbu CHDMning maksimum va minimum qiymatlarini geometrik usulda toping.

1. $f = 5x_1 + 3x_2$,

2. $f = x_1 + 2x_2$,

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 5, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -3x_1 + 6x_2 \leq 3, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. $f = 10x_1 + 6x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 7x_1 + 9x_2 \leq 63, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4. $f = 4x_1 + 2x_2$,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5. $f = 3x_1 + x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 5x_1 - 4x_2 \geq -2, \\ 7x_1 + 5x_2 \geq 35, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6. $f = 12x_1 + 15x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7. $f = x_1 + 3x_2$,

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8. $f = x_1 + x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9. $f = 2x_1 + 3x_2$,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 2, \\ 2x_1 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

10-19 masalalarda ikki xildagi mahsulot ishlab chiqarish uchun uch turdagi xom ashyo ishlatiladi. $i\ (i = 1,2,3)$ turdagi xom ashyo miqdori b_i. Bir birlik $j\ (j = 1,2)$ xildagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan $i\ (i = 1,2,3)$ turdagi xom ashyo miqdori (a_{ij}), xom ashyo zahirasi b_i va 1 birlik mahsulotni realizatsiya qilishdan olinadigan foyda (c_j), quyidagi matritsa bilan berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \\ c_1 & c_2 & f \end{pmatrix},$$

Umumiy foyda f eng katta bo'ladigan mahsulotlar ishlab chiqarish rejasini simpleks usuldan foydalanib tuzing:

10. $\begin{pmatrix} 10 & 9 & 1870 \\ 5 & 11 & 1455 \\ 4 & 15 & 1815 \\ 7 & 9 & f \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 15 & 4 & 1095 \\ 11 & 5 & 855 \\ 9 & 10 & 1080 \\ 3 & 2 & f \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 840 \\ 6 & 3 & 870 \\ 3 & 2 & 560 \\ 6 & 2 & f \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 11 & 3 & 671 \\ 8 & 4 & 588 \\ 5 & 3 & 423 \\ 5 & 2 & f \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 438 \\ 3 & 6 & 747 \\ 3 & 7 & 812 \\ 7 & 5 & f \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 16 & 4 & 784 \\ 8 & 7 & 552 \\ 5 & 9 & 567 \\ 4 & 6 & f \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 428 \\ 3 & 6 & 672 \\ 2 & 8 & 672 \\ 3 & 8 & f \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 440 \\ 3 & 4 & 393 \\ 3 & 5 & 450 \\ 6 & 5 & f \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 480 \\ 3 & 4 & 444 \\ 2 & 6 & 556 \\ 2 & 4 & f \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 684 \\ 10 & 5 & 690 \\ 3 & 6 & 558 \\ 2 & 3 & f \end{pmatrix}$

20. $z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$ chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

cheklash shartlarini qanoatlantiruvchi maksimum qiymatini sun'iy bazis usulidan foydalanib toping.

21. $z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$ chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

cheklash shartlari sistemasini qanoatlantiruvchi minimum qiymatini simpleks usul bilan toping.

22. $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4$ chiziqli funksiyaning

17--Laboratoriya mashg'uloti

Transport masalasini yechishning shimoli-g'arb burchak usuli.

4. Transport masalasining qo'yilishi.
5. Transport masalasini yechishning shimoli-g'arb burchak usuli.
6. Transport masalasini yechishning potensiallar usuli.

Hozirgi paytda transport masalasi modeli nazariyada ham, har xil iqtisodiy jarayonlarni rejalashtirishda ham keng qo'llanilmoqda. Ayniqsa, muhim bo'lgan sanoat va qishloq xo'jalik mahsulotlarini ratsional yetishtirib berishda, hamda katta yuklar oqimini tashishda va boshqa transport ishlarini optimal rejalashtirishda katta ahamiyatga egadir.

1) Masalaning qo'yilishi va matematik modeli. Bir jinsli mahsulot m ta A_i $(i=\overline{1,m})$ ta'minlovchilarda mos ravishda a_i $(i=\overline{1,m})$ birlik miqdorda bo'lsin, shu mahsulotlarni n ta iste'molchilarga mos ravishda b_j $(j=\overline{1,n})$ birlik miqdorda yetkazib berish kerak bo'lsin, i-ta'minlovchidan j-iste'molchiga tashish harajati C_{ij} aniq bo'lsin. Yukni tashishni shunday rejalashtirish kerakki, hamma iste'molchilarning talabi qondirilib tashishga ketgan harajat minimal bo'lsin. x_{ij} - i-ta'minlovchidan j - iste'molchiga rejalashtirilgan yukning miqdori bo'lsin. Bu holda masala shartini quyidagi jadval ko'rinishida yozish mumkin.

1-jadval

Ta'minlovchilar	Iste'molchilar				Zahiralar
	V_1	V_2	...	Vn	
A_1	K_{11} x_{11}	K_{12} x_{12}	...	K_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	K_{21} x_{21}	K_{22} x_{22}	...	K_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
Am	Km_1 xm_1	Km_2 xm_2	...	Kmn xmn	am
Talablar	b_1	b_2	...	bn	$\sum a_{ij} = \sum b_{ij}$

Bu jadvalga rejalashtirish matritsasi deyiladi.

Masalaning matematik modelini tuzamiz. i - ta'minlovchidan j - iste'molchiga rejalashtirilgan yukning miqdori x_{ij} yuk birligida bo'lganligi uchun, tashish bahosi $C_{ij}x_{ij}$ bo'ladi. Butun rejalashtirish bahosi quyidagi yig'indidan iborat bo'ladi:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}.$$

Cheklash shartlari sistemasi quyidagicha bo'ladi:

a) hamma yuk tashilishi kerak, ya'ni $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1,2,...,m)$

bu tenglamalar yuqoridagi jadval satrlaridan olinadi;

b) hamma talablar qanoatlantirilishi kerak, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1,...,n),$$

bu tenglamalar jadvaldagi ustunlardan olinadi.

