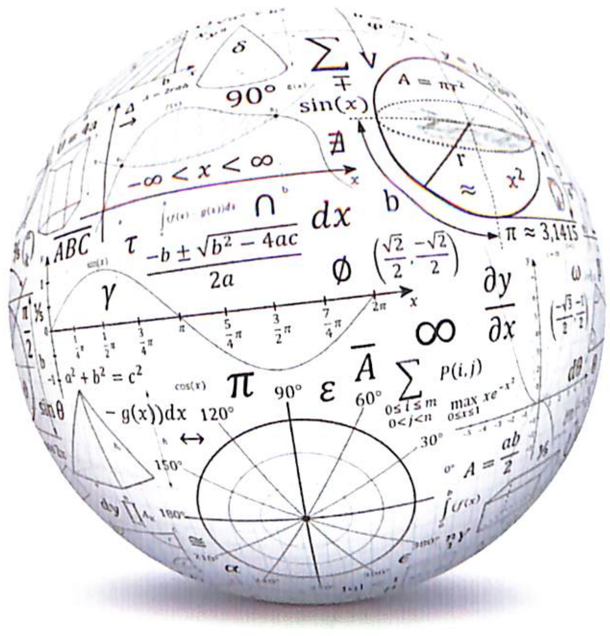
TURGUNBAYEV RISKELDI MUSAMATOVICH

MATEMATIK ANALIZ

I QISM



K
m

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

Turgunbayev Riskeldi Musamatovich

MATEMATIK ANALIZ

I qism

5110100-matematika o'qitish metodikasi
DARSLIK

TOSHKENT
"INNOVATSIYA -ZIYO"
2021

UDK:: 533.6.011.51
BBK: 22.17
T-377

Turgunbayev, Riskeldi.
Matematik analiz. I qism (darslik)– Toshkent: "INNOVATSIYA - ZIYO", 2021, 340 b.

UDK: 533.6.011.51
BBK: 22.17
T-377

Ushbu darslik pedagogika oliy ta'lim muassasalari «Matematika o'qitish metodikasi» bakalavriat ta'lim yonalishining «Matematik analiz» fani dasturiga mos yozilgan bo'lib, bunda matematik analizning analizga kirish, bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobiga oid nazariy materiallar to'liq berilgan. Nazariy holatlarni ochib beruvchi misol va masalalar keltirilgan.

Taqrizchilar:

Nizomiy nomidagi TDPU dotsenti, f.-m.f.n. R.Madraximov

Ajniyaz nomidagi Nukus DPI dotsenti, f.-m.f.n. Z.Saparov

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2018-yil 14-iyundagi 531-sonli buyrug'iga asosan "Matematika o'qitish metodikasi" ta'lim yo 'nalishi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

ISBN 978-9943-5866-7-3

SO'Z BOSHI

Oliy ta'lim muassasalarida mavjud "Matematika" va "Matematika o'qitish metodikasi" ta'lim yo'nalishida o'qitiladigan "Matematik analiz" fani dasturlari bir-biridan o'qitish maqsadi va mazmuni jihatdan tubdan farq qiladi. "Matematika" ta'lim yo'nalishida "Matematik analiz" fani mazmuni chuqurligi bilan bir qatorda o'qitiladigan bo'limlari bilan ham farq qiladi. Bu ta'lim yo'nalishida klassik analiz asoslari o'rganiladi. "Matematika o'qitish metodikasi" ta'lim yo'nalishida o'qitiladigan matematik analiz kursida klassik analiz asoslari bilan bir qatorda differensial tenglamalar, kompleks va haqiqiy o'zgaruvchilrning funksiyalari nazariyalari, funksional analiz asoslari o'rganiladi.

Respublikamizda matematik analiz fanidan yaratilgan o'quv adabiyotlari "Matematika" ta'lim yo'nalishiga moslab yozilgan. "Matematika o'qitish metodikasi" ta'lim yo'nalishida uchun yaratilgan o'quv adabiyotlari ham yuqoridagi adabiyotlardan kam farq qiladi.

Bo'lajak matematika o'qituvchilariga "Matematik analiz" fanini o'qitish tajribasi, xorijiy tajribalarni o'rganish shuni ko'rsatadiki, darslikning ta'lim yo'nalishi Davlat ta'lim standarti, malaka talablariga mos yozilishi, talaba yechishni uddalashi lozim bo'lgan tayanch masalalarni yechish namunalarining berilishini, fanga qiziquvchi talabalarni ham hisobga olishni, talabalar mustaqil ishini tashkillashtirish uchun materiallarning mavjud bo'lishini taqoza qiladi.

Ushbu darslikni yozishda yuqorida aytilganlar e'tiborga olindi.

Ushbu darslik uch bo'limdan – analizga kirish, bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi va bir o'zgaruvchili funksiyaning integral hisobidan – iborat va o'n ikkita bobdan tashkil topgan. Bunda matematik analiz dasturida yuqorida aytilgan bo'limlar bo'yicha ko'rsatilgan barcha mavzulardan nazariy va qisman amaliy materiallar, tayanch masalalar va ularni yechish namunalari, mustaqil ishga ajratilgan materiallar masala shaklida keltirilgan.

Darslikni tayyorlashda ta'lim bosqichlari orasidagi izchillikka va ta'limning kasbiy yo'nalganlik tamoyillariga, hamda muallifning Nizomiy nomidagi pedagogika universitetida, ko'p yillar davomida matematik analiz bo'yicha o'qigan leksiyalari va olib borgan amaliy mashg'ulotlaridan kelib chiqqan xulosalariga asoslandi. Qo'llanmaning tuzilishi, mavzularning tanlanishi mana shu tajribalar natijasi bo'lib, shuningdek, shu paytgacha o'zbek tilida mavjud bo'lgan darslik va o'quv qo'llanmalardan, horijiy davlatlarda chop etilgan yangi adabiyotlardan ijobiy foydalanildi. Foydalanilgan adabiyotlardagi atamalar, tushunchalar va belgilashlarni saqlab qolishga harakat qilindi.

Darslikda ta'rif, teorema, lemma, xossalar, misollar har bir bob uchun bir xil tartibda nomerlangan. Paragraflar so'ngida berilgan mashq va masalalar ham boblar boyicha nomerlangan. Formulalar har bir paragraf bo'yicha, rasmlar barcha bo'limlar uchun ketma-ket nomerlangan.

Teoremalar isbotining boshlanishi ◊, yakuni ♦ belgilar bilan belgilangan.

Muallif

BIRINCHI BO‘LIM. ANALIZGA KIRISH

I – BOB. HAQIQIY SONLAR NAZARIYASI

1-§. Ratsional sonlar to‘plami va uning xossalari

1. Ratsional sonlar to‘plami. Ma’lumki, $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ kabi barcha natural sonlar to‘plami, $Z = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ kabi barcha butun sonlar to‘plami belgilanadi.

1.1-ta’rif. Ushbu qisqarmaydigan $r = \frac{p}{q}$ kasr ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lgan har bir son *ratsional son* deyiladi, bu yerda p biror butun, q esa natural son.

Barcha ratsional sonlar to‘plamini Q orqali belgilaymiz.

$\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ kasrlarni har birini qisqartirish natijasida $\frac{1}{2}$ – qisqarmas kasr ko‘rinishga keltirish mumkin. Demak, ularning har biri ratsional son va ular o‘zaro teng.

Q to‘plamda arifmetik amallar quyidagicha kiritiladi. Aytaylik, $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ va $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ ratsional sonlar berilgan bo‘lsin. Bu r_1 va r_2 ratsional sonlarni yig‘indisi deb, $r_1 + r_2 = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$ songa, ayirmasi deb, $r_1 - r_2 = \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2-p_2q_1}{q_1q_2}$ songa, ko‘paytmasi deb, $r_1 \cdot r_2 = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$ songa, $r_2 \neq 0$ bolganda ularning bo‘linmasi deb, $r_1 : r_2 = \frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2}{q_1p_2}$ songa aytiladi.

2. Ratsional sonlarning tartiblanganlik xossasi.

1.2-ta’rif. Agar $r_1 - r_2 = 0$ bo‘lsa, $r_1 = r_2$, agar $r_1 - r_2 > 0$ bo‘lsa, $r_1 > r_2$, agar $r_1 - r_2 < 0$ bo‘lsa, $r_1 < r_2$ deyiladi.

1.3-xossa. Ixtiyoriy ikkita r_1 va r_2 ratsional sonlar uchun $r_1 = r_2, r_1 < r_2, r_1 > r_2$ munosabatlardan faqat bittasi o‘rinli bo‘ladi.

1.4-xossa. Ixtiyoriy uchta r_1, r_2 va r_3 ratsional sonlari uchun $r_1 < r_2$ va $r_2 < r_3$ munosabatlardan $r_1 < r_3$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Bu xossalarning to‘g‘riligi ratsional sonlar ustidagi arifmetik amallarning xossalaridan foydalanib isbotlanadi (1-, 2-masalalar).

3. Ratsional sonlar to‘plamining zichlik xossasi.

1.5-xossa. Bir-biridan farqli ixtiyoriy ikki r_1 va r_2 ratsional sonlar orasida, ulardan farqli, kamida bitta ratsional son mavjud.

Isbot. ◊ Aytaylik, $r_1 < r_2$ bo‘lsin. U holda $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ uchun $r_1 < r < r_2$ bo‘lishi ravshan. Shuningdek ratsional sonlarni qo‘shish va bo‘lish qoidalaridan $\frac{r_1+r_2}{2} \in Q$ kelib chiqadi. ◆

Ratsional sonlar to‘plamining zichlik xossasidan ikkita teng bo‘lmagan ratsional sonlar orasida cheksiz ko‘p ratsional sonlar mavjud ekanligi kelib chiqadi (3-masala).

4. Arximed aksiomasi. Ratsional sonlar to‘plamining yuqoridagi xossalaridan kelib chiqmaydigan quyidagi xossasi o‘rinli:

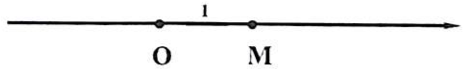
1.6-xossa. Har qanday musbat c son uchun undan katta natural son mavjud.

Bu xossa Arximed aksiomasi deb yuritiladi.

2-§. Ratsional sonlarni sonlar o‘qida tasvirlash

To‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy bir nuqtani “boshlang‘ich nuqta” deb olib, O orqali belgilaymiz. Bu O nuqtani “0”(nol) sonining geometrik tasviri deb qaraymiz.

Endi, shu to‘g‘ri chiziqda noldan o‘ng tomonga yurishni musbat yo‘nalish, chap tomonga yurishni manfiy yo‘nalish deb qabul qilamiz. Biror kesmani tanlab olib, uni o‘lchov birligi deb qabul qilamiz. Bunday belgilashlar qilingan to‘g‘ri chiziqni *sonlar o‘qi* deyiladi (1-rasm).



1-rasm

Rasmda, OM orqali tanlangan birlik kesma belgilangan. M nuqta “1” bir soniga mos keladi deymiz.

1.7-teorema. Har ratsional songa sonlar o‘qida aniq bitta nuqta mos keladi.

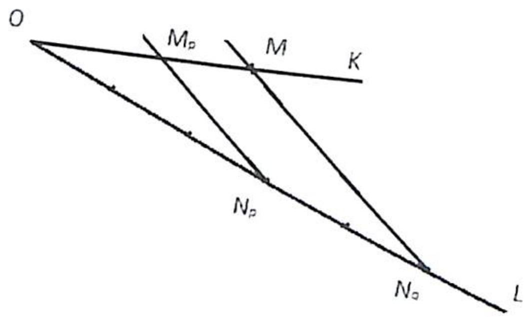
Isbot. ◊ Dastlab natural va butun sonlarga mos keladigan nuqtalarni ko‘rsatamiz. O‘lchov birligini, ya’ni OM kesmani O nuqtadan o‘ngga, to‘g‘ri chiziq bo‘ylab ketma-ket joylashtirilganda $1, 2, \dots, n, \dots$ sonlarga mos nuqtalar hosil

2- rasm

qilinadi. Xuddi shuningdek, chap tomonda $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$ sonlarlarga mos nuqtalar belgilanadi. Bu nuqtalarni "butun nuqtalar" deymiz (2-rasm).

Endi, $\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi musbat yoki $-\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi manfiy ratsional songa mos keladigan nuqtani topamiz.

Aytaylik, $\frac{p}{q}$ musbat ratsional son bo'lsin. Uchi O nuqtada bo'lgan KOL burchak chizamiz. Biror kesma olib uni O nuqtadan boshlab OL nur ustiga ketma-ket q marta qo'yib N_q nuqtani va p marta qo'yib M_q nuqtani belgilaylik. OK nurda esa, O nuqtadan sonlar o'qining birlik kesmasi OM ni qo'yamiz. Agar M va N_q nuqtalarni birlashtirsak, OMN_q uchburchak hosil bo'ladi. Endi N_p nuqtadan MN_q ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazib, ularning OK bilan kesishish nuqtasini M_p orqali belgilaymiz. Yasashga ko'ra, OMN_q uchburchak OM_pN_p uchburchakga o'xshash (3-rasm).



3-rasm

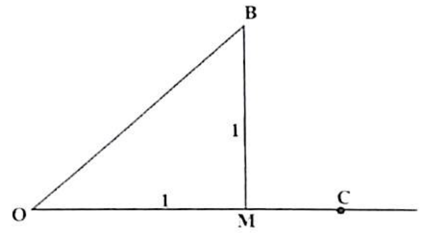
Shu sababli $\frac{p}{q}$ songa M_p nuqta mos keladi. Agar $-\frac{p}{q}$ manfiy ratsional son bo'lsa, u holda dastlab $\frac{p}{q}$ songa mos M_p nuqta topiladi. Keyin uni O nuqtaga nisbatan simmetrik almashtiramiz. Hosil bo'lgan nuqtaga $-\frac{p}{q}$ manfiy ratsional son mos qoyiladi. ♦

Shunday qilib, sonlar o'qida barcha ratsional sonlarga mos keladigan nuqtalarni belgilab chiqish mumkin ekan. Bu nuqtalarni "ratsional nuqtalar" deymiz. Demak, sonlar o'qida, har bir ratsional songa aniq bitta nuqta mos keladi.

Bu tasdiqning teskarisi o'rinli emas, ya'ni quyidagi teorema o'rinli:

1.8-teorema. Sonlar o'qini tasvirlovchi to'g'ri chiziqda shunday nuqta borki unga mos keluvchi ratsional son mavjud emas.

Isbot. ◊ Katetlari, birlik kesma OM ga teng bo'lgan OMB to'g'ri burchakli uchburchakning OB gipotenuzasini sirkul yordamida O nuqtadan o'ngga joylashtirsak, sonlar o'qida C nuqtaga ega bo'lamiz (4-rasm).



4- rasm

Ravshanki, $|OC|^2 = |OB|^2 = 2$. Mana shu C nuqtaga mos ratsional son mavjud emas.

Haqiqatan, teskarisini faraz qilaylik, ya'ni shunday $\frac{p}{q}$ ratsional son, qisqarmas kasr mavjud bo'lib, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ bo'lsin. Bundan $p^2 = 2q^2$, ya'ni p ning juft sonligi kelib chiqadi. Shuning uchun, $p = 2m$ belgilash kiritib uni yuqoridagi tenglikka qo'ysak $q^2 = 2m^2$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa q ning ham juft ekanini ko'rsatadi. Demak, $\frac{p}{q}$ sonning qisqarmas kasr deb olganimizga zid xulosaga keldik. Bundan, C nuqtaga mos keladigan ratsional son mavjud emasligi kelib chiqadi. ♦

Sonlar o'qida C nuqtaga o'xshash, ratsional sonlar orqali ifodalab bo'lmaydigan nuqtalarni ko'plab ko'rsatish mumkin. Bunday xulosa ratsional sonlar to'plamini kengaytirish zaruriyatini keltirib chiqaradi.

3-§. Ratsional sonlar to'plamini kengaytirish masalasi. Ratsional sonlar to'plamining kesimi

Oldingi paragrafda ta'kidlaganimizdek, sonlar o'qida ratsional nuqtalarga mos kelmaydigan nuqtalar mavjud. Bu nuqtalarga ham biror "son"larni mos qo'yish zarurati, ya'ni ratsional sonlar to'plamini o'z ichiga oladigan yangi "sonli" to'plamni aniqlash zarur. Quyida 19-asrning ikkinchi yarmida nemis matematigi Dedekind tomonidan taklif etilgan haqiqiy sonlar nazariyasi bilan tanishamiz. Bu nazariyada asosiy tushuncha ratsional sonlar to'plamining kesimi tushunchasidir.

1.9-ta'rif. Ratsional sonlar to'plami Q qandaydir usulda A va B to'plamlarga ajratilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa, bu ajratish Q ning *kesimi* deyiladi:

1) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$;
2) $A \cup B = Q$;
3) A to'plamga tegishli ixtiyoriy a son B to'plamga tegishli har qanday b sondan kichik ($a < b$).

Odatda kesimni (A, B) ko'rinishda belgilanadi. Bunda A to'plam kesimning *quyi sinfi*, B to'plam esa kesimning *yuqori sinfi* deyiladi.

Masalan, 3 sonini va undan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlarni A sinfga, 3 dan katta bo'lgan barcha ratsional sonlarni B sinfga kiritamiz:

$$A = \{x \in Q: x \leq 3\}, \qquad B = \{x \in Q: x > 3\}.$$

Bunday ajratish kesimning uchala shartini qanoatlantiradi. Shuningdek, 3 soni quyi sinfning eng katta elementi bo'ladi, ammo yuqori sinf B da eng kichik element mavjud emas.

Umumiy holda, ixtiyoriy r ratsional son uchun $A = \{x \in Q: x \leq r\}, B = \{x \in Q: x > r\}$ to'plamlarni kiritib (A, B) kesimni hosil qilsak, r soni quyi sinf A ning eng katta elementi bo'ladi. Yuqori sinf B da eng kichik element mavjud emas. Haqiqatan ham, B da eng kichik element mavjud va u r_1 ga teng deb faraz qilaylik. U holda $r < r_1$ va ratsional sonlar to'plamining zichlik xossasiga ko'ra r dan katta va r_1 dan kichik bo'lgan r_2 ratsional mavjud bo'lib, u A sinfga ham, B sinfga ham tegishli emas. Bu esa (A, B) ning kesim ekanligiga zid bo'ladi.

1.10-misol. Ixtiyoriy r ratsional soni uchun r dan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlarni A sinfga, r va undan katta bo'lgan barcha ratsional sonlarni B sinfga kiritib hosil qilingan (A, B) kesimning quyi sinfi A da eng katta element mavjud emas. Yuqori sinf B da r eng kichik element bo'ladi.

1.11-misol. Kvadrati 2 dan katta bo'lgan barcha musbat ratsional sonlarni B sinfga, qolgan barcha ratsional sonlarni A sinfga kiritsak, (A, B) kesimga ega bo'lamiz.

Bu kesimda, quyi sinf A ning eng katta elementi mavjud emas, ya'ni A sinfdan har qanday r ratsional son olmaylik undan katta, A ga tegishli ratsional son har doim topiladi. Shuni isbotlaymiz.

Aytaylik, r biror musbat ratsional son va $r^2 < 2$ bo'lsin. Ma'lumki, ixtiyoriy n natural son uchun $r < r + \frac{1}{n}$ munosabat o'rinli va $r + \frac{1}{n}$ ratsional son. Shu sababli $\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ shart bajariladigan n ning mavjudligini ko'rsatish yetarli. Ravshanki

$$\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} \leq r^2 + \frac{2r + 1}{n}.$$

Shu sababli $r^2 + \frac{2r+1}{n} < 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n natural sonni topish yetarli. So'ngi tengsizlikdan $n > \frac{2r+1}{2-r^2}$ ekanligini topamiz. Shunday qilib, agar $n > \frac{2r+1}{2-r^2}$ bo'lsa, u holda $r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n} < 2$, bundan $r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} \leq r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n} < 2$ tengsizlik, ya'ni $\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ o'rinli bo'ladi.

Demak, quyi sinf A ning eng katta elementi mavjud emas.

Xuddi shu kabi mulohazalar yordamida, yuqori sinf B ning eng kichik elementi mavjud emasligi ko'rsatish mumkin (1-3 - masala).

1.12-izoh. Ratsional sonlar to'plami Q ning, quyi sinfi A da eng katta element, yuqori sinfi B da eng kichik element bor bo'lgan (A, B) kesimi mavjud emas (2-masala).

Bunday mulohazalar Q ning (A, B) kesimi uchun faqat uch turli bo'lishini ko'rsatadi.

a) Quyi sinf A da eng katta element mavjud, yuqori sinf B da eng kichik element mavjud emas. Bunday kesim *birinchi tur kesim* deyiladi.

b) Quyi sinf A da eng katta element mavjud emas, yuqori sinf B da eng kichik element mavjud. Bunday kesim *ikkinchi tur kesim* deyiladi.

c) Quyi sinf A da eng katta element mavjud emas, yuqori sinf B da eng kichik element mavjud emas. Bunday kesim *uchinchi tur kesim* deyiladi.

4-§. Haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari

1. Haqiqiy sonlar to'plami. Avvalgi paragraflarda ratsional va irratsional sonlar qanday aniqlanishi va ularning ta'riflari bilan tanishdik.

1.14-ta'rif. Ratsional sonlar to'plamining kesmi haqiqiy son deyiladi. Barcha haqiqiy sonlar to'plami R harfi bilan belgilanadi.

Birinchi yoki ikkinchi tur kesimlarni ratsional sonlar, uchinchi tur kesimni irratsional son deb ataymiz.

Yuqorida ko'rilgan 1.11-misoldagi kesim $\sqrt{2}$ irratsional sonini aniqlaydi.

Kelgusida haqiqiy sonlar to'plamining xosalarini isbotlashda tushunmovchilik oldini olish maqsadida ratsional sonni aniqlaydigan kesim yoki ratsional son deganda birinchi tur kesim tushiniladi.

(A,B) kesim x haqiqiy sonni aniqlasa, uni $x = (A, B)$ deb yozishga kelishamiz.

2. Haqiqiy sonlar to'plamining tartiblanganligi. Dastlab, haqiqiy sonlar to'plamida teng, katta va kichik tushunchalarini kiritamiz.

Aytaylik, $x = (A, B)$ va $y = (C, D)$ haqiqiy sonlar, berilgan bo'lsin.

1.15-ta'rif. Agar A=C bo'lsa, $x = y$; agar $A \subset C$ va $A \neq C$ bo'lsa, $x < y$; agar $A \supset C$ va $A \neq C$ bo'lsa, $x > y$ deyiladi.

Ratsional sonlar to'plamidagi kabi ushbu xossalar (Haqiqiy sonlar to'plamining tartiblanganlik xossasi) o'rinli:

1.16-xossa. Ixtiyoriy x va y haqiqiy sonlar uchun $x = y, x < y, x > y$ munosabatlardan faqat bittasi o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ $x = (A, B), y = (C, D)$ bo'lsin. Agar $A = C$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra $x = y$ bo'ladi. Agar $A \neq C, A \subset C$ bo'lsa, $x < y$ boladi. Agar $A \neq C, A \supset C$ bo'lsa, $x > y$ boladi ♦.

1.17-xossa. Agar $x < y$ va $y < z$ bo'lsa, $x < z$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Haqiqtan ham, $x = (A, B), y = (C, D)$ va $z = (E, F)$ bo'lsin. U holda shartga ko'ra, $x < y$ dan $A \subset C$ (1), $y < z$ dan $C \subset E$ (2) kelib chiqadi. (1) va (2) dan $A \subset E$, bundan $x < z$ kelib chiqadi ♦.

3. Haqiqiy sonlar to'plamining zichligi. Haqiqiy sonlar to'plamida ratsional sonlar to'plamidadagi kabi quyidagi xossa o'rinli.

1.18-teorema. Bir-biridan farqli ixtiyoriy ikki haqiqiy x va y sonlari orasida, kamida bitta haqiqiy, xususan ratsional son mavjud.

Isbot. ◊ Aytaylik, $x<y$ bo'lsin. Agar x va y larning ikkalasi ham ratsional son bo'lsa, u holda ratsional sonlar to'plamining zichlik xosasiga ko'ra ular orasida kamida bitta ratsional son mavjud.

Agar x ratsional son, y irratsional son bo'lsa, u holda y ni aniqlovchi (A,B) 3-tur kesim mavjud bo'lib, $x<y$ ekanligidan $x\in A$ bo'ladi. Quyi sinf A da eng katta element mavjud bo'lmaganligi sababli x dan katta $r\in A$ ratsional son mavjud: $x<r<y$.

Shuningdek, x irratsional son va y ratsional son bo'lgan hol yuqoridagiga o'xshash isbotlanadi.

Agar x va y larning ikkalasi ham irratsional son bo'lsa, u holda x ni aniqlovchi (A,B), y ni aniqlovchi (C,D) 3-tur kesimlar mavjud bo'lib, $x<y$ ekanligidan $A\subset C$ va $A\neq C$ bo'ladi. Bundan esa C da A ga tegishli bo'lmagan r ratsional son borligi kelib chiqadi: $x<r<y$ ♦.

4. Haqiqiy sonlarni o'nli kasrlar bilan ifodalash. Aytaylik, bizga α irratsional son berilgan bo'lsin. U holda shunday c_0 butun son mavjud bo'lib, α son $c_0$va $c_0 + 1$ lar orasida yotadi. Endi, $[c_0; c_0 + 1]$ kesmani teng 10 ta bo'lakka bo'lamiz. α shu bo'lakchalardan biriga ichki nuqta bo'ladi. Masalan, uchlari c_0, α_1 va $c_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}$, ($\alpha_1 - 0, 1, 2, \ldots, 9$ raqamlardan biri) bo'lgan kesmaning ichki nuqtasi bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ raqamlarni aniqlagandan so'ng α_n raqamni quyidagi qo'shtensizlikni qanoatlandiradigan qilib aniqlaymiz:

$$c_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n < \alpha < c_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n} \qquad (1)$$

Shunday qilib, α irratsional sonning o'nlik yaqinlashishlarini topish jarayonida c_0 butun sonni va $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ raqamlar ketma-ketligini hosil qildik. Ulardan tuzilgan $c_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ simvol *cheksiz o'nlik kasr* deb ataladi va uni α irratsional sonning ifodasi deb qarashimiz mumkin.

α butun yoki cekli o'nli kasr bo'lganda ham yuqoridagi kabi c_0 butun sonni va $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ raqamlarni (1) ga nisbatan umumiyroq bo'lgan

$$c_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \le \alpha \le c_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n} \qquad (2)$$

munosabatlardan aniqlash mumkin.

Bu holda biror qadamdan so'ng α uni o'z ichiga olgan oraliqning uchlaridan biriga teng bo'lib qoladi. Oraliqning qaysi uchiga teng bo'lib qolishi bizning ixtiyorimizda bo'ladi. Shu qadamdan boshlab (2) da o'ng yoki chap tomonida tenglik bajariladi. Chap (o'ng) tomonida tenglik bajarilsa, navbatdagi barcha raqamlar 0 (9) bo'ladi. shunday qilib, bu holda α ikki xil ifodaga ega bo'ladi: biri-davrida 0 bo'lgan cheksiz o'nlik kasr, ikkinchisi-davrida 9 bo'lgan cheksiz o'nlik kasr. Masalan, $2{,}017 = 2{,}017000\dots = 2{,}016999\dots$.

Shunday qilib ixtiyoriy α haqiqiy sonni cheksiz o'nlik kasr ko'rinishda ifodalash mumkin.

Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli (1-13-masala).

Kelgusida haqiqiy son deganda cheksiz o'nlik kasrni tasavvur qilishimizga bo'ladi. Chekli yoki davriy cheksiz o'nlik kasr ratsional sonni, nodavriy cheksiz o'nlik kasr irratsional sonni ifodalaydi.

5. Haqiqiy sonlar to'plamining uzluksizligi. Ratsional sonlar to'plami Q da kiritilgan kesim tushunchasini haqiqiy sonlar to'plami R da ko'ramiz.

1.19-ta'rif. Haqiqiy sonlar to'plami R qandaydir usulda X va Y to'plamlarga ajratilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa, bu ajratish R ning *kesimi* deyiladi: 1) $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$; 2) $X \cup Y = R$; 3) X to'plamdan olingan ixtiyoriy x haqiqiy son Y to'plamdan olingan ixtiyoriy y dan kichik.

Xuddi ratsional sonlar to'plamidagi kabi, kesimni (X, Y) ko'rinishda belgilanadi va X to'plam kesimning *quyi sinfi*, Y to'plam esa kesimning *yuqori sinfi* deyiladi.

Ratsional sonlar to'plami Q ning kesimi faqat uch turda bo'lishini bilamiz. Tabiiy savol tug'iladi: haqiqiy sonlar to'plami R da kesim necha xil bo'lishi mumkin?

Quyidagi teorema shu savolga javob beradi.

1.20-teorema (Dedekind teoremasi). Haqiqiy sonlar to'plami R ning ixtiyoriy (X, Y) kesimi uchun quyidagi ikki holdan faqat biri o'rinli bo'ladi:

1) Quyi sinf X da eng katta element mavjud, yuqori sinf Y da eng kichik element mavjud emas;

2) Quyi sinf X da eng katta element mavjud emas, yuqori sinf Y da eng kichik element mavjud.

Isbot. ◊ Aytaylik, R da biror (X, Y) kesim berilgan bo'lsin. Quyi sinf X dagi barcha ratsional sonlar to'plamini A, yuqori sinf Y dagi barcha ratsional sonlar to'plamini B orqali belgilaylik. U holda bu A va B to'plamlar ratsional sonlar to'plami Q da kesim hosil qilishini bilamiz.

Ma'lumki, (A, B) kesim biror a sonni aniqlaydi. Bu son X yoki Y larning biriga tegishli bo'ladi.

Agar $a \in X$ bo'lsa, u holda a son X to'plamning eng katta elementi ekanini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, a son X ning eng katta elementi bo'lmasin. U holda X da a dan katta bo'lgan biror a_0 sonni olamiz. Haqiqiy sonlar to'plamining zichlik xossasiga ko'ra $a<r<a_0$ shartni qanoatlantiruvchi r ratsional son mavjud. Endi $r < a_0$, $a_0 \in X$ dan $r \in X$, shuningdek $a<r$ bo'lganligi uchun, (A, B) kesim xossasiga ko'ra $r \in B$, ya'ni $r \in Y$ kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi. Demak, a son X ning eng katta elementi bo'ladi.

Agar $a \in Y$ bo'lsa, u holda a son Y to'plamning eng kichik elementi ekanligi yuqoridagi kabi ko'rsatiladi♦ .

Bu teoremadan, haqiqiy sonlar to'plamida 3-tur kesim mavjud bo'lmasligi kelib chiqadi. Mana shu xususiyatni haqiqiy sonlar to'plamining *uzluksizlik xossasi* deyiladi.

Demak, haqiqiy sonlar to'plami R da hosil qilingan har bir kesim faqat bitta haqiqiy sonni aniqlaydi.

5-§. Haqiqiy sonlarni sonlar o'qida tasvirlash

Ratsional sonlarni sonlar o'qidagi nuqtalar orqali tasvirlash bilan 2-§ da tanishib o'tgan edik. Bu paragrafda irratsional sonlarni sonlar o'qida tasvirlash mumkinligini ko'rib chiqamiz.

Quyidagi tasdiqlar o'rinli deb olamiz.

1) To'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami tartiblangan, ya'ni to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy ikki c va d nuqtalardan biri ikkinchisidan chapda yotadi. Shuningdek, agar c nuqta d nuqtadan, d nuqta e nuqtadan chapda yotsa, u holda c nuqta e nuqtadan chapda yotadi.

2) Bir-biridan farqli ixtiyoriy ikki c va d nuqtalar orasida, kamida bitta "ratsional" nuqta mavjud.

3) To'g'ri chiziqning barcha nuqtalari to'plamida qurilgan ixtiyoriy (X', Y') kesim uchun X' sinfning eng o'ng nuqtasi yoki Y' sinfning eng chap nuqtasi mavjud. (Bu tasdiqni to'g'ri chiziqning *uzluksizlik aksiomasi* deyiladi).

4) To'g'ri chiziqda eng chap va eng o'ng nuqta mavjud emas.

Har bir ratsional songa, to'g'ri chiziqda ratsional nuqta mos kelishini 2-§ da ko'rsatgan edik. Endi irratsional songa, to'g'ri chiziqdagi ratsional bo'lmagan nuqta mos kelishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, x irratsional son va (A, B) uni aniqlovchi kesim bo'lsin. Agar quyi sinf A dagi ratsional sonlarga mos keladigan "ratsional" nuqtalarni A' sinfga, yuqori sinf B dagi ratsional sonlarga mos keladigan "ratsional" nuqtalarni B' sinfga kiritsak, u holda to'g'ri chiziqning ratsional nuqtalari to'plamida (A', B') kesim hosil bo'ladi.

Endi to'g'ri chiziqdagi barcha nuqtalarni X' va Y' sinflarga quyidagicha ajratamiz:

A' ning hech bo'lmaganda bitta nuqtasidan chaproqda joylashgan nuqtalarni X' sinfga, qolgan nuqtalarni Y' sinfga kiritiladi. Natijada to'g'ri chiziq nuqtalari to'plamida (X', Y') kesim hosil bo'ladi.

To'g'ri chiziqning uzluksizlik aksiomasiga ko'ra (X', Y') kesim biror $M(x)$ nuqtani aniqlaydi. Bu nuqta X' da eng o'ng nuqta yoki Y' da eng chap nuqta bo'ladi. Bu nuqta "ratsional" nuqta bo'la olmaydi. Shu $M(x)$ nuqtani x irratsional songa mos qo'yamiz. Xuddi shu kabi, to'g'ri chiziqdagi har bir "ratsional" bo'lmagan nuqtaga bitta irratsional son mos kelishini yuqoridagiga o'xshash mulohazalar yordamida ko'rsatiladi.

Shunday qilib, har bir haqiqiy songa to'g'ri chiziqdagi bitta nuqta va to'g'ri chiziqdagi har bir nuqtaga bitta haqiqiy son mos keladi. Shu sababli, haqiqiy son deganda son o'qidagi nuqtani, sonlar o'qidagi nuqta deganda haqiqiy sonni tushunish mumkin.

6-§. Haqiqiy sonning absolyut qiymati va uning xossalari

Haqiqiy sonning absolyut qiymati (moduli) tushunchasi, muhim tushunchalardan biri hisoblanadi.

Aytaylik, a biror haqiqiy son bo'lsin.

1.21-ta'rif. Agar $a \geq 0$ bo'lsa, uning *absolyut qiymati* deb, a sonning o'ziga, agar $a < 0$ bo'lsa, $-a$ songa aytiladi.

Odatda a sonning absolyut qiymati $|a|$ kabi belgilanadi. Demak,

$$|a| = \begin{cases} a, & agar\ a \geq 0\ bo'lsa, \\ -a, & agar\ a < 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

Masalan, $|4| = 4$, $|-2{,}5| = 2{,}5$, $\left|\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2} - 1$, $|1 - \sqrt{2}\,| = \sqrt{2} - 1$.

1.22-ta'rif. Aytaylik, $x, y \in R$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Ushbu $|x - y|$ son shu nuqtalar orasidagi *masofa* deyiladi.

Demak, haqiqiy sonning absolut qiymatining geometrik ma'nosi sonlar o'qida sanoq boshidan shu songa mos keluvchi nuqtagacha bo'lgan masofadan, ya'ni 0 dan berilgan songacha bo'lgan masofadan iborat.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati xossalari 24-30-masalalarda berilgan.

7-§. Sonlar o'qidagi sodda to'plamlar

Elementlari sonlardan iborat to'plamlar *sonli to'plamlar* deyiladi. Biz, asosan sonli to'plamlar bilan ish ko'ramiz. Shu sababli, kelgusida, to'plam deganda sonli to'plamni tushuniladi. Matematikada ko'p uchraydigan sodda to'plamlarni ajratamiz.

Aytaylik, $a, b \in R$ va $a < b$ bo'lsin.

1.23-ta'rif. *a*) Ushbu $a \leq x \leq b$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha sonlar to'plami *segment* yoki *kesma* deyiladi va $[a; b]$ orqali belgilanadi:

$$[a; b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}.$$

b) Ushbu $a < x < b$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha sonlar to'plami *interval* yoki *ochiq oraliq* deyiladi va $(a; b)$ orqali belgilanadi:

$$(a; b) = \{x \in R : a < x < b\}.$$

c) Ushbu $a \leq x < b$ yoki $a < x \leq b$ qo'sh tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha sonlar to'plami *yarim segment* deyiladi va mos ravishda $[a; b)$ yoki $(a; b]$ orqali belgilanadi:

$$[a; b) = \{ x \in R : a \leq x < b \}, (a; b] = \{ x \in R : a < x \leq b \}.$$

Kiritilgan bu, to'rt xil to'plamlarni bir so'z bilan *oraliqlar* deyiladi. Demak, oraliq deganda segment, interval, yarim segmentlardan biri tushuniladi. Odatda a va b sonlar shu oraliqlarning chegaraviy nuqtalari yoki chegaralari deyiladi.

Intervallar va yarim segmentlar orasida chegaraviy nuqtalari cheksiz bo'lganlari ham uchraydi.

Masalan, $(-\infty; +\infty) = R$, $[a; +\infty) = \{ x \in R : x \geq a \}$,

$(a; +\infty) = \{ x \in R : x > a \}$, $(-\infty; b] = \{ x \in R : x \leq b \}$,

$$(-\infty; b) = \{ x \in R : x < b \}.$$

8-§. Chegaralangan va chegaralanmagan to'plamlar

1. Yuqoridan chegaralangan to'plam. Aytaylik, $E \subset R$ bo'sh bo'lmagan to'plam berilgan bo'lsin.

1.24-ta'rif. Agar shunday b son topilib ixtiyoriy $x \in E$ uchun $x \leq b$ tengsizlik bajarilsa, u holda E to'plam *yuqoridan chegaralangan*, b uning *yuqori chegarasi* deyiladi.

Masalan, $E_1 = (-\infty; 0)$, barcha manfiy sonlar to'plami yuqoridan chegaralangan. Bu to'plam uchun 0 va ixtiyoriy musbat son yuqori chegara bo'ladi.

$E_2 = \{. . .-3,-2,-1, 0, 1, 2 \}$ to'plam ham yuqoridan chegaralangan. Bu to'plam uchun 2 soni va undan katta har bir son yuqori chegara bo'ladi.

Keltirilgan misollardan ko'rinadiki, yuqoridan chegaralangan to'plamning yuqori chegarasi cheksiz ko'p bo'lar ekan.

Agar 24-ta'rif shartini qanoatlantiruvchi b soni topilmasa, u holda E to'plam *yuqoridan chegaralanmagan* deyiladi.

Masalan, $E_3 = N = \{ 1, 2, 3, . . . , n, . . . \}$ to'plam yuqoridan chegaralanmagan. Qanday b son olmaylik undan katta n_0 natural son mavjud: $b < n_0$. (n_0 sifatida b sonining butun qismidan keyingi sonni olish yetarli).

Yuqoridan chegaralangan to'plamning yuqori chegaralari orasida eng kichigi mavjudmi?-degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

1.25-teorema. Yuqoridan chegaralangan to'plamning yuqori chegaralari orasida eng kichigi mavjud.

Isbot. ◊ Aytaylik, E yuqoridan chegaralangan to'plam bo'lsin. Ikki holni ko'rib chiqamiz.

a) E to'plam elementlari orasida eng kattasi mavjud, ya'ni shunday $x_0 \in E$ son borki, ixtiyoriy $x \in E$ lar uchun $x \leq x_0$ bo'ladi. Demak, x_0 son E to'plamning yuqori chegarasi bo'lib E ning boshqa ixtiyoriy b chegarasidan katta bo'lmaydi: $x_0 \leq b$.

Bulardan x_0 son E to'plamning eng kichik yuqori chegarasi ekanligi kelib chiqadi.

b) E to'plam elementlari orasida eng kattasi mavjud bo'lmasin. U holda haqiqiy sonlar to'plami **R** ni, quyidagicha X va Y to'plamlarga ajratamiz: E to'plamning barcha yuqori chegaralari to'plamini Y orqali, **R** dagi qolgan barcha sonlar to'plamini X orqali belgilaymiz. Bunday ajratish **R** da kesim bo'ladi.

Shuni tekshiraylik:

1) $E\neq\varnothing$ va $E\subset X$ dan $X\neq\varnothing$ kelib chiqadi. Shuningdek, E yuqoridan chegaralanganligi uchun uning yuqori chegarasi bor. Demak, $Y\neq\varnothing$.

2) Har bir $x\in$ **R** son yoki E ga yuqori chegara bo'ladi, yoki E ga yuqori chegara bo'lmaydi. Demak, yoki $x\in X$, yoki $x\in Y$ bo'ladi. Bu esa $X\cup Y=$ **R** ekanini bildiradi.

3) Aytaylik, $x\in X$ va $y\in Y$ bo'lsin. U holda x son E to'plamning yuqori chegarasi bo'lmaydi, ya'ni E da x dan katta bo'lgan biror $x_0\in E$ son mavjud. $y\in Y$ son E to'plamning yuqori chegarasi bo'lganligi uchun $x<x_0<y$ bo'ladi. Bundan ixtiyoriy $x\in X$, ixtiyoriy $y\in Y$ uchun $x<y$ bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki, (X,Y) kesim aniq bitta a sonni aniqlaydi. $E\subset X$ bo'lganligi uchun a son E to'plamning yuqori chegarasi bo'ladi, ya'ni $a\in Y$. Shuningdek, a son Y ning eng kichik elementi bo'lganligi sababli, a son E to'plamning yuqori chegaralari orasida eng kichik son bo'ladi ♦.

1.26-ta'rif. Yuqoridan chegaralangan to'plam yuqori chegaralari orasida eng kichigi, uning *aniq yuqori chegarasi* deyiladi.

Aniq yuqori chegara $supE$ kabi belgilanadi.

Yuqoridagi mulohazalar shuni ko'rsatadiki, agar E to'plamning eng katta elementi mavjud bo'lsa, u holda o'sha son E to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'ladi. Umuman olganda yuqoridan chegaralangan to'plamning aniq yuqori chegarasi uning o'ziga tegishli bo'lmasligi mumkin.

Masalan, $E_4=[0;10]$ to'plamda 10 soni uning eng katta elementi va 10 soni bu to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'ladi. $E_5=(-8;1)$ to'plam uchun $supE_5=1$ bo'lib, 1 soni unga tegishli emas.

Yuqoridagi misollar uchun $supE_1=0$, $supE_2=2$ bo'lishini tekshirish qiyin emas.

Agar E to'plam yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda $supE=+\infty$ deb olinadi.

2. Quyidan chegaralangan to'plam. Aytaylik, $E\subset$R bo'sh bo'lmagan to'plam berilgan bo'lsin.

1.27-ta'rif. Agar shunday a son mavjud bo'lib ixtiyoriy $x\in E$ lar uchun $x\geq a$ tengsizlik bajarilsa, u holda E to'plam *quyidan chegaralangan*, a uning *quyi chegarasi* deyiladi.

Masalan, $[3;+\infty)$ to'plam quyidan chegaralangan. Bu to'plam uchun 3 va undan kichik ixtiyoriy son quyi chegara bo'ladi.

$\{\frac{1}{n}, n\in N\}$ to'plam ham quyidan chegaralangan. Bu to'plam uchun 0 va ixtiyoriy manfiy son quyi chegara bo'ladi.

Demak, quyidan chegaralangan to'plamning quyi chegarasi cheksiz ko'p bo'ladi. Quyidagi teorema quyidan chegaralangan to'plamlar uchun bo'lib, 1.25-teorema kabi isbotlanadi.

1.28-teorema. Quyidan chegaralangan to'plamning quyi chegaralari orasida eng kattasi mavjud.

1.29-ta'rif. Quyidan chegaralangan to'plam quyi chegaralari orasida eng kattasi, uning *aniq quyi chegarasi* deyiladi.

Aniq quyi chegara $infE$ kabi belgilanadi.

Agar 1.29-ta'rif shartini qanoatlantiruvchi a soni topilmasa, u holda E to'plam *quyidan chegaralanmagan* deyiladi.

Masalan, E_1 va E_2 to'plamlar quyidan chegaralanmagan.

Agar E to'plam quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u holda $infE=-\infty$ deb olinadi.

1.30-ta'rif. Ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan to'plam *chegaralangan* to'plam deyiladi.

Masalan, $\{\frac{1}{n}, n\in N\}$ -barcha to'g'ri kasrlar to'plami, chegaralangan to'plam bo'ladi. Bu to'plam uchun $inf\{\frac{1}{n}, n\in N\}=0$, $sup\{\frac{1}{n}, n\in N\}=1$.

Aytaylik, E chegaralangan to'plam bo'lsin. Agar $infE=c$, $supE=d$ belgilash kiritsak, u holda $[c;d]$ segment, E to'plamni o'z ichiga oluvchi eng kichik segment bo'ladi.

Mashq va masalalar

1-1. 3-xossani isbotlang.

1-2. 4-xossani isbotlang.

1-3. 1.11-misoldadagi (A,B) kesimning yuqori sinfi B da eng kichik elementi yo'q ekanligini isbotlang.

1-4. Ratsional sonlar to'plami Q ning, quyi sinfi A da eng katta element, yuqori sinfi B da eng kichik element bor bo'lgan (A, B) kesimi mavjud emas ekanligini isbotlang.

1-5. Quyidagi sonlarni aniqlaydigan ratsional sonlar to'plamidagi kesimlarni tuzing: a) -2, b) 6/7, c) $\sqrt{3}$.

1-6. Agar p tub son bo'lsa, u holda $\sqrt{p}$ irratsional son ekanligini isbotlang.

1-7. Agar n hech bir sonning kvadratiga teng bo'lmasa, u holda $\sqrt{n}$ irratsional son ekanligini isbotlang.

1-8. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ning irratsional son ekanligini isbotlang.

1-9. $\log_2 3$ ning irratsional son ekanligini isbotlang.

1-10. Ratsional va irratsional sonlarning yig'indisi irratsional son ekanligini isbotlang.

1-11. Ikkita irratsional sonning yig'indisi irratsional son bo'ladimi? a, b ratsional sonlar va $a < b$ bo'lsin. U holda ular orasida kamida bitta irratsional sonning mavjudligini isbotlang.

1-12. Aytaylik α va β haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy ε musbat son uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi s', s ratsional sonlar topilsa: 1) $s \le \alpha \le s'$; 2) $s \le \beta \le s'$; 3) $s' - s < \varepsilon$, u holda $\alpha = \beta$ bo'lishini isbotlang.

1-13. $c_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ cheksiz o'nlik kasr biror α haqiqiy sonning ifodasi bo'lishini isbotlang.

1-14. Haqiqiy sonlar to'plamida Arximed aksiomasi o'rinli ekanligini isbotlang.

1-15. 1.28 teoremani isbotlang.

1-16. Quyidagi teoremani isbotlang. $a = supE$ bo'lishi uchun quyidagi ikki shartning bajarilishi zarur va yetarli: 1) ixtiyoriy $x \in E$ uchun $x \le a$; 2) ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday $x' \in E$ topilib, $x' \ge a - \varepsilon$ bo'ladi.

1-17. X to'plam uchun $\inf X, \sup X$ ni toping, bu yerda

a) $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$; b) $X = \left\{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \dots, 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right\}$;

c) $X = \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n},\ n \in N\right\}$.

1-18. X to'g'ri kasrlar to'plami, ya'ni $X = \left\{\frac{p}{q},\ p < q,\ p, q \in N\right\}$ bo'lsin. Bu to'plamning chegaralanganligini, eng katta, eng kichik elementlari yo'q ekanligini isbotlang. $\inf X, \sup X$ ni toping.

1-19. Aytaylik, X, Y haqiqiy sonlarning bo'sh bo'lmagan chegaralangan to'plamlari, $X + Y$ esa barcha $x + y$, bu yerda $x \in X, y \in Y$, ko'rinishdagi sonlar to'plami bo'lsin. $X + Y$ chegaralangan to'plam va $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$; $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ ekanligini isbotlang.

1-20. Aytaylik, X, Y nomanfiy haqiqiy sonlarning bo'sh bo'lmagan chegaralangan to'plamlari, $X \cdot Y$ esa barcha $x \cdot y$, bu yerda $x \in X, y \in Y$, ko'rinishdagi sonlar to'plami bo'lsin. $X + Y$ chegaralangan to'plam va $\inf(X \cdot Y) = \inf X \cdot \inf Y$; $\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y$ ekanligini isbotlang.

1-21. Aytaylik, X, Y haqiqiy sonlarning bo'sh bo'lmagan chegaralangan to'plamlari, $X - Y$ esa barcha $x - y$, bu yerda $x \in X, y \in Y$, ko'rinishdagi sonlar to'plami bo'lsin. $X - Y$ chegaralangan to'plam bo'ladimi? Bu to'plamning aniq quyi, aniq yuqori chegaralari haqida nima deyish mumkin?

1-22. Aytaylik, X haqiqiy sonlarning bo'sh bo'lmagan chegaralangan to'plami, $-X$ esa barcha $-x$, bu yerda $x \in X$, ko'rinishdagi sonlar to'plami bo'lsin. $-X$ chegaralangan to'plam bo'ladimi? Bu to'plamning aniq quyi, aniq yuqori chegaralari haqida nima deyish mumkin?

1-23. Aytaylik, X, Y haqiqiy sonlarning bo'sh bo'lmagan to'plamlari bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

a) ixtiyoriy $x \in X$, ixtiyoriy $y \in Y$ uchun $x \leq y$ tengsizlik o'rinli;

b) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$ bo'ladigan $x_\varepsilon \in X, y_\varepsilon \in Y$ mavjud.

$\sup X = \inf X$ ekanligini ko'rsating.

1-24.Ixtiyoriy $x \in R$ uchun $|x| = |-x|$ va $-|x| \leq x \leq |x|$ bo'ladi. Isbotlang.

1-25.Ixtiyoriy $a>0$ uchun $|x|<a$ va $-a<x<a$ ($|x| \leq a$ va $-a \leq x \leq a$) tengsizliklar o'zaro teng kuchli bo'ladi. Isbotlang.

1-26.Ikki son yig'indisining absolyut qiymati va shu sonlar absolyut qiymatlari yig'indisi uchun $|x+y| \leq |x|+|y|$ munosabat o'rinli. Isbotlang.

1-27.Isbotlangan xossa qo'shiluvchilarning soni ikkitadan ortiq bo'lgan holda ham o'rinli: $|x_1+x_2+ \ldots +x_n| \leq |x_1|+|x_2|+ \ldots +|x_n|$. Isbotlang.

1-28.Ikki son ayirmasining absolyut qiymati va shu sonlar absolyut qiymatlari ayirmasi uchun $|x|-|y| \leq |x-y|$ munosabat o'rinli. Isbotlang.

1-29.Ixtiyoriy $x, y \in$ R lar uchun $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ bo'ladi. Isbotlang.

1-30. Ixtiyoriy $x, y \in R$ va $y \neq 0$ uchun $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ bo'ladi. Isbotlang.

1-31. Agar $|b| < \frac{|a|}{2}$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{|b-a|} < \frac{2}{|a|}$ ekanligini isbotlang.

1-32. Barcha $n \in$ N va ixtiyoriy $a>-1$ lar uchun $(1+a)^n \geq 1 + na$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Isbotlang.

II BOB. HAQIQIY SONLAR KETMA-KETLIGI

1-§. Ketma-ketliklar haqida umumiy tushunchalar

1. Ketma-ketlikning ta'rifi. Ketma-ketliklarning berilish usullari

2.1-ta'rif. Har bir natural son n ($n \in N$) ga biror qoida bo'yicha x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin. U holda

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

sonli ketma-ketlik berilgan deyiladi va bu ketma-ketlik $\{x_n\}$ ko'rinishida belgilanadi.

x_1, x_2, x_n sonlar, mos ravishda, (1) ketma-ketlikning birinchi hadi, ikkinchi hadi va n-hadi deyiladi.

x_n ketma-ketlikning *umumiy hadi* deb ataladi.

Sonli ketma-ketliklar turli xil usullarda beriladi. Shu usullardan ayrimlarini keltiramiz.

1. Ketma-ketlikning *umumiy had formulasi* bilan berilishi. Bu usulda n-hadning qiymatini shu hadning tartib nomeri bilan bog'lovchi formula beriladi. Umumiy had formulasi yordamida ketma-ketlikning istalgan hadini topish mumkin, ya'ni bu formula ketma-ketlikni to'la aniqlaydi.

2.2-misol. Umumiy hadi $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ bo'lgan ketma-ketlikning dastlabki to'rtta hadini yozing.

Yechish. Umumiy hadi $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ bo'yicha sonli ketma-ketlikning dastlabki hadlarini topish uchun unga tartib bilan $n = 1;\ 2;\ 3;\ 4$ qo'yamiz. Natijada quyidagi hosil bo'ladi: $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}$.

2. Ketma-ketlik *o'z hadining tartib nomeri* bilan shu hadning qiymati orasidagi moslikni so'zlar orqali ifodalash yordamida berilishi mumkin. Masalan, har bir toq natural songa 3 ni, har bir juft natural songa esa 5 ni mos keltiramiz.

Natijada 3, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5, . . . cheksiz sonli ketma-ketlikka ega bo'lamiz. Uning umumiy hadini bir nechta formula bilan, masalan $x_n = 4 + (-1)^n$ yoki $x_n = 4 + cos\pi n$ formula bilan berish mumkin.

3. Ketma-ketlikning *rekurrent* usulda berilishi. Agar ketma-ketlikning dastlabki bitta yoki bir nechta hadlari berilgan bo'lib, keyingi hadlarini shu berilgan hadlar yordamida topish imkonini beruvchi formula (rekurrent formula) ko'rsatilgan bo'lsa, ketma-katlik rekurrent usulda berilgan deyiladi. (Rekurrent so'zi lotin tilida qaytish degan ma'noni beradi)

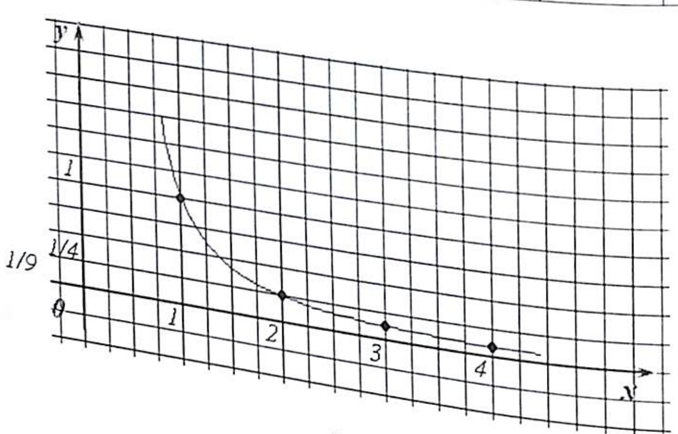
2.3-misol. $a_1=3$, $a_n=2^n \cdot a_{n-1}-4$ $(n\geq 2)$ bo'lsa. $\{a_n\}$ ketma-ketlikning a_2, a_3, a_4 hadlarini toping.

Yechish. Bu yerda $\{a_n\}$ ketma-ketlik rekurrent usulda berilgan. $a_1=3$ bo'lgani uchun rekurrent formula $a_n=2^n \cdot a_{n-1}-4$ ga asosan $a_2=2^2 \cdot a_1-4=4 \cdot 3-4=8$; $a_3=2^3 \cdot a_2-4=8 \cdot 8-4=60$; $a_4=2^4 \cdot a_3-4=16 \cdot 60-4=956$ ekanligini topamiz.

4. Ketma-ketlik jadval yoki grafik ko'rinishida berilishi ham mumkin. Ketma-ketlikning grafigi diskret nuqtalar to'plamidan (5-rasm) iborat bo'ladi (lotincha – *discretus* – uzlukli, alohida qismlardan iborat).

Quyida birinchi misoldagi ketma-ketlikning jadval usilida va grafik usulida berilishini keltiramiz.

n	1	2	3	4	...	n	...
x_n	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{16}$	...	$\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$	...



5-rasm

2.4-izoh. Agar ketma-ketlikning dastlabki bir nechta hadlari berilgan bo'lib, keyingi hadlarni berilgan hadlar orqali ifodalash usuli aytilmagan bo'lsa, bu hadlarning berilishi ketma-ketlikning to'liq aniqlanishi uchun yetarli bo'lmaydi. Masalan, 3; 5; 7; . . . ketma-ketlikni 2 dan katta toq sonlar yoki 2 dan katta tub sonlar ketma-ketligi sifatida, shuningdek, $x_n=2n+1+\sin \pi n$ formula bilan berilgan ketma-ketlik sifatida ham qarash mumkin.

2. Chegaralangan ketma-ketliklar. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2.5-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday bir a haqiqiy son topilib, barcha n natural sonlar uchun $x_n\geq a$, $(x_n\leq a)$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *quyidan (yuqoridan) chegaralangan* deyiladi.

2.6-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun ikkita a va b haqiqiy sonlar topilib, barcha n natural sonlarda $a\leq x_n\leq b$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *chegaralangan* ketma-ketlik deyiladi.

2.7-misol. $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

Yechish. Barcha n natural sonlar uchun quyidagi tengsizliklar o'rinli:

$$x_n=\frac{n-1}{n+1}\geq\frac{n-n}{n+1}=0; \quad x_n=\frac{n-1}{n+1}\leq\frac{n+1}{n+1}=1.$$

Demak, $0\leq x_n\leq 1$ tengsizlik barcha n natural sonlarda o'rinli. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini ko'satadi.

2.8-teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lishi uchun shunday M musbat son topilib, barcha n natural sonlar uchun $|x_n|<M$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. ◊ *Zaruriyligi*. $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsin. U holda a va b haqiqiy sonlar topilib barcha n natural sonlar uchun $a\leq x_n\leq b$ tengsizlik bajariladi. $M=\max(|a|,|b|)$ deb olsak, u holda barcha n natural sonlar uchun $-M\leq x_n\leq M$ yoki $|x_n|<M$ bajariladi.

Yetariligi. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun M musbat son topilib, barcha n natural sonlar uchun $|x_n|<M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ chegaralangan

ketma-ketlik bo'ladi. Buni isbotlash uchun chegaralangan ketma-ketlikning 2.6-ta'rifida $a=-M$, $b=M$ deb olish yetarli. ♦

2.9-misol. $\{x_n\} = (-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1}$ ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

Yechish. 2.8-teoremadan foydalanamiz. $|x_n| = \left|(-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1}\right| \leq |(-1)^n| + \left|\frac{n^2}{n^2+1}\right| = 1 + \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1 + \frac{n^2}{n^2} = 2$ munosabatlardan ko'rinadiki, barcha n natural sonlarda $|x_n| \leq 2$ tengsizlik o'rinli. Demak, $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik ekan.

Geometrik nuqtayi nazardan $a \leq x_n \leq b$ tengsizlik, chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik hadlari $[a, b]$ kesmaga tegishli ekanligini bildiradi. Aksincha, ketma-ketlikning barcha hadlari biror kesmaga tegishli bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari biror $[c, d]$ kesmaga tegishli bo'lsa, u holda ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x_n \in [c, d]$ bo'ladi. Bundan $c \leq x_n \leq d$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi.

2.10-ta'rif. Agar ixtiyoriy M musbat soni uchun shunday n nomer topilib, $|x_n| > M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanmagan deyiladi.

Ketma-ketlik chegaralanmaganligining geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: har qanday [-M;M] (M>0) kesma olmaylik, bu kesmaga tegishli bo'lmagan ketma-ketlikning biror hadini ko'rsatish mumkin.

2.11-misol. Umumiy hadi $x_n = 3n + 2$ bo'lgan ketma-ketlikning chegaralanmaganligini isbotlang.

Yechish. Ta'rifga ko'ra ketma-ketlikning chegaralanmaganligini ko'rsatish uchun ixtiyoriy $M > 0$ son uchun $|x_n| > M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kamida bitta x_n mavjudligini ko'rsatish yetarli. Ravshanki, agar $n = [M] + 1$ deb olsak, $|x_n| > M$ tengsizlik bajariladi. Demak, berilgan ketma-ketlik chegaralanmagan ekan.

3. Monoton ketma-ketliklar. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2.12-ta'rif. Agar ketma-ketlikning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi o'zidan oldingi haddan katta (kichik) bo'lsa, ya'ni $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$ shart barcha natural n sonlar uchun bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *o'suvchi* (*kamayuvchi*) ketma-ketlik deyiladi.

Ketma-ketlikni o'suvchi yoki kamayuvchi ekanligini aniqlashda $x_{n+1} - x_n$ ayirmani, yoki ketma-ketlik hadlari bir xil ishorali bo'lganda $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ nisbatdan foydalanish mumkin.

2.13-misol. $x_n = 3n^3$ ketma-ketlik o'suvchi ekanini isbotlang.

Yechish. $x_{n+1} - x_n$ ayirmani qaraymiz: $x_{n+1} - x_n = 3(n+1)^3 - 3n^3 = 3(3n^2 + 3n + 1)$. Bu ayirma n ning istalgan natural qiymatida musbat bo'ladi. Shu sababli, barcha n natural sonlarda $x_{n+1} > x_n$, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvshidir.

2.14-misol. Umumiy hadi $x_n = \frac{1}{n^2}$ bo'lgan ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligini isbotlang.

Isbot. Bu ketma-ketlikning hamma hadlari bir xil ishorali bo'lgani uchun $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ nisbatni baholaymiz: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$. Ketma-ketlikning barcha hadlari musbat bo'lgani uchun, barcha natural n larda $x_{n+1} < x_n$ tengsizlikka egamiz. Demak, $\{x_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlik ekan.

2.15-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$ tengsizlik barcha n natural sonlarda bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *kamaymaydigan* (*o'smaydigan*) ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; ... ketma-ketlik kamaymaydigan, $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}$; ... ketma-ketlik esa o'smaydigan ketma-ketlikdir.

Har qanday o'suvchi ketma-ketlik kamaymaydigan ketma-ketlik bo'lishini, har qanday kamayuvchi ketma-ketlik esa o'smaydigan ketma-ketlik bo'lishini eslatib o'tamiz.

O'smaydigan ketma-ketliklar va kamaymaydigan ketma-ketliklar (umumiy nom bilan) *monoton* ketma-ketliklar deb ataladi.

2.16-misol. $x_n = \frac{n+1}{2n-1}$ ketma-ketlikni monotonlikka tekshiring.

Yechish. $x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{n+1}{2n-1} = -\frac{3}{4n^2-1} < 0$ tengsizlik n ning barcha natural qiymatlarida o'rinli. Demak, ixtiyoriy n natural son uchun $x_{n+1} < x_n$ tengsizlik o'rinli. Bundan, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2.17-misol. Umumiy hadi $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ bo'lgan ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligini isbotlang.

Yechish. $n \geq 2$ deb, $\frac{x_n}{x_{n-1}}$ nisbatning 1 dan kichikligini ko'rsatish yetarli.

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) <$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^{n} < 1$$

tengsizlikdan, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bu yerda Bernulli tengsizligiga ko'ra o'rinli bo'lgan $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$ tengsizlikdan foydalandik (Bernulli tengsizligi).

Demak, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ kamayuvchi ketma-ketlik.

Mashq va masalalar

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning dastlabki to'rtta hadini yozing (1-6):

2-1. $x_n = 2^{n+1}$.

2-2. $x_n = n^2 + 2n + 3$.

2-3. $x_n = (-1)^n + 1$.

2-4. $x_n = \frac{n+1}{n^2}$

2-5. $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$

2-6. $x_1 = -1,\ x_n = -n \cdot x_{n-1}$.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning dastlabki birnechta hadlarini bilgan holda uning umumiy hadini formula yordamida bering (7-10):

2-7. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

2-8. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

2-9. $2,\ 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots$

2-10. $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

$\{x_n\}$ ketma-ketlikni chegaralanganlikka tekshiring(11-16):

2-11 $x_n = (-1)^n$.

2-12. $x_n = n^3 + 2n$.

2-13. $x_n = -\ln n$.

2-14. $x_n = \frac{n+1}{n}$

2-15. $x_n = (-1)^n \cdot n$

2-16. $x_n = \begin{cases} 1 & agar\ n = 2k \\ \sqrt{n} & agar\ n = 2k+1. \end{cases}$

2-17. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ chegaralangan ketma-kertliklar bo'lsa, u holda a) $\{x_n + y_n\}$; b) $\{x_n - y_n\}$; c) $\{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketliklarning chegaralangan ekanligini isbotlang.

2-18. Shunday ikkita chegaralangan ketma-ketlikka misol keltiringki, ularning nisbati chegaralanmagan bo'lsin.

Quyidagi ketma-ketliklarning chegaralangan ekanligini isbotlang (19-22):

2-19. $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

2-20. $x_n = \ln(n+1) - \ln n$.

2-21. $x_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$.

2-22. $x_n = \frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}, x_1 = 2, x_2 = 5$.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikni monotonlikka tekshiring (23-25).

2-23. $x_n = \sin n$.

2-24. $x_n = \frac{n}{3n-2}$.

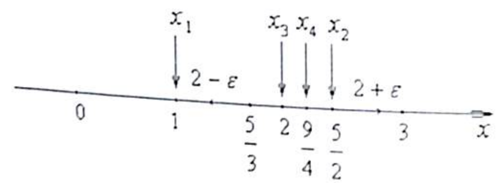
2-25. $x_n = P_{2n}$, $(n \geq 2)$ bu yerda P_{2n} – birlik doiraga ichki chizilgan muntazam $2n$-burchakning perimetri.

2-26. Rekurrent formula bilan berilgan ushbu $x_1 = 1, x_n = \frac{3}{x_{n-1}+1}$ ketma-ketlikni chegaralanganlikga, monotonlikka tekshiring.

2-§. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari

1. Ketma-ketlikning limiti. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik. Matematikaning muhim tushunchalaridan biri-limit tushunchasi bilan tanishishga kirishamiz.

Umumiy hadlari $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ va $y_n = 2n - 1$ bo'lgan ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketliklar hadlarini sonlar o'qidagi nuqtalar orqali tasvirlaylik (mos ravishda 6- va 7-rasmlar).



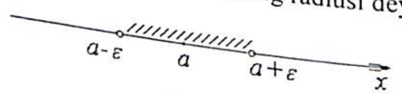
6-rasm

7-rasm

Chizmadan ko'rinadiki, birinchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik hadlari 2 nuqta atrofida "qo'yiqlashib" boradi, ikkinchi $\{y_n\}$ ketma-ketlik uchun bunday "qo'yiqlanish nuqtasi" yoq. Bunday hollarda matematiklar quyidagicha aytadilar: $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi; $\{y_n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi.

Tabbiiy savol tug'iladi: sonlar o'qidan olingan tayin nuqta berilgan ketma-ketlikning "qo'yiqlanish nuqtasi" bo'lish-bo'lmasligini qanday bilish mumkin? Bu savolga javob berish uchun yangi matematik atama kiritamiz.

2.18-ta'rif. Aytaylik a sonlar o'qidagi nuqta, ε-musbat son bo'lsin. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ interval (8-rasm) a nuqtaning ε atrofi, ε esa atrofning radiusi deyiladi.



8-rasm

Masalan, (1,98, 2,02) interval 2 nuqtaning atrofi bo'ladi, bunda atrofning radiusi 0,02 ga teng.

Endi yuqoridagi savolga javob berishimiz mumkin. Matematikada "ketma-ketlikning qo'yiqlanish nuqtasi" degan atama o'rniga "ketma-ketlikning limiti" atamasi ishlatiladi.

2.19-ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy tanlangan atrofida ketma-ketlikning biror nomeridan boshlab barcha hadlari yotsa, a soni ketma-ketlikning limiti deyiladi.

a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti ekanligi simvolik ravishda $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ko'rinishda yoziladi (o'qilishi: $\{x_n\}$ ketma-ketlikning n cheksizga intilgandagi limiti a ga teng), bu yerda *lim* lotincha *limes* so'zining oldingi uchta harfi bo'lib, o'zbekcha *marra, chek* ma'nosini bildiradi.

Yuqorida aytilganlardan, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik limiti a ga teng bo'lsa, u holda a nuqtaning ε atrofidan tashqarida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning faqat chekli sondagi hadlari bo'lishi mumkinligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi ta'rifni tahlil qilamiz. Aytaylik $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsin. $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$ intervalni, ya'ni a nuqtaning ε_1 atrofini qaraylik. Ta'rifga ko'ra shunday n_1 nomer mavjudki, bu nomerdan boshlab ketma-ketlikning barcha hadlari a nuqtaning ε_1 atrofida yotadi: $x_{n_1} \in (a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$, $x_{n_1+1} \in (a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$, $x_{n_1+2} \in (a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$, ...

Agar $(a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2)$ intervalni, bu yerda $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$, olsak, ya'ni atrofning radiusini kichiraytirsak nima bo'ladi? Bu holda ham shunday n_2 nomer mavjudki, bu nomerdan boshlab ketma-ketlikning barcha hadlari a nuqtaning ε_2 atrofida yotadi. Ammo bu nomer avvalgidan katta, ya'ni $n_2>n_1$ bo'ladi. Har bir atrof uchun o'zining nomeri mavjud bo'ladi.

Agar $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ bo'lsa, u holda

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ bo'ladi. Yuqorida aytilganlarni e'tiborga olib 2.19-ta'rifni quyidagicha bayon qilish mumkin.

2.20-ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat ε son uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsaki, barcha $n > n_0$ da

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lsa, bunday ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning hamma hadlari bir xil a songa teng, ya'ni umumiy hadi $x_n = a$ bo'lgan

$$a,\ a,\ a,\ a,\ \dots,\ a,\ \dots$$

ketma-ketlikni tekshiraylik. Bu ketma-ketlikning limiti o'zining a umumiy hadiga teng, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$, chunki ixtiyoriy musbat (kichik) ε son uchun n nomerning barcha qiymatlarida $|x_n - a| = |a - a| < \varepsilon$ tengsizlik hamma vaqt bajarilaveradi. n_0 nomer sifatida istalgan natural sonni olish mumkin va n_0 nomer ε songa bog'liq bo'lmaydi. Shunday qilib, o'zgarmas ketma-ketlikning limiti shu ketma-ketlikning hadiga teng.

Shunga o'xshash $\{x_n\}$ ketma-ketlikning dastlabki bir nechta hadi turlicha qiymatlarni qabul qilib, keyingi hamma hadlari bir xil a songa teng bo'lganda ham ketma-ketlikning limiti a ga teng bo'ladi. Masalan,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3, 3, 3, 3, \dots, 3, \dots$$

ketma-ketlikning limiti 3 ga teng, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$ bo'ladi, chunki ixtiyoriy ε musbat soni uchun $n > n_0 = 3$ bo'lganda $|x_n - 3| = |3 - 3| < \varepsilon$ tengsizlik hamma vaqt bajariladi.

Endi limit tushunchasining geometrik ma'nosini aniqlaymiz.

Yuqorida aytilganlardan, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik limiti a ga teng bo'lsa, u holda a nuqtaning ε atrofidan tashqarida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning faqat chekli sondagi hadlari bo'lishi mumkinligi kelib chiqadi.

2.21-misol. Umumiy hadi $x_n = \frac{n}{n+2}$ bo'lgan ketma-ketlikning 1 ga yaqinlashishini isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun ixtiyoriy olingan musbat (kichik) ε songa ko'ra shunday n_0 nomerni topish mumkinki, $n > n_0$ bo'lganda $|x_n - 1| < \left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishini ko'rsatish yetarli.

Buning uchun dastlab $\frac{n}{n+2} - 1$ ayirmaning absolyut qiymatini topamiz:

$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \frac{2}{n+2}$. Endi $\frac{2}{n+2} < \varepsilon$ tengsizlikni n ga nisbatan yechamiz: $n > \frac{2}{\varepsilon} - 2$.

Bundan $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 2\right]$ deb olish mumkin, chunki $n > \frac{2}{\varepsilon} - 2 \geq \left[\frac{2}{\varepsilon} - 2\right] = n_0$.

Shunday qilib, ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 2\right]$ nomer topilib, $n > n_0$ bo'lganda $|x_n - 1| < \left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$.

Agar $\left[\frac{2}{\varepsilon} - 2\right] \leq 0$ bo'lsa, $n_0 = 1$ deb olish yetarli.

Shunday qilib, berilgan sonning ketma – ketlik limiti ekanligini isbotlash uchun quyidagi harakatlarni bajarish kerak:

1) $|x_n - a|$ ayirmani tuzish;

2) $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni n ga nisbatan yechish;

3) kerak bo'lsa, tengsizlikni baholashdan foydalanish;

4) tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror natural n_0 sonni topish;

5) topilgan uchun ketma – ketlik limiti ta'rifining bajarilishini ko'rsatish.

Limitga ega bo'lmagan ketma-ketlik *uzoqlashuvchi* deyiladi.

Bu degani har qanday a son olsak ham shunday $\varepsilon > 0$ son ko'rsatish mumkinki, ixtiyoriy n_0 nomer uchun $n > n_0$ bo'lganda $|x_n - a| \geq \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2.22-misol. Umumiy hadi $x_n = n$ bo'lgan ketma-ketlik uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsating.

Yechish. Teskaridan faraz qilamiz. Ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti a ga teng deb faraz qilamiz. U holda ε musbat songa ko'ra shunday n_0 nomerni topilib, $n > n_0$ bo'lganda $|n - a| < \varepsilon$ tengsizlik, ya'ni $a - \varepsilon < n < a + \varepsilon$ bajariladi. Ammo $a + \varepsilon$ dan katta bo'lgan ketma-ketlik hadlari cheksiz ko'p. Bu ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanligini, ketma-ketlikning uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatadi.

2.23-misol. Umumiy hadi $x_n = (-1)^{n+1}$ bo'lgan ketma-ketlikning uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsating.

Yechish. Aytaylik, bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi, ya'ni u biror a limitga ega bo'lsin. Avval a limitning 1 ga teng bo'lalmasligini ko'rsatamiz. Buning uchun 1 nuqtaning $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ atrofni qarash yetarli. Bu atrofning tashqarisida ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari mavjud. Demak, 1 ketma-ketlik limiti bo'lmaydi. Shunga o'hshash -1 ning ham ketma-ketlik limiti bolmasligini ko'rsatish mumkin. Endi $a \neq 1$ va $a \neq -1$ bo'lsin. Agar ε deb $\min(|a-1|,|a+1|)$ dan kichik musbat sonni olsak, u holda bu nuqtaning atrofida ketma-ketlik hadlari mavjud bo'lmaydi. Bundan a ning ketma-ketlik limiti emasligi kelib chiqadi. Shunday qilib, umumiy hadi $x_n = (-1)^{n+1}$ bo'lgan ketma-ketlik uzoqlashuvchi.

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossalari

2.24-teorema. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat bitta limitga ega bo'ladi.

Isbot. ◊ Bu teoremani teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz.

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik a va b turli limitlarga ega, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $(a \neq b)$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_1 va n_2 nomerlar mavjudki, $n > n_1$ bo'lganda $|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ hamda $n > n_2$ bo'lganda $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi; n_0 nomerni n_1 va n_2 dan katta qilib olinsa, $n > n_0$ bo'lganda ikkala tengsizlik bajariladi:

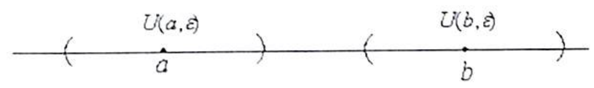
$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bundan $n > n_0$ bo'lganda

$$|a-b| = |(a-x_n)+(x_n-b)| \leq |a-x_n| + |x_n-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Demak, manfiy bo'lmagan $|a-b|$ son ixtiyoriy musbat ε sondan kichik bo'lishi kerak. Bunday son esa nolga teng, ya'ni $|a-b|=0$ yoki $a=b$ bo'lishi kerak. Bu esa $a \neq b$ degan farazimizga zid. ◆

Bu teoremani geometrik usulda quyidagi isbotlash mumkin. Faraz qilaylik, $a \neq b$, aniqlik uchun $a < b$ bo'lsin. a va b larning $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$ atroflarini qaraymiz. $U(a,\varepsilon)$ va $U(b,\varepsilon)$ atroflar umumiy nuqtaga ega emas (9-rasm).



9-rasm

a nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lganligi sababli $U(a,\varepsilon)$ ning tashqarisida ketma-ketlikning faqat chekli sondagi hadlari mavjud. Demak $U(b,\varepsilon)$ atrofda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotmaydi. Bu esa b ning $\{x_n\}$ ketma-ketlik limiti ekanligiga zid. Shunga o'xshash, agar b $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lsa, a ning limit bo'lalmasligini ko'rsatish mumkin. Demak, yaqinlashuvchi ketma-ketlik limiti yagona bo'lar ekan.

2.25-teorema. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

Isbot. ◊ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsin. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta'rifiga ko'ra $\varepsilon = 1$ uchun, shunday n_0 nomer topilib, barcha $n > n_0$ lar uchun $a - 1 < x_n < a + 1$ bo'ladi. Agar $M = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, |a-1|, |a+1|)$ deb olsak, u holda ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $|x_n| < M$ bo'ladi. Bundan esa berilgan ketma-ketlikning chegaralangan bo'lishi kelib chiqadi. ◆

Lekin 2.25-teoremaga teskari teorema umuman to'g'ri emas, ya'ni har qanday chegaralangan ketma-ketlik limitga ega bo'lavermaydi. Masalan, 2.23-misoldagi umumiy hadi $x_n = (-1)^{n+1}$ bo'lgan ketma-ketlik chegaralangan, lekin uzoqlashuvchi.

2.26-misol. Teoremadan foydalanib umumiy hadi $x_n = \frac{n}{n+2}$ bo'lgan ketma-ketlikning chegaralangan ekanligini isbotlang.

Yechish. Avvalgi punktda (2.21-misol) bu ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilgan edi. Demak, yuqorida isbotlangan teoremadan uning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Xuddi shuningdek, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ va $b<r$ bo'lgani uchun shunday $n_2 \in N$ son mavjud bo'lib, $n>n_2$ bo'lganda $y_n<r$ bo'ladi.