Shunday qilib, transport masalasining matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$ chiziqli funksiyaning

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}), \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1,2,...,n), \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ (i = 1,2,...,m, \ j = 1,2,...,n)$$

cheklash shartlar sistemasini qanoatlantiradigan, eng kichik qiymatini toping.

Qaralayotgan modelda

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3)$$

bo'ladi. Bunday modelga yopiq model deyiladi.

Teorema: Zahiralar jami miqdori talablar jami miqdoriga teng bo'lgan istalgan transport masalasi yechimga ega.

3-tenglik bajarilmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

bo'lsa, transport masalasining ochiq modeli kelib chiqadi. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin: a) ta'minlovchilardagi yuklar jami miqdori, iste'molchilar jami talabidan kam bo'lishi, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

b) ta'minlovchilardagi yuklarning jami miqdori, iste'molchilar jami talabi miqdoridan ko'p bo'lishi, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Ikkala holda ham, birinchisida soxta ta'minlovchi, ikkinchisida soxta iste'molchi kiritish bilan masalani transport masalasining yopiq modeliga keltirish mumkin.

Birinchi holda, yuk miqdori

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

ayirmaga teng, soxta ta'minlovchi, ikkinchi holda esa talab miqdori

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ayirmaga teng bo'lgan soxta iste'molchi kiritib, yopiq modelga kelamiz. Bunda soxta ta'minlovchidan yuklarni tashish harajati sifatida soxta ta'minlovchi satrida, bir xil bo'lgan istalgan sonni olish mumkin. Odatda ularni 0 deb olinadi. Soxta iste'molchi ustunida ham tashish harajati sifatida bir xil ixtiyoriy sonni olish mumkin, bu yerda ham odatda 0 olinadi.

Transport masalasining ochiq modelida optimal yechim topilgandan keyin mavjud bitta yoki bir nechta iste'molchining talabi ta'minlanmay qoladi, xuddi shuningdek, ikkinchi holda, mavjud yuklarning ortig'i bir yoki bir necha ta'minlovchida taqsimlanmay qoladi.

Transport masalasining (1) va (2) shartlar sistemasini qaraymiz. Bu sistema $m \cdot n$ noma'lumdan va (3) munosabat bilan bog'langan $m+n$ tenglamalardan iborat. (1) va (2) sistemalarni alohida hadlab qo'shsak ikkita bir xil tenglama hosil qilamiz. 1-jadvalda bunday qo'shish ustunlarni va satrlarni hadlab qo'shish, bilan teng kuchlidir. Cheklash shartlar sistemasida ikkita bir xil tenglamalarning bo'lishi, ularning chiziqli bog'langanligini bildiradi. Bulardan birini hisobga olmasak shartlar sistemasi $m+n-1$ chiziqli bog'lanmagan tenglamalarni o'z ichiga oladi. Demak, boshlang'ich mumkin bo'lgan bazis yechim $m+n-1$ bazis o'zgaruvchisini o'z ichiga olishi kerak. Boshlang'ich rejani tuzishning bir necha usullari mavjud.

2). Shimoliy-g'arbiy burchak usuli.

Bu usulda x_{ij} larning qiymatini aniqlash shimoliy-g'arbiy burchakdan boshlanadi. $x_{ij} = \min(a_1, b_1)$ olinib, bu yerda 3 ta hol bo'lishi mumkin: a) $a_1 < b_1$ bo'lsa, $x_{11} = a_1$ bo'lib, $i=1$ satr keyin qaralmay, birinchi iste'molchining talabi a_1 ga kamayadi;

b) $a_1 > b_1$ bo'lsa, $x_{11} = b_1$ bo'lib, $j=1$ ustun keyin qaralmaydi va birinchi ta'minlovchidagi yuk b_1 ga kamayadi;

v) $a_1 = b_1$ bo'lsa, $x_{11} = a_1 = b_1$ bo'lib, $i=1$ satr va $j=1$ ustun keyin qaralmaydi, bu variant maxsus rejaga olib keladi. Oxirgi qadamda bitta satr va bitta ustun qolib, u to'ldirilib jarayon tamom bo'ladi.

Ma'lumki, olingan yechimda to'ldirilgan katakchalar soni $m+n-1$ bo'lishi kerak, shuning uchun ham bu rejada uni tekshirib ko'rish kerak bo'ladi. Agar bu shart bajarilmasa, ya'ni to'ldirilgan katakchalar soni $m+n-1$ dan kam bo'lsa, olingan plan maxsus bo'lib, bunda eng kam baholi katakchalarga *0* qo'yish bilan ular sonini $m+n-1$ ga yetkaziladi. *0* larni qo'yishda jadvalda hamma uchlari to'ldirilgan to'g'ri to'rtburchaklar bo'lmasligi kerak. Masalan, $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ yoki $x_{11}, x_{1n}, x_{21}, x_{2n}$ lar birdaniga to'ldirilmasligi kerak.

3) Transport masalasini taqsimot usuli bilan yechish. Transport masalasini bu usul bilan yechishni sonli misolda qaraymiz. Transport masalasi 1-jadval bilan berilgan bo'lsin.

1-jadval.

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1	*250 t*	7	9	16	10	16
A_2	*350 t*	13	12	18	12	20
A_3	*300 t*	19	15	10	13	13
Talablar	900	*150 t*	*170 t*	*190 t*	*210 t*	*180 t*

Yechish: Bu masalada zahiralar miqdori talablar yig'indisiga teng, demak, masala yopiq transport masalasidir.