Agar $n_0=\max\{n_1, n_2\}$ deb olsak, u holda $n>n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n larda, bir vaqtda $y_n<r$ va $x_n>r$ tengsizliklar o'rinli bo'lib qoladi. Bu qarama-qarshilik farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Demak, $a\leq b$. ◆

2.33-teorema (Oraliq ketma-ketlikning limiti haqidagi teorema). Agar barcha $n\in \mathbf{N}$ larda $x_n \leq y_n \leq z_n$ bo'lib, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} y_n$ ham mavjud bo'lib, $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_1 \in N$ son mavjud bo'lib, $n > n_1$ bo'lganda $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ bo'ladi.

Xuddi shu kabi, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ dan, shunday $n_2 \in N$ son mavjud bo'lib, $n>n_2$ bo'lganda $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Agar $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ deb olsak, u holda $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $n \in N$ larda yuqoridagi tengsizliklardan $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$, ya'ni $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ kelib chiqadi. Bu esa, $\{y_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ ekanini bildiradi. ◆

Mashq va masalalar

Ketma-ketlik limitining ta'rifidan foydalanib, tenglikni isbotlang (27-29):

2-27. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3.$

2-28. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{5n+2} = \frac{4}{5}.$

2-29. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = 2.$

2-30. 2.29-teoremani $a < q$ bo'lgan holda isbotlang.

2-31. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik 0 dan farqli songa intilsa, u holda biror nomerdan boshlab ketma-ketlik hadlari absolut qiymati biror $r > 0$ sondan katta bo'ladi.

2-32. Agar biror nomerdan boshlab $x_n = y_n$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi. Isbotlang.

2-33. Agar biror nomerdan boshlab $x_n \le y_n$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsa, u holda $a \le b$ bo'ladi. Isbotlang.

3-§. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar

1. Ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar

Aytaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsin.

2.34-ta'rif. Ushbu

$$x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots,$$
$$x_1 - y_1,\ x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots,$$
$$x_1 y_1,\ x_2 y_2, \dots, x_n y_n, \dots,$$
$$\frac{x_1}{y_1},\quad \frac{x_2}{y_2},\quad \dots, \frac{x_n}{y_n},\quad \dots,\quad (y_n \neq 0, n = 1, 2, \dots)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati deyiladi va $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ kabi belgilanadi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning arifmetik amalar bilan bog'liq xossalarini o'rganishdan oldin cheksiz kichik ketma-ketliklar va ularning xossalarini o'rganamiz.

2. Cheksiz kichik ketma-ketliklar

2.35-ta'rif. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ bo'lsa, $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

Buni quyidagicha ham ta'riflasa bo'ladi:

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 natural son mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ larda $|\alpha_n| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{\alpha_n\}$ *cheksiz kichik ketma-ketlik* deyiladi.

2.36-misol. Umumiy hadi $\alpha_n = \frac{1}{n}$ bo'lgan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

Yechish. Ravshanki, $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = n_0$ bo'lganda, $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ bo'ladi. Demak, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik.

2.37-misol. Agar $|q| < 1$ bo'lsa, u holda $\{q^n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik ekanini isbotlang.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $|q^n| < \varepsilon$ tengsizlikni n ga nisbatan yechamiz: $n > \log_{|q|} \varepsilon$. $n_0 = \left[\log_{|q|} \varepsilon\right]$ deb olamiz. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $n > n_0$ larda $|q^n| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

3. Cheksiz kichik ketma-ketliklar haqidagi lemmalar. Kelgusida, quyidagi lemmalardan foydalanmiz.

2.38-lemma. Chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig'indisi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. ◊ Isbotni ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklar uchun keltiramiz.

Aytaylik, $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ lar cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. U holda $\{\gamma_n\}$=$\{\alpha_n + \beta_n\}$ ham cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini ko'rsatamiz.

Cheksiz kichik ketma-ketliklar ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_1 \in N$ son mavjud bo'lib, barcha $n > n_1$ lar uchun $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi.

Xuddi shu kabi, shunday bir $n_2 \in N$ son mavjud bo'lib, barcha $n > n_2$ lar uchun $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi.

Agar $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ deb olsak, u holda barcha $n > n_0$ lar uchun bir vaqtda $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ va $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bundan $n > n_0$ larda

$$|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| = |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kelib chiqadi. Bu esa, $\{\gamma_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini ko'rsatadi. ◆

2.39-lemma. Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik, $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsin. U holda $\{\gamma_n\}$, bu yerda $\gamma_n = x_n \cdot \alpha_n$ ni cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lishini ko'rsatamiz.

Berilishga ko‘ra $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo‘lgani uchun shunday $c > 0$ son mavjud bo‘lib, barcha $n \in N$ larda $|x_n| < c$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Shuningdek, $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lganligi sababli, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ga mos ravishda shunday $n_0 \in N$ son mavjud bo‘lib, barcha $n > n_0$ lar uchun $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{c}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, barcha $n > n_0$ lar uchun $|y_n| = |x_n\alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa, $\{y_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini ko‘rsatadi. ◆

2.40-misol. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{cosn}{n} = 0$ tenglikni isbotlang.

Yechish. Ravshanki, $\{cosn\}$ chegaralangan ketma-ketlik. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ esa cheksiz kichik ketma-ketlik (2.36-misol). 2.39-lemmaga asosan $\left\{\frac{cosn}{n}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{cosn}{n} = 0$.

3. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik va cheksiz kichik ketma-ketlik orasidagi bog‘lanish.

Bu bog‘lanish quyidagi teoremada ifodalangan.

2.41-teorema. Biror a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘lishi uchun, $\{x_n - a\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. ◊ *Zaruriyligi*. Aytaylik, $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘lsin. Limit ta’rifiga asosan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 \in$ **N** son mavjud bo‘lib, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $n \in$ **N** larda $|x_n - a| < \varepsilon$ bo‘ladi. Bu yerda $x_n - a = \alpha_n$ belgilash kiritsak, $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ bo‘lib, $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Yetarliligi. Agar haqlari x_n va biror a son orasidagi $\alpha_n = x_n - a$ ayirmalardan iborat ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, u holda $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$ bo‘lib, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘ladi. ◆

Masalan, $x_n = \frac{2n^2+1}{n^2}$ bo‘lsa, uni $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ kabi yozish mumkin. Bu yerda umumiy hadi $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$ bo‘lgan ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik (2-25-masala, k=2). Bundan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ kelib chiqadi.

4. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning arifmetik amallar bilan bog‘liq xossalari

2.42-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\{x_n \pm y_n\}$ ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo‘lsin. 2.41-teoremaga asosan $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$ va $\{y_n - b\} = \{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo‘ladi. 2.38-lemmaga ko‘ra umumiy hadi $\alpha_n + \beta_n = (x_n + y_n) - (a + b)$ bo‘lgan ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi. U holda 1-teoremaga ko‘ra umumiy hadi $x_n + y_n$ bo‘lgan keyma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $a + b$ ga teng bo‘ladi.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n$$

tenglik ham shu kabi isbotlanadi (2-37-masala). ◆

2.43-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ lar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\{x_n y_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo‘lsin. 2.41-teoremaga ko‘ra umumiy hadi $x_n y_n - ab$ bo‘lgan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlash yetarli. Buning uchun quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a). \qquad (1)$$

Teorema shartidan $\{x_n\}, \{b\}$ chegaralangan, $\{x_n - a\}, \{y_n - b\}$ lar cheksiz kichik ketma-ketliklar ekanligi kelib chiqadi. 2.39-lemmaga asoson umumiy hadlari $x_n(y_n - b)$, $b(x_n - a)$ bo‘lgan ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketliklar Demak, (1) ga asosan $\{x_n y_n - ab\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik. ◆

2.44-natija. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{c\cdot x_n\}=c\cdot\{x_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot x_n)=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, 2.43-teoremada $y_n=c$ deb olsak, oxirgi tenglik kelib chiqadi.

2.45-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$ bo'lsa, u holda $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$ bo'lsin. 2.41-teoremaga asosan $x_n=a+\alpha_n$ va $y_n=b+\beta_n$ bo'ladi. Shuningdek, $|y_n|>p$ bo'ladi (2-31-masala). Bu ma'lumotlardan foydalansak,

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|b\alpha_n-a\beta_n|}{|by_n|}$$

bo'ladi. Bunda $b\alpha_n-a\beta_n$ cheksiz kichik ketma-ketlik, $\frac{1}{|by_n|}\leq\frac{1}{bp}$ ekanligini, ya'ni chegaralangan ketma-ketlik ekanligini, e'tiborga olsak, $\left\{\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right\}$ cheksiz kichik, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{a}{b}$ kelib chiqadi. ◆

4-§. Cheksiz katta ketma-ketliklar. Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar orasidagi bog'lanish

Aytaylik, $\{x_n\}$ biror ketma-ketlik bo'lsin.

2.46-ta'rif. Agar ixtiyoriy katta $\Delta>0$ son uchun shunday n_0 natural son mavjud bo'lib, $n>n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $n\in N$ larda $|x_n|>\Delta$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi.

Bunday hol $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ kabi yoziladi.

Agar biror n_0 natural son topilib, $n>n_0$ bo'lganda $x_n>\Delta$ (mos ravishda $x_n<-\Delta$) bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ (mos ravishda $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$) ko'rinishida yoziladi.

2.47-misol. Umumiy hadi $x_n=n^2$ bo'lgan ketma-ketlikning cheksiz katta ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

Yechish. Ixtiyoriy katta $\Delta>0$ son olamiz. $|x_n|>\Delta$ tengsizlikni qaraymiz: $n^2>\Delta$, bundan $n>\sqrt{\Delta}$. Agar $n_0=[\sqrt{\Delta}]$ deb olsak, u holda $n>n_0$ bo'lganda $|x_n|>\Delta$ bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$.

2.48-misol. Umumiy hadi $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot n$ bo'lgan ketma-ketlik a) chegaralangan; b) cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladimi?

Yechish. a) Bu ketma-ketlik chegaralanmagan, chunki ixtiyoriy M musbat son uchun ketma-ketlikning n=2([M]+1) –hadi M dan katta bo'ladi.

b) Ammo bu ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'lmaydi. Chunki $\Delta>0$ son va ixtiyoriy n_0 uchun shunday $n=2n_0+1$ mavjudki, $x_n=0<\Delta$ bo'ladi.

Bu misoldan har qanday chegaralanmagan ketma-ketlik ham cheksiz katta ketma-ketlik bo'lavermasligi kelib chiqadi.

2.49-teorema. Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa, u holda umumiy hadi $\alpha_n=\frac{1}{x_n}$ bo'lgan ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, ε yetarlicha kichik musbat son bo'lsin. Teorema shartiga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. Demak, shunday $n_0\in N$ son topiladiki, barcha $n>n_0$ lar uchun $|x_n|>\frac{1}{\varepsilon}$ bo'ladi. Bundan, $|\alpha_n|<\frac{1}{|x_n|}<\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa, $\{\alpha_n\}$ ning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini bildiradi. ◆

2.50-teorema. Agar $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik va $\alpha_n\neq 0, n=1,2,...$ bo'lsa, u holda umumiy hadi $x_n=\frac{1}{\alpha_n}$ bo'lgan ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot (2-51-masala).

5-§. Aniqmasliklar

Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketliklar bo'lsa, u holda $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0\right)$ ketma-ketliklarning har biri yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rib o'tdik.

Endi, yuqoridagi shartlarning ba'zilari bajarilmay qolgan hollarda ham yaqinlashish bor yoki yo'qligini ko'rib o'tamiz.

1. **«$\frac{0}{0}$» ko'rinishidagi aniqmaslik.** Ba'zan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lgan holda ham $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning xarakteriga qarab, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ ni topish mumkin.

Masalan, a) $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ bo'ladi.

b) $x_n = \frac{1}{n^3}, y_n = \frac{1}{n^2}$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ bo'ladi.

c) $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1 + 0 = 1$ bo'ladi.

Yuqoridagi misollardan ko'rinib turibdiki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lgan holda $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ haqida bir qiymatli fikr aytish mumkin emas. Shu sababli ham bu holda $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik «$\frac{0}{0}$» ko'rinishidagi *aniqmaslik* deyiladi. Aniqmaslikning limitini topish *aniqmaslikni ochish* deb ham aytiladi.

2. **«$\frac{\infty}{\infty}$» ko'rinishidagi aniqmaslik.** Ba'zan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ bo'lgan holda ham $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ ni hisoblash mumkin. Bu holda, yuqoridagi kabi, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik «$\frac{\infty}{\infty}$» ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi.

a) $x_n = n^2+1$, $y_n = 2n^2-n$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2-n) = \lim\limits_{n\to\infty} n(2-\frac{1}{n}) = +\infty$

va

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \text{ bo'ladi.}$$

3. **«$0\cdot\infty$» ko'rinishidagi aniqmaslik.** Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ bo'lsa, u holda, $x_n y_n = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}}$ yoki $x_n y_n = \frac{y_n}{\frac{1}{x_n}}$ almashtirishlar yordamida, «$0\cdot\infty$» ko'rinishidagi aniqmaslik «$\frac{0}{0}$» yoki «$\frac{\infty}{\infty}$» ko'rinishidagi aniqmasliklarga keltirib yechiladi.

d) $x_n = \frac{1}{n^3+1}$, $y_n = n^3+2n$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+2n) = +\infty$ va

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = 1 \text{ bo'ladi.}$$

Bulardan tashqari, «$\infty-\infty$», «0^0», «1^∞», «∞^0» ko'rinishidagi aniqmasliklar mavjud. Bunday aniqmasliklarni ham «$\frac{0}{0}$» yoki «$\frac{\infty}{\infty}$» ko'rinishidagi aniqmasliklarga keltirib yechiladi.

Mashq va masalalar

2-34. Ta'rifdan foydalanib, berilgan ketma-ketliklarning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlang:

a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$; b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$; c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n!}, \dots$.

2-35. Umumiy hadi $\alpha_n = \frac{1}{n^k}, k > 0$ bo'lgan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

2-36. Chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig'indisi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lishini isbotlang.

2-37. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$ bo'ladi. Isbotlang.

Limitlarni toping.

2-38. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n}$

2-39. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-n^2}{3-n^2}$

2-40. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+5n^2-1}{10n^3-3n+2}$

2-41. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^2-1}{5n^3+4n^2-2n+1}$

2-42. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3-5n^2+10n}{21n^3+7n-8}$

2-43. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^{2+1}}$

2-44. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}}{n+2}$

2-45. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^2+n+4}}$

2-46. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

2-47. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$

2-48. $\{x_n\}$ ketma ketlikning a limitini toping, bu yerda $x_n = \frac{n+\cos \pi n}{n}$. $|x_n - a|$ kattalik ε dan kichik bo'ladigan N nomerni ko'rsating, agar

1) $\varepsilon = \frac{2}{3}$; 2) $\varepsilon = 0{,}1$; 3) $\varepsilon = \frac{3}{502}$ bo'lsa.

2-49. Quyidagi $\{x_n\}$ ketma-ketliklarning uzoqlashuvchi ekanligini isbotlang:

1) $x_n = (-1)^n$

2) $x_n = 1 + (-1)^n$

3) $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$

4) $x_n = (-5)^n$

5) $x_n = n^2$

6) $x_n = 1 + 2 + \dots + n$.

2-50. Shunday yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarga misol keltiringki, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) barcha n uchun $x_n > y_n$, ammo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$:

2) barcha n uchun $x_n > 100y_n > 0$, ammo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2-51. 2.50-teoremani isbotlang.

2-52. $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\{|x_n|\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ ekanligini isbotlang.

2-53. $\{x_n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi, lekin $\{|x_n|\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lgan ketma-ketlikka misol keltiring.

2-54. Agar $x_n \geq 0, n \in N$ va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsa, u holda

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$ ekanligini isbotlang.

2-55. Shunday $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarga misol keltiringki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ va 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$; bo'lsin. 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ mavjud emas.

2-56. Shunday $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ uzoqlashuvchi ketma-ketliklarga misol keltiringki, quyidagi ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsin:

1) $\{x_n + y_n\}$; 2) $\{x_n \cdot y_n\}$; 3) $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

2-57. Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \neq 0$ bo'lsin. $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik haqida nima aytish mumkin?

2-58. a ning qanday qiymatlarida umumiy hadi $x_n = \frac{n^4+1}{n^3-2} - \frac{an^2}{5n+2}$ bo'lgan ketma-ketlik limiti a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) chekli son bo'ladi?

6-§. Monoton ketma-ketlikning limiti. e soni

2.51-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ limitga ega, agar yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Faraz qilaylik $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsin. U holda $\{x_n, n=1, 2, \dots\}$ to'plam ham yuqoridan chegaralangan bo'ladi va shuning uchun, uning aniq yuqori chegarasi mavjud. Uni a orqali belgilaymiz: $a = \sup\{x_n\}$. Endi a ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lishini ko'rsatamiz.

To'plamning aniq yuqori chegarasi xossasiga ko'ra (1-bob, 8-§.) barcha $n \in$ **N** lar uchun $x_n \leq a$ bo'ladi. Shuningdek, har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday n' son mavjud bo'lib,

$x_n>a-\varepsilon$ bo'ladi. Shartga ko'ra $\{x_n\}$ o'suvchi ketma-ketlik, shu sababli barcha $n>n'$ larda $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ tengsizlik o'rinli. Demak, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz.

Aytaylik, $\{x_n\}$ o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralanmagan bo'lsin. U holda har bir $\Delta>0$ son uchun shunday $n'\in \mathbf{N}$ son mavjudki, $x_{n'}>\Delta$ bo'ladi. Shuningdek, barcha $n>n'$ lar uchun $x_n>x_{n'}$ ekanligi va yuqoridagilarga asosan, $x_n>\Delta$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Demak, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. Shunday qilib, monoton o'suvchi ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sup\{x_n\}$ ekan. ◆

Yuqoridagi usul bilan quyidagi teoremani ham isbotlash mumkin (2-52-masala).

2.52-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ limitga ega, agar quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ bo'ladi.

2.53-misol. $\{x_n\}=\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ ketma-ketlikning limitini toping.

Yechish. $x_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{2^n}{n!}\cdot\dfrac{2}{n+1}=\dfrac{2}{n+1}\cdot x_n$ munosabatdan, barcha $n>1$ larda $x_{n+1}<x_n$ bo'lishi, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek, barcha $n\in\mathbf{N}$ larda $x_n=\dfrac{2^n}{n!}>0$. Shu sababli, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega, uni a deb olamiz: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ munosabatdan $a=0\cdot a$ va $a=0$ kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

e soni.

Umumiy hadi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ko'rinishda bo'lgan ketma-ketlikning limiti mavjud ekanini isbotlaymiz.

Buning uchun $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ ketma-ketlikni ko'rib chiqamiz. Uning kamayuvchi ekanligi 2.17-misolda isbotlangan edi. Uning hadlari musbat, bundan uning quyidan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Demak, u limitga ega. Bu limitni e orqali belgilaymiz.

Shuningdek,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{e}{1}=e,$$

demak, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning ham limiti e ekanligi kelib chiqadi. Bu e soni irratsional son bo'lib, uning taqribiy qiymati

$$e\approx 2{,}71828182845904590\ldots$$

ga teng.

7-§. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi

2.54-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lib,

1. $\{x_n\}$ o'suvchi, $\{y_n\}$ kamayuvchi,
2. barcha $n\in N$ lar uchun $x_n<y_n$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar

yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Shartga ko'ra barcha $n\in N$ lar uchun $x_n<y_n\le y_1$ bo'ladi. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan. Shu sababli, $\{x_n\}$ limitga ega: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$.

Xuddi shu kabi, $\{y_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi, quyidan chegaralangan va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=c'$ limit mavjud. Qolaversa,

$$c'-c=\lim_{n\to\infty} y_n-\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0.$$

Bundan $c=c'$ ekanligi kelib chiqadi. ◆

Agar $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n], \dots$ segmentlarning har biri o'zidan oldingisining qismi, ya'ni

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \cdots$$

bo'lsa, u holda ular *ichma-ich joylashgan segmentlar* ketma-ketligi deyiladi.

Quyidagi tasdiq, *ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi* deb yuritiladi.

2.55-natija. Agar ichma-ich joylashgan $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n], \dots$ segmentlar ketma-ketligi uchun $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ bo'lsa, u holda segmentlarning chap uchlaridan tuzilgan $\{a_n\}$ va o'ng uchlaridan tuzilgan $\{b_n\}$ ketma-ketliklar bitta limitga ega va bu limit barcha segmentlarga tegishli yagona nuqta bo'ladi.

Isbot. ◊ 1) $\{a_n\}$ o'suvchi, $\{b_n\}$ kamayuvchi. 2) barcha $n\in$ **N** lar uchun $a_n<b_n$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ bo'lganligidan 2.54-teoremaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ bo'ladi. Bu limitni c deb olsak, barcha $n\in$ **N** lar uchun $a_n\le c\le b_n$ kelib chiqadi.

Endi bu nuqtaning yagonaligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, shu c nuqtadan farqli va $[a_n; b_n], n = 1,2,3 \dots$ kesmalarning barchasiga tegishli c' nuqta mavjud bo'lsin. U holda $b_n - a_n \ge |c' - c| > 0$ bo'ladi. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ shartga zid. Demak, $c = c'$.◆

8-§. Yaqinlashish prinsipi

1.Qismiy ketma-ketlik. Aytaylik, $\{x_n\}$ biror ketma-ketlik bo'lsin. Natural sonlardan $n_1<n_2<\dots<n_k\dots$ shartlar bilan $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ ketma-ketlik olamiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning shu natural sonlar ketma-ketligiga mos hadlaridan tuzilgan $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ ketma-ketlikni, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *qismiy ketma-ketligi* deyiladi va $\{x_{n_k}\}$ kabi belgilanadi.

Masalan, 1, 4, 9, 16, 25,. . ., ya'ni, $x_n=n^2$ formula bilan berilgan ketma-ketlik uchun quyidagi ketma-ketliklarning har biri qismiy ketma-ketlik bo'ladi.

a) 1, 9, 25,. . ., $(2k-1)^2$,. . .,

b) 4, 16, 36,. . ., $(2k)^2$,. . .,

c) 4, 16, 64, 256,. . ., $(2^k)^2$,. . .

Qismiy ketma-ketlik limiti quyidagi xossaga ega.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lsa, u holda $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ham a limitga ega bo'ladi.

Umuman olganda, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti yo'qligidan uning qismiy ketma-ketliklari ham limitga ega emas, degan fikr kelib chiqmaydi, ya'ni shunday ketma-ketliklar borki, ularning limiti yo'q bo'lsada, uning ba'zi qismiy ketma-ketliklarining limiti mavjud bo'ladi.

Masalan, -1, 1, -1,. . . , ya'ni, $x_n=(-1)^n$ kabi berilgan ketma-ketlik limitga ega emas. Uning

a) $x_1=-1$, $x_3=-1$,. . ., $x_{2n-1}=-1$,. . ., $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=-1$,

b) $x_2=1$, $x_4=1$,. . ., $x_{2n}=1$,. . ., $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=1$

qismiy ketma-ketliklari limitga ega.

Umuman, qanday ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin?-degan savolga quyidagi lemma javob beradi.

2. Bolsano-Veyershtrass lemmasi

2.56-lemma. Ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlikdan har doim, yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

Isbot. ◊ Aytaylik, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin. Demak, uning barcha hadlari tegishli bo'lgan $[a_1;b_1]$ segment mavjud bo'ladi. Bu segmentni teng ikki qismga ajratamiz: $[a_1; \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}; b_1]$. Hosil bo'lgan segmentlarning birida (yoki ikkalasida ham) ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari bor bo'ladi. Segmentlardan, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari borini (ikkalasida ham bo'lganda, masalan, chapdagisini) $[a_2;b_2]$ orqali belgilaymiz. O'z navbatida $[a_2;b_2]$ segmentni teng ikki qismga ajratamiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari borini $[a_3;b_3]$ orqali belgilaymiz. Va xokazo, shu jarayonni davom ettirib, ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz:

$[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$,. . ., $[a_n;b_n]$,. . .

$[a_n;b_n]$ segmetning uzunligi $b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$ bo'lib, $n\to\infty$ da nolga intiladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga ko'ra $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar umumiy bir c limitga ega bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Endi, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $[a_1;b_1]$ dagi istalgan bir hadini olib, uni x_{n_1} orqali, $[a_2;b_2]$ dagi, x_{n_1} hadidan keyin kelgan biror hadini olib x_{n_2} orqali, $[a_3;b_3]$ dagi x_{n_1}, x_{n_2} hadlaridan keyin kelgan biror hadni olib x_{n_3} orqali belgilaymiz. Shu jarayonni davom ettirib, $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ qismiy ketma-ketlikni hosil qilamiz.

Tanlanishiga ko'ra, x_{n_k} lar uchun $a_n \le x_{n_k} \le b_n$, $n=1, 2, \ldots$ tengsizliklar o'rinli bo'lib, $n\to\infty$ da $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}=c$ kelib chiqadi. ◆

3. Ketma-ketlikning quyi va yuqori limitlari. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2.57-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan, limiti a bo'lgan qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin bo'lsa, u holda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *qismiy limiti* deyiladi.

2.58-ta'rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy limitlari ichida eng kattasi uning *yuqori limiti* deyiladi va $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ orqali belgilanadi. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy limitlari ichida eng kichigi uning *quyi limiti* deyiladi va $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ orqali belgilanadi.

2.59-misol. Umumiy hadi $x_n=(-1)^n$ bo'lgan ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlarini toping.

Yechish. Berilgan ketma-ketlikning qismiy limitlari to'plami $\{-1,1\}$ dan iborat. Demak, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=-1$ bo'ladi.

2.60-misol. 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1,. . ., 1, n,. . . ketma-ketlikning ketlikning yuqori va quyi limitlarini toping.

Yechish. Ketma-ketlikning 1, 1, 1,. . . qismiy ketma - ketligining limiti 1, va 1, 2, 3, 4,. . ., n,. . . qismiy ketma-ketligining limiti $+\infty$ bo'ladi. Demak, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=+\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=1$.

Qanday ketma-ketliklarning yuqori va quyi limitlari mavjud? - degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

2.61-teorema. Ixtiyoriy ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari mavjud.

Isbot ([1], 106-bet).

4. Ketma-ketlik yaqinlashishining zaruriy va yetarli sharti. 8-§ da, monoton ketma-ketliklar uchun qanday shart bajarilganda, chekli limitga ega bo'lishi bilan tanishdik. Endi, ixtiyoriy ketma-ketlik, qanday shart bajarilganda yaqinlashuvchi bo'lishi masalasini ko'rib chiqamiz.

Aytaylik, biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2.62-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_o\in \mathbf{N}$ son mavjud bo'lib, barcha n, $m>n_o$ lar uchun $|x_n-x_m|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik* deyiladi.

2.63-misol. Umumiy hadi $x_n = \frac{1}{3^n}$ ketma-ketlikning fundamental ekanini isbotlang.

Yechish. Aniqlik uchun $m > n$ bo'lsin. U holda $|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^n}\right| = \frac{1}{3^n}\left|\frac{1}{3^{m-n}} - 1\right| \le \frac{1}{3^n}$, $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$ tengsizlikni n ga nisbatan yechamiz. U holda $3^n > \frac{1}{\varepsilon}$ dan $n > \log_3 \frac{1}{\varepsilon}$. Agar $n_0 = \left[\log_3 \frac{1}{\varepsilon}\right]$ deb olsak, u holda barcha $m, n > n_0$ lar uchun $|x_m - x_n| < \varepsilon$ o'rinli bo'ladi. Demak, berilgan ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik bo'ladi.

2.64-teorema. (Koshi teoremasi). Biror, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, uning fundamental ketma-ketlik bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. ◊ *Zarurligi.* Aytaylik, $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik va uning limiti a bo'lsin, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Limit ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun, shunday $n_o\in \mathbf{N}$ son mavjud bo'lib, barcha $n>n_o$ larda $|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan, barcha n, $m>n_o$ lar uchun

$$|x_n-x_m|=|(x_n-a)-(x_m-a)|\le|x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

kelib chiqadi. Demak, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_\varepsilon\in \mathbf{N}$ son mavjud bo'lib, barcha $n, m>n_\varepsilon$ lar uchun $|x_n-x_m|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan $x_m-\varepsilon<x_n<x_m+\varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Agar m ning bitta tayin qiymatini olsak, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Bolsano-Veyershtrass lemmasiga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}=c$.

Endi, c soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ham limiti bo'lishini ko'rsatamiz.

Biror k sonini $|x_{n_k}-c|<\varepsilon$ va $n_k>n_\varepsilon$ tengsizliklar bir vaqtda o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz. Agar $m=n_k$ deb olsak, u holda barcha $n>n_\varepsilon$ lar uchun $|x_n-x_{n_k}|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bulardan

$|x_n-c|=|x_n-x_{n_k}+x_{n_k}-c|\le|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-c|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$ kelib chiqadi. Bu esa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatadi.◆

Isbotlangan teorema ketma-ketlik yaqinlashishining *Koshi kriteriyasi* (alomati) deb ham yuritiladi.

Mashq va masalalar

2-59. Ketma-ketlik o'suvchi emas; ketma-ketlik kamayuvchi emas degan tasdiqlarni ayting (ifodalang).

2-60. Ketma-ketliklarning monoton emasligini ko'rsating:

a) $\left\{\frac{1}{n}\cos\pi n\right\}$; b) $\{\cos n\}$; c) $\{(-2)^n\}$; d) $\{n+(-1)^n\}$.

2-61. Quyidagi ketma-ketliklarning biror hadidan boshlab kamayishini ko'rsating:

a) $\left\{\frac{n^2}{4^n}\right\}$; b) $\left\{\frac{n^2+3}{3^n}\right\}$.

2-62. Rekurrent usulda berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun quyidagi jumlalarni isbotlang, bu yerda $x_1=3, x_{n+1}=0{,}5x_n^2-1$: 1) ketma-ketlik quyidan chegaralangan, ammo yuqoridan chegaralanmagan; 2) ketma-ketlik o'suvchi.

2-63. Rekurrent usulda berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun quyidagi jumlalarni isbotlang, bu yerda $x_1=2, x_{n+1}=0{,}5x_n^2-1$: 1) ketma-ketlik chegaralangan; 2) ketma-ketlikning $\{x_{2k}\}, \{x_{2k-1}\}$ qism ketma-ketlilari biror hadidan boshlab monoton ekanligini isbotlang.

2-64. 2.52-teoremani isbotlang.

2-65. Ixtiyoriy a uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ ekanligini ko'rsating.

2-66. Ixtiyoriy $c>0$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{c+\sqrt{c+\dots+\sqrt{c}}}=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ ekanligini ko'rsating.

2-67. Limitni toping:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+k}$, bu yerda $k\in N$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{1+n})^n$.

2-68. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $\{x_{2k}\}$ va $\{x_{2k-1}\}$ qism ketma-ketliklari yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2k-1}=a$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ekanligini isbotlang.

2-69. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikda $\{x_{2k}\}$ va $\{x_{2k-1}\}$ qism ketma-ketliklari uchun $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2k}=a, \lim\limits_{n\to\infty}x_{2k-1}=b, a\neq b$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi ekanligini isbotlang.

2-70. Umumiy hadi a) $x_n=(-1)^n$; b) $x_n=\sin\frac{\pi n}{3}$ bo'lgan ketma-ketlikning yaqinlashuvchi qism ketma-ketliklarini ko'rsating.

2-71. Berorta ham qism ketma- ketligi chekli songa yaqinlashmaydigan ketma-ketlikka misol keltiring.

2-72. Qism ketma-ketligi chekli songa yaqinlashuvchi chegaralanmagan ketma-ketlikka misollar keltiring.

2-73. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini isbotlang:

a) $x_n=\frac{1}{n+1}$; b) $x_n=\frac{n}{3n+1}$; c) $x_n=\underbrace{0{,}33\ldots3}_{n\,ta}$; d) $x_n=\frac{(-1)^n n}{2n-1}$.

2-74. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang:

$a)\ x_n = \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{4} + \dots + \frac{\sin na}{2^n},\quad a \in R.$

$b)\ x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$

2-75. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ fundamental ketma-ketliklar bo'lsa, ularning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi haqida nima aytish mumkin?

III BOB. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA VA UNING LIMITI

1-§. Funksiya tushunchasi

Funksiya tushunchasi matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, uning yordamida turli kattaliklar orasida mavjud bo'lgan bog'lanishlar o'rganiladi.

Aytaylik, ixtiyoriy X va Y sonli to'plamlar berilgan bo'lsin.

3.1-ta'rif. Agar X va Y sonli to'plamlar berilgan bo'lib, X to'plamdan olingan har bir x songa biror qonuniyat yoki qoida bilan Y to'plamdagi aniq bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda aniqlangan *funksiya berilgan* deyiladi. Funksiya $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$, . . . ko'rinishlarda yoziladi.

Agar funksiya berilgan bo'lsa, u holda X to'plam funksiyaning *aniqlanish sohasi*, Y esa funksiyaning *o'zgarish sohasi* deyiladi.

Shuningdek, x *erkli o'zgaruvchi* yoki *argument*, y esa *erksiz o'zgaruvchi* deyiladi.

Odatda $\{f(x) : x\in X\}$ to'plam funksiyaning *qiymatlar to'plami* deyiladi va $E(f)$ orqali belgilanadi. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ bilan belgilanadi.

2-§. Funksiyaning berilish usullari

Funksiya ta'rifidan uning berilgan bo'lishi uchun:

a) funksiyaning aniqlanish sohasi – X ; b) funksiyaning qiymatlar to'plami – Y; c) x ga mos kelgan y ni topish qoidasi yoki qonuniyat berilgan bo'lishi kerak.

Funksiya asosan uch xil usulda beriladi: analitik usul, jadval usuli, grafik usul.

1. Analitik usul. Agar y ni topish uchun x bilan bajarilishi kerak bo'lgan amallar majmuasi bitta yoki bir nechta formula ko'rinishida berilgan bo'lsa, u holda funksiya *analitik* usulda berilgan deyiladi. $f(x)$ formula funksiyaning *analitik ifodasi* deyiladi.

Funksiya analitik usulda berilganda uning aniqlanish sohasi berilmasligi mumkin. Bu holda aniqlanish soha deganda, x ning analitik ifoda ma'noga ega bo'ladigan barcha qiymatlari to'plami tushuniladi. Bu to'plam, funksiyaning *tabiiy aniqlanish sohasi* deyiladi va $D(f)$ yoki $D(y)$ orqali belgilanadi.

3.2-misol. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Kasr maxraj noldan farqli barcha nuqtalarda aniqlangan. Shu sababli $x^2 - 4 \neq 0$ bo'lishi lozim. Bundan, $x \neq \pm 2$, demak, $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

3.3-misol. $f(x) = \sqrt{4-2x}$ aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Kvadrat ildiz ostidagi ifoda nomanfiy bo'lishi lozim. Bundan $4 - 2x \geq 0$, yoki $2x \leq 4$. Demak, $D(f) = (-\infty; 2]$.

3.4-misol. $f(x) = x^2 + 4x - 2$ funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.

Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. $x^2 + 4x - 2 = (x+2)^2 - 4$ va ixtiyoriy x uchun $(x+2)^2 \geq 0$ bo'lganligi sababli, $f(x) = x^2 + 4x - 2 \geq -4$ bo'ladi. Shunday qilib, $E(f) = [-4; +\infty)$.

2. Jadval usuli. Ba'zi hollarda, argument x ning qiymatlariga mos keladigan funksiya qiymatlari jadvali beriladi. Bunda, funksiya *jadval* usulda berilgan deyiladi.

Funksiyaning jadval usulda berilishi ikkita x va y ketma-ketliklar orasida bog'lanishni tajriba yo'li bilan aniqlashda qo'l keladi. Bunda x ning bir nechta x_1, $x_2, \ldots, x_n$ qiymatlari olinadi, tajriba asosida y ning x ga mos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlari aniqlanadi va jadval tuziladi.

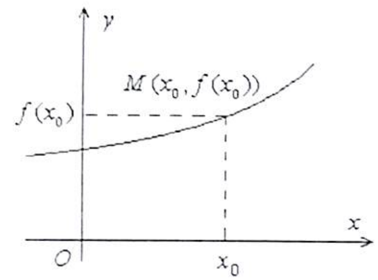
x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

3. Grafik usul. Agar $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lsa, u holda tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi qaraladi. Tekislikning barcha $(x,f(x))$

nuqtalaridan iborat ushbu $\{M(x,f(x)):\ x\in X\}$ to'plam $y=f(x)$ funksiyaning *grafigi* deyiladi.

Agar tekislikda funksiyaning grafigi berilgan bo'lsa, u holda funksiya *grafik* usulda berilgan deyiladi.

Funksiya grafik usulda berilgan bo'lsa, u holda $f(x_0)$ qiymatni topish uchun abssissa o'qida x_0 nuqtani olib, undan ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazib, uni grafik bilan kesishgan nuqtasining ordinatasi y_0 ni olamiz, bu son $f(x_0)$ dan iborat bo'ladi (10- rasm).

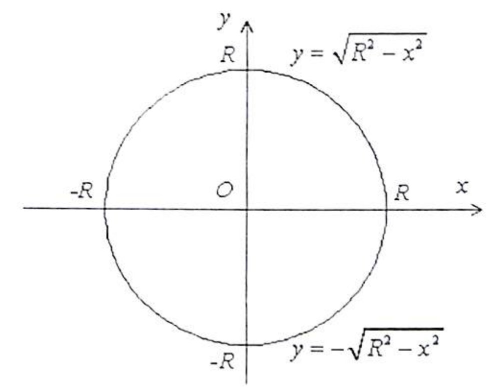


10-rasm

Funksiyaning grafigi tekislikdagi biror chiziqdan yoki bir nechta nuqtalar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin. Lekin tekislikdagi har qanday chiziq yoki nuqtalar to'plami funksiyaning grafigi bo'lavermaydi.

Koordinatalar tekisligida biror l chiziq berilgan bo'lsin. Abssissa o'qining har bir nuqtasidan, ordinata o'qiga parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq l ni ko'pi bilan bitta nuqtada kesib o'tsa, u holda l chiziq birorta funksiyaning grafigi bo'ladi.

Masalan $x^2+y^2=R^2$ aylanani olsak, bu aylana hech bir funksiyaning grafigi bo'la olmaydi. Lekin aylananing yuqori yarmi $y=\sqrt{R^2-x^2}$ funksiyaning, quyi yarmi esa $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ funksiyaning grafigi bo'ladi (11-rasm).



11-rasm

Har qanday funksiyaning ham grafigini chizish mumkin emas. Masalan, *Dirixle funksiyasi* deb ataluvchi quyidagi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & agar\ x\ ratsional\ son\ bo'lsa, \\ 0, & agar\ x\ irratsional\ son\ bo'lsa \end{cases}$$

funksiyaning grafigini chizib bo'lmaydi.

4. Funksiyalar ustida amallar. Aytaylik, X to'plamda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin.

3.5-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(x)=g(x)$ bo'lsa, u holda bu funksiyalar X to'plamda *o'zaro teng funksiyalar* deyiladi.

Masalan, $f(x)=x+1$ va $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ funksiyalar $X=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ to'plamda (uning ixtiyoriy qism to'plamida ham) teng. Ammo R da teng emas, chunki $x=1$ nuqtada $g(x)$ funksiya aniqlanmagan.

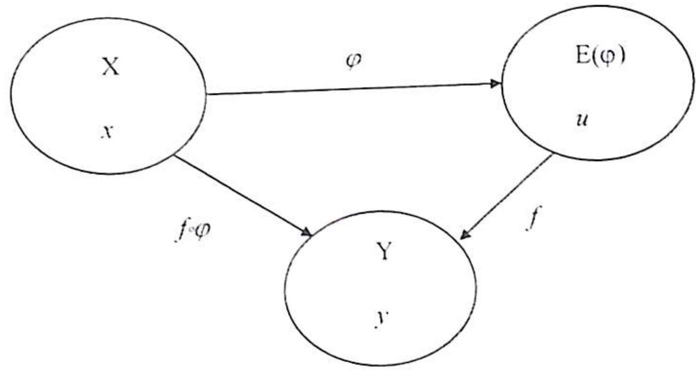
X to'plamdan olingan har bir x ga berilgan $f(x)+g(x)$ sonni mos qoyish natijasida yangi funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya f va g funksiyalarning yig'indisi deyiladi va $f+g$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. Shunga o'xshash bu funksiyalarning ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasi ($g(x)\neq 0$ bo'lgan nuqtalarda) mos ravishda quyidagicha aniqlanadi: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Masalan, $f(x)=x^2, g(x)=x^2+x$ funksiyalar $X=\mathbf{R}$ da berilgan bo'lsa, u holda $(f+g)(x)=2x^2+x$, $(f-g)(x)=-x$, $(fg)(x)=x^4+x^3$ lar X da, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2}{x^2+x}$ esa $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$ da funksiya bo'ladi.

Funksiyalar ustida yana bir amalni, funksiyalar kompozitsiyasi amalini aniqlash mumkin.

3. Murakkab funksiya. Funksiyalar kompozitsiyasi.

3.6-ta'rif. Aytaylik, $u=\varphi(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan va qiymatlar to'plami $E(\varphi)$ bo'lsin. Shuningdek, $y=f(u)$ funksiya $E(\varphi)$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. U holda $y=f(\varphi(x))$ funksiya X to'plamda aniqlangan *murakkab funksiya* yoki φ va f *funksiyalarning kompozitsiyasi* deyiladi va $f\circ\varphi$ orqali belgilanadi: $(f\circ\varphi)(x)=f(\varphi(x))$.



12-rasm

3.7-izoh. Ta'rifdagi X to'plam $u=\varphi(x)$ funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasiga teng bo'lishi shart emas. Masalan, $u=\varphi(x)=1-x^2$, $y=f(u)=\sqrt{u}$ bo'lsin. $u=1-x^2$ funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$, unga mos qiymatlar to'plami $(-\infty,1]$. Bu to'plamda $f(u)=\sqrt{u}$ funksiya aniqlanmagan.

Lekin $X=[-1,1]$ deb olsak, $E(\varphi)=[0,1]$ bo'ladi va bu to'plamda $f(u)=\sqrt{u}$ funksiya aniqlangan. Demak, $X=[-1,1]$ to'plamda $f(\varphi(x))=\sqrt{1-x^2}$ murakkab funksiya aniqlangan.

Mashq va masalalar

3-1. $f(x)=x^3-3x$ funksiya berilgan. Quyidagilarni toping:

1) $f(1)$.
2) $f(-3)$.
3) $f(-\sqrt[3]{5})$.
4) $f(-x)$.
5) $f(3x)$.
6) $f\left(\frac{1}{x}\right)$.
7) $\frac{1}{f(x)}$.
8) $f(b-2)$.

Berilgan funksiyalarning aniqlanish sohasini toping (2-11):

3-2. $f(x)=\frac{x^2+4}{x^3+1}$.

3-3. $f(x)=\sin\frac{1}{|x|-2}$

3-4. $f(x)=\log_3(-x)$

3-5. $f(x)=\sqrt[4]{x^2-7x+10}$

3-6. $f(x)=x^2+tg\,x$

3-7. $f(x)=\sqrt{x-7}+\sqrt{10-x}$

3-8. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{|x^2-2|}}$ 3-9. $f(x) = \sqrt[4]{x+2} + \frac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$

3-10. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \log_2(2-3x)$ 3-11. $f(x) = \arccos(x-2) - \ln(x-2)$

Berilgan funksiyalarning qiymatlar to'plamini toping (12-17):

3-12. $f(x) = x^2 - 8x + 20$ 3-13. $f(x) = 3^{-x^2}$

3-14. $f(x) = 2\sin x - 7$ 3-15. $f(x) = \frac{1}{x} + 4$

3-16. $f(x) = \frac{1}{\pi} arctg\, x$ 3-17. $f(x) = \sqrt{5-x} + 2$

Berilgan funksiya grafigini chizing (18-21):

3-18. $signx = \begin{cases} -1, \text{ agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ (x ning ishorasi)

3-19. a) $y=[x]$ (x ning butun qismi). b) $y=\{x\}$ (x ning kasr qismi)

3-20. $f(x) = \begin{cases} x, \; agar\; 0 \le x \le 1 \; bo'lsa, \\ 2-x, agar\; 1 < x \le 2 \; bo'lsa. \end{cases}$

3-21. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, agar\; 0 \le x \le 1 \; bo'lsa, \\ 2-x, agar\; 1 < x \le 2 \; bo'lsa. \end{cases}$

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan. $f+g$, $f-g$, fg, f/g va g/f funksiyalarning aniqlanish sohasini toping. Ularni qiymatlarini hisoblash uchun formula yozing (22-23):

3-22. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

3-23. $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{1+x}$

3-24. Agar $f(x) = x+5$ va $g(x) = x^2 - 3$ bo'lsa, quyidagilarni toping:

a) $f \circ g(0)$; b) $f \circ f(-5)$; c) $g \circ g(x)$; d) $g \circ f(x)$;

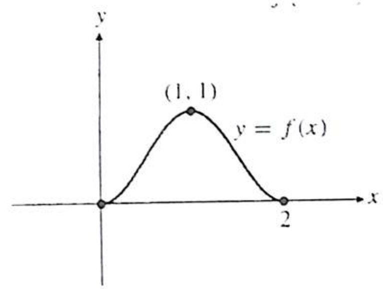
e) $g(f(0))$ f) $g(g(2))$; g) $f(f(x))$; h) $f(g(x))$.

3-25. Berilgan f va g funksiyalar uchun $f \circ f(x)$; $f \circ g(x)$; $g \circ g(x)$; $g \circ f(x)$ murakkab funksiyalarni tuzing va ularning aniqlanish sohalarini toping (26-28):

3-26. $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$.

3-27. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$.

3-28. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = sgn(x)$



13-rasm

3-29. 13-rasmda aniqlanish sohasi $[0,2]$, qiymatlar to'plami $[0,1]$ bo'lgan $f(x)$ funksiya grafigi berilgan. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plamini toping, grafigini chizing:

$a)\ f(x)+1;\quad b)\ f(x)-2;\quad c)\ f(x+1);$

$d)\ f(x-2);\quad e)\ -f(x);\quad f)\ f(-x);\quad g)\ 1+f(x-1).$

3-§. Funksiyalarning muhim sinflari

1. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar

3.8-ta'rif. Agar X to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun shunday b son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in X$ lar uchun $f(x) \le b$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralangan deyiladi.

3.9-misol. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funksiya $X = (-\infty; +\infty)$ oraliqda yuqoridan chegaralangan ekanligini isbotlang.

Yechish. X dan olingan ixtiyoriy x uchun $x^2 \ge 0$, bundan $\frac{1}{1+x^2} \le 1$ bo'ladi. Demak, shunday 1 soni mavjudki, $X = (-\infty; +\infty)$ oraliqdan olingan ixtiyoriy x uchun $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \le 1$ o'rinli. Bu berilgan funksiyaning yuqoridan chegaralangan ekanligini isbotlaydi.

3.10-ta'rif. Agar X to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun shunday a son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in X$ lar uchun $f(x) \ge a$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya quyidan chegaralangan deyiladi.

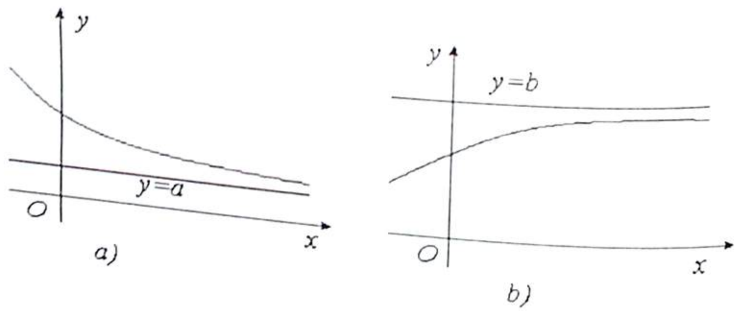
3.11-misol. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funksiya $X = (-\infty; +\infty)$ oraliqda quyidan chegaralangan ekanligini isbotlang.

Yechish. X dan olingan ixtiyoriy x uchun $x^2+1>0$ bo'lganligi sababli $\frac{1}{1+x^2}>0$ bo'ladi. Demak, shunday 0 soni mavjudki, $X=(-\infty;+\infty)$ oraliqdan olingan ixtiyoriy x uchun $f(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ o'rinli. Bu berilgan funksiyaning quyidan chegaralangan ekanligini isbotlaydi.

3.12-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u shu to'plamda *chegaralangan* funksiya deyiladi.

Yuqorida qaralgan funksiya uchun $0<\frac{1}{1+x^2}\leq 1$ barcha $x\in X$ larda o'rinli. Demak, berilgan funksiya chegaralangan.

Geometrik nuqtai nazardan quyidan chegaralangan funksiyaning grafigi, biror to'g'ri chiziqdan yuqorida (14-*a*) rasm), yuqoridan chegaralangan funksiyaning grafigi biror to'g'ri chiziqdan pastda joylashgan bo'ladi. (14-*b*) rasm).



14-rasm

2. Juft va toq funksiyalar.

3.13-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(-x)=f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ *juft funksiya* deyiladi.

3.14-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(-x)=-f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ *toq funksiya* deyiladi.

Bu ta'riflardagi $f(-x)=f(x)$, $f(-x)=-f(x)$ shartdan agar funksiya x nuqtada aniqlangan bo'lsa, uning $-x$ nuqtada ham aniqlangan bo'lishi kelib chiqadi.

3.15-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $-x\in X$ bo'lsa, u holda X to'plam *simmetrik to'plam* (O nuqtaga nisbatan) deyiladi.

Masalan, $X_1=(-2;2)$, $X_2=(-\infty;+\infty)$, $X_3=[-1;1]$ lar simmetrik to'plamlar, $X_4=[-2;2)$, $X_5=(1;+\infty)$ simmetrik bo'lmagan to'plamlar bo'ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya toq yoki juft bo'lishi uchun uning aniqlanish sohasi simmetrik to'plam bo'lishi zaruriy shart ekan.

3.16-misol. Ushbu funksiyalarni toq-juftlikka tekshiring: a) $f(x)=x^2-1$; b) $f(x)=\sqrt{x-1}$; c) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

Yechish. a) $f(x)=x^2-1$ funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat, demak, simmetrik to'plam. $f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x)$. Bundan $f(x)=x^2-1$ juft funksiya.

b) $f(x)=\sqrt{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[1;+\infty)$. Ravshanki, u simmetrik to'plam emas. Demak, $f(x)=\sqrt{x-1}$ toq ham emas, juft ham emas.

c) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat, demak, simmetrik to'plam. $f(-x)=\sqrt[3]{-x-1}\neq f(x)$, shuningdek, $f(-x)=\sqrt[3]{-x-1}=-\sqrt[3]{x+1}\neq -f(x)$. Demak, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ toq ham emas, juft ham emas.

4. Monoton funksiyalar. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lsin.

3.17-ta'rif. Agar X to'plamdan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda bu funksiya X to'plamda *o'suvchi* deyiladi.

3.18-ta'rif. Agar X to'plamda olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *kamayuvchi* deyiladi.

3.19-ta'rif. Agar X to'plamda olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)\leq f(x_2)$ (yoki $f(x_1)\geq f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *kamaymaydigan* (yoki *o'smaydigan*) deyiladi.

O'suvchi, kamayuvchi, kamaymaydigan, o'smaydigan funksiyalar, bitta umumiy nom bilan *monoton funksiyalar* deyiladi (15-rasm).

3.20-misol. $y = 2x + 1$ funksiyaning aniqlanish sohasida o'suvchi ekanligini isbotlang.

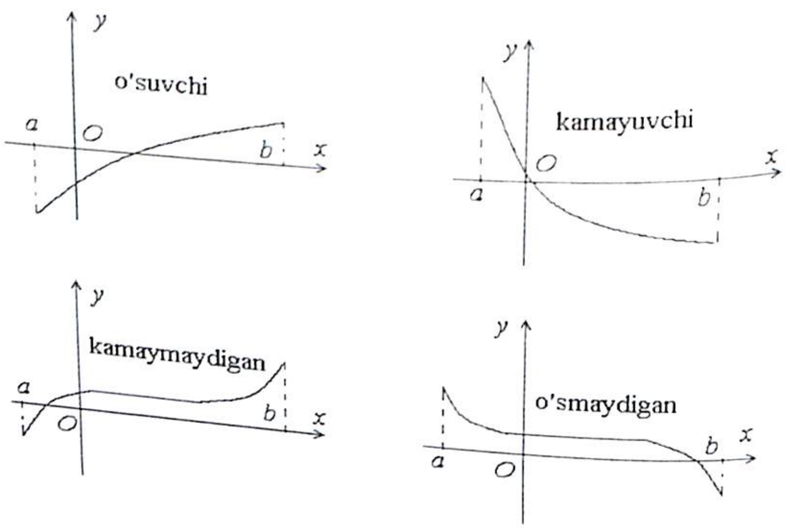
Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Agar $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $f(x_2) - f(x_1) = (2x_2 + 1) - (2x_1 + 1) = 2(x_2 - x_1) > 0$. Bundan $f(x_1) < f(x_2)$, demak berilgan funksiya o'suvchi.

3.21-misol. $f(x) = x^2$ funksiyaning $(-\infty; 0)$ da kamayuvchi ekanligini isbotlang.

Yechish. Haqiqatan, agar $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ va $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2)^2 - (x_1)^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0$$

bo'ladi, bundan $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqadi. Demak, berilgan funksiya kamayuvchi.



15-rasm

5. Teskari funksiya. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lib, $Y = E(f) = \{f(x): x \in X\}$ uning qiymatlar to'plami bo'lsin. Y to'plamdan olingan ixtiyoriy y_0 uchun, X to'plamda $y_0 = f(x_0)$ tenglikni qanoatlantiruvchi x_0 soni mavjud. Bunday son bitta, yoki bir nechta bo'lishi mumkin.

Agar Y dan olingan har bir y uchun X to'plamda $y = f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi x faqat bitta bo'lsa, u holda $x = \varphi(y)$ funksiyaga ega bo'lamiz. Bu funksiya $y = f(x)$ funksiyaga *teskari funksiya* deyiladi.

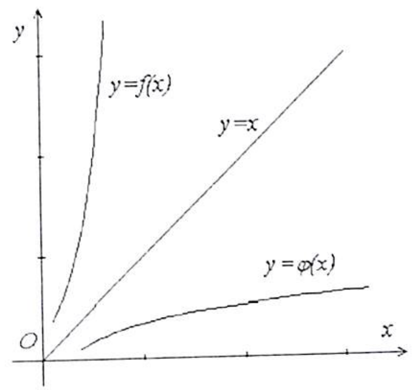
Masalan, $X = Y = (-\infty; +\infty)$ da berilgan $y = \sqrt[3]{x}$ funksiya $x = y^3$ funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

Ba'zan, $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiyani $x=f^{-1}(y)$ kabi ham belgilashadi.

Agar $x=\varphi(y)$ funksiya $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(y)$ funksiyaga teskari funksiya bo'ladi. Shu sababli, bu ikki funksiyani *o'zaro teskari funksiyalar* deyiladi.

Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiyada x argument, y funksiya deb yuritiladi. Unga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiyada x va y lar o'rnini almashtirib $y=\varphi(x)$ funksiyaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, bir xil belgilash bo'lganda ham, $y=\varphi(x)$ funksiya $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deb qaraladi.

O'zaro teskari $y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalarlarning grafiklari, $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi (14-rasm).



14-rasm

6. Davriy funksiyalar. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya berilgan va uning aniqlanish sohasi X bo'lsin.

3.22-ta'rif. Agar biror $T \neq 0$ son va ixtiyoriy $x \in X$ uchun, $f(x \pm T) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya *davriy funksiya*, T uning *davri* deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, $y = f(x)$ funksiya T davrli davriy funksiya bo'lishi uchun

a) uning aniqlanish sohasi X dan olingan ixtiyoriy x uchun $x + T, x - T$ ham X ga tegishli bo'lishi;

b) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(x \pm T) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

Agar shu shartlardan birortasi bajarilmasa, u holda $f(x)$ funksiya davriy funksiya bo'lmaydi.

Davriy funksiyaning eng kichik musbat davri (agar u mavjud bo'lsa), uning *asosiy davri* deyiladi.

3.23-misol. $f(x) = sin3x$ funksiyaning davriy ekanini ko'rsating va uning asosiy davrini toping.

Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y)$ $(-\infty; +\infty)$. Endi, $f(x+T) = f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi T ni topamiz. Shartga ko'ra, ixtiyoriy x uchun $sin3(x+T) = sin3x$ bo'lishi kerak. Bundan, $sin(3x+3T) - sin3x = 0$, sinuslar ayirmasini ko'paytmaga keltiramiz: $2cos(3x+T)\sin\frac{3T}{2} = 0$ kelib chiqadi. Oxirgi tenglik x ga bog'liq bo'lmagan holda bajarilishi uchun $\sin\frac{3T}{2} = 0$ bo'lishi shart. Bundan $\frac{3T}{2} = \pi n$, $T = \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$. Bu sonlarning har biri berilgan funksiyaning davri bo'ladi. Demak, funksiya davriy. Uning asosiy davri $\frac{2\pi}{3}$ ekanini ko'rish qiyin emas.

3.24-misol. $y = \sin\frac{1}{x}$ funksiya davriy emasligini ko'rsating.

Yechish. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ to'plamdan iborat. Agar funksiya davriy, davri T ga teng deb olsak, u holda $0+T, 0-T$ sonlar ham funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmasligi kerak. Ammo $\pm T \in D(y)$. Bu ziddiyat berilgan funksiyaning davriymasligini ko'rsatadi.

Mashq va masalalar

Funksiyalarni toq-juftlikka tekshiring (30-39):

3-30. $f(x) = x^2 + 1$.

3-31. $f(x) = x^3 + x$

3-32. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

3-33. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

3-34. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

3-35. $f(x) = \frac{1}{x+4}$

3-36. $f(x) = x^2 - 6x$

3-37. $f(x) = x^3 - 2$.

3-38. $f(x) = |x^3|$.

3-39. $f(x) = \sqrt{2x}$

3-40. Simmetrik to'plamda aniqlangan ixtiyoriy $f(x)$ funksiyani toq va juft funksiyalarning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkinligini isbotlang.

3-41. $f(x)=lg(x+\sqrt{x^2+1})$ funksiyani toq-juftlikka tekshiring.

3-42. Juft funksiyaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Isbotlang.

3-43. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Isbotlang.

3-44. Aytaylik $f(x), g(x)$ funksiyalar haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan, hamda $f(x)$-juft, $g(x)$-toq funksiya bo'lsin. Quyidagi funksiyalardan qaysilari juft, qaysilari toq, qaysilari juft ham emas, toq ham emas bo'ladi?

1) $f+g$, 2) $f-g$, 3) $f \cdot g$, 4) $\frac{f}{g}$, 5) $f^2 = f \cdot f$, 6) $g^2 = g \cdot g$,

7) $f \circ g$, 8) $g \circ f$, 9) $f \circ f$, 10) $g \circ g$.

3-45. f funksiya toq ham emas, juft ham emas, g funksiya juft, h funksiya toq bo'lsin. Quyidagilarni aniqlang: 1) $f+g$ a) juft, b) toq funksiya bo'lishi mumkinmi? 2) $f+h$ a) juft, b) toq funksiya bo'lishi mumkinmi?

3-46. f funksiya toq ham emas, juft ham emas, g funksiya juft, h funksiya toq hamda ixtiyoriy ikkitasining kompozitsiyasi aniqlangan. Kompozitsiya 1) juft funksiya; 2) toq funksiya bo'ladigan barcha kompozitsiyalarni ayting.

3-47. $f(x) = x^2 + 2x + 4$ funksiyaning $(-\infty, -1]$ oraliqda kamayuvchi ekanligini isbotlang.

3-48. $f(x) = x^3 + 1$ funksiyaning aniqlanish sohasida o'suvchi ekanligini isbotlang.

3-49. Agar $f(x)$ monoton funksiya bo'lsa, u holda a) $-f(x)$ monoton funksiya; b) $f(x) > 0$ bo'lsa, $1/f(x)$ monoton funksiya ekanligini isbotlang.

3-50. Monoton funksiyalarning kompozitsiyasi monoton funksiya bo'lishini isbotlang.

3-51. (a,b) oraliqda o'suvchi ikkita funksiyaga misol keltiringki, ularning ko'paytmasi a) (a,b) oraliqda o'suvchi, b) (a,b) oraliqda kamayuvchi; c) (a,b) oraliqda monoton bo'lmasin.

3-52. Qat'iy monoton funksiyaning o'zaro bir qiymatli ekanligini isbotlang.

3-53. O'zaro bir qiymatli, ammo monoton bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

3-54. Berilgan funksiyaga teskari funksiyani elementar funksiyalarda ifodalang, grafigini chizing: a) $y = sinx, x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$;

b) $y = cosx, x \in [-\pi, 0]$;

3-55. Agar $T \neq 0$ soni $y = f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda $nT, n \in Z$ son ham uning davri bo'lishini isbotlang.

3-56. Agar $T \neq 0$ soni $y = f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda $nT, n \in Z$ son ham uning davri bo'lishini isbotlang.

3-57. Berilgan funksiyalardan qaysilari davriy, qaysilari davriy emas? Agar funksiyaning asosiy davri mavjud bo'lsa, uni toping:

a) $f(x) = \sin 4x$; b) $f(x) = \cos^2 5x + 2$; c) $f(x) = \mathrm{tg}\frac{x}{3}$;

d) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$; e) $f(x) = x^2$; f) $f(x) = 3cos\sqrt{x}$.

3-58. Agar f va g funksiyalar davriy, davrlar nisbati ratsional son bo'lsa, u holda $f+g, f \cdot g$ funksiyalar ham davriy ekanligini isbotlang.

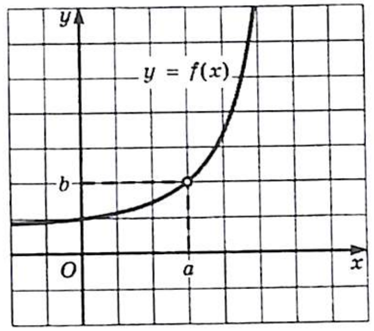
3-59. Ikkita f va g davriy bo'lmagan funksiyalarga misol keltiringki, a) $f+g$; b) $f \cdot g$ davriy hamda eng kichik musbat davri mavjud bo'lsin.

3-60. f davriy va g davriy bo'lmagan funksiyalarga misol keltiringki, a) $f+g$; b) $f \cdot g$ davriy hamda eng kichik musbat davri mavjud bo'lsin.

4-§. Funksiya limitining ta'riflari

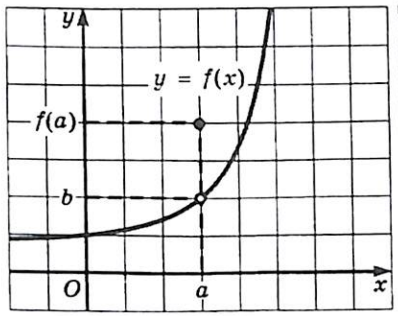
1. Funksiyaning nuqtadagi limiti haqida tushuncha

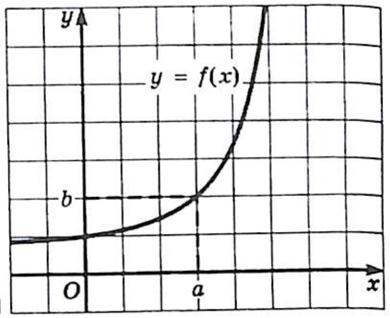
Grafiklari 16-18-rasmlarda keltirilgan funksiyalarni qaraylik. Barcha hollarda aynan bitta egri chiziq, lekin turli xil funksiyalar aks ettirilgan. Ular $x = a$ nuqtadagi holati bilan farq qiladi.



16-rasm

16-rasmda grafigi keltirilgan funksiya uchun $x=a$ da $f(a)$ qiymati mavjud emas, funksiya bu nuqtada aniqlanmagan. Grafigi 17-rasmda aks ettirilgan funksiya uchun $f(a)$ mavjud va u o'zining tabiiy b qiymatidan farq qiladi. Grafigi 18-rasmda ko'rsatilgan funksiya uchun ham $f(a)$ mavjud va u yaxshi, qulay joylashgan.





17-rasm 18-rasm

Agar $x = a$ nuqtani e'tiborga olmasak, uchala funksiya aynan bitta funksiya bo'lar edi.

Yuqoridagi uchala holda ham

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

yozuv ishlatiladi. O'qilishi "x a-ga intilganda $f(x)$ funksiya limiti b ga teng".

Yuqoridagi yozuvning mazmuni quyidagidan iborat, agar argumentining qiymati $x=a$ yaqin tanlansa, funksiya qiymati b limit qiymatidan kam farq qiladi. Boshqacha qilib aytsak, a nuqtaning yetarlicha kichik atrofida ushbu taqribiy tenglik o'rinli: $f(x) \approx b$.

Bu holda, ya'na bir bor ta'kidlaymizki, $x = b$ nuqta e'tiborga olinmaydi.

2. Funksiya limitining Geyne va Koshi ta'riflari

2.1. Funksiyaning nuqtadagi limiti. Endi funksiyaning nuqtadagi limiti tushunchasiga qat'iy matematik ta'riflar beramiz.

Funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti funksiyaning shu nuqtada aniqlanganligiga bo'g'liq emas, balki $x = a$ nuqtaning atrofidagi funksiyaning qiymatlariga bo'g'liq bo'ladi.

Aytaylik, biror X sonli to'plam berilgan bo'lsin.

3.25-ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy atrofida X to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, u holda a nuqta X to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

3.26-misol. $X_1 = [-3; 4]$ segmentning har bir nuqtasi uning limit nuqtasi bo'ladi. Bu to'plamning boshqa limit nuqtalari yo'q. Isbotlang.

Yechish. $X_1 = [-3; 4]$ segmentning har bir nuqtasi uning limit nuqtasi bo'lishi o'z-o'zidan ravshan. Aytaylik, $a < -3$ bo'lsin, u holda haqiqiy sonlarning zichlik xossasiga ko'ra $a < c < -3$ bo'ladigan c son mavjud. $\varepsilon = c - a$ deb olsak, a nuqtaning $\varepsilon = c - a$ atrofida $X_1 = [-3; 4]$ to'plamning birorta ham nuqtasi yo'q. Demak, a nuqta X_1 to'plamning limit nuqtasi emas. Shunga o'xshash, $a > 4$ bo'lganda ham, a nuqta X_1 to'plamning limit nuqtasi emasligi isbotlanadi.

To'plamga tegishli bo'lmagan nuqtalar ham shu to'plamning limit nuqtasi bo'lishi mumkinligini quyidagi misoldan ko'rinadi.

3.27-misol. 2 nuqta $X_2 = [0; 2)$ to'plamning limit nuqtasi ekanligini isbotlang.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. U holda $2 - \varepsilon < 2$ va haqiqiy sonlar to'plamining zichlik xossasiga ko'ra $2 - \varepsilon$ va 2 sonlari orasida X_2 to'plamning cheksiz ko'p, demak kamida bir nuqtasi mavjud. Bundan 2 berilgan to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

Limit nuqtaning yuqoridagi ta'rifiga teng kuchli bo'lgan yana bitta ta'rifini keltiramiz.

3.28-ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsa, u holda a nuqta X to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

Kelgusida quyidagi tasdiqdan foydalanamiz.

3.29-lemma. Agar a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda X to'plam nuqtalaridan tuzilgan va a ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}, x_n \neq a$ ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

Isbot. ◊ Aytaylik, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. U holda a nuqtaning har bir $(a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n})$ atrofida X to'plamning, a dan farqli kamida bitta x_n nuqtasi bor, ya'ni $a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$ bo'ladi. Bu qo'shtengsizlikda limitga o'tsak, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ kelib chiqadi. Bunda $x_n \neq a$ ekanligi ravshan. ◆

Shuni ham ta'kidlash kerakki, a nuqtaning ixtiyoriy atrofida X to'plamning a dan farqli cheksiz ko'p nuqtalari mavjudligi uchun, a ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketliklarni cheksiz ko'p usulda tanlab olish mumkin.

3.30-ta'rif. (Geyne). Agar X to'plamdan olingan va a ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ ketma-ketlik uchun, funksiya qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik, doim yagona b limitga ega bo'lsa, u holda b soni $f(x)$ funksiyaning a *nuqtadagi limiti* deyiladi.

Funksiya limiti $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ kabi belgilanadi, ba'zan "$x \to a$ da $f(x) \to b$" ko'rinishida ham yoziladi.

Odatda bu ta'rif funksiya limitining ketma-ketliklar tilidagi ta'rifi deyiladi.

3.31-misol. $f(x) = 3 - x^2$ funksiyaning $x = 1$ dagi limiti 2 ekanligini ko'rsating.

Yechish. $x_n \neq 1$ va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik olaylik. U holda yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar bajarish qoidalariga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(3 - x_n^2) = 3 - \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 3 - \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3 - 1 \cdot 1 = 2$.

Demak, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}(3 - x^2) = 2$.

3.32-misol. Geyne ta'rifidan foydalanib $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ tenglikni isbotlang.

Yechish. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ funksiya $x = 2$ nuqtada aniqlanmagan. $x \neq 2$ va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik olaylik. U holda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-4}{x_n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n-2}=\lim_{n\to\infty}(x_n+2)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}2=2+2=4$$ bo'ladi.

Demak, berilgan tenglik o'rinli.

Ko'p hollarda funksiya limitining Geyne ta'rifi funksiyaning limiti mavjudmasligini ko'rsatishda ishlatiladi. Buning uchun qaralayotgan nuqtaga yaqinlashuvchi shunday ikkita ketma-ketlik olish kerakki, ularga mos funksiyalar qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketliklar turli sonlarga intilishi lozim.

3.33-misol. Dirixle funksiyasining hech bir nuqtada limiti mavjud emasligini isbotlang.

Yechish. Dirixle funksiyasi ratsional sonlarda 1 qiymat, irratsional sonlarda 0 qiymat qabul qilar edi. Aytaylik, a ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsin. Shu songa yaqinlashuvchi $\{r_n\}$ ratsional sonlar ketma-ketligi mavjud. Unga mos funksiya qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik $\{1\}$ bo'lib, uning limiti 1 ga teng. Shu songa yaqinlashuvchi $\{\alpha_n\}$ irratsional sonlar ketma-ketligi ham mavjud. Unga mos funksiya qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik $\{0\}$, uning limiti 0 ga teng. Bundan a songa yaqinlashuvchi ketma-ketliklar uchun ularga mos funksiyalar qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketliklar yagona songa intilmaydi, demak limit mavjud emas. a ixtiyoriy haqiqiy son bo'lganligi sababli, Dirixle funksiyasi hech bir nuqtada limitga ega emas.

Funksiya limitini boshqacha "ε-δ" tilida ham ta'riflash mumkin.

3.34-ta'rif. (Koshi). Agar har bir, kichik ε>0 son uchun shunday bir δ>0 son mavjud bo'lib, x ning $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deyiladi.

3.35-misol. $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$ ekanini isbotlang.

Yechish. $f(x)=3x-1$ funksiyani qaraymiz va ixtiyoriy ε>0 son olamiz. U holda $|f(x)-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |3x-1-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |3(x-2)|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$

munosabatlardan ko'rinadiki, agar ε>0 son uchun $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ deb olsak, u holda $|x-2|<\delta$ bo'lganda, $|f(x)-5|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa, ta'rifga ko'ra $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$ ekanini bildiradi.

3.36-misol. $\lim_{x\to 3}(x^2-3)=6$ ekanini isbotlang.

Yechish. $f(x)=x^2-3$ bo'lsin. Ixtiyoriy ε>0 son olaylik. U holda $|f(x)-6|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2-3-6|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2-9|<\varepsilon$, bundan

$$|x+3||x-3|<\varepsilon \qquad (1)$$

munosabat o'rinli.

Agar δ ni 1 dan kichik deb olsak, u holda $|x-3|<\delta<1$ dan $2<x<4$ kelib chiqadi. x shu oraliqda o'zgarganda (1) tengsizlikning chap tomoni $7\cdot|x-3|$ dan katta bo'la olmaydi. Shu sababli $7\cdot|x-3|<\varepsilon$ deb olsak, (1) o'rinli bo'ladi.

Demak, $\delta=min\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$ deb olsak, u holda $|f(x)-6|=|x+3|\cdot|x-3|<7\cdot\frac{\varepsilon}{7}<\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa, ta'rifga ko'ra $\lim_{x\to 3}(x^2-3)=6$ ekanini bildiradi.

3.37-misol. Koshi ta'rifidan foydalanib $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ tenglikni isbotlang.

Yechish. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ funksiya $x=2$ nuqtada aniqlanmagan. Ixtiyoriy ε>0 son olamiz va $|f(x)-4|$ ifodani qaraymiz: $|f(x)-4|=$

$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-4\right|=|x+2-4|=|x-2|$. Bundan ko'rinadiki, agar ixtiyoriy ε>0 son uchun $\delta=\varepsilon$ deb olsak, $0<|x-2|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x larda $|f(x)-4|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Demak, ta'rif bo'yicha

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

3.38-ta'rif. Agar ixtiyoriy Δ>0 son uchun shunday bir δ>0 son mavjud bo'lib, $x\in X$ ning $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)|>\Delta$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x nuqta $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deyiladi. Bu hol $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ orqali belgilanadi

Agar x ning a ga yetarlicha yaqin qiymatlarida $f(x)>0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, agar $f(x)<0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ kabi yoziladi.

3.39-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$ ekanligini isbotlang.

Yechish. $f(x)=\frac{1}{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, $a=1$ uning limit nuqtasi. Ta'rif bo'uicha ixtiyoriy $\Delta>0$ son uchun shunday bir $\delta>0$ son mavjud bo'lib, aniqlanish sohasiga tegishli x ning $0<|x-1|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $\left|\frac{1}{x-1}\right|>\Delta$ tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatishimiz kerak.

$\left|\frac{1}{x-1}\right|>\Delta$ tengsizlikdan $|x-1|<\frac{1}{\Delta}$ ni hosil qilamiz. Agar ixtiyoriy $\Delta>0$ son uchun $\delta=\frac{1}{\Delta}$ ni olsak, u holda $0<|x-1|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $\left|\frac{1}{x-1}\right|>\Delta$ o'rinli bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

2.2. Funksiyaning bir tomonli limitlari.

3.40-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\delta>0$ uchun $(a-\delta;a)$ intervalda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, u holda a nuqta X to'plamning *chap limit* nuqtasi deyiladi.

Masalan, (2,4) imterval uchun 4 chap limit nuqta bo'ladi.

3.41-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\delta>0$ uchun $(a;a+\delta)$ intervalda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, u holda a nuqta X to'plamning *o'ng limit* nuqtasi deyiladi.

Masalan, (2,4) imterval uchun 2 o'ng limit nuqta bo'ladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lib, a nuqta X to'plamning chap (yoki o'ng) limit nuqtasi bo'lsin.

3.42-ta'rif (Geyne). Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi a dan katta (mos ravishda, kichik) bo'lib, a ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik olganimizda ham, funksiya qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik doim yagona

b ga intilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *o'ng* (mos ravishda, *chap*) *limiti* deyiladi.

Funksiyaning o'ng limitini $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ yoki $f(a+0)=b$, chap limitini $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ yoki $f(a-0)=b$ orqali belgilanadi. Agar $a=0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=f(+0)$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=f(-0)$ kabi belgilash ishlatiladi.

3.43-misol. Ushbu $f(x)=\begin{cases} x-4, agar & x<2, \\ x^2, agar & x\geq 2\end{cases}$ funksiyaning $x=2$ nuqtadagi chap va ong limitlarini hisoblang.

Yechish. Agar $x_n<2$ shartlar bilan 2 ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik olsak, u holda $f(x_n)=x_n-4$ va $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-4)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n-\lim\limits_{n\to\infty}4$ $=2-4=-2$ bo'ladi.

Agar $x_n>2$ shartlar bilan 2 ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik olsak, u holda $f(x_n)=x_n^2$ va $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2=4$ bo'ladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=4$. Bu misolda chap va o'ng limitlar mavjud, ammo bir-biriga teng emas.

Funksiyaning chap va o'ng limitlariga "ε-δ" tilida ham ta'rif berish mumkin.

3.44-ta'rif (Koshi). Agar har qanday, kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday bir $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $x\in X$ ning $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *o'ng (chap)* limiti deyiladi.

Funksiyaning chap va o'ng limitlari uning *bir tomonli limitlari* deb yuritiladi. Agar a nuqta, bir vaqtda X to'plamning ham chap, ham o'ng limit nuqtasi bo'lsa, u holda quyidagi teorema o'rinli.

3.45-teorema. $f(x)$ funksiya, a nuqtada limitga ega bo'lishi uchun, shu nuqtada uning chap va o'ng limitlari mavjud bo'lib, $f(a-0)=f(a+0)$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli

Isbot (3-62-masala).

2.3. Funksiyaning cheksizdagi limitining ta'rifi.

3.46-ta'rif. Ixtiyoriy $\Delta>0$ son uchun $(\Delta; +\infty)$ interval $+\infty$ «nuqta»ning, $(-\infty;\Delta)$ interval $-\infty$ «nuqta»ning, $(-\infty;\Delta)\cup(\Delta;+\infty)$ to'plam esa ∞ «nuqta»ning *atrofi* deyiladi.

Qolaversa, ∞, $+\infty$, $-\infty$ «nuqta»lar bu to'plamlarga limit nuqta bo'lishi yuqoridagi kabi ta'riflanadi. Bu holda ham, mos ravishda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ bo'ladigan $\{x_n\}$ ketma-ketliklarni cheksiz ko'p usullarda tanlab olish mumkin.

3.47-ta'rif. (Geyne). Agar X to'plamdan olingan va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ bo'lgan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun, funksiya qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik, har doim yagona b limitga ega bo'lsa, u holda b soni $f(x)$ funksiyaning cheksizdagi ("∞" nuqtadagi) *limiti* deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Shunga o'xshash funksiyaning $-\infty$, $+\infty$ nuqtalardagi *limitlariga* ta'rif berish mumkin.

3.48-misol. $f(x)=\sin x$ funksiyaning $x\to+\infty$ da limitga ega emasligini ko'rsating.

Yechish. Limiti $+\infty$ bo'lgan $x_n=n\pi$ yoki $x_n' = (2n + \frac{1}{2})\pi$ ketma-ketliklarni olaylik. U holda $f(xn) = sinn\pi = 0, f(x_n') = sin(2n + \frac{1}{2})\pi = 1$ bo'lgani uchun, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0, \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$ bo'ladi. Bu esa, $x\to+\infty$ da $f(x)=\sin x$ funksiyaning limiti yo'qligini ko'rsatadi, chunki ta'rif bo'yicha limit yagona bo'lishi kerak.

Yuqorida funksiyaning nuqtadagi va cheksizdagi chekli limitlariga ta'riflar berildi. Shunga o'xshash holda funksiyaning nuqtadagi va cheksizdagi cheksiz limitlariga ta'riflar berish mumkin (63-65-masalalar).

Mashq va masalalar

3-61. To'plamning limit nuqtasiga berilgan ta'riflarning ekvivalentligini, ya'ni quyidagi teoremani isbotlang: a nuqta X to'plamning *limit nuqtasi* bo'lishi

uchun a nuqtaning ixtiyoriy atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lishi zarur va yetarli.

3-62. 3.45-teoremani isbotlang.

3-63. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ni ta'riflang. Geometrik talqin bering.

3-64. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ ni ta'riflang. Geometrik talqin bering.

3-65. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ ni ta'riflang. Geometrik talqin bering.

3-66. δ ning qanday musbat qiymatlarida $0 < |x - x_0| < \delta$ tengsizlikdan $|f(x) - a| < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi? Bu yerda

a) $f(x) = x^2, x_0 = 3, a = 9, \varepsilon = 0{,}001;$

b) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3},\ x_0 = 3;\ a = \frac{1}{2},\ \varepsilon = 0{,}01;$

c) $f(x) = cosx, x_0 = \pi;\ a = -1, \varepsilon = 0{,}001.$

3-67. δ ning qanday musbat qiymatlarida $|x - 1| < \delta$ tengsizlikdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi? Bu yerda

a) $|lgx| < 2;$ b) $|lgx| < 1;$ c) $|lgx| < 0{,}1;$ d) $|lgx| < 0{,}01.$

3-68. Har bir $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son ko'rsatinki, $|x - 1| < \delta$ tengsizlikdan $\left|\frac{3x^2-4x+1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqsin.

Funksiyaning nuqtadagi limitining Geyne ta'rifidan foydalanib, limitni toping (69-72):

3-69. $\lim\limits_{x\to-1} (4x + 3).$ 3-70. $\lim\limits_{x\to2}(x^2 - 4x + 8).$

3-71. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}.$ 3-72. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2+5}{x^2-1}$

Funksiyaning nuqtadagi limitining Koshi ta'rifidan foydalanib tenglikni isbotlang (73-76):

3-73. $\lim\limits_{x\to0}(3x - 2) = -2.$ 3-74. $\lim\limits_{x\to1}(-x + 4) = 3.$

3-75. $\lim\limits_{x\to3} x^2 = 9.$ 3-76. $\lim\limits_{x\to5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}.$

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti mavjud emasligini isbotlang(77-78):

3-77. $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 0.$ 3-78. $f(x) = \begin{cases} x^2, agar\ x \geq 2\ bolsa, \\ x,\ agar\ x < 2\ bo'lsa \end{cases},\ x_0 = 2.$

3-79. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limitning mavjudmasligini isbotlang:

a) $f(x) = arcctg\frac{1}{x}$; b) $f(x) = signsin\frac{1}{x}$.

3-80. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ni toping. Bu yerda $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & agar\ x = \frac{p}{q},\ (p,q) = 1, \\ 0, & x\ irratsional\ son \end{cases}$

3-81. Koshi ta'rifidan foydalanib $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ ekanligini isbotlang, bu yerda $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x-1} + 1, x_0 = 1$. Berilgan ε ga ko'ra δ ni toping: 1) $= \frac{1}{2}$; 2) $\varepsilon = 0{,}01$.

Ko'rsatilgan nuqtadagi bir tomonli limitlarni hisoblang(82-83):

3-82. $f(x) = [x], x_0 = 2$.

3-83. $f(x) = \begin{cases} -2, agar\ x \le 1\ bo'lsa, \\ \frac{x}{3}, agar\ x > 1\ bo'lsa \end{cases}$, a) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 9$.

5-§. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan va a son X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3.49-xossa. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ limit mavjud bo'lib, $b>p$ ($b<q$) bo'lsa, u holda $x\in X$ ning a ga yetarlicha yaqin ($x\neq a$) qiymatlarida $f(x)>p$ ($f(x)<q$) bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ bo'lib, $b>p$ bo'lsin. U holda $\varepsilon>0$ sonni $0<\varepsilon<b-p$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. Limit ta'rifiga ko'ra bu $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son topilib, $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x\in X$ larda $|f(x)-b|<\varepsilon$ bo'ladi. Bundan $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ kelib chiqadi. Agar $b-\varepsilon>p$ tengsizlikni hisobga olsak, u holda $f(x)>p$ ni hosil qilamiz. ◆

3.50-xossa. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ limit mavjud bo'lib, $b>0$ ($b<0$) bo'lsa, u holda $x\in X$ ning a ga yetarlicha yaqin ($x\neq a$) qiymatlarida $f(x)>0$ ($f(x)<0$) bo'ladi.

Isbot. ◊ Yuqoridagi isbotda $p = 0$ deb olish yetarli. ◆

3.51-xossa. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ limit mavjud bo'lsa, u holda $x\in X$ ning a ga yaqin ($x\neq a$) qiymatlarida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

Isbot. ◊ Limit ta'rifiga ko'ra $\varepsilon>0$ son uchun, shunday bir $\delta>0$ son topilib, $x\in X$ ning $a-\delta<x<a+\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi, a dan farqli barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ yoki $b-\varepsilon< f(x)<b+\varepsilon$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya x ning $(a-\delta;a+\delta)\backslash\{a\}$ to'plamdagi barcha qiymatlarida chegaralangan ekan. ◆

3.52-xossa. Agar a nuqtaning atrofidan olingan, a dan farqli barcha x nuqtalarda $f(x) \le g(x) \le \varphi(x)$ tengsizlik o'rinli va $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ va $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$ lar mavjud bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ham mavjud bo'ladi va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Shartga ko'ra $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. U holda $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta_1>0$ topilib, $0<|x-a|<\delta_1$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan barcha x larda $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ bo'ladi.

Shuningdek, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=b$ bo'lganidan, shu $\varepsilon>0$ uchun $\delta_2>0$ son topilib, $0<|x-a|<\delta_2$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan barcha x larda $b-\varepsilon<\varphi(x)<b+\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$ deb olsak, u holda $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ va $b-\varepsilon<\varphi(x)<b+\varepsilon$ tengsizliklarning ikkalasi ham o'rinli bo'ladi.

Endi, $f(x)\le g(x)\le\varphi(x)$ ekanini e'tiborga olsak, u holda oxirgi tengsizliklardan $b-\varepsilon<g(x)<b+\varepsilon$ kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$. ◆

3.53-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ da limitga ega bo'lsa, u holda bu limit yagona bo'ladi.

Isbot. ◊ Ketma-ketliklar uchun aytilgan, xuddi shunga o'xshash xossa isboti kabi ko'rsatiladi. ◆

6-§. Limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida amallar

1. Limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda berilgan bo'lib, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3.54-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo'lsa, u holda a) $f(x) \pm g(x)$, b) $f(x)\cdot g(x)$, c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$) funksiyalarning har biri limitga ega bo'ladi va a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$, b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$, c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ formulalar o'rinli.

Isbot. ◊ Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ bo'lsin. U holda X to'plamdagi a yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$, $x_n\neq a$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=c$ bo'ladi.

Bulardan $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)\pm g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b\pm c$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x\to a}(f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim\limits_{x\to a} f(x_n) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x_n)$.

Xuddi shu kabi qolgan formulalarni ham isbotlash mumkin. ◆

3.55-natija. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega bo'lsa, u holda $kf(x)$ funksiya ham limitga ega bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}(kf(x)) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$ bo'ladi. Bu yerda k biror tayin, o'zgarmas son.

Isbot. ◊ 54-teoremaning b) holida $g(x)=k$ deb olsak, $\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f(x)) = \lim\limits_{x\to a} k\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$ bo'ladi. ◆

2. Murakkab funksiyaning limiti. Aytaylik, $y=f(u)$ funksiya U to'plamda berilgan va c son U to'plamning limit nuqtasi, $u=g(x)$ funksiya X to'plamda berilib, a son X to'plamning limit nuqtasi va $E(g)\subset U$ bo'lsin. Shuningdek, a nuqtaning biror $(a-\delta; a+\delta)$ atrofidagi barcha nuqtalarda $g(x)\neq c$ bo'lsin. Bu holda X to'plamda $f(g(x))$

murakkab funksiya aniqlangan bo'ladi. Bu murakkab funksiyaning limiti uchun quyidagi teorema o'rinli.

3.56-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ va $\lim\limits_{u\to c} f(u)=b$ bo'lsa, u holda $x\to a$ da $f(g(x))$ murakkab funksiya ham limitga ega bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=b$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Agar $\lim\limits_{u\to c} f(u)=b$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra har bir $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\sigma>0$ son mavjud bo'lib, $0<|u-c|<\sigma$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $u\in U$ larda $|f(u)-b|<\varepsilon$ bo'ladi. Shuningdek, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ bo'lsa, yuqoridagi $\sigma>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ larda $|g(x)-c|<\sigma$ bo'ladi. Demak, $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ larda $|f(g(x))-b|<\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa, $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=b$ ekanligini ifodalaydi. ◆

3. Aniqmas ifodalar. Xuddi ketma-ketliklardagi kabi, ba'zan limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar bajarish, ayrim aniqmasliklarga olib keladi. Quyida shunday hollarni ko'rib o'tamiz.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda aniqlangan va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

a) Agar $x\to a$ da $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ bo'lsa, u holda $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ifoda «$\dfrac{0}{0}$» ko'rinishdagi aniqmaslik deyiladi.

b) Agar $x\to a$ da $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ bo'lsa, u holda $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ifoda «$\dfrac{\infty}{\infty}$» ko'rinishdagi aniqmaslik deyiladi.

c) $x\to a$ da $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ bo'lsa, u holda $f(x)\cdot g(x)$ ko'paytma «$0\cdot\infty$» ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi.

d) $x\to a$ da $f(x)\to+\infty$ $(-\infty)$, $g(x)\to-\infty$ $(+\infty)$ bo'lsa, u holda $f(x)+g(x)$ yig'indi «$\infty-\infty$» ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi.

Shuningdek, «0^0», «1^∞», «∞^0» ko'rinishidagi aniqmasliklar ham uchraydi. Bunday aniqmasliklarni yechish davomida, misollar xarakteriga qarab turli usullar qo'llaniladi.

3.57-misol $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ ni hisoblang.

Yechish Ko'rinib turibdiki, bu ifoda «$\frac{0}{0}$» ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4.$$

3.58-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{2x^3+1}$ limitni hisoblang.

Yechish. Bu ifoda «$\frac{\infty}{\infty}$» ko'rinishdagi aniqmaslik ekani ravshan.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-1}{2x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Mashq va masalalar

3-84. Ushbu tasdiqni isbotlang. Agar a nuqtaning atrofidan olingan, a dan farqli barcha x nuqtalarda $f(x)\ge b$ tengsizlik o'rinli va $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ge b$ bo'ladi. (Bu tasdiq tengsizlikda limitga o'tish haqidagi teorema deb ataladi).

Limitlarni toping (85-106):

3-85. $\lim\limits_{x\to -2}(5x^2+2x-1)$

3-87. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2-x}$ 3-86. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x+1}{x^3-2x+3}$

3-89. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$ 3-88. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2^x-8}{2^x+8}$

3-91. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^3+1}$ 3-90. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-3x^2+x}{2x}$

3-93. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$ 3-92. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x^2-x-1}{-6x^2+5x+4}$

3-94. $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x^2+7x+6}{x^3+6x^2+3x+18}$

3-95. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$ 3-96. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x}-4}$

3-97. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$ 3-98. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$

3-99. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$ 3-100. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{x-3}}$

3-101. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+5x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$ 3-102. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x^2}{x^2+7x-2}$

3-103. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$ 3-104. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-2x}{2x^3+x^2+1}$

3-105. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$ 3-106. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-3}-x\right)$

3-107. Ushbu tasdiqni isbotlang: agar $\lim\limits_{x\to a} f_k(x), k=\overline{1,n}$ mavjud bo'lsa, u holda

a) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+\dots+f_n(x))=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\dots+\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x))=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

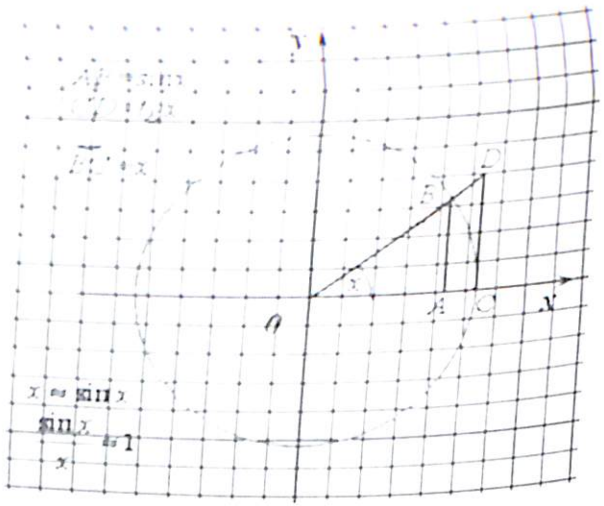
formulalar o'rinli.

3-108. Aytaylik $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ va $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$ bo'lsin. $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))=a$ kelib chiqadimi? Javobingizni asoslang.

7-§. Ba'zi bir ajoyib limitlar

Limitlarni hisoblashga doir mashqlarda ba'zi bir ifodalarning limiti ko'p marta uchraydi. Shuning uchun ularni alohida ko'rib chiqamiz.

3.59-teorema. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ tenglik o'rinli.



19-rasm

Isbot. ◊ Ma'lumki, $0<x<\frac{\pi}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $\sin x<x<\operatorname{tg}x$ qo'sh tengsizlik o'rinli (19-rasm). Shuningdek, $\sin x>0$ bo'lgani uchun bu tengsizlikni $\sin x$ ga bo'lsak, $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ hosil bo'ladi. Bundan $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ kelib chiqadi. Uni (-1) ga ko'paytirib, 1 ni qo'shsak, $0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$ tengsizlikka kelamiz. Endi, $\frac{\sin x}{x}$, $\cos x$ juft funksiyalar bo'lgani uchun bu tengsizlik x ni $-x$ bilan almashtirganda ham o'zgarmaydi. Shu sababli, oxirgi tengsizlik 0 dan farqli barcha $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ larda o'rinli. Qolaversa, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lgan x larda $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2|\sin\frac{x}{2}|<2|\frac{x}{2}|=|x|$ bo'ladi. Bulardan, $|1-\frac{\sin x}{x}|<|x|$ tengsizlik hosil bo'ladi. Bundan $x \to 0$ da $1-\frac{\sin x}{x} \to 0$, ya'ni $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ kelib chiqadi. ◆

Odatda bu tenglik *birinchi ajoyib limit* deb yuritiladi.

3.60-natija. Quyidagi tengliklar o'rinli:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$.

Isbot. ◊ a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1.$◆

3.61-teorema. Ushbu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ tenglik o'rinli.

Isbot. ◊ Avval $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ekanligini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $\{x_k\}$ ketma-ketlik $+\infty$ ga intiluvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin: $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}=+\infty$. U holda, barcha k lar uchun $x_k>1$ deb qarash mumkin. Endi, x_k ning butun qismini n_k orqali belgilaylik, ya'ni $n_k=[x_k]$. Shunday qilib, $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ ketma-ketlik $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi bo'ladi. Endi, $n_k\le x_{n_k}\le n_k+1$ dan

$$\frac{1}{n_k+1}<\frac{1}{x_k}\le\frac{1}{n_k} \text{ va } \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}\le\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Shu sababli,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}:\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)\right)=e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right)=e$$

bo'ladi va oraliq ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga asosan $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e$ kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Agar oxirgi tenglikda $x=-y$ almashtirish bajarsak, u holda $x\to-\infty$ da $y\to+\infty$ bo'ladi va $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$ munosabatlarga ko'ra

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right)=e$$

kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Isbotlangan bu ikki tenglikdan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ bo'ladi. ◆

Oxirgi tenglikdan $\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$ ekanligini keltirib chiqarish mumkin.

Haqiqatan, $x=\frac{1}{y}$ almashtirish kiritsak, $y\to0$ da $x\to\infty$ bo'lib, $\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ kelib chiqadi.

Murakkab funksiyaning limiti haqidagi teorema yordamida quyidagi tengliklarni keltirib chiqarish mumkin:

3.62-natija. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$, xususan $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ tenglik o'rinli.

Isbot. ◊ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$. ◆

3.63-natija. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, xususan $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ tenglik o'rinli.

Isbot. ◊ Agar $y=a^x-1$ desak, u holda $a^x=1+y$ yoki $x=\log_a(1+y)$ bo'lib, $x\to0$ da $y\to0$ bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a$. ◆

3.64-natija. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$ tenglik o'rinli.

Isbot. ◊ Agar $y=(1+x)^{\mu}-1$ desak, u holda $(1+x)^{\mu}=1+y$ yoki $\mu\ln(1+x)=\ln(1+y)$ bo'lib, $x\to0$ da $y\to0$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to0}\frac{y\cdot\mu\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+y)}=\mu\lim_{x\to0}\left(\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\mu. \text{◆}$$

3.65-misol. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{x\sin2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{x\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x}{x\sin2x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\cdot2=4$.

3.66-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{3x}=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right)^{3}\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-3}=e^{3}\cdot1=e^{3}.$$

3.67-misol. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1-2x}-1}{3x}$ limitni hisoblang.

Yechish. 64-natijaga ko'ra

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1-2x}-1}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{(1-2x)^{\frac{1}{n}}-1}{-2x}\cdot(-2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot(-2)=-\frac{2}{3n}.$$

8-§. Funksiyalarning limitga ega bo'lish shartlari

1. Monoton funksiyaning limiti. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va a nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lib, barcha $x\in X$ lar uchun $x\leq a$ bo'lsin.

3.68-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda u a nuqtada limitga ega, agar yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $+\infty$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralangan bo'lsin, ya'ni $\{ f(x) : x \in X \}$ to'plam yuqoridan chegaralangan. Bizga ma'lumki, bu to'plam aniq yuqori chegaraga ega. Uni b orqali belgilaylik: $b=\sup\{f(x): x\in X\}$. Endi, b son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti bo'lishini ko'rsatamiz.

Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra, barcha $x\in X$ lar uchun $f(x)\le b$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun biror $x' \in X$ topilib, $f(x') > b - \varepsilon$ bo'ladi. Berilishiga ko'ra $f(x)$ funksiya o'suvchi. Ya'ni, barcha $x' < x$ larda $f(x') < f(x)$ bo'ladi. Bundan $b - \varepsilon < f(x) < b < b + \varepsilon$ tengsizlikni hosil qilamiz. Agar $\delta = a - x'$ deb olsak, u holda $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak, ta'rifga binoan, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Endi, Aytaylik, $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralanmagan bo'lsin. U holda qanday $\Delta>0$ katta son olmaylik, shunday $x' \in X$ mavjud bo'lib, $f(x') > \Delta$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lganligi uchun $x > x'$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ larda ham $f(x) > \Delta$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$. ♦

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lib, barcha $x \in X$ lar uchun $x \le a$ bo'lsin.

3.69-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda u a nuqtada limitga ega, agar quyidan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $-\infty$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Bu teorema ham yuqoridagi kabi isbotlanadi (3-124-masala). ♦

2. Funksiya limitga ega bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3.70-teorema (Koshi alomati). $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud bo'lishi uchun, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ songa mos shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, $0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha $x', x'' \in X$ larda $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli

Isbot ([1], 143-bet; [7], 89-bet).

9-§. Cheksiz kichik funksiyalar va ularni taqqoslash

1. Cheksiz kichik funksiyalarning xossalari. Aytaylik, $y=\alpha(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3.71-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da *cheksiz kichik funksiya* deyiladi.

Cheksiz kichik funksiyalarni qisqacha, *cheksiz kichik* deyiladi.

Masalan, $\alpha(x)=x^2+x^3$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kichik, $\beta(x) = x^2 - 4$ funksiya $x\to 2$ da cheksiz kichik.

Cheksiz kichik funksiyalar ham cheksiz kichik ketma-ketliklardagiga o'xshash quyidagi xossalarga ega.

3.72-xossa. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning yig'indisi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

3.73-xossa. Cheksiz kichik funksiya va chegaralangan funksiya ko'paytmasi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

3.74-misol. Ushbu $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ funksiyaning $x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko'rsating.

Yechish. Berilgan funksiyani $\alpha(x) = x^2$ va $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksiyalarning ko'paytmasi ko'rinishda yozish mumkin. $x \to 0$ da $\alpha(x) = x^2$ cheksiz kichik funksiya ekanligi ravshan. $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksiya aniqlanish sohasida chegaralangan: $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$. U holda yuqorida isbotlangan xossaga ko'ra $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ funksiya $x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

2. Cheksiz kichiklarni taqqoslash. Aytaylik, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x \to a$ da cheksiz kichik bo'lsin.

3.75-ta'rif. Agar, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$ limit mavjud va $c \neq 0$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichiklar, $x \to a$ da *bir xil tartibli* deyiladi.

3.76-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichiklar $x \to a$ da *ekvivalent* deyiladi. Bu hol $\alpha \sim \beta$ ko'rinishida yoziladi.

3.77-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ cheksiz kichik, $x \to a$ da $\beta(x)$ cheksiz kichikka nisbatan *yuqori tartibli cheksiz kichik* deyiladi.

Bu hol $\alpha(x) = o(\beta(x))$ kabi belgilanadi.

3.78-misol. $x \to 0$ da $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = x$ funksiyalar ekvivalent cheksiz kichiklar ekanligini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatdan, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Demak, 3.76-ta'rifga ko'ra $\sin x \sim x$.

3.79-misol. $x \to 0$ da $1-\cos 2x$ funksiya x ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik bo'lishini ko'rsating.

Yechish. 3.77-ta'rifni bajarilishini ko'rsatish yetarli.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 x}{x} = 2\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$. Bundan $1-\cos 2x$ funksiya x ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik. Demak, $1 - \cos x = o(x)$.

3.80-misol. $x \to 0$ da $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1$ va $\beta(x) = x$ lar bir xil tartibli cheksiz kichiklar ekanini isbotlang.

Yechish. 3.75-ta'rifning bajarilishini ko'rsatish yetarli.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x \cdot \left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \frac{1}{2}.$$

demak, berilgan cheksiz kichiklar bir xil tartibli ekan.

3. Ekvivalent cheksiz kichiklar yordamida limitlarni topish.

3.81-teorema. Agar $x \to a$ da $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ va $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ bo'lib, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ham mavjud bo'lib, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x) \cdot \alpha_1(x) \cdot \beta_1(x)}{\beta(x) \cdot \alpha_1(x) \cdot \beta_1(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \cdot \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. ◆

3.82-misol. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x \sin x}$ limitini toping.

Yechish. $1-\cos 3x = 2\sin^2 \dfrac{3x}{2} \sim 2\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2 = \dfrac{9x^2}{2}$. Shuningdek, $x \sim \sin x$ dan $x\sin x \sim x^2$ kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{9x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{9}{2}$.

3.83-misol. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(3x^2 + 4x^5 + x^6\right)^3}{\sqrt{x^8 + 4x^{10}}}$ limitni toping.

Yechish. $(3x^2+4x^5+x^6)^3 \sim (3x^2)^3 = 27x^6$, $\sqrt{x^8 + 4x^{10}} \sim \sqrt{x^8} = x^4$ munosabatlarga ko'ra $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(3x^2 + 4x^5 + x^6\right)^3}{\sqrt{x^8 + 4x^{10}}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{27x^6}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} 27x^2 = 0$.

Mashq va masalalar

Limitlarni toping (109-116):

3-109. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$

3-110. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, 2x}{\sin 5x}$

3-111. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

3-112. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot ctg\, x$.

3-113. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\, 2x}{x}$

3-114. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2}$

3-115. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x}$

3-116. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{tg\, 4x}$

Limitlarni toping (117-125):

3-117. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[2x]{1 + 3x}$.

3-118. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)^x$.

3-119. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3-120. $\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$.

3-121. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$.

3-122. $\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

3-123. $\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

3-124. $\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+3)-\ln x]$.

3-125. 3.69-teoremani isbotlang.

IV BOB. UZLUKSIZ FUNKSIYALAR

1-§. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi, nuqtada uzluksiz funksiyalarning xossalari

Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u funksiya limiti tushunchasi bilan bevosita bog'liq.

4.1-ta'rif. Agar $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak: 1) $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada aniqlangan; 2) $\lim_{x\to a} f(x)$ mavjud; 3) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Funksiyaning nuqtada uzluksizligiga Geyne, Koshi ta'riflarini ham berish mumkin (1, 3-masalalar).

4.2-misol. $y=f(x)$ funksiyani $x=a$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring:

a) $f(x)=x^2-5$, $a=2$; b) $f(x)=[x]$, $a=2$; c) $f(x)=[x]$, $a=2,5$.

Yechish. a) funksiya $a=2$ nuqtada aniqlangan va $f(2)=-1$; $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2-5)=4-5=-1$ mavjud va $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Demak, funksiya $a=2$ nuqtada uzluksiz.

b) funksiya $a=2$ nuqtada aniqlangan va $f(2)=2$; $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}[x]$ mavjud emas, chunki $f(x-0)=\lim_{x\to 2-0}[x]=1$, $f(x+0)=\lim_{x\to 2+0}[x]=2$. Demak, funksiya $a=2$ nuqtada uzilishga ega.

c) funksiya $a=2,5$ nuqtada aniqlangan va $f(2)=[2,5]=2$; $\lim_{x\to 2,5} f(x)=\lim_{x\to 2,5}[x]=2$ mavjud va $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Demak, funksiya $a=2,5$ nuqtada uzluksiz.

Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalariga kabi uzluksiz funksiyalar ham quyidagi xossalarga ega.

4.3-teorema. Aytaylik $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X oraliqda aniqlangan va $a\in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda

1) a nuqtaning $(a-\delta, a+\delta), \delta>0$ atrofi mavjud bo'lib, bunda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi;

2) agar $f(a)>0, f(a)<0$ bo'lsa, a nuqtaning $(a-\delta, a+\delta), \delta>0$ atrofi mavjud bo'lib, bu atrofdan olingan ixtiyoriy x uchun $f(x)>0, f(x)<0$ bo'ladi.

3) $y=f(x)+g(x)$ va $y=f(x)-g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'ladi;

4) $y=f(x)\cdot g(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi;

5) agar $y=g(x)$ funksiya a nuqtada nolga teng bo'lmasa, u holda $y=f(x)/g(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. (4-5-masala)

4.5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $g(u)$ funksiya $u_0=f(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $g(f(x))$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))=g(f(x_0))$.

Isbot. (4-7-masala)

4.6-misol. $y=\sqrt{x^2+1}$ funksiyani $x=0$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. $y=\sqrt{x^2+1}$ funksiyani $u=x^2+1$, $y=\sqrt{u}$ funksiyalardan tuzilgan murakkab funksiya deb qaraymiz. $u=x^2+1$ funksiya $x=0$ nuqtada, $y=\sqrt{u}$ funksiya $u=1$ nuqtada uzluksiz. Demak murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremaga ko'ra $y=\sqrt{x^2+1}$ funksiyani $x=0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

4.7-ta'rif. Aytaylik $f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan va $a\in X$ bo'lsin. Agar $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ $\left(f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)\right)$ bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya a nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

4.8-misol. $y=x^3$ funksiyaning ixtiyoriy $x_0\in R$ nuqtada o'ngdan va chapdan uzluksiz ekanligini ko'rsating.

Yechish. $\lim\limits_{x\to x_0-0} x^3=x_0^3$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} x^3=x_0^3$, demak $y=x^3$ funksiyaning ixtiyoriy $x_0\in R$ nuqtada o'ngdan va chapdan uzluksiz.

4.9-misol. $y=\begin{cases}2x, & x\ge 0,\\ 3+x, & x<0\end{cases}$ funksiyani $x=0$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymatini, o'ng va chap limitlarini hisoblaymiz: $y(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0-0} y=\lim\limits_{x\to 0-0}(3+x)=3$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y=\lim\limits_{x\to 0+0}(2x)=0$. Bundan $y(0+0)=y(0), y(0-0)\neq y(0)$, demak berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o'ngdan uzluksiz, chapdan uzilishga ega.

4.10-misol. $y=signx$ funksiyani $x=0$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymatini, o'ng va chap limitlarini hisoblaymiz: $y(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0-0} y=(-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y=1=1$. Bundan $y(0+0)\neq y(0), y(0-0)\neq y(0)$, demak berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o'ngdan ham, chapdan ham uzilishga ega.

4.11-teorema. Aytaylik $f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan va $x_0\in X$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun uning shu nuqtada chapdan va o'ngdan uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. (4-13-masala)

4.12-ta'rif. X oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz, a nuqtada o'ngdan, b nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u $[a,b]$ kesmada uzluksiz deyiladi.

4.13-misol. $y=\dfrac{\cos x}{x^2+3x-4}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Berilgan funksiya $x=1$ va $x=-4$ nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan. Bu funksiyaning aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $y=\cos x$ va $y=x^2+3x-4$

funksiyalar sonlar o'qining har bir nuqtasida uzluksiz va $y = x^2 + 3x - 4$ funksiya $x = 1$ va $x = -4$ nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda noldan farqli. Shu sababli 1-teoremaning 6-bandiga ko'ra funksiya $x = 1$ va $x = -4$ nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda uzluksiz bo'ladi. Demak u $(-\infty, -4) \cup (-4, 1) \cup (1, +\infty)$ to'plamda uzluksiz bo'ladi.

4.14-misol. a) $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ ko'phad funksiya, b) $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional funksiya aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz ekanligini isbotlang.

Yechish. Ma'lumki, ko'phad funksiya to'g'ri chiziqning har bir nuqtasida aniqlangan. ratsional funksiya esa mahraj noldan farqli bo'lgan barcha nuqtalarda aniqlangan. Ravshanki, $f(x) = C$ va $g(x) = x$ funksiya to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasida uzluksiz. 4.3-teoremaning 3 va 4 bandlariga ko'ra ko'phad funksiya to'g'ri chiziqning har bir nuqtasida uzluksiz bo'ladi. $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional funksiya to'g'ri chiziqning $Q_m(x)$ noldan farqli bo'lgan barcha nuqtalarida aniqlangan. Demak, ko'phad va ratsional funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksiz bo'ladi.

4.15-misol. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ funksiyaning [3,5] kesmada uzluksiz ekanligini isbotlang.

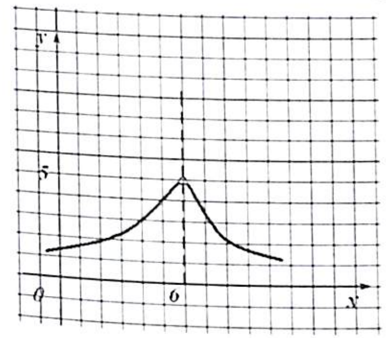
Yechish. $g(x) = x - 2$ funksiya sonlar o'qida aniqlangan, uzluksiz, xususan [3,5] kesmada ham uzluksiz. Bu funksiya [3,5] kesmada nol qiymat qabul qilmaydi. Bundan $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ funksiya ham [3,5] kesmada uzluksiz.

2-§. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularining klassifikatsiyasi

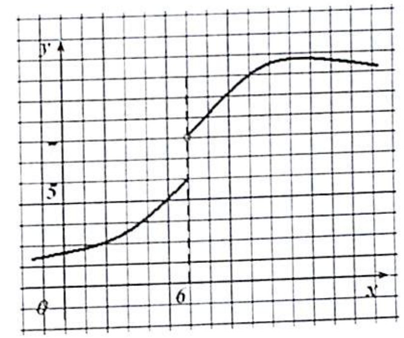
Aytaylik X oraliqda aniqlangan $f(x)$ funksiya va $x = a$ nuqta berilgan bo'lsin. Bunda $x=a$ nuqta X oraliqga tegishli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

4.16-ta'rif. Agar $x = a$ nuqtada $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ tenglik o'rinli bo'lmasa, u holda $x = a$ nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

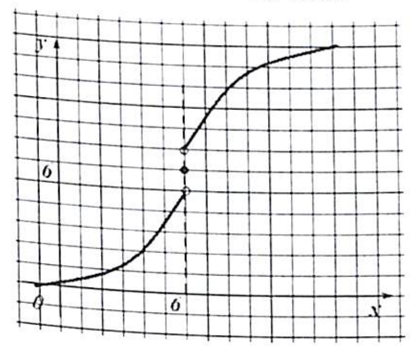
20-25-rasmlarda $x = a$ nuqta uzilish nuqtasi bo'ladigan $f(x)$ funksiyalarning grafiklari keltirilgan.



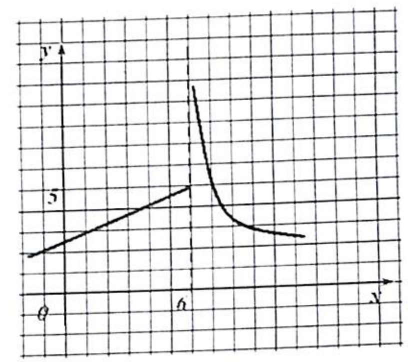
20-rasm



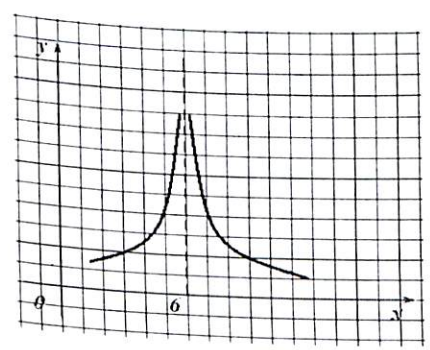
21-rasm

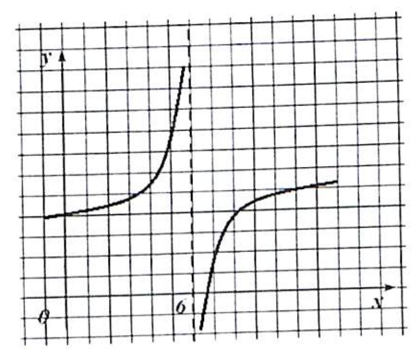


22-rasm



23- rasm





24-rasm

25-rasm

Aytaylik $f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan va $x_0 \in X$ bo'lsin.

4.17-ta'rif. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi, $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ bir tomonli limitlar chekli bo'lsa, u holda x_0 nuqta funksiyaning *birinchi tur* uzilish nuqtasi deyiladi.

Bunda ikki hol yuz berishi mumkin.

a) $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, ya'ni bir tomonli limitlar teng. Bu holda $f(x)$ funksiya *bartaraf qilish mumkin* bo'lgan uzilishga ega deb ataladi. Buning uchun $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ deb olish kifoya.

4.18-misol. $f(x)=\begin{cases} 2x-3, & x\neq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 2, & x=1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$ funksiyani $x=1$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. $x=1$ nuqtada funksiyaning chap va o'ng tomonli limitlarini hisoblaymiz. $x=1$ nuqtaning chap va o'ng tomonida $f(x)=2x-3$ bo'lganligi sababli $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(2x-3)=-1$ bo'ladi. Demak, $f(1-0)=f(1+0)$, ammo $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1\neq 2=f(1)$ bo'lgani uchun, $x=1$ nuqta funksiyaning *bartaraf qilish mumkin* bo'lgan uzilish nuqtasi ekan. Agar f(1)=1 deb olsak, funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz bo'lib qoladi.

b) $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, ya'ni bir tomonli limitlar teng bo'lmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *sakrashga ega* deyiladi. Ushbu $d=|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ son *sakrash kattaligi* deyiladi.

4.19-misol. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{agar } x\leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 2x+1, & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$ funksiyani $x=1$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Funksiyaning $x=0$ nuqtadagi chap va o'ng tomonli limitlarini hisoblaymiz: $f(0-0)=\lim\limits_{x\to -0} x^2=0$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to +0}(3x+1)=1$ va $f(0-0)\neq f(0+0)$.

Demak, funksiya $x=1$ nuqtada sakrashga ega, sakrash kattaligi $d=|1-0|=1$ bo'ladi.

4.20-ta'rif. Agar $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ bir tomonli limitlarning kamida biri mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, u holda x_0 nuqta funksiyaning *ikkinchi tur* uzilish nuqtasi deyiladi.

4.21-misol. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ funksiyani $x=1$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu funksiya uchun $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

Demak, $x=1$ nuqta berilgan funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi ekan.

4.22-misol. Sonlar o'qi, $(-\infty;+\infty)$ da berilgan $y=D(x)$ Dirixle funksiyasi uchun $x_0=2$ uning uzilish nuqtasi ekanligini ko'rsating.

Yechish. Irratsional sonlarning 2 ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketligini olsak, $D(x_n)=0$ bo'lib, $D(x_n)\to 0$ bo'ladi. Agar ratsional sonlarning 2 ga intiluvchi $\{x_n'\}$ ketma-ketligini olsak, $D(x_n')=1$ bo'lib, $D(x_n)\to 1$ bo'ladi. Demak, $x_0=2$ nuqtada limiti mavjudmasligini, ya'ni uzilishga ega ekanligini ko'rsatadi. Yuqorida tanlangan ketma-ketlik hadlarini 2 dan kichik deb qarashimiz mumkin, bundan $D(2-0)$ ning mavjudmasligi, demak $x_0=2$ Dirixle funksiyasining ikkinchi tur uzilish nuqtasi ekanligi kelib chiqadi.

Shu usul bilan $D(x)$ funksiyaning ixtiyoriy $x_0\in(-\infty;+\infty)$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko'rsatish mumkin (4-23-masala).

Mashq va masalalar

4-1. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligining Geyne ta'rifini ayting.

4-2. $f(x)=\frac{x}{x+1}$ funksiyaning $x=2$ nuqtada uzluksizligini Geyne ta'rifidan foydalanib isbotlang.

4-3. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligining Koshi ta'rifini ayting.

4-4. $f(x)=2x-1$ funksiyaning $x=-1$ nuqtada uzluksizligini Koshi ta'rifidan foydalanib isbotlang.

4-5. 4.3-teoremani isbotlang.

4-6. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va $f(x_0)>p$ (mos ravishda $f(x_0)<q$) bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning biror atrofidagi barcha nuqtalarda $f(x)>p$ (mos ravishda $f(x)<q$) bo'ladi.

4-7. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremani isbotlang.

4-8. $f(x) = \frac{sinx}{x}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

4-9. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, agar\ x \neq 0\ bo'lsa, \\ 1, agar\ \ x = 0\ bo'lsa \end{cases}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

4-10. Ta'rifdan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning har bir $x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz ekanligini isbotlang:

a) $f(x) = c$; b) $f(x) = x$; c) $f(x) = x^3$; d) $f(x) = 4x^2 - 5x + 2$.

4-11. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x, agar\ x \leq 1\ bo'lsa, \\ 2, agar\ x > 1\ bo'lsa \end{cases}$$

funksiyaning $x_0 = 1$, uzluksiz emasligini, ammo bu nuqtada chapdan uzluksiz ekanligini ko'rsating. $f(x)$ funksiya grafigini chizing.

4-12. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3, agar\ x < -2\ \text{bo'lsa}, \\ x^2 - 4, agar\ x \geq -2\ \text{bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning $x_0 = 2$, uzluksiz emasligini, ammo bu nuqtada o'ngdan uzluksiz ekanligini ko'rsating. $f(x)$ funksiya grafigini chizing.

4-13. 4.11-teoremani isbotlang.

4-14. $f(x)$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring, grafigini chizing. Uzilish nuqtalarida sakrashni hisoblang.

a) $f(x) = \begin{cases} 2, & agar\ x < -2\ bo'lsa, \\ \sqrt{4 - x^2}, & agar -2 \leq x < 2\ bo'lsa, \\ x - 2, & agar\ x > 2\ bo'lsa. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & agar\ x < 1\ bo'lsa, \\ 2, & agar\ \ 1 < x \leq 2\ bo'lsa, \\ 3x, & agar\ \ x > 2\ bo'lsa. \end{cases}$

4-15. $f(x)$ funksiyani x_0 nuqtada uzluksizlikka tekshiring:

a) $f(x) = arctg\frac{2}{x-1}, x_0 = 1$; б) $f(x) = \frac{1}{2^{x-3}-1}, x_0 = 3$

4-16. Uzluksiz funksiyaning xossalaridan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning $(-\infty; +\infty)$ oraliqda uzluksiz ekanligini isbotlang:

a) $f(x) = 4x^5 - \frac{7}{x^2+1} + 2$. b) $f(x) = 5x + \frac{4x-1}{x^4+7}$.

c) $f(x) = sin5x - e^{3x-1}$. d) $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + cos^2 4x$.

4-17. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaning $x_0 > 0$ nuqtada uzluksiz, $x_0 = 0$ nuqtada o'ngdan uzluksiz ekanligini isbotlang.

4-18. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzlilishga ega bo'lsa, u holda $f(x) + g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzlilishga ega bo'ladi. Isbotlang.

4-19. x_0 nuqtada uzilishga ega bo'lgan shunday $f(x)$, $g(x)$ funksiyalarga misol keltirinki, 1) ularning yig'indisi x_0 nuqtada uzilishga ega bo'lsin; 2) ularning yig'indisi x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin.

4-20. x_0 nuqtada uzluksiz $f(x)$, uzilishga ega bo'lgan $g(x)$ funksiyalarga misol keltirinki, 1) ularning ko'paytmasi x_0 nuqtada uzilishga ega bo'lsin; 2) ularning ko'paytmasi x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin.

4-21. Agar $f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda $f(|x|)$ va $|f(x)|$ funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi. Isbotlang.

4-22. $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda

a) $f_+(x) = \begin{cases} f(x), & agar\ f(x) > 0, \\ 0, & agar\ f(x) \leq 0. \end{cases}$

b) $f_-(x) = \begin{cases} 0, & agar\ f(x) \geq 0, \\ f(x), & agar\ f(x) < 0 \end{cases}$ funksiyalar ham X oraliqda uzluksiz bo'ladi. Isbotlang.

4-23. Dirixle funksiyasining har bir nuqtada uzilishga ega ekanligini isbotlang.

4-24. Aytatlik, $f(x) = \begin{cases} 0, & agar\ x\ irratsional\ bo'lsa, \\ \frac{1}{q}, & agar\ x = \frac{p}{q},\ p \in Z,\ q \in N \end{cases}$ bu yerda $\frac{p}{q}$ qisqarmaydigan kasr, bo'lsin (bu funksiya Riman funksiyasi deyiladi). Isbotlang: $f(x)$ funksiya a) har bir irratsional nuqtada uzluksiz; b) har bir ratsional nuqtada birinchi tur uzilish nuqtasiga ega.

3-§. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari

Biz quyida, asosan $[a;b]$ *segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarni*, ya'ni $(a;b)$ intervalda uzluksiz, a nuqtada o'ngdan va b nuqtada chapdan uzluksiz funksiyalarni qaraymiz.

4.23-teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu segmentda chegaralangan bo'ladi.

Isbot. ◊ Isbotni teskaridan faraz qilish usuli bilan olib boramiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralanmagan bo'lsin. Ya'ni, qanday natural n son olmaylik, shunday $x_n \in [a;b]$ nuqta topilib, $f(x_n)>n$ bo'ladi.

Shu shart bilan $[a;b]$ segmentdan olingan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ ketma-ketlikni qaraylik. Bu ketma-ketlik chegaralangan bo'lgani uchun, Bolsano-Veyershtrass lemmasiga ko'ra undan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik ajratib olish mumkin: $x_{n_k} \to x_0 \in [a;b]$.

Teorema shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shuning uchun $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan, bu ketma-ketlikning qurilishiga ko'ra $f(x_{n_k}) > n_k$ bo'lib, $f(x_{n_k}) \to +\infty$ ekani kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik, farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi.

Funksiya quyidan chegaralanmagan holda ham yuqoridagiga o'xshash isbotlanadi. ◆

4.24-teorema. (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu segmentda o'zining aniq quyi va aniq yuqori chegaralariga erishadi.

Isbot. ◊ Teoremaning xulosasini quyidagicha aytish mumkin: $[a;b]$ segmentda shunday x_1 va x_2 nuqtalar mavjud bo'lib, $f(x_1)=\sup\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$, $f(x_2)=\inf\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$ bo'ladi.

Demak, $f(x_1)$ son $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ segmentdagi eng katta qiymati, $f(x_2)$ esa eng kichik qiymati ekan.

Berilgan $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun, 4.23-teoremaga ko'ra chegaralangan bo'ladi. Demak, $E(f)$ to'plam aniq yuqori va aniq quyi chegaralarga ega. Ushbu $\sup\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}=c$, $\inf\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}=d$ belgilashlar kiritaylik.

Endi, $[a;b]$ segmentda biror x_1 nuqta mavjud bo'lib, $f(x_1)=c$ bo'lishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, barcha $x\in[a;b]$ larda $f(x)<c$ bo'lsin. U holda $\varphi(x)=\frac{1}{c-f(x)}$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz va 4.23-teoremaga ko'ra chegaralangan. Ya'ni shunday $\mu>0$ son topilib, har bir $x\in[a;b]$ uchun $\varphi(x)\leq\mu$ bo'ladi. Bundan $f(x)\leq c-\frac{1}{\mu}$ bo'lib, $c-\frac{1}{\mu}$ son $f(x)$ funksiyaning yuqori chegarasi ekanligi kelib chiqadi. Bu esa, c son $f(x)$ funksiyaning aniq yuqori chegarasi degan fikrga zid. Bu ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. ◆

4.25-teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, segmentning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, u holda shunday c nuqta $(a<c<b)$ topilib, $f(c)=0$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Faraz qilaylik, $f(a)<0$, $f(b)>0$ bo'lsin. $[a;b]$ kesmani teng ikkita $[a;\frac{a+b}{2}]$ va $[\frac{a+b}{2};b]$ bo'lakka bo'lamiz. Agar $f(\frac{a+b}{2})=0$ bo'lsa, u holda teorema isbot qilingan bo'ladi.

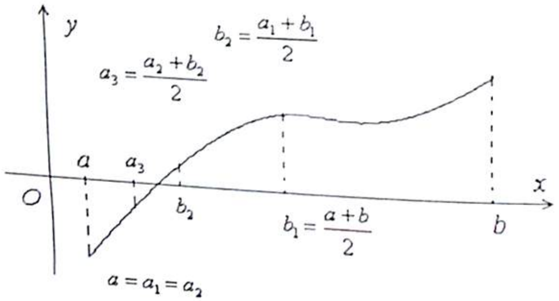
Agar $f(\frac{a+b}{2})\neq0$ bo'lsa, u holda yangi segmentlardan birining chetki nuqtalarida funksiya turli ishorali qiymatlar qabul qiladi. Shu kesmani $[a_1;b_1]$ bilan belgilaymiz: $f(a_1)<0$ va $f(b_1)>0$.

Endi, $[a_1;b_1]$ segmentni teng ikkiga bo'lamiz va yuqoridagi mulohazani $[a_1;b_1]$ segmentga nisbatan takrorlaymiz va hokazo.

Umuman, quyidagi ikki holdan biri ro'y beradi.

1-hol. Biror $\frac{a_n+b_n}{2}$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi;

2-hol. Barcha n lar uchun $f(\frac{a_n+b_n}{2})\neq 0$ bo'lib, bu jarayon cheksiz davom etadi.



26-rasm

Agar 1-holda $\frac{a_n+b_n}{2}=c$ deb olsak, u holda $f(c)=0$ bo'lib, teorema isbot qilingan bo'ladi.

2-holda esa ichma-ich joylashgan $[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\cdots$ segmentlar ketma-ketligi hosil bo'lib, barcha $n=1, 2, 3,\ldots$ larda $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$ bo'ladi (26-rasm). Shuningdek, $[a_n;b_n]$ segmentning uzunligi $a_n-b_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ bo'ladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi prinsipiga asosan shunday $c\in(a;b)$ nuqta mavjudki, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$ o'rinli. Endi $f(x)$ funksiya c nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\leq 0$ va $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\geq 0$ bo'ladi. Bulardan $f(c)=0$ kelib chiqadi. ◆

Bu teoremadan tenglamalarning yechimi mavjudligini ko'rsatishda foydalanish mumkin.

4.26-misol. $x^7+x^3+1=0$ tenglamaning $[-1;0]$ segmentda yechimi mavjudligini ko'rsating.

Yechish. $f(x)=x^7+x^3+1$ funksiya $[-1;0]$ segmentda uzluksiz bo'lib, kesma uchlarida $f(-1)=-1<0$, $f(0)=1>0$ qiymatlarni qabul qiladi. 25-teoremaga asosan $c\in(-1;0)$ son topilib, $f(c)=0$ bo'ladi.

Demak, $[-1;0]$ segmentda berilgan tenglamaning yechimi mavjud.

4.27-teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz va kesmaning uchlarida bir-biridan farqli, $f(a)=p$ va $f(b)=q$ qiymatlarga ega bo'lsa, u holda p va q sonlar orasidagi ixtiyoriy d son uchun shunday c nuqta $(a<c<b)$ topilib, $f(c)=d$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Faraz qilaylik, $p<d<q$ bo'lsin. Yordamchi $\varphi(x)=f(x)-d$ funksiyani olamiz. Bu, $\varphi(x)$ funksiya Bolsano-Koshining birinchi teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi:

$\varphi(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'ladi, chunki, $y=f(x)$ va $y=d$ funksiyalar $[a;b]$ da uzluksiz.

$$\varphi(a)=f(a)-d=p-d<0, \qquad \varphi(b)=f(b)-d=q-d>0.$$

Shuning uchun $(a;b)$ intervalda shunday c nuqta topiladiki, $\varphi(c)=0$ yoki $f(c)-d=0$, ya'ni $f(c)=d$ bo'ladi.

Demak, $[a;b]$ da uzluksiz bo'lgan funksiya o'zining, ixtiyoriy ikki qiymati orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi. ◆

4.28-natija. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda uning qiymatlari to'plami ham oraliq bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiyaning qiymatlar to'plami $E(f)$ oraliq bo'ladi.

Isbot. 4-37-masala.

Mashq va masalalar

4-25. $f(x)$ funksiyani a) $[0;\ 2]$, b) $[-3;\ 1]$; c) $[4;\ 5]$ kesmalarda uzluksizlikka tekshiring, bu yerda 1) $f(x)=\frac{1}{x^3-1}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}$; 3) $f(x)=\ln\frac{x+4}{x-5}$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2-x-20}$.

4-26. Berilgan intervalda uzluksiz va chegaralanmagan funksiyaga misol keltiring.

4-27. $[a;b]$ kesmada aniqlangan va chegaralanmagan funksiyaga misol keltiring.

4-28. Biror to'plamda uzluksiz 0 va 2 qiymatlarni qabul qiladigan, lekin 1 ni qabul qilmaydigan funksiyaga misol keltiring.

4-29. $[0;1)$ va $[1;2]$ oraliqlarning har birida uzluksiz, lekin ularning birlashmasida, ya'ni $[0;2]$ kesmada uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

4-30. $(a;b)$ intervalda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaga misol keltiringki, uning qiymatlar to'plami a) interval; b) kesma; c) yariminterval bo'lsin.

4-31. Berilgan kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarni va ular orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladigan, lekin shu kesmada uzluksiz bo'lmaydigan funksiyaga misol keltiring.

4-32. Har bir uchinchi darajali ko'phadning kamida bir haqiqiy ildizi mavjudligini isbotlang.

4-33. Agar $f(x)$ funksiya berilgan oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya ham shu oraliqda uzluksiz bo'lishini isbotlang.

4-34. $[a;b]$ da uzluksiz bo'lmagan shunday $f(x)$ funksiyaga misol keltiringki, $|f(x)|$ shu kesmada uzluksiz bo'lsin.

4-35. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va musbat qiymatlar qabul qilsin. U holda shunday $\mu>0$ topilib, barcha $x\in[a,b]$ uchun $f(x)\geq\mu$ bo'lishini isbotlang.

4-36. Agar $f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ da uzluksiz va $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ chekli limit mavjud bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ da chegaralangan bo'ladi.

4-37. 4.28-natijani isbotlang.

4-§. Monoton funksiyaning uzluksizligi

4.29-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton funksiya bo'lsa, u holda u shu oraliqning istalgan nuqtasida uzluksiz bo'ladi yoki faqat birinchi tur uzilishga (sakrashga) ega bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi va x_0 nuqta X oraliqning ichki nuqtasi bo'lsin. U holda x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;x_0+\delta)\subset X$ atrofi mavjud bo'lib, $x<x_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ larda $f(x)\leq f(x_0)$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta;x_0)$ to'plamda yuqoridan chegaralangan. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremaga asosan, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0-0)\leq f(x_0)$ bo'ladi.

x_0 dan katta bo'lgan barcha x lar uchun $f(x_0)<f(x)$ o'rinli. Demak $\{f(x),x>x_0\}$ to'plam quyidan chegaralangan. Bu to'plamning aniq quyi chegarasi mavjud, uni b bilan belgilaylik: $b=\inf\{f(x),x>x_0\}$. To'plamning aniq quyi chegarasi xossasiga ko'ra ixtiyoriy ε musbat son uchun $\bar{x}$ to'pilib, $f(\bar{x})<b+\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Funksiyaning o'suvchi ekanligidan $x_0<x<\bar{x}$ uchun $b\leq f(x)<b+\varepsilon$ o'rinli. Ushbu $\delta=\bar{x}-x_0$ belgilash kiritsak, yuqoridagi aytilganlarni quyidagicha qayta ifodalash mumkin: ε musbat son uchun $\delta>0$ to'pilib, $x_0<x<x_0+\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x lar uchun $b-\varepsilon<b<f(x)<b+\varepsilon$ o'rinli bo'ladi. Bu degani $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=b$.

Bulardan $f(x_0-0)\leq f(x_0)\leq f(x_0+0)$ qo'sh tengsizlikka ega bo'lamiz.

Agar $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$ bo'lsa, u holda funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agar, $f(x_0-0)<f(x_0+0)$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi.

Agar x_0 nuqta X oraliqning chetki nuqtasi bo'lsa, bir tomonli limitning mavjudligini ko'rsatish kifoya. ♦

Monoton kamayuvchi funksiya uchun ham shu kabi tasdiq o'rinli (4-38-masala).

4.30-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton bo'lib, uning qiymatlari to'plami biror Y oraliqdan iborat bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi bo'lsin. Faraz qilaylik, $x_0 \in X$ nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lsin. U holda 1-teoremaga asosan, $f(x_0-0)<f(x_0+0)$ bo'ladi. Shuningdek, $(f(x_0-0);f(x_0+0))\setminus\{f(x_0)\}$ to'plamdagi sonlarning hech biri funksiyaning qiymati bo'lmaydi, ya'ni funksiyaning qiymatlar to'plami Y oraliqdan iborat bo'lmaydi. Bu ziddiyat fikrimizning noto'g'riligini, teoremaning to'g'riligini ko'rsatadi. ◆

5-§. Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi

4.31-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz va o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u holda funksiyaning qiymatlar to'plami $Y=\{f(x): x\in X\}$ da unga teskari funksiya mavjud bo'lib, u uzluksiz va o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Isbot. ◊ $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasiga asosan, uning qiymatlar to'plami Y oraliq bo'ladi. Demak, har bir $y_o\in Y$ uchun $f(x_o)=y_o$ tenglikni qanoatlantiruvchi x_o son mavjud. Bu tenglikni qanoatlantiruvchi $x_o\in X$ yagona bo'ladi.

Haqiqatan, x_o dan farqli x_1 nuqta olsak, $f(x)$ funksiya monoton bo'lib, $x_o\neq x_1$ bo'lgani uchun $f(x_o)\neq f(x_1)$ bo'ladi. Shunday qilib, Y oraliqdan olingan har bir y ga X oraliqda $f(x)=y$ tenglikni qanoatlantiruvchi yagona x mos keladi. Demak, Y oraliqda $y=f(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud.

Endi, $y=f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lsa, $x=\varphi(y)$ funksiyaning ham o'suvchi bo'lishini, ya'ni $y_1<y_2$ ($y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$) bo'lganda $x_1<x_2$ tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $y_1<y_2$ bo'lganda $x_1>x_2$ bo'lsin. U holda $y=f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lgani uchun $f(x_1)>f(x_2)$, ya'ni $y_1>y_2$ bo'ladi. Bu esa, $y_1<y_2$ deb olinishiga zid. Demak, $x=\varphi(y)$ funksiya Y oraliqda o'suvchi. ◆

Monoton funksiyaning uzluksizligi haqidagi 4.29-teoremaga asosan, $x=\varphi(y)$ funksiya Y oraliqda uzluksiz bo'ladi. Funksiya kamayuvchi bo'lgan hol ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

6-§. Tekis uzluksiz funksiyalar

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lsin.

4.32-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $|x'-x''|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x',x''\in X$ larda $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$funksiya X to'plamda *tekis uzluksiz* deyiladi.

Agar $x_0\in X$ nuqta olib, ta'rifdagi x' ni x bilan, x'' ni x_0 bilan almashtirsak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligining Koshi ta'rifi kelib chiqadi. Demak, quyidagi teorema o'rinli.

4.33-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda tekis uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu to'plamda uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremaning teskarisi har doim o'rinli emas.

4.34-misol. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $(0;1]$ oraliqda uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emasligini ko'rsating.

Yechish. Agar $\varepsilon=\frac{1}{2}$ deb olsak, u holda ta'rifda aytilganidek unga mos kelgan $\delta>0$ son mavjud emas, ya'ni qanday $\delta>0$ son olmaylik, $|x'-x''|<\delta$ bo'lgan x',x'' nuqtalar mavjudki, $|f(x')-f(x'')|>\frac{1}{2}$ bo'ladi. Bu tasdiqni isbotlash uchun $x'=\frac{1}{n}, x''=\frac{1}{n+1}$ nuqtalarni qaraymiz. Ular orasidagi masofa $|x'-x''|=\frac{1}{n(n+1)}$. Bundan n sonni shunday tanlash mumkinki, $\frac{1}{n(n+1)}<\delta$ bo'ladi. Bu tanlangan nuqtalar uchun $|f(x')-f(x'')|=\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|=|n-n-1|=1>\frac{1}{2}$

Shunday qilib, berilgan funksiya $(0;1]$ da tekis uzluksiz emas.

4.35-misol. $f(x)=x^2$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emasligini ko'rsating.

Yechish. $f(x)=x^2$ funksiyaning $(-\infty;+\infty)$ da uzluksizligi ravshan. Agar $x'=n, x''=n+\frac{1}{n}$ sonlar uchun $|x'-x''|=\frac{1}{n}$ bo'lib, qanday $\delta>0$ son olmaylik, n sonni shunday tanlash mumkinki, $\frac{1}{n}<\delta$ bo'ladi. Bundan

$$|f(x')-f(x'')|=\left|f(n)-f\left(n+\frac{1}{n}\right)\right|=\left|n^2-n^2-2-\frac{1}{n^2}\right|>2$$

kelib chiqadi. Demak, $f(x)=x^2$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda tekis uzluksiz emas.

Uzluksiz funksiyalar qaysi vaqtda tekis uzluksiz bo'ladi?- degan savol tug'iladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

4.36-teorema. (Kantor teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya shu segmentda tekis uzluksiz bo'ladi.

Isbot. ◊ Teoremani teskaridan faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz, ammo tekis uzluksiz bo'lmasin.

Demak, biror $\varepsilon>0$ son mavjudki, $\delta>0$ sonni qanchalik kichkina qilib olmaylik, $[a;b]$ da shunday x' va x'' nuqtalar topiladiki, $|x'-x''|<\delta$ bo'lsa ham, $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$ bo'ladi.

Endi δ ning nolga intiluvchi $\delta_1=1, \delta_2=\frac{1}{2},\ldots,\delta_n=\frac{1}{n},\ldots$ qiymatlarni olamiz. Yuqoridagi $\varepsilon>0$ songa mos δ_n uchun ikkita $[a;b]$ kesmada x_n', x_n'' nuqtalar topiladiki, ular uchun $|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$ va $|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon$ bo'ladi.

Har doim $x_n\in[a;b]$ bo'lgani uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan va Bolsano-Veyershtrass lemmasiga asosan undan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik ajratib olish mumkin: $x_{n_k}\to x_0$. Uzluksizlik ta'rifiga binoan $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ bo'ladi. Shuningdek, $|x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\frac{1}{n_k}$ tengsizlikdan $x_{n_k}''\to x_0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f(x_{n_k}'')\to f(x_0)$. Bulardan $|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|<\varepsilon$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan farazga asosan, $|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geq\varepsilon$. Bu qarama-qarshilik farazimizni noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. ◆

4.37-ta'rif. $\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}$-$\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ ayirma $f(x)$ funksiyaning X to'plamdagi *tebranishi* deyiladi va ω orqali belgilanadi.

4.38-natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy ε>0 son uchun shunday δ>0 son mavjud bo'lib, $[a;b]$ segmentni uzunliklari δ dan kichik bo'lan bo'laklarga bo'linganda funksiyaning har bir bo'lakdagi tebranishi ε dan kichik bo'ladi.

7-§. Elementar funksiyalar

1. Haqiqiy sonning haqiqiy darajasi. Dastlab haqiqiy sonning ratsional darajasini aniqlaymiz. Buning uchun quyidagi yordamchi tasdiqdan foydalanamiz.

4.39-lemma. Ixtiyoriy n natural son uchun $y=x^n$ funksiya $[0;+\infty)$ oraliqda o'suvchi va uzluksiz, hamda $x=0$ da $y=0$, $x\to+\infty$ da $y\to+\infty$ bo'ladi.

Isbot (4-52-masala).

Aytaylik, $0<a<b$ bo'lsin. U holda $[0,b]$ kesmada Bolsano-Koshining 2-teoremasiga (4.27-teorema) ko'ra $x^n=a$ tenglama musbat yechimga ega, $y=x^n$ funksiyaning o'suvchi ekanligidan bu yechim yagona bo'ladi. Shu yechim a musbat sonning n –darajali *arifmetik ildizi* deyiladi va $\sqrt[n]{a}$ yoki $a^{\frac{1}{n}}$ ko'rinishida belgilanadi.

Aytaylik, $\frac{p}{q}$ ratsional va a musbat son bo'lsin. Agar p va q lar musbat butun son bo'lsa, $a^{\frac{p}{q}}=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$, $a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ deb qabul qilinadi.

Endi ixtiyoriy α irratsional son uchun a^α darajani aniqlaymiz.

4.40-lemma. $a>1$ va α ixtiyoriy musbat irratsional son, $\{c_n\}$ va $\{d_n\}$ α sonning kami bilan va ko'pi bilan olingan taqribiy qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketliklar bo'lsin. U holda $\sup\{a^{c_n}\}=\inf\{a^{d_n}\}$ bo'ladi.

Isbot. ◊ $\{c_n\}$ va $\{d_n\}$ ketma-ketliklarning tuzilishiga ko'ra ixtiyoriy n va m natural sonlar uchun $c_m<d_n$ o'rinli. Bundan $\{a^{c_n}\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi. Demak, bu ketma-ketlikning limiti mavjud: $\lim\limits_{n\to\infty}a^{c_n}=\sup\{a^{c_n}\}$. Shunga o'xshash $\{a^{d_n}\}$ ketma-ketlikning quyidan chegaralanganligi, ketma-ketlikning limitining mavjudligi va $\lim\limits_{n\to\infty}a^{d_n}=\inf\{a^{d_n}\}$ kelib chiqadi.

$(1+x)^{10^n} = a$ tenglamaning yechimini β deb belgilaymiz. U holda Bernulli tengsizligiga ko'ra $a = (1+\beta)^{10^n} \ge 1 + \beta \cdot 10^n$. Bundan $\beta \le \frac{a-1}{10^n}$. Buni e'tiborga olsak, $a^{d_n} - a^{c_n} = a^{c_n}(a^{\frac{1}{10^n}} - 1) \le a^{c_n} \cdot \frac{a-1}{10^n}$ bo'ladi. $\{a^{c_n}\}$ ketma-ketlikning chegaranganligini, $\left\{\frac{a-1}{10^n}\right\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini e'tiborga olsak, $\lim_{n\to\infty}(a^{d_n} - a^{c_n}) = 0$, bundan $\sup\{a^{c_n}\} = \inf\{a^{d_n}\}$ kelib chiqadi.◆

Shu umumiy limitni a^{α} deb qabul qilamiz.

Agar $a < 1, \alpha > 0$ bo'lsa, u holda $a^{\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}}$ deb olamiz. $a > 0$ va $\alpha < 0$ bo'lganda, $a^{\alpha} = \frac{1}{a^{-\alpha}}$ deb qabul qilamiz.

Shunday qilib, ixtiyoriy haqiqiy x son uchun a^x ni aniqladik. Shuni ta'kidlash joizki, a^x uchun butun ko'rsatkichli darajaning barcha xossalari o'rinli ekanligini tekshirib ko'rish mumkin (4-53-masala).

2. Ko'rsatkichli funksiya va uning xossalari.

4.41-ta'rif. $y = a^x$ $(a > 0, a \ne 1)$ ko'rinishidagi funksiya *ko'rsatkichli funksiya* deyiladi.

4.42-xossa. Ko'rsatkichli funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty; +\infty)$, qiymatlar to'plami $(0, +\infty)$ dan iborat.

Isbot. ◊ Musbat sonning haqiqiy darajasi barcha haqiqiy sonlar uchun aniqlangan.

Aytaylik, $a > 1$ bo'lsin. U holda $a = 1 + \lambda$ deb olsak, $\lambda > 0$ bo'ladi. $a^n = (1+\lambda)^n \ge 1 + n\lambda$ tengsizlikdan $n \to +\infty$ da $a^n \to +\infty$ kelib chiqadi. Demak, a^x istalgancha katta qiymatlarga ega. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ munosabatdan $n \to +\infty$ da $a^{-n} \to 0$ kelib chiqadi. ◆

Shunga o'xshash, $0 < a < 1$ holni ham tekshirish mumkin (4-54-masala).

4.43-xossa. Agar $a > 1$ va $x \in (0; +\infty)$ bo'lsa, u holda $a^x > 1$ bo'ladi. Agar $a > 1$ va $x \in (-\infty; 0)$ bo'lsa, u holda $a^x < 1$ bo'ladi.

Isbot. ◊ $a > 1, x > 0$ bo'lsin. U holda $a = 1 + \lambda$ deb olsak, $\lambda > 0$ bo'ladi. Bernulli tengsizligiga ko'ra $a^x = (1+\lambda)^x \ge 1 + \lambda x > 1$.

Agar $a > 1$ va $x \in (-\infty; 0)$ bo'lsin. U holda $a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1$ bo'ladi. ◆

4.44-xossa. Agar $a > 1$ bo'lganda a^x funksiya o'suvchi, $0 < a < 1$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi.

Isbot. ◊ $a > 1, x_1 < x_2$ bo'lsin, u holda $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) > 0$, chunki $a^{x_2 - x_1} > 1$. Bundan $a^{x_1} < a^{x_2}$. ◆

Shu kabi, $0 < a < 1$ bo'lganda a^x funksiya kamayuvchi ekanligini ko'rsatish mumkin.

4.45-xossa. Ko'rsatkichli funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalning har bir nuqtasida uzluksiz.

Isbot. ◊ Dastlab, $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik, $a > 1$ bo'lsin. U holda $a^{\frac{1}{n}} > 1$ bo'ladi. Agar $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n$ deb olsak, u holda $a = (1+\alpha_n)^n \ge 1 + n\alpha_n$, bundan $\alpha_n \le \frac{a-1}{n}$ bo'ladi. α_n ni tanlashimizga ko'ra $\alpha_n > 0$. Endi $0 < \alpha_n \le \frac{a-1}{n}$ tengsizlikda limitga o'tsak, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ kelib chiqadi.

Ushbu $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n$ tenglikda limitga o'tsak, $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ hosil bo'ladi.

$-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x larda $\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}}$ tengsizlik o'rinli. Bundan $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ kelib chiqadi.

Endi ixtiyoriy $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ uchun $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ ekanligini isbotlaymiz.

$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0}(a^{x_0} \cdot a^{x - x_0}) = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}$.

Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, u holda $\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0}} = a^{x_0}$.

Shunday qilib, ko'rsatkichli funksiya barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ larda uzluksiz. ◆

3. Giperbolik funksiyalar. Quyidagi ko'rinishdagi funksiyalar mos ravishda:

4.46-ta'rif. $y=\text{ch}x=\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ -giperbolik kosinus, $y=\text{sh}x=\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ -giperbolik sinus, $y=\text{th}x=\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ -giperbolik tangens, $y=\text{cth}x=\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ -giperbolik kotangens deyiladi.

Bu funksiyalarning xossalari 57-61- masalalarda qaralgan.

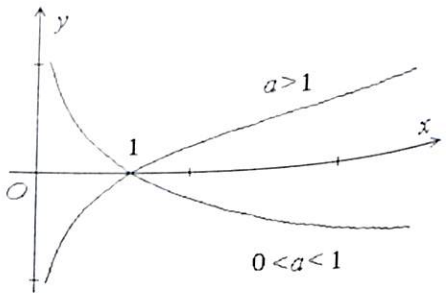
4. Logarifmik funksiya. a^x ko'rsatkichli funkiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,+\infty)$, qiymatlar to'plami $(0,+\infty)$ dan iborat bo'lib, u aniqlanish sohasida uzluksiz, $a>1$ $(0<a<1)$ bo'lganda o'suvchi (kamayuvchi). Bundan teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi 4.31-teorema shartlari bajariladi. Demak, aniqlanish sohasi $(0,+\infty)$, qiymatlar to'plami $(-\infty,+\infty)$ bo'lgan teskari funksiya mavjud. Bu funksiya asosi a bo'lgan logarifmik funksiya deb ataladi va quyidagicha belgilanadi: $\log_a x$.

Shuningdek, teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teoremadan $f(x)=\log_a x$ funksiyaning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

4.47-xossa. $f(x)=\log_a x$ funksiya $a>1$ da o'suvchi, $0<a<1$ da kamayuvchi bo'ladi.

4.48-xossa. $f(x)=\log_a x$ funksiya aniqlanish sohasida uzluksiz.

Logarifmik funksiya grafigi abssissa o'qini (1;0) nuqtada kesib o'tadi (27-rasm).



27-rasm

5. Darajali funksiya.

4.49-ta'rif. $f(x)=x^\mu$ ko'rinishidagi funksiya *darajali funksiya* deyiladi. bu yerda μ o'zgarmas haqiqiy son.

Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi μ ga bog'liq bo'ladi. Masalan, agar $f(x)=x^{\frac{1}{2m}}, m\in N$ bo'lsa, u holda $D(f)=[0,+\infty)$; agar $f(x)=x^{\frac{1}{2m-1}}, m\in N$ bo'lsa, u holda $D(f)=(-\infty,+\infty)$ bo'ladi. Agar $f(x)=\frac{1}{x^m}, m\in N$ bo'lsa, u holda $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; agar $f(x)=x^m, m\in N$ bo'lsa, u holda $D(f)=(-\infty,+\infty)$ bo'ladi.

Agar μ irratsional son bo'lsa, sonning irratsional darajasi musbat haqiqiy sonlarda aniqlanganligidan, $f(x)=x^\mu$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(0,+\infty)$ bo'ladi.

Darajali funksiyaning ba'zi xossalarini sanab o'tamiz.

4.50-xossa. $\mu>0$ bo'lganda darajali funksiya o'suvchi, $\mu<0$ bo'lganda darajali funksiya kamayuvchi bo'ladi.

Isbot. ◊ Haqiqatan ham, $f(x)=x^\mu$ darajali funksiyani logarifmik va ko'rsatkichli funksiyalar qatnashgan murakkab funksiya deb qarashimiz mumkin: $x^\mu=e^{\mu \ln x}$. U holda $\mu>0$ bo'lsa, $e^\mu>1$ va $\ln x$ funksiyaning o'suvchi ekanligidan $(e^\mu)^{\ln x}$ o'suvchi bo'ladi. Agar $\mu<0$ bo'lsa, $e^\mu<1$ va $\ln x$ funksiyaning o'suvchi ekanligidan $(e^\mu)^{\ln x}$ kamayuvchi bo'ladi. ◆

4.51-xossa. $f(x)=x^\mu$ funksiya aniqlanish sohasi $(0;+\infty)$ da uzluksiz.

Isbot. ◊ Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremadan kelib chiqadi. ◆

6. Trigonometrik funksiyalar. Trigonometrik funksiyalar maktabda, akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida o'rganilgan. Shu sababli, bu yerda trigonometrik funksiyalarning aniqlanish sohasida uzluksizligini isbotlash bilan chegaralanamiz.

4.52-teorema. $\sin x, \cos x, tg x, ctg x$ funksiyalar o'zining aniqlanish sohalarida uzluksiz.

Isbot. ◊ $x_0\in D(\sin)=(-\infty,+\infty)$ bo'lsin. $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ ekanligini ko'rsatishimiz lozim. Quyidagi almashtirishlarni bajaramiz: $\sin x-\sin x_0=2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot(x-x_0)$. $x\to x_0$ da $\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\to 1$, $x-x_0\to 0$, $\cos\frac{x+x_0}{2}$ esa chegaralangan funksiya. Bundan $x\to x_0$ da $\sin x-\sin x_0\to 0$ bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ o'rinli.

$\cos x$ funksiyaning uzluksizligi $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ayniyat va murakkab funksiyaning uzluksizligidan kelib chiqadi.

$tg x$ funksiyaning uzluksizligi $tg x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right)$ ayniyat va uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremadan kelib chiqadi. Shunga o'xshash $ctg x$ funksiyaning uzluksizligini isbotlash mumkin. ◆

7. Teskari trigonometrik funksiyalar.

1. y=**arcsin**x **arksinus funksiya**. Ma'lumki, $sinx$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ segmentda o'suvchi va uzluksiz bo'lib, qiymatlari to'plami $[-1;1]$ segmentdan iborat (28, a) -rasm). Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teoremaga asosan, $[-1;1]$ segmentda $sinx$ funksiyaga teskari funksiya mavjud. Bu funksiya $arcsinx$ orqali belgilanadi.

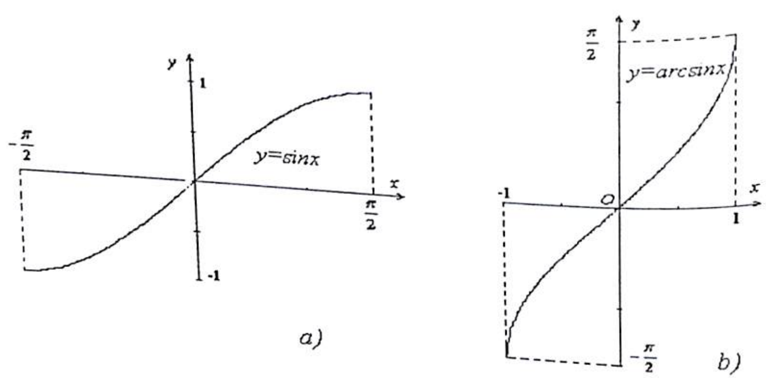
Bu funksiyaning bevosita teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teoremadan kelib chiqadigan xossalarini sanab o'tamiz.

4.53-teorema. $arcsinx$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(arcsin) = [-1;1]$, qiymatlari to'plami $E(arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, u aniqlanish sohasida o'suvchi va uzluksiz.

Arcsinus funksiyalarning grafigi 28, b) -rasmda berilgan.

2. y=**arccos**x**, arkkosinus funksiya**.

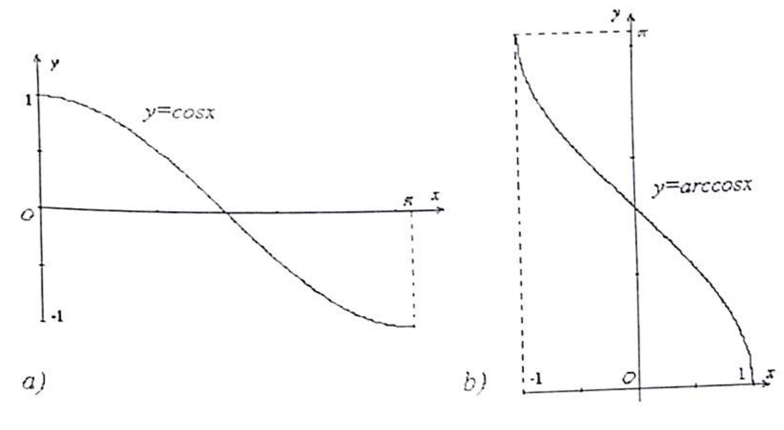
$cosx$ funksiya $[0;\pi]$ segmentda kamayuvchi va uzluksiz bo'lib, qiymatlar to'plami $[-1;1]$ segmentdan iborat (29, a)-rasm). Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teoremaga asosan, $[-1;1]$ segmentda $cosx$ funksiyaga teskari funksiya mavjud. Bu funksiya $arccosx$ orqali belgilanadi.



28-rasm

4.54-teorema. $arccosx$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(arccos) = [-1;1]$, qiymatlari to'plami $E(arccos) = [0;\pi]$, u aniqlanish sohasida kamayuvchi va uzluksiz.

(29, b)-rasm).



29-rasm

Xuddi shunga o'xshash, $arctgx$ va $arcctgx$ funksiyalarni ta'riflash mumkin (62-63-masalalar).

Mana shu to'rt xil funksiyalar *teskari trigonometrik funksiyalar* deyiladi.