Birinchi rejani shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib tuzamiz. V_1 iste'molchiga A_1 ta'minlovchidan 150 t rejalashtirib, A_1 ta'minlovchidagi yuk 150 t ga kamayib 100 t bo'ladi va V_1 iste'molchi qanoatlantiriladi. A_1 ta'minlovchidagi qolgan 100 t yukni V_2 iste'molchiga rejalashtiramiz, uning talabi 170 t bo'lganligi uchun A_2 ta'minlovchidan 70 t berilib, V_2 iste'molchi ham qanoatlantiriladi va A_2 ta'minlovchidagi yuk 70 t ga kamayib, 280 t bo'ladi. A_2 ta'minlovchidagi yukdan 190 t yukni V_3 iste'molchiga rejalashtirib, qolgan yukni V_4 iste'molchiga va hokazo, bu jarayonni davom ettirib, oxiri A_3 ta'minlovchida 180 t yuk qolib, uni V_5 iste'molchiga rejalashtirib, hamma talablar qanoatlantiriladi, zahirada yuk qolmaydi. Bularni quyidagi jadvalda yozamiz.

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1	*250 t*	7 150	9 100	16	10	16
A_2	*350 t*	13	12 70	18 190	12 90	20
A_3	*300 t*	19	15	10	13 120	13 180
Talablar	900	*150 t*	*170 t*	*190 t*	*210 t*	*180 t*

Shunday qilib, boshlang'ich rejani shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib tuzdik. Bu masalada ta'minlovchilar soni $m=3$, iste'molchilar soni

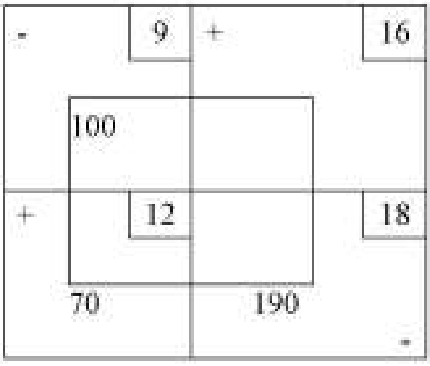
$n=5$, to'ldirilgan katakchalar soni 7 ta. $m+n-1=3+5-1=7$ bo'lganligi uchun, olingan reja maxsusmas bo'ladi.

Boshlang'ich taqsimlash uchun umumiy tashish harajatini hisoblaymiz:

$S_1 = 150\cdot 7+100\cdot 9+70\cdot 12+190\cdot 18+90\cdot 12+120\cdot 13+180\cdot 13=$

$=1050+900+840+3420+1080+1560+2340=11190$ so'm (ta'riflar so'mlarda deb olindi).

Endi tuzilgan rejaning optimal yoki optimalmasligini tekshiramiz. Buning uchun har bir bo'sh katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl) hosil qilib, bular bo'yicha baholarning algebraik yig'indisini hisoblaymiz. Masalan, 1-satr va 3-ustun uchun yopiq siniq chiziq zanjiri quyidagicha bo'ladi:



Bunda bo'sh katak ishorasi (+) bo'lib, qolganlari navbat bilan almashinadi (bu yerda navbat soat strelkasi yo'nalishi yoki unga qarama-qarshi yo'nalishda bo'lishi mumkin, uning farqi yo'q).

Bu baholar algebraik yig'indisini Δ_{13} bilan belgilasak, $\Delta_{13}=16-18+12-9=1;$ bo'ladi. Xuddi yuqoridagidek qolgan bo'sh kataklar uchun ular quyidagicha bo'ladi:

$\Delta_{14}=10-12+12-9=22-21=1;$

$\Delta_{15}=16-13+13-12+12-9=7;$

$\Delta_{21}=13-7+9-12=22-19=3;$

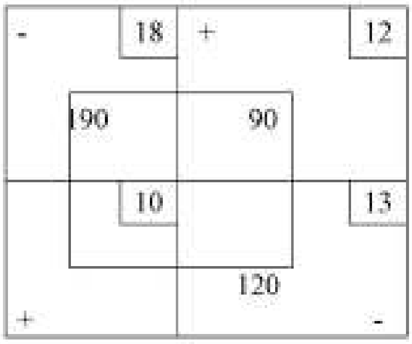
$\Delta_{25}=20-12+13-13=8;$

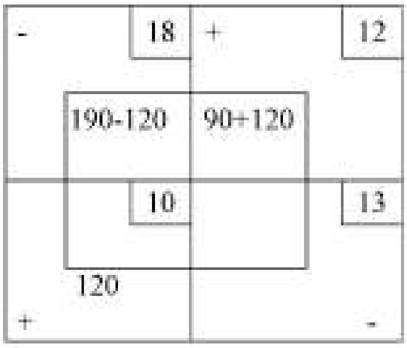
$\Delta_{31}=19-7+9-12+12-13=18-20=-2;$

$\Delta_{32}=15-12+12-13=15-13=2;$

$\Delta_{33}=10-18+12-13=22-31=-9.$

Baholar (ta'riflar) algebraik yig'indilarida manfiy sonlarning bo'lishi, tuzilgan reja optimal emasligini ko'rsatadi va rejani yaxshilash mumkin bo'ladi. Endi yangi reja tuzamiz, buning uchun manfiy sonlardan eng kichigi olinadi, ular bir necha bo'lsa, ixtiyoriysini olib taqsimlashni shu katak uchun tuzilgan yopiq siniq chiziq zanjiri bo'yicha o'zgartiramiz. Qaralayotgan misolda eng kichik manfiy algebraik yig'indi (-9) bo'lganligi uchun 3-satr 3-ustundagi katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl)ni qaraymiz:





Manfiy kataklardagi yuk miqdorining eng kichigini (bu 13 baholi katakchada bo'lib, 120 ga teng) olib, uni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo'shib, yangi reja hosil qilamiz. Bu o'zgarishni jadvalda amalga oshirib (boshqa katakchalardagi sonlar o'zgarmaydi) quyidagi yangi rejani olamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1	250 t	7 150	9 100	16	10	16
A_2	350 t	13	12 70	18 70	12 210	20
A_3	300 t	19	15	10 120	13	13 180
Talablar	900	150 t	170 t	190 t	210 t	180 t

Bu tuzilgan yangi reja uchun yuk tashish jami bahosini hisoblaymiz:

$$S_2 = 150\cdot 7 + 100\cdot 9 + 70\cdot 12 + 70\cdot 18 + 210\cdot 12 + 120\cdot 10 + 180\cdot 13 =$$
$$= 1050 + 900 + 840 + 1260 + 2520 + 1200 + 2340 = 10110 \text{ so'm.}$$

Demak, umumiy harajat $S_2 - S_1 = 11190 - 10110 = 1080$ ga kamaydi.

Endi tuzilgan rejaning optimalligini tekshiramiz. Buning uchun yangi tuzilgan rejadagi bo'sh katakchalar uchun baholarning algebraik yig'indisini hisoblaymiz:

$\Delta_{13} = 16 - 18 + 12 - 9 = 28 - 27 = 1;$

$\Delta_{14} = 10 - 12 + 12 - 9 = 10 - 9 = 1;$

$\Delta_{15} = 16 - 13 + 10 - 18 + 12 - 9 = 38 - 40 = -2;$

$\Delta_{21} = 13 - 7 + 9 - 12 = 22 - 19 = 3;$

$\Delta_{25} = 20 - 18 + 10 - 13 = 30 - 31 = -1;$

$\Delta_{31} = 19 - 7 + 9 - 12 + 18 - 10 = 46 - 29 = 17;$

$\Delta_{32} = 15 - 12 + 18 - 10 = 33 - 22 = 11;$

$\Delta_{34} = 13 - 12 + 18 - 10 = 31 - 22 = 9.$

Δ_{15} va Δ_{25} baholar manfiy, bulardan kichigi $\Delta_{15} = -2$ bo'lganligi uchun shu katakcha uchun yopiq siniq chiziqlar zanjirini qaraymiz:

	- 9 100		+ 16
	+ 12 70	- 18 70	
		+ 10 120	- 13 180

-	100-70			70+0	+
	70+70		70-70		
	+	-			
		+	120+70	180-70	-

Bu zanjirda manfiy burchaklardagi eng kichik yuk 70 bo'lib, uni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo'shib, yaxshilangan planni tuzamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1	*250 t*	*7* *150*	*9* *30*	*16*	*10*	*16* *70*
A_2	*350 t*	*18*	*12* *140*	*18*	*12* *210*	*20*
A_3	*300 t*	*19*	*15*	*10* *190*	*13*	*13* *110*
Talablar	900	*150 t*	*170 t*	*190 t*	*210 t*	*180 t*

Bu olingan reja bo'yicha umumiy harajat:
$S_3 = 150 \cdot 7 + 30 \cdot 9 + 70 \cdot 16 + 140 \cdot 12 + 210 \cdot 12 + 190 \cdot 10 + 110 \cdot 13 = 9940$ so'm bo'lib oldingi rejaga nisbatan $S_3 - S_2 = 170$ so'mga yaxshilandi.

Olingan rejadagi bo'sh katakchalar uchun baholarning algebraik yig'indisini hisoblaymiz:

$\Delta_{13} = 16 - 16 + 13 - 10 = 29 - 26 = 3;$

$\Delta_{14} = 10 - 12 + 12 - 9 = 1;$

$\Delta_{21} = 13 - 12 + 9 - 7 = 22 - 19 = 3;$

$\Delta_{23} = 18 - 10 + 13 - 16 + 9 - 12 = 40 - 38 = 2;$
$\Delta_{24} = 20 - 16 + 9 - 12 = 29 - 28 = 1;$
$\Delta_{31} = 19 - 13 + 16 - 7 = 35 - 20 = 15;$
$\Delta_{32} = 15 - 13 + 16 - 9 = 31 - 22 = 9;$
$\Delta_{34} = 13 - 13 + 16 - 9 + 12 - 12 = 7.$

Shunday qilib, tuzilgan reja uchun baholarning algebraik yig'indilari ichida manfiylari yo'q, shuning uchun bu tuzilgan reja optimal bo'lib, umumiy harajat $S_2 = 9940$ ko'm bo'ladi va uni endi yaxshilash mumkin emas.

4). Transport masalasini potensiallar usuli bilan yechish. Biror usuldan foydalanib boshlang'ich yechim topilgandan keyin uni optimal yechimgacha yaxshilash uchun potensiallar deb ataluvchi usuldan foydalanish mumkin.

Potensiallar usuli algorifmini qaraymiz:

1-qadam. Har bir A_i - ta'minlovchiga α_i $(i = \overline{1,m})$ sonni mos qo'yamiz, bu songa A_i ning potensiali deb ataladi. B_j iste'molchiga ham β_j $(j = \overline{1,n})$ sonni mos qo'yamiz va unga B_j ning potensiali deyiladi.

Har bir to'ldirilgan katak uchun ya'ni har bir bazis o'zgaruvchi uchun

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \qquad (1)$$

tenglik tuziladi. Hosil qilingan sistema $m + n - 1$ ta tenglamadan iborat, chunki bazis o'zgaruvchilari soni $m + n - 1$ (to'ldirilgan kataklar soni) edi. Hamda $m + n$ ta no'malumga ega bo'ladi. Ma'lumki, bunday tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lib, ularning istalgani izlanayotgan potensiallarni o'z ichiga oladi. Bu yechimlardan birontasini topish uchun, sistemadagi birorta potensialga ixtiyoriy qiymat beriladi. Odatda $\alpha_1 = 0$ yoki $\alpha_1 = 1$ deb olinib, boshqa potensiallar qiymati topiladi.

2-qadam. Har bir to'ldirilmagan katak uchun ya'ni bazisda bo'lmagan o'zgaruvchi uchun qo'shimcha tarif (narx) deb ataluvchi

$$c'_{ij} = \alpha_i + \beta_j \qquad (2)$$

larni hisoblaymiz.