Darajali, ko'rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar *asosiy elementar funksiyalar* deyiladi.

Asosiy elementar funksiyalar ustida to'rt arifmetik amal (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish) va murakkab funksiya tuzish chekli marta bajarilganda hosil bo'ladigan funksiyalar *elementar funksiyalar* deyiladi.

1. Quyidagi funksiyalarning har biri elementar funksiyaga misol bo'ladi:

a) $y=x^2+\sin 2x$,

b) $y=\sqrt{\lg^2 x+\frac{1}{x}}+\arccos x$,

c) $y=\sin^2(x^3+3x+1)+\ln x$.

2. Elementar **bo'lmagan** funksiyalarga quyidagilar misol bo'ladi:

a) $y=[x]$ funksiya, "x ning butun qismi".

b) $y=\{x\}=x-[x]$ funksiya, "x ning kasr qismi".

c) Dirixle funksiyasi, $D(x)=\begin{cases} 1, \text{ agar } x \text{ ratsional son bo'lsa}, \\ 0, \text{ agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$

Mashq va masalalar

4-38. 4.29-teoremani kamayuvchi funksiya uchun isbotlang.

4-39. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va teskarilanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya qat'iy monoton ekanligini isbotlang.

4-40. Agar $f(x)$ funksiya biror oraliqda aniqlangan va qat'iy monoton bo'lsa, u holda uning teskari funksiyasi uzluksiz bo'ladi. Isbotlang.

4-41. x_0 nuqtada uzluksiz, lekin teskari funksiyasi $y_0=f(x_0)$ nuqtada uzilishga ega bo'lgan f funksiyaga misol keltiring.

4-42. Qat'iy monoton, uzluksiz, lekin teskarisi uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

4-43. Aytaylik f funksiya $[0,1]$ da uzluksiz, qiymatlar to'plami $[0,1]$ ning qismi bo'lsin. U holda $f(c)=c$ bo'ladigan $c\in[a,b]$ mavjud ekanligini isbotlang.

4-44. Aytaylik f va g funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz, $f(a)>g(a), f(b)<g(b)$ bo'lsin. U holda $f(c)=g(c)$ bo'ladigan $c\in(a,b)$ mavjud ekanligini isbotlang.

4-45. Aytaylik f va g funksiyalar $[0,1]$ da uzluksiz, $f\circ g=g\circ f$ bo'lsin. U holda $f(c)=g(c)$ bo'ladigan $c\in[0,1]$ mavjud ekanligini isbotlang.

4-46. Aytaylik f va g uzluksiz funksiyalar $[0,1]$ ni o'ziga akslantirsin. U holda $f(g(c))=g(f(c))$ bo'ladigan $c\in[0,1]$ mavjud ekanligini isbotlang.

4-47. Aytaylik f funksiya R da uzluksiz, $f(f(x))=x$ bo'lsin. U holda $f(c)=c$ bo'ladigan $c\in R$ mavjud ekanligini isbotlang.

4-48. $f(x)$ funksiyaning X to'plamda tekis uzluksiz ekanligini isbotlang:

a) $f(x)=3x-2,\ X=R;$ b) $f(x)=x^2,\ X=(-2;3);$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ X=[0;2];$ d) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}, X=(0;\pi].$

4-49. $f(x)$ funksiyaning X to'plamda tekis uzluksiz emasligini isbotlang:

a) $f(x)=x^2,\ X=R;$ b) $f(x)=\sin x^2,\ X=R;$

c) $f(x)=\cos\frac{1}{x},\ X=(0;1);$ d) $f(x)=\ln x,\ X=(0,1).$

4-50. Agar funksiya chegaralangan intervalda chegaralanmagan bo'lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda tekis uzluksiz emasligini isbotlang.

4-51. Uzluksiz davriy funksiyaning tekis uzluksiz ekanligini isbotlang.

4-52. Ixtiyoriy n natural son uchun $y=x^n$ funksiyaning $[0;+\infty)$ oraliqda o'suvchi va uzluksiz ekanligini isbotlang. Bu funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.

4-53. Quyidagi ayniyatlarni isbotlang:

a) $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2};$ b) $a^{x_1}:a^{x_2}=a^{x_1-x_2};$

c) $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1\cdot x_2};$ d)

4-54. 4.42-xossani $0<a<1$ hol uchun isbotlang.

4-55. Agar $0<a<1$ va $x\in(0;+\infty)$ bo'lsa, u holda $a^x<1$ bo'ladi. Isbotlang.

4-56. Agar $0<a<1$ va $x\in(-\infty;0)$ bo'lsa, u holda $a^x>1$ bo'ladi. Isbotlang.

4-57. $y=\mathrm{sh}x$ aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$, qiymatlar to'plami $(-\infty;+\infty)$ intervaldan iborat toq funksiya, aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligini isbotlang.

4-58. $y=\mathrm{ch}x$ aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$, qiymatlar to'plami $(1;+\infty)$ intervaldan iborat, juft funksiya va aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligini isbotlang.

4-59. $y=\mathrm{th}x$ $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan va qiymatlar to'plami $(-1;1)$ intervaldan iborat toq funksiya, aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligini isbotlang.

4-60. $y=\mathrm{cth}x$ $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ to'plamda aniqlangan, qiymatlari to'plami $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ dan iborat toq funksiya, aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligini isbotlang.

4-61. Giperbolik funksiyalar orasida quyidagi munosabatlar o'rinli ekanligini isbotlang:

a) $\mathrm{th}x\cdot\mathrm{cth}x=1$; b) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$, c) $\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{sh}y$,

d) $\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}y$, e) $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x$, f) $\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$.

g) $\text{th}(x+y) = \dfrac{thx + thy}{1 + thx \cdot thy}$, h) $\text{cth}(x+y) = \dfrac{1 + thx \cdot thy}{thx + thy}$.

4-62. tgx funksiyani $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ oraliqda o'rganing. Shu natijalarga asoslanib $arctgx$ funksiyani ta'riflang, xossalarini ifodalang.

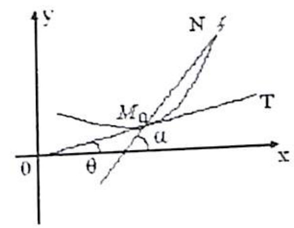
4-63. $ctgx$ funksiyani $(0; \pi)$ oraliqda o'rganing. Shu natijalarga asoslanib $arcctgx$ funksiyani ta'riflang, xossalarini ifodalang.

IKKINCHI BO'LIM. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING DIFFERENSIYAL HISOBI

V BOB. HOSILA

1-§. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar

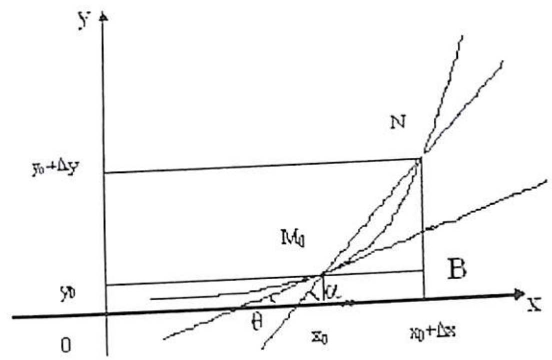
1.1. Egri chiziq urinmasi. Urinmaga ta'rif berish uchun limit tushunchasidan foydalanishga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, γ biror egri chiziq yoyi, M_0 shu egri chiziqning nuqtasi bo'lsin. Egri chiziqqa tegishli N nuqtani tanlab, M_0N kesuvchi o'tkazamiz. Agar N nuqta egri chiziq bo'ylab M_0 nuqtaga yaqinlashsa, M_0N kesuvchi M_0 nuqta atrofida buriladi.



30-rasm

Shunday holat bo'lishi mumkinki, N nuqta M_0 nuqtaga yaqinlashgan sari M_0N kesuvchi biror M_0T limit vaziyatga intilishi mumkin. Bu holda M_0T to'g'ri chiziq γ egri chiziqning M_0 nuqtasidagi urinmasi deyiladi. (30-rasm). Agar kesuvchining limit holati mavjud bo'lmasa, u holda M_0 nuqtada urinma o'tkazish mumkin emas deyiladi. Bunday hol M_0nuqta egri chiziqning sinish (o'tkirlanish) nuqtasi bo'lganda o'rinli bo'ladi.

1.2. Egri chiziq urinmasining burchak koeffitsientini topish masalasi. Endi γ egri chiziq biror oraliqda aniqlangan uzluksiz $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lgan holda urinmaning burchak koeffitsientini topaylik. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya grafigini ifodolovchi γ chiziqqa tegishli M_0



31-rasm

nuqtaning abssissasi x_0, ordinatasi $f(x_0)$ va shu nuqtada urinma mavjud deb faraz qilaylik.

γ chiziqda M_0 nuqtadan farqli $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ nuqtani olib, M_0N kesuvchi o'tkazamiz. Uning Ox o'qi musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini α bilan belgilaymiz (31-rasm). Ravshanki, α burchak Δx ga bog'liq bo'ladi: $\alpha = \alpha(\Delta x)$ va $tg\alpha = \frac{BN}{M_0B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ o'rinli.

Urinmaning abssissa o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini θ bilan belgilaymiz. Agar $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $tg\alpha$ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra $k_{urinma} = tg\theta = \lim_{N \to M_0} tg\alpha$, va N nuqtaning M_0 nuqtaga intilishi Δx ning 0 ga intilishiga teng kuchli ekanligini e'tiborga olsak, $k_{urinma} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning abssissasi x_0 bo'lgan nuqtasida novertikal urinma o'tkazish mumkin bo'lishi uchun shu nuqtada $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitning mavjud bo'lishi zarur va yetarli, limit esa urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'lar ekan.

3. Harakatdagi nuqta tezligini topish haqidagi masala. Aytaylik, moddiy nuqta $s = s(t)$ qonuniyat bilan to'g'ri chiziqli harakatlanayotgan bo'lsin. Ma'lumki, fizikada nuqtaning t_0 va $t_0 + \Delta t$ vaqtlar orasida bosib o'tgan $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ yo'lining shu vaqt oralig'iga nisbati nuqtaning o'rtacha tezligi deyilar edi: $v_{o'rta} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$. Ravshanki, Δt qancha kichik bo'lsa, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shuncha yaqin bo'ladi. Shuning uchun nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligi deb $[t_0; t_0 + \Delta t]$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikning Δt nolga intilgandagi limitiga aytiladi.

Shunday qilib, $v_{oniy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Yuqoridagi ikkita turli masalani yechish jarayoni bitta natijaga - funksiya orttirmasining argument orttirmasiga bo'lgan nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini hisoblashga keltirildi. Ma'lum bo'lishicha, ko'pgina masalalar yuqoridagi kabi limitlarni hisoblashni taqoza qilar ekan. Shu sababli buni alohida o'rganish maqsadga loyiqdir.

2-§. Hosilaning ta'rifi, hosilaga ega bo'lgan funksiyaning uzluksizligi

2.1. Funksiya hosilasining ta'rifi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervalga tegishli x_0 nuqta olib, unga shunday Δx orttirma beraylikki, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin. Natijada $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ orttirmaga ega bo'ladi.

5.1-ta'rif. Agar $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi hosilasi* deyiladi va $f'(x_0)$, yoki $y'(x_0)$, yoki $\frac{dy(x_0)}{dx}$ orqali, ba'zan esa $y'|_{x=x_0}$ yoki $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Bunda $x_0 + \Delta x = x$ deb olaylik. U holda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \to 0$ bo'lib, natijada

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $x \to x_0$ da $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nisbatning limiti sifatida ham ta'riflanishi mumkin:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lgan funksiya shu nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u (a, b) *intervalda differensiallanuvchi funksiya* deyiladi.

Hosilani topish amali *differensiallash amali* deyiladi.

Yuqoridagi limit mavjud bo'lgan har bir x_0 nuqtaga aniq bitta son mos keladi, demak $f'(x)$ - bu yangi funksiya bo'lib, u yuqoridagi limit mavjud bo'lgan barcha x larda aniqlangan. Bu funksiya $f(x)$ funksiyaning *hosila funksiyasi*, odatda, *hosilasi* deb yuritiladi.

Endi hosila ta'rifidan foydalanib, $y = f(x)$ funksiya hosilasini topishning quyidagi algoritmini berish mumkin:

1-qadam. Argumentning tayinlangan x qiymatiga mos funksiyaning qiymati $f(x)$ ni topish.

2-qadam. Argument x ga $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan chiqib ketmaydigan Δx orttirma berib $f(x + \Delta x)$ ni topish.

3-qadam. Funksiyaning $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ orttirmasini hisoblash.

4-qadam. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nisbatni tuzish.

5-qadam. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limitini hisoblash.

5.2-misol. $f(x) = kx + b$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Hosila topish algoritmidan foydalanamiz. Argument x ni tayinlab, funksiya qiymatini hisoblaymiz: $f(x) = kx + b$. Argumentga Δx orttirma beramiz, u holda $f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + b = kx + k\Delta x + b$. Funksiya orttirmasi $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (kx + k\Delta x + b) - (kx + b) = k\Delta x$ bo'ladi. nisbatni tuzamiz: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$. Limitni hisoblaymiz: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$. Demak, $(kx + b)' = k$ ekan.

Xususan, $f(x) = b$ o'zgarmas funksiya (bu holda $k = 0$) uchun $(b)' = 0$; $f(x) = x$ $(k = 1)$ funksiya uchun $x' = 1$ bo'ladi.

5.3-misol. $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Argumentning tayinlangan x qiymatiga mos funksiyaning qiymati $f(x) = \frac{1}{x}$. x ga Δx orttirma berib, funksiyaning $x + \Delta x$ nuqtadagi qiymatimi hisoblaymiz: $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$. Bu yerda umumiylikni cheklamagan holda $x > 0$ va $|\Delta x| < x$ deb hisoblaymiz. Funksiyaning orttirmasini hisoblaymiz: $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$. Orttirmalar nisbatini yozib, soddalashtiramiz: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x^2 + x\Delta x}$. Bu nisbatning limitini hisoblaymiz: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2 + x\Delta x}\right) = -\frac{1}{x^2}$.

Demak, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

2. Hosilaga ega bo'lgan funksiyaning uzluksizligi. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lishi bilan uning shu nuqtada uzluksiz bo'lishi orasida quyidagi bog'lanish mavjud:

5.4-teorema Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. ◊ Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo'lsin. Demak, ushbu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ limit mavjud va $f'(x_0)$ ga teng. Barcha $x \neq x_0$ nuqtalarda ushbu tenglik o'rinli: $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$. U holda ko'paytmaning limiti haqidagi teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini bildiradi. ◆

Bu teoremaning teskarisi o'rinli emas, ya'ni funksiyaning nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada hosilasi mavjudligi kelib chiqavermaydi. Masalan, $y = |x|$ funksiya x ning barcha qiymatlarida, xususan $x = 0$ nuqtada uzluksiz, ammo $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas. Bu funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi orttirmasi $\Delta y = |\Delta x|$ bo'lib, undan

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

va $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limiti mavjud emasligi kelib chiqadi, demak $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

3. Bir tomonli hosilalar.

5.5-ta'rif. Agar $\Delta x \to +0$ $(\Delta x \to -0)$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi deb ataladi va $f'_+(x_0)$ ($f'_-(x_0)$) kabi belgilanadi.

Odatda funksiyaning o'ng va chap hosilalari *bir tomonli hosilalar* deb ataladi.

Yuqoridagi misoldan, $f(x) = |x|$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi o'ng hosilasi 1 ga, chap hosilasi - 1 ga tengligi kelib chiqadi.

Funksiyaning hosilasi ta'rifi va bir tomonli hosila ta'riflardan hamda funksiya limiti mavjudligining zaruriy va yetarli shartidan quyidagi teoremaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

5.6-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ lar mavjud va $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli bo'ladi.

Isbot (5-7-masala).

3-§. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari. Urinma va normal tenglamalari

3.1. Hosilaning geometrik ma'nosi. Yuqorida biz, agar $y = f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasida urinma o'tkazish mumkin bo'lsa, u holda urinmaning burchak koeffitsienti $k_{urinma} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ekanligini ko'rsatgan edik. Bundan hosilaning geometrik ma'nosi kelib chiqadi:

$y = f(x)$ funksiya grafigiga abssissasi $x = x_0$ bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti hosilaning shu nuqtadagi qiymatiga teng $k_{urinma} = f'(x_0)$.

3.2. Hosilaning fizik ma'nosi. Hosila tushunchasiga olib keladigan ikkinchi masalada harakat qonuni $s = s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi oniy tezligi $v_{oniy} = \lim\limits_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ekanligini ko'rgan edik. Bundan hosilaning fizik (mexanik) ma'nosi kelib chiqadi.

$s = s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziqli harakatda t vaqt momentidagi harakat tezligining son qiymati hosilaga teng: $v_{oniy} = s'(t)$.

Hosilaning mexanik ma'nosini qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosila tezlikka teng.

Hosila tushunchasi nafaqat to'g'ri chiziqli harakatning oniy tezligini, balki boshqa jarayonlarning ham oniy tezligini aniqlashga imkon beradi. Masalan, Aytaylik, $y = Q(T)$ jismni T temperaturaga qadar qizdirish uchun uzatilayotgan issiqlik miqdorining o'zgarishini tavsiflovchi funksiya bo'lsin. U holda jismning *issiqlik sig'imi* issiqlik miqdoridan temperatura bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi:

$$C = \frac{dQ}{dT} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Umuman olganda, hosilani $f(x)$ funksiya bilan tavsiflanadigan jarayon oniy tezligining *matematik modeli* deb aytish mumkin.

3.3. Urinma va normal tenglamalari. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega, $M(x_0, f(x_0))$ funksiya grafigiga tegishli nuqta bo'lsin. Funksiya grafigiga shu nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzaylik.

Bu tenglamani $y = kx + b$ ko'rinishda izlaymiz. Izlanayotgan to'g'ri chiziq $M(x_0, f(x_0))$ nuqtadan o'tishi ma'lum, shu sababli $f(x_0) = kx_0 + b$ tenglik o'rinli. Bundan $b = f(x_0) - kx_0$ ekanligini topamiz. Demak, urinma tenglamasi $y = kx + f(x_0) - kx_0$ yoki $y = f(x_0) + k(x - x_0)$ ko'rinishga ega bo'ladi. Agar urinmaning k burchak koeffitsienti hosilaning x_0 nuqtadagi qiymatiga tengligini e'tiborga olsak, $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

$y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0; f(x_0))$ nuqtasidan o'tadigan va shu nuqtadagi urinmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq normal deyiladi. Ma'lumki, agar $k_{urinma} \neq 0$ bo'lsa, urinma va normalning burchak koeffitsientlari

$k_{normal} \cdot k_{urinma} = -1$ shart bilan bog'langan bo'ladi. Bundan $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(x_0; f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan normal tenglamasini

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (2)$$

keltirib chiqarish mumkin.

5.7-izoh. Agar $k_{urinma} = 0$ bo'lsa, u holda urinma tenglamasi $y = f(x_0)$, normal tenglamasi esa $x = x_0$ bo'ladi.

5.8-misol. Abssissasi $x = 1$ bo'lgan nuqtada $y = \frac{1}{x}$ giperbolaga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing.

Yechish. Bu misolda $x_0 = 1$, $f(x_0) = 1$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(1) = -1$. Bu qiymatlarni (1) formulaga qo'yib urinma tenglamasini hosil qilamiz: $y = 1 - (x - 1)$, ya'ni $y = 2 - x$;

(2) formuladan foydalanib, normal tenglamasini yozamiz: $y = 1 + (x - 1)$, ya'ni $y = x$.

5.9-misol. $y = x^2$ parabolaning $A(0; -4)$ nuqtadan o'tuvchi urinma tenglamasini yozing.

Yechish. Berilgan nuqta $y = x^2$ parabolaga tegishli emasligi ko'rinib turibdi. Aytaylik, $x = x_0$ nuqta urinish nuqtasining abssissasi bo'lsin. U holda $f(x_0) = {x_0}^2$, $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 2x_0$. (1) formuladan foydalansak

$$y = {x_0}^2 + 2x_0(x - x_0)$$

ya'ni

$$y = 2x_0 x - {x_0}^2 \qquad (3)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Shartga ko'ra urinma $(0; -4)$ nuqtadan o'tishi kerak. (3) tenglamada x va y o'rniga 0 va -4 qiymatlarini qo'yib x_0 ga nisbatan $-4 = -{x_0}^2$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bundan $x_0 = 2$, $x_0 = -2$ bo'lishini topamiz.

Agar $x_0 = 2$ bo'lsa, u holda urinma tenglamasi $y = 4x - 4$; agar $x_0 = -2$ bo'lsa, $y = -4x - 4$ bo'ladi.

Shunday qilib, ko'rsatilgan shartni qanoatlantiruvchi ikkita $y = 4x - 4$, $y = -4x - 4$ urinma tenglamasini hosil qildik.

Mashq va masalalar

Ta'rifdan foydalanib, quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping (1-4):

5-1. $y = -4$. 5-2. $y = e^x$.

5-3. $y = 5t^3 - 2t + 7$. 5-4. $f(h) = \frac{3}{h^2+1}$.

Hosilaning ta'rifidan foydalanib $f'(x_0)$ ni toping (5-6):

5-5. $f(x) = 4x^2 - 3x + 8, x_0 = 1$.

5-6. $f(x) = cos\ 2x, x_0 = 0$.

5-7. 5.6-teoremani isbotlang.

5-8. $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasini toping:

a) $y = (x + 2)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$, $x_0 = -3$;

b) $y = (1 + ax^b)(1 + bx^a)$, $x_0 = 1$.

5-9. α ning qanday qiymatlarida $y = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & agar\ x \neq 0, \\ 0, & agar\ x = 0 \end{cases}$ funksiya

a) uzluksiz bo'ladi; b) hosilaga ega bo'ladi; c) uzluksiz hosilaga ega bo'ladi.

5-10. Quyidagi funksiyalarni differensiallanuvchanlikka tekshiring:

a) $y = x|x|$; b) $y = |sinx|$;

c) $y = \begin{cases} x^3, & agar\ x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & agar\ x > 0 \end{cases}$; d) $y = \begin{cases} x^3, & agar\ x \in Q, \\ 0, & agar\ x \in I. \end{cases}$

5-11. Agar $x = x_0$ nuqtada chekli bir tomonli hosilalar mavjud, lekin $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ bo'lsa, u holda funksiyaning grafigi qanday bo'ladi? Bu holda $(x_0, f(x_0))$ nuqta grafikning *sinish nuqtasi* deyiladi.

5-12. f funksiyaning abssissasi x_0 nuqtadagi urinmasi va normali tenglamalarini tuzing:

a) $f(x) = x^5 - 3x + 2, x_0 = 1$; б) $f(x) = x^2 - x - 1, x_0 = -1$

5-13. Usbu $(-2; 11)$ nuqtadan o'tuvchi va $y = x^2 - 4x$ funksiyaning grafigiga urinadigan barcha to'g'ri chiziqlarni toping.

5-14. Berilgan funksiyalarning grafiklariga umumiy bo'lgan urinmani toping:

a) $y = x^2 + x$ va $y = x^2 - 3x$; б) $y = x^2 + 2x$ va $y = x^2 - 4x$;

5-15. Ba'zi nuqtalarda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty\ (-\infty)$ ga teng bo'lishi mumkin. Bunday hollarda shu nuqtalarda funksiya *cheksiz hosilaga* ega yoki funksiyaning hosilasi cheksizga teng deyiladi.

a) Ushbu $y = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjudmi?

b) Shu funksiyaning grafigini chizing, uning abssissasi $x = 0$ bo'lgan nuqtasidagi urinmasi mavjudmi?

5-16. Cheksiz hosila uchun ham bir tomonli cheksiz hosila tushunchasini qarash mumkin. Berilgan x_0 nuqtada $f'_+(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty, f'_+(x_0) = -\infty,$ $f'_-(x_0) = +\infty$ bo'lishi ham mumkin.

$y = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi bir tomonli hosilalarini mavjudmi?

5-17. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz va $f'(x_0) = +\infty\ (-\infty)$ bo'lsin. U holda funksiya grafigi abssissasi $x = x_0$ nuqtada urinmasi mavjudmi? Mavjud bo'lsa, uni sxematik rafishda chizing.

5-18. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz, $f'_+(x_0) = +\infty$ va $f'_-(x_0) = -\infty$ bo'lsin. U holda funksiya grafigining abssissasi $x = x_0$ nuqtada atrofidagi holati haqida nima aytish mumkin? Uni sxematik rafishda chizing.

5-19. Urinmalar yordamida ikki egri chiziq orasidagi burchak tushunchasi ta'riflanadi. Ikki egri chiziq orasidagi burchak deb ularning kesishish nuqtasida shu chiziqlarga o'tkazilgan urinmalari orasidagi burchakka aytiladi.

a) Ikki egri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini keltirib chiqaring.

b) $y = x^2$ parabola va $y = \frac{1}{x}$ giperbolalar orasidagi burchakni toping.

4-§. Hosilani hisoblash qoidalari

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar (a, b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

1. Yig'indining hosilasi.

5.10-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning $x \in (a, b)$ nuqtada hosilalari mavjud bo'lsa, u holda $f(x) = u(x) + v(x)$ funksiyaning ham x nuqtada hosilasi mavjud va

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ $f(x) = u(x) + v(x)$ bo'lsin, u holda $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \big(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)\big) - \big(u(x) + v(x)\big) = \big(u(x + \Delta x) - u(x)\big) + \big(v(x + \Delta x) - v(x)\big) = \Delta u + \Delta v$ bo'ladi.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Shunday qilib, (1) tenglik o'rinli ekan. ♦

5.11-misol. $y = x^2 + 1/x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = (x^2 + 1/x)' = (x^2)' + (1/x)' = 2x - 1/x^2$. Demak, $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$.

Matematik induksiya metodidan foydalanib, quyidagi natijani isbotlash mumkin:

5.12-natija. Agar $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ funksiyalarning x nuqtada hosilalari mavjud bo'lsa, u holda $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ funksiyaning ham x nuqtada hosilasi mavjud va quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$f'(x) = \big(u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)\big)' = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x).$$

2. Ko'paytmaning hosilasi.

5.13-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda ularning $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ko'paytmasi ham $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ bo'lsin, u holda $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \begin{vmatrix} u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u \\ v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v \end{vmatrix} = (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x) = \Delta u v(x) + \Delta v u(x) + \Delta u \Delta v$. Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini soddalashtirib, limitga ega funksiyalar ustida arifmetik amallar va hosilasi mavjud funksiyaning uzluksizligidan foydalansak: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot v(x) + \left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot u(x) + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v =$ $u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ bo'ladi. ◆

5.14-natija. Quyidagi $(Cu(x))' = C\cdot u'(x)$ formula o'rinli.

Isbot. ◊ 5.13-teoremaga ko'ra, $(Cu(x))' = C'\cdot u(x) + C\cdot u'(x)$. Ammo $C' = 0$, demak $(Cu(x))' = C\cdot u'(x)$. ◆

5.15-natija. Agar $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ funksiyalar x nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi $f(x) = u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)$ ham x nuqtada hosilaga ega va quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$f'(x) = \left(u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)\right)' = u_1'(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x) +$$
$$u_1(x)\cdot u_2'(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x) + \cdots + u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n'(x)$$

Isbot (5-19-masala).

3. Bo'linmaning hosilasi.

5.16-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega, $v(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda ularning $f(x) = u(x)/v(x)$ bo'linmasi $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \qquad (3)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bo'lsa, u holda $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\Delta u\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{(v(x)+\Delta v)\cdot v(x)}$. Nisbatni quyidagicha yozib olamiz: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{(v(x)+\Delta v)\cdot v(x)\Delta x} = \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2(x)+v(x)\Delta v}$. $\Delta x\to 0$ da limitga o'tamiz, limitga ega funksiyalarning xossalari va 13-teorema isbotidagi kabi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$ tenglikdan foydalansak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2(x)+v(x)\Delta v} = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$ natijaga erishamiz, ya'ni (3) formula o'rinli ekan. ◆

5.17-misol. Ushbu $f(x) = \frac{3x+7}{5x-4}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $f'(x) = \left(\frac{3x+7}{5x-4}\right)' = \frac{(3x+7)'\cdot(5x-4)-(3x+7)\cdot(5x-4)'}{(5x-4)^2} = \frac{3(5x-4)-5(3x+7)}{(5x-4)^2} = -\frac{47}{(5x-4)^2}$. Demak, $f'(x) = -\frac{47}{(5x-4)^2}$.

5-§. Murakkab funksiyaning hosilasi. Teskari funksiyaning hosilasi

5.1. Murakkab funksiyaning hosilasi. Aytaylik, $u = \varphi(x)$ funksiya (a,b) intervalda, $y = f(u)$ funksiya esa $(c;d)$ da aniqlangan bo'lib, bu funksiyalar yordamida $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin (bunda, albatta, $x\in(a,b)$ da $u = \varphi(x)\in(c,d)$ bo'lishi talab qilinadi).

5.18-teorema. Agar $u = \varphi(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega, $y = f(u)$ funksiya esa $u = \varphi(x)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada hosilaga ega va

$$(f(\varphi(x)))' = f'(u)\cdot\varphi'(x) \qquad (1)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ $u = \varphi(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo'lganligi uchun uning x nuqtadagi orttirmasini

$$\Delta u = \varphi'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\Delta x\to 0$ da $\alpha\to 0$.

Shunga o'xshash, $y = f(u)$ funksiyaning u nuqtadagi orttirmasini

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \beta\Delta u \qquad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bunda $\Delta u\to 0$ da $\beta\to 0$.

So'ngi (3) tenglikdagi Δu o'rniga uning (2) tenglik bilan aniqlangan ifodasini qo'yamiz. Natijada $\Delta y = f'(u)(\varphi'(x)\Delta x + \alpha\Delta x) + \beta(\varphi'(x)\Delta x + \alpha\Delta x) =$ $f'(u)\varphi'(x)\Delta x + (f'(u)\alpha + \varphi'(x)\beta + \alpha\beta)\Delta x$ tenglikka ega bo'lamiz.

Agar $\Delta x\to 0$ bo'lsa, (2) tenglikdan $\alpha\to 0$ va $\Delta u\to 0$ bo'lishi, agar $\Delta u\to 0$ bo'lsa, u holda (3) tenglikdan $\beta\to 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bulardan esa $\Delta x\to 0$ da $f'(u)\alpha + \varphi'(x)\beta + \alpha\beta$ cheksiz kichik funksiya ekanligi kelib chiqadi, uni γ bilan belgilaymiz.

Shunday qilib, $\Delta y = f'(u)\varphi'(x)\Delta x + \gamma\Delta x$ tenglik o'rinli. Bundan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x) + \gamma$ va $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x)$ o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $y' = f'(u)\varphi'(x)$ ekanligini isbotlaydi. ◆

5.19-misol. $y = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Bu yerda $y = u^4$, $u = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)$. Demak, $y' = (u^4)' \cdot \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)' = 4u^3\left(2x - \frac{2}{x^2}\right) = 8\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$.

Amalda (1) tenglikni $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ yoki $yx' = y_u' u_x'$ ko'rinishda yozib, quyidagi qoida tarzida ifodalaydi:

Murakkab funksiyaning erkli o'zgaruvchi bo'yicha hosilasi oraliq o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosila va oraliq o'zgaruvchidan erkli o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosilalar ko'paytmasiga teng.

Bu qoidani quyidagicha talqin qilish mumkin: agar berilgan nuqtada y o'zgaruvchi u ga nisbatan y_u' marta tez, u esa x ga nisbatan u_x' marta tez o'zgarsa, u holda y o'zgaruvchi x ga nisbatan $y_u' u_x'$ marta tez o'zgaradi, ya'ni $y_x' = y_u' u_x'$.

Yuqoridagi qoida uchta, umuman chekli sondagi hosilaga ega bo'lgan funksiyalar kompozitsiyasi uchun ham o'rinli. Masalan, agar $y = f(u)$, $u = \varphi(t)$, $t = h(x)$ bo'lsa, u holda $y_x' = y_u' u_t' t_x'$ tenglik o'rinli bo'ladi.

5.2. Teskari funksiyaning hosilasi.

5.20-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada monoton o'suvchi, $(a;b)$ intervalning har bir nuqtasida noldan farqli $y' = f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo'lgan $x = \varphi(y)$ funksiya $(f(a); f(b))$ intervalda hosilaga ega va ixtiyoriy $y \in (f(a); f(b))$ uchun uning hosilasi $1/f'(x)$ ga teng bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada o'suvchi, $(a;b)$ intervalda $y' = f'(x)$ hosilaga ega va ixtiyoriy $x \in (a,b)$ uchun $f'(x) \neq 0$ bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. U holda $y = f(x)$ funksiya uchun teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teorema shartlari

bajariladi, chunki $y = f(x)$ funksiyaning uzluksizligi uning hosilaga ega ekanligidan kelib chiqadi. Shunday qilib, $[\alpha;\beta]$ kesmada $y = f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari bo'lgan $x = \varphi(y)$ funksiya mavjud bo'ladi.

Teskari funksiya argumenti y ga $\Delta y \neq 0$ orttirma beramiz. U holda $x = \varphi(y)$ funksiya biror $\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$ orttirma oladi va teskari funksiyaning monotonligidan $\Delta x \neq 0$, uzluksizligidan esa $\Delta y \to 0$ da $\Delta x \to 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $x = \varphi(y)$ funksiyaning hosilasini topamiz. Yuqorida aytilganlarni e'tiborga olsak, hosilaning ta'rifiga ko'ra $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(x)}$, demak $x_y' = \varphi'(y) = 1/f'(x)$ formula o'rinli ekan. ◆

5.20-teorema $f(x)$ funksiya kamayuvchi bo'lganda ham o'rinli (5-72-masala).

Demak, teskari funksiya hosilasini hisoblash qoidasi

$$x_y' = \frac{1}{y_x'} \qquad (4)$$

formula bilan ifodalanadi.

6-§. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari

6.1. $y = x^\mu$ $(x > 0)$ darajali funksiyaning hosilasi. Bu funksiyaning x nuqtadagi orttirmasi $\Delta y = (x + \Delta x)^\mu - x^\mu = x^\mu\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1$ ga teng va $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\mu-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$ bo'ladi. Ma'lumki, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$. Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} x^{\mu-1} \cdot \left(\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}\right) = \mu x^{\mu-1}$. Bundan funksiyaning x nuqtadagi hosilasi mavjud va $y' = \mu x^{\mu-1}$ bo'ladi.

Demak, $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ formula o'rinli.

Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash formulasini foydalangan holda, $(u(x))^\mu$ ko'rinishdagi murakkab funksiya uchun quyidagi formulani yozish mumkin:

$((u(x))^{\mu})'\mu(u(x))^{\mu-1}\cdot u'(x)$

Masalan, $y=(x^2+1)^3$ funksiyaning hosilasini topish talab qilinsin. Bu misolda $u(x)=(x^2+1)$, $\mu=3$. Demak, yuqoridagi formulaga ko'ra

$$y'=3(x^2+1)^2\cdot((x^2+1)'=3((x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2$$

6.2. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi. $y=a^x \quad (a>0, a\neq 1)$ ko'rsatkichli funksiya uchun $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$ va $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$.

Ma'lumki, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=lna$. Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x lna$ mavjud. Demak $(a^x)=a^x lna$, xususan, $(e^x)'=e^x$ formulalar o'rinli ekan.

Ko'rinib turibdiki, $y=e^x$ funksiya ajoyib xossaga ega: uning hosilasi o'ziga teng ekan.

$a^{u(x)}$ $(a>0, a\neq 1)$ funksiya uchun quyidagi formulalarning o'rinli bo'lishini ko'rish qiyin emas: $(a^{u(x)})'=a^{u(x)}\cdot u'(x)\cdot lna$.

Masalan, $(3^{5x-3})'=3^{5x-3}\cdot(5x-3)'\cdot ln3=5\cdot 3^{5x-3}\cdot ln3$

6.3. $\boldsymbol{y=log_a x\ (a>0, a\neq 1, x>0)}$ **logarifmik funksiyaning hosilasi.** Bu funksiya $x=a^y$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lgani uchun teskari funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra $y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{a^y lna}=\frac{1}{xlna}$, ya'ni $(\log_a x)'=\frac{1}{xlna}$. Xususan, $(lnx)'=\frac{1}{x}$ formula o'rinli.

$\log_a u(x)$ funksiya uchun quyidagi formula o'rinli: $(\log_a u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)\cdot lna}$.

6.4. Trigonometrik funksiyalarning hosilalari.

1) $\boldsymbol{y=sinx}$ **funksiyaning hosilasi**. Funksiyaning x nuqtadagi orttirmasini sinuslar ayirmasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-sinx=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ ga teng. Bu tenglikda birinchi ajoyib limit va $cosx$ funksiyaning uzluksizligini

e'tiborga olgan holda limitga o'tsak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$ $cosx$ bo'ladi.

Demak, $(sinx)'=cosx$ formula o'rinli.

2) $\boldsymbol{y=cosx}$ **funksiyaning hosilasi**. Bu funksiyaning hosilasini topish uchun $cosx=sin(x+\pi/2)$ ayniyat va murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz. U holda

$(cosx)'=(sin(x+\pi/2))'=cos(x+\pi/2)\cdot(x+\pi/2)'=cos(x+\pi/2)\cdot 1=cos(x+\pi/2)$.

$cos(x+\pi/2)=-sinx$ ayniyatni e'tiborga olsak, quyidagi formulalarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi: $(cosx)'=-sinx$.

3) $\boldsymbol{y=tgx}$ **va** $\boldsymbol{y=ctgx}$ **funksiyalarning hosilalari**. Bu funksiyalarning hosilalarini topish uchun bo'linmaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz:

$$(tgx)'=\left(\frac{sinx}{cosx}\right)'=\frac{cos^2x+sin^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}.$$

Xuddi shunga o'xshash $(ctgx)'=-\frac{1}{sin^2x}$. formulani ham keltirib chiqarish mumkin. Buni mashq sifatida o'quvchilarga qoldiramiz.

Trigonometrik funksiyalarning argumentlari x erkli o'zgaruvchining $u(x)$ funksiyasi bo'lsa, u holda murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi teoremaga ko'ra quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

$(sinu)'=u'cosu,\ (cosu)'=-u'sinu,$

$(tgu)'=\frac{u'}{cos^2u},\ (ctgu)'=-\frac{u'}{sin^2u}.$

6.5. Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalari. Teskari funksiyaning hosilasi haqidagi teoremadan (5.20-teorema) foydalanib, $y=arssinx$ $(-1\leq x\leq 1)$ funksiyaning hosilasini topaylik.

Bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=siny$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ da monoton o'suvchi va $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda hosilaga ega, hamda bu intervalning har bir nuqtasida hosila noldan farqli: $x'_y=cosy\neq 0$. Shuning uchun $y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{cosy}$. Endi

$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda $\cos y > 0$ va bunda $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 x}$ formula o‘rinli bo‘lganligi uchun $y'_x = \frac{1}{1-\sin^2 y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo‘ladi.

Demak, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$ formula o‘rinli.

Endi $y = \arccos x$ $(-1 \le x \le 1)$ funksiyaning hosilasi uchun formula keltirib chiqaramiz. Bu funksiyaga teskari bo‘lgan $x = \cos y$ funksiya $[0,\pi]$ da monoton kamayuvchi, $(0;\pi)$ da hosilaga ega bo‘lib, bu intervalning har bir nuqtasida noldan farqli $x'_y = -\sin y$ hosilaga ega. Demak, teskari funksiyaning hosilasi haqidagi teorema shartlari o‘rinli. Shu sababli 5-§ dagi (4) ga ko‘ra $x'_y = \cos y$ $y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ham o‘rinli bo‘ladi. (Bu yerda $(0;\pi)$ da $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 x}$ ekanligidan foydalandik).

Shunday qilib, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ formula o‘rinli ekan.

Ma’lumki, $y = \operatorname{arctg} x$ funksiyaning qiymatlar to‘plami $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervaldan iborat. Shu intervalda unga teskari bo‘lgan $x = tg y$ funksiya mavjud va bu funksiyaning hosilasi $x'_y = \frac{1}{\cos^2 x}$ noldan farqli. Teskari funksiyaning hosilasi haqidagi teoremadan foydalansak,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(tg y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

bo‘ladi.

Demak, quyidagi formula o‘rinli:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Xuddi yuqoridagi kabi $y = \operatorname{arcctg} x$ funksiya uchun

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

formulaning o‘rinli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Teskari trigonometrik funksiyalarning argumentlari x erkli o‘zgaruvchining $u(x)$ funksiyasi bo‘lsa, u holda murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi teoremadan quyidagi formulalar kelib chiqadi:

$$(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};\quad (\arccos u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};$$

$$(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)};\quad (\operatorname{arcctg} u(x))' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

Mashq va masalalar

5-20. Matematik induksiya prinsipidan foydalanib, 5.12-natijani isbotlang.

5-21. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar chiziqli kombinatsiyasining hosilasi hosilalarning aynan shunday chiziqli kombinatsiyasiga teng, ya’ni agar $f(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \ldots + c_nu_n(x)$ bo‘lsa, u holda $f'(x) = c_1u'_1(x) + c_2u'_2(x) + \ldots + c_nu'_n(x)$. Isbotlang.

5-22. 5.15-natijani isbotlang.

5-23. Ikki funksiya yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbatidan iborat bo‘lgan funksiyaning hosilaga ega bo‘lishidan bu funksiyalarning har biri hosilaga ega bo‘lishi har doim kelib chiqavermaydi. Shu fikrlarni asoslovchi misollar keltiring.

5-24. x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lgan $f(g(x))$ murakkab funksiyaga misol keltiringki:

a) $f'(g(x_0))$ mavjud, $g(x_0)$ mavjud bo‘lmasin;

b) $f'(g(x_0))$ mavjud emas, $g(x_0)$ mavjud bo‘lsin;

c) $f'(g(x_0))$ mavjud emas, $g(x_0)$ mavjud emas.

5-25. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang yoki inkor qiling:

a) differensiallanuvchi funksiyaning hosilasi juft bo‘lishi uchun funksiyaning toq bo‘lishi yetarli;

b) differensiallanuvchi funksiyaning hosilasi juft bo‘lishi uchun funksiyaning toq bo‘lishi zarur;

c) differensiallanuvchi funksiyaning hosilasi toq bo'lishi uchun funksiyaning juft bo'lishi yetarli;

d) differensiallanuvchi funksiyaning hosilasi toq bo'lishi uchun funksiyaning juft bo'lishi zarur.

Funksiyalarning hosilalarini toping (26-44):

5-26. $y = 5\sqrt{x} + \frac{13}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ 5-27. $y = 10x^6 - \frac{4}{x} + 3\sqrt[5]{x}$

5-28. $y = 2ctgx - 3sinx$. 5-29 $y = arctgx + 7 \cdot e^x$.

5-30. $y = 19^x - 8arcsinx$ 5-31. $y = (x^2 - 1)(x^3 + x)$.

5-32. $\varphi(\alpha) = 3arcsin\alpha - 4arccos\alpha + 14\sqrt[7]{\alpha}$

5-33. $f(t) = \frac{t}{1-t^2}$ 5-34. $y = 3sin^2x - lgx + 3cos^2x$

5-37. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{3^x} + 4^x$ 5-38 $y = \frac{e^x + ln\,x}{e^x - ln\,x}$

5-39. $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

5-40. $y = (x^2 - 1)(x^2 - 3)(x^2 - 5)$

5-41. $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4}$ 5-42. $y = \frac{3}{x^4 + 2}$

5-43. $y = \sqrt{x}(x^5 + \sqrt{x} - 2)$ 5-44. $y = \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - \sqrt[5]{x} \cdot ln\,x^5$.

Berilgan funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasini toping (45-48):

5-45. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}, x_0 = 1$.

5-46. $f(x) = 4x + 6\sqrt[3]{x}, x_0 = 8$.

5-47. $f(x) = x^2 + 3sinx - \pi x, x_0 = \frac{\pi}{2}$.

5-48. $f(x) = e^{x+1} \cdot (4x - 5),\ x_0 = ln\,2$.

Funksiyaning hosilasini toping (49-77):

5-49. $y = 10^{x^2+1}$.

5-50. $y = tg4x$.

5-51. $y = ch^4\frac{x}{2}$.

5-52. $y = ln(5x^3 - x)$.

5-53. $y = cos^4 x - sin^4 x$.

5-54. $y = \sqrt{4 - 7x^2}$.

5-55. $y = \sqrt[5]{1 + ctg\,10x}$

5-56. $y = (sin3x - cos3x)^2$.

5-57. $x = ln^4 sin3t$.

5-58. $f(h) = arctg\,\sqrt{h}$.

5-59. $y = \frac{1}{arcsin\,x}$ 5-60. $y = \frac{sin\,x}{1+tg\,x}$

5-61. $y = \frac{x\,ln\,x}{x-1}$ 5-62. $y = sh(ln(tg2x))$.

5-63. $y = xarcsinx + \sqrt{1 - x^2}$. 5-64. $y = 3^{sin^3 2x + 4\,sin\,2x}$.

5-65. $y = e^{-ln\frac{x+2}{x-3}} - \frac{x-3}{x+2}$ 5-66. $y = arcsin\sqrt{1 - x^2}$.

5-67. $y = x \cdot 2^{\sqrt{x}}$ 5-68. $y = 5^{(1/log_5 x)}$

5-69. $y = \frac{1}{6} ln\frac{x-3}{x+3}$ 5-70. $y = ln(e^{2x} + 1) - 2arctge^x$

5-71. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}}$ 5-72. $y = \frac{tg\,3x + ln\,cos^2 3x}{3}$

5-73. $y = ln\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}$ 5-74. $f(x) = \frac{arctg\,x}{2} - \frac{x}{2(1+x^2)}$.

5-75. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + arctg\frac{1}{x}$.

5-76. $y = 14\,arcsin\frac{x+1}{2} - \frac{(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}$.

5-77. $y = \frac{ln(x^2+2)}{2} + \frac{2-x}{4(x^2+2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$.

5-78. 5.20-teoremani $f(x)$ funksiya kamayuvchi bo'lganda isbotlang.

7-§. Logarifmik hosila. Daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi

7.1. Logarifmik hosila. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi va $f(x) > 0$ bo'lsin. U holda shu intervalda $lny = lnf(x)$ funksiya aniqlangan bo'ladi. Bu funksiyani x argumentning murakkab funksiyasi sifatida qarab, x nuqtadagi hosilasini hisoblash mumkin bo'lgan x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning hosilasini topish kerak bo'lsin. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz: $(lny)' = \frac{y'}{y} = (lnf(x))'$, bundan

$$y' = y(lnf(x))' \qquad (1)$$

formulaga ega bo'lamiz.

5.21-ta'rif. Funksiya logarifmidan olingan hosilaga *logarifmik hosila* deyiladi.

Birnechta funksiyalar ko'paytmasining hosilasini topishda (1) formuladan foydalanish hisoblashlarni birmuncha soddalashtirishga imkon beradi. Haqiqatan ham, $y = u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n$ funksiya (bu yerda har bir u_i, $i = \overline{1,n}$ funksiya hosilaga ega va ixtiyoriy $x \in D(f)$ da $u_i > 0$) berilgan bo'lsin. Bu funksiyani logarifmlab, $lny = lnu_1 + lnu_2 + \ldots + lnu_n$, bundan esa

$\frac{y'}{y} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \cdots + \frac{u'_n}{u_n}$ tenglikni hosil qilamiz. So'ngi tenglikning ikkala tomonini y ga ko'paytirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n \cdot \left(\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \cdots + \frac{u'_n}{u_n}\right)$$

5.22-misol. $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Berilgan funksiyani logariflaymiz:

$lny = 2ln(x+1) - 3ln(x+2) - 4ln(x+3)$. Bu tenglikdan hosila olib, ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}.$$

Bundan

$$y' = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4} \cdot \left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}\right) = -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}.$$

2. Daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi. Aytaylik, $y = (u(x))^{v(x)}$ $u(x) > 0$) ko'rinishdagi daraja-ko'rsatkichli funksiya berilgan va $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar x ning qaralayotgan qiymatlarida differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasini hisoblash uchun (1) formulani qo'llaymiz. U holda (1) formulaga ko'ra

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot \ln\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)}\left(v(x) \cdot lnu(x)\right)' = u(x)^{v(x)} \cdot$$
$(v'(x)lnu(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)})$ bo'ladi. Bundan $(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} lnu(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x)$ formula kelib chiqadi.

Shunday qilib, daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi ikkita qo'shiluvchidan iborat: agar $u(x)^{v(x)}$ ko'rsatkichli funksiya deb qaralsa birinchi

qo'shiluvchi, agar $u(x)^{v(x)}$ darajali funksiya deb qaralsa ikkinchi qo'shiluvchi hosil bo'ladi.

5.23-misol. $y = x^{x-1}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. (1) formulani qo'llaymiz.

$$y' = y \cdot (lnx^{x-1})' = x^{x-1} \cdot ((x-1)lnx)' = x^{x-1} \cdot (lnx + 1 - \frac{1}{x}).$$

8-§. Yuqori tartibli hosilalar

8.1. Yuqori tartibli hosila tushunchasi. Faraz qilaylik, biror (a, b) da hosilaga ega $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila (a, b) da aniqlangan funksiya bo'ladi. Demak, hosil bo'lgan funksiyaning hosilasi, ya'ni hosilaning hosilasi haqida gapirish mumkin. Agar $f'(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, uni $f(x)$ funksiyaning *ikkinchi tartibli hosilasi* deyiladi va y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rif bo'yicha $y''(x) = (y')'$ ekan.

Shunga o'xshash, agar ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi mavjud bo'lsa, u uchinchi tartibli hosila deyiladi *va* y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ kabi belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha $y''' = (y'')'$.

Berilgan funksiyaning to'rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o'xshash aniqlanadi. Umuman $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilasining hosilasiga uning n-tartibli hosilasi deyiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha n-tartibli hosila $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ rekkurent (qaytma) formula bilan hisoblanar ekan.

5.24-misol. $y = x^4$ funksiya berilgan. $y'''(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$, $y''' = 24x$, demak $y'''(2) = 24x \cdot 2 = 48$.

Yuqorida aytilganlardan, funksiyaning yuqori tartibli, masalan, n-tartibli hosilalarini topish uchun uning barcha oldingi tartibli hosilalarini topish zarurligi kelib chiqadi. Ammo ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari uchun umumiy qonuniyatni topish va undan foydalanib formula keltirib chiqarish mumkin.

Misol tariqasida ba'zi bir elementar funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topamiz.

1) $y = x^{\mu}$ $(x > 0, \mu \in R)$ funksiya uchun $y^{(n)}$ ni topamiz. Buning uchun uning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz: $y' = \mu x^{\mu} - 1, y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},..$

Bundan

$$(x^{\mu})^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \quad (1)$$

deb induktiv faraz qilish mumkinligi kelib chiqadi. Bu formulaning $n = 1$ uchun o'rinliligi yuqorida ko'rsatilgan. Endi (1) formula $n = k$ da o'rinli, ya'ni $y^{(k)} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)x^{\mu-k}$ bo'lsin deb, uning $n = k+1$ da o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra $y^{(k+1)} = (y^{(k)})'$. Shuning uchun

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right) = (\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)x^{\mu-k})' =$$

$$= \mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)\cdot(\mu-k)x^{\mu-k-1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (1) formulaning $n = k+1$ da ham o'rinli bo'lishini bildiradi. Demak, matematik induksiya usuliga ko'ra (1) formula ixtiyoriy $n \in N$ uchun o'rinli.

(1) da $\mu = -1$ bo'lsin. U holda $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

formula bilan topiladi.

2) $y = lnx$ $(x > 0)$ funksiyaning n-tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyainng birinchi tartibli hosilasi $y' = \frac{1}{x}$ bo'lishidan hamda (2) formuladan foydalansak,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n} \quad (3)$$

formula kelib chiqadi.

3) $y = sinx$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiya uchun $y' = cosx$. Biz uni quyidagi

$$y' = cosx = \sin(x + \tfrac{\pi}{2})$$

ko'rinishda yozib olamiz. So'ngra $y = sinx$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$y'' = (cosx)' = -\sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = (-sinx)' = cosx = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(IV)} = (-cosx)' = sinx = \left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

Bu ifodalardan esa $y = sinx$ funksiyainng n-tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)} = sinx = \left(x + n\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

formula kelib chiqadi. Uning to'g'riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Xuddi shunga o'xshash

$$(cosx)^{(n)} = cosx = \left(x + n\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

Masalan,

$$(cosx)^{(115)} = cos(x + 115\cdot\frac{\pi}{2}) = cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = sinx$$

8.2. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi. Ikkinchi tartibli hosila sodda mexanik ma'noga ega. Aytaylik, moddiy nuqtaning harakat qonuni $s = s(t)$ funksiya bilan aniqlangan bo'lsin. U holda uning birinchi tartibli hosilasi $v(t) = s'(t)$ harakat tezligini ifodalashi bizga ma'lum. Ikkinchi tartibli $a = v'(t) = s''(t)$ hosila esa harakat tezligining o'zgarish tezligi, ya'ni harakat tezlanishini ifodalaydi.

5.25-misol. Moddiy nuqta $s = 5t^2 + 3t + 12$ (s metrlarda, t sekundlarda berilgan) qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Uning o'zgarmas kuch ta'sirida harakat qilishini ko'rsating.

Yechish. $s' = (5t^2 + 3t + 12)' = 10t + 3$, $s'' = (10t + 3)' = 10$, bundan $a = 10m/s^2$ bo'lib, harakat tezlanishi o'zgarmas ekan. Nyuton qonuni bo'yicha kuch tezlanishga proporsional. Demak, kuch ham o'zgarmas ekan.

8.3. Yuqori tartibli hosilaning xossalari. Leybnits formulasi.

5.26-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu ikki funksiya yig'indisining n -tartibli hosilasi uchun

$$(u(x) + v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $y = u + v$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz:

$$y' = u' + v', y'' = (y')' = (u' + v')' = u'' + v''$$

Matematik induksiya metodidan foydalanamiz, ya'ni $n = k$ tartibli hosila uchun $y^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}$ tenglik o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz va $n = k + 1$ uchun $y^{(k+1)} = u^{(k+1)} + v^{(k+1)}$ ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, yuqori tartibli hosilaning ta'rifi, hosilaga ega bo'lgan funksiyalar xossalaridan foydalanib $y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = (u^{(k)} + v^{(k)})' = (u^{(k)})' + (v^{(k)})' = u^{(k+1)} + v^{(k+1)}$ ekanligini topamiz.

Matematik induksiya prinsipiga ko'ra $y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$ tenglik ixtiyoriy natural n uchun o'rinli deb xulosa chiqaramiz. ◆

5.27-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini n-tartibli hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin: $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$.

Bu xossa ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlanadi.

5.28-misol. $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun formula keltirib chiqaring.

Yechish. Berilgan kasr-ratsional funksiyaning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. So'ngra

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'ladigan A va B koeffitsientlarni izlaymiz. Bu koeffitsientlarni topish uchun tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ikki kasrning tenglik shartidan foydalanamiz. U holda $2x + 3 = A(x-3) + B(x-2)$, yoki

$$2x + 3 = (A + B)x + (-3A - 2B)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ikki ko'phadning tenglik shartidan (ikki ko'phad teng bo'lishi uchun o'zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsientlar teng bo'lishi zarur va yetarli) quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -3A - 2B = 3 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi A=-7, B=9 ekanligini ko'rish qiyin emas. Topilgan natijalarni (1) tenglikka qo'yamiz va yuqorida isbotlangan xossalardan foydalanib, berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasini kuyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)} = -7\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} + 9\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} \qquad (7)$$

Endi $\frac{1}{x-2}$ va $\frac{1}{x-3}$ funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topishimiz lozim. Buning uchun $u = \frac{1}{x+a}$ funksiyaning n-tartibli hosilasini bilish yetarli. Bu funksiyani $u = (x+a)^{-1}$ ko'rinishda yozib, ketma-ket hosilalarni hisoblaymiz. U holda

$$u' = -(x+a)^{-2}, \qquad u'' = 2(x+a)^{-3},$$
$$u''' = -2\cdot3(x+a)^{-3} = -6(x+a)^{-4}.$$

Matematik induksiya metodi bilan

$$u^{(n)} = (-1)^n \cdot n!\,(x+a)^{-n-1} \qquad (8)$$

Shunday qilib, (7) va (8) tengliklardan foydalanib quyidagi

$$y^{(n)} = -7\cdot(-1)^n \cdot n!\,(x-2)^{-n-1} + 9\cdot(-1)^n \cdot n!\,(x-3)^{-n-1}$$
$$= (-1)^n \cdot n!\left(\frac{9}{(x-3)^n} - \frac{7}{(x-2)^n}\right)$$

natijaga erishamiz.

5.29-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu ikki funksiya ko'paytmasining n -tartibli hosilasi uchun

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C'_n u^{(n-1)}v' + C_n^{2'} u^{(n-2)}v'' + \dots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots$$
$$+ C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + uv^{(n)} \qquad (9)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bunda $C_n^k = \frac{n(n-1)\ \ (n-k+1)}{k}$.

Isbot. ◊ Matematik induksiya metodini qo'llaymiz. Ma'lumki, $(uv)' = u'v + uv'$. Bu esa $n = 1$ bo'lganda (9) formulaning to'g'riligini ko'rsatadi. Shuning uchun (9) formulani ixtiyoriy n uchun o'rinli deb olib, uning $n+1$ uchun ham to'g'riligini ko'rsatamiz. (9) ni differensiyalaymiz:

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + u^{(n)}v' + C'_n u^{(n)}v' + C'_n u^{(n-1)}v'' + C_n^2 u^{(n-1)}v'' + C_n^2 u^{(n-2)}v''' + \dots + C_n^k u^{(n-k+1)}v^{(k)} + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k+1)} + \dots + C_n^{n-1} u''v^{(n-1)} + C_n^{n-1} u'v^{(n)} + u'v^{(n)} + uv^{(n+1)} \qquad (10)$$

Ushbu

$$1 + C'_n = 1 + n = C'_{n+1},\ C'_n + C_n^2 u = n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = C_{n+1}^2,$$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n+2-k)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(n+1)n\dots(n+1-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k$$

tengliklardan foydalanib, (10) ni quyidagicha yozamiz:

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + C_{n+1}^1 u^{(n)}v' + C_{n+1}^2 u^{(n-1)}v'' + \dots + C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}v^{(k)}$$
$$+ \dots + uv^{(n+1)}$$

Demak, (9) formula $n+1$ uchun ham o'rinli ekan. Isbot etilgan (9) formula *Leybnits formulasi* deb ataladi. ◆

5.30-misol. $y = x^3e^x$ funksiyaning 20-tartibli hosilasini toping.

Yechish. $u = e^x$ va $v = x^3$ deb olsak, Leybnits formulasiga ko'ra

$y^{(20)} = x^3(e^x)^{(20)} + C_{20}^1(x^3)'(e^x)^{(19)} + C_{20}^2(x^3)''(e^x)^{(18)} + C_{20}^3(x^3)'''(e^x)^{(17)} + C_{20}^4(x^3)^{(4)}(e^x)^{(16)} + \dots + (x^3)^{(20)}e^x$ bo'ladi. $(x^3)' = 3x^2$, $(x^3)'' = 6x$, $(x^3)''' = 6$, $(x^3)^{(4)} = 0$ tengliklarni va $y = x^3$ funksiyaning hamma keyingi hosilalarining 0 ga tengligini, shuningdek $\forall n$ uchun $(e^x)^{(n)} = e^x$ ekanligini e'tiborga olsak,

$y^{(20)} = e^x(x^3 + 3C_{20}^1x^2 + 6C_{20}^2x + 6C_{20}^3$ tenglik hosil bo'ladi.

Endi koeffitsientlarni hisoblaymiz:

$C_{20}^1 = 20, \quad C_{20}^2 = \frac{20\cdot19}{2} = 190, \quad C_{20}^3 = \frac{20\cdot19\cdot18}{3!} = \frac{20\cdot19\cdot18}{3!} = 1140$

Demak,

$$y^{(20)} = e^x(x^3 + 60x^2 + 1140x + 6840).$$

Mashq va masalalar

Logarifmik hosiladan foydalanib, hosilani hisoblang (79-91):

5-79. $y = x^{arctgx}$. 5-80. $y = (x^2+1)^{\sqrt{x}}$

5-81. $y = \frac{e^x\cdot(x+4)^4}{\sqrt{5x-1}}$ 5-82. $y = \frac{x^3\sqrt{x-10}}{(x^2+4)^3\cdot\sqrt[7]{x-6}}$

5-83. $y = 3^x\cdot x^5\cdot\sqrt{x^4+x}$ 5-84. $f(t) = t^{\frac{1}{\ln t}}$

Ko'rsatilgan tartibli hosilalarni toping (79-87):

5-85. $y = \ln\cos x,\ y'' = ?$ 5-86. $y = \sin^2 x, y'' = ?$

5-87. $y = 5^x, y'' = ?$ 5-88. $y = \frac{1}{4x-1}, y'' = ?$

5-89. $f(x) = xe^x, f'''(x) = ?$ 5-90. $r(\vartheta) = \cos\vartheta,\ r^{(IV)}(\vartheta) = ?$

5-91. $y = \ln x, y^{(n)} = ?$

VI BOB. DIFFERENSIAL

1-§. Differensiallanuvchi funksiya. Differensiallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda aniqlangan va $x_0 \in (a, b)$ bo'lsin.

6.1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi Δy orttirmasini

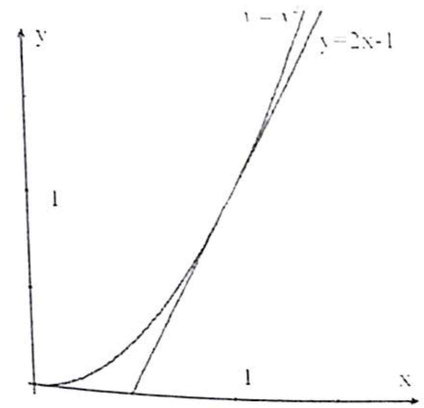
$$\Delta y = A{\cdot}\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (1)$$

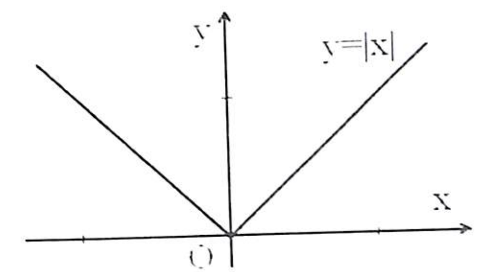
ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bu funksiya $x = x_0$ nuqtada *differensiallanuvchi funksiya* deyiladi. Bunda A – Δx ga bog'liq bo'lmagan biror o'zgarmas son, $\alpha(\Delta x)$ esa $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

$y = kx + b$ chiziqli funksiyani qaraylik. Uning uchun $\Delta y = k\Delta x$ tenglik o'rinli, ya'ni funksiya orttirmasi argument orttirmasiga to'g'ri proporsional. Tarifdagi $\Delta y = A{\cdot}\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ tenglik esa funksiya orttirmasi argument orttirmasiga «deyarli to'g'ri proporsional»ligini bildiradi, ya'ni $\Delta y \approx A\Delta x$. Bu tenglik $|\Delta x|$ qanchalik kichik bo'lsa, shunchalik aniqroq bo'ladi. Geometrik nuqtai nazardan funksiyaning x nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi funksiya grafigi x nuqtaning yetarlicha kichik atrofida biror novertikal to'g'ri chiziq, ya'ni biror chiziqli funksiya grafigi bilan «qo'shilib» ketishini anglatadi. Shunday qilib, geometrik nuqtai nazardan funksiyaning x nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi funksiya grafigini x nuqtaning yetarlicha kichik atrofida «to'g'rilash» mumkinligini anglatadi.

Masalan, 32-rasmda $y = x^2$ funksiya grafigini $x_0 = 1$ nuqta atrofida $y = 2x - 1$ to'g'ri chiziq grafigi bilan «qo'shilib» ketishi ko'rsatilgan.

33-rasmdan $y = |x|$ funksiyani $x = 0$ nuqtada differensiallanuvchi emasligi kelib chiqadi, bu funksiya grafigini $x = 0$ nuqtaning hech bir atrofida «to'g'rilab» bo'lmaydi.





32-rasm 33-rasm

6.2-teorema. $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilasi mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. ◊ *Zaruriyligi*. Funksiya $x = x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda funksiyaning orttirmasini (1) ko'rinishda yozish mumkin. Undan $\Delta x \neq 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ ni yozish mumkin. Bundan $\Delta x \to 0$ da $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, demak x nuqtada hosila mavjud va $f'(x) = A$ ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Chekli $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsin, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. U holda $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, bu yerda $\alpha(\Delta x)$ $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya. Demak,

$$\Delta y = f'(x_0){\cdot}\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (2)$$

yoki $\Delta y = A{\cdot}\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, bu yerda $A = f'(x_0)$. Shunday qilib $x = x_0$ nuqtada $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi va $A = f'(x_0)$ ekan. ◆

Bu teorema bir o'zgaruvchili funksiya uchun differensiallanuvchi bo'lish hosilaning mavjud bo'lishiga teng kuchli ekanligini anglatadi. Shu sababli hosilani topish amali funksiyani *differensiallash*, matematik analizning hosila o'rganiladigan bo'limi *differensial hisob* deb ataladi.

Shunday qilib, avvalgi 1-ta'rif bilan ekvivalent bo'lgan ushbu ta'rifni ham berish mumkin:

6.3-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi.

2-§. Funksiya differensiali, uning geometrik va fizik ma'nolari

2.1. Funksiya differensiali. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, $x \in (a;b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ya'ni funksiyaning x nuqtadagi orttirmasini

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsin, bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha(\Delta x) \to 0$.

6.4-ta'rif. x nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya orttirmasi (1) ning bosh qismi $f'(x)\Delta x$ berilgan $f(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi differensiali deyiladi va dy yoki $df(x)$ orqali belgilanadi, ya'ni $dy = f'(x)\Delta x$.

Masalan, $y = x^2$ funksiya uchun $dy = 2x\Delta x$ ga teng.

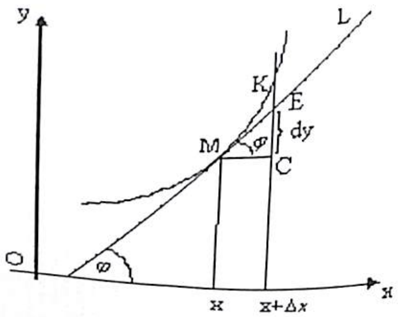
Agar $f(x) = x$ bo'lsa, u holda $f'(x) = 1$ va $df(x) = 1 \cdot \Delta x$, ya'ni $dx = \Delta x$ bo'ladi. Shuni hisobga olgan holda argument orttirmasini, odatda, dx bilan belgilashadi.

Buni nazarga olsak, $f(x)$ funksiya differensialining formulasi

$$dy = f'(x)dx \text{ yoki } dy = y'dx \qquad (2)$$

bo'ladi.

2.2. Differensialning geometrik ma'nosi. Endi $x \in (a;b)$ nuqtada differensallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning grafigi 34-rasmda ko'rsatilgan chiziqni ifodalasin deylik.



34-rasm

Bu chiziqning $(x, f(x))$ va $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ nuqtalarin mos ravishda M va K bilan belgilaylik. Unda $MC = \Delta x$, $KC = \Delta y$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lgani uchun $f(x)$ funksiya grafigiga uning $M(x, f(x))$ nuqtasida o'tkazilgan ML urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffitsienti $tg\varphi = f'(x)$. Shu ML urinmaning KC bilan kesishgan nuqtasini E bilan belgilaylik. Ravshanki, ΔMEC dan $\frac{EC}{MC} = tg\varphi$ Bundan $EC = MC \cdot tg\varphi = f'(x)\Delta x$ ekani kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali $y = f'(x)\Delta x$ funksiya grafigiga $M(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi EC ni ifodalaydi. Differensialning geometrik ma'nosi aynan shundan iborat.

3. Differensialning fizik ma'nosi. Moddiy nuqta $s = f(t)$. bu yerda s –bosib o'tilgan yo'l, t –vaqt, $f(t)$-differensiallanuvchi funksiya, qonuniyat bilan to'g'ri chiziqli harakatlanayotgan bo'lsin.

Δt vaqt oralig'ida nuqta $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$ yo'lni bosib o'tadi. Yo'lning bu orttirmasini $\Delta s = f'(t)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t$ ko'rinishda ifodalashimiz mumkin. Bu yo'lni nuqta biror o'zgaruvchan tezlik bilan bosib o'tgan. Agar Δt vaqt oralig'ida nuqta o'zgarmas $f'(t)$ tezlik, ya'ni t vaqtdagi tezligiga teng tezlik bilan harakatlandi desak, bu holda bosib o'tilgan yo'l $f'(t)\Delta t$ ga teng bo'ladi. Bu esa yo'lning differensialiga teng:

$$ds = f'(t)\Delta t.$$

3-§. Elementar funksiyalarning differensiallari. Differensialni topish qoidalari. Differensial formasining invariantligi

3.1. Elementar funksiyalarning differensiallari. Elementar funksiyalarning hosilalarini bilgan holda ularning differensiallari uchun quyidagi formulalarni yozish mumkin:

1. $d(x^\mu) = \mu \cdot x^{\mu-1}dx \ (x > 0)$;
2. $d(a^x) = a^x \cdot lna \ dx \ (a > 0, a \neq 1)$;
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{xlna}dx, (x > 0, a > 0, a \neq 1), xususan, d(lnx) = \frac{dx}{x} \ (x > 0)$;

4. $d(\sin x) = \cos x dx$;

5. $d(\cos x) = -\sin x dx$;

6. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right)$;

7. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx \ (x \neq k\pi, k \in Z)$;

8. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \ (-1 < x < 1)$;

9. $d(\arccos x) = -\frac{1}{1-x^2}dx \ (-1 < x < 1)$;

10. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx$;

11. $d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx$.

3.2. Differensialni topish qoidalari. Funksiya differensiali ta'rifi va hosila topish qoidalaridan quyidagi tasdiqlarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

6.5-teorema. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig'indisining differensiali ularning differensiallari yig'indisiga teng.

Isbot. ◊ Ikki funksiya yig'indisi uchun quyidagicha isbotlash mumkin:

$$d(u(x) + v(x)) = (u(x) + v(x))'dx = (u'(x) + v'(x))dx =$$
$$= u'(x)dx + v'(x)dx = du + dv.$$

Umumiy holda matematik induksiya metodi bilan isbotlanadi. ◆

6.6-teorema. Quyidagi $d(u(x) \cdot v(x)) = v(x) \cdot du + u(x) \cdot dv$ formula o'rinli.

Isbot. ◊ Ko'paytmaning hosilasi va funksiya differensiali formulalaridan foydalanamiz:

$$d(u(x) \cdot v(x)) = (u(x) \cdot v(x))'dx = (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x))dx =$$
$$= (u'(x)dx) \cdot v(x) + u(x) \cdot (v'(x)dx) = v(x) \cdot du + u(x) \cdot dv. ◆$$

6.7-teorema. Quyidagi $d(Cu(x)) = Cu'(x)dx$ formula o'rinli.

Isbot (6-1-masala).

6.8-teorema. Bo'linmaning differensiali uchun quyidagi

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{du \cdot v(x) - u(x) \cdot dv}{v^2(x)}$$

formula o'rinli.

Isbot (6-2-masala).

3.3. Differensial formasining invariantligi. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Differensialning ta'rifiga ko'ra $dy = y_x'\Delta x$, yoki erkli o'zgaruvchining orttirmasini dx kabi yozishga kelishganimizni e'tiborga olsak, $dy = y_x'dx$ edi.

Endi x erkli o'zgaruvchi emas, balki t erkli o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin: $x = \varphi(t)$. U holda $y = f(\varphi(t)) = g(t)$ funksiya t o'zgaruvchining murakkab funksiyasi va $dy = y_t'dt$ tenglik o'rinli bo'ladi. Lekin $y_t = y_x'x_t'dt$ va $dx = x_t'dy$ larni e'tiborga olsak, $dy = y_x'dx$ formulaga ega bo'lamiz, ya'ni differensialning avvalgi ko'rinishiga qaytamiz.

Shunday qilib, differensial formasi o'zgarmadi, ya'ni funksiya differensialining formasi x erkli o'zgaruvchi bo'lganda ham, erksiz (oraliq) o'zgaruvchi bo'lganda ham bir xil ko'rinishda bo'ladi: differensial hosila va hosila qaysi o'zgaruvchi bo'yicha olinayotgan bo'lsa, o'sha o'zgaruvchi differensiali ko'paytmasiga teng bo'ladi. Bu xossa *differensial formasining invariantligi* deyiladi. Shuni aytib o'tish lozimki, bu xossada faqat differensial formasining saqlanishi haqida gap boradi. Agar x erkli o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $dx = \Delta x$; x erksiz o'zgaruvchi bo'lsa, u holda, umuman olganda, $dx \neq \Delta x$ bo'ladi.

6.9-misol. $y = \sqrt[3]{x}$ berilgan. 1) x erkli o'zgaruvchi bo'lganda va 2) $x = t^5 + t^2 - 3$ bo'lganda dy ni hisoblang.

Yechish. 1) 2-§ dagi (2) formulaga ko'ra

$$dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

2) Differensial formasining invariantlik xossasidan foydalansak, $dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ bo'lib,

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{(t^5+t^2-3)^2}}d(t^5 + t^2 - 3) = \frac{(5t^4 + 2t)dt}{3\sqrt[3]{(t^5+t^2-3)^2}}$$

natijaga ega bo'lamiz.

4-§. Taqribiy hisoblashlarda differensialning qo'llanilishi

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, x_0 nuqtada differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya uchun $\Delta y \approx f'(x_0)dx$, ya'ni $\Delta y \approx dy$ taqribiy tenglik o'rinli. Shu taqribiy tenglik matematik analizning nazariy va tatbiqiy masalalarida muhim ahamiyatga ega bo'lib, differensialning mohiyatini belgilaydi. Yuqoridagi tenglikda $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$ deb olsak, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ yoki

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

(1) formula funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblashda keng qo'llaniladi.

Masalan, $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya uchun quyidagi

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \qquad (2)$$

formula o'rinli. Agar $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaning $x = 0,98$ dagi qiymatini hisoblash talab qilinsa, (2) formulada $x = 1$, $\Delta x = -0,02$ deb olish yetarli. U holda $\sqrt{0,98} \approx \sqrt{1} + \frac{-0,02}{2\sqrt{1}} = 1 - 0,01 = 0,99$ bo'ladi. Agar $\sqrt{0,98}$ kalkulyatorda hisoblasak, uni 10^{-6} aniqlikda 0,989949 teng ekanligi ko'rish mumkin. Demak, differensial yordamida hisoblaganda xatolik 0,001 dan katta emas.

5-§. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari

5.1. Yuqori tartibli differensiallar. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya biror (a, b) intervalda berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning $dy = f'(x)dx$ differensiali x ga bog'liq bo'lib, $dx = \Delta x$ va Δx orttirma x ga bog'liq emas, chunki x nuqtadagi orttirmani x ga bog'liq bo'lmagan holda ixtiyoriy tanlash mumkin. Bu holda differensial formulasidagi dx ko'paytuvchi o'zgarmas bo'ladi va $f'(x)dx$ ifoda faqat x ga bog'liq bo'lib, uni x bo'yicha differensiallash mumkin.

Demak, bu funksiyaning differensiali mavjud bo'lishi mumkin va u, agar mavjud bo'lsa, funksiyaning *ikkinchi tartibli differensiali* deb ataladi.

Ikkinchi tartibli differensial d^2y yoki $d^2f(x)$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, ikkinchi tartibli differensial quyidagicha aniqlanar ekan: $d^2y = d(dy)$

Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali ifodasini topish uchun $dy = f'(x)dx$ formulada dx ko'paytuvchi o'zgarmas deb qaraymiz. U holda

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2$$

bo'ladi. Biz kelgusida dx ning darajalarini qavssiz yozishga kelishib olamiz. Bu kelishuvni e'tiborga olsak, $(dx)^2 = dx^2$ bo'ladi va ikkinchi tartibli differensial uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$d^2y = f''(x)dx^2 \qquad (1)$$

Shunga o'xshash, uchinchi tartibli differensialni ta'riflash va uning uchun ifodasini keltirib chiqarish mumkin: $d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3$.

Umumiy holda funksiyaning $(n-1)$-tartibli differensiali $d^{(n-1)}y$ dan olingan differensial funksiyaning n-tartibli differensiali deyiladi va d^ny kabi belgilanadi, ya'ni $d^ny = d(d^{n-1}y)$. Bu holda ham funksiyaning n-tartibli differensiali uning n-tartibli hosilasi orqali quyidagi

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (2)$$

ko'rinishda ifodalanishini isbotlash mumkin.

Yuqoridagi formuladan funksiyaning n-tartibli hosilasi uning n-tartibli differensiali va erkli o'zgaruvchi differensialining n-darajasi nisbatiga teng ekanligi kelib chiqadi:

$$f^{(n)}(x) = d^ny/dx^n.$$

5.2. Murakkab funksiyaning yuqori tartibli differensiallari. Endi x argument biror t o'zgaruvchining funksiyasi $x = \varphi(t)$ bo'lgan hol uchun yuqori tartibli differensiallarni hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz.

Bu holda $dx = \varphi'(t)dt$ bo'lganligi sababli, dx ni x ga bog'liq emas deb bo'lmaydi. Shu sababli ta'rif bo'yicha $(d^2y = d(f'(x)dx))$ hisoblaganda, d^2y ni ikkita $f'(x)$ va dx funksiyalar ko'paytmasining differensiali deb qaraymiz.

Natijada

$$d^2y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d^2x = (f''(x)dx)dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

ya'ni

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x \tag{3}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi ikkinchi tartibli differensial uchun hosil qilingan (1) formula (3) formulaning xususiy holi ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan ham, agar x erkli o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $d^2x = x''dx^2 = 0 \cdot dx^2 = 0$ bo'lib, (3) formuladagi ikkinchi qo'shiluvchi qatnashmaydi.