3-qadam. Olingan yechimning optimalligini tekshiramiz. Har bir to'ldirilmagan katak uchun

$$S_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} \qquad (3)$$

larni hisoblaymiz. Hamma S_{ij} lar uchun $S_{ij} \geq 0$ bo'lsa, olingan reja optimal bo'ladi, aks holda reja optimal bo'lmaydi va uni yaxshilash kerak bo'ladi. Rejani qo'shimcha ta'rif eng kichik manfiy sonli katak uchun, yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl) bo'yicha o'zgartiramiz. Bu hol taqsimot usulidagidek bajariladi. Bu o'zgarishni jadvalda bajarib yangi yaxshilangan reja olinadi va yana 1-qadamga o'tiladi.

Potensiallar usulini sonli misolda qaraymiz.

1-misol. A_1 ta'minlovchida $a_1 = 11$ tonna, A_2 ta'minlovchida $a_2 = 14$ tonna yuk bor. Ta'minlovchilardagi yuklarni B_1 iste'molchiga $b_1 = 10$ tonna, B_2 iste'molchiga $b_2 = 8$ tonna, B_3 iste'molchiga $b_3 = 7$ tonna miqdorda taqsimlashni tashkil qilish kerak bo'lsin. C_{ij} i-ta'minlovchidan j-iste'molchiga yuk 1 birligini tashish bahosi (so'mlarda) quyidagi matritsa bilan berilgan:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(sonlar shartli, ataylab kichik qilib olindi).

Yukni taqsimlashning shunday rejasini tuzingki, uni tashish uchun ketadigan umumiy transport harajati minimal bo'lsin. Masalani potensiallar usuli bilan yeching.

Yechish. Masala shartida berilganlarni jadval ko'rinishda yozamiz va boshlang'ich bazis yechimni shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib tuzamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar		
		V_1	V_2	V_3
A_1	$a_1=11$	8 10	6 1	5
A_2	$a_2=14$	4	5 7	7 7
Talablar	25	$b_1=10$	$b_2=8$	$b_3=7$

2+3-1=4, to'ldirilgan katakchalar soni ham 4 ta, demak olingan reja maxsusmas bo'lib, umumiy transport harajati

$S_1 = 10 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 7 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 170$ ko'm.

1-qadam. A_1 ta'minlovchiga α_1, A_2 ta'minlovchiga α_2 potensiallarni, B_1, B_2, B_3 iste'molchilarga mos ravishda $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ potensiallarni mos qo'yamiz.

Har bir to'ldirilgan katakcha uchun (1) formulaga asosan tenglama hosil qilib, quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 8, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 6, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 7. \end{cases}$$

Sistemada noma'lumlar soni 5 ta tenglamalar soni esa 4 ta, shuning uchun α_1 ni ixtiyoriy, masalan, $\alpha_1 = 0$ deb olib, qolgan noma'lumlar qiymatini topamiz. Birinchi tenglamada $\alpha_1 = 0$ bo'lsa, $0 + \beta_1 = 8,\ \beta_1 = 8$ bo'ladi.

Ikkinchi tenglamadan esa $\beta_2 = 6$, uchinchi tenglamadan $\alpha_2 + 6 = 5,\ \alpha_2 = -1$ shuningdek $-1 + \beta_3 = 7,\ \beta_3 = 8$ ekanligini topamiz, ya'ni $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1, \beta_1 = 8,$ $\beta_2 = 6, \beta_3 = 8$.

2-qadam. Har bir to'ldirilmagan katakchalar uchun c'_{ij} qo'shimcha ta'riflarni (2) formula bo'yicha topamiz:

$c'_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 8 = 8$,

$c'_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = -1 + 8 = 7$.

3-qadam. Olingan boshlang'ich yechimning optimalligini (3) formula yordamida tekshiramiz:

$S_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$, $S_{13} = c_{13} - c'_{13} = 5 - 8 = -3$, $S_{21} = c_{21} - c'_{21} = 4 - 7 = -3$,

$S_{13} = -3 < 0$, $S_{21} = -3 < 0$.

Ikkala katakcha uchun ham optimallik mezoni bajarilmaydi. Demak, olingan yechimni yaxshilash mumkin. Ikkala to'ldirilmagan katakchalar uchun ham

$S_{13} = S_{21} = -3$

bo'lganligi uchun ularning ixtiyoriysini olib, bu katakcha uchun yopiq siniq chiziqlar zanjirini masalan 1-3 katakcha uchun a) jadvalni tuzamiz:

a)

-	+
6 1	5
5 7	7 7
+	-

b)

6	5 1
5 8	7 6

Manfiy burchaklardagi eng kam yukni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo'shib, b) jadvalga ega bo'lamiz. Bu o'zgarishni boshlang'ich yechim jadvaliga kirgizib ikkinchi yaxshilangan yechimni olamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar		
		V_1	V_2	V_3
A_1	$a_1=11$	8 10	6	5 1
A_2	$a_2=14$	4	5 8	7 6
Talablar	25	$b_1=10$	$b_2=8$	$b_3=7$

$S_2 = 8 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 6 = 80 + 5 + 40 + 42 = 167$ ko'm.

Olingan rejaning maxsusmasligini tekshiramiz: $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$ bo'lib, to'ldirilgan katakchalar soni ham 4 ta, shuning uchun olingan yechim maxsusmasdir.

1-qadamga o'tamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 8, & \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 8, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 5, & 0 + \beta_3 = 5, \beta_3 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 5, & \alpha_2 + 5 = 7,\ \alpha_2 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 7, & 2 + \beta_2 = 5, \beta_2 = 3. \end{cases}$$

$c'_{12} = \alpha_1 + \beta_2 = 0 + 8 = 8$, $\quad c'_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = 2 + 8 = 10$,

$S_{12} = c_{12} - c'_{12} = 6 - 8 = -2$, $S_{21} = c_{21} - c'_{21} = 4 - 10 = -6$.

2-1 katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjirini tuzamiz (v jadval):

v)

8 10	5 1
4	7 6

g)

8 4	5 7
4 6	7

Manfiy burchaklardagi yukning kichigi 6, bu yukni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo'shib g) jadvalni olamiz. Bu o'zgarishni oxirgi yechim jadvaliga kirgizib quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar		
		V_1	V_2	V_3
A_1	$a_1=11$	8 4	6	5 7
A_2	$a_2=14$	4 6	5 8	7
Talablar	25	$b_1=10$	$b_2=8$	$b_3=7$

$S_3 = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 32 + 35 + 24 + 40 = 131$ ko'm.

Olingan yechim ham maxsusmasdir.

Yana, 1-qadamga qaytamiz.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 8, & \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 8, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 5, & \beta_3 = 5, \alpha_2 + 8 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 5, & \alpha_2 = -4, -4 + \beta_2 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 7, & \beta_2 = 9. \end{cases}$$

$c'_{12} = \alpha_1 + \beta_2 = 0 + 9 = 9$, $c'_{23} = \alpha_2 + \beta_3 = -4 + 5 = 1$,

$S_{12} = 6 - 9 = -3$, $S_{23} = c_{23} - c'_{23} = 7 - 1 = 6$.

$S_{12} = -3 < 0$ bo'lganligi uchun yechim optimal emas, uni yaxshilaymiz.

1-2 katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjirini tuzamiz (d jadval):

d)

8 4	6
4 6	5 8

e)

8	6 4
4 10	5 4

Manfiy burchaklardagi yuklarning kichigi 4 bo'lganligi uchun uni manfiy burchaklardan ayiramiz, musbat burchaklarga qo'shamiz va ye) jadvalni hosil qilib, bu o'zgarishni oldingi yechim jadvaliga kirgizib quyidagi rejaga ega bo'lamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar		
		V_1	V_2	V_3
A_1	$a_1=11$	8	6 4	5 7
A_2	$a_2=14$	4 10	5 4	7
Talablar	25	$b_1=10$	$b_2=8$	$b_3=7$

$S_4 = 6\cdot 4 + 5\cdot 7 + 4\cdot 10 + 5\cdot 4 = 119$ ko'm.

Oxirgi tuzilgan yechim uchun yana 1-qadamga qaytamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_2=6, & \alpha_1=0,\ \beta_2=6, \\ \alpha_1+\beta_3=5, & 0+\beta_3=5,\ \beta_3=5, \\ \alpha_2+\beta_1=4, & \alpha_2+6=5,\ \alpha_2=-1, \\ \alpha_2+\beta_2=5, & -1+\beta_2=5,\ \beta_2=6. \end{cases}$$

$c'_{11}=\alpha_1+\beta_1=0+5=5$, $\quad c'_{23}=\alpha_2+\beta_3=-1+5=4$,

$S_{11}=c_{11}-c'_{11}=8-5=3$, $\quad S_{23}=c_{23}-c'_{23}=7-4=3$,

$S_{11}=3>0$, $\quad S_{23}=3>0$.

Olingan yechim optimaldir, chunki to'ldirilmagan katakchalar uchun hamma $S_{ij}>0$ musbatdir. Shunday qilib, optimal rejada bazis o'zgaruvchilar qiymati:

$x_{12}=4,\ x_{13}=7,\ x_{21}=10,\ x_{22}=4$ bo'lib, umumiy transport harajati S=119 so'm bo'ladi.

Mavzuning tayanch tushunchalari

Transport masalasi, rejalashtirish matritsasi, transport masalasining matematik modeli, yopiq model, ochik model, shimoliy-g'arbiy burchak usuli, taqsimot usuli, yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl), baholarning algebraik yig'indisi, potensiallar, potensiallar usuli, stanoklarda detallarga ishlov berish operatsiyalarini taqsimlash masalasi, avtotransportning yuksiz bosib o'tadigan yo'lini minimallashtirish masalasi, parametrli chiziqli dasturlash masalasi, butun sonli dasturlash masalasi, Gomori usuli.

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1-10 misollarda, bir xildagi mahsulotni taqsimlashda uchta ta'minlovchi va beshta iste'molchi bor. a_i $(i=1,2,3)$ ta'minlovchilardagi yuklar miqdori, b_j $(j=1,2,3,4,5)$ iste'molchilarning yuklarga talablari, C_{ij} i -ta'minlovchidan j -iste'molchigacha yuk 1 birligining tashish bahosi (so'm) quyidagi matritsa bilan berilgan bo'lsin:

$$\begin{array}{c|ccccc} a_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ a_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ a_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array}$$

Yuk tashishning shunday rejasini tuzingki, uni tashish uchun ketadigan umumiy transport harajati minimal bo'lsin. Masalani taqsimot va potensiallar usullari bilan yeching.

1. $$\begin{array}{c|ccccc} 160 & 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 400 & 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 240 & 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \\ \hline & 170 & 190 & 140 & 180 & 120 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{c|ccccc} 350 & 5 & 13 & 18 & 17 & 8 \\ 400 & 6 & 10 & 15 & 6 & 3 \\ 250 & 24 & 21 & 9 & 16 & 17 \\ \hline & 175 & 225 & 230 & 170 & 200 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{c|ccccc} 350 & 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \\ 200 & 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 300 & 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \\ \hline & 170 & 140 & 200 & 195 & 145 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{c|ccccc} 150 & 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 250 & 17 & 10 & 19 & 11 & 5 \\ 200 & 15 & 11 & 6 & 13 & 8 \\ \hline & 180 & 120 & 90 & 105 & 105 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{c|ccccc} 280 & 4 & 7 & 8 & 14 & 9 \\ 340 & 15 & 11 & 6 & 17 & 11 \\ 280 & 13 & 18 & 10 & 12 & 22 \\ \hline & 170 & 160 & 190 & 200 & 180 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{c|ccccc} 250 & 7 & 9 & 16 & 10 & 16 \\ 350 & 13 & 12 & 18 & 12 & 20 \\ 300 & 9 & 15 & 0 & 13 & 13 \\ \hline & 150 & 170 & 190 & 210 & 180 \end{array}$$

7.