Uchinchi tartibli differensial uchun quyidagi

$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x \tag{4}$$

formula o'rinli ekanligini isbotlashni o'quvchilarga taklif qilamiz.

Ikkinchi va uchinchi tartibli differensiallar uchun olingan formulalardan murakkab funksiyaning yuqori tartibli differensiallarini hisoblashda differensial formasining invariantligi buziladi. Boshqacha aytganda, ikkinchi va undan yuqori tartibli differensial formulalari ko'rinishi x argument erkli o'zgaruvchi yoki boshqa o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lishiga bog'liq bo'ladi.

Mashq va masalalar

6-1. 6.7-teoremani isbotlang.

6-2. 6.8-teoremani isbotlang.

Funksiyaning differensialini toping (3-6):

6-3. $y = arctg\,\sqrt{x}$. 6-4. $y = (x^3 - x)\,tg\,x$.

6-5. $y = x^2 lnx$. 6-6. $y = \frac{x-2}{x^2+1}$.

$y = y(x)$ funksiyaning orttirmasi va differensialini umumiy ko'rinishda, shuningdek Δx ma'lum bo'lganda x_0 nuqtada toping (7-8).

6-7. $y = x^3 + 2x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$.

6-8. $y = x^2 + x - 5$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}5$.

Differensial yordamida taqribiy hisoblang (9-11):

6-9. $\sqrt[3]{26}$. 6-10. $tg44°$. 6-11. $(1{,}02)^5$.

6-12. Funksiya orttirmasini differensial bilan almashtirib, $y = y(x)$ funksiyaning ko'rsatilgan nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblang:

a) $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 65; x = 125{,}1324$; b) $y = \sqrt[4]{x}$, $x = 90; x = 15{,}8$;

c) $y = sinx$, $x = 29^0; x = 359^0$; d) $y = arcsinx$, $x = 0{,}51$.

6-13. x_0 ga nisbatan kichik Δx uchun quyidagi taqribiy formula o'rinli ekanligini isbotlang:

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x, \quad x_0 > 0.$$

Shu formula yordamida taqribiy hisoblang:

a) $\sqrt{640}$; b) $\sqrt[3]{199}$; c) $\sqrt[5]{243{,}45}$; d) $\sqrt[10]{1000}$

dy va d^2y larni toping (12-13):

6-14. $y = \frac{x-1}{x+1}$. 6-15. $y = x(lnx - 1)$.

6-16. Differensialdan foydalanib, $(1 + \alpha)^n \approx 1 + n \cdot \alpha$ taqribiy formulani isbotlang.

VII BOB. DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI VA ULARNING TATBIQLARI

1-§. O‘rta qiymat haqidagi teoremalar

Matematik analiz kursida o‘rganiladigan asosiy va amaliy masalalarni yechishda katta ahamiyatga ga bo‘lgan funksiyalar sinflaridan (to‘plamlaridan) biri- bu uzluksiz funksiyalar sinfi hisoblanadi. Oldingi bobda biz differensiallanuvchi funksiyalar sinfi uzluksiz funksiyalar sinfining qismi bo‘lishini ko‘rsatgan edik. Differensiallanuvchi funksiyalar o‘ziga xos ahamiyatga ega, chunki ko‘pgina tatbiqiy masalalarni yechish hosilasi mavjud funksiyalarni o‘rganishga keltiriladi. Bunday funksiyalar ba’zi bir umumiy xossalarga ega. Bu xossalar ichida *o‘rta qiymat haqidagi teoremalar* nomi bilan birlashgan teoremalar alohida ahamiyatga ega. Ushbu teoremalar $[a;b]$ kesmada o‘rganilayotgan funksiya uchun u yoki bu xossaga ega bo‘lgan $[a;b]$ kesmaga tegishli c nuqtaning mavjudligini ta’kidlaydi.

1.1. Ferma teoremasi

7.1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan va biror $c \in (a,b)$ nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishsa va shu nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo‘lsa, u holda $f'(c) = 0$ bo‘ladi.

Isbot. ◊ $f(c)$ funksiyaning eng katta qiymati bo‘lsin, ya’ni ixtiyoriy $x \in (a;b)$ da $f(x) \le f(c)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. Shartga ko‘ra bu c nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud.

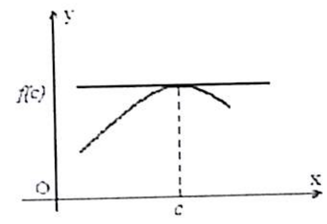
Ravshanki,

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Ammo $x < c$ bo‘lganda $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0 \to f'(c) \ge 0$ va $x > c$ bo‘lganda $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0 \to f'(c) \le 0$ bo‘lishidan $f'(c) = 0$ ekani kelib chiqadi.

Eng kichik qiymat holi shunga o‘xshash isbotlanadi. ◆

Ferma teoremasi sodda geometrik ma’noga ega. U $f(x)$ funksiya grafigiga $(c; f(c))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning Ox o‘qiga paralell bo‘lishini ifodalaydi (35-rasm).



35-rasm

7.2-izoh. Ichki c nuqtada $f'(c) = 0$ bo‘lsa ham bu nuqtada $f(x)$ funksiya eng katta (eng kichik) qiymatni qabul qilmasligi mumkin. Masalan, $f(x) = 2x^3 - 1$, $x \in (-1;1)$ da berilgan bo‘lsin. Bu funksiya uchun $f'(0) = 0$ bo‘ladi, lekin $f(0) = -1$ funksiyaning $(-1;1)$ dagi eng katta yoki eng kichik qiymati bo‘lmaydi.

1.2. Roll teoremasi

7.3-teorema (Roll teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan bo‘lib, quyidagi 1) $[a;b]$ da uzluksiz; 2) $(a;b)$ da differensiallanuvchi; 3) $f(a) = f(b)$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda $f'(c) = 0$ bo‘ladigan kamida bitta c $(a < c < b)$ nuqta mavjud bo‘ladi.

Isbot. ◊ Ma’lumki, agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiya shu kesmada o‘zining eng katta M va eng kichik m qiymatlariga erishadi. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya uchun ikki hol bo‘lishi mumkin.

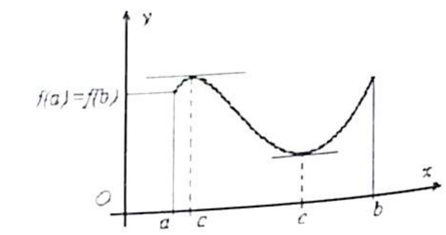
1. $M = m$, bu holda $[a,b]$ kesmada $f(x) = const$ va $f'(x) = 0$ bo‘ladi. Ravshanki, $f'(c) = 0$ tenglamani qanoatlantiradigan nuqta sifatida $(a;b)$ ning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

2. $M > m$, bu holda teoremaning $f(a) = f(b)$ shartidan funksiya M yoki m qiymatlaridan kamida birini $[a,b]$ kesmaning ichki nuqtasida qabul qilishi kelib chiqadi. Aniqlik uchun $f(c) = m$ bo‘lsin. Eng kichik qiymatning ta’rifiga ko‘ra $\forall x \in [a,b]$ uchun $f(x) \ge f(c)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Endi $f'(c) = 0$ ekanligini ko‘rsatamiz. Teoremaning ikkinchi shartiga ko‘ra $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning har bir x nuqtasida chekli hosilaga ega. Bu shart, xususan c nuqta uchun ham o‘rinli. Demak, Ferma teoremasi shartlari bajariladi. Bundan $f'(c) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

$f(c) = M$ bo‘lgan holda teorema yuqoridagi kabi isbotlanadi. ◆

Roll teoremasiga quyidagicha geometrik talqin berish mumkin (36-rasm). Agar $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya kesma uchlarida teng qiymatlar qabul qilsa, u holda $f(x)$ funksiya grafigida abssissasi $x=c$ bo'lgan shunday C nuqta topiladiki, shu nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma abssissalar o'qiga parallel bo'ladi.



36-rasm

7.4-izoh. Roll teoremasining shartlari yetarli bo'lib, zaruriy shart emas. Masalan, 1) $f(x)=x^3$, $x\in[-1;1]$ funksiya uchun teoremaning 3-sharti bajarilmaydi.

$(f(-1)=-1\neq 1=f(1))$, lekin $f'(0)=0$ bo'ladi.

2) $f(x)=\begin{cases} x, & agar\ 0\le x\le 1, \\ 0, & agar\ 1<x<2, \\ 2, & agar\ x\ge 2, \end{cases}$ funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari bajarilmaydi, lekin $(1;2)$ intervalning ixtiyoriy nuqtasida $f'(x)=0$ bo'ladi.

1.3. Lagranj teoremasi

7.5-teorema (Lagranj teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da chekli $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda (a,b) da kamida bitta shunday c nuqta mavjud bo'lib,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Quyidagi yordamchi funksiyani tuzib olamiz:

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(x-a)$$

Bu $\Phi(x)$ funksiyani $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ va x funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida qarash mumkin. Bundan

$\Phi(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da hosilaga ega ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek

$$\Phi(a)=\Phi(b)=0,$$

demak $\Phi(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi.

Demak, Roll teoremasiga ko'ra (a,b) intervalda kamida bitta shunday c nuqta mavjud bo'ladiki, $\Phi(c)=0$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\Phi(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

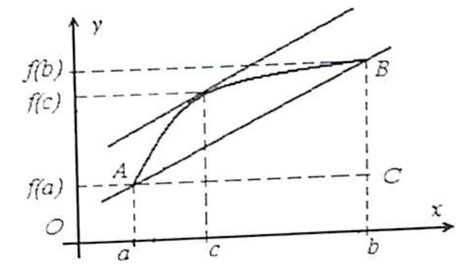
va bundan esa isbot qilinishi kerak bo'lgan (1) formula kelib chiqadi. ◆

(1) formulani ba'zida *Lagranj formulasi* deb ham yuritiladi. Bu formula

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (2)$$

ko'rinishda ham yoziladi.

Endi Lagranj teoremasining geometrik ma'nosiga to'xtalamiz. $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantirsin deylik (37-rasm). Funksiya grafigining $A(a;f(a)),B(b;f(b))$ nuqtalar orqali kesuvchi o'tkazamiz, uning burchak koeffitsienti



37-rasm

$$tg\beta=\frac{BC}{AC}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

bo'ladi.

Hosilaning geometrik ma'nosiga binoan $f'(c)$ - bu $f(x)$ funksiya grafigiga uning $(c;f(c))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti: $tg\beta=f'(c)$ Demak, (1) formula (a,b) intervalda kamida bitta shunday c nuqta mavjudligini ko'rsatadiki, $f(x)$ funksiya grafigiga $(c;f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinma AB kesuvchiga paralell bo'ladi.

Isbot qilingan (1) formulani boshqacha ko'rinishda ham yozish mumkin. Buning uchun $a<c<b$ tengsizliklarni e'tiborga olib, $\frac{c-a}{b-a}=\theta$ belgilash kiritamiz, u holda $c=a+(b-a)\theta,\ 0<\theta<1$ bo'lishi ravshan. Natijada (1) formula ushbu

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$$

ko'rinishga keladi.

Agar (1) formulada $a = x_0$; $b = x_0 + \Delta x$ almashtirishlar bajarsak, u

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x \qquad (3)$$

bu yerda $x_0 < c < x_0 + \Delta x$, ko'rinishga keladi. Bu formula argument orttirmasi bilan funksiya orttirmasini bog'laydi, shu sababli (3) formula *chekli orttirmalar formulasi* deb ataladi.

Agar (1) Lagranj formulasida $f(a) = f(b)$ deb olsak, Roll teoremasi kelib chiqadi, ya'ni Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi ekan.

7.6-misol. Ushbu [0,2] kesmada $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ funksiya uchun Lagranj formulasidagi c ning qiymatini toping.

Yechish. Funksiyaning kesma uchlaridagi qiymatlarini va hosilasini hisoblaymiz: $f(0) = -2$; $f(2) = 12$; $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$. Olingan natijalarni Lagranj formulasiga qo'yamiz, natijada

$12 - (-2) = (12c^2 - 10c + 1)(2 - 0)$ yoki $6c^2 - 5c - 3 = 0$ kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechamiz: $c_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{97}}{12}$. Topilgan ildizlardan faqat $\frac{5+\sqrt{97}}{12}$ qaralayotgan kesmaga tegishli. Demak, $c = \frac{5+\sqrt{97}}{12}$ ekan.

Lagranj teoremasi o'z navbatida quyidagi teoremaning xususiy holi bo'ladi.

1.4. Koshi teoremasi

7.7-teorema (Koshi teoremasi). Agar $[a, b]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo'lib, 1) $[a, b]$ da uzluksiz; 2) (a, b) intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ mavjud, hamda $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda bitta shunday c $(a < c < b)$ nuqta topilib,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (4)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Ravshanki, (4) tenglik ma'noga ega bo'lishi uchun $g(b) \neq g(a)$ bo'lishi kerak. Bu esa teoremadagi $g'(x) \neq 0$, $x \in (a; b)$ shartdan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $g(a) = g(b)$ bo'lsa, u holda $g(x)$ funksiya Roll

teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirib, biror $c \in (a; b)$ nuqtada $g'(c) = 0$ bo'lar edi. Bu esa $x \in (a; b)$ da $g'(x) \neq 0$ shartga ziddir. Demak, $g(b) \neq g(a)$.

Endi yordamchi

$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = (g(x) - g(a))$ funksiyani tuzaylik.

Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da uzluksiz va (a, b) intervalda differensiyalanuvchi bo'lgani uchun $F(x)$ birinchidan $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida uzluksiz, ikkinchidan (a, b) intervalda

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = g'(x)$$

hosilaga ega.

So'ngra $\Phi(x)$ funksiyaning $x = a$ va $x = b$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$. Demak, $\Phi(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun hech bo'lmaganda bitta shunday c $(a < c < b)$ nuqta topiladiki, $\Phi'(c) = 0$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$0 = \Phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = g'(c)$$

va bundan (4) tenglikning o'rinli ekani kelib chiqadi. ◆

Isbotlangan (4) tenglik *Koshi formulasi* deb ham ataladi.

7.8-misol. Ushbu $f(x) = x^2$ va $\varphi(x) = \sqrt{x}$ funksiyalar uchun [0,4] kesmada Koshi formulasini yozing va c ni toping.

Yechish. Berilgan funksiyalarning kesma uchlaridagi qiymatlari va hosilalarini topamiz: $f(0) = 0$, $f(4) = 16$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(4) = 2$; $f'(x) = 2x$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Bulardan foydalanib Koshi formulasini yozamiz:

$\frac{16-0}{2-0} = \frac{2c}{\frac{1}{2\sqrt{c}}}$, bundan $4c\sqrt{c} = 8$ yoki $c\sqrt{c} = 2$. Demak $c = \sqrt[3]{4}$.

Mashq va masalalar

7-1. Roll teoremasini $f(c) = M$ bo'lgan holda isbotlang.

7-2. Berilgan kesmada $f(x)$ funksiya uchun Roll teoremasi to'g'riligini tekshiring, teoremadagi c ning qiymatini toping (agar u mavjud bo'lsa) (3-6):

7-3. $f(x) = |x| - 2, [-2; 2]$. 7-4. $f(x) = -x^2 + 4x - 3, [0; 4]$.

7-5. $f(x) = \cos x, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ 7-6. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}, [-1; 1]$.

Berilgan kesmada $f(x)$ funksiya uchun Lagranj teoremasi to'g'riligini tekshiring, teoremadagi c ning qiymatini toping (agar u mavjud bo'lsa) (7-9):

7-7. $f(x) = e^x, [0; 1]$.

7-8. $f(x) = \frac{1}{x}, \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

7-9. $f(x) = |x - 1|, [0; 3]$.

$y = f(x)$ egri chiziqning, urinmasi A va B nuqtalarini tutashtiruvchi vatariga parallel bo'ladigan nuqtasini toping (10-11):

7-10. $y = x^2 - 4x$, $A(1; -3)$; $B(5; 5)$. Chizma yordamida tushintiring.

7-11. $y = \ln x$, $A(1; 0)$; $B(e; 1)$.

7-12. Roll teoremasining quyidagi shartlaridan boshqa barcha shartlari bajarilsa, $f(\xi) = 0$ bo'ladigan $\xi \in (a, b)$ nuqta har doim mavjud bo'ladimi?

a) f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

b) f funksiya (a, b) intervalda chekli hosilaga, yoki bir hil ishorali cheksiz hosilaga ega;

c) $f(a) = f(b)$.

7-13. Roll teoremasi shartlari $f(\xi) = 0$ bo'ladigan $\xi \in (a, b)$ nuqta mavjud bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart bo'ladimi?

7-14. $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, agar\ x \neq 0, \\ 0, \quad agar \quad x = 0 \end{cases}$ funksiya uchun $[-1; 1]$ kesmada Lagranj teoremasi o'rinlimi?

2-§ Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari

Tegishli funksiyalarning hosilalari mavjud bo'lganda $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish masalasi engillashadi. Odatda

hosilalardan foydalanib, aniqmasliklarni ochish *Lopital qoidalari* deb ataladi. Biz quyida Lopital qoidalarining bayoni bilan shug'ullanamiz.

2.1. $\frac{0}{0}$ **ko'rinishdagi aniqmaslik.** Ma'lumki, $x \to a$ da $f(x) \to 0$ va $g(x) \to 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifoda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik deyilar edi. Ko'pincha $x \to a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifodaning limitini topishga qaraganda $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ifodaning limitini topish oson bo'ladi. Bu ifodalar limitlarining teng bo'lish sharti quyidagi teoremada ifodalangan.

7.9-teorema. Agar

1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$, bu yerda $\delta > 0$, to'plamda differensiallanuvchi va shu to'plamdan olingan ixtiyoriy x uchun $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$; 2) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$; 3) hosilalar nisbatining limiti (chekli yoki cheksiz) mavjud bo'lsa, u holda funksiyalar nisbatining limiti $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Har ikkala funksiyani $x = a$ nuqtada $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ deb aniqlasak, natijada ikkinchi shartga ko'ra $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = f(a)$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0 = g(a)$ tengliklar o'rinli bo'lib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Avval $x > a$ holni qaraymiz. Berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a; x]$, bu yerda $x < a + \delta$, kesmada Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun a bilan x orasida shunday c nuqta topiladiki, ushbu $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o'rinli bo'ladi. $f(a) = g(a) = 0$ ekanligini e'tiborga olsak, so'ngi tenglikdan

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (2)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki, $a < c < x$ bo'lganligi sababli, $x \to a$ bo'lganda $c \to a$ bo'ladi. Teoremaning 3-sharti va (2) tenglikdan $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ kelib chiqadi.

Shunga o'xshash, $x < a$ holni ham qaraladi. ◆

7.10-misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3-10}$ limitni hisoblang.

Yechish. Bu holda $f(x) = \ln(x^2-3)$, $g(x) = x^2+3-10$ bo'lib, ular uchun 7.9- teoremaning barcha shartlari bajariladi.

Haqiqatan ham, 1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\ln(x^2-3) = ln1 = 0$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+3-10) = 0$; 2) $f'(x) = \frac{2x}{x^2-3}$, $g'(x) = 2x+3, x \neq \pm\sqrt{3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{(x^2-3)(2x+3)} = \frac{4}{7}$ bo'ladi.

Demak, 7.9-teoremaga binoan $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3-10} = \frac{4}{7}$.

7.11-eslatma. Shuni ta'kidlash kerakki, berilgan funksiyalar nisbatining limiti 3) shart bajarilmasa ham mavjud bo'lishi mumkin, ya'ni 3) shart yetarli bo'lib, zaruriy emas, haqiqatan ham $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$, $g(x) = x$ funksiyalar $(0; 1]$ da 1), 2) shartlarni qanoatlantiradi va

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

lekin

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x})$ mavjud emas, chunki $n \to \infty$ da

$x_n = \frac{1}{\pi n} \to 0$ va $\lim\limits_{x_n\to 0}(2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \sin\pi n) = 0$,

$x_n = \frac{1}{\pi(2n+\frac{1}{2})} \to 0$ uchun $\lim\limits_{x_n\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi(2n+\frac{1}{2})}\cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$.

7.12-teorema. Agar $[c; +\infty)$ nurda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo'lib, 1) $(c; +\infty)$ da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x) \neq 0$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$; 3) hosilalar nisbatining limiti $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (chekli yoki cheksiz) mavjud bo'lsa, u holda funksiyalar nisbatining limiti $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot (7-15-masala).

2.2. $\frac{\infty}{\infty}$ **ko'rinishdagi aniqmaslik.** Agar $x \to \infty$ da $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifoda $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyilar edi. Endi bunday aniqmaslikni ochishda ham $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning hosilalaridan foydalanish mumkinligini ko'rsatadigan teoremani keltiramiz.

7.13-teorema. Agar 1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a; \infty)$ nurda differensiallanuvchi, hamda $g'(x) \neq 0$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Teorema shartiga ko'ra $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud. Aytaylik, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \mu$ bo'lsin. U holda $\forall\varepsilon > 0$ sonni olsak ham shunday $N > 0$ son topilib, $x \geq N$ bo'lganda

$$\mu - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \mu + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

tengsizliklar bajariladi. Umumiylikni cheklamagan holda $N > a$ deb olishimiz mumkin. U holda $x \geq N$ tengsizlikdan $x \in (a; \infty)$ kelib chiqadi.

Aytaylik, $x > N$ bo'lsin. U holda $[N; x]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga Koshi teoremasini qo'llanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, bu yerda $N < c < x$.

Endi $c > N$ bo'lganligi sababli $x = c$ da (3) tengsizliklar o'rinli:

$$\mu - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(c)}{g'(c)} < \mu + \frac{\varepsilon}{2},$$

bundan esa

$$\mu - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(N)}{g(x) - g(N)} < \mu + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

tengsizliklarga ega bo'lamiz.

Teorema shartiga ko'ra $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty$, $f(N)$ va $g(N)$ lar esa chekli sonlar. Shu sababli x ning yetarlicha katta qiymatlarida $\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}$ kasr $\frac{f(x)}{g(x)}$ kasrdan istalgancha kam farq qiladi. U holda shunday M soni topilib, $x \geq M$ larda

$$\mu - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \mu + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (4)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday M soni mavjudki, barcha $x \geq M$ larda (4) tenglik o'rinli bo'ladi, bu esa $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$ ekanligini anglatadi.♦

7.14-misol. Ushbu $\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $f(x) = lnx$, $g(x) = x$ funksiyalar uchun 7.13-teorema shartlarini tekshiramiz: 1) bu funksiyalar $(0, +\infty)$ da differensiallanuvchi; 2) $f'(x) = 1/x$ $g'(x) = 1$; 3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$, ya'ni mavjud. Demak, izlanayotgan limit ham mavjud va $\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x} = 0$ tenglik o'rinli.

2.3. Boshqa ko'rinishdagi aniqmasliklar. Ma'lumki, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ bo'lganda $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik bo'lib, uning quyidagi

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

kabi yozish orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikka keltirish mumkin. Shuningdek, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ bo'lganda $f(x) - g(x)$ ifoda $\infty - \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik bo'lib, uni ham quyidacha shakl almashtirib

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x)}}$$

$\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

Ma'lumki, $x \to a$ da $f(x)$ funksiya $1, 0$ va ∞ ga, $g(x)$ funksiya esa mos ravshda $\infty, 0$ va 0 intilganda $(f(x))^{g(x)}$ darajali-ko'rsatkichli ifoda 1^∞, 0^0, ∞^0 ko'rinishidagi aniqmasliklar edi. Bu ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish uchun avval $y = (f(x))^{g(x)}$ ni logarifmlaymiz: $lny = g(x)\cdot ln(f(x))$. Bunda $x \to a$ da $g(x)ln(f(x))$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi.

Shunday qilib, funksiya hosilalari yordamida $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda, ularni $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikka keltirib, so'ng yuqoridagi teoremalar qo'llaniladi.

7.15-eslatma. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham $f(x)$ va $g(x)$ lar singari yuqorida keltirilgan teoremalarning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi, ya'ni bu holda Lopital qoidasini takror qo'llanish mumkin bo'ladi.

7.16-misol. Ushbu $\lim_{x\to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ limitni hisoblang.

Yechish. Ravshanki, $x\to 0$ da $\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ifoda 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Uni logarifmlab, $\frac{0}{0}$ aniqmaslikni ochishga keltiramiz:

$$\lim_{x\to0} \ln y = \lim_{x\to0} \frac{\ln\frac{tgx}{x}}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\frac{tgx}{x}\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{tgx}\cdot\frac{\frac{x}{\cos^2x}-tgx}{x^2}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x\cos x)'}{(x^3)'} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x+\sin^2x}{3x^2} = \frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x^2} = \frac{1}{6}\cdot2 = \frac{1}{3}$$

Demak, $\lim_{x\to0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$

Mashq va masalalar

7-15. 7.12-teoremani isbotlang. Ko'rsatma: Umumiylikni saqlagan holda, teoremadagi c sonni musbat deb oling va $x = \frac{1}{t}$ x almashtirishdan foydalaning.

7-16. 7.13-teoremaning $x \to a$ da ham o'rinli bo'lishini ko'rsating. Ko'rsatma: $t = \frac{1}{x-a}$ almashtirishdan foydalaning.

Lopital qoidasidan foydalanib limitlarni toping (17-30):

7-17. $\lim_{x\to2}\frac{x^3+x-10}{x^3-3x-2}$ 7-18. $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$

7-19. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x}$ 7-20. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$

7-21. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$ 7-22. $\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{ctg\,2x}$

7-23. $\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-x}$. 7-24. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

7-25. $\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$. 7-26. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x^3}-\frac{1}{1-x^2}\right)$.

7-27. $\lim_{x\to0}x^{tg\,x}$ 7-28. $\lim_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

7-29. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ 7-30. $\lim_{x\to0}x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

3-§. Teylor formulasi

Teylor formulasi matematik analizning eng muhim formulalaridan biri bo'lib, ko'plab nazariy tatbiqlarga ega. U taqribiy hisobning negizini tashkil qiladi.

3.1. Teylor ko'phadi. Peano ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi.

Ma'lumki, funksiyaning qiymatlarini hisoblash ma'nosida ko'phadlar eng sodda funksiyalar hisoblanadi. Shu sababli funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun uni shu nuqta atrofida ko'phad bilan almashtirish muammosi paydo bo'ladi.

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya ta'rifiga ko'ra, agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi orttirmasini $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + 0(\Delta x)$, ya'ni

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Boshqacha aytganda x_0 nuqtada differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya uchun birinchi darajali

$$P_1(x) = f(x_0) + b_1(x-x_0) \qquad (1)$$

ko'phad mavjud bo'lib, $x\to x_0$ da $f(x) = P_1(x) + o(x-x_0)$ bo'ladi. Shuningdek, bu ko'phad $P_1(x_0) = f(x_0)$, $P_1'(x_0) = b = f'(x_0)$ shartlarni ham qanoatlantiradi.

Endi umumiyroq masalani qaraylik. Agar $x = x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n) \qquad (2)$$

shartni qanoatlantiradigan darajasi n dan katta bo'lmagan $P_n(x)$ ko'phad mavjudmi?

Bunday ko'phadni

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots + b_n(x-x_0)^n, \qquad (3)$$

ko'rinishda izlaymiz. Noma'lum bo'lgan $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlarni topishda

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), P_n''(x_0) = f''(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \qquad (4)$$

shartlardan foydalanamiz. Avval $P_n(x)$ ko'phadning hosilalarini topamiz:

$P_n'(x) = b_1 + 2b_2(x-x_0) + 3b_3(x-x_0)^2 + \dots + nb_n(x-x_0)^{n-1}$,

$P_n''(x) = 2\cdot1b_2 + 3\cdot2b_3(x-x_0) + \dots + n\cdot(n-1)b_n(x-x_0)^{n-2}$,

$P_n'''(x) = 3\cdot2\cdot1b_3 + \dots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)b_n(x-x_0)^{n-3}$,

..............................,

$P_n^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 b_n$.

Yuqorida olingan tengliklar va (3) tenglikning har ikkala tomoniga x o'rniga x_0 ni qo'yib barcha $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ koeffitsientlar qiymatlarini topamiz:

$P_n(x_0) = f(x_0) = b_0,$

$P_n'(x_0) = f'(x_0) = b_1,$

$P_n''(x_0) = f''(x_0) = 2\cdot 1 b_2 = 2!\, b_2,$

....

$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 b_n = n!\, b_n$

Bulardan $b_0 = f(x_0),\ b_1 = f'(x_0),\ b_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0), \ldots, b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ hosil qilamiz. Topilgan natijalarni (3) qo'yamiz va

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \qquad (5)$$

ko'rinishda ko'phadni hosil qilamiz. Bu ko'phad *Teylor ko'phadi* deb ataladi.

Teylor ko'phadi (2) shartni qanoatlantirishini isbotlaymiz. Funksiya va Teylor ko'phadi ayirmasini $R_n(x)$ orqali belgilaymiz: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. (4) shartlardan $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n'(x_0) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$, ya'ni $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Agar $x \to x_0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ ifodaning $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik ekanligini ko'rish qiyin emas. Unga Lopital qoidasini n marta tatbiq qilamiz. U holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n{}^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n{}^{(n)}(x)}{n!} =$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n{}^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$, demak $x \to x_0$ da $R_n(x) = 0((x-x_0)^n)$ o'rinli ekan.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi:

7.17-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida n marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da quyidagi formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 +$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \qquad (6)$$

o'rinli bo'ladi.

Bu yerda $R_n(x) = 0((x-x_0)^n)$ *Peano ko'rinishidagi qoldiq had* deyiladi.

Agar (6) formulada $x_0 = 0$ deb olsak, Teylor formulasining xususiy holi hosil bo'ladi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n). \quad (7)$$

Bu formula *Makloren formulasi* deb ataladi.

3.2. Teylor formulasining Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadi. Teylor formulasi $R_n(x)$ qoldiq hadi yozilishining turli ko'rinishlari mavjud. Biz uning Lagranj ko'rinishi bilan tanishamiz.

Qaralayotgan $f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida $n+1$ –tartibli hosilaga ega bo'lsin deb talab qilamiz va yangi $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$ funksiyani kiritamiz. Ravshanki,

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0;\ g^{(n+1)}(x_0) = (n+1)! \neq 0.$$

Ushbu $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ va $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$ funksiyalarga Koshi teoremasini tatbiq qilamiz. Bunda $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ e'tiborga olib, quyidagini topamiz:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R'_n(c_1)}{g'(x)} = \frac{R'_n(c_1) - R'_n(x_0)}{g'(x) - g'(x_0)} = \frac{R''_n(c_2)}{g''(c_2)} = \cdots$$

$$= \frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{R_n^{(n)}(x) - R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

bu yerda $c_1 \in (x_0; x),\ c_2 \in (x_0; c_2), \ldots, c_n \in (x_0; c_{n-1})$,

Shunday qilib, biz

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$$

ekanligini ko'rsatdik, bu yerda $\xi \in (x_0; x)$. Endi $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$, $g^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$, $R_n{}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$ ekanligini e'tiborga olsak quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi\in(x_0;x) \qquad (8)$$

Bu (8) formulani Teylor formulasining *Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi* deb ataladi.

Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadni

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (9)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu yerda θ birdan kichik bo'lgan musbat son, ya'ni $0<\theta<1$.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagi shaklda yoziladi:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad bu\ yerda\ \xi\in(x_0;x).$$

Agar $x_0=0$ bo'lsa, u holda $\xi=x_0+\theta(x-x_0)=\theta x$, bu yerda $0<\theta<1$, bo'lishi ravshan, shu sababli Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^{(n)}$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (10)$$

shaklida yoziladi.

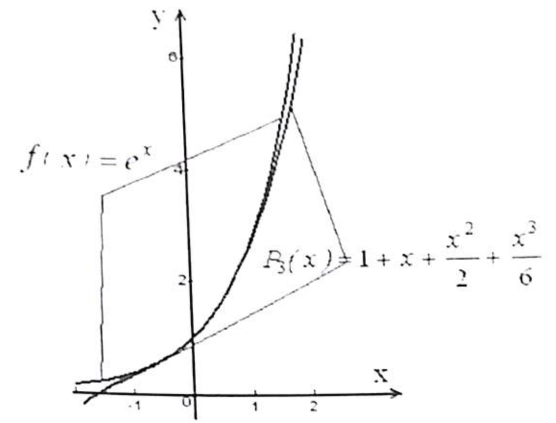
4-§. Ba'zi bir elementar funksiyalar uchun Makloren formulasi

4.1. e^x funksiya uchun Makloren formulasi. $f(x)=e^x$ funksiyaning $(-\infty;+\infty)$ oraliqda barcha tartibli hosilalari mavjud: $f^{(k)}(x)=e^x$, $k=1,2,\ldots,n+1$. Bundan $x=0$ da $f^{(k)}(0)=1$, $k=1,2,\ldots,n$; $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ va $f(0)=1$ hosil bo'ladi. Olingan natijalarni 3-§ dagi (10) formulaga qo'yib

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad (1)$$

bu yerda $0<\theta<1$, formulaga ega bo'lamiz.

38-rasmda $f(x)=e^x$ funksiya va $P_3(x)$ ko'phad funksiyaning grafiklari keltirilgan.



38-rasm

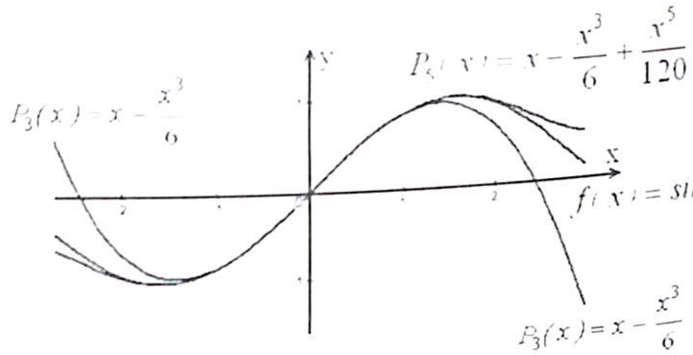
2. Sinus funksiya uchun Makloren formulasi. $f(x)=\sin x$ funksiyaning istalgan tartibli hosilasi mavjud va n-tartibli hosila uchun quyidagi formula o'rinli edi (V.8-§): $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$. $x=0$ da $f(0)=0$ va

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & agar\quad n=2k,\\ (-1)^{\kappa}, & agar\quad n=2\kappa+1\end{cases}.$$

Shuning uchun 3-§ dagi (10) formulaga ko'ra

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\sin(\theta x+\frac{2k+3}{2}\pi),\quad 0<\theta<1$$

(5) ko'rinishdagi yoyilmaga ega bo'lamiz.



39-rasm

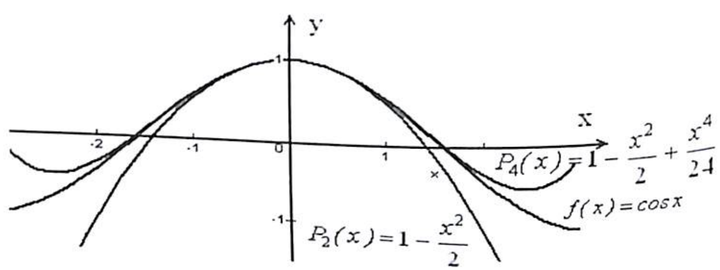
39-rasmda $f(x)=\sin x$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ funksiyalarning grafiklari keltirilgan.

4.3. Kosinus funksiya uchun Makloren formulasi. Ma'lumki, $f(x)=\cos x$ funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$ formulaga egamiz (V.8-§). $x=0$ da $f(0)=1$ va $f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{agar } n=2k+1,\\ (-1)^k, & \text{agar } n=2k\end{cases}$

Demak, $\cos x$ funksiya uchun quyidagi formula o'rinli:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}+\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos(\theta x+k\pi),\quad 0<\theta<1 \qquad (6)$$

40-rasmda $f(x)=\cos x$, $P_2(x)$, $P_4(x)$ funksiyalarning grafiklari keltirilgan.



40-rasm

4.4. $f(x)=(1+x)^\mu$ ($\mu\in R$) funksiya uchun Makloren formulasi. Bu funksiya $(-1;1)$ intervalda aniqlangan va cheksiz marta differensiallanuvchi. Uni Makloren formulasiga yoyish uchun $f(x)=(1+x)^\mu$ funksiyadan ketma-ket hosilalar olamiz:

$$f'(x)=\mu(1+x)^{\mu-1},\qquad f''(x)=\mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2},$$

$$f'''(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3},\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}. \qquad (7)$$

Ravshanki, $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)$. Shuning uchun $f(x)=(1+x)^\mu$ funksiyaning Makloren formulasi quyidagicha yoziladi:

$$(1+x)^\mu=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\mu-n-1}x^{n+1}\ (0<\theta<1). \qquad (8)$$

4.5. $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun Makloren formulasi. Bu funksiyaning $(-1;\infty)$ intervalda aniqlangan va istalgan tartibli hosilasi mavjud. Haqiqatan ham, $f'(x)=(\ln(1+x))'=(1+x)^{-1}$ funksiyasiga (7) formulani qo'llab, unda $\mu=-1$ deb n ni n-1 bilan almashtirsak, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ formulani hosil qilamiz.

Ravshanki, $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ Shuni e'tiborga olib, berilgan funksiyaning Makloren formulasini yozamiz:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\quad 0<\theta<1 \qquad (9)$$

Yuqorida keltirilgan asosiy elementar funksiyalarning Makloren formulalari boshqa funksiyalarni Teylor formulasiga yoyishda foydalaniladi. Shunga doir misollar ko'ramiz.

7.18-misol. Ushbu $f(x)=e^{-3x}$ funksiya uchun Makloren formulasini yozing.

Yechish. Bu funksiyaning Makloren formulasini yozish uchun $f(0)$, $f'(0),\ldots,f^{(n)}(0)$ larni topib, 3-§ dagi (10) formuladan foydalanish mumkin edi. Lekin $f(x)=e^x$ funksiyaning yoyilmasidan foydalanish ham mumkin. Buning uchun (1) formuladagi x ni $-3x$ ga almashtiramiz, natijada

$$e^{-3x}=1-\frac{3x}{1!}+\frac{9x^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{3^n x^n}{n!}+\frac{(-3x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-3\theta x},\quad 0<\theta<1,$$

formulaga ega bo'lamiz.

7-19-misol. Ushbu $f(x)=lnx$ funksiyani $x_0=1$ nuqta atrofida Teylor formulasini yozing.

Yechish. Berilgan funksiyani Teylor formulasiga yoyish uchun $f(x)=ln(1+x)$ funksiya uchun olingan (9) asosiy yoyilmadan foydalanamiz. Unda x ni x-1 ga almashtiramiz, natijada $lnx=ln((x-1)+1)$ va

$$lnx=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)}\cdot\frac{(x-1)^{n+1}}{(1+\theta(x-1))^{n+1}},\ 0<\theta<1$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula x-1>-1 bo'lganda, ya'ni x>0 larda o'rinli.

4.6. Teylor formulasi yordamida taqribiy hisoblash. Makloren formulasi Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadini baholash masalasini qaraylik.

Faraz qilaylik, shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsinki, argument x ning $x_0=0$ nuqta atrofidagi barcha qiymatlarida hamda n ning barcha qiymatlarida $|f^{(n)}(x)|\le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le M\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Argument x ning tayin qiymatida $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ tenglik o'rinli, demak n ning yetarlicha katta qiymatlarida $R_n(x)$ yetarlicha kichik bo'lar ekan.

Shunday qilib, $x_0=0$ nuqta atrofida $f(x)$ funksiyani

$$f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

ko'phad bilan almashtirish mumkin. Natijada funksiyaning x nuqtadagi qiymati uchun

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

taqribiy formula kelib chiqadi. Bu formula yordamida bajarilgan taqribiy hisoblashdagi xatolik $|R_n(x)|$ ga teng bo'ladi.

7.20-misol. $e^{0,1}$ ni 0,001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. e^x funksiyaning Makloren formulasidan foydalanamiz. (1) formulada x=0,1 deb olsak, u holda

$$e^{0,1}\approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\ldots+\frac{(0,1)^n}{n!}.$$

masala shartiga ko'ra xatolik 0,001 dan katta bo'lmasligi kerak, demak

$R_n(x)=\frac{0,1^{n+1}}{(n+1)!}e^{0,1\theta}<0,001$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan birinchi n ni topish yetarli. $e^{0,1\theta}<2$ ekanligini e'tiborga olsak, so'ngi tengsizlikni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!}<0,001.$$

Endi n=1, 2, 3, ... qiymatlarni so'ngi tengsizlikka qo'yib tekshiramiz va bu tengsizlik n=3 dan boshlab bajarilishini topamiz. Shunday qilib, 0,001 aniqlikda

$$e^{0,1}\approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\frac{0,001}{3!}=1,055.$$

Xususiy holda, n=1 bo'lganda

$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ taqribiy hisoblash formulasi $R_2(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-x_0)^2$, $x_0<\xi<x$ aniqlikda o'rinli bo'ladi.

7.21-misol. Differensial yordamida radiusi r=1,01 bo'lgan doira yuzini toping. Hisoblash xatoligini baholang.

Yechish. Doira yuzi $S=\pi r^2$ ga teng. Bunda $r_0=1$, $\Delta r=0,01$ deb olamiz va $S=S(r)$ funksiya orttirmasini uning differensiali bilan almashtiramiz:

$S(r)\approx S(r_0)+dS(r_0)=S(r_0)+S'(r_0)\Delta r.$

Natijada

$S(1,01)\approx S(1)+dS(1)=S(1)+S'(1)0,01=\pi\cdot 1^2+2\pi\cdot 0,01=1,02\pi$ hosil bo'ladi.

Bunda hisoblash xatoligi

$R_2(r) = \frac{S''(\xi)}{2!}\cdot(r-r_0)^2$, $r_0 < \xi < r$ dan katta emas. $S''(r) = 2\pi$ va r ga bog'liq emas, shu sababli $R_2(r) = \frac{2\pi}{2!}\cdot 0{,}01^2 = 0{,}0001\pi$ Demak, hisoblash xatoligi 0,000314 dan katta emas.

7.22-misol. Ushbu $f(x) = e^{x^2-x}$ funksiyaning $x=0{,}03$ nuqtadagi qiymatini differensial yordamida hisoblang. Xatolikni baholang.

Yechish. Taqribiy hisoblash formulasi $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ da $x_0=0$, $x=0{,}03$ qiymatlarni qo'ysak, $f(0{,}03) \approx f(0) + f'(0)0{,}03$ bo'lib, xatolik

$R_2 = \frac{f''(\xi)}{2!}\cdot x^2 = \frac{f''(\xi)}{2!}\cdot 0{,}03^2$, $0 < \xi < 0{,}03$ bo'ladi.

Berilgan funksiya hosilalarini va nuqtadagi qiymatlarini hisoblamiz: $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$, bundan $f'(0) = -1$, $f''(x) = 2e^{x^2-x} + (2x-1)^2 e^{x^2-x} = e^{x^2-x}(4x^2-4x+3)$, bundan $f''(\xi) < 3$. Olingan natijalardan foydalanib, $f(0{,}03) \approx 1 + (-1)\cdot 0{,}03 = 0{,}97$ va $R_2 < \frac{3}{2!}\cdot 0{,}03^2 = 0{,}0017$ ekanligini topamiz.

Teylor formulasi funksiyalarni ekstremumga tekshirishda, qatorlar nazariyasida, integrallarni hisoblashlarda ham keng tatbiqqa ega.

Mashq va masalalar

7-31. Agar e^x funksiyaning Makloren formulasida $x=1$ bo'lsa,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \qquad (2)$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula yordamida e soninig irratsionalligini isbotlang.

Teylor formulasidan foydalanib $P(x)$ ko'phadni $x - x_0$ ning darajalari bo'yicha yoying (32-33):

7-32. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 8$, $x_0 = -1$.

7-33. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x + 2$, $x_0 = 2$.

$f(x)$ funksiyani x_0 nuqtada Teylor formulasi boyicha yoying (34-35):

7-34. $f(x) = xe^x$, $x_0 = -1$. 7-35. $f(x) = ln(2x-1)$, $x_0 = 1$.

$f(x)$ funksiyani Makloren formulasi boyicha $o(x^k)$ gacha yoying, bu yerda

7-36. $f(x) = sin^2 x$, $k = 4$. 7-37. $f(x) = chx$, $k = 5$.

7-38. Lagranj qoldiq hadli Teylor formulasi yordamida quyidagi ifodalarni 10^{-3} aniqlikda taqribiy hisoblang:

a) $\sqrt{127}$; b) $\sqrt[3]{83}$; c) $\sqrt[5]{250}$; d) $\sqrt[3]{e}$;

e) $sin85^{\circ}$; f) $cos72^{\circ}$; g) $ln1{,}3$; h) $arctg0{,}8$.

7-39. Teylor formulasi yordamida quyidagi taqribiy formulalarning absolut xatoligini baholang:

a) $e^x \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, $0 \le x \le 1$; b) $sinx \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $|x| \le 1$;

c) $cosx \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$, $|x| \le 0{,}5$; d) $tgx \approx x + \frac{x^3}{3}$, $|x| \le 0{,}1$.

e) $ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, $|x| \le 0{,}1$.

f) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$, $0 \le x \le 0{,}2$.

7-40. Teylor formulasi yordamida taqribiy hisoblang:

a) e, 10^{-7} aniqlikda; b) $\sqrt{10}$, 10^{-3} aniqlikda;

c) $sin1^{o}$, 10^{-6} aniqlikda; d) $\sqrt[3]{30}$, 10^{-4} aniqlikda.

VIII BOB. HOSILA YORDAMIDA FUNKSIYANI TEKSHIRISH

1-§. Hosila yordamida funksiyani monotonlikka tekshirish

1.1. Funksiyaning o'zgarmaslik sharti

8.1-teorema. *f(x)* funksiya (a,b) da differensiallanuvchi bo'lsin. Shu intervalda *f(x)* funksiya o'zgarmas bo'lishi uchun $f'(x) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. ◊ *Zarurligi* ravshan. Chunki funksiya o'zgarmas bo'lsa, barcha nuqtalarda $f'(x)=0$ bo'ladi.

Yetarliligi. Shartga ko'ra *f(x)* funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi, ya'ni $(a;b)$ oraliqqa tegishli ixtiyoriy x uchun chekli $f'(x)$ hosila mavjud va $f'(x)=0$. Endi $x_1<x_2$ bo'lgan ixtiyoriy $x_1,x_2\in(a;b)$ nuqtalarni olaylik. Qaralayotgan *f(x)* funksiya $[x_1;x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $(x_1;x_2)$ intervalga tegishli shunday c nuqta topilib,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema shartiga ko'ra ixtiyoriy $x\in(a;b)$ uchun $f'(x)=0$, bundan $f'(c)=0$, va (1) tenglikdan $f(x_2)-f(x_1)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, *f(x)* funksiyaning $(a;b)$ intervalning istalgan ikkita nuqtasidagi qiymatlari o'zaro teng. Demak, funksiya o'zgarmas bo'ladi. ◆

Bundan integral hisobda muhim rol o'ynaydigan quyidagi natija kelib chiqadi.

8.2-natija. Agar *f(x)* va *g(x)* funksiyalar (a,b) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega va $f'(x)=g'(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda *f(x)* bilan *g(x)* funksiyalar o'zgarmas songa farq qiladi:

$$f(x)=g(x)+C,\ C=const.$$

Haqiqatan ham, shartga ko'ra $(f(x)-g(x))'=C'=0$. Bundan 1-teoremaga asosan $f(x)-g(x)=C$, ya'ni $f(x)=g(x)+C$ tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

8.3-misol. Funksiyaning o'zgarmaslik shartidan foydalanib $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$ ayniyatning o'rinli ekanligini isbotlang.

Yechish. Quyidagi funksiyani qaraymiz: $f(x)=sin^2 x-\frac{1}{2}(1-cos2x)$ bu funksiya $(-\infty;+\infty)$ da aniqlangan, differensiallanuvchi va hosilasi aynan nolga teng: $f'(x)=2sinxcosx-sin2x=0$. Funksiyaning o'zgarmaslik shartiga ko'ra

$$\sin^2 x-\frac{1}{2}(1-cos2x)=C$$

o'rinli. C ni aniqlash uchun x argumentga qiymat beramiz, masalan $x=0$ bo'lsin. U holda $C=0$ va $\sin^2 x-\frac{1}{2}(1-cos2x)=0$ yoki $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$ bo'ladi.

1.2. Funksiyaning o'sishi va kamayishi. Biz bu yerda funksiya hosilasi yordamida funksiyaning monotonligini aniqlash mumkinligini ko'rsatamiz.

8.4-teorema. Aytaylik, *f(x)* funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiya $(a;b)$ intervalda kamaymaydigan (o'smaydigan) bo'lishi uchun $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) tengsizlikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. ◊ Kamaymaydigan funksiya holini qaraymiz.

Zaruriyligi. *f(x)* funksiya $(a;b)$ intervalda kamaymaydigan bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x\in(a;b)$ va $\Delta x>0$ uchun $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0$ tengsizlik, $\Delta x<0$ uchun $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa $\frac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$ bo'lishi ravshan.

Teorema shartiga ko'ra *f(x)* differensiallanuvchi, demak $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x\to 0$ da chekli limiti mavjud, tengsizlikda limitga o'tish haqidagi teoremaga (3-84 masala) ko'ra, bu limit nomanfiy bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\geq 0$.

Yetarliligi. ixtiyoriy $x\in(a;b)$ uchun $f'(x)\geq 0$ bo'lsin. Endi $x_1<x_2$ bo'lgan ixtiyoriy $x_1,\ x_2\in(a;b)$ nuqtalarni olaylik. Qaralayotgan *f(x)* funksiya $[x_1;x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $(x_1;x_2)$ intervalga tegishli shunday c nuqta topilib,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema shartiga $f'(x)\geq 0$, bundan $f'(c)\geq 0$, va (2) tenglikdan $f(x_2)-f(x_1)\geq 0$, ya'ni $f(x_2)\geq f(x_1)$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa funksiyaning $(a;b)$ intervalda kamaymaydigan funksiyaligini ko'rsatadi.

O'smaydigan funksiya holi ham yuqoridagi kabi isbotlanadi. ♦

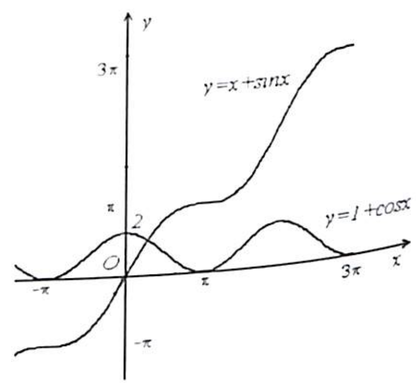
Endi funksiyaning qat'iy monoton bo'lishining yetarli shartini isbotlaymiz.

8.5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi va ixtiyoriy $x\in(a;b)$ uchun $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $x_1,x_2\in(a;b)$ va $x_1<x_2$ bo'lsin. Ravshanki, $[x_1;x_2]$ kesmada $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu teoremaga binoan shunday $c\in(x_1;x_2)$ mavjudki

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik va $f'(c)>0$ ($f'(c)<0$) ekanligidan $f(x_2)>f(x_1)$ ($f(x_2)<f(x_1)$) bo'lishi kelib chiqadi.



41-rasm

Bu $f(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishini ifodalaydi. ♦

Ushbu $y=x^3$ funksiya (-1;1) intervalda qat'iy o'suvchi, lekin uning hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng bo'ladi.

Shunga o'xshash $f(x)=x+cosx$ funksiya ham aniqlanish sohasida qat'iy o'suvchi, ammo uning hosilasi $f'(x)=1-sinx$ cheksiz ko'p nuqtalarda ($x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$) nolga teng bo'ladi (41-rasm).

Bu misollar yuqoridagi teoremaning shartlari funksiyaning qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun faqat yetarli shart ekanligini ko'rsatadi.

8.6-misol. Ushbu $f(x)=2x^2-lnx$ funksiyaning monotonlik intervallarini toping.

Yechish. Funksiya $(0;+\infty)$ intervalda aniqlangan va hosilasi $f'(x)=4x-1/x$ ga teng. Yuqoridagi yetarli shartga ko'ra, agar $4x-1/x>0$ bo'lsa, ya'ni $x>1/2$ bo'lsa,

o'suvchi; agar $4x-1/x<0$ bo'lsa, ya'ni $x<1/2$ bo'lsa funksiya kamayuvchi bo'ladi. Shunday qilib, funksiya $(0;1/2)$ intervalda kamayuvchi, $(1/2;+\infty)$ intervalda o'suvchi bo'ladi.

8.7-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+14x-6}{2x^2}$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

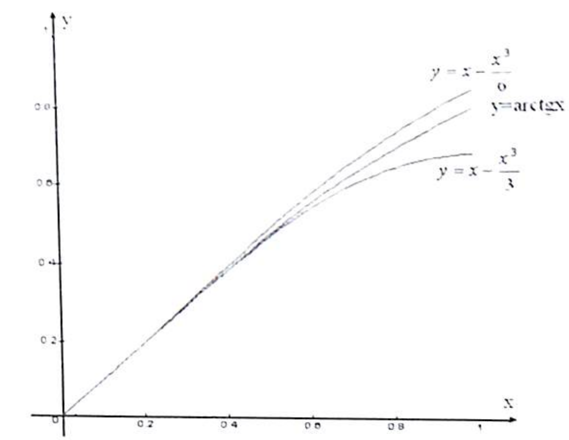
Yechish. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ dan iborat. Funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x)=\frac{x^3-7x+6}{x^3}=\frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{x^3}.$$

Bundan $(-\infty;-3]\cup(0;1]\cup[2;\infty)$ to'plamda $f'(x)\geq 0$, $[-3;0)\cup[1;2]$ da esa $f'(x)\leq 0$ bo'lishini aniqlash qiyin emas.

Demak, berilgan $f(x)$ funksiya $(-\infty;-3]$, $(0;1]$ va $[2;\infty)$ oraliqlarning har birida o'suvchi; $[-3;0)$ va $(1;2]$ oraliqlarning har birida kamayuvchi bo'ladi.

8.9-misol. Agar $0<x\leq 1$ bo'lsa, $x-x^3/3<arctgx<x-x^3/6$ qo'sh tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang.



42-rasm

Yechish. Berilgan tengsizlikning o'ng qismi $arctgx<x-x^3/6$ tengsizlikni isbotlaymiz. Chap qismi shunga o'xshash isbotlanadi. $f(x)=arctgx-x+x^3/6$ funksiyani qaraymiz, uning hosilasi

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{x^2}{2}=\frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$$

ga teng. $f(x)=arctgx-x+x^3/6$ funksiya sonlar o'qida aniqlanagan va uzluksiz, demak u [0;1] kesmada ham uzluksiz, (0;1) intervalda $f'(x)<0$. Bundan esa $f(x)$ funksiya [0;1] kesmada kamayuvchi bo'lib,

$0<x\leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi x lar uchun $f(x)<f(0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. So'ngi tengsizlikni $f(0)=0$ ni e'tiborga olib, quyidagicha yozib olamiz:

$arctgx-x+x^3/6<0$ bundan $arctgx<x-x^3/6$.

Bu qo'shtengsizlikda qatnashgan funksiya grafiklari 42-rasmda keltirilgan.

Mashq va masalalar

Funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping:

8-1. $f(x) = (x-2)^2\cdot(x+2)$. 8-2. $f(x) = ln(x^2-2x+4)$.

8-3. $f(x) = x + e^{-x}$. 8-4. $f(x) = xlnx$.

8-5. $y = \frac{1}{1-x^2}$. 8-6. $S(t) = t + \cos t$.

8-7. a parametrning qanday qiymatlarida $f(x)$ funksiya sonlar o'qida o'suvchi bo'ladi?

a) $f(x) = x^3 - ax$; b) $f(x) = \frac{a^2-1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x$;

c) $f(x) = ax - sinx$; d) $f(x) = ax + 3sinx + 4cosx$.

8-8. Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda uzluksiz va $(a;b)$ oraliqning chekli sondagi nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarda $f'(x)>0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda qat'iy o'suvchi bo'ladi. Isbotlang.

8-9. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda o'suvchi bo'lsin. Bundan $f'(x)$ ham $(a;b)$ oraliqda o'suvchi bo'lishi kelib chiqadimi?

8-10. Agar $\delta>0$ topilib, $x\in(x_0-\delta, x_0)$ uchun $f(x)<f(x_0)$ va $x\in(x_0, x_0+\delta)$ uchun $f(x_0)<f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'suvchi deyiladi. Quyidagilarni isbotlang:

a) $f(x)$ funksiya biror oraliqning har bir nuqtasida o'suvchi bo'lsa, u shu oraliqda o'suvchi bo'ladi.

b) $f(x) = \begin{cases} x + x^2\sin\frac{2}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ funksiya $x=0$ nuqtada o'suvchi, lekin shu nuqtani o'z ichiga olgan hech bir oraliqda osuvchi emasligini isbotlang.

2-§. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi

2.1. Funksiyani parametrik usulda berilishi. Aytaylik, t o'zgaruvchining T qiymatlar to'plamida

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$

funksiyalar sistemasi berilgan va $x=\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlar to'plami D bo'lsin. Ushbu savolga javob izlaymiz: (1) sistema D to'plamda y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydimi? Har bir x ga unga mos t bo'yicha $y=\psi(t)$ soni mos qo'ysak, bu moslik funksiya bo'ladimi?

D to'plamdan ixtiyoriy x_0 ni tayinlab,

$$x_0=\varphi(t) \qquad (2)$$

tenglamani qaraymiz.

Bu tenglama T to'plamda yechimga ega. Ammo (2) tenglamaning ildizi yagona bo'lmasligi ham mumkin. Aytaylik, bu tenglama T to'plamda bir nechta t_{01}, t_{02}, ...ildizlarga ega bo'lsin. U holda $y_{01}=\psi(t_{01})$, $y_{02}=\psi(t_{02})$, ... sonlar ichida bir-biriga teng bo'lmaganlari mavjud bo'lishi mumkin, masalan $y_{01}\neq y_{02}$ bo'lsin. U holda yuqoridagi moslikka ko'ra $x=x_0$ ga y_0 sifatida y_{01} ni ham y_{02} ni ham mos qo'yish mumkin. Shu sababli (1) funksiyalar sistemasi yordamida D to'plamda x ning funksiyasini aniqlab bo'lmaydi.

Ikkinchi tomondan, (2) tenglama ildizlari to'plamida $y=\varphi(t)$ funksiya o'zgarmas songa teng bo'lishi mumkin: $\psi(t_{01})=\psi(t_{02})=y_0$. U holda qaralayotgan x_0 songa y o'zgaruvchining t ga mos keladigan yagona y_0 qiymatini mos qo'yish mumkin.

Agar D dan olingan har bir x uchun yuqoridagi xossa o'rinli bo'lsa, u holda D sohada yuqoridagi qoida yordamida $y=f(x)$ funksiya aniqlanadi. Bu funksiya (1) sistema yordamida aniqlangan deyiladi. (1) dagi t o'zgaruvchi parametr, $y=f(x)$ funksiya esa parametrik ko'rinishda berilgan deyiladi.

(1) sistemadan $y=f(x)$ funksiyaning analitik ifodasini olish *parametrni yo'qotish* deb ataladi.

(1) sistema y o'zgaruvchini x o'zgaruvchining funksiyasi sifatida aniqlashi uchun $x=\varphi(t)$ funksiya (T to'plamdan olingan t uchun) teskarilanuvchi bo'lishi yetarli. Haqiqatdan ham, bu holda (2) tenglama T to'plamda yagona yechimga ega bo'ladi. Demak, D dan olingan har bir x_0 uchun $x_0=\varphi(t_0)$ bo'ladigan yagona t_0 mavjud, bu t_0 songa yagona $y_0=\psi(t_0)$ mos keladi. Shunday qilib, (1) sistema y ni x ning $y=f(x)$ funksiyasi sifatida aniqlaydi. Bu funksiyani x ning murakkab funksiyasi sifatida aniqlash mumkin:

$$y=f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

bu yerda $\varphi^{-1}(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ funksiyaga teskari funksiya.

8.10-misol. $T=(-\infty;+\infty)$ da $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^4 \end{cases}$ berilgan. Bu sistema $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydimi?

Yechish. $x=t^3$ funksiya T da qat'iy monoton va $D=(-\infty;+\infty)$ da teskari funksiyasi $t=\sqrt[3]{x}$ mavjud. Bundan $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^4 \end{cases}$ sistema y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydi.

Bu holda y funksiyani t parametrni yo'qotib, x orqali ifodalash mumkin: $y=x\sqrt[3]{x}$, bu yerda $x\in(-\infty;+\infty)$.

2.2. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi. Faraz qilaylik, x argumentning y funksiyasi quyidagicha

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad \alpha\le t\le\beta \end{cases} \qquad (5)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Agar $x=\varphi(t)$ funksiya teskarilanuvchi bo'lsa, ya'ni $t=\varphi^{-1}(x)$ mavjud bo'lsa, u holda $y=\psi(t)$ tenglamani $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ ko'rinishda yozib olish va $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$

funksiyaning hosilasini topish masalasini qarash mumkin. Odatda bu masala parametrik tenglamalar bilan berilgan funksiyaning hosilasini topish masalasi deb ham yuritiladi.

8.11-teorema. Aytaylik, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ da uzluksiz va $(\alpha;\beta)$ da differensiallanuvchi hamda $\varphi'(t)$ shu intervalda ishorasini saqlasin. Agar $x=\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlar to'plami $[a,b]$ kesma bo'lsa, u holda $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ tenglamalar $[a,b]$ da uzluksiz, (a,b) da differensiallanuvchi bo'lgan $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi va

$$y'_x=f'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (6)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Teorema shartiga ko'ra $\varphi'(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ da ishorasini saqlaydi, aniqlik uchun $\varphi'(t)>0$ bo'lsin. U holda $x=\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ da uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'ladi. Shuning uchun $[a,b]$ kesmada unga teskari bo'lgan uzluksiz, qat'iy o'suvchi $t=\varphi^{-1}(x)$ funksiya mavjud va bu funksiya (a,b) oraliqda differensiallanuvchi, hosilasi $t'_x=\dfrac{1}{x'_t}$ formula bilan hisoblanadi. Bu holda $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$ funksiya ham $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'ladi. Bu funksiyaning hosilasini topamiz. Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasiga ko'ra $y'_x=y'_t t'_x$, bundan esa $y'_x=y'_t\cdot\dfrac{1}{x'_t}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ $(x'_t\ne 0)$ bo'lishi kelib chiqadi. ◆

$(\alpha;\beta)$ da $\varphi'(t)<0$ bo'lgan holda teorema shunga o'xshash isbotlanadi.

8.12-misol. Ushbu $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \quad 0\le t\le\pi/2 \end{cases}$ parametrik tenglamalar bilan berilgan funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $(0,\pi/2)$ da $x'_t=-12\cos^2 t\sin t<0$ va bu kesmada yuqoridagi teoremaning barcha shartlari bajariladi. Shuning uchun (6) formulaga ko'ra $y'_x=\dfrac{12\sin^2 t\cos t}{-12\cos^2 t\sin t}=-tgt$ bo'ladi.

Ravshanki,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \qquad (7)$$

tenglamalar y'_x funksiyani x ning funksiyasi sifatida parametrik ifodalaydi.

Aytaylik, (6) tenglamalar sistemasi yuqoridagi teorema shartlarini qanoatlantirsin. U holda y'_x funksiyaning x bo'yicha hosilasi, ya'ni y ning x bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasini quyidagicha hisoblash mumkin:

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{(x'_t)'_t} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Shunday qilib, quyidagi qoida o'rinli ekan: y ning x bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasini topish uchun parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning birinchi tartibli hosilasi y'_x ni t parametr bo'yicha differensiallab, so'ngra hosil qilingan natijani x'_t ga bo'lish kerak.

Misol tariqasida yuqorida berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz: $y'_x = tgt$, $(y'_x)'_t = (tgt)'_t = 1/cos^2t$ va $x'_t = -12cos^2t \cdot sint$ ekanligini e'tiborga olsak, qoidaga ko'ra $y''_{x^2} = -\dfrac{1}{12cos^4 t \cdot sint}$ bo'ladi.

Xuddi shu usulda uchinchi va boshqa yuqori tartibli hosilalar ham hisoblanadi.

Mashq va masalalar

8-11. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \cos t, \ t \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$ sistema berilgan. Bu sistema $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydimi?

8-12. Ushbu $\begin{cases} x = t + \cos t, \\ y = \sin t + \ln t, \ 0 < t < +\infty \end{cases}$ sistema biror sohada y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydimi?

Parametrik ko'rinishda berilgan $y = y(x)$ funksiya uchun $y'(x)$ ni toping (13-16):

8-13. $x = t^3, y = 3t$.

8-14. $x = cos^3t, y = sin^3 t$.

8-15. $x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}$

8-16. $x = t - arctgt, y = \frac{t^3}{3} + 1$.

Ko'rsatilgan tartibli hosilasini toping (17-18):

8-17. $x = cos^3t, y = sin^3t, y''_{xx} = ?$

8-18. $x = e^{3t}, y = e^{5t}, y''_{xx} = ?$

8-19. Agar biror chiziq $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ sistema yordamida parametrik berilgan bo'lsa, bu chiziqning t parametrning t_0 qiymatiga mos (x_0, y_0) nuqtasida o'tkazilgan urinmasi va normalining tenglamalarini yozing.

8-20. $x = t^2, y = t^3$ chiziqning $t_0 = 2$ nuqtasidagi o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini yozing.

8-21. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ chiziqning $t = \frac{\pi}{4}$ ga mos keluvchi nuqtasida o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini yozing.

8-22. $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ lemniskataning $\theta = \frac{\pi}{6}$ qiymatlariga mos keluvchi nuqtasida o'ikazilgan urinmaning burchak koeffitsientini toping. Ko'rsatma: $x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta$ formulalaridan foydalaning.

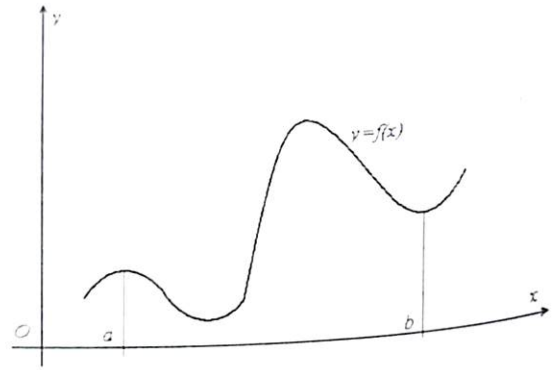
3-§. Birinchi tartibli hosila yordamida funksiyani ekstremumga tekshirish

3.1. Funksiyaning ekstremumlari. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan va $x_0 \in (a;b)$ bo'lsin.

8.13-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi mavjud bo'lib, shu atrofdan olingan ixtiyoriy x uchun $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *maksimum* (*minimum*) *nuqtasi*, $f(x_0)$ esa *funksiyaning maksimumi* (*minimumi*) deb ataladi.

8.14-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday atrofi $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ mavjud bo'lib, shu atrofdan olingan ixtiyoriy $x\neq x_0$ uchun $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat'iy maksimumga (minimumga) ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalari funksiyaning ekstremum nuqtalari, maksimum va minimum qiymatlari funksiyaning ekstremumlari deb ataladi.



43-rasm

Shunday qilib, agar $f(x_0)$ maksimum (minimum) bo'lsa, u holda $f(x_0)$ funksiyaning x_0 nuqtaning kichik atrofida qabul qiladigan qiymatlarning eng kattasi (eng kichigi) bo'ladi, ya'ni funksiya ekstremumi lokal xarakterga ega. Bundan funksiya ekstremumi u aniqlangan sohada eng katta yoki eng kichik qiymati bo'lishi shart emasligi kelib chiqadi.

Shuningdek, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda bir qancha maksimum va minimumlarga ega bo'lishi, maksimum qiymati uning ba'zi bir minimum qiymatidan kichik bo'lishi ham mumkin. Masalan grafigi 43–rasmda ko'rsatilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $x=a$ nuqtada lokal maksimum, $x=b$ nuqtada lokal minimum mavjud bo'lib, $f(a)<f(b)$ tengsizlik o'rinli.

3.2. Ekstremumning zaruriy sharti. Funksiya hosilalari yordamida uning ekstremum nuqtalarini topish osonlashadi.

Avval ekstremumning zaruriy shartini ifodalovchi teoremani keltiramiz.

8.15-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, shu nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng yoki mavjud emas.

Isbot. ◊ Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lsin. U holda x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi mavjud bo'lib, bu atrofdan olingan va x_0 nuqtadan farqli ixtiyoriy x uchun $f(x_0)>f(x)$ bo'ladi. Agar $x>x_0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$$

tengsizlik, agar $x<x_0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi ravshan.

Bu tengsizliklar chap tomonidagi ifodalarning $x\to x_0$ da limiti mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0+0)\leq 0, \qquad \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0-0)\geq 0$$

bo'ladi.

Agar funksiyaning chap $f'(x_0-0)$ va o'ng $f'(x_0+0)$ hosilalari nolga teng bo'lsa, u holda funksiya hosilasi $f'(x_0)$ mavjud va nolga teng bo'ladi.

Agar $f'(x_0-0)$ va $f'(x_0+0)$ lar noldan farqli bo'lsa, ravshanki $f'(x_0+0)<f'(x_0-0)$ bo'lib, $f'(x_0)$ mavjud bo'lmaydi.

Funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'lgan hol ham yuqoridagi kabi isbotlanadi. ◆

8.16-ta'rif. Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar yoki hosila mavjud bo'lmaydigan nuqtalar funksiyaning *kritik nuqtalari* deb ataladi. Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar *statsionar nuqtalar* deb ataladi.

Har qanday kritik nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lavermaydi.

Masalan, $f(x)=(x-1)^3$, $f'(x)=3(x-1)^2$, $f'(1)=0$ bo'lib, $x_0=1$ kritik nuqta. Lekin $x_0=1$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida $f(1)=0$ eng kichik, yoki eng katta qiymat bo'la olmaydi. Chunki har bir atrofda noldan kichik va noldan katta qiymatlar istalgancha bor. Demak, $x=1$ nuqtada ekstremum yo'q.

8.17-misol. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada cheksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda bu nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'la olmasligini ko'rsating.

Yechish. Aytaylik, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ bo'lsin. U holda

Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son topilib, $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ dan olingan

ixtiyoriy $x\neq x_0$ lar uchun $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\dfrac{1}{\varepsilon}$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa $x>x_0$ da $f(x)>f(x_0)$, $x<x_0$ da $f(x)<f(x_0)$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada ekstremumi yo'q. $f'(x_0)=-\infty$ bo'lgan hol ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

3.3. Ekstremum mavjud bo'lishining yetarli shartlari.

8.18-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va x_0 nuqta funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin.

a) Agar ixtiyoriy $(x_0-\delta;x_0)$ da $f'(x)>0$, $(x_0;x_0+\delta)$ da $f'(x)<0$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishida o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

b) Agar $(x_0-\delta;x_0)$ da $f'(x)<0$, $(x_0;x_0+\delta)$ da $f'(x)>0$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini «-» dan «+» ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

c) Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isbot. ◊ a) holni qaraymiz. Bu holda $(x_0-\delta;x_0)$ da $f'(x)>0$ bo'lishidan $f(x)$ funksiyaning $(x_0-\delta;\ x_0)$ da qat'iy o'suvchiligi kelib chiqadi. So'ngra shartga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgani sababli

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli. Demak, $(x_0-\delta;\ x_0)$ dan olingan ixtiyoriy x uchun

$$f(x)<f(x_0) \qquad (2)$$

bo'ladi. $(x_0;\ x_0+\delta)$ da $f'(x)<0$ bo'lishidan $f(x)$ funksiyaning $(x_0;\ x_0+\delta)$ da qat'iy kamayuvchiligi kelib chiqadi. Demak, (1) tenglikni e'tiborga olsak, $(x_0;x_0+\delta)$ dan olingan ixtiyoriy x uchun yana (2) tengsizlik bajariladi. Bundan x_0 dan farqli barcha

$x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$ uchun $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega.

b) bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishishi *a*) holga o'xshash isbotlanadi.

$f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmaydigan *c*) holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ atrofida qat'iy o'suvchi yoki qat'iy kamayuvchi bo'ladi. Demak, x_0 nuqtada ekstremum yo'q. ◆

Shunday qilib ekstremumga sinalayotgan nuqtani o'tishda funksiya hosilasi ishorasining o'zgarishi ekstremumga erishishning faqat yetarli sharti bo'lib, lekin zaruriy sharti bo'la olmaydi.

Yuqoridagi teoremadan funksiyaning ekstremumga tekshirish uchun 1-qoidani keltirib chiqaramiz.

8.19-qoida. $f(x)$ funksiyaning ekstremumlarini topish uchun

1) $f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topib, $f'(x)=0$ tenglamani yechish kerak. So'ngra $f'(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni topib, kritik nuqtalar to'plamini hosil qilish kerak.

2) har bir kritik nuqtadan chapda va o'ngda hosilaning ishorasini aniqlash kerak.

3) agar hosila ishorasini «+» dan «-» ga («-» dan «+» ga) o'zgartirsa, u holda bu kritik nuqtada $f(x)$ funksiya maksimumga (minimumga) ega bo'ladi. Agar hosila ishorasi o'zgarmasa, ekstremum mavjud bo'lmaydi.

8.20-misol. $f(x)=(x+4)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini toping.

Yechish. Bu funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz. Uning hosilasini topamiz: $f'(x)=\dfrac{5(x+1)}{3\sqrt[3]{x-1}}$.

Ravshanki, hosila $x=-1$ nuqtada nolga aylanadi, $x=1$ nuqtada esa chekli hosila mavjud emas.

Endi hosilani ishorasini aniqlaymiz. Buning uchun $(-\infty;+\infty)$ oraliqni 44-rasmda ko'rsatilgandek oraliqlarga ajratamiz va hosil bo'lgan har bir oraliqda hosilaning ishorasini aniqlaymiz.

44-rasm

Bu chizmadan qoidaga ko'ra berilgan funksiyaning $x=-1$ nuqtada maksimum qiymat $f(-1)=\sqrt[3]{4}$ ga va $x=1$ nuqtada minimum qiymat $f(x)=0$ ga ega bo'lishini ko'rish mumkin.

4-§. Yuqori tartibli hosilalar yordamida funksiyani ekstremumga tekshirish

4.1. Ikkinchi tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshirish

8.21-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va $f'(x_0)=0$ bo'lsin. U holda agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi, agar $f''(x_0)>0$ bo'lsa, minimum nuqtasi bo'ladi.

Isbot. ◊ $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ bo'lsin. Demak, x_0 kritik nuqtada $f'(x)$ kamayuvchi, ya'ni ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta;x_0)$ lar uchun $f'(x)>f'(x_0)=0$ va ixtiyoriy $x\in(x_0;x_0+\delta)$ uchun $0=f'(x_0)>f'(x)$ bo'ladi. Bu esa x_0 nuqtadan o'tishda hosila o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirishini, demak, x_0 maksimum nuqta ekanligini bildiradi.

$f''(x_0)>0$ bo'lgan holda x_0 ning minimum nuqta bo'lishi shunga o'xshash isbotlanadi. ◆

Isbotlangan teoremaga asoslanib, ikkinchi tartibli hosila yordamida funksiyani ekstremumga tekshirishning quyidagi qoidasini keltiramiz.

8.22-qoida. $f(x)$ funksiyaning ekstremumga tekshirish uchun

1) $f'(x)=0$ tenglamaning barcha yechimlarini topamiz;

2) har bir statsionar nuqtada $f''(x_0)$ ning ishorasini aniqlaymiz. Agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, x_0 maksimum nuqtasi, $f''(x_0)>0$ bo'lsa, x_0 minimum nuqtasi bo'ladi.

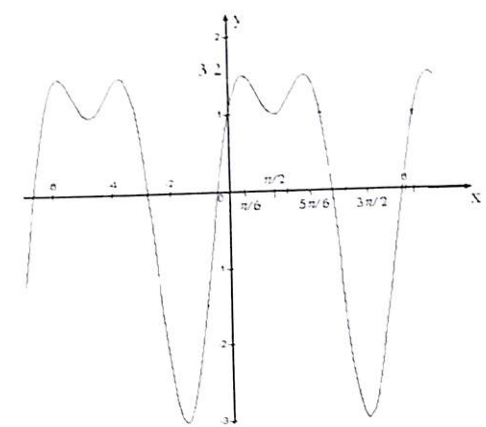
3) ekstremum nuqtalar qiymatini $y=f(x)$ qo'yib, $f(x)$ ning ekstremum qiymatlarini topamiz.

Umuman aytganda, bu qoidaning qo'llanish doirasi torroq masalan, u birinchi tartibli chekli hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarga qo'llanila olmasligi o'z-o'zidan ravshan. Ikkinchi tartibli hosila nolga aylangan yoki mavjud bo'lmagan nuqtada ham qoida aniq natija bermaydi.

8.23-misol. Ikkinchi tartibli hosila yordamida $y=2\sin x-\cos 2x$ funksiya ekstremumlarini aniqlang.

Yechish. Funksiya davriy bo'lganligi sababli $[0;2\pi]$ kesma bilan cheklanishimiz mumkin. Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x)$; $y''=-2\sin x-4\cos 2x$.



45-rasm

Ushbu $2\cos x(1-2\sin x)=0$ tenglamadan funksiyaning $[0;2\pi]$ kesmaga tegishli bo'lgan kritik nuqtalarini topamiz: $x_1=\pi/6$; $x_2=\pi/2$; $x_3=5\pi/6$; $x_4=3\pi/2$. Endi har bir kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila ishorasini aniqlaymiz va tegishli xulosa chiqaramiz:

$y''(\pi/6)=-3<0$, demak $x_1=\pi/6$ nuqtada $y(\pi/6)=3/2$ maksimum mavjud.

$y''(\pi/2)=2>0$, demak $x_2=\pi/2$ nuqtada $y(\pi/2)=1$ minimum mavjud.

$y''(5\pi/6)=-3<0$, demak $x_3=5\pi/6$ nuqtada $y(5\pi/6)=3/2$ maksimum mavjud.

$y''(3\pi/2)=6>0$, demak $x_4=3\pi/2$ nuqtada $y(3\pi/2)=-3$ minimum mavjud.

Bu funksiyaning $(-2\pi;2\pi)$ intervaldagi grafigi 45-rasmda keltirilgan.

4.3. Teylor formulasi yordamida ekstremumga tekshirish

8.24-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofida $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ $(n\geq 2)$ uzluksiz hosilalarga ega va

$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ bo'lsin.

U holda

1) Agar n juft va $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga ega bo'ladi;

2) Agar n juft va $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada lokal minimumga ega bo'ladi;

3) Agar n toq bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isbot. ◊ $f(x)$ funksiya uchun Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini yozamiz:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \text{bu yerda } \xi\in(x_0,x).$$

Teorema shartiga ko'ra $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, shu sababli

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \text{yoki}$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Yana teorema shartiga ko'ra $f^{(n)}(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shuning uchun uzluksiz funksiyaning lokal xossalariga ko'ra x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ atrofi topilib, bunda $f^{(n)}(x)$ funksiyaning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir hil bo'ladi. Aytaylik, $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ bo'lsin. U holda $\xi\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ bo'lishi ravshan. Endi quyidagi ikki holni qaraymiz.

1-hol. Aytaylik, n toq son bo'lsin. U holda $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ atrofda (1) tenglikning o'ng tomonidagi $f^{(n)}(\xi)$ ko'paytuvchining ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir hil

bo'ladi, ikkinchi ko'paytuvchi esa $x>x_0$ da $(x-x_0)^n>0$, $x<x_0$ da $(x-x_0)^n<0$ bo'ladi, ya'ni $(x-x_0)^n$ ifoda x_0 nuqta atrofida ishorasini o'zgartiradi. Bundan esa (1) tenglikning chap tomoni, ya'ni $f(x)-f(x_0)$ ayirma ham x_0 nuqta atrofida ishorasini o'zgartirishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, n toq son bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

2-hol. Endi n juft son bo'lsin. U holda (1) tenglikning o'ng tomoni ishorasini o'zgartirmaydi, uning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir hil bo'ladi. Bundan agar $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lsa, u holda $f(x)-f(x_0)<0$, ya'ni $f(x)<f(x_0)$, demak, funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi. Agarda $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lsa, u holda $f(x)-f(x_0)>0$, ya'ni $f(x)>f(x_0)$, demak, funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi. ♦

8.25-misol. Ushbu $y=x^5-5x^4-5$ funksiyaning ekstremumlari topilsin.

Yechish. Funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz. Uning uchun funksiya hosilasini topamiz: $y'=5x^4-20x^3$. Kritik nuqtalar faqat statsionar nuqtalardan iborat, shuning uchun $5x^4-20x^3=0$ tenglamani yechamiz. Uning ildizlari $x_1=0$, $x_2=4$ bo'ladi.

Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $f''(x)=20x^3-60x^2$.

$f''(4)>0$ bo'lgani uchun, $x=4$ nuqtada funksiya minimum qiymat qabul qiladi: $f(4)=-261$. $f''(0)=0$ bo'lgani uchun uchinchi tartibli hosilani hisoblaymiz: $f'''(x)=60x^2-120x$, $f'''(0)=0$, to'rtinchi tartibli hosilani hisoblaymiz: $f^{(4)}(x)=120x-120$, $f^{(4)}(0)=-120<0$ va $n=4$ juft bo'lgani uchun 3-teoremaga ko'ra $x=0$ nuqtada funksiya maksimumga ega: $f(0)=-5$.

5-§. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan bo'lsin. Bu funksiyaning qiymatlar to'plami $E(f)=\{f(x): x\in X\}$ ni qaraymiz.

Agar $E(f)$ to'plam chegaralangan bo'lsa, u holda uning aniq yuqori chegarasi mavjud, uni $M=\sup_{x\in X}\{f(x)\}$ deb belgilaymiz. Agar $M\in E(f)$ bo'lsa, u holda M soni $f(x)$ funksiyaning eng katta qiymati deb ataladi va $M=\max_{x\in X}\{f(x)\}$ kabi belgilanadi. Xuddi shunga o'xshash $E(f)$ to'plamning aniq quyi chegarasi mavjud, uni $m=\inf_{x\in X}\{f(x)\}$ deb belgilaymiz. Agar $m\in E(f)$ bo'lsa, u holda m soni $f(x)$ funksiyaning eng kichik qiymati deb ataladi va $m=\min_{x\in X}\{f(x)\}$ kabi belgilanadi.

Endi $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu holda Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra funksiyaning $[a;b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud bo'ladi. Ravshanki, bu holda quyidagi qoida o'rinli bo'ladi.

8.26-qoida. $[a,b]$ da funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun bu kesmaga tegishli barcha kritik nuqtalari topiladi, funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi. So'ngra bu qiymatlar bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati, eng kichigi esa $f(x)$ funksiyaning eng kichik qiymati bo'ladi.

8.27-misol. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ funksiyaning $[\frac{1}{100};100]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Funksiya hosilasini topamiz: $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$. Uni nolga tenglab, ya'ni $\frac{x^2-1}{x^2}=0$ tenglamani qarab, $x=-1$ va $x=1$ ekanligini topamiz. Bulardan $x=-1$ nuqta $[\frac{1}{100};100]$ kesmaga tegishli emas va bu kesmada hosila mavjud bo'lmagan nuqta yo'q. Faqat bitta $x=1$ statsionar nuqta $[\frac{1}{100};100]$ kesmaga tegishli. Berilgan funksiyaning $x=\frac{1}{100}$; $x=1$; $x=100$ nuqtalaridagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$f(1/100)=100{,}01$; $f(1)=2$; $f(100)=100{,}01$. Bu qiymatlarning eng kattasi 100, 01; eng kichigi 2.

Demak, berilgan funksiyaning $[\frac{1}{100};100]$ dagi eng katta qiymati 100,01, eng kichik qiymati esa 2 ga teng, ya'ni $\max_{[0{,}01;100]}\{f(x)\}=100{,}01$; $\min_{[0{,}01;100]}\{f(x)\}=2$.

Agar $f(x)$ funksiya intervalda, to'g'ri chiziqda, $[a;b)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$, $(a;b]$ oraliqlarda tekshirilayotgan bo'lsa, u holda bunday oraliqlarda funksiyaning eng katta (eng kichik) qiymatlari mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Masalan, $y=x$ funksiyaning $(1;2]$ oraliqda eng kichik qiymati, $[1;2)$ oraliqda esa eng katta qiymati mavjud emas. Sonlar o'qida $y=x^2$ funksiyaning eng katta qiymati, $y=\mathrm{arctg}x$ funksiyaning eng katta, eng kichik qiymatlari mavjud emas.

Agar $f(x)$ funksiya $[a;b)$ ($[a;+\infty)$) oraliqda o'suvchi bo'lsa, u holda bu oraliqda funksiyaning eng kichik qiymati mavjud va unga $x=a$ nuqtada erishadi.

Shunga o'xshash tasdiq $(a;b]$ ($(-\infty;b]$) oraliqda uzluksiz funksiya uchun ham o'rinlidir.

Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz, $x_0\in(a;b)$ kritik nuqtaga ega, $(a;x_0)$ intervalda o'suvchi (kamayuvchi), $(x_0;b)$ intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lsa, u holda qaralayotgan oraliqda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi.

Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz, unda chekli sondagi kritik nuqtalarga ega va $a<x_0<x_1<\ldots<x_n<b$, $(a;x_0)$ intervalda o'suvchi (kamayuvchi), $(x_n;b)$ intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lsa, u holda qaralayotgan $(a;b)$ intervalda $f(x)$ funksiya eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi. Bu qiymatni funksiya kritik nuqtalardan birida qabul qiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ ($[a;b)$) da uzluksiz va $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ ($x\to b-0$)) da chekli yoki cheksiz limitga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaning kritik nuqtalardagi qiymati va cheksizdagi limitlarini solishtirib, uning eng katta, eng kichik qiymatlarining mavjudligi haqida fikr bildirish mumkin.

8.28-misol. $f(x)=\ln x-x$ funksiyaning $(0;+\infty)$ oraliqdagi eng katta qiymatini toping.

Yechish. Funksiyaning hosilasini va kritik nuqtalarini topamiz: $f'(x)=\frac{1-x}{x}$, $x=1$. Agar $0<x<1$ bo'lsa, u holda $f'(x)>0$, bundan $f(x)$ o'suvchi. Agar $1<x<+\infty$ bo'lsa, u holda $f'(x)<0$, bundan $f(x)$ kamayuvchi. Demak, $f(x)=\ln x-x$ funksiya $x=1$ nuqtada eng katta qiymatiga erishadi: $f(1)=-1$.

8.29-misol. Ushbu $f(x)=\frac{9}{x}+\frac{25}{1-x}$ funksiyaning $(0;1)$ intervaldagi eng kichik qiymatini toping.

Yechish. Bu funksiya uchun $f'(x)=\frac{(8x-3)(2x+3)}{x^2(1-x)^2}$ va bundan funksiyaning $(0;1)$ intervalga tegishli bo'lgan kritik nuqtasi $x=\frac{3}{8}$ ekanligini topamiz. Agar $0<x<\frac{3}{8}$ bo'lsa, u holda $f'(x)<0$, bundan $f(x)$ kamayuvchi. Agar $\frac{3}{8}<x<1$ bo'lsa, u holda $f'(x)>0$, bundan $f(x)$ o'suvchi. Demak, $(0;1)$ intervalda berilgan funksiya $x=\frac{3}{8}$ nuqtada eng kichik qiymatga erishadi: $f\left(\frac{3}{8}\right)=64$.

Mashq va masalalar

Funksiyani ekstremumga tekshiring (23-38):

8-23. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. 8-24. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

8-25. $f(x)=x^3-3x+1$. 8-26. $y=e^{x^2-4x+5}$

8-27. $y=x-\operatorname{arctg}x$. 8-28. $r=\sqrt{5-2\vartheta}+\vartheta$

8-29. $y=x^3-4x^2$. 8-30. $y=x(x-3)^2(x+1)^2$.

8-31. $y=2\sin x+\cos 2x$. 8-32. $y=(x-5)e^x$.

8-33. $y=(2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$. 8-34. $y=x^4-8x^2+12$.

8-35. $y=x^5-5x^4+5x^3-1$. 8-36. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

8-37. $y=\sin 2x-x$. 8-38. $y=\frac{2^x}{x}$.

Berilgan funksiyaning oraliqdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping (39-42):

8-39. $f(x)=x^3-6x^2+9,\ x\in[-1;2]$.

8-40. $f(x)=\frac{1}{2}x^3-9x^2+48x,\ x\in[0;9]$.

8-41. $f(x)=\frac{9}{x}+\frac{25}{1-x},\ x\in(0;1)$.

8-42. $f(x)=x-2\sqrt{x},\ x\in[0,5]$.

8-43. Radiusi R bo'lgan doiraga ichki chizilgan eng katta yuzli to'g'ri to'rtburchakning tomonini toping.

8-44. R radiusli sharga ichki chizilgan eng katta hajmli silindrning balandligini toping.

8-45. R radiusli sharga ichki chizilgan eng katta hajmli konusning balandligini toping.

8-46. R radiusli sharga ichki chizilgan eng katta yon sirtli silindrning balandligini toping.

8-47. R radiusli sharga tashqi chizilgan eng kichik hajmli konusning balandligini toping.

8-48. Berilgan silindrga, asos markazi silindr asosining markazi bilan bir xil bo'lgan konus tashqi chizilgan. Konus asosining radiusi qanday bo'lganda, uning hajmi eng kichik bo'ladi?

8-49. Berilgan konusga ichki chizilgan eng katta hajmli silindrning balandligini toping.

8-50. $2x^2+y^2=18$ ellipsga tegishli $A(1,4)$ va $B(3,0)$ nuqtalar berilgan. Ellipsga tegishli shunday C nuqta topingki, ABC uchburchakning yuzi eng katta bo'lsin.

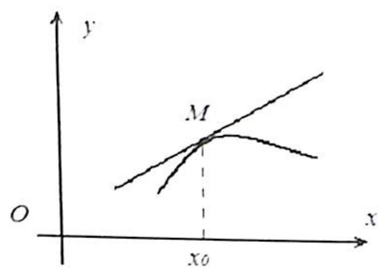
6-§. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. Egri chiziqning burilish nuqtasi

6.1. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega, ya'ni funksiya grafigining $M(x_0,f(x_0))$ nuqtasidan novertikal urinma o'tkazish mumkin bo'lsin.

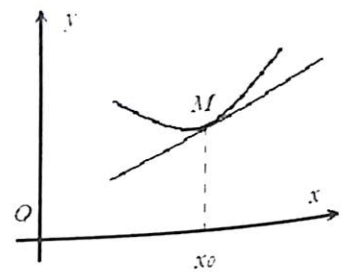
8.30-ta'rif. Agar $x=x_0$ nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, $y=f(x)$ egri chiziqning bu atrofdagi nuqtalarga mos bo'lgan bo'lagi shu egri chiziqqa $M(x_0,f(x_0))$

nuqtasidan o'tkazilgan urinmadan pastda (yuqorida) joylashsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ *nuqtada qavariq (botiq)* deyiladi.

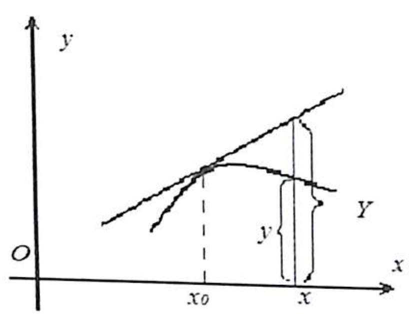
Agar egri chiziq biror intervalning barcha nuqtalarida qavariq (botiq) bo'lsa, u holda bu chiziq shu intervalda *qavariq (botiq)* deyiladi. 46-rasmda qavariq va 47-rasmda botiq egri chiziqlar chizilgan.



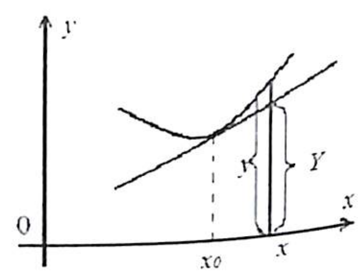
46-rasm



47-rasm



48-rasm



49-rasm

Egri chiziq nuqtasining ordinatasini y bilan, shu egri chiziqqa $M(x_0,f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning x ga mos ordinatasini Y bilan belgilaylik. Ravshanki, agar x_0 nuqtaning biror atrofidan olingan barcha x lar uchun $y-Y\leq 0$ ($y-Y\geq 0$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda egri chiziq $x=x_0$ nuqtada qavariq (botiq) bo'ladi. (48-,49-rasmlar)

8.31-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan va $x_0\in X$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lsin. Agar $f''(x_0)>0$ bo'lsa, u holda

funksiya grafigi x_0 nuqtada botiq; agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, u holda funksiya grafigi x_0 nuqtada qavariq bo'ladi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $f''(x_0)>0$ bo'lsin. Quyidagicha yordamchi funksiya kiritamiz: $F(x)=y-Y$, ya'ni $F(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$. Ravshanki $F(x_0)=0$, $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$, $F''(x)=f''(x)$ bo'ladi. Bundan $F'(x_0)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$ va $F''(x_0)=f''(x_0)>0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, (ekstremum mavjudligining yetarli shartiga ko'ra) x_0 nuqta $F(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi, ya'ni x_0 nuqtaning biror atrofida $F(x)\geq F(x_0)=0$ bo'ladi. $F(x)=y-Y$ bo'lganligidan $y\geq Y$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa x_0 nuqtaning aytilgan atrofida funksiya grafigi urinmadan yuqorida joylashishini, ya'ni funksiya grafigi x_0 nuqtada botiq bo'ladi. Teoremaning ikkinchi qismi shunga o'xshash isbotlanadi.

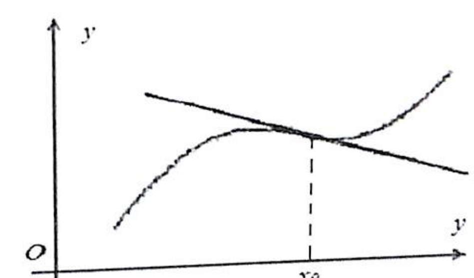
Agar biror intervalda $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) bo'lsa, u holda $y=f(x)$ egri chiziq shu intervalda botiq (qavariq) bo'ladi. ◆

8.32-misol. Ushbu $y=x^5$ funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik oraliqlarini aniqlang.

Yechish. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz: $y''=20x^3$. Bundan, agar $x>0$ bo'lsa, $y''>0$, agar $x<0$ bo'lsa $y''<0$ bo'ladi. Demak, $(-\infty;0)$ oraliqda egri chiziq qavariq, $(0;+\infty)$ oraliqda esa botiq bo'ladi.

6.2. Egri chiziqning burilish nuqtasi. Endi egri chiziqning burilish nuqtasi tushunchasini kiritamiz.

8.33-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ atrofi topilib, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta;x_0)$ oraliqda botiq (qavariq), $(x_0;x_0+\delta)$ oraliqda esa qavariq (botiq) bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ egri chiziqning ***burilish nuqtasi*** deyiladi.



50-rasm

Agar burilish nuqtasida urinma mavjud bo'lsa, u egri chiziqni kesib o'tadi. (50-rasm)

8.34-teorema. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $x=x_0$ nuqta funksiyaning grafigining burilish nuqtasi bo'lsa, u holda shu nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud va nolga teng yoki mavjud bo'lmaydi.

Isbot. ◊ Aytaylik, x_0 nuqta $f(x)$ ning burilish nuqtasi bo'lsin. Teskarisini faraz qilamiz: $f''(x_0)$ mavjud va $f''(x_0)\neq 0$. U holda $f''(x_0)<0$ yoki $f''(x_0)>0$ bo'ladi.

$f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$) bo'lgan holda 8.31-teoremaga binoan x_0 nuqtaning biror $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi topilib, bunda $f(x)$ funksiya qavariq (botiq) bo'ladi. Bu x_0 ning burilish nuqta bo'lishiga zid. Demak, burilish nuqtada $f''(x_0)$ nolga teng bo'ladi yoki mavjud bo'lmaydi.

$f''(x_0)=0$ bo'lishi yoki $f''(x)$ ning mavjud bo'lmasligi burilish nuqtasi mavjudligiinng faqat zaruriy sharti bo'lib, yetarli shart bo'la olmaydi. Masalan, $y=x^4$ funksiya uchun $y'=4x^3$, $y''=12x^2$ va $y''(0)=0$ bo'ladi. Lekin, $x=0$ burilish nuqtasi emas. ◆

Endi burilish nuqtasi mavjudligining yetarli shartini tayinlovchi teoremani keltiramiz.

8.35-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi va x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ atrofi topilib, $(x_0-\delta; x_0)$ va $(x_0;\ x_0+\delta)$ intervallarda $f''(x)$ mavjud, hamda har bir intervalda $f''(x)$ ishorasi o'zgarmas bo'lsin. Agar x_0 nuqtaning chap va o'ng tomonlarida $f''(x)$ har xil ishorali bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo'ladi; agar $f''(x)$ bir xil ishorali bo'lsa, u holda x_0 nuqtada burilish bo'lmaydi.

Isbot. ◊ Haqiqatan ham, $x_0-\delta<x<x_0$ bo'lganda $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$) bo'lsa, $x_0<x<x_0+\delta$ bo'lganda esa $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) bo'lsa, 8.31-teoremaga ko'ra x_0 dan

chapda $f(x)$ funksiya qavariq (botiq), x_0 dan o'ngda esa botiq (qavariq) bo'ladi. Demak, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo'ladi.

Agar $(x_0-\delta; x_0)$ va $(x_0,\ x_0+\delta)$ intervallarda $f''(x)$ bir xil ishorali, masalan $f''(x)<0$ bo'lsa, u holda bu intervallarda $f(x)$ funksiya qavariq bo'lib, burilish bo'lmaydi. ◆

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasini aniqlash uchun $f''(x)=0$ tenglamani yechamiz hamda $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni topamiz. Hosil qilingan har bir x_0 nuqtadan chapda va o'ngda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz.

8.36-misol. Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$ funksiyaning burilish nuqtasini toping.

Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi - $(-\infty;+\infty)$. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz: $f'(x)=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, $f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Ikkinchi tartibli hosila $x=0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda mavjud va noldan farqli. Bu nuqta atrofida 35-teorema shartlarini tekshiramiz. Agar $x<0$ bo'lsa $f''(x)<0$; $x>0$ bo'lsa $f''(x)>0$ bo'ladi. Demak, grafikning $(0;f(0))$ nuqtasi burilish nuqtasi bo'ladi.

8.37-misol. $y=\frac{a}{x}ln\frac{x}{a}$ $(a>0)$, $0<x<\infty$, funksiyaning burilish nuqtasini toping.

Yechish. Bu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $y''=\frac{2a}{x^3}(ln\frac{x}{a}-\frac{3}{2})$ ga teng.

Agar $ln\frac{x}{a}-\frac{3}{2}=0$ bo'lsa, u holda $f''(x)=0$ bo'ladi. Demak, $x=ae^{\frac{3}{2}}$ bo'lganda $f''(x)=0$. Bu nuqtadan chapda va o'ngda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $0<x<ae^{\frac{3}{2}}$ bo'lganda $f''(x)<0$, $x>ae^{\frac{3}{2}}$ bo'lganda $f''(x)>0$ bo'ladi.

Demak, grafikning $(ae^{\frac{3}{2}}; \frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{3}{2}})$ nuqtasi burilish nuqtasi bo'ladi.

8.39-misol. Quyidagi funksiyalarning qavariqlik, botiqlik intervallari va burilish nuqtalarini toping:

a) $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 15$; b) $y = x + x^{5/3}$

Yechish. a) funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24$, $y'' = 12x^2 + 6x - 36 = 12(x^2 + x/2 - 3)$.

Ushbu $y''=0$ tenglamani yechib, $x_1=-2$, $x_2=1{,}5$ ekanligini topamiz.

Bundan $(-\infty;-2)$ va $(1{,}5;\infty)$ oraliqlarda $y''>0$, demak bu oraliqlarda grafik botiq bo'ladi; $(-2;1{,}5)$ oraliqda $y'' < 0$, demak bu oraliqda grafik qavariq bo'ladi. $x_1=-2$ va $x_2=1{,}5$ nuqtalardan o'tishda ikkinchi tartibli hosila ishorasini o'zgartiradi. Shu sababli $(-2;-127)$ va $(1{,}5;-11{,}0625)$ nuqtalar burilish nuqtalari bo'ladi.

b) funksiyaning hosilalarini topamiz: $y' = 1 + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$ $(x \neq 0)$. $x=0$ bo'lganda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. $x<0$ bo'lganda $y''<0$, demak funksiya grafigi qavariq, $x>0$ bo'lganda $y''>0$, demak grafik botiq bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosila $x=0$ nuqtadan o'tganda ishorasini o'zgartiradi, shu sababli $(0;0)$ nuqta burilish nuqtasi bo'ladi.

Mashq va masalalar

Funksiyaning botiqlik, qavariqlik oraliqlari va burilish nuqtalarini toping:

8-51. $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$. 8-52. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 6x - 9$.

8-53. $f(x) = e^{-x^2}$. 8-54. $y = x^5 - 10x^2 + 7x - 9$.

8-55. $y = (x^2-1)^3$. 8-56. $y = x \cdot arctg\, x$.

8-57. $y = \frac{x-5}{x+7}$. 8-58. $y = \frac{x^3+8}{x}$.

8-59. $y = 3 + \sqrt[3]{x-4}$. 8-60. $y = x\sqrt[3]{x^2}(x+8)$.

8-61. $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ egri chiziqning bir to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta burilish nuqtasi mavjudligini ko'rsating.

8-62. a ning qanday qiymatida abssissasi $x = 1$ bo'lgan nuqtada $y = x^3 + ax^2 + 1$ egri chiziqning burilish nuqtasi mavjud bo'ladi?

8-63. a ning qanday qiymatida $y = e^x + ax^3$ egri chiziq burilish nuqtaga ega?

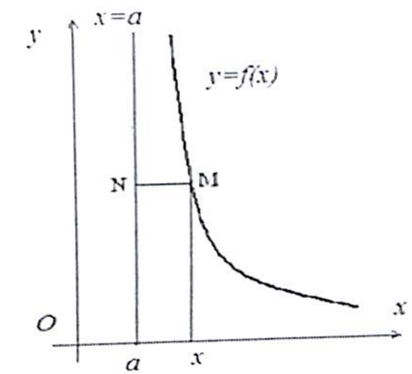
8-64. a va b larning qanday qiymatlarida $M(1,3)$ nuqta $y = ax^3 + bx^2$ egri chiziqning burilish nuqtasi bo'ladi?

7-§. Asimptotalar

Funksiyani cheksizlikda, ya'ni $x\to+\infty$ va $x\to-\infty$ da, yoki uning ikkinchi tur uzilish nuqtasi atrofida o'rganish ko'p hollarda funksiya grafigi nuqtalari bilan biror to'g'ri chiziqning nuqtalari orasidagi masofa yetarlicha kichik bo'lishini ko'rsatadi. Bunday xossaga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlarni topish funksiyani tekshirishda yordam beradi.

8.40-ta'rif. Agar $y=f(x)$ egri chiziqda olingan o'zgaruvchi nuqta koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan biror to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa nolga intilsa, u holda bu to'g'ri chiziq egri chiziqning *asimptotasi* deyiladi.

Asimptotalar *vertikal* (ordinatalar o'qiga parallel) va *og'ma* (ordinatalar o'qiga parallel emas) bo'lib ikkiga ajraladi. Og'ma asimptotalar ichida abssissalar o'qiga parallel bo'lganlari ham mavjud bo'lib, ular gorizontal asimptota deyiladi.



51-rasm

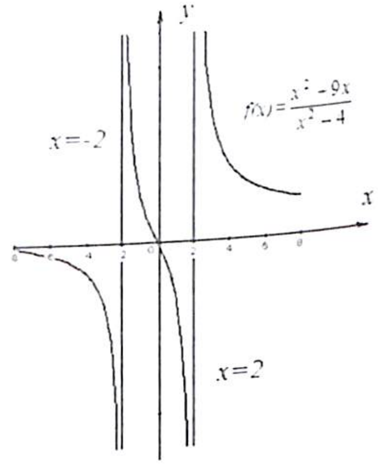
7.1. Vertikal asimptotalar. Faraz qilaylik, a nuqtadagi bir tomonli limitlarning kamida biri cheksizga teng bo'lsin. U holda $y=f(x)$ egri chiziqdagi $M(x,y)$ nuqta $x\to a$ da koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashadi, shu nuqtadan $x=a$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa $MN=|x-a|$ nolga intiladi. Demak, ta'rifga ko'ra $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning (funksiya grafigining) vertikal asimptotasi bo'ladi.

Ravshanki, haqiqiy sonlar to'plamida uzluksiz bo'lgan funksiyalar uchun vertikal asimptota mavjud emas. Vertikal asimptota faqat ikkinchi tur uzilish nuqtalarida bo'lishi mumkin.

8.41-misol. Ushbu funksiyaning $f(x)=\frac{x^2+9x}{x^2-4}$ vertikal asimptotalarini toping.

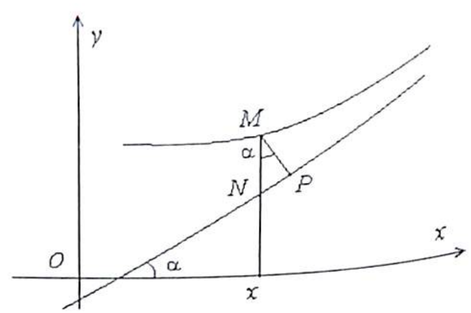
Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi, ravshanki $x^2-4=0$ tenglama ildizlaridan boshqa barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat.

Bu nuqtalarda funksiya ikkinchi tur uzilishga ega. Haqiqatan ham $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x^2+9x}{x^2-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x^2+9x}{x^2-4}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -2-0}\frac{x^2+9x}{x^2-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2+0}\frac{x^2+9x}{x^2-4}=+\infty$, demak $x=-2$ va $x=2$ to'g'ri chiziqlar vertikal asimptota bo'ladi (52-rasm).



52-rasm

7.2. Og'ma asimptota. Og'ma asimptota tenglamasini $y=kx+b$ ko'rinishda izlaymiz. Bir xil abssissali egri chiziq ordinatasi va asimptota ordinatasi orasidagi masofa $x\to+\infty$ yoki $x\to-\infty$ da nolga intilishini ko'rsatamiz.



53-rasm

Faraz qilaylik, M va N abssissasi x ga teng bo'lgan egri chiziqdagi va asimptotadagi nuqtalar, (53-rasm) MP esa M nuqtadan asimptotagacha bo'lgan masofa, α ($\alpha\neq\pi/2$) asimptotaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi bo'lsin. U holda ΔMNP uchburchakdan $MP=MN\cos\alpha$, bundan esa

$$MN=MP/\cos\alpha$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdan, agar MP nolga intilsa, u holda MN ham nolga intilishi, va aksincha, agar MN nolga intilsa, u holda MP nolga intilishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar $x\to+\infty$ yoki $x\to-\infty$ da $f(x)-kx-b$ ayirma nolga intilsa, u holda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi bo'lar ekan.

Bundan $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$ shart $y=kx+b$ to'g'ri chiziqning $y=f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart ekanligi kelib chiqadi.

Xususan, $y=b$ gorizontal asimptota bo'lishi uchun $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-b)=0$, ya'ni $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Amalda og'ma asimptotalarni topish uchun quyidagi teoremadan foydalaniladi.

8.42-teorema. $y=f(x)$ funksiya grafigi $y=kx+b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{va} \quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)$$

chekli limitlarning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. ◊ *Zaruriyligi*. $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining $x\to\infty$ dagi asimptotasi bo'lsin, ya'ni $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. U holda $f(x)-kx-b=\alpha(x)$ tenglik o'rinli, bu yerda $\alpha(x)$ $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya. So'ngi tenglikni quyidagicha yozib olish mumkin: $f(x)=kx+b+\alpha(x)$. Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k,\quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(b+\alpha(x))=b$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ va $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$ chekli limitlar mavjud bo'lsin. So'ngi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$ tenglikni quyidagicha yozib olish mumkin: $f(x)-kx=b+\beta(x)$, bu yerda $\beta(x)$ $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya. Demak, $f(x)-kx-$

$b=\beta(x)$, ya'ni $\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Bu esa $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining $x\to\infty$ dagi asimptotasi ekanligini bildiradi. ♦

8.43-misol. Ushbu $f(x)=x\ln(e+\frac{1}{x})$ funksiyaning asimptotalarini toping.

Yechish. Avval bu funksiyainng aniqlanish sohasini topamiz. Buning uchun $e+\frac{1}{x}>0$ tengsizlikni yechib, $D(y)=(-\infty;-\frac{1}{e})\cup(0;\infty)$ ni hosil qilamiz.

Endi chegaraviy nuqtalardagi funksiya holatini aniqlaymiz.

$\lim_{x\to-\frac{1}{e}-0} x\ln(e+\frac{1}{x})=-\infty$, $x\to+0$ dagi limitni hisoblashda Lopital qoidasidan foydalanamiz:

$$\lim_{x\to+0} x\ln(e+\frac{1}{x})=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Bulardan ko'rinadiki, berilgan egri chiziqning $x=-\frac{1}{e}$ vertikal asimptotasi mavjud.

Endi og'ma asimptotalar mavjudligini tekshiramiz.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}x(\ln(e+\frac{1}{x})-1)$$

$$==\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{e}$$

Demak, grafikning $y=x+\frac{1}{e}$ og'ma asimptotasi mavjud.

8.44-misol. Asimptotalarni toping. *a)* $y=2x+\frac{2x}{x-3}$; *b)* $y=xe^{1/x}$

Yechish. a) $x=3$ da $f(x)=2x+\frac{2x}{x-3}$ funksiya ikkinchi tur uzilishga ega va $\lim_{x\to3\pm0}(2x+\frac{2x}{x-3})=\pm\infty$ bo'lganligi sababli, $x=3$ vertikal asimptota bo'ladi.

Og'ma asimptotalarni izlaymiz: $k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(2+\frac{2}{x-3})=2$;

$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(2x+\frac{2x}{x-3}-2x)=2$. Demak, $y=2x+2$ og'ma asimptota bo'ladi.

b) $y=xe^{1/x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ to'plamdan iborat. $x=0$ nuqtada funksiyaning chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz.

$\lim_{x\to-0}xe^{1/x}=0$; $\lim_{x\to+0}xe^{1/x}=$ ($1/x=t$ belgilash kiritamiz, u holda $x\to+0$ da $t\to+\infty$ bo'ladi)$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$.) Demak, $x=0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

Endi og'ma asimptotalarni izlaymiz: $k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=e^0=1$.

$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(xe^{1/x}-x)==\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=|1/x=z,\ x\to\pm\infty,\ z\to0|=$

$=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=1$, shunday qilib $y=x+1$ og'ma asimptota ekan.

8-§. Funksiyani to'la tekshirish va grafigini yasash

Funksiyaning xossalarini tekshirish va uning grafigini yasashda quyidagilarni bajarish maqsadga muvofiq:

1) Funksiyaning aniqlanish sohasi va uzilish nuqtalari topiladi; funksiyaning chegaraviy nuqtalaridagi qiymatlari (yoki unga mos limitlari) hisoblanadi.

2) Funksiyaning toq-juftligi, davriyligi tekshiriladi.

3) Funksiyaning nollari va ishora turg'unlik oraliqlari aniqlanadi.

4) Asimptotalar topiladi.

5) Funksiya ekstremumga tekshiriladi, uning monotonlik intervallari aniqlaniladi.

6) Funksiya grafigining burilish nuqtalari, qavariqlik va botiqlik intervallari topiladi.

8.45-misol. $y = x(x^2-1)$ funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. 1) aniqlanish sohasi - haqiqiy sonlar to'plami. Uzilish nuqtalari yo'q. Funksiyaning chegaraviy qiymatlari: $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x^2-1) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x(x^2-1) = -\infty$;

2) funksiya davriy emas, toq funksiya;

3) funksiyaning uchta noli bor: $x=0$; $x=-1$; $x=1$. Ushbu $x(x^2-1)>0$ tengsizlikni yechamiz, uning yechimi $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ to'plamdan iborat. Demak, funksiya $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ to'plamda musbat va $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ to'plamda manfiy qiymatlar qabul qiladi.

4) og'ma asimptotaning burchak koeffitsientini topamiz:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} (x^2-1) = \infty.$$

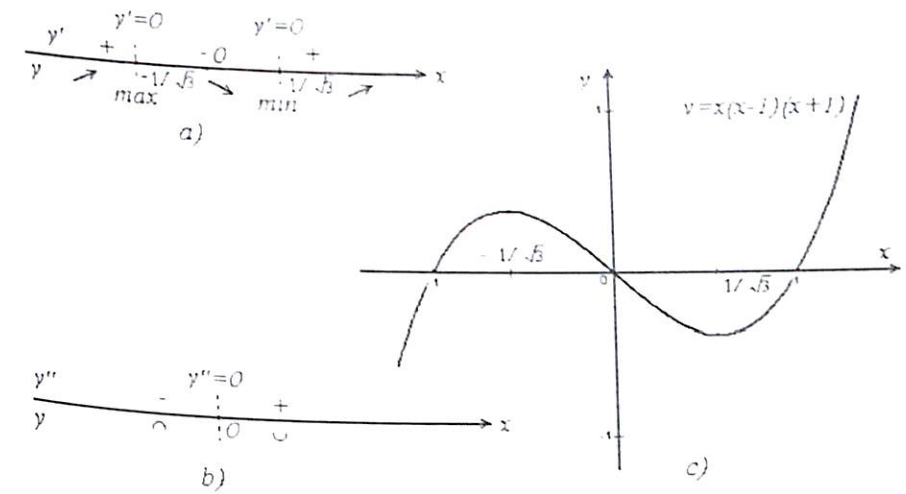
Demak, og'ma asimptota mavjud emas. Vertikal asimtotalar ham mavjud emas (chunki, uzilish nuqtalari yo'q).

5) Funksiya hosilasini topamiz: $y' = 3x^2-1$. Hosilani nolga tenglashtirib statsionar nuqtalarini topamiz: $y'=0$ yoki $3x^2-1=0$, bundan $x=-1/\sqrt{3}$, $x=1/\sqrt{3}$. Ushbu (54-a-rasm) sxemani chizamiz, va intervallar metodidan foydalanib funksiya hosilasining ishoralarini aniqlaymiz. Bundan funksiya $(-\infty,-1/\sqrt{3})$ va $(1/\sqrt{3},+\infty)$ intervallarda monoton o'suvchi, $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ intervalda monoton kamayuvchi; $x=-1/\sqrt{3}$ nuqtada maksimumga, $x=1/\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega ekanligi kelib chiqadi. Ekstremum nuqtalarida funksiya qiymatlarini hisoblaymiz: agar $x_{max} = -1/\sqrt{3}$ bo'lsa, u holda $y_{max} = 2/(3\sqrt{3})$; agar $x_{min} = 1/\sqrt{3}$ bo'lsa, u holda $y_{min} = -2/(3\sqrt{3})$ bo'ladi.

6) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y'' = 6x$. Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib $y''=6x=0$, $x=0$ ekanligini topamiz. Sxemani (54-b-rasm) chizamiz va

hosil bo'lgan intervallarda ikkinchi tartibli hosila ishoralarini aniqlaymiz. Bundan $x=0$ nuqtada burilish mavjud. $(-\infty;0)$ da funksiya grafigi qavariq, $(0;+\infty)$ da botiq ekanligini topamiz. Burilish nuqtasi ordinatasini topamiz: $y(0) = 0$.

Funksiya grafigi 54–c-rasmda keltirilgan.



54-rasm

8.46-misol. $y = \sqrt{4+}\sqrt{4-x}$ funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. 1) Aniqlanish sohasi – [0,4] kesma. Funksiyaning chegaraviy qiymatlarini topamiz: agar $x = 0$ bo'lsa, u holda $y = 2$; agar $x = 4$ bo'lsa, $y = 2$. Funksiyaning uzilish nuqtalari yo'q.

2) Funksiya toq ham, juft ham emas, davriy ham emas.

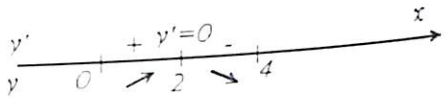
3) funksiyaning nollari yo'q.

4) Og'ma asimptotalari yo'q, chunki aniqlanish sohasi kesmadan iborat.

5) Hosilasini topamiz: $y' = \dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x}}$.

Hosilani nolga tenglashtirib, kritik (statsionar) nuqtani topamiz: $x = 2$. 55-rasmdagi sxemani chizamiz. Bundan funksiya (0,2) intervalda o'suvchi, (2,4) intervalda kamayuvchi, $x = 2$ nuqtada funksiya maksimumga erishishi kelib chiqadi. Maksimum nuqtasining ordinatasi $y_{max}=2\sqrt{2}$.

6) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz:

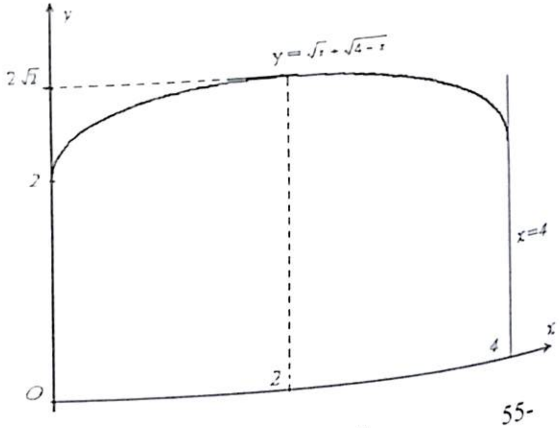


$$y''=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(4-x)^{3/2}+x^{3/2}}{x^{3/2}(4-x)^{3/2}}.\qquad (0,4)$$

intervalda ikkinchi tartibli hosila manfiy, demak bu intervalda funksiya grafigi qavariq bo‘ladi.

Funksiya grafigi 55–rasmda chizilgan. Shuni aytib o‘tish kerakki, $\lim\limits_{x\to+0} y'=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to4-0} y'=-\infty$ bo‘lganligi sababli, funksiya grafigi (0,2) nuqtada ordinatalar o‘qiga, (4,2) nuqtada x=4 to‘g‘ri chiziqqa urinadi.



55-rasm

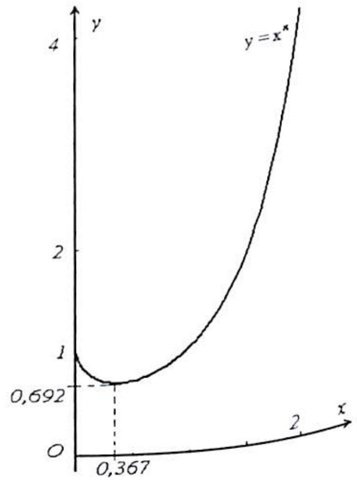
8.47-misol. $y=x^x$. funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. Avval funksiyani quyidagicha yozib olamiz: $y=x^x=e^{x\ln x}$.

1) funksiyaning aniqlanish sohasi barcha musbat sonlar to‘plami. Chegaraviy qiymatlari: $\lim\limits_{x\to0+} e^{x\ln x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x}=+\infty$. Uzilish nuqtalari yo‘q.

2) Funksiya juft ham, toq ham, davriy ham emas.

3) Funksiyaning nollari mavjud emas.



56-rasm

4) Og‘ma asimptotasini izlaymiz: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln x}}{x}=+\infty$, demak og‘ma asimptota yo‘q.

5) Hosilasini topamiz: $y'=x^x(\ln x+1)$, $y'=0$ tenglamadan $x=e^{-1}$. funksiya $(0,1/e)$ intervalda kamayuvchi, $(1/e,+\infty)$ intervalda o‘suvchi bo‘ladi. $x=e^{-1}$ nuqtada funksiya minimumga ega, uning ordinatasi $y_{min}=0{,}692$.

6) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y''=x^x((\ln x+1)^2+1/x)$. Ikkinchi tartibli hosila $(0,+\infty)$ intervalda musbat, demak funksiya bu intervalda botiq.

Funksiyaning x=0 nuqta atrofida tekshiramiz.

$\lim\limits_{x\to0+} y'=\lim\limits_{x\to0+} x^x(\ln x+1)=-\infty$, bundan funksiya grafigi (0,1) nuqtada ordinatalar o‘qiga urinishi kelib chiqadi.

Funksiya grafigi 56–rasmda berilgan.

8.47-misol. $f(x)=x+\ln(x^2-1)$ funksiyani to‘la tekshiring va grafigini chizing.

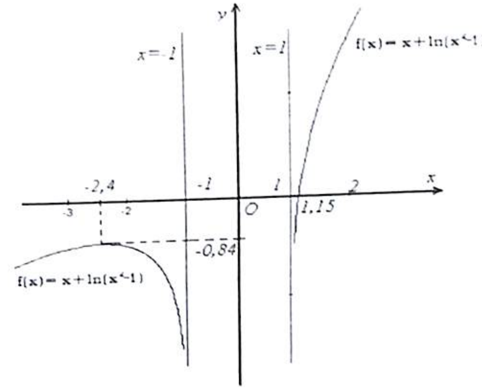
Yechish. 1) Funksiya $x^2-1>0$, ya’ni $(-\infty;-1)$ va $(1;+\infty)$ oraliqlarda aniqlangan va uzluksiz. Funksiyaning chegaraviy qiymatlarini izlaymiz:

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}(x+\ln(x^2-1))=-\infty;\quad \lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}(x+\ln(x^2-1))=-\infty.$$

Demak, funksiya grafigi ikkita $x=-1$ va $x=1$ vertikal asimptotalarga ega.

2) funksiya toq ham, juft ham, davriy ham emas.

3) funksiya $(-\infty,-1)$ intervalda manfiy, $(1,+\infty)$ intervalda yagona noli mavjud, uni topish uchun taqribiy hisoblash metodlaridan foydalaniladi, natijada $x_0\approx1{,}15$ ekanligini aniqlashimiz mumkin. Demak, funksiya $(1;1{,}15)$ intervalda manfiy, $(1{,}15,+\infty)$ oraliqda musbat.



57-rasm

4) Og‘ma asimptotalarini izlaymiz:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\ln(x^2-1)}{x}\right)=1,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\ln(x^2-1)=+\infty,$$

demak og‘ma asimptota mavjud emas.

5) Funksiya hosilasi $y' = 1 + 2x/(x^2 - 1)$ funksiyaning aniqlanish sohasida mavjud, shu sababli uning kritik nuqtalari faqat statsionar nuqtalardan iborat bo'ladi. Bunda $y' = 0$ tenglama yechimlari $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ va $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ bo'lib, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli emas. Shunday qilib, yagona kritik nuqta mavjud va $(-\infty; -1)$ oraliqqa tegishli. $(1; +\infty)$ oraliqda $y' > 0$ va funksiya o'suvchi bo'ladi. $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ nuqtada maksimum mavjud. Uning ordinatasi $f(-1 - \sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2} + ln(2 + 2\sqrt{2}) \approx -0{,}84$ ga teng.

6) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y'' = -\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$. Bundan $y'' < 0$, demak grafik qavariq. Funksiya grafigi 57-rasmda berilgan.

Mashq va masalalar

$f(x)$ funksiya grafigining asimptotalarini toping (65-70):

8-65. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-9}$.

8-66. $f(x) = x \cdot e^x$.

8-67. $y = \frac{3x}{x+2}$

8-68. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

8-69. $f(x) = \frac{1}{x^2+5x-6}$

8-70. $f(x) = x - arctgx$.

Funksiyani to'liq tekshiring va grafigini chizing:

8-71. $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

8-72. $y = ln(1 - x^2)$.

8-73. $y = \frac{x^2}{1-x^2}$.

8-74. $y = x^3 - 4x^2 + 3x$.

8-75. $y = x + \frac{1}{x}$.

8-76. $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

8-77. $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$

8-78. $y = \frac{3x-2}{5x^2}$

8-79. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$

8-80. $y = x - lnx$.

8-81. $y = sinx + sin2x$.

8-82. $y = \sin^2 x + cosx$.

8-83. $y = e^{x^2-2x}$.

8-84. $y = x^3 \ln^2 x$.

UCHINCHI BO'LIM. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING INTEGRAL HISOBI

IX BOB. ANIQMAS INTEGRAL

1-§. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari

Differensial hisobning asosiy masalalaridan biri berilgan $f(x)$ funksiyaga ko'ra uning hosilasi $f'(x)$ ni topishdan iborat edi. Bu masalaning teskarisi, ya'ni hosilasiga ko'ra funksiyaning o'zini tiklash masalasi katta ahamiyatga ega bo'lib, integral hisobning asosiy masalalaridan hisoblanadi.

$f(x)$ funksiya biror (a,b) (chekli yoki cheksiz) intervalda aniqlangan bo'lsin.

9.1-ta'rif. Agar (a,b) da $f(x)$ funksiya biror $F(x)$ funksiyaning hosilasiga teng, ya'ni (a,b) intervaldan olingan ixtiyoriy x uchun $F'(x)= f(x)$ bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaning *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

Masalan,

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ bo'lsin. Bu funksiyaning $(0;+\infty)$ intervalda boshlang'ich funksiyasi $F(x)=2\sqrt{x}$ bo'ladi, chunki $(0;+\infty)$ da $F'(x)=(2\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$;

2) $f(x)=x^2$ ning $(-\infty;+\infty)$ oraliqda boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\frac{x^3}{3}$ bo'lishi ravshan.

Ravshanki, agar biror oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda ixtiyoriy o'zgarmas C son uchun

$$F(x)+C \qquad (1)$$

funksiya ham $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$.

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar $f(x)$ funksiya biror boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda uning boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p bo'ladi.

Quyidagi savol tug'ilishi tabiiy: biror oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalari (1) formula bilan ifodalanadimi, boshqacha aytganda $f(x)$ funksiyaning (1) formula bilan ifodalanmaydigan boshlang'ich funksiyalari mavjudmi?

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

9.2-teorema. Agar biror oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi C o'zgarmasning biror qiymatida (1) formula yordamida ifodalanadi.

Isbot. ◊ Aytaylik, $G(x)$ funksiya qaralayotgan oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Ushbu $\varphi(x)=G(x)-F(x)$ yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun $\varphi'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ bo'ladi, ya'ni, qaralayotgan oraliqda $\varphi(x)$ funksiya uchun funksiyaning doimiylik sharti bajariladi. Boshqacha aytganda $G(x)-F(x)=C$, ya'ni $G(x)=F(x)+C$ bo'ladi. Demak, $G(x)$ funksiya (1) formuladan C ning biror qiymatida hosil bo'ladi. ◆

Shunday qilib, agar oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning bitta $F(x)$ boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa, u holda uning barcha boshlang'ich funksiyalari $F(x)+C$, bu yerda C ixtiyoriy o'zgarmas son, ko'rinishda ifodalanar ekan.

9.3-ta'rif. (a,b) intervalda berilgan $f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyalarning umumiy ifodasi $F(x)+C$, bu yerda C=const, shu $f(x)$ funksiyaning *aniqmas integrali* deb ataladi va u $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi. Bunda $\int$ - *integral belgisi*, $f(x)$ *integral ostidagi funksiya*, $f(x)dx$ - *integral ostidagi ifoda*, x – *integrallash o'zgaruvchisi* deb ataladi.

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \qquad (2)$$

bu yerda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi.

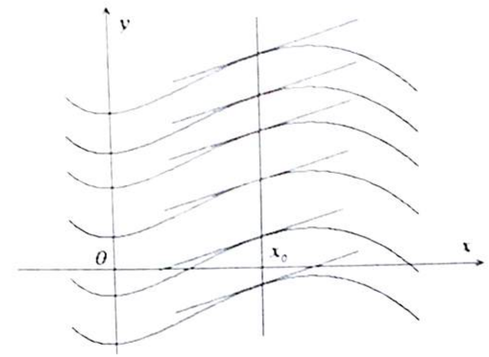
Masalan, $(-\infty;+\infty)$ da $f(x)=\cos x$ bo'lsin. Bu holda $(\sin x)'=\cos x$ bo'lgani uchun $\int \cos x dx=\sin x+C$ bo'ladi.

(2) formuladan ko'rinadiki, berilgan $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasini va uning aniqmas integralini topish masalalari deyarli bir xil masalalardir. Shu sababli $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topishni ham,

aniqmas integralini topishni ham $f(x)$ funksiyani *integrallash* deb ataymiz. Integrallash differensiallashga nisbatan teskari amaldir.

Integrallash amalining to'g'ri bajarilganligini tekshirish uchun olingan natijani differensiallash yetarli: differensiallash natijasida integral ostidagi funksiya hosil bo'lishi lozim.

Masalan, $\int 3x^2dx=x^3+C$ ekanligini tekshirish uchun tenglikning o'ng tomonidagi funksiyadan hosila olamiz: $(x^3+C)'=3x^2$, demak, integrallash to'g'ri bajarilgan.



58-rasm

Geometrik nuqtai nazardan bu teorema $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $y=F(x)+C$ bir parametrli *egri chiziqlar oilasini* ifodalaydi (C-parametr). Bu egri chiziqlar oilasi quyidagi xossaga ega: egri chiziqlarga abssissasi $x=x_0$ bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinmalar bir-biriga parallel bo'ladi (58-rasm).

$F(x)+C$ egri chiziqlar oilasi *integral egri chiziqlar* deb ataladi. Ular bir-birlari bilan kesishmaydi, biri-biriga urinmaydi. Tekislikning har bir nuqtasidan faqat bitta integral chiziq o'tadi. Barcha integral chiziqlar biri ikkinchisidan Oy o'qiga parallel ko'chirish natijasida hosil bo'ladi.

9.4-misol. Abssissasi x bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinmasining burchak koeffitsienti $k=x^3$ formula bilan ifodalanadigan va (2;5) nuqtadan o'tuvchi egri chiziqni toping.

Yechish. Ma'lumki, $y'=k=x^3$, bu shartni qanoatlantiruvchi y funksiyaning umumiy ifodasi $y=\int x^3dx$ bo'ladi. Bu integralni hisoblab $y=\dfrac{x^4}{4}+C$ ifodaga ega bo'lamiz. Izlanayotgan egri chiziq (2;5) nuqtadan o'tadi. Shu sababli funksiya ifodasiga berilgan nuqta koordinatalarini qo'yamiz va C ning kerakli qiymatini topamiz. Natijada $5 = \frac{2^4}{4} + C$, $C = 1$ hosil bo'ladi. Demak, izlanayotgan egri chiziq tenglamasi $y = \frac{x^4}{4} + 1$ ekan.

Endi quyidagi savolga javob izlaymiz: biror oraliqda berilgan har qanday $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjudmi?

Har qanday funksiyaning ham boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lavermaydi (36-masala), lekin quyidagi teorema o'rinli.

9.5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya biror oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda uning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'ladi.

Bu teoremaning isboti kelgusida ko'rsatiladi, shu sababli bu bobda uzluksiz funksiyalarni integrallash haqida gapiriladi. Uzilishga ega bo'lgan funksiyalar uchun integrallash masalasi uning u yoki bu uzluksizlik oraliqlari uchun qaraladi.

Masalan, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada uzilishga ega. Bu funksiya $(0; +\infty)$ va $(-\infty; 0)$ oraliqlarda uzluksiz. Birinchi oraliqda $\int \frac{1}{x} dx = lnx + C$ formula o'rinli. Ammo ikkinchi oraliq uchun bu formula ma'noga ega emas. Lekin bu oraliqda quyidagi formula o'rinli bo'lisini tekshirib ko'rish qiyin emas: $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$

Bu ikki formulani quyidagicha umumlashtirib yozish mumkin: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

2-§. Aniqmas integralning sodda xossalari

9.6-xossa. Aniqmas integralning differensiali (hosilasi) integral ostidagi ifodaga (funksiyaga) teng:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \ \left(\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)\right).$$

Isbot. ◊ Ta'rifga ko'ra

$$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \ ◆$$

9.7-xossa. Biror funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng: $\int dF(x) = F(x) + C$.

Isbot. ◊ $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$. ◆

9.8-xossa. Agar $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lsa, u holda ixtiyoriy k $(k \neq 0)$ son uchun

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (1)$$

bo'ladi, ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi oldiga chiqarish mumkin.

Isbot. ◊ $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'lsin. U holda

$$k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC \qquad (2)$$

bo'ladi. $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ va kC ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lganligi uchun $kF(x) + kC$ ifoda $kf(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalarini beradi, ya'ni

$$\int kf(x)dx = kF(x) + kC \qquad (3)$$

bo'ladi. (2) va (3) dan (1) kelib chiqadi. ◆

9.9-izoh. $k=0$ bo'lganda (1) tenglik o'rinli emas. Haqiqatan ham, bu tenglikning chap tomoni $\int 0f(x)dx = \int 0dx = C$, C –ixtiyoriy o'zgarmas son, o'ng tomoni esa $0\int f(x)dx = 0 \cdot (F(x) + C) = 0$.

9.10-izoh. Integrallarni topishda kC yozilmaydi. Uning o'rniga C yoziladi, chunki ixtiyoriy o'zgarmas sonni yozish usuli muhim emas. Bunda o'zgarmas qo'shiluvchining ixtiyoriy qiymat qabul qila olishi muhim hisoblanadi.

Agar C-ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lsa, u holda C^3, $4C$ - ixtiyoriy o'zgarmas son bo'ladi. Lekin C^2, $\sin C$ - ixtiyoriy o'zgarmas son emas, chunki $C^2 \geq 0$, $|\sin C| \leq 1$.

9.11-xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ larning boshlang'ich funksiyalari mavjud bo'lsa, u holda $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ bo'ladi, ya'ni ikkita funksiya algebraik yig'indisining integrali aniqmas integrallar algebraik yig'indisiga teng.

Isbot. ◊ Aytaylik, $F(x)$ va $G(x)$ lar mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ larning boshlang'ich funksiyalari bo'lsin. U holda $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = (F(x) \pm G(x)) + (C_1 \pm C_2)$

Ammo, $F(x) \pm G(x)$ funksiya $f(x) \pm g(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi, chunki $(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$, $C_1 \pm C_2$ esa – ixtiyoriy ikkita o'zgarmas sonlarning algebraik yig'indisi- yana ixtiyoriy o'zgarmas son bo'ladi.

Shu sababli $(F(x) \pm G(x)) + (C_1 \pm C_2)$ ifoda $f(x) \pm g(x)$ ning barcha boshlang'ich funksiyalarini beradi, ya'ni $\int (f(x) \pm g(x))dx$ ga teng bo'ladi. ◆

Bu xossani chekli sondagi funksiyalar uchun ham isbotlash mumkin. Buning uchun matematik induksiya metodidan foydalanish yetarli (9-34-masala).

9.12-izoh. Integrallarni topishda $C_1 \pm C_2$ o'rniga C yoziladi.

Masalan, $\int (\cos x + 3x^2)dx = \int \cos x dx + \int 3x^2 dx = \sin x + x^3 + C$.

9.13-xossa. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ (a \neq 0)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Tenglikning o'ng tomonining hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng ekanligini ko'rsatish yetarli. Haqiqatan ham, $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}(F(ax+b))' = f(ax+b)$.◆

9.14-xossa. (integrallash formulasining invariantligi). Agar integrallash formulasida integrallash o'zgaruvchisini shu o'zgaruvchining istalgan differensiallanuvchi funksiyasi bilan almashtirsak integrallash formulasining shakli o'zgarmaydi, ya'ni agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ va u funksiya x ning differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsa, u holda $\int f(u)du = F(u) + C$ bo'ladi.

Isbot. ◊ Birinchi tartibli differensialning invariantlik formasidan foydalanamiz. Bunga ko'ra, agar $dF(x)=F'(x)dx$ va $u=u(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda $dF(u)=F'(u)du$ bo'ladi. $\int f(u)du = F(u) + C$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun so'ngi tenglikning ikkala tomonidan differensial olamiz:

$$d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du, \quad d(F(u)+C) = F'(u)du = f(u)du.$$

Bu differensiallarning tengligidan 9.14 – xossaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.◆

3-§. Asosiy integrallar jadvali

Yuqorida isbotlangan aniqmas integralning sodda xossalari va aniqmas integrallar jadvali birgalikda integrallarni hisoblashning asosiy qoidalarini aniqlaydi. Integrallash amali differensiallash amaliga teskari amal bo'lganligi sababli, quyida keltiriladigan formulalarning ko'pchiligini hosilalar jadvalidan hosil qilish mumkin.

Quyida asosiy aniqmas integrallar jadvalini keltiramiz. Bunda har bir formula integral ostidagi funksiyalarning aniqlanish sohasida qaraladi.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$; 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$;

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$; $\int e^x dx = e^x + C$;

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$; $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (|x|<|a|)$;

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$; 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$; 9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

10. $\int chx dx = shx + C$; 11. $\int shx dx = chx + C$;

12. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$; 13. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$;

14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $a \neq 0$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \ (|x|>|a|)$.

4-§. Integrallash usullari

4.1. Bevosita integrallash usuli. Bu usul integral ostidagi ifodani jadvaldagi biror integral ostidagi ifoda ko'rinishiga keltirish va aniqmas integral xossalaridan foydalanishga asoslangan.

9.15-misol. Quyidagi integrallarni toping: a) $\int 2^{2x}\cdot 3^x dx$; b) $\int tg^2 x dx$; c) $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; d) $\int \cos 2x dx$.

Yechish. a) $\int 2^{2x}\cdot 3^x dx=\int (2^2\cdot 3)^x dx=\int 12^x dx=\frac{12^x}{\ln 12}+C$;

b) $\int tg^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=tgx-x+C$;

c) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=$

$=\int(1-\sin x)dx=x+\cos x+C$;

d) $\int\cos 2x dx=\int\cos 2x\cdot\frac{1}{2}d(2x)=\frac{1}{2}\int\cos(2x)d(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$, bunda integrallash formulasining invariantligi xossasidan foydalanildi.

4.2. O'zgaruvchini almashtirish usuli. Ushbu $\int f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. Integralda o'zgaruvchini almashtirish usulining mohiyati shundan iboratki, unda integrallash o'zgaruvchisi x ni biror $x=\varphi(t)$ formula yordamida t o'zgaruvchi bilan almashtiriladi. Bunda $\varphi'(t)$ uzluksiz va $x=\varphi(t)$ ga nisbatan teskari funksiya $t=\varphi^{-1}(x)$ mavjud deb faraz qilinadi. Endi

$x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$

ifodalarni $\int f(x)dx$ ga qo'yamiz:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Bu yerda $\varphi(t)$ ni shunday tanlash kerakki, o'ng tomondagi integral soddaroq bo'lsin. Agar $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri $F(t)$ bo'lsa,

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(x))+C$$

kelib chiqadi.

(3) formula aniqmas integralda *o'zgaruvchini almashtirish formulasi* deb ataladi.

Ba'zi hollarda yangi o'zgaruvchini $t=\varphi(x)$ formula orqali kiritish foydadan holi emas.

9.16-misol. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ ni hisoblang.

Yechish. $e^x-1=t^2$ almashtirish kiritamiz. U holda $e^x=t^2+1$, $x=\ln(t^2+1)$, $dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$ va $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{2dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{e^x-1}+C$ bo'ladi.

9.17-misol. $\int\sin^3 x\cos x dx$ ni hisoblang.

Yechish. $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$ almashtirishni kiritamiz. Bu holda

$\int\sin^3 x\cdot\cos x dx=\int t^3 dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$ bo'ladi.

O'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib aniqmas integralni hisoblashda almashtirishni qo'lay tanlab olish muhim hisoblanadi. Ixtiyoriy integralni hisoblashda o'zgaruvchini almashtirishning umumiy qoidasi yo'q. Bunday qoidalarni ba'zi funksiyalar (trigonometrik, irratsional va boshq.) sinflari uchun keltirish mumkin.

Ko'p hollarda integrallarni hisoblashda integral ostidagi funksiyani differensial belgisi ostiga "kiritish" usulidan foydalanadi. Funksiya differensialining ta'rifiga ko'ra $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$. Bu tenglikning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tish (hosil qilish) $\varphi'(x)$ ko'paytuvchini differensial belgisi ostiga "kiritish" deb aytiladi.

Aytaylik, ushbu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ ko'rinishdagi integralni hisoblash talab qilinsin. Bu integralda $\varphi'(x)$ ko'paytuvchini differensial belgisi ostiga kiritamiz va so'ngra $\varphi(x)=u$ almashtirish bajaramiz. U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(u)du.$$

9.18-misol. $I=\int\sqrt[3]{1+x^2}\,x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $xdx=\frac{1}{2}d(1+x^2)$ ekanligidan foydalanamiz, u holda

$$I=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2)=|1+x^2=u|=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x^2)^4}+C$$

bo‘ladi.

9.19-misol. $I=\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{4+3\cos x}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin xdx=-\frac{1}{3}d(4+3\cos x)$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. $4+3cosx=u$ deb belgilaymiz. Natijada

$I=$

$$-\frac{1}{3}\int(4+3\cos x)^{-\frac{1}{2}}d(4+3\cos x)=-\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{4+3\cos x}+C$$

hosil bo‘ladi.

Agar integral ostidagi funksiya $\varphi'(x)/\varphi(x)$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda $\varphi'(x)$ ko‘paytuvchini differensial belgisi ostiga kiritish orqali uni jadvaldagi integralga keltirish mumkin:

$$\int\frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}=\int\frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C.$$

Masalan,

$$\int tgxdx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=|u=\cos x|=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

4.3. Bo‘laklab integrallash usuli. Bu usul ikki funksiya ko‘paytmasining differensiali formulasidan kelib chiqadi. Ma’lumki, agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsa, u holda $d(uv)=udv+vdu$ yoki $udv=d(uv)-vdu$ bo‘ladi. Bu tenglikni ikkala tomonini integrallasak,

$\int udv=\int d(uv)-\int vdu$, yoki

$\int udv=uv-\int vdu$ (4)

formula hosil bo‘ladi. Bu formula bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi. Bu formula yordamida $\int udv$ ni hisoblash boshqa, $\int vdu$ integralni, hisoblashga keltiriladi. Bu formuladan $\int udv$ ga nisbatan $\int vdu$ integralni hisoblash oson bo‘lganda foydalaniladi.

9.20-misol. $\int x\cos xdx$ ni hisoblang.

Yechish. $u=x$, $du=x$, $v=sinx$, $dv=cosxdx$ belgilashlarni kiritamiz. U holda

$$\int x\cdot\cos xdx=\int udv=u\cdot v-\int vdu=x\cdot\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$$

bo‘ladi.

9.21-misol. $\int lnxdx$ ni hisoblang.

Yechish. $u=lnx$, $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$, $dv=dx$ almashtirishni kiritamiz. U holda,

$$\int\ln xdx=\int udv=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\cdot\ln x-x+C$$ bo‘ladi.

Endi amaliyotda tez-tez uchrab turadigan va bo‘laklab integrallash usuli bilan hisoblanadigan integrallar tiplarini keltiramiz.

1. $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$ ko‘rinishdagi integrallar, bu yerda $P_n(x)$ - n – darajali ko‘phad, k – biror son. Bu integrallarni hisoblash uchun $u=P_n(x)$ deb olish va (4) formulani n marta qo‘llash yetarli.

2. $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)arctgxdx$, $\int P_n(x)arcctgxdx$ ko‘rinishdagi integrallar, bu yerda $P_n(x)$ - n – darajali ko‘phad. Bu integrallarni bo‘laklab integrallash uchun $P_n(x)$ oldidagi ko‘payuvchi funksiyani u deb olish lozim.

3. $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, bu yerda a va b lar haqiqiy sonlar. Bu integrallar ikki marta bo‘laklab integrallash usuli bilan hisoblanadi.

9.22-misol. $\int\arcsin xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integral 2-tipga kiradi, bunda $P_0(x)=1$ va $u=arcsinx$ deb olamiz. U holda

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x, & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x\arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \text{ bo'ladi.}$$

9.23-misol. $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integral 3-tipga mansub. u sifatida dx ning oldidagi ko'paytuvchilardan ixtiyoriy birini olamiz va ikki marta bo'laklab integrallashni bajaramiz. Ikkinchi marta integrallaganimizda avval berilgan integralni o'z ichida saqlaydigan tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdan berilgan integralni topamiz:

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u = e^{-x}, & du = -e^{-x}dx \\ dv = \cos\frac{x}{2}dx, & v = 2\int\cos\frac{x}{2}d(\frac{x}{2}) = 2\sin\frac{x}{2} \end{matrix} \right| = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} +$$

$$+2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u = e^{-x}, & du = -e^{-x}dx \\ dv = \sin\frac{x}{2}dx, & v = -2\cos\frac{x}{2} \end{matrix} \right| = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2} -$$

$$-4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx, \text{ ya'ni } \int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx,$$

bundan $5\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2}$, yoki

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{2}{5}(e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 2e^{-x}\cos\frac{x}{2}).$$

Mashq va masalalar

Bevosita integrallash usulidan foydalanib integrallang (1-6):

9-1. $\int \frac{x^4+x^2-6x}{x^3}dx.$ 9-2. $\int\left(\frac{5}{x} - \frac{10}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2+7}\right)dx.$

9-3. $\int \sqrt{x}(x^2+1)dx.$ 9-4. $\int \frac{3+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

9-5. $\int \frac{(x^3+2)^2}{\sqrt{x}}dx.$ 9-6. $\int\left(4\sin x + 8x^3 - \frac{11}{\cos^2 x}\right)dx.$

Integrallarni hisoblang* (7-14):

9-7. $\int \sin^2 3x\, dx.$ 9-8. $\int \cos^2 8x\, dx.$

9-9. $\int tg^2 x dx.$ 9-10. $\int \frac{4x+1}{x-5}dx.$

9-11. $\int (3tgx - 2ctgx)^2 dx.$ 9-12. $\int \frac{4\sqrt{1-x^2}+3x^2}{x^2-1}dx.$

9-13. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$ 9-14. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx.$

O'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib integrallang (15-22):

9-15. $\int \sqrt{4x-5}\,dx$ 9-16. $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}.$

9-17. $\int \sin^3 x\cos x\, dx.$ 9-18. $\int e^{x^3}\cdot x^2 dx.$

9-19. $\int \frac{\ln^5 x\, dx}{x}.$ 9-20. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x+1}.$

9-21. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}.$ 9-22. $\int \frac{arctgx\, dx}{x^2+1}.$

Bo'laklab integrallash usulidan foydalanib integrallang (23-28):

9-23. $\int x\sin x\, dx.$ 9-24. $\int (2x-1)\cdot e^{3x} dx.$

9-25. $\int \frac{\ln x\, dx}{x^2}.$ 9-26. $\int x\cdot 2^x dx.$

9-27. $\int \ln^2 x\, dx.$ 9-28. $\int x\, arctgx\, dx.$

Integrallarni hisoblang (9-34):

9-29. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$ 9-30. $\int arctg\sqrt{x}dx.$

9-31. $\int \frac{dx}{\sin x}.$ 9-32. $\int \frac{\ln^2 x\, dx}{x\cdot\sqrt{3-\ln x}}.$

9-33. $\int \frac{e^{arctg\,x}+8x}{1+x^2}dx.$ 9-34. $\int \frac{3x+5\sin\left(\frac{1}{e^x}\right)}{e^x}dx.$

9-34. 9.11-xossani matematik induksiya metodidan foydalanib, chekli sondagi integrallanuvchi funksiyalar uchun isbotlang.

9-35. Darbu teoremasini isbotlang: Agar $f(x)$ funksiya biror oraliqda $f'(x) =$ hosilaga ega bo'lib, shu oraliqqa tegishli bo'lgan $x = a, x = b$ nuqtalarda $f'(a) = A \neq B = f'(b)$ bo'lsa, u holda bu oraliqda $f'(x)$ funksiya A va B sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni A va B sonlar orasidan olingan har qanday C soni uchun (a,b) intervalga tegishli bo'lgan kamida bitta c nuqta topilib, $f'(c) = C$ bo'ladi.

9-36. Darbu teoremasidan foydalanib, $f(x)=\begin{cases}-1, & agar \;\; 0\le x<1,\\ 2, & agar \;\; 1\le x\le 2\end{cases}$ funksiyaning $[0;2]$ da boshlang'ich funksiyaga ega emasligini isbotlang.

9-37. Aytaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang yoki rad eting: a) agar $f(x)$ toq funksiya bo'lsa, u holda $F(x)$ – toq funksiya; b) agar $f(x)$ juft funksiya bo'lsa, u holda $F(x)$ – juft funksiya; c) a) agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lsa, u holda $F(x)$ – davriy funksiya.

9-38. Uzilishga ega, lekin sonlar o'qida uzluksiz boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

9-39. Quyidagi funksiyalarning boshlang'ich funksiyalarini toping: a) $x|x|$, $x\in R$; b) $|1-x|+|1+x|$, $x\in R$; c) $(2x-3)|x-2|$, $x\in R$; d) $\max(1,x^2)$, $x\in R$.

5-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

5.1. Sodda ratsional kasrlar va ularni integrallash. Sodda ratsional kasrlar deb nomlanadigan kasrlar asosan to'rt xil bo'ladi. Ratsional funksiyalarni integrallash shu to'rt xil sodda kasrlarni integrallashga keltiriladi. Shu sababli bu to'rt xil kasrni integrallash masalasi alohida ahamiyat kasb etadi. Ularning ko'rinishi quyidagicha:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ \text{va}\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

bunda A, M, N, a, p va q lar haqiqiy sonlar, $k>1$natural son va p^2-$4q<0$ deb hisoblanadi.

Endi yuqoridagi kasrlarni integrallash masalasiga o'tamiz.

a) $\frac{A}{x-a}$ ni integrallash quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

b) $\frac{A}{(x-a)^k}$ ni integrallaymiz ($k>1$).

$$\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$$

c) $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ ni integrallash (p^2-$4q<0$) suratida mahrajining differensialini ajratib olish va mahrajini kvadratlar yig'indisiga keltirish orqali jadvaldagi integrallarga keltiriladi.

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{array}{l} d(x^2+px+q)=(2x+p)dx\\ Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}\end{array}\right|=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

d) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($k>1$) sodda kasrni integrallash uchun $x+p/2=z$ almashtirish bajaramiz, bundan $dx=dz$, $x^2+px+q=(x+p/2)^2+q$-$p^2/4=z^2+a^2$, bu yerda $a^2=q$-$p^2/4$. U holda

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=M\int\frac{zdz}{(z^2+a^2)^k}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=MI_0+\frac{2N-Mp}{2}I_k$$

bo'ladi. Ravshanki, $I_0=\int\frac{zdz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2(1-k)\left(z^2+a^2\right)^{k-1}}+C.$

Demak,

$I_k=\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}$ integralni hisoblash kifoya bo'ladi.

$I_k =$

$$\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{z^2+a^2-z^2}{\left(z^2+a^2\right)^k}dz=\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$$ Bu

yerda $\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}=I_{k-1}$ ekanligini e'tiborga olsak.

$$I_k=\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}-\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}\right) \qquad (5)$$

bo'ladi.

Endi $\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$ ni bo'laklab integrallaymiz.

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}=\left|\begin{matrix} u=z, & du=dz \\ dv=\frac{zdz}{(z^2+a^2)^k}, & v=\frac{1}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}=\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}.$$

So'ngi topilgan ifodani (5) formulaga qo'yamiz, natijada

$$I_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}-\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}\right) \qquad (6)$$

(6) rekurrent formula deb ataladi. $z=\frac{2x+p}{2}$ va $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ almashtirishlarga qaytib, izlanayotgan integralni topamiz.

$I_1=\int\frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{z}{a}+C$ bilgan holda (6) formula yordamida $I_2=\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$ integralni hisoblash mumkin. Haqiqatan ham,

$$\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+a^2}+\frac{z}{2(z^2+a^2)}\right)=$$

$$=\frac{z}{2a^2(z^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{z}{a}+C.$$

Shunday qilib, biz barcha sodda kasrlarni integrallash formulalarini hosil qildik.

5.2. Ratsional funksiyalarni integrallash. Integralni hisoblash uchun umumiy usullar bo'lmagani uchun ayrim funksiyalar sinflarini integrallash yo'llari o'rganilgan. Hozir biz ana shunday funksiyalar sinflaridan biri bilan tanishib chiqamiz.

Ma'lumki, $R_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko'phad butun ratsional funksiya,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m} \quad (a_0\neq 0,\ b_0\neq 0)$$

esa kasr ratsional funksiyalar deb ataladi. Butun va kasr ratsional funksiyalar umuman ratsional funksiyalar deb aytiladi. Butun ratsional funksiyani integrallash quyidagicha bajariladi:

$$\int R_n(x)dx=\int a_0x^ndx+\int a_1x^{n-1}dx+\ldots+\int a_{n-1}xdx+\int a_ndx=$$

$$=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\ldots+a_{n-1}\cdot\frac{x^2}{2}+a_nx+C.$$

Endi kasr ratsional funksiyalarni integrallash masalasiga o'tamiz.

Ushbu $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ kasr ratsional funksiya berilgan bo'lsin.

Agar $n<m$ bo'lsa, u holda $f(x)$ - to'g'ri, $n\geq m$ bo'lsa, $f(x)$ - noto'g'ri kasr ratsional funksiya deyiladi.

Masalan, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{1}{x}$ - to'g'ri kasr ratsional funksiyalar; $\frac{x^2+3}{x^2+5}$, $\frac{x^3+x+5}{x^2+4}$ - noto'g'ri kasr ratsional funksiyalar bo'ladi.

To'g'ri ratsional kasrni integrallashni o'rganamiz.

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n<m)$ to'g'ri ratsional kasr berilgan bo'lsin. Uni chekli sondagi sodda ratsional kasrlarning yig'indisi ko'rinishda ifodalash mumkin. Shu maqsadda $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ kasrning mahrajini chiziqli va kvadrat ko'paytuvchilarga ajratish lozim, buning uchun $Q_m(x)=0$, ya'ni

$$b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0 \qquad (7)$$

tenglamani yechish kerak. Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra $Q_m(x)=0$ tenglama karrali ildizlarini hisobga olganda m ta ildizga ega bo'ladi. Bu ildizlar haqiqiy (sodda yoki karrali) va kompleks (sodda yoki karrali) bo'lishi mumkin.

Ma'lumki, agar $x=\alpha$ qaralayotgan $Q_m(x)$ ko'phadning sodda (k karrali) ildizi bo'lsa, u holda $Q_m(x)$ ko'phad $x-\alpha$ ($(x-\alpha)^k$) ga qoldiqsiz bo'linadi va

$$Q_m(x)=(x-\alpha)Q_{m-1}(x) \quad (Q_m(x)=(x-\alpha)^kQ_{m-k}(x))$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $z=u+iv$ kompleks son $Q_m(x)$ ko'phadning sodda ildizi bo'lsa, u holda unga qo'shma bo'lgan $\overline{z}=u-iv$ kompleks son ham $Q_m(x)$ ko'phadning ildizi bo'ladi. Bu holda ko'phad $(x-z)(x-\overline{z})=x^2+px+q$ ga qoldiqsiz bo'linadi, bu yerda $p=-(z+\overline{z})=-2u$, $q=z\overline{z}=u^2+v^2$, $p^2/4-q<0$ va uni $Q_m(x)=(x^2+px+q)Q_{m-2}(x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Shunga o'xshash, agar z kompleks son s karrali ildizi bo'lsa, u holda $Q_m(x)=(x^2+px+q)^sQ_{m-2s}(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Faraz qilaylik, (7) tenglamaning barcha haqiqiy va kompleks ildizlari topilgan bo'lsin. U holda $Q_m(x)$ ko'phadni chiziqli va kvadrat uchhadli ko'paytuvchilarga ajratish mumkin:

$$Q_m(x)= b_0(x-\alpha)^{k_1}(x-\beta)^{k_2}\ldots(x-\gamma)^{k_t}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{s_r},$$

bu yerda $k_1+k_2+\ldots+k_t+2s_1+2s_2+\ldots2s_r=m$.