400	13	9	5	11	17
250	14	5	12	14	22
350	20	17	13	18	21
	200	170	230	225	175

8.

220	20	17	13	2	17
400	6	10	9	4	15
280	3	7	13	6	23
	160	180	170	200	190

9.

150	8	20	7	11	16
200	4	14	12	15	17
150	15	22	11	12	19
	160	70	90	80	100

10.

200	5	7	4	2	5
175	7	1	3	1	10
225	2	3	6	8	7
	100	130	80	190	100

Adabiyotlar

1. Safayeva Q., Beknazarova N. Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. 1-qism, -Toshkent, O'qituvchi, 1984.
2. Karasev A.I. i dr. Kurs visshey matematiki dlya ekonomicheskix vuzov. Chast II. – M.: Visshaya shkola, 1982, 320 s.
3. Kuznesov A.V., i dr. Matematicheskoye programmirovaniye. Uchebnoye posobiye. –M.: Visshaya shkola, 1980, 300 s.
4. Karmanov V.G. Matematicheskoye programmirovaniye. Uchebnoye posobiye, Izd-vo: FIZMATLIT, 2001 g., 264 str.
5. Kostevich L.S. Matematicheskoye programmirovaniye. Izd-vo: Novoye znaniye, 2003 g., 214 s.

18-19 Laboratoriya mashg'uloti
Kuzatish natijalarini qayta ishlashga doir masalalar yechish.

REJA:

4. Eksperiment, uning maqsadi va vazifalari. Eksperiment turlari. Hisoblash eksperimenti. Eksperiment o'tkazish bosqichlari.
5. Eksperimentni loyihalash, rejalashtirish va o'tkazishda yangi axborot texnologiyalaridan foydalanish.
6. Eksperimentning matematik va dasturiy ta'minotlari. Eksperimentn natijalariga ishlov berishda kompyuterdan foydalanish.

Tayanch tushunchalar. Formallashtirilgan masalalar, modellashtirish, kompyuterli modellashtirish, tajriba, eksperiment, dastur, dasturiy ta'minot.

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Издательство «Наука» Москва 1966. С. 664.*
3. *Е. В. Бошкиново и др. Численное методы и их реализация в MS Excel. Самара 2009*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*

Formallashtirish deganda ma’lum bir modelni ma’lum bir sohaga moslab ajratib tadqiq etish hamda hulosalar qilish tushuniladi. Ya’ni bitta obe’ktni turlicha yo’nalishda talqin etib uning modelini yaratish mumkin.

Eksperiment turlar:

- Fizik eksperiment;
- Kompyuterli eksperiment;
- Psixologik eksperiment;
- Tasavvur etish orqali qilinadigan eksperimenti;

Fizik eksperimentga mahsus yaratilgan sharoitda tabiy yo'l bilan o'tadigan tajribalar misol bo'la oladi.

Kompyuterli (sonli) tajriba- bu tadqiqot ob'ektining matematik modelini o'rganishda o'tkaziladigan EHMdagi sonli tajribalardir, ya'ni bunda modelning bitta parametric yordamida boshqa parametrlarini aniqlash va shu asosda hulosalar qilish

Masalani kompyuterda yechish texnologiyasi quyidagi bosqichlarda olib boriladi:

- Masalani qo'yish;
- Masalaning modelini tuzish;
- Formallashtirish;
- Algoritmni tuzish;
- Dasturlash tillari yordamida dasturini yozish;
- Hisoblash tajribasini o'tkazish.

Masalani qo'yish jarayonida uning aniqligiga va ravshanligiga e'tibor beriladi hamda nimalar berilgan va nimalarni topish kerak? degan sovolga javob berishi kerak.

Berilgan ob'ektni modellashtirishda, modellashtirish maqsadidan kelib chiqqan holda avval uni tahlil etishdan boshlanadi. Bu bosqichda obe'ktning modellashtirish husuyatlarini ifodalaovchi hamma ma'lum sube'ktlari belgilanadi. Belgilangan sub'ektlar ob'ekt modelini imkoni boricha to'liq ifodalashi lozim. Modelni tasvirlash shakllari turlicha bo'lishi mumkin, Bularga

- Modelni so'zlar orqali ifodalash;
- Modelni turli chizmalar orqali ifodalash;
- Modelni jadvallar ko'rinishida ifodalash;
- Modelni formulalar orqali ifodalash;
- Modelni sxematik ko'rinishda ifodalash;
- Hisoblash algoritmni tuzish;
- Kompyuterda dasturini tuzish
- Kompyuterda hisoblash tajribasini o'tkazish va h.k.

Modelning tasvirlangan shakli tanlangandan keyin uni formallashtirishga o'tkaziladi.

Formallashtirish bosqichining natijasi axborotli model hisoblanadi. Qurilgan modelni qarama-qarshiligi tekshiriladi va tahlil etiladi hamda uning qanchalik maqsadga muvofiqligi va adekvatligi tekshiriladi.

Ma'lumki kompyuter ma'lum bir algoritmik tilde yozilgan formallashtirilgan buyruqlar ketma-ketligida ishlaydi. Shuning uchun ham keying bosqichda kompyuterda masalani yechish uchun avval uning algoritmi tuziladi.

Algoritm- qo'yilgan masalani aniq yechishga yo'naltirilagan amallar ketma-ketligini to'gri ifodalashdir.

Algoritmni quyidagi keng tarqalgan usullarda ifodalash mumkin:

- ✓ Algoritmni so'zlar orqali ifodalash, ya'ni qo'yilgan masalani yechish uchun so'zlar orqali ifodalangan amallar ketma-ketligi;
- ✓ Algoritmni grafik usulda tasvirlash, ya'ni bajariladigan amallar ketma-ketligini blok-sxema yoki chizmalar orqali ifodalash;
- ✓ Algoritmni algoritmik tillar yordamida ifodalash, ya'ni natijalarni olish va tahlil etish uchun dasturlash tillari orqali dasturini yozish.