Algebra kursida $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ to'g'ri ratsional kasr elementar (sodda) kasrlar yig'indisi shaklida yozilishi ko'rsatiladi:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-\alpha)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-\beta)^{k_2}}+\ldots+$$
$$+\frac{L_1}{x-\gamma}+\frac{L_2}{(x-\gamma)^2}+\ldots+\frac{L_{k_t}}{(x-\gamma)^{k_t}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots+$$
$$+\frac{U_1x+V_1}{x^2+p_rx+q_r}+\ldots+\frac{U_{s_r}x+V_{s_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}}, \qquad (8)$$

bunda $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}, B_1, \ldots, B_{k_2}, L_1, \ldots, L_{k_t}, M_1, \ldots, M_{s_1}, N_1, \ldots, N_{s_1}, U_1, \ldots, U_{s_r},$ $V_1, \ldots, V_{s_r}$ - noma'lum koeffitsientlar.

Yuqoridagi formulani koeffitsientlarni topmagan holda bir necha misollarda ko'rsatamiz:

1) $$\frac{x^2+2}{(x^3-1)(x^2+1)}=\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1};$$

2) $$\frac{3x-2}{(x+4)(x-2)^3}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3};$$

3)

$$\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^3(x^2+2)^2(x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+2)^2}+\frac{H}{x+5}.$$

(8) yoyilmadagi koeffitsientlarni topish uchun *noma'lum koeffitsientlar metodi* yoki *xususiy qiymatlar metodi*dan foydalaniladi.

Noma'lum koeffitsientlar metodining mohiyati quyidagidan iborat. Aytaylik, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ to'g'ri ratsional kasrning (8) ko'rinishdagi noma'lum koeffitsientli sodda kasrlar yig'indisi shaklidagi yoyilmasi berilgan bo'lsin. Sodda kasrlarni $Q_m(x)$ umumiy mahrajga keltiramiz va suratda hosil bo'lgan ko'phadni $P_n(x)$ ga tenglashtiramiz.

Ma'lumki, ikkita ko'phad aynan teng bo'lishi uchun bu ko'phadlardagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarning teng bo'lishi zarur va yetarli. Shuni hisobga olgan holda hosil bo'lgan ayniyatning o'ng va chap tomonidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtiramiz va yuqoridagi noma'lum koeffitsientlarga nisbatan m ta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Shu sistemani yechib, noma'lum koeffitsientlarni topamiz.

9.24-misol. Ushbu $\dfrac{x^2}{x^3-8}$ ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

Yechish. $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ bo'lganligi sababli (8) formulaga ko'ra

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

bu yerda A, B va C lar noma'lum koeffitsientlar. Bu tenglikning o'ng tomonini umumiy mahrajga keltiramiz, u holda

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$ bo'ladi. Bundan

$x^2=(A+B)x^2+(2A+C-2B)x+4A-2C$.

Endi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, A, B, C larni topish uchun ushbu tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 1=A+B, \\ x^1 & 0=2A+C-2B, \\ x^0 & 0=4A-2C \end{array}\Bigg\}\Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=\frac{2}{3},\ C=\frac{2}{3}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{1}{3(x-2)}+\frac{2(x+1)}{3(x^2+2x+4)}.$$

9.25-misol. Ushbu $\dfrac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}$ ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

Yechish. Kasrning mahrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-9=(x^2+2x-3)(x^2+2x+3)=(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)$.

(8) formuladan foydalanib yoyilmani yozamiz:

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Tenglamaning o'ng tomonini umumiy mahrajga keltiramiz. U holda

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x^2+2x+3)+B(x-1)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}$$

bo'ladi. Bu kasrlarning suratlarini tenglashtiramiz so'ngra x oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=A+B+C, \\ x^2 & 7=5A+B+2C+D, \\ x^1 & 26=9A+B-3C+2D, \\ x^0 & -9=9A-3B-3D, \end{array}\Bigg\}\Rightarrow A=1,\ B=1,\ C=-2,\ D=5.$$

Demak,

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}+\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}.$$

Noma'lum koeffitsientlarni topishda x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni solishtirish o'rniga x o'zgaruvchiga bir nechta (noma'lum koeffitsientlar soniga teng) qiymatlar berib, noma'lum koeffitsientlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin. Bu metod *xususiy qiymatlar metodi* deb yuritiladi. Bu metod ayniqsa $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional kasr mahraji ildizlari sodda va haqiqiy bo'lganda qo'l keladi. Bunda x ga shu ildizlarga teng qiymatlar berish qo'lay bo'ladi.

9.26-misol. $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ ni sodda kasrlarga ajrating.

Yechish. (8) formulaga ko'ra

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}.$$

Ushbu tenglikning o'ng tomonini umumiy mahrajga keltiramiz va suratlarini tenglashtiramiz:

$4x^2+16x-8=A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2)$.

x ga ketma-ket x=0, x=-2 va x=2 qiymatlar berib quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -8=-4A \\ x=-2 & -24=8B \\ x=2 & 40=8C \end{array}\Bigg\}\Rightarrow\begin{cases} A=2, \\ B=-3, \\ C=5. \end{cases}$$

Shunday qilib,

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}.$$

Ba'zi hollarda yuqorida ko'rilgan ikkala metoddan birgalikda foydalanish ham mumkin, ya'ni noma'lum koeffitsientlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilish uchun x ga bir qator xususiy qiymatlar berish va x ning oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish mumkin.

Endi ratsional kasr funksiyalarni integrallash qoidasini keltiramiz. Ratsional kasrni integrallash uchun quyidagi ishlarni bajarish lozim:

1) agar qaralayotgan $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional kasr noto'g'ri ($n \geq m$) bo'lsa, u holda uni ko'phad va to'g'ri ratsional kasr yig'indisi ko'rinishda ifodalab olamiz:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)},\ k<m;$$

2) agar qaralayotgan $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional kasr to'g'ri ($n < m$) bo'lsa, u holda uni (8) formula yordamida sodda kasrlarga yoyyamiz;

3) ratsional kasr integralini uning butun qismi va sodda ratsional kasrlar integrallari yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz va har bir integralni hisoblaymiz.

Noma'lum koeffitsientlarni topganimizdan keyin $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional kasrni integrallash masalasi yuqoridagi ayniyatda qatnashgan sodda kasrlarni integrallash masalasiga keltiriladi.

9.27-misol. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya to'g'ri kasrdan iborat. Uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}.$$

Bundan $x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$ kelib chiqadi. Endi x o'zgaruvchiga 0, 1, 2 va -1 qiymatlar berib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -A = 1, \\ D = 2, \\ A + 2B + 2C + 2D = 9, \\ -8A - 4B + 2C - D = 0. \end{cases}$$

Bundan $A=-1$, $B=2$, $C=1$, $D=2$ ni topamiz.

Demak, $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx = -\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^3} =$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

9.28-misol. $I=\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi kasr-noto'g'ri kasr. Uning butun va to'g'ri qismlarini ajratib olamiz:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}.$$

To'g'ri qismi $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ ni sodda kasrlarga ajratamiz (qarang 9.26-misol), natijada $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan

$I=$

$$\int\left(x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x+2}+5\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+\ln C = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$$

$$+\ln\left|\frac{Cx^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|.$$

9.29-misol. $\int \frac{x^2}{x^3-8}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya to'g'ri kasrdan iborat. Uni sodda kasrlarga ajratishni 9.24-misolda ko'rgan edik. Shu yoyilmadan foydalanib integralni hisoblaymiz:

$$\int \frac{x^2}{x^3-8}dx=$$

$$\int \frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\right)dx=\left|\begin{array}{c}A=\frac{1}{3},\\ B=C=\frac{2}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\int\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}=\frac{1}{3}\ln|x-2|$$

$$+\frac{1}{3}\ln|x^2+2x+4|+\frac{1}{3}\ln C=\ln|(C(x-2)(x^2+2x+4))^{\frac{1}{3}}|=\ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}\,.$$

9.30-izoh. Integrallarni hisoblashda har doim ham tayyor sxemalardan foydalanishga harakat qilavermaslik kerak. Xususan, yuqoridagi misolda $x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3-8)$ ekanligidan foydalanish mumkin edi. U holda $\int\frac{x^2}{x^3-2}dx=$ $\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3-8)}{x^3-8}dx=\frac{1}{3}\ln|x^3-8|+\frac{1}{3}\ln C=\ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}\,.$

Mashq va masalalar

Sodda kasrlarni integrallang (40-47)

9-40. $\int\frac{4\,dx}{x+3}$. 9-41. $\int\frac{dx}{(x-1)^5}$.

9-42. $\int\frac{11dx}{(x+2)^3}$. 9-43. $\int\frac{dx}{x^2+10x+29}$.

9-44. $\int\frac{(x+6)dx}{x^2-2x+17}$. 9-45. $\int\frac{(4x-1)dx}{x^2+x+1}$.

9-46. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$ 9-47. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+29)^2}$

Integrallarni toping (48-53):

9-48. $\int\frac{2x-3}{(x-5)(x+2)}dx$. 9-49. $\int\frac{x+2}{x^2-6x+5}dx$.

9-50. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$. 9-51. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

9-52. $\int\frac{dx}{x^3-8}$. 9-53. $\int\frac{7x^3-10x^2+50x-77}{(x^2+9)(x^2+x-2)}dx$.

6-§. Trigonometrik ifodalarni integrallash

Kelgusida $R(u,v,...,w)$ kabi belgilashdan foydalanamiz. U $u,v,...,w$ larga nisbatan ratsional funksiyani, ya'ni $u,v,...,w$ va haqiqiy sonlar ustida chekli sondagi to'rt arifmetik amalni bajarish natijasida hosil bo'lgan ifodani anglatadi. Bu yerda $u,v,...,w$ lar harf, ifoda bo'lishi mumkin.

Masalan, $R(u,v)=\frac{\sqrt{2}u^2-v}{3u+4v^3-1}$ u va v larga nisbatan ratsional funksiya;

$R(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x})=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{x+3\sqrt[3]{x}}$ x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ larga nisbatan ratsional funksiya;

$R(\sin x,\cos x)=\frac{3\sin x+\cos^3 x}{3-\sin^2 x+2\cos x}$ $\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan ratsional funksiya bo'ladi.

$x+4\sqrt{x}-3$ ifoda x ga nisbatan ratsional funksiya emas, chunki ifodada x dan ildiz chiqarish amali ham ishtirok etmoqda. Lekin x, $\sqrt{x}$ larga nisbatan ratsional funksiya bo'ladi.

$I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ integralni qaraylik. Ushbu integralni hisoblash uchun umumiy usul mavjud. Haqiqatdan ham, $t=tg\frac{x}{2}$ almashtirishni bajarsak,

$$x=2arctgt,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

kelib chiqadi. Bu ifodani integralga qo'ysak,

$$I=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt$$

hosil bo'ladi. Bunda R o'z argumentlarining ratsional funksiyasi bo'lgani uchun R_1 ham ratsional funksiya bo'ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

9.31-misol. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ ni hisoblang.

Yechish. Bunda $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{1+2t+t^2}=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2}=\frac{-2}{t+1}+C=-\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+C$$

bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, $t=tg\frac{x}{2}$ universal almashtirish yordamida

$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash osonlashadi.

9.32-misol. $\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{2dt}{t^2+2t+17}=$$

$$=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16}=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

Ko'pgina hollarda bunday universal almashtirish murakkab ratsional funksiyalarni integrallashga olib keladi. Shuning uchun, ba'zi hollarda boshqa almashtirishlardan foydalanish ancha qulay bo'ladi.

a) *R(sinx, -cosx)=-R(sinx, cosx)* bo'lsa, u holda *sinx=t* almashtirish bajariladi.

Agar *R(-sinx, cosx)=-R(sinx, cosx)* bo'lsa, u holda *cosx=t* almashtirish bajariladi. Nihoyat,

R(-sinx, -cosx)=R(sinx, cosx) bo'lsa, u holda *tgx=t* almashtirishdan foydalaniladi.

9.33-misol. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu holda integral ostidagi funksiya uchun

R(-sinx, -cosx)=R(sinx, cosx)

shart bajariladi, *tgx=t* almashtirishdan foydalanamiz. Natijada

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int(1+tg^2x)d(tgx)=\int(1+t^2)dt=t+\frac{t^3}{3}+C=tgx+\frac{tg^3x}{3}+C$$ bo'ladi.

b) $I=\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx$ integralni qaraylik. Bunda *m, n-* butun sonlar. Quyidagi uchta holni ko'ramiz:

1) *m* va *n* lardan hech bo'lmaganda biri toq son bo'lsin. Masalan, *m-* toq son, ya'ni $m=2k+1$, *k*-butun son. U holda $t=sinx$, $dt=cosxdx$, $cos^{2k}x=(1-sin^2x)^k=(1-t^2)^k$ almashtirishlar natijasida

$$I=\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx=\int\sin^n x\cos^{2k}x\cos xdx=\int t^n\cdot(1-t^2)^k dt$$ bo'ladi.

Demak, *t* ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

9.34-misol. $\int\sin^4 2x\cdot\cos^3 2xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int\sin^4 2x\cdot\cos^3 2xdx=\int\sin^4 2x(1-\sin^2 2x)\cos 2xdx=$

$$=\frac{1}{2}\int t^4(1-t^2)dt=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{14}t^7+C=\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{14}\sin^7 2x+C$$ kelib chiqadi.

2) *m* va *n* musbat juft sonlar bo'lsin, ya'ni *m=2s, n=2k, s, k-* natural sonlar. Bu holda ushbu

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$ formulalardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Bu formulalar orqali *sinx* va *cosx* larning darajalarini pasaytirish mumkin bo'ladi.

9.35-misol. $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 xdx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 xdx=\int\sin^2 x(\sin x\cos x)^2dx=$

$$=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)(\frac{1}{2}\sin 2x)^2dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx-\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

3) Agar m va n lar juft sonlar bo'lib, ularning kamida biri manfiy bo'lsa, yuqorida bayon qilingan usul maqsadga olib kelmaydi. Bunda $tgx=t$ almashtirishni bajarish lozim bo'ladi.

c) $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$, n – natural son, $n>1$ ko'rinishdagi integrallar mos ravishda $tgx=t$ va $ctgx=t$ almashtirishlar yordamida hisoblanadi.

Masalan, $tgx=t$, $x=arctgt$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajarsak, $\int tg^n x dx=\int \frac{t^n}{1+t^2}dt$ hosil bo'ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

9.36-misol. $\int tg^5 x dx$ ni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi almashtirishlarni bajarsak,

$$\int tg^5 x dx=\int \frac{t^5}{1+t^2}dt=\int (t^3-t+\frac{t}{t^2+1})dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=$$

$$=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C=\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}+\frac{1}{2}\ln(tg^2 x+1)+C$$

hosil bo'ladi.

d) $\int \sin nx\cdot \cos mx dx$, $\int \cos nx\cdot \cos mx dx$, $\int \sin nx\cdot \sin mx dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun ushbu

$$\sin nx\cdot \cos mx=\frac{1}{2}(\sin(n-m)x+\sin(n+m)x),$$

$$\cos nx\cdot \cos mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x),$$

$$\sin nx\cdot \sin mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x),$$

formulalardan foydalanib, berilgan integrallarni yig'indining integraliga keltirish mumkin.

9.37-misol. $\int \sin 5x\cdot \cos 3x dx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int \sin 5x\cdot \cos 3x dx=\frac{1}{2}\int (\sin(5x-3x)+\sin(5x+3x))dx=$

$$=\frac{1}{2}\int \sin 2x+\frac{1}{2}\int \sin 8x dx=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C.$$

Mashq va masalalar

Integrallarni toping (54-69):

9-54. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

9-55. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

9-56. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

9-57. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$.

9-58. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

9-59. $\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx$.

9-60. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-3\cos^2 x+4}$.

9-61. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$.

9-62. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

9-63. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

9-64. $\int \sin^5 x\, dx$.

9-65. $\int \sin^4 x\cdot \cos^5 x\, dx$.

9-66. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^7 x}$.

9-67. $\int \frac{\sin^4 x\, dx}{\cos x}$.

9-68. $\int \sin^6 x\, dx$.

9-69. $\int \sin^2 x\cdot \cos^4 x dx$.

7-§. Sodda irratsional funksiyalarni integrallash

Har qanday ratsional funksiyaning boshlang'ich funksiyalari elementar funksiya bo'lishini va ularni hisoblash usullarini ko'rib chiqdik. Lekin har qanday irratsional funksiyaning boshlang'ich funksiyalari elementar funksiya bo'lavermaydi. Biz hozir boshlang'ich funksiyalari elementar bo'ladigan ba'zi bir sodda irratsional funksiyalarni integrallash bilan shug'ullanamiz. Ular asosan biror almashtirish yordamida ratsional funksiyaga keltiriladigan funksiyalardir.

7.1. $\int R(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},...,\sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx$ $(m_1,n_1,m_2,n_2,...,m_k,n_k$ **-butun sonlar) ko'rinishdagi integrallar.**

Bu integral $x=t^s$, bu yerda s $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},...,\frac{m_k}{n_k}$ kasrlarning eng kichik umumiy maxraji, almashtirish natijasida ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

$$\int R(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},...,\sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx=\int R(t^s,t^{r_1},t^{r_2},...,t^{r_k})st^{s-1}dt$$

9.38-misol. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ ni hisoblang.

Yechish. 1/2 va 1/3 kasrlarning eng kichik umumiy maxraji 6 ga teng bo'lganligi sababli $x=t^6$ almashtirish bajaramiz. U holda $dx=6t^5dt$ bo'ladi.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \int \frac{t^3 6t^5}{t^3-t^2}dt = 6\int \frac{t^6}{t-1}dt = 6\int (t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt =$$

$$= t^6+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C = x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$$

$$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

7.2. $I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)dx$ ko'rinishdagi integral.

Bu integralda R-o'z argumentlarining ratsional funksiyasi, a, b, c, d lar haqiqiy sonlar va $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ - ratsional sonlar bo'lib, ularning eng kichik umumiy maxraji m va $ad-bc\neq 0$ bo'lsin. (Agar ad-bc=0 bo'lsa, u holda $\frac{ax+b}{cx+d}=const$ va $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)$ ifoda x ga nisbatan ratsional funksiya bo'ladi).

Quyidagi

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \text{ yoki } t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$$

almashtirishni kiritamiz. U holda

$$x=\frac{t^m d-b}{a-ct^m} \text{ va } dx=\frac{m(ad-bc)t^{m-1}dt}{(a-ct^m)^2}$$

bo'ladi. Natijada, berilgan integral t ga nisbatan ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi, ya'ni

$$I=\int R(\frac{dt^m-b}{a-ct^m},t^{\alpha_1 m},...,t^{\alpha_n m})\frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt.$$

Bundan avval R ning argumentlari irratsional ifodalardan tashkil bo'lsa, endi argumentlar ratsional va butun ratsional funksiyalarga keltirildi.

Qisqacha qilib yozsak, $I=\int R_1(t)dt$, bunda $R_1(t)$ - ratsional funksiya. Avval olingan natijalarga ko'ra bunday integral elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

9.39-misol. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya $R(x,\sqrt{x+1},\sqrt[3]{x+1})$ ko'rinishdagi funksiya bo'lib, bu yerda $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{3}$. Bu kasrlarning eng kichik umumiy mahraji m=6. U holda $t^6=x+1$, $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x+1}=t^3$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$ almashtirishlar bajarib, quyidagi $I=\int\frac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t-1}$ integralga kelamiz. Natijada

$$I=6\int(t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln|\sqrt[6]{x+1}-1|+C \text{ bo'ladi.}$$

Mashq va masalalar

Integralni toping (70-73):

9-70. $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$.

9-71. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

9-72. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

9-73. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

9-74. $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ integralni, agar

a) $a<0$ va ax^2+bx+c kvadrat uchhad α,β haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, u holda $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$ almashtirish;

b) $a>0$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ yoki $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}$ almashtirish;

c) $c>0$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga keltirish mumkinligini isbotlang.

Yuqoridagi almashtirishlar Eyler almashtirishlari deyiladi.

9-75. Ushbu $I = \int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$ integral berilgan bo'lsin, bunda m, n, p – ratsional sonlar, a va b – haqiqiy sonlar. $a+bx^n$ binom (ikki had) bo'lgani tufayli integral ostidagi ifoda *binomial differensial* deb aytiladi. Binomial differensialga bog'liq quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. (P.L.Chebishev teoremasi). Quyidagi uch holdagina binomial differensialning integrali elementar funksiya bo'ladi.

1-*hol*. p – butun son;

2-*hol*. $p = \frac{r}{s}$ kasr son, lekin $\frac{m+1}{n}$ - butun son;

3-*hol*. $p = \frac{r}{s}$ va $\frac{m+1}{n}$ - kasr sonlar, lekin $\frac{m+1}{n} + p$ - butun son.

Ushbu uch holda binomial differensialning integrali elementar funksiya bo'lishini ko'rsating. Ko'rsatma. 1-holda p butun son bo'lsa, m va n kasrlarning umumiy mahraji k ni topib, $x=t^k$ almashtirishdan foydalaning.

2-holda $a + bx^n = t^s$ almashtirishdan foydalaning.

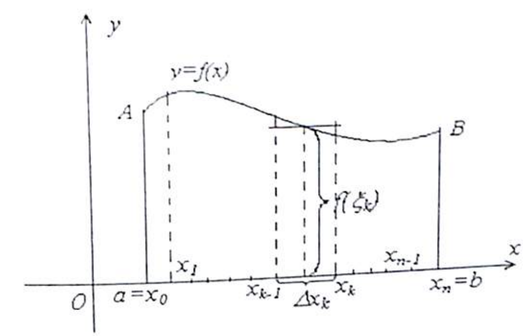
3-holda $a + bx^n = t^s x^n$ almashtirishdan foydalaning.

X BOB. ANIQ INTEGRAL

1-§. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar

1.1. Yuza haqidagi masala. $[a,b]$ kesmada uzluksiz va nomanfiy $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi, Ox o'q, $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan tekis figura *aABb egri chiziqli trapetsiya* deb ataladi.

Hususiy holda A bilan a nuqta yoki B va b nuqtalar ustma-ust tushishi ham mumkin, yoki har ikki hol bir vaqtda yuz berishi mumkin. Bu hollarda ham qaralayotgan figura egri chiziqli trapetsiya deb yuritiladi.



59-rasm

$aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish talab qilinsin. Buning uchun $[a;b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lib va bu nuqtalardan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, $aABb$ egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga bo'lamiz. Endi har bir $[x_{k-1},x_k]$ kesma ichida ixtiyoriy ξ_k nuqta olamiz. Har bir trapetsiyada asosi $[x_{k-1},x_k]$ va balandligi $f(\xi_k)$ bo'lgan to'g'ri to'trburchak chizamiz. Bu to'g'ri to'trburchaklarning yuzalari

$$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=f(\xi_k)\Delta x_k,\ k=1,2,\dots,n$$

bo‘ladi. To‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzlarining yig‘indisi esa

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

orqali belgilaymiz. Agar $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ deb belgilasak va $\lambda\to 0$ bo‘lsa, (bu holda $[a;b]$ ni mayda bo‘laklarga bo‘lishlar soni n cheksiz o‘sadi) S_n ifoda egri chiziqli trapetsiya yuziga tobora yaqinlasha boradi. Shuning uchun egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deb

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ni qabul qilish tabiiydir.

1.2.O‘zgaruvchan kuch bajargan ish haqidagi masala. Faraz qilaylik, jism Ox o‘q bo‘ylab Ox o‘qdagi proeksiyasi x ning funksiyasi bo‘lgan $F=f(x)$ kuch ta’sirida harakat qilayotgan bo‘lsin. Jism shu kuch ta’sirida a nuqtadan b nuqtagacha harakatlanganda bajarilgan ishni topish talab qilinsin.

Buning uchun $[a;b]$ ni n ta bo‘lakka bo‘lamiz:

$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$. $[x_{k-1},x_k]$ bo‘lakdan ixtiyoriy ξ_k nuqtani tanlab olamiz va shu bo‘lakda jismga ta’sir etuvchi kuchni $f(\xi_k)$ ga, uning bajargan ishini

$$f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1})=f(\xi_k)\Delta x_k$$

ga teng deb qaraymiz. U holda $F=f(x)$ kuchning $[a;b]$ da bajargan ishi taqriban $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ ga teng bo‘ladi. Ravshanki, $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ nolga intilsa, $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ bajarilgan ishni aniqroq ifodalaydi va uni $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ deb olish mumkin.

Shunday qilib, yuqoridagi ikki masalani yechish ushbu

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ko‘rinishdagi yig‘indining limitini hisoblash masalasiga olib keldi. Shunga o‘xshash ko‘pchilik geometrik, mexanik va h.k. masalalar shunday yig‘indilarning limitini izlashga keltiriladi.

2-§. Integral yig‘indi, aniq integralning ta’rifi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da aniqlangan bo‘lsin. $[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$$

nuqtalar bilan n ta bo‘lakka bo‘lamiz. $[a;b]$ ni bo‘luvchi bu sonlar to‘plamini $[a;b]$ ning *bo‘linishi* deb ataymiz va τ_n bilan belgilaymiz:

$$\tau_n=\{x_0, x_1, \dots, x_n \mid a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}.$$

Har bir elementar $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\dots,n)$ kesmada bittadan ixtiyoriy ξ_k nuqta tanlab, shu nuqtalarda funksiyaning $f(\xi_k)$ qiymatlarini hisoblaylik va quyidagi yig‘indini tuzaylik:

$$S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \qquad (1)$$

bu yerda $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\dots,n)$ kesmaning uzunligi.

Ushbu (1) yig‘indi $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ dagi *integral yig‘indisi* deb ataladi.

$[a;b]$ ning bo‘linishlari τ_n va har bir $[x_{k-1},x_k]$ kesmadan ξ_k nuqtalarni tanlash usullari cheksiz ko‘p bo‘lganligi sababli $f(x)$ ning $[a;b]$ dagi (1) integral yig‘indilari to‘plami cheksiz to‘plam bo‘ladi. $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ belgilash kiritamiz.

10.1-ta’rif. Agar λ nolga intilganda $f(x)$ ning $[a;b]$ dagi (1) integral yig‘indisi chekli I limitga ega bo‘lib, bu limit $[a;b]$ ning τ_n bo‘linishlariga va ξ_k nuqtalarini tanlash usuliga bog‘liq bo‘lmasa, o‘sha I limit $f(x)$ ning $[a;b]$ dagi *aniq integrali* deyiladi va u

$$\int_a^b f(x)dx$$

orqali belgilanadi:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

Bunday holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi (yoki Riman ma’nosida integrallanuvchi) deyiladi.

Bu yerda ham aniqmas integraldagi kabi *$f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, $f(x)$- integral ostidagi funksiya, x - integrallash o'zgaruvchisi* deb ataladi, a va b esa mos ravishda *integrallashning quyi va yuqori chegaralari* deyiladi.

Aniq integralning $\int_a^b f(x)dx$ belgilanishi shu funksiyaning aniqmas integrali belgilanishiga o'xshash. Bu tasodifiy emas. Aniq integralni hisoblash shu integral ostidagi funksiyaning aniqmas integralini hisoblashga keltiriladi, ularning belgilashlarining o'xshashligi integrallash formulalarini eslab qolishni osonlashtiradi. Ammo aniq integral bilan aniqmas integral orasida muhim farq mavjud: $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi aniq integrali biror sondan iborat, shu funksiyaning aniqmas integrali esa uning barcha boshlang'ich funksiyalarini ifodalaydi. Shu sababli bular turli tushunchalardir.

Aniq integral tushunchasiga olib kelgan birinchi masaladan aniq integralning geometrik ma'nosiga kelib chiqadi: geometrik nuqtai nazardan nomanfiy funksiyaning aniq integrali son jihatdan shu funksiyaga mos egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'ladi.

3-§. Aniq integral mavjud bo'lishining zaruriy sharti

10.2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya $[a;b]$ da chegaralangan bo'ladi.

Isbot. ◊ Teskarisini faraz qilaylik. U holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmaning τ_n bo'linishiga mos $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\dots,n)$ kesmalarning hech bo'lmaganda birida chegaralanmagan bo'ladi. Masalan, funksiya $[x_{j-1},x_j]$ da chegaralanmagan bo'lsin. Integral yig'indini quyidagicha yozish mumkin:

$$S(\tau_n)=A+f(\xi_j)\Delta x_j,$$

bunda $A=\sum_{k=1}^{j-1} f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{k=j+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

$[x_{j-1},x_j]$ da $f(x)$ chegaralanmaganligidan shunday $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$ nuqta mavjudki, $|f(\xi_j)\Delta x_j|>|A|+\frac{1}{\lambda}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda

$$|S(\tau_n)|=|A+f(\xi_j)\Delta x_j|\ge|f(\xi_j)\Delta x_j|-|A|>|A|+\frac{1}{\lambda}-|A|=\frac{1}{\lambda}$$

Demak, $\lambda\to 0$ da $S(\tau_n)\to\infty$ bo'ladi va bundan integral yig'indining chekli limiti mavjud emasligi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ ning integrallanuvchi ekanligiga zid bo'ladi. Bu qarama - qarshilik teoremani isbot qiladi. ◆

Shuni ham aytish kerakki, ba'zi bir chegaralangan funksiyalar integrallanuvchi bo'lmasligi ham mumkin, ya'ni funksiyaning chegaralanganligi uning integrallanuvchi bo'lishi uchun faqat zaruriy shart bo'lib, yetarli shart bo'la olmaydi. Masalan,

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x \text{ irratsional bo`lsa,}\\ 1, & \text{agar } x \text{ ratsional bo`lsa}\end{cases}$$

funksiya (Dirixle funksiyasi) $[-1;1]$ da chegaralangan. Shu funksiyaning kesmadagi integral yig'indilarini olaylik. Agar har bir $[x_{k-1}, x_k]$ kesmada ξ_k lar uchun faqat ratsional nuqtalar tanlab olinsa,

$$S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k=2$$

bo'ladi.

Agar har bir $[x_{k-1}, x_k]$ kesmada ξ_k lar uchun faqat irratsional nuqtalar tanlab olinsa,

$$S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k=0.$$

Demak, $S(\tau_n)$ integral yig'indining limiti ξ_k nuqtalarni tanlab olish usuliga bog'liqdir. Bu esa Dirixle funksiyasining integrallanuvchi emasligini ko'rsatadi.

4-§. Darbu yig'indilari va ularning xossalari

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ da aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. $[a;b]$ ning biror τ_n bo'linishini olib, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$m_k = \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x) \qquad (1)$$

$$\underline{S}(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k, \quad \overline{S}(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \qquad (2)$$

Bunda (2) yig'indilar mos ravishda *Darbuning quyi va yuqori yig'indilari* deb ataladi. Funksiyaning chegaralanganligidan m_k va M_k ning mos kesmada mavjudligi ravshandir. Umuman aytganda, (2) yig'indilar integral yig'indi bo'lmaydi, chunki m_k va M_k funksiyaning qiymatlari bo'lmasligi mumkin (agar $f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa, (2) yig'indilar $f(x)$ funksiyaning integral yig'indilari bo'ladi).

Darbu yig'indilarining uchta asosiy xossasi mavjud.

10.4-xossa. Har qanday τ_n bo'linish uchun

$$\underline{S}(\tau_n) \le S(\tau_n) \le \overline{S}(\tau_n)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Ixtiyoriy $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ uchun $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$.

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k = \overline{S}.$$

Shuni ta'kidlash lozimki, berilgan τ_n bo'linish uchun Darbuning quyi va yuqori yig'indilari yagona bo'ladi, lekin integral yig'indi, har bir qism kesmadan ξ_k nuqtalarni tanlash evaziga cheksiz ko'p bo'ladi. ◆

10.5-xossa. $[a;b]$ ning bo'linish nuqtalari sonini oshirish natijasida quyi yig'indilar kamaymaydi, yuqori yig'indilar esa o'smaydi.

Isbot. ◊ $[a;b]$ ning τ_n bo'linishi uchun quyi yig'indi $\underline{S}_1$ bo'lsin. Endi bo'linish nuqtalarni ortiramiz. Masalan, $[x_{k-1}, x_k]$ ni $\overline{x}$ nuqta yordamida ikkiga bo'lamiz. Hosil bo'ladigan yangi quyi yig'indini $\underline{S}_2$ deb belgilaymiz.

$$\underline{S}_1 = \sum_{j=1}^{k-1} m_j\Delta x_j + m_k\Delta x_k + \sum_{j=k+1}^{n} m_j\Delta x_j,$$

$$\underline{S}_2 = \sum_{j=1}^{k-1} m_j\Delta x_j + m_k'(\overline{x} - x_{k-1}) + m_k''(x_k - \overline{x}) + \sum_{j=k+1}^{n} m_j\Delta x_j.$$

bunda $m_k' = \inf\limits_{[x_{k-1},\overline{x}]} f(x)$, $m_k'' = \inf\limits_{[\overline{x},x_k]} f(x)$.

Ma'lumki, to'plamning aniq quyi chegarasi qism to'plamining aniq quyi chegarasidan katta emas. Buni e'tiborga olsak, $m_k' \ge m_k$, $m_k'' \ge m_k$ va

$$m_k'(\overline{x} - x_{k-1}) + m_k''(x_k - \overline{x}) \ge m_k(\overline{x} - x_{k-1}) + m_k(x_k - \overline{x}) = m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k\Delta x_k$$

munosabat o'rinli.

Demak, $\underline{S}_2 \ge \underline{S}_1$ bo'ladi. ◆

Yuqori yig'indiga bog'liq bo'lgan hol shunga o'xshash isbotlanadi.

10.6-xossa. $[a;b]$ ning har qanday bo'linishidagi quyi yig'indi har qanday boshqa bo'linishdagi yuqori yig'indidan katta emas.

Isbot. ◊ τ_{n_1} bo'linishdagi yig'indilar $\underline{S}_1$ va $\overline{S}_1$ bo'lsin, τ_{n_2} bo'linishdagi yig'indilarni $\underline{S}_2$ va $\overline{S}_2$ deb belgilaylik. Endi, τ_{n_1} va τ_{n_2} lardagi bo'linish nuqtalarni birgalikda olib, yangi τ_{n_3} bo'linishni va unga mos $\underline{S}_3$ va $\overline{S}_3$ larni hosil qilamiz.

(II) ga ko'ra

$\underline{S}_1 \le \underline{S}_3$ va $\overline{S}_2 \ge \overline{S}_3$,

(I) ga ko'ra $\underline{S}_3 \le \overline{S}_3$. Shuning uchun

$\underline{S}_1 \le \underline{S}_3 \le \overline{S}_3 \le \overline{S}_2$ yoki $\underline{S}_1 \le \overline{S}_2$.

Demak, quyi yig'indilar to'plami yuqoridan, yuqori yig'indilar to'plami esa quyidan chegaralangan bo'ladi. ◆

5-§. Aniq integralning mavjudlik sharti

Quyida integral mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartni keltiramiz.

10.7-teorema. $[a;b]$ kesmada aniqlangan va chegaralangan $f(x)$ funksiyaning shu kesmada integrallanuvchi bo'lishi uchun

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{S}(\tau_n) - \underline{S}(\tau_n)) = 0 \qquad (1)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. ◊ *Yetarliligi* (1) shart bajarilgan bo'lsin. $\lambda \to 0$ da quyi yig'indilar $\{\underline{S}_n\}$ ketma-ketligi limitga ega bo'ladi, chunki $\lambda \to 0$ da bo'linish nuqtalarining soni ortadi, natijada $\{\underline{S}_n\}$ uchun Darbu yig'indilarining 10.5-xossasiga ko'ra

$$\underline{S}_1 \le \underline{S}_2 \le \ldots \le \underline{S}_n \le \ldots$$

o'rinli bo'ladi. Shu bilan birga 10.6-xossaga ko'ra $\underline{S}_n \le \overline{S}_1$, ya'ni $\{\underline{S}_n\}$ monoton o'suvchi hamda yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik. Demak, u limitga ega.

Shunga o'xshash, $\lambda \to 0$ da yuqorida yig'indilar ketma-ketligi $\{\overline{S}_n\}$ ham limitga ega bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning chegaralanganligi va (1) shartdan

$$0 = \lim_{\lambda \to 0}(\overline{S}(\tau_n) - \underline{S}(\tau_n)) = \lim_{\lambda \to 0}\overline{S}(\tau_n) - \lim_{\lambda \to 0}\underline{S}(\tau_n), \qquad \lim_{\lambda \to 0}\overline{S}(\tau_n) = \lim_{\lambda \to 0}\underline{S}(\tau_n) = I$$

kelib chiqadi va bunda I-chekli sondir. U holda $\underline{S}(\tau_n) \le S(\tau_n) \le \overline{S}(\tau_n)$ tengsizlikka ko'ra oraliqdagi o'zgaruvchi $S(\tau_n)$ ham o'sha limitga ega bo'ladi. Demak, chekli $\lim_{\lambda \to 0} S(\tau_n) = I$ limit mavjud ekan.

Zarurligi. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsin, ya'ni $\lim_{\lambda \to 0} S(\tau_n) = I$ bo'lsin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $\lambda < \delta$ bo'lganda $|S(\tau_n) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi. Yuqoridagi I limit integral yig'indi $S(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ da qatnashgan ξ_k nuqtalarni tanlash usuliga bog'liq bo'lmaganligi hamda m_k va M_k lar $f(x)$ funksiya qiymatlari to'plamining aniq quyi va aniq yuqori chegaralari bo'lganligi sababli

$$|\underline{S}(\tau_n) - I| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \qquad |\overline{S}(\tau_n) - I| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bundan $I - \varepsilon < \underline{S}(\tau_n) \le \overline{S}(\tau_n) < I + \varepsilon$ yoki $\lambda < \delta$ bo'lganda $|\overline{S}(\tau_n) - \underline{S}(\tau_n)| < 2\varepsilon$ kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlik esa (1) shartning bajarilishini ko'rsatadi. ◆

6-§. Integrallanuvchi funksiyalar sinflari

10.8-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. ◊ Kantor teoremasiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada tekis uzluksiz bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son topilib, $|x'-x''|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi va $[a;b]$ kesmaga tegishli bo'lgan barcha x', x'' lar uchun

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$f(x)$ funksiya har bir $[x_{k-1},x_k]$ da uzluksiz bo'lgani uchun Veyershtrassning 2-teoremasiga ko'ra shunday $\xi_k' \in [x_{k-1},x_k]$ va $\xi_k'' \in [x_{k-1},x_k]$ nuqtalar topiladiki, $f(\xi_k')=m_k$, $f(\xi_k'')=M_k$ bo'ladi. $|\xi_k' - \xi_k''| \le x_k - x_{k-1} \le \lambda$ tengsizlik o'rinli. Agar $\lambda<\delta$ deb olsak, tekis uzluksizlikka ko'ra $|f(\xi_k') - f(\xi_k'')| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu holda

$$0 < \overline{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k') - f(\xi_k'')|\Delta x_k < \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon(b-a).$$

Shunday qilib, $\lambda<\delta$ bo'lganda

$$0 < \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon(b-a)$$

bo'lib, $\varepsilon>0$ ixtiyoriy bo'lganidan $\lim_{\lambda \to 0}(\overline{S} - \underline{S})=0$ tenglikning, ya'ni funksiya integrallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti bajarilishi kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi. ◆

Masalan, ushbu $y=x^2-1$, $y=\frac{1+x}{x}$ funksiyalar $[1;2]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi, chunki ular bu kesmada uzluksiz.

Aksincha, $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ funksiya $[0;1]$ kesmada chegaralanmagan va uzilishga ega. Funksiya chegaralanmaganligidan uning $[0;1]$ kesmadagi integrali mavjud emasligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi teoremaga asosan kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar sinfi integrallanuvchi bo'lar ekan. Bu sinfni ma'lum ma'noda kengaytirish mumkin. Buning uchun $[a;b]$ da chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lgan chegaralangan funksiyalar sinfini ko'rib o'tamiz.

f(x) funksiya $[a;b]$ kesmada chegaralangan bo'lsin.

$M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $\quad m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ belgilarni kiritib, quyidagi

$$\omega_{[a,b]} = M - m$$

sonni *f(x) funksiyaning* $[a;b]$ *kesmadagi tebranishi* deb ataymiz. U holda $[x_{k-1};x_k]$, $k=1,2,\ldots,n$ kesmalardagi funksiyalarning tebranishini ω_k orqali belgilasak, $\omega_k = M_k - m_k$ va

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \cdot \Delta x_k$$

bo'lganligi uchun integral mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartini quyidagicha yozish mumkin bo'ladi:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \cdot \Delta x_k = 0 \qquad (1)$$

10.9-teorema. Agar $[a;b]$ da chegaralangan *f(x)* funksiya shu kesmada chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lsa, u holda *f(x)* funksiya integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. ◊ *f(x)* funksiyaning uzilish nuqtalari $c_1, c_2, \ldots, c_k$ bo'lsin. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ olamiz va har bir uzilish nuqtasining uzunligi ε dan kichik bo'lgan

$(c_1-\varepsilon_1; c_1+\varepsilon_1)$, $\quad (c_2-\varepsilon_2; c_2+\varepsilon_2)$, ... , $(c_k-\varepsilon_k; c_k-\varepsilon_k)$

atroflarini ajratib olamiz. $[a;b]$ kesmadan bu oraliqlarni chiqarib tashlasak, $k+1$ ta kesma qoladi. Ularning har birida *f(x)* funksiya uzluksiz, hamda Kantor teoremasiga ko'ra tekis uzluksiz funksiya bo'ladi. Shuning uchun uzilish nuqtalarni o'rab oluvchi

atroflarning tashqarisida yotuvchi oraliqlar uchun shunday $\delta_1 > 0$ mavjudki, ulardan olingan va $|x' - x''| < \delta_1$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x' va x'' lar uchun $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Endi $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\}$ belgilashni kiritib, $[a;b]$ kesmani uzunligini δ dan kichik bo'lgan Δx_j, $j=1, 2, \ldots, n$ qismiy oraliqlarga bo'lamiz. Shunda 2 xil oraliqlarga ega bo'lamiz:

1) uzilish nuqtalarini o'rab oluvchi atroflarning tashqarisida yotuvchi oraliqlar – ularda funksiyaning tebranishi $\omega_j < \varepsilon$ bo'ladi.

2) ajratilgan atroflar bilan umumiy nuqtalarga ega bo'lgan oraliqlar – bu oraliqlarda funksiyaning tebranishi $M-m=\omega_{[a,b]}$ dan katta bo'la olmaydi.

Shunday qilib, $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j \Delta x_j$ ni yuqoridagi ikki xil qismiy oraliqlarga mos ravishda guruhlab, ikkita yig'indiga ajratamiz:

$$\sum_{j'} \omega_{j'} \Delta x_{j'} + \sum_{j''} \omega_{j''} \Delta x_{j''}.$$

Bunda

$$\sum_{j'} \omega_{j'} \Delta x_{j'} < \varepsilon \sum_{j'} \Delta x_{j'} < \varepsilon(b-a),$$

$$\sum_{j''} \omega_{j''} \Delta x_{j''} < (M-m) \sum_{j''} \Delta x_{j''} < (M-m) 3k\varepsilon,$$

chunki 2-xil qismiy oraliqlardan $(c_j-\varepsilon_j; c_j+\varepsilon_j)$ da to'la joylashganlarning uzunliklari yig'indisi $k\varepsilon$ dan kichik, qisman yotganliklariniki $2k\varepsilon$ dan kichik bo'ladi.

Shuning uchun, agar $\Delta x_j < \delta$ bo'lsa,

$$\sum_j \omega_j \Delta x_j < \varepsilon((b-a) + 3k(M-m)), \qquad \text{ya'ni} \qquad \lambda = \max_{1 \le j \le n} \Delta x_j \to 0 \quad \text{da}$$

$\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j \Delta x_j \to 0$ va (1) shartga ko'ra *f(x)* funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi bo'ladi. ◆

10.10-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada monoton bo'lsa, u shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. ◊ Aniqlik uchun $f(x)$ o'suvchi funksiya bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olib, unga ko'ra $\delta>0$ sonni quyidagicha aniqlaymiz: $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

So'ngra $[a,b]$ kesmani $\lambda=\max\limits_{1\le j\le n}\Delta x_j<\delta$ bo'ladigan τ_n bo'linishiga mos Darbuning quyi $\underline{S}(\tau_n)$ va $\overline{S}(\tau_n)$ yuqori yig'indilarini tuzamiz. U holda

$$\underline{S}(\tau_n)-\overline{S}(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta x_k\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_1)-f(x_0)+$$

$$+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1}))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_n)-f(x_0))=$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a))=\varepsilon$$ bo'ladi. Demak, funksiya integrallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti $\underline{S}(\tau_n)-\overline{S}(\tau_n)<\varepsilon$ bajariladi. Bu esa qaralayotgan funksiyaning integrallanuvchi ekanligini bildiradi. ◆

Chegaralangan va kamayuvchi funksiyaning integrallanuvchi ekanligi yuqoridagi kabi isbotlanadi.

10.11-misol. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(1;2],\\ 2, & x=1\end{cases}$ funksiyaning $[1,2]$ kesmada integrallanuvchi ekanligini asoslang.

Yechish. Bu funksiyaning integrallanuvchi ekanligini yuqoridagi teoremalardan foydalanib asoslash mumkin.

Funksiya $x=1$ nuqtada uzilishga ega, qolgan nuqtalarda esa uzluksiz. 10.9-teoremaga ko'ra bu funksiya $[1;2]$ da integrallanuvchi bo'ladi.

Shuningdek, berilgan funksiya $[a;b]$ da kamayuvchi. Shuning uchun ushbu funksiya 10.10-teoremaning hamma shartlarini qanoatlantiradi va integrallanuvchi bo'ladi.

10.12-izoh. Integrallanuvchi funksiyalar sinflarining soni faqatgina chegaralangan uzluksiz, chegaralangan va chekli sondagina uzilish nuqtalariga ega bo'lgan hamda chegaralangan va monoton bo'lgan funksiyalar sinflari bilan cheklanib qolmaydi. Uzilish nuqtalari sanoqli to'plamni (hadlari takrorlanmaydigan ketma-ketlikni) tashkil etadigan chegaralangan funksiyalar sinfi ham kesmada integrallanuvchi bo'lishini ko'rsatish mumkin.

10.13-izoh. Agar $a=b$ bo'lsa, ta'rifga ko'ra har qanday funksiya uchun ushbu

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

tenglik o'rinli deb kelishamiz.

7-§. Aniq integralning xossalari

Avval aniq integralning tenglik bilan ifodalanadigan xossalarini qaraymiz.

10.14-xossa. $\int_a^b 1\cdot dx=b-a$.

Isbot. ◊ Haqiqatan ham, bunda $f(x)=1$ va ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b 1\cdot dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}1\cdot\Delta x_k=b-a$$ bo'ladi. ◆

10.15-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $kf(x)$ (k=sonst) ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Isbot. ◊ Haqiqatan, $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}kf(\xi_k)\Delta x_k=k\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=k\int_a^b f(x)dx$.

Demak, $\int_a^b kf(x)dx$ mavjud va uning qiymati $k\int_a^b f(x)dx$ ga teng. ◆

10.16-xossa. Agar $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[a;b]$ da integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $f_1(x)\pm f_2(x)$ ham $[a,b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Bu xossa avvalgi xossa kabi isbotlanadi. Bu xossa qo‘shiluvchilar soni chekli (ikkitadan ko‘p) bo‘lganda ham o‘rinli bo‘ladi.

10.17-xossa. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$, ya’ni integrallash chegaralari o‘rnini almashtirsak, aniq integral ishorasini qarama-qarshisiga o‘zgartadi.

Isbot. ◊ $\int_a^b f(x)dx$ integral $a<b$ hol uchun aniqlangan edi. Agar $a>b$ bo‘lsa, bu xossa aniq integral ta’rifiga qo‘shimcha sifatida qaraladi. Bu xossani quyidagicha talqin qilish mumkin: $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_b^a f(x)dx$ integrallari ishorasi bilan farq qiladigan integral yig‘indilarning limiti bo‘ladi. ♦

10.18-xossa. (Aniq integralning additivlik xossasi) Agar $f(x)$ funksiya uchun $\int_a^c f(x)dx, \int_a^b f(x)dx, \int_c^b f(x)dx$ mavjud bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \qquad (1)$$

Isbot. ◊ $a<c<b$ bo‘lsin. $[a;b]$ ni shunday n ta bo‘lakka bo‘lamizki, $c=x_m$ bo‘linish nuqtalaridan biri bo‘lsin. U holda

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

va $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx,\quad \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^c f(x)dx,$

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_c^b f(x)dx$ bo‘lgani uchun bu yerdan (1) kelib chiqadi.

Agar $a<b<c$ bo‘lsa, u holda $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$ bo‘lib, bundan $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ bo‘ladi.

Shunday qilib, c nuqta $[a,b]$ ning ichki yoki tashqi nuqtasi bo‘lishidan qat’iy nazar (1) tenglik o‘rinli bo‘ladi. ♦

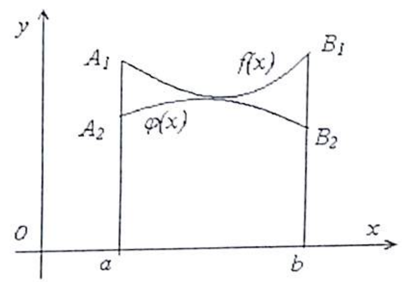
Endi aniq integralning tengsizlik bilan ifodalanadigan xossalarini o‘rganamiz.

10.19-xossa. Agar $[a;b]$ da $f(x)$ integrallanuvchi va $f(x)\geq 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ bo‘ladi.

Isbot. ◊ $f(\xi_k)\geq 0$, $k=1,2,\ldots,n$ va $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}>0$ bo‘lgani uchun $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\geq 0$ bo‘ladi. Bu tengsizlikda limitga o‘tsak

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\geq 0$$

kelib chiqadi. ♦



60-rasm

10.20-xossa. (Aniq integralning monotonlik xossasi) Agar $[a;b]$ da $f(x)$ va $\varphi(x)$ lar integrallanuvchi va $\varphi(x)\leq f(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b \varphi(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx$$

bo‘ladi.

Isbot. ◊ $[a;b]$ ning ixtiyoriy bo‘linishi uchun $\varphi(\xi_k)\leq f(\xi_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$. Demak, $\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ bo‘ladi. Bundan

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta x_k \le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \text{ yoki } \int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$$ kelib chiqadi. ♦

60-rasmda yuqoridagi xossaning geometrik talqini berilgan. $\varphi(x)\le f(x)$ bo'lganligi sababli aA_2B_2b egri chiziqli trapetsiyaning yuzi aA_1B_1b egri chiziqli trapetsiyaning yuzidan katta emas.

10.21-xossa. Agar $[a;b]$ da $f(x)$ uzluksiz bo'lib, $f(x)\ge 0$ va $f(x)$ aynan nolga teng bo'lmasa, u holda $\int_a^b f(x)dx>0$ bo'ladi.

Isbot. ◊ $f(x)$ aynan nolga teng bo'lmaganligi sababli $[a;b]$ kesmada shunday ξ nuqta topilib, bu nuqta uchun $f(\xi)>0$ bo'ladi. $f(x)$ ning uzluksizligiga ko'ra ξ ning shunday $(\alpha;\beta)$ atrofi mavjudki, $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$ va bu oraliqning barcha nuqtalari uchun ham $f(x)>0$ o'rinli bo'ladi. U holda $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx$ va 10.19-xossadan $\int_a^b f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta f(x)dx$ kelib chiqadi. $f(x)$ uzluksiz bo'lgani uchun $[\alpha;\beta]$ da u eng kichik qiymatga erishadi. Bu eng kichik qiymatni m bilan belgilaymiz. $[\alpha;\beta]$ da $f(x)>0$ bo'lganligi uchun $m>0$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta m dx = m(\beta-\alpha)>0,$$

va bundan $\int_a^b f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ kelib chiqadi. ♦

10.22-izoh. Umumiy holda 10.19-xossadagi tengsizlik qat'iy bo'la olmaydi. Haqiqatdan ham,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1;0)\cup(0;1],\\ 1, & x=0\end{cases}$$

funksiya 10.21-xossadagi shartlarni qanoatlantiradi. Shu bilan birga

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = 0+0=0,$$

ya'ni $\int_{-1}^{1} f(x)dx \ge 0$ (qat'iy tengsizlik bajarilmaydi).

$\int_a^b f(x)dx>0$ bo'lishi uchun $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada 10.21-xossa shartlarini qanoatlantirishi yetarli.

10.23-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya ham shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi va

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. ◊ $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topiladiki, $\lambda<\delta$ bo'lgan har qanday τ_n bo'linishga nisbatan

$$\overline{S}(\tau_n)-\underline{S}(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$$

bo'ladi. Ravshanki, $x', x''\in[a;b]$ lar uchun

$$\big||f(x'')|-|f(x')|\big| \le |f(x'')-f(x')|$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, undan quyidagi

$$\sup\big||f(x'')|-|f(x')|\big| \le \sup|f(x'')-f(x')|$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $\overline{\omega}_k\le\omega_k$ tengsizlik o'rinli, bunda $\overline{\omega}_k$ - $|f(x)|$ funksiyaning $[x_{k-1};x_k]$ dagi tebranishi. Natijada

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{\omega}_k\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$$

bo'ladi. Bundan esa $|f(x)|$ funksiyaning $[a;b]$ kesmada integrallanuvchiligi kelib chiqadi.

Shuningdek,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\Delta x_k$$

tengsizlikda $\lambda \to 0$ da limitga o'tsak, izlanayotgan tengsizlik kelib chiqadi. ◆

10.24-izoh. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x)|$ ham integrallanuvchi bo'lishini ko'rib o'tdik. Bunga teskari bo'lgan xulosa, umuman aytganda, noto'g'ri bo'ladi. Masalan,

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{agar } x \text{ irratsional bo'lsa,}\\ -1, & \text{agar } x \text{ ratsional bo'lsa}\end{cases}$$

funksiya uchun

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b 1dx = b-a,$$

Demak, $[a;b]$ da $|f(x)|$ funksiya integrallanuvchi bo'ladi, lekin $f(x)$ ning o'zi Dirixle funksiyasi kabi integrallanuvchi emas.

10.25-xossa. (Aniq integralni baholash) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi va $m\le f(x)\le M$ bo'lsa, u holda

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (2)$$

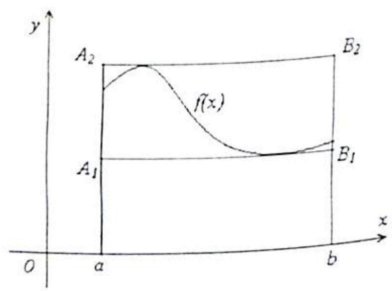
tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ Shartga ko'ra ixtiyoriy $x\in[a;b]$ uchun $m\le f(x)\le M$. Bu tengsizlikka 10.20-xossani, so'ngra 20.15 va 20.14-xossalarni tatbiq etamiz:

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx,$$

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx,$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \ ◆$$



61-rasm

61-rasmda $[a,b]$ da $f(x)\ge 0$ bo'lgan hol uchun 10.25-xossaning geometrik talqini berilgan. aA_1B_1b to'g'ri to'rtburchakning yuzi $m(b-a)$ ga, aA_2B_2b to'g'ri

to'rtburchakning yuzi $M(b-a)$ ga teng. (2) tengsizlikdan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi birinchi to'g'ri to'rtburchak yuzidan kichik emas, ikkinchi to'g'ri to'rtburchak yuzidan katta emasligi kelib chiqadi.

10.26-misol. $\int_0^1 \sqrt{9+x^2}dx$ integralni baholang.

Yechish. $[0;1]$ kesmada $9\le 9+x^2\le 10$ tengsizlik o'rinli. Bundan $3\le\sqrt{9+x^2}\le\sqrt{10}$ ekanligi kelib chiqadi. (2) formulaga ko'ra

$$3(1-0)\le\int_0^1\sqrt{9+x^2}dx\le\sqrt{10}(1-0) \text{ yoki } 3\le\int_0^1\sqrt{9+x^2}dx\le\sqrt{10}$$

10.27-misol. $\int_0^1 xdx$ va $\int_0^1 x^3dx$ integrallarni solishtiring.

Yechish. $[0;1]$ kesmada $x\ge x^3$ bo'lganligi sababli $\int_0^1 xdx\ge\int_0^1 x^3dx$ bo'ladi.

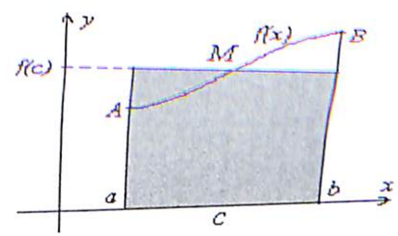
8-§. O'rta qiymat haqidagi teoremalar

10.28-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu kesmada shunday c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi. Demak 10.25-xossaga ko'ra $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ tengsizlik o'rinli. Bundan



$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

62-rasm

tengsizlik hosil bo'ladi. Endi Bolsano-Koshi teoremasiga (4.27-teorema) asosan $[a;b]$ kesmada shunday c nuqta topiladiki,

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}, \text{ yoki } \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

bo'ladi. ◆

Bu tenglikning mohiyati quyidagicha: $f(x)\ge 0$ bo'lganda tenglikning chap tomoni egri chiziqli trapetsiyaning yuzini, o'ng tomoni $f(c)(b-a)$ ifoda esa to'g'ri to'rtburchak yuzini ifoda qiladi (62-rasm).

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning grafigida shunday $M(c;f(c))$ nuqta mavjudki, tomonlarining uzunliklari $f(c)$ va $b-a$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi yuqoridan $y=f(x)\ge 0$, quyidan Ox o'q bilan va $x=a$, $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda, $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ da qabul qiladigan barcha qiymatlarining o'rta arifmetigi $f(c)$ ga teng bo'ladi, ya'ni

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Bunda $f(c)$-berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi *o'rta qiymati* deyiladi.

10.29-misol. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyaning [1;2] kesmadagi o'rta qiymatini toping.

Yechish. (2) formulaga ko'ra $f(c)=\frac{1}{2-1}\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$,

demak, funksiyaning o'rta qiymati ln2 ga teng ekan.

10.30-teorema. Agar $[a;b]$ da $f(x)$ va $\varphi(x)$ lar uzluksiz, $\varphi(x)\ge 0$ (yoki ≤ 0) bo'lsa, u holda $[a;b]$ da shunday c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx \qquad (3)$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ $f(x)$ va $\varphi(x)$ uzluksizligidan $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$, $\int_a^b \varphi(x)dx$ integrallar mavjud bo'ladi. Veyershtrass teoremasiga ko'ra, $\sup_{[a,b]} f(x)=M$, $\inf_{[a,b]} f(x)=m$ lar mavjud va $m\le f(x)\le M$. $\varphi(x)\ge 0$ bo'lgani uchun $m\varphi(x)\le f(x)\varphi(x)\le M\varphi(x)$ kelib chiqadi. U holda

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \le M\int_a^b \varphi(x)dx .$$

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin.

I-hol: $\int_a^b \varphi(x)dx=0$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda so'ngi tengsizlikdan $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$ kelib chiqadi va (3) tenglik o'rinli bo'ladi.

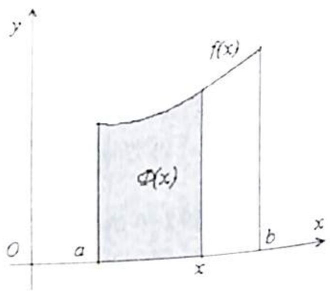
II-hol: $\int_a^b \varphi(x)dx>0$ bo'lsin. U holda $m\le \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}\le M$ tengsizlik o'rinli.

$[a;b]$ da $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun shunday c nuqta topiladiki, $\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}=f(c)$ bo'ladi. Bu tenglikdan (3) tenglik kelib chiqadi. ◆

9-§. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo'lsin. U holda bu funksiya har qanday $[a;x]\subset[a;b]$ da integrallanuvchi bo'ladi va $\int_a^x f(t)dt$ integral x ning $[a;b]$ dagi har bir qiymatiga aniq bir sonni mos qo'yadi. Demak, bu holda integral o'zining yuqori chegarasining funksiyasi bo'ladi:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad a\le x\le b.$$



Geometrik nuqtai nazardan $f(t)\ge 0$ bo'lganda $\Phi(x)$ funksiya 63-rasmdagi egri chiziqli trapetsiyaning bo'yalgan qismining yuzini bildiradi.

$\Phi(x)$ funksiyaning x bo'yicha, ya'ni aniq integralning yuqori chegarasi bo'yicha hosilasini topamiz.

63-rasm

10.31-teorema. Uzluksiz funksiya aniq integralining yuqori chegarasi bo'yicha hosilasi mavjud va u integral ostidagi funksiyaning yuqori chegarasidagi qiymatiga teng:

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x).$$

Isbot. ◊ $x,\ x+\Delta x\in[a;b]$ lar uchun $\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=$

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \quad \text{bo'ladi.}$$

O'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra shunday $\xi\in[x;x+\Delta x]$ topiladiki, bu nuqtada

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x, \text{ ya'ni } \Delta\Phi(x)=f(\xi)\Delta x$$

o'rinli bo'ladi. Bundan $\dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi)$ kelib chiqadi. $\Delta x\to 0$ da $\xi\to x$ va $f(x)$ ning uzluksizligini nazarda tutsak, $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$ hosil bo'ladi.

Shunday qilib, $\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x)$.

Bu tenglik $[a;b]$ da uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $\Phi(x)$ mavjud ekanligini ko'rsatadi. ◆

10.32-misol. $\Phi(x)=\int_3^x \sin t dt$ funksiya hosilasini toping.

Yechish. Yuqoridagi teoremaga ko'ra $\Phi'(x)=\sin x$ bo'ladi.

10.33-misol. $\Phi(x)=\int_1^{x^2} e^t dt$ funksiya hosilasini toping.

Yechish. Bu holda yuqori chegara x ning funksiyasidan iborat, shu sababli murakkab funksiyani differensiallash qoidasidan foydalanamiz:

$\Phi'(x)=e^{x^2}\cdot(x^2)'=2xe^{x^2}$.

10-§. Nyuton - Leybnits formulasi, aniq integralni hisoblash

Nyuton - Leybnits formulasi. Aniq integral bilan boshlang'ich funksiya orasida qanday bog'lanish mavjudligini ko'rib o'taylik.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz va $F(x)$ uning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsin: $F'(x)=f(x)$. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

ham $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. U holda ma'lumki,

$$\Phi(x)=F(x)+C,\ C=\text{const}.$$

Demak, $\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$. Bunda $x=a$ deb olsak, $0=F(a)+C$, yoki $C=-F(a)$ kelib chiqadi. Demak, $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$.

Endi $x=b$ deb olsak,

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a) \qquad (1)$$

bo'ladi, ya'ni $[a;b]$ *kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning aniq integrali shu funksiyaning boshlang'ich funksiyalardan birortasining bu kesmadagi orttirmasiga teng* bo'ladi.

(1) formula integral hisobning asosiy formulasi bo'lib, u *Nyuton- Leybnits formulasi* deyiladi.

(1) tenglikning o'ng tomonidagi $F(b)-F(a)$ ayirma, odatda $F(x)\big|_a^b$ ko'rinishida yoziladi. Bu holda Nyuton-Leybnits formulasi quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Nyuton-Leybnits formulasi aniq integralni hisoblash masalasini aniqmas integralni hisoblash masalasiga olib keladi.

10.34-misol. Aniq integrallarni hisoblang: a) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; b) $\int_0^{\pi}(1+sinx)dx$; c) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$; d) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx$.

Yechish. a) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = ln|x|\,\Big|_1^2 = ln2 - ln1 = ln2;$

b) $\int_0^{\pi}(1+sinx)dx = (x-cosx)\Big|_0^{\pi} = (\pi - cos\pi)-(0-cos0) = \pi+1+1 = \pi+2;$

c) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{4+x}} = \int_0^5 (4+x)^{-\frac{1}{2}}d(4+x) = 2\sqrt{4+x}\Big|_0^5 = 2(\sqrt{9}-\sqrt{4}) = 2;$

d) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}(e^0 - e^2) = \frac{e^2-1}{2}.$

10.2. Aniq integralni bo'laklab integrallash. Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra aniq integral bilan aniqmas integral orasida bog'lanish mavjud. Shu sababli bo'laklab integrallash usulini aniq integrallarni hisoblashda ham tatbiq qilish mumkin.

Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a;b]$ da uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$(u\cdot v)' = u'v + uv'$$

bo'lib, $u(x)v(x)$ funksiya $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ uzluksiz funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra $\int_a^b (u'v+uv')dx = (uv)\big|_a^b$.

Bundan $\int_a^b uv'dx = (uv)\big|_a^b - \int_a^b u'vdx$ kelib chiqadi. So'ngra $uv'dx = udv$ va $u'vdx = vdu$ ekanligini e'tiborga olsak, natijada

$$\int_a^b udv = (uv)\big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (2)$$

aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi hosil bo'ladi.

10.35-misol. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $u = x$, $dv = cosxdx$ deb olsak, $du = dx$, $v = sinx$ hosil bo'ladi. Demak, (2) ga ko'ra

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = (x\sin x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi-2}{2}.$$

10.3. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin.

10.36-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz, $x=\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kemada uzluksiz differensiallanuvchi, $x=\varphi(t)$ funksiya qiymatlari to'plami $[a;b]$ kesmadan iborat hamda $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. ◊ $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo'lgani uchun shu kesmada u boshlang'ich funksiya $F(x)$ ga ega. Shartga ko'ra $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ bo'lganligi sababli Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} dF(\varphi(t)) =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Shuni ta'kidlash kerakki, aniq integralni o'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan hisoblaganda integral ostidagi ifoda bilan bir qatorda integrallash chegaralari ham o'zgaradi. ♦

10.37-misol. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ hisoblang.

Yechish. Bu integralda $x=sint$ almashtirishni bajaramiz. U holda $x=sint$ funksiya yuqoridagi teoremadagi barcha shartlarni $[0;\frac{\pi}{2}]$ kesmada qanoatlantiradi va $dx=costdt$, $a=0$ da $\alpha=0$, $b=1$ da $\beta=\pi/2$. Demak, (3) formulaga ko'ra

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt =$$

$$=(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

10.38-misol. $\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ni hisoblang.

Yechish. $x=t^2$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz, u holda $dx=2tdt$ va $a=0$ da $t_1=\sqrt{a}=0$, $b=9$ da $t_2=\sqrt{b}=3$ bo'ladi. (3) formulaga ko'ra

$$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^3 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^3\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2(t-\ln|1+t|)\Big|_0^3 = 6-2\ln 4.$$

10.39-misol. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$ ni hisoblang.

Yechish. $sinx=t$ deb almashtirish bajaramiz. U holda $cosxdx=dt$, $t_1=sin(\pi/6)=1/2$, $t_2=sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$ bo'ladi. (3) formulaga asosan

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} t^{-5}dt = -\frac{1}{4t^4}\Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{4}\left(16-\frac{16}{9}\right) = \frac{32}{9}.$$

Mashq va masalalar

Nuyton-Leybnits formulasidan foydalanib, aniq integralni hisoblang (1-8):

10-1. $\int_0^{\pi}(2x+\sin 2x)dx$ 10-2. $\int_0^{\lg 2} 2^x\cdot 5^x dx$.

10-3. $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$. 10-4. $\int_1^2 \frac{x+2}{3-x}dx$.

10-5. $\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$. 10-6. $\int_0^1 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx$

10-7. $\int_1^5 \frac{x}{1+x^2}dx$. 10-8. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x-2}\,dx$

Trigonometrik funksiyalarning integrallarini hisoblang (9-14):

10-9. $\int_0^{\pi}\left(cos^3x-\frac{3}{4}\cos x\right)dx$. 10-10. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2x-sin^4x}$.

10-11. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2x\,dx$. 10-12. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-cos6x}$.

10-13. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$. 10-14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3\varphi d\varphi$.

Ratsional kasrlarni integrallang (15-18):

10-15. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x}$. 10-16. $\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x}$.

10-17. $\int_3^5 \frac{x^2+5}{x-2}dx$ 10-18. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

O'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib hisoblang (19-22):

10-19. $\int_0^{\ln 2} \frac{dz}{e^z+1}$. 10-20. $\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

10-21. $\int_1^{16} \frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}$. 10-22. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Bo'laklab integrallash usulidan foydalanib hisoblang (23-26):

10-23. $\int_{-1}^0 xe^{-x}dx$. 10-24. $\int_0^2 \ln(x^2+4)dx$.

10-25. $\int_1^e \frac{ln^3x}{x^2}dx$. 10-26. $\int_{-1}^0 9x^2\ln(x+2)dx$.

10-27. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo'lsin. U holda bu funksiya har qanday $[x,b]\subset[a,b], a\le x\le b$ kesmada integrallanuvchi va uning integrali x ga bog'liq bo'ladi: $F(x)=\int_x^b f(t)dt$. Bu quyi chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral deyiladi. $F'(x)$ ni toping.

10-28. $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2$ integraldan foydalanib, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) = \ln 2$ tenglikni isbotlang.

10-29. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ integraldan foydalanib, $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$ tenglikni isbotlang.

10-30. $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan har qanday $f(x)$ funksiya uchun ushbu $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ tenglik o'rinli ekanligini isbotlang.

10-31. $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan har qanday $f(x)$ funksiya uchun ushbu $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx$ tenglik o'rinli ekanligini isbotlang.

10-32. Aytaylik $f(x)$ funksiya $[-l,l]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. a) agar $f(x)$ funksiya toq bo'lsa, u holda $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$; b) agar $f(x)$ funksiya juft bo'lsa, u holda $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$ ekanligini isbotlang.

XI BOB. XOSMAS INTEGRALLAR

$[a;b]$ oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning aniq integrali tushunchasini kiritib batafsil o'rgandik. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, integralning bayonida oraliqning chekliligi va $f(x)$ ning chegaralanganligi bevosita ishtirok etdi.

Endi avvalgi integral tushunchasini ma'lum ma'nolarda umumlashtirish imkoniyati bormikan degan savol tug'uladi. Albatta, umumlashtirish shunday bo'lishi kerakki, natijada Riman integralining asosiy xossalari o'z kuchini saqlab qolsin. Ba'zi hollarda aniq integral tushunchasini cheksiz oraliqda aniqlangan funksiya yoki chegaralanmagan funksiya uchun umumlashtirishga to'g'ri keladi. Biz hozir ana shunday umumlashgan (yoki xosmas) integrallarni kiritamiz va o'rganamiz.

1-§. Integrallash sohasi chegaralanmagan xosmas integral

$f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ cheksiz oraliqda aniqlangan bo'lib, uning har qanday $[a;\ t]$ chekli qismida integrallanuvchi bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy $t\ (t > a)$ uchun ushbu $\int_a^t f(x)dx$ integral mavjud bo'lsin. Bu integral berilgan $f(x)$ funksiya uchun faqat $t \in [a,+\infty)$ o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi: $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

11.1-ta'rif. $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ funksiyaning $t \to +\infty$ dagi holatiga $f(x)$ funksiyaning $[a;+\infty)$ oraliqdagi *xosmas integrali* deyiladi va u $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ kabi belgilanadi.

11.2-ta'rif. Agar $t \to +\infty$ da $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ funksiyaning chekli limiti mavjud bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, $f(x)$ funksiya esa cheksiz $[a;+\infty)$ *oraliqda integrallanuvchi funksiya* deb ataladi.

Agar $t \to +\infty$ da $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ funksiyaning limiti cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *xosmas integral uzoqlashuvchi* deyiladi.

Chekli yoki cheksiz limit xosmas integralning qiymati deyiladi va $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$ kabi yoziladi.

11.3-misol. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in \mathbf{R}$, integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Agar $\alpha\neq 1$ bo'lsa, u holda

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha}-1).$$

Demak,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha}, & \forall \alpha>1, \\ \infty, & \forall \alpha<1. \end{cases}$$

Agar $\alpha=1$ bo'lsa, u holda

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty} \ln t = \infty.$$

Demak, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ integral $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi, $\alpha\leq 1$ da uzoqlashuvchi ekan.

11.4-misol. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx$, $a>0$ ni hisoblang.

Yechish. $$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t e^{-ax}dx = \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{-e^{-ax}}{a}\right|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-e^{-at}}{a}+\frac{e^0}{a}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{ae^{at}}\right)=\frac{1}{a}.$$

11.5-misol. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki $t\to+\infty$ da

$$F(t)=\int\limits_0^t \cos x dx = \sin t$$

funksiya limitga ega emas.

Funksiyaning $(-\infty;b]$ oraliq bo'yicha xosmas integrali ham yuqoridagi kabi ta'riflanadi.

11.6-misol. $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $$\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to-\infty}\int\limits_r^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to-\infty} arctgx\Big|_r^0 = \lim_{r\to-\infty}(arctg0 - arctgr) = \frac{\pi}{2}.$$

Demak, integral yaqinlashuvchi va $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da uzluksiz bo'lsin. U holda biror $c\in(-\infty;+\infty)$ uchun $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$ va $\int\limits_{-\infty}^c f(x)dx$ integrallar yig'indisi bu funksiyaning ikkala integrallash chegaralari ham cheksiz bo'lgan xosmas integrali deyiladi va quyidagicha yoziladi: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Demak,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$$

va ta'rif bo'yicha

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r\to-\infty}\int\limits_r^c f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int\limits_c^t f(x)dx \qquad (3)$$

deb qabul qilamiz.

Agar (3) dagi ikkala limit ham mavjud va chekli bo'lsa, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

11.9-misol. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

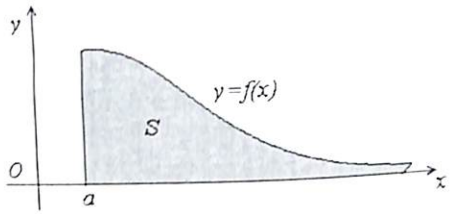
Yechish. (3) formulada $c=0$ deb olamiz. U holda

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to-\infty}\int\limits_r^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{r \to -\infty} arctgx\Big|_r^0 + \lim_{t \to +\infty} arctgx\Big|_0^t = \lim_{r \to -\infty}(arctg0 - arctgr) + \lim_{t \to +\infty}(arctgt - arctg0) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi.$$

Geometrik nuqtai nazardan yaqinlashuvchi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral $y=f(x)\geq 0$ egri chiziq, $x=a$, $y=0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan va Ox o'qi yo'nalishida cheksiz cho'zilgan figuraning chekli S yuzaga ega ekanligini anglatadi (64-rasm). Shunga o'xshash, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ va $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi xosmas integrallarga ham geometrik talqin berish mumkin.



64-rasm

2-§. Xosmas integralning xossalari

Yuqorida kiritilgan xosmas integrallar aniq integrallarga o'xshash xossalarga ega:

11.10-xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi va k-o'zgarmas son bo'lsa, $\int_a^{+\infty} kf(x)dx$ ham yaqinlashuvchi va $\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k\int_a^{+\infty} f(x)dx$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot (11-1-masala).

11.11-xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty}(f(x) \pm \varphi(x))dx$ yaqinlashuvchi va $\int_a^{+\infty}(f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot (11-1-masala).

11.12-xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $b > a$ uchun $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ integrali ham yaqinlashuvchi bo'ladi va a $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$ o'rinli bo'ladi.

Isbot (11-1masala).

11.13-xossa. Agar $x \in [a; +\infty)$ uchun $f(x) \geq 0$ va bu funksiyaning xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

Isbot (11-1-masala).

11.14-xossa. Aytaylik $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a; +\infty)$ da aniqlangan, uzluksiz va $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ shartni qanoatlantirsin. U holda

a) agar $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) agar $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot. ◊ Aniq integral xossalariga ko'ra ixtiyoriy $t > a$ uchun $\int_a^t f(x)dx \leq \int_a^t \varphi(x)dx$ o'rinli.

Agar $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $F(t) = \int_a^t f(x)dx \leq \int_a^t \varphi(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx < +\infty$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Demak, $F(t)$ funksiya yuqoridan chegaralangan. Shuningdek, $f(x) \geq 0$ bo'lgani uchun $F(t)$ funksiya o'suvchi bo'ladi. Bulardan $\lim_{t \to +\infty} F(t)$ chekli limitning mavjudligi, ya'ni $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Aksincha, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsin. $f(x) \geq 0$ shartdan $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ funksiyaning $t \to +\infty$ da $+\infty$ intilishi kelib chiqadi. $\int_b^t f(x)dx \leq \int_a^t \varphi(x)dx$ tengsizlikdan $\int_a^t \varphi(x)dx = G(t)$ funksiyaning ham $t \to +\infty$ da $+\infty$ intilishi, ya'ni $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

11.15-misol. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. 11.14-xossadan foydalanamiz. Berilgan integralni $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ integral bilan solishtiramiz, bu integral $\alpha > 1$ da yaqinlashuvchi (11.3-misol). $[1;+\infty)$ da $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ bo'lganligi sababli, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ integralning yaqinlashishidan berilgan $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

3-§. Absolyut yaqinlashuvchi integrallar

Quyida xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli shartini isbotsiz keltiramiz [2, 210-b.].

11.16-teorema (Koshi teoremasi). Quyidagi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday t_0 ($t_0 > a$) soni topilib, $t' > t_0, t'' > t_0$ bo'lgan ixtiyoriy t', t'' lar uchun $\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Ushbu teoremadan xosmas integrallarning yaqinlashuvchiligini aniqlashda foydalanish qiyin, ammo bu teorema muhim nazariy ahamiyatga ega va undan quyidagi teoremani isbot qilishda foydalanamiz.

11.17-teorema. Agar $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. ◊ Shartga ko'ra $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ yaqinlashuvchi integral. 11.16-teoremaga asosan, ixtiyoriy ε>0 son olinganda ham, shunday t_0 ($t_0>a$) soni topiladiki,

$t' > t_0$, $t'' > t_0$ ($t'' > t'$) bo'lganda $\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Ammo

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| \leq \int_{t'}^{t''} |f(x)|dx.$$

Demak, ixtiyoriy ε>0 son olinganda ham, shunday t_0 ($t_0>a$) soni topiladiki, $t' > t_0$, $t'' > t_0$ bo'lganda

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

bo'ladi. 11.16-teoremaga asosan $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. ◆

11.18-ta'rif. Agar $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *absolyut yaqinlashuvchi xosmas integral* deyiladi, $f(x)$ funksiya esa $[a;+\infty)$ oraliqda *absolyut integrallanuvchi funksiya* deb ataladi.

11.19-ta'rif. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lib, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral *shartli yaqinlashuvchi* deyiladi.

11.20-misol. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Avval $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}dx$ integralni tekshiramiz. $(1;+\infty)$ da $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ va $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli, 11.14-xossaga ko'ra $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}dx$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yuqoridagi xossalarni $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ integral uchun ham bayon qilish mumkin.

4-§. Xosmas integrallarni hisoblash

Endi xosmas integrallarni hisoblash bilan shug'ullanamiz.

a) Nyuton - Leybnits formulasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ da uzluksiz bo'lsin. Xosmas integral ta'rifi hamda Nyuton - Leybnits formulasidan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}(F(t)-F(a))$$

kelib chiqadi, va bunda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Agar $t\to+\infty$ da $F(t)$ ning limiti chekli bo'lsa, bu limitni $F(t)$ ning $+\infty$ dagi qiymati deb qabul qilishimiz mumkin, ya'ni

$$\lim_{t\to+\infty} F(t)=F(+\infty).$$

Bundan esa, $f(x)$ funksiya xosmas integrali uchun Nyuton-Leybnits formulasi o'rinli bo'lishi kelib chiqadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

b) Bo'laklab integrallash. Aytaylik, $u(x)$ va $v(x)$ har biri $[a;+\infty)$ da uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Agar $\int_a^{+\infty} v(x)du(x)$ xosmas integral yaqinlashuvchi hamda

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)=u(+\infty),\quad \lim_{t\to+\infty} v(t)=v(+\infty)$$

limitlar chekli bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} u(x)dv(x)$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$\int_a^{+\infty} u(x)dv(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)du(x).$$

11.21-misol. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ xosmas integralni hisoblang.

Yechish. Bo'laklab integrallash usulidan foydalanamiz. U holda $u(x)=x$, $dv(x)=e^{-x}dx$, $du(x)=dx$, $v(x)=-e^{-x}$, $(u(x)v(x))\Big|_0^{+\infty}= \lim_{t\to+\infty}(-xe^{-x})=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$, $\int_0^{+\infty} v(x)du(x)=\int_0^{+\infty}(-e^{-x})dx=\lim_{t\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^t=0-1=-1$ bo'ladi va demak,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=0-(-1)=1.$$

c) O'zgaruvchini almashtirish. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ da berilgan bo'lsin. Quyidagi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralda $x=\varphi(t)$ almashtirish kiritamiz. Bunda

(1) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;+\infty)$ da berilgan va uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega;

(2) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;+\infty)$ da qat'iy o'suvchi;

(3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$ bo'lsin.

U holda $\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ yaqinlashuvchi bo'lishidan $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchiligi hamda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Mashq va masalalar

11-1. 20-23 -xossalarni isbotlang.

11-2. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty}(f(x) \pm \varphi(x))dx$ uzoqlashuvchi bo'ladimi? Ko'rsatma.$[1;+\infty)$ oraliqda $f(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(x) = -\frac{1}{x+1}$ funksiyalarni qarang.

11-3. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi. $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty}(f(x) \pm \varphi(x))dx$ yaqinlashuvchi bo'ladimi?

11-4. $f(x)$ funksiyaning $(-\infty; b]$ oraliqdagi *xosmas integral*iga ta'rif bering.

Xosmas integralning qiymatini toping yoki uning uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsating (5-14):

11-5. $\int_0^{+\infty} e^{-4x}dx.$ 11-6. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$

11-7. $\int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}.$ 11-8. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

11-9. $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$ 11-10. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

11-11. $\int_0^{+\infty} 2x\sin x\, dx.$ 11-12. $\int_{-\infty}^{0} x\, e^{x}dx.$

11-13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12}.$ 11-14. $\int_0^{+\infty} 2\, e^{-\sqrt{x}}dx.$

Xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring (15-22):

11-15. $\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^6+2}}.$ 11-16. $\int_1^{+\infty} \frac{arctg\, x}{x}dx.$

11-17. $\int_0^{+\infty} e^{-4x}\cos 2x\, dx.$ 11-18. $\int_1^{+\infty} \ln\frac{x^2+5}{x^2+2}dx.$

11-19. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+8}}$ 11-20. $\int_1^{+\infty} \frac{2+3\cos x}{x^4}dx.$

11-21. $\int_0^{+\infty} \frac{x\, arctgx}{\sqrt{2+x^3}}dx$ 11-22. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\cos^2 x}.$

5-§. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali

Aniq integral mavjudligining zaruriy sharti integral ostidagi funksiyaning chegaralanganligi edi.

Endi *f(x)* funksiya $[a;b]$ da chegaralanmagan bo'lsin. Aniqrog'i, ixtiyoriy $\varepsilon>0$, $(\varepsilon<b-a)$ uchun *f(x)* funksiya $[a;b-\varepsilon]$ da chegaralangan va integrallanuvchi bo'lib, b

nuqtaning atrofidagina chegaralanmagan bo'lsin. Bu holda b nuqta *f(x)* funksiyaning *maxsus nuqtasi* deb ataladi.

Demak, ixtiyoriy t $(a<t<b)$ uchun $\int_a^t f(x)dx$ integral mavjud bo'lib, u faqat t o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t),\ a<t<b.$$

11.22-ta'rif. $F(t)$ funksiyaning $t\to b-0$ dagi limit holatiga chegaralanmagan *f(x)* funksiyaning $[a;b)$ oraliqdagi xosmas integrali deyiladi va u $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Agar $t\to b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib, u chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, *f(x)* funksiya esa $[a;b)$ da integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

Agar $t\to b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Yuqorida limit mavjud bo'lmagan holda ham biz xosmas integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0} F(t) = \lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)dx$$

Xuddi yuqoridagidek, a nuqta *f(x)* ning maxsus nuqtasi bo'lganda $(a;b]$ oraliq bo'yicha xosmas integral ta'riflanadi.

f(x) funksiya $(a;b]$ oraliqda berilgan bo'lib, a nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo'lsin. Bu funksiya $(a;b]$ ning istalgan $[t;b]$ $(a<t<b)$ qismida integrallanuvchi, ya'ni ushbu

$$\int_t^b f(x)dx = F(t)$$

integral mavjud bo'lsin.

11.23-ta'rif. $F(t)$ funksiyaning $t\to a+0$ dagi limit holatiga chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $(a;b]$ oraliqdagi xosmas integrali deb ataladi va u $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Agar $t\to a+0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi, $f(x)$ esa $(a;b]$ da integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Agar $t\to a+0$ da $F(t)$ ning limiti cheksiz bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Yuqoridagi limit mavjud bo'lmagan holda ham biz integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Demak,

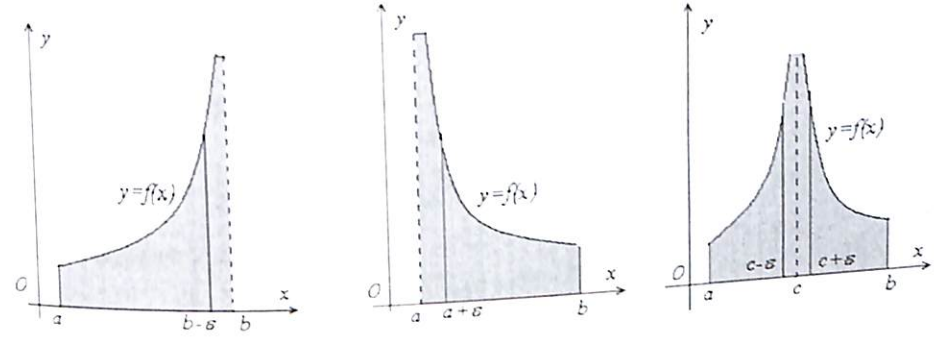
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+0} F(t) = \lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx.$$

Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmaning biror ichki c nuqtasida $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ bo'lsa, u holda aniq integralning additivlik xossasiga o'xshash integralni ikkita integralning yig'indisi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{t\to c-0}\int_a^t f(x)dx+\lim_{\tau\to c+0}\int_\tau^b f(x)dx.$$

Agar tenglikning o'ng tomonidagi limitlar mavjud bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Geometrik nuqtai nazardan chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali $y=f(x)$ egri chiziq, y=0, $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan va $x\to b-0$ da ($x\to a+0$, $x\to c\pm0$) Oy o'qi yo'nalishida cheksiz cho'zilgan figuraning chekli yuzga ega ekanligini anglatadi (65-rasm).



65-rasm

11.24-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bunda $x=0$ nuqta integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasidir. Bu holda ta'rif bo'yicha

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt x}=\lim_{t\to0+0}\int_t^1\frac{dx}{\sqrt x}=\lim_{t\to0+0}2\sqrt x\Big|_t^1=\lim_{t\to0+0}(2-2\sqrt t)=2.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va uning qiymati 2 ga teng.

11.25-misol. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bunda $x=1$ nuqta integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasidir. Bu holda

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{t\to1-0}\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{t\to1-0}(-2\sqrt{1-x}\Big|_0^t=\lim_{t\to1-0}(-2\sqrt{1-t}+2)=2.$$

Demak, bu integral ham yaqinlashuvchi.

11.26-misol. $\int_0^1\frac{dx}{x}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{t\to0+0}\int_t^1\frac{dx}{x}=\lim_{t\to0+0}\ln|x|\Big|_t^1=\lim_{t\to0+0}(\ln1-\ln t)=+\infty,$$

ya'ni bu xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.27-misol. $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha \in$, $a<b$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ikki holni qaraymiz. 1-hol. $\alpha \neq 1$ bo'lsin. U holda

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{t\to b-0}\int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{t\to b-0}\int\limits_a^t (b-x)^{-\alpha}\,d(b-x) = -\lim_{t\to b-0}\left.\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^t =$$

$$= -\frac{1}{1-\alpha}\lim_{t\to b-0}\left((b-t)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha<1, \\ \infty, & \alpha>1. \end{cases}$$

2-hol. $\alpha=1$ bo'lsin. U holda

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{t\to b-0}\int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)} = -\lim_{t\to b-0}\ln|b-x|\Big|_a^t = -\lim_{t\to b-0}(\ln|b-t|-\ln|b-a|) = +\infty .$$

Demak, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ integral $\alpha<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \geq 1$ da uzoqlashuvchi bo'lar ekan.

6-§. Chegaralanmagan funksiya xosmas integralining xossalari

Quyida maxsus nuqtasi b bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ oraliq bo'yicha olingan $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integralining xossalarini keltiramiz. Bu xossalarni maxsus nuqtasi a bo'lgan funksiyaning $(a;b]$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integrallari uchun ham bayon qilish mumkin.

11.28-xossa. Agar $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ dagi xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'lsa, bu funksiyaning $[c;b)$, $(a<c<b)$ oraliq bo'yicha integrali ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bunda

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

11.29-xossa. Agar $\int\limits_a^b f(x)dx$ va $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy α, β sonlar uchun

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) \pm \beta\varphi(x))dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) \pm \beta\varphi(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx \pm \beta\int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

11.30-xossa. Agar $\int\limits_a^b f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lib, $[a;b)$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

11.31-xossa. Agar $\int\limits_a^b f(x)dx$ va $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lib, $[a;b)$ da $f(x) \leq \varphi(x)$ bo'lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \varphi(x)dx$ bo'ladi.

11.32-xossa. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a;b)$ da uzluksiz bo'lib, b esa ularning maxsus nuqtasi va $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, $x \in [a;b)$ bo'lsin. U holda

a) $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) $\int\limits_a^b f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol tariqasida 11.30-xossaning isbotini keltiramiz. Qolgan xossalar bevosita xosmas integral va uning yaqinlashuvchiligi ta'riflaridan kelib chiqadi.

Isbot. ◊ Aniq integralning xossalariga asosan $f(x) \geq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $t \in [a;b)$ uchun $\int\limits_a^t f(x)dx \geq 0$ bo'ladi. Bundan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)dx \geq 0$$

ekanligi kelib chiqadi. ◆

7-§. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integralini hisoblash

Endi chegaralanmagan funksiyaning xosmas integralini hisoblash bilan shug'ulanamiz.

a) Nyuton-Leybnits formulasi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b)$ da uzluksiz bo'lsin. Ma'lumki, bu holda shu oraliqda uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ mavjud bo'ladi.

Agar $x \to b-0$ da $F(x)$ ning chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limitni $F(x)$ ning b nuqtadagi qiymati deb qabul qilamiz, ya'ni $\lim\limits_{x \to b-0} F(x) = F(b)$.

Xosmas integral ta'rifi hamda aniq integrallar uchun Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)dx = \lim_{t \to b-0} (F(t)-F(a)) = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

ni topamiz. Bu esa, yuqoridagi kelishuv asosida, $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali uchun Nyuton - Leybnits formulasi o'rinli bo'lishini ko'rsatadi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

b) Bo'laklab integrallash.

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning har biri $[a;b)$ da uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega, b nuqta esa $v(x)u'(x)$ hamda $u(x)v'(x)$ funksiyalarning maxsus nuqtasi bo'lsin.

Agar $\int_a^b v(x)du(x)$ xosmas integral yaqinlashuvchi hamda ushbu $\lim\limits_{t \to b-0} u(t)v(t)$ limit chekli bo'lsa, u holda $\int_a^b u(x)dv(x)$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda $u(b)v(b) = \lim\limits_{t \to b-0} u(t)v(t)$.

c) O'zgaruvchini almashtirish.

$f(x)$ funksiya $[a;b)$ da berilgan bo'lib, b uning maxsus nuqtasi bo'lsin. $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integralni qaraylik. Ushbu integralda $x=\varphi(t)$ almashtirish bajaramiz, bunda $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta)$ oraliqda uzluksiz $\varphi'(t) > 0$ hosilaga ega hamda $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t \to \beta-0} \beta(t) = b$. Bu holda agar $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Yuqorida biz maxsus nuqtasi b bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integralini hisoblash usullarini ko'rib o'tdik. Bu usullarni maxsus nuqtasi a bo'lgan funksiyaning $(a;b]$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integralini hisoblashda ham qo'llash mumkin.

11.33-misol. $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ ni hisoblang.

Yechish. Ushbu integralda $x = \varphi(t) = t^2$ almashtirishni bajaramiz. Ravshanki, $\varphi(t)$ funksiya $(0;1]$ oraliqda $\varphi'(t)=2t>0$ uzluksiz hosilaga ega hamda $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. Demak,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt\Big|_0^1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Chegarasi cheksiz bo'lgan xosmas integraldagi kabi chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali uchun ham absolyut yaqinlashish tushunchasini kiritish mumkin.

$(a;b]$ da aniqlangan va a nuqta maxsus nuqtasi bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $\int_a^b |f(x)|dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ absolyut yaqinlashuvchi xosmas integral deyiladi, $f(x)$ funksiya esa $(a;b]$ da absolyut integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

Mashq va masalalar

Xosmas integralning qiymatini toping yoki uning uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsating (23-26):

11-23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$. 11-24. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

11-25. $\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$. 11-26. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

Xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring (27-30):

11-27. $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 11-28. $\int_0^4 \frac{\cos x}{\sqrt{4-x}}dx$.

11-29. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. 11-30. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$

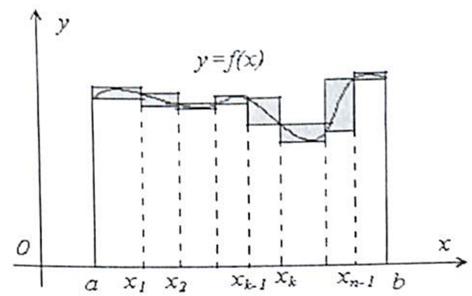
XII BOB. ANIQ INTEGRALLARNING TATBIQLARI

1-§. Yuzani hisoblash formulalalari

Faraz qilaylik, $x=a$, $x=b$, $y=0$ to'g'ri chiziqlar va $y=f(x)$ nomanfiy uzluksiz funksiya grafigi bilan chegaralangan D tekis figura berilgan bo'lsin. Biz shu figuraning yuzini hisoblaymiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmaning biror τ_n bo'linishini olamiz: $a=x_0<x_1<...<x_n=b$.

$f(x)$ ning $[x_{k-1},x_k]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m_k va M_k bo'lsin. Har bir $[x_{k-1},x_k]$ ga mos, asosi shu kesmadan iborat bo'lgan, balandliklari esa $y=m_k$ va $y=M_k$ bo'lgan ikkitadan to'g'ri to'rtburchaklar yasaymiz (66-rasm).

Barcha to'rtburchaklarning kichiklaridan (balandliklari m_k) iborat bo'lgan ko'pburchak D figuraga ichki chizilgan ko'pburchak bo'lib, katta to'rtburchaklardan iborat ko'pburchak tashqi chizilgan bo'ladi. Ularning yuzlari mos ravishda



66-rasm

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \underline{S}(\tau_n), \quad \sigma'=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}(\tau_n)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya uzluksiz, bundan uning integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Demak,

$$\sup\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(\tau_n)=\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(\tau_n)=\inf\sigma' \quad (\lambda=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k),$$

ya'ni D figura (egri chiziqli trapetsiya) kvadratlanuvchi va uning yuzi

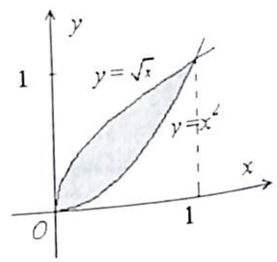
$$S=\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Agar yuqoridagi D figura quyidan $y=0$ to'g'ri chiziq o'rniga $y=\varphi(x)$ $(\varphi(x)\le f(x),\ x\in[a;b])$ chiziq bilan chegaralangan bo'lib, $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, u holda

$$S=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx$$

bo'ladi.



67-rasm

12.1-misol. $y=x^2$ va $x=y^2$ chiziqlar bilan chegaralanagan figuraning yuzini toping.

Yechish. Berilgan figura yuqoridan $y=\sqrt{x}$, $0\le x\le 1$ chiziq bilan, quyidan esa $y=x^2$, $0\le x\le 1$ chiziq bilan chegaralangan (67-rasm). Shuning uchun

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Egri chiziqli trapetsiyadagi egri chiziq parametik usulda $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ berilgan bo'lsin, bunda $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $[\alpha;\beta]$ kesmada $\psi(t)$ uzluksiz, $\varphi(t)$ esa monoton va uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega deb faraz qilamiz. O'zgaruvchini almashtirish qoidasiga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

12.2-misol. $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ ellipsning yuzini hisoblang.

Yechish. Avval ellipsning chorak qismining yuzini topamiz:

$$\frac{S}{4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=\frac{ab}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi ab}{4}.$$

Demak, $S=\pi ab$.

12.3-misol. Ox o'qi va $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ sikloidaning bir arkasi bilan chegaralangan figura yuzini hisoblang.

Yechish. (1) formulaga ko'ra

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=$$
$$=a^2\Big(\int_0^{2\pi}dt-2\int_0^{2\pi}\cos t dt+\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt\Big)=a^2\Big((t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt\Big)=a^2\Big(2\pi+\frac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Bigg|_0^{2\pi}\Big)=3\pi a^2.$$

2-§. Qutb koordinatalar sistemasida figuraning yuzini hisoblash

Qutb koordinatalar sistemasida tenglamasi $r=r(\varphi)$ bo'lgan l egri chiziq, $\varphi=\alpha$ va $\varphi=\beta$ nurlar bilan chegaralangan figura yuzini hisoblash talab qilinsin.

Bu figurani to'g'ri figura, ya'ni boshi O nuqtada bo'lgan $\varphi=\varphi^*$ nur $(\alpha\le\varphi^*\le\beta)$ $r=r(\varphi)$ chiziqni ko'pi bilan bitta nuqtada kesib o'tadi deb faraz qilamiz. Shuningdek, $r=r(\varphi)$ funksiyani $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz deb qaraymiz.

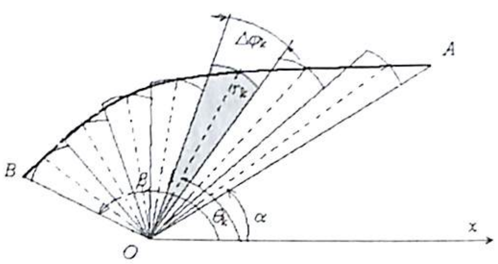
Egri chiziqli OAB sektorning yuzini hisoblash uchun integral yig'indi tuzish, keyin esa limitga o'tishdan iborat algoritmdan foydalanamiz.

1. $[\alpha,\beta]$ ni n ta qism kesmalarga bo'lamiz va $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_n=\beta$, $\Delta\varphi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$ belgilash kiritamiz. U holda OAB egri chiziqli sektor n ta egri chiziqli qism sektorlarga ajraladi.

2. Har bir $[\varphi_{k-1},\varphi_k]$, $k=\overline{1,n}$ qism kesmadan ixtiyoriy ravishda θ_k nuqtani tanlab olamiz va $r(\varphi)$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$r_k = r(\theta_k)$, $k=\overline{1,n}$

3. Har bir $[\varphi_{k-1},\varphi_k]$ qism kesmada $r=r(\varphi)$ funksiyani o'zgarmas va qiymati $r_k = r(\theta_k)$ ga teng deb qaraymiz. Bu holda egri chiziqli qism sektorni radiusi $r_k = r(\theta_k)$, markaziy burchagi $\Delta\varphi_k$ bo'lgan doiraviy sektor bilan almashtiramiz (68-rasm).



68-rasm

Bunday doiraviy sektor yuzi $\Delta S_k = \dfrac{1}{2} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k$ formula bilan hisoblanadi.

Egri chiziqli OAB sektorning S yuzini taqriban n ta doiraviy qism sektorlardan tuzilgan figura yuziga teng deb qarash mumkin:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k \qquad (1)$$

(1) taqribiy tenglik $[\varphi_{k-1},\varphi_k]$ kesmalar qanchalik kichik bo'lsa, shunchalik aniq bo'ladi. (1) ning o'ng tomoni $\dfrac{1}{2} r^2(\varphi)$ uzluksiz funksiya uchun integral yig'indi bo'ladi.

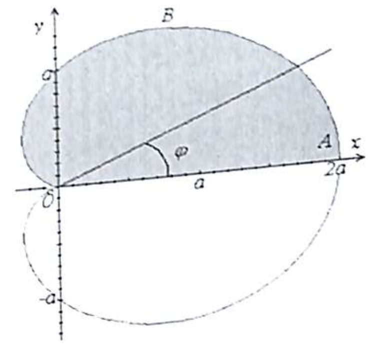
4. OAB egri chiziqli sektorning yuzi S deb integral yig'indining $\lambda = \max\limits_{[\alpha;\beta]} \Delta\varphi_k \to 0$ dagi limit qiymatini qabul qilamiz:

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

Shunday qilib, egri chiziqli sektorning yuzi quyidagi formula bilan hisoblanar ekan.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \quad (2)$$

12.4-misol. $r = a(1+\cos\varphi)$ kardioida bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang (69-rasm).



69-rasm

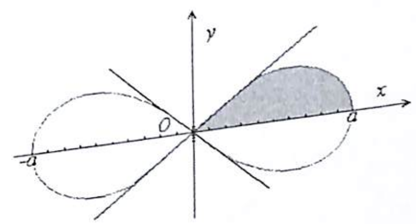
Yechish. Kardioida qutb o'qiga nisbatan simmetrik, demak uning yuzi ABO egri chiziqli sektor yuzining ikkilanganligiga teng bo'ladi. ABO egri chiziqli sektor $r = a(1+\cos\varphi)$ chiziq, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ nurlar bilan chegarlangan.

(2) formulaga ko'ra

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2})d\varphi =$$

$$= a^2(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

12.5-misol. $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniskata bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.



70-rasm

Yechish. $\sqrt{\cos 2\varphi}$ funksiya $[0;2\pi]$ ning faqatgina $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ va $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ qismlarida aniqlangan (70-rasm). Bu figura qutb boshi va qutb o'qiga nisbatan simmetrik. Shuning uchun

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Mashq va masalalar

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzini hisoblang:

12-1. $y = sinx, y = 2sinx, x = 0, x = \frac{7}{4}\pi.$

12-2. $y = x^2,\ y = \frac{1}{x^2},\ y = 0, x = 0, x = 3.$

12-3. $y^2 = 2x + 1, y = x - 1.$

12-4. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6,\ y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$

12-5. $y = x^2,\ y = 2x,\ y = x.$

12-6. $y = x^3 - 3x, y = x.$

12-7. $y = x^2 - 2x + 3,\ y = 3x - 1.$

12-8. $y = arcsinx, \pi x = 2y.$

12-9. $xy = 8, y = 8x^3, y = 27.$

12-10. $y^2 = (4 - x)^3,\ x = 0.$

12-11. $(y - x)^2 = x^3,\ x = 1.$

12-12. $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = 3 + 2\sin t. \end{cases}$ 12-13. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases}$

12-14. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$ 12-15. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1\ (x \geq 1).$

12-16. $\begin{cases} x = cos^3 t \\ y = sin^3 t, \end{cases} t \in [0{:}2\pi].$

12-17. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ sikloidaning birinchi arkasi va $y = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziq bilan. $(0 < x < 2\pi).$

12-18. $r = 5\cos\varphi.$ 12-19. $r = \sqrt{3}\sin\varphi.$

12-20. $r = 3(1 + \sin\varphi).$ 12-21. $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}.$

12-22. $r = a\cos 2\varphi, a > 0$ atirgulning bir yopirog‘i bilan.

12-23. $r = 2a(1 - \cos\varphi), a > 0$ kardioida bilan.

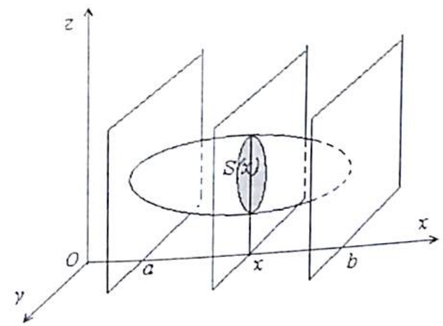
12-24. $r = 2 + \cos\varphi$ Paskal chig‘onog‘i bilan.

3-§. Fazoviy jism hajmini hisoblash

3.1. Ko‘ndalang kesimi ma’lum bo‘lgan jism hajmini hisoblash.

Aytaylik, yopiq sirt bilan chegaralangan T jism berilgan bo‘lib, uning biror to‘g‘ri chiziqqa, masalan, abssissalar o‘qi Ox ga, perpendikulyar tekislik bilan ixtiyoriy kesimining yuzi ma’lum bo‘lsin. Bunday kesim *ko‘ndalang kesim* deyiladi. Ko‘ndalang kesim uning Ox o‘q bilan kesishish nuqtasining abssissasi x bilan aniqlanadi.

Umuman olganda, x o‘zgarishi bilan ko‘ndalang kesim yuzi S o‘zgaradi, ya’ni x o‘zgaruvchining funksiyasi bo‘ladi. Uni $S(x)$ bilan belgilaymiz. $S(x)$ funksiyani $[a,b]$ kesmada uzluksiz deb qaraymiz, bu yerda a va b berilgan T jismning cheti (chegaraviy) kesimlari abssissalari (71-rasm).



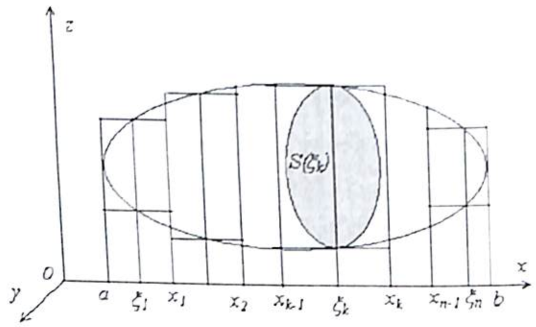
71-rasm

T jismning V hajmini hisoblash uchun integral yig‘indini tuzish va limitga o‘tishdan iborat algoritmdan foydalanamiz.

1. $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta qism kesmalarga ajratamiz. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta x_k,\ k = \overline{1,n}$ belgilashlar kiritamiz. Bo‘lish nuqtalari x_k orqali Ox o‘qqa perpendikulyar tekisliklar o‘tkazamiz. $x = x_k\ \ k = \overline{1,n}$ tekisliklar oilasi T jismni har birining qalinligi $\Delta x_k,\ k = \overline{1,n}$ bo‘lgan qatlamlarga ajratadi (72-rasm).

2. Har bir $[x_{k-1},x_k]$, $k=\overline{1,n}$ qism kesmadan ixtiyoriy ravishda ξ_k nuqta tanlab olamiz va $S(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi $S(\xi_k)$ qiymatini hisoblaymiz.

3. Har bir $[x_{k-1},x_k]$ qism kesmada $S=S(x)$ funksiya o'zgarmas va qiymati $S(\xi_k)$ ga teng deb faraz qilamiz. U holda T jismning har bir qatlamida asosi $S(\xi_k)$ va yasovchisi Ox o'qqa paralel to'g'ri silindrni qarash mumkin. Bu qism to'g'ri silindrning balandligi Δx_k, hajmi $\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k$ formula bilan hisoblanadi.



72-rasm

T jismning hajmi V taqriban n ta pog'onali qism silindrlardan tashkil topgan figura hajmiga teng bo'ladi:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k .$$

Ravshanki, $\lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta x_k$ qanchalik kichik bo'lsa, taqribiy tenglik shunchalik aniq bo'ladi.

Izlanayotgan hajmning qiymati deb

$V = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$ ni qabul qilamiz.

Limit ostidagi ifoda $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $S(x)$ funksiyaning integral yig'indisi bo'lganligi sababli

$V = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b S(x)dx$ bo'ladi.

Shunday qilib, $x=a$ va $x=b$ tekisliklar orasida joylashgan jism hajmi, agar Ox o'qqa perpendikulyar kesim yuzi ma'lum $S=S(x)$, $x\in[a,b]$ funksiya bo'lsa,

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi.

12.6-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoid bilan chegaralangan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Agar ellipsoidni $x=h$ tekislik bilan kesib o'tsak, kesimda $\frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{h^2}{a^2})}=1$ ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari $b\sqrt{1-h^2/a^2}$ va $c\sqrt{1-h^2/a^2}$ ga teng bo'lib, yuzi $S=S(h)=\pi bc\,(1-\frac{h^2}{a^2})$ ga teng bo'ladi. (1) formulaga ko'ra izlanayotgan hajm

$$V=\int_{-a}^{a} S(h)dh=\int_{-a}^{a}\pi bc(1-\frac{h^2}{a^2})dh=\pi bc(h-\frac{h^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc .$$

Xususan, $a=b=c=r$ bo'lganda radiusi r ga teng shar hosil bo'ladi va uning hajmi $\frac{4}{3}\pi r^3$ bo'ladi.

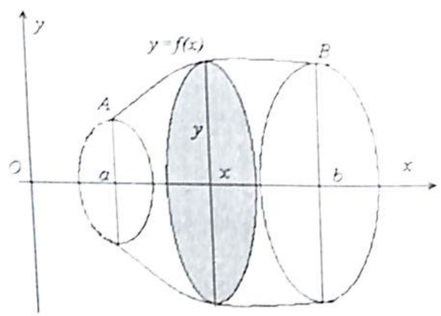
3.2. Aylanma jism hajmini hisoblash. Ox o'q atrofida $aABb$ egri chiziqli trapetsiyani aylantirishdan hosil bo'lgan jismni qaraymiz. Bunda $aABb$ trapetsiyani $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan deb $y=f(x)$ egri chiziq, Ox o'qi, $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan deb qaraymiz (73-rasm). Agar bu jismga Ox o'qqa perpedikulyar tekisliklar bilan kesib o'tsak, kesimda radiusi $y=f(x)$ ning moduliga teng bo'lgan doiralar hosil bo'ladi. Demak, bu holda ko'ndalang kesim yuzi

$S(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2$ bo'ladi.

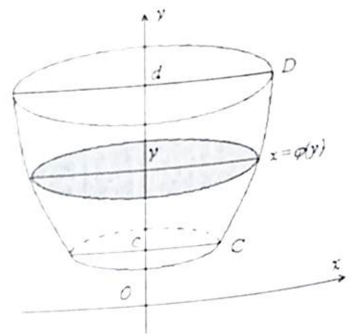
Aylanma jism hajmini hisoblash uchun (1) dan foydalanamiz:

Agar jism $cCDd$ trapetsiyani Oy o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan bo'lsa (74-rasm), u holda uning hajmi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d(\varphi(y))^2dy,$$ bu yerda $x=\varphi(y)$, $y\in[c,d]$ CD chiziq tenglamasi.



73-rasm



74-rasm

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b(f(x))^2dx \qquad (2)$$

12.7-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsni Ox o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. (2) formulaga ko‘ra

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\int_{-a}^{a}\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-a}^{a}=$$
$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^3-\frac{a^3}{3})=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

12.8-misol. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ sikloida arkasini Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan figura hajmini toping.

Yechish. (2) formuladan foydalanamiz. Bunda $0\le x\le 2\pi a$ bo‘ladi. Demak, $V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx$. Bu integralda o‘zgaruvchilarni almashtiramiz. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ deb olamiz, u holda $dx=a(1-\cos t)dt$ bo‘ladi. Agar $x_1=0$ bo‘lsa,

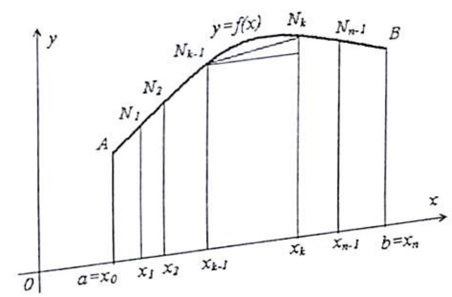
$t_1=0$, $x_2=2\pi a$ bo‘lsa, $t_2=2\pi$ bo‘ladi. Bularni e’tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)dt=$$
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2t-\cos^3t)dt=$$
$$=\pi a^3((t-3\sin t)\Big|_0^{2\pi}+3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\int_0^{2\pi}(1-\sin^2t)d(\sin t))=$$
$$=\pi a^3(2\pi+\left(\frac{3}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})-\sin t+\frac{\sin^3t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=5\pi^2a^3.$$

4-§. Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash

4.1. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida yassi yoy uzunligini hisoblash. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va l shu funksiya grafigi bo‘lsin. (75-rasm). Yassi l egri chiziqning uzunligini topish talab qilinsin. Yassi l egri chiziqning uzunligini s bilan belgilaymiz.

Avval AB yoyini uzunligi deganda nimani tushunishni aniqlab olamiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ nuqtalar yordamida n-ta bo‘lakka bo‘lamiz.



75-rasm

$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$ belgilash kiritamiz. Har bir x_i, $i=\overline{1,n}$ nuqtadan Oy o‘qqa l chiziq bilan kesishganga qadar parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Bu holda AB yoy n ta bo‘lakka bo‘linadi. l chiziqning qo‘shni bo‘linish nuqtalarini kesma (vatar) bilan tutashtiramiz va $AN_1N_2...N_{n-1}B$ siniq chiziq hosil qilamiz. Shu siniq chiziqning uzunligini l_n bilan belgilaymiz.

Demak,

$$l_n = |AN_1| + |N_1N_2| + ... + |N_{n-1}B| = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k \cdot$$

bu yerda $\Delta l_k - N_{k-1}N_k$ yoyga tiralgan vatar uzunligi.

Siniq chiziqning uzunligi AB yoy uzunligining taqribiy qiymati bo'ladi ($l \approx l_n$). Ravshanki, agar $[a,b]$ kesmaning bo'linish nuqtalari soni n ni (qism kesma uzunliklari eng kattasining uzunligi nolga intiladigan qilsak) ortirsak, u holda siniq chiziqning uzunligi AB yoy uzunligiga intiladi deb qabul qilish tabbiiydir.

Agar $\lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta x_k \to 0$ da l_n chekli limitga ega bo'lsa, u holda bu limit l *yoyning uzunligi* deyiladi, egri chiziq bu holda *to'g'rilanuvchi* deb ataladi:

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k \qquad (1)$$

Agar chekli limit mavjud bo'lmasa, yoy uzunligi mavjud emas, chiziq esa *to'g'rilanmaydigan* deyiladi.

Endi, agar *f(x)* funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda l – to'g'rilanuvchi ekanligini ko'rsatamiz va uning uzunligini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

$\overline{N_{k-1}N_k}$ vatar uzunligini hisoblaymiz. $N_{k-1}(x_{k-1},y_{k-1})$, $N_k(x_k,y_k)$ bo'lganligi sababli

$$\Delta l_k = |\overline{N_{k-1}N_k}| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + (\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k})^2}\Delta x_k \text{ bo'ladi.}$$

Lagranj teoremasiga ko'ra

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k) \cdot$$

Demak,

$$\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k \cdot$$

Olingan natijani (1) ga qo'yamiz.

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k \qquad (2)$$

(2) formulaning o'ng tomonida $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ funksiyaning $[a,b]$ dagi integral yig'indisi yozilgan. Bu funksiya uzluksiz bo'lganligi sababli integral yig'indining limiti mavjud va shu limit $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ funksiyaning $[a,b]$ dagi aniq integraliga teng bo'ladi.

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx\,.$$

Shunday qilib, agar *f(x)* funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda AB yoy to'g'irlanuvchi va uning uzunligi s quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \qquad (3)$$

12.9-misol. $x^2 + y^2 = R^2$ aylana uzunligini hisoblang.

Yechish. Avval aylananing I chorakdagi qismi uzunligini topamiz. Aylananing bu yoyi tenglamasi $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \le x \le R$ bo'ladi.

Bundan $y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Demak (3) formulaga ko'ra

$$\frac{1}{4}s = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = R \cdot \frac{\pi}{2}\,.$$

Shunday qilib, aylana uzunligi $s = 2\pi R$ ga teng.

4.2. Parametrik ko'rinishda berilgan yoy uzunligini hisoblash.

Egri chiziq tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, bu yerda *x(t)*, *y(t)* – uzluksiz hosilaga ega va $[t_1, t_2]$ da $x'(t) \ne 0$.

(3) formuladan foydalanish uchun avval o'zgaruvchini almashtiramiz.

$x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$, $y'_x = y'_t / x'_t$. U holda

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2}\, x'(t)dt$$

yoki

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt . \qquad (4)$$

12.10-misol. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ sikloida arkasi uzunligini hisoblang.

Yechish. $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt =$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

4.3. Qutb koordinatalar sistemasida yoy uzunligi. Egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. $r(\varphi)$ va $r'(\varphi)$ larni $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz deb faraz qilamiz. Bu chiziqni parametrik ko‘rinishda yozamiz:

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

x va y dan φ bo‘yicha hosilalarni hisoblaymiz:

$$\left.\begin{aligned} x'_\varphi &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y'_\varphi &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r^2 + (r')^2.$$

Demak,

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi . \qquad (5)$$

12.11-misol. $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardioida uzunligini hisoblang.

Yechish. Burchak 0 dan π gacha o‘zgarganda izlanayotgan yoyning yarimini hosil qilamiz. (5) dan foydalanamiz: $r' = -a\sin\varphi$, $r^2 + (r')^2 = a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = 2a^2(1 + \cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

$$s = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a.$$

4.4. Yoy differensiali. Yoy uzunligi $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ formulasida integrallashning quyi chegarasi o‘zgarmas, yuqori chegarasi esa o‘zgaruvchi deb faraz qilaylik. Yuqori chegarani x bilan integrallash o‘zgaruvchisini t bilan belgilaylik. Bu holda yoy uzunligi yuqori chegaraning funksiyasi bo‘ladi:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

Yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integralning hosilasi haqidagi teoremaga ko‘ra $s(x)$ funksiya differensiallanuvchi, uning hosilasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$s'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} .$$

Bundan yoy differensiali uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$ds = s'(x)dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

Demak, yoy differensiali yordamida yoy uzunligini hisoblash uchun ushbu $s = \int_a^b ds$ formulani hosil qilishimiz mumkin.

Agar $y' = \frac{dy}{dx}$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$ds = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} ,$$

ya’ni

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

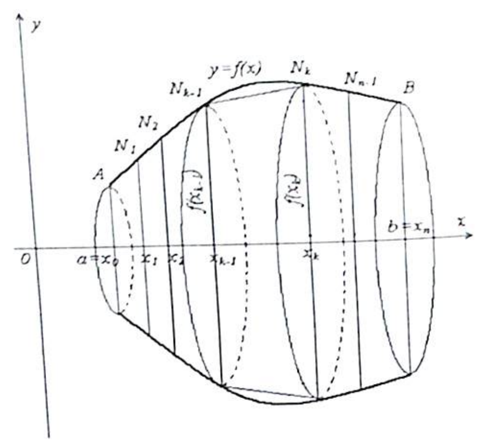
(Pifagor teoremasining analogi) hosil bo‘ladi.

5-§. Aylanma sirt yuzini hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, nomanfiy, va uzluksiz hosilaga ega bo'lsin. Uning grafigi bo'lgan AB egri chiziqni Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida aylanma sirt hosil bo'ladi (76-rasm). Shu sirtning yuzini aniq integral yordamida aniqlaymiz. Buning uchun $[a;b]$ ning biror bo'linishini olamiz:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b.$$

Bo'linish nuqtalaridan Oy o'qqa paralel to'g'ri chiziqlarni o'tkazib, ularni AB yoygacha davom ettiramiz. Buning natijasida AB yoy ham $N_k(x_k;f(x_k))$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'linadi. Endi $A=N_0, N_1, ..., N_n=B$ nuqtalarni ketma-ket tutashtirib, siniq egri chiziq hosil qilamiz.



76-rasm

AB yoyni Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil bo'ladigan aylanma sirtning yuzi deb siniq chiziqni Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan sirt yuzining $N_{k-1}N_k$ vatarlar eng kattasining uzunligi nolga intilgandagi limitini qabul qilamiz.

Ma'lumki,

$$|N_{k-1}N_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

vatar uzunligi nolga intilganda $\Delta x_k \to 0$ va aksincha. Shuning uchun kelgusida limitni

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$$

uchun ko'rib o'tamiz. $N_{k-1}N_k$ vatarni Ox o'qi atrofida aylantirganda kesik konus sirti hosil bo'ladi va uning yuzi

$$S_k = \frac{2\pi f(x_{k-1}) + 2\pi f(x_k)}{2}|N_{k-1}N_k|$$

Shu tarzda hosil qilingan yuzlarning n tasini qo'shsak, siniq chiziq yordamida hosil qilingan sirt yuzi P_n kelib chiqadi:

$$P_n = 2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\Delta l_k, \quad \Delta l_k = |N_{k-1}N_k|.$$

Uni boshqacha ko'rinishda yozish mumkin:

$$P_n = 2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\Delta s_k - 2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(\Delta s_k - \Delta l_k),$$

bunda Δs_k mos ravishda N_{k-1} va N_k nuqtalar orasidagi yoy uzunligi.

Ma'lumki, $\Delta x_k \to 0$ da $\Delta s_k \to 0$ Shuningdek, $\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$ bo'linma $f(x_{k-1})$ va $f(x_k)$ lar orasidagi son bo'lib, $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lganidan, shunday $\xi_k \in (x_{k-1};x_k)$ mavjudki,

$$\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = f(\xi_k)$$

bo'ladi. $M = \max_{a\le x\le b} f(x)$ deb belgilaylik. $\lambda \to 0$ da P_n ning tarkibidagi ikkinchi qo'shiluvchi

$$0 \le 2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(\Delta s_k - \Delta l_k) = 2\pi\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\Delta s_k - \Delta l_k) \le$$

$$\le 2\pi M\sum_{k=1}^{n}(\Delta s_k - \Delta l_k) = 2\pi M\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k - \sum_{k=1}^{n}\Delta l_k\right) \to 0,$$

chunki

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = L$$

(yuqoridagi shartlarda AB yoyning to'g'rilanuvchiligi nazarda tutilgan).

Demak,

$$\lim_{\lambda\to 0} P_n = 2\pi \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta s_k = 2\pi\int_a^b f(x)ds$$

bo'ladi, ya'ni aylanma sirtning yuzi

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)ds = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

formula bilan ifodalanadi.

Agar to'g'rilanuvchi yoy tenglamasi $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lib, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ lar uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda sirtning yuzi

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt$$

bo'ladi. Shunga o'xshash, agar egri chiziq

$$r = f(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta$$

tenglama bilan berilgan bo'lib, $f'(\theta)$ uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta f(\theta)\sin\theta\sqrt{f^2(\theta)+f'(\theta)^2}d\theta$$

formulani keltirib chiqaramiz.

12.12-misol. Radiusi R bo'lgan sfera sirtining yuzini toping.

Yechish. I usul. Aylana tenglamasi parametrik ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi\end{cases}$$

chorak aylanani Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida yarim sfera hosil bo'ladi. Bu holda $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ bo'ladi, shuning uchun

$$\frac{S}{2} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}dt = 2\pi R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt = -2\pi R^2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2$$

Demak, $S = 4\pi R^2$.

II usul. Qutb koordinatalar sistemasida aylana tenglamasi $r = R,\ 0\le\theta\le 2\pi$. Shuning uchun

$$\frac{S}{2} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\theta\sqrt{R^2+0^2}d\theta = 2\pi R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta = 2\pi R^2,\quad S = 4\pi R^2.$$

Mashq va masalalar

12-25. R radiusli shar hajmini toping.

12-26. Asosining radiusi R va balandligi H bo'lgan konus hajmini toping.

12-27. $z = x^2$ parabolik silindar va $y = 0, y = 6, z = 1$ tekisliklar bilan chegaralangan jism hajmini toping.

12-28. $z = 1 - y^2$ parabolik silindar va $y = 0, z = 0, x = 0, x = 12$ tekisliklar bilan chegaralangan jism hajmini toping.

12-29. $z = x^2 + y^2$ paraboloid va $z = 4$ tekislik bilan chegaralangan jism hajmini toping.

12-30. $x^2 + y^2 + 4z^2 \le 4$ ellipsoid hajmini toping.

12-31. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ sharning $y = 1$ va $y = 4$ tekisliklar bilan kesib olingan qatlamining hajmini toping.

12-32. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ bir pallali giperboloid va $z = 0, z = 3$ tekisliklar bilan chegaralangan jism hajmini toping.

Aylanma jism hajmini hisoblang:

12-33. $y = x^3, x = 0, y = 8$ figurani Ox o'qi atrofida.

12-34. $y = \frac{2}{1+x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$ figurani Ox o'qi atrofida.

12-35. $y^2 = (x+1)^3,\ x = 0$ figurani Oy o'qi atrofida.

12-36. $y^2 = 16 - x, x = 0$ figurani Oy o'qi atrofida.

12-37. $y = \sqrt{x}e^{x}, x = 0, x = \ln 2$ figurani Ox o'qi atrofida.

12-38. $y = 2\sin x, 0 \le x \le \pi$ figurani Ox o'qi atrofida.

12-39. $y^2 = 4x, y^2 = x^3$ figurani Ox o'qi atrofida.

12-40. $y^2 = 6x, y = \sqrt{6}x^2$ figurani Ox o'qi atrofida.

Yoy uzunligini hisoblang:

12-41. $y = -x^2 + 2x$ uchidan abssissasi $x = 2$ bo'lgan nuqtagacha.

12-42. $y^2 = \frac{x^3}{6}$ abssissasi $x = 6$ bo'lgan nuqtagacha.

12-43. $y = \ln x$, $x = \sqrt{8}$ dan $x = \sqrt{15}$ gacha.

12-44. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2}$, Ox o'qi bilan ajratilgan qismi.

12-45. $\frac{3}{2}x = y^{\frac{3}{2}}$, $O(0;\ 0)$ nuqtadan $A(2\sqrt{3};\ 3)$ nuqtagacha.

12-46. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ abssissalari 0 va a bo'lgan nuqtalari orasidagi bo'lagi

12-47. Astroida uzunligini toping: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$

12-48. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ (bir arkasi).

12-49. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$

12-50. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}.$

12-51. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $t = 0$ dan $t = \frac{\pi}{2}$ gacha.

12-52. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ $t = 0$ dan $t = 1$ gacha.

12-53. $r = \sqrt{2}\sin\varphi$.

12-54. $r = 3{,}5(1 - \cos\varphi)$.

12-55. $r = \frac{1}{\varphi}$ $\varphi = \frac{3}{4}$ dan $\varphi = \frac{4}{3}$ gacha.

12-56. $r = 5\varphi, r = 10\pi$ aylana ichidagi qismi.

12-57. $r = 6(1 + \sin\varphi), \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} : 0\right]$.

12-58. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Aylanma sirt yuzini hisoblang:

12-59. $y^2 = 2x, x \in [0; 4]$ parabola yoyi Ox o'qi atrofida.

12-60. $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$ sinusoida yoyi Ox o'qi atrofida.

12-61. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips Ox o'qi atrofida.

12-62. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips Oy o'qi atrofida.

12-63. $r = 4\sin\varphi$ aylana qutb o'qi atrofida.

12-64. $r = 2\cos\varphi$ aylana qutb o'qi atrofida.

6-§. Aniq integralning fizik masalalarni yechishga tatbiqi

6.1. O'zgaruvchan kuch ishini hisoblash. Aytaylik, moddiy nuqta biror o'zgaruvchan $\vec{F}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakat qilsin. Bu nuqtaning ko'chishini $\vec{s}$ vektor orqali belgilaymiz va kuchning yo'nalishi ko'chish yo'nalishi bilan bir xil bo'lsin deb faraz qilamiz. $|\vec{F}|$ va $|\vec{s}|$ orqali $\vec{F}$ va $\vec{s}$ vektorlarning uzunligini belgilaymiz.

Agar $\vec{F}$ o'zgarmas bo'lsa, u holda mexanikadan ma'lumki, bajarilgan ish $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$ ga teng bo'ladi.

Endi $\vec{F}$ yo'nalishni saqlagan holda modul bo'yicha o'zgaruvchan bo'lgan holni qaraymiz. Shu kuch bajargan ishni hisoblaymiz. Ox o'qi deb moddiy nuqta harakatlanayotgan to'g'ri chiziqni qabul qilamiz. Aytaylik, yo'nalishning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari abssissalari mos ravishda a va b ($a < b$) bo'lsin. $[a, b]$ kesmaning har bir nuqtasida kuch moduli ma'lum qiymat qabul qiladi va x ning funksiyasi, ya'ni $\vec{F} = F(x)$ bo'ladi.

$F(x)$ funksiyani uzluksiz deb hisoblaymiz. O'zgaruvchan kuch bajargan ishini hisoblash uchun integral yig'indini tuzish va limitga o'tishga asoslangan algoritmdan foydalanamiz.

1. $[a,b]$ kesmani x_k, $k=\overline{1,n}$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz: $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$. $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$ belgilash kiritamiz, u k-inchi qism kesma uzunligiga teng. Ma'lumki, butun yo'ldagi ishni A bilan, $[x_{k-1},x_k]$ qism kesmada bajarilgan ishni A_k bilan belgilab, quyidagiga ega bo'lamiz: $A=\sum_{k=1}^{n}A_k$.

Agar $[x_{k-1},x_k]$ ni yetarlicha kichik qilib olsak, u holda har bir bunday kesmada $|\vec{F}|\approx const$ deb qarash mumkin.

2. Har bir $[x_{k-1},x_k]$ qism kesmadan ixtiyoriy ξ_k nuqtani tanlab olamiz va $F(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz.

3. Har bir qism kesmada kuchning moduli o'zgarmas qiymatga ega va $F(x)$ funksiyaning ξ_k nuqtadagi qiymatiga teng deb faraz qilamiz: $|\vec{F}|=F(\xi_k)$. Bu holda kuchning $[x_{k-1},x_k]$ kesmadagi ishi $\Delta A_k=|\vec{F}|\Delta x_k=F(\xi_k)\Delta x_k$ bo'ladi.

O'zgaruvchan kuchning butun yo'ldagi ($[a,b]$ da) ishi uchun

$$A\approx\sum_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}F(\xi_k)\Delta x_k$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

4. $\lambda=\max_{[a,b]}\Delta x_k\to 0$ dagi A_n ning limiti mavjud bo'ladi (chunki $F(x)$ farazga ko'ra uzluksiz) va o'zgaruvchan kuchning a nuqtadan b nuqtagacha bo'lgan to'g'ri chiziqli yo'ldagi ishini ifodalaydi:

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}F(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b F(x)dx \qquad (1)$$

12.13-misol. Agar prujinani 0,05 m ga cho'zish uchun 2 H kuch sarf qilinsa, u holda bu prujinani 0,1 m ga cho'zish uchun bajariladigan ishni hisoblang.

Yechish. Guk qonuniga ko'ra prujinani cho'zuvchi (siquvchi) kuch moduli $|\vec{F}|$ shu cho'zishga (siqishga) proporsional bo'ladi, ya'ni $|\vec{F}|=kx$, bu yerda x-cho'zilish (siqilish) kattaligi. Shartga ko'ra 2=k·0,05, bundan $k=40$. (1) formulaga ko'ra

$$A=\int_0^{0,1}40xdx=20x^2\Big|_0^{0,1}=0,2J.$$

6.2. O'zgaruvchan quvvatli elektrodvigatel ishini hisoblash. Endi ishni topishga doir boshqa masalani qaraymiz. Dvigatelning $\Delta t=[a,b]$ vaqt oralig'ida bajargan ishini hisoblaymiz, bunda uning t vaqtdagi quvvati ma'lum va $N(t)$ ga teng qaraymiz.

Yuqoridagi algoritmdan foydalanamiz:

1. $[a,b]$ kesmani n ta bo'lakka ajratamiz: $[t_{k-1}, t_k]$, $k=\overline{1,n}$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

2. Har bir $[t_{k-1}, t_k]$ qism kesmadan ixtiyoriy τ_k nuqtani tanlaymiz.

3. Har bir qism kesmada quvvatni o'zgarmas va $N(\tau_k)$ ga teng deb qaraymiz.

U holda

$$A\approx A_n=\sum_{k=1}^{n}N(\tau_k)\Delta t_k.$$

$N(t)$ funksiyani uzluksiz deb qaraymiz va $\lambda=\max_{[a,b]}\Delta t_k\to 0$ da limitga o'tamiz.

Natijada

$$A=\int_a^b N(t)dt \qquad (2)$$

formulaga ega bo'lamiz.

12.14-misol. $[0,\frac{2\pi}{\omega}]$ vaqt oralig'ida o'zgaruvchi tok bajargan ish va o'rtacha quvvatini hisoblang.

Bunda tok kuchi $I=I_0\sin\omega t$ formula bilan aniqlanadi (I_0- tokning maksimal qiymati, ω -doiraviy chastota, t-vaqt, zanjir qarshiligi R-ga teng)

Yechish. Ma'lumki, o'zgarmas tok kuchining quvvati $N=I^2R$ formula bilan aniqlanadi. (2) formulaga ko'ra

$$A=I_0^2R\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t dt=I_0^2R\int_0^{2\pi/\omega}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt=\frac{I_0^2R\pi}{\omega}.$$

O‘zgaruvchan tokning o‘rtacha quvvati esa $N_{o'rta} = \dfrac{A}{2\pi/\omega} = \dfrac{I_0^2 R}{2}$ ga teng bo‘ladi.

6.3. Statik momentlarni, inersiya momentlarini va og‘irlik markazi koordinatalarini hisoblash.

6.3.1. Umumiy ma’lumotlar. Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

12.15-ta’rif. m massali $A(x,y)$ moddiy nuqtaning Ox o‘qqa (Oy) nisbatan *statik momenti* deb son jihatdan nuqta massasini nuqtadan Ox o‘qiga bo‘lgan masofa ko‘paytmasiga teng bo‘lgan kattalikka aytiladi:

$$M_x = my \quad (M_y = mx).$$

12.16-ta’rif. m massali $A(x,y)$ moddiy nuqtaning Ox (Oy o‘q, O nuqta) ga nisbatan *inersiya momenti* deb shu nuqta massasini Ox (Oy, O nuqta) gacha bo‘lgan masofa kvadrati ko‘paytmasiga teng bo‘lgan kattalikka aytiladi:

$$I_x = my^2,\ I_y = mx^2,\ I_0 = m(x^2 + y^2)$$

Agar $m_1, m_2, \dots, m_n$ massali $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsa, u holda statik momentlar

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \qquad (1)$$

inersiya momentlari

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2,\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2,\ I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) m_k$$

formulalar bilan hisoblanadi.

12.17-ta’rif. Moddiy nuqtalar sistemasining *og‘irlik markazi* deb quyidagi xossaga ega bo‘lgan nuqtaga aytiladi: agar bu nuqtaga sistema massasi $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ qo‘yilsa, u holda uning ixtiyoriy o‘qqa nisbatan statik momenti sistemaning shu o‘qqa nisbatan statik momentiga teng bo‘ladi.

Og‘irlik markazi koordinatalarini $S(\bar{x}, \bar{y})$ deb belgilasak, u holda ta’rifga ko‘ra

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = M\bar{y},\quad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = M\bar{x}$$

hosil qilamiz. Shunday qilib, moddiy nuqtalar sistemasining og‘irlik markazi koordinatalari

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_k\right) / \sum_{k=1}^{n} m_k,\quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k y_k\right) / \sum_{k=1}^{n} m_k$$

formula bilan hisoblanadi.

6.3.2. Tekis yoyning og‘irlik markazi. To‘g‘rilanadigan AB yoy bo‘ylab $\rho = 1$ zichlik bilan biror modda joylashgan bo‘lib, bu yoyning parametrik tenglamalari

$$\begin{cases} x = x(l), \\ y = y(l),\ 0 \le l \le L \end{cases}$$

bo‘lsin (parametr sifatida l –yoy uzunligi olingan), bunda L - butun yoy uzunligi $x(l)$, $y(l)$ lar $[0;L]$ da uzluksiz funksiyalar.

$[0;L]$ ning biror bo‘linishini olamiz:

$0 = l_0 < l_1 < \dots < l_n = L.$

Natijada AB yoy $P_{k-1}P_k$ qismlarga bo‘linadi, bunda

$P_k = P_k(x_k, y_k)$, $x_k = x(l_k)$, $y_k = y(l_k)$

$P_{k-1}P_k$ yoyga joylashgan massa $\Delta m_k = 1\Delta l_k$. Shu massani P_k nuqtaga markazlashtiramiz. U holda sistema og‘irlik markazining koordinatalari taqriban

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} x(l_k)\Delta l_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta l_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x(l_k)\Delta l_k}{L},\qquad \bar{y} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} y(l_k)\Delta l_k}{L}$$

bo‘ladi. $x(l)$ va $y(l)$ funksiyalar uzluksiz bo‘lgani uchun yuqoridagi integral yig‘indilarning $\lambda(l) = \max_{1\le k\le n} \Delta l_k \to 0$ dagi limiti mavjud bo‘ladi va ta’rifga ko‘ra og‘irlik markazning kooradinatalari shu limitlarga teng deb qabul qilinadi:

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_0^L x(l)dl,\quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_0^L y(l)dl.$$

AB yoy tenglamasi $y = f(x)$, $a \le x \le b$ ko'rinishda berilgan bo'lsin. U holda

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

bo'ladi.

12.18-teorema (Guldinning birinchi teoremasi). AB tekis yoyni shu tekislikda yotgan yoy bilan kesishmaydigan biror o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan sirtning yuzi shu yoyning uzunligi bilan uning og'irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko'paytmasiga teng.

Isbot. ◊ AB yoy tenglamasi $y = f(x)$, $a \le x \le b$ ko'rinishda bo'lsa, u holda

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Bu tengliklarning ikkinchisini $2\pi L$ ga ko'paytirsak,

$$2\pi\bar{y}L = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

hosil bo'ladi. Ushbu tenglikning o'ng tomoni AB yoy Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning yuzi bo'lib, chap tomoni yoy uzunligi bilan uning og'irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko'paytmasidir. ◆

12.19-misol. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$ yarim aylananing og'irlik markazi koordinatalarini topish talab qilinsin.

Yechish.

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}, \quad \bar{y} = \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} R\,dx = \frac{2R}{\pi},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} x\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R}\frac{Rx}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 0,$$

chunki integral ostidagi funksiya toq. Demak, yarim aylananing og'irlik markazi $\left(0; \frac{2R}{\pi}\right)$ nuqtada joylashgan.

6.3.3. Tekis figuraning og'irlik markazi.

$y = f(x), y = \varphi(x), f(x) \le \varphi(x)$ uzluksiz egri chiziqlar va $x=a$, $x=b$, $a<b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan G tekis figura bo'ylab zichligi o'zgarmas $\rho = 1$ bo'lgan biror modda joylashgan bo'lsin. $[a;b]$ kesmani

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lib, G figuraga n ta to'g'ri to'rtburchak chizamiz. Bu to'rtburchakning balandligi $\varphi(x_k) - f(x_k)$ ga, asosi esa $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ga teng ($k = 1, 2, \ldots, n$). Bu holda har bir to'rtburchakka joylashgan modda massasi

$$m_k = \rho(\varphi(x_k) - f(x_k))\Delta x_k$$

bo'ladi (bunda $\rho = 1$ - jismning zichligi). To'rtburchak diagonalari kesishgan nuqtaning, ya'ni og'irlik markazining koordinatalari quyidagicha yoziladi:

$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}, \quad \bar{y}_k = \frac{\varphi(x_k)+f(x_k)}{2}.$$

U holda n ta to'rtburchakdan iborat bo'lgan figuraning og'irlik markazi koordinatalari quyidagicha yoziladi:

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\bar{x}_k\cdot m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \frac{\Delta x_k}{2}\right)(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k},$$

$$\bar{\eta} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\bar{y}_k\cdot m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)+f(x_k))(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k}.$$

Bulardan $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k \to 0$ da $\lim\limits_{\lambda\to 0}\bar{\xi} = \xi$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\bar{\eta} = \eta$ bo'lib, $M(\xi,\eta)$ nuqta G figuraning og'irlik markazi bo'ladi. Shuningdek,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k = \int_a^b(\varphi(x)-f(x))dx = S,$$

bunda S berilgan G figuraning yuzidir. Endi

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \frac{\Delta x_k}{2}\right)(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}x_k(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k -$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k) - f(x_k))\Delta x_k^2$$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} x_k(\varphi(x_k) - f(x_k))\Delta x_k = \int_a^b x(\varphi(x) - f(x))dx$$ bo'ladi va

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k) - f(x_k))\Delta x_k^2 = 0,$$ chunki $\lambda \to 0$ da

$$\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k) - f(x_k))\Delta x_k^2 \le \sum_{k=1}^{n}(|\varphi(x_k)| + |f(x_k)|)\Delta x_k^2 \le N\lambda\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = N\lambda(b-a) \to 0$$

(bunda $N = \sup(|\varphi(x_k)| + |f(x_k)|)$). Demak, $\lambda \to 0$ da

$$\xi = \frac{\int_a^b x(\varphi(x) - f(x))dx}{\int_a^b (\varphi(x) - f(x))dx}, \quad \eta = \frac{\int_a^b (\varphi^2(x) - f^2(x))dx}{2\int_a^b (\varphi(x) - f(x))dx}.$$

Agar G figura egri chiziqli trapetsiya bo'lsa $(y = \varphi(x),\ f(x) = 0)$, u holda

$$\xi = \frac{1}{S}\int_a^b xy dx, \qquad \eta = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx$$

bo'ladi. Bunda $S = \int_a^b \varphi(x)dx$ - egri chiziqli trapetsiyaning yuzi. Bu holda

$\eta = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx$ tenglikdan $2\eta S = \int_a^b \varphi^2(x)dx$ yoki $2\pi\eta S = \pi\int_a^b \varphi^2(x)dx$ bo'lib,

quyidagi teorema o'rinli bo'ladi:

12.20-teorema (Guldinning ikkinchi teoremasi). Tekis figurani o'zi bilan kesishmaydigan o'q atrofida aylantirish natijasida hosil bo'ladigan figuraning hajmi $(\pi\int_a^b \varphi^2(x)dx)$ shu figuraning yuzi S va uning og'irlik markazi chizgan aylananing uzunligi ko'paytmasiga teng.

Mashq va masalalar

12-65. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(y \ge 0)$ yarim ellipsning Ox o'qiga nisbatan statik momentini toping.

12-66. $x^2 + y^2 = r^2$ $(y \ge 0)$ yarim aylananing og'irlik markazi koordinatalarini toping.

12-67. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ astroida yoyining birinchi kvadrat bo'lagining og'irlik markazi koordinatalarini toping.

12-68. $y = ch\frac{x}{a}$ zanjir chiziqning absissalari $x_1 = -a$ va $x_2 = a$ bo'lgan nuqtalari orasidagi yoyi og'irlik markazi koordinatalarini toping.

12-69. $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$ sikloida $(t = 0$ dan $t = 2\pi)$ yoyining og'irlik markazi koordinatalarini toping.

12-70. $y = cosx$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ kosinusoida va absissa o'qi bilan chegarlangan figuraning og'irlik markazi koordinatalarini toping.

12-71. $x^2 + y^2 = r^2$ $(y \ge 0)$ yarim doiraning og'irlik markazi koordinatalarini toping.

12-72. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips bilan chegaralangan figuraning birinchi kvadratdagi bo'lagining og'irlik markazi koordinatalarini toping.

12-73. $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$ $(t = 0$ dan $t = 2\pi$ gacha) sikloida va absissa o'qi bilan chegaralangan figuraning og'irlik markazi koordinatalarini toping.

12-74. Tomoni a bo'lgan muntazam oltiburchak o'zining biror tomoni atrofida aylatirilgan. Guldin teoremasi yordamida: a) hosil bo'lgan jism hajmini toping; b) jism sirti yuzini toping.

12-75. $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$ sikloidaning birinchi arkasi va absissa bilan chegarlangan figura ordinata o'qi atrofida aylantirilgan. Hosil bo'lgan jism hajmini va sirt yuzini toping.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 1-кисм.-Т.: “Ўкитувчи”, 1994.-416 б.

2. Саълуллаев А. ва бошкалар. Математик анализ курси мисол ва масалалар тўплами. 1-кисм. Т.: “Ўзбекистон”,-1993.-317 б.

3. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И. Лекции по математическому анализу. М.: “Высшая школа”, 1999,-695 ст.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: «Издательство АСТ», 2003,-558 ст.

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I. М.: Интеграл-Пресс, 2002,-416 ст.

6. Toshmetov O‘., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -408 b.

7. Xudoyberganov G. va boshq. Matematik analizdan ma’ruzalar. I qism. 2010.-

8. Adams, Robert A. (Robert Alexander), Calculus: a complete course. Textbooks. Christopher Essex. - 7th ed. Copyright @ 2010, 2006, 2003 Pearson Education Canada, a division of Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.-1077 p.

9. Larson R., Edwards Bruce H. Calculus. Ninth Edition. Cengage Learning. 2010. 1334 p.

10. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.-435p.

11. Хайрер Э., Ваннер Г. Математический анализ в свете его истории. Пер. с англ. - М.: Научный мир, 2008. - 396 с.

Ilova. Matematik analizning rivojlanish tarixi haqida

XVII asrga kelib tabiiy fanlarning, shuningdek, sanoat, ishlab chiqarishning rivojlanishi harakatni, turli o‘zgaruvchi jarayonlarni va o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishlarni tadqiq etishga sabab bo‘ldi. Matematikaning metodlari tabiat fanlariga jadal kirib bordi. Jumladan 1609-19 - yillarda Kepler tomonidan sayyoralar harakati qonunining kashf etilishi va uning matematik formulalarda berilishi, 1632-38 - yillarda Galiley tomonidan jismning erkin tushish qonunining matematik ifodalanishi, 1686 - yilda Nyuton tomonidan butun olam tortilishi qonunining kashf etilishi va matematik ifodasining berilishi va boshqa ko‘plab faktlar tabiat qonunlarini matematika tilida bayon etishga olib keldi.

O‘zgaruvchi miqdorlar va ular orasidagi bog‘lanishlarning umumiy xossalarining aksi sifatida matematikada o‘zgaruvchi miqdor va funksiya tushunchalari vujudga keldi va bu matematika predmetining tubdan kengayishiga, natijada matematika rivojining yangi bosqichi - o‘zgaruvchi miqdorlar matematikasiga - olib keldi. Bu davrni analizning vujudga kelishi va rivojlanishi davri deb ta’riflash mumkin.

O‘zgaruvchi miqdorlar matematikasining vujudga kelishida birinchi va muhim qadam 1637 yilda Dekartning “Metod haqida mulohazalar” asarining nashr etilishi bo‘ldi. Dekart o‘z asarida Viyet tomonidan taklif etilgan matematik simvolikani mukkammallashtirgan holda quyidagi ikki g‘oyani ilgari suradi: tenglamalardagi noma’lumlarni o‘zgaruvchilar deb qarash; tekislikda koordinatalarni kiritish. Bu g‘oyalarning geometriya va algebra bilan uyg‘unlashuvi natijasida sof geometrik masalalarni algebra metodlari bilan tatdqiq etish imkoniyati yaratildi, matematikaning yangi bir tarmog‘i – analitik geometriya vujudga keldi.

XVII asrning so‘ngiga kelib matematikada muhim masalalar sinflarining (masalan nostandart figuralarning yuzlari va hajmlarini hisoblash, egri chiziqlarga urinma o‘tkazish masalalari) hal etish bo‘yicha bilimlar to‘plangan edi, shuningdek turli xususiy hollar uchun yechish metodlari vujudga keldi. Bu masalalar notekis mexanik harakatlarni tavsiflash, xususan uning oniy xarakteristikalarini (vaqtning ixtiyoriy momentdagi tezlik, tezlanish), shunindek, o‘zgaruvchan tezlik bilan sodir bo‘ladigan harakatda bosib o‘tilgan yo‘lni topish masalalari bilan jips bog‘liqligi ma’lum bo‘lib qoldi. Bu turli tabiatli (geometrik va fizik) masalalarni bo‘g‘lanishni aniqlashda umumiy til - sonlar va ular orasidagi bog‘lanishlar (sonli funksiyalar) - shakllantirishga imkon berdi.

Bu vaziyatlarning (holatlar) barchasi ikki olim Isaak Nyuton va Gotfrid Leybnitsga bir biriga bog‘liq bo‘lmagan holda ko‘rsatilgan masalalarni yechish uchun matematik apparat yaratishga olib keldi. Bu olimlar o‘z asarlarida o‘zidan oldingi olimlarning, Arximeddan boshlab Bonaventura Kavaleri, Blez Paskal, Djeyms Gregori, Isaak Barrou kabi zamondoshlarining ba’zi natijalarini jamladi va umumlashtirdi. Shu apparat matematik analizning - turli xil dinamik jarayonlarni, ya’ni o‘zgaruvchilarning bog‘lanisharini, matematiklar funksional bog‘lanishlar yoki funksiya deb nomlaydigan, o‘zgaruvchi matematikaning yangi bo‘limi asosini tashkil etdi.

Funksiya tushunchasini XVIII asrda L.Eyler kiritdi. XVIII davomida differensial va integral hisob bilan bir qatorda analizning boshqa bo'limlari ham vujudga keldi: qatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar nazariyasi, analizni geometriyaga tatbiqi, keyinchalik differensial geometriya. Bu nazariyalarning barchasi mexanika, fizika, texnikaning rivoji bilan bog'liq edi. Analizning yirik natijalari mexanika, umuman fizika fanida qo'yilgan masalalarni yechish bilan bog'liq. Nyutondan boshlab D.Bernulli (1700-1782), L.Eyler (1707-1783), J.Lagranj (1736-1813) A.Puankare (1854-1912), M.V.Ostrogradskiy (1801-1861), A.Lyapunov (1867-1918) va boshqa matematiklar ham o'z asarlarida analizda yangi yo'llarni yaratishda shu davrdagi tabiatshunoslikning muhim, dolzarb masalalaridan kelib chiqqan.

Shunday yo'sinda Eyler va Lagranj analizning mexanika bilan bevosita bog'liq bo'lgan bo'limi-variatsion hisobni yaratadi, XIX-asrning so'ngida Puankare va Lyapunov yana mexanika masalalaridan kelib chiqqan holda differensial tenglamalarning sifat nazariyasini yaratadi.

XIX-asrda analiz yangi bir tarmoq – kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi – bilan boyidi. Bu nazariyaning kurtaklari L.Eyler va bir qator matematiklarning ishlarida vujudga keldi. XIX-asrning o'rtalarida fransuz matematigi O.Koshi (1789-1857) mehnatlari tufayli qathiy nazariya kabi shakllantirildi.

Analiz matematikaning markazi va uning bosh qismi sifatida tez rivojlanish bilan bir qatorda u matematikaning eski sohalariga-algebra, geometriya, hatto sonlar nazariyasiga ham kirib bordi.

Analizning rivojlanishi jarayonida terang va qiyin masalalarga qarab bordi va hajmi ham ortib bordi. Nazariya hajmning ortib borishi uni yana ham yaxshiroq asoslashni, tizimlashtirishni va asosini tanqidiy tahlil qilish zarurati hosil bo'ldi.

Bernard Bolsano 1816 yilda uzluksizlikning zamonaviy ta'rifini shakllantirgandan so'ng haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari analizi matematikaning alohida bo'limi alomatlariga ega bo'la boshladi. Ammo Bolsano asarlari shu davrda keng ma'lum emasdi.

1821- yildan boshlab Ogyusten Koshi cheksiz kichiklar tushunchasi orqali matematik analizning qat'iy mantiqiy asosini shakllantirib boshladi. Koshiga fundamental ketma-ketlik tushunchasi va kompleks o'zgaruvchining funksiyasi asoslari taalluqli. Shu va Karl Veyershtrassga o'xshash boshqa matematiklarning xissalari evaziga limit, uzluksizlik kabi tushunchalarni ta'riflash, asosiy teoremalarni isbotlash uchun yepsilon-delta tili rivojlantirildi.

XIX asrda Berngard Riman integrallash nazariyasini rivojlantirdi. Shu davrda matematiklar haqiqiy sonlar uzluksizligini taxmin qilinar edilar. Bu o'z navbatida haqiqiy sonlar nazariyasini yaratishga sabab bo'ldi. Rixard Dedekind ratsional sonlar to'plamida kesim tushunchasi orqali irratsional songa ta'rif berdi, shu asosda u ratsional sonlardagi «teshiklarni» to'ldirdi, haqiqiy sonlar kontinuumini asoslandi. Deyarli shu davrda Riman ma'nosida integrallash nazariyasini aniqlashtirishga bo'lgan urinishlar haqiqiy funksiyalarning uzilishlarini tadqiq etishga olib keldi. Natijada matematik mahluqlar vujudga kela boshladi: hech yerda uzluksiz bo'lmagan Dirixle funksiyasi; uzluksiz, lekin hech yerda hosilaga ega bo'lmagan

Veyershtrass funksiyasi; tekislikni butunlay to'ldiruvchi Peano chiziqlari. Bunday funksiyalar bilan bog'liq muammolarni yechish jarayonida Kamil Jordan o'zining o'lchovlar nazariyasini, Georg Kantor esa to'plamlarning intuitiv nazariyasini yaratdi. XX asrning boshlariga kelib matematik analiz to'plamlar nazariyasi bilan formallashtirildi. Anri Lebeg o'lchov muammosini hal etdi, David Gilbert esa Gilbert fazolarini kiritdi. Normalangan vektor fazo g'oyasi paydo bo'ldi va 1920 yillarda Stefan Banax funksional analizga asos soldi.

Agar klassik analiz o'zgaruvchi sifatida sonni, ya'ni haqiqiy sonlar (kompleks sonlar) to'plami elementini hisoblasa, funksional analizda esa funksiyaning o'zi o'zgaruvchi sifatida qaraladi. Hozirgi zamon ta'rifida funksional analiz elementlari orasida yaqinlik tushunchasini (topologik fazolar) yoki masofa tushunchasini (metrik fazolar) kiritish mumkin bo'lgan ixtiyoriy matematik ob'ektlar fazosiga analiz nazariyasini tatbiq etishdan iborat.

Matematik analiz fani bugungi kunda ham rivojlanib borayotgan matematika bo'limlaridan hisoblanadi. Uning tarmoqlari bugungi kunda alohida fan sifatida shakllandi. Ularga quyidagilarni kiritish mumkin: haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi, kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi, topologiya, differensial geometriya va differensial tenglamalar, funksional analiz, boshq.

Respublikamizda zamonaviy matematikaning rivoji V.I.Romanovskiy, T.N.Qori- Niyoziy, S.H.Sirojiddinov, T.Sarimsoqov kabi olimlar bilan bog'liq.

O'zbekistonda matematik analizning barcha bo'limlari bo'yicha ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Masalan, akademik Sh.A.Ayupov boshchiligida funksional analizning zamonaviy muammolari (operatorlar algebrasi, topologik fazolar), akademik A.Sa'dullayev boshchiligida kompleks analizning, akademik M.Saloxiddinov rahbarligida xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining dolzarb muammolari tadqiq etilmoqda. Ular tomonidan olingan natijalar xorijiy xamkasblarida katta qiziqish uyg'otmoqda va nufuzli xorijiy jurnallarda chop etilmoqda.

MUNDARIJA

Turgunbayev Riskeldi Musamatovich

MATEMATIK ANALIZ

I qism

5110100-matematika o'qitish metodikasi
DARSLIK

TOSHKENT - "INNOVATSIYA -ZIYO" - 2021

Muharrir Xolsaidov F.B.

Nashriyot litsenziyasi AI № 023. 27.10.2018.
25.07.2021.da chop etishga ruxsat berildi.
Bichimi 60x84 1/16. "Times New Roman" garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tobog'i 22. Nashr bosma tobog'i 21,25.
Adadi 100 nusxa

ISBN 978-9943-5866-7-3

9 789943 586673

TURGUNBAYEV RISKELDI MUSAMATOVICH

MATEMATIK ANALIZ

I QISM