Dasturiy vositasi tuzilgandan keyin hisoblash tajribasi o'tkaziladi. Olingan natijalar modelning adekvatligiga tekshiriladi va shu tarzda model takomillastirib boriladi.

Yuqorida keltirib o'tilgan barcha amallar <u>kompyuterli modellashtirish</u> ga misol bo'la oladi.

Kompyuterli modellashtirish bizga quyidagi imkoniyatlarni taqdim etadi:

- ✓ Ob'ektning tadqiq etish ko'lamini kengatiradi- real sharoitda tadqiq etib bo'lmaydigan takrorlanuvchi, takrorlanmaydigan, yuz bergan va yuz berishi mumkin bo'lgan hodisalarni o'rganish imkoniyatini beradi;
- ✓ Ob'ektning har qanday hususiyatlarini vizuallashtirish imkoniyati;
- ✓ Dinamik jarayonlarini va hodisalarini tadqiq etish;
- ✓ Vaqtni boshqarish (tezlashtirish? Sekinlashtirish va h.k.)
- ✓ Model ustida dastlabki vaziyatiga qaytgan holda ko'p martalik tajribalar o'tkazish;
- ✓ Grafik va sonli ko'rinishdagi tavsiflarini olish;
- ✓ Sinov konstruksion nusxasini yasamay turib, optimal konstruksiyasini toppish;
- ✓ Atrof muhitga va sog'likga zarar yetkazmay turib tajribalar o'tkazish.

Kompyuterli modellashtirishning asosiy bosqichlari quyidagicha:

1. Masalaning qo'yilishi va uning tahlili;
   1.1. Model maqsadini aniqlash;
   1.2. Natijalar qanday ko'rinishda olishni aniqlashtirish;
   1.3. Modelni qurishda qanday natijalar kerakligini aniqlash;

2. Information modelini qurish;
    2.1. Modelning parametrlari va ularning o'zaro bog'liqligini aniqlash;
    2.2. Qo'yilgan masalaga qaysi parametrlar kuchli bog'langanligini baholash;
    2.3. Parametrlar o'zaro bog'liqligini matematik ifodalash;

3. Kompyuter modeliga tadbiq etish algoritmi va uslubini ishlab chiqish;
    3.1. Natijalarni olish usullarini ishlab chiqish va tanlash;
    3.2. Tanlangan usul asosida natijalarni olish uchun algoritmnni yaratish;
    3.3. Algoritmni to'griligini tekshirish;

4. Kompyuterli modelini yaratish;
    4.1. Kompyuterda tadbiq etish uchun dasturiy vositasini yaratish;
    4.2. Kompyuter modelini yaratish;
    4.3. Kompyuter modelning to'g'riligini tekshirish;

5. Tajribalar o'tkazish;
    5.1. Tadqiq etish rejasini tuzish;
    5.2. Yaratilgan kompyuter modeli asosida tajribalar o'tkazish;
    5.3. Olingan natijalarni tahlil etish;
    5.4. Hulosalar chiqarish.

Tavsiya etiladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar

1. Abduqodirov A.A. va boshqalar. Hisoblash matematikasi va dasturlash. O'quv qo'llanma. Toshkent. "O'qituvchi", 1996.
2. Abduqodirov A.A. Hisoblash matemalikasi va dasturlashdan laboratoriya ishlari. O'quv qo'llanma. Toshkent, "O'qiluvchi", 1990
3. Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш. Дарслик. Тошкент. Ўқитувчи, 1989.
4. Сафоева К. Математик программалаш. Ўкув қўлланма. Т.:УАЖБҲТ, 2004 й.
5. Safoeva K., Beknazarova N. Operasiyalarni tekshirishning matemalik usullari. 2-qism. O'quv qo'llanma. Toshkent, "O'qituvchi", 1990.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Исраилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 1- ва 2-қисмлар. – Тошкент: Ўқитувчи, 2003. – 450 б., 2008. - 340 б.
2. Ismatullaev G'.P., Jo'raev G'.U. Hisoblash usullaridan metodik qo'llanma. – Toshkent: UzMU nashri, 2007. – 108 bet.
3. Абдухамидов А.У., Худойназаров С. Ҳисоблаш усулларидан амалиёт ва лаборатория машғулотлари. – Тошкент: Ўқитувчи, 1995. – 240 с.
4. Крылов В.И., Бобоков В.В., Монастырний П.И. Вычислительные методы высшей математики. 1-2 том. – Минск: Высшая школа, 1972. – 540 с., 1975. – 630 с.
5. Воробьева Г.К., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М: Высшая школа, 1990. – 208 с.
6. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М: Наука, 2009. – 368 с.
7. Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с.
8. Калиткин Н. Н., Корякин П. В. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с.
9. Richard L. Burden and J. Douglas Faires. Numerical Analysis. *9th Edition.* Youngstown State University Press, 2011. – *895 p.*
10. L. Ridgway Scott. Numerical Analysis. Princeton University Press, 2011. – 342 p.

Internet resurslari va ziyonet saytlari

1. http://www.edu.uz – ta'lim sayti.
2. http://www.edu.ru – ta'lim sayti.
3. http://www.intuit.ru – masofaviy ta'lim sayti.
4. http://www.eqworld.ru – adabiyotlarning elektron varianti.
5. http://ru.wikipedia.org – erkin ensiklopediya «Vikipediya».

6. http://www.twirpx.com – adabiyotlarning elektron varianti.
7. http://www.ziyonet.uz - adabiyotlarning elektron variantlari
8. http://www.techgidravlika.ru – adabiyotlarning elektron varianti.
9. http://www.prepodu.net – adabiyotlarning elektron varianti